1. [2 pontos] Um canal de comunicação digital com ruído possui probabilidade $p = 0{,}02$ de transmitir um bit incorretamente. Calcule a probabilidade de se observar mais de um erro a cada 8 bits recebidos.

@silvestre

$p = 0{,}02$ transmitir bit incorretamente;

$n = 8$

$$P(0) = \binom{8}{0} \cdot (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^{8-0} = \frac{8!}{0!\,8!} \cdot 1 \cdot 0{,}8507 = 0{,}8507$$

$$P(1) = \binom{8}{1} \cdot (0{,}02)^1 \cdot (0{,}98)^{8-1} = \frac{8!}{1!\,7!} \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}8681 = 0{,}1388$$

$$P(A) = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - (0{,}8507 + 0{,}1388) = 0{,}0105$$

ou 1%.

2. [2 pontos] Uma linha de produção fabrica resistores de $1000\,\Omega$ (ohms) que possuem uma tolerância de $\pm 5\%$. Supondo que o valor da resistência dos resistores seja uma variável aleatória normal de média $1000\,\Omega$ e variância $1600\,\Omega^2$, encontre a probabilidade de que um resistor escolhido ao acaso seja rejeitado.

@silvestre

2)

Seja A o evento de um resistor ser rejeitado.

Então $A = \{x < 950\} \cup \{x > 1050\}$

Assim, quando $\{x < 950\} \cup \{x > 1050\} = \emptyset$, temos:

$$P(A) = P(x < 950) + P(x > 1050) = F_x(950) + [1 - F_x(1050)]$$

Como x é uma V.A. normal com $\mu = 1000$ e $\sigma^2 = 1600$ ($\sigma = 40$), usando a CDF e a tabela p/ distribuição normal, temos:

$$F_x(950) = \Phi\left(\frac{950-1000}{40}\right) = \Phi(-1,25) = 1 - \Phi(1,25)$$

$$F_x(1050) = \Phi\left(\frac{1050-1000}{40}\right) = \Phi(1,25)$$

$$P(A) = 1 - \Phi(1,25) + [1 - \Phi(1,25)] = 2.[1 - \Phi(1,25)] =$$

$$= 2.(1 - \overbrace{0,8944}^{\text{valor da tabela}}) = 2.0,1056$$

$$P(A) = 0,2112 = \boxed{21,12\%}$$

3. [2 pontos] Uma amostra de dez casais e seus respectivos salários anuais (em salários-mínimos) foi colhida numa determinada região e os dados aparecem na tabela abaixo.

Homem (X)	10	10	12	15	12	15	15	20	20	20
Mulher (Y)	5	8	10	8	10	10	12	10	12	15

(a) Encontre o salário anual médio dos homens e das mulheres e seus respectivos desvios padrões.

(b) Encontre o coeficiente de correlação entre os salários anuais dos homens e das mulheres.

RESPOSTA **(@lntasqui - Seria legal se alguem revisasse as contas)**

a) Precisamos montar a tabela para homens (X):

Salaarios	**Freq**
10	2
12	2
15	3
20	3
	total: 10

Salário médio anual (X) = 10*2 + 12*2 + 15*3 + 20 *3/ 10 = **14,9**

Desvio padrão:

(raiz quadrada de: 2*(10-14,9)^2 + 2*(12-14,9)^2 + 3*(15-14,9)^2 + 3*(20-14,9)^2 / 10) =

(raiz quadrada de: 48,02 + 16,82 + 0,03 + 78,03 / 10) = 3,7802

Precisamos montar a tabela para mulheres (Y):

Salaarios	**Freq**
5	1
8	2
10	4
12	2
15	1
	total: 10

Salário médio anual (X) = 5*1 + 8*2 + 10*4 + 12*2 + 15*1 / 10 = **10**

Desvio padrão:

(raiz quadrada de: 1*(5-10)^2 + 2*(8-10)^2 + 4*(10-10)^2 + 2*(12-10)^2 + 1*(15-10)^2 / 10 =

(raiz quadrada de: 25 + 8 + 0 + 8 + 25/ 10) = 2,569

B) (Alguem por favor revise os valores, não sei fazer essa de correlação)

@lgobo

d) CORR(x,y)=($\Sigma xy - n\,\overline{X}\,\overline{Y})/\sqrt{(\Sigma x^2 \; - \; n\,\overline{X}^2)(\Sigma y^2 n\overline{Y}^2)}$

=(1550-1500)/ $\sqrt{150.100}$

=0,408 [correlação linear fraca]

4. [1 ponto] A capacidade máxima de um elevador é de 500 kg. Se a distribuição das massas ("pesos") dos passageiros for dada por uma distribuição normal $N(70, 100)$, qual é a probabilidade de 7 passageiros ultrapassarem o limite de carga do elevador?

$$\overline{X} \sim N\left(70; \frac{100}{7}\right); \; P\left(\sum_{i=1}^{7} X_i > 500\right) = P\left(\overline{X} > \frac{500}{7}\right) = 35{,}27\%.$$

(INTASQUI) Solução que eu achei:

Solução

Podemos considerar os 7 passageiros como uma amostra aleatória simples da população de todos os usuários, representada pela v.a. $X \sim N(70; 100)$. Seja, então, $X_1, \ldots, X_7$ uma aas de tamanho $n = 7$. Se o peso máximo é 500, para que 7 pessoas ultrapassem o limite de segurança temos que ter

$$\sum_{i=1}^{7} X_i > 500 \Rightarrow \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} X_i > \frac{500}{7} \Rightarrow \overline{X} > 71,729$$

