Simulação Histórica

Análise de Risco

R.Vicente

Resumo

- Simulação histórica ingênua, Método BRW e Método Hull-White para ativos
- Simulação histórica ingênua, Método BRW e Método Hull-White para carteiras lineares
- Carteiras não-lineares
- Séries de pagamentos pré-fixadas
- Bibliografia

Simulação Histórica Ingênua para uma ativo linear

$V(t)$ →

Valor atual do ativo

Choques históricos	Cenários de valorização	Ordena cenários
r1 %	ΔV1 =V(t) * r1 %	MENOR (ΔV,1)
r2 %	ΔV2 =V(t) * r2 %	MENOR (ΔV,2)
r3 %	ΔV3 =V(t) * r3 %	MENOR (ΔV,3)
r4 %	ΔV4 =V(t) * r4 %	MENOR (ΔV,4)
r5 %	ΔV5 =V(t) * r5 %	MENOR (ΔV,5)
...	...	MENOR (ΔV,6)
		MENOR (ΔV,7)
rN %	ΔVn =V(t) * rn %	MENOR (ΔV,8)
		MENOR (ΔV,9)
		MENOR (ΔV,10)
		MENOR (ΔV,11)
		MENOR (ΔV,12) V@R
...	...	...
r250 %	ΔV250 =V(t) * r250 %	MENOR (ΔV,250)
r251 %	ΔV251 =V(t) * r251 %	MENOR (ΔV,251)
r252 %	ΔV252 =V(t) * r252 %	MENOR (ΔV,252)

r1 %= [V(t)-V(t-1)]/V(t-1). **rn % = [V(t-n-1)-V(t-n)]/V(t-n).**

V@R(95%) = 12ª pior perda (252 *5% =12,6)

Simulação Histórica BRW para um ativo linear

Choques históricos	Ponderadores
r1%	$\omega 1$
r2%	$\omega 2$
r3%	$\omega 3$
r4%	$\omega 4$
r5%	$\omega 5$
...	...
rN%	ωN
...	...
r250%	$\omega 250$
r251%	$\omega 251$
r252%	$\omega 252$

$V(t)$ → Valor atual do ativo

Cenários de valorização
$\Delta V1 = V(t) * r1\ \%$
$\Delta V2 = V(t) * r2\ \%$
$\Delta V3 = V(t) * r3\ \%$
$\Delta V4 = V(t) * r4\ \%$
$\Delta V5 = V(t) * r5\ \%$
...
$\Delta Vn = V(t) * rn\ \%$
...
$\Delta V250 = V(t) * r250\ \%$
$\Delta V251 = V(t) * r251\ \%$
$\Delta V252 = V(t) * r252\ \%$

Ordena cenários	Procura posição com soma dos pesos = 5%
MENOR $(\Delta V, 1)$	w(MENOR, 1)
MENOR $(\Delta V, 2)$	w(MENOR, 2)
MENOR $(\Delta V, 3)$	w(MENOR, 3)
MENOR $(\Delta V, 4)$	w(MENOR, 4)
MENOR $(\Delta V, 5)$	w(MENOR, 5)
MENOR $(\Delta V, 6)$	w(MENOR, 6)
...	...
V@R: MENOR $(\Delta V, k)$	w(MENOR, k)
...	...
...	...
MENOR $(\Delta V, 250)$	w(MENOR, 250)
MENOR $(\Delta V, 251)$	w(MENOR, 251)
MENOR $(\Delta V, 252)$	w(MENOR, 252)

Os ponderadores são escolhidos de forma a que w1+w2+...+w252=1 e w1>w2>...>w252.

