

---

# UM CURSO DE GEOMETRIA ANALÍTICA E ÁLGEBRA LINEAR

Reginaldo J. Santos  
Departamento de Matemática-ICEx  
Universidade Federal de Minas Gerais  
<http://www.mat.ufmg.br/~regi>

Julho 2010

---

Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear  
Copyright © 2010 by Reginaldo de Jesus Santos (100628)

É proibida a reprodução desta publicação, ou parte dela, por qualquer meio, sem a prévia autorização, por escrito, do autor.

Editor, Coordenador de Revisão, Supervisor de Produção, Capa e Ilustrações:  
Reginaldo J. Santos

ISBN 85-7470-006-1

**Ficha Catalográfica**

S237u Santos, Reginaldo J.  
Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear / Reginaldo J. Santos  
- Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010.

1. Álgebra Linear 2. Geometria Analítica I. Título

CDD: 512.5  
516.3

---

---

# Conteúdo

---

---

<b>Prefácio</b>	<b>vi</b>
<b>1 Matrizes e Sistemas Lineares</b>	<b>1</b>
1.1 Matrizes	1
1.1.1 Operações com Matrizes	3
1.1.2 Propriedades da Álgebra Matricial	9
1.1.3 Aplicação: Cadeias de Markov	15
Apêndice I: Notação de Somatório	28
1.2 Sistemas de Equações Lineares	30
1.2.1 Método de Gauss-Jordan	34
1.2.2 Matrizes Equivalentes por Linhas	45
1.2.3 Sistemas Lineares Homogêneos	47
1.2.4 Matrizes Elementares (opcional)	52
<b>2 Inversão de Matrizes e Determinantes</b>	<b>70</b>
2.1 Matriz Inversa	70

2.1.1	Propriedades da Inversa . . . . .	72
2.1.2	Matrizes Elementares e Inversão (opcional) . . . . .	75
2.1.3	Método para Inversão de Matrizes . . . . .	78
2.1.4	Aplicação: Interpolação Polinomial . . . . .	89
2.1.5	Aplicação: Criptografia . . . . .	92
2.2	Determinantes . . . . .	99
2.2.1	Propriedades do Determinante . . . . .	104
2.2.2	Matrizes Elementares e o Determinante (opcional) . . . . .	118
	Apêndice II: Demonstração do Teorema 2.11 . . . . .	125
<b>3</b>	<b>Vetores no Plano e no Espaço</b> . . . . .	<b>131</b>
3.1	Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar . . . . .	133
3.2	Produtos de Vetores . . . . .	159
3.2.1	Norma e Produto Escalar . . . . .	159
3.2.2	Projeção Ortogonal . . . . .	168
3.2.3	Produto Vetorial . . . . .	171
3.2.4	Produto Misto . . . . .	182
	Apêndice III: Demonstração do item (e) do Teorema 3.5 . . . . .	197
<b>4</b>	<b>Retas e Planos</b> . . . . .	<b>201</b>
4.1	Equações de Retas e Planos . . . . .	201
4.1.1	Equações do Plano . . . . .	201
4.1.2	Equações da Reta . . . . .	214
4.2	Ângulos e Distâncias . . . . .	234
4.2.1	Ângulos . . . . .	234
4.2.2	Distâncias . . . . .	240
<b>5</b>	<b>Espaços <math>\mathbb{R}^n</math></b> . . . . .	<b>258</b>
5.1	Independência Linear . . . . .	258
5.1.1	Os Espaços $\mathbb{R}^n$ . . . . .	258
5.1.2	Combinação Linear . . . . .	262

5.1.3	Independência Linear	266
5.1.4	Posições Relativas de Retas e Planos	275
5.2	Subespaços, Base e Dimensão	284
	Apêndice IV: Outros Resultados	301
5.3	Produto Escalar em $\mathbb{R}^n$	315
5.3.1	Produto Interno	315
5.3.2	Bases Ortogonais e Ortonormais	325
5.4	Mudança de Coordenadas	333
5.4.1	Rotação	337
5.4.2	Translação	338
5.4.3	Aplicação: Computação Gráfica - Projeção Ortográfica	340
<b>6</b>	<b>Diagonalização</b>	<b>356</b>
6.1	Diagonalização de Matrizes	356
6.1.1	Motivação	356
6.1.2	Autovalores e Autovetores	358
6.1.3	Diagonalização	367
6.2	Diagonalização de Matrizes Simétricas	386
6.2.1	Motivação	386
6.2.2	Matrizes Ortogonais	389
	Apêndice V: Autovalores Complexos	400
6.3	Aplicação: Identificação de Cônicas	404
6.3.1	Elipse	404
6.3.2	Hipérbole	408
6.3.3	Parábola	412
	<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>445</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>558</b>
	<b>Índice Alfabético</b>	<b>562</b>

---

---

# Prefácio

---

---

Este texto cobre o material para um curso de um semestre de Geometria Analítica e Álgebra Linear ministrado nos primeiros semestres para estudantes da área de Ciências Exatas. O texto pode, mas **não** é necessário, ser acompanhado de um programa como o MATLAB<sup>®</sup> \*, SciLab ou o Maxima.

O conteúdo é dividido em seis capítulos. O Capítulo 1 trata das matrizes e sistemas lineares. Aqui todas as propriedades da álgebra matricial são demonstradas. A resolução de sistemas lineares é feita usando somente o método de Gauss-Jordan (transformando a matriz até que ela esteja na forma escalonada reduzida). Este método requer mais trabalho do que o método de Gauss (transformando a matriz, apenas, até que ela esteja na forma escalonada). Ele foi o escolhido, por que também é usado no estudo da inversão de matrizes no Capítulo 2. Neste Capítulo é também estudado o determinante, que é definido usando cofatores. As demonstrações dos resultados deste capítulo podem ser, a critério do leitor, feitas somente para matrizes  $3 \times 3$ .

O Capítulo 3 trata de vetores no plano e no espaço. Os vetores são definidos de forma geométrica, assim como a soma e a multiplicação por escalar. São provadas algumas propriedades geometricamente. Depois são introduzidos sistemas de coordenadas de forma natural sem a necessidade da definição de base. Os produtos escalar e vetorial são definidos também geometricamente. O Capítulo 4 trata de retas e planos no espaço. São

---

\*MATLAB<sup>®</sup> é marca registrada de The Mathworks, Inc.

estudados ângulos e distâncias entre retas e planos.

O Capítulo 5 cobre a teoria dos espaços euclidianos. O conceito de dependência e independência linear é introduzido de forma algébrica, acompanhado da interpretação geométrica para os casos de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Aqui são estudadas as posições relativas de retas e planos como uma aplicação do conceito de dependência linear. São também tratados os conceitos de geradores e de base de subespaços. São abordados também o produto escalar e bases ortonormais. O Capítulo é terminado com mudança de coordenadas preparando para o Capítulo de diagonalização.

O Capítulo 6 traz um estudo da diagonalização de matrizes em geral e diagonalização de matrizes simétricas através de um matriz ortogonal. É feita uma aplicação ao estudo das seções cônicas.

Os exercícios estão agrupados em três classes. Os “Exercícios Numéricos”, que contém exercícios que são resolvidos fazendo cálculos, que podem ser realizados sem a ajuda de um computador ou de uma máquina de calcular. Os “Exercícios Teóricos”, que contém exercícios que requerem demonstrações. Alguns são simples, outros são mais complexos. Os mais difíceis complementam a teoria e geralmente são acompanhados de sugestões. Os “Exercícios usando o MATLAB<sup>®</sup>”, que contém exercícios para serem resolvidos usando o MATLAB<sup>®</sup> ou outro software. Os comandos necessários a resolução destes exercícios são também fornecidos juntamente com uma explicação rápida do uso. Os exercícios numéricos são imprescindíveis, enquanto a resolução dos outros, depende do nível e dos objetivos pretendidos para o curso.

O MATLAB<sup>®</sup> é um software destinado a fazer cálculos com matrizes (MATLAB<sup>®</sup> = MATrix LABoratory). Os comandos do MATLAB<sup>®</sup> são muito próximos da forma como escrevemos expressões algébricas, tornando mais simples o seu uso. Podem ser incorporados às funções pré-definidas, pacotes de funções para tarefas específicas. Um pacote chamado gaa1 com funções que são direcionadas para o estudo de Geometria Analítica e Álgebra Linear pode ser obtido na web na página do autor, assim como um texto com uma introdução ao MATLAB<sup>®</sup> e instruções de como instalar o pacote gaa1. O MATLAB<sup>®</sup> não é um software gratuito, embora antes a versão estudante vinha grátis ao se comprar o guia do usuário. Atualmente o SciLab é uma alternativa gratuita, mas que não faz cálculo simbólico. O Maxima é um programa de computação algébrica gratuito. Ambos podem ser usados como ferramenta auxiliar na aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Na página do autor na web podem ser encontrados pacotes de funções para estes programas além de links para as páginas do SciLab e do Maxima e várias páginas interativas que podem auxiliar na aprendizagem.

No fim de cada capítulo temos um “Teste do Capítulo” para que o aluno possa avaliar os seus conhecimentos. Os Exercícios Numéricos e os Exercícios usando o MATLAB<sup>®</sup> estão resolvidos após o último capítulo utilizando o MATLAB<sup>®</sup>. Desta forma o leitor que não estiver interessado em usar o software pode obter apenas as respostas dos exercícios, enquanto aquele que tiver algum interesse, pode ficar sabendo como os exercícios poderiam ser resolvidos fazendo uso do MATLAB<sup>®</sup> e do pacote gaa1.

Gostaria de agradecer aos professores que colaboraram apresentando correções, críticas e sugestões, entre eles Joana Darc A. S. da Cruz, Francisco Dutenhefner, Jorge Sabatucci, Seme Gebara, Alexandre Washington, Vivaldo R. Filho, Hamilton P. Bueno, Paulo A. F. Machado, Helder C. Rodrigues, Nikolai A. Goussevskii, Israel Vainsencher, Leopoldo G. Fernandes, Rodney J. Biezuner, Wilson D. Barbosa, Flaviana A. Ribeiro, Cristina Marques, Rogério S. Mol, Denise Burgarelli, Paulo C. de Lima, José Barbosa Gomes, Francisco Satuf, Viktor Beckkert, Moacir G. dos Anjos, Daniel C. de Moraes Filho, Michel Spira, Dan Avritzer, Maria Laura M. Gomes, Armando Neves, Maria Cristina C. Ferreira e Kennedy Pedroso.

## Histórico

**Julho 2010** Algumas correções. Mudança na formatação do texto.

**Julho 2009** Algumas correções. Várias figuras foram refeitas.

**Julho 2007** Algumas correções. As respostas de alguns exercícios foram reescritas.

**Março 2007** Várias figuras foram refeitas e outras acrescentadas. Foram reescritos o Exemplo 3.12 e o Corolário 3.10. Na seção 5.2 um exemplo foi reescrito e acrescentado mais um. Os Exemplos 5.25 e 5.26 foram reescritos, saíram do apêndice e voltaram ao texto normal. A seção 5.4 de Mudança de Coordenadas foi reescrita e acrescentada uma aplicação à computação gráfica. Foram acrescentados dois exercícios na seção de Matrizes, um na de Inversão de Matrizes, um na seção de Determinantes, dois na de Produto de Vetores, um na de Subespaços, um na de Produto Escalar em  $\mathbb{R}^n$ , três na de Mudança de Coordenadas, quatro na de Diagonalização e um na de Diagonalização de Matrizes Simétricas. Foram corrigidos alguns erros.



**Julho 2006** Foi acrescentado o Exemplo 2.16 na página 115. A seção 3.2 ‘Produtos de Vetores’ foi reescrita. Foi acrescentado um exercício na seção 4.2. O Capítulo 5 foi reescrito. Foram corrigidos alguns erros.

**Março 2006** A Seção 1.1 de Matrizes e a Seção 2.2 de Determinantes foram reescritas. Na seção 1.2 o Teorema 1.4 voltou a ser que toda matriz é equivalente por linhas a uma única matriz na forma escalonada reduzida. Foram acrescentados vários exercícios aos Capítulos 3 e 4. O Capítulo 5 foi reescrito. Foram acrescentados exercícios teóricos à seção ‘Aplicação à Cônicas’.

**Julho 2004** Foram acrescentadas aplicações à criptografia (Exemplo na página 92) e a cadeias de Markov (Exemplos 1.9 na página 16, 1.16 na página 49 e 6.8 na página 375). Foi acrescentado um exercício na seção 1.1. O Teorema 1.4 agora contém as propriedades da relação “ser equivalente por linhas” com a demonstração. O que antes era Exemplo 1.14 passou para o lugar do Exemplo 1.10. O Exemplo 2.5 foi modificado. No Capítulo 3 foram acrescentados 2 exercícios na seção 3.1, 1 exercício na seção 3.2. No Capítulo 4 a seção 4.1 foi reescrita e foram acrescentados 2 exercícios. O Capítulo 5 foi reescrito. Foi incluída no Apêndice III da seção 5.2. a demonstração de que a forma escalonada reduzida de uma matriz é única. A seção ‘Diagonalização de Matrizes’ ganhou mais um exercício teórico.

**Setembro 2003** Foi acrescentada a regra de Cramer na seção ‘Determinantes’ (Exemplo 2.20). A seção ‘Subespaços, Base e Dimensão’ foi reescrita. Foi acrescentado um apêndice a esta seção com ‘Outros resultados’. A Proposição 5.15 da seção ‘Produto Escalar em  $\mathbb{R}^n$ ’ foi reescrita. A seção ‘Diagonalização de Matrizes’ ganhou mais dois exercícios teóricos. A seção ‘Diagonalização de Matrizes Simétricas’ ganhou um apêndice sobre ‘Autovalores Complexos’.

**Novembro 2002** Várias correções incluindo respostas de exercícios. A seção ‘Subespaços, Base e Dimensão’ ganhou mais um exemplo e um exercício. A seção ‘Diagonalização de Matrizes Simétricas’ ganhou mais um exemplo.

**Julho 2001** Revisão completa no texto. Novos exercícios nas seções ‘Matrizes’ e ‘Sistemas Lineares’. As seções ‘Subespaços’ e ‘Base e Dimensão’ tornaram-se uma só. A seção ‘Mudança de Coordenadas’ passou do Capítulo 6 para o Capítulo 5.

**Julho 2000** Criado a partir do texto ‘Geometria Analítica e Álgebra Linear’ para ser usado numa disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear.

## Sugestão de Cronograma

Capítulo 1	8 aulas
Capítulo 2	8 aulas
Capítulo 3	8 aulas
Capítulo 4	8 aulas
Capítulo 5	12 (16) aulas
Capítulo 6	12 aulas
Total	56 (60) aulas

---

## Capítulo 1

# Matrizes e Sistemas Lineares

---

## 1.1 Matrizes

Uma **matriz**  $A$ ,  $m \times n$  ( $m$  por  $n$ ), é uma tabela de  $mn$  números dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A  $i$ -ésima linha de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix},$$

para  $i = 1, \dots, m$  e a  $j$ -ésima coluna de  $A$  é

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Usamos também a notação  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Dizemos que  $a_{ij}$  ou  $[A]_{ij}$  é o **elemento** ou a **entrada** de posição  $i, j$  da matriz  $A$ .

Se  $m = n$ , dizemos que  $A$  é uma **matriz quadrada de ordem  $n$**  e os elementos  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  formam a **diagonal (principal)** de  $A$ .

**Exemplo 1.1.** Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

As matrizes  $A$  e  $B$  são  $2 \times 2$ . A matriz  $C$  é  $2 \times 3$ ,  $D$  é  $1 \times 3$ ,  $E$  é  $3 \times 1$  e  $F$  é  $1 \times 1$ . De acordo com a notação que introduzimos, exemplos de elementos de algumas das matrizes dadas acima são  $a_{12} = 2$ ,  $c_{23} = -2$ ,  $e_{21} = 4$ ,  $[A]_{22} = 4$ ,  $[D]_{12} = 3$ .

Uma matriz que só possui uma linha é chamada **matriz linha**, e uma matriz que só possui uma coluna é chamada **matriz coluna**. No Exemplo 1.1 a matriz  $D$  é uma

matriz linha e a matriz  $E$  é uma matriz coluna. Matrizes linha e matrizes coluna são chamadas de **vetores**. O motivo ficará claro na [Seção 5.1 na página 258](#).

Dizemos que duas matrizes são iguais se elas têm o mesmo tamanho e os elementos correspondentes são iguais, ou seja,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{p \times q}$  são **iguais** se  $m = p$ ,  $n = q$  e  $a_{ij} = b_{ij}$  para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

Vamos definir operações matriciais análogas às operações com números e provar propriedades que são válidas para essas operações. Veremos, mais tarde, que um sistema de equações lineares pode ser escrito em termos de uma única equação matricial.

Vamos, agora, introduzir as operações matriciais.

### 1.1.1 Operações com Matrizes

---

**Definição 1.1.** A soma de duas matrizes de **mesmo tamanho**  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  é definida como sendo a matriz  $m \times n$

$$C = A + B$$

obtida somando-se os elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ , ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . Escrevemos também  $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

---

**Exemplo 1.2.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se chamamos de  $C$  a soma das duas matrizes  $A$  e  $B$ , então

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 2 + 1 & -3 + 5 \\ 3 + 0 & 4 + 3 & 0 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$


---

**Definição 1.2.** A multiplicação de uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  por um escalar (número)  $\alpha$  é definida pela matriz  $m \times n$

$$B = \alpha A$$

obtida multiplicando-se cada elemento da matriz  $A$  pelo escalar  $\alpha$ , ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . Escrevemos também  $[\alpha A]_{ij} = \alpha a_{ij}$ . Dizemos que a matriz  $B$  é um **múltiplo escalar** da matriz  $A$ .

---

**Exemplo 1.3.** O produto da matriz  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$  pelo escalar  $-3$  é dado por

$$-3A = \begin{bmatrix} (-3)(-2) & (-3)1 \\ (-3)0 & (-3)3 \\ (-3)5 & (-3)(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

---

**Definição 1.3.** O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda,  $A = (a_{ij})_{m \times p}$  e  $B = (b_{ij})_{p \times n}$  é definido pela matriz  $m \times n$

$$C = AB$$

obtida da seguinte forma:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}, \quad (1.1)$$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . Escrevemos também  $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$ .

---

A equação (1.1) está dizendo que o elemento  $i, j$  do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da  $i$ -ésima linha de  $A$  pelos elementos correspondentes da  $j$ -ésima coluna de  $B$ .

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

A equação (1.1) pode ser escrita de forma compacta usando a **notação de somatório**.

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

e dizemos “somatório de  $k$  variando de 1 a  $p$  de  $a_{ik}b_{kj}$ ”. O símbolo  $\sum_{k=1}^p$  significa que estamos fazendo uma soma em que o índice  $k$  está variando de  $k = 1$  até  $k = p$ . Algumas propriedades da notação de somatório estão explicadas no [Apêndice I na página 28](#).

**Exemplo 1.4.** Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$



Se chamamos de  $C$  o produto das duas matrizes  $A$  e  $B$ , então

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1(-2) + 2 \cdot 0 + (-3)5 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-3)(-4) & 0 \\ 3(-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 0(-4) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 0 \\ -6 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

**Observação.** No exemplo anterior o produto  $BA$  não está definido (por que?). Entretanto, mesmo quando ele está definido,  $BA$  pode não ser igual a  $AB$ , ou seja, o produto de matrizes **não é comutativo**, como mostra o exemplo seguinte.

---

**Exemplo 1.5.** Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Então,

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Vamos ver no próximo exemplo como as matrizes podem ser usadas para descrever quantitativamente um processo de produção.

**Exemplo 1.6.** Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. Usando matrizes podemos determinar quantos gramas dos insumos A e B são necessários na produção de  $x$  kg do produto X,  $y$  kg do produto Y e  $z$  kg do produto Z.

$$\begin{array}{l} \text{gramas de A/kg} \\ \text{gramas de B/kg} \end{array} \begin{array}{c} \text{X} \quad \text{Y} \quad \text{Z} \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \end{array} = A \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array}$$

$$AX = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + y + 4z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \end{array}$$

**Definição 1.4.** A **transposta** de uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é definida pela matriz  $n \times m$

$$B = A^t$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ . Escrevemos também  $[A^t]_{ij} = a_{ji}$ .

**Exemplo 1.7.** As transpostas das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{são}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A seguir, mostraremos as propriedades que são válidas para a álgebra matricial. Várias propriedades são semelhantes àquelas que são válidas para os números reais, mas deve-se tomar cuidado com as diferenças.

Uma propriedade importante que é válida para os números reais, mas não é válida para as matrizes é a comutatividade do produto, como foi mostrado no [Exemplo 1.5](#).

Por ser compacta, usaremos a notação de somatório na demonstração de várias propriedades. Algumas propriedades desta notação estão explicadas no [Apêndice I na página 28](#).

### 1.1.2 Propriedades da Álgebra Matricial

---

**Teorema 1.1.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes com tamanhos apropriados,  $\alpha$  e  $\beta$  escalares. São válidas as seguintes propriedades para as operações matriciais:*

(a) (comutatividade)  $A + B = B + A$ ;

(b) (associatividade)  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;

(c) (elemento neutro) A matriz  $\bar{0}$ ,  $m \times n$ , definida por  $[\bar{0}]_{ij} = 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  é tal que

$$A + \bar{0} = A,$$

para toda matriz  $A$ ,  $m \times n$ . A matriz  $\bar{0}$  é chamada **matriz nula**  $m \times n$ .

(d) (elemento simétrico) Para cada matriz  $A$ , existe uma única matriz  $-A$ , definida por  $[-A]_{ij} = -a_{ij}$  tal que

$$A + (-A) = \bar{0}.$$

(e) (associatividade)  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ ;

(f) (distributividade)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ;

(g) (distributividade)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ;

(h) (associatividade)  $A(BC) = (AB)C$ ;

(i) (elemento neutro) Para cada inteiro positivo  $p$  a matriz,  $p \times p$ ,

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada **matriz identidade** é tal que

$$A I_n = I_m A = A, \quad \text{para toda matriz } A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

(j) (distributividade)  $A(B + C) = AB + AC$  e  $(B + C)A = BA + CA$ ;

(k)  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ ;

- (l)  $(A^t)^t = A$ ;
- (m)  $(A + B)^t = A^t + B^t$ ;
- (n)  $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ ;
- (o)  $(AB)^t = B^t A^t$ ;

**Demonstração.** Para provar as igualdades acima, devemos mostrar que os elementos da matriz do lado esquerdo são iguais aos elementos correspondentes da matriz do lado direito. Serão usadas várias propriedades dos números sem citá-las explicitamente.

- (a)  $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = [B + A]_{ij}$ ;
- (b)  $[A + (B + C)]_{ij} = a_{ij} + [B + C]_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = [A + B]_{ij} + c_{ij} = [(A + B) + C]_{ij}$ ;
- (c) Seja  $X$  uma matriz  $m \times n$  tal que

$$A + X = A \quad (1.2)$$

para qualquer matriz  $A$ ,  $m \times n$ . Comparando os elementos correspondentes, temos que

$$a_{ij} + x_{ij} = a_{ij},$$

ou seja,  $x_{ij} = 0$ , para  $i = 1 \dots, m$  e  $j = 1 \dots, n$ . Portanto, a única matriz que satisfaz (1.2) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais a zero. Denotamos a matriz  $X$  por  $\bar{0}$ .

- (d) Dada uma matriz  $A$ ,  $m \times n$ , seja  $X$  uma matriz  $m \times n$ , tal que

$$A + X = \bar{0}. \quad (1.3)$$

Comparando os elementos correspondentes, temos que

$$a_{ij} + x_{ij} = 0,$$

ou seja,  $x_{ij} = -a_{ij}$ , para  $i = 1 \dots, m$  e  $j = 1 \dots, n$ . Portanto, a única matriz que satisfaz (1.3) é a matriz em que todos os seus elementos são iguais aos simétricos dos elementos de  $A$ . Denotamos a matriz  $X$  por  $-A$ .

- (e)  $[\alpha(\beta A)]_{ij} = \alpha[\beta A]_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)a_{ij} = [(\alpha\beta)A]_{ij}$ .
- (f)  $[(\alpha + \beta)A]_{ij} = (\alpha + \beta)a_{ij} = (\alpha a_{ij}) + (\beta a_{ij}) = [\alpha A]_{ij} + [\beta A]_{ij} = [\alpha A + \beta A]_{ij}$ .
- (g)  $[\alpha(A + B)]_{ij} = \alpha[A + B]_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij} = [\alpha A]_{ij} + [\alpha B]_{ij} = [\alpha A + \alpha B]_{ij}$ .
- (h) A demonstração deste item é a mais trabalhosa. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes  $m \times p$ ,  $p \times q$  e  $q \times n$  respectivamente. A notação de somatório aqui pode ser muito útil, pelo fato de ser compacta.

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^p a_{ik}[BC]_{kj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \left( \sum_{l=1}^q b_{kl}c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q a_{ik}(b_{kl}c_{lj}) = \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q (a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^q \sum_{k=1}^p (a_{ik}b_{kl})c_{lj} = \sum_{l=1}^q \left( \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kl} \right) c_{lj} = \\ &= \sum_{l=1}^q [AB]_{il}c_{lj} = [(AB)C]_{ij}. \end{aligned}$$

- (i) Podemos escrever a matriz identidade em termos do delta de Kronecker que é definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

como  $[I_n]_{ij} = \delta_{ij}$ . Assim,

$$[AI_n]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}[I_n]_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}.$$

A outra igualdade é análoga.

$$\begin{aligned} \text{(j)} \quad [A(B+C)]_{ij} &= \sum_{k=1}^p a_{ik}[B+C]_{kj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^p (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \\ &= \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^p a_{ik}c_{kj} = [AB]_{ij} + [AC]_{ij} = [AB+AC]_{ij}. \end{aligned}$$

A outra igualdade é inteiramente análoga a anterior e deixamos como exercício.

$$\begin{aligned} \text{(k)} \quad [\alpha(AB)]_{ij} &= \alpha \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^p (\alpha a_{ik})b_{kj} = [(\alpha A)B]_{ij} \text{ e} \\ [\alpha(AB)]_{ij} &= \alpha \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}(\alpha b_{kj}) = [A(\alpha B)]_{ij}. \end{aligned}$$

$$\text{(l)} \quad [(A^t)^t]_{ij} = [A^t]_{ji} = a_{ij}.$$

$$\text{(m)} \quad [(A+B)^t]_{ij} = [A+B]_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = [A^t]_{ij} + [B^t]_{ij}.$$

$$\text{(n)} \quad [(\alpha A)^t]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha a_{ji} = \alpha [A^t]_{ij} = [\alpha A^t]_{ij}.$$

$$\text{(o)} \quad [(AB)^t]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{k=1}^p a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^p [A^t]_{kj}[B^t]_{ik} = \sum_{k=1}^p [B^t]_{ik}[A^t]_{kj} = [B^t A^t]_{ij}.$$



A **diferença** entre duas matrizes de mesmo tamanho  $A$  e  $B$  é definida por

$$A - B = A + (-B),$$

ou seja, é a soma da matriz  $A$  com a simétrica da matriz  $B$ .

Sejam  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $p$  um inteiro positivo. Definimos a **potência**  $p$  de  $A$ , por  $A^p = \underbrace{A \cdots A}_{p \text{ vezes}}$ . E para  $p = 0$ , definimos  $A^0 = I_n$ .

**Exemplo 1.8.** Vamos verificar se para matrizes  $A$  e  $B$ , quadradas, vale a igualdade

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2. \quad (1.4)$$

Usando a propriedade (i) do teorema anterior obtemos

$$\begin{aligned} (A + B)(A - B) &= (A + B)A + (A + B)(-B) \\ &= AA + BA - AB - BB = A^2 + BA - AB - B^2 \end{aligned}$$

Assim,  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$  se, e somente se,  $BA - AB = 0$ , ou seja, se, e somente se,  $AB = BA$ . Como o produto de matrizes não é comutativo, a conclusão é que a igualdade (1.4), **não** vale para matrizes em geral. Como contra-exemplo basta tomarmos duas matrizes que não comutem entre si. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para estas matrizes

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^2 = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(A + B)(A - B) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2 - B^2.$$



### 1.1.3 Aplicação: Cadeias de Markov

Vamos supor que uma população é dividida em três estados (por exemplo: ricos, classe média e pobres) e que em cada unidade de tempo a probabilidade de mudança de um estado para outro seja constante no tempo, só dependa dos estados. Este processo é chamado **cadeia de Markov**.

Seja  $t_{ij}$  a probabilidade de mudança do estado  $j$  para o estado  $i$  em uma unidade de tempo (geração). Tome cuidado com a ordem dos índices. A matriz

$$T = \begin{matrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} & \textcircled{1} \\ & \textcircled{2} \\ & \textcircled{3} \end{matrix}$$

é chamada **matriz de transição**. A distribuição da população inicial entre os três estados pode ser descrita pela seguinte matriz:

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{está no estado 1} \\ \text{está no estado 2} \\ \text{está no estado 3} \end{array}$$

A matriz  $P_0$  caracteriza a distribuição inicial da população entre os três estados e é chamada **vetor de estado**. Após uma unidade de tempo a população estará dividida entre os três estados da seguinte forma

$$P_1 = \begin{bmatrix} t_{11}p_1 + t_{12}p_2 + t_{13}p_3 \\ t_{21}p_1 + t_{22}p_2 + t_{23}p_3 \\ t_{31}p_1 + t_{32}p_2 + t_{33}p_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{estará no estado 1} \\ \text{estará no estado 2} \\ \text{estará no estado 3} \end{array}$$

Lembre-se que  $t_{ij}$  é a probabilidade de mudança do estado  $j$  para o estado  $i$ . Assim o vetor de estado após uma unidade de tempo é dada pelo produto de matrizes:

$$P_1 = TP_0.$$

**Exemplo 1.9.** Vamos considerar a matriz de transição

$$T = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix} \quad (1.5)$$

e o vetor de estados inicial

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{está no estado 1} \\ \text{está no estado 2} \\ \text{está no estado 3} \end{matrix} \quad (1.6)$$

que representa uma população dividida de forma que  $1/3$  da população está em cada estado.

Após uma unidade de tempo a matriz de estado será dada por

$$P_1 = TP_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Como estamos assumindo que em cada unidade de tempo a matriz de transição é a mesma, então após  $k$  unidades de tempo a população estará dividida entre os três estados segundo a matriz de estado

$$P_k = TP_{k-1} = T^2P_{k-2} = \cdots = T^kP_0$$

Assim a matriz  $T^k$  dá a transição entre  $k$  unidades de tempo.

Veremos na [Seção 6.1 na página 356](#) como calcular rapidamente potências  $k$  de matrizes e assim como determinar a distribuição da população após  $k$  unidades de tempo para  $k$  um inteiro positivo qualquer.

## Exercícios Numéricos (respostas na página 445)

1.1.1. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$
$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se for possível calcule:

(a)  $AB - BA$ ,

(b)  $2C - D$ ,

(c)  $(2D^t - 3E^t)^t$ ,

(d)  $D^2 - DE$ .

1.1.2. Conhecendo-se somente os produtos  $AB$  e  $AC$ , como podemos calcular  $A(B + C)$ ,  $B^t A^t$ ,  $C^t A^t$  e  $(ABA)C$ ?

1.1.3. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$
$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verifique que:

- (a)  $AB$  é diferente de  $BA$ .
- (b)  $AE_j$  é a  $j$ -ésima coluna de  $A$ , para  $j = 1, 2, 3$  e  $E_i^t B$  é a  $i$ -ésima linha de  $B$ , para  $i = 1, 2, 3$  (o caso geral está no Exercício 1.1.16 na página 23).
- (c)  $CD = [d_1 C_1 \ d_2 C_2 \ d_3 C_3]$ , em que  $C_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $C_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , são as colunas de  $C$  (o caso geral está no Exercício 1.1.17 (a) na página 24).
- (d)  $DC = \begin{bmatrix} d_1 C_1 \\ d_2 C_2 \\ d_3 C_3 \end{bmatrix}$ , em que  $C_1 = [-2 \ 1 \ -1]$ ,  $C_2 = [0 \ 1 \ 1]$  e  $C_3 = [-1 \ 0 \ 1]$  são as linhas de  $C$  (o caso geral está no Exercício 1.1.17 (b) na página 24).
- (e) Escrevendo  $B$  em termos das suas colunas,  $B = [B_1 \ B_2]$ , em que  $B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $B_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ , o produto  $AB$  pode ser escrito como  $AB = A [B_1 \ B_2] = [AB_1 \ AB_2]$  (o caso geral está no Exercício 1.1.18 (a) na página 25).
- (f) escrevendo  $A$  em termos das suas linhas,  $A_1 = [-3 \ 2 \ 1]$  e  $A_2 = [1 \ 2 \ -1]$ , o produto  $AB$  pode ser escrito como  $AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{bmatrix}$  (o caso geral está no Exercício 1.1.18 (b) na página 25).

#### 1.1.4. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Verifique que  $xA_1 + yA_2 + zA_3 = AX$ , em que  $A_j$  é a  $j$ -ésima coluna de  $A$ , para  $j = 1, 2, 3$  (o caso geral está no Exercício 1.1.19 na página 25).

**1.1.5.** Encontre um valor de  $x$  tal que  $AB^t = 0$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

**1.1.6.** Mostre que as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{bmatrix}$ , em que  $y$  é uma número real não nulo, verificam a equação  $X^2 = 2X$ .

**1.1.7.** Mostre que se  $A$  e  $B$  são matrizes que comutam com a matriz  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , então  $AB = BA$ .

**1.1.8. (a)** Determine todas as matrizes  $A, 2 \times 2$ , **diagonais** (os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero) que comutam com toda matriz  $B, 2 \times 2$ , ou seja, tais que  $AB = BA$ , para toda matriz  $B, 2 \times 2$ .

**(b)** Determine todas as matrizes  $A, 2 \times 2$ , que comutam com toda matriz  $B, 2 \times 2$ , ou seja, tais que  $AB = BA$ , para toda matriz  $B, 2 \times 2$ .

**1.1.9.** Verifique que  $A^3 = \bar{0}$ , para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O caso geral está no [Exercício 1.1.29 na página 27](#).

## Exercícios usando o MATLAB®

Uma vez inicializado o MATLAB®, aparecerá na janela de comandos um prompt `>>` ou `EDU>>`. O prompt significa que o MATLAB® está esperando um comando. Todo comando deve ser finalizado teclando-se **Enter**. Comandos que foram dados anteriormente podem ser obtidos novamente usando as teclas  $\uparrow$  e  $\downarrow$ . Enquanto se estiver escrevendo um comando, este pode ser corrigido usando as teclas  $\leftarrow$ ,  $\rightarrow$ , **Delete** e **Backspace**. O MATLAB® faz diferença entre letras maiúsculas e minúsculas.

No MATLAB<sup>®</sup>, pode-se obter ajuda sobre qualquer comando ou função. O comando

```
>> help
```

(sem o prompt >>) mostra uma listagem de todos os pacotes disponíveis. Ajuda sobre um pacote específico ou sobre um comando ou função específica pode ser obtida com o comando

```
>> help nome,
```

(sem a vírgula e sem o prompt >>) em que nome pode ser o nome de um pacote ou o nome de um comando ou função.

Além dos comandos e funções pré-definidas, escrevemos um pacote chamado gaal com funções específicas para a aprendizagem de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Este pacote pode ser obtido gratuitamente através da internet no endereço <http://www.mat.ufmg.br/~regi>, assim como um texto com uma introdução ao MATLAB<sup>®</sup> e instruções de como instalar o pacote gaal. Depois deste pacote ser devidamente instalado, o comando `help gaal` no prompt do MATLAB<sup>®</sup> dá informações sobre este pacote.

Mais informações sobre as capacidades do MATLAB<sup>®</sup> podem ser obtidas em [4, 28].

Vamos descrever aqui alguns comandos que podem ser usados para a manipulação de matrizes. Outros comandos serão introduzidos a medida que forem necessários.

```
>> syms x y z
```

diz ao MATLAB<sup>®</sup> que as variáveis  $x$  e  $y$  e  $z$  são simbólicas.

```
>> A=[a11,a12,...,a1n;a21,a22,...; ... ,amn]
```

cria uma matriz,  $m$  por  $n$ , usando os elementos  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ...,  $a_{mn}$  e a armazena numa variável de nome  $A$ . Por exemplo, `>> A=[1,2,3;4,5,6]` cria a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix};$$

```
>> I=eye(n)
```

cria a matriz identidade  $n$  por  $n$  e a armazena numa variável  $I$ ;

```
>> O=zeros(n) ou >> O=zeros(m,n)
```

cria a matriz nula  $n$  por  $n$  ou  $m$  por  $n$ , respectivamente, e a armazena numa variável  $O$ ;

```
>> A+B
```

é a soma de  $A$  e  $B$ ,

```
>> A*B
```

é o produto de  $A$  por  $B$ ,

```
>> A.'
```

é a transposta de  $A$ ,

```
>> A-B
```

é a diferença  $A$  menos  $B$ ,

```
>> num*A
```

é o produto do escalar  $num$  por  $A$ ,

```
>> A^k
```

é a potência  $A$  elevado a  $k$ .

>> A(:,j) é a coluna  $j$  da matriz A, >> A(i,:) é a linha  $i$  da matriz A.

>> diag([d1,...,dn]) cria uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são iguais aos elementos da matriz [d1,...,dn], ou seja, são d1,...,dn.

>> A=sym(A) converte a matriz A numa matriz em que os elementos são armazenados no formato simbólico. A função numeric faz o processo inverso.

>> solve(expr) determina a solução da equação  $\text{expr}=0$ . Por exemplo,  
>> solve(x^2-4) determina as soluções da equação  $x^2 - 4 = 0$ ;

### Comando do pacote GAAL:

>> A=randi(n) ou >> A=randi(m,n) cria uma matriz  $n$  por  $n$  ou  $m$  por  $n$ , respectivamente, com elementos inteiros aleatórios entre  $-5$  e  $5$ .

**1.1.10.** Use o MATLAB<sup>®</sup> para calcular alguns membros da sequência  $A, A^2, \dots, A^k, \dots$ , para

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix};$

(b)  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$

A sequência parece estar convergindo para alguma matriz? Se estiver, para qual?

