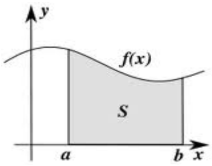
Resolução de Exercícios SI: Aula 01



- Integrais e Derivadas

- Probabilidades

Professor: Fernando Fagundes Ferreira

Monitor: Eder Lucio da Fonseca

EACH USP

Tópicos da apresentação

- 1) Derivadas (breve revisão)
  - Motivação e Propriedades
  - Exemplos
  - Tabela de Derivadas
- 2) Integrais definidas e Indefinidas
  - Propriedades
  - Exemplos
  - Tabela de Integrais
- 3) Probabilidade
  - Propriedades
  - Exemplos

2

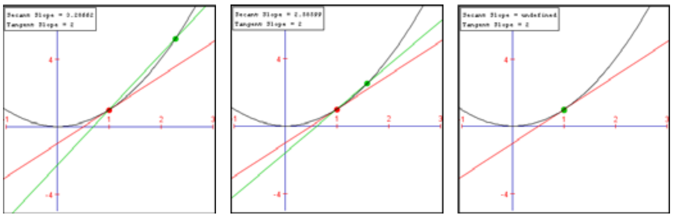
1. Derivadas

Definição: *Seja f uma função e p um ponto de seu domínio. Denomina-se derivada de f no ponto p da seguinte maneira:*

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

Se f admite derivada em p, diremos que derivável ou diferenciável em p.

Exemplo: $y = x^2$



1.1. Derivadas – Funções Importantes

1) $f(x) = cte \Rightarrow f'(x) = 0$
2) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
3) $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$
4) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
5) $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$
6) $f(x) = \mathrm{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$
7) $f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\mathrm{sen}(x)$
8) $f(x) = \mathrm{tg}(x) \Rightarrow f'(x) = \sec^2(x)$
9) $f(x) = \sec(x) \Rightarrow f'(x) = \sec(x) \cdot tg(x)$
10) $f(x) = \mathrm{cotg}(x) \Rightarrow f'(x) = -\mathrm{cosec}^2(\mathrm{x})$
11) $f(x) = \mathrm{cosec}(x) \Rightarrow f'(x) = -\mathrm{cosec}(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{cotg}(x)$

São Teoremas!!!!
A demonstração foi omitida.

1.2. Derivadas - Regras de Derivação

Sejam f e g deriváveis e seja k uma constante. Assim temos:

1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2) $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$
3) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Regra da Cadeia:

Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis, com $Im(g) \subset Dm(f)$. Assim, temos a derivada da função composta $h(t) = f(g(t))$:

$h'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$ ou, na notação de Leibniz: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$.

5

1.3. Derivadas - Exemplos

Calcule a derivada de f(x) em cada um dos casos:

a) $f(x) = 4x^3 + x^2$
b) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$
c) $f(x) = (3x^2+1)e^x$
d) $f(x) = \frac{sen(x)}{x+1}$
e) $f(x) = x^3 + \ln(x)$
f) $f(x) = 3x^5 + \frac{1}{3}x^4 + x + 2$
g) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$
h) $f(x) = e^{3x}$

6

EACH USP

2. Integrais

Definição: Seja *f* uma função definida num intervalo I. Uma primitiva de *f* em *I* é uma função *F* definida em I tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

para todo *x* em *I*.

Exemplo**:**

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k \text{ é } uma\ primitiva\ de\ f(x) = x^2, para\ todo\ x\ em\ \mathbb{R}.$$

k é $uma\ constante.$

- Notação:

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

7

EACH USP

2.1. Integrais – Exemplos de Primitivas

Encontre a primitiva da função *f(x)* em cada um dos casos:

a) $\int dx$

b) $\int x^{\alpha} dx$, $onde\ \alpha \neq 1$ é $um\ real\ fixo$

c) $\int x^3 dx$

d) $\int \frac{1}{x^2} dx$

e) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

8

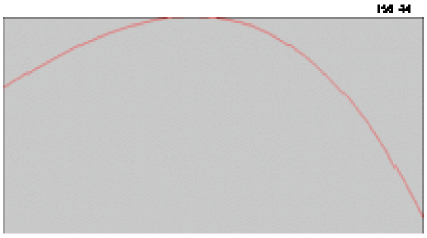
2.2. Integrais – Algumas Primitivas Imediatas

1) $\int c\, dx = cx + k$
2) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k\,, (\alpha \neq -1)$
3) $\int e^{x}\, dx = e^{x} + k$
4) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + k$
5) $\int \cos(x)\, dx = \mathrm{sen}(x) + k$
6) $\int \mathrm{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + k$
7) $\int \sec^2(x)\, dx = \mathrm{tg}(x) + k$
8) $\int \sec(x) tg(x)\, dx = \sec(x) + k$
9) $\int \mathrm{tg}(x) = -ln|\cos(x)| + k$

São Teoremas!!!!
A demonstração foi omitida.

2.3. Integrais – Integral de Riemann

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, então diremos que f é integrável em [a,b]. Podemos ainda dizer que $\int_a^b f(x)\,dx$ é a integral definida de f em [a,b].