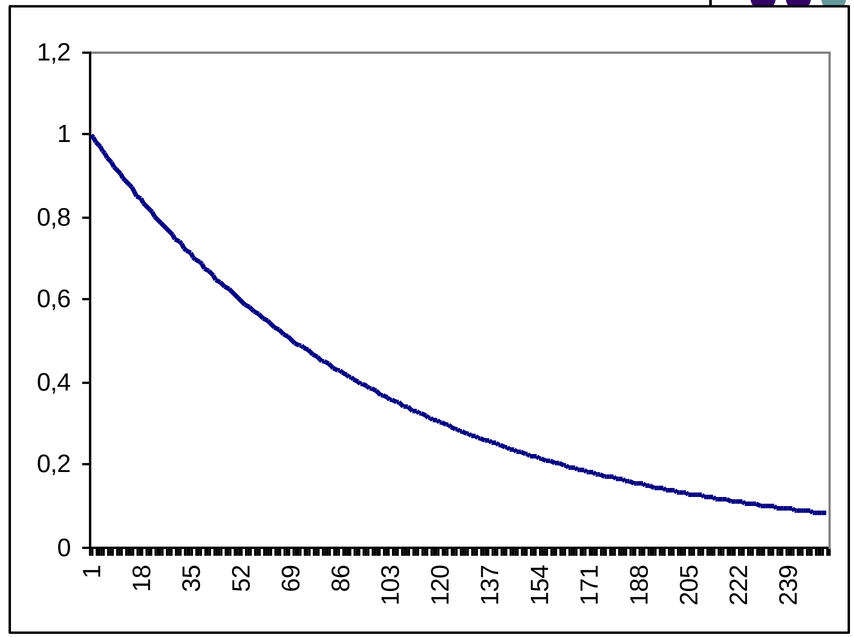
V@R = w(MENOR, 1)+w(MENOR,2)+...w(MENOR,k)=5%

Pesos para o Método BRW

Choques históricos	Ponderadores
r1%	ω1
r2%	ω2
r3%	ω3
r4%	ω4
r5%	ω5
...	...
rN%	ωN
...	...
r250%	ω250
r251%	ω251
r252%	ω252

1
λ
λ^2
λ^3
λ^4
...
λ^k
...
λ^249
λ^250
λ^251

Sugestão de ponderadores com $0<\lambda<1$



É, no entanto, necessário que os pesos somem 1 pois serão utilizados para encontrar o percentil de 5%. Precisamos normalizar os pesos. Note que:

$$1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{251}=\frac{1-\lambda^{252}}{1-\lambda}$$

Então os pesos devem ser:

$$\omega_k=\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{252}}\times\lambda^k$$

Simulação Hull-White para um ativo linear

Valor atual da Carteira

$V(t)$

$\sigma(t)$

Volatilidade atual

r1 %	σ1 %
r2 %	σ2 %
r3 %	σ3 %
r4 %	σ4 %
r5 %	σ5 %
...	...
rN %	σn %
...	...
r250 %	σ250 %
r251 %	σ251 %
r252 %	σ252 %

Choques históricos — Volatilidades históricas

ΔV1 =V(t) * [r1%/σ1%] * σ(t)
ΔV1 =V(t) * [r2%/σ2%] * σ(t)
ΔV1 =V(t) * [r3%/σ3%] * σ(t)
ΔV1 =V(t) * [r4%/σ4%] * σ(t)
...
ΔVn =V(t) * [rn%/σn%] * σ(t)
...
...
ΔV250 =V(t) * [r250%/σ250%] * σ(t)
ΔV251 =V(t) * [r251%/σ251%] * σ(t)
ΔV252 =V(t) * [r252%/σ252%] * σ(t)

Cenários de valorização com vol corrigida

	MENOR (ΔV,1)
	MENOR (ΔV,2)
	MENOR (ΔV,3)
	MENOR (ΔV,4)
	MENOR (ΔV,5)
	MENOR (ΔV,6)
	MENOR (ΔV,7)
	MENOR (ΔV,8)
	MENOR (ΔV,9)
	MENOR (ΔV,10)
	MENOR (ΔV,11)
V@R	MENOR (ΔV,12)
	...
	MENOR (ΔV,250)
	MENOR (ΔV,251)
	MENOR (ΔV,252)

