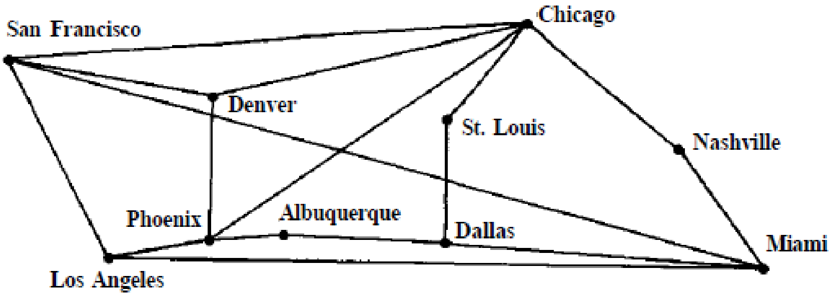
DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF^{a}.: Karla Lima

EACH-USP

November 7, 2018

Grafos


San Francisco
Chicago
Denver
St. Louis
Nashville
Phoenix
Albuquerque
Dallas
Miami
Los Angeles

Grafos

Definição: Grafos, Vértices e Arestas

Um grafo é uma tripla ordenada $(V(G), A(G), f)$ onde

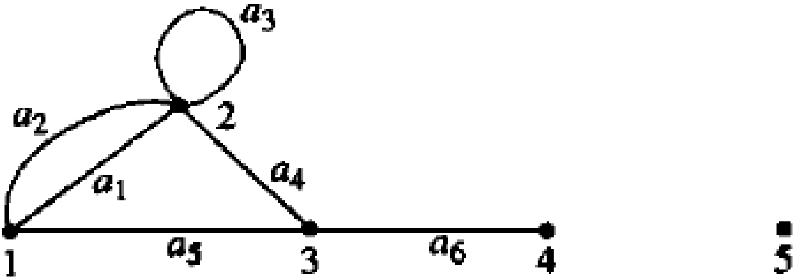
- $V =$ um conjunto não-vazio de vértices (nós ou nodos)
- $A =$ um conjunto de arestas (arcos)
- $f =$ uma função que associa cada aresta a a um par não-ordenado $x - y$ de vértices chamados de extremos de a.

Nossos grafos terão sempre um número finito de vértices e de arestas.

Grafos

Exemplo

Neste grafo, temos cinco vértices e seis arestas. A função que associa as arestas aos seus extremos assume os seguintes valores: $f(a_1) = 1 - 2$, $f(a_2) = 1 - 2$, $f(a_3) = 2 - 2$, $f(a_4) = 2 - 3$, $f(a_5) = 1 - 3$ e $f(a_6) = 3 - 4$.



Grafos

Terminologia

- Dois vértices em um grafo são ditos **adjacentes** se forem os extremos de uma mesma aresta.
- Um **laço** em um grafo é uma aresta com extremos $n - n$ para algum vértice n;
- Duas arestas que tenham os mesmos extremos são chamadas de **arestas paralelas**;
- Um **grafo simples** é um grafo que não tenha arestas paralelas nem laços.

Grafos

Terminologia

- Um **vértice isolado** não é adjacente a qualquer outro vértice;
- O **grau** de um vértice é o número de arestas que o tem como ponto extremo.
- Um **grafo completo** é aquele no qual todos os vértices distintos são adjacentes.
- Um **subgrafo** de um grafo consiste em um conjunto de vértices e um conjunto de arestas que são subconjuntos dos conjuntos de vértices e arestas originais, respectivamente, nos quais os extremos de qualquer aresta precisam ser os mesmos que no grafo original.

Grafos

Terminologia

- Um **caminho** de um vértice n_0 a um vértice n_k é uma sequência n_0, a_0, n_1, a_1,. . ., n_{k-1}, a_{k-1}, n_k de vértices e arestas onde, para cada i, os extremos da aresta a_i são $n_i - n_{i+1}$.

