DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF$^{\text{a}}$.: Karla Lima

EACH-USP

September 19, 2018

Principio de Indução Matemática

O princípio da indução que tem sido utilizado,

$$\left\{ \begin{array}{l} (1)\ P(1)\ \textit{verdadeira} \\ (2)\ (\forall k)[P(k)\ \textit{verdadeira}\ \rightarrow P(k+1)\ \textit{verdadeira}] \end{array} \right\} \longrightarrow P(n)$$

verdadeira para todos os n inteiros positivos.

é também conhecido como indução fraca.

Principio de Indução Matemática

O princípio da indução forte ou indução completa é:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1') \ P(1) \ \textit{verdadeira} \\ (2') \ (\forall k)[P(r) \ \textit{verdadeira para todo } r \\ 1 \leq r \leq k \rightarrow P(k+1) \ \textit{verdadeira}] \end{array} \right\} \longrightarrow P(n) \text{ verdadeira para}$$

todos os n inteiros positivos.

Principio de Indução Matemática

Qual a diferença entre esses métodos?

- Para um inteiro positivo arbitrário k, provamos que P(k+1) é verdadeira, tendo por base apenas a premissa de que $P(k)$ é verdadeira.
- Temos a premissa que $P(r)$ é verdadeira para todos os inteiros r entre 1 e um inteiro positivo arbitrário k, para provar que $P(k+1)$ é verdadeira.

Principio de Indução Matemática

Qual a diferença entre esses métodos?

O que nos leva a deduzir $(\forall n)P(n)$ em cada caso?

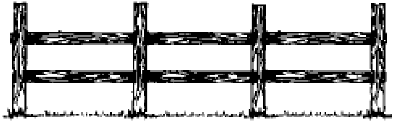
- Os dois métodos de demonstração são equivalentes.
- Se aceitarmos a **indução fraca** como um princípio válido, então o princípio da **indução forte** também será válido e vice-versa.

Principio de Indução Matemática

Exemplo 1

Prove que uma cerca de madeira com n estacas tem $n-1$ seções para qualquer $n \geq i$

Principio de Indução Matemática

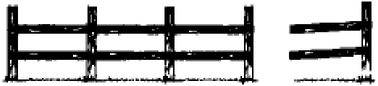


Cerca com 4 estacas e 3 seções

(a)

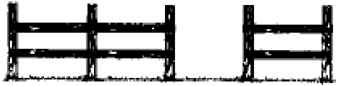
Cerca com 1 estaca e 0 seções

(b)



Cerca com a última estaca e
a última seção removidas

(c)



Cerca com uma seção removida

(d)

Principio de Indução Matemática

Exemplo 2

Prove que para todo $n \geq 2, n$ é um número primo ou é um produto de números primos.

Principio de Indução Matemática

Exemplo 3

Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5.

Principio de Indução Matemática

Exercício 1

Demonstre que qualquer valor postal maior ou igual a duas unidades monetárias pode ser obtido usando-se somente selos com valor de 2 e 3.

Principio de Indução Matemática

Exercício 2

Seja a sequência $h_0, h_1, h_2, \ldots$ definida como

$$h_0 = 1$$

$$h_1 = 2$$

$$h_2 = 3$$

$$h_k = h_{k-1} + h_{k-2} + h_{k-3} \;\; \forall \; inteiros \; k \geq 3$$

Prove que $h_n \leq 3^n$