

# **Estatística**

## **3 – Probabilidades**

---

**Prof. Marcela A. G. Machado**

**Página da FEG: [www.feg.unesp.br/~marcela](http://www.feg.unesp.br/~marcela)**

# Exemplo 1 – Probabilidade Condicionada

Dois dados equilibrados são lançados e observa-se o número da face superior:

Seja::  $x_1$  = número 1º dado e  $x_2$  = número 2º dado.

## ESPAÇO AMOSTRAL S

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Consideremos os eventos:

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\} = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

$$B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\} = \{(2,1), (3,1), (3,2), \dots, (6,4), (6,5)\}$$

$$P(A) = 3/36$$

$$P(B) = 15/36$$

$$P(A \cap B) = 1/36$$

# Probabilidade Condicionada

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\} \quad P(A) = 3/36$$

$$B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\}$$

ESPAÇO AMOSTRAL S

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

A

Ocorreu o evento B

$$P(A/B) = ?$$

ESPAÇO AMOSTRAL S

(2,1)					
(3,1)	(3,2)				
(4,1)	(4,2)	(4,3)			
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)		
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	

A

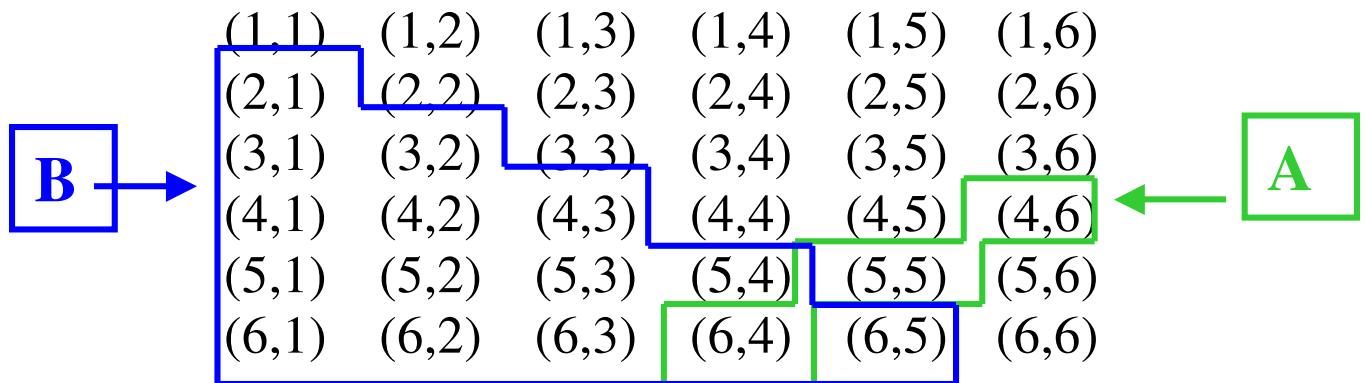
Ocorreu o evento B

$$P(A/B) = 1/15$$

## Probabilidade Condicionada

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\} \quad P(A) = 3/36$$

$$B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\} \quad P(B) = 15/36$$



$$P(A \cap B) = 1/36$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{15/36} = 1/15$$

## Propriedade

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B) \quad P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$$

# Probabilidade Condicionada

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\}$$

$$B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\}$$

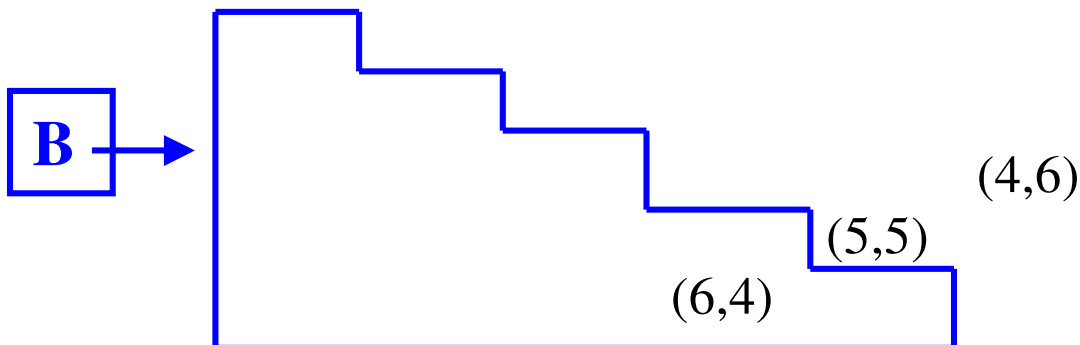
$$P(B) = 15/36$$

ESPAÇO AMOSTRAL S

<b>B</b> →	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ocorreu o evento A

