ACH2013 - Matemática Discreta 1 - Exercícios

Prof. Marcelo de Souza Lauretto

2 de Abril de 2009

Os exercícios apresentados nesta lista (não obrigatória, mas fortemente recomendada) foram extraídos do Capítulo 3 do livro:

- E. R. Sheinerman, *Matemática Discreta: Uma Introdução*. Ed. Thomson: São Paulo, 2003.

É recomendável ainda que se tente resolver também os demais exercícios do referido capítulo, pois o amadurecimento em relação aos conceitos e às técnicas de demonstração é obtido com a prática.

OBS: Os exercícios acompanham a numeração do livro.

1 Exercícios Seção 11 (págs. 81–83)

1. Para cada uma das seguintes relações definidas no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine se a relação é reflexiva, anti-reflexiva, anti-simétrica e/ou transitiva.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$

d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$

e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. Digamos que dois inteiros estão próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2 (isto é, os números estão a uma distância de no máximo 2). Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Representemos por R esta relação *estar próximo de.*

a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados. Sua resposta deve apresentar-se como segue:

$$R = \{(x, y) : \ldots\}$$

Prove ou refute:

b) R é reflexiva.

c) R é anti-reflexiva.

d) R é simétrica.

e) R é anti-simétrica.

f) R é transitiva.

4. Seja R uma relação sobre um conjunto A. Prove ou refute: se R é anti-simétrica,então R é anti-reflexiva.

9. Uma forma interessante de dizer que R é simétrica é $R = R^{-1}$. Prove isto (isto é, prove que uma relação R é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$).

10. Dê um exemplo de uma relação que seja simétrica e transitiva, mas não reflexiva. Explique o que está errado na seguinte "prova".

Afirmação: Se R é simétrica e transitiva, então R é reflexiva.

"Prova": Suponhamos que R seja simétrica e transitiva. Simétrica quer dizer que xRy implica yRx. Aplicamos a transitividade a xRy e a yRx, obtendo xRx. Portanto, R é reflexiva.

---

2 Exercícios Seção 12 (págs. 91–92)

1. Quais dos seguintes conjuntos são relações de equivalência?

a) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ no conjunto $\{1,2,3\}$.

b) $R = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ no conjunto $\{1,2,3\}$.

c) $|$ em $\mathbf{Z}$.

d) $\leq$ em $\mathbf{Z}$.

e) $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$, no conjunto $\{1,2,3\}$.

f) $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$, no conjunto $\{1,2,3,4\}$.

g) *É-um-anagrama-de* no conjunto das palavras inglesas (por exemplo, STOP é um anagrama de POTS, porque podemos formar uma palavra a partir da outra mediante uma simples redisposição das letras).

2. Prove que, se x e y são ambos ímpares, então $x \equiv y \pmod 2$.

Prove que, se x e y são ambos pares, então $x \equiv y \pmod 2$.

6. Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A. Prove que a união de todas as classes de equivalência de R é A. Em símbolos, temos

$$\bigcup_{a \in A} [a] = A.$$

7. Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e suponhamos $a, b \in A$. Prove: $a \in [b] \iff b \in [a]$.