ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2014.2)

Segunda Prova – Dezembro/2014

Nome: ____________________________________ Nº USP: ____________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Observação 1: Duração da prova: **??** (**??**) minutos.
Observação 2: O uso de calculadora/computador na prova é proibido.

1) [3,0 pontos] Obtenha a equação da reta r que passa pelo ponto $M_0(2,-3,-5)$ e é perpendicular ao plano $\alpha : 6x-3y-5z+2=0$.

---

1) É imediato verificar que os pontos $A(1,1,1)$, $B(-2,0,-2)$ e $C(0,-1,1)$ pertencem ao plano α. Os vetores $\overrightarrow{BA}=(3,1,3)$ e $\overrightarrow{CA}=(1,2,0)$ não são paralelos, e o plano α pode ser representado na forma vetorial como

$$\alpha : X = A + \lambda\overrightarrow{BA} + \mu\overrightarrow{CA} = (1,1,1) + \lambda(3,1,3) + \mu(1,2,0)\,, \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}\,.$$

Definindo $\vec{u} := (1,2,0)$ e $\vec{v} := (3,1,3)$, o vetor

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (6,-3,-5)$$

é ortogonal ao plano α. Logo, tem-se

$$r : X = M_0 + \lambda\vec{u}\wedge\vec{v} = (2,-3,-5) + \lambda(6,-3,-5)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

---

2) [3,5 pontos] Obtenha a equação do plano π (na forma algébrica) que passa pela origem do sistema de coordenadas e é perpendicular aos planos $\alpha : 2x-y+3z-1=0$ e $\beta : x+2y+z=0$.

---

2) Em um plano $\sigma : ax+by+cz+d=0$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, o vetor (a,b,c) é ortogonal a σ. Com efeito, assuma que $a\neq 0$ (não se pode ter $a=b=c=0$; logo, se $a=0$, há um outro coeficiente não-nulo e a análise prossegue *mutatis mutandis*). Os pontos $A(-\frac{d}{a},0,0)$, $B(-\frac{b+d}{a},1,0)$ e $C(-\frac{c+d}{a},0,1)$ pertencem todos ao plano σ. Dados os vetores $\vec{w}_1 := \overrightarrow{AB} = (-\frac{b}{a},1,0)$ e $\vec{w}_2 := \overrightarrow{AC} = (-\frac{c}{a},0,1)$ paralelos ao plano, o vetor

$$a\vec{w}_1\wedge\vec{w}_2 = a\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a,b,c)$$

é ortogonal a σ[1]. Logo, $\vec{u} := (2,-1,3) \perp \alpha$ e $\vec{v} := (1,2,1) \perp \beta$. Logo, como $O := (0,0,0)\in\pi$,

$$\pi : X = O + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (0,0,0) + \lambda(2,-1,3) + \mu(1,2,1)\,, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,.$$

Dado $X=(x,y,z)\in\pi$, a dependência linear entre os vetores $\overrightarrow{OX}=(x,y,z)$, $\vec{v}$ e $\vec{u}$ conduz a

$$0 = \det\begin{pmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\,,$$

[1] Não é necessária esta generalidade na análise para tratar o problema, que pode ser resolvido encontrando-se três pontos não-colineares em α e β para determinar uma sequência de dois vetores linearmente independentes em cada plano.

donde se tem

$$\pi : 7x - y - 5z = 0\,.$$

---

3) [3,5 pontos] Achar a equação da reta s que passa pelo ponto $M_0(2,-3,-5)$ e é ortogonal e concorrente à reta

$$r : \begin{cases} \lambda = \frac{x+3}{2} \\ \lambda = \frac{y-1}{-2} \\ \lambda = \frac{z+2}{2} \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Determine, também, o ponto $Q = r \cap s$.

---

3) Primeiramente, $r : X = (-3,1,-2) + \lambda(1,-1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e defina $\vec{u} := (1,-1,1)$, que é paralelo a r. Seja Q o ponto de intersecção de r com s. Como $Q \in r$, pode-se escrever $Q = (-3+\mu, 1-\mu, -2+\mu)$ para algum μ. Ademais, $\overrightarrow{QM_0} = (5-\mu, -4+\mu, -3-\mu)$ deve ser ortogonal ao vetor $\vec{u}$, *id est*,

$$0 = \vec{u} \cdot \overrightarrow{QM_0} = (1,-1,1)\cdot(5-\mu,-4+\mu,-3-\mu) = 6 - 3\mu\,, \quad \text{donde} \quad \mu = 2\,.$$

Desta forma, tem-se $Q(-1,-1,0)$ e $\overrightarrow{QM_0} = (3,-2,-5)$, que conduz a

$$s : X = M_0 + \xi\overrightarrow{QM_0} = (2,-3,-5) + \xi(3,-2,-5)\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$