Ordena cenários

Estimação de Volatilidade EWMA

r1%	v(t) = v1 * λ + r1%*r1% * (1−λ)
r2%	v1 = v2 * λ + r2%*r2% * (1−λ)
r3%	v2 = v3 * λ + r3%*r3% * (1−λ)
r4%	v3 = v4 * λ + r4%*r4% * (1−λ)
r5%	v4 = v5 * λ + r5%*r5% * (1−λ)
...	...
rN%	v(N−1) = v(N) * λ + rN%*rN% * (1−λ)
...	
r249%	v248 = v249 * λ + r249%*r249% * (1−λ)
r250%	v249 = v250 * λ + r250%*r250% * (1−λ)
r251%	v250 = v251 * λ + r251%*r251% * (1−λ)
r252%	v251 = r252%*r252%

$$\sigma(t) = \sqrt{v(t)}$$

Volatilidade atual

$$\lambda \approx 0,95$$

r1 é o retorno mais atual. r252 é o retorno de 252 dias atrás.

Simulação Histórica (ingênua e BRW) para carteira linear

$$V(t) = q_1 v_1(t) + q_2 v_2(t) + \ldots + q_n v_n(t)$$

Valor atual da carteira

Ativo 1	Ativo 2		Ativo n
r1_1%	r2_1%	…	rn_1%
r1_2%	r2_2%	…	rn_2%
r1_3%	r2_3%	…	rn_3%
r1_4%	r2_4%	…	rn_4%
r1_5%	r2_5%	…	rn_5%
…	…	…	…
r1_k%	r2_k%	…	rn_k%
…	…	…	…
r1_250%	r2_250%	…	rn_250%
r1_251%	r2_251%	…	rn_251%
r1_252%	r2_252%	…	rn_252%

Choques históricos

ΔV1 =v1(t) * r1_1% +v2(t)*r2_1%+…+vn(t)*rn_1%
ΔV2 =v1(t) * r1_2% +v2(t)*r2_2%+…+vn(t)*rn_2%
ΔV3 =v1(t) * r1_3% +v2(t)*r2_3%+…+vn(t)*rn_3%
ΔV4 =v1(t) * r1_4% +v2(t)*r2_4%+…+vn(t)*rn_4%
ΔV5 =v1(t) * r1_5% +v2(t)*r2_5%+…+vn(t)*rn_5%
…
ΔVk =v1(t) * r1_k% +v2(t)*r2_k%+…+vn(t)*rn_k%
…
ΔV250 =v1(t) * r1_250% +v2(t)*r2_250%+…+vn(t)*rn_250%
ΔV251 =v1(t) * r1_251% +v2(t)*r2_251%+…+vn(t)*rn_251%
ΔV252 =v1(t) * r1_252% +v2(t)*r2_252%+…+vn(t)*rn_252%

Cenários de valorização

Ordena cenários

Encontra V@R

Simulação Histórica Hull-White para carteira linear

$$V(t) = q_1 v_1(t) + q_2 v_2(t)$$

Valor atual da carteira

$$\sigma_1(t), \sigma_2(t)$$

Volatilidades atuais

Ativo 1	Vol 1	Ativo 2	Vol 2
r1_1%	σ1_1%	r2_1%	σ2_1%
r1_2%	σ1_2%	r2_2%	σ2_2%
r1_3%	σ1_3%	r2_3%	σ2_3%
r1_4%	σ1_4%	r2_4%	σ2_4%
r1_5%	σ1_5%	r2_5%	σ2_5%
...	...		...
r1_k%	σ1_κ%	r2_k%	σ2_κ%
...	...	...	...
r1_250%	σ1_250%	r2_250%	σ2_250%
r1_251%	σ1_251%	r2_251%	σ2_251%
r1_252%	σ1_252%	r2_252%	σ2_252%

