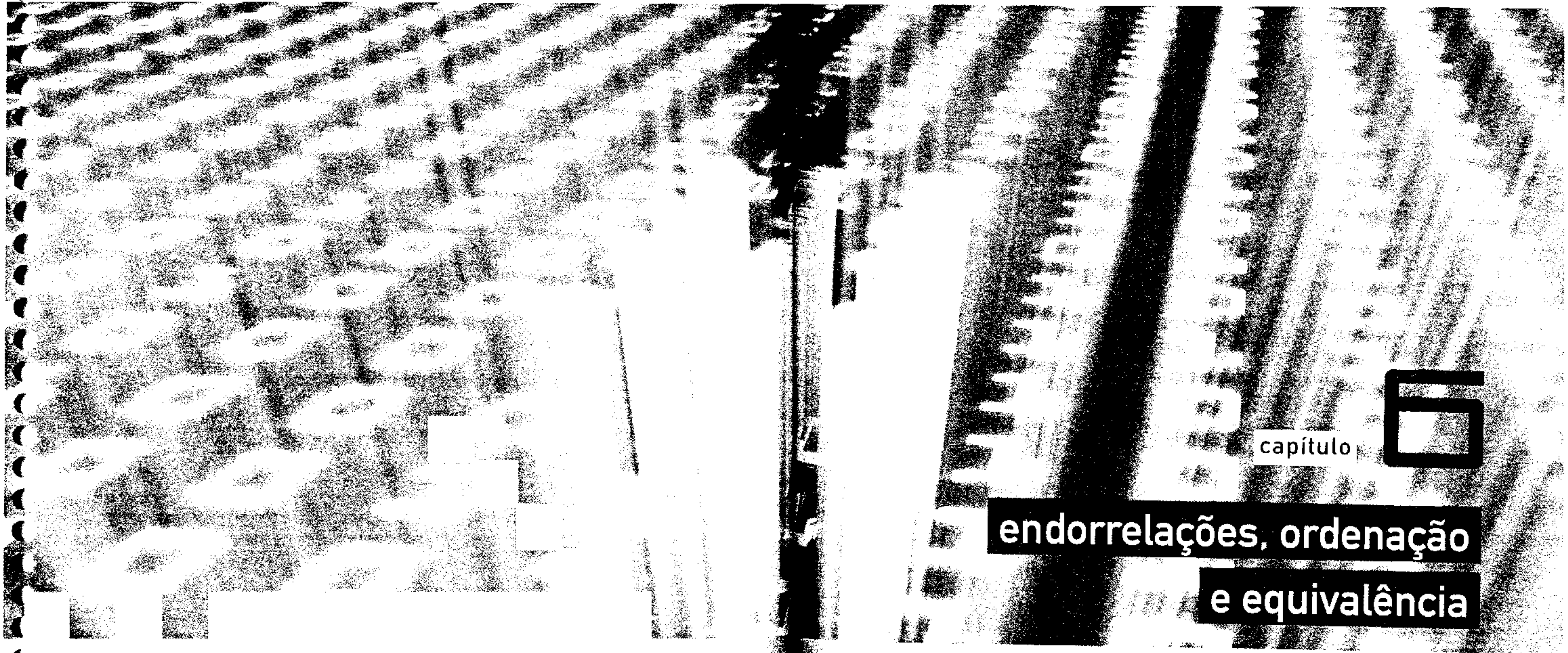


capítulo 6

# endorrelações, ordenação e equivalência

As endorrelações são especialmente importantes, razão pela qual uma série de estudos é desenvolvida especificamente para esse tipo de relações. Neste capítulo, vamos desenvolver diversos estudos por meio de exercícios, incluindo as principais *propriedades* das endorrelações; *fecho*, que é extensão de uma endorrelação de forma a satisfazer determinadas propriedades; as endorrelações que refletem uma noção intuitiva de *ordem*, e *equivalência*, ou as endorrelações que refletem uma noção de igualdade semântica.

## 6.1 ⇢ exercícios resolvidos

**exercício 6.1** Seja A = {a, b}. Determine todas as endorrelações em A e verifique quais são:

*Seja $A = \{a, b\}$. Endorrelações em A são relações de A em A e, portanto, têm todos pares com partidas em $\{a, b\}$ e destinos em $\{a, b\}$.*

**a** Reflexivas;

*Relação Reflexiva é tal que $(\forall a \in A)(a\ R\ a)$. São reflexivas a relação $R_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$ e as outras relações que a incluem, que são:*

$R_2 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle\}$
$R_3 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$
$R_4 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

***solução:*** $R_1$, $R_2$, $R_3$ e $R_4$.

**b** Irreflexivas;

*Relação Irreflexiva ou Relação Antirreflexiva é tal que $(\forall a \in A)(\neg(a\ R\ a))$. São todas relações disjuntas com $R_1$, isto é:*

$R_5 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

*e qualquer subconjunto próprio dela, que são:*

$R_6 = \{\langle a, b\rangle\}$
$R_7 = \{\langle b, a\rangle\}$
$R_8 = \varnothing$

***solução:*** $R_5$, $R_6$, $R_7$ e $R_8$.

**c** Simétricas;

*Relação Simétrica é tal que $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \rightarrow b\ R\ a)$. A definição impõe uma condição, portanto, a relação vazia satisfaz por vacuidade:*

$R_8$



*os pares simétricos:*

$R_5$

*os pares reflexivos mantêm a simetria, assim, as outras são:*

$R_9 = \{\langle a, a\rangle\}$
$R_{10} = \{\langle b, b\rangle\}$
$R_1$
$R_{11} = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$
$R_{12} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$
$R_4$

***solução:*** $R_1$, $R_4$, $R_5$, $R_8$, $R_9$, $R_{10}$, $R_{11}$ e $R_{12}$.

**d** Antissimétricas;

*Relação Antissimétrica é tal que $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \wedge b\ R\ a \rightarrow a = b)$. Só não pode possuir dois pares simétricos, ou seja, não pode conter $R_5$:*

$R_1$
$R_2$
$R_3$
$R_6$
$R_7$
$R_8$
$R_9$
$R_{10}$

*e mais:*

$R_{13} = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle\}$
$R_{14} = \{\langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$
$R_{15} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$
$R_{16} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle\}$

***solução:*** $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_6$, $R_7$, $R_8$, $R_9$, $R_{10}$, $R_{13}$, $R_{14}$, $R_{15}$ e $R_{16}$.

**e** Transitivas;

*Relação Transitiva é tal que(∀a ∈ A)(∀b ∈ A)(∀c ∈ A)(a R b ∧ b R c → a R c).*
*Por vacuidade:*

$R_8$

*outras:*

$R_6$
$R_7$

*fazendo x = y = z:*

$R_9$
$R_{10}$
$R_1$

*fazendo x = y:*

$R_{13}$
$R_{14}$

*fazendo y = z:*

$R_{15}$
$R_{16}$
$R_2$
$R_3$
$R_4$

***solução:*** $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, $R_6$, $R_7$, $R_8$, $R_9$, $R_{10}$, $R_{13}$, $R_{14}$, $R_{15}$ e $R_{16}$.

**f** Conexas.

*Relação Conexa é tal que(∀a ∈ A)(∀b ∈ A)(a R b ∨ b R a ∨ a = b). Todas que incluem $R_6$ ou $R_7$:*

$R_6$
$R_7$



$R_5$
$R_{13}$
$R_{15}$
$R_2$
$R_{11}$
$R_{12}$
$R_4$
$R_{16}$
$R_{14}$
$R_3$

***solução:*** $R_2$, $R_3$, $R_4$, $R_5$, $R_6$, $R_7$, $R_{11}$, $R_{12}$, $R_{13}$, $R_{14}$, $R_{15}$ e $R_{16}$.

---

**exercício 6.2** Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das seguintes endorrelações em A, determine se é:

- reflexiva;
- irreflexiva;
- simétrica;
- antissimétrica;
- transitiva;
- conexa.

*Nas soluções deste exercício, quando existe mais de uma razão para a propriedade valer ou não, citamos uma e usamos a expressão "por exemplo"; quando a razão é única, simplesmente apresentamos a razão. Suponha a, b, c ∈ A.*

**a** $R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

- *é reflexiva, pois 1 $R_1$ 1, 2 $R_1$ 2, 3 $R_1$ 3;*
- *não é irreflexiva, pois, por exemplo, 1 $R_1$ 1. Portanto, não é verdade que ¬(1 $R_1$ 1);*
- *é simétrica pois, além dos pares ⟨a, a⟩, que são seus próprios simétricos, só tem os pares ⟨1, 2⟩ e ⟨2, 1⟩, que são seus simétricos um do outro;*

- *não é antissimétrica, pois $1\ R_1\ 2$, $2\ R_1\ 1$ e $1 \neq 2$;*
- *é transitiva. Além dos pares $\langle a, a\rangle$, temos $1\ R_1\ 2$, $2\ R_1\ 1$ e $1\ R_1\ 1$. Considerando na outra ordem, temos $2\ R_1\ 1$, $1\ R_1\ 2$ e $2\ R_1\ 2$;*
- *não é conexa, pois, por exemplo, 1 e 3 não estão relacionados e $1 \neq 3$, isto é, $\neg(1\ R_1\ 3)$, $\neg(3\ R_1\ 1)$ e $1 \neq 3$.*

**solução:** *É reflexiva, simétrica e transitiva;* não é *irreflexiva, nem antissimétrica e nem conexa.*

**b** $R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

- *é reflexiva, pois $1\ R_2\ 1$, $2\ R_2\ 2$ e $3\ R_2\ 3$;*
- *não é irreflexiva, pois, por exemplo, $1\ R_2\ 1$;*
- *não é simétrica, pois, por exemplo, $1\ R_2\ 2$ e $\neg(2\ R_2\ 1)$;*
- *é antissimétrica, pois, sempre que $a\ R_2\ b$, e $b\ R_2\ a$, é fato que $a = b$;*
- *não é transitiva, pois, por exemplo, $1\ R_2\ 2$, $2\ R_2\ 3$ e $\neg(1\ R_2\ 3)$;*
- *não é conexa, pois, por exemplo, $\neg(1\ R_2\ 3)$, $\neg(3\ R_2\ 1)$ e $1 \neq 3$.*

**solução:** *É reflexiva e antissimétrica; não é irreflexiva, nem simétrica, nem transitiva e nem conexa.*

**c** $R_3 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

- *não é reflexiva, pois $\neg(3\ R_3\ 3)$;*
- *não é irreflexiva, pois, por exemplo, $1\ R_3\ 1$;*
- *não é simétrica, pois, por exemplo, $1\ R_3\ 2$ e $\neg(2\ R_3\ 1)$;*
- *é antissimétrica, pois os únicos pares em que $a\ R_3\ b$ e $b\ R_3\ a$ são $\langle 1, 1\rangle$ e $\langle 2, 2\rangle$;*
- *não é transitiva, pois, por exemplo, $1\ R_3\ 2$, $2\ R_3\ 3$ e $\neg(1\ R_3\ 3)$;*
- *é conexa, pois $1\ R_3\ 2$, $3\ R_3\ 1$ e $2\ R_3\ 3$.*

**solução:** *É antissimétrica e conexa; não é reflexiva, nem irreflexiva, nem simétrica e nem transitiva.*

**d** $R_4 = A \times A$

- *é reflexiva, pois $1\ R_4\ 1$, $2\ R_4\ 2$, $3\ R_4\ 3$;*



- *não é irreflexiva, pois, por exemplo, $1\ R_4\ 1$. Portanto, não é verdade que $\neg(1\ R_4\ 1)$;*
- *é simétrica, pois contém todos os pares. Portanto, para qualquer $a, b \in A$, é fato que $a\ R_4\ b$ e $b\ R_4\ a$;*
- *não é antissimétrica, pois, por exemplo, $1\ R_4\ 2$, $2\ R_4\ 1$ e $1 \neq 2$;*
- *é transitiva, pois contém todos os pares. Portanto, para qualquer $a, b, c \in A$, é fato que $a\ R_4\ b$, $b\ R_4\ c$ e $a\ R_4\ c$;*
- *é conexa, pois, para qualquer $a, b \in A$, é fato que $a\ R_4\ b$.*

**solução:** *É reflexiva, simétrica, transitiva e conexa; não é irreflexiva, nem antissimétrica.*

**e** $R_5 = \varnothing$

- *não é reflexiva, pois, por exemplo, $\neg(3\ R_5\ 3)$;*
- *é irreflexiva, pois $\neg(1\ R_5\ 1)$, $\neg(2\ R_5\ 2)$ e $\neg(3\ R_5\ 3)$;*
- *é simétrica. De fato, em uma condição, quando a premissa é falsa, a condição é sempre verdadeira (independentemente do valor verdade da conclusão considerada). Como não ocorre $a\ R_5\ b$, a relação é simétrica;*
- *é antissimétrica, pois, sendo vazia, não tem pares tais que $a\ R_5\ b$ e $b\ R_5\ a$;*
- *é transitiva por razão análoga ao fato de ser simétrica ou antissimétrica;*
- *não é conexa pois, por exemplo, $\neg(1\ R_5\ 2)$, $\neg(2\ R_5\ 1)$ e $1 \neq 2$.*

**solução:** *É irreflexiva, simétrica, antissimétrica, e transitiva; não é reflexiva nem conexa.*

---

**exercício 6.3** Seja $A = \{a, b, c, d\}$. Defina endorrelações em A tais que:

**a** $R_1$: só tem a propriedade reflexiva;

*Só reflexiva: deve possuir todo par $\langle x, x\rangle$. Será certamente não irreflexiva. Deve possuir um par $\langle x, y\rangle$, mas não o par $\langle y, x\rangle$ (não-simétrica: $\langle a, b\rangle$); deve possuir um par $\langle x, y\rangle$ e $\langle y, x\rangle$, com $x \neq y$ (não antissimétrica: $\langle a, c\rangle$, $\langle c, a\rangle$); deve possuir os pares $\langle x, y\rangle$ e $\langle y, z\rangle$, mas não $\langle x, z\rangle$ (não transitiva: $\langle b, c\rangle$, $\langle c, d\rangle$); para algum x e algum y, com $x \neq y$, não possuir nem $\langle x, y\rangle$, nem $\langle y, x\rangle$ (não conexa).*

**solução:** $R_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$

**b** $R_2$: só tem a propriedade simétrica;

**solução:** $R_2 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

*Não é reflexiva, pois não possui* $\langle a, a\rangle$*; não é irreflexiva, pois possui* $\langle b, b\rangle$*; é não antissimétrica, pois possui* $\langle a, b\rangle$ *e* $\langle b, a\rangle$*, entretanto* $a \neq b$*; não é transitiva, pois possui* $\langle a, b\rangle$ *e* $\langle b, a\rangle$*, mas não possui* $\langle a, a\rangle$*; não é conexa, pois* $b \neq c$ *e não possui* $\langle b, c\rangle$ *nem* $\langle c, b\rangle$*.*

**c** $R_3$: só tem a propriedade transitiva;

**solução:** $R_3 = \{\langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, c\rangle\}$

*Não é reflexiva, nem irreflexiva, nem conexa pelas mesmas razões de* $R_2$*. Porém é transitiva e não é simétrica porque possui* $\langle a, c\rangle$ *e não possui* $\langle c, a\rangle$ *e não é antissimétrica porque possui* $\langle b, d\rangle$ *e* $\langle d, b\rangle$ *e* $b \neq d$*.*

**d** $R_4$: só tem a propriedade antissimétrica;

**solução:** $R_4 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, b\rangle\}$

*Não é reflexiva, nem irreflexiva, nem conexa pelas mesmas razões de* $R_2$*. Porém, é antissimétrica por vacuidade, pois não possui dois pares simétricos. Não é simétrica porque possui* $\langle a, b\rangle$ *e não possui* $\langle b, a\rangle$ *e não é transitiva porque possui* $\langle a, b\rangle$*,* $\langle b, c\rangle$ *e não possui* $\langle a, c\rangle$*. Não é conexa, pois não possui* $\langle a, c\rangle$*, nem* $\langle c, a\rangle$*.*

**e** $R_5$: reflexiva e transitiva, mas não-simétrica;

*Observe que deve: incluir todos os pares do tipo* $\langle x, x\rangle$ *para garantir a reflexividade; incluir um par do tipo* $\langle x, y\rangle$ *para garantir a não-simetria (pois não inclui* $\langle y, x\rangle$*) e a transitividade (pois como* $\langle x, x\rangle$ *e* $\langle x, y\rangle$ *estão na relação, também está* $\langle x, y\rangle$ *analogamente, como* $\langle x, y\rangle$ *e* $\langle y, y\rangle$ *estão na relação, também está* $\langle x, y\rangle$>*. Assim:*

> *reflexiva: deve possuir* $\langle a, a\rangle$*,* $\langle b, b\rangle$*,* $\langle c, c\rangle$*,* $\langle d, d\rangle$*;*
> *não simétrica e transitiva: basta possuir um par* $\langle x, y\rangle$*, mas não* $\langle y, x\rangle$*, por exemplo* $\langle a, b\rangle$*.*

**solução:** $R_5 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle\}$



**f** $R_6$: reflexiva e simétrica, mas não-transitiva;

*É reflexiva: deve possuir* $\langle a, a\rangle$*,* $\langle b, b\rangle$*,* $\langle c, c\rangle$*,* $\langle d, d\rangle$*. Para torná-la não transitiva vamos colocar os pares* $\langle a, b\rangle$ *e* $\langle b, c\rangle$*, mas não* $\langle a, c\rangle$*. Mas, colocando* $\langle a, b\rangle$ *e* $\langle b, c\rangle$*, e tendo que ser simétrica, temos que colocar* $\langle b, a\rangle$ *e* $\langle c, b\rangle$*.*

**solução:** $R_6 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$

**g** $R_7$: simétrica e transitiva, mas não-reflexiva.

**solução:** $R_7 = \varnothing$

---

**exercício 6.4** Defina uma endorrelação que é simultaneamente reflexiva e irreflexiva e determine os correspondentes grafo e matriz.

*Para ser não-reflexiva, não pode possuir pares do tipo* $\langle x, x\rangle$*. Por ser simétrica, se possui um par do tipo* $\langle x, y\rangle$ *então possui um par* $\langle y, x\rangle$*. Nesse caso, sendo também transitiva, terá de ter* $\langle x, x\rangle$ *e* $\langle y, y\rangle$*. Logo, só pode ser a relação vazia sobre o conjunto vazio.*

**solução:** $A = \varnothing$ e $R = \varnothing$.

*A relação é reflexiva por vacuidade, pois não existe* $a \in A$ *tal que* $\neg(a\ R\ a)$*. Portanto, não se pode dizer que não é reflexiva. Logo, é reflexiva.*

*Com a mesma argumentação se diz que é irreflexiva, pois não existe* $a \in A$ *tal que* $a\ R\ a$*.*

*Como* $A = \varnothing$*, o grafo não tem nodos. Portanto, o grafo é vazio (Algumas definições de grafo exigem que o conjunto de vértices seja diferente do vazio. Nesse caso, o correspondente grafo não existe.), e a matriz tem dimensão zero.*

*Note que, se uma endorrelação em A é reflexiva e irreflexiva, então, obrigatoriamente,* $A = \varnothing$*. De fato, por absurdo, suponha que R é reflexiva e irreflexiva e que* $A \neq \varnothing$*. Então:*

| | |
|---|---|
| $A \neq \varnothing \Rightarrow$ | *definição de conjunto vazio* |
| $\exists a \in A \Rightarrow$ | *R é reflexiva* |
| $a\ R\ a \Rightarrow$ | *definição de irreflexiva* |
| *R não é irreflexiva* | |

*o que é um absurdo!*

**exercício 6.5** Como seria a matriz e o grafo de uma endorrelação que *não* é reflexiva *nem* irreflexiva?

***solução:*** *A matriz teria 1 em pelo menos uma posição da diagonal principal (não irreflexiva), mas certamente não em todas posições (não-reflexiva).*

*O grafo teria pelo menos um nodo com endoarco, ou seja, um arco com origem e destino nesse nodo, (não irreflexiva) e pelo menos um vértice sem endoarco (não-reflexiva).*

**exercício 6.6** Exemplifique cada um dos casos abaixo:

**a** Relação que *não* é simétrica *nem* antissimétrica;

*Seja R uma endorrelação em A que não é simétrica e nem antissimétrica. Assim:*

$R$ não é simétrica $\Rightarrow \exists a, b \in A$ tal que $a\ R\ b$ e $\neg(b\ R\ a)$;
$R$ não é antissimétrica $\Rightarrow \exists a, b \in A$ tal que $a\ R\ b$ e $b\ R\ a$, mas $a \neq b$.

*Portanto, uma endorrelação para satisfazer as duas propriedades terá que ter um par* $\langle a, b\rangle$ *tal que* $a\ R\ b$ e $\neg(b\ R\ a)$ *e um par* $\langle c, d\rangle$ *tal que* $c\ R\ d$ e $d\ R\ c$, *sendo que* $c \neq d$.

*Um exemplo:*

$A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$
$1\ R\ 2$, $2\ R\ 1$ e $1 \neq 2 \Rightarrow R$ não é antissimétrica;
$2\ R\ 3$ e $\neg(3\ R\ 2) \Rightarrow R$ não é simétrica.

*Note que uma relação que* não *é simétrica* nem *antissimétrica exige que A tenha pelo menos três elementos. De fato:*

- *suponha* $A = \{a\}$. *Temos duas possibilidades de endorrelações em A:*

  $R_1 = \varnothing \Rightarrow R_1$ a qual é simétrica e antissimétrica; (**exercício 6.2**)
  $R_2 = \{\langle a, a\rangle\} \Rightarrow R_2$ a qual é simétrica e antissimétrica.



- *suponha* $A = \{a, b\}$ *e R uma endorrelação em A:*

  se $a\ R\ b$ e $b\ R\ a \Rightarrow R$ é simétrica
  se $a\ R\ b$ e $\neg(b\ R\ a) \Rightarrow R$ é antissimétrica
  se $\neg(a\ R\ b)$ e $\neg(b\ R\ a) \Rightarrow R$ é simétrica e antissimétrica

***solução:*** *A tem que ter pelo menos três elementos e um par* $\langle a, b\rangle$, *tal que* $a\ R\ b$ e $\neg(b\ R\ a)$ *e um par* $\langle c, d\rangle$ *tal que* $c\ R\ d$ e $d\ R\ c$, *sendo que* $c \neq d$.

**b** Relação que é simultaneamente simétrica e antissimétrica.

*Seja R uma endorrelação em A que é simétrica e antissimétrica. Assim:*

$R = \varnothing \Rightarrow R$ é simétrica e antissimétrica (**exercício 6.2**);
$R \neq \varnothing$. Sejam $a, b \in A$. Então:

| | |
|---|---|
| $a\ R\ b \Rightarrow$ | $R$ é simétrica |
| $a\ R\ b$ e $b\ R\ a \Rightarrow$ | $R$ é antissimétrica |
| $a = b \Rightarrow$ | |
| $R \subseteq \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$ | |

***solução:*** *R contém somente pares do tipo* $\langle a, a\rangle$, *não necessariamente todos, podendo inclusive ser vazia.*

**exercício 6.7** Para cada um dos fechos ilustrados na figura 6.1, faça a correspondente matriz.

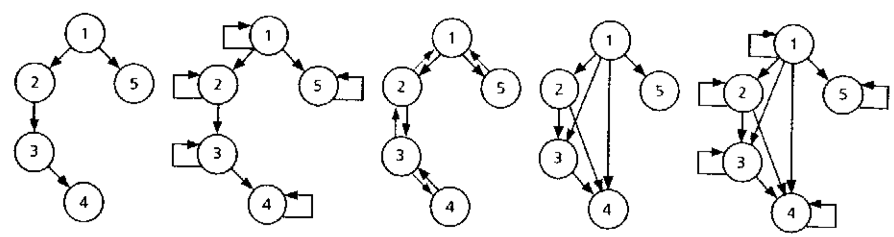



**figura 6.1** Grafos: relação e fechos reflexivo, simétrico, transitivo e transitivo/reflexivo.

***solução:*** *As correspondentes matrizes estão ilustradas na figura 6.2.*

| R | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

| S | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| T | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| TR | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**figura 6.2** Matrizes: fechos reflexivo (T), simétrico (S), transitivo (T) e transitivo/reflexivo (TR)

**exercício 6.8** Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das endorrelações em A abaixo, determine o seguinte:

- fecho reflexivo e transitivo;
- fecho simétrico;

e represente o resultado como:

- grafo;
- matriz.

*Para encontrar o fecho transitivo de uma endorrelação R em A, considere a seguinte construção indutiva:*

$$R^1 = R$$
$$R^{i+1} = R^i \cup \{\langle a, b\rangle \mid \exists c \in A \text{ tal que } a\, R^i\, c \text{ e } c\, R^i\, b\}$$

*Construindo indutivamente, chegará um momento em que $R^n = R^{n+1}$, para algum $n \geq 1$ (como A é finito, o número de pares que se pode acrescentar em R é finito). O fecho transitivo de R é $R^n$. Isto é:*

$$R^+ = \text{Fecho-}\{\text{transitivo}\}(R) = R^n$$

*A construção do fecho reflexivo é independente do fecho transitivo. Ou seja, o fecho reflexivo pode ser calculado antes ou depois do fecho transitivo. Neste exercício, optamos por construir o fecho reflexivo antes do fecho transitivo. Assim:*

$$R* = (\text{Fecho-}\{\text{reflexivo}\}(R))^+$$

*é o fecho transitivo e reflexivo.*



*Também, para uma determinada relação R, denotamos por $R^s$ seu fecho simétrico.*

**a** $R_0 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

Fecho Reflexivo.

$\text{Fecho-}\{\text{reflexivo}\}(R_0) =$
$R_0 \cup \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\} =$
$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Fecho Reflexivo e Transitivo.

$R_0^1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
$R_0^2 = R_0^1 \cup \varnothing$
Portanto, $R_0* = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$.

Fecho Simétrico. $R_0^s = \{\text{Fecho-}\{\text{simétrico}\}(R_0) = R_0$

***solução:*** *$R_0*$ é ilustrado como grafo na figura 6.3 (esquerda) e como matriz na figura 6.4 (esquerda). $R_0^s = R_0$ é ilustrado como grafo na figura 6.3 (direita) e como matriz na figura 6.4 (direita).*


**figura 6.3** Fecho reflexivo e transitivo (esq.) e fecho simétrico (dir.): grafo.

| $R_0*$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |

| $R_0^s = R_0$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |

**figura 6.4** Fecho reflexivo e transitivo (esq.) e fecho simétrico (dir.): matriz.

**b** $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Fecho Reflexivo. $\text{Fecho-}\{\text{reflexivo}\}(R_1) = R_1$

Fecho Reflexivo e Transitivo.

$R_1{}^1 = R_1$
$R_1{}^2 = R_1 \cup \varnothing$
*Portanto,* $R_1* = R_1$.

Fecho Simétrico. $R_1{}^s = Fecho\text{-}\{simétrico\}(R_1) = R_1$

***solução:*** $R_1* = R_1{}^s = R_1$ *é ilustrado como grafo na figura 6.5 e como matriz na figura 6.6.*

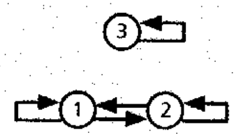


**figura 6.5** Fecho reflexivo e transitivo e fecho simétrico: grafo.

| $R_1* = R_1{}^s = R_1$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |

**figura 6.6** Fecho reflexivo e transitivo e fecho simétrico: matriz.

**c** $R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Fecho Reflexivo. $Fecho\text{-}\{reflexivo\}(R_2) = R_2$

Fecho Reflexivo e Transitivo.

$R_2{}^1 = R_2$
$R_2{}^2 = R_2{}^1 \cup \{\langle 1, 3\rangle\}$
*Portanto,* $R_2* = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$.

Fecho Simétrico. $R_2{}^s = \{Fecho\text{-}\{simétrico\}(R_2)$ *é como segue:*

$R_2{}^s = R_2 \cup \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$



***solução:*** $R_2*$ *é ilustrado como grafo na figura 6.7 (esquerda) e como matriz na figura 6.8 (esquerda).* $R_2{}^s$ *é ilustrado como grafo na figura 6.7 (direita) e como matriz na figura 6.8 (direita).*

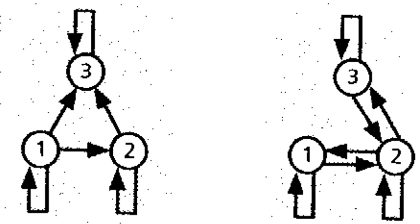


**figura 6.7** Fecho reflexivo e transitivo (esq.) e fecho simétrico (dir.): grafo.

| $R_2*$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |

| $R_2{}^s$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 |

**figura 6.8** Fecho reflexivo e transitivo (esq.) e fecho simétrico (dir.): matriz.

**d** $R_3 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

Fecho Reflexivo.

$Fecho\text{-}\{reflexivo\}(R_3) =$
$R_3 \cup \{\langle 3, 3\rangle\} =$
$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Fecho Reflexivo e Transitivo.

$R_3{}^1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
$R_3{}^2 = R_3{}^1 \cup \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$
$R_3{}^3 = R_3{}^2 \cup \varnothing$
*Portanto,* $R_3* = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Fecho Simétrico.

$R_3{}^s = \{Fecho\text{-}\{simétrico\}(R_3) =$
$R_3{}^s = R_3 \cup \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\} =$
$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$

***solução:*** *$R_3*$ é ilustrado como grafo na figura 6.9 (esquerda) e e como matriz na figura 6.10 (esquerda). $R_3^s$ é ilustrado como grafo na figura 6.9 (direita) e como matriz na figura 6.10 (direita).*

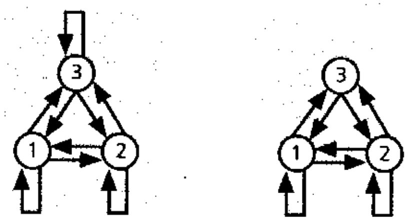



**figura 6.9** Fecho reflexivo e transitivo (esq.) e fecho simétrico (dir.): grafo.

| $R_3*$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 |

| $R_3^s$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 |

**figura 6.10** Fecho reflexivo e transitivo (esq.) e fecho simétrico (dir.): matriz.

**e** $R_4 = A \times A$

*Já vimos que $R_4$ é reflexiva, simétrica e transitiva (**exercício 6.2**). Portanto:*

Fecho Reflexivo. *Fecho-{reflexivo}($R_4$) = $R_4$*
Fecho Reflexivo e Transitivo. $R_4* = R_4$
Fecho Simétrico. $R_4^s$ = *Fecho-{simétrico}($R_4$)* = $R_4$

***solução:*** *$R_4* = R_4^s = R_4$ é ilustrado como grafo na figura 6.11 e como matriz na figura 6.12.*

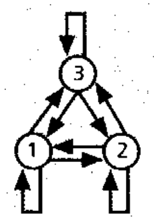



**figura 6.11** Fecho reflexivo e transitivo e fecho simétrico: grafo



| $R_4* = R_4^s = R_4$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 |

**figura 6.12** Fecho reflexivo e transitivo e fecho simétrico: matriz.

**f** $R_5 = \varnothing$

Fecho Reflexivo.

*Fecho-{reflexivo}($R_5$) =*
*$R_5 \cup \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ =*
*$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$*

Fecho Reflexivo e Transitivo.

$R_5^1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
$R_5^2 = R_5^1 \cup \varnothing$
*Portanto,* $R_5* = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

Fecho Simétrico. $R_5^s$ = *Fecho-{simétrico}($R_5$)* = $R_5$

***solução:*** *$R_5*$ é ilustrado como grafo na figura 6.13 (esquerda) e como matriz na figura 6.14 (esquerda). $R_5^s$ é ilustrado como grafo na figura 6.13 (direita) e como matriz na figura 6.14 (direita).*

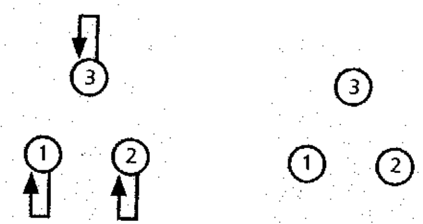



**figura 6.13** Fecho reflexivo e transitivo (esq.) e fecho simétrico (dir.): grafo.

| $R_5^*$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |

| $R_5^s = R_5$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 |

**figura 6.14** Fecho reflexivo e transitivo (esq.) e fecho simétrico (dir.): matriz.

**exercício 6.9** Faz sentido pensar nos seguintes fechos? Justifique a sua resposta:

**a** Fecho irreflexivo;

***solução:*** *O "fecho irreflexivo" de R seria a menor relação que contém R e que satisfaz a propriedade irreflexiva. Se R é irreflexiva, o "fecho irreflexivo" seria o próprio R. Entretanto, se R* não é *irreflexiva, a noção de "fecho irreflexivo" não faz sentido. Isso se dá pelo fato da propriedade irreflexiva ser uma propriedade negativa, no sentido que exige a não-pertinência de certos pares. Assim, a transformação de uma relação não-irreflexiva em uma relação irreflexiva implica na exclusão de elementos, o que contradiz a noção de fecho, a qual tem um sentido de (eventual) inclusão de elementos;*

**b** Fecho antissimétrico.

***solução:*** *Analogamente à irreflexividade, a antissimetria é uma propriedade negativa. Portanto, o conceito de fecho não faz muito sentido para essa propriedade.*

**exercício 6.10** Suponha que são conhecidos todos os trechos parciais que podem ser percorridos por um carteiro (Por exemplo: da casa A para a casa B.). Usando a noção de grafo como uma relação e o conceito de fecho, como se pode representar todos os caminhos possíveis que o carteiro pode fazer?

***solução:*** *Considerando cada casa um nodo e as setas os trechos parciais entre as casas, o fecho transitivo representa todos caminhos possíveis para o carteiro. Cada arco ⟨A, B⟩ no fecho transitivo representa a possibilidade do carteiro ir da casa A à casa B (possivelmente passando por outras casas). No grafo de uma relação são representadas as ligações diretas, no grafo do fecho transitivo são representados os caminhos do grafo original. Todos os*

O FECHO TRANSITIVO SÃO REPRESENTADOS OS CAMINHOS DO GRAFO ORIGINAL. TODOS OS



*caminhos possíveis no grafo da relação aparecem no grafo do fecho transitivo como ligações diretas (arcos). Essa é a característica do fecho transitivo: representa os caminhos, não mais só as ligações diretas. Assim, a representação do fecho a partir do grafo da relação é bem interessante. Em particular, o grafo resultante é conexo, ou seja, para cada par de nodos existe um caminho associado.*

**exercício 6.11** Sejam A = {2, 3, 4, 5} e B = {3, 4, 5, 6, 10}. Para cada uma das seguintes relações, verifique se são conexas:

**a** $R_1 = \{\langle x, y\rangle \in B \times B \mid x \text{ é divisível por } y\}$

***solução:*** *$R_1$ não é conexa. Por exemplo, 3 não é divisível por 5 (ou seja, $\neg(3\ R_1\ 5)$), 5 não é divisível por 3 (ou seja, $\neg(5\ R_1\ 3)$) e $3 \neq 5$;*

**b** $R_2 = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x * y = 12\}$

***solução:*** *$R_2$ não é conexa. Por exemplo, $4 * 5 \neq 12$ (ou seja, $\neg(4\ R_2\ 5)$), $5 * 4 \neq 12$ (ou seja, $\neg(5\ R_1\ 4)$) e $4 \neq 5$;*

**c** $R_3 = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid x = y + 1\}$

***solução:*** *$R_3$ não é conexa. Por exemplo, $5 \neq 2 + 1$ (ou seja, $\neg(5\ R_3\ 2)$), $2 \neq 5 + 1$ (ou seja, $\neg(2\ R_1\ 5)$) e $2 \neq 5$;*

**d** $R_4 = \{\langle x, y\rangle \in B \times B \mid x \leq y\}$

***solução:*** *$R_4$ é conexa. De fato, para qualquer $\langle x, y\rangle \in B \times B$, ocorre que $\langle x, y\rangle \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Portanto, $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

**exercício 6.12** As *relações de ordem* são fechadas para as seguintes operações sobre conjuntos (ou seja, a operação de duas relações de ordem resulta em uma relação de ordem)? Justifique a sua resposta:

*Relação de ordem parcial: relação reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

*Operação fechada para uma determinada propriedade: dada uma operação op e dada uma propriedade P de $R_1$ e $R_2$, queremos saber se necessariamente a relação $R_1$ op $R_2$ satisfaz a propriedade P.*

**a** União;

*No caso que segue, sejam $R_1$ uma endorrelação em $A$ e $R_2$ uma endorrelação em $B$.*

*Então, $R_1 \cup R_2$ é uma endorrelação em $A \cup B$.*

Caso 1 – Relação de Ordem Parcial. *A união é fechada para a propriedade "é relação de ordem parcial", ou seja, se dadas duas relações de ordem parcial $R_1$ e $R_2$, $R_1 \cup R_2$ é também uma relação de ordem parcial? Vamos verificar propriedade por propriedade.*

Reflexiva. $(\forall a \in A)(a\ R\ a)$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações reflexivas. Seja $x \in A \cup B$. Então:*

$$x \in A \cup B \Rightarrow$$
$$\langle x, x\rangle \in R_1 \vee \langle x, x\rangle \in R_2 \Rightarrow$$
$$\langle x, x\rangle \in R_1 \cup R_2$$

*Logo, $R_1 \cup R_2$ é reflexiva.*

Antissimétrica. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \wedge b\ R\ a \rightarrow a = b)$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações antissimétricas.*

*No caso geral, $R_1 \cup R_2$ pode não ser antissimétrica. De fato, como contra-exemplo, sejam os conjuntos:*

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$

*e sejam as relações de ordem parcial:*

$$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$$

*então:*

$$R_1 \cup R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$$



*não é antissimétrica, pois $\langle 2, 1\rangle \in R_1 \cup R_2$ e $\langle 1, 2\rangle \in R_1 \cup R_2$ apesar de $R_1$ e $R_2$ serem antissimétricas.*

*Entretanto, se $A \cap B = \varnothing$, sejam $r, s \in \{1, 2\}$ tal que $r \neq s$:*

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow$$
$$\langle x, y\rangle \in R_r \wedge \langle y, x\rangle \in R_r \wedge \langle x, y\rangle \notin R_s \wedge \langle y, x\rangle \notin R_s \Rightarrow \qquad R_r \text{ é antissimétrica}$$
$$x = y$$

*Logo, se $A \cap B = \varnothing$, então $R_1 \cup R_2$ é antissimétrica.*

Transitiva. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a\ R\ b \wedge b\ R\ c \rightarrow a\ R\ c)$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações transitivas.*

*No caso geral, $R_1 \cup R_2$ pode não ser transitiva. De fato, como contraexemplo, sejam os conjuntos:*

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$

*e sejam as relações de ordem parcial:*

$$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$

*então:*

$$R_1 \cup R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$$

*não é transitiva, pois $\langle 1, 2\rangle \in R_1 \cup R_2$ e $\langle 2, 3\rangle \in R_1 \cup R_2$, mas $\langle 1, 3\rangle \notin R_1 \cup R_2$, apesar de $R_1$ e $R_2$ serem transitivas.*

*Entretanto, se $A \cap B = \varnothing$, sejam $r, s \in \{1, 2\}$ tal que $r \neq s$:*

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow$$
$$\langle x, y\rangle \in R_r \wedge \langle y, z\rangle \in R_r \wedge \langle x, y\rangle \notin R_s \wedge \langle y, z\rangle \notin R_s \Rightarrow \qquad R_r \text{ é transitiva e } A \cap B = \varnothing$$
$$\langle x, z\rangle \in R_r \wedge \langle x, z\rangle \notin R_s \Rightarrow$$
$$\langle x, z\rangle \in R_r \Rightarrow$$
$$\langle x, z\rangle \in R_r \cup R_s$$

*Logo, se $A \cap B = \emptyset$, então $R_1 \cup R_2$ é transitiva.*

**solução:** *As relações de ordem parciais não são fechadas para a união. Entretanto, se $R_1$ e $R_2$ são relações de ordem parciais em A e em B, respectivamente, tais que $A \cap B = \emptyset$, então $R_1 \cup R_2$ é relação de ordem parcial.*

Caso 2 – Relação de Ordem Parcial Estrita: *relação irreflexiva, antissimétrica e transitiva.*

Irreflexiva ou Antirreflexiva. $(\forall a \in A)(\neg(a\ R\ a))$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações irreflexivas. Seja $x \in A \cup B$. Então temos três possibilidades:*

$x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow$
$\quad \langle x, x\rangle \notin R_1$ (porque $R_1$ é irreflexiva) $\wedge \langle x, x\rangle \notin R_2$ (porque $x \notin B$) $\Rightarrow$
$\quad \langle x, x\rangle \notin R_1 \cup R_2$

$x \notin A \wedge x \in B \Rightarrow$
$\quad \langle x, x\rangle \notin R_1$ (porque $x \notin A$) $\wedge \langle x, x\rangle \notin R_2$ (porque $R_2$ é irreflexiva) $\Rightarrow$
$\quad \langle x, x\rangle \notin R_1 \cup R_2$

$x \in A \wedge x \in B \Rightarrow$
$\quad \langle x, x\rangle \notin R_1 \wedge \langle x, x\rangle \notin R_2$ (porque $R_1$ e $R_2$ são irreflexivas) $\Rightarrow$
$\quad \langle x, x\rangle \notin R_1 \cup R_2$

*Logo, $R_1 \cup R_2$ é irreflexiva.*

Antissimétrica. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \wedge b\ R\ a \to a = b)$

*A propriedade antissimétrica para o caso $A \cap B = \emptyset$ se mantém, mas o contraexemplo para a propriedade antissimétrica apresentado antes não é válido aqui porque a relação não era irreflexiva. É preciso encontrar outro contra-exemplo irreflexivo. Seja ele:*

$R_1 = \{\langle 1, 2\rangle\}$ e $R_2 = \{\langle 2, 1\rangle\} \Rightarrow$
$\quad R_1 \cup R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\} \Rightarrow$
$\quad R_1 \cup R_2$ é não-antissimétrica

Transitiva. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a\ R\ b \wedge b\ R\ c \to a\ R\ c)$



*Da mesma forma é necessário outro contraexemplo da propriedade transitiva. Considere:*

$R_1 = \{\langle 1, 2\rangle\}$ e $R_2 = \{\langle 2, 3\rangle\} \Rightarrow$
$R_1 \cup R_2$ não é transitiva pois $\langle 1, 3\rangle \notin R_1 \cup R_2$

**solução:** *As relações de ordem parciais estritas não são fechadas para a união. Entretanto, se $R_1$ e $R_2$ são relações de ordem parciais estritas em A e em B, respectivamente, tais que $A \cap B = \emptyset$, então $R_1 \cup R_2$ é relação de ordem parcial estrita.*

Caso 3 – Relação de Ordem Conexa Ampla/Estrita.

*Só falta verificar a propriedade conexa.*

Conexa. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \vee b\ R\ a \vee a = b)$

*O fato de $R_1$ e $R_2$ serem conexas não faz $R_1 \cup R_2$ conexa. Como contraexemplo, sejam:*

$A = \{1, 2, 4\}$
$B = \{1, 2, 3\}$
$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$
$R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

*Assim, $R_1$ e $R_2$ são conexas, mas $R_1 \cup R_2$ não é conexa, pois $\langle 3, 4\rangle \notin R_1 \cup R_2$, $\langle 4, 3\rangle \notin R_1 \cup R_2$ e $3 \neq 4$.*

*Entretanto, se $A = B$ então:*

$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x\ R_1\ y \vee x\ R_1\ y \vee x = y) \Rightarrow$
$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\langle x, y\rangle \in R_1 \cup R_2 \vee \langle y, x\rangle \in R_1 \cup R_2 \vee x = y) \Rightarrow$
$R_1 \cup R_2$ é conexa.

**solução:** *No caso geral, a propriedade conexa não se mantém e, portanto, as relações de ordem conexas não são fechadas para a união.*

**b** Intersecção;

*No que segue, sejam $R_1$ uma endorrelação em A e $R_2$ uma endorrelação em B.*

*Então, $R_1 \cap R_2$ é uma endorrelação em $A \cap B$.*

Caso 1 – Relação de Ordem Parcial: *reflexiva, antissimétrica e transitiva*

Reflexiva. $(\forall a \in A)(a \; R \; a)$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações reflexivas. Seja $x \in A \cap B$. Então:*

$$x \in A \cap B \Rightarrow$$
$$\langle x, x\rangle \in R_1 \wedge \langle x, x\rangle \in R_2 \Rightarrow$$
$$\langle x, x\rangle \in R_1 \cap R_2$$

*Logo, $R_1 \cap R_2$ é reflexiva.*

Antissimétrica. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \; R \; b \wedge b \; R \; a \rightarrow a = b)$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações antissimétricas.*

*Sejam $x, y \in A \cap B$. Então:*

$$\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2 \wedge \langle y, x\rangle \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow$$
$$\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle y, x\rangle \in R_1 \Rightarrow$$
$$x = y$$

*Logo, $R_1 \cap R_2$ é antissimétrica.*

Transitiva. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a \; R \; b \wedge b \; R \; c \rightarrow a \; R \; c)$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações transitivas.*

*Sejam $x, y, z \in A \cap B$. Então:*

$$\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow$$
$$\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1 \wedge \langle x, y\rangle \in R_2 \wedge \langle y, z\rangle \in R_2 \Rightarrow$$
$$\langle x, z\rangle \in R_1 \wedge \langle x, z\rangle \in R_2 \Rightarrow$$
$$\langle x, z\rangle \in R_1 \cap R_2$$

*Logo, $R_1 \cap R_2$ é transitiva.*

***solução:*** *As relações de ordem parciais são fechadas para a intersecção.*



Caso 2 – Relação de Ordem Parcial Estrita: *relação irreflexiva, antissimétrica e transitiva.*

*Só é preciso verificar a propriedade irreflexiva.*

Irreflexiva ou Antirreflexiva. $(\forall a \in A)(\neg(a \; R \; a))$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações irreflexivas. Seja $x \in A \cap B$. Então:*

$$x \in A \cap B \Rightarrow$$
$$x \in A \Rightarrow$$
$$\langle x, x\rangle \notin R_1 \Rightarrow$$
$$\langle x, x\rangle \notin R_1 \cap R_2 \Rightarrow$$

*Logo, $R_1 \cap R_2$ é irreflexiva.*

***solução:*** *As relações de ordem parciais estritas são fechadas para a intersecção.*

Caso 3 – Relação de Ordem Conexa Ampla/Estrita.

*Só falta verificar a propriedade conexa.*

Conexa. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \; R \; b \vee b \; R \; a \vee a = b)$

*O fato de $R_1$ e $R_2$ serem conexas não faz $R_1 \cap R_2$ conexa. Como contraexemplo, sejam:*

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$
$$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$$

*Assim, $R_1$ e $R_2$ são conexas, mas $R_1 \cap R_2$ não é conexa, pois $\langle 1, 2\rangle \notin R_1 \cap R_2$, $\langle 2, 1\rangle \notin R_1 \cup R_2$ e $1 \neq 2$.*

***solução:*** *No caso geral, a propriedade conexa não se mantém e, portanto, as relações de ordem conexas não são fechadas para a intersecção.*

**c** Complemento;

*Sejam $R_1$ uma endorrelação em A e $R_2$ a endorrelação complementar, isto é:*

$$R_2 = (A \times A) - R_1$$

*Dado que $R_1$ satisfaz uma determinada propriedade, $R_2$ também satisfaz?*

Reflexiva. $(\forall a \in A)(a\ R\ a)$

*Suponha $R_1$ relação reflexiva. Seja $x \in A$. Então:*

$x \in A \Rightarrow$
$\langle x, x\rangle \in R_1 \Rightarrow$
$\langle x, x\rangle \notin (A \times A) - R_1$

*Logo, $R_2 = (A \times A) - R_1$ não é reflexiva, mas é irreflexiva.*

Antissimétrica. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \land b\ R\ a \rightarrow a = b)$

*$R_1$ antissimétrica não significa necessariamente que $R_2$ é antissimétrica. Contraexemplo:*

$A = \{1, 2\}$
$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
$R_2 = (A \times A) - R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

*Logo, $R_2 = (A \times A) - R_1$ não é antissimétrica.*

***solução:*** *No caso geral, as propriedades reflexiva e antissimétrica não se mantêm e, portanto, não são fechadas para a operação de complemento:*

- *relações de ordem parciais/conexas;*
- *relações de ordem parciais/conexas estritas;*

**d** Diferença;

*Sejam $R_1$ uma endorrelação em A e $R_2$ uma endorrelação em B. Então, $R_1 - R_2$ é uma endorrelação em A. A questão fica assim: dado que $R_1$ e $R_2$ têm certa propriedade $R_1 - R_2$ também tem?*



Reflexiva. $(\forall a \in A)(a\ R\ a)$

*$R_1$ e $R_2$ reflexivas não significa necessariamente que $R_1 - R_2$ é reflexiva. Contraexemplo:*

$A = \{1, 2\}$
$B = \{2\}$
$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
$R_2 = \{\langle 2, 2\rangle\}$
$R_1 - R_2 = \{\langle 1, 1\rangle\}$

*Logo, $R_1 - R_2$ não é reflexiva em A (apesar de ser reflexiva em A - B).*

Irreflexiva ou Antirreflexiva. $(\forall a \in A)(\neg(a\ R\ a))$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações irreflexivas. Seja $x \in A$. Então:*

$\langle x, x\rangle \notin R_1 \Rightarrow$
$\langle x, x\rangle \notin R_1 - R_2$

*Logo, $R_1 - R_2$ é irreflexiva.*

Antissimétrica. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \land b\ R\ a \rightarrow a = b)$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações antissimétricas.*

*Sejam $x, y \in A$. Então:*

$\langle x, y\rangle \in R_1 - R_2 \land \langle y, x\rangle \in R_1 - R_2 \Rightarrow$
$\langle x, y\rangle \in R_1 \land \langle y, x\rangle \in R_1 \Rightarrow$
$x = y$

*Logo, $R_1 - R_2$ é antissimétrica.*

Transitiva. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a\ R\ b \land b\ R\ c \rightarrow a\ R\ c)$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações transitivas. Sejam $x, y, z \in A$. Então:*

$\langle x, y\rangle \in R_1 - R_2 \land \langle y, z\rangle \in R_1 - R_2 \Rightarrow$
$\langle x, y\rangle \in R_1 \land \langle y, z\rangle \in R_1 \land \langle x, y\rangle \notin R_2 \land \langle y, z\rangle \notin R_2 \Rightarrow$
$\langle x, z\rangle \in R_1$

*mas não necessariamente $\langle x, z\rangle \notin R_2$ e, portanto, não necessariamente é fechada para a diferença. Contraexemplo:*

*$R_1$ e $R_2$ transitivas não significa necessariamente que $R_1 - R_2$ é transitiva. Contraexemplo:*

$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{1, 2, 3\}$
$R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$
$R_2 = \{\langle 1, 3\rangle\}$
$R_1 - R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

*Logo, $R_1 - R_2$ não é transitiva.*

*Não é necessário verificar outras propriedades porque a propriedade transitiva é necessária em qualquer relação de ordem estrita.*

**solução:** *No caso geral, as propriedades reflexiva e transitiva não se mantêm e, portanto, não são fechadas para a operação de diferença:*

- *relações de ordem parciais/conexas;*
- *relações de ordem parciais/conexas estritas;*

**e** Produto Cartesiano.

*Sejam $R_1$ uma endorrelação em $A$ e $R_2$ uma endorrelação em $B$. Então $R_1 \times R_2$ é uma endorrelação em $A \times B$ tal que (já mostrado no capítulo 4):*

$$R_1 \times R_2 = \{\langle\langle x, r\rangle, \langle y, s\rangle\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R_1\} \wedge \langle r, s\rangle \in R_2\}$$

*A questão fica assim: dado que $R_1$ e $R_2$ têm certa propriedade, $R_1 \times R_2$ também tem?*

Caso 1 – Relação de Ordem Parcial: *reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

Reflexiva.*$(\forall a \in A)(a\ R\ a)$*

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações reflexivas. Sejam $x \in A$ e $y \in B$. Então:*

$\langle x, x\rangle \in R_1 \wedge \langle y, y\rangle \in R_2 \Rightarrow$
$\langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \in R_1 \times R_2$



*Logo, $R_1 \times R_2$ é reflexiva.*

Antissimétrica.*$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \wedge b\ R\ a \to a = b)$*

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações antissimétricas. Sejam $x, y \in A$ e $r, s \in B$. Então:*

$\langle\langle x, r\rangle, \langle y, s\rangle\rangle \in R_1 \times R_2 \wedge \langle\langle y, s\rangle, \langle x, r\rangle\rangle \in R_1 \times R_2 \Rightarrow$
$\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle y, x\rangle \in R_1 \wedge \langle r, s\rangle \in R_2 \wedge \langle s, r\rangle \in R_2 \Rightarrow$
$x = y \wedge r = s \Rightarrow$
$\langle\langle x, r\rangle, \langle y, s\rangle\rangle = \langle\langle y, s\rangle, \langle x, r\rangle\rangle$

*Logo, $R_1 \times R_2$ é antissimétricas.*

Transitiva.*$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a\ R\ b \wedge b\ R\ c \to a\ R\ c)$*

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações transitivas. Sejam $x, y, z \in A$ e $r, s, t \in B$. Então:*

$\langle\langle x, r\rangle, \langle y, s\rangle\rangle \in R_1 \times R_2 \wedge \langle\langle y, s\rangle, \langle z, t\rangle\rangle \in R_1 \times R_2 \Rightarrow$
$\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle y, z\rangle \in R_1 \wedge \langle r, s\rangle \in R_2 \wedge \langle s, t\rangle \in R_2 \Rightarrow$
$\langle x, z\rangle \in R_1 \wedge \langle r, t\rangle \in R_2 \Rightarrow$
$\langle\langle x, r\rangle, \langle z, t\rangle\rangle \in R_1 \times R_2$

*Logo, $R_1 \times R_2$ é transitiva.*

**solução:** *As relações de ordem parciais são fechadas para o produto cartesiano.*

Caso 2 – Relação de Ordem Parcial Estrita: *relação irreflexiva, antissimétrica e transitiva.*

*Só é preciso verificar a propriedade irreflexiva.*

Irreflexiva ou Antirreflexiva. *$(\forall a \in A)(\neg(a\ R\ a))$*

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações irreflexivas. Sejam $x \in A$ e $y \in B$. Então:*

$x \in A \wedge y \in B \Rightarrow$
$\langle x, x\rangle \notin R_1 \wedge \langle y, y\rangle \notin R_2 \Rightarrow$
$\langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \notin R_1 \times R_2$

*Logo, $R_1 \times R_2$ é irreflexiva.*

**solução:** *As relações de ordem parciais estritas são fechadas para o produto cartesiano.*

Caso 3 – Relação de Ordem Conexa Ampla/Estrita.

*Só falta verificar a propriedade conexa.*

Conexa.$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \lor b\ R\ a \lor a = b)$

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações conexas. Sejam $x, y \in A$ e $r, s \in B$. Então:*

$$
\begin{aligned}
&(x\,R_1\,y \lor y\,R_1\,x \lor x = y) \land (r\,R_2\,s \lor s\,R_2\,r \lor r = s) \Rightarrow\\
&((x\,R_1\,y \land (r\,R_2\,s \lor s\,R_2\,r \lor r = s)) \lor\\
&\qquad (y\,R_1\,x \land (r\,R_2\,s \lor s\,R_2\,r \lor r = s)) \lor\\
&\qquad (x = y) \land (r\,R_2\,s \lor s\,R_2\,r \lor r = s)) \Rightarrow\\
&(x\,R_1\,y \land r\,R_2\,s) \lor (x\,R_1\,y \land s\,R_2\,r) \lor (x\,R_1\,y \land r = s) \lor\\
&\qquad (y\,R_1\,x \land r\,R_2\,s) \lor (y\,R_1\,x \land s\,R_2\,r) \lor (y\,R_1\,x \land r = s) \lor\\
&\qquad (x = y \land r\,R_2\,s) \lor (x = y \land s\,R_2\,r) \lor (x = y \land r = s) \Rightarrow\\
&\langle x, r\rangle\,R_1 \times R_2\,\langle y, s\rangle \lor \langle x, s\rangle\,R_1 \times R_2\,\langle y, r\rangle \lor\\
&\qquad \langle y, r\rangle\,R_1 \times R_2\,\langle x, s\rangle \lor \langle y, s\rangle\,R_1 \times R_2\,\langle x, r\rangle \lor\\
&\qquad \langle x, r\rangle = \langle y, s\rangle \lor \langle x, s\rangle = \langle y, r\rangle \Rightarrow\\
&(\langle x, r\rangle\,R_1 \times R_2\,\langle y, s\rangle \lor \langle y, s\rangle\,R_1 \times R_2\,\langle x, r\rangle \lor \langle x, r\rangle = \langle y, s\rangle) \lor\\
&\qquad (\langle x, s\rangle\,R_1 \times R_2\,\langle y, r\rangle \lor \langle y, r\rangle\,R_1 \times R_2\,\langle x, s\rangle \lor \langle x, s\rangle = \langle y, r\rangle)
\end{aligned}
$$

*Logo, $R_1 \times R_2$ é conexa.*

**solução:** *As relações de ordem conexas amplas/estritas são fechadas para o produto cartesiano.*

---

**exercício 6.13** Foi visto que toda relação de ordem conexa (ampla ou estrita, respectivamente) é uma relação de ordem parcial (ampla ou estrita, respectivamente), como ilustrado na figura 6.15. Justifique por que a reciprocidade nem sempre é verdadeira.



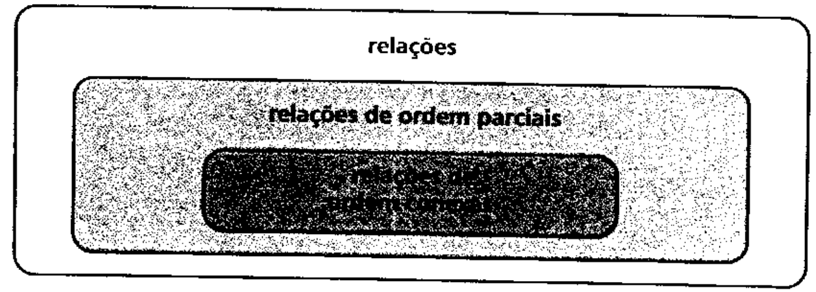



**figura 6.15** Continência entre os diversos tipos de relações de ordem.

*A justificativa de que alguma propriedade nem sempre vale é um contra-exemplo.*

**a** Relação de ordem parcial não-conexa e ampla. *Lembrando: uma relação de ordem parcial ampla é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

**solução:** *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ uma endorrelação em A. R é reflexiva, antissimétrica e transitiva, mas não é conexa, pois, por exemplo, $\neg(1\ R\ 2)$, $\neg(2\ R\ 1)$ e $1 \neq 2$.*

**b** Relação de ordem parcial não-conexa e estrita. *Lembrando: uma relação de ordem parcial estrita é uma relação irreflexiva, antissimétrica e transitiva.*

**solução:** *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ uma endorrelação em A. R é irreflexiva, antissimétrica e transitiva, mas não é conexa, pois, por exemplo, $\neg(2\ R\ 3)$, $\neg(3\ R\ 2)$ e $2 \neq 3$.*

---

**exercício 6.14** Mostre que as seguintes relações de ordem não são conexas:

*Relação conexa:* $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \lor b\ R\ a \lor a = b)$

**a** Para um dado conjunto A, $\langle \mathbf{P}(A), \subseteq\rangle$;

*Para mostrar que uma endorrelação R não é conexa temos que provar que:*

$$(\exists a \in A)(\exists b \in A)(\langle a, b\rangle \notin R \land \langle b, a\rangle \notin R \land a \neq b)$$

*No nosso caso: sejam $A_1, A_2 \in \mathbf{P}(A)$ tais que $A_1 \not\subseteq A_2$, $A_2 \not\subseteq A_1$ e $A_1 \neq A_2$. Para $A_1$ e $A_2$ existirem é preciso que A tenha pelo menos dois elementos. Exemplo:*

$A = \{a, b\}$
$A_1 = \{a\}$
$A_2 = \{b\}$

***solução:*** *$\langle \mathbf{P}(A), \subseteq\rangle$ não é uma relação conexa para $\#A \geq 2$ e, portanto, não é conexa no caso geral;*

**b** Relação implicação em proposições.

*Sejam $\Rightarrow$ a relação de implicação, $p_1$: "x é ímpar" e $p_2$: "x é par". Então:*

$$\text{não é fato que } p_1 \Rightarrow p_2 \wedge \text{não é fato que } p_2 \Rightarrow p_1 \wedge p_1 \neq p_2$$

***solução:*** *A relação de implicação não é conexa no caso geral.*

---

**exercício 6.15** Por que, em uma relação de ordem vista como um grafo, jamais ocorrerá um ciclo (um caminho partindo e chegando em um mesmo nodo), excetuando-se, eventualmente, no caso de *endoarcos* (ou *endoarestas*) ou seja, arcos com origem e destino em um mesmo nodo?

***solução:*** *Suponha uma relação de ordem R em A de qualquer tipo. Portanto, R é uma relação antissimétrica e transitiva. Suponha que R possui um ciclo. Portanto, existem $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n \in A$ tais que:*

$$a_1 R a_2, a_2 R a_3, \ldots, a_{n-1} R a_n, a_n R a_1$$

*(caracterizando um ciclo). Pela propriedade transitiva, vale:*

$$a_2 R a_1, a_3 R a_2, \ldots, a_n R a_{n-1}, a_1 R a_n$$

*Pela propriedade antissimétrica, vale:*

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a_n$$

*Portanto, os únicos ciclos possíveis são os endoarcos.*



---

**exercício 6.16** Seja A = {a, b, c}. Determine quais das seguintes endorrelações em A são relações de equivalência (justifique a sua resposta):

**a** $R_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

*Relação de equivalência: relação reflexiva, simétrica e transitiva.*

***solução:***

Reflexiva. $(\forall a \in A)(a \mathrel{R} a)$

*É reflexiva, pois:*

$\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle c, c\rangle \in R_1$

Simétrica. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \mathrel{R} b \to b \mathrel{R} a)$

*É simétrica, pois:*

$\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle \in R_1$

*Observe que não é obrigatório que $\langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle \in R_1$ para que a relação seja simétrica;*

Transitiva. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a \mathrel{R} b \wedge b \mathrel{R} c \to a \mathrel{R} c)$

*É transitiva, pois:*

$\langle a, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle a, a\rangle \in R_1$
$\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, b\rangle \in R_1$
$\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, a\rangle \in R_1$
$\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, b\rangle \in R_1$
$\langle b, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle \in R_1$
$\langle b, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle \in R_1$
$\langle b, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, a\rangle \in R_1$
$\langle b, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, b\rangle \in R_1$

*Logo, $R_1$ é relação de equivalência;*

**b** $R_2 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$

***solução:***

Reflexiva. $(\forall a \in A)(a\ R\ a)$

*Não-reflexiva, pois:*

$\langle c, c\rangle \notin R_2$

*Logo, $R_2$ não é relação de equivalência;*

**c** $R_3 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$

***solução:*** *Da mesma forma que, na relação anterior, não é relação de equivalência. De fato:*

Reflexiva. $(\forall a \in A)(a\ R\ a)$

*Não-reflexiva, pois:*

$\langle c, c\rangle \notin R_3$

*Logo, $R_3$ não é relação de equivalência;*

**d** $R_4 = A \times A$

***solução:*** *No **exercício 6.2** foi mostrado que, para $A = \{1, 2, 3\}$, $A \times A$ é reflexiva, simétrica e transitiva. Como o conjunto dos dois exercícios são iguais a menos de isomorfismo (ou seja, o nome dos elementos é irrelevante), as propriedades também valem para $R_4 = A \times A$, dado $A = \{a, b, c\}$.*

*Logo, $R_4$ é relação de equivalência;*

**e** $R_5 = \varnothing$

***solução:***

Reflexiva. $(\forall a \in A)(a\ R\ a)$



*Não-reflexiva, pois, por exemplo:*

$\langle a, a\rangle \notin R_5$

*Logo, $R_5$ não é relação de equivalência.*

---

**exercício 6.17** Em que condições a relação $\varnothing: A \to A$ é uma relação de equivalência?

*$\varnothing: A \to A$ é sempre uma relação simétrica e transitiva (**exercício 6.2**). Entretanto, uma endorrelação de equivalência deve ser ainda reflexiva. A endorrelação $\varnothing: A \to A$ é reflexiva somente quando $A = \varnothing$.*

***solução:*** *Quando $A = \varnothing$.*

---

**exercício 6.18** Seja R uma endorrelação em $\mathbf{N}^2$ definida por:

$$\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a + b = c + d$$

Demonstre que R é uma relação de equivalência.

***solução:*** *Uma endorrelação é de equivalência se satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Vamos verificar cada propriedade separadamente:*

Reflexiva. $(\forall a \in A)(a\ R\ a)$

*Seja $\langle a, b\rangle \in \mathbf{N}^2$. Então:*

$$\begin{aligned} &\langle a, b\rangle \in \mathbf{N}^2 \Rightarrow && \text{propriedade reflexiva da} = \\ &a + b = a + b \Leftrightarrow && \text{definição de } R \\ &\langle a, b\rangle\ R\ \langle a, b\rangle && \end{aligned}$$

*Logo, R é reflexiva;*

Simétrica. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \rightarrow b\ R\ a)$

*Sejam* $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in \mathbf{N}^2$ *tais que* $\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle$. *Então:*

| | |
|---|---|
| $\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle \Rightarrow$ | *definição de R* |
| $a + b = c + d \Rightarrow$ | *propriedade simétrica da =* |
| $c + d = a + b \Rightarrow$ | *definição de R* |
| $\langle c, d\rangle\ R\ \langle a, b\rangle$ | |

*Logo, R é simétrica;*

Transitiva. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a\ R\ b \wedge b\ R\ c \rightarrow a\ R\ c)$

*Sejam* $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle e, f\rangle \in \mathbf{N}^2$ *tais que* $\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle$ e $\langle c, d\rangle\ R\ \langle e, f\rangle$. *Então:*

| | |
|---|---|
| $\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle$ e $\langle c, d\rangle\ R\ \langle e, f\rangle \Rightarrow$ | *definição de R* |
| $a + b = c + d$ e $c + d = e + f \Rightarrow$ | *propriedade transitiva da =* |
| $a + b = e + f \Rightarrow$ | *definição de R* |
| $\langle a, b\rangle\ R\ \langle e, f\rangle$ | |

*Logo, R é transitiva.*

*Portanto, R é relação de equivalência.*

**exercício 6.19** Seja R uma endorrelação em $\mathbf{N}^2$ definida por:

$$\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a * d = b * c$$

Demonstre que R não é uma relação de equivalência.

***solução:*** *Uma endorrelação é de equivalência se satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Vamos verificar cada propriedade separadamente:*

Reflexiva. $(\forall a \in A)(a\ R\ a)$

*Seja* $\langle a, b\rangle \in \mathbf{N}^2$. *Pela comutatividade da multiplicação em* $\mathbf{N}$, *ocorre que* $a * b = b * a$. *Portanto,* $\langle a, b\rangle\ R\ \langle a, b\rangle$. *Logo, R é reflexiva;*



Simétrica. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \rightarrow b\ R\ a)$

*Sejam* $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in \mathbf{N}^2$ *tais que* $\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle$. *Então:*

| | |
|---|---|
| $\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle \Rightarrow$ | *definição de R* |
| $a * d = b * c \Rightarrow$ | *comutatividade na multiplicação em* $\mathbf{N}$ |
| $d * a = c * b \Rightarrow$ | *propriedade simétrica da =* |
| $c * b = d * a \Rightarrow$ | *definição de R* |
| $\langle c, d\rangle\ R\ \langle a, b\rangle$ | |

*Logo, R é simétrica;*

Transitiva. $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a\ R\ b \wedge b\ R\ c \rightarrow a\ R\ c)$

*Sejam* $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle e, f\rangle \in \mathbf{N}^2$ *tais que* $\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle$ e $\langle c, d\rangle\ R\ \langle e, f\rangle$. *Então:*

| | |
|---|---|
| $\langle a, b\rangle\ R\ \langle c, d\rangle$ e $\langle c, d\rangle\ R\ \langle e, f\rangle \Rightarrow$ | *definição de R* |
| $a * d = b * c$ e $c * f = d * e$ | |

*Suponha* $\langle c, d\rangle = \langle 0, 0\rangle$. *Então* $a * d = b * c = 0$ e $c * f = d * e = 0$, *nada implicando na relação entre* $\langle a, b\rangle$ e $\langle e, f\rangle$. *Isto nos faz ver que a propriedade não deve ser verdadeira. De fato, é fácil construir um contraexemplo.*

*Sejam* $\langle 1, 2\rangle, \langle 0, 0\rangle, \langle 3, 7\rangle \in \mathbf{N}^2$. *Observe que:*

$\langle 1, 2\rangle\ R\ \langle 0, 0\rangle \Leftrightarrow 1 * 0 = 2 * 0 \Leftrightarrow 0 = 0$
$\langle 0, 0\rangle\ R\ \langle 3, 7\rangle \Leftrightarrow 0 * 7 = 0 * 3 \Leftrightarrow 0 = 0$
*entretanto,* $\neg(\langle 1, 2\rangle\ R\ \langle 3, 7\rangle)$, *pois* $1 * 7 \neq 2 * 3$

*Logo, R não é transitiva.*

*Portanto, R não é relação de equivalência, pois não satisfaz a propriedade transitiva.*

**exercício 6.20** As *relações de equivalência* são fechadas para as seguintes operações sobre conjuntos (ou seja, a operação de duas relações de equivalência resulta em uma relação de equivalência)? Justifique a sua resposta:

*Analogamente ao* ***exercício 6.12****, temos o conceito de fechamento. Naquele caso foram verificadas se as propriedades reflexiva e transitiva eram preserva-*

*das. Para a propriedade de equivalência, falta verificar a propriedade simétrica. Lembre que:*

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\ R\ b \rightarrow b\ R\ a)$$

**a** União;

*Sejam $R_1$ uma endorrelação em A e $R_2$ uma endorrelação em B. Então, $R_1 \cup R_2$ é uma endorrelação em $A \cup B$. Suponha $R_1$ e $R_2$ relações de equivalência.*

*Já vimos que a união preserva a propriedade reflexiva mas, no caso geral, não preserva a propriedade transitiva. Entretanto, se $A \cap B = \emptyset$, a propriedade é preservada. Vamos examinar a propriedade simétrica.*

*Seja $\langle x, y\rangle \in R_1 \cup R_2$. Então:*

$\langle x, y\rangle \in R_1 \cup R_2 \Rightarrow$
$\langle x, y\rangle \in R_1 \vee \langle x, y\rangle \in R_2 \Rightarrow$ *propriedade simétrica de $R_1$ e $R_2$*
$\langle y, x\rangle \in R_1 \vee \langle y, x\rangle \in R_2 \Rightarrow$
$\langle y, x\rangle \in R_1 \cup R_2$

**solução:** *As relações de equivalências não são fechadas para a união. Entretanto, se $R_1$ e $R_2$ são relações de equivalências em A e em B, respectivamente, tais que $A \cap B = \emptyset$, então $R_1 \cup R_2$ é relação de equivalência.*

**b** Intersecção;

*Sejam $R_1$ uma endorrelação em A e $R_2$ uma endorrelação em B. Então $R_1 \cap R_2$ é uma endorrelação em $A \cap B$. Suponha $R_1$ e $R_2$ relações de equivalência.*

*Já vimos que a intersecção preserva as propriedades reflexiva e transitiva. Vamos examinar a propriedade simétrica.*

*Seja $\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2$. Então:*

$\langle x, y\rangle \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow$
$\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle x, y\rangle \in R_2 \Rightarrow$ *propriedade simétrica de $R_1$ e $R_2$*
$\langle y, x\rangle \in R_1 \wedge \langle y, x\rangle \in R_2 \Rightarrow$
$\langle y, x\rangle \in R_1 \cap R_2$

**solução:** *As relações de equivalências são fechadas para a intersecção.*



**c** Complemento;

*Sejam $R_1$ uma endorrelação em A e $R_2$ a endorrelação complementar, isto é:*

$$R_2 = (A \times A) - R_1$$

*Já vimos que o complemento não preserva a propriedade reflexiva.*

**solução:** *As relações de equivalências não são fechadas para o complemento.*

**d** Diferença;

*Sejam $R_1$ uma endorrelação em A e $R_2$ uma endorrelação em B. Então, $R_1 - R_2$ é uma endorrelação em A.*

*A questão fica assim: dado que $R_1$ e $R_2$ têm certa propriedade, $R_1 - R_2$ também tem?*

*Já vimos que a diferença não preserva a propriedade transitiva.*

**solução:** *As relações de equivalências não são fechadas para a diferença.*

**e** Produto Cartesiano.

*Sejam $R_1$ uma endorrelação em A e $R_2$ uma endorrelação em B. Então $R_1 \times R_2$ é uma endorrelação em $A \times B$ (já mostrado no capítulo 4), tal que:*

$$R_1 \times R_2 = \{\langle\langle x, r\rangle, \langle y, s\rangle\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R_1\} \wedge \langle r, s\rangle \in R_2\}$$

*Já vimos que o produto cartesiano preserva as propriedades reflexiva e transitiva. Vamos verificar se preserva a propriedade simétrica.*

*Suponha $R_1$ e $R_2$ relações de equivalência. Sejam $x, y \in A$ e $r, s \in B$. Então:*

$\langle\langle x, r\rangle, \langle y, s\rangle\rangle \in R_1 \times R_2 \Rightarrow$
$\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle r, s\rangle \in R_2 \Rightarrow$
$\langle y, x\rangle \in R_1 \wedge \langle s, r\rangle \in R_2 \Rightarrow$
$\langle\langle y, s\rangle, \langle x, r\rangle\rangle \in R_1 \times R_2$

**solução:** *As relações de equivalências são fechadas para o produto cartesiano.*

**exercício 6.21** Seja A = {1, 2, 3}. Para cada uma das seguintes relações de equivalência, apresente a partição induzida, ou seja, o correspondente conjunto quociente:

*Seja R uma relação de equivalência. Toda relação de equivalência induz uma partição, que é o conjunto quociente:*

$$A / R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

*formado pelas classes de equivalência:*

$$[a]_R = \{b \in A \mid a \mathrel{R} b\}$$

*Se existe uma relação de equivalência, essa relação define agrupamentos dos elementos equivalentes (classes de equivalências). Juntando todas essas classes, temos o conjunto quociente, que é então constituído de partes (subconjuntos não vazios e disjuntos) do domínio de forma a não esquecer ninguém.*

*Definidas as classes de equivalências, escolhe-se um representante (pode ser qualquer elemento, já que são todos equivalentes), então, pode-se trabalhar com o representante e levar o resultado para os demais elementos da classe, pois, sob essa relação, eles são equivalentes.*

**a** ⟨A, =⟩

*Nesse caso, como a relação é a igualdade, cada elemento só é equivalente a ele mesmo e as classes são todas unitárias.*

***solução:***

$$A / = \, = \{[1], [2], [3]\}$$

*tal que:*

$[1] = \{1\}$
$[2] = \{2\}$
$[3] = \{3\}$



**b** ⟨**P**(A), =⟩

*Raciocínio análogo ao caso anterior.*

***solução:***

$$\mathbf{P}(A) / = \, = \{[S] \mid S \in \mathbf{P}(A)\}$$

*tal que, para qualquer* $S \in \mathbf{P}(A)$, $[S] = \{S\}$.

**c** $\varnothing: \varnothing \to \varnothing$

***solução:***

$$\varnothing / \varnothing = \varnothing$$

**d** $A^2: A \to A$

*Existe apenas uma classe de equivalência, pois todos elementos de A são considerados equivalentes por essa relação.*

***solução:***

$$A / A^2 = \{[A]\}$$

**exercício 6.22** Sejam A = {x | 0 ≤ x ≤ 10} e R uma endorrelação em A definida por:

$$x \mathrel{R} y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbf{Z})\ (x - y = 4k)$$

Qual o conjunto quociente A/R?

*Observe que:*

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
$x - y = 4k \Rightarrow y = x - 4k \Rightarrow [x]_R = \{y \in A \mid y = x - 4k\}$

*Vamos construir $[0]_R$:*

$y = 0 - 4k \Rightarrow y = 0$ (para $k = 0$) ou $y = 4$ (para $k = {}^-1$) ou $y = 8$ (para $k = {}^-2$)
Portanto, $[0]_R = \{0, 4, 8\}$.
Note que, para $k = {}^-3$, $y = 12$ mas $12 \notin A$.

*Vamos construir $[1]_R$:*

$y = 1 - 4k \Rightarrow y = 1$ (para $k = 0$) ou $y = 5$ (para $k = {}^-1$) ou $y = 9$ (para $k = {}^-2$)
Portanto, $[1]_R = \{1, 5, 9\}$.

*Vamos construir $[2]_R$:*

$y = 2 - 4k \Rightarrow y = 2$ (para $k = 0$) ou $y = 6$ (para $k = {}^-1$) ou $y = 10$ (para $k = {}^-2$)
Portanto, $[2]_R = \{2, 6, 10\}$.

*Vamos construir $[3]_R$:*

$y = 3 - 4k \Rightarrow y = 3$ $(k = 0)$, $y = 7$ $(k = -1)$, $\Rightarrow [3]_R = \{3, 7\}$.

*Como qualquer elemento de A já está em alguma classe de equivalência, não temos outras classes (as classes são disjuntas).*

***solução:*** $A/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R\} = \{\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2, 6, 10\}, \{3, 7\}\}$

## 6.2 ⟶ exercícios complementares

**exercício 6.23** Seja $A = \{a, b, c\}$. Determine todas as endorrelações em A que:

**a** tem cardinalidade 2 e não são transitivas;

**b** tem cardinalidade menor ou igual a 3 e são conexas;

**c** são conexas, não-transitiva e não-reflexiva.



**exercício 6.24** Sejam $R_1$ e $R_2$ endorrelações em A e em B, respectivamente. Mostre por um exemplo, que $R_1 - R_2$ é uma endorrelação em A e não em $A - B$.

**exercício 6.25** Sejam $R_1$ e $R_2$ endorrelações em A e em B, respectivamente. Verifique se $R_1 - R_2$ é relação de ordem nas seguintes situações:

**a** $A \cap B = \emptyset$

**b** $R_1 \cap R_2 = \emptyset$

**exercício 6.26** Justifique ou dê um contraexemplo:

Seja $R_1$ uma relação reflexiva em A.
Para qualquer relação $R_2 \subseteq A \times A$, se $R_1 \subseteq R_2$, então $R_2$ é reflexiva;

**exercício 6.27** Justifique ou dê um contraexemplo:

**a** Se $R_1$ é uma relação antissimétrica e $R_2$ é uma relação qualquer, então $R_1 \cap R_2$ é antissimétrica.

**b** Qualquer subconjunto de uma relação antissimétrica é uma relação antissimétrica.

**exercício 6.28** Em que condições uma endorrelação R é igual ao seu fecho, ou seja:

$$R = \text{FECHO-P}(R)$$

**exercício 6.29** Seja S o conjunto de todas as retas de um plano. Então:

**a** defina a relação paralela em S;

**b** mostre que é uma relação de equivalência;

**c** construa as classes de equivalência.

**exercício 6.30** Seja S o conjunto de todas as retas de um plano. Então:

**a** Defina a relação ortogonal;

**b** Que propriedades essa relação satisfaz?

**exercício 6.31** Considere a relação de equivalência do **exercício 6.19**. Defina as classes de equivalência e relacione-as com o conjunto dos números racionais e o conjunto quociente.

**exercício 6.32** Sejam $\Sigma$ um alfabeto e $\Sigma^*$ o conjunto de todas as palavras sobre $\Sigma$. Então:

**a** Defina a "maior" relação de equivalência em $\Sigma$ (uma única classe);

**b** Defina a "menor" relação de equivalência em $\Sigma$ (todas classes são unitárias).

**c** Particione de alguma forma $\Sigma^*$ de maneira a produzir 5 classes de equivalência. Construa a relação de equivalência induzida.

**exercício 6.33** Suponha que a relação de ordem ilustrada na forma de um diagrama de Hasse na figura 6.16 representa um sistema concorrente. Então:

**a** Quais os elementos independentes?

**b** Para cada elemento não-independente, explicite os elementos dos quais ele depende.

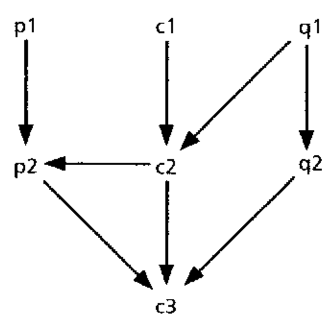



**figura 6.16** Conjuntos parcialmente ordenados como um sistema concorrente.



**exercício 6.34** Um exercício interessante para verificar a expressividade dos conjuntos parcialmente ordenados é o seguinte: caso você conheça alguma linguagem de programação concorrente, faça um esboço de um programa concorrente para o caso exemplificado na figura 6.16 e compare as especificações. De fato, comparativamente com muitas das linguagens usualmente adotadas, os conjuntos parcialmente ordenados fornecem soluções mais simples e claras.

**exercício 6.35** Sejam $R_1$ e $R_2$ relações sobre um conjunto A. $R_1$ é um *refinamento* de $R_2$ se e somente se:

$$(\forall x, y \in A)(x\ R_1\ y \rightarrow x\ R_2\ y)$$

Então:

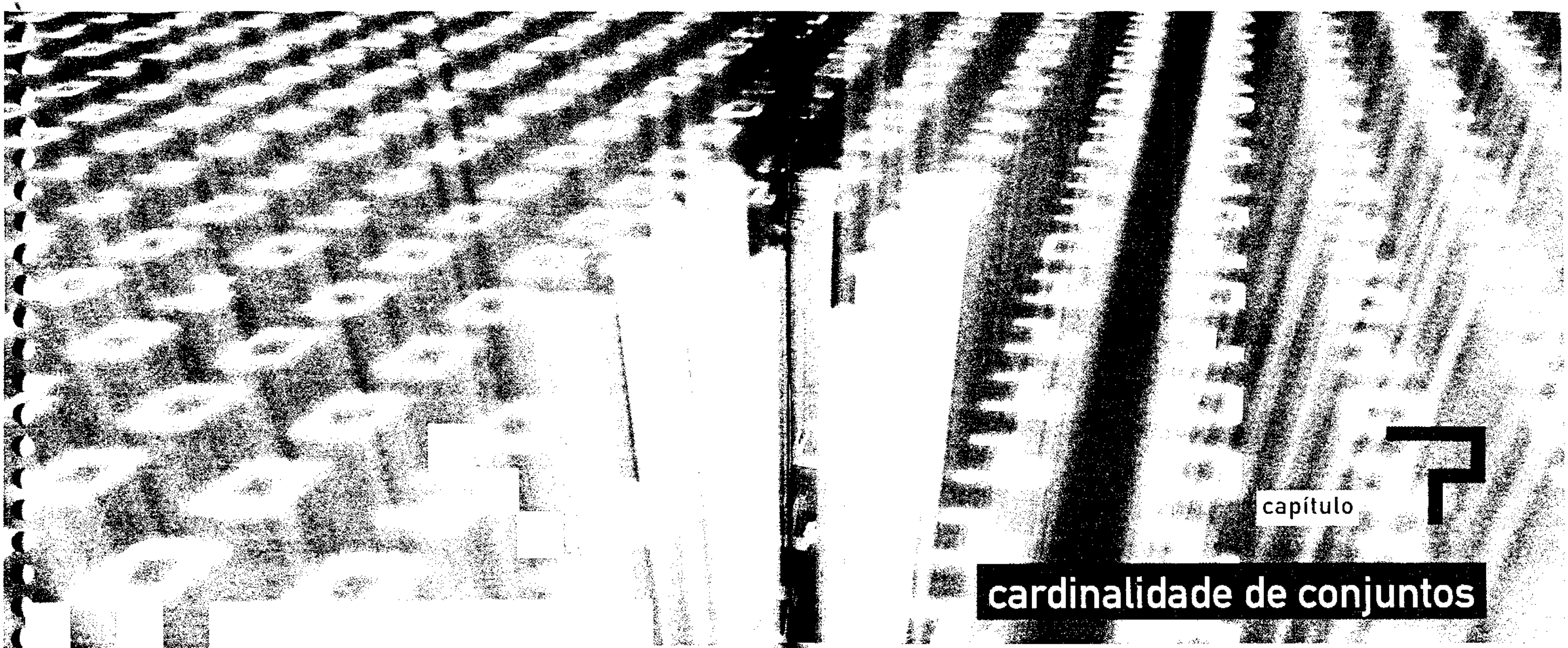
**a** Se $R_1$ é relação de equivalência então $R_2$ é relação de equivalência?

**b** Se $R_2$ é relação de equivalência então $R_1$ é relação de equivalência?

**c** Supondo $R_1$ e $R_2$ relações de equivalência, como são as partições de $R_1$ e de $R_2$?

**exercício 6.36** Complemente a implementação do sistema proposto no capítulo 4 - Relações (o qual permite definir relações e tratar construções correlatas) de tal forma que também seja capaz de:

- verificar as propriedades de uma endorrelação;
- para um conjunto de propriedades selecionadas, calcular o fecho de uma endorrelação.



capítulo 7

# cardinalidade de conjuntos

Este capítulo aborda a cardinalidade com ênfase
nos conceitos, nos resultados e
nas interpretações mais usados em computação
e informática, sem
deixar de lado a precisão formal.

Entende-se por *cardinalidade* de um conjunto uma medida de seu tamanho. Até o momento, a cardinalidade de conjuntos vem sendo tratada de maneira informal ou semiformal. Por exemplo, a seguinte expressão foi usada com alguma frequência:

*número de elementos de um conjunto.*

Também já foi dito que:

*um conjunto pode possuir um número finito ou infinito de elementos.*

Nesse contexto, foi afirmado que um conjunto é:

**a** *Conjunto finito*, se pode ser denotado por extensão, ou seja, listando exaustivamente todos os seus elementos;

**b** *Conjunto infinito*, caso contrário.

Assim, em um estudo mais formal sobre a cardinalidade de conjuntos, as seguintes perguntas surgem naturalmente:

- como definir formalmente a cardinalidade de um conjunto?
- quando dois conjuntos possuem o mesmo cardinal?
- o que é um cardinal infinito?
- existe mais de um, ou seja, existem diferentes cardinais infinitos?
- nesse caso, existe uma ordem de cardinais infinitos?

Essas e outras perguntas, além de relevantes, são muito importantes no estudo da computação e informática. Entretanto, um estudo mais completo ou aprofundado do assunto foge um pouco do escopo deste livro.

Uma consequência importante do estudo da cardinalidade na computação e informática é que, computacionalmente falando, existem mais problemas não-solucionáveis do que problemas solucionáveis. Tal resultado é baseado no cardinal de todos os *problemas solucionáveis*, ou seja, problemas para os quais existe pelo menos um algoritmo capaz de solucioná-lo. De fato, o conjunto de todos os problemas solucionáveis está diretamente relacionado com o conceito de *discreto* (em oposição ao termo *contínuo*), justificando a denominação *matemática discreta*.



## 7.1 → exercícios resolvidos

**exercício 7.1** Afirma-se que a cardinalidade de um conjunto é finita, se existe uma bijeção entre A e o conjunto N = {1, 2, 3, …, n}, para algum n ∈ **N**. Supondo n = 0:

*Note que o conjunto genérico N = {1, 2, 3, …, n} é denotado de forma que os elementos omitidos podem ser facilmente deduzidos. No caso, a correspondente denotação por compreensão é:*

$$N = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \wedge x \leq n\}$$

*No caso n = 0:*

$$N = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \wedge x \leq 0\}$$

*o que corresponde ao conjunto N = ∅, pois não existe número natural x que satisfaça à propriedade $1 \leq x \wedge x \leq 0$.*

**a** Qual é o conjunto A?

***solução:*** *É o conjunto vazio A = ∅, pois é o único conjunto que possui bijeção com N = ∅. De fato, n = 0 é o número de elementos do conjunto vazio.*

**b** Qual é a correspondente função bijetora?

***solução:*** *A bijeção é ∅: ∅ → ∅. De fato, já foi visto no capítulo 4 que tal função é uma isorrelação.*

**exercício 7.2** Prove que, de fato, a seguinte função é bijetora:

$f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ tal que:

| | |
|---|---|
| se $a \geq 0$, então $f(a) = 2a$ | positivos são associados aos pares |
| se $a < 0$, então $f(a) = \lvert 2a \rvert - 1$ | negativos são associados aos ímpares |

*A prova de que uma função é bijetora pode ser feita de duas formas equivalentes:*

- *provar que a função é injetora e sobrejetora*
- *provar que a função possui inversa.*

*Neste exercício, vamos mostrar que f possui inversa, ou seja, que existe uma função g:* $\mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ *tal que:*

$$id_Z = g \circ f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \quad \text{e} \quad id_N = f \circ g: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

***solução:*** *Seja g:* $\mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ *tal que:*

| | |
|---|---|
| *se a é par, então* $g(a) = a/2$ | *pares são associados aos inteiros positivos ou nulo* |
| *se a é ímpar, então* $g(a) = (-a - 1)/2$ | *ímpares são associados aos inteiros negativos* |

*Vamos verificar que* $id_Z = g \circ f$. *Suponha* $z \in \mathbf{Z}$. *Então, dois casos são possíveis:*

*Caso 1:* $z \geq 0$. *Então:*

| | |
|---|---|
| $(g \circ f)(z) =$ | *definição de composição* |
| $g(f(z)) =$ | *definição de f para* $z \geq 0$ |
| $g(2z) =$ | *definição de g para valores pares* |
| $2z/2 = z$ | |

*Caso 2:* $z < 0$. *Então, existe natural n tal que* $-n = z$. *Assim:*

| | |
|---|---|
| $(g \circ f)(-n) =$ | *definição de composição* |
| $g(f(-n)) =$ | *definição de f para* $z < 0$ |
| $g(\lvert -2n \rvert - 1) =$ | *n é natural* |
| $g(2n - 1) =$ | $2n - 1$ *é ímpar* |
| $(-(2n - 1) - 1)/2 = -n$ | |



*Portanto,* $id_Z = g \circ f$. *Agora vamos verificar que* $id_N = f \circ g$. *Suponha* $n \in \mathbf{N}$. *Então, dois casos são possíveis:*

*Caso 1: n é par. Então:*

| | |
|---|---|
| $(f \circ g)(n) =$ | *definição de composição* |
| $f(g(n)) =$ | *definição de g para n par* |
| $f(n/2) =$ | *definição de f para valores positivos* |
| $2(n/2) = n$ | |

*Caso 2: n é ímpar. Então:*

| | |
|---|---|
| $(f \circ g)(n) =$ | *definição de composição* |
| $f(g(n)) =$ | *definição de g para n ímpar* |
| $f((-n - 1)/2) =$ | $(-n - 1)/2$ *é inteiro negativo* |
| $\lvert 2((-n - 1)/2) \rvert - 1 = n$ | |

*Portanto,* $id_N = f \circ g$. *Logo,* $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ *é uma bijeção.*

**exercício 7.3** Prove que **R** é um conjunto infinito, apresentando uma bijeção com um subconjunto próprio de **R**.

***solução:*** *Considere o intervalo* $[-1, 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \wedge x < 1\}$. *Seja* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} - [-1, 1)$ *tal que:*

*se* $x \geq 0$, *então* $f(x) = x + 1$
*se* $x < 0$, *então* $f(x) = x - 1$

*Claramente, f é função. Vamos verificar se é bijetora, verificando se é injetora e sobrejetora.*

*Sejam* $x \in \mathbf{R}$ *e* $y \in \mathbf{R}$. *Três casos são possíveis:*

*Caso 1:* $x \geq 0 \wedge y \geq 0$. *Então:*

$f(x) = f(y) \Rightarrow$
$x + 1 = y + 1 \Rightarrow$
$x = y$

*Caso 2*: $x < 0 \wedge y < 0$. *Então*:

$f(x) = f(y) \Rightarrow$
$x - 1 = y - 1 \Rightarrow$
$x = y$

*Caso 3*: $x \geq 0 \wedge y < 0$. *Lembre-se de que* $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$. *Assim, um condicional equivalente para injetora é* $x \neq y \to f(x) \neq f(y)$. *Então, por contraposição*:

$x \geq 0 \wedge y < 0 \Rightarrow$
$f(x) = x + 1 \geq 0 \wedge f(y) = y - 1 < 0 \Rightarrow$
$f(x) \neq f(y)$

**exercício 7.4** Prove que **Q** é contável.

*A ideia geral é considerar **Q** como sendo um conjunto de pares e construir uma função injetora de **Q** para **N**, usando o fato de que a decomposição de um número em seus fatores primos é única.*

***solução:*** *Sejam* $\boldsymbol{N}_+ = \boldsymbol{N} - \{0\}$ *e* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{N}_+$. *Cada número racional a / b* $\in \boldsymbol{Q}$ *pode ser representado por um conjunto de pares* $\langle a, b\rangle \in \boldsymbol{F}$. *Entretanto, dessa forma, mais de um par representa o mesmo racional, por exemplo 1 / 2 = 2 / 4 = 16 / 32 = .... Uma forma simples de obter uma representação única de cada racional pode ser feita usando a função mdc (máximo divisor comum). No exemplo, apenas 1 / 2 satisfaz a condição mdc(a, b) = 1. Assim, vamos usar essa representação dos racionais para mostrar que é um conjunto contável (trata-se de uma relação de equivalência, uma alternativa à representação como o conjunto quociente)*:

$$\boldsymbol{Q} = \{\langle a, b\rangle \in \boldsymbol{F} \mid mdc\langle a, b\rangle = 1\}$$

*Então, temos que definir uma função injetora f:* $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{N}$. *Para tal, vamos usar a númeração de Gödel (suponha* $\langle a, b\rangle \in \boldsymbol{Q}$*)*:

$$f\langle a, b\rangle = 2^{sinal(a)} \times 3^{|a|} \times 5^{b}$$

*onde*:

*se* $a \geq 0$, *então sinal(a) = 0*
*se* $a < 0$ *então sinal(a) = 1*



*Para verificar que f é funcional, suponha* $\langle a, b\rangle, \langle a', b'\rangle \in \boldsymbol{Q}$ *tais que* $\langle a, b\rangle \neq \langle a', b'\rangle$. *Então*:

$\langle a, b\rangle \neq \langle a', b'\rangle \Rightarrow$
$sinal(a) \neq sinal(a') \vee |a| \neq |a'| \vee b \neq b' \Rightarrow$
$2^{sinal(a)} \neq 2^{sinal(a')} \vee 3^{|a|} \neq 3^{|a'|} \vee 5^{b} \neq 5^{b'} \Rightarrow$
$2^{sinal(a)} \times 3^{|a|} \times 5^{b} \neq 2^{sinal(a')} \times 3^{|a'|} \times 5^{b'} \Rightarrow$
$f\langle a, b\rangle \neq f\langle a', b'\rangle \Rightarrow$
*f é funcional*

*Para verificar que f é injetora, suponha* $\langle a, b\rangle, \langle a', b'\rangle \in \boldsymbol{Q}$ *tais que* $f\langle a, b\rangle = f\langle a', b'\rangle$. *Então*:

$f\langle a, b\rangle = f\langle a', b'\rangle \Rightarrow$
$2^{sinal(a)} \times 3^{|a|} \times 5^{b} = 2^{sinal(a')} \times 3^{|a'|} \times 5^{b'} \Rightarrow$
$2^{sinal(a)} = 2^{sinal(a')} \wedge 3^{|a|} = 3^{|a'|} \wedge 5^{b} = 5^{b'} \Rightarrow$
$\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle \Rightarrow$
*f é injetora*

*Logo, f:* $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{N}$ *é função injetora e, portanto,* **Q** *é (infinitamente) contável.*

**exercício 7.5** Sejam $S = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$ e f: $S \to \mathbf{R}$ tal que:

se $0 < s \leq 1/2$, então $f(s) = (1 / 2s) - 1$
se $1/2 \leq s < 1$, então $f(s) = (1 / (2s - 2)) + 1$

Prove que a função f: $S \to \mathbf{R}$ é uma bijeção.