**1.1.11.** Calcule as potências das matrizes dadas a seguir e encontre experimentalmente (por tentativa!) o menor inteiro  $k > 1$  tal que (use o comando >> A=sym(A) depois de armazenar a matriz na variável A):

(a)  $A^k = I_3$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(b)  $A^k = I_4$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(c)  $A^k = \bar{0}$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**1.1.12.** Vamos fazer um experimento no MATLAB<sup>®</sup> para tentar ter uma ideia do quão comum é encontrar matrizes cujo produto comuta. No prompt do MATLAB<sup>®</sup> digite a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=randi(3);B=randi(3);if (A*B==B*A),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB<sup>®</sup> fazer é o seguinte:

- Criar um contador  $c$  e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir às variáveis  $A$  e  $B$ , 1000 matrizes  $3 \times 3$  com entradas inteiras e aleatórias entre  $-5$  e  $5$ .
- Se  $AB=BA$ , ou seja,  $A$  e  $B$  comutarem, então o contador  $c$  é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável  $c$  é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável  $c$ ?

**1.1.13.** Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que cada uma das matrizes é **diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero. Use a seta para cima  $\uparrow$  para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB<sup>®</sup> de forma a obter algo semelhante à linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=diag(randi(1,3));B=diag(randi(1,3));if( ...
```

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável  $c$ ?

**1.1.14.** Faça um experimento semelhante ao anterior, mas para o caso em que uma das matrizes é diagonal. Use a seta para cima  $\uparrow$  para obter novamente a linha digitada e edite a linha no prompt do MATLAB<sup>®</sup> de forma a obter a seguinte linha:



