Capítulo 18

Integrais Impróprias

{improprias}

18.1 Integrais Impróprias de Primeira Espécie

18.1.1 Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$. Se a integral $\int_a^b f$ existe para todo $b \geqslant a$, então define-se a **integral imprópria de primeira espécie** como:

$$\int_a^\infty f := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f.$$

Quando o limite acima existe se diz que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, se diz que a integral imprópria **não-converge** ou que **diverge**. ♣

18.1.2 Exemplo: Seja $s \in \mathbb{R}$. Então, a integral $\displaystyle\int_1^\infty x^{-s}\,dx$ é convergente, com valor $\dfrac{1}{s-1}$, se e somente se $s > 1$.

Com efeito, no caso $s \neq 1$ tem-se:

$$\int_1^R x^{-s}\,dx = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_1^R = \frac{R^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} = \frac{1}{s-1} - \frac{R^{-s+1}}{s-1} = \frac{1}{s-1}\left(1 - e^{(1-s)\log R}\right).$$

Portanto:

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R x^{-s}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1}, & \text{se } 1-s<0; \\ \infty, & \text{se } 1-s>0. \end{cases}$$

No caso $s = 1$ tem-se:

$$\int_1^R x^{-s}\,dx = \log x\big|_1^R = \log R - \log 1 = \log R.$$

Portanto, a integral é claramente divergente neste caso. ♣ {primeira:exampl

18.1.3 Definição: Analogamente, dado $a \in \mathbb{R}$, se a integral $\int_b^a f$ existe para todo $b \leqslant a$, então define-se:

$$\int_{-\infty}^{a} f := \lim_{R \to -\infty} \int_R^a f. \qquad \clubsuit$$

18.1.4 Definição: Se as integrais $\int_a^\infty f$ e $\int_{-\infty}^a f$ existem ambas para algum $a \in \mathbb{R}$, então define-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f := \int_{-\infty}^{a} f + \int_a^\infty f. \qquad \clubsuit$$

18.1.5 Exemplo: Seja $a \in \mathbb{R}$. Então, a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\,dx$ é convergente, com valor $2/a$, se $a > 0$.

Com efeito, se $a > 0$ tem-se:

$$\int_0^R e^{-a|x|}\,dx = \int_0^R e^{-ax}\,dx = \left.\frac{e^{-ax}}{-a}\right|_0^R = \frac{e^{-aR}}{-a} - \frac{1}{-a} = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) \xrightarrow[R \to \infty]{} \frac{1}{a}.$$

Analogamente prova-se que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-a|x|}\,dx = \frac{1}{a}$, de onde segue o afirmado. $\clubsuit$

ra:example-2}

18.1.6 Exemplo: A integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ não existe, mas $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\,dx$ existe (com valor igual a zero, neste caso). $\clubsuit$

ra:example-3}

18.2 Alguns Critérios de Convergência

18.2.1 Lema: *Suponha-se que:*

1. $\displaystyle\int_a^b f$ *existe para todo* $b \geqslant a$.
2. $0 \leqslant f(x)$, *para todo* $x \geqslant a$.

Então, a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f$ *converge se e somente se existe* $M > 0$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b f \leqslant M$, *para todo* $b \geqslant a$. $\square$

rios:lemma-1}

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se $\displaystyle\int_a^\infty f$ converge, então a sequência $a_n := \displaystyle\int_a^{a+n} f$ é limitada. Ou seja, existe $M > 0$ tal que $\displaystyle\int_a^{a+n} f \leqslant M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $b \geqslant a$, então $a \leqslant b < a + n_0$, para algum

$n_0 \in \mathbb{N}$. Portanto:

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^{a+n_0} f \leqslant M,$$

onde a primeira desigualdade segue do fato que $f \geqslant 0$.

$(\Leftarrow)$ A sequência $a_n := \displaystyle\int_a^{a+n} f$ é não-decrescente, pois $f \geqslant 0$, e limitada superiormente, por M. Portanto, converge. $\blacksquare$

18.2.2 Lema (Convergência Dominada): *Suponha-se que:*

1. $\displaystyle\int_a^b f$ *existe para todo* $b \geqslant a$.

2. $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, *para todo* $x \geqslant a$.

