1° Trabalho de Matemática Discreta – Profa Dra Karla Lima

Conteúdo abordado nas questões: Lógica formal (proposicional e de predicados) e construções de provas (diretas, indiretas, contrapositiva e por indução).

Data de entrega: 14-09-2015

1. Encontre uma expressão lógica utilizando os operadores $\wedge$, $\vee$ e $\neg$, que é logicamente equivalente a $x \leftrightarrow y$. Prove que sua expressão está correta.
2. Qual é o valor verdade de cada uma das seguintes expressões onde o domínio consiste de inteiros, justifique.
    a. $(\forall x)(\exists y)(x + y = x)$
    b. $(\exists y)(\forall x)(x + y = x)$
    c. $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$
    d. $(\exists y)(\forall x)(x + y = 0)$
3. Use a lógica proposicional para provar a validade dos seguintes argumentos:
    a. $(P \to Q) \wedge (P' \to Q) \to Q$
    b. $(P \vee (Q \wedge R)) \wedge (R' \vee S) \ \wedge (S \to T') \to (T \to P)$
    c. $(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C) \to C$
    d. $A' \to (A \to B)$
4. Em cada uma das fórmulas ou prove que cada uma das seguintes expressões é válida ou dê uma interpretação em que esta é falsa.
    a. $(\exists x)[A(x) \wedge B(x)] \to (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$
    b. $(\forall x)(\forall y)Q(x,y) \to (\forall y)(\forall x)Q(x,y)$
    c. $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \to (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$
    d. $(\forall y)[Q(x,y) \to P(x)] \to (\exists y)[Q(x,y) \to P(x)]$
5. Prove as seguintes declarações usando prova direta, indireta ou contrapositiva, ou dê contra exemplo em caso de falsidade.
    a. Se dois inteiros são, cada um, divisível por algum inteiro n, então a soma destes inteiros é divisível por n.
    b. Para x, y números positivos, $x<y$ se somente se $x^2<y^2$.
    c. O produto do quadrado de dois inteiros é um quadrado perfeito.
    d. Prove que $\sqrt{5}$ não é um número racional.
    e. O produto de dois números irracionais é irracional
    f. A soma de dois números racionais é um número racional
6. Prove por indução que as seguintes afirmações são verdadeiras para todo inteiro positivo.
    a. n^3+2n é divisível por 3
    b. $2^{n-1} \leq n!$ para $n \geq 1$.
    c. $1+2+...+n<n^2$ para $n>1$.
    d. $1.2^1+2.2^2+3.2^3+...+n.2^n=(n-1)2^{n+1}+2$