Grafos

Terminologia

- Um **caminho** de um vértice n_0 a um vértice n_k é uma sequência n_0, a_0, n_1, a_1,. . ., n_{k-1}, a_{k-1}, n_k de vértices e arestas onde, para cada i, os extremos da aresta a_i são $n_i - n_{i+1}$.
- o **comprimento** de um caminho é o número de arestas que ele contém; se uma aresta for usada mais de uma vez, ela deve ser contada tantas vezes quantas for usada.

Grafos

Terminologia

- Um **caminho** de um vértice n_0 a um vértice n_k é uma sequência n_0, a_0, n_1, a_1,. . ., n_{k-1}, a_{k-1}, n_k de vértices e arestas onde, para cada i, os extremos da aresta a_i são $n_i - n_{i+1}$.
- o **comprimento** de um caminho é o número de arestas que ele contém; se uma aresta for usada mais de uma vez, ela deve ser contada tantas vezes quantas for usada.
- Um grafo é dito **conexo** se houver um caminho entre quaisquer dois vértices.

Grafos

Terminologia

- Um **caminho** de um vértice n_0 a um vértice n_k é uma sequência n_0, a_0, n_1, a_1,. . ., n_{k-1}, a_{k-1}, n_k de vértices e arestas onde, para cada i, os extremos da aresta a_i são $n_i - n_{i+1}$.
- o **comprimento** de um caminho é o número de arestas que ele contém; se uma aresta for usada mais de uma vez, ela deve ser contada tantas vezes quantas for usada.
- Um grafo é dito **conexo** se houver um caminho entre quaisquer dois vértices.
- Um **ciclo** em um grafo é um caminho de algum vértice n_0 até n_0 de novo de forma que nenhum vértice ocorra mais de uma vez no caminho, n_0 é o único vértice que ocorre mais de uma vez e este ocorre apenas nos extremos do caminho. Um grafo sem ciclos é dito **acíclico**.

Grafos

Exercícios

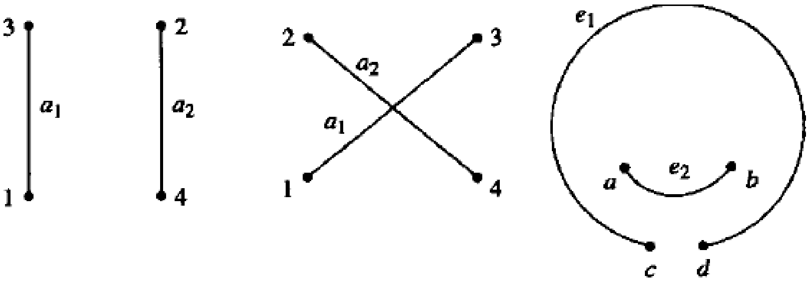
- Demonstre que todo gráfico acíclico é simples.
- Demonstre que todo grafo completo é conexo.
- Encontre um grafo conexo que não seja completo.

Grafos

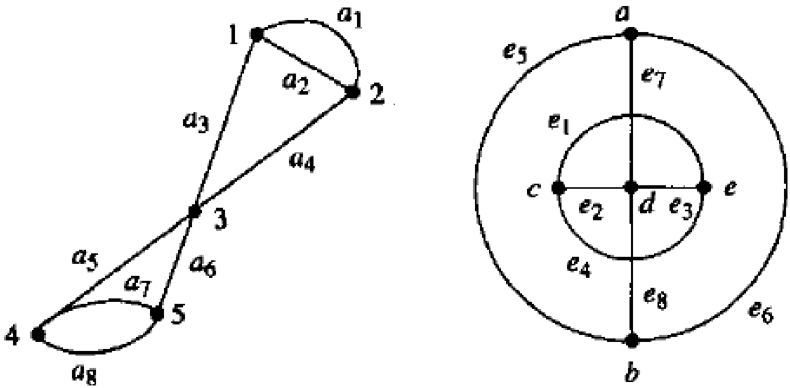
Definição: Grafos Isomorfos

Dois grafos (V_1, A_1, f_1) e (V_2, A_2, f_2) são isomorfos se existirem bijeções $f_v : V_1 \to V_2$ e $f_a : A_1 \to A_2$ tais que para cada aresta $e \in A_1$, $f_a(e) = x - y$ se, e somente se, $f_2[f_a(e)] = f_v(x) - f_v(y)$.