3. $\displaystyle\int_a^\infty g$ *converge.*

Então, a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f$ *também converge e tem-se que* $\displaystyle\int_a^\infty f \leqslant \int_a^\infty g$. $\square$ {criterios:lemma-

Demonstração: Observe-se que, pela segunda condição, tem-se:

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g \leqslant \int_a^\infty g.$$

Portanto, basta tomar $M \geqslant \int_a^\infty g$ no lema anterior. $\blacksquare$

18.2.3 Lema (Critério de Comparação): *Suponha-se que:*

1. $\displaystyle\int_a^b f$ e $\displaystyle\int_a^b g$ *existem para todo* $b \geqslant a$.

2. $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) > 0$, *para todo* $x \geqslant a$.

3. *Existe* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =: c$.

Então:

(a) *Se* $c \neq 0$, *então as integrais impróprias* $\displaystyle\int_a^\infty f$ e $\displaystyle\int_a^\infty g$, *ou bem convergem ambas, ou bem divergem ambas.*

(b) *Se* $c = 0$, *então somente pode-se concluir que a convergência de* $\displaystyle\int_a^\infty g$ *implica a convergência de* $\displaystyle\int_a^\infty f$. $\square$

{criterios:lemma-3}

Demonstração: (a) Se $c \neq 0$, então deve ser $c > 0$, pela condição 2 acima. Pela condição 3 tem-se que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \epsilon \iff -\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - c < \epsilon \iff c - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + \epsilon.$$

Portanto, tomando, por exemplo, $\epsilon = c/2 > 0$ tem-se:

$$x \geqslant N(c/2) \Rightarrow c - c/2 < \frac{f(x)}{g(x)} < c + c/2 \Rightarrow 0 < \frac{c}{2}\, g(x) < f(x) < \frac{3c}{2}\, g(x).$$

Observe-se que na última relação acima foi usado o fato que $g(x) > 0$ como também $c > 0$. Desta maneira, o afirmado segue da última relação acima, usando o resultado de convergência dominada, ou seja, o Lema 18.2.2.

(b) Analogamente ao caso anterior, mas tomando agora $\epsilon = 1$, tem-se que:

$$x \geqslant N(1) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \Rightarrow 0 \leqslant f(x) < g(x).$$

Desta maneira, o afirmado segue da última relação acima, usando convergência dominada, ou seja, o Lema 18.2.2. ∎

18.2.4 Exemplo: Seja $s \in \mathbb{R}$. Então, a integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\, x^s\, dx$ é convergente, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Com efeito, tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\, x^s}{x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+2}}{e^x} = 0.$$

Observe-se que a integral $\displaystyle\int_1^\infty x^{-2}\, dx$ é convergente, segundo o Exemplo 18.1.2. Portanto, o afirmado segue usando a segunda parte do critério de comparação, Lema 18.2.3(b). ♣

s:example-1}

18.3 Integrais Impróprias de Segunda Espécie

18.3.1 Definição: Seja f definida em $(a, b]$. Se a integral $\int_x^b f$ existe para todo $a < x \leqslant b$, então define-se a **integral imprópria de segunda espécie** como:

$$\int_{a^+}^b f := \lim_{x\to a^+} \int_x^b f.$$

Quando o limite acima existe se diz que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, se diz que a integral imprópria **não-converge** ou que **diverge**. ♣

18.3.2 Exemplo: Seja $b > 0$. Então, a integral $\displaystyle\int_{0^+}^{b} x^{-s}\,dx$ é convergente, com valor $\dfrac{b^{1-s}}{1-s}$, se e somente se $s < 1$.

Com efeito, observe-se que a função $f(x) = x^{-s} = e^{-s\,\log x}$, está definida para $x > 0$ e tem-se:

$$\int_x^b f = \int_x^b u^{-s}\,du = \begin{cases} \dfrac{b^{1-s} - x^{1-s}}{1-s}, & \text{se } s \neq 1; \\ \log b - \log x, & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

Observe-se que $x^{1-s} = e^{(1-s)\,\log x}$ converge com limite finito (igual a zero, neste caso) quando $x \to 0^+$, se e somente se $1 - s > 0 \iff s < 1$.