```
>> c=0; for n=1:1000,A=diag(randi(1,3));B=randi(3);if(A*B==B*A),c=c+1;A,B,end,end,c
```

Aqui são impressas as matrizes A e B quando elas comutarem. Qual a conclusão que você tira deste experimento? Qual a probabilidade de um tal par de matrizes comutarem?

**1.1.15.** Use o MATLAB<sup>®</sup> para resolver os Exercícios Numéricos.

## Exercícios Teóricos

**1.1.16.** Sejam  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ , ...,  $E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  matrizes  $n \times 1$ .

(a) Mostre que se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é uma matriz  $m \times n$ , então  $AE_j$  é igual à coluna  $j$  da matriz  $A$ .

(b) Mostre que se

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix},$$

é uma matriz  $n \times m$  então  $E_i^t B$  é igual à linha  $i$  da matriz  $B$ .

1.1.17. Seja

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

uma **matriz diagonal**  $n \times n$ , isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que o produto  $AD$  é obtido da matriz  $A$  multiplicando-se cada coluna  $j$  por  $\lambda_j$ , ou seja, se

$$A = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n], \text{ em que } A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \text{ é a coluna } j \text{ de } A, \text{ então}$$

$$AD = [\lambda_1 A_1 \ \lambda_2 A_2 \ \dots \ \lambda_n A_n].$$

(b) Mostre que o produto  $DA$  é obtido da matriz  $A$  multiplicando-se cada linha  $i$  por  $\lambda_i$ , ou seja, se

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \text{ em que } A_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{in}] \text{ é a linha } i \text{ de } A, \text{ então}$$

$$DA = \begin{bmatrix} \lambda_1 A_1 \\ \lambda_2 A_2 \\ \vdots \\ \lambda_n A_n \end{bmatrix}.$$

**1.1.18.** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $m \times p$  e  $p \times n$ , respectivamente.

- (a) Mostre que a  $j$ -ésima coluna do produto  $AB$  é igual ao produto  $AB_j$ , em que  $B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}$  é a  $j$ -ésima coluna de  $B$ , ou seja, se  $B = [B_1 \dots B_n]$ , então

$$AB = A[B_1 \dots B_n] = [AB_1 \dots AB_n];$$

- (b) Mostre que a  $i$ -ésima linha do produto  $AB$  é igual ao produto  $A_i B$ , em que  $A_i = [a_{i1} \dots a_{ip}]$  é a  $i$ -ésima linha de  $A$ , ou seja, se  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$ , então

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ \vdots \\ A_m B \end{bmatrix}.$$

**1.1.19.** Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  uma matriz  $n \times 1$ . Prove que

$AX = \sum_{j=1}^n x_j A_j$ , em que  $A_j$  é a  $j$ -ésima coluna de  $A$ . (Sugestão: Desenvolva o lado direito e chegue ao lado esquerdo.)

**1.1.20.** (a) Mostre que se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  tal que  $AX = \bar{0}$ , para toda matriz  $X$ ,  $n \times 1$ , então  $A = \bar{0}$ . (Sugestão: use o [Exercício 16 na página 23](#).)

(b) Sejam  $B$  e  $C$  matrizes  $m \times n$ , tais  $BX = CX$ , para todo  $X$ ,  $n \times 1$ . Mostre que  $B = C$ . (Sugestão: use o item anterior.)

**1.1.21.** Mostre que a matriz identidade  $I_n$  é a única matriz tal que  $AI_n = I_nA = A$  para qualquer matriz  $A$ ,  $n \times n$ . (Sugestão: Seja  $J_n$  uma matriz tal que  $AJ_n = J_nA = A$ . Mostre que  $J_n = I_n$ .)

**1.1.22.** Se  $AB = BA$  e  $p$  é um inteiro positivo, mostre que  $(AB)^p = A^pB^p$ .

**1.1.23.** Sejam  $A, B$  e  $C$  matrizes  $n \times n$ .

(a)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ? E se  $AB = BA$ ? Justifique.

(b)  $(AB)C = C(AB)$ ? E se  $AC = CA$  e  $BC = CB$ ? Justifique.

(Sugestão: Veja o **Exemplo 1.8 na página 14**.)

**1.1.24.** (a) Se  $A$  e  $B$  são duas matrizes tais que  $AB = \bar{0}$ , então  $A = \bar{0}$  ou  $B = \bar{0}$ ? Justifique.

(b) Se  $AB = \bar{0}$ , então  $BA = \bar{0}$ ? Justifique.

(c) Se  $A$  é uma matriz tal que  $A^2 = \bar{0}$ , então  $A = \bar{0}$ ? Justifique.

**1.1.25.** Dizemos que uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , é **simétrica** se  $A^t = A$  e é **anti-simétrica** se  $A^t = -A$ .

(a) Mostre que se  $A$  é simétrica, então  $a_{ij} = a_{ji}$ , para  $i, j = 1, \dots, n$  e que se  $A$  é anti-simétrica, então  $a_{ij} = -a_{ji}$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ . Portanto, os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são iguais a zero.

(b) Mostre que se  $A$  e  $B$  são simétricas, então  $A + B$  e  $\alpha A$  são simétricas, para todo escalar  $\alpha$ .

(c) Mostre que se  $A$  e  $B$  são simétricas, então  $AB$  é simétrica se, e somente se,  $AB = BA$ .

(d) Mostre que se  $A$  e  $B$  são anti-simétricas, então  $A + B$  e  $\alpha A$  são anti-simétricas, para todo escalar  $\alpha$ .

(e) Mostre que para toda matriz  $A$ ,  $n \times n$ ,  $A + A^t$  é simétrica e  $A - A^t$  é anti-simétrica.

(f) Mostre que toda matriz quadrada  $A$  pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica. (Sugestão: Observe o resultado da soma de  $A + A^t$  com  $A - A^t$ .)

**1.1.26.** Para matrizes quadradas  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  definimos o **traço** de  $A$  como sendo a soma dos elementos da diagonal (principal) de  $A$ , ou seja,  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

(a) Mostre que  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ .

(b) Mostre que  $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ .

(c) Mostre que  $\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$ .

(d) Mostre que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ . (Sugestão: Prove inicialmente para matrizes  $2 \times 2$ .)

**1.1.27.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Mostre que se  $AA^t = \bar{0}$ , então  $A = \bar{0}$ . (Sugestão: use o traço.) E se a matriz  $A$  for  $m \times n$ , com  $m \neq n$ ?

**1.1.28.** Já vimos que o produto de matrizes não é comutativo. Entretanto, certos conjuntos de matrizes são comutativos. Mostre que:

(a) Se  $D_1$  e  $D_2$  são matrizes diagonais  $n \times n$ , então  $D_1 D_2 = D_2 D_1$ .

(b) Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e

$$B = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k,$$

em que  $a_0, \dots, a_k$  são escalares, então  $AB = BA$ .

**1.1.29.** Uma matriz  $A$  é chamada **nilpotente** se  $A^k = \bar{0}$ , para algum inteiro positivo  $k$ . Verifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$

é nilpotente.

## Apêndice I: Notação de Somatório

São válidas algumas propriedades para a notação de somatório:

- (a) O índice do somatório é uma variável muda que pode ser substituída por qualquer letra:

$$\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{j=1}^n f_j.$$

- (b) O somatório de uma soma pode ser escrito como uma soma de dois somatórios:

$$\sum_{i=1}^n (f_i + g_i) = \sum_{i=1}^n f_i + \sum_{i=1}^n g_i.$$

Pois,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (f_i + g_i) &= (f_1 + g_1) + \dots + (f_n + g_n) = \\ &= (f_1 + \dots + f_n) + (g_1 + \dots + g_n) = \sum_{i=1}^n f_i + \sum_{i=1}^n g_i. \end{aligned}$$

Aqui foram aplicadas as propriedades associativa e comutativa da soma de números.

- (c) Se no termo geral do somatório aparece um produto, em que um fator não depende do índice do somatório, então este fator pode “sair” do somatório:

$$\sum_{i=1}^n f_i g_k = g_k \sum_{i=1}^n f_i.$$

Pois,

$$\sum_{i=1}^n f_i g_k = f_1 g_k + \dots + f_n g_k = g_k (f_1 + \dots + f_n) = g_k \sum_{i=1}^n f_i.$$

Aqui foram aplicadas as propriedades distributiva e comutativa do produto em relação a soma de números.

(d) Num somatório duplo, a ordem dos somatórios pode ser trocada:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_{ij}.$$

Pois,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} &= \sum_{i=1}^n (f_{i1} + \dots + f_{im}) = \\ &= (f_{11} + \dots + f_{1m}) + \dots + (f_{n1} + \dots + f_{nm}) = \\ &= (f_{11} + \dots + f_{n1}) + \dots + (f_{1m} + \dots + f_{nm}) = \\ &= \sum_{j=1}^m (f_{1j} + \dots + f_{nj}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n f_{ij}. \end{aligned}$$

Aqui foram aplicadas as propriedades comutativa e associativa da soma de números.

## 1.2 Sistemas de Equações Lineares

Muitos problemas em várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Vamos ver como a álgebra matricial pode simplificar o estudo dos sistemas lineares.

Uma **equação linear** em  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

em que  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b$  são constantes reais;

Um **sistema de equações lineares** ou simplesmente **sistema linear** é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que  $a_{ij}$  e  $b_k$  são constantes reais, para  $i, k = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

Usando o produto de matrizes que definimos na seção anterior, o sistema linear acima pode ser escrito como uma equação matricial

$$A X = B,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$



Uma **solução** de um sistema linear é uma matriz  $S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$  tal que as equações do sistema são satisfeitas quando substituirmos  $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ . O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado **conjunto solução** ou **solução geral** do sistema. A matriz  $A$  é chamada **matriz do sistema linear**.

**Exemplo 1.10.** O sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução (geral) do sistema acima é  $x = -1/3$  e  $y = 2/3$  (verifique!) ou

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. O outro sistema é obtido depois de aplicar sucessivamente uma série de operações, que não alteram a solução do sistema, sobre as equações. As operações que são usadas são:

- Trocar a posição de duas equações do sistema;

- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Estas operações são chamadas de **operações elementares**. Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear somente os coeficientes do sistema são alterados, assim podemos aplicar as operações sobre a matriz de coeficientes do sistema, que chamamos de **matriz aumentada**, ou seja, a matriz

$$[A \mid B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

---

**Definição 1.5.** Uma **operação elementar sobre as linhas** de uma matriz é uma das seguintes operações:

- (a) Trocar a posição de duas linhas da matriz;
- (b) Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;
- (c) Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

---

O próximo teorema garante que ao aplicarmos operações elementares às equações de um sistema o conjunto solução não é alterado.

---

**Teorema 1.2.** *Se dois sistemas lineares  $AX = B$  e  $CX = D$ , são tais que a matriz aumentada  $[C \mid D]$  é obtida de  $[A \mid B]$  aplicando-se uma operação elementar, então os dois sistemas possuem as mesmas soluções.*

---

**Demonstração.** A demonstração deste teorema segue-se de duas observações:

- (a) Se  $X$  é solução de um sistema, então  $X$  também é solução do sistema obtido aplicando-se uma operação elementar sobre suas equações (verifique!).

- (b) Se o sistema  $CX = D$ , é obtido de  $AX = B$  aplicando-se uma operação elementar às suas equações (ou equivalentemente às linhas da sua matriz aumentada), então o sistema  $AX = B$  também pode ser obtido de  $CX = D$  aplicando-se uma operação elementar às suas equações, pois cada operação elementar possui uma operação elementar inversa do mesmo tipo, que desfaz o que a anterior fez (verifique!).

Pela observação (b),  $AX = B$  e  $CX = D$  podem ser obtidos um do outro aplicando-se uma operação elementar sobre as suas equações. E pela observação (a), os dois possuem as mesmas soluções. ■

Dois sistemas que possuem o mesmo conjunto solução são chamados **sistemas equivalentes**. Portanto, segue-se do Teorema 1.2 que aplicando-se operações elementares às equações de um sistema linear obtemos sistemas equivalentes.

### 1.2.1 Método de Gauss-Jordan

O método que vamos usar para resolver sistemas lineares consiste na aplicação de operações elementares às linhas da matriz aumentada do sistema até que obtenhamos uma matriz numa forma em que o sistema associado a esta matriz seja de fácil resolução.

Vamos procurar obter uma matriz numa forma em que todas as linhas não nulas possuam como primeiro elemento não nulo (chamado **pivô**) o número 1. Além disso, se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos terão que ser iguais a zero. Vamos ver no exemplo seguinte como conseguimos isso. Neste exemplo veremos como a partir do faturamento e do gasto com insumos podemos determinar quanto foi produzido de cada produto manufaturado em uma indústria.

**Exemplo 1.11.** Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R\$ 2,00, R\$ 3,00 e R\$ 5,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou R\$ 2500,00. Vamos determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos. Como vimos no [Exemplo 1.6 na página 8](#), usando matrizes o esquema de produção pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{l}
 \text{gramas de A/kg} \\
 \text{gramas de B/kg} \\
 \text{preço/kg}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 X & Y & Z \\
 \left[ \begin{array}{ccc}
 1 & 1 & 1 \\
 2 & 1 & 4 \\
 2 & 3 & 5
 \end{array} \right]
 \end{array}
 = A \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \text{kg de X produzidos} \\
 \text{kg de Y produzidos} \\
 \text{kg de Z produzidos}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$AX = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + y + 4z \\ 2x + 3y + 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \text{gramas de A usados} \\
 \text{gramas de B usados} \\
 \text{arrecadação}
 \end{array}$$

Assim precisamos resolver o sistema linear

$$\begin{cases}
 x + y + z = 1000 \\
 2x + y + 4z = 2000 \\
 2x + 3y + 5z = 2500
 \end{cases}$$

cujas matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c}
 \textcircled{1} & 1 & 1 & 1000 \\
 2 & 1 & 4 & 2000 \\
 2 & 3 & 5 & 2500
 \end{array} \right]$$

**1ª eliminação:**

Vamos procurar para pivô da 1ª linha um elemento não nulo da primeira coluna não nula (se for o caso, podemos usar a troca de linhas para “trazê-lo” para a primeira linha). Como o primeiro elemento da primeira coluna é igual a 1 ele será o primeiro pivô. Agora, precisamos “zerar” os outros elementos da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha,  $-2$  vezes a 1ª linha e adicionamos à 3ª linha, também,  $-2$  vezes a 1ª linha.

$$\begin{aligned} -2 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} &\longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ -2 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} &\longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array} \right]$$

### 2ª eliminação:

Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Vamos escolher o elemento de posição 2,2. Como temos que “fazer” o pivô igual a um, vamos multiplicar a 2ª linha por  $-1$ .

$$-1 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array} \right]$$

Agora, precisamos “zerar” os outros elementos da 2ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, somamos à 1ª linha,  $-1$  vezes a 2ª e somamos à 3ª linha, também,  $-1$  vezes a 2ª.

$$\begin{aligned} -1 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} &\longrightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ -1 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} &\longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array} \right]$$

### 3ª eliminação:

Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª e a 2ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Temos de escolher o elemento de posição 3,3 e como temos de “fazer” o pivô igual a 1, vamos multiplicar a 3ª linha por 1/5.

$$\frac{1}{5} \times 3^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array} \right]$$

Agora, precisamos “zerar” os outros elementos da 3ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, somamos à 1ª linha,  $-3$  vezes a 3ª e somamos à 2ª linha, 2 vezes a 2ª.

$$\begin{array}{l} -3 \times 3^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ 2 \times 3^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array} \right]$$

Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x & & = 700 \\ & y & = 200 \\ & & z = 100 \end{cases}$$

que possui solução geral dada por

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Portanto, foram vendidos 700 kg do produto X, 200 kg do produto Y e 100 kg do produto Z.

A última matriz que obtivemos no exemplo anterior está na forma que chamamos de **escalonada reduzida**.

---

**Definição 1.6.** Uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  está na forma **escalonada reduzida** quando satisfaz as seguintes condições:

- (a) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;
  - (b) O **pivô** (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha não nula é igual a 1;
  - (c) O pivô de cada linha não nula ocorre à direita do pivô da linha anterior.
  - (d) Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.
- 

Se uma matriz satisfaz as propriedades (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d), dizemos que ela está na forma **escalonada**.

**Exemplo 1.12.** As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



são escalonadas reduzidas, enquanto

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são escalonadas, mas **não** são escalonadas reduzidas.

Este método de resolução de sistemas, que consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até que a matriz do sistema esteja na forma escalonada reduzida, é conhecido como **método de Gauss-Jordan**.

**Exemplo 1.13.** Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + 3y + 13z = 9 \\ y + 5z = 2 \\ -2y - 10z = -8 \end{cases}$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & 13 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array} \right]$$

**1ª eliminação:**

Como o pivô da 1ª linha é igual a 1 e os outros elementos da 1ª coluna são iguais a zero, não há nada o que fazer na 1ª eliminação.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 13 & 9 \\ 0 & \textcircled{1} & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -10 & -8 \end{array} \right]$$

**2ª eliminação:**

Olhamos para submatriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento não nulo da 1ª coluna não nula da submatriz. Escolhemos o elemento de posição 2,2. Como ele é igual a 1, precisamos, agora, “zerar” os outros elementos da coluna do pivô. Para isto somamos à 1ª linha,  $-3$  vezes a 2ª e somamos à 3ª linha, 2 vezes a 2ª.

$$\begin{array}{l} -3 \times 2^\text{a} \text{ linha} + 1^\text{a} \text{ linha} \rightarrow 1^\text{a} \text{ linha} \\ 2 \times 2^\text{a} \text{ linha} + 3^\text{a} \text{ linha} \rightarrow 3^\text{a} \text{ linha} \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right]$$

Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x & - & 2z & = & 3 \\ & y & + & 5z & = & 2 \\ & & & 0 & = & -4 \end{cases}$$

que **não** possui solução.

Em geral, um sistema linear não tem solução se, e somente se, a última linha não nula da forma escalonada reduzida da sua matriz aumentada for da forma  $[0 \dots 0 \mid b'_m]$ , com  $b'_m \neq 0$ .

**Exemplo 1.14.** Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} & & 3z & - & 9w & = & 6 \\ 5x & + & 15y & - & 10z & + & 40w & = & -45 \\ x & + & 3y & - & z & + & 5w & = & -7 \end{cases}$$

A sua matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ \textcircled{1} & 3 & -1 & 5 & -7 \end{array} \right]$$

**1ª eliminação:**

Como temos que “fazer” o pivô igual a um, escolhemos para pivô o elemento de posição 3,1. Precisamos “colocá-lo” na primeira linha, para isto, trocamos a 3ª linha com a 1ª.

$$\boxed{1^{\text{a}} \text{ linha} \longleftrightarrow 4^{\text{a}} \text{ linha}} \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array} \right]$$

Agora, precisamos “zerar” os outros elementos da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha,  $-5$  vezes a 1ª.

$$\boxed{-5 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & \textcircled{-5} & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array} \right]$$

**2ª eliminação:**

Olhamos para a sub-matriz obtida eliminando-se a 1ª linha. Escolhemos para pivô um elemento diferente de zero na 1ª coluna não nula desta sub-matriz. Escolhemos o elemento de posição 2,3. Como temos que fazer o pivô igual a 1, multiplicamos a 2ª linha por  $-1/5$ .

$$-(1/5) \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{array} \right]$$

Agora, precisamos “zerar” os outros elementos da 2ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 1ª linha a 2ª e à 3ª linha,  $-3$  vezes a 2ª.

$$\begin{array}{l} 2^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ -3 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Esta matriz é escalonada reduzida. Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\begin{cases} x + 3y + 2w = -5 \\ z - 3w = 2. \end{cases}$$

A matriz deste sistema possui duas colunas sem pivôs. As variáveis que não estão associadas a pivôs podem ser consideradas **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. Neste exemplo as variáveis  $y$  e  $w$  não estão associadas a pivôs e podem ser consideradas variáveis livres. Sejam  $w = \alpha$  e  $y = \beta$ . As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres,  $z = 2 + 3\alpha$ ,  $x = -5 - 2\alpha - 3\beta$ . Assim, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 2\alpha - 3\beta \\ \beta \\ 2 + 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{para todos os valores de } \alpha \text{ e } \beta \text{ reais.}$$

Em geral, se o sistema linear tiver solução e a forma escalonada reduzida da matriz aumentada possuir colunas sem pivôs, as variáveis que **não** estão associadas a pivôs podem ser consideradas **variáveis livres**, isto é, podem assumir valores arbitrários. As variáveis associadas aos pivôs terão os seus valores dependentes das variáveis livres.

Lembramos que o sistema linear não tem solução se a última linha não nula da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema for da forma  $[0 \dots 0 \mid b'_m]$ , com  $b'_m \neq 0$ , como no [Exemplo 1.13 na página 39](#).

---

**Observação.** Para se encontrar a solução de um sistema linear não é necessário transformar a matriz aumentada do sistema na sua forma escalonada reduzida, mas se a matriz está nesta forma, o sistema associado é o mais simples possível. Um outro método de resolver sistemas lineares consiste em, através da aplicação de operações elementares à matriz aumentada do sistema, se chegar a uma matriz que é somente **escalonada** (isto é, uma matriz que satisfaz as condições (a) e (c), mas não necessariamente (b) e (d) da [Definição 1.6](#)). Este método é conhecido como **método de Gauss**.

---

O próximo resultado mostra que um sistema linear que tenha mais de uma solução não pode ter um número finito de soluções.

---

**Proposição 1.3.** *Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $B$  uma matriz  $m \times 1$ . Se o sistema linear  $A X = B$  possui duas soluções distintas  $X_0 \neq X_1$ , então ele tem infinitas soluções.*

---

**Demonstração.** Seja

$$X_\lambda = (1 - \lambda)X_0 + \lambda X_1, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar que  $X_\lambda$  é solução do sistema  $A X = B$ , para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Para isto vamos mostrar que  $A X_\lambda = B$ .

Aplicando as propriedades (i), (j) das operações matriciais ([Teorema 1.1 na página 9](#)) obtemos

$$A X_\lambda = A[(1 - \lambda)X_0 + \lambda X_1] = A(1 - \lambda)X_0 + A\lambda X_1 = (1 - \lambda)A X_0 + \lambda A X_1$$

Como  $X_0$  e  $X_1$  são soluções de  $A X = B$ , então  $A X_0 = B$  e  $A X_1 = B$ , portanto

$$A X_\lambda = (1 - \lambda)B + \lambda B = [(1 - \lambda) + \lambda]B = B,$$

pela propriedade (f) do [Teorema 1.1](#).

Assim o sistema  $A X = B$  tem infinitas soluções, pois para todo valor de  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $X_\lambda$  é solução e  $X_\lambda - X_{\lambda'} = (\lambda - \lambda')(X_1 - X_0)$ , ou seja,  $X_\lambda \neq X_{\lambda'}$ , para  $\lambda \neq \lambda'$ . Observe que para  $\lambda = 0$ ,  $X_\lambda = X_0$ , para  $\lambda = 1$ ,  $X_\lambda = X_1$ , para  $\lambda = 1/2$ ,  $X_\lambda = \frac{1}{2}X_0 + \frac{1}{2}X_1$ , para  $\lambda = 3$ ,  $X_\lambda = -2X_0 + 3X_1$  e para  $\lambda = -2$ ,  $X_\lambda = 3X_0 - 2X_1$ .

No [Exemplo 3.4 na página 147](#) temos uma interpretação geométrica desta demonstração. ■

Para resolver sistemas lineares vimos aplicando operações elementares à matriz aumentada do sistema linear. Isto pode ser feito com quaisquer matrizes.

### 1.2.2 Matrizes Equivalentes por Linhas

---

**Definição 1.7.** Uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é **equivalente por linhas** a uma matriz  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , se  $B$  pode ser obtida de  $A$  aplicando-se uma sequência de operações elementares sobre as suas linhas.

---

**Exemplo 1.15.** Observando os Exemplos 1.11, 1.14 e 1.13, vemos que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 \\ 5 & 15 & -10 & 40 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

são equivalentes por linhas às matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Matrizes estas que são escalonadas reduzidas.

**Cuidado:** elas são equivalentes por linhas, **não** são iguais!

A relação “ser equivalente por linhas” satisfaz as seguintes propriedades, cuja verificação deixamos como exercício para o leitor:

- Toda matriz é equivalente por linhas a ela mesma (reflexividade);
- Se  $A$  é equivalente por linhas a  $B$ , então  $B$  é equivalente por linhas a  $A$  (simetria);
- Se  $A$  é equivalente por linhas a  $B$  e  $B$  é equivalente por linhas a  $C$ , então  $A$  é equivalente por linhas a  $C$  (transitividade).

Toda matriz é equivalente por linhas a uma matriz na forma escalonada reduzida e a demonstração, que omitiremos, pode ser feita da mesma maneira que fizemos no caso particular das matrizes aumentadas dos Exemplos 1.11, 1.14 e 1.13. No Teorema 5.15 na página 307 mostramos que essa matriz escalonada reduzida é a única matriz na forma escalonada reduzida equivalente a  $A$ .

---

**Teorema 1.4.** *Toda matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é equivalente por linhas a uma única matriz escalonada reduzida  $R = (r_{ij})_{m \times n}$ .*

---

O próximo resultado será usado para provar alguns resultados no capítulo de inversão de matrizes.



---

**Proposição 1.5.** *Seja  $R$  uma matriz  $n \times n$ , na forma escalonada reduzida. Se  $R \neq I_n$ , então  $R$  tem uma linha nula.*

---

**Demonstração.** Observe que o pivô de uma linha  $i$  está sempre numa coluna  $j$  com  $j \geq i$ . Portanto, ou a última linha de  $R$  é nula ou o pivô da linha  $n$  está na posição  $n, n$ . Mas, neste caso todas as linhas anteriores são não nulas e os pivôs de cada linha  $i$  está na coluna  $i$ , ou seja,  $R = I_n$ . ■

### 1.2.3 Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

é chamado **sistema homogêneo**. O sistema (1.7) pode ser escrito como  $AX = \bar{0}$ . Todo sistema homogêneo

admite pelo menos a solução  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  chamada de **solução trivial**. Portanto, todo sistema

homogêneo tem solução. Além disso ou tem somente a solução trivial ou tem infinitas soluções

---

**Observação.** Para resolver um sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$ , basta escalonarmos a matriz  $A$  do sistema, já que sob a ação de uma operação elementar a coluna de zeros não é alterada. Mas, é preciso ficar atento quando se escreve o sistema linear associado à matriz resultante das operações elementares, para se levar em consideração esta coluna de zeros que não vimos escrevendo.

---

---

**Teorema 1.6.** Se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , é tal que  $m < n$ , então o sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$  tem solução diferente da solução trivial, ou seja, todo sistema homogêneo com menos equações do que incógnitas tem infinitas soluções.

---

**Demonstração.** Como o sistema tem menos equações do que incógnitas ( $m < n$ ), o número de linhas não nulas  $r$  da forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema também é tal que  $r < n$ . Assim, temos  $r$  pivôs e  $n - r$  variáveis (incógnitas) livres, que podem assumir todos os valores reais. Logo, o sistema admite solução não trivial e portanto infinitas soluções. ■

O conjunto solução de um sistema linear homogêneo satisfaz duas propriedades interessantes. Estas propriedades terão um papel decisivo no estudo de subespaços de  $\mathbb{R}^n$  na [Seção 5.2 na página 284](#).

---

**Proposição 1.7.** Seja  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

- (a) Se  $X$  e  $Y$  são soluções do sistema homogêneo,  $AX = \vec{0}$ , então  $X + Y$  também o é.
- (b) Se  $X$  é solução do sistema homogêneo,  $AX = \vec{0}$ , então  $\alpha X$  também o é.

---

**Demonstração.** (a) Se  $X$  e  $Y$  são soluções do sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$ , então  $AX = \vec{0}$  e  $AY = \vec{0}$  e portanto  $X + Y$  também é solução pois,  $A(X + Y) = AX + AY = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ ;

- (b) Se  $X$  é solução do sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$ , então  $\alpha X$  também o é, pois  $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha \vec{0} = \vec{0}$ .



Estas propriedades não são válidas para sistemas lineares em geral. Por exemplo, considere o sistema linear  $AX = B$ , em que  $A = [1]$  e  $B = [1]$ . A solução deste sistema é  $X = [1]$ . Mas,  $X + X = 2X = 2$ , não é solução do sistema.

**Exemplo 1.16.** Vamos retomar a cadeia de Markov do [Exemplo 1.9 na página 16](#). Vamos supor que uma população é dividida em três estados (por exemplo: ricos, classe média e pobres) e que em cada unidade de tempo a probabilidade de mudança de um estado para outro seja constante no tempo, só dependa dos estados.

Seja  $t_{ij}$  a probabilidade de mudança do estado  $j$  para o estado  $i$  em uma unidade de tempo (geração). A matriz de transição é dada por

$$T = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

Vamos considerar a matriz de transição

$$T = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

Vamos descobrir qual distribuição inicial da população entre os três estados permanece inalterada, geração após geração. Ou seja, vamos determinar um vetor de estado  $P$  tal que

$$TP = P \quad \text{ou} \quad TP = I_3 P \quad \text{ou} \quad (T - I_3)P = \vec{0}.$$

Assim precisamos resolver o sistema linear homogêneo

$$(T - I_3)X = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y & = 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z & = 0 \\ \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z & = 0 \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

**1ª eliminação:**

$$-2 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

$$-\frac{1}{2} \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

**2ª eliminação:**

$$-4 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ -\frac{1}{4} \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Portanto o sistema dado é equivalente ao sistema seguinte

$$\begin{cases} x & - & z & = & 0 \\ & y & - & 2z & = & 0 \end{cases}$$

Seja  $z = \alpha$ . Então  $y = 2\alpha$  e  $x = \alpha$ . Assim, a solução geral do sistema é

$$X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tomando a solução tal que  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  obtemos que se a população inicial for distribuída de forma que  $p_1 = 1/4$  da população esteja no estado 1,  $p_2 = 1/2$  da população esteja no estado 2 e  $p_3 = 1/4$ , esteja no estado 3, então esta distribuição permanecerá constante geração após geração.

### 1.2.4 Matrizes Elementares (opcional)

**Definição 1.8.** Uma **matriz elementar**  $n \times n$  é uma matriz obtida da matriz identidade  $I_n$  aplicando-se uma, e somente uma, operação elementar.

Vamos denotar por  $E_{ij}$  a matriz elementar obtida trocando-se a linha  $i$  com a linha  $j$  da matriz  $I_n$ ,  $E_i(\alpha)$  a matriz elementar obtida multiplicando-se a linha  $i$  da matriz  $I_n$  pelo escalar  $\alpha \neq 0$  e  $E_{i,j}(\alpha)$  a matriz elementar obtida da matriz  $I_n$ , somando-se à linha  $j$ ,  $\alpha$  vezes a linha  $i$ .

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & 0 & \dots & 1 & & & \cdot \\ \cdot & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \cdot \\ \cdot & & & 1 & \dots & 0 & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}, E_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & & \alpha & & & \cdot \\ \cdot & & & & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$$\text{e } E_{i,j}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \cdot \\ \cdot & & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \vdots & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & \alpha & \dots & 1 & & \cdot \\ \cdot & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

**Exemplo 1.17.** As matrizes seguintes são as matrizes elementares  $2 \times 2$ :

$$E_{1,2} = E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{com } \alpha \neq 0,$$

$$E_{1,2}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E_{2,1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Sejam } E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ matrizes } m \times 1.$$

As matrizes elementares podem ser escritas em termos das matrizes  $E_i$  como

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{matrix}, \quad E_i(\alpha) = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} \leftarrow i \quad \text{e} \quad E_{i,j}(\alpha) = \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t + \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \end{matrix}$$

Aplicar uma operação elementar em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz elementar, como mostra o resultado a seguir.

---

**Teorema 1.8.** *Sejam  $E$  uma matriz elementar  $m \times m$  e  $A$  uma matriz qualquer  $m \times n$ . Então,  $EA$  é igual à matriz obtida aplicando-se na matriz  $A$  a mesma operação elementar que originou  $E$ .*

---

**Demonstração.** Como a  $i$ -ésima linha de um produto de matrizes  $BA$  é igual a  $B_i A$ , em que  $B_i$  é a  $i$ -ésima linha da matriz  $B$  (Exercício 1.1.18 (b) na página 25) e  $E_i^t A = A_i$ , em que  $A_i$  é a linha  $i$  da matriz  $A$  (Exercício 16 (b) na página 23), então:



$$E_{i,j}A = \begin{matrix} i \rightarrow \\ j \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_j^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^t A \\ \vdots \\ E_j^t A \\ \vdots \\ E_i^t A \\ \vdots \\ E_m^t A \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

$$E_i(\alpha)A = \begin{matrix} i \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^t A \\ \vdots \\ \alpha E_i^t A \\ \vdots \\ E_m^t A \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \end{matrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \end{matrix}$$

$$E_{i,j}(\alpha)A = \begin{matrix} i \rightarrow \\ j \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} E_1^t \\ \vdots \\ E_i^t \\ \vdots \\ E_j^t + \alpha E_i^t \\ \vdots \\ E_m^t \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} E_1^t A \\ \vdots \\ E_i^t A \\ \vdots \\ E_j^t A + \alpha E_i^t A \\ \vdots \\ E_m^t A \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j + \alpha A_i \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

■

Assim, aplicar uma sequência de operações elementares em uma matriz, corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por um produto de matrizes elementares.

**Exemplo 1.18.** Quando usamos o método de Gauss-Jordan para resolver o sistema do Exemplo 1.11 na página 35, aplicamos uma sequência de operações elementares na matriz aumentada do sistema. Isto corresponde a multiplicar a matriz aumentada

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array} \right]$$

à esquerda pelas matrizes elementares

$$E_{1,2}(-2) = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad E_{1,3}(-2) = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

$$E_2(-1) = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad E_{2,1}(-1) = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad E_{2,3}(-1) = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$E_3\left(\frac{1}{5}\right) = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array} \right], \quad E_{3,1}(-3) = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad E_{3,2}(2) = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

ou seja,

$$E_{3,2}(2) E_{3,1}(-3) E_3\left(\frac{1}{5}\right) E_{2,3}(-1) E_{2,1}(-1) E_2(-1) E_{1,3}(-2) E_{1,2}(-2) [A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array} \right].$$

## Exercícios Numéricos (respostas na página 451)

**1.2.1.** Quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**1.2.2.** Em cada item suponha que a matriz aumentada de um sistema foi transformada usando operações elementares na matriz escalonada reduzida dada. Resolva o sistema correspondente.

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix};$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$

(d)  $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

**1.2.3.** Resolva, usando o método de Gauss-Jordan, os seguintes sistemas:

(a) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases};$$

(b) 
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases};$$

$$(c) \begin{cases} -2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}.$$

**1.2.4.** Os sistemas lineares seguintes possuem a mesma matriz  $A$ . Resolva-os usando o método de Gauss-Jordan. Observe que os dois sistemas podem ser resolvidos ao mesmo tempo escalonando a matriz aumentada  $[A | B_1 | B_2]$ .

$$(a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases};$$

$$(b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

**1.2.5.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ .

(a) Encontre a solução geral do sistema  $(A + 4I_3)X = \vec{0}$ ;

(b) Encontre a solução geral do sistema  $(A - 2I_3)X = \vec{0}$ .

**1.2.6.** Para cada sistema linear dado, encontre todos os valores de  $a$  para os quais o sistema não tem solução, tem solução única e tem infinitas soluções:

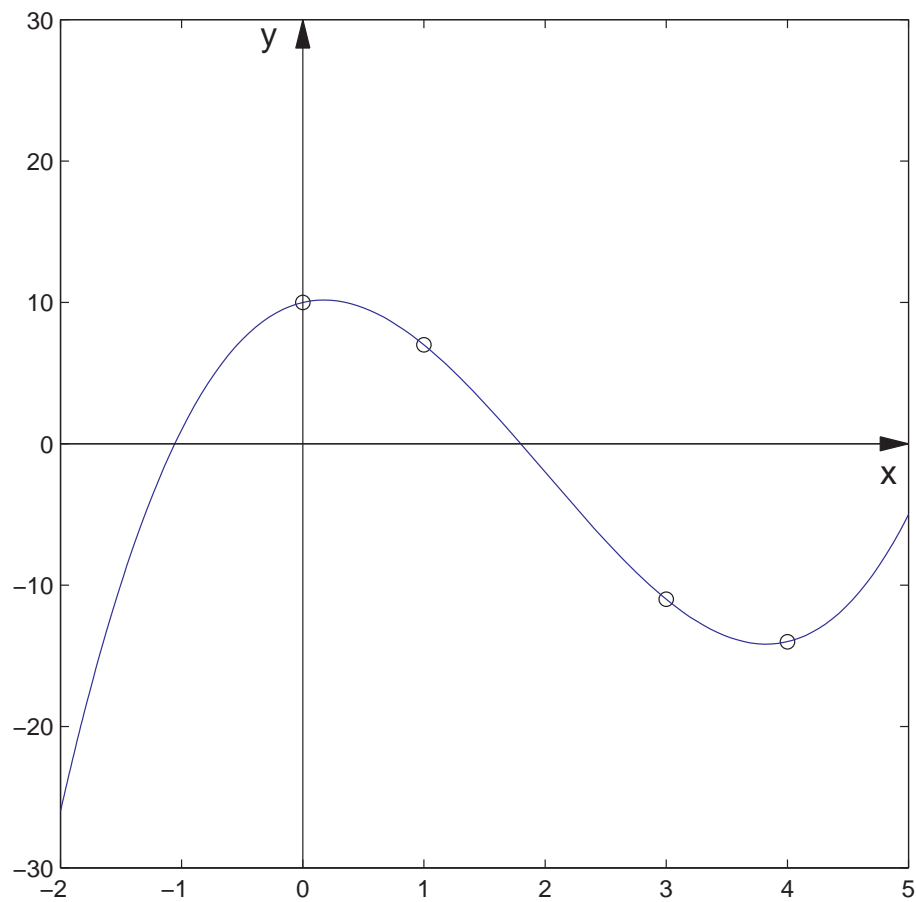
$$(a) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases};$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + (a^2 - 1)z = a + 1 \end{cases}.$$

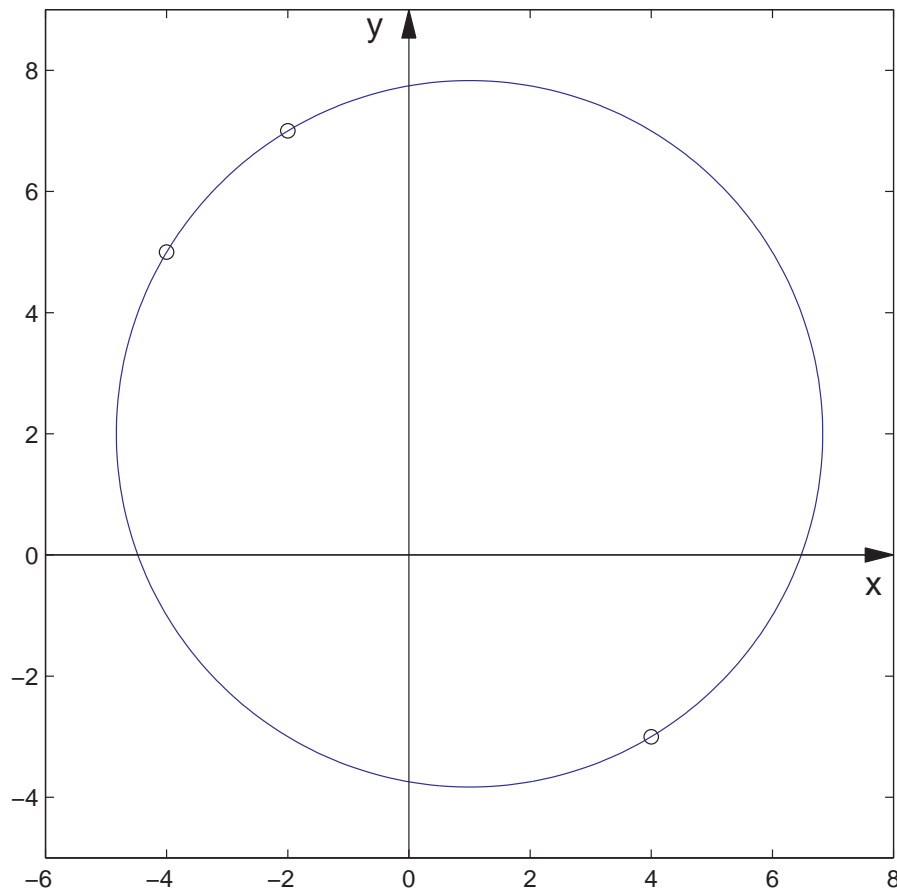
**1.2.7.** Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 2 gramas do insumo A e 1 grama do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 3 gramas de insumo B e, para cada kg de Z, 3 gramas de A e 5 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R\$ 3,00, R\$ 2,00 e R\$ 4,00, respectivamente. Com a venda

de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1,9 kg de A e 2,4 kg de B, essa indústria arrecadou R\$ 2900,00. Determine quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos. (Sugestão: veja o Exemplo 1.11 na página 35.)

**1.2.8.** Determine os coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  da função polinomial  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , cujo gráfico passa pelos pontos  $P_1 = (0, 10)$ ,  $P_2 = (1, 7)$ ,  $P_3 = (3, -11)$  e  $P_4 = (4, -14)$ .



- 1.2.9.** Determine coeficientes  $a, b$  e  $c$  da equação do círculo,  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ , que passa pelos pontos  $P_1 = (-2, 7), P_2 = (-4, 5)$  e  $P_3 = (4, -3)$ .





**1.2.10.** Encontre condições sobre os  $b_i$ 's para que cada um dos sistemas seja **consistente** (isto é, tenha solução):

$$(a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = b_3 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = b_3 \end{cases}.$$

**1.2.11.** (Relativo à sub-seção 1.2.4) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}.$$

Encontre matrizes elementares  $E, F, G$  e  $H$  tais que  $R = EFGHA$  é uma matriz escalonada reduzida. (Sugestão: veja o Exemplo 1.18 na página 56.)

**1.2.12.** Resolva, usando o método de Gauss-Jordan, os seguintes sistemas:

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases};$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6 \end{cases};$$

**1.2.13.** Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & a \\ 2 & 2a-2 & -a-2 & 3a-1 \\ 3 & a+2 & -3 & 2a+1 \end{bmatrix}$ . Determine o conjunto solução do sistema

$AX = B$ , em que  $B = [4 \ 3 \ 1 \ 6]^t$ , para todos os valores de  $a$ .

**1.2.14.** Resolva os sistemas lineares cujas matrizes aumentadas são:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix};$$

## Exercícios usando o MATLAB®

### Comandos do MATLAB®:

>> A=[A1,...,An] cria uma matriz A formada pelas matrizes, definidas anteriormente, A1, ..., An colocadas uma ao lado da outra;

>> expr=subs(expr,x,num) substitui na expressão expr a variável x por num.

>> p=poly2sym([an,...,a0],x) armazena na variável p o polinômio  $a_n x^n + \dots + a_0$ .

>> clf limpa a figura ativa.

### Comandos do pacote GAAL:

>> B=opel(alpha,i,A) ou >> oe(alpha,i,A) faz a operação elementar  $\alpha \times \text{linha } i \Rightarrow \text{linha } i$  da matriz A e armazena a matriz resultante em B.

>> B=opel(alpha,i,j,A) ou >> oe(alpha,i,j,A) faz a operação elementar  $\alpha \times \text{linha } i + \text{linha } j \Rightarrow \text{linha } j$  da matriz A e armazena em B.

>> B=opel(A,i,j) ou >> oe(A,i,j) faz a troca da linha i com a linha j da matriz A e armazena a matriz resultante em B.

>> B=escalona(A) calcula passo a passo a forma escalonada reduzida da matriz A e armazena a matriz resultante na variável B.

>> `matvand(P,k)` obtém a matriz de Vandermonde de ordem  $k$ , se  $P=[x_1; \dots; x_n]$  e a matriz de Vandermonde generalizada no caso em que  $P=[x_1, y_1; \dots; x_n, y_n]$ .

>> `po([x1,y1;x2,y2;...xk,yk])` desenha os pontos  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ .

>> `plotf1(f, [a,b])` desenha o gráfico da função dada pela expressão simbólica  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

>> `plotci(f, [a,b], [c,d])` desenha o gráfico da curva dada implicitamente pela expressão  $f(x, y)=0$  na região do plano  $[a, b] \times [c, d]$ .

>> `p=poly2sym2([a,b,c,d,e,f], x,y)` armazena na variável  $p$  o polinômio em duas variáveis  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ .

>> `eixos` desenha os eixos coordenados.

- 1.2.15.** (a) Use o comando `P=randi(4,2)`, para gerar 4 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre  $-5$  e  $5$ . Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz  $P$ .
- (b) Use o MATLAB® para *tentar* encontrar os coeficientes  $a, b, c$  e  $d$  da função polinomial  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  cujo gráfico passa pelos pontos dados pelas linhas da matriz  $P$ . A matriz  $A=\text{matvand}(P(:,1),3)$  pode ser útil na solução deste problema, assim como a matriz  $B=P(:,2)$ . Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?
- (c) Desenhe os pontos e o gráfico do polinômio com os comandos `clf, po(P), syms x, p=poly2sym(R(:,5),x), plotf1(p, [-5,5])`, em que  $R$  é forma escalonada reduzida da matriz  $[A,B]$ .
- (d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.
- 1.2.16.** (a) Use o comando `P=randi(5,2)`, para gerar 5 pontos com entradas inteiras e aleatórias entre  $-5$  e  $5$ . Os pontos estão armazenados nas linhas da matriz  $P$ .
- (b) Use o MATLAB® para *tentar* encontrar os coeficientes  $a, b, c, d, e$  e  $f$  da cônica, curva de equação  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ , cujo gráfico passa pelos pontos cujas coordenadas são dadas pelas linhas da matriz  $P$ . A matriz  $A=\text{matvand}(P,2)$  pode ser útil na solução deste problema. Se não conseguiu, repita o passo anterior. Por que pode não ser possível?

- (c) Desenhe os pontos e a cônica com os comandos  
`clf, po(P), syms x y, p=poly2sym2([-R(:),6];1), x,y), plotci(p, [-5,5], [-5,5]),` em que  $R$  é a forma escalonada reduzida da matriz  $A$ .
- (d) Desenhe os eixos coordenados com o comando `eixos`.

**1.2.17.** Use o MATLAB<sup>®</sup> e resolva os Exercícios Numéricos a partir do Exercício 1.2.3.

## Exercícios Teóricos

- 1.2.18.** Mostre que toda operação elementar possui inversa, do mesmo tipo, ou seja, para cada operação elementar existe uma outra operação elementar do mesmo tipo que desfaz o que a operação anterior fez.
- 1.2.19.** Prove que:
- (a) Toda matriz é equivalente por linhas a ela mesma (reflexividade);
  - (b) Se  $A$  é equivalente por linhas a  $B$ , então  $B$  é equivalente por linhas a  $A$  (simetria);
  - (c) Se  $A$  é equivalente por linhas a  $B$  e  $B$  é equivalente por linhas a  $C$ , então  $A$  é equivalente por linhas a  $C$  (transitividade).
- 1.2.20.** (a) Sejam  $X_1$  e  $X_2$  soluções do sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$ . Mostre que  $\alpha X_1 + \beta X_2$  é solução, para quaisquer escalares  $\alpha$  e  $\beta$ . (Sugestão: veja o Exemplo 1.7.)
- (b) Sejam  $X_1$  e  $X_2$  soluções do sistema  $AX = B$ . Mostre que se  $\alpha X_1 + \beta X_2$  é solução, para quaisquer escalares  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $B = \vec{0}$ . (Sugestão: faça  $\alpha = \beta = 0$ .)
- 1.2.21.** Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $B \neq \vec{0}$  uma matriz  $m \times 1$ .
- (a) Mostre que se  $X_1$  é uma solução do sistema  $AX = B$  e  $Y_1$  é uma solução do sistema homogêneo associado  $AX = \vec{0}$ , então  $X_1 + Y_1$  é solução de  $AX = B$ .
  - (b) Seja  $X_0$  solução particular do sistema  $AX = B$ . Mostre que toda solução  $X$  do sistema  $AX = B$ , pode ser escrita como  $X = X_0 + Y$ , em que  $Y$  é uma solução do sistema homogêneo associado,  $AX = \vec{0}$ . Assim, a solução geral do sistema  $AX = B$  é a soma de uma solução particular de  $AX = B$  com a

solução geral do sistema homogêneo associado  $AX = \vec{0}$ . (Sugestão: Escreva  $X = X_0 + (X - X_0)$  e mostre que  $X - X_0$  é solução do sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$ .)

## Teste do Capítulo

---

1. Para o sistema linear dado, encontre todos os valores de  $a$  para os quais o sistema não tem solução, tem solução única e tem infinitas soluções:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ x + y + (a^2 - 5)z = a \end{cases}$$

2. Se possível, encontre os valores de  $x, y$  e  $z$  tais que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -40 & 16 & x \\ 13 & -5 & y \\ 5 & -2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Sejam

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Sabendo-se que  $A = P^t D P$ , calcule  $D^2$ ,  $P P^t$  e  $A^2$ .

4. Responda **Verdadeiro** ou **Falso**, justificando:

(a) Se  $A^2 = -2A^4$ , então  $(I_n + A^2)(I_n - 2A^2) = I_n$ ;

(b) Se  $A = P^t D P$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal, então  $A^t = A$ ;

- (c) Se  $D$  é uma matriz diagonal, então  $DA = AD$ , para toda matriz  $A$ ,  $n \times n$ ;
- (d) Se  $B = AA^t$ , então  $B = B^t$ .
- (e) Se  $B$  e  $A$  são tais que  $A = A^t$  e  $B = B^t$ , então  $C = AB$ , é tal que  $C^t = C$ .

---

## Capítulo 2

# Inversão de Matrizes e Determinantes

---

## 2.1 Matriz Inversa

Todo número real  $a$ , não nulo, possui um inverso (multiplicativo), ou seja, existe um número  $b$ , tal que  $ab = ba = 1$ . Este número é único e o denotamos por  $a^{-1}$ . Apesar da álgebra matricial ser semelhante à álgebra dos números reais, nem todas as matrizes *A não nulas* possuem inversa, ou seja, nem sempre existe uma matriz  $B$  tal que  $AB = BA = I_n$ . De início, para que os produtos  $AB$  e  $BA$  estejam definidos e sejam iguais é preciso que as matrizes  $A$  e  $B$  sejam quadradas. Portanto, somente as matrizes quadradas podem ter inversa, o que já diferencia do caso dos números reais, pois todo número não nulo tem inverso. Mesmo entre as matrizes quadradas, muitas não possuem inversa, apesar do conjunto das que não tem inversa ser bem



menor do que o conjunto das que tem (Exercício 2.2.9 na página 123).

---

**Definição 2.1.** Uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é **invertível** ou **não singular**, se existe uma matriz  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  tal que

$$A B = B A = I_n, \quad (2.1)$$

em que  $I_n$  é a matriz identidade. A matriz  $B$  é chamada de **inversa** de  $A$ . Se  $A$  não tem inversa, dizemos que  $A$  é **não invertível** ou **singular**.

---

**Exemplo 2.1.** Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $B$  é a inversa da matriz  $A$ , pois  $A B = B A = I_2$ .

---

**Teorema 2.1.** Se uma matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  possui inversa, então a inversa é única.

---

**Demonstração.** Suponhamos que  $B$  e  $C$  sejam inversas de  $A$ . Então,  $AB = BA = I_n = AC = CA$  e assim,

$$B = B I_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C.$$



Denotamos a inversa de  $A$ , quando ela existe, por  $A^{-1}$ . Devemos chamar atenção para o fato de que o índice superior  $-1$ , aqui, não significa uma potência, tão pouco uma divisão. Assim como no caso da transposta, em que  $A^t$  significa a transposta de  $A$ , aqui,  $A^{-1}$  significa a inversa de  $A$ .

### 2.1.1 Propriedades da Inversa

**Teorema 2.2.** (a) Se  $A$  é invertível, então  $A^{-1}$  também o é e

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

(b) Se  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  são matrizes invertíveis, então  $AB$  é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

(c) Se  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é invertível, então  $A^t$  também é invertível e

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

**Demonstração.** Se queremos mostrar que uma matriz é a inversa de uma outra, temos que mostrar que os produtos das duas matrizes são iguais à matriz identidade.

- (a) Uma matriz  $B$  é a inversa de  $A^{-1}$  se

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n.$$

Mas, como  $A^{-1}$  é a inversa de  $A$ , então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Como a inversa é única, então  $B = A$  é a inversa de  $A^{-1}$ , ou seja,  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

- (b) Temos que mostrar que a inversa de  $AB$  é  $B^{-1}A^{-1}$ , ou seja, mostrar que os produtos  $(AB)(B^{-1}A^{-1})$  e  $(B^{-1}A^{-1})(AB)$  são iguais à matriz identidade. Mas, pelas propriedades (h) e (i) do Teorema 1.1 na página 9:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n, \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.\end{aligned}$$

- (c) Queremos mostrar que a inversa de  $A^t$  é  $(A^{-1})^t$ . Pela propriedade (o) do Teorema 1.1 na página 9:

$$\begin{aligned}A^t(A^{-1})^t &= (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n, \\ (A^{-1})^tA^t &= (AA^{-1})^t = I_n^t = I_n.\end{aligned}$$

■

O teorema seguinte, cuja demonstração será apresentada na Subseção 2.1.2, garante que basta verificarmos uma das duas igualdades em (2.1) para sabermos se uma matriz é a inversa de outra.

---

**Teorema 2.3.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ .*

*(a) Se  $BA = I_n$ , então  $AB = I_n$ ;*

*(b) Se  $AB = I_n$ , então  $BA = I_n$ ;*

---

Assim, para verificar que uma matriz  $A$  é invertível, quando temos uma matriz  $B$  que é candidata a inversa de  $A$ , basta fazer um dos produtos  $AB$  ou  $BA$  e verificar se um deles é igual a  $I_n$ . O próximo exemplo ilustra este fato.

**Exemplo 2.2.** Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  uma matriz tal que  $A^3 = \bar{0}$  ( $A$  pode não ser a matriz nula!). Vamos mostrar que a inversa de  $I_n - A$  é  $I_n + A + A^2$ . Para provar isto, devemos multiplicar a matriz  $I_n - A$ , pela matriz que possivelmente seja a inversa dela, aqui  $I + A + A^2$ , e verificar se o produto das duas é igual a matriz identidade  $I_n$ .

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2) = I_n(I_n + A + A^2) - A(I_n + A + A^2) = I_n + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_n.$$

Aqui foram usadas as propriedades (i) e (j) do Teorema 1.1 na página 9.

### 2.1.2 Matrizes Elementares e Inversão (opcional)

As matrizes elementares têm um papel importante no estudo da inversão de matrizes e da solução de sistemas lineares.

---

**Proposição 2.4.** *Toda matriz elementar é invertível e sua inversa é também uma matriz elementar. Usando a notação introduzida na página 52, temos:*

(a)  $E_{i,j}^{-1} = E_{j,i} = E_{i,j};$

(b)  $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(1/\alpha),$  para  $\alpha \neq 0;$

(c)  $E_{i,j}(\alpha)^{-1} = E_{i,j}(-\alpha).$

---

**Demonstração.** Seja  $E$  uma matriz elementar. Esta matriz é obtida de  $I_n$  aplicando-se uma operação elementar. Seja  $F$  a matriz elementar correspondente a operação que transforma  $E$  de volta em  $I_n$ . Agora, pelo Teorema 1.8 na página 54, temos que  $FE = EF = I_n$ . Portanto,  $F$  é a inversa de  $E$ . ■

---

**Teorema 2.5.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existe uma matriz  $B$ ,  $n \times n$ , tal que  $BA = I_n$ .*

(b) *A matriz  $A$  é equivalente por linhas à matriz identidade  $I_n$ .*

(c) A matriz  $A$  é invertível.

**Demonstração.** (a) $\Rightarrow$ (b) Se  $BA = I_n$ , então o sistema  $AX = \vec{0}$  tem somente a solução trivial, pois  $X = I_n X = BAX = B\vec{0} = \vec{0}$ . Isto implica que a matriz  $A$  é equivalente por linhas à matriz identidade  $I_n$ , pois caso contrário a forma escalonada reduzida de  $A$  teria uma linha nula (Proposição 1.5 na página 47).

(b) $\Rightarrow$ (c) A matriz  $A$  ser equivalente por linhas à  $I_n$  significa, pelo Teorema 1.8 na página 54, que existem matrizes elementares  $E_1, \dots, E_k$ , tais que

$$\begin{aligned} E_k \dots E_1 A &= I_n & (2.2) \\ (E_1^{-1} \dots E_k^{-1}) E_k \dots E_1 A &= E_1^{-1} \dots E_k^{-1} I_n \end{aligned}$$

$$A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} I_n. \quad (2.3)$$

Aqui, usamos o fato de que as matrizes elementares são invertíveis (Proposição 2.4). Portanto,  $A$  é invertível como o produto de matrizes invertíveis.

(c) $\Rightarrow$ (a) Claramente.



Se  $A$  é invertível, então multiplicando-se ambos os membros de (2.2) à direita por  $A^{-1}$  obtemos

$$E_k \dots E_1 I_n = A^{-1}.$$

Assim, a mesma sequência de operações elementares que transforma a matriz  $A$  na matriz identidade  $I_n$  transforma também  $I_n$  em  $A^{-1}$ .

A demonstração do Teorema 2.3 na página 74, agora, é uma simples consequência do Teorema anterior.

**Demonstração do Teorema 2.3.** (a) Vamos mostrar que se  $BA = I_n$ , então  $A$  é invertível e  $B = A^{-1}$ . Se  $BA = I_n$ , então pelo Teorema 2.5,  $A$  é invertível e  $B = BI_n = BAA^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1}$ . Logo,  $AB = BA = I_n$ .

(b) Se  $AB = I_n$ , então pelo item anterior  $B$  é invertível e  $B^{-1} = A$ . Portanto  $BA = AB = I_n$ . ■

Segue da demonstração, do Teorema 2.5 (equação (2.3)) o resultado seguinte.

---

**Teorema 2.6.** *Uma matriz  $A$  é invertível se, e somente se, ela é um produto de matrizes elementares.*

---

**Exemplo 2.3.** Vamos escrever a matriz  $A$  do Exemplo 2.5 na página 81 como o produto de matrizes elementares. Quando encontramos a inversa da matriz  $A$ , aplicamos uma sequência de operações elementares em  $[A | I_3]$  até que encontramos a matriz  $[I_3 | A^{-1}]$ . Como as operações são por linha, esta mesma sequência de operações elementares transforma  $A$  em  $I_n$ . Isto corresponde a multiplicar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ à esquerda pelas matrizes elementares}$$

$$E_{1,2}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{1,3}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,1}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{2,3}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3\left(\frac{1}{5}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad E_{3,1}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{3,2}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$E_{3,2}(2) E_{3,1}(-3) E_3\left(\frac{1}{5}\right) E_{2,3}(-1) E_{2,1}(-1) E_2(-1) E_{1,3}(-2) E_{1,2}(-2) A = I_3.$$

Multiplicando à esquerda pelas inversas das matrizes elementares correspondentes obtemos

$$A = E_{1,2}(2) E_{1,3}(2) E_2(-1) E_{2,1}(1) E_{2,3}(1) E_3(5) E_{3,1}(3) E_{3,2}(-2).$$

### 2.1.3 Método para Inversão de Matrizes

O exemplo seguinte mostra, para matrizes  $2 \times 2$ , não somente uma forma de descobrir se uma matriz  $A$  tem inversa mas também, como encontrar a inversa, no caso em que ela exista. Ou seja, escalonamos a matriz  $[A \mid I_2]$  e encontramos a sua forma escalonada reduzida  $[R \mid S]$ . Se  $R = I_2$ , então a matriz  $A$  é invertível e a inversa  $A^{-1} = S$ . Caso contrário, a matriz  $A$  não é invertível.

**Exemplo 2.4.** Seja  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Devemos procurar uma matriz  $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$  tal que  $AB = I_2$ , ou seja,

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \\ ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$



Este sistema pode ser desacoplado em dois sistemas independentes que possuem a mesma matriz, que é a matriz  $A$ . Podemos resolvê-los simultaneamente. Para isto, basta escalonarmos a matriz aumentada

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right] = [A | I_2].$$

Os dois sistemas têm solução única se, e somente se, a forma escalonada reduzida da matriz  $[A | I_2]$  for da forma  $[I_2 | S] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & s & t \\ 0 & 1 & u & v \end{array} \right]$  (verifique, observando o que acontece se a forma escalonada reduzida da matriz  $A$  não for igual a  $I_2$ ). Neste caso,  $x = s, z = u$  e  $y = t, w = v$ , ou seja, a matriz  $A$  possuirá inversa,  $A^{-1} = B = S = \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix}$ .

Para os leitores da [Subseção 2.1.2](#) o próximo teorema é uma simples consequência do [Teorema 2.5 na página 75](#). Entretanto a demonstração que daremos a seguir fornece um método para encontrar a inversa de uma matriz, se ela existir.

**Teorema 2.7.** *Uma matriz  $A, n \times n$ , é invertível se, e somente se,  $A$  é equivalente por linhas à matriz identidade  $I_n$ .*

**Demonstração.** Pelo [Teorema 2.3 na página 74](#), para verificarmos se uma matriz  $A, n \times n$ , é invertível, basta verificarmos se existe uma matriz  $B$ , tal que

$$AB = I_n. \quad (2.4)$$

Vamos denotar as colunas de  $B$  por  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , ou seja,  $B = [X_1 \dots X_n]$ , em que

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \dots, X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

e as colunas da matriz identidade  $I_n$ , por  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , ou seja,  $I_n = [E_1 \dots E_n]$ , em que

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim a equação (2.4) pode ser escrita como

$$A [X_1 \dots X_n] = [AX_1 \dots AX_n] = [E_1 \dots E_n],$$

pois a  $j$ -ésima coluna do produto  $AB$  é igual a  $A$  vezes a  $j$ -ésima coluna da matriz  $B$  ([Exercício 18 na página 25](#)). Analisando coluna a coluna a equação anterior vemos que encontrar  $B$  é equivalente a resolver  $n$  sistemas lineares

$$A X_j = E_j \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

Cada um dos sistemas pode ser resolvido usando o método de Gauss-Jordan. Para isso, formaríamos as matrizes aumentadas  $[A \mid E_1], [A \mid E_2], \dots, [A \mid E_n]$ . Entretanto, como as matrizes dos sistemas são todas iguais à  $A$ , podemos resolver todos os sistemas simultaneamente formando a matriz  $n \times 2n$

$$[A \mid E_1 E_2 \dots E_n] = [A \mid I_n].$$

Transformando  $[A \mid I_n]$  na sua forma escalonada reduzida, que vamos denotar por  $[R \mid S]$ , vamos chegar a duas situações possíveis: ou a matriz  $R$  é a matriz identidade, ou não é.

- Se  $R = I_n$ , então a forma escalonada reduzida da matriz  $[A \mid I_n]$  é da forma  $[I_n \mid S]$ . Se escrevemos a matriz  $S$  em termos das suas colunas  $S = [S_1 \ S_2 \ \dots \ S_n]$ , então as soluções dos sistemas  $A X_j = E_j$  são  $X_j = S_j$  e assim  $B = S$  é tal que  $A B = I_n$  e pelo Teorema 2.3 na página 74  $A$  é invertível.
- Se  $R \neq I_n$ , então a matriz  $A$  não é equivalente por linhas à matriz identidade  $I_n$ . Então, pela Proposição 1.5 na página 47 a matriz  $R$  tem uma linha nula. O que implica que cada um dos sistemas  $A X_j = E_j$  ou não tem solução única ou não tem solução. Isto implica que a matriz  $A$  não tem inversa, pois as colunas da (única) inversa seriam  $X_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ . ■

---

**Observação.** Da demonstração do Teorema 2.7 obtemos não somente uma forma de descobrir se uma matriz  $A$  tem inversa mas também, como encontrar a inversa, no caso em que ela exista. Ou seja, escalonamos a matriz  $[A \mid I_n]$  e encontramos a sua forma escalonada reduzida  $[R \mid S]$ . Se  $R = I_n$ , então a matriz  $A$  é invertível e a inversa  $A^{-1} = S$ . Caso contrário, a matriz  $A$  não é invertível. Vejamos os exemplos seguintes.

---

**Exemplo 2.5.** Vamos encontrar, se existir, a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

**1ª eliminação:**

$$\begin{aligned} -2 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} &\rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \\ -2 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} &\rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

**2ª eliminação:**

$$-1 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} -1 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} &\rightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ -1 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} &\rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

**3ª eliminação:**

$$\frac{1}{5} \times 3^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} -3 \times 3^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} &\rightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha} \\ 2 \times 3^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} &\rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right]$$

Assim, a matriz  $[A \mid I_3]$  é equivalente por linhas à matriz acima, que é da forma

$[I_3 \mid S]$ , portanto a matriz  $A$  é invertível e a sua inversa é a matriz  $S$ , ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 2.6.** Vamos determinar, se existir, a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para isso devemos escalonar a matriz aumentada

$$[A \mid I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

**1ª eliminação:**

$$-1 \times 1^\text{ª} \text{ linha} + 2^\text{ª} \text{ linha} \longrightarrow 2^\text{ª} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

**2ª eliminação:**

$$-1 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$-2 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 1^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$-1 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Assim, a matriz  $[A \mid I_3]$  é equivalente por linhas à matriz acima, que é da forma  $[R \mid S]$ , com  $R \neq I_3$ . Assim, a matriz  $A$  não é equivalente por linhas à matriz identidade e portanto **não** é invertível.

Se um sistema linear  $AX = B$  tem o **número de equações igual ao número de incógnitas**, então o conhecimento da inversa da matriz do sistema,  $A^{-1}$ , reduz o problema de resolver o sistema a simplesmente fazer um produto de matrizes, como está enunciado no próximo teorema.

**Teorema 2.8.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .*

- (a) *O sistema associado  $AX = B$  tem solução única se, e somente se,  $A$  é invertível. Neste caso a solução é  $X = A^{-1}B$ ;*
- (b) *O sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$  tem solução não trivial se, e somente se,  $A$  é singular (não invertível).*

**Demonstração.** (a) Se a matriz  $A$  é invertível, então multiplicando  $A X = B$  por  $A^{-1}$  à esquerda em ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned}A^{-1}(A X) &= A^{-1}B \\(A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\I_n X &= A^{-1}B \\X &= A^{-1}B.\end{aligned}$$

Aqui foram usadas as propriedades (h) e (i) do Teorema 1.1 na página 9. Portanto,  $X = A^{-1}B$  é a única solução do sistema  $A X = B$ . Por outro lado, se o sistema  $A X = B$  possui solução única, então a forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema  $[A \mid B]$  é da forma  $[R \mid S]$ , em que  $R = I_n$ . Pois a matriz  $A$  é quadrada e caso  $R$  fosse diferente da identidade possuiria uma linha de zeros (Proposição 1.5 na página 47) o que levaria a que o sistema  $A X = B$  ou não tivesse solução ou tivesse infinitas soluções. Logo, a matriz  $A$  é equivalente por linhas à matriz identidade o que pelo Teorema 2.7 na página 79 implica que  $A$  é invertível.

- (b) Todo sistema homogêneo possui pelo menos a solução trivial. Pelo item anterior, esta será a única solução se, e somente se,  $A$  é invertível. ■

Vamos ver no próximo exemplo que se conhecemos a inversa de uma matriz, então a produção de uma indústria em vários períodos pode ser obtida apenas multiplicando-se a inversa por matrizes colunas que contenham a arrecadação e as quantidades dos insumos utilizados em cada período.

**Exemplo 2.7.** Uma indústria produz três produtos, X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 1 grama do insumo A e 2 gramas do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 1 grama de insumo B e, para cada kg de Z, 1 grama de A e 4 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R\$ 2,00, R\$ 3,00 e R\$ 5,00, respectivamente. Como vimos no **Exemplo 1.6 na página 8**, usando matrizes o esquema de produção pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{l}
 \text{gramas de A/kg} \\
 \text{gramas de B/kg} \\
 \text{preço/kg}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 X & Y & Z
 \end{array} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}
 \end{array}
 = A \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \text{kg de X produzidos} \\
 \text{kg de Y produzidos} \\
 \text{kg de Z produzidos}
 \end{array}$$

$$AX = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + y + 4z \\ 2x + 3y + 5z \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \text{gramas de A usados} \\
 \text{gramas de B usados} \\
 \text{arrecadação}
 \end{array}$$

No **Exemplo 2.5 na página 81** determinamos a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

que é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabendo-se a inversa da matriz  $A$  podemos saber a produção da indústria sempre que soubermos quanto foi gasto do insumo A, do insumo B e a arrecadação.



- (a) Se em um período com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2 kg de B, essa indústria arrecadou R\$ 2500,00, então para determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos simplesmente multiplicamos  $A^{-1}$  pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Portanto, foram produzidos 700 kg do produto X, 200 kg de Y e 100 kg de Z.

- (b) Se em outro período com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1 kg de A e 2,1 kg de B, essa indústria arrecadou R\$ 2900,00, então para determinar quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos simplesmente multiplicamos  $A^{-1}$  pela matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 2900 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{gramas de A usados} \\ \text{gramas de B usados} \\ \text{arrecadação} \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{l} \text{kg de X produzidos} \\ \text{kg de Y produzidos} \\ \text{kg de Z produzidos} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 2100 \\ 2900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Portanto, foram produzidos 500 kg do produto X, 300 kg de Y e 200 kg de Z.

Vamos mostrar a recíproca do item (b) do Teorema 2.2 na página 72. Este resultado será útil na demonstração de que o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes (Subseção 2.2.2 na página 118).

---

**Proposição 2.9.** *Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$ , com  $AB$  invertível, então  $A$  e  $B$  são invertíveis.*

---

**Demonstração.** Considere o sistema  $(AB)X = \vec{0}$ . Se  $B$  não fosse invertível, então existiria  $X \neq \vec{0}$ , tal que  $BX = \vec{0}$  (Teorema 2.8 na página 84). Multiplicando-se por  $A$ , teríamos  $ABX = \vec{0}$ , o que, novamente pelo Teorema 2.8 na página 84, contradiz o fato de  $AB$  ser invertível. Portanto,  $B$  é invertível. Agora, se  $B$  e  $AB$  são invertíveis, então  $A$  também é invertível, pois  $A = (AB)B^{-1}$ , que é o produto de duas matrizes invertíveis. ■

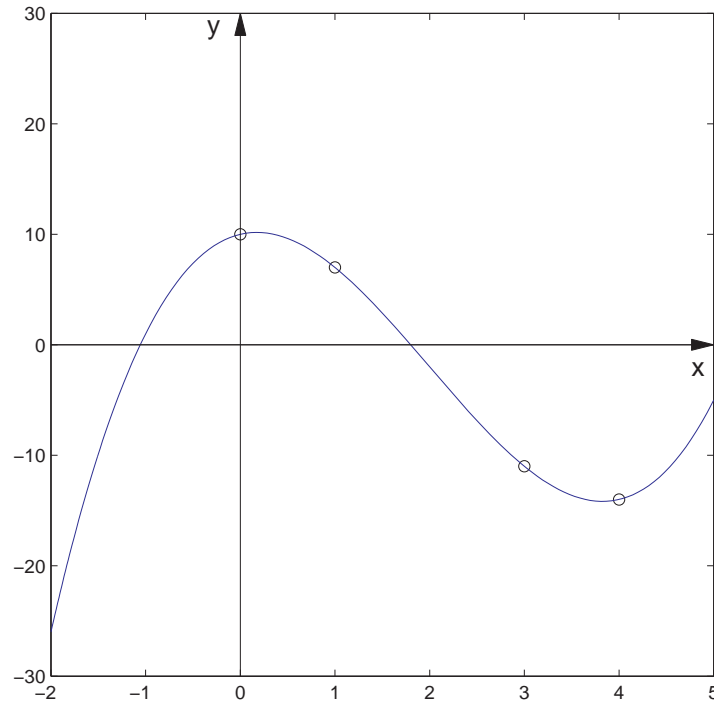
### 2.1.4 Aplicação: Interpolação Polinomial

Sejam  $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$ , com  $x_1, \dots, x_n$  números distintos. Considere o problema de encontrar um polinômio de grau  $n - 1$

$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0,$$

que *interpola* os dados, no sentido de que  $p(x_i) = y_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Por exemplo se os pontos são  $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11), P_4 = (4, -14)$  então o problema consiste em encontrar um polinômio de grau 3 que interpola os pontos dados (veja o [Exercício 1.2.8 na página 59](#)).



Vamos mostrar que existe, um e somente um, polinômio de grau no máximo igual a  $n - 1$ , que interpola  $n$  pontos, com abscissas distintas. Substituindo os pontos no

polinômio  $p(x)$ , obtemos um sistema linear  $AX = B$ , em que

$$X = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $A$  é chamada **matriz de Vandermonde**.

Vamos mostrar que  $AX = B$  tem somente uma solução. Pelo [Teorema 2.8 na página 84](#), um sistema de  $n$  equações e  $n$  incógnitas  $AX = B$  tem solução única se, e somente se, o sistema homogêneo associado,  $AX = \bar{0}$ , tem somente a solução trivial.  $X = [a_{n-1} \ \dots \ a_0]$  é solução do sistema homogêneo se, e somente se, o polinômio de grau  $n - 1$ ,  $p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ , se anula em  $n$  pontos distintos. O que implica que o polinômio  $p(x)$  é o polinômio com todos os seus coeficientes iguais a zero. Portanto, o sistema homogêneo  $AX = \bar{0}$  tem somente a solução trivial. Isto prova que existe, um e somente um, polinômio de grau no máximo igual a  $n - 1$ , que interpola  $n$  pontos, com abscissas distintas.

Assim a solução do sistema linear é  $X = A^{-1}B$ . Como a matriz  $A$  depende apenas das abscissas dos pontos, tendo calculado a matriz  $A^{-1}$  podemos determinar rapidamente os polinômios que interpolam vários conjuntos de pontos, desde que os pontos de todos os conjuntos tenham as mesmas abscissas dos pontos do conjunto inicial.

### 2.1.5 Aplicação: Criptografia

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	à	á	â
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
ã	ç	é	ê	í	ó	ô	õ	ú	ü	A	B	C	D	E
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
U	V	W	X	Y	Z	À	Á	Â	Ã	Ç	É	Ê	Í	Ó
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
Ô	Õ	Ũ	Ü	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:
75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
;	<	=	>	?	@	!	"	#	\$	%	&	'	(	)
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
*	+	,	-	.	/	[	\	]	_	{		}		
105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117		

Tabela 2.1: Tabela de conversão de caracteres em números

Vamos transformar uma mensagem em uma matriz da seguinte forma. Vamos quebrar a mensagem em pedaços de tamanho 3 e cada pedaço será convertido em uma matriz coluna usando a Tabela 2.1 de conversão entre caracteres e números.

Considere a seguinte mensagem criptografada

$$1ydobbr,? \quad (2.5)$$

Quebrando a mensagem criptografada em pedaços de tamanho 3 e convertendo

cada pedaço para uma coluna de números usando a [Tabela 2.1](#) obtemos a matriz

$$Y = \begin{bmatrix} 80 & 15 & 18 \\ 25 & 2 & 107 \\ 4 & 2 & 94 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que esta mensagem foi criptografada fazendo o produto da mensagem inicial pela matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então

$$X = M^{-1}Y$$

será a mensagem inicial convertida para números, ou seja,

$$X = M^{-1}Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 & 15 & 18 \\ 25 & 2 & 107 \\ 4 & 2 & 94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & 15 & 5 \\ 21 & 0 & 13 \\ 4 & 2 & 94 \end{bmatrix}$$

Convertendo para texto usando novamente a [Tabela 2.1](#) obtemos que a mensagem que foi criptografada é

$$\text{Tudo bem?} \quad (2.6)$$

## Exercícios Numéricos (respostas na página 468)

**2.1.1.** Seja  $A$  uma matriz  $3 \times 3$ . Suponha que  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  é solução do sistema homogêneo  $A X = \vec{0}$ . A matriz  $A$  é singular ou não? Justifique.

**2.1.2.** Se possível, encontre as inversas das seguintes matrizes:

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix};$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix};$

(d)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix};$

(e)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$

(f)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix};$

**2.1.3.** Encontre todos os valores de  $a$  para os quais a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$  tem inversa.

**2.1.4.** Se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

encontre  $(AB)^{-1}$ .

**2.1.5.** Resolva o sistema  $A X = B$ , se  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ .



2.1.6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

mostraremos no Exemplo 6.6 na página 373 que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Determine  $A^k$ , para  $k = 1, 2, 3, \dots$

2.1.7. (Relativo à Subseção 2.1.2) Encontre matrizes elementares  $E_1, \dots, E_k$  tais que  $A = E_1 \dots E_k$ , para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Exercícios usando o MATLAB<sup>®</sup>

**Comandos do MATLAB<sup>®</sup>:**

>>  $M=[A,B]$  atribui à matriz  $M$  a matriz obtida colocando lado a lado as matrizes  $A$  e  $B$ .

>>  $A=[A_1, \dots, A_n]$  cria uma matriz  $A$  formada pelas matrizes, definidas anteriormente,  $A_1, \dots, A_n$  colocadas uma ao lado da outra;

>>  $M=A(:, k:1)$  atribui à matriz  $M$  a submatriz da matriz  $A$  obtida da coluna 1 à coluna  $k$  da matriz  $A$ .

**Comandos do pacote GAAL:**

>> B=opel(alpha,i,A) ou B=oe(alpha,i,A) faz a operação elementar  $\alpha \times \text{linha } i \Rightarrow \text{linha } i$  da matriz A e armazena a matriz resultante em B.

>> B=opel(alpha,i,j,A) ou B=oe(alpha,i,j,A) faz a operação elementar  $\alpha \times \text{linha } i + \text{linha } j \Rightarrow \text{linha } j$  da matriz A e armazena a matriz resultante na variável B.

>> B=opel(A,i,j) ou B=oe(A,i,j) faz a troca da linha  $i$  com a linha  $j$  da matriz A e armazena a matriz resultante na variável B.

>> B=escalona(A) calcula passo a passo a forma escalonada reduzida da matriz A e armazena a matriz resultante na variável B.

**2.1.8.** O pacote GAAL contém alguns arquivos com mensagens criptografadas e uma chave para decifrá-las. Use os comandos a seguir para ler dos arquivos e atribuir às variáveis correspondentes, uma mensagem criptografada e a uma chave para decifrá-la.

