

CAPÍTULO 1 - Introdução

Permuta: permuta de n elementos

$$n!$$

Combinação: combinação de n elementos tomados r a r

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

CAPÍTULO 2 - Definições

Definições:

Espaço amostral: $S = \{1, 2, \dots\}$

Probabilidade do evento E: $P(E)$

Complemento de E: E^c

Axiomas:

Probabilidade do evento E: $P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n(E)/n) = k$

$$0 < P(E) < 1$$

$$P(S) = 1$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Proposições:

$P(E) = |E|/|S|$ para S finito e eventos com a mesma probabilidade

$$P(E \cup E^c) = 1$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

CAPÍTULO 3 – Probabilidade Discreta

Probabilidade Condicional:

$P(A|B)$ probabilidade de A tal que B tenha ocorrido

Probabilidade Independente:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$P(AB) = P(A) * P(B)$$

Probabilidade Dependente:

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = P(AB) / P(B) = P(B|A)P(A) / P(B)$$

CAPÍTULO 4 – Distribuições Discretas

Variáveis Randômicas:

Definição: $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ X é um vetor de resultados possíveis x_1, x_2, \dots para um evento

$$P(x_n) = P\{X = x_n\}$$

Esperança:

$$E(X) = X \cdot P(X) = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot p(x_i)) \quad \text{ou} \quad E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Notações: $E(X) = \mu(x) = \mu_x = \mu$

Propriedades:

- a) $E(X) = k$; k : constante
- b) $E(kX) = kE(X)$; k : constante
- c) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- d) $E(aX + b) = aE(X) + b$; a, b : constante
- e) $E(X - \mu_x) = 0$

Esperança de uma função:

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^n (g(x_i) \cdot p(x_i)) \quad \text{ou} \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

Variância:

$$VAR(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 p(x_i) \quad \text{ou} \quad VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot f(x) dx$$

Simplificação: $VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ (lei do estatístico inconsciente)

Notações: $VAR(X) = V(X) = \sigma^2(x) = \sigma_x^2 = \sigma^2$

Propriedades:

- a) $VAR(k) = 0$; k : constante
- b) $VAR(kX) = k^2 VAR(X)$; k : constante
- c) $VAR(X \pm Y) = VAR(X) + VAR(Y) \pm 2COV(X, Y)$
- d) $VAR(X \pm Y) = E((X \pm Y)^2) - (E(X \pm Y))^2$

Desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{VAR(X)}$$

Função Distribuição:

$$F(n) = P(Y \leq n) = \sum_{i=1}^n (P(Y = n)) = \sum_{i=1}^n (P(n))$$

Propriedades:

- a) $0 \leq F(n) \leq 1$
- b) $F(-\infty) = 0$
- c) $F(+\infty) = 1$

Distribuição de Bernoulli:

Fazendo n tentativas em um experimento dicotômico (sucesso ou fracasso) onde p é a probabilidade de sucesso.

$$P(X = n) = p^n (1 - p)^{(1-n)}$$

$$E(X) = p$$

$$VAR(X) = p(1 - p)$$

Distribuição de Geométrica:

Fazendo n tentativas até um primeiro sucesso em um experimento dicotômico (sucesso ou fracasso) onde p é a probabilidade de sucesso. Este é um caso particular do Bernoulli.

$$P(X = n) = p(1 - p)^{(x-1)}$$

$$E(X) = 1/p$$

$$VAR(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Distribuição de Pascal:

Fazendo n tentativas até que ocorra r sucessos em um experimento dicotômico (sucesso ou fracasso) onde p é a probabilidade de sucesso. Este é um caso geral para a distribuição geométrica.

$$q = 1 - p$$

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{(n-r)}$$

$$E(X) = r/p$$

$$VAR(X) = \frac{rq}{p^2}$$

Distribuição de Hipergeométrica:

Retirando n elementos de uma população N, dos quais r elementos tenha uma determinada característica.