Uma outra maneira de provar a convergência, consiste em calcular a integral valendo-se da substituição $y = 1/u$ da seguinte maneira:

$$\int_x^b u^{-s}\,du = \int_{1/x}^{1/b} \left(\frac{1}{y}\right)^{-s} \left(-y^{-2}\right)\,dy = -\int_{1/x}^{1/b} y^{s-2}\,dy = \int_{1/b}^{1/x} y^{s-2}\,dy.$$

Portanto:

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{1/b}^{1/x} y^{s-2}\,dy = \lim_{R\to\infty} \int_{1/b}^{R} y^{s-2}\,dy.$$

Pelo Exemplo 18.1.2, o limite acima existe se e somente se $s - 2 < -1 \iff s < 1$. ♣ {segunda:example-

18.3.3 Exemplo: A função $f(x) = x^{-3/4}$, para $0 < x \leqslant 1$, tem área finita, mas o volume do sólido de revolução gerado é infinito.

Com efeito, pelo exemplo anterior, a integral $\displaystyle\int_{0^+}^{1} x^{-3/4}\,dx$ converge, mas o volume do sólido de revolução, dado pela integral $\displaystyle\pi\int_{0^+}^{1} (x^{-3/4})^2\,dx = \pi\int_{0^+}^{1} x^{-3/2}\,dx$, é divergente. ♣ {segunda:example-

18.4 A Função Gamma

18.4.1 Lema: *A seguinte integral:*

$$\int_{0^+}^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt := \int_{0^+}^{1} e^{-t}t^{s-1}\,dt + \int_{1}^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt,$$

converge para todo $s > 0$. $\square$

Demonstração: A segunda integral no lado direito acima é convergente para todo $s \in \mathbb{R}$, em virtude do Exemplo 18.2.4. Portanto, basta provar a convergência da primeira integral. Utilizando a substituição $t = 1/u$ tem-se:

$$\int_x^1 e^{-t}t^{s-1}\,dt = \int_{1/x}^{1} e^{-1/u}u^{1-s}(-u^{-2})\,du = -\int_{1/x}^{1} e^{-1/u}u^{-s-1}\,du = \int_{1}^{1/x} e^{-1/u}u^{-s-1}\,du.$$

De onde segue que:

$$\lim_{x\to 0^+}\int_1^{1/x} e^{-1/u}u^{-s-1}\,du = \lim_{R\to\infty}\int_1^{R} e^{-1/u}u^{-s-1}\,du$$

Agora, observe-se que $0 \leqslant e^{-1/u}u^{-s-1} \leqslant u^{-s-1} = u^{-(s+1)}$. Portanto, utilizando a convergência dominada do Lema 18.2.2 com a função do Exemplo 18.1.2, tem-se que o último limite acima existe para todo $s+1>1 \iff s>0$. ∎

18.4.2 Definição: Define-se a **função gamma** $\Gamma(s)$ para $s>0$ como a integral:

$$\Gamma(s) := \int_{0^+}^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt, \quad \forall\, s>0;$$

cuja convergência é garantida pelo resultado anterior. ♣

Exercícios Para o Capítulo 18

18.5 Integrais Impróprias de Primeira Espécie

18.5.1 Exercício: Determine se cada uma das seguintes integrais impróprias converge ou não. Em caso afirmativo, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx.$ R: $1/2$.

(b) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$ R: Diverge como $2(\sqrt{R}-2)$.

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,dx.$ R: Diverge como $\mathrm{sen}(R)$.

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\,dx.$ R: 2.

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx.$ R: Diverge como $2(\sqrt{R+1}-1)$. ♣

18.5.2 Exercício: Suponha-se que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe. Então:

(a) A existência e o valor da integral independem do ponto a em questão.

(b) O limite $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f$ existe, com valor igual ao da integral. Observe-se que a recíproca deste resultado não é válida, como mostra o Exemplo 18.1.6. ♣

18.6 Integrais Impróprias de Segunda Espécie

18.6.1 Exercício: Verifique se cada uma das seguintes integrais impróprias existe, ou seja, se admite um valor finito e em tal caso calcule o valor da integral.

(a) $\displaystyle\int_0^{1} x^{-1/3}\,dx.$ R: $3/2$.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x+1)^{5/4}\,dx.$ R: $4/9$.