```
>> menc=lerarq('c:/matlab/toolbox/gaal/menc1.txt')
```

```
>> key=lerarq('c:/matlab/toolbox/gaal/key.txt')
```

Com estes comandos foram lidos os arquivos menc1.txt e key.txt e atribuídos os resultados às variáveis menc e key respectivamente. Para converter a mensagem criptografada e a chave para matrizes numéricas use os comandos do pacote gaal:

```
>> y=char2num(menc), M=char2num(key)
```

Sabendo-se que a mensagem criptografada (convertida para números),  $y$ , foi originalmente obtida multiplicando-se a matriz  $M$  pela mensagem original (convertida para números),  $x$ , determine  $x$ . Descubra a mensagem usando o comando do pacote gaal, num2char( $x$ ), que converte a matriz para texto. Decifre as mensagens que estão nos arquivos menc2.txt e menc3.txt. Como deve ser a matriz  $M$  para que ela possa ser uma matriz chave na criptografia?

**2.1.9.** Resolva os Exercícios Numéricos a partir do Exercício 2.1.2 usando o MATLAB®.

## Exercícios Teóricos

- 2.1.10.** (a) Mostre que a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é invertível se, e somente se,  $ad - bc \neq 0$  e neste caso a inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: encontre a forma escalonada reduzida da matriz  $[A \mid I_2]$ , para  $a \neq 0$  e para  $a = 0$ .)

- (b) Mostre que se  $ad - bc \neq 0$ , então o sistema linear

$$\begin{cases} ax + by = g \\ cx + dy = h \end{cases}$$

tem como solução

$$x = \frac{gd - bh}{ad - bc}, \quad y = \frac{ah - gc}{ad - bc}$$

**Sugestão para os próximos 4 exercícios:** Para verificar que uma matriz  $B$  é a inversa de uma matriz  $A$ , basta fazer um dos produtos  $AB$  ou  $BA$  e verificar que é igual a  $I_n$ .

- 2.1.11.** Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  e  $A^k = \bar{0}$ , para  $k$  um inteiro positivo, mostre que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}.$$

- 2.1.12.** Seja  $A$  uma **matriz diagonal**, isto é, os elementos que estão fora da diagonal são iguais a zero ( $a_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$ ). Se  $a_{ii} \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ , mostre que  $A$  é invertível e a sua inversa é também uma matriz diagonal com elementos na diagonal dados por  $1/a_{11}, 1/a_{22}, \dots, 1/a_{nn}$ .

- 2.1.13.** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas. Mostre que se  $A + B$  e  $A$  forem invertíveis, então

$$(A + B)^{-1} = A^{-1}(I_n + BA^{-1})^{-1}.$$

**2.1.14.** Seja  $J_n$  a matriz  $n \times n$ , cujas entradas são iguais a 1. Mostre que se  $n > 1$ , então

$$(I_n - J_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} J_n.$$

(Sugestão: observe que  $J_n^2 = nJ_n$ .)

**2.1.15.** Mostre que se  $B$  é uma matriz invertível, então  $AB^{-1} = B^{-1}A$  se, e somente se,  $AB = BA$ . (Sugestão: multiplique a equação  $AB = BA$  por  $B^{-1}$ .)

**2.1.16.** Mostre que se  $A$  é uma matriz invertível, então  $A + B$  e  $I_n + BA^{-1}$  são ambas invertíveis ou ambas não invertíveis. (Sugestão: multiplique  $A + B$  por  $A^{-1}$ .)

**2.1.17.** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ . Mostre que se  $B$  não é invertível, então  $AB$  também não o é.

**2.1.18.** Mostre que se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$ , invertíveis, então  $A$  e  $B$  são equivalentes por linhas.

**2.1.19.** Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $B$  uma matriz  $n \times m$ , com  $n < m$ . Mostre que  $AB$  não é invertível. (Sugestão: Mostre que o sistema  $(AB)X = \vec{0}$  tem solução não trivial.)

## 2.2 Determinantes

Vamos inicialmente definir o determinante de matrizes  $1 \times 1$ . Para cada matriz  $A = [a]$  definimos o **determinante** de  $A$ , indicado por  $\det(A)$ , por  $\det(A) = a$ . Vamos, agora, definir o determinante de matrizes  $2 \times 2$  e a partir daí definir para matrizes de ordem maior. A cada matriz  $A$ ,  $2 \times 2$ , associamos um número real, denominado **determinante** de  $A$ , por:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Para definir o determinante de matrizes quadradas maiores, precisamos definir o que são os menores de uma matriz. Dada uma matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , o **menor** do elemento  $a_{ij}$ , denotado por  $\tilde{A}_{ij}$ , é a submatriz  $(n-1) \times (n-1)$  de  $A$  obtida eliminando-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $A$ , que tem o seguinte aspecto:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dots & & a_{ij} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$$

**Exemplo 2.8.** Para uma matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ ,

$$\tilde{A}_{23} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Agora, vamos definir os cofatores de uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ . O **cofator** do elemento  $a_{ij}$ , denotado por  $\tilde{a}_{ij}$ , é definido por

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator  $\tilde{a}_{ij}$ , do elemento  $a_{ij}$  é igual a mais ou menos o determinante do menor  $\tilde{A}_{ij}$ , sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

**Exemplo 2.9.** Para uma matriz  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ ,

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \det(\tilde{A}_{23}) = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}$$

Vamos, agora, definir o determinante de uma matriz  $3 \times 3$ . Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

então, o determinante de  $A$  é igual à soma dos produtos dos elementos da 1ª linha pelos seus cofatores.

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \\ &= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).\end{aligned}$$

Da mesma forma que a partir do determinante de matrizes  $2 \times 2$ , definimos o determinante de matrizes  $3 \times 3$ , podemos definir o determinante de matrizes quadradas de ordem maior. Supondo que sabemos como calcular o determinante de matrizes  $(n-1) \times (n-1)$  vamos definir o determinante de matrizes  $n \times n$ .

Vamos definir, agora, os cofatores de uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ . O **cofator** do elemento  $a_{ij}$ , denotado por  $\tilde{a}_{ij}$ , é definido por

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij}),$$

ou seja, o cofator  $\tilde{a}_{ij}$ , do elemento  $a_{ij}$  é igual a mais ou menos o determinante do menor  $\tilde{A}_{ij}$ , sendo o mais e o menos determinados pela seguinte disposição:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

**Definição 2.2.** Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ . O **determinante** de  $A$ , denotado por  $\det(A)$ , é definido por

$$\det(A) = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + \dots + a_{1n}\tilde{a}_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}\tilde{a}_{1j}, \quad (2.7)$$

em que  $\tilde{a}_{1j} = (-1)^{1+j} \det(\tilde{A}_{1j})$  é o cofator do elemento  $a_{1j}$ . A expressão (2.8) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de  $A$**  em termos da 1ª linha.

---

**Exemplo 2.10.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo-se o determinante de  $A$  em cofatores, obtemos

$$\det(A) = 0\tilde{a}_{11} + 0\tilde{a}_{12} + 0\tilde{a}_{13} + (-3)(-1)^{1+4} \det(B), \quad \text{em que } B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$



Mas o  $\det(B)$  também pode ser calculado usando cofatores,

$$\begin{aligned}
 \det(B) &= 1B_{11} + 2B_{12} + 3B_{13} \\
 &= 1(-1)^{1+1} \det(\tilde{B}_{11}) + 2(-1)^{1+2} \det(\tilde{B}_{12}) + 3(-1)^{1+3} \det(\tilde{B}_{13}) \\
 &= \det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= -8 - 2(-2) + 3(-7) \\
 &= -25
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\det(A) = 3 \det(B) = -75.$$

**Exemplo 2.11.** Usando a definição de determinante, vamos mostrar que o determinante de uma matriz **triangular inferior** (isto é, os elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero) é o produto dos elementos da diagonal principal. Vamos mostrar inicialmente para matrizes  $3 \times 3$ . Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se o determinante de  $A$  em cofatores, obtemos

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Vamos supor termos provado que para qualquer matriz  $(n-1) \times (n-1)$  triangular inferior, o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal. Então

vamos provar que isto também vale para matrizes  $n \times n$ . Seja

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad 0 \quad \dots \quad 0} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad 0 \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad 0 \\ a_{n1} \quad \dots \quad a_{nn} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se o determinante de  $A$  em cofatores, obtemos

$$\det(A) = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn},$$

pois o determinante acima é de uma matriz  $(n-1) \times (n-1)$  triangular inferior. Em particular, para a matriz identidade,  $I_n$ ,

$$\det(I_n) = 1.$$

### 2.2.1 Propriedades do Determinante

Vamos provar uma propriedade do determinante que é usada para provar várias outras propriedades. Para isso vamos escrever a matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  em termos das

suas linhas

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ A_k \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

em que  $A_i$  é a linha  $i$  da matriz  $A$ , ou seja,  $A_i = [a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}]$ . Se a linha  $A_k$  é escrita na forma  $A_k = \alpha X + \beta Y$ , em que  $X = [x_1 \dots x_n]$ ,  $Y = [y_1 \dots y_n]$  e  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares, dizemos que a linha  $A_k$  é **combinação linear** de  $X$  e  $Y$ . Se a linha  $A_k$  é combinação linear de  $X$  e  $Y$ , então o determinante pode ser decomposto como no resultado seguinte.

**Teorema 2.10.** *Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  escrita em termos das suas linhas, denotadas por  $A_i$ , ou seja,  $A_i = [a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}]$ . Se para algum  $k$ , a linha  $A_k = \alpha X + \beta Y$ , em que  $X = [x_1 \dots x_n]$ ,  $Y = [y_1 \dots y_n]$  e  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares, então:*

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Aqui,  $A_k = \alpha X + \beta Y = [\alpha x_1 + \beta y_1 \dots \alpha x_n + \beta y_n]$ .

**Demonstração.** Vamos provar aqui somente para  $k = 1$ . Para  $k > 1$  é demonstrado no [Apêndice II na página 125](#). Se  $A_1 = \alpha X + \beta Y$ , em que  $X = [x_1 \dots x_n]$ ,  $Y = [y_1 \dots y_n]$  e  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares, então:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \alpha X + \beta Y \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} (\alpha x_j + \beta y_j) \det(\tilde{A}_{1j}) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n x_j \det(\tilde{A}_{1j}) + \beta \sum_{j=1}^n y_j \det(\tilde{A}_{1j}) \\ &= \alpha \det \begin{bmatrix} X \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} Y \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Exemplo 2.12.** O cálculo do determinante da matriz a seguir pode ser feito da seguinte forma:

$$\det \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ 2 \cos t - 3 \sin t & 2 \sin t + 3 \cos t \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} = 3$$

Pela definição de determinante, o determinante deve ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo a 1ª linha. O próximo resultado, que não vamos provar neste momento ([Apêndice II na página 125](#)), afirma que o determinante pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo *qualquer linha* ou *qualquer coluna*.

**Teorema 2.11.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . O determinante de  $A$  pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo **qualquer linha** ou **qualquer coluna**.*

$$\det(A) = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \dots + a_{in}\tilde{a}_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{a}_{ij}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (2.8)$$

$$= a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \dots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}\tilde{a}_{ij}, \quad \text{para } j = 1, \dots, n, \quad (2.9)$$

em que  $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$  é o cofator do elemento  $a_{ij}$ . A expressão (2.8) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de  $A$  em termos da  $i$ -ésima linha** e (2.9) é chamada **desenvolvimento em cofatores do determinante de  $A$  em termos da  $j$ -ésima coluna**.

---

Temos a seguinte consequência deste resultado.

---

**Corolário 2.12.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Se  $A$  possui duas linhas iguais, então  $\det(A) = 0$ .*

---

**Demonstração.** O resultado é claramente verdadeiro para matrizes  $2 \times 2$ . Supondo que o resultado seja verdadeiro para matrizes  $(n-1) \times (n-1)$ , vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes  $n \times n$ . Suponhamos que as linhas  $k$  e  $l$  sejam iguais, para  $k \neq l$ . Desenvolvendo o determinante de  $A$  em termos de uma linha  $i$ , com  $i \neq k, l$ , obtemos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

Mas, cada  $\tilde{A}_{ij}$  é uma matriz  $(n-1) \times (n-1)$  com duas linhas iguais. Como estamos supondo que o resultado seja verdadeiro para estas matrizes, então  $\det(\tilde{A}_{ij}) = 0$ . Isto implica que  $\det(A) = 0$ . ■

No próximo resultado mostramos como varia o determinante de uma matriz quando aplicamos operações elementares sobre suas linhas.

---

**Teorema 2.13.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ .*

(a) *Se  $B$  é obtida de  $A$  multiplicando-se uma linha por um escalar  $\alpha$ , então*

$$\det(B) = \alpha \det(A);$$

(b) *Se  $B$  resulta de  $A$  pela troca da posição de duas linhas  $k \neq l$ , então*

$$\det(B) = -\det(A);$$

(c) *Se  $B$  é obtida de  $A$  substituindo-se a linha  $l$  por ela somada a um múltiplo escalar de uma linha  $k$ ,  $k \neq l$ , então*

$$\det(B) = \det(A).$$


---

**Demonstração.** (a) Segue diretamente do [Teorema 2.10 na página 105](#).

(b) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Agora, pelo Teorema 2.10 na página 105 e o Corolário 2.12, temos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_k + A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \\
 &= 0 + \det(A) + \det(B) + 0.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\det(A) = -\det(B)$ .

(c) Novamente, pelo Teorema 2.10 na página 105, temos que

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l + \alpha A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_l \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$



**Exemplo 2.13.** Vamos calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

usando operações elementares para transformá-la numa matriz triangular superior e aplicando o **Teorema 2.13**.

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\det \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} && \boxed{1^{\text{a}} \text{ linha} \longleftrightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \\ &= -3 \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} && \boxed{1/3 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1^{\text{a}} \text{ linha}} \\ &= -3 \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} && \boxed{-2 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}} \\ &= -3 \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix} && \boxed{-10 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} + 3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3^{\text{a}} \text{ linha}} \\ &= (-3)(-55) = 165 \end{aligned}$$

Quando multiplicamos uma linha de uma matriz por um escalar  $\alpha$  o determinante da nova matriz é igual a  $\alpha$  multiplicado pelo determinante da matriz antiga. Mas o que estamos calculando aqui é o determinante da matriz anterior, por isso ele é igual a  $1/\alpha$  multiplicado pelo determinante da matriz nova.

Para se calcular o determinante de uma matriz  $n \times n$  pela expansão em cofatores, precisamos fazer  $n$  produtos e calcular  $n$  determinantes de matrizes  $(n-1) \times (n-1)$ ,

que por sua vez vai precisar de  $n - 1$  produtos e assim por diante. Portanto, ao todo são necessários da ordem de  $n!$  produtos. Para se calcular o determinante de uma matriz  $20 \times 20$ , é necessário se realizar  $20! \approx 10^{18}$  produtos. Os computadores pessoais realizam da ordem de  $10^8$  produtos por segundo. Portanto, um computador pessoal precisaria de cerca de  $10^{10}$  segundos ou  $10^3$  anos para calcular o determinante de uma matriz  $20 \times 20$  usando a expansão em cofatores. Entretanto usando o método apresentado no exemplo anterior para o cálculo do determinante, é necessário apenas da ordem de  $n^3$  produtos. Ou seja, para calcular o determinante de uma matriz  $20 \times 20$  usando o método apresentado no exemplo anterior um computador pessoal gasta muito menos de um segundo.

A seguir estabelecemos duas propriedades do determinante que serão demonstradas somente na [Subseção 2.2.2 na página 118](#).

---

**Teorema 2.14.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ .*

*(a) O determinante do produto de  $A$  por  $B$  é igual ao produto dos seus determinantes,*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

*(b) Os determinantes de  $A$  e de sua transposta  $A^t$  são iguais,*

$$\det(A) = \det(A^t);$$

---

**Observação.** Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta ([Teorema 2.14 \(b\)](#)), segue-se que todas as propriedades que se referem a linhas são válidas com relação às colunas.

---

**Exemplo 2.14.** Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ . Vamos mostrar que se  $A$  é invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Como  $AA^{-1} = I_n$ , aplicando-se o determinante a ambos os membros desta igualdade e usando o [Teorema 2.14](#), obtemos

$$\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_n).$$

Mas,  $\det(I_n) = 1$  ([Exemplo 2.11 na página 103](#), a matriz identidade também é triangular inferior!). Logo,  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .

**Exemplo 2.15.** Se uma matriz quadrada é tal que  $A^2 = A^{-1}$ , então vamos mostrar que  $\det(A) = 1$ . Aplicando-se o determinante a ambos os membros da igualdade acima, e usando novamente o [Teorema 2.14](#) e o resultado do exemplo anterior, obtemos

$$(\det(A))^2 = \frac{1}{\det(A)}.$$

Logo,  $(\det(A))^3 = 1$ . Portanto,  $\det(A) = 1$ .

O resultado seguinte caracteriza em termos do determinante as matrizes invertíveis e os sistemas lineares homogêneos que possuem solução não trivial.

---

**Teorema 2.15.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .*

- (a) A matriz  $A$  é invertível se, e somente se,  $\det(A) \neq 0$ .*
  - (b) O sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$  tem solução não trivial se, e somente se,  $\det(A) = 0$ .*
- 

**Demonstração.** (a) Seja  $R$  a forma escalonada reduzida da matriz  $A$ .

A demonstração deste item segue-se de três observações:

- Pelo Teorema 2.13 na página 109,  $\det(A) \neq 0$  se, e somente se,  $\det(R) \neq 0$ .
  - Pela Proposição 1.5 da página 47, ou  $R = I_n$  ou a matriz  $R$  tem uma linha nula. Assim,  $\det(A) \neq 0$  se, e somente se,  $R = I_n$ .
  - Pelo Teorema 2.7 na página 79,  $R = I_n$  se, e somente se,  $A$  é invertível.
- (b) Pelo Teorema 2.8 na página 84, o sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$  tem solução não trivial se, e somente se, a matriz  $A$  não é invertível. E pelo item anterior, a matriz  $A$  é não invertível se, e somente se,  $\det(A) = 0$ .



**Exemplo 2.16.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinar os valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que existe  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \vec{0}$  que satisfaz

$$AX = \lambda X.$$

(b) Para cada um dos valores de  $\lambda$  encontrados no item anterior determinar todos

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ tais que } AX = \lambda X.$$

**Solução:**

(a) Como a matriz identidade  $I_3$  é o elemento neutro do produto, então

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \lambda I_3 X.$$

Subtraindo-se  $\lambda I_3 X$  obtemos

$$AX - \lambda I_3 X = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)X = \vec{0}.$$

Agora, este sistema homogêneo tem solução não trivial ( $X \neq \vec{0}$ ) se, e somente se,

$$\det(A - \lambda I_3) = 0.$$

Mas

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$$

se, e somente se,  $\lambda = 2$  ou  $\lambda = 3$ . Assim, somente para  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 3$  existem

vetores  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \bar{0}$  tais que  $AX = \lambda X$ .

(b) Para  $\lambda = 2$ :

$$(A - 2I_3)X = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

que tem solução o conjunto dos  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ , para todos os valores

de  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Para  $\lambda = 3$ :

$$(A - 3I_3)X = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

que tem solução o conjunto dos  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ , para todos os valores

de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.17.** A matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é invertível se, e somente se,  $\det(A) = ad - bc \neq 0$ . Neste caso a inversa de  $A$  é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

como pode ser verificado multiplicando-se a candidata a inversa pela matriz  $A$ .

Observe que este exemplo fornece uma regra para se encontrar a inversa de uma matriz  $2 \times 2$ : troca-se a posição dos elementos da diagonal principal, troca-se o sinal dos outros elementos e divide-se todos os elementos pelo determinante de  $A$ .

**Exemplo 2.18.** Considere o sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas

$$\begin{cases} ax + by = g \\ cx + dy = h \end{cases}$$

A matriz deste sistema é

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Se  $\det(A) \neq 0$ , então a solução do sistema é

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} dg - bh \\ -cg + ah \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} g & b \\ h & d \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} a & g \\ c & h \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} g & b \\ h & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & g \\ c & h \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

esta é a chamada **Regra de Cramer** para sistemas de 2 equações e 2 incógnitas.

Pode-se mostrar (ver por exemplo [32] ou [33]), que para sistemas de  $n$  equações e  $n$  incógnitas é válida a Regra de Cramer dada a seguir.

Se o sistema linear  $AX = B$  é tal que a matriz  $A$  é  $n \times n$  e invertível, então a solução do sistema é dada por

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

em que  $A_j$  é a matriz que se obtém de  $A$  substituindo-se a sua  $j$ -ésima coluna por  $B$ , para  $j = 1, \dots, n$ .

Existem sistemas  $AX = B$  de  $n$  equações e  $n$  incógnitas, com  $n > 2$ , em que  $\det(A) = \det(A_1) = \dots = \det(A_n) = 0$  e o sistema não tem solução. Por exemplo o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 3 \\ 3x + 6y + 9z = 2 \end{cases}$$

é tal que

$$\det(A) = \det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3) = 0,$$

mas ele não tem solução (verifique!).

### 2.2.2 Matrizes Elementares e o Determinante (opcional)

Relembramos que uma matriz elementar é uma matriz que se obtém aplicando-se uma operação elementar na matriz identidade. Assim, aplicando-se o [Teorema 2.13 na página 109](#) obtemos o resultado seguinte.

---

**Proposição 2.16.** (a) Se  $E_{i,j}$  é a matriz elementar obtida trocando-se as linhas  $i$  e  $j$  da matriz identidade, então  $\det(E_{i,j}) = -1$ .



- (b) Se  $E_i(\alpha)$  é a matriz elementar obtida da matriz identidade, multiplicando-se a linha  $i$  por  $\alpha$ , então  $\det(E_i(\alpha)) = \alpha$ .
- (c) Se  $E_{i,j}(\alpha)$  é a matriz elementar obtida da matriz identidade, somando-se à linha  $j$ ,  $\alpha$  vezes a linha  $i$ , então  $\det(E_{i,j}(\alpha)) = 1$ .
- 

Lembramos também que uma matriz é invertível se, e somente se, ela é o produto de matrizes elementares ([Teorema 2.6 na página 77](#)). Além disso, o resultado da aplicação de uma operação elementar em uma matriz é o mesmo que multiplicar a matriz à esquerda pela matriz elementar correspondente.

Usando matrizes elementares podemos provar o [Teorema 2.14 na página 112](#).

### *Demonstração do Teorema 2.14.*

(a) Queremos provar que  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ . Vamos dividir a demonstração deste item em três casos:

**Caso 1:** Se  $A = E$  é uma matriz elementar. Este caso segue-se diretamente da proposição anterior e do [Teorema 2.13 na página 109](#).

**Caso 2:** Se  $A$  é invertível, então pelo [Teorema 2.6 na página 77](#) ela é o produto de matrizes elementares,  $A = E_1 \dots E_k$ . Aplicando-se o caso anterior sucessivas vezes, obtemos

$$\det(AB) = \det(E_1) \dots \det(E_k) \det(B) = \det(E_1 \dots E_k) \det(B) = \det(A) \det(B).$$

**Caso 3:** Se  $A$  é singular, pela **Proposição 2.9 na página 88**,  $AB$  também é singular. Logo,

$$\det(AB) = 0 = 0 \det(B) = \det(A) \det(B).$$

**(b)** Queremos provar que  $\det(A) = \det(A^t)$ . Vamos dividir a demonstração deste item em dois casos.

**Caso 1:** Se  $A$  é uma matriz invertível, pelo **Teorema 2.6 na página 77** ela é o produto de matrizes elementares,  $A = E_1 \dots E_k$ . É fácil ver que se  $E$  é uma matriz elementar, então  $\det(E) = \det(E^t)$  (verifique!). Assim,

$$\det(A^t) = \det(E_k^t) \dots \det(E_1^t) = \det(E_k) \dots \det(E_1) = \det(E_1 \dots E_k) = \det(A).$$

**Caso 2:** Se  $A$  não é invertível, então  $A^t$  também não o é, pois caso contrário, pelo **Teorema 2.2 na página 72**, também  $A = (A^t)^t$  seria invertível. Assim neste caso,  $\det(A^t) = 0 = \det(A)$ . ■

## Exercícios Numéricos (respostas na página 470)

**2.2.1.** Se  $\det(A) = -3$ , encontre

- (a)  $\det(A^2)$ ;                      (b)  $\det(A^3)$ ;                      (c)  $\det(A^{-1})$ ;                      (d)  $\det(A^t)$ ;

**2.2.2.** Se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$  tais que  $\det(A) = -2$  e  $\det(B) = 3$ , calcule  $\det(A^t B^{-1})$ .

**2.2.3.** Seja  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$  tal que  $\det(A) = 3$ . Calcule o determinante das matrizes a seguir:

(a) 
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + a_{32} \end{bmatrix}$$

(b) 
$$\begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{11} - a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{22} & a_{21} - a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a_{32} & a_{31} - a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

**2.2.4.** Calcule o determinante das matrizes a seguir:

$$(a) \begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ \alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t & \alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t \end{bmatrix}$$

**2.2.5.** Calcule o determinante de cada uma das matrizes seguintes usando operações elementares para transformá-las em matrizes triangulares superiores.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**2.2.6.** Determine todos os valores de  $\lambda$  para os quais  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ , em que

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**2.2.7.** Determine os valores de  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que existe  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \vec{0}$  que satisfaz  $AX = \lambda X$ .

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(d) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**2.2.8.** Para as matrizes do exercício anterior, e os valores de  $\lambda$  encontrados, encontre a solução geral do sistema  $AX = \lambda X$ , ou equivalentemente, do sistema homogêneo  $(A - \lambda I_n)X = \vec{0}$ .

## Exercícios usando o MATLAB<sup>®</sup>

**Comandos do MATLAB<sup>®</sup>:**

`>> det(A)` calcula o determinante da matriz  $A$ .

**Comando do pacote GAAL:**

`>> detopelp(A)` calcula o determinante de  $A$  aplicando operações elementares até que a matriz esteja na forma triangular superior.

**2.2.9.** Vamos fazer um experimento no MATLAB<sup>®</sup> para tentar ter uma ideia do quão comum é encontrar matrizes invertíveis. No prompt do MATLAB<sup>®</sup> digite a seguinte linha:

