ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (1/2012)

Segunda Prova – Junho/2012

Nome: ______________________________ Nº USP: ____________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Observação 1: Duração da prova: **100** (**cem**) minutos.
Observação 2: O uso de calculadora/computador na prova é proibido.

1) [3,0 pontos] Determinar a fórmula geral de x_n se $x_{n+1} = 2x_n + 3x_{n-1}$ ($n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$), com $x_0 = x_1 = 1$.

---

1) Representa-se, inicialmente, a relação de recorrência em sua forma matricial

$$u_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = M u_{n-1}\,, \quad n \in \{2, 3, \cdots\} \subset \mathbb{N}\,, \quad \text{com} \quad u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Como $u_n = M u_{n-1} = M^2 u_{n-2} = \cdots = M^{n-1} u_1$, deve-se obter M^{n-1}, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1)\ ,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}^T$ associado a $\lambda_1 = 3$ satisfaz

$$0 = (M - \lambda_1 I)\, v_1 = \begin{pmatrix} 2-(3) & 3 \\ 1 & 0-(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 3y_1\,,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $y_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}^T$ associado a $\lambda_2 = -1$ satisfaz

$$0 = (M - \lambda_2 I)\, v_2 = \begin{pmatrix} 2-(-1) & 3 \\ 1 & 0-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = -x_2\,,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ com a escolha $x_2 = 1$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e sua inversa } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} ,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & -3/4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/4 & -3/4 \end{array}\right) .$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1}MS$, tem-se $M = S\Lambda S^{-1}$, donde

$$M^{n-1} = \left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right)\cdots\left(S\Lambda S^{-1}\right) = S\Lambda^{n-1}S^{-1}\,,$$

que leva a

$$\begin{aligned} u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} &= S\Lambda^{n-1}S^{-1}u_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3^n+(-1)^n}{2} \\ \frac{3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Logo,

$$x_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2} , \qquad n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{Z}_+ .$$

---

2) [3,5 pontos] Determinar os pontos de máximo e mínimo globais da função f, que tem como domínio o conjunto $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \;\text{ e }\; -\frac{\pi}{2} \le y \le 0\right\}$ com $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$.

---

2) O problema consiste na busca dos extremos globais da função f definida em $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \text{ e } -\frac{\pi}{2} \le y \le 0\right\}$ com $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$. O conjunto de pontos críticos desta função é determinado segundo $\vec{\nabla} f(x, y) = \vec{0}$, *id est*, a solução do sistema

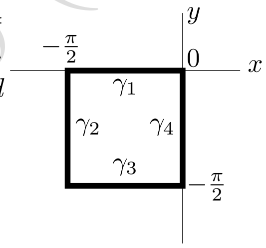

Figura 1: Domínio do problema.

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \cos x + \cos(x + y) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \cos y + \cos(x + y) \end{aligned} \right.$$

define os pontos críticos. O sistema acima leva a imediatamente a $x = y$ em Ω, que implica $\overbrace{\cos(2x)}^{2\cos^2 x - 1} + \cos x = 0$, donde se tem $\cos x = \frac{1}{2}$ (a outra solução da equação do segundo grau em $\cos x$ não pertence a Ω) ou $x = -\frac{\pi}{3}$. Logo, a solução (única) <u>em Ω</u> é $(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$. Como $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}) = C = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$, $B = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $AC - B^2 = \frac{9}{4} > 0$ com $A > 0$, o ponto crítico $(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ úm ponto de mínimo local, sendo $f(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$. A fim de averiguar se se trata de um mínimo global, verificar-se-á o comportamento de f nas fronteiras:

$$\begin{aligned} &\text{Fronteira } \gamma_1 &:& \quad y = 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{\pi}{2} \le x \le 0 &\Rightarrow&\quad f(x, 0) = 2\sin x \\ &\text{Fronteira } \gamma_2 &:& \quad x = -\tfrac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad -\tfrac{\pi}{2} \le y \le 0 &\Rightarrow&\quad f(-\tfrac{\pi}{2}, y) = -1 + \sin y - \cos y \\ &\text{Fronteira } \gamma_3 &:& \quad y = -\tfrac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad -\tfrac{\pi}{2} \le x \le 0 &\Rightarrow&\quad f(x, -\tfrac{\pi}{2}) = -1 + \sin x - \cos x \\ &\text{Fronteira } \gamma_4 &:& \quad x = 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{\pi}{2} \le y \le 0 &\Rightarrow&\quad f(0, y) = 2\sin y \end{aligned}$$

Nota-se que deve ser analisado somente dois tipos de funções, $\psi_1 : [-\frac{\pi}{2}, 0] \to \mathbb{R}$ e $\psi_2 : [-\frac{\pi}{2}, 0] \to \mathbb{R}$, tais que $\psi_1(\xi) = 2\sin\xi$ e $\psi_2(\xi) = -1 + \sin\xi - \cos\xi$.

(i) Função ψ_1
- Função crescente em $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, com $-2 = \psi_1(-\frac{\pi}{2}) \le \psi_1(\xi) \le \psi_1(0) = 0$.

(ii) Função ψ_2
- Ponto crítico: de $0 = \frac{d}{d\xi}\psi_2(\xi) = \cos\xi + \sin\xi$, $\xi = -\frac{\pi}{4}$ é (o único) ponto crítico, sendo um ponto de mínimo local (com $\psi_2(-\frac{\pi}{4}) = -1 - \sqrt{2}$), visto que $\frac{d^2}{d\xi^2}\psi_2(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} > 0$.
- Extremidades: $\psi_2(-\frac{\pi}{2}) = -2$ e $\psi_2(0) = -2$.

De posse destas informações, a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem máximo global em $(0, 0)$, com $f(0, 0) = 0$, e mínimo global em $(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$, com $f(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

3) Determinar as seguintes integrais: a) [1,5 pontos] $\int \tan x\, dx$ b) [2,0 pontos] $\int \frac{dx}{2^x+1}$

3a)

$$\int \tan x\, dx = \underbrace{\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx}_{\substack{u=\cos x \\ -du=\sin x\, dx}} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

3b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2^x+1} &= \underbrace{\int \frac{dx}{e^{x\ln 2}+1}}_{\substack{u=e^{x\ln 2}+1 \\ du=e^{x\ln 2}\ln 2\, dx=(u-1)\ln 2\, dx}} = \int \frac{du}{u\,(u-1)\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du \\
&= \frac{1}{\ln 2}\big[\ln|u-1| - \ln|u|\,\big] + C = \frac{1}{\ln 2}\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + C = \frac{1}{\ln 2}\ln\left|\frac{e^{x\ln 2}}{e^{x\ln 2}+1}\right| + C \\
&= \frac{1}{\ln 2}\Big[x\ln 2 - \ln\left(2^x+1\right)\Big] + C = -\frac{1}{\ln 2}\ln\left(1+2^{-x}\right) + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$