

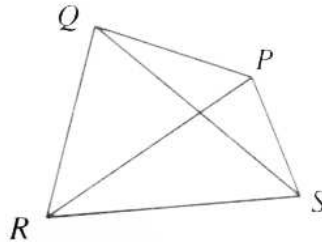
ACH2012 - Cálculo II

Sistema de Informação - EACH

Lista 2: Vetores e Geometria do Espaço

1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de quatro unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distancia de três unidades para abaixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?
2. Esboce os pontos $(0,5,2)$, $(4,0,-1)$, $(2,4,6)$ e $(1,-1,2)$ em um mesmo conjunto de eixos coordenados.
3. Qual dos pontos está mais próximo do plano xy : $P(6, 2, 3)$, $Q(-5, -1, 4)$, ou $R(0, 3, 8)$? Qual ponto pertence ao plano yz ?
4. Descreva e esboce no \mathbb{R}^3 a superfície representada pela equação $x + y = 2$.
5. Qual a representação de $y = 3$ em \mathbb{R}^3 ? O que $z = 5$ representa? Qual a representação do par de equações $y = 3$ e $z = 5$? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos (x, y, z) tal que $y = 3$ e $z = 5$. Ilustre com um esboço.
6. Mostre que o triângulo com vértices em $P(-2, 4, 0)$, $Q(1, 2, -1)$ e $R(-1, 1, 2)$ é um triângulo equilátero.
7. Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.
 - (a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y - 4z = 28$
 - (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$
8. Descreva em palavras a região de \mathbb{R}^3 representada pela equação ou inequação.
 - (a) $y = -4$
 - (b) $x > 3$
 - (c) $0 \leq z \leq 6$
 - (d) $x^2 + y^2 + z^2 > 1$
 - (e) $xyz = 0$
9. Qual a relação existente entre o ponto $(4, 5)$ e o vetor $(4, 5)$? Faça um esboço ilustrativo.
10. Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.

- (a) $\vec{PQ} + \vec{QR}$
- (b) $\vec{QS} - \vec{PS}$
- (c) $\vec{RP} + \vec{PS}$
- (d) $\vec{RS} + \vec{SP} + \vec{PQ}$



11. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

- (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
- (b) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
- (c) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
- (d) $\mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- (e) $2\mathbf{v}$
- (f) $2\mathbf{v} + \mathbf{w}$
- (g) $-\frac{1}{2}\mathbf{u}$
- (h) $\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$



12. Determine $|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$, e $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$.

- (a) $\mathbf{a} = (-4, 3)$, $\mathbf{b} = (6, 2)$
- (b) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
- (c) $\mathbf{a} = (6, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 5, -2)$

13. Ache um vetor que possui a mesma direção que $(-2, 4, 2)$, mas tem comprimento 6.

14. Determine o produto escalar de dois vetores cujas normas são respectivamente 6 e $\frac{1}{3}$ e o ângulo entre eles é $\pi/4$.
15. Determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
- (a) $\mathbf{a} = (-4, 3)$, $\mathbf{b} = (6, 2)$
 - (b) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
 - (c) $\mathbf{a} = (6, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 5, -2)$
 - (d) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
16. Determine o ângulo entre os vetores.
- (a) $\mathbf{a} = (3, 4)$, $\mathbf{b} = (5, 12)$
 - (b) $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
17. Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.
- (a) $\mathbf{u} = (-5, 3, 7)$, $\mathbf{v} = (6, -8, 2)$
 - (b) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 - (c) $\mathbf{u} = (4, 6)$, $\mathbf{v} = (-3, 2)$
 - (d) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
 - (e) $\mathbf{u} = (a, b, c)$, $\mathbf{v} = (-b, a, 0)$
18. Use os valores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$, e $R(6, -2, -5)$ é retângulo.
19. Para que valores de b são os vetores $(-6, b, 2)$ e (b, b^2, b) ortogonais?
20. Determine um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.
21. Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor:
- (a) $(3, 4, 5)$
 - (b) $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
22. Determine o vetor projeção e a projeção escalar de \mathbf{b} sobre \mathbf{a} .
- (a) $\mathbf{a} = (3, -4)$, $\mathbf{b} = (5, 0)$
 - (b) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
23. Suponha que \mathbf{a} e \mathbf{b} sejam vetores não-nulos.

- (a) Sob quais circunstâncias $\text{comp}_b a = \text{comp}_a b$?
- (b) Sob quais circunstâncias $\text{proj}_b \mathbf{a} = \text{proj}_a \mathbf{b}$?
24. Determine o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifique que ele é ortogonal \mathbf{a} e \mathbf{b} .
- (a) $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 3, 1)$
- (b) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
- (c) $\mathbf{a} = (t, t^2, t^3)$, $\mathbf{b} = (1, 2t, 3t^2)$
25. Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esboce \mathbf{a} , \mathbf{b} e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vetores com início na origem.
26. Se $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 3)$, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.
27. Se $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 0)$ e $\mathbf{c} = (0, 0, -4)$, mostre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.
28. Use o produto misto para determinar se os pontos $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 4, 6)$, $R(3, -1, 2)$ e $S(6, 2, 8)$ pertencem ao mesmo plano.
29. Suponha que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.
- (a) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
- (b) Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
- (c) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
30. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
- (a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
- (b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.
- (c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.
- (d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos.
- (e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
- (f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
- (g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.
- (h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos.
- (i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.
- (j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelos.
- (k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.
- (l) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos.

31. Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.
- A reta que passa pelo ponto $(1, 2, -3)$ e é paralela ao vetor $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
 - A reta que passa pelo ponto $(-2, 4, 10)$ e é paralela ao vetor $(3, 1, -8)$.
32. Determine as equações paramétricas e na forma simétrica para a reta.
- A reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, 2, 3)$.
 - A reta que passa por $(1, -1, 1)$ e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$.
 - A reta que é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.
33. Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de intersecção.
- $L_1 : x = -6t, y = 1 + 9t, z = -3t$ e $L_2 : x = 1 + 2s, y = 4 - 3s, z = s$.
 - $L_1 : x = 1 + 2t, y = 3t, z = 2 - t$ e $L_2 : x = -1 + s, y = 4 + s, z = 1 + 3s$.
34. Determine a equação do plano.
- O plano que passa pelo ponto $(6, 3, 2)$ e é perpendicular ao vetor $(-2, 1, 5)$.
 - O plano que passa pelo ponto $(4, 0, 3)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
 - O plano que passa pelo ponto $(-1, 6, -5)$ e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$.
 - O plano que contém a reta $x = 3 + 2t, y = t, z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$.
 - O plano que passa pelos pontos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$.
35. Determine o ponto dado pela intersecção da reta $x = 3 - t, y = 2 + t, z = 5t$ com o plano $x - y + 2z = 9$.
36. Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.
- $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$.
 - $2z = 4y - x, \quad 3x - 12y + 6z = 1$.
 - $x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1$.
37. Determine a equação na forma simétrica da reta de intersecção dos planos $x + y - z = 2$ e $3x - 4y + 5z = 6$. Determine o ângulo entre os planos.
38. (a) Determine a distancia do ponto $(2, 8, 5)$ ao plano $x - 2y - 2z = 1$.
- (b) Determine a distancia entre os planos paralelos $z = x + 2y + 1, \quad 3x + 6y - 3z = 4$.