```
>> c=0; for n=1:1000,A=randi(2);if(det(A)~=0),c=c+1;end,end,c
```

(não esqueça das vírgulas e pontos e vírgulas!). O que esta linha está mandando o MATLAB<sup>®</sup> fazer é o seguinte:

- Criar um contador  $c$  e atribuir a ele o valor zero.
- Atribuir à variável  $A$ , 1000 matrizes  $2 \times 2$  com entradas inteiras aleatórias entre  $-5$  e  $5$ .
- Se  $\det(A) \neq 0$ , então o contador  $c$  é acrescido de 1.
- No final o valor existente na variável  $c$  é escrito.

Qual a conclusão que você tira do valor obtido na variável  $c$ ?

**2.2.10.** Resolva, com o MATLAB<sup>®</sup>, os Exercícios Numéricos a partir do Exercício 4.

## Exercícios Teóricos

**2.2.11.** Mostre que se  $\det(AB) = 0$ , então ou  $A$  é singular ou  $B$  é singular.

**2.2.12.** O determinante de  $AB$  é igual ao determinante de  $BA$ ? Justifique.

- 2.2.13.** Mostre que se  $A$  é uma matriz não singular tal que  $A^2 = A$ , então  $\det(A) = 1$ .
- 2.2.14.** Mostre que se  $A^k = \bar{0}$ , para algum  $k$  inteiro positivo, então  $A$  é singular.
- 2.2.15.** Mostre que se  $A^t = A^{-1}$ , então  $\det(A) = \pm 1$ ;
- 2.2.16.** Mostre que se  $\alpha$  é um escalar e  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ .
- 2.2.17.** Mostre que  $A$ ,  $n \times n$ , é invertível se, e somente se,  $A^t A$  é invertível.
- 2.2.18.** Sejam  $A$  e  $P$  matrizes  $n \times n$ , sendo  $P$  invertível. Mostre que  $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$ .
- 2.2.19.** Mostre que se uma matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é **triangular superior**, (isto é, os elementos situados abaixo da diagonal são iguais a zero) então  $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ .
- 2.2.20.** (a) Mostre que se  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , então  $\det(A) = 0$  se, e somente se, uma linha é múltiplo escalar da outra. E se  $A$  for uma matriz  $n \times n$ ?
- (b) Mostre que se uma linha  $A_i$  de uma matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , é tal que  $A_i = \alpha A_k + \beta A_l$ , para  $\alpha$  e  $\beta$  escalares e  $i \neq k, l$ , então  $\det(A) = 0$ .
- (c) Mostre que se uma linha  $A_i$  de uma matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , é tal que  $A_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k A_k$ , para  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  escalares, então  $\det(A) = 0$ .
- 2.2.21.** Mostre que o **determinante de Vandermonde** é dado por

$$V_n = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

A expressão à direita significa o produto de todos os termos  $x_i - x_j$  tais que  $i > j$  e  $i, j = 1, \dots, n$ . (Sugestão: Mostre primeiro que  $V_3 = (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)$ ). Suponha que o resultado é verdadeiro

para matrizes de Vandermonde de ordem  $n - 1$ , mostre que o resultado é verdadeiro para matrizes de Vandermonde de ordem  $n$ . Faça as seguintes operações nas colunas da matriz,  $-x_1 C_{i-1} + C_i \rightarrow C_i$ , para  $i = n, \dots, 2$ . Obtenha  $V_n = (x_n - x_1) \dots (x_2 - x_1) V_{n-1}$ .)

**2.2.22.** Sejam  $A, B$  e  $D$  matrizes  $p \times p$ ,  $p \times (n - p)$  e  $(n - p) \times (n - p)$ , respectivamente. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ \bar{0} & D \end{bmatrix} = \det(A) \det(D).$$

(Sugestão: O resultado é claramente verdadeiro para  $n = 2$ . Suponha que o resultado seja verdadeiro para matrizes de ordem  $n - 1$ . Desenvolva o determinante da matriz em termos da 1ª coluna, escreva o resultado em termos de determinantes de ordem  $n - 1$  e mostre que o resultado é verdadeiro para matrizes de ordem  $n$ .)

**2.2.23.** Dado um polinômio

$$p(t) = (-1)^n (t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0)$$

Verifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n},$$

é tal que  $\det(A - tI_n) = p(t)$ . Esta matriz é chamada **matriz companheira** do polinômio  $p(t)$ . (Sugestão: verifique para  $n = 2$  e depois supondo que seja verdade para matrizes  $(n - 1) \times (n - 1)$  mostre que é verdade para matrizes  $n \times n$  expandindo em cofatores em relação a primeira coluna)

## Apêndice II: Demonstração do Teorema 2.11 na página 107

**Demonstração do Teorema 2.10 na página 105 para  $k > 1$ .** Deixamos como exercício para o leitor a verificação de que para matrizes  $2 \times 2$  o resultado é verdadeiro. Su-

pondo que o resultado seja verdadeiro para matrizes  $(n-1) \times (n-1)$ , vamos provar para matrizes  $n \times n$ . Sejam

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Suponha que  $k = 2, \dots, n$ . As matrizes  $\tilde{A}_{1j}$ ,  $\tilde{B}_{1j}$  e  $\tilde{C}_{1j}$  só diferem na  $(k-1)$ -ésima linha (lembre-se que a primeira linha é retirada!). Além disso, a  $(k-1)$ -ésima linha de  $\tilde{A}_{1j}$  é igual a  $\alpha$  vezes a linha correspondente de  $\tilde{B}_{1j}$  mais  $\beta$  vezes a linha correspondente de  $\tilde{C}_{1j}$  (esta é a relação que vale para a  $k$ -ésima linha de  $A$ ). Como estamos supondo o resultado verdadeiro para matrizes  $(n-1) \times (n-1)$ , então  $\det(\tilde{A}_{1j}) = \alpha \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \det(\tilde{C}_{1j})$ . Assim,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\tilde{A}_{1j}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} [\alpha \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \det(\tilde{C}_{1j})] \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} \det(\tilde{B}_{1j}) + \beta \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} c_{1j} \det(\tilde{C}_{1j}) \\ &= \alpha \det(B) + \beta \det(C), \end{aligned}$$

pois  $a_{1j} = b_{1j} = c_{1j}$ , para  $j = 1, \dots, n$ . ■



**Lema 2.17.** Sejam  $E_1 = [1\ 0\ \dots\ 0]$ ,  $E_2 = [0\ 1\ 0\ \dots\ 0]$ ,  $\dots$ ,  $E_n = [0\ \dots\ 0\ 1]$ . Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , cuja  $i$ -ésima linha é igual a  $E_k$ , para algum  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), então

$$\det(A) = (-1)^{i+k} \det(\tilde{A}_{ik}).$$

**Demonstração.** É fácil ver que para matrizes  $2 \times 2$  o lema é verdadeiro. Suponha que ele seja verdadeiro para matrizes  $(n-1) \times (n-1)$  e vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes  $n \times n$ . Podemos supor que  $1 < i \leq n$ .

Seja  $B_j$  a matriz  $(n-2) \times (n-2)$  obtida de  $A$  eliminando-se as linhas 1 e  $i$  e as colunas  $j$  e  $k$ , para  $1 \leq j \leq n$ .

Para  $j < k$ , a matriz  $\tilde{A}_{1j}$  é uma matriz  $(n-1) \times (n-1)$  cuja  $(i-1)$ -ésima linha é igual a  $E_{k-1}$ . Para  $j > k$ , a matriz  $\tilde{A}_{1j}$  é uma matriz  $(n-1) \times (n-1)$  cuja  $(i-1)$ -ésima linha é igual a  $E_k$ . Como estamos supondo o lema verdadeiro para estas matrizes e como pelo [Teorema 2.10 na página 105](#) se uma matriz tem uma linha nula o seu determinante é igual a zero, então  $\det(\tilde{A}_{1k}) = 0$ , segue-se que

$$\det(\tilde{A}_{1j}) = \begin{cases} (-1)^{(i-1)+(k-1)} \det(B_j) & \text{se } j < k, \\ 0 & \text{se } j = k, \\ (-1)^{(i-1)+k} \det(B_j) & \text{se } j > k. \end{cases} \quad (2.10)$$

Usando (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(\tilde{A}_{1j}) \\ &= \sum_{j < k}^n (-1)^{1+j} a_{1j} (-1)^{(i-1)+(k-1)} \det(B_j) + \sum_{j > k}^n (-1)^{1+j} a_{1j} (-1)^{(i-1)+k} \det(B_j) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$(-1)^{i+k} \det(\tilde{A}_{ik}) = (-1)^{i+k} \left[ \sum_{j < k}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det(B_j) + \sum_{j > k}^n (-1)^{1+(j-1)} a_{1j} \det(B_j) \right]$$

É simples a verificação de que as duas expressões acima são iguais. ■

***Demonstração do Teorema 2.11 na página 107.***

Pelo Teorema 2.14 na página 112 basta provarmos o resultado para o desenvolvimento em termos das linhas de  $A$ . Sejam  $E_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ ,  $E_2 = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$ ,  $\dots$ ,  $E_n = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$ . Observe que a linha  $i$  de  $A$  pode ser escrita como  $A_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} E_j$ . Seja  $B_j$  a matriz obtida de  $A$  substituindo-se a linha  $i$  por  $E_j$ . Pelo Teorema 2.10 na página 105 e o Lema 2.17 segue-se que

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \det(B_j) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij}).$$

■

## Teste do Capítulo

---

1. Calcule o determinante da matriz seguinte usando operações elementares para transformá-la em uma matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

---

2. Se possível, encontre a inversa da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

---

3. Encontre todos os valores de  $\lambda$  para os quais a matriz  $A - \lambda I_4$  tem inversa, em que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

---

4. Responda **Verdadeiro** ou **Falso**, justificando:

- (a) Se  $A^2 = -2A^4$ , então  $(I + A^2)^{-1} = I - 2A^2$ ;
- (b) Se  $A^t = -A^2$  e  $A$  é não singular, então determinante de  $A$  é -1;
- (c) Se  $B = AA^tA^{-1}$ , então  $\det(A) = \det(B)$ .
- (d)  $\det(A + B) = \det A + \det B$

---

## Capítulo 3

# Vetores no Plano e no Espaço

---

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além da magnitude, da direção e do sentido. Estas grandezas são chamadas **grandezas vetoriais** ou simplesmente **vetores**.

Geometricamente, vetores são representados por **segmentos (de retas) orientados** (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano ou no espaço. A ponta da seta do segmento orientado é chamada **ponto final ou extremidade** e o outro ponto extremo é chamado de **ponto inicial ou origem** do segmento orientado.

Segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento representam o mesmo vetor. A direção, o sentido e o comprimento do vetor são definidos como sendo a direção, o sentido e o comprimento de qualquer um dos

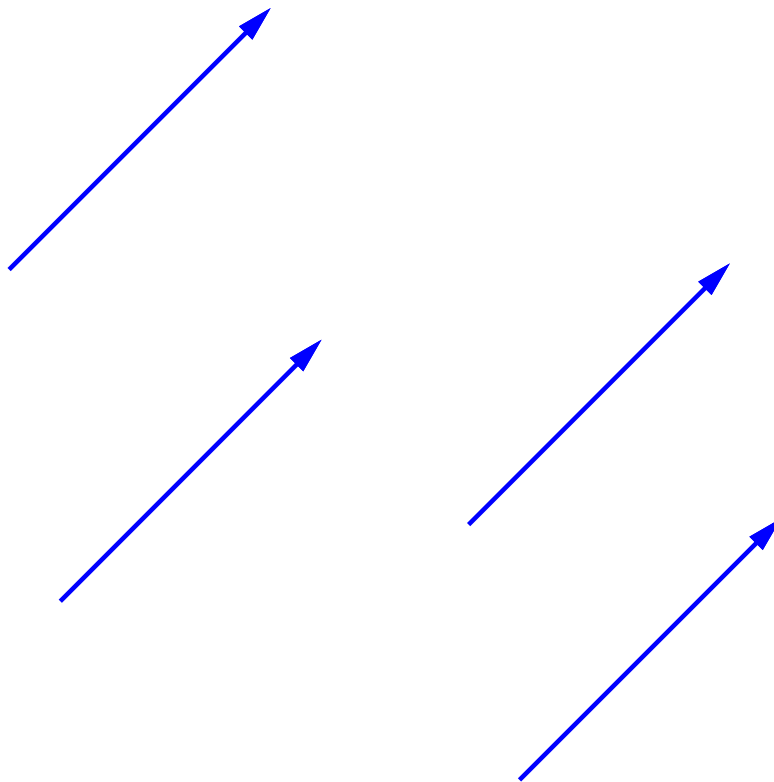


Figura 3.1: Segmentos orientados representando o mesmo vetor

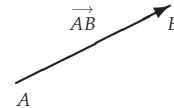
segmentos orientados que o representam.

Este fato é análogo ao que ocorre com os números racionais e as frações. Duas frações representam o mesmo número racional se o numerador e o denominador de cada uma delas estiverem na mesma proporção. Por exemplo, as frações  $1/2$ ,  $2/4$  e  $3/6$  representam o mesmo número racional. A definição de igualdade de vetores também é análoga a igualdade de números racionais. Dois números racionais  $a/b$  e  $c/d$  são iguais, quando  $ad = bc$ . Dizemos que dois vetores são iguais se eles possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

Na [Figura 3.1](#) temos 4 segmentos orientados, com origens em pontos diferentes, que representam o mesmo vetor, ou seja, são considerados como vetores iguais, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se o ponto inicial de um representante de um vetor  $V$  é  $A$  e o ponto final é  $B$ , então escrevemos

$$V = \overrightarrow{AB}$$



### 3.1 Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar

A soma,  $V + W$ , de dois vetores  $V$  e  $W$  é determinada da seguinte forma:

- tome um segmento orientado que representa  $V$ ;
- tome um segmento orientado que representa  $W$ , com origem na extremidade de  $V$ ;

- o vetor  $V + W$  é representado pelo segmento orientado que vai da origem de  $V$  até a extremidade de  $W$ .

Da [Figura 3.2](#), deduzimos que a soma de vetores é comutativa, ou seja,

$$V + W = W + V, \quad (3.1)$$

para quaisquer vetores  $V$  e  $W$ . Observamos também que a soma  $V + W$  está na diagonal do paralelogramo determinado por  $V$  e  $W$ , quando estão representados com a mesma origem.

Da [Figura 3.3](#), deduzimos que a soma de vetores é associativa, ou seja,

$$V + (W + U) = (V + W) + U, \quad (3.2)$$

para quaisquer vetores  $V$ ,  $W$  e  $U$ .

O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade é chamado **vetor nulo** e denotado por  $\vec{0}$ . Segue então, que

$$V + \vec{0} = \vec{0} + V = V, \quad (3.3)$$

para todo vetor  $V$ .

Para qualquer vetor  $V$ , o **simétrico** de  $V$ , denotado por  $-V$ , é o vetor que tem mesmo comprimento, mesma direção e sentido contrário ao de  $V$ . Segue então, que

$$V + (-V) = \vec{0}. \quad (3.4)$$

Definimos a **diferença**  $W$  **menos**  $V$ , por

$$W - V = W + (-V).$$

Segue desta definição, de (3.1), (3.2), (3.4) e de (3.3) que

$$W + (V - W) = (V - W) + W = V + (-W + W) = V + \vec{0} = V.$$



Assim, a diferença  $V - W$  é um vetor que somado a  $W$  dá  $V$ , portanto ele vai da extremidade de  $W$  até a extremidade de  $V$ , desde que  $V$  e  $W$  estejam representados por segmentos orientados com a mesma origem.

A **multiplicação de um vetor  $V$  por um escalar  $\alpha$** ,  $\alpha V$ , é determinada pelo vetor que possui as seguintes características:

- (a) é o vetor nulo, se  $\alpha = 0$  ou  $V = \vec{0}$ ,
- (b) caso contrário,
  - i. tem comprimento  $|\alpha|$  vezes o comprimento de  $V$ ,
  - ii. a direção é a mesma de  $V$  (neste caso, dizemos que eles são **paralelos**),
  - iii. tem o mesmo sentido de  $V$ , se  $\alpha > 0$  e  
tem o sentido contrário ao de  $V$ , se  $\alpha < 0$ .

As propriedades da multiplicação por escalar serão apresentadas mais a frente. Se  $W = \alpha V$ , dizemos que  $W$  é **um múltiplo escalar** de  $V$ . É fácil ver que dois vetores não nulos são paralelos (ou **colineares**) se, e somente se, um é um múltiplo escalar do outro.

As operações com vetores podem ser definidas utilizando um **sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas**. Em primeiro lugar, vamos considerar os vetores no plano.

Seja  $V$  um vetor no plano. Definimos as **componentes de  $V$**  como sendo as coordenadas  $(v_1, v_2)$  do ponto final do representante de  $V$  que tem ponto inicial na origem. Vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente

$$V = (v_1, v_2).$$

Assim, as coordenadas de um ponto  $P$  são iguais as componentes do vetor  $\overrightarrow{OP}$ , que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto  $P$ . Em particular, o vetor nulo,

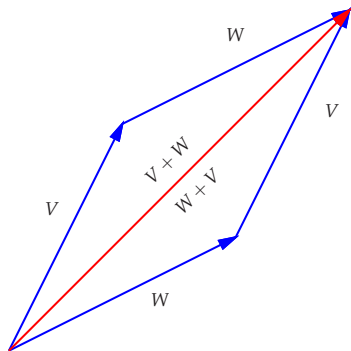


Figura 3.2:  $V + W = W + V$

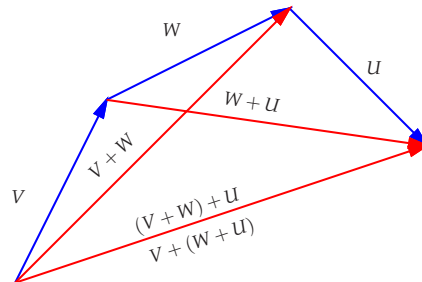


Figura 3.3:  $V + (W + U) = (V + W) + U$

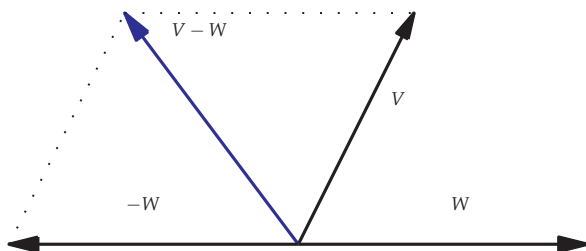
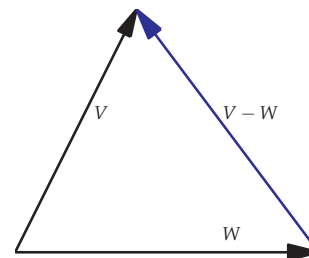


Figura 3.4: A diferença  $V - W$



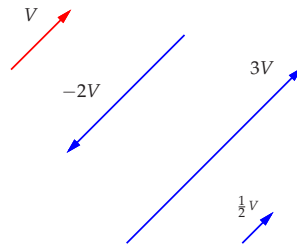
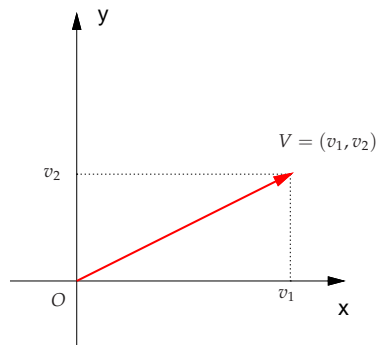
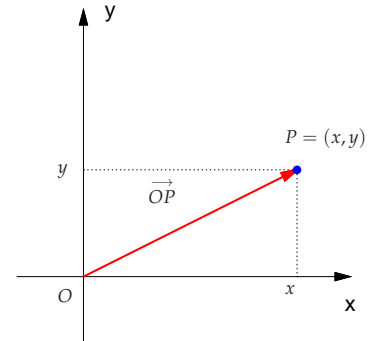


Figura 3.5: Multiplicação de vetor por escalar

Figura 3.6: As componentes do vetor  $V$  no planoFigura 3.7: As coordenadas de  $P$  são iguais as componentes de  $\vec{OP}$

$\vec{0} = (0, 0)$ . Em termos das componentes, podemos realizar facilmente as operações: soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar.

- Como ilustrado na **Figura 3.8**, a **soma** de dois vetores  $V = (v_1, v_2)$  e  $W = (w_1, w_2)$  é dada por

$$V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2);$$

- Como ilustrado na **Figura 3.9**, a **multiplicação** de um vetor  $V = (v_1, v_2)$  por um escalar  $\alpha$  é dada por

$$\alpha V = (\alpha v_1, \alpha v_2).$$

Definimos as **componentes de um vetor no espaço** de forma análoga a que fizemos com vetores no plano. Vamos inicialmente introduzir um **sistema de coordenadas retangulares no espaço**. Para isto, escolhemos um ponto como origem  $O$  e como eixos coordenados, três retas orientadas (com sentido de percurso definido), passando pela origem, perpendiculares entre si, sendo uma delas vertical orientada para cima. Estes serão os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . O eixo  $z$  é o eixo vertical. Os eixos  $x$  e  $y$  são horizontais e satisfazem a seguinte propriedade. Suponha que giramos o eixo  $x$  pelo menor ângulo até que coincida com o eixo  $y$ . Se os dedos da mão direita apontam na direção do semi-eixo  $x$  positivo de forma que o semi-eixo  $y$  positivo esteja do lado da palma da mão, então o polegar aponta no sentido do semi-eixo  $z$  positivo. Cada par de eixos determina um plano chamado de **plano coordenado**. Portanto os três planos coordenados são:  $xy$ ,  $yz$  e  $xz$ .

A cada ponto  $P$  no espaço associamos um terno de números  $(x, y, z)$ , chamado de **coordenadas do ponto  $P$**  como segue.

- Trace uma reta paralela ao eixo  $z$ , passando por  $P$ ;

- A interseção da reta paralela ao eixo  $z$ , passando por  $P$ , com o plano  $xy$  é o ponto  $P'$ . As coordenadas de  $P'$ ,  $(x, y)$ , no sistema de coordenadas  $xy$  são as duas primeiras coordenadas de  $P$ .
- A terceira coordenada é igual ao comprimento do segmento  $PP'$ , se  $P$  estiver acima do plano  $xy$  e ao comprimento do segmento  $PP'$  com o sinal negativo, se  $P$  estiver abaixo do plano  $xy$ .

As coordenadas de um ponto  $P$  são determinadas também da maneira dada a seguir.

- Passe três planos por  $P$  paralelos aos planos coordenados.
- A interseção do plano paralelo ao plano  $xy$ , passando por  $P$ , com o eixo  $z$  determina a coordenada  $z$ .
- A interseção do plano paralelo ao plano  $xz$ , passando por  $P$ , com o eixo  $y$  determina a coordenada  $y$ .
- A interseção do plano paralelo ao plano  $yz$ , passando por  $P$ , com o eixo  $x$  determina a coordenada  $x$ .

Agora, estamos prontos para utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas também nas operações de vetores no espaço. Seja  $V$  um vetor no espaço. Como no caso de vetores do plano, definimos as **componentes de  $V$**  como sendo as coordenadas  $(v_1, v_2, v_3)$  do ponto final do representante de  $V$  que tem ponto inicial na origem. Também vamos identificar o vetor com as suas componentes e vamos escrever simplesmente

$$V = (v_1, v_2, v_3).$$

Assim, as coordenadas de um ponto  $P$  são iguais as componentes do vetor  $\overrightarrow{OP}$  que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto  $P$ . Em particular, o vetor nulo,  $\vec{0} = (0, 0, 0)$ . Assim como fizemos para vetores no plano, para vetores no espaço

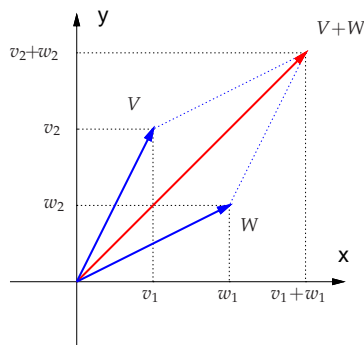


Figura 3.8: A soma de dois vetores no plano

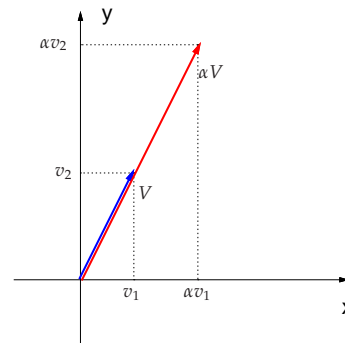


Figura 3.9: A multiplicação de vetor por escalar no plano

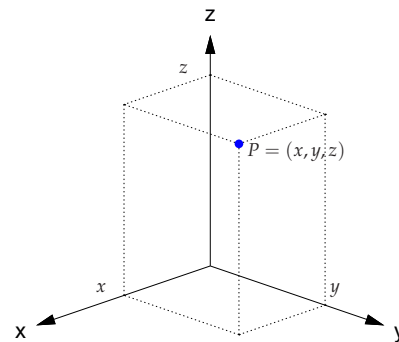
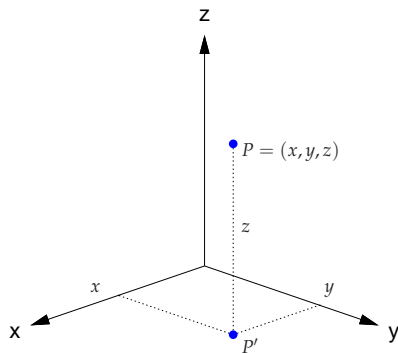


Figura 3.10: As coordenadas de um ponto no espaço

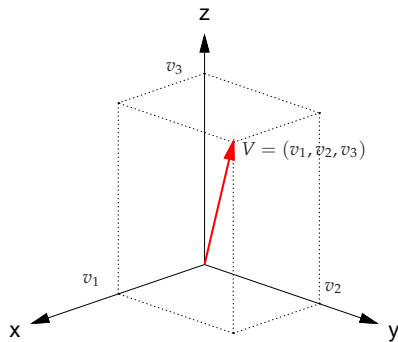


Figura 3.11: As componentes de um vetor no espaço

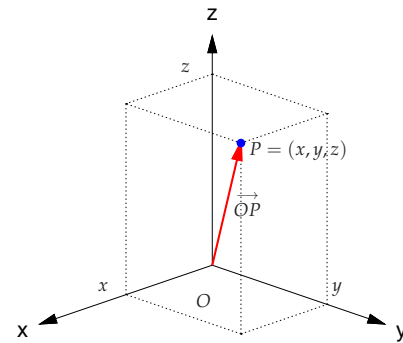


Figura 3.12: As coordenadas de  $P$  são iguais as componentes de  $\vec{OP}$

a soma de vetores e a multiplicação de vetor por escalar podem ser realizadas em termos das componentes.

- Se  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $W = (w_1, w_2, w_3)$ , então a adição de  $V$  com  $W$  é dada por

$$V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3);$$

- Se  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\alpha$  é um escalar, então a multiplicação de  $V$  por  $\alpha$  é dada por

$$\alpha V = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

**Exemplo 3.1.** Se  $V = (1, -2, 3)$ ,  $W = (2, 4, -1)$ , então

$$V + W = (1 + 2, -2 + 4, 3 + (-1)) = (3, 2, 2), \quad 3V = (3 \cdot 1, 3 \cdot (-2), 3 \cdot 3) = (3, -6, 9).$$

Quando um vetor  $V$  está representado por um segmento orientado com ponto inicial fora da origem (**Figura 3.13**), digamos em  $P = (x_1, y_1, z_1)$ , e ponto final em  $Q = (x_2, y_2, z_2)$ , então as componentes do vetor  $V$  são dadas por

$$V = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Portanto, as componentes de  $V$  são obtidas subtraindo-se as coordenadas do ponto  $Q$  (extremidade) das do ponto  $P$  (origem). O mesmo se aplica a vetores no plano.



**Exemplo 3.2.** As componentes do vetor  $V$  que tem um representante com ponto inicial  $P = (5/2, 1, 2)$  e ponto final  $Q = (0, 5/2, 5/2)$  são dadas por

$$V = \overrightarrow{PQ} = (0 - 5/2, 5/2 - 1, 5/2 - 2) = (-5/2, 3/2, 1/2).$$

---

**Observação.** O vetor é “livre”, ele não tem posição fixa, ao contrário do ponto e do segmento orientado. Por exemplo, o vetor  $V = (-5/2, 3/2, 1/2)$ , no exemplo acima, estava representado por um segmento orientado com a origem no ponto  $P = (5/2, 1, 2)$ . Mas, poderia ser representado por um segmento orientado cujo ponto inicial poderia estar em qualquer outro ponto.

---

Um vetor no espaço  $V = (v_1, v_2, v_3)$  pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V = [v_1 \quad v_2 \quad v_3].$$

Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}, \quad \alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{bmatrix},$$

$$\alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 & \alpha v_2 & \alpha v_3 \end{bmatrix}$$

produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais

$$V + W = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3),$$

$$\alpha V = \alpha(v_1, v_2, v_3) = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

O mesmo vale, naturalmente, para vetores no plano.

No teorema seguinte enunciamos as propriedades mais importantes da soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar.

---

**Teorema 3.1.** *Sejam  $U, V$  e  $W$  vetores e  $\alpha$  e  $\beta$  escalares. São válidas as seguintes propriedades:*

(a)  $U + V = V + U;$

(b)  $(U + V) + W = U + (V + W);$

(c)  $U + \vec{0} = U;$

(d)  $U + (-U) = \vec{0};$

(e)  $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U;$

(f)  $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V;$

(g)  $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U;$

(h)  $1U = U.$

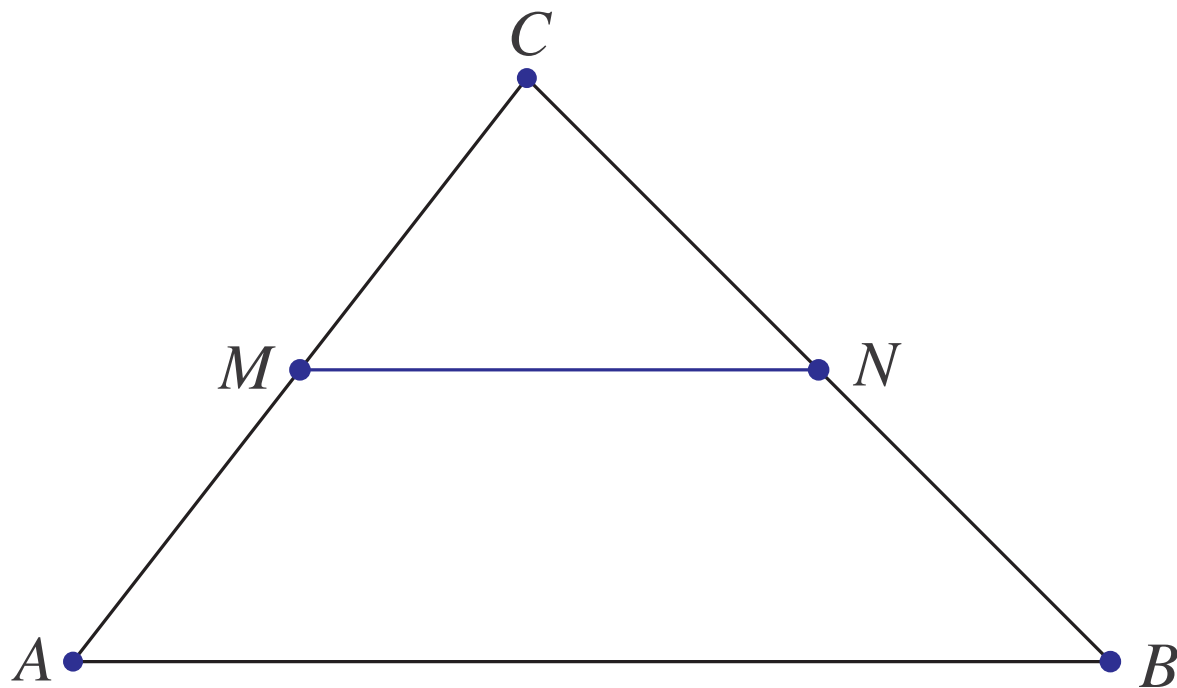
---

**Demonstração.** Segue diretamente das propriedades da álgebra matricial ([Teorema 1.1 na página 9](#)). ■

**Exemplo 3.3.** Seja um triângulo  $ABC$  e sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios de  $AC$  e  $BC$ , respectivamente. Vamos provar que  $MN$  é paralelo a  $AB$  e tem comprimento igual a metade do comprimento de  $AB$ .

Devemos provar que

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$



Agora, a partir da figura acima temos que

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}.$$

Como  $M$  é ponto médio de  $AC$  e  $N$  é ponto médio de  $BC$ , então

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}.$$

Logo,

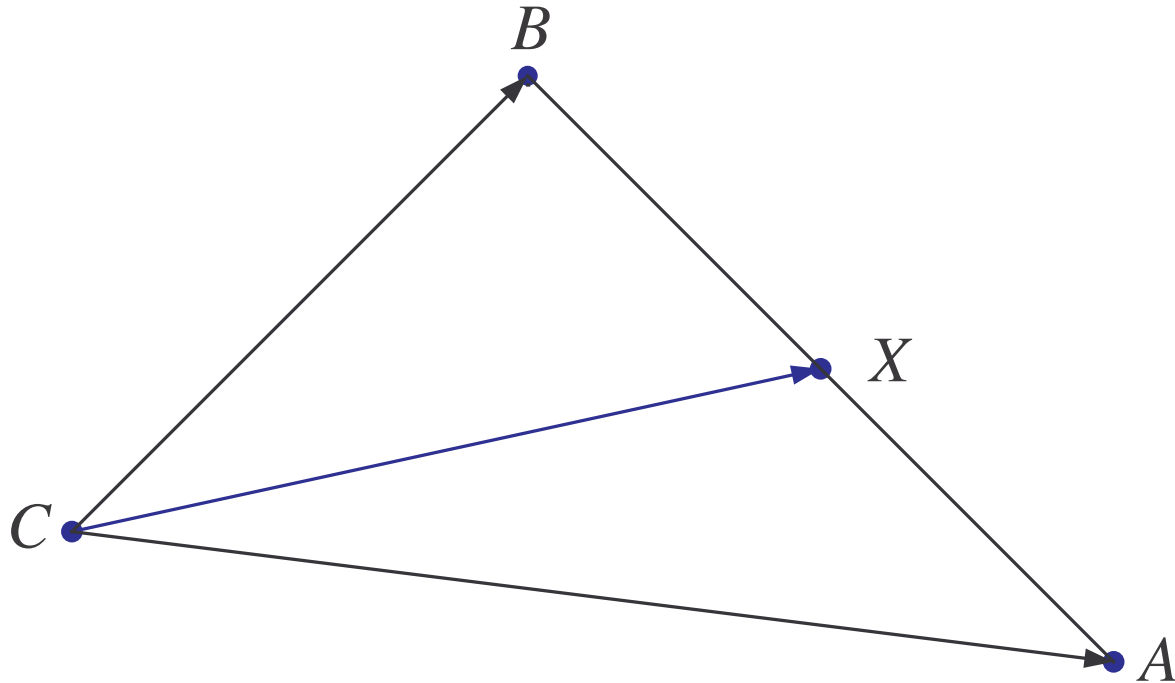
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

**Exemplo 3.4.** Dados quatro pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $X$  tais que  $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$ , vamos escrever  $\overrightarrow{CX}$  como **combinação linear** de  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$ , isto é, como uma soma de múltiplos escalares de  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CB}$ .

Como  $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$ , então os vetores  $\overrightarrow{AX}$  e  $\overrightarrow{AB}$  são paralelos e portanto o ponto  $X$  só pode estar na reta definida por  $A$  e  $B$ . Vamos desenhá-lo entre  $A$  e  $B$ , mas isto não vai representar nenhuma restrição.

O vetor que vai de  $C$  para  $X$ , pode ser escrito como uma soma de um vetor que vai de  $C$  para  $A$  com um vetor que vai de  $A$  para  $X$ ,

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AX}.$$



Agora, por hipótese  $\vec{AX} = \lambda \vec{AB}$ , o que implica que  $\vec{CX} = \vec{CA} + \lambda \vec{AB}$ .  
Mas,  $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$ , portanto  $\vec{CX} = \vec{CA} + \lambda(\vec{CB} - \vec{CA})$ . Logo,

$$\vec{CX} = (1 - \lambda) \vec{CA} + \lambda \vec{CB}.$$

Observe que:

- Se  $\lambda = 0$ , então  $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CA}$ .
- Se  $\lambda = 1$ , então  $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB}$ .
- Se  $\lambda = 1/2$ , então  $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$ .
- Se  $\lambda = 1/3$ , então  $\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}$ .

**Exemplo 3.5.** Vamos mostrar, usando vetores, que o ponto médio de um segmento que une os pontos  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$  é

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

O ponto  $M$  é o ponto médio de  $AB$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ . Então, aplicando o exemplo anterior (com o ponto  $C$  sendo a origem  $O$ ),  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}$ . Como as coordenadas de um ponto são iguais às componentes do vetor que vai da origem até aquele ponto, segue-se que  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2, z_2)$  e

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

## Exercícios Numéricos (respostas na página 476)

- 3.1.1.** Determine o ponto  $C$  tal que  $\vec{AC} = 2 \vec{AB}$  sendo  $A = (0, -2)$  e  $B = (1, 0)$ .
- 3.1.2.** Uma reta no plano tem equação  $y = 2x + 1$ . Determine um vetor paralelo a esta reta.
- 3.1.3.** Determine uma equação para a reta no plano que é paralela ao vetor  $V = (2, 3)$  e passa pelo ponto  $P_0 = (1, 2)$ .
- 3.1.4.** Determine o vetor  $X$ , tal que  $3X - 2V = 15(X - U)$ .
- 3.1.5.** Determine os vetores  $X$  e  $Y$  tais que 
$$\begin{cases} 6X - 2Y = U \\ 3X + Y = U + V \end{cases}$$
- 3.1.6.** Determine as coordenadas da extremidade do segmento orientado que representa o vetor  $V = (3, 0, -3)$ , sabendo-se que sua origem está no ponto  $P = (2, 3, -5)$ .
- 3.1.7.** Quais são as coordenadas do ponto  $P'$ , simétrico do ponto  $P = (1, 0, 3)$  em relação ao ponto  $M = (1, 2, -1)$ ? (Sugestão: o ponto  $P'$  é tal que o vetor  $\vec{MP'} = -\vec{MP}$ )
