Complexidade Assintótica

ACH2002 - Introdução à Ciência da Computação II

Delano M. Beder

Escola de Artes, Ciências e Humanidades (EACH)
Universidade de São Paulo
dbeder@usp.br

08/2008

Material baseado em slides dos professores Marcos Chaim, Cid de Souza e Cândida da Silva

Crescimento Assintótico de Funções

- Custo da solução aumenta com o tamanho n do problema
  - O tamanho n fornece uma medida da dificuldade para resolver o problema
    - Tempo necessário para resolver o problema aumenta quando n cresce
  - Exemplo: número de comparações para achar o maior elemento de um vetor(array) ou para ordená-lo aumenta com o tamanho da entrada n.
- Escolha do algoritmo não é um problema crítico quando n é pequeno.
  - O problema é quando n cresce.
- Por isso, é usual analisar o comportamento das funções de custo quando n é bastante grande.

Comportamento Assintótico

- Vamos comparar funções assintoticamente, ou seja, para valores grandes, desprezando constantes multiplicativas e termos de menor ordem.

	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10^4$	$n = 10^6$	$n = 10^9$
$\log n$	2	3	4	6	9
n	100	1000	10^4	10^6	10^9
$n \log n$	200	3000	$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^9$
n^2	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}
$100n^2 + 15n$	$1,0015 \cdot 10^6$	$1,00015 \cdot 10^8$	$\approx 10^{10}$	$\approx 10^{14}$	$\approx 10^{20}$
2^n	$\approx 1,26 \cdot 10^{30}$	$\approx 1,07 \cdot 10^{301}$	?	?	?

Comportamente Assintótico

1 milhão (10^6) de operações por segundo

Função de custo	10	20	30	40	50	60
n	0,00001s	0,00002 s	0,00003s	0,00004s	0,00005s	0,00006s
n^2	0,0001s	0,0004s	0,0009s	0,0016s	0,0025s	0,0036s
n^3	0,001s	0,008s	0,027s	0,064s	0,125s	0,216s
n^5	0,1s	3,2s	24,3s	1,7min	5,2min	12,96min
2^n	0,001s	1,04s	17,9min	12,7dias	35,7 anos	366 séc.
3^n	0,059s	58min	6,5anos	3855séc.	10^8séc.	10^{13}séc.

Comportamente Assintótico

Influência do aumento de velocidade dos computadores no tamanho t do problema

Função de custo	Computador Atual (C)	Computador 100C	Computador 1000C
n	t	$100t$	$1000t$
n^2	t	$10t$	$31.6t$
n^3	t	$4,6t$	$10t$
2^n	t	$t + 6,6$	$t + 10$

(Tabela 1.4 Página 18) Nívio Ziviani. *Projeto de Algoritmos com implementações em C e Pascal.* Editora Thomson, 2a. Edição, 2004.

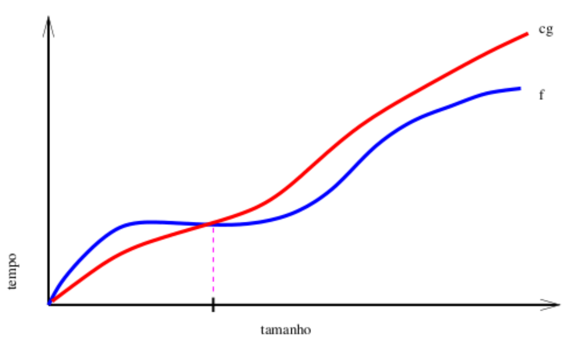
Comportamento Assintótico

- Se $f(n)$ é a função de complexidade de um algoritmo A
  - O *comportamento assintótico* de $f(n)$ representa o *limite* do comportamento do custo (complexidade) de A quando n cresce.
- A análise de um algoritmo (função de complexidade)
  - Geralmente considera apenas algumas operações elementares ou mesmo uma operação elementar (e.g., o número de comparações).
- A complexidade assintótica relata crescimento assintótico das operações elementares.

Relacionamento assintótico

Definição

Uma função $g(n)$ domina assintoticamente outra função $f(n)$ se existem duas constantes positivas c e m tais que, para $n \geq m$, tem-se $|f(n)| \leq c|g(n)|$.