Amostras sem reposição $\binom{N}{n}$, sucessos $\binom{r}{k}$, fracassos $\binom{N-r}{n-k}$ $0 \leq k \leq n$ e $k \leq r$

$$P(X = n) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = np$$

$$VAR(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Distribuição de Binomial:

Fazendo n tentativas em experimentos i.i.d. dicotômicos (com 2 resultados) onde p é a probabilidade de sucesso e x é a quantidade de sucessos.

Notação: $X : B(n, p)$

n=número de eventos

p=probabilidade

x=quantidade de sucessos

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

$$E(X) = np$$

$$VAR(X) = np(1-p)$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Distribuição de Polinomial:

Considere um experimento aleatório com k eventos $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ sendo $P(A_i) = p_i$ e

$\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Seja X_i o número de ocorrências de A_i em n tentativas. Este é o caso genérico para a Binomial.

Notação:

$$X: P(n, p_1, p_2, \dots)$$

n número de tentativas independentes

p_i probabilidade de cada evento A_i

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots$$

$$E(X_i) = n_i p_i$$

$$VAR(X_i) = n_i p_i q_i$$

Distribuição de Poisson:

Quando a probabilidade de sucesso em um intervalo é proporcional ao intervalo.

Notação:

$$X: P(\lambda)$$

$\lambda = np$ é a média de ocorrências no intervalo

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$VAR(X) = \lambda$$

Aproximação Binomial pela Poisson quando $n > 30$ ($n \rightarrow \infty; p \rightarrow 0$) onde $\lambda = np$

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{e^{-np} \cdot (np)^k}{k!}$$

CAPÍTULO 5 – Distribuições Contínuas

Variáveis Contínuas:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

$$VAR(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Distribuição Uniforme:

Quando a probabilidade de ocorrência $f(x)$ é constante k no intervalo a, b .

$$f.d.p. f(x) = \begin{cases} k & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

$$F(X) = 1 = \int_a^b k dx = kb - ka = k(b-a) = 1 \quad \text{portanto} \quad k = \frac{1}{b-a} \quad \text{e} \quad f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{e}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{se } b < x \end{cases}$$

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$VAR(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuição Exponencial:

Quando a probabilidade de ocorrência $f(x)$ é dada pela equação:

$$f.d.p. f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$F(X) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$$

$$F(x) = 1 = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$VAR(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribuição Normal:

Quando a probabilidade de ocorrência $f(x)$ é dada pela equação:

Notação: $X : N(\mu, \sigma^2)$

μ = média

σ = desvio padrão

$E(X) = \mu$

$VAR(X) = \sigma^2$

Variável normal reduzida: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$$E(Z) = \frac{1}{\mu} VAR(X) = 0$$

$$VAR(Z) = \frac{1}{\sigma^2} VAR(X) = 1$$

Aproximação da Binomial pela Normal:

Quando $B(n, p)$ para $n > 20$ então $\mu = np$ e $\sigma = \sqrt{npq}$ e $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \equiv N(0, 1)$

Distribuição de funções de variáveis aleatórias normais:

$$X : N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \mu_i$$

$$VAR(X) = VAR\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n VAR(X_i) + 2 \sum_{i \neq j}^n COV(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ então } \bar{X} = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

CAPÍTULO 6 – Probabilidade Conjunta

Probabilidade Conjunta:

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(x_i, y_j)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x_i, y_j)=1$$

Distribuição marginal:

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^n P(X=x_i, Y=y_j)$$

Distribuição condicional:

$$P(x_i|y_j)=\frac{P(x_i:y_j)}{P(y_j)}; j: \text{fixo e } i=\{1,2,\dots,m\}$$

Variáveis Aleatórias Independentes:

$$P(x_i:y_j)=P(x_i)\cdot P(y_j)$$

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$

$$COV(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

Coefficiente de Correlação:

$$\rho=\frac{COV(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$