- 3.1.8.** Verifique se os pontos dados a seguir são **colineares**, isto é, pertencem a uma mesma reta:
- (a)  $A = (5, 1, -3)$ ,  $B = (0, 3, 4)$  e  $C = (0, 3, -5)$ ;
- (b)  $A = (-1, 1, 3)$ ,  $B = (4, 2, -3)$  e  $C = (14, 4, -15)$ ;
- 3.1.9.** Dados os pontos  $A = (1, -2, -3)$ ,  $B = (-5, 2, -1)$  e  $C = (4, 0, -1)$ . Determine o ponto  $D$  tal que  $A, B, C$  e  $D$  sejam vértices consecutivos de um paralelogramo.
- 3.1.10.** Verifique se o vetor  $U$  é combinação linear (soma de múltiplos escalares) de  $V$  e  $W$ :
- (a)  $V = (9, -12, -6)$ ,  $W = (-1, 7, 1)$  e  $U = (-4, -6, 2)$ ;
- (b)  $V = (5, 4, -3)$ ,  $W = (2, 1, 1)$  e  $U = (-3, -4, 1)$ ;
- 3.1.11.** Verifique se é um paralelogramo o quadrilátero de vértices (não necessariamente consecutivos)



(a)  $A = (4, -1, 1)$ ,  $B = (9, -4, 2)$ ,  $C = (4, 3, 4)$  e  $D = (4, -21, -14)$

(b)  $A = (4, -1, 1)$ ,  $B = (9, -4, 2)$ ,  $C = (4, 3, 4)$  e  $D = (9, 0, 5)$

**3.1.12.** Quais dos seguintes vetores são paralelos  $U = (6, -4, -2)$ ,  $V = (-9, 6, 3)$ ,  $W = (15, -10, 5)$ .

### Exercícios usando o MATLAB®

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor  $V$ , usando as componentes numéricas  $v1$ ,  $v2$ ,  $v3$ . Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor  $V = (1, 2, 3)$ ;

`>> V+W` é a soma de  $V$  e  $W$ ; `>> V-W` é a diferença  $V$  menos  $W$ ; `>> num*V` é o produto do vetor  $V$  pelo escalar  $num$ ;

`>> subs(expr,x,num)` substitui  $x$  por  $num$  na expressão  $expr$ ;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação  $expr=0$ ;

#### Comandos gráficos do pacote GAAL:

`>> desvet(P,V)` desenha o vetor  $V$  com origem no ponto  $P$  e `>> desvet(V)` desenha o vetor  $V$  com origem no ponto  $O = (0, 0, 0)$ .

`>> po([P1;P2;...;Pn])` desenha os pontos  $P1$ ,  $P2$ , ...,  $Pn$ .

`>> lineseg(P1,P2,'cor')` desenha o segmento de reta  $P1P2$ . `>> tex(P,'texto')` coloca o texto no ponto  $P$ .

`>> axiss` reescala os eixos com a mesma escala. `>> eixos` desenha os eixos coordenados.

`>> box` desenha uma caixa em volta da figura. `>> rota` faz uma rotação em torno do eixo  $z$ . `>> zoom3(fator)` amplifica a região pelo fator.

**3.1.13.** Coloque em duas variáveis  $V$  e  $W$  dois vetores do plano ou do espaço a seu critério

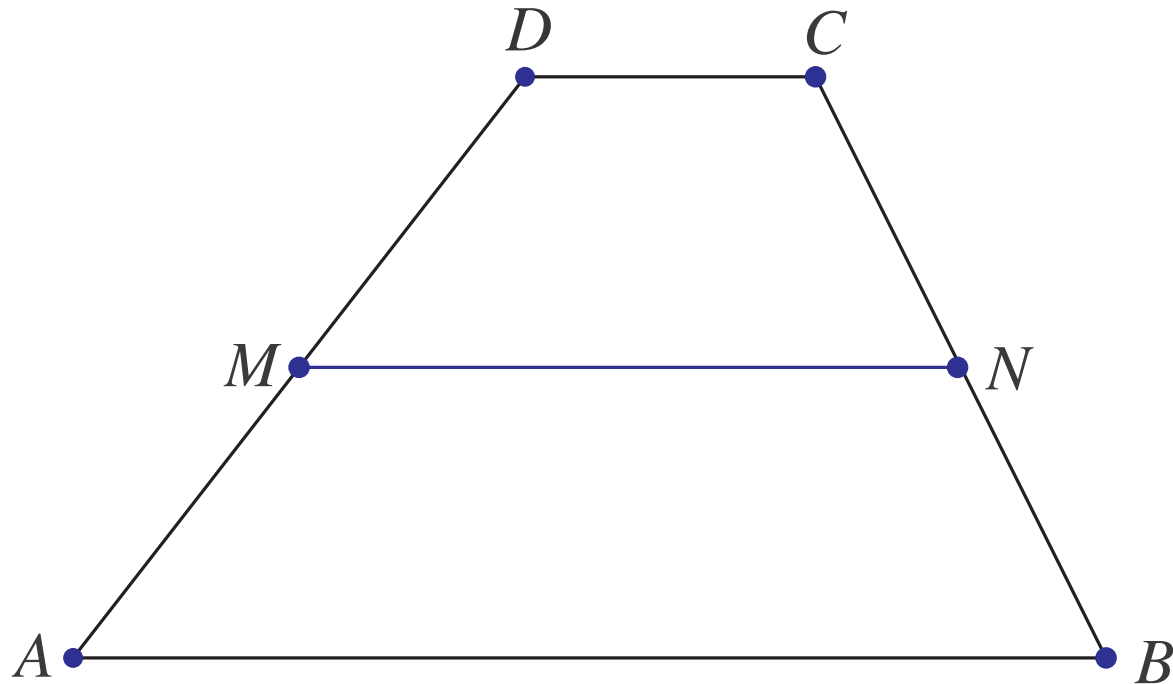
(a) Use a função `ilsvw(V,W)` para visualizar a soma dos dois vetores.

- (b) Coloque em uma variável  $a$  um número e use a função `ilav(a,V)` para visualizar a multiplicação do vetor  $V$  pelo escalar  $a$ .

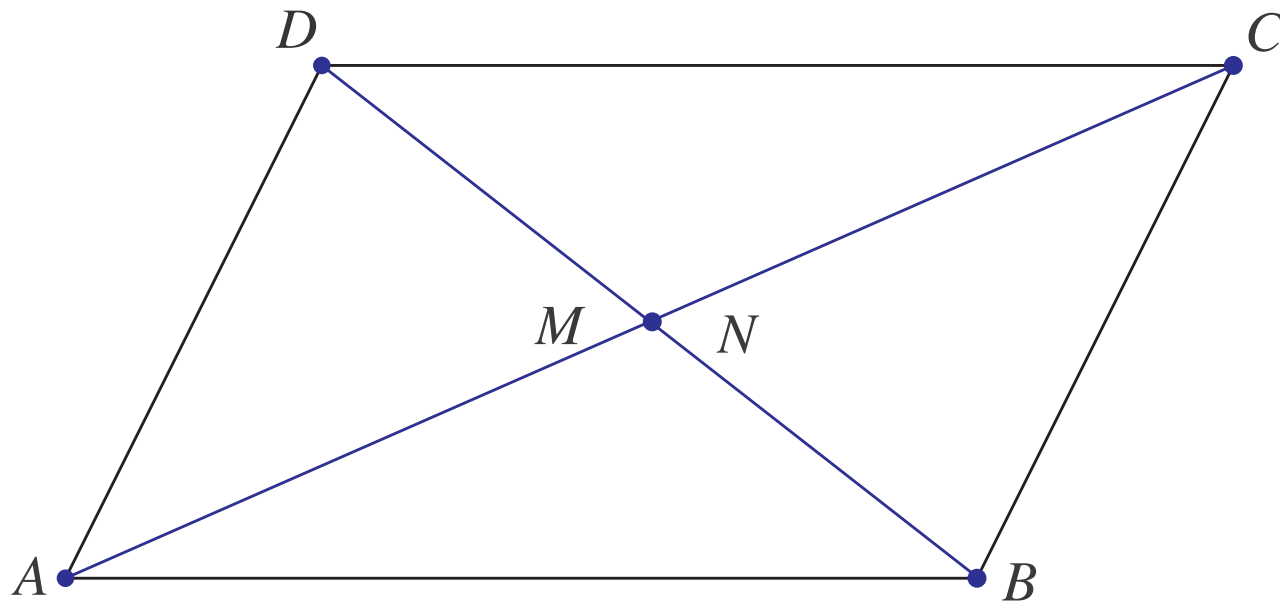
**3.1.14.** Use o MATLAB<sup>®</sup> para resolver os **Exercícios Numéricos** a partir do Exercício 1.3.

## Exercícios Teóricos

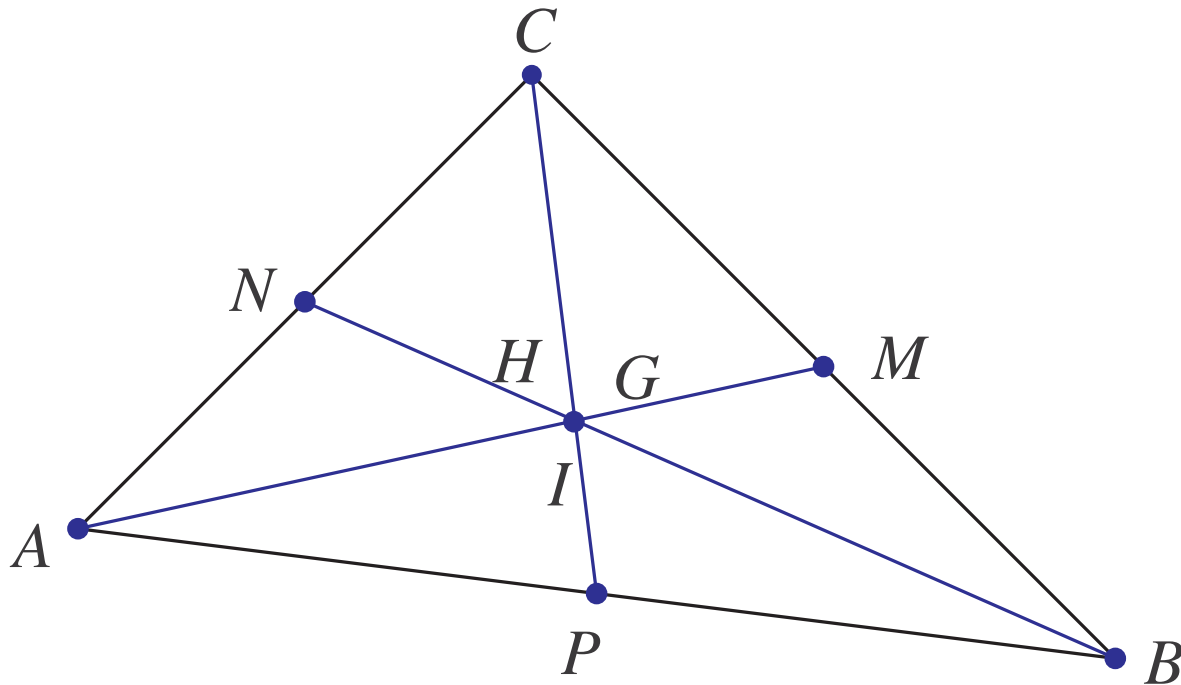
- 3.1.15.** Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases, e sua medida é a média aritmética das medidas das bases. (Sugestão: mostre que  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$  e depois conclua que  $\overrightarrow{MN}$  é um múltiplo escalar de  $\overrightarrow{AB}$ . Revise o [Exemplo 3.3 na página 145](#))



**3.1.16.** Demonstre que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio. (Sugestão: Sejam  $M$  e  $N$  os pontos médios das duas diagonais do paralelogramo. Mostre que o vetor  $\vec{MN} = \vec{0}$ , então conclua que  $M = N$ .)



- 3.1.17.** Considere o triângulo  $ABC$  e sejam  $M$  o ponto médio de  $BC$ ,  $N$  o ponto médio de  $AC$  e  $P$  o ponto médio de  $AB$ . Mostre que as medianas (os segmentos  $AM$ ,  $BN$  e  $CP$ ) se cortam num mesmo ponto que divide as medianas na proporção  $2/3$  e  $1/3$ . (Sugestão: Sejam  $G$ ,  $H$  e  $I$  os pontos definidos por  $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AM}$ ,  $\vec{BH} = \frac{2}{3} \vec{BN}$  e  $\vec{CI} = \frac{2}{3} \vec{CP}$ . Mostre que  $\vec{GH} = \vec{0}$ ,  $\vec{GI} = \vec{0}$ , conclua que  $G = H = I$ .)



**3.1.18.** Sejam  $A, B$  e  $C$  pontos quaisquer com  $A \neq B$ . Prove que:

(a) Um ponto  $X$  pertence a reta determinada por  $A$  e  $B$  ( $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ) se, e somente se,

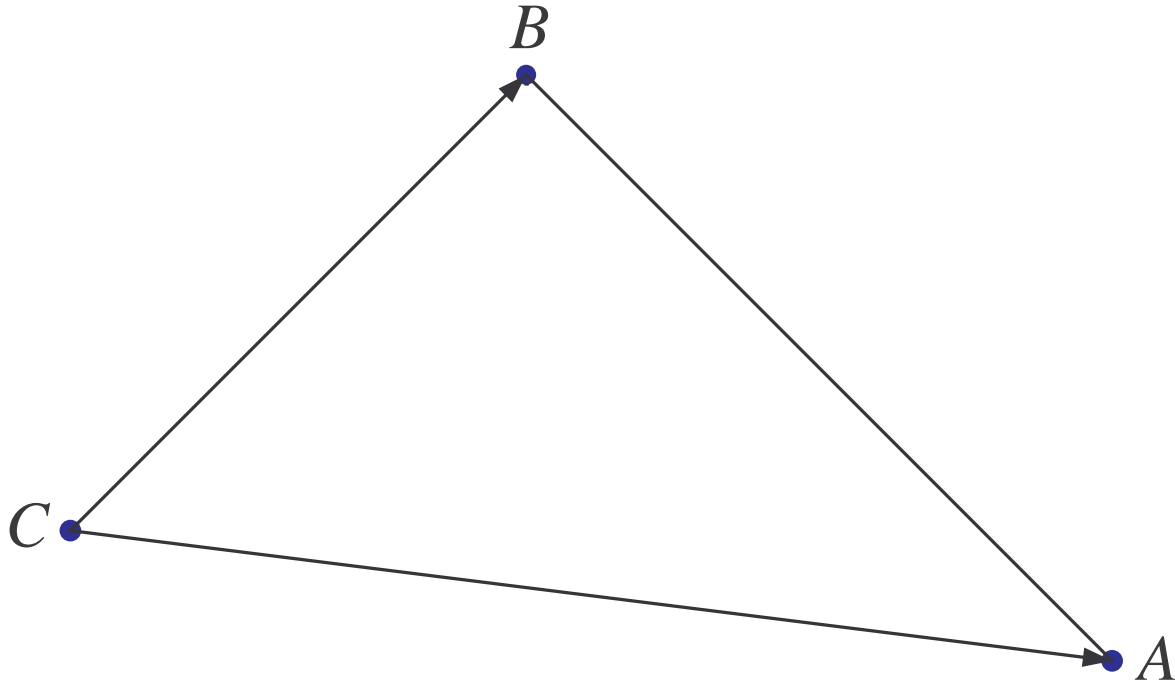
$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com } \alpha + \beta = 1.$$

(b) Um ponto  $X$  pertence ao interior do segmento  $AB$  ( $\overrightarrow{AX} = \lambda \overrightarrow{AB}$ , com  $0 < \lambda < 1$ ) se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ e } \alpha + \beta = 1.$$

(c) Um ponto  $X$  é um ponto interior ao triângulo  $ABC$  ( $\overrightarrow{A'X} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ , com  $0 < \lambda < 1$ , em que  $A'$  é um ponto interior ao segmento  $AC$  e  $B'$  é interior ao segmento  $CB$ ) se, e somente se,

$$\overrightarrow{CX} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB}, \quad \text{com } \alpha > 0, \beta > 0 \text{ e } \alpha + \beta < 1.$$



**3.1.19.** Mostre que se  $\alpha V = \vec{0}$ , então  $\alpha = 0$  ou  $V = \vec{0}$ .

**3.1.20.** Se  $\alpha U = \alpha V$ , então  $U = V$ ? E se  $\alpha \neq 0$ ?

**3.1.21.** Se  $\alpha V = \beta V$ , então  $\alpha = \beta$ ? E se  $V \neq \vec{0}$ ?

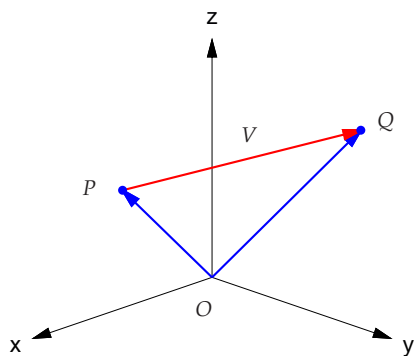


Figura 3.13:  $V = \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$



## 3.2 Produtos de Vetores

### 3.2.1 Norma e Produto Escalar

Já vimos que o **comprimento** de um vetor  $V$  é definido como sendo o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados que o representam. O comprimento do vetor  $V$  também é chamado de **norma de  $V$**  e é denotado(a) por  $\|V\|$ . Segue do Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor pode ser calculada usando as suas componentes, por

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

no caso em que  $V = (v_1, v_2)$  é um vetor no plano, e por

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2},$$

no caso em que  $V = (v_1, v_2, v_3)$  é um vetor no espaço (verifique usando as Figuras 3.14 e 3.15).

Um vetor de norma igual a 1 é chamado **vetor unitário**.

A **distância entre dois pontos**  $P = (x_1, y_1, z_1)$  e  $Q = (x_2, y_2, z_2)$  é igual à norma do vetor  $\overrightarrow{PQ}$  (Figura 3.13 na página 158). Como  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ , então a distância de  $P$  a  $Q$  é dada por

$$\text{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Analogamente, a **distância entre dois pontos**  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  no plano é

igual à norma do vetor  $\overrightarrow{PQ}$ , que é dada por

$$\text{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**Exemplo 3.6.** A norma do vetor  $V = (1, -2, 3)$  é

$$\|V\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

A distância entre os pontos  $P = (2, -3, 1)$  e  $Q = (-1, 4, 5)$  é

$$\text{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|(-1 - 2, 4 - (-3), 5 - 1)\| = \|(-3, 7, 4)\| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{74}.$$

Se  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\alpha$  é um escalar, então da definição da multiplicação de vetor por escalar e da norma de um vetor segue-se que

$$\|\alpha V\| = \|(\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)\| = \sqrt{(\alpha v_1)^2 + (\alpha v_2)^2 + (\alpha v_3)^2} = \sqrt{\alpha^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)},$$

ou seja,

$$\|\alpha V\| = |\alpha| \|V\|. \quad (3.5)$$

Dado um vetor  $V$  **não nulo**, o vetor

$$U = \left( \frac{1}{\|V\|} \right) V.$$

é um **vetor unitário na direção de**  $V$ , pois por (3.5), temos que

$$\|U\| = \left| \frac{1}{\|V\|} \right| \|V\| = 1.$$

**Exemplo 3.7.** Um vetor unitário na direção do vetor  $V = (1, -2, 3)$  é o vetor

$$U = \left( \frac{1}{\|V\|} \right) V = \left( \frac{1}{\sqrt{14}} \right) (1, -2, 3) = \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

O ângulo entre dois vetores não nulos,  $V$  e  $W$ , é definido pelo ângulo  $\theta$  determinado por  $V$  e  $W$  que satisfaz  $0 \leq \theta \leq \pi$ , quando eles estão representados com a mesma origem (Figura 3.16).

Quando o ângulo  $\theta$  entre dois vetores  $V$  e  $W$  é reto ( $\theta = 90^\circ$ ), ou um deles é o vetor nulo, dizemos que os vetores  $V$  e  $W$  são **ortogonais** ou **perpendiculares entre si**.

Vamos definir, agora, um produto entre dois vetores, cujo resultado é um escalar. Por isso ele é chamado **produto escalar**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: o trabalho realizado por uma força é o produto escalar do vetor força pelo vetor deslocamento, quando a força aplicada é constante.

---

**Definição 3.1.** O **produto escalar** ou **interno** de dois vetores  $V$  e  $W$  é definido por

$$V \cdot W = \begin{cases} 0, & \text{se } V \text{ ou } W \text{ é o vetor nulo,} \\ \|V\| \|W\| \cos \theta, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre eles.

---

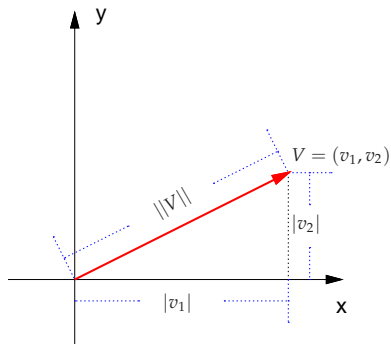


Figura 3.14: A norma de um vetor  $V$  no plano

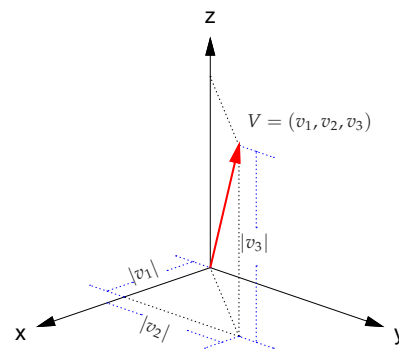


Figura 3.15: A norma de um vetor  $V$  no espaço

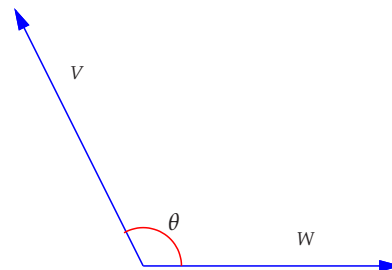
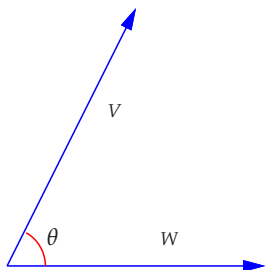


Figura 3.16: Ângulo entre dois vetores, agudo (à esquerda) e obtuso (à direita)

Quando os vetores são dados em termos das suas componentes não sabemos diretamente o ângulo entre eles. Por isso, precisamos de uma forma de calcular o produto escalar que não necessite do ângulo entre os vetores.

Se  $V$  e  $W$  são dois vetores não nulos e  $\theta$  é o ângulo entre eles, então pela lei dos cossenos,

$$\|V - W\|^2 = \|V\|^2 + \|W\|^2 - 2\|V\|\|W\|\cos\theta.$$

Assim,

$$V \cdot W = \|V\|\|W\|\cos\theta = \frac{1}{2} \left( \|V\|^2 + \|W\|^2 - \|V - W\|^2 \right). \quad (3.6)$$

Já temos então uma fórmula para calcular o produto escalar que não depende diretamente do ângulo entre eles. Substituindo-se as coordenadas dos vetores em (3.6) obtemos uma expressão mais simples para o cálculo do produto interno.

Por exemplo, se  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $W = (w_1, w_2, w_3)$  são vetores no espaço, então substituindo-se  $\|V\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ ,  $\|W\|^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2$  e  $\|V - W\|^2 = (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2$  em (3.6) os termos  $v_i^2$  e  $w_i^2$  são cancelados e obtemos

$$V \cdot W = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3.$$

**Teorema 3.2.** *O produto escalar ou interno,  $V \cdot W$ , entre dois vetores é dado por*

$$V \cdot W = v_1w_1 + v_2w_2,$$

*se  $V = (v_1, v_2)$  e  $W = (w_1, w_2)$  são vetores no plano e por*

$$V \cdot W = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3,$$

*se  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $W = (w_1, w_2, w_3)$  são vetores no espaço.*



**Exemplo 3.8.** Sejam  $V = (0, 1, 0)$  e  $W = (2, 2, 3)$ . O produto escalar de  $V$  por  $W$  é dado por

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2.$$

Podemos usar o **Teorema 3.2** para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos,  $V$  e  $W$ . O cosseno do ângulo entre  $V$  e  $W$  é, então, dado por

$$\cos \theta = \frac{V \cdot W}{||V|| ||W||}.$$

Se  $V$  e  $W$  são vetores não nulos e  $\theta$  é o ângulo entre eles, então

- (a)  $\theta$  é agudo ( $0 \leq \theta < 90^\circ$ ) se, e somente se,  $V \cdot W > 0$ ,
- (b)  $\theta$  é reto ( $\theta = 90^\circ$ ) se, e somente se,  $V \cdot W = 0$  e
- (c)  $\theta$  é obtuso ( $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ ) se, e somente se,  $V \cdot W < 0$ .

**Exemplo 3.9.** Vamos determinar o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas. Sejam  $V_1 = (1, 0, 0)$ ,  $V_2 = (0, 1, 0)$  e  $V_3 = (0, 0, 1)$  (**Figura 3.18**). Uma diagonal do cubo é representada pelo vetor  $D$  dado por

$$D = V_1 + V_2 + V_3 = (1, 1, 1).$$

Então o ângulo entre  $D$  e  $V_1$  satisfaz

$$\cos \theta = \frac{D \cdot V_1}{||D|| ||V_1||} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})(\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ou seja,

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54^\circ.$$

**Teorema 3.3.** *Sejam  $U, V$  e  $W$  vetores e  $\alpha$  um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

- (a) (comutatividade)  $U \cdot V = V \cdot U$ ;
- (b) (distributividade)  $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$ ;
- (c) (associatividade)  $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$ ;
- (d)  $V \cdot V = \|V\|^2 \geq 0$ , para todo  $V$  e  $V \cdot V = 0$  se, e somente se,  $V = \vec{0}$ .

**Demonstração.** Sejam  $U = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $W = (w_1, w_2, w_3)$ .

- (a)  $U \cdot V = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = V \cdot U$ ;
- (b)  $U \cdot (V + W) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) = (u_1v_1 + u_1w_1) + (u_2v_2 + u_2w_2) + (u_3v_3 + u_3w_3) = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) = U \cdot V + U \cdot W$ ;
- (c)  $\alpha(U \cdot V) = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 = (\alpha U) \cdot V$ ;
- (d)  $V \cdot V = \|V\|^2$  é uma soma de quadrados, por isso é sempre maior ou igual a zero e é zero se, e somente se, todas as parcelas são iguais a zero. ■



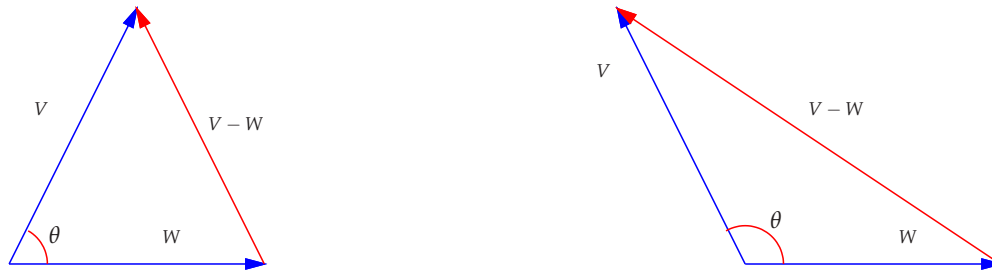


Figura 3.17: Triângulo formado por representantes de  $V$ ,  $W$  e  $V - W$ . À esquerda o ângulo entre  $V$  e  $W$  é agudo e à direita é obtuso.

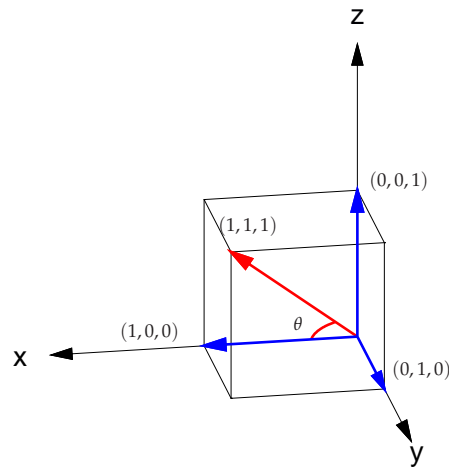


Figura 3.18: Ângulo entre a diagonal de um cubo e uma de suas arestas

### 3.2.2 Projeção Ortogonal

Dados dois vetores  $V$  e  $W$  a **projeção ortogonal de  $V$  sobre  $W$**  denotada por

$$\text{proj}_W V$$

é o vetor que é paralelo a  $W$  tal que  $V - \text{proj}_W V$  seja ortogonal a  $W$  (Figura 3.19).



Figura 3.19: **Projeção ortogonal do vetor  $V$  sobre o vetor  $W$**

**Proposição 3.4.** *Seja  $W$  um vetor não nulo. Então, a projeção ortogonal de um vetor  $V$  em  $W$  é dada por*

$$\text{proj}_W V = \left( \frac{V \cdot W}{||W||^2} \right) W.$$

**Demonstração.** Sejam  $V_1 = \text{proj}_W V$  e  $V_2 = V - \text{proj}_W V$ . Como  $V_1$  é paralelo a  $W$ , então

$$V_1 = \alpha W. \quad (3.7)$$

Assim,

$$V_2 = V - \alpha W.$$

Multiplicando-se escalarmente  $V_2$  por  $W$  e usando o Teorema 3.3 (d) obtemos

$$V_2 \cdot W = (V - \alpha W) \cdot W = V \cdot W - \alpha ||W||^2. \quad (3.8)$$

Mas,  $V_2$  é ortogonal a  $W$ , então  $V_2 \cdot W = 0$ . Portanto, de (3.8) obtemos

$$\alpha = \frac{V \cdot W}{||W||^2}.$$

Substituindo este valor de  $\alpha$  na equação (3.7) segue-se o resultado. ■

**Exemplo 3.10.** Sejam  $V = (2, -1, 3)$  e  $W = (4, -1, 2)$ . Vamos encontrar dois vetores  $V_1$  e  $V_2$  tais que  $V = V_1 + V_2$ ,  $V_1$  é paralelo a  $W$  e  $V_2$  é perpendicular a  $W$  (Figura 3.19). Temos que

$$V \cdot W = 2 \cdot 4 + (-1)(-1) + 3 \cdot 2 = 15$$

$$||W||^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21.$$

$$V_1 = \text{proj}_W V = \left( \frac{V \cdot W}{||W||^2} \right) W = \left( \frac{15}{21} \right) (4, -1, 2) = \left( \frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7} \right)$$

$$V_2 = V - V_1 = (2, -1, 3) - \left( \frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7} \right) = \left( -\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7} \right).$$

### 3.2.3 Produto Vetorial

Vamos, agora, definir um produto entre dois vetores, cujo resultado é um vetor. Por isso, ele é chamado **produto vetorial**. Este produto tem aplicação, por exemplo, em Física: a força exercida sobre uma partícula com carga unitária mergulhada num campo magnético uniforme é o produto vetorial do vetor velocidade da partícula pelo vetor campo magnético.

---

**Definição 3.2.** Sejam  $V$  e  $W$  dois vetores no espaço. Definimos o **produto vetorial**,  $V \times W$ , como sendo o vetor com as seguintes características:

- (a) Tem comprimento dado numericamente por

$$||V \times W|| = ||V|| ||W|| \sin \theta,$$

ou seja, a *norma* de  $V \times W$  é numericamente igual à área do paralelogramo determinado por  $V$  e  $W$ .

- (b) Tem direção perpendicular a  $V$  e a  $W$ .

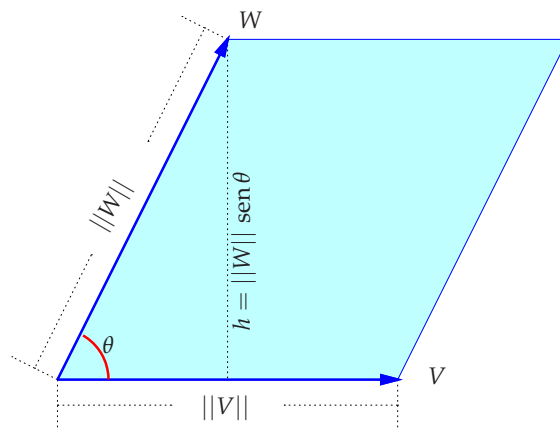


Figura 3.20: Área de um paralelogramo determinado por dois vetores

- (c) Tem o sentido dado pela regra da mão direita (Figura 3.21): Se o ângulo entre  $V$  e  $W$  é  $\theta$ , giramos o vetor  $V$  de um ângulo  $\theta$  até que coincida com  $W$  e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de  $V \times W$ .
-

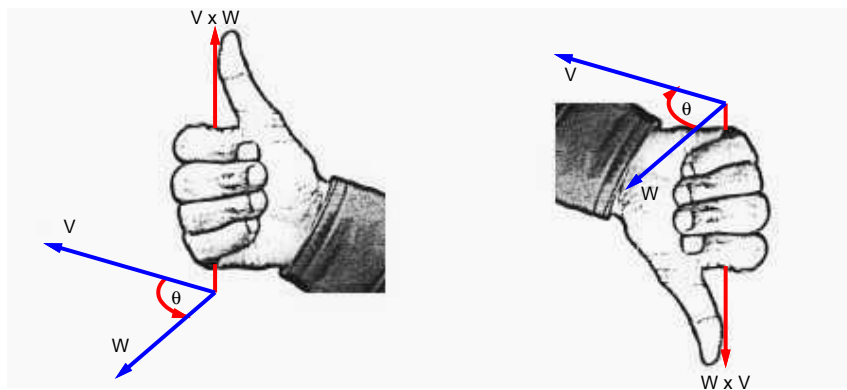


Figura 3.21: Regra da mão direita



Da forma como definimos o produto vetorial é difícil o seu cálculo, mas as propriedades que apresentaremos a seguir possibilitarão obter uma fórmula para o produto vetorial em termos das componentes dos vetores.

---

**Teorema 3.5.** *Sejam  $U, V$  e  $W$  vetores no espaço e  $\alpha$  um escalar. São válidas as seguintes propriedades:*

- (a)  $V \times W = -(W \times V)$  (anti-comutatividade).
  - (b)  $V \times W = \vec{0}$  se, e somente se,  $V = \alpha W$  ou  $W = \alpha V$ .
  - (c)  $(V \times W) \cdot V = (V \times W) \cdot W = 0$ .
  - (d)  $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W)$ .
  - (e)  $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$  e  $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$  (Distributividade em relação a soma de vetores).
- 

**Demonstração.** (a) Pela definição do produto vetorial  $V \times W$  e  $W \times V$  têm o mesmo comprimento e a mesma direção. Além disso trocando-se  $V$  por  $W$  troca-se o sentido de  $V \times W$  (Figura 3.21).

- (b)  $\|V \times W\| = 0$  se, e somente se, um deles é o vetor nulo ou  $\sin \theta = 0$ , em que  $\theta$  é o ângulo entre  $V$  e  $W$ , ou seja,  $V$  e  $W$  são paralelos. Assim,  $V \times W = \vec{0}$  se, e somente se,  $V = \alpha W$  ou  $W = \alpha V$ .
- (c) Segue-se imediatamente da definição do produto vetorial.

- (d) Segue-se facilmente da definição do produto vetorial, por isso deixamos como exercício para o leitor.
- (e) Este item será demonstrado no [Apêndice III na página 197](#).



### Os vetores canônicos

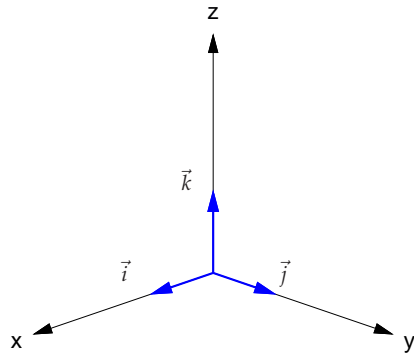
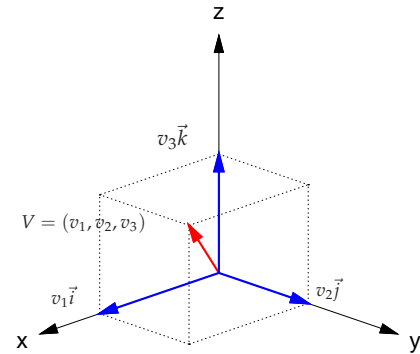
$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

são vetores unitários (de norma igual a um) paralelos aos eixos coordenados. Todo vetor

$$V = (v_1, v_2, v_3)$$

pode ser escrito como uma soma de múltiplos escalares de  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  (combinação linear), pois

$$\begin{aligned} V = (v_1, v_2, v_3) &= (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = \\ &= v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = \\ &= v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Figura 3.22: Vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ Figura 3.23:  $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

Da definição de produto vetorial podemos obter facilmente as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{0}, & \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0}, \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}.\end{aligned}$$

Agora, estamos prontos para obter uma fórmula que dê o produto vetorial de dois vetores em termos das suas componentes.

---

**Teorema 3.6.** *Sejam  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $W = (w_1, w_2, w_3)$  vetores no espaço. Então o produto vetorial  $V \times W$  é dado por*

$$V \times W = \left( \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right). \quad (3.10)$$


---

**Demonstração.** De (3.9) segue-se que podemos escrever

$$V = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \quad \text{e} \quad W = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}.$$

Assim, pela distributividade do produto vetorial em relação a soma, temos que

$$\begin{aligned}
 V \times W &= (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}) \times (w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}) \\
 &= v_1 w_1 (\vec{i} \times \vec{i}) + v_1 w_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + v_1 w_3 (\vec{i} \times \vec{k}) + \\
 &\quad + v_2 w_1 (\vec{j} \times \vec{i}) + v_2 w_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + v_2 w_3 (\vec{j} \times \vec{k}) + \\
 &\quad + v_3 w_1 (\vec{k} \times \vec{i}) + v_3 w_2 (\vec{k} \times \vec{j}) + v_3 w_3 (\vec{k} \times \vec{k}) \\
 &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{k} \\
 &= \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} \vec{i} - \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} \vec{j} + \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \vec{k} \\
 &= \left( \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

■

Para obter as componentes do produto vetorial  $V \times W$  procedemos como segue:

- Escreva a matriz:

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix};$$

- Para calcular a primeira componente de  $V \times W$ , elimine a primeira coluna da matriz acima e calcule o determinante da sub-matriz resultante. A segunda componente é obtida, eliminando-se a segunda coluna e calculando-se o determinante da sub-matriz resultante com o  *sinal trocado*. A terceira é obtida como a primeira, mas eliminando-se a terceira coluna.

**Exemplo 3.11.** Sejam  $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$  e  $W = 3\vec{i} + \vec{k}$ . Vamos determinar o produto

vetorial  $V \times W$ . Como

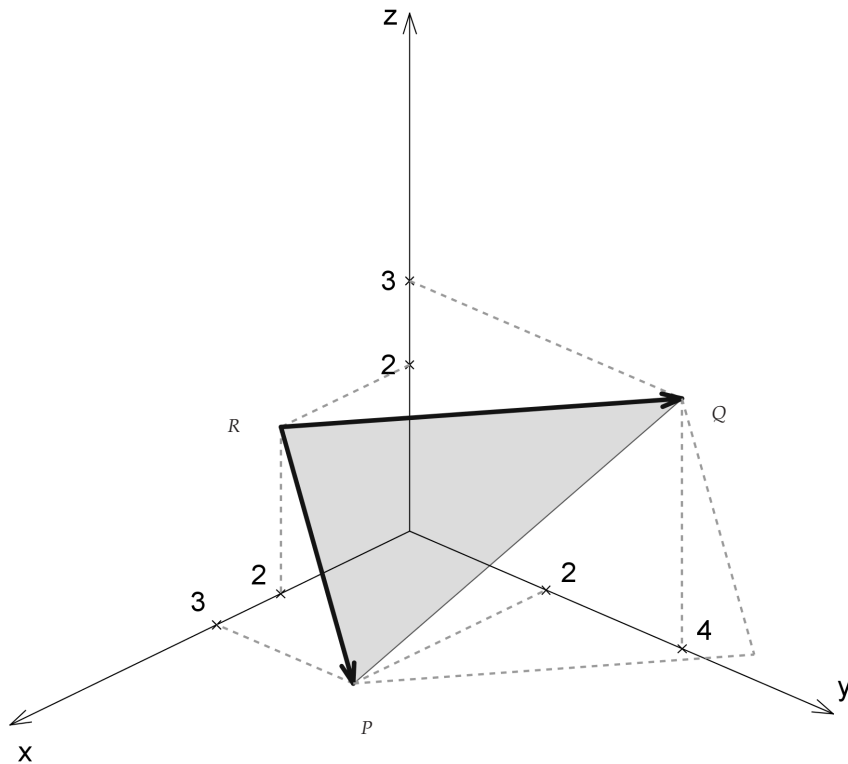
$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$V \times W = \left( \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right) = (2, -7, -6).$$

Usando os vetores  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  o produto vetorial  $V \times W$ , pode ser escrito em termos do “determinante”

$$V \times W = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} \vec{i} - \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} \vec{j} + \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \vec{k}.$$

Figura 3.24: Área do triângulo  $PQR$

**Exemplo 3.12.** Vamos calcular a área do triângulo  $PQR$  em que (Figura 3.24)

$$P = (3, 2, 0), \quad Q = (0, 4, 3) \quad \text{e} \quad R = (1, 0, 2).$$

Sejam

$$V = \overrightarrow{RP} = (3 - 1, 2 - 0, 0 - 2) = (2, 2, -2)$$

$$W = \overrightarrow{RQ} = (0 - 1, 4 - 0, 3 - 2) = (-1, 4, 1).$$

Então,

$$V \times W = (10, 0, 10) = 10(1, 0, 1).$$

A área do triângulo  $PQR$  é a metade da área do paralelogramo com lados determinados por  $V$  e  $W$ . Assim,

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|V \times W\| = 5\sqrt{2}.$$

### 3.2.4 Produto Misto

O produto  $(V \times W) \cdot U$  é chamado de **produto misto** de  $U$ ,  $V$  e  $W$ . O resultado abaixo mostra como calcular o produto misto usando as componentes dos vetores.

**Teorema 3.7.** Sejam  $U = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ ,  $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$  e  $W = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$ . Então,

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}.$$



**Demonstração.** Segue do Teorema 3.2 na página 163, do Teorema 3.6 na página 178 e da definição de determinante de uma matriz que

$$\begin{aligned}
 (V \times W) \cdot U &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left( \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right) \\
 &= u_1 \det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix} - u_2 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix} + u_3 \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \\
 &= \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix};
 \end{aligned}$$

■

**Exemplo 3.13.** O produto misto dos vetores  $U = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $V = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$  e  $W = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  é

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = -84.$$

**Teorema 3.8.** Dados três vetores no espaço,  $U, V$  e  $W$ ,

$$|(V \times W) \cdot U|$$

é numericamente igual ao volume do paralelepípedo determinado por  $U, V$  e  $W$ .

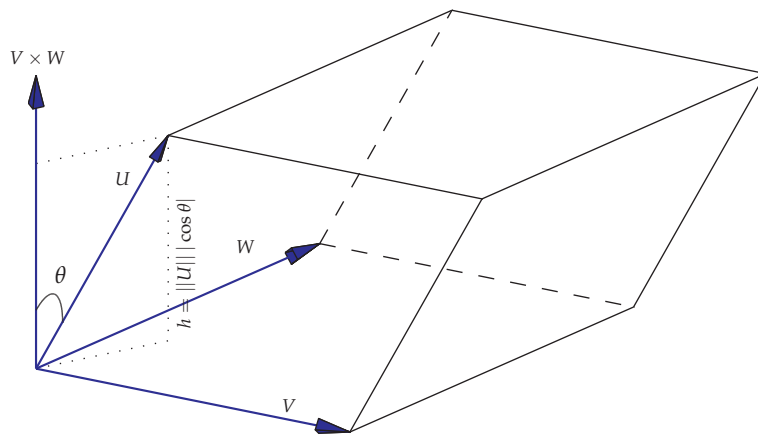


Figura 3.25: Volume do paralelepípedo determinado por  $V$ ,  $W$  e  $U$



**Demonstração.** O volume do paralelepípedo determinado por  $U, V$  e  $W$  é igual ao produto da área da base pela altura, ou seja, pela definição do produto vetorial, o volume é dado por

$$\text{Volume} = \|V \times W\| h.$$

Mas, como vemos na **Figura 3.25** a altura é  $h = \|U\| |\cos \theta|$ , o que implica que

$$\text{Volume} = \|V \times W\| \|U\| |\cos \theta| = |(V \times W) \cdot U|.$$



**Exemplo 3.14.** Sejam  $V = 4\vec{i}$ ,  $W = 2\vec{i} + 5\vec{j}$  e  $U = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ . O volume do paralelepípedo com um vértice na origem e arestas determinadas por  $U, V$  e  $W$  é dado por

$$\text{volume} = |(V \times W) \cdot U| = \left| \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right| = |80| = 80.$$

Segue imediatamente do **Teorema 3.7** e do **Teorema 3.8** um critério para saber se três vetores são paralelos a um mesmo plano.

**Corolário 3.9.** Sejam  $U = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ ,  $V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$  e  $W = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$ . Estes vetores são *coplanares* (isto é, são paralelos a um mesmo plano) se, e somente se,

$$(V \times W) \cdot U = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = 0.$$

