O Polinômio de Taylor

Maria Cristina Cunha

O Teorema do Valor Médio nos diz que se a função f tem derivadas em todos os pontos do intervalo (a, x) e f é contínua em $[a, x]$ então

$$f(x) = f(a) + f'(\alpha)(x - a), \tag{1}$$

onde α é um ponto do intervalo (a, x). Podemos interpretar (1) da seguinte forma: $f(a)$ é uma aproximação para $f(x)$ e o erro desta aproximação é $f'(\alpha)(x-a)$. Para melhorar a aproximação podemos pensar em algo do tipo

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \frac{B}{2}(x - a)^2,$$

escolhendo A e B convenientemente. Derivando, obtemos

$$f'(x) = A + B(x - a),$$

e fazendo $x = a$ obtemos

$$A = f'(a).$$

Isto é,

$$f'(x) = f'(a) + B(x - a),$$

o que, pelo Teorema do Valor Médio implica que $B = f''(\alpha_1)$, para algum α_1 em (a, x). Estamos supondo que a função f tem derivadas de todas as ordens em (a, x) e $f^{(n)}$ é contínua em $[a, x]$. Assim podemos escrever

$$f(x) = f(a) + f'(\alpha)(x - a) + \frac{f''(\alpha_1)}{2}(x - a)^2, \tag{2}$$

onde $p_1(x) = f(a) + f'(\alpha)(x - a)$ é uma aproximação de $f(x)$ por um polinômio de grau 1 e o erro desta aproximação é $(f''(\alpha_1)/2)(x - a)^2$.

Por exemplo, se considerarmos $f(x) = e^x$, e $a = 0$, lembrando que neste caso $f'(x) = f''(x) = e^x$, temos

$$e^x = e^0 + e^0(x-0) + e^{\alpha_1}\frac{(x-0)^2}{2} = 1 + x + e^{\alpha_1}\frac{x^2}{2},$$

ou seja,

$$e^x \approx 1 + x, \text{ com um erro } e^{\alpha_1}\frac{x^2}{2}.$$

Podemos tentar melhorar a aproximação , usando agora um polinômio de grau 2,

$$f(x) = p_2(x) + erro, \tag{3}$$

com

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + A(x-a)^2 \text{ e } erro = B(x-a)^3.$$

Derivando (3) vem

$$f'(x) = f'(a) + 2A(x-a) + 3B(x-a)^2,$$

e

$$f''(x) = 2A + 6B(x-a).$$

fazendo $x = a$, segue-se

$$A = \frac{f''(a)}{2} \text{ e } f''(x) = f''(a) + 6B(x-a).$$

Usando novamente o Teorema do Valor Médio na expressão para $f''(x)$ segue-se que

$$6B = \frac{f''(x) - f''(a)}{x-a} = f'''(\alpha_2).$$

Substituindo os valores de A e de B assim obtidos em (3) temos que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(\alpha_2)}{3!}(x-a)^3,$$

onde agora

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

é uma aproximação por um polinômio de segundo grau e o erro é dado pelo termo remanescente. Voltando ao exemplo de $f(x) = e^x$ e $a = 0$ temos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^{\alpha_2}}{3!},$$

isto é,

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ com erro } \frac{e^{\alpha_2}}{3!}x^3, \text{ e } \alpha_2 \in [0, x].$$

Continuando o mesmo tipo de raciocínio, e aumentando o grau do polinômio, podemos mostrar que, para qualquer n,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

com um β entre a e x. Assim, $f(x)$ pode ser aproximada por um polinômio de grau n, chamado *polinômio de Taylor*, dado por

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad (4)$$

e o erro desta aproximação é dado por

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

No nosso exemplo com $f(x) = e^x$ e $a = 0$ teremos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^{\beta}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5)$$

Infelizmente, nao podemos encontrar β, mas podemos encontrar um limitante para o erro:

$$|R_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\max_{[a,x]}|f^{(n+1)}(t)|. \quad (6)$$

Por exemplo, se queremos calcular uma aproximação para o número e usando um polinômio de grau 6, fazemos $x = 1$ em (5), obtendo:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2,7180556$$

Nesse exemplo podemos usar uma calculadora (que provavelmente calcula utilizando um polinômio com grau maior) obtendo:

$$e = 2,71828182\ldots,$$

e portanto a aproximação que obtivemos tem um erro de aproximadamente 2×10^{-4}. Usando o limitante (6) teriamos

$$|R_6| \leq \frac{e}{7!} \leq 5,394 \times 10^{-4},$$

compatível com o erro encontrado anteriormente.

Exercícios:

1. Encontre o polinômio de Taylor de grau 5 para a função $f(x) = \sin x$ usando $a = 0$.

2. Ache um limitante para o erro na aproximação de $\sin(\pi/6)$ usando o polinômio do exercício anterior.

3. Mostre que

   $$\ln(1+x) \approx p_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

   Pode-se estimar o erro nesta aproximação ?

4. Mostre que

   $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + (\cos\alpha)\frac{x^{10}}{10!},$$

   com α entre 0 e x.