Calcular o valor, em função de x, das seguintes integrais aplicando o médoto de integração de frações racionais:

****

<u>Nota</u>: Dada uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, com o grau de P(x) menor que o de Q(x), devemos decompor seu denominador em fatores irredutíveis, dando origem a frações simples da seguinte forma:

a) $$\frac{P(x)}{(x-a)(x-a)^2 .. (x-a)^n} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + ... + \frac{C}{(x-a)^n}$$

b) $$\frac{P(x)}{(x^2+bx+c)(x^2+bx+c)^2 .. (x^2+bx+c)^n} = \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} + \frac{Cx+D}{(x^2+bx+c)^2} + ... + \frac{Ex+F}{(x^2+bx+c)^n}$$

Se o grau de P(x) é maior que o de Q(x), devemos efetuar a divisão $\frac{P(x)}{Q(x)}$ = Q(x) + $\frac{r(x)}{q(x)}$, e agora é só lidar com a função $\frac{r(x)}{q(x)}$.

****

1) $$I = \int \frac{1}{2x^3+x}\,dx \quad ;$$

Solução

$$\frac{1}{2x^3+x} = \frac{1}{x(2x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{2x^2+1}$$

multiplicando os dois membros por $x(2x^2+1)$, temos:

$$1 = A(2x^2+1) + Bx^2 + Cx \quad => \quad 1 = 2Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \quad =>$$

$$\Rightarrow \quad 0\,x^2 + 0\,x + 1 = (2A + B)\,x^2 + C\,x + A$$

da identidade acima, temos que:

$$2A + B = 0 \quad , \quad C = 0 \quad e \quad A = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -2$$

assim, temos que:

$$\frac{1}{2x^3 + x} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{2x^2 + 1}$$

e conseqüentemente: $I = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{2x}{2x^2+1}\,dx$

considerando $u = 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 4\,x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,du = 2\,x\,dx$

substituindo em I, temos:

$$I = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(|u|) + K$$

substituindo u por seu valor inicial, temos:

$$I = \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(|2x^2 + 1|) + K$$

----

2) $I = \int \frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$;

Solução

$$\frac{x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{x^2 + x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B\,x + C}{x^2 + 1}$$

multiplicando os membros por $(x-1)(x^2+1)$, temos:

$x^2+x = A(x^2+1) + Bx(x-1) + C(x-1) = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$

$= (A+B)x^2 + (-B+C)x + A - C$

desta identidade, temos que:

$A+B = 1$, $-B+C = 1$ e $A-C = 0$ => $A = 1$, $B = 0$ e $C = 1$

assim, temos que: $\dfrac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x^2+1}$

e conseqüentemente:

$$I = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln(\,|x-1|\,) + \operatorname{arctg}(x) + K$$

----

3) $I = \displaystyle\int \frac{2(x-3)}{x^3+3x^2+2x}\,dx$;

Solução

$$\frac{2(x-3)}{x^3+3x^2+2x} = \frac{2x-6}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

multiplicando os dois membros por $x(x+1)(x+2)$, temos:

$2x - 6 = A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$

$= A(x^2+3x+2) + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 + Cx$

$= Ax^2 + 3Ax + 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 + Cx$

$2x - 6 = (A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A$

desta identidade, temos que:

$A+B+C = 0$, $3A+2B+C = 2$ e $2A = -6$ => $A = -3$, $B = 8$ e $C = -5$

assim, temos que:

$$\frac{2(x-3)}{x^3+3x^2+2x} = -\frac{3}{x} + \frac{8}{x+1} - \frac{5}{x+2}$$

e conseqüentemente:

$$I = -3\int \frac{1}{x}\,dx + 8\int \frac{1}{x+1}\,dx - 5\int \frac{1}{x+2}\,dx = -3\ln(|x|) + \ln(|x+1|) - 5\ln(|x+2|) + K$$

----

4) $I = \displaystyle\int \frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4}\,dx$;