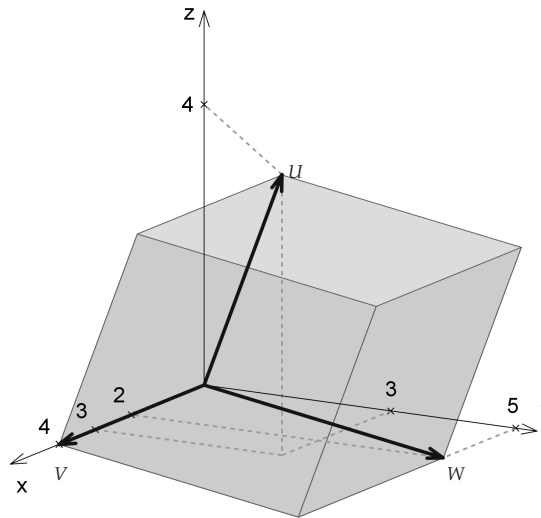


Figura 3.26: Paralelepípedo determinado por  $U$ ,  $V$  e  $W$  do Exemplo 3.14

**Exemplo 3.15.** Vamos verificar que os pontos  $P = (0, 1, 1)$ ,  $Q = (1, 0, 2)$ ,  $R = (1, -2, 0)$  e  $S = (-2, 2, -2)$  são **coplanares**, isto é, pertencem a um mesmo plano. Com estes pontos podemos construir os vetores

$$\overrightarrow{PQ} = (1 - 0, 0 - 1, 2 - 1) = (1, -1, 1),$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - 0, -2 - 1, 0 - 1) = (1, -3, -1) \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{PS} = (-2 - 0, 2 - 1, -2 - 1) = (-2, 1, -3)$$

Os pontos  $P, Q, R$  e  $S$  pertencem a um mesmo plano se, e somente se, os vetores  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{PR}$  e  $\overrightarrow{PS}$  são coplanares. E isto acontece se, e somente se, o produto misto deles é igual zero.

$$(\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}) \cdot \overrightarrow{PQ} = \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Assim,  $P, Q, R$  e  $S$  são coplanares.

O resultado a seguir será usado no próximo capítulo para deduzir as equações paramétricas do plano.

**Corolário 3.10.** *Sejam  $U, V$  e  $W$  vetores coplanares não nulos no espaço.*

(a) *Então a equação vetorial*

$$xV + yW + zU = \vec{0}$$

*tem solução não trivial, em que  $x, y$  e  $z$  são escalares.*

(b) *Então um dos vetores  $U, V$  ou  $W$  é combinação linear (soma de múltiplos escalares) dos outros dois.*

(c) *Se  $V$  e  $W$  são não paralelos, então  $U$  é combinação linear de  $V$  e  $W$ .*

---

**Demonstração.** (a) Seja  $A$  a matriz cujas colunas são  $V, W$  e  $U$  escritos como vetores colunas. A equação  $xV + yW + zU = \vec{0}$  é equivalente ao sistema  $AX = \vec{0}$ . Se  $U, V$  e  $W$  são coplanares, então

$$\det(A) = \det(A^t) = (V \times W) \cdot U = 0.$$

Logo a equação tem solução não trivial.

- (b) Pelo item anterior a equação  $xU + yV + zW = \vec{0}$  possui solução não trivial. Mas, se isto acontece, então um dos escalares  $x$  ou  $y$  ou  $z$  pode ser diferente de zero. Se  $z \neq 0$ , então  $U = (-x/z)V + (-y/z)W$ , ou seja, o vetor  $U$  é combinação linear de  $V$  e  $W$ . De forma semelhante, se  $x \neq 0$ , então  $V$  é combinação linear de  $U$  e  $W$  e se  $y \neq 0$ , então  $W$  é combinação linear de  $U$  e  $V$ .
- (c) Como  $U, V$  e  $W$  são coplanares, então a equação  $xU + yV + zW = \vec{0}$  possui solução não trivial com  $x \neq 0$ . Pois, caso contrário  $yV + zW = \vec{0}$  com  $y$  ou  $z$  não simultaneamente nulos o que implicaria que  $V$  e  $W$  seriam paralelos (por que?). Logo  $U = (-y/x)V + (-z/x)W$ .



**Exemplo 3.16.** Considere os vetores

$$U = \overrightarrow{PQ} = (1, -1, 1),$$

$$V = \overrightarrow{PR} = (1, -3, -1) \quad \text{e}$$

$$W = \overrightarrow{PS} = (-2, 1, -3)$$

do Exemplo 3.15 na página 188. A equação

$$xU + yV + zW = \vec{0}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x - 3y + z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

Escalonando a matriz do sistema obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A última matriz corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases}$$

Assim

$$\frac{5\alpha}{2}U - \frac{\alpha}{2}V + \alpha W = \vec{0}.$$

Logo

$$W = -\frac{5}{2}U - \frac{1}{2}V.$$

Verifique que realmente vale esta relação entre os vetores  $U$ ,  $V$  e  $W$ .



### Exercícios Numéricos (respostas na página 478)

- 3.2.1.** Determine a equação da reta no plano que é perpendicular ao vetor  $N = (2, 3)$  e passa pelo ponto  $P_0 = (-1, 1)$ .
- 3.2.2.** Seja  $O = (0, 0, 0)$ . Qual o lugar geométrico dos pontos  $P = (x, y, z)$  tais que  $\|\vec{OP}\|^2 = 4$ ? Qual figura é representada pela equação  $x^2 + y^2 = 4$ ?
- 3.2.3.** Sejam  $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$  e  $W = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ . Determine vetores unitários paralelos aos vetores  
(a)  $V + W$ ; (b)  $V - W$ ; (c)  $2V - 3W$ .
- 3.2.4.** Determine o valor de  $x$  para o qual os vetores  $V = x\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$  e  $W = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  são perpendiculares.
- 3.2.5.** Demonstre que não existe  $x$  tal que os vetores  $V = x\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$  e  $W = x\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$  são perpendiculares.
- 3.2.6.** Ache o ângulo entre os seguintes pares de vetores:  
(a)  $2\vec{i} + \vec{j}$  e  $\vec{j} - \vec{k}$ ; (b)  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  e  $-2\vec{j} - 2\vec{k}$ ; (c)  $3\vec{i} + 3\vec{j}$  e  $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ .
- 3.2.7.** Decomponha  $W = -\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  como a soma de dois vetores  $W_1$  e  $W_2$ , com  $W_1$  paralelo ao vetor  $\vec{j} + 3\vec{k}$  e  $W_2$  ortogonal a este último. (Sugestão: revise o [Exemplo 3.10 na página 170](#))
- 3.2.8.** Ache o vetor unitário da bissetriz do ângulo entre os vetores  $V = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  e  $W = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ . (Sugestão: observe que a soma de dois vetores está na direção da bissetriz se, e somente se, os dois tiverem o mesmo comprimento. Portanto, tome múltiplos escalares de  $V$  e  $W$  de forma que eles tenham o mesmo comprimento e tome o vetor unitário na direção da soma deles.)
- 3.2.9.** Verifique se os seguintes pontos pertencem a um mesmo plano:  
(a)  $A = (2, 2, 1)$ ,  $B = (3, 1, 2)$ ,  $C = (2, 3, 0)$  e  $D = (2, 3, 2)$ ;  
(b)  $A = (2, 0, 2)$ ,  $B = (3, 2, 0)$ ,  $C = (0, 2, 1)$  e  $D = (10, -2, 1)$ ;
- 3.2.10.** Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto  $A = (2, 1, 6)$  e os três vértices adjacentes nos pontos  $B = (4, 1, 3)$ ,  $C = (1, 3, 2)$  e  $D = (1, 2, 1)$ .

- 3.2.11.** Calcule a área do paralelogramo em que três vértices consecutivos são  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (2, 1, 3)$  e  $C = (3, 2, 4)$ .
- 3.2.12.** Calcule a área do triângulo com vértices  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (3, 0, 4)$  e  $C = (5, 1, 3)$ .
- 3.2.13.** Ache  $X$  tal que  $X \times (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$  e  $\|X\| = \sqrt{6}$ .
- 3.2.14.** Sabe-se que o vetor  $X$  é ortogonal a  $\vec{i} + \vec{j}$  e a  $-\vec{i} + \vec{k}$ , tem norma  $\sqrt{3}$  e sendo  $\theta$  o ângulo entre  $X$  e  $\vec{j}$ , tem-se  $\cos \theta > 0$ . Ache  $X$ .
- 3.2.15.** Mostre que  $A = (3, 0, 2)$ ,  $B = (4, 3, 0)$  e  $C = (8, 1, -1)$  são vértices de um triângulo retângulo. Em qual dos vértices está o ângulo reto?
- 3.2.16.** Considere dois vetores  $V$  e  $W$  tais que  $\|V\| = 5$ ,  $\|W\| = 2$  e o ângulo entre  $V$  e  $W$  é  $60^\circ$ . Determine, como combinação linear de  $V$  e  $W$  ( $xV + yW$ ):
- (a) Um vetor  $X$  tal que  $X \cdot V = 20$  e  $X \cdot W = 5$
  - (b) Um vetor  $X$  tal que  $X \times V = \vec{0}$  e  $X \cdot W = 12$ .

## Exercícios usando o MATLAB®

`>> V=[v1,v2,v3]` cria um vetor  $V$ , usando as componentes numéricas  $v1$ ,  $v2$ ,  $v3$ . Por exemplo `>> V=[1,2,3]` cria o vetor  $V = (1, 2, 3)$ ;

`>> subs(expr,x,num)` substitui  $x$  por  $num$  na expressão  $expr$ ;

`>> solve(expr)` determina a solução da equação  $expr=0$ ;

### Comandos numéricos do pacote GAAL:

`>> V=randi(1,3)` cria um vetor aleatório com componentes inteiras;

`>> no(V)` calcula a norma do vetor  $V$ .

>> `pe(V,W)` calcula o produto escalar do vetor  $V$  pelo vetor  $W$ .

>> `pv(V,W)` calcula o produto vetorial do vetor  $V$  pelo vetor  $W$ .

### Comandos gráficos do pacote GAAL:

>> `desvet(P,V)` desenha o vetor  $V$  com origem no ponto  $P$  e >> `desvet(V)` desenha o vetor  $V$  com origem no ponto  $O = (0,0,0)$ .

>> `po([P1;P2;...;Pn])` desenha os pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

>> `lineseg(P1,P2,'cor')` desenha o segmento de reta  $P_1P_2$ .

>> `eixos` desenha os eixos coordenados.

>> `box` desenha uma caixa em volta da figura.

>> `axiss` reescala os eixos com a mesma escala.

>> `rota` faz uma rotação em torno do eixo  $z$ .

>> `zoom3(fator)` amplifica a região pelo fator.

>> `tex(P,'texto')` coloca o texto no ponto  $P$ .

#### 3.2.17. Digite no prompt

`demog21,`

(sem a vírgula!). Esta função demonstra as funções gráficas para vetores.

#### 3.2.18. Coloque em duas variáveis $V$ e $W$ dois vetores bi-dimensionais ou tri-dimensionais a seu critério.

- (a) Use a função `ilvijk(V)` para visualizar o vetor  $V$  como uma soma de múltiplos escalares (combinação linear) dos vetores  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$ .
- (b) Use a função `ilpv(V,W)` para visualizar o produto vetorial  $V \times W$ .

(c) Use a função  $\text{ilproj}(W, V)$  para visualizar a projeção de  $V$  em  $W$ .

**3.2.19.** Use o MATLAB<sup>®</sup> para resolver os **Exercícios Numéricos**

## Exercícios Teóricos

**3.2.20.** Mostre que em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é perpendicular à base.

**3.2.21.** Mostre que o ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

**Sugestão para os próximos 2 exercícios:** Considere o paralelogramo  $ABCD$ . Seja  $U = \overrightarrow{AB}$  e  $V = \overrightarrow{AD}$ . Observe que as diagonais do paralelogramo são  $U + V$  e  $U - V$ .

**3.2.22.** Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares então ele é um losango.

**3.2.23.** Mostre que se as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo comprimento então ele é um retângulo.

**3.2.24.** Se  $V \cdot W = V \cdot U$  e  $V \neq \vec{0}$ , então  $W = U$ ?

**3.2.25.** Mostre que se  $V$  é ortogonal a  $W_1$  e  $W_2$ , então  $V$  é ortogonal a  $\alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2$ .

**3.2.26.** Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares. (Sugestão: mostre que  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ , usando o fato de que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  e  $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ .)

**3.2.27.** Sejam  $V$  um vetor não nulo no espaço e  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os ângulos que  $V$  forma com os vetores  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$ , respectivamente. Demonstre que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

(Sugestão:  $\cos \alpha = \frac{V \cdot \vec{i}}{\|V\| \|\vec{i}\|}$ ,  $\cos \beta = \frac{V \cdot \vec{j}}{\|V\| \|\vec{j}\|}$  e  $\cos \gamma = \frac{V \cdot \vec{k}}{\|V\| \|\vec{k}\|}$ .)

**3.2.28.** Demonstre que, se  $V$  e  $W$  são vetores quaisquer, então:

$$(a) \quad V \cdot W = \frac{1}{4} \left( \|V + W\|^2 - \|V - W\|^2 \right);$$

$$(b) \|V\|^2 + \|W\|^2 = \frac{1}{2} (\|V + W\|^2 + \|V - W\|^2).$$

(Sugestão: desenvolva os segundos membros das igualdades acima observando que  $\|V + W\|^2 = (V + W) \cdot (V + W)$  e  $\|V - W\|^2 = (V - W) \cdot (V - W)$ )

**3.2.29.** Demonstre que se  $V$  e  $W$  são vetores quaisquer, então:

$$(a) |V \cdot W| \leq \|V\| \|W\|;$$

$$(b) \|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|;$$

(Sugestão: mostre que  $\|V + W\|^2 = (V + W) \cdot (V + W) \leq (\|V\| + \|W\|)^2$ , usando o item anterior)

$$(c) \left| \|V\| - \|W\| \right| \leq \|V - W\|.$$

(Sugestão: defina  $U = V - W$  e aplique o item anterior a  $U$  e  $W$ )

**3.2.30.** O produto vetorial é associativo? Justifique a sua resposta. (Sugestão: experimente com os vetores  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ )

**3.2.31.** Se  $V \times W = V \times U$  e  $V \neq \vec{0}$ , então  $W = U$ ?

**3.2.32.** Demonstre que se  $V$  e  $W$  são vetores quaisquer no espaço, então

$$\|V \times W\| \leq \|V\| \|W\|.$$

**3.2.33.** Se  $U, V$  e  $W$  são vetores no espaço, prove que  $|U \cdot (V \times W)| \leq \|U\| \|V\| \|W\|$ . (Sugestão: use o Teorema 3.2 na página 163 e o exercício anterior)

**3.2.34.** Mostre que  $U \cdot (V \times W) = V \cdot (W \times U) = W \cdot (U \times V)$ . (Sugestão: use as propriedades do determinante)

**3.2.35.** Mostre que

$$(a) (\alpha U_1 + \beta U_2) \cdot (V \times W) = \alpha U_1 \cdot (V \times W) + \beta U_2 \cdot (V \times W);$$

$$(b) U \cdot [(\alpha V_1 + \beta V_2) \times W] = \alpha U \cdot (V_1 \times W) + \beta U \cdot (V_2 \times W);$$

$$(c) U \cdot [V \times (\alpha W_1 + \beta W_2)] = \alpha U \cdot (V \times W_1) + \beta U \cdot (V \times W_2).$$

$$(d) \quad U \cdot (V \times W) = U \cdot [(V + \alpha U + \beta W) \times W].$$

(Sugestão: use as propriedades dos produtos escalar e vetorial)

**3.2.36.** Prove a identidade de Lagrange

$$||V \times W||^2 = ||V||^2 ||W||^2 - (V \cdot W)^2.$$

**3.2.37.** Mostre que a área do triângulo com vértices  $(x_i, y_i)$ , para  $i = 1, 2, 3$  é igual a  $|\det(A)|/2$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Sugestão: Marque os pontos  $P_1 = (x_1, y_1, 1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2, 1)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3, 1)$  e  $P'_1 = (x_1, y_1, 0)$ . O volume do paralelepípedo determinado por  $P_1, P_2, P_3$  e  $P'_1$  é dado por  $|\vec{P_1 P'_1} \cdot \vec{P_1 P_2} \times \vec{P_1 P_3}|$ . Mas, a altura deste paralelepípedo é igual a 1. Assim, o seu volume é igual à área da base que é o paralelogramo determinado por  $P_1, P_2$  e  $P_3$ . Observe que  $\vec{OP'_1}$ ,  $\vec{P_1 P_2}$  e  $\vec{P_1 P_3}$  são paralelos ao plano  $xy$ .)

**3.2.38.** Sejam  $U_1, U_2$  e  $U_3$  três vetores unitários mutuamente ortogonais. Se  $A = [U_1 \ U_2 \ U_3]$  é uma matriz  $3 \times 3$  cujas colunas são os vetores  $U_1, U_2$  e  $U_3$ , então  $A$  é invertível e  $A^{-1} = A^t$ . (Sugestão: mostre que  $A^t A = I_3$ .)

**3.2.39.** Sejam  $U = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $W = (w_1, w_2, w_3)$ . Prove a fórmula seguinte para o **produto vetorial duplo**

$$U \times (V \times W) = (U \cdot W)V - (U \cdot V)W,$$

seguindo os seguintes passos:

(a) Prove que

$$\begin{aligned} U \times (\vec{i} \times \vec{j}) &= (U \cdot \vec{j})\vec{i} - (U \cdot \vec{i})\vec{j} \\ U \times (\vec{j} \times \vec{k}) &= (U \cdot \vec{k})\vec{j} - (U \cdot \vec{j})\vec{k} \\ U \times (\vec{k} \times \vec{i}) &= (U \cdot \vec{i})\vec{k} - (U \cdot \vec{k})\vec{i} \end{aligned}$$

(b) Prove usando o item anterior e as propriedades do produto vetorial que

$$U \times (V \times \vec{i}) = (U \cdot \vec{i})V - (U \cdot V)\vec{i}$$

$$U \times (V \times \vec{j}) = (U \cdot \vec{j})V - (U \cdot V)\vec{j}$$

$$U \times (V \times \vec{k}) = (U \cdot \vec{k})V - (U \cdot V)\vec{k}$$

(c) Prove agora o caso geral usando o item anterior e as propriedades do produto vetorial.

**3.2.40.** (a) Prove que

$$[A \times (B \times C)] + [B \times (C \times A)] + [C \times (A \times B)] = 0$$

(Sugestão: use o exercício anterior).

(b) Mostre que se  $(A \times C) \times B = \vec{0}$ , então

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C,$$

ou seja, o produto vetorial é, neste caso, associativo.

### Apêndice III: Demonstração do item (e) do Teorema 3.5 na página 175

Vamos dividir a demonstração da distributividade do produto vetorial em relação a soma

$$V \times (W + U) = V \times W + V \times U \quad \text{e} \quad (V + W) \times U = V \times U + W \times U$$

da seguinte forma:

- (a)  $(V \times W) \cdot U > 0$  se, e somente se,  $V$ ,  $W$  e  $U$  satisfazem a regra da mão direita, isto é, se o ângulo entre  $V$  e  $W$  é  $\theta$ , giramos o vetor  $V$  de um ângulo  $\theta$  até que coincida com  $W$  e acompanhamos este movimento com os dedos da mão direita, então o polegar vai apontar no sentido de  $U$ .

- (b)  $(V \times W) \cdot U = V \cdot (W \times U)$ , ou seja, pode-se trocar os sinais  $\times$  e  $\cdot$  em  $(V \times W) \cdot U$ .
- (c)  $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$  e  $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$ .

Provemos, agora, os três itens acima.

- (a) Como vemos na **Figura 3.25 na página 184**  $V, W$  e  $U$  satisfazem a regra da mão direita se, e somente se,  $0 < \theta < \pi/2$ , ou seja,  $\cos \theta > 0$ , em que  $\theta$  é o ângulo entre  $V \times W$  e  $U$ . Como,  $(V \times W) \cdot U = ||V \times W|| ||U|| \cos \theta$ , então  $V, W$  e  $U$  satisfazem a regra da mão direita se, e somente se,  $(V \times W) \cdot U > 0$ .
- (b) Como o produto escalar é comutativo, pelo **Teorema 3.8 na página 183**,

$$|(V \times W) \cdot U| = |V \cdot (W \times U)|.$$

Agora, pelo item (a), temos que

$$(V \times W) \cdot U \text{ e } V \cdot (W \times U)$$

têm o mesmo sinal, pois  $V, W$  e  $U$  satisfazem a regra da mão direita se, e somente se,  $W, U$  e  $V$  também satisfazem.

- (c) Vamos provar a primeira igualdade e deixamos como exercício para o leitor a demonstração da segunda. Vamos mostrar que o vetor  $Y = V \times (W + U) - V \times W - V \times U$  é o vetor nulo. Para isso, vamos mostrar que para qualquer vetor  $X$  no espaço  $X \cdot Y = 0$ .

Pela distributividade do produto escalar, **Teorema 3.3 item (b) na página 166**, temos que

$$X \cdot Y = X \cdot V \times (W + U) - X \cdot (V \times W) - X \cdot (V \times U).$$

Pelo item (b), temos que

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (X \times V) \cdot (W + U) - (X \times V) \cdot W - (X \times V) \cdot U \\ &= (X \times V) \cdot (W + U) - (X \times V) \cdot (W + U) = 0 \end{aligned}$$



Assim,  $X \cdot Y = 0$ , para todo vetor  $X$ , em particular para  $X = Y$ , temos que  $Y \cdot Y = \|Y\|^2 = 0$ . Portanto  $Y = \vec{0}$ , ou seja,  $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$ .

## Teste do Capítulo

- 
1. Mostre que os pontos  $A = (4, 0, 1)$ ,  $B = (5, 1, 3)$ ,  $C = (3, 2, 5)$ ,  $D = (2, 1, 3)$  são vértices de um paralelogramo. Calcule a sua área.
- 
2. Dado o triângulo de vértices  $A = (0, 1, -1)$ ,  $B = (-2, 0, 1)$  e  $C = (1, -2, 0)$ , determine a medida da altura relativa ao lado  $BC$ .
- 
3. Sejam  $U$  e  $V$  vetores no espaço, com  $V \neq \vec{0}$ .
    - (a) Determine o número  $\alpha$ , tal que  $U - \alpha V$  seja ortogonal a  $V$ .
    - (b) Mostre que  $(U + V) \times (U - V) = 2V \times U$ .
- 
4. Determine  $x$  para que  $A = (x, 1, 2)$ ,  $B = (2, -2, -3)$ ,  $C = (5, -1, 1)$  e  $D = (3, -2, -2)$  sejam coplanares.
-

---

## Capítulo 4

# Retas e Planos

---

### 4.1 Equações de Retas e Planos

#### 4.1.1 Equações do Plano

##### Equação Geral

No plano a equação geral de uma reta é  $ax + by + c = 0$ . No espaço um plano é o conjunto dos pontos  $P = (x, y, z)$  que satisfazem a equação

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{para } a, b, c \in \mathbb{R},$$

que é chamada **equação geral do plano**. Existe uma analogia entre uma reta no plano e um plano no espaço. No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados sua inclinação e um de seus pontos. No espaço, a inclinação de um plano é caracterizada por um vetor perpendicular a ele, chamado **vetor normal ao plano** e a equação de um plano é determinada se são dados um vetor normal e um de seus pontos.

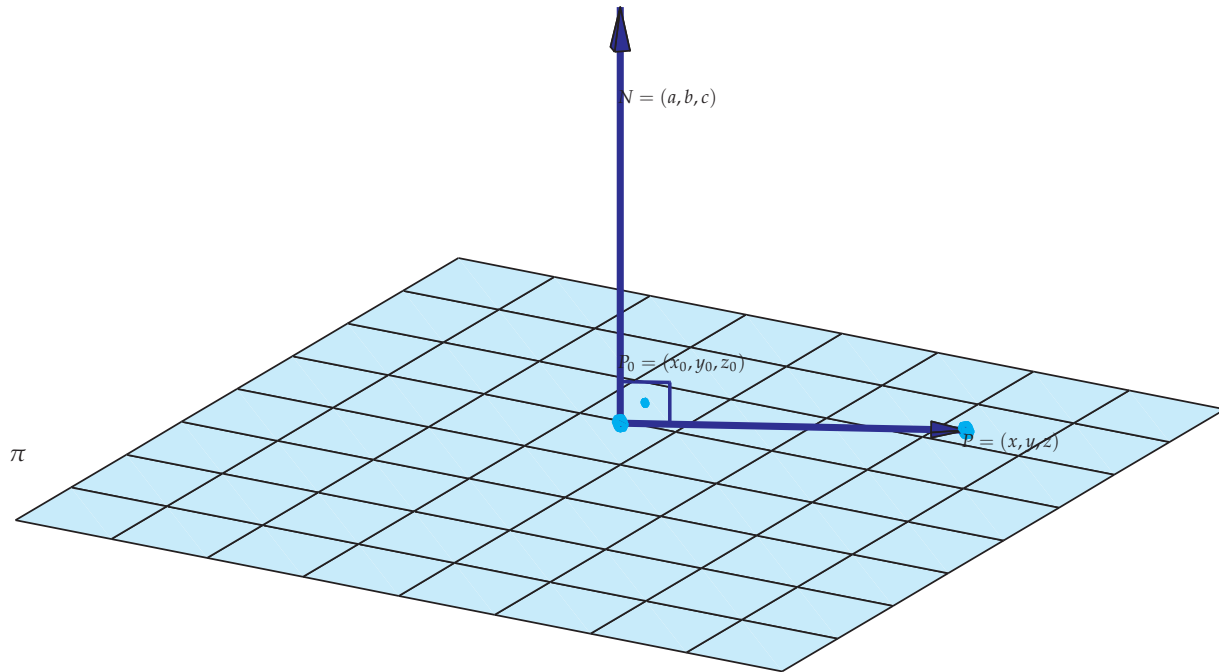


Figura 4.1: Plano perpendicular a  $N = (a, b, c)$  e que passa por  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

---

**Proposição 4.1.** A equação geral de um plano  $\pi$  que passa por um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e tem vetor normal  $N = (a, b, c)$  é

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (4.1)$$

em que  $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$ .

---

**Demonstração.** Um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence ao plano  $\pi$  se, e somente se, o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  for perpendicular ao vetor  $N$ , ou seja,

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0. \quad (4.2)$$

Como,  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ , a equação (4.2) pode ser reescrita como

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja,

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$



**Exemplo 4.1.** Vamos encontrar a equação do plano  $\pi$  que passa pelo ponto  $P_0 = (1, -2, -2)$  e é perpendicular ao vetor  $N = (2, -1, 2)$ . Da **Proposição 4.1**, a equação do plano é da forma

$$ax + by + cz + d = 0,$$

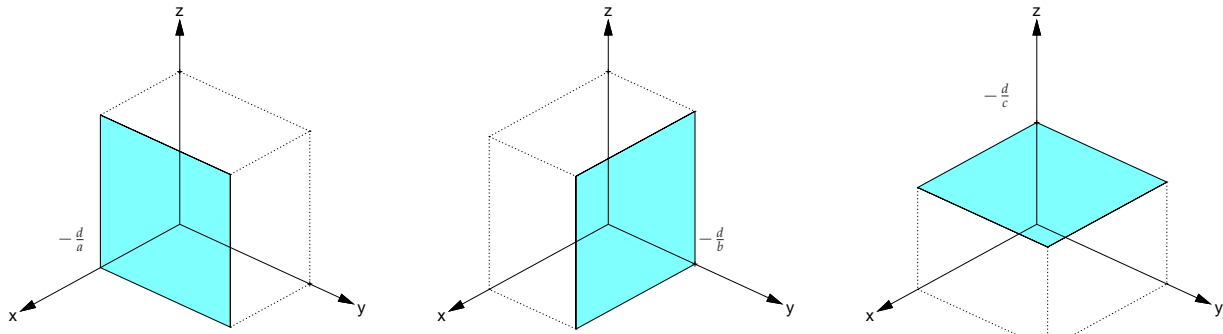


Figura 4.2: Planos  $ax - d = 0$ ,  $by + d = 0$  e  $cz + d = 0$

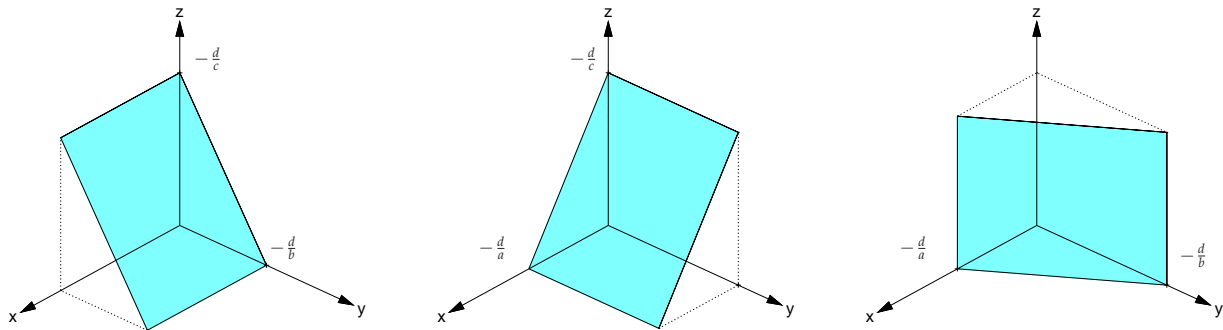


Figura 4.3: Planos  $by + cz + d = 0$ ,  $ax + cz + d = 0$  e  $ax + by + d = 0$

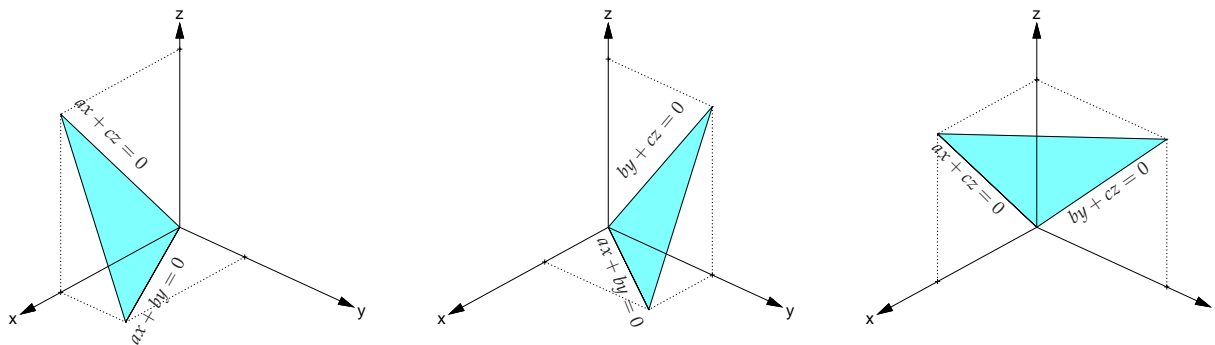


Figura 4.4: Planos  $ax + by + cz = 0$

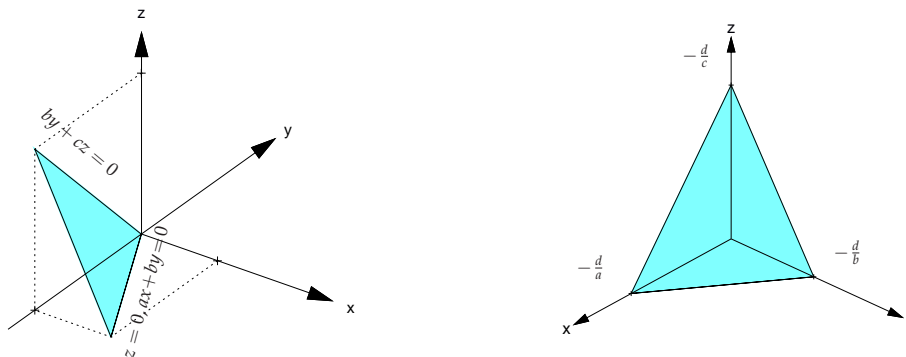


Figura 4.5: Planos  $ax + by + cz = 0$  e  $ax + by + cz + d = 0$



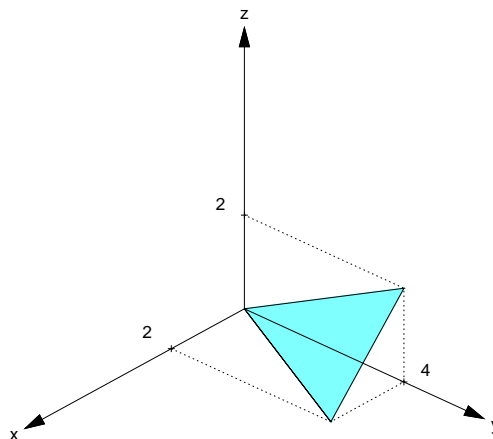


Figura 4.6: Plano  $2x - y + 2z = 0$

em que os coeficientes de  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as componentes do vetor normal, ou seja,  $a = 2$ ,  $b = -1$  e  $c = 2$ . Assim, a equação de  $\pi$  é da forma

$$2x - y + 2z + d = 0.$$

Para determinar o coeficiente  $d$ , ao invés de usarmos a **Proposição 4.1**, vamos usar o fato de que  $P_0 = (1, -2, -2)$  pertence a  $\pi$ . Mas, o ponto  $P_0$  pertence a  $\pi$  se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de  $\pi$ , ou seja,

$$2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + d = 0.$$

Logo,  $d = 2 + 2 - 4 = 0$ . Substituindo-se  $d = 0$  na equação anterior do plano obtemos que a equação do plano  $\pi$  é

$$2x - y + 2z = 0.$$

No plano, a equação de uma reta é determinada se forem dados dois pontos da reta. Analogamente, no espaço, a equação de um plano é determinada se são dados três pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  não colineares (isto é, não pertencentes a uma mesma reta). Com os três pontos podemos “formar” os vetores  $\overrightarrow{P_1P_2}$  e  $\overrightarrow{P_1P_3}$  (**Figura 4.7**).

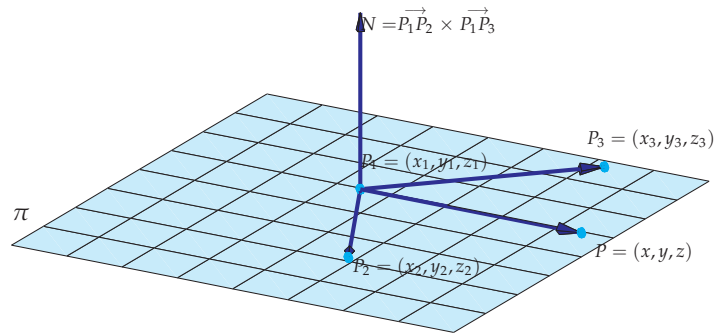
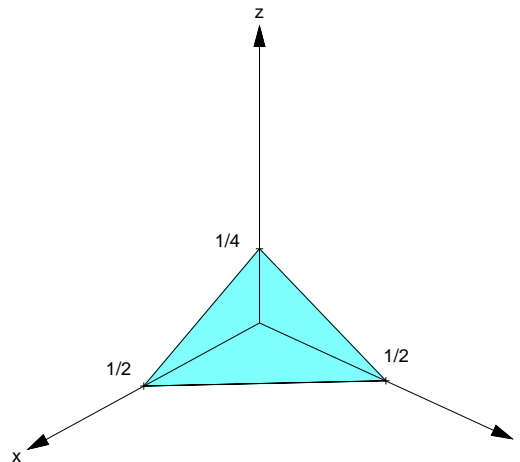


Figura 4.7: Plano que passa por três pontos

Figura 4.8: Plano  $2x + 2y + 4z - 1 = 0$

**Exemplo 4.2.** Vamos encontrar a equação do plano  $\pi$  que passa pelos pontos  $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ ,  $P_2 = (0, \frac{1}{2}, 0)$  e  $P_3 = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Com os três pontos podemos “formar” os vetores  $\overrightarrow{P_1P_2}$  e  $\overrightarrow{P_1P_3}$ . O vetor

$$N = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \times \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

é um vetor normal ao plano. Assim, a equação do plano é da forma

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z + d = 0,$$

em que os coeficientes de  $x, y$  e  $z$  são as componentes do vetor  $N$ . Para determinar o coeficiente  $d$ , vamos usar o fato de que o ponto  $P_1 = (\frac{1}{2}, 0, 0)$  pertence ao plano  $\pi$ . Mas, o ponto  $P_1$  pertence a  $\pi$  se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação de  $\pi$ , ou seja,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + d = 0.$$

Logo,  $d = -\frac{1}{8}$ . Finalmente, uma equação do plano  $\pi$  é

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8} = 0$$

ou multiplicando por 8, obtemos

$$2x + 2y + 4z - 1 = 0.$$

Alternativamente, podemos encontrar a equação do plano da seguinte forma. Como vimos anteriormente ([Corolário 3.9 na página 186](#)), três vetores,  $\overrightarrow{P_1P}$ ,  $\overrightarrow{P_1P_2}$  e  $\overrightarrow{P_1P_3}$ , são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é zero. Assim, um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence a  $\pi$  se, e somente se,

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P} &= (x - \frac{1}{2}, y, z) \\ \overrightarrow{P_1P_2} &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \\ \overrightarrow{P_1P_3} &= (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Então,

$$\det \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} & y & z \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z$$

e assim a equação do plano é dada por

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8} = 0.$$

ou multiplicando por 8,

$$2x + 2y + 4z - 1 = 0$$

A equação do plano também é determinada se ao invés de serem dados três pontos, forem dados um ponto  $P_1$  do plano e dois vetores paralelos ao plano,  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $W = (w_1, w_2, w_3)$ , desde que eles sejam não colineares. Ou ainda se forem dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  do plano e um vetor paralelo ao plano  $V = (v_1, v_2, v_3)$ , já que neste caso podemos formar o vetor  $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{P_1P_2} = (w_1, w_2, w_3)$  que é também paralelo ao plano.

Nestes casos temos novamente pelo menos duas maneiras de encontrarmos a equação do plano. Uma delas é observando que o vetor  $N = V \times W$  é um vetor normal ao plano. Desta forma temos um ponto do plano e um vetor normal ao plano. A outra é observando que temos três vetores paralelos ao plano:

$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ ,  $V$  e  $W$ . Como vimos anteriormente ([Corolário 3.9 na página 186](#)), os três vetores são coplanares se, e somente se, o produto misto entre eles é zero, ou seja,

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (V \times W) = \det \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.3)$$

Assim, um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence a um plano  $\pi$  que passa pelo ponto  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e é paralelo aos vetores  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $W = (w_1, w_2, w_3)$  (não paralelos) se, e somente se, a equação (4.3) é verdadeira.

