ACH2012 - Cálculo II

Lista 3: Derivadas Parciais (Parte 3)

1. Utilize derivação implícita para determinar dy/dx.

   (a) $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$

   (b) $\cos(x - y) = xe^y$

2. Utilize derivação implícita para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

   (b) $xyz = \cos(x + y + z)$

3. Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

   (a) $f(x, y) = x^2 y^3 - y^4$, $(2, 1)$, $\theta = \pi/4$,

   (b) $f(x, y) = x\ \mathrm{sen}(xy)$, $(2, 0)$, $\theta = \pi/3$.

4. (a) Determine o gradiente de f.

   (b) Calcule o gradiente no ponto P.

   (c) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

      i. $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3 y$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \rangle$,

      ii. $f(x, y) = y \ln x$, $P(1, -3)$, $\mathbf{u} = \langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$,

      iii. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \rangle$.

5. Determine a derivada direcional da função f no ponto dado na direção e sentido do vetor $\mathbf{v}$.

   (a) $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3, 4)$, $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$,

   (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$,

   (c) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$.

6. Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e na direção e sentido em que isso ocorre.

   (a) $f(x, y) = y^2/x$, $(2, 4)$,

   (b) $f(x, y) = \mathrm{sen}(xy)$, $(1, 0)$,

   (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

   (d) $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$.

7. (a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em $\mathbf{x}$ na direção oposta do vetor gradiente, ou seja, na direção de $- \bigtriangledown f(\mathbf{x})$.

   (b) Utilize a parte (a) para determinar a direção onde $f(x, y) = x^4 y - x^2 y^3$ decresce mais rapido no ponto $(2, -3)$.

8. Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função.

   (a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$,
   (b) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$,
   (c) $f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2}$,
   (d) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$,
   (e) $f(x,y) = e^x \cos(y)$.

9. Mostre que $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy + 2$ tem um número finito de pontos críticos e que $D = 0$ em cada um. A seguir, mostre que f tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

10. Determine os valores máximos e mínimos absolutos de f no conjunto D.

   (a) $f(x,y) = 1 + 4x - 5y$, D é a região fechada com vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,3)$.
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x,y)||x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.
   (c) $f(x,y) = xy^2$, $D = \{(x,y)|x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$.

11. Determine a menor distância entre o ponto $(2,1,-1)$ e o plano $x + y - z = 1$.

12. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

13. Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

14. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

15. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32000 cm^3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

16. Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximos e mínimos de funções sujeitas às restrições dadas

   (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 1$;
   (b) $f(x,y) = 4x + 6y$, $x^2 + y^2 = 13$;
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x^4 + y^4 + z^4 = 1$;
   (d) $f(x,y,z) = x + 2y$, $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$;
   (e) $f(x,y,z) = yz + xy$, $xy = 1$, $y^2 + z^2 = 1$.

17. Determine os valores extremos de $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$ na região descrita pela desigualdade $x^2 + y^2 \leq 16$.

18. Utilize multiplicadores de Lagrange para provar que o retângulo com área máxima, e que tem perímetro constante p, é um quadrado.

19. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1500 cm^2 e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.