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^{-4/3}\,dx.$ R: Diverge como $3\left(\frac{1}{\epsilon^{1/3}}-1\right)$.

(d) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{(1-x)^{2/3}}\,dx.$ R: 6.

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}\,dx.$ R: $1/2$. ♣

18.7 Algumas Fórmulas de Redução

18.7.1 Exercício: Fórmula de redução para $(1-x^2)^n$.

(a) Integrando por partes, prove a seguinte fórmula de redução (embora não pareça):

$$\int (1-x^2)^n\,dx = (1-x^2)^n\,x + 2n\int x^2(1-x^2)^{n-1}\,dx.$$

(b) Usando a fórmula de redução do item anterior tantas vezes como necessário, prove que:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = 2n\,\frac{2(n-1)}{3}\,\frac{2(n-2)}{5}\cdots\frac{4}{2n-3}\,\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

♣

18.7.2 Exercício: Fórmula de redução para $(1+x^2)^{-n}$.

(a) Prove a seguinte fórmula de redução:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Sugestão: Observe-se que:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}.$$

(b) Usando a fórmula de redução do item anterior tantas vezes como necessário, prove que:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}.$$

♣

18.7.3 Exercício: Fórmula de redução para $\operatorname{sen}^n x$.

(a) Integrando por partes, prove a seguinte fórmula de redução:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

(b) Usando a fórmula de redução do item anterior tantas vezes como necessário, prove que:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}.$$

(c) Idem, mas agora para exponente ímpar:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}.$$

♣

18.7.4 Exercício: Uma fórmula para o cálculo de π.

(a) Utilizando os resultados do exercício anterior, prove que:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx} \left(\frac{2}{1}\,\frac{4}{3}\,\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\,\frac{1}{2n+1}\right)^2 2n+1.$$

(b) Prove que:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx} \leqslant 1 + \frac{1}{2n}.$$

Sugestão: $0 < x < \pi/2 \Rightarrow 0 < \operatorname{sen}^{2n+1} x = \operatorname{sen}^{2n} x \operatorname{sen} x < \operatorname{sen}^{2n} x$.

(c) Conclua que:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1}\,\frac{4}{3}\,\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\,\frac{1}{2n+1}\right)^2 2n+1.$$

(d) Utilizando o resultado do item anterior, verifique adicionalmente que:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2}{1}\,\frac{4}{3}\,\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}.$$

♣

18.8 Integrais Gaussianas

18.8.1 Exercício: **(a)** Prove que $1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$, para todo $x > 0$. Em particular:

$$(1-x^2)^n \leqslant e^{-nx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

(b) Utilizando o resultado do item anterior, prove que:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\,du$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du \leqslant \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

(c) Finalmente, combinando o resultado do item anterior com os resultados da seção anterior, conclua que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Além de importantes aplicações na Estatística, por exemplo, este resultado é particularmente notável, pois a função $f(x) = e^{-x^2}$ não pode ser integrada em termo de funções elementares, embora o valor da integral indefinida acima possa ser calculado exatamente. ♣

18.8.2 Exercício: Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $E(X^n)$ definido como:

$$E(X^n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{-x^2/2}\,dx.$$

Resulta facil deducir que $E(X^{2n+1}) = 0$ apelando a argumentos de paridade. O caso de n par é abordado no presente exercício.

(a) Usando o exercício anterior verifique que no caso $n = 0$ tem-se $E(X^0) = 1$.

(b) Integrando por partes verifique a seguinte fórmula de redução:

$$\int x^{2n}\, e^{-x^2/2}\,dx = -x^{2n-1}\, e^{-x^2/2} + (2n-1)\int x^{2n-2}\, e^{-x^2/2}\,dx.$$

(c) Utilizando a fórmula de redução do item anterior verifique que $E(X^{2n}) = (2n-1)\,E(X^{2n-2})$.

(d) Prove por indução em n que $E(X^{2n}) = (2n-1)(2n-3)\cdots 1$.

(e) Finalmente, conclua que $E(X^{2n}) = \dfrac{(2n)!}{2^n\, n!}$.

18.9 Propriedades Elementares da Função Gamma

18.9.1 Exercício: A função Gamma possui a propriedade de interpolar os valores do fatorial, como mostra o presente exercício.