Grafos Isomorfos



Exercício



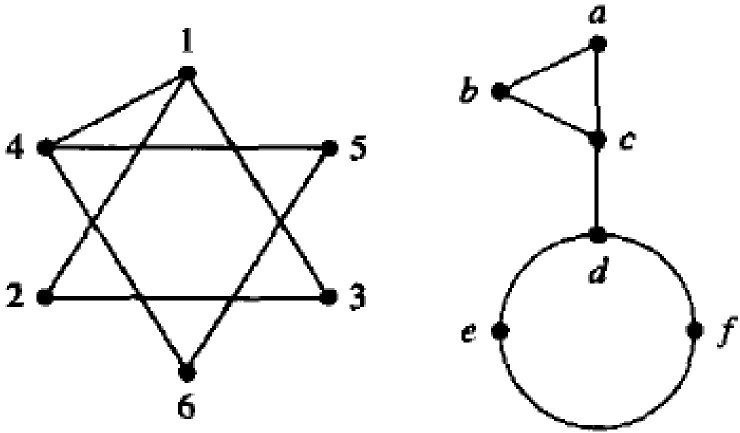
Grafos Isomorfos

Teorema sobre Isomorfismo de Grafos Simples

Dois grafos (V_1, A_1, f_1) e (V_2, A_2, f_2) são isomorfos se houver uma bijeção $f_v : V_1 \rightarrow V_2$ tal que para quaisquer vértices v_i e v_j de V_1, v_i e v_j são adjacentes se, e somente se, $f_v(v_i)$ e $f_v(v_j)$ são adjacentes. (A função f_v é chamada de isomorfismo do grafo 1 no grafo 2).

Exercício

Encontre um isomorfismo no grafo abaixo:



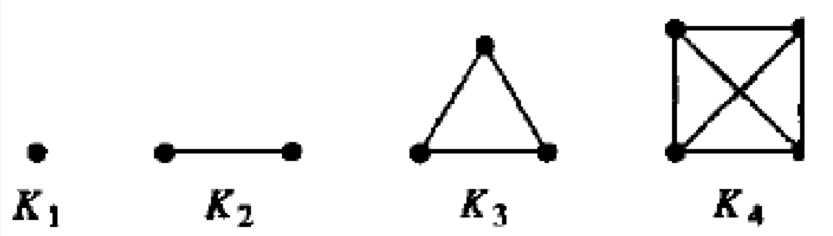
Grafos Ismorfos

Condições que impedem a bijeção

1. Um grafo tem mais vértices que o outro.
2. Um grafo tem mais arestas que o outro.
3. Um grafo tem arestas paralelas e o outro não.
4. Um grafo tem um laço e o outro não.
5. Um grafo tem um vértice de grau *kc* o outro não.
6. Um grafo é conexo e o outro não.
7. Um grafo tem um ciclo e o outro não.

Outras propriedades de grafos

Estes grafos são denotados por K_n.



Exercícios

1. Encontre uma expressão para o número de arestas de K_n e demonstre que a expressão que você encontrou está correta.
2. Mostre que se dois grafos simples G_1 e G_2 são isomorfos, então seus complementos G_1' e G_2' também o são.

Grafos

Definição: Planaridade

Um grafo planar é um grafo que pode ser desenhado (em um plano) de forma que suas arestas se interceptem apenas em vértices.

Grafos

Definição: Planaridade

Um grafo planar é um grafo que pode ser desenhado (em um plano) de forma que suas arestas se interceptem apenas em vértices.

Exercício

Demonstre que K_4 é um grafo planar.