Relacionamento assintótico

Exemplo:

$g(n) = n$ e $f(n) = n^2$
$|n| \leq |n^2|$ para todo $n \in N$.
Para $c = 1$ e $m = 0 \Rightarrow |g(n)| \leq |f(n)|$.
Portanto, $f(n)$ domina assintoticamente $g(n)$.

Notação O

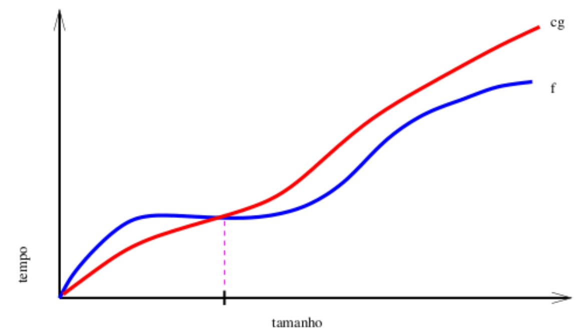
- Knuth criou a notação O (O grande) para expressar que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$, escreve-se $f(n) = O(g(n))$ e lê-se: "$f(n)$ é da ordem no máximo $g(n)$".
- Para que serve isto para o bacharel em Sistemas de Informação?
  - Muitas vezes calcular a função de complexidade $g(n)$ de um algoritmo A é complicado.
  - É mais fácil determinar que $f(n)$ é $O(g(n))$, isto é, que assintoticamente $f(n)$ cresce no máximo como $g(n)$.

Notação O

Definição

$O(g(n))$ = { $f(n)$: existem constantes positivas c e n_0 tais que
$0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$ }.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.



Notação O

Definição

$O(g(n))$ = { $f(n)$: existem constantes positivas c e n_0 tais que
$0 \leq f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$ }.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in O(g(n))$, então $f(n)$ cresce no máximo tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{3}{2}n^2 - 2n \in O(n^2)$

Valores de c e n_0 que satisfazem a definição são

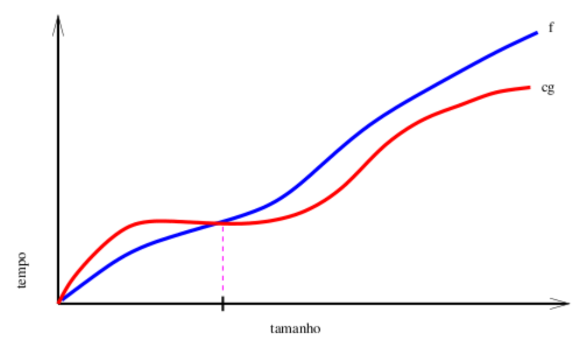
$$c = \frac{3}{2} \text{ e } n_0 = 2$$

Notação Ω

Definição

$\Omega(g(n))$ = { $f(n)$: existem constantes positivas c e n_0 tais que
$0 \leq cg(n) \leq f(n)$, para todo $n \geq n_0$ }.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$.



Notação Ω

Definição

$\Omega(g(n))$ = { $f(n)$: existem constantes positivas c e n_0 tais que
$0 \leq cg(n) \leq f(n)$, para todo $n \geq n_0$ }.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce no mínimo tão lentamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{3}{2}n^2 - 2n \in \Omega(n^2)$

Valores de c e n_0 que satisfazem a definição são

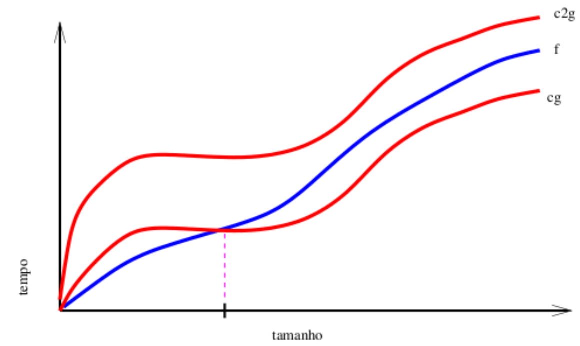
$$c = \frac{1}{2} \text{ e } n_0 = 2$$

Notação Θ

Definição

$\Theta(g(n))$ = { $f(n)$: existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que
$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0$ }.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$.



