Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2023
Professor: Dr. José Ricardo G. Mendonça

1ª Prova — Data: 13 nov. 2023

Na resolução dos problemas, explique seu raciocínio e o que você está fazendo de forma que eu possa acompanhá-lo(a). Soluções "mágicas" ou "geniais" não serão aceitas sem explicações.

Problemas

1. [2 pontos] Usando a técnica de redução ao absurdo determine se cada uma das seguintes proposições é uma tautologia ou não usando somente as regras do cálculo proposicional:

   (a) $(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \to (\neg p \to q)$;

   (b) $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$.

2. [2 pontos] Demonstre as seguintes afirmações:

   (a) Se A, B e C são três conjuntos tais que $A \setminus B \subseteq C$, então $A \setminus C \subseteq B$;

   (b) Se $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$ e $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ são dois conjuntos de conjuntos com $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} \neq \varnothing$, então $\cap_i A_i \subseteq \cup_i B_i$.

3. [2 pontos] Sejam A, B, C e D conjuntos finitos quaisquer. Encontre $|A \cup B \cup C \cup D|$.

4. [2 pontos] Demonstre as seguintes afirmações:

   (a) Em qualquer conjunto de 8 números inteiros há sempre dois deles cuja diferença é um múltiplo de 7;

   (b) Em toda reunião de n pessoas há sempre duas pessoas com o mesmo número de conhecidos.

5. [2 pontos] Prove que $\forall r \in (-1, \infty)$, $(1+r)^n \geqslant 1 + nr$. Porque podemos dizer que essa desigualdade é trivial para $r > 0$?

Boa prova!