Grafos

Fórmula de Euler

- Um grafo simples, conexo e planar divide o plano em um número de regiões, incluindo as regiões totalmente fechadas e uma região infinita exterior.
- Euler observou uma relação entre o número n de vértices, o número a de arestas e o número r de regiões neste tipo de grafos. Esta relação é denominada de **fórmula de Euler**:

$$n - a + r = 2$$

Exercício - Prove por indução no número de arestas a veracidade da fórmula de Euler.

Grafos

Teorema sobre o Número de Vértices e Arestas

Para um grafo conexo, simples e planar com n vértices e a arestas:

1. Se a representação planar divide o plano em r regiões, então

$$n - a + r = 2$$

2. Se $n \geq 3$, então

$$a \leq 3n - 6$$

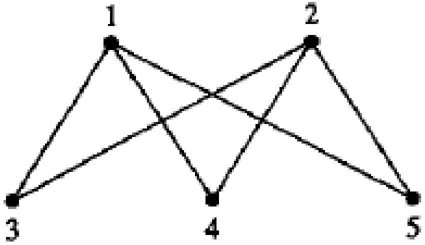
3. Se $n \geq 3$ não existem ciclos de comprimento 3, então

$$a \leq 2n - 4$$

Grafos

Definição: Grafos Bipartidos Completos

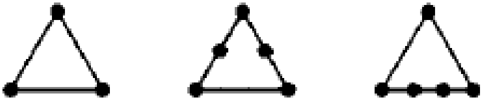
Um grafo é um **grafo bipartido completo** se seus vértices podem ser particionados em dois conjuntos não-vazios N_1 e N_2 tais que dois vértices x e y sejam adjacentes se, e somente se, $x \in N_1$ e $y \in N_2$. Se $N_1 = m$ e $N_2 = n$, este grafo é denotado por $K_{m,n}$.



Grafos

Definição: Grafos Homeomorfos

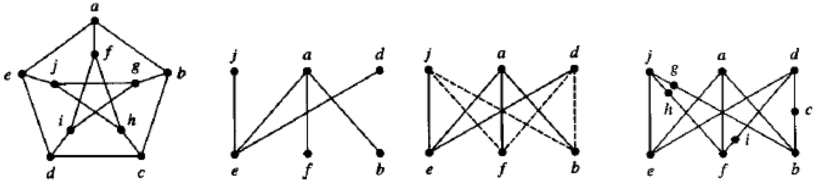
Dois grafos são **homeomorfos** se ambos puderem ser obtidos do mesmo grafo por uma sequência de subdivisões elementares, nas quais uma única aresta $x - y$ é substituída por duas novas arestas $x - v$ e $v - y$ que se conectam a um novo vértice v.



Grafos

Teorema de Kuratowski

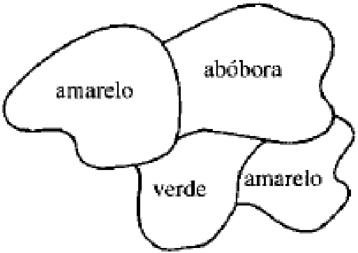
Um grafo é não-planar se, e somente se, contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.



Grafos

Coloração - Problema das 4 cores

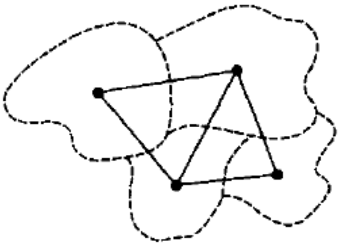
Suponha que um mapa de vários países desenhado em uma folha de papel precisa ser pintado de forma que dois países vizinhos não possam ter a mesma cor. (Não consideramos países que se encontram apenas em um ponto, e levamos em conta apenas países "conexos".) Qual o número mínimo de cores necessário para pintar qualquer mapa?



Grafos

Teorema das Quatro Cores

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa no plano.



O grafo dual de um mapa, da maneira que é construído, será sempre simples, conexo e planar.