**Observação.** Não faz sentido dizer que um vetor pertence a um plano. Pois, por um lado, um plano é um conjunto de pontos e por outro, os vetores são “livres”, podem ser “colocados” em qualquer ponto. O correto é dizer que um vetor é paralelo a um plano.

### Equações Paramétricas

Além da equação geral do plano podemos também caracterizar os pontos de um plano da seguinte forma. Considere um plano  $\pi$ , um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  pertencente a  $\pi$  e dois vetores  $V = (v_1, v_2, v_3)$  e  $W = (w_1, w_2, w_3)$  não colineares, paralelos a  $\pi$ . Um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence a  $\pi$  se, e somente se, o vetor

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  é uma combinação linear de  $V$  e  $W$  (**Corolário 3.10 na página 189**), ou seja, se existem escalares  $t$  e  $s$  tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = tV + sW. \quad (4.4)$$

Escrevendo em termos de componentes (4.4) pode ser escrito como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (tv_1 + sw_1, tv_2 + sw_2, tv_3 + sw_3).$$

Logo um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence a  $\pi$  se, e somente se, satisfaz as equações

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t + w_1 s \\ y = y_0 + v_2 t + w_2 s \\ z = z_0 + v_3 t + w_3 s \end{cases} \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}.$$

Estas equações são chamadas **equações paramétricas do plano**.

**Exemplo 4.3.** Podemos obter equações paramétricas do plano do **Exemplo 4.2 na página 210** usando o fato de que ele passa pelo ponto  $P_1 = (1/2, 0, 0)$  e é paralelo aos vetores  $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1/2, 1/2, 0)$ ,  $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1/2, -1/2, 1/2)$ . Assim,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s \\ z = \frac{1}{2}s \end{cases} \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 4.4.** Para encontrarmos as equações paramétricas do plano do **Exemplo 4.1 na página 204** podemos resolver a equação geral do plano  $4x + 2y + 3z = 0$ .

Podemos proceder como no caso de sistemas lineares e considerar as variáveis  $y$  e  $z$  livres:  $z = t$  e  $y = s$ . Assim,  $x = \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}s$  e portanto

$$\begin{cases} x &= \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}s \\ y &= s \\ z &= t \end{cases} \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R}.$$

são equações paramétricas do plano. Destas equações obtemos que os vetores  $V_1 = (\frac{3}{4}, 0, 1)$  e  $V_2 = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$  são paralelos ao plano.

### 4.1.2 Equações da Reta

#### Equações Paramétricas

Vamos supor que uma reta  $r$  é paralela a um vetor  $V = (a, b, c)$  não nulo e que passa por um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence a reta  $r$  se, e somente se, o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  é paralelo ao vetor  $V$ , isto é, se o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  é um múltiplo escalar de  $V$ , ou seja,

$$\overrightarrow{P_0P} = t V. \quad (4.5)$$

Em termos de componentes, a equação (4.5) pode ser escrita como

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (ta, tb, tc).$$

Logo,  $x - x_0 = ta$ ,  $y - y_0 = tb$  e  $z - z_0 = tc$ .

Ou seja, a reta  $r$  pode ser descrita como sendo o conjunto dos pontos  $P = (x, y, z)$  tais que

$$\begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb, \\ z &= z_0 + tc \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$



são de uma reta  $r$  que passa por um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e é paralela ao vetor  $V = (a, b, c)$ . As equações (4.6) são chamadas **equações paramétricas da reta  $r$** . O vetor  $V = (a, b, c)$  é chamado **vetor diretor da reta  $r$** .

O parâmetro  $t$  nas equações (4.6) pode ser interpretado como o instante de tempo, se o ponto  $P = (x, y, z)$  descreve o movimento de uma partícula em movimento retilíneo uniforme com vetor velocidade  $V = (a, b, c)$ . Observe que para  $t = 1$ ,  $P = (x, y, z) = (x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$ , para  $t = 2$ ,  $P = (x, y, z) = (x_0 + 2a, y_0 + 2b, z_0 + 2c)$  e assim por diante.

As equações (4.6), podem ser reescritas como

$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct),$$

que é chamada **equação vetorial da reta  $r$** .

---

**Observação.** Não faz sentido dizer que o vetor está contido na reta. Por um lado, a reta é um conjunto de pontos e por outro um vetor não tem posição fixa.

---

**Exemplo 4.5.** A reta que passa por  $P_0 = (-3, 3/2, 4)$  e é paralela ao vetor  $V = (-6, 1, 4)$  tem equações paramétricas

$$r: \begin{cases} x = -3 - 6t \\ y = \frac{3}{2} + t \\ z = 4 + 4t \end{cases} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}$$



Figura 4.9: Reta paralela ao vetor  $V = (a, b, c)$

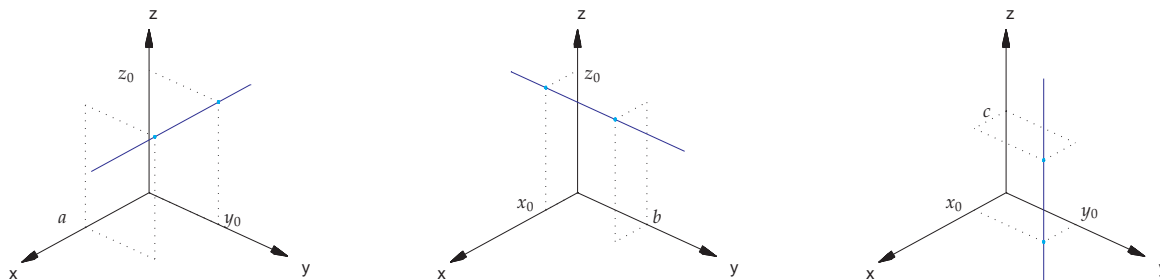


Figura 4.10: Retas  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0, z_0)$ ,  $(x, y, z) = (x_0, y_0 + bt, z_0)$  e  $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0 + ct)$

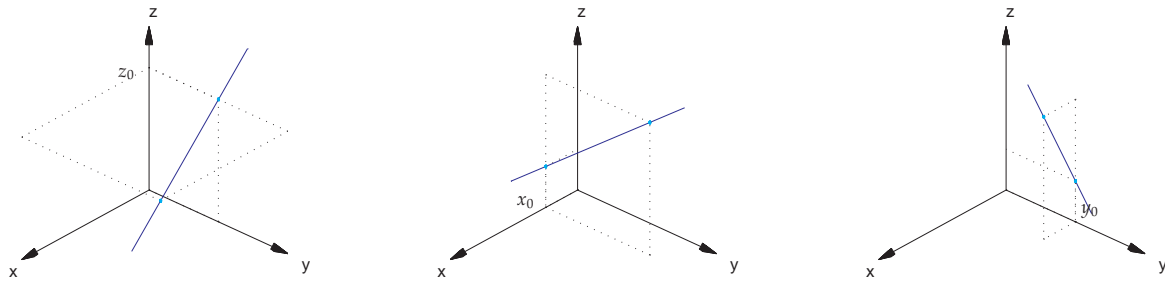


Figura 4.11: Retas  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0)$ ,  $(x, y, z) = (x_0, y_0 + bt, z_0 + ct)$  e  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0, z_0 + ct)$



Figura 4.12: Retas  $(x, y, z) = (at, bt, ct)$  e  $(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$

Podemos encontrar a interseção da reta  $r$  com os planos coordenados  $xy$ ,  $yz$  e  $xz$ . A equação do plano  $xy$  é  $z = 0$ , do plano  $yz$  é  $x = 0$  e do plano  $xz$  é  $y = 0$ . Substituindo  $z = 0$  nas equações de  $r$ , obtemos  $t = -1$ ,  $x = 3$  e  $y = 1/2$ , ou seja,

- o ponto de interseção de  $r$  com o plano  $xy$  é

$$(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, 0).$$

De forma análoga obtemos

- o ponto de interseção de  $r$  com o plano  $yz$  é

$$(x, y, z) = (0, 1, 2),$$

- o ponto de interseção de  $r$  com o plano  $xz$

$$(x, y, z) = (6, 0, -2).$$

### Equações na Forma Simétrica

Se todas componentes do vetor diretor da reta  $r$  são não nulos, podemos resolver cada equação em (4.6) para  $t$  e igualar os resultados obtendo o que chamamos de **equações na forma simétrica** de  $r$ :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

No **Exemplo 4.5** as equações de  $r$  na forma simétrica são:

$$\frac{x + 3}{-6} = \frac{y - 3/2}{1} = \frac{z - 4}{4}.$$

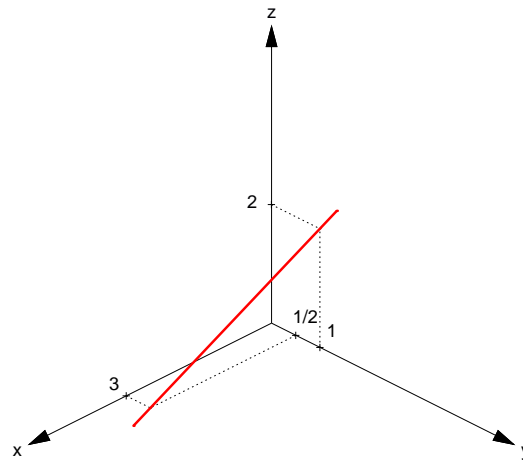


Figura 4.13: Reta que passa pelo ponto  $P_0 = (-3, 3/2, 4)$  paralela ao vetor  $V = (-6, 1, 4)$

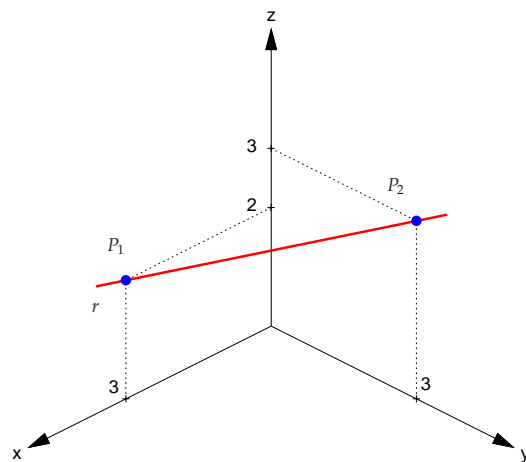


Figura 4.14: Reta que passa pelos pontos  $P_1 = (3, 0, 2)$  e  $P_2 = (0, 3, 3)$

**Exemplo 4.6.** Vamos encontrar as equações paramétricas da reta  $r$  que passa pelos pontos  $P_1 = (3, 0, 2)$  e  $P_2 = (0, 3, 3)$ . O vetor

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0 - 3, 3 - 0, 3 - 2) = (-3, 3, 1)$$

é paralelo a  $r$  e o ponto  $P_1 = (3, 0, 2)$  pertence a  $r$ . Portanto, as equações paramétricas de  $r$  são

$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 4.7.** Vamos encontrar as equações paramétricas da reta  $r$ , interseção dos planos

$$\begin{aligned} \pi_1 : 2x + y + 4z - 4 &= 0 \\ \pi_2 : 2x - y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Vetores normais destes planos são

$$N_1 = (2, 1, 4) \text{ e } N_2 = (2, -1, 2).$$

A reta  $r$  está contida em ambos os planos, portanto é perpendicular a ambos os vetores normais. Assim, a reta  $r$  é paralela ao produto vetorial  $N_1 \times N_2$  (**Teorema 3.5 (c) na página 175**).

$$N_1 \times N_2 = \left( \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) = (6, 4, -4).$$

Assim,  $V = N_1 \times N_2 = (6, 4, -4)$  é um vetor diretor de  $r$ . Agora, precisamos encontrar um ponto da reta  $r$ . Este ponto é uma solução particular do sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z - 4 = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

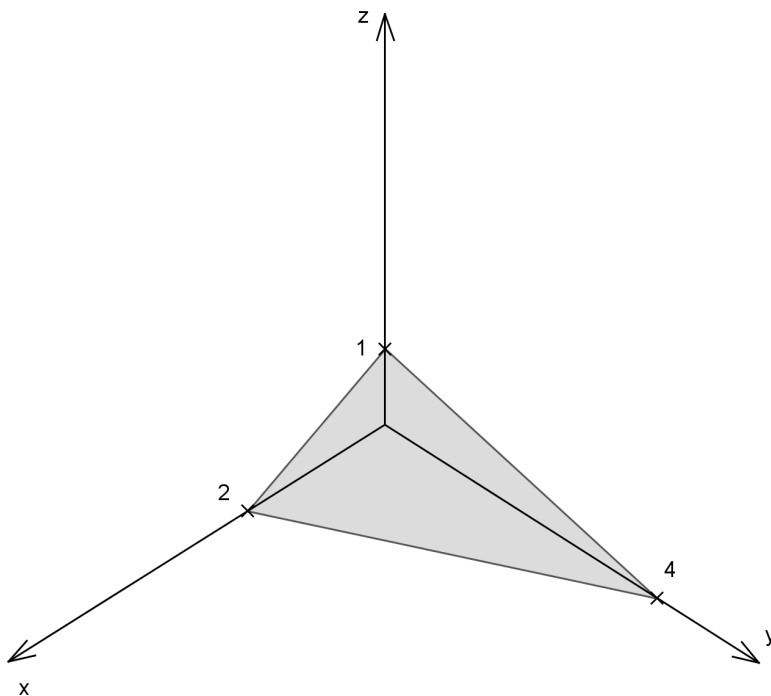


Figura 4.15:  $\pi_1 : 2x + y + 4z - 4 = 0$



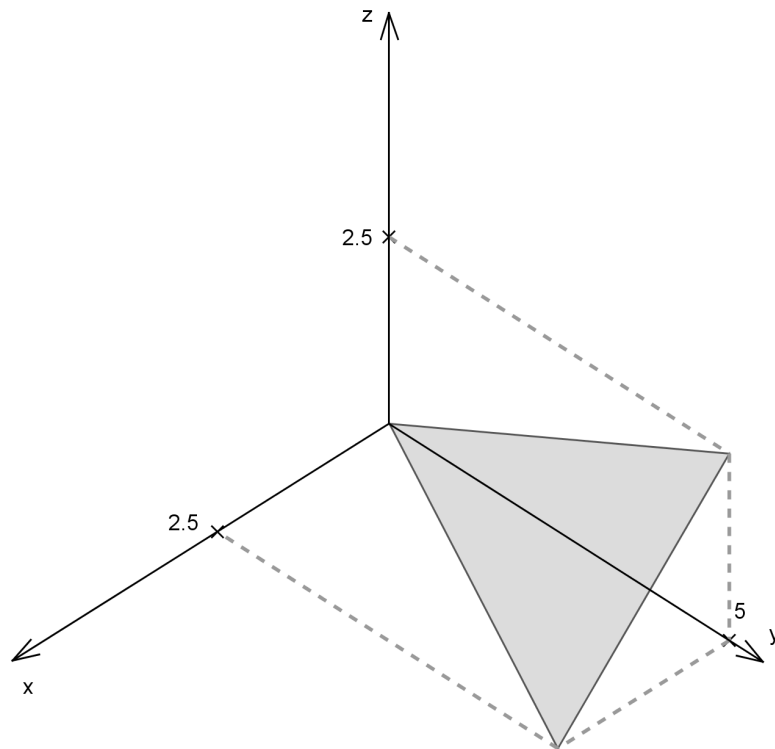


Figura 4.16:  $\pi_2 : 2x - y + 2z = 0$

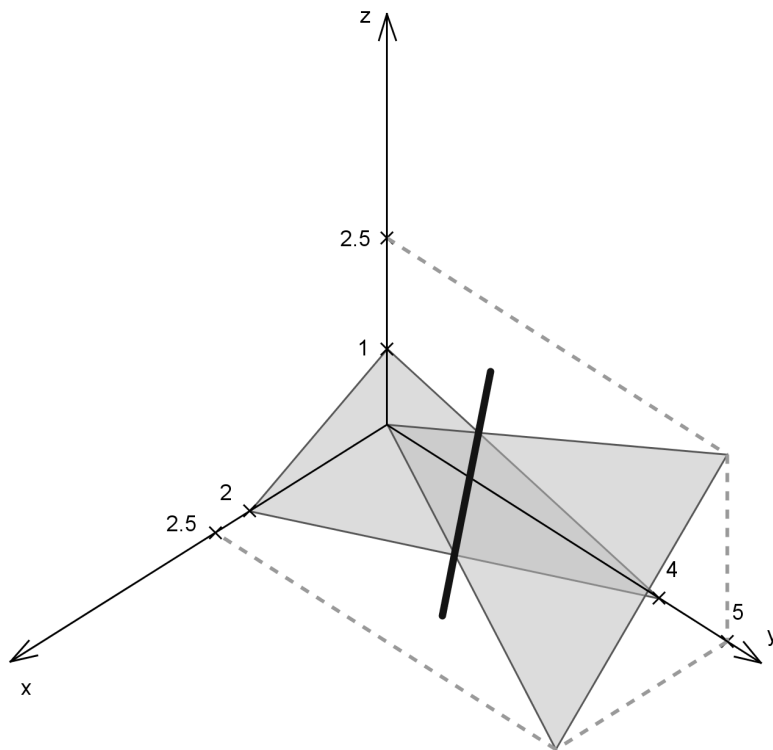


Figura 4.17:  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_1 \cap \pi_2$

Para encontrar uma solução particular do sistema, atribuímos um valor a uma das incógnitas (neste exemplo podemos fazer  $x = 0$ ) e resolvemos o sistema obtido, que é de duas equações e duas incógnitas

$$\begin{cases} y + 4z = 4 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$$

Obtemos então,  $y = 4/3$  e  $z = 2/3$ , ou seja, o ponto  $P_0 = (0, 4/3, 2/3)$  é um ponto da reta  $r$ , pois é uma solução particular do sistema (4.7). Assim, as equações paramétricas de  $r$  são

$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 4/3 + 4t \\ z = 2/3 - 4t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

Alternativamente, podemos encontrar as equações paramétricas de  $r$  determinando a solução geral do sistema (4.7). Para isto devemos escalonar a matriz do sistema (4.7):

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Precisamos “zerar” o outro elemento da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha, menos a 1ª linha.

$$\boxed{-1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array} \right]$$

Agora, já podemos obter facilmente a solução geral do sistema dado, já que ele é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 4 \\ -2y - 2z = -4 \end{cases}$$

A variável  $z$  é uma variável livre. Podemos dar a ela um valor arbitrário, digamos  $t$ , para  $t \in \mathbb{R}$  qualquer. Assim, a solução geral do sistema dado é

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{3}{2}t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Estas equações são diferentes das equações (4.8), mas representam a mesma reta, pois os vetores diretores obtidos das duas equações são paralelos e o ponto  $P_0 = (1, 2, 0)$  satisfaz também as equações (4.9). Poderíamos dizer também que (4.8) e (4.9) representam retas coincidentes.

O próximo exemplo mostra como encontrar a equação da reta que é perpendicular a duas retas.

**Exemplo 4.8.** Achar as equações da reta  $r_3$  que intercepta as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

e

$$r_2 : x - 2 = \frac{y - 4}{2} \quad \text{e} \quad z = 3$$

e é perpendicular a ambas.

Um ponto qualquer da reta  $r_1$  é descrito por  $P_{r_1} = (-1 + 2t, 1 + t, 0)$  e um ponto qualquer da reta  $r_2$  é da forma  $P_{r_2} = (2 + s, 4 + 2s, 3)$ . Aqui é necessário o uso de um parâmetro diferente para a reta  $r_2$ . O vetor  $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (3 + s - 2t, 3 + 2s - t, 3)$  “liga” um ponto qualquer de  $r_1$  a um ponto qualquer de  $r_2$ . Vamos determinar  $t$  e  $s$  tais que o vetor  $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$  seja perpendicular ao vetor diretor  $V_1 = (2, 1, 0)$  de  $r_1$  e ao vetor

diretor  $V_2 = (1, 2, 0)$  de  $r_2$ , ou seja, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_1 = 9 + 4s - 5t = 0 \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_2 = 9 + 5s - 4t = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é  $t = 1$ ,  $s = -1$ . Logo  $P_{r_1} = (1, 2, 0)$ ,  $P_{r_2} = (1, 2, 3)$  e  $V_3 = \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0, 0, 3)$ . Assim as equações paramétricas da reta procurada são

$$r_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esta solução usou o fato de que as retas são reversas, isto é, elas não são paralelas, mas também não se interceptam. Como seria a solução se elas se interceptassem? Por exemplo se a reta  $r_2$  fosse dada por

$$r_2 : x - 2 = \frac{y - 4}{2} \quad \text{e} \quad z = 0 ?$$

## Exercícios Numéricos (respostas na página 483)

4.1.1. Faça um esboço dos seguintes planos:

(a)  $2x + 3y + 5z - 1 = 0$

(b)  $x - 2y + 4z = 0$

(c)  $3y + 2z - 1 = 0$

(d)  $2x + 3z - 1 = 0$

(e)  $3x + 2y - 1 = 0$

(f)  $5y - 2 = 0$

(g)  $3z - 2 = 0$

(h)  $2x - 1 = 0$

**4.1.2.** Faça um esboço das retas dadas a seguir:

(a)  $(x, y, z) = (-3 + 3t, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, 4 - 2t)$

(b)  $(x, y, z) = (2t, t, \frac{3}{2}t)$

(c)  $(x, y, z) = (1 + t, 2, 3 + 2t)$

(d)  $(x, y, z) = (1, 2 + 2t, \frac{5}{2} + \frac{3}{2}t)$

(e)  $(x, y, z) = (2 + 2t, 3 + t, 3)$

(f)  $(x, y, z) = (1, 2, 2 + 2t)$

(g)  $(x, y, z) = (1, 2 + 2t, 3)$

(h)  $(x, y, z) = (2 + 2t, 2, 3)$

**4.1.3.** Ache a equação do plano paralelo ao plano  $2x - y + 5z - 3 = 0$  e que passa por  $P = (1, -2, 1)$ .

**4.1.4.** Encontre a equação do plano que passa pelo ponto  $P = (2, 1, 0)$  e é perpendicular aos planos  $x + 2y - 3z + 2 = 0$  e  $2x - y + 4z - 1 = 0$ .

**4.1.5.** Encontrar a equação do plano que passa pelos pontos  $P = (1, 0, 0)$  e  $Q = (1, 0, 1)$  e é perpendicular ao plano  $y = z$ .

**4.1.6.** Determine a interseção da reta que passa pela origem e tem vetor diretor  $V = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  com o plano  $2x + y + z = 5$ .

**4.1.7.** Verifique se as retas  $r : (x, y, z) = (9t, 1 + 6t, -2 + 3t)$  e  $s : (x, y, z) = (1 + 2t, 3 + t, 1)$  se interceptam e em caso afirmativo determine a interseção. (Sugestão: a questão é se as trajetórias se cortam e não se as partículas se chocam, ou seja, elas não precisam estar num ponto no mesmo instante.)

**4.1.8.** Dadas as retas

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = z \quad \text{e} \quad s : x-2 = y = z,$$

obtenha uma equação geral para o plano determinado por  $r$  e  $s$ .

**4.1.9.** Sejam  $P = (4, 1, -1)$  e  $r : (x, y, z) = (2 + t, 4 - t, 1 + 2t)$ .

(a) Mostre que  $P \notin r$ ;

(b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por  $r$  e  $P$ .

- 4.1.10.** Dados os planos  $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$  e  $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$ , determine o plano que contém  $\pi_1 \cap \pi_2$  e é ortogonal ao vetor  $(-1, 1, -1)$ .
- 4.1.11.** Quais dos seguintes pares de planos se cortam segundo uma reta?
- (a)  $x + 2y - 3z - 4 = 0$  e  $x - 4y + 2z + 1 = 0$ ;
  - (b)  $2x - y + 4z + 3 = 0$  e  $4x - 2y + 8z = 0$ ;
  - (c)  $x - y = 0$  e  $x + z = 0$ .
- 4.1.12.** Encontre as equações da reta que passa pelo ponto  $Q = (1, 2, 1)$  e é perpendicular ao plano  $x - y + 2z - 1 = 0$ .
- 4.1.13.** Ache equações da reta que passa pelo ponto  $P = (1, 0, 1)$  e é paralela aos planos  $2x + 3y + z + 1 = 0$  e  $x - y + z = 0$ .
- 4.1.14.** Seja  $r$  a reta determinada pela interseção dos planos  $x + y - z = 0$  e  $2x - y + 3z - 1 = 0$ . Ache a equação do plano que passa por  $A = (1, 0, -1)$  e contém a reta  $r$ .
- 4.1.15.** Sejam  $r$  e  $s$  retas reversas passando por  $A = (0, 1, 0)$  e  $B = (1, 1, 0)$  e por  $C = (-3, 1, -4)$  e  $D = (-1, 2, -7)$ , respectivamente. Obtenha uma equação da reta concorrente com  $r$  e  $s$  e paralela ao vetor  $V = (1, -5, -1)$ .
- 4.1.16.** (a) Mostre que os planos  $2x - y + z = 0$  e  $x + 2y - z = 1$  se interceptam segundo uma reta  $r$ ;
- (b) Ache equações da reta que passa pelo ponto  $A = (1, 0, 1)$  e intercepta a reta  $r$  ortogonalmente.
- 4.1.17.** Considere as retas  $(x, y, z) = t(1, 2, -3)$  e  $(x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, 4, -6)$ . Encontre a equação geral do plano que contém estas duas retas.
- 4.1.18.** Determine as equações paramétricas da reta interseção dos planos:
- (a)  $x + 2y - 3z - 4 = 0$  e  $x - 4y + 2z + 1 = 0$ ;
  - (b)  $x - y = 0$  e  $x + z = 0$ .
- 4.1.19.** Considere o plano  $\pi : 2x + 2y - z = 0$ .

- (a) Determine as retas  $r$ , interseção do plano  $\pi$  com o plano  $yz$ ,  $s$ , interseção do plano  $\pi$  com o plano  $xz$  e  $t$ , interseção do plano  $\pi$  com o plano  $z = 2$ . Desenhe um esboço do plano  $\pi$  mostrando as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ .
- (b) Determine o volume do tetraedro determinado pelo plano  $\pi$ , os planos coordenados  $xz$  e  $yz$  e o plano  $z = 2$ . (Sugestão: este volume é igual a  $1/6$  do volume do paralelepípedo determinado por  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$ , em que  $O = (0,0,0)$ ,  $A$  é o ponto interseção do eixo  $z$  com o plano  $z = 2$ ,  $B$  é a interseção das retas  $r$  e  $t$  e  $C$  é a interseção das retas  $s$  e  $t$ .)
- (c) Determine a área da face do tetraedro contida no plano  $\pi$ .
- (d) Determine a altura do tetraedro relativa a face contida no plano  $\pi$ . (Sugestão: a reta ortogonal ao plano  $\pi$  que passa pelo ponto  $A$  intercepta o plano  $\pi$  num ponto  $P$  de forma que a altura procurada é igual a  $\|\vec{AP}\|$ )

**4.1.20.** Achar as equações da reta que intercepta as retas  $r_1$  e  $r_2$  e é perpendicular a ambas.

(a)

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t, \\ z = 4t \end{cases} \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

e

$$r_2 : x + 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 2}{3}.$$

(b)

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t, \\ z = 4t \end{cases} \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

e

$$r_2 : x = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 3}{3}.$$



## Exercícios usando o MATLAB®

>>  $V=[v1,v2,v3]$  cria um vetor  $V$ , usando as componentes numéricas  $v1$ ,  $v2$ ,  $v3$ . Por exemplo >>  $V=[1,2,3]$  cria o vetor  $V = (1,2,3)$ ;

>>  $V+W$  é a soma de  $V$  e  $W$ ; >>  $V-W$  é a diferença  $V$  menos  $W$ ; >>  $num*V$  é o produto do vetor  $V$  pelo escalar  $num$ ;

>> `subs(expr,x,num,)` substitui  $x$  por  $num$  na expressão  $expr$ ;

>> `solve(expr)` determina a solução da equação  $expr=0$ ;

### Comandos numéricos do pacote GAAL:

>> `no(V)` calcula a norma do vetor  $V$ .

>> `pe(V,W)` calcula o produto escalar do vetor  $V$  pelo vetor  $W$ .

>> `pv(V,W)` calcula o produto vetorial do vetor  $V$  pelo vetor  $W$ .

>> `subst(expr,[x,y,z],[a,b,c])` substitui na expressão  $expr$  as variáveis  $x,y,z$  por  $a,b,c$ , respectivamente.

### Comandos gráficos do pacote GAAL:

>> `lin(P,V)` desenha a reta que passa por  $P$  com direção  $V$ .

>> `lin(P1,V1,P2,V2)` desenha retas que passam por  $P1$ ,  $P2$ , direções  $V1$ ,  $V2$ .

>> `plan(P,N)` desenha o plano que passa por  $P$  com normal  $N$ .

>> `plan(P1,N1,P2,N2)` desenha planos que passam por  $P1$ ,  $P2$ , normais  $N1$ ,  $N2$ .

>> `plan(P1,N1,P2,N2,P3,N3)` desenha planos que passam por  $P1$ ,  $P2$  e  $P3$  com normais  $N1$ ,  $N2$  e  $N3$ .

>> `poplan(P1,P2,N2)` desenha ponto  $P1$  e plano passando por  $P2$  com normal  $N2$ .

>> poline(P1,P2,V2) desenha ponto P2 e reta passando por P2 com direção V2.

>> lineplan(P1,V1,P2,N2) desenha reta passando por P1 com direção V1 e plano passando por P2 com normal N2.

>> axiss reescala os eixos com a mesma escala.

>> rota faz uma rotação em torno do eixo z.

**4.1.21.** Digite no prompt demog22, (sem a vírgula!). Esta função demonstra as funções gráficas para visualização de retas e planos.

**4.1.22.** Use o MATLAB<sup>®</sup> para resolver os **Exercícios Numéricos**

## Exercício Teórico

**4.1.23.** Seja  $ax + by + cz + d = 0$  a equação de um plano  $\pi$  com  $abcd \neq 0$ .

(a) Determine a interseção de  $\pi$  com os eixos;

(b) Se  $P_1 = (p_1, 0, 0)$ ,  $P_2 = (0, p_2, 0)$  e  $P_3 = (0, 0, p_3)$  são as interseções de  $\pi$  com os eixos, a equação de  $\pi$  pode ser posta sob a forma

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{p_2} + \frac{z}{p_3} = 1.$$

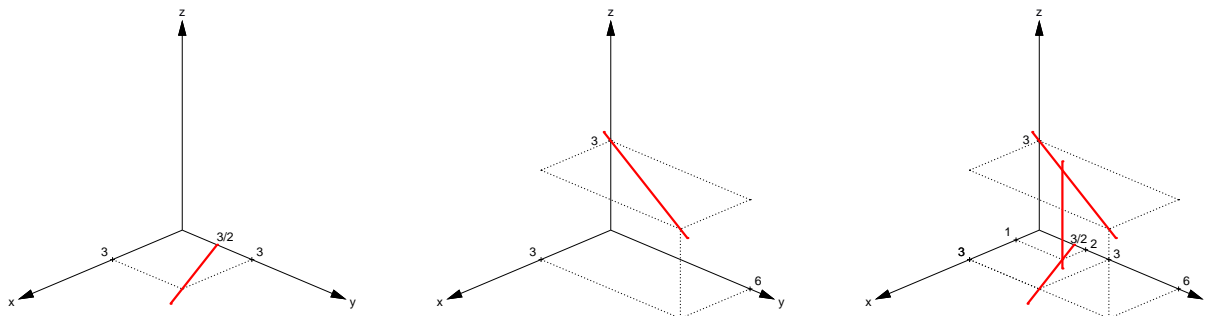


Figura 4.18: Retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  do Exemplo 4.8

## 4.2 Ângulos e Distâncias

### 4.2.1 Ângulos

#### Ângulo entre Retas

Com duas retas no espaço pode ocorrer um dos seguintes casos:

- (a) As retas se interceptam em um ponto, ou seja, são **concorrentes**;
- (b) As retas são paralelas (ou coincidentes);
- (c) As retas são **reversas**, isto é, não são paralelas mas também não se interceptam.

Se as retas se interceptam, então elas determinam quatro ângulos, dois a dois opostos pelo vértice. O ângulo entre elas é definido como sendo o menor destes ângulos.

Se as retas  $r_1$  e  $r_2$  são reversas, então por um ponto  $P$  de  $r_1$  passa uma reta  $r'_2$  que é paralela a  $r_2$ . O ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$  é definido como sendo o ângulo entre  $r_1$  e  $r'_2$  (Figura 4.19).

Se as retas são paralelas o ângulo entre elas é igual a zero.

Em qualquer dos casos, se  $V_1$  e  $V_2$  são vetores paralelos a  $r_1$  e  $r_2$  respectivamente, então o cosseno do ângulo entre elas é

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos \theta|,$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre  $V_1$  e  $V_2$ .

Lembrando que da definição de produto escalar (Definição 3.1 na página 161), podemos encontrar o cosseno do ângulo entre dois vetores, ou seja,

$$\cos \theta = \frac{V_1 \cdot V_2}{\|V_1\| \|V_2\|}.$$

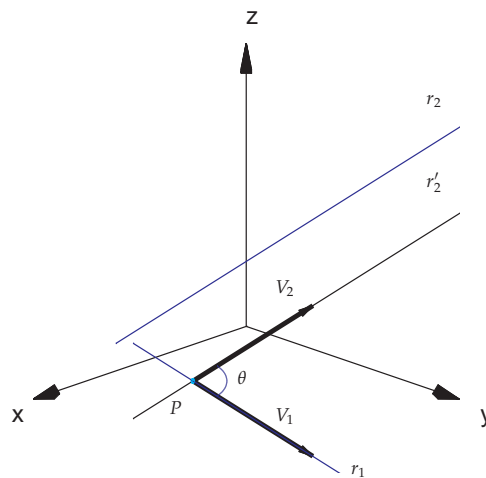


Figura 4.19: O Ângulo entre duas retas reversas  $r_1$  e  $r_2$

Isto prova o resultado seguinte.

---

**Proposição 4.2.** *Sejam duas retas*

$$r_1 : \begin{cases} x = x_1 + t a_1 \\ y = y_1 + t b_1 \\ z = z_1 + t c_1 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = x_2 + t a_2 \\ y = y_2 + t b_2 \\ z = z_2 + t c_2 \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O cosseno do ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$  é

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos \theta| = \frac{|V_1 \cdot V_2|}{\|V_1\| \|V_2\|},$$

em que  $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ .

---

**Exemplo 4.9.** Encontrar o ângulo entre a reta

$$r_1 : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

e a reta

$$r_2 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Vamos encontrar vetores paralelos a estas retas. A reta  $r_1$  é dada como a interseção de dois planos, portanto o produto vetorial dos vetores normais dos dois planos é paralelo a  $r_1$ .

$$N_1 = (1, 1, -1),$$

$$N_2 = (2, -1, 1),$$

$$V_1 = N_1 \times N_2 = \left( \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) = (0, -3, -3)$$

é paralelo a  $r_1$  e  $V_2 = (2, -1, 3)$  é paralelo a  $r_2$ . Assim,

$$\begin{aligned} \cos(r_1, r_2) &= \frac{|V_1 \cdot V_2|}{||V_1|| ||V_2||} = \frac{|0 \cdot 2 + (-3)(-1) + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|-6|}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$  é

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 67^\circ.$$

### Ângulo entre Planos

Sejam  $\pi_1$  e  $\pi_2$  dois planos com vetores normais  $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ , respectivamente. O ângulo entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é definido como o ângulo entre duas retas perpendiculares a eles. Como toda reta perpendicular a  $\pi_1$  tem  $N_1$  como vetor diretor e toda reta perpendicular a  $\pi_2$  tem  $N_2$  como vetor diretor, então o cosseno do ângulo entre eles é dado por

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = |\cos \theta|,$$

em que  $\theta$  é o ângulo entre os vetores normais  $N_1$  e  $N_2$  de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , respectivamente (Figura 4.20).

Portanto, o cosseno do ângulo entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é  $\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1|| ||N_2||}$ . O que prova o resultado seguinte.

**Proposição 4.3.** *Sejam dois planos*

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

O cosseno do ângulo entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1|| ||N_2||},$$

em que  $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$  são os vetores normais de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , respectivamente.

Dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  ou são paralelos ou se cortam segundo uma reta. Eles são paralelos se, e somente se, os vetores normais de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , são paralelos, ou seja, um vetor é um múltiplo escalar do outro. Assim,  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos se, e somente se, o ângulo entre eles é igual a zero.



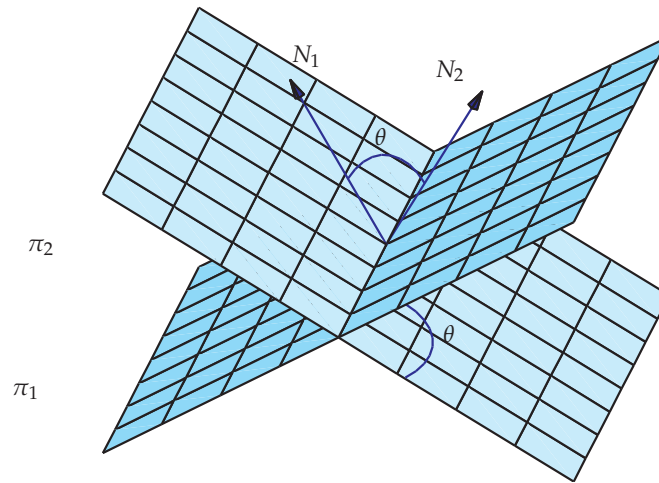


Figura 4.20: Ângulo entre dois planos

**Exemplo 4.10.** Determinar o ângulo entre os planos cujas equações são

$$\pi_1 : x + y + z = 0,$$

$$\pi_2 : x - y - z = 0.$$

Os vetores normais a estes planos são os vetores cujas componentes são os coeficientes de  $x$ ,  $y$  e  $z$  nas equações dos planos, ou seja,

$$N_1 = (1, 1, 1) \text{ e } N_2 = (1, -1, -1).$$

Assim, o cosseno do ângulo entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{||N_1|| ||N_2||} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, o ângulo entre eles é

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70^\circ.$$

## 4.2.2 Distâncias

### Distância de Um Ponto a Um Plano

Sejam  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer e  $\pi : ax + by + cz + d = 0$  um plano. A distância de  $P_0$  a  $\pi$  é definida como sendo a distância de  $P_0$  até o ponto de  $\pi$  mais próximo de  $P_0$ .

Dado um ponto  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  de  $\pi$ , podemos decompor o vetor  $\overrightarrow{P_1 P_0}$  em duas parcelas, uma na direção do vetor normal de  $\pi$ ,  $N = (a, b, c)$  e outra perpendicular

a ele. A componente na direção do vetor  $N$  é a projeção ortogonal de  $\overrightarrