Estatística

6 - Distribuição de Probabilidade de Variáveis Aleatórias Discretas

Principais Distribuições de Probabilidades

- Distribuição Equiprovável
- Distribuição de Bernoulli
- Distribuição Binomial
- Distribuição Geométrica
- Distribuição de Pascal
- Distribuição Hipergeométrica
- Distribuição Multinomial
- Distribuição de Poisson

Distribuição Equiprovável

Todos os possíveis valores da Variável Aleatória tem a mesma Probabilidade de ocorrer

n valores $\Rightarrow$ $\boxed{P(X = x_i) = \dfrac{1}{n}}$

Para valores equi-espaçados (a diferença entre os valores é constante e igual a h), tem-se:

$$\boxed{E(X) = \frac{x_1 + x_n}{2}} \qquad \boxed{\sigma^2(X) = \frac{h^2(n^2 - 1)}{12}}$$

Exemplo 1(valores equi-espaçados):

$$x \in \{1,2,3\} \longrightarrow \boxed{E(X) = \frac{1+3}{2}(=2)}$$

Exemplo 2 (valores não equi-espaçados):

$$x \in \{1,2,5\} \longrightarrow \boxed{E(X) \neq \frac{1+5}{2}(=3)}$$

Distribuição de Bernoulli

$$
\text{Experimento} \begin{array}{l} \nearrow \text{“}\textbf{sucesso}\text{”} \\ \searrow \text{“}\textbf{fracasso}\text{”} \end{array}
$$

Seja X: variável aleatória com possíveis resultados:

X = 1 se o resultado for um sucesso

X = 0 se o resultado for um fracasso

p: probabilidade de ocorrer sucesso

q: probabilidade de não ocorrer sucesso (fracasso)

$$
P(X) = \begin{cases} q = 1\text{-}p & \text{para } x = 0; \\ p & \text{para } x = 1; \\ 0 & \text{para } x \neq 0 \text{ ou } x \neq 1 \end{cases}
$$

$$\boxed{\mathbf{E(X) = p}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma^2(X) = p.q}}$$

Distribuição Binomial

<u>Condições do experimento</u>:

(1) ter um número *n* , fixo de repetições independentes

(2) cada repetição tem Distribuição Bernoulli:

“sucesso” ← ou → “fracasso”

(3) Probabilidade *p* de sucesso é constante

Seja X: variável aleatória Binomial

n: número de repetições

k: número de sucessos; k=**0**,1,...,n

P(X=k): probabilidade de k “sucessos” em n repetições

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}$$

Onde:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

$$\boxed{\mathbf{E\,(x) = n.p}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma^2\,(x) = n.p.q}}$$

Distribuição Binomial

Um vendedor visita sempre 5 casas por dia, no intuito de vender um determinado produto. Sabendo-se que a probabilidade de uma dona de casa comprar tal produto é de 20% e que o lucro por produto vendido é de 12 reais, pergunta-se:

a) Qual o lucro esperado ao final de um dia?

p=0,20: probabilidade de vender o produto (sucesso)

q=0,80: probabilidade de não vender o produto (fracasso)

x	P(x)	
0	$0,8^5$	$= 0,32768$
1	$5 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4$	$= 0,4096$
2	$10 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3$	$= 0,2048$
3	$10 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2$	$= 0,0512$
4	$5 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1$	$= 0,0064$
5	$0,2^5$	$= 0,00032$

$$\Pr(VVVVN) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,00128$$

$$\Pr(VVVNV) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,00128$$

$$\Pr(VVNVV) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,00128$$

$$\Pr(VNVVV) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,00128$$

$$\Pr(NVVVV) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,00128$$

Portanto:

$$\Pr(X = 4) = 5 \cdot 0,00128 = 0,0064$$

Distribuição Binomial

Um vendedor visita sempre 5 casas por dia, no intuito de vender um determinado produto. Sabendo-se que a probabilidade de uma dona de casa comprar tal produto é de 20% e que o lucro por produto vendido é de 12 reais, pergunta-se:

a) Qual o lucro esperado ao final de um dia?

p=0,20: probabilidade de vender o produto (sucesso)

q=0,80: probabilidade de não vender o produto (fracasso)

x	P(x)		Lucro (L)
0	$0{,}8^5$	$= 0{,}32768$	0
1	$5 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4$	$= 0{,}4096$	12
2	$10 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3$	$= 0{,}2048$	24
3	$10 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2$	$= 0{,}0512$	36
4	$5 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1$	$= 0{,}0064$	48
5	$0{,}2^5$	$= 0{,}00032$	60

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

$$\boxed{P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^{(5-4)} = 5 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064}$$

$$\boxed{E(L) = 0 \cdot 0{,}32768 + 12 \cdot 0{,}4096 + 24 \cdot 0{,}2048 + \ldots + 60 \cdot 0{,}00032 = 12}$$

E (x) = n.p=5.0,2=1 → **E (L) = 1.12=12**

Distribuição Geométrica

Repetição de um experimento com distribuição de Bernoulli (sucesso ou fracasso) até obtenção do **primeiro sucesso**.

Condições do experimento:
- repetições independentes
- mesma probabilidade de sucesso *p*

$$\boxed{P(X=k)=p\cdot q^{k-1},k=1,2,3\ldots}$$

$$E(X)=\sum_i x_i\cdot P\left(X_i\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p\cdot q^{k-1}=\frac{1}{p}$$

$$\sigma^2(X)=\sum_i\left[x_i-E(X)\right]^2\cdot P\left(x_i\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(k-\frac{1}{p}\right)^2\cdot p\cdot q^{k-1}=\frac{q}{p^2}$$

Distribuição Geométrica

Um vendedor visita um número grande de casas, no intuito de vender um determinado produto. Sabendo-se que a probabilidade de uma dona de casa comprar tal produto é de 20%, pergunta-se:
b) Qual a probabilidade do vendedor vender o primeiro produto na terceira casa visitada?

p=0,20: probabilidade de vender o produto (sucesso)

q=0,80: probabilidade de não vender o produto (fracasso)

$$\boxed{P(X=k)=p\cdot q^{k-1}, k=1,2,3\ldots}$$

$$\boxed{P(X=3)=0{,}2\cdot 0{,}8^{(3-1)}=0{,}128}$$

c) Sabendo que nas duas primeiras casas o vendedor não vendeu nenhum produto, qual a probabilidade dele vender na terceira casa visitada?

$$\boxed{P(X=3|X>2)=\frac{P(X=3\cap X>2)}{P(X>2)}=\frac{P(X=3)}{P(X>2)}}$$

$$\boxed{P(X>2)=1-[P(X=1)+P(X=2)]=1-[0{,}2\cdot 0{,}8^{0}+0{,}2\cdot 0{,}8^{1}]=0{,}64}$$

Portanto:

$$\boxed{P(X=3|X>2)=\frac{0{,}128}{0{,}64}=0{,}2} \longrightarrow \boxed{P(X=1)=0{,}2\cdot 0{,}8^{0}=0{,}2}$$

Propriedade: $\boxed{P(X=s+t|X>s)=P(X=t)}$

Distribuição de Pascal

Repetição de um experimento com distribuição de Bernoulli (sucesso ou fracasso) até obtenção do **r-ésimo sucesso.**

<u>Condições do experimento</u>:

- provas independentes
- mesma probabilidade de sucesso *p*

***r*-ésimo sucesso** ocorre na ***k*-ésima tentativa**

***k-1* tentativas anteriores** houve ***r-1* sucessos**

Daí

$$P(X=k)=p\cdot\binom{k-1}{r-1}\cdot p^{r-1}\cdot q^{(k-1)-(r-1)}$$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}\cdot p^{r}\cdot q^{k-r}}$$

Para: $k=r,\ r+1,\ r+2,\ \ldots$

$$\boxed{E(X)=\frac{r}{p}}\qquad \boxed{\sigma^2(X)=\frac{r\cdot q}{p^2}}$$

Distribuição de Pascal

Um vendedor visita um número grande de casas, no intuito de vender um determinado produto. Sabendo-se que a probabilidade de uma dona de casa comprar tal produto é de 20%, pergunta-se:
d) Qual a probabilidade do vendedor vender dois produtos, coincidindo do segundo produto ser vendido justamente na quinta casa visitada?

p=0,20: probabilidade de vender o produto (sucesso)

q=0,80: probabilidade de não vender o produto (fracasso)

$$\boxed{P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}\cdot p^{r}\cdot q^{k-r}}$$

$$\boxed{P(X=5)=\binom{5-1}{2-1}\cdot 0{,}2^{2}\cdot 0{,}8^{(5-2)}=0{,}08192}$$

Distribuição Hipergeométrica

Difere da Distribuição Binomial somente porque as repetições do experimento são feitas sem reposição.

Seja:

N: conjunto de elementos

r : subconjunto com determinada característica

n: elementos são extraídos sem reposição

X: número de elementos com tal característica

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = \sum_k k \cdot \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \ldots = \frac{r \cdot n}{N} = n \cdot p$$

$$\sigma^2(X) = \sum_k (k - np)^2 \cdot \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \ldots = n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Distribuição Hipergeométrica

Considere que num lote de peças existam 4 defeituosas. Selecionando-se 5 dessas peças, sem reposição, qual seria a probabilidade de 2 defeituosas terem sido escolhidas?

X: v. a. que indica o número de peças defeituosas no lote

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N - r}{n - k}}{\binom{N}{n}}$$

N: conjunto de elementos

r : subconjunto com determinada característica

n: elementos são extraídos sem reposição

X: número de elementos com tal característica

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{20-4}{5-2}}{\binom{20-4}{5}} = 0{,}217$$

Distribuição Polinomial ou Multinomial

Condições do experimento:

- n repetições independentes

- cada repetição admite um único resultado dentre r possíveis resultados

- probabilidade de ocorrer um determinado resultado é constante

- X_i: número de ocorrências do i-ésimo resultado

- p_i: probabilidade de ocorrência do i-ésimo resultado

$$\boxed{P(X_1 = k_1; X_2 = k_2; .. X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! .. k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}}$$

Onde:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = n \qquad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

Distribuição Polinomial ou Multinomial

Exemplo: Uma fábrica tem sua produção composta de 30% da máquina A, 20% da máquina B e 50% da máquina C. Retirando-se 9 peças da produção

a) Qual a probabilidade de serem 4 da máquina A, 2 da máquina B e 3 da máquina C?

$$\boxed{P(X_1 = k_1; X_2 = k_2; \ldots X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}}$$

$$\boxed{P(X_1 = 4; X_2 = 2; X_3 = 3) = \frac{9!}{4!2!3!} \cdot (0,3)^4 (0,2)^2 (0,5)^3 = 0,0510}$$

b) Qual a probabilidade de não haver nas 9 peças nenhuma da máquina B? (distribuição binomial)

p=0,2 (sair peça da máquina B - sucesso)

q=0,8 (não sair peça da máquina B - fracasso)

$$\boxed{P(X_2 = 0) = \binom{9}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 = 0,1342}$$

Distribuição de Poisson

X: Número de sucessos em um determinado intervalo contínuo (tempo, comprimento, superfície, volume, etc).

Exemplos:

- ✓ Número de pessoas que chegam na rodoviária no período de 1 h.
- ✓ Número de defeitos em barras de aço 5 m.
- ✓ Número de focos de incêndio por hectare.

<u>Hipóteses</u>:

1. O número de sucessos em intervalos não sobrepostos constituem variáveis aleatórias independentes.
2. A probabilidade do número de sucessos em qualquer intervalo depende apenas da sua dimensão. Por outras palavras, em intervalos de mesma dimensão são iguais as probabilidades de ocorrência de um mesmo número de sucessos.
3. A probabilidade de obter dois ou mais sucessos em um intervalo suficientemente pequeno é desprezível.

Distribuição de Poisson

$$\boxed{P(X=k)=\frac{e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^k}{k!}}$$

Onde k: número de sucessos no intervalo t (k=0,1,...,n)

t: comprimento total do intervalo

λ: freqüência média de sucessos

(Ex.: chegadas/ hora; defeitos /metro)

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}=\lambda t=\mu}$$

$$\boxed{\sigma^2(X)=\sum_{k=0}^{\infty}(k-\lambda t)^2\,\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}=\lambda t}$$

Distribuição de Poisson

Exemplo: Num processo de fabricação de alumínio aparecem em média uma falha a cada 400 m (0,0025 falhas/m = λ).
Qual a probabilidade de ocorrer 3 falhas em 1000m?

E(x) = μ =λt = 0,0025 falhas/m 1000 m = 2,5 falhas

k = 3

$$\boxed{P(X = 3) = \frac{e^{-\mu}\mu^3}{3!} = \frac{e^{-2,5}2,5^3}{3!} = 0,2138}$$

Distribuição de Poisson

Exemplo: Admita que o número de consultas à home page de uma determinada empresa durante um período de tempo obedece a uma distribuição de Poisson e que em média há duas consultas por dia. Qual a probabilidade de que em um(a) determinado(a):

a) dia sejam feitas exatamente 3 consultas?

λ=2 consultas por dia;
t=1 dia

$$\boxed{E(X) = \lambda t = 2 \cdot 1 = 2}$$

$$\boxed{P(X = 3) = \frac{e^{-\mu}\mu^{3}}{3!} = \frac{e^{-2}2^{3}}{3!} = 0{,}1804}$$

b) semana (7 dias) sejam feitas no máximo dez consultas?

λ=2 consultas por dia;
t= 7 dias

$$\boxed{E(X) = \lambda t = 2 \cdot 7 = 14}$$

$$\boxed{P(X \leq 10) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 10)}$$

$$\boxed{P(X \leq 10) = \frac{e^{-14}14^{0}}{0!} + \frac{e^{-14}14^{1}}{1!} + \ldots + \frac{e^{-14}14^{10}}{10!}}$$

Distribuição de Poisson

Exemplo: Admita que o número de consultas à home page de uma determinada empresa durante um período de tempo obedece a uma distribuição de Poisson e que em média há duas consultas por dia. Qual a probabilidade de que em um(a) determinado(a):

c) dia sejam feitas pelo menos 4 consultas?

λ=2 consultas por dia;
t=1 dia

$$\boxed{E(X) = \lambda t = 2 \cdot 1 = 2}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) =$$

$$= 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} + \frac{e^{-2}2^2}{2!} + \frac{e^{-2}2^3}{3!}\right] = 0{,}143$$