Por definição:

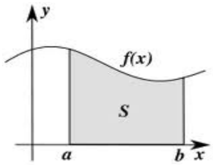
$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, a < b.$

2.4. Integrais – Propriedades e T.F.C.

Teorema: Sejam f, g integráveis em [a,b] e k uma constante. Então:

1) $f + g$ é $integrável\ em\ [a,b]\ e\ \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2) kf é $integrável\ em\ [a,b]\ e\ \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
3) $se\ f(x) \geq 0\ em\ [a,b]\ então\ \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
4) $se\ c \in]a,b[\ \ e\ f(x)$ é $integrável\ em\ [a,b]\ então$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Teorema Fundamental do Cálculo (T.F.C.): Se *f(x)* for integrável em [a,b] e se F for uma primitiva de f em [a,b], então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

11

2.5. Integrais – Exemplos de Definidas

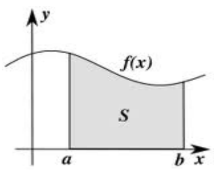
Calcule as integrais definidas:

a) $\int_1^2 x^2\,dx$
b) $\int_{-1}^3 4\,dx$
c) $\int_0^2 (x^3 + 3x - 1)\,dx$
d) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$
e) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)\,dx$
f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen(x)\,dx$
g) $\int_1^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$
h) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{t}\,dt$
i) $\int_1^2 \frac{1+t^2}{t^4}\,dt$

12

2.6. Integrais – Exemplos - Áreas

A integral é vista como a área sob a curva f(x), no intervalo [a,b].



$$Área(S) = \int_a^b f(x)dx$$

Calcule a área do conjunto plano limitado pelas retas:

a) $x = 0, x = 1, y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

b) $x = 0, x = 1, y = 2$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

2.7. Integrais – Exemplo – Mudança de Variáveis

Teorema: Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b, dois reais quaisquer em I. Seja g: [c,d], com g' contínua em [c,d], tal que g(c) = a e g(d) = b. Nestas condições:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

Exemplo: Calcule a integral em cada um dos casos:

a) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{2x-1}\, dx$

b) $\int_0^1 e^{3x}\, dx$

c) $\int_0^1 e^{-x}\, dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} sen(2x)\, dx$

2.8. Integrais – Exemplo – Integral por Partes

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)$$

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$, teremos:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Calcule a integral em cada um dos casos:

a) $\int \mathrm{x} \cdot \cos(x)\ dx$

b) $\int e^x \cos(x)\ dx$

15

3. Probabilidade

Espaço Amostral de um experimento aleatório (Ω): É o conjunto de dos resultados de um experimento aleatório.

Exemplos:

a) Lançamento de uma moeda honesta.
b) Lançamento de um dado.
c) Lançamento de duas moedas.
d) Retirada de uma carta de um baralho completo de 52 cartas.
e) Determinação da vida útil de um componente eletrônico.

16

3.1. Probabilidade – Função de Probabilidade

Definição: É a função *P* que associa a cada evento de *F* um número real pertencente ao intervalo [0,1], satisfazendo os axiomas:

a) $P(\Omega) = 1.$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B), se\ A\ e\ B\ forem\ mutuamente\ exclusivos.$

c) $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

$se\ A_1, A_2, \dots, A_n\ forem\ dois\ a\ dois, eventos\ mutuamente, exclusivos.$

$Pela\ definição, temos: 0 \leq P(A) \leq 1, para\ todo\ evento\ A, A \subset \Omega.$

17

3.1. Probabilidade – Teoremas

T1) Se os eventos $A_1, A_2, \dots, A_n$, formam uma partição do espaço amostral, então:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

T2) Se ϕ é o evento impossível, então $P(\phi) = 0.$

T3) Para todo evento $A \subset \Omega$, $P(A) + P(\bar{A}) = 1.$

T4) Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

18

3.2. Probabilidades – Exemplos

a) Sejam A e B dois eventos em um dado espaço amostral tais que: $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0{,}5$ e $P(A \cap B) = 0{,}1$. Determine o valor de p.

b) Dois processadores dos tipos A e B são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de 1/30, no tipo B 1/80 e, em ambos, 1/1000. Qual a probabilidade de que:

b1) Pelo menos um dos processadores tenha apresentado erro?

b2) Nenhum processador tenha apresentado erro?

19

3.1. Probabilidade – Probabilidade Condicional

Exercício Motivador:

Consideremos 250 alunos que cursam o primeiro ciclo de uma faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 cursam Química (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:

Sexo \ Disciplina	Física	Química	**Total**
Homem	40	60	**100**
Mulher	70	80	**150**
Total	**110**	**140**	**250**

Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?

20

EACH USP

3.1. Probabilidade – Probabilidade Condicional

Definição: Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Definimos a probabilidade condicional de A, dado que B ocorre (A|B) como segue:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, se\ P(B) \neq 0\ ou\ P(B|AB) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, se\ P(A) \neq 0$$

Exercícios:

a) Seja$(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ e $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$. Então, calcule: $P(A|B)$.

b) Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 bolas pretas e 4 bolas verdes. Qual a probabilidade de que ambas as bolas sejam verdes? Qual a probabilidade de que ambas sejam da mesma cor?

21

EACH USP

Bibliografia

- http://www.calculusapplets.com/derivpoint.html
- David P. Doane e Lori E. Seward, Estatística Aplicada à Administração e à Economia. Mc Graw Hill
- Guidorizzi, H. L. Um Curso de Cálculo, vol. 01, 5ª ed. Editora LTC, 2001.
- Morettin, L. G. Estatística Básica – Probabilidade e Inferência. Editora Pearson Prentice Hall, 2010.
- Textos Diversos da Internet.

22