*Dica*: na investigação, se f possui inversa, considere a seguinte função g: $\mathbf{R} \to S$ tal que:

se $x \geq 0$, então $g(x) = 1 / (2x + 2)$
se $x < 0$, então $g(x) = (1 / (2x - 2)) + 1$

*Considere* $S = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$ *e f:* $S \to \mathbf{R}$ *tal que*:

*se* $0 < s \leq 1/2$, *então* $f(s) = (1 / 2s) - 1$
*se* $1/2 \leq s < 1$, *então* $f(s) = (1 / (2s - 2)) + 1$

*Lembre-se de que:*

*f é uma bijeção* $\Leftrightarrow$
*f é um isomorfismo* $\Leftrightarrow$
*existe uma função* $g\colon \mathbf{R} \to S$ *tal que* $id_S = g \circ f\colon S \to S$ *e* $id_R = f \circ g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

**solução:** *Seja* $g\colon \mathbf{R} \to S$ *como sugerido na dica acima, candidata a inversa.*

*Vamos calcular* $g \circ f$*. Seja* $x \in S$*. Então, dois casos são possíveis:*

**Caso 1:** $0 < x \leq 1/2$*. Então:*

$0 < x \leq 1/2 \Rightarrow$
$2x \leq 1 \Rightarrow$
$1 \leq 1/2x \Rightarrow$
$0 \leq (1/2x) - 1$

*Assim:*

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{2x} - 1\right) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2x} - 1\right) + 2} = \frac{1}{\frac{1}{x} - 2 + 2} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

**Caso 2:** $1/2 < x < 1$*. Então:*

$1/2 < x < 1 \Rightarrow$
$1 < 2x < 2 \Rightarrow$
$1 < 2x - 2 < 0 \Rightarrow$
$1/(2x - 2) < 1 \Rightarrow$
$1/(2x - 2) + 1 < 0 \Rightarrow$

*Assim:*

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{1}{2x-2} + 1\right) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2x-2} + 1\right) - 2} + 1 = \frac{1}{\frac{2}{2x-2} + 2 - 2} + 1 = \frac{2x-2}{2} + 1 = x - 1 + 1 = x$$



*Vamos calcular* $f \circ g$*. Seja* $x \in \mathbf{R}$*. Então, dois casos são possíveis:*

**Caso 1:** $x \geq 0$*. Então:*

$x \geq 0 \Rightarrow$
$x + 1 \geq 1 \geq 0 \Rightarrow$
$0 \leq 1/(x + 1) \leq 1 \Rightarrow$
$0 \leq (1/2)(1/(x + 1)) \leq 1/2$

*Assim:*

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}\right)} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} - 1 = x + 1 - 1 = x$$

**Caso 2:** $x < 0$*. Então:*

$x < 0 \Rightarrow$
$2x < 0 \Rightarrow$
$2x - 2 < 0 \Rightarrow$
$1/(2x - 2) < 0 \Rightarrow$
$1/(2x - 2) + 1 < 1 \Rightarrow$
$(1/2)(1/(x - 1)) + 1 < 1 \Rightarrow$

*Também:*

$x < 0 \Rightarrow$
$x - 1 < 1 \Rightarrow$
$1/(x - 1) > -1 \Rightarrow$
$(1/2)(1/(x - 1)) > -1/2 \Rightarrow$
$(1/2)(1/(x - 1)) + 1 > 1/2 \Rightarrow$

*Portanto:*

$1/2 < (1/2)(1/(x - 1)) + 1 < 1$ *e* $(1/2)(1/(x - 1)) + 1 = 1/(2x - 2) + 1$

*Assim:*

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{1}{2x-2}+1\right) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2x-2}+1\right)-2}+1 = \frac{1}{\frac{2}{2x-2}+2-2}+1 = \frac{1}{\frac{1}{x-1}}+1 = x-1+1 = x$$

*Logo,* $id_S = g \circ f: S \to S$ *e* $id_{\boldsymbol{R}} = f \circ g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$*, ou seja, f é uma bijeção.*

---

**exercício 7.6** Prove que:

**a** Nem sempre a intersecção de conjuntos não-contáveis é não-contável;

*Basta apresentar um contraexemplo.*

*Vamos construir um contraexemplo usando a seguinte ideia: a partir de dois conjuntos não-contáveis, obter uma intersecção finita, pois assim será certamente contável.*

*Uma solução simples é tomarmos dois conjuntos não-contáveis e disjuntos e, portanto, com intersecção vazia (ou seja, finita).*

***solução:*** *Sejam* $\boldsymbol{R}_-$ *(conjunto dos números reais negativos) e* $\boldsymbol{R}_+$ *(conjunto dos números reais positivos) os quais são não-contáveis disjuntos. Assim:*

$$\boldsymbol{R}_- \cap \boldsymbol{R}_+ = \varnothing$$

*Logo, nem sempre a intersecção de conjuntos não-contáveis é não-contável.*

**b** Nem sempre a diferença de conjuntos não-contáveis é não-contável.

*Analogamente ao item acima, uma solução simples é tomarmos um conjunto não-contável e subtrairmos esse conjunto de si mesmo, resultando no conjunto vazio.*

***solução:*** *Como:*

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R} = \varnothing$$



*Conclui-se que: nem sempre a diferença de conjuntos não-contáveis é não-contável.*

---

**exercício 7.7** Prove que:

*Um conjunto X é contável se existe uma bijeção do conjunto num subconjunto de* $\boldsymbol{N}$*. Mas, note que:*

*seja* $f: X \to \boldsymbol{N}$ *uma função injetora*

*seja* $f(X) = \{y \in \boldsymbol{N} \mid (\exists x \in X)(f(x) = y)\}$ *o conjunto imagem de f. Portanto,* $f(X) \subseteq \boldsymbol{N}$*;*

*seja* $f\backslash f(X): X \to f(X)$*, ou seja, f restrita ao contradomínio f(X), que é uma função sobrejetora.*

*Portanto,* $f: X \to \boldsymbol{N}$ *é bijetora.*

*Logo, um conjunto X é contável se e somente se existe uma função injetora* $f: X \to \boldsymbol{N}$*.*

*Assim, sejam A e B conjuntos contáveis. Então, existem as funções injetoras* $f: A \to \boldsymbol{N}$ *e* $g: B \to \boldsymbol{N}$*. Portanto,* $f\backslash f(A): A \to f(A)$ *e* $g\backslash f(B): B \to f(B)$ *são funções bijetoras*

**a** A união de conjuntos contáveis é contável;

***solução:*** *Queremos definir uma função injetora* $h: A \cup B \to \boldsymbol{N}$*. Aproveitando o fato de f e g serem injetoras, vamos definir h de forma que também seja quando restrita ao domínio A, devido a f, e injetora quando restrita ao domínio B − A, devido a g, e tal que o conjunto imagem de A e B − A seja disjunto, ou seja,* $h(A) \cap h((B - A) = \varnothing)$*. Lembrando que a decomposição de um número natural em seus fatores primos é única, defina:*

*se* $x \in A$*,* $h(x) = 2^{f(x)+1}$
*se* $x \in B - A$*,* $h(x) = 3^{g(x)}$

*Vamos ver se h é injetora. Lembre-se de que $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$. Assim, um condicional equivalente para injetora é $x \neq y \to h(x) \neq h(y)$. Então, por contraposição, sejam $x \in A \cup B$ e $y \in A \cup B$ tais que $x \neq y$. Três casos são possíveis:*

*Caso 1:* $x \in A \wedge y \in A$. *Então:*

$x \in A \wedge y \in A \Rightarrow$
$h(x) = 2^{f(x)+1} \wedge h(y) = 2^{f(y)+1} \Rightarrow$ *$x \neq y$ e decomposição nos fatores primos é única;*
$h(x) \neq h(y)$

*Caso 2:* $x \in B \wedge y \in B$. *Então:*

$x \in B \wedge y \in B \Rightarrow$
$h(x) = 3^{g(x)} \wedge h(y) = 3^{g(y)} \Rightarrow$ *$x \neq y$ e decomposição nos fatores primos é única;*
$h(x) \neq h(y)$

*Caso 3:* $x \in A \wedge y \in B$. *Então:*

$x \in A \wedge y \in B \Rightarrow$
$h(x) = 2^{f(x)+1} \wedge h(y) = 3^{g(y)} \Rightarrow$
$h(x) \neq h(y)$

*Observe que uma potência de 2 é diferente de uma potência de 3 exceto se os expoentes são zero. No caso, $2^{f(x)+1}$ é par e maior que zero, enquanto $3^{g(x)}$ é ímpar ou zero.*

*Logo, h é injetora e, portanto, $A \cup B$ é contável;*

**b** O produto cartesiano de conjuntos contáveis é contável.

**solução:** *Seja $h: A \times B \to \mathbf{N}$ tal que $h\langle x, y\rangle = 2^{f(x)}\,3^{g(y)}$. Sejam $\langle x_1, y_1\rangle \in A \times B$ e $\langle x_2, y_2\rangle \in A \times B$ tais que $\langle x_1, y_1\rangle \neq \langle x_2, y_2\rangle$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x_1 \neq x_2$. Então:*

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow$
$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$
$h\langle x_1, y_1\rangle \neq h\langle x_2, y_2\rangle$

*Logo, h é injetora e portanto, $A \times B$ é contável;*



**exercício 7.8** Prove que, se $A \subseteq B$ e A é infinito, então B é infinito.

**solução:** *(por absurdo) Sejam A e B conjuntos tais que $A \subseteq B$, tais que A é infinito e B é finito. Então:*

*$A \subseteq B$ e A é infinito e B é finito $\Rightarrow$*
*A é infinito e existem funções injetoras $f: A \to B$ e $g: B \to \{1, 2, 3, \ldots, n\} \Rightarrow$*
*composição de injetoras é injetora*
*A é infinito e $g \circ f: A \to \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ é função injetora $\Rightarrow$*
*A é infinito e $\#A \leq \#\{1, 2, 3, \ldots, n\} \Rightarrow$*
*A é infinito e $\#A \leq n \Rightarrow$*
*A é infinito e A é finito (absurdo!)*

*Portanto, é absurdo supor que B é finito.*

*Logo, B é infinito.*

**exercício 7.9** Lembre-se de que, se existe uma função injetora $f: A \to B$, então $\#A \leq \#B$. Sabendo que **R** é não-contável, prove que são conjuntos não-contáveis:

*O objetivo é construir uma função injetora $f$: **R** $\to$ A injetora, porque isto significará que #**R** $\leq$ #A e, como **R** é não-contável, A também será não-contável.*

**a** $\mathbf{R}^2$

**solução:** *Seja $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ tal que $f(x) = \langle 0, x\rangle$, a qual claramente é injetora;*

**b** $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$

**solução:** *Seja $f: \mathbf{R} \to \mathbf{N} \times \mathbf{R}$ tal que $f(x) = \langle 0, x\rangle$, análoga à função definida no item* **a***;*

**c** **C** (conjunto dos números complexos)

**solução:** *Seja $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ tal que $f(x) = x + 0i$, análoga à função definida no item a). De fato, é fácil provar que os conjuntos $\mathbf{R}^2$ e **C** são isomorfos, o que seria outra forma de provar que **C** é não contável*

## 7.2 → exercícios complementares

**exercício 7.10** Seja o conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b \text{ e } x \geq a\}$$

Esse tipo de conjunto é chamado *intervalo fechado*. Mostre que, se $a \neq b$, então $[a, b]$ é não-contável.

**exercício 7.11** Prove que nem sempre a intersecção de intervalos não-contáveis é não-contável.

**exercício 7.12** Sejam A um conjunto não-contável e B um conjunto finito. Mostre que $A \cup B$ é não-contável.

**exercício 7.13** Prove a seguinte afirmação:

se $A \subseteq B$ e A é finito, não implica que B seja finito.

**exercício 7.14** Prove ou apresente um contraexemplo:

se $\#A = n$, $A_1, A_2 \in \mathbf{P}(A)$, $\#A_1 = n - 1$ e $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, então $A_1 \cup A_2 = A$.

**exercício 7.15** Dado o conjunto $A = \{1, 3, 5\}$:

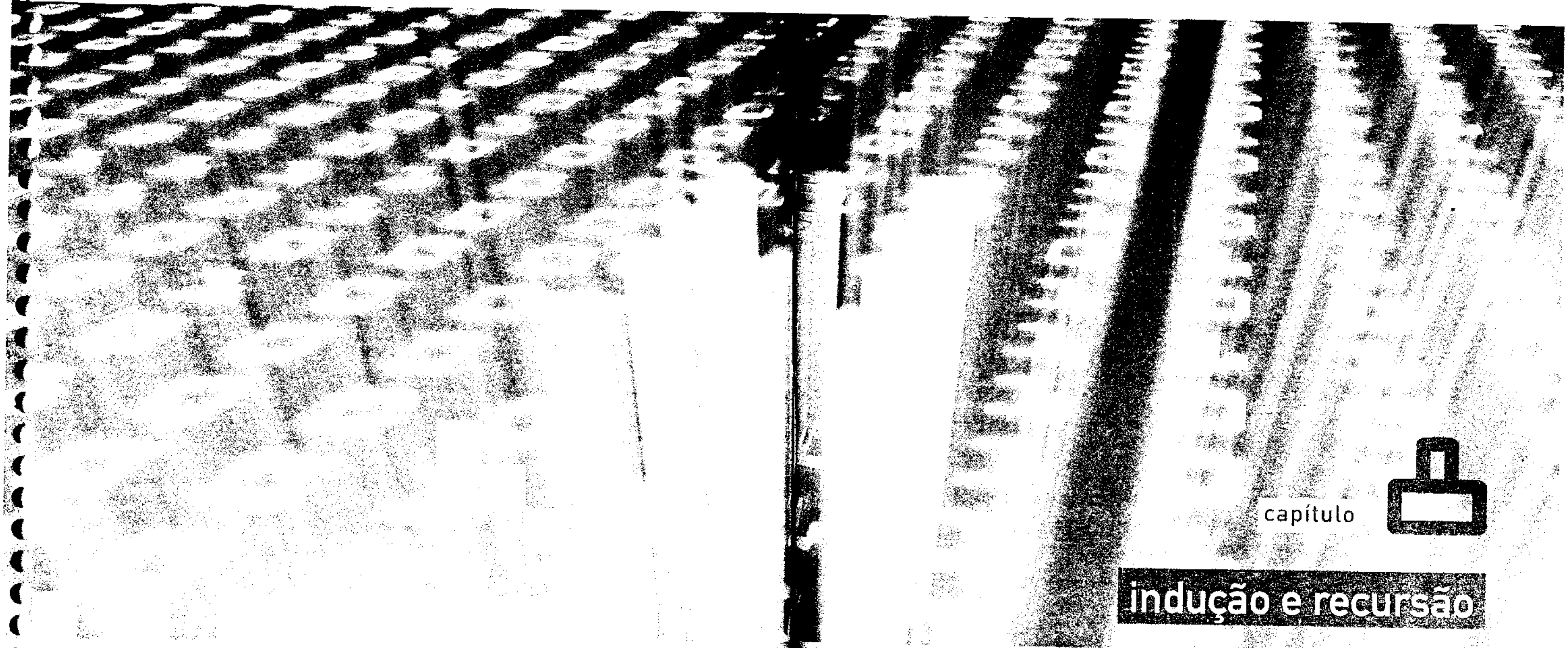
**a** Construa o conjunto das partes de $\mathbf{P}(A)$;

**b** Mostre que $\#\mathbf{P}(A) = 2^{\#A}$.



**exercício 7.16** Mostre que "possui o mesmo cardinal" é uma relação de equivalência.

**exercício 7.17** Dê um exemplo de conjunto contável usado na computação e informática.



capítulo

# indução e recursão

*O Princípio da Indução Matemática* é uma técnica para lidar com tipos de dados que têm uma *relação de boa ordem*, isto é, uma relação onde todo subconjunto não-vazio do tipo de dado tem um elemento mínimo segundo essa relação de ordem. Um exemplo típico é o conjunto dos números naturais (na realidade, um tipo de dado). Dada uma boa ordem, pode-se aplicar indução para provar propriedades que valem para todo elemento do tipo de dado. Por simplicidade, o tipo de dados que tem uma relação de boa ordem considerado é o conjunto dos números naturais **N** (ou qualquer outro conjunto isomorfo a **N**).

Um exemplo simples que ilustra o Princípio da Indução Matemática é o *efeito dominó* (veja a figura 8.1): uma fila sem fim de peças do jogo dominó para a qual, ao derrubar a primeira peça, todas as demais peças são derrubadas em cadeia. Para estar certo de que tal fato ocorre, suponha que são verdadeiras as seguintes proposições:

**a** a primeira peça é derrubada na direção das demais;

**b** se qualquer peça está suficientemente próxima da seguinte na fila, então, ao ser derrubada, fará com que a sua vizinha seguinte também seja derrubada.