Mas, pelo Teorema 2.2, sabemos que

$$\overline{X} \sim N\left(70; \frac{100}{7}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Pr(\overline{X} &> 71,729) = \Pr\left(\frac{\overline{X} - 70}{\sqrt{\frac{100}{7}}} > \frac{71,729 - 70}{\sqrt{\frac{100}{7}}}\right) \\ &= \Pr(Z > 0,46) = 0,5 - \mathrm{tab}(0,46) = 0,5 - 0,17724 = 0,32276 \end{aligned}$$

Com 6 pessoas teríamos que ter

$$\begin{aligned} \Pr\left(\overline{X} > \frac{500}{6}\right) &= \Pr\left(Z > \frac{83.333 - 70}{\sqrt{\frac{100}{6}}}\right) \\ &= \Pr(Z > 3,27) = 0,5 - \mathrm{tab}(3,27) \\ &= 0.5 - 0.49946 = 0,00054 \end{aligned}$$

Podemos ver que existe uma probabilidade alta (0,32 ou 32% de chance) de 7 pessoas ultrapassarem o limite de segurança. Já com 6 pessoas, essa probabilidade é bastante pequena. Assim, o número máximo de pessoas no elevador deve ser estabelecido como 6 ou menos.

5. [3 pontos] Uma máquina empacotadeira produz pacotes com massas ("pesos") distribuídas normalmente com média μ e desvio padrão 10 g.

(a) Quanto deve valer μ para que no máximo 10% dos pacotes tenham menos do que 500 g?

(b) Para o valor de μ encontrado no item (a), qual é a probabilidade de que a massa total de 4 pacotes escolhidos ao acaso seja inferior a 2 kg?

A)

1. Seja X a variável aleatória que representa o peso dos pacotes. Sabemos, então, que X ~ N(μ ; 100). Queremos que

$$\Pr(X < 500) = 0,10 \Rightarrow$$
$$\Pr\left(\frac{X-\mu}{10} < \frac{500-\mu}{10}\right) = 0,10 \Rightarrow$$
$$\Pr\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) = 0,10$$

Então, na densidade normal padrão, à esquerda da abscissa (500 – µ) / 10 temos que ter uma área (probabilidade) de 0,10. Logo, essa abscissa tem que ser negativa. Usando a simetria da densidade normal temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
\Pr\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) &= 0,10 \Longleftrightarrow \\
\Pr\left(Z > -\frac{500-\mu}{10}\right) &= 0,10 \Longleftrightarrow \\
\Pr\left(Z > \frac{\mu-500}{10}\right) &= 0,10 \Longleftrightarrow \\
\Pr\left(0 \le Z \le \frac{\mu-500}{10}\right) &= 0,40 \Longleftrightarrow \\
\text{tab}\left(\frac{\mu-500}{10}\right) &= 0,40 \Longleftrightarrow \\
\frac{\mu-500}{10} &= 1,28 \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

B)

2. Sejam X1, X2, X3, X4 os pesos dos 4 pacotes da amostra. Queremos que $\sum_{i=1}^{4} X_i < 2000\text{g}$.

Isso é equivalente a $\overline{X} < 500$. Logo,

$$\begin{aligned}
\Pr(\overline{X} < 500) &= \Pr\left(\frac{\overline{X} - 512,8}{\sqrt{\frac{100}{4}}} < \frac{500 - 512,8}{\sqrt{\frac{100}{4}}}\right) \\
&= \Pr(Z < -2,56) \\
&= \Pr(Z > 2,56) \\
&= 0,5 - \Pr(0 \leq Z \leq 2,56) \\
&= 0,5 - \text{tab}(2,56) \\
&= 0,5 - 0,49477 \\
&= 0,00523
\end{aligned}$$

Com a máquina regulada para 512,8g, há uma probabilidade de 0,00523 de que uma amostra de 4 pacotes apresente peso médio inferior a 500g. Note que com um pacote apenas, essa probabilidade é de 10%. Por isso, as inspeções de controle de qualidade são sempre feitas com base em amostras de tamanho n > 1.

A título de controle de qualidade, de hora em hora é retirada da produção uma amostra de 4 pacotes. Se a média da massa da amostra for inferior a 500 g ou superior a 520 g a produção é parada para reajustar a empacotadeira.

(c) Qual é a probabilidade de se efetuar uma parada desnecessária da produção, isto é, de parar a produção mesmo com a máquina estando regulada?

Se a máquina estiver regulada: $\overline{X} \sim N\left(512{,}82; \frac{100}{4}\right)$

$P(\text{parada desnecessária}) = P(\overline{X} < 495 \text{ ou } \overline{X} > 520 \mid \text{máquina está regulada}) = 7{,}56\%$

(Questão provavel, caiu na sub da manhã, se ele resolver inverter as 2 provas essa vai ser a questão que cairá)

7. Uma v.a. X tem distribuição normal, com média 100 e desvio padrão 10.

(a) Qual a $P(90 < X < 110)$? 0,68

(b) Se $\overline{X}$ for a média de uma amostra de 16 elementos retirados dessa população, calcule $P(90 < \overline{X} < 110)$. 1,00

(c) Represente, num único gráfico, as distribuições de X e $\overline{X}$.

(d) Que tamanho deveria ter a amostra para que $P(90 < \overline{X} < 110) = 0{,}95$?