(a) Integrando por partes, verifique que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

(b) Através de um cálculo direto, verifique que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Prove que $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Use indução em n, observando que o caso $n = 1$ é o resultado do item anterior. A validade do passo indutivo segue trivialmente do item (a) acima. ♣

18.9.2 Exercício: **(a)** Verifique que:

$$\Gamma(x) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-u^{1/x}}\, du.$$

Sugestão: Utilize a substituição $u = t^x$.

(b) Utilizando o valor da integral gaussiana calculado na seção anterior, conclua que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. ♣

Capítulo 19

Estatística

{estatistica}

19.1 Experimentos Aleatórios

Um **experimento** consiste basicamente num procedimento executado sob certas condições, sucetível de ser repetido uma quantidade arbitrária de vezes sob as mesmas condições, e que uma vez completado certos resultados podem ser observados. Um experimento é **determinístico** se os seus resultados podem ser completamente inferidos a partir das condições iniciais. Um experimento cujos resultados não podem ser determinados a partir das condições iniciais, exceto pelo fato de pertencer a um dado conjunto de resultados possíveis, é dito **aleatório**.

O conjunto Ω de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório denomina-se **espaço amostral**. Certos conjuntos de Ω, mas não todos em geral, denominam-se **eventos**. Por exemplo, Ω e $\emptyset$ são eventos, conhecidos como eventos **certo** e **impossível**, respectivamente. Eventos da forma $\{\omega\}$ são conhecidos como eventos **simples**, no entanto que um evento com dois ou mais pontos é dito **composto**.

Na formalização matemática da teoria dos experimentos aleatórios, assume-se a existência de uma função de conjunto P, denominada **probabilidade**, de maneira tal que $P(A)$ é a frequência relativa de cada evento $A \in \Omega$. Em outras palavras, $P(A)$ é a porcentagem do total de resultados em que o evento A é observado. A única diferência consiste no fato que P é normalizada de 0 a 1, em lugar de 0 a 100 como uma porcentagem comun.

19.1.1 Exemplo: Experimento Binomial
Considere-se experimento com dois resultados possíveis, a saber: 0 ou fracaso, e 1 ou sucesso. Em tal caso, $\Omega = \{0, 1\}$ e costuma-se denotar $p := P(1)$ e $q := 1 - p = P(0)$. Por exemplo, o resultado do lançamento de uma moeda é o exemplo paradigmático de experimento binomial, com $p = q = 1/2$, neste caso. ♣

19.1.2 Exemplo: Suponha-se que um experimento binomial é repetido n vezes. Em tal caso, denotando $S = \{0, 1\}$, tem-se:

$$\Omega = \underbrace{S \times \cdots \times S}_{n \text{ vezes}}.$$

Se as n repetições são independentes, ou seja, o resultado de qualquera delas não influencia o de nenhuma outra, qual é probabilidade de obter exatamente k sucessos? Para responder a questão, observe-se em primeiro lugar que todo evento A_k com exatamente k sucessos resulta da interseção de k eventos da forma:

$$S \times \cdots \times S \times \{1\} \times S \times \cdots \times S,$$

com a interseção de $n - k$ eventos da forma:

$$S \times \cdots \times S \times \{0\} \times S \times \cdots \times S.$$

Como todos esses eventos são independentes, tem-se $P(A_k) = p^k q^{n-k}$. Finalmente, observe-se que o evento com exatamente k sucessos resulta da união disjunta de todos eventos da forma A_k. Todos eses eventos tem a mesma probabilidade, calculada acima, e existem exatamente $\binom{n}{k}$ deles. Portanto, a probabilidade $P(X = k)$ de obter exatamente k sucessos em n repetições independentes de um experimento binomial é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k q^{n-k}. \qquad \clubsuit$$

19.1.3 Exemplo: Aproximação Binomial para um Processo de Poisson

Deseja-se determinar qual é a probabilidade $P(X = k)$ de k ônibus passarem por um dado ponto no intervalo de tempo entre 0 a T. Para simplificar, suponha-se que $T = 1$ (uma hora, um dia, etc.). Esta experiência pode ser abordada como um experimento binomial, através do seguinte procedimento. O intervalo de tempo é dividido em n subintervalos iguais de comprimento $1/n$ cada. Ao final de cada um desses subintervalos de tempo, olhamos para o ponto. Se tiver um ônibus no ponto é sucesso, caso contrário, fracaso. Adicionalmente, considerem-se as seguintes hipóteses:

- A chegada de ônibus em diferentes subintervalos acontece de maneira independente.