Solução

$$\frac{2x^2+3x+2}{x^3+4x^2+6x+4} = \frac{2x^2+3x+2}{(x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

multiplicando os membros por $(x+2)(x^2+2x+2)$, temos:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 2 &= A(x^2+2x+2)\ Bx(x+2) + C(x+2) \\ &= Ax^2 + 2Ax + 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C \\ &= (A+B)x^2 + (2A+2B+C)x + 2A + 2C \end{aligned}$$

desta identidade, temos:

$A + B = 2$, $2A + 2B + C = 3$ e $2A + 2C = 2$ => $A = 2$, $B = 0$ e $C = -1$

assim, temos que:

$$\frac{2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 4x^2 + 6x + 4} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

e conseqüentemente:

$$I = 2\int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = 2\ln(\,|x+2|\,) - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= 2\ln(\,|x+1|\,) - \operatorname{arctg}(x+1) + K$$

----

5) $$I = \int \frac{e^{(5x)}}{(e^{(2x)}+1)^2}\,dx\ ;$$

Solução

considerando $u = e^x$ => $du = e^x\,dx$ => $du = u\,dx$ <=> $dx = \frac{1}{u}\,du$

substituindo em I , temos:

$$I = \int \frac{u^5}{u\,(u^2+1)^2}\,du = \int \frac{u^4}{u^4+2u^2+1}\,du = \int 1\,du - \int \frac{2u^2+1}{u^4+2u^2+1}\,du = u - \int \frac{2u^2+1}{(u^2+1)^2}\,du$$

mas $$\frac{2u^2+1}{(u^2+1)^2} = \frac{2u^2+1}{(u^2+1)(u^2+1)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{Cu+D}{(u^2+1)^2}$$

multiplicando os membros por $(u^2+1)(u^2+1)$, temos:

$$\begin{aligned} 2u^2 + 1 &= \mathrm{A\,u}(u^2+1) + \mathrm{B}(u^2+1) + \mathrm{C\,u} + \mathrm{D} \\ &= \mathrm{A}\,u^3 + \mathrm{A\,u} + \mathrm{B}\,u^2 + \mathrm{B} + \mathrm{C\,u} + \mathrm{D} \\ &= \mathrm{A}\,u^3 + \mathrm{B}\,u^2 + (\mathrm{A}+\mathrm{C})\,\mathrm{u} + \mathrm{B} + \mathrm{D} \end{aligned}$$

desta identidade, temos que:

$\mathrm{D} = -1$

assim, temos que: $$\frac{2u^2+1}{(u^2+1)^2} = \frac{2}{u^2+1} - \frac{1}{(u^2+1)^2}$$

e conseqüentemente:

$$\mathrm{I} = \mathrm{u} - \left(\int \frac{2}{u^2+1}\,du - \int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du \right) = \mathrm{u} - 2\,\mathrm{arctg(\,u\,)} + \int \frac{1}{(1+u^2)^2}\,du$$

usando a fórmula :

$$\int \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^2)^{\boldsymbol{n}}}\,\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{x}^2+\mathbf{1})^{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}} + \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{3}}{\mathbf{2}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}\int \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}^2+\mathbf{1})^{(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}}\,\boldsymbol{dx} \quad ,$$

temos:

$$\mathrm{I} = \mathrm{u} - 2\,\mathrm{arctg(\,u\,)} + \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du =$$

$$= \quad u \; - \; 2\,\mathrm{arctg}(\,u\,) \; + \; \frac{u}{2\,(u^2+1)} \; + \; \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(\,u\,) \; + \; K$$

$$= \quad u \; + \; \frac{u}{2\,(u^2+1)} \; - \; \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}(\,u\,) \; + \; K$$

substituindo u por seu valor inicial, temos:

$$I \; = \; \mathbf{e}^x \; + \; \frac{\mathbf{e}^x}{2\,(\mathbf{e}^{(2\,x)}+1)} \; - \; \frac{3}{2}\,\mathrm{arctg}(\mathbf{e}^x\,) \; + \; K$$

==

Jailson Marinho Cardoso
Aluno do curso de Matemática
Universidade Federal da Paraíba
Campus I
26/07/2000

==