Grafos

Definições: Coloração e Número Cromático

- Uma **coloração** (de vértices) de um grafo é a atribuição de uma cor a cada vértice do grafo de tal forma que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor.
- O **número cromático** do grafo é o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração.
- O teorema das quatro cores estabelece que o número cromático de qualquer grafo simples, conexo e planar é no máximo 4.

Grafos

Teorema das Cinco Cores

Lema: Seja um grafo simples, conexo e planar com três ou mais vértices, existe pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.

Grafos

Teorema das Cinco Cores

Seja um grafo simples, conexo e planar com três ou mais vértices, existe pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.

Teorema - O número cromático de um grafo simples, conexo e planar é no máximo 5.

Grafos

Árvores

Definição - Uma **árvore** é um grafo acíclico e conexo com um nó designado como a raiz da árvore.

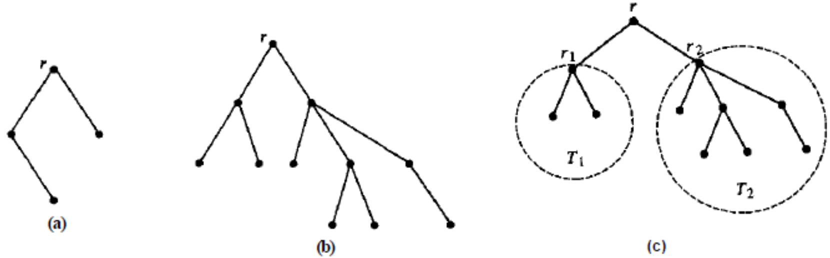
- A **profundidade** de um vértice em uma árvore é o comprimento do caminho da raiz até o vértice, (a raiz tem profundidade 0).
- A **altura** da árvore é a maior profundidade de todos seus vértices;
- Um vértice sem filhos é chamado de **folha**; os vértices que não são folhas são chamados de **vértices internos**.

Grafos

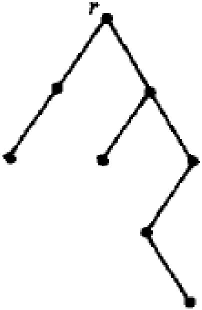
Árvores

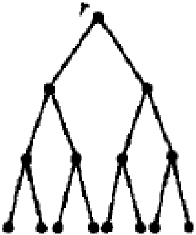
- Uma **floresta** é qualquer grafo acíclico (não necessariamente conexo - coleção de árvores disjuntas);
- Uma **árvore binária** é um árvore em que cada vértice tem no máximo dois filhos.
- Em uma árvore binária, cada filho é designado como o **filho à esquerda** ou o **filho à direita** deste vértice.
- Uma **árvore binária completa** é aquela em que todos os nós internos têm dois filhos e todas as folhas têm a mesma profundidade.

Grafos



Grafos





Grafos

Definição: Grafo Direcionado

Um grafo direcionado (digrafo) é um tripla ordenada $(V(G), E(G), f)$ onde

- $V(G)$: um conjunto de vértices;
- $E(G)$: um conjunto de arestas;
- f: uma função que associe a cada aresta e um par ordenado (x, y) de vértices, onde x é o ponto inicial e y é o ponto final de e.

Grafos

Definição: Grafo Direcionado

- Um caminho do vértice n_0 até o vértice n_k é uma sequência $n_0, e_0, n_1, e_1, \ldots, n_{k-1}, e_{k-1}, n_k$ onde, para cada i, n_i é o ponto inicial e n_{i+1} é o ponto final de e.
- Se existe um caminho do vértice n_0 até o vértice n_k, então n_k é alcançável a partir de n_0.
- A definição de um ciclo também se aplica a grafos direcionados.

Grafos

Aplicação

Uma visão de alto nível de um fluxo de informação em um escritório de licenciamento de automóveis é preparado como primeiro passo no desenvolvimento de um novo sistema de licenciamento computadorizado.