Notação Θ

Definição

$\Theta(g(n))$ = { $f(n)$: existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que
$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$, para todo $n \geq n_0$ }.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \Theta(g(n))$, então $f(n)$ cresce tão rapidamente quanto $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{3}{2}n^2 - 2n \in \Theta(n^2)$

Valores de c_1, c_2 e n_0 que satisfazem a definição são

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{3}{2} \text{ e } n_0 = 2$$

Notação o

Definição

$o(g(n))$ = { $f(n)$: para toda constante positiva c, existe uma constante
$n_0 > 0$ tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$, para todo $n \geq n_0$ }.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in o(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais lentamente que $g(n)$.

Exemplo:

$1000n^2 \in o(n^3)$

Para todo valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é:

$$n_o = \lceil \frac{1000}{c} \rceil + 1$$

Notação ω

Definição

$\omega(g(n))$ = { $f(n)$: para toda constante positiva c, existe uma constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$, para todo $n \geq n_0$ }.

Informalmente, dizemos que, se $f(n) \in \omega(g(n))$, então $f(n)$ cresce mais rapidamente que $g(n)$.

Exemplo:

$\frac{1}{1000}n^2 \in \omega(n)$

Para todo valor de c, um n_0 que satisfaz a definição é:

$$n_o = \lceil 1000c \rceil + 1$$

Definições equivalentes

$$f(n) \in o(g(n)) \quad \textit{se} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f(n) \in O(g(n)) \quad \textit{se} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \quad \textit{se} \quad 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \quad \textit{se} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$$

$$f(n) \in \omega(g(n)) \quad \textit{se} \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Propriedades das Classes

Reflexividade:

$f(n) \in O(f(n))$.
$f(n) \in \Omega(f(n))$.
$f(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria:

$f(n) \in \Theta(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Simetria Transposta:

$f(n) \in O(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \Omega(f(n))$.
$f(n) \in o(g(n))$ se, e somente se, $g(n) \in \omega(f(n))$.

Propriedades das Classes

Transitividade:

Se $f(n) \in O(g(n))$ e $g(n) \in O(h(n))$, então $f(n) \in O(h(n))$.
Se $f(n) \in \Omega(g(n))$ e $g(n) \in \Omega(h(n))$, então $f(n) \in \Omega(h(n))$.
Se $f(n) \in \Theta(g(n))$ e $g(n) \in \Theta(h(n))$, então $f(n) \in \Theta(h(n))$.
Se $f(n) \in o(g(n))$ e $g(n) \in o(h(n))$, então $f(n) \in o(h(n))$.
Se $f(n) \in \omega(g(n))$ e $g(n) \in \omega(h(n))$, então $f(n) \in \omega(h(n))$.

Operações com a notação O

$$
\begin{array}{rcl}
f(n) & = & O(f(n)) \\
c \times f(n) & = & O(f(n)), c \text{ é uma constante} \\
O(f(n)) + O(f(n)) & = & O(f(n)) \\
O(O(f(n))) & = & O(f(n)) \\
O(f(n)) + O(g(n)) & = & O(max(f(n), g(n))) \\
O(f(n))O(g(n)) & = & O(f(n)g(n))) \\
f(n)O(g(n)) & = & O(f(n)g(n)))
\end{array}
$$

Exercícios

Quais as relações de comparação assintótica (O, Ω, Θ) das funções:

$f_1(n) = 2^\pi$
$f_2(n) = 2^n$
$f_3(n) = n \log n$
$f_4(n) = \log n$
$f_5(n) = 100n^2 + 150000n$
$f_6(n) = n + \log n$
$f_7(n) = n^2$
$f_8(n) = n$

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_1	Θ							
f_2		Θ						
f_3			Θ					
f_4				Θ				
f_5					Θ			
f_6						Θ		
f_7							Θ	
f_8								Θ

Referências

[1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest & Clifford Stein. *Algoritmos - Tradução da 2a. Edição Americana*. Editora Campus, 2002 (Capítulo 3).

[2] Michael T. Goodrich & Roberto Tamassia. *Estruturas de Dados e Algoritmos em Java*. Editora Bookman, 4a. Ed. 2007 (Capítulo 4).

[3] Nívio Ziviani. *Projeto de Algoritmos com implementações em C e Pascal*. Editora Thomson, 2a. Edição, 2004 (Seção 1.3).