- A ocorrência de dois ou mais ônibus chegarem num mesmo subintervalo tem probabilidade zero. Observe-se que esta suposição é verdadeira desde que o comprimento dos subintervalos for suficientemente pequenos, ou seja, n suficientemente grande.

- A probabilidade de um ônibus chegar num dado intervalo de tempo é proporcional ao comprimento t do intervalo, digamos, $p = \lambda t$, onde λ é a constante de proporcionalidade.

Portanto, tem-se:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

No limite em que n tende para infinito, a expressão acima pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\,\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\,\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}.
\end{aligned}$$

Observe-se que se n tende para infinito, então todas as expressões entre parênteses acima convergem para 1, exceto o numerador da última fração que converge para $e^{-\lambda}$. Portanto:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

A mesma aproximação é válida para qualquer experimento binomial onde p_n tende para zero de maneira tal que np_n tende para uma constante. ♣

19.2 Variáveis Aleatórias

Uma **variável aleatória** é uma função $X:\Omega\longmapsto\mathbb{R}$. As variáveis aleatórias são abordadas indiretamente, através da sua **função de distribuição**, também denominada **função de distribuição acumulada**, definida como $F(x):=P(X\leqslant x)$. Observe-se que:

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a).$$

Em certos casos, por exemplo se F for continuamente diferenciável, condição que pode ser relaxada significativamente, tem-se que:

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx,$$

para alguma função integrável f. Em tal caso, se diz que f é uma **função de densidade** de probabilidade (f.d.p) para a variável aleatória X.

Se $g:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ define-se $E(g(X))$ como:

$$E(g(X)):=\int_{\mathbb{R}} g(x)\,f(x)\,dx.$$

Alguns casos particulares recebem nomes especiais. Por exemplo, o n**-ésimo momento** de X é definido como:

$$E(X^n) := \int_{\mathbb{R}} x^n \, f(x) \, dx.$$

O primeiro momento é relevante, e recebe o nome **media** da distribuição em questão:

$$EX := \int_{\mathbb{R}} x \, f(x) \, dx =: \mu.$$

Com a media é possível calcular o n**-ésimo momento central**:

$$E(X - EX)^n := \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^n \, f(x) \, dx.$$

O segundo momento central também é importante, denominando-se **variança**:

$$E(X - EX)^2 := \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 \, f(x) \, dx =: \sigma^2.$$

A sua raiz quadrada positiva σ recebe o nome de **desvio padrão**. Observe-se que:

$$\begin{aligned} E(X - EX)^2 &= E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - 2(EX)(EX) + (EX)^2 \\ &= E(X^2) - (EX)^2. \end{aligned}$$

Uma outra expressão útil para o cálculo da variança é a seguinte:

$$\begin{aligned} E(X - EX)^2 &= E(X^2) - (EX)^2 \\ &= E(X^2 - X + X) - (EX)^2 \\ &= E(X(X-1) + X) - (EX)^2 \\ &= E(X(X-1)) + EX - (EX)^2 \\ &= E(X(X-1)) - EX(EX - 1). \end{aligned}$$

19.2.1 Exemplo: A Distribuição Normal ou Gaussiana

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Se diz que X possui distribuição normal de media μ e variança σ se a sua f.d.p é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Em tal caso denota-se $X \sim N(\mu, \sigma)$. ♣

19.2.2 Exemplo: A Distribuição Gamma

Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Se diz que X possui distribuição gamma de parâmetros α e β se a sua f.d.p é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \, x^{\alpha-1} \, e^{-x/\beta} & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Em tal caso denota-se $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. ♣

19.2.3 Exemplo: A Distribuição Chi-quadrado
Seja $r \in \mathbb{N}$. Se diz que X possui distribuição chi-quadrado com r graus de liberdade se $X \sim \Gamma(r/2, 2)$, ou seja, se a sua f.d.p é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r/2)\, 2^{r/2}}\, x^{(r/2)-1}\, e^{-x/2} & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Em tal caso denota-se $X \sim \chi^2_r$. ♣