$$P(B/A) = ?$$



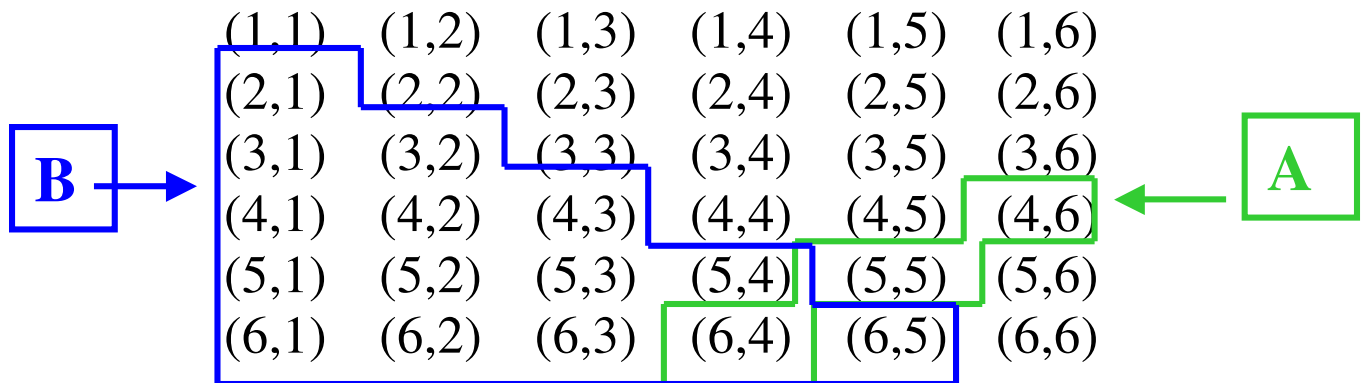
Ocorreu o evento A

$$P(B/A) = 1/3$$

## Probabilidade Condicionada

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\} \quad P(A) = 3/36$$

$$B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\} \quad P(B) = 15/36$$



$$P(A \cap B) = 1/36$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{3/36} = 1/3$$

## Propriedade

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B) \quad P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$$

# Eventos Independentes

Retome o Exemplo 1: lançamento de 2 dados equilibrados

Consideremos os eventos :

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \text{ é par}\}$$

$$B = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 5 \text{ ou } x_2 = 6\}$$

A	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	B
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	

$$P(A) = 18/36 = 1/2$$

$$P(B) = 12/36 = 1/3$$

$$P(A \cap B) = 6/36 = 1/6$$

Observação : **A** , **B** são eventos independentes,  
não relacionados

“Saber que **A** ocorreu não fornece qualquer  
informação sobre a ocorrência de **B** ”

# Eventos Independentes

Retome o Exemplo 1: lançamento de 2 dados equilibrados

Consideremos os eventos :

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \text{ é par}\}$$

$$B = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 5 \text{ ou } x_2 = 6\}$$

Ocorreu o evento A

$P(B/A)=?$

(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ocorreu o evento A

$P(B/A)=6/18=1/3$

$$P(A)=18/36=1/2$$

$$P(B)=12/36=1/3$$

$$P(A \cap B)=6/36=1/6$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = P(B)$$



# Eventos Independentes

Retome o Exemplo 1: lançamento de 2 dados equilibrados

Consideremos os eventos :

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \text{ é par}\}$$

$$B = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = 5 \text{ ou } x_2 = 6\}$$

Ocorreu o evento B

$P(A/B)=?$

(1,5) (1,6)

(2,5) (2,6)

(3,5) (3,6)

(4,5) (4,6)

(5,5) (5,6)

(6,5) (6,6)

Ocorreu o evento B

$P(A|B)=6/12=1/2$

$$P(A)=18/36=1/2$$

$$P(B)=12/36=1/3$$

$$P(A \cap B)=6/36=1/6$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2} = P(A)$$

# Eventos Independentes

No exemplo :

$$P(A)=18/36=1/2 \quad P(B)=12/36=1/3 \quad P(A \cap B)=6/36=1/6$$

$$P(A/B) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B/A) = P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Define-se :