Então:

- pelo item **a**, a primeira peça é derrubada;
- pelo item **b**, a segunda peça é derrubada;
- pelo item **b**, a terceira peça é derrubada;
- pelo item **b**, a quarta peça é derrubada;
- e assim sucessivamente.

Portanto, para i tão grande quanto se queira, pode-se afirmar que a i-ésima peça é derrubada. Logo, para qualquer n, pode-se afirmar que a n-ésima peça é derrubada.

O Princípio da Indução Matemática pode ser resumido como segue:

*Se o início é correto e se coisa alguma pode dar errada,*
*então sempre será correto.*



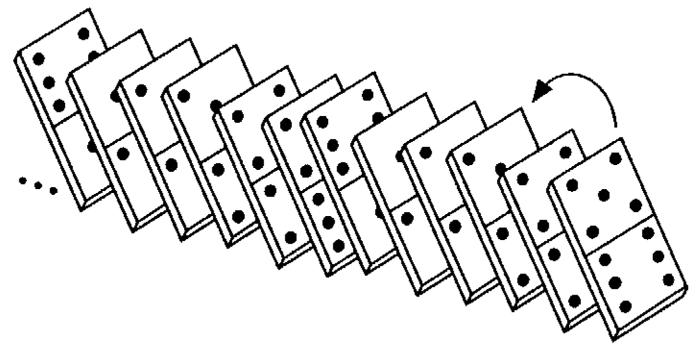


**figura 8.1** Efeito dominó.

## 8.1 → exercícios resolvidos

**exercício 8.1** Prove por indução que, para qualquer n ∈ **N**:

*A prova por indução aplica-se a asserções sobre um conjunto enumerável (isomorfo ao conjunto dos números naturais). É especialmente útil para provar propriedades de conjuntos ou funções definíveis indutivamente. É composta de três partes:*

Base de indução;
Hipótese de indução;
Passo de indução.

*A base de indução é a prova da asserção para o menor elemento do conjunto enumerável. A prova da base garante que o princípio (sobre o qual é realizada a construção) está correto.*

*A hipótese de indução é uma asserção supositiva, portanto não é provada: supõe-se a asserção válida para um elemento genérico (ou todos anteriores a um elemento genérico).*

*O passo de indução é o ponto crucial em uma prova por indução. É uma demonstração da asserção para o próximo elemento a aquele usado na hipótese de indução.*

*Resumindo o princípio da indução matemática:*

> Se o início é correto e se coisa alguma pode dar errada, então sempre será correto.

*Assim, em uma prova por indução, prova-se para a base e, depois, prova-se que as regras de indução preservam a propriedade (desde a base).*

*Em geral, a prova por indução é a maneira mais fácil de provar uma propriedade definida sobre um conjunto enumerável e, em particular, sobre o conjunto dos números naturais.*

**a** $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

**solução:** $p(n)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$

Base de Indução. *Seja* $k = 0$. *Então* $p(0)$: $0 = 0\,(0 + 1)$. *De fato:*

$$0 = 0 \cdot 1 = 0\,(0 + 1)$$

*Portanto,* $p(0)$ *é verdadeira;*

Hipótese de Indução. *Suponha, para* $k \in \mathbf{N}$, *que:*

$$p(k): 2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k + 1) \text{ é verdadeira;}$$

Passo de Indução. *Vamos provar* $p(k + 1)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)((k + 1) + 1)$.

*Na prova do passo, inicialmente precisamos identificar a hipótese de indução para usá-la. No caso:*

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + \dots + 2k}_{k(k+1)} + 2(k + 1)$$

*Assim:*

$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) =$ *hipótese de indução*
$k(k + 1) + 2(k + 1) =$ *distributividade de multiplicação sobre a adição*
$(k + 2)(k + 1) =$ *comutatividade da multiplicação*



$(k + 1)(k + 2) =$
$(k + 1)(k + (1 + 1)) =$ *associatividade da adição*
$(k + 1)((k + 1) + 1)$

*Portanto,* $p(k + 1)$ *é verdadeira.*

*Logo, para* $n \in \mathbf{N}$, *vale* $p(n)$: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$.

**b** $1 + 3 + 6 + \dots + n(n + 1)/2 = n(n + 1)(n + 2)/6$

**solução:** $p(n)$: $1 + 3 + 6 + \dots + n(n + 1)/2 = n(n + 1)(n + 2)/6$

Base de Indução. *Seja* $k = 0$. *Então* $p(0)$: $0(0 + 1)/2 = 0(0 + 1)(0 + 2)/6$. *De fato:*

$$0(0 + 1)/2 = 0 = 0(0 + 1)(0 + 2)/6$$

*Portanto,* $p(0)$ *é verdadeira;*

Hipótese de Indução. *Suponha, para* $k \in \mathbf{N}$, *que:*

$$p(k): 1 + 3 + 6 + \dots + k(k + 1)/2 = k(k + 1)(k + 2)/6 \text{ é verdadeira;}$$

Passo de Indução. *Vamos provar:*

$$p(k + 1): 1 + 3 + 6 + \dots + k(k + 1)/2 + (k + 1)(k + 2)/2 = (k + 1)(k + 2)(k + 3)/6$$

$1 + 3 + 6 + \dots + k(k + 1)/2 + (k + 1)(k + 2)/2 =$ *hipótese de indução*
$k(k + 1)(k + 2)/6 + (k + 1)(k + 2)/2 =$ *distributividade de multiplicação sobre a adição*
$(k + 1)(k + 2)(k/6 + 1/2) =$
$(k + 1)(k + 2)((k + 3)/6) =$
$(k + 1)(k + 2)(k + 3)/6$

*Portanto,* $p(k + 1)$ *é verdadeira.*

*Logo, para* $n \in \mathbf{N}$, *vale* $p(n)$: $1 + 3 + 6 + \dots + n(n + 1)/2 = n(n + 1)(n + 2)/6$.

**c** $1 + 8 + 27 \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

**solução:** $p(n)$: $1 + 8 + 27 \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

Base de Indução. *Seja $k = 0$. Então $p(0)$: $0^3 = 0^2$. De fato:*

$$0^3 = 0 = 0^2$$

*Portanto, $p(0)$ é verdadeira;*

Hipótese de Indução. *Suponha, para $k \in \mathbf{N}$, que:*

$$p(k): 1 + 8 + 27\ldots + k^3 = (1 + 2 + \ldots + k)^2 \text{ é verdadeira;}$$

Passo de Indução. *Vamos provar:*

$$p(k + 1): 1 + 8 + 27\ldots + k^3 + (k + 1)^3 = (1 + 2 + \ldots + k + (k + 1))^2$$

$1 + 8 + 27\ldots + k^3 + (k + 1)^3 =$ *hipótese de indução*
$(1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k + 1)^3 =$
$(1 + 2 + \ldots + k)^2 + (k + 1)(k + 1)^2 =$
$(1 + 2 + \ldots + k)^2 + k(k + 1)^2 + (k + 1)^2 =$
$(1 + 2 + \ldots + k)^2 + k(k + 1)(k + 1) + (k + 1)^2 =$ *item a) acima*
$(1 + 2 + \ldots + k)^2 + (2 + 4 + 6 + \ldots + 2k)(k + 1) + (k + 1)^2 =$
$(1 + 2 + \ldots + k)^2 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + k)(k + 1) + (k + 1)^2 =$ *produto notável*
$((1 + 2 + \ldots + k) + (k + 1))^2 =$
$(1 + 2 + \ldots + k + (k + 1))^2$

*Portanto, $p(k + 1)$ é verdadeira.*

*Logo, para $n \in \mathbf{N}$, vale $p(n)$: $1 + 8 + 27\ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.*

**d** $1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 5\ldots + n(n + 2) = n(n + 1)(2n + 7)/6$

***solução:*** *$p(n)$: $1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 5\ldots + n(n + 2) = n(n + 1)(2n + 7)/6$*

Base de Indução. *Seja $k = 0$. Então $p(0)$: $0(0 + 2) = 0(0 + 1)(2 \cdot 0 + 7)/6$. De fato:*

$$0(0 + 2) = 0 = 0(0 + 1)(2 \cdot 0 + 7)/6$$

*Portanto, $p(0)$ é verdadeira;*

Hipótese de Indução. *Suponha, para $k \in \mathbf{N}$, que:*

$$p(k): 1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 5\ldots + k(k + 2) = k(k + 1)(2k + 7)/6 \text{ é verdadeira;}$$



Passo de Indução. *Vamos provar:*

$$p(k + 1): 1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 5\ldots + k(k + 2) + (k + 1)(k + 3) = (k + 1)(k + 2)(2(k + 1) + 7)/6$$

$1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 5\ldots + k(k + 2) + (k + 1)(k + 3) =$ *hipótese de indução*
$k(k + 1)(2k + 7)/6 + (k + 1)(k + 3) =$
$(k + 1)(k(2k + 7)/6 + (k + 3)) =$
$(k + 1)(k(2k + 7) + 6(k + 3))/6 =$
$(k + 1)(k(2k + 7) + 6k + 18)/6 =$
$(k + 1)(k(2k + 7) + 2k + 4k + 18)/6 =$
$(k + 1)(k(2k + 7 + 2) + 4k + 18)/6 =$
$(k + 1)(k(2k + 9) + 4k + 18)/6 =$
$(k + 1)(k(2k + 9) + 2(2k + 9))/6 =$
$(k + 1)(k + 2)(2k + 9))/6 =$
$(k + 1)(k + 2)(2k + 2 + 7))/6 =$
$(k + 1)(k + 2)(2(k + 1) + 7))/6$

*Portanto, $p(k + 1)$ é verdadeira.*

*Logo, para $n \in \mathbf{N}$, vale $p(n)$: $1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 5\ldots + n(n + 2) = n(n + 1)(2n + 7)/6$.*

---

**exercício 8.2** Prove por indução que:

**a** Para qualquer natural $n > 1$, vale $n^2 > n + 1$.

*Note que o menor $n$ para o qual a propriedade deve ser provada é $n = 2$.*

***solução:*** *Para $n > 1$, $p(n)$: $n^2 > n + 1$.*

Base de Indução. *Seja $k = 2$. Então $p(2)$: $2^2 > 2 + 1$. Assim:*

$$2^2 = 4 > 3 = 2 + 1$$

*Portanto, $p(2)$ é verdadeira;*

Hipótese de Indução. *Suponha, para $k > 1$, que $p(k)$: $k^2 > k + 1$ é verdadeira;*

Passo de Indução. *Vamos provar* $p(k+1)$: $(k+1)^2 > (k+1)+1$.

| | |
|---|---|
| $(k+1)^2 =$ | *produto notável* |
| $k^2 + 2k + 1 >$ | *hipótese de indução* |
| $k + 1 + 2k + 1 \geq$ | *k é natural* |
| $(k+1)+1$ | |

*Portanto,* $p(k+1)$ *é verdadeira.*

*Logo, para* $n > 1$, *vale* $p(n)$: $n^2 > n + 1$.

**b** Para qualquer natural $n > 6$, vale $n^2 > 5n + 10$.

*Note que o menor n para o qual a propriedade deve ser provada é* $n = 7$.

***solução:*** *Para* $n > 6$, $p(n)$: $n^2 > 5n + 10$.

Base de Indução. *Seja* $k = 7$. *Então* $p(7)$: $7^2 > 5 \cdot 7 + 10$. *Assim:*

$$7^2 = 49 > 45 = 35 + 10 = 5 \cdot 7 + 10$$

*Portanto,* $p(7)$ *é verdadeira;*

Hipótese de Indução. *Suponha, para* $k > 6$, *que* $p(k)$: $k^2 > 5k + 10$ *é verdadeira;*

Passo de Indução. *Vamos provar* $p(k+1)$: $(k+1)^2 > 5(k+1) + 10$;

| | |
|---|---|
| $(k+1)^2 =$ | *produto notável (binômio quadrado)* |
| $k^2 + 2k + 1 >$ | *hipótese de indução* |
| $5k + 10 + 2k + 1 >$ | |
| $5k + 10 + 2k + 6 >$ | $k > 6$ |
| $5(k+1) + 2 \cdot 6 + 6 =$ | |
| $5(k+1) + 18 >$ | |
| $5(k+1) + 10$ | |

*Portanto,* $p(k+1)$ *é verdadeira.*

*Logo, para* $n > 6$, *vale* $p(n)$: $n^2 > 5n + 10$.



**exercício 8.3** Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, $2^{3n} - 1$ é divisível por 7:

*Um número a divisível por b se, e somente se, existe um natural m tal que* $a = m\,b$.

***solução:*** $p(n)$: $2^{3n} - 1$ *é divisível por 7*

Base de Indução. *Seja* $k = 0$. *Então:*

| | |
|---|---|
| $2^{3 \cdot 0} - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $2^0 - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $1 - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $0$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | *definição de "divisível"* |
| *existe um natural* $m = 0$ *tal que* $0 = m * 7$ | |

*Portanto,* $p(0)$ *é verdadeira;*

Hipótese de Indução. *Suponha, para* $k \in \mathbf{N}$, *que:*

$p(k)$: ($2^{3k} - 1$ *é divisível por 7*) *é verdadeira;*

Passo de Indução. *Vamos provar* $p(k+1)$: ($2^{3(k+1)} - 1$ *é divisível por 7*)

| | |
|---|---|
| $2^{3(k+1)} - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $2^{3k+3} - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $2^{3k} * 2^3 - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $2^{3k} * 8 - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $8 * 2^{3k} - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $8 * (2^{3k} + 0) - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $8 * (2^{3k} - 1 + 1) - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $8 * ((2^{3k} - 1) + 1) - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | *hipótese de indução* |
| *existe um natural m tal que* $2^{3k} = m * 7$ *e* $8 * (m * 7 + 1) - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $8 * (7m + 1) - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $56m + 8 - 1$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $56m + 7$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | |
| $(8m + 1) * 7$ *é divisível por 7* $\Leftrightarrow$ | *definição de "divisível"* |
| *existe um natural* $m' = 8m + 1$ *tal que* $2^{3(k+1)} - 1 = m' * 7$ | |

*Portanto, $p(k + 1)$ é verdadeira.*

*Logo, para $n \in \mathbf{N}$, vale $p(n)$: $2^{3n} - 1$ é divisível por 7.*

**exercício 8.4** Suponha que $A(n)$ denota $1 + 2 + \ldots + n = ((2n + 1)^2)/8$. Então:

**a** Prove que, se $A(k)$ é verdadeiro para um $k \in \mathbf{N}$, então $A(k + 1)$ também é verdadeiro;

***solução:*** *Suponha que, para $k \in \mathbf{N}$, $A(k)$: $1 + 2 + \ldots + k = ((2k + 1)^2)/8$ é verdadeiro. Vejamos $A(k + 1)$: $1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = ((2(k + 1) + 1)^2)/8$*

$$
\begin{aligned}
&1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = && \text{por hipótese, } A(k) \text{ é verdadeiro}\\
&((2k + 1)^2)/8 + (k + 1) = && \text{mesmo denominador}\\
&((2k + 1)^2)/8 + 8(k + 1)/8 = &&\\
&(4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8)/8 = &&\\
&(4k^2 + 8k + 4 + 4(k + 1) + 1)/8 = &&\\
&(4(k^2 + 2k + 1) + 4(k + 1) + 1)/8 = &&\\
&(4(k + 1)^2 + 4(k + 1) + 1)/8 = &&\\
&((2(k + 1))^2 + 2(2(k + 1)) + 1^2)/8 = && \text{produto notável (binômio quadrado)}\\
&((2(k + 1) + 1)^2)/8 &&
\end{aligned}
$$

*Logo, se $A(k)$ é verdadeiro para um $k \in \mathbf{N}$, então $A(k + 1)$ também é verdadeiro.*

**b** Considerando o item acima, discuta a afirmação:

*portanto, por indução, $A(n)$ é verdadeiro para qualquer $n \in \mathbf{N}$.*

***solução:*** *A afirmação é FALSA, pois não foi mostrada a base de indução. Portanto, não constitui uma prova por indução.*

**c** De fato, $A(n)$ é verdadeiro para qualquer $n \in \mathbf{N}$? Prove a sua resposta.

***solução:*** *Para $A(n)$ ser verdadeiro para qualquer $n \in \mathbf{N}$, é necessário provar para a base de indução, no caso, $A(0)$. Assim:*

$$
\begin{aligned}
&1 + 2 + \ldots + 0 = ((2 * 0 + 1)^2)/8 \Leftrightarrow\\
&0 = 1/8 \Leftrightarrow\\
&\text{FALSO}
\end{aligned}
$$



*Portanto, $A(0)$ é falso.*

*Logo, a afirmação "$A(n)$ é verdadeiro para qualquer $n \in \mathbf{N}$" é falsa.*

**exercício 8.5** Por que a "prova por indução" que segue *não* é correta?

**a** *Proposição.* Dado um conjunto de n torcedores de futebol, se pelo menos um torcedor é gremista, então todos os demais torcedores também são gremistas;

**b** *"Prova".* A proposição é trivialmente verdadeira para $n = 1$. O passo de indução pode ser facilmente entendido pelo seguinte exemplo:

- suponha que a proposição é verdadeira para $n = 3$;
- sejam $T_1$, $T_2$, $T_3$ e $T_4$, quatro torcedores dos quais pelo menos um é gremista (suponha que é $T_1$);
- supondo o conjunto $\{T_1, T_2, T_3\}$ e a hipótese de que é verdadeiro para $n = 3$, então $T_2$ e $T_3$ são gremistas;
- analogamente para $\{T_1, T_2, T_4\}$, tem-se que $T_2$ e $T_4$ são gremistas;
- portanto, os quatro torcedores são gremistas!
- a generalização da construção acima, para k e $k + 1$, é a prova desejada.

*Tente resolver sozinho, pois é um exercício muito interessante. Se não conseguir, leia a dica que segue.*

Dica: *A generalização deve valer para qualquer caso.*

***solução:*** *A prova do passo de indução, como apresentada, não vale para $n = 2$.*

**exercício 8.6** Para a definição indutiva abaixo, descreva o conjunto definido:

O conjunto A é indutivamente definido como segue:

$5 \in A$ (1)

se $x \in A$ e $y \in A$, então $x + y \in A$ (2)

*A parece ser o conjunto de todos múltiplos de 5 a partir do 5, ou seja:*

$$A = \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$$

*Para verificar a igualdade de dois conjuntos, usualmente é verificado que o primeiro conjunto está contido no segundo conjunto e vice-versa.*

**solução:** *Inicialmente, vamos mostrar por indução que* $A \subseteq \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$.