Cenários de valorização

ΔV1 =v1(t) * [r1_1%/σ1_1%] * σ1(t) + v2(t) * [r2_1%/σ2_1%] * σ2(t)
ΔV2 =v1(t) * [r1_2%/σ1_2%] * σ1(t) + v2(t) * [r2_2%/σ2_2%] * σ2(t)
ΔV3 =v1(t) * [r1_3%/σ1_3%] * σ1(t) + v2(t) * [r2_3%/σ2_3%] * σ2(t)
...
ΔVk =v1(t) * [r1_k%/σ1_κ%] * σ1(t) + v2(t) * [r2_κ%/σ2_κ%] * σ2(t)
...
ΔV252 =v1(t) * [r1_252%/σ1_252%] * σ1(t) + v2(t) * [r2_252%/σ2_252%] * σ2(t)

Choques históricos

Ordena cenários → **Encontra V@R**

Carteiras não-lineares

Exemplo 1: Uma carteira que contenha ações negociadas no exterior. O valor da carteira será:

$$V(t) = q_1 \times v_1(t) \times \mathrm{BRL(t)}$$

Exemplo 2: Uma carteira que contenha ações e opções de compra e venda sobre esta ação. O valor desta carteira será:

$$V(t) = q_1 v_1(t) + q_{call}\mathrm{CALL}(v_1, \sigma_1, Y_T, T) + q_{put}\mathrm{PUT}(v_1, \sigma_1, Y_T, T)$$

Exemplo 3: Uma carteira que contenha pagamentos futuros com juros pré-fixados.

$$V(t) = \frac{P_1}{1+Y_{\mathrm{T1}}(t)} + \frac{P_2}{1+Y_{\mathrm{T2}}(t)} + \ldots + \frac{P_k}{1+Y_{\mathrm{Tk}}(t)}$$

Simulação histórica para carteiras não-lineares

O valor de mercado é função dos <u>fatores de risco</u> V(f1,f2,f3,...,fn). Por exemplo:

$$V(v, BRL) = q \times v(t) \times \mathrm{BRL(t)}$$

fator 1	fator 2
r1_1%	r2_1%
r1_2%	r2_2%
r1_3%	r2_3%
r1_4%	r2_4%
r1_5%	r2_5%
...	...
r1_k%	r2_k%
...	...
r1_250%	r2_250%
r1_251%	r2_251%
r1_252%	r2_252%

Choques

ΔV1 =q*v1(t) * r1_1% * BRL(t)*r2_1%
ΔV2 =q*v1(t) * r1_2% * BRL(t)*r2_2%
ΔV3 =q*v1(t) * r1_3% * BRL(t)*r2_3%
ΔV4 =q*v1(t) * r1_4% * BRL(t)*r2_4%
ΔV5 =q*v1(t) * r1_5% * BRL(t)*r2_5%
...
ΔVk =q*v1(t) * r1_k% * BRL(t)*r2_k%
...
ΔV250 =q*v1(t) * r1_250% * BRL(t)*r2_250%
ΔV251 =q*v1(t) * r1_251% * BRL(t)*r2_251%
ΔV252 =q*v1(t) * r1_252% * BRL(t)*r2_252%