A , B são eventos independentes  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

## Exemplo 2 – Probabilidade Condicionada

Num lote de 100 peças , temos :

20 Defeituosas

80 Não defeituosas

Escolhemos 2 peças , ao acaso:

– com reposição

– sem reposição

Consideremos os eventos :

A={primeira peça é defeituosa}

B={segunda peça é defeituosa}

COM REPOSIÇÃO:

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Espaço amostral	Probabilidade	Evento
DD	$1/5 * 1/5 = 1/25$	$(A \cap B)$
DN	$1/5 * 4/5 = 4/25$	$(A \cap \bar{B})$
ND	$4/5 * 1/5 = 4/25$	$(\bar{A} \cap B)$
NN	$4/5 * 4/5 = 16/25$	$(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

## Exemplo 2 – Probabilidade Condicionada

Num lote de 100 peças , temos :

20 Defeituosas

80 Não defeituosas

Consideremos os eventos :

A={primeira peça é defeituosa}

B={segunda peça é defeituosa}

Pede-se :  $P(A)$  e  $P(B)$

COM REPOSIÇÃO:

---

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/25}{1/5} = 1/5 = P(B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/25}{1/5} = 1/5 = P(A)$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

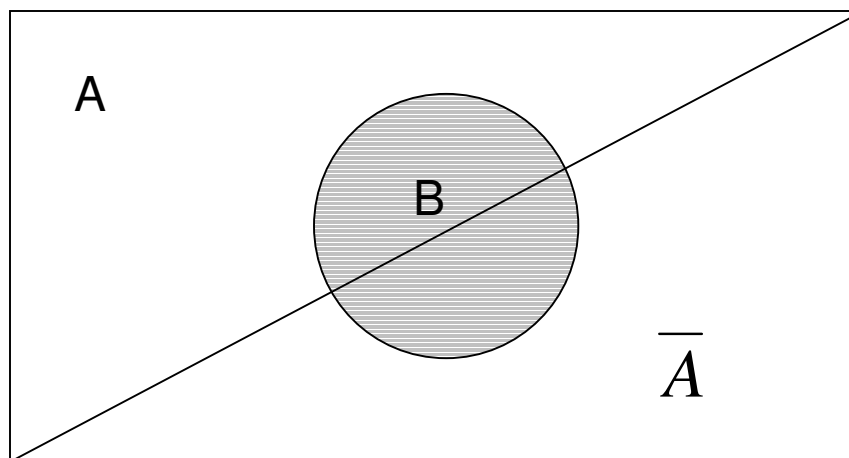
$$\therefore P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 1/25$$

## Exemplo 2 – Probabilidade Condicionada

CASO SEM REPOSIÇÃO

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Espaço amostral	Probabilidade	Evento
DD	$20/100 \cdot 19/99 = 19/495$	$(A \cap B)$
DN	$20/100 \cdot 80/99 = 80/495$	$(A \cap \bar{B})$
ND	$80/100 \cdot 20/99 = 80/495$	$(\bar{A} \cap B)$
NN	$80/100 \cdot 79/99 = 316/495$	$(\bar{A} \cap \bar{B})$



$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B/A) \cdot P(A) + P(B/\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

## Exemplo 2 – Probabilidade Condicionada

### CASO SEM REPOSIÇÃO

---

Espaço amostral	Probabilidade	Evento
DD	$20/100 \cdot 19/99 = 19/495$	$(A \cap B)$
DN	$20/100 \cdot 80/99 = 80/495$	$(A \cap \bar{B})$
ND	$80/100 \cdot 20/99 = 80/495$	$(\bar{A} \cap B)$
NN	$80/100 \cdot 79/99 = 316/495$	$(\bar{A} \cap \bar{B})$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B/A) \cdot P(A) + P(B/\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{19}{495} + \frac{80}{495} = \frac{99}{495} = \frac{1}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{19/495}{1/5} = 19/99 \neq P(B)$$

Eventos A e B não são independentes

# Probabilidades

## Eventos: A, B são EXCLUDENTES ?

- NÃO:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- SIM:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A \cap B) = 0$$

---

## Eventos: A, B são INDEPENDENTES ?

- NÃO:  $P(A \cap B) = P(B / A) \cdot P(A) = P(A / B) \cdot P(B)$

- SIM:  $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$

$$P(B / A) = P(B)$$

$$P(A / B) = P(A)$$