Base de Indução. *Seja* $x = 5$. *Então:*

$5 \in A \Rightarrow$
$5 = 5 * 1,\ 1 \in \mathbf{N} - \{0\} \Rightarrow$
$5 \in \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$

Hipótese de Indução. *Suponha que* $x, y \in A$ e $x, y \in \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$. *Portanto:*

$x, y \in \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\} \Rightarrow$
*existem* $k_1, k_2 \in \mathbf{N} - \{0\}$ *tais que* $x = 5k_1$, $y = 5k_2$
*sejam* $k_1, k_2 \in \mathbf{N} - \{0\}$ *tais que* $x = 5k_1$ e $y = 5k_2$

Passo de Indução.

$x + y =$ *hipótese de indução*
$5 * k_1 + 5 * k_2 =$
$5(k_1 + k_2) \in \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$

*Portanto,* $A \subseteq \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$.

*Agora vamos mostrar que* $\{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\} \subseteq A$.

*Seja* $x \in \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$. *Então,* $x = 5k$ *para algum* $k \in \mathbf{N} - \{0\}$. *O objetivo é mostrar por indução (em k) que aplicando a regra (1) e, na sequência, a regra (2)* $k - 1$ *vezes, sempre adicionando* $5 \in A$, *obtemos* $5k$.

Base de Indução. *O menor valor possível de* $k \in \mathbf{N} - \{0\}$ *é* $k = 1$. *Nesse caso, a regra (2) será aplicada zero vezes (ou seja, não será aplicada). Assim:*

$5 * 1 \in \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\} \Rightarrow$ *regra (1)*
$5 * 1 = 5 \in A$

Hipótese de Indução. *Suponha, para* $k \in \mathbf{N} - \{0\}$, *que, aplicando a regra (1) e, na sequência, aplicando a regra (2)* $k - 1$ *vezes, sempre adicionando* $5 \in A$, *obtemos* $5k$.



Passo de Indução. *Aplicando a regra (1) e, na sequência, aplicando a regra (2) k vezes, sempre adicionando* $5 \in A$:

*regra (1), regra (2) k vezes* $\Rightarrow$
*regra (1), regra (2)* $k - 1$, *regra (2)* $\Rightarrow$ *hipótese de indução*
$5k$, *regra (2)* $\Rightarrow$
$5k + 5 = 5(k + 1) \in \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$

*Portanto,* $\{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\} \subseteq A$.

*Logo:*

$$A = \{x \mid x = 5k, k \in \mathbf{N} - \{0\}\}$$

---

**exercício 8.7** Considere o alfabeto constituído pelos símbolos das operações sobre conjuntos ∪ (união), ∩ (intersecção) e ~ (complemento), pelos símbolos de parênteses, bem como por letras maiúsculas (A, B, C, ...), as quais denotam variáveis conjunto. Defina indutivamente as fórmulas bem formadas da álgebra de conjuntos usando esse alfabeto.

***solução:*** A base da definição por indução deve ser as "menores" fórmulas bem formadas, as mais simples ou elementares, aquelas que não contêm operadores. No caso:

*(i) A, B, C, ... são conjuntos*

*Depois, são definidas as regras de construção de fórmulas a partir de fórmulas mais elementares, gerando fórmulas mais complexas, no caso, com o uso dos operadores: ∪, ∩ e ~ (serão 3 regras). Os parênteses são necessários quando se deseja definir prioridades não usuais entre os operadores. Então, serão definidas regras para cobrir esse caso.*

*As regras podem ser operações unárias, isto é, a partir de um elemento já definido, um novo elemento é definido, como:*

*(ii) se X é um conjunto, então ~X também é; ou*
*(iii) se X é um conjunto, então (X) também é.*

*A regra também pode ter uma operação de aridade maior. No caso, pode ser binária, isto é, é necessário duas fórmulas já definidas para definir uma nova fórmula. Por exemplo:*

*(iv) se X e Y são conjuntos, então $X \cup Y$ também é;*
*(v) se X e Y são conjuntos, então $X \cap Y$ também é.*

*Note que qualquer elemento gerado pelas regras passa a fazer parte do conjunto de fórmulas, sendo definido. Portanto, além de gerar os elementos desejados, deve-se ter muito cuidado para não definir elementos indesejáveis.*

*As quatro regras acima geram exatamente o conjunto de fórmulas bem formadas desejado. Exemplificando para a fórmula $(A \cup B) \cap \sim C$:*

| | |
|---|---|
| *A, B e C são conjuntos* | *regra (i)* |
| *$A \cup B$ e C são conjuntos* | *regra (iv)* |
| *$(A \cup B)$ e C são conjuntos* | *regra (iii)* |
| *$(A \cup B)$ e $\sim C$ são conjuntos* | *regra (ii)* |
| *$(A \cup B) \cap \sim C$ são conjuntos* | *regra (iv)* |

*Como exercício complementar, vamos modificar o conjunto de regras objetivando não gerar parênteses desnecessários ou que carreguem a notação. Por exemplo, a regra (iii) define expressões como: (A) ou ((A)), cuja presença de parênteses carrega a notação. Ou, $(\sim A)$ cuja presença dos parênteses é também desnecessária, já que a negação tem prioridade sobre os outros operadores. Vamos tentar evitar tais gerações. Entretanto, o parêntese é necessário como no seguinte caso:*

$$\sim(A \cup B) \quad \text{para diferenciar de} \quad \sim A \cup B$$

*Podemos minimizar o problema da geração de parênteses não-necessários substituindo as regras (iii) e (iv), como faremos abaixo:*

*(i) A, B, C, ... são conjuntos*
*(ii) se X é um conjunto, então $\sim X$ também é; ou*
*(iii) se X e Y são conjuntos, então $X \cup Y$ também é conjunto*
*(iv) se X e Y são conjuntos, então $X \cap Y$ também é conjunto*
*(v) se X e Y são conjuntos, então $(X \cup Y)$ também é conjunto*
*(vi) se X e Y são conjuntos, então $(X \cap Y)$ também é conjunto.*



*Note que ainda serão gerados parênteses desnecessários, como no caso:*

$$((A \cup B) \cup C)$$

*Entretanto, isso não chega a ser um problema, pois os parênteses em questão não alteram a semântica da expressão.*

---

**exercício 8.8** Relativamente à operação de exponenciação $x^n$, para um número x real, defina indutivamente a exponenciação em termos de multiplicações sucessivas.

*Sejam x um número real fixo e $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ uma função tal que, para qualquer $n \in \mathbf{R}$, $f(n) = x^n$.*

*O menor valor natural considerado é $n = 0$. Então, a base é $f(0)$. Depois, o passo $f(n + 1)$ é definido usando $f(n)$.*

***solução:***

*(i) $f(0) = 1$*
*(ii) $f(n + 1) = x * f(n)$*

**b** Detalhe a aplicação da função definida para $n = 3$;

*Como $3 \neq 0$, temos que usar inicialmente a regra (ii).*

***solução:***

| | |
|---|---|
| $f(3) =$ | |
| $f(2 + 1) =$ | *regra (ii)* |
| $x * f(2) =$ | |
| $x * f(1 + 1) =$ | *regra (ii)* |
| $x * x * f(1) =$ | |
| $x * x * f(0 + 1) =$ | *regra (ii)* |
| $x * x * x * f(0) =$ | *regra (i)* |
| $x * x * x * 1 =$ | |
| $x^3$ | |

**exercício 8.9** Relativamente à operação de multiplicação de dois números naturais:

**a** Defina indutivamente a multiplicação de naturais em termos de adições sucessivas;

*Em uma definição recursiva desse tipo, é preciso escolher um parâmetro para fazer a indução. Vamos escolher o segundo. Então temos que definir:*

$mult(x, 0)$ e $mult(x, y + 1)$

*Note que $mult(x, 0)$ só tem um parâmetro, no caso, $x$ e $x * 0 = 0$. Logo, $mult(x, 0)$ deve ser uma função de aridade 1 cujo resultado é sempre zero (para qualquer $x$). Assim:*

$mult(x, 0) = zero(x)$

*No passo de indução, ou seja, na definição de $mult(x, y + 1)$, deve ser usado o valor da função para o caso anterior (hipótese de indução), no caso $mult(x, y)$. Como $x * (y + 1) = x * y + x$, então:*

$mult(x, y + 1) =$
$mult(x, y) + x =$
$x + mult(x, y) =$
$soma(x, mult(x, y))$

***solução:***

$mult(x, 0) = zero(x)$ (1)
$mult(x, y + 1) = soma(x, mult(x, y))$ (2)

**b** Detalhe a multiplicação de 2 e 3;

*Para calcular $mult(2, 3)$, note que $3 \neq 0$. Assim, 3 é tratado como $y + 1$, com $y = 2$, e a regra (2) $mult(x, y + 1) = soma(x, mult(x, y))$ deve ser aplicada. Este raciocínio é repetido até $y = 0$, quando então se aplica a regra (1) $mult(x, 0) = zero(x)$.*

***solução:***

$mult(2, 3) =$ (2)
$soma(2, mult(2, 2)) =$
$2 + mult(2, 2) =$ (2)
$2 + soma(2, mult(2, 1)) =$
$2 + 2 + mult(2, 1) =$ (2)
$2 + 2 + soma(2, mult(2, 0)) =$
$2 + 2 + 2 + mult(2, 0)) =$ (1)
$2 + 2 + 2 + zero(2) =$
$2 + 2 + 2 + 0 =$
$6$

*Logo, $mult(2, 3) = 6$.*

**exercício 8.10** Relativamente à função max: $\mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$, a qual determina o maior de dois números fornecidos (por exemplo, $max\langle 2, 3\rangle = 3$):

*A função max: $\mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ possui dois argumentos. A indução se faz num argumento e, depois, no outro. É indiferente começar pelo primeiro ou pelo segundo, ou, ainda, em paralelo, como vamos fazer neste caso. A base será quando um ou os dois argumentos chegar a zero.*

**a** Defina indutivamente tal função;

*Para a base definimos $max\langle 0, 0\rangle$, $max\langle 0, m\rangle$ e $max\langle n, 0\rangle$ e, para o passo, definimos $max\langle n + 1, m + 1\rangle$ em funcão de $max\langle n, m\rangle$.*

***solução:***

(i) $max\langle 0, 0\rangle = 0$
(ii) $max\langle 0, m\rangle = m$
(iii) $max\langle n, 0\rangle = n$
(iv) $max\langle n + 1, m + 1\rangle = max\langle n, m\rangle + 1$

**b** Detalhe a aplicação da função definida para os valores 2 e 3;

***solução:***

$max\langle 2, 3\rangle =$
$max\langle 1 + 1, 2 + 1\rangle =$ regra (iv)
$max\langle 1, 2\rangle + 1 =$
$max\langle 0 + 1, 1 + 1\rangle + 1 =$ regra (iv)
$max\langle 0, 1\rangle + 1 + 1 =$ regra (ii)
$1 + 1 + 1 =$
$3$

**exercício 8.11** Uma florista é famosa pelos belos ramos de rosas que arruma. Os ramos são compostos por rosas e galhos de folhas (denominados simplesmente de folhas). Na confecção dos ramos a florista obedece as quatro regras descritas abaixo. A partir dessas regras, defina indutivamente um ramo de rosas:

- o número de rosas deve ser sempre ímpar;
- o número de folhas deve ser sempre par;
- todo ramo tem que ter folhas;
- o número de folhas pode ser menor que o número de rosas, e não pode ultrapassar por mais de um o número de rosas.

*Inicialmente, para definir a base de indução, vamos identificar o menor ramo de rosas que pode ser confeccionado obedecendo as quatro regras:*

- *pela terceira regra, todo ramo deve ter folhas;*
- *pela segunda regra, deve ter pelo menos duas folhas;*
- *pela quarta regra, se o ramo tem duas folhas, deve ter pelo menos uma rosa.*

*Logo, o menor ramo (base de indução) tem duas folhas e uma rosa.*

*Quanto às regras de formação, podemos deduzir o seguinte:*

- *para manter a paridade de folhas e rosas, elas devem ser acrescentadas aos pares (primeira e segunda regras);*
- *o número de rosas pode crescer independentemente do número de folhas (quarta regra);*
- *o número de folhas pode ser, no máximo, de uma unidade maior que o número de rosas (como na base). Logo, folhas só podem ser acrescentadas acompanhadas de rosas (quarta regra).*

*Agora a definição indutiva pode ser construída.*

***solução:*** *Definição indutiva de um ramo de rosas:*

*(i)* *duas folhas e uma rosa é um ramo;*
*(ii)* *um ramo acrescido de duas rosas também é um ramo;*
*(iii)* *um ramo acrescido de duas folhas e duas rosas também é um ramo.*



**exercício 8.12** Defina indutivamente o seguinte problema:

Um jarro tem p bolas pretas e b bolas brancas. Tiram-se duas bolas quaisquer e:

- se forem de mesma cor, coloca-se uma bola preta na jarra (existe um estoque de bolas pretas, caso seja necessário);
- se forem de cores diferentes, coloca-se uma bola branca na jarra.

***solução:*** *Definição indutiva:*

*(i)* $\langle p, b\rangle$ *representa a jarra com p bolas pretas e b bolas brancas;*
*(ii)* *Se* $\langle x, y\rangle$ *e* $x > 1$ *e* $y > 1$, *então* $\langle x - 1, y\rangle$ — *cores diferentes*
*Se* $\langle x, y\rangle$ *e* $x \geq 2$, *então* $\langle x - 1, y\rangle$ — *2 bolas pretas*
*Se* $\langle x, y\rangle$ *e* $y \geq 2$, *então* $\langle x + 1, y - 2\rangle$ — *2 bolas brancas*
*(iii)* *Nada mais*

**exercício 8.13** Existe uma versão finita do Princípio da Indução Matemática a qual, analogamente à infinita, pode ser aplicada a provas e a definições. A versão finita é definida como segue:

Seja p(m), p(m + 1), ..., p(n) uma sequência de proposições. O *Princípio da Indução Matemática Finita* é como segue:

**a** p(m) é verdadeira;
**b** Para qualquer $k \in \mathbf{N}$ tal que $m \leq k < n$ vale $p(k) \Rightarrow p(k + 1)$;
**c** Então, para qualquer $k \in \mathbf{N}$ tal que $m \leq k < n$, p(k) é verdadeira.

Usando o Princípio da Indução Matemática Finita, defina indutivamente uma microempresa, sabendo que:

**a** As regras que definem uma microempresa são as seguintes:

- deve ter pelo menos 10 e no máximo 100 empregados;
- deve produzir pelo menos um produto;

**b** As operações sobre a constituição da microempresa são as seguintes:

- contratar um empregado;
- demitir um empregado;
- produzir um novo produto;
- deixar de produzir um produto.

*Uma microempresa é constituída de empregados e produtos. O número de empregados é limitado superiormente por 100. Portanto, a indução será finita, pelo menos no número de empregados.*

*A menor microempresa está bem definida: tem 10 empregados e produz um produto.*

*Das quatro operações sobre a constituição da microempresa, apenas a terceira (produzir um novo produto) é independente da situação atual da microempresa. As outras três operações são condicionais.*

**solução:** *Definição indutiva finita de uma microempresa:*

*(i)* *10 empregados e um produto produzido constituem uma microempresa;*
*(ii)* *uma microempresa que passar a produzir mais um produto continuará sendo uma microempresa;*
*(iii)* *uma microempresa com menos de 100 empregados, contratando um novo empregado, continuará sendo uma microempresa;*
*(iv)* *uma microempresa com mais de 10 empregados, demitindo um empregado, continuará sendo uma microempresa;*
*(v)* *uma microempresa que produz mais de um produto, deixando de produzir um produto, continuará sendo uma microempresa.*

## 8.2 → exercícios complementares

**exercício 8.14** Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbf{N}$:

**a** $1^2 + 3^2 + 5^2 \ldots + (2n - 1)^2 = n(2n - 1)(2n + 1)/3$

**b** $1/(1 * 2) + 1/(2 * 3) + 1/(3 * 4) \ldots + 1/(n(n + 1)) = n/(n + 1)$

**c** $1 * 1! + 2 * 2! + 3 * 3! \ldots + n * n! = (n + 1)! - 1$



**exercício 8.15** Prove por indução que qualquer número natural maior ou igual a dois pode ser definido como o produto de números primos.

*Dica*: use o segundo princípio de indução.

**exercício 8.16** Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, $2^n + (-1)^{n+1}$ é divisível por 3.

**exercício 8.17** Defina indutivamente o conjunto dos números pares:

$$\text{Pares} = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é par}\}$$

**exercício 8.18** Defina indutivamente o conjunto de todos descendentes de Maomé.

**exercício 8.19** Para a definição indutiva abaixo, descreva o conjunto definido:

O conjunto B é indutivamente definido como segue:

$2 \in B$ e $3 \in B$
se $b \in B$, então $2b \in B$ e $3b \in B$

**exercício 8.20** Defina indutivamente as seguintes funções e prove (por indução) que a definição está correta:

**a** $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $f(x) = 2x + 5$

**b** $g: \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ tal que $g(x, y) = 2x + 3y + 4$

**exercício 8.21** Dada a função:

$f(x, 0) = 1$
$f(x, y + 1) = x * f(x, y)$

**a** Calcule f(2, 3);

**b** Defina f de forma não-indutiva e prove por indução que a definição construída está correta.

---

**exercício 8.22** Dado:

$$Pot_2 = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ e } x \text{ é potência de } 2\}$$

Seja c: $Pot_2 \to \mathbf{N}$ a função indutivamente definida da seguinte forma:

$c(1) = 1$
$c(n) = 1 + 2c(n/2)$, para $n > 1$

**a** Defina indutivamenrte $Pot_2$;

**b** Prove por indução que $c(n) = 2n - 1$;

*Dica*: Lembre que:

$$2^p = n \Leftrightarrow p = \log_2 n$$

---

**exercício 8.23** Prove por indução que:

**a** Para qualquer natural $n > 2$, vale $n^2 \geq 2n + 1$;

**b** Para qualquer natural $n > 3$, vale $2^n \geq n^2$;

---

**exercício 8.24** Dado:

$$Pot_2 = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ e } x \text{ é potência de } 2\}$$

Considere a seguinte função f: $Pot_2 \to \mathbf{N}$ definida indutivamente sobre as potências de 2 como:

$f(n) = 0$, se $n = 1$
$f(n) = n + 2f(n/2)$, se $n > 1$

Defina f de forma não-indutiva e prove por indução que a definição está correta.



---

**exercício 8.25** Dado:

$$Pot_2 = \{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ e } x \text{ é potência de } 2\}$$

Seja T: $Pot_2 \to \mathbf{N}$ a função indutivamente definida da seguinte forma, para algum valor b:

$T(1) = b$
$T(n) = b + 2T(n/2)$, para $n > 1$

**a** Calcule T(8);

**b** Prove por indução que:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} 2^i$$

*Dica*: Lembre que $\log_2 2 = 1$ e $\log a + \log b = \log (ab)$.

---

**exercício 8.26** Prove usando o princípio da indução matemática que:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

---

**exercício 8.27** Desenvolva uma prova por indução do seguinte teorema:

*Qualquer valor de postagem igual ou maior que 12 reais pode ser formado usando exclusivamente selos de 4 e de 5 reais.*