Teorema mestre - como usar

a-) Verificar se a recorrência pode ser tratada usando o TM

b-) Identificar $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $f(n)$

c-) Verificar em que casos **não** se enquadra, **comece pelo caso 2**

d-) Demonstrar em que caso se enquadra.

Aplicando ao exemplo 1: $T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

a. ok

b. $a = 9$; $b = 3$, $f(n) = n$ **ok**

c. 1. $n \in O(n^{2-\varepsilon})$; $\varepsilon > 0$ **talvez**

2. $n \in \Theta(n^2)$ certamente não

3. $n \in \Omega(n^{2+\varepsilon})$; $\varepsilon > 0$ certamente não

d. procure $\varepsilon > 0$ que satisfaz a eq. e **demonstre!**

tome $\varepsilon = 1$, a eq se torna

$n \in O(n)$, o que é verdade pela prop. da reflexividade

alternativamente pode demonstrar que

$0 \leq n \leq c \cdot n$ ou $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n} < \infty$

exemplo 2 $T(n) = T\left(\frac{2}{3}n\right) + 1$

a- ok

b- $a = 1$; $b = 3/2$ $f(n) = 1$

c- 1. $1 \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$; $\varepsilon > 0$ certamente não

2- $1 \in \Theta(n^{\log_b a})$ sim, precisa provar?

3- $1 \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$; $\varepsilon > 0$ nem precisa chegar aqui...

d- $1 \in \Theta(n^0) \iff 0 \leq c_1 \cdot 1 \leq 1 \leq c_2 \cdot 1$,

tomando $c_1 = c_2 = 1$ e $n_0 = 0$ temos

$0 \leq 1 \leq 1 \leq 1$ o que é verdade,

logo, $1 \in \Theta(n^0)$ e

$T(n) \in \Theta(\log_2(n))$

exemplo 3 : $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n$

a- ok

b- $a = 3$ $b = 4$ $f(n) = n \cdot \log(n)$

c- 1. $f(n) = n \cdot \log(n) \in O(n^{\log_4 3 - \varepsilon})$ não

2. $f(n) = n \cdot \log(n) \in \Theta(n^{\log_4 3})$ não

3. $\underbrace{f(n) = n \cdot \log(n) \in \Omega(n^{\log_4 3 + \varepsilon}}_{\triangle})$ talvez

d- $\log_4 3$ é um número l tq.

$0{,}5 < l < 1$, logo, existe $\varepsilon > 0$

tq $l + \varepsilon = 1$, tome esse valor de ε
neste caso a eq se torna

$n \log(n) \in \Omega(n)$

o que pode ser provado pelo limite
ou pela definição:

se n cresce em b vezes,
$f(n)$ cresce mais que b vezes e
$g(n) = n$ cresce b vezes, logo, a partir
de um certo n_0, f domina g.
determinando c e n_0.
Tome $c = 1$ e $n_0 = 1$

então $0 \leq n \leq n \cdot \log(n)$ p/ $n > 1$
deve ser verdade.

por indução: (poderia ser com qq outra técnica)

base p/ $n=1$ $f(n)=0 < g(n)=1$

hipotese $0 \leq n \leq n \cdot \log(n)$

passo: tome o próximo n como $n \cdot b$ com $b > 1$

$n \cdot b \leq n \cdot b \left(\log(n \cdot b)\right) \Leftrightarrow$
$n \cdot b \leq n \cdot b \left(\log(n) + \log(b)\right) \Leftrightarrow$
$n \leq n \cdot \log(n) + n \cdot \log(b)$

se substituirmos o "n" do lado esquerdo por algo maior que ele e conseguirmos provar que a nova desigualdade continua válida, então estamos bem... em linguagem matemática e aplicando a hipótese de indução

$n \cdot \log(n) \leq n \cdot \log(n) + n \cdot \log(b) \Leftrightarrow$
$0 \leq n \cdot \log b$, o que é verdade

pois $b > 1$ e $n > 1$ ■

como é o caso 3, ainda tem que provar que $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$ p/ $c < 1$ e $n > n_0$

$3 \cdot \frac{n}{4} \cdot \log \frac{n}{4} \leq c \cdot n \cdot \log(n) \Leftrightarrow$

$\frac{3}{4} n \left(\log(n) - \log(4) \right) \leq c \cdot n \cdot \log(n)$

o que é verdade tomando $c = \frac{3}{4}$ e $n_0 = 1$

$\therefore \quad T(n) = \Theta(n \cdot \log(n))$ ∎