Cenários de valorização

Ordena

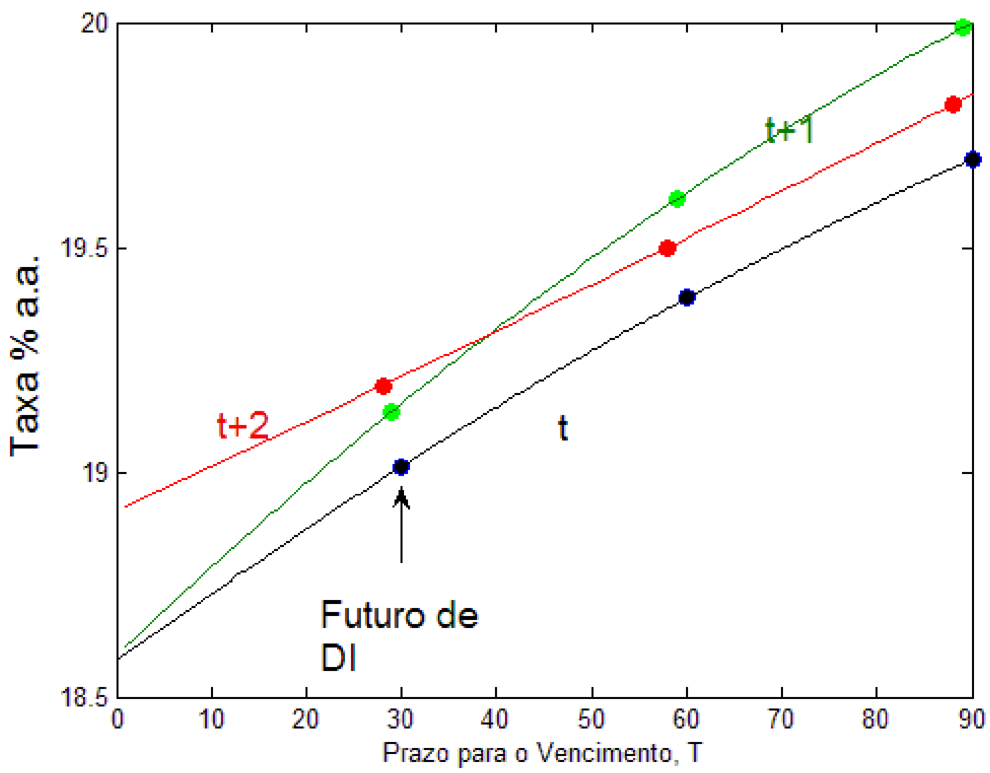
Encontra V@R

Geração de cenários para Yield curves

$$V(t) = \frac{P_1}{1+Y_{\mathrm{T1}}(t)} + \frac{P_2}{1+Y_{\mathrm{T2}}(t)} + \ldots + \frac{P_k}{1+Y_{\mathrm{Tk}}(t)}$$

Note que:

$$V(t+1) = \frac{P_1}{1+Y_{\mathrm{T1\text{-}1}}(t+1)} + \frac{P_2}{1+Y_{\mathrm{T2\text{-}1}}(t+1)} + \ldots + \frac{P_k}{1+Y_{\mathrm{Tk\text{-}1}}(t+1)}$$



A partir das curvas de mercado constroem-se cenários para variação dos juros observando-se sempre a alteração de prazo:

$$\Delta i_T^{(1)} = i_{T-1}(t) - i_T(t-1)$$

Geração de cenários para Yield curves

Cada um dos cenários é aplicado

$$\Delta i_T^{(k)} = i_{T-1}(t-k-1) - i_T(t-k)$$

$$i_{T-1}^{(k)} = i_T(t) + \Delta i_T^{(k)}$$

e o fator de desconto calculado para cada cenário:

$$1 + Y_{\mathrm{T\text{-}1}}^{(k)} = (1 + i_{\mathrm{T\text{-}1}}^{(k)})^{\frac{\mathrm{T1}}{252}}$$

Os cenários de P&L da carteira são então

$$\Delta V^{(k)} = V^{(k)} - V(t) \times (1 + \mathrm{CDI})$$

$$V^{(k)} = \frac{P_1}{1 + Y_{\mathrm{T1\text{-}1}}^{(k)}} + \frac{P_2}{1 + Y_{\mathrm{T2\text{-}1}}^{(k)}} + \ldots + \frac{P_k}{1 + Y_{\mathrm{Tk\text{-}1}}^{(k)}}$$

Bibliografia

- Jorion P., Value at Risk, Irwin, 1997.
- RiskMetrics Technical Document (www.riskmetrics.com);

Leituras Complementares

Pritsker M., The Hidden Dangers of Historical Simulation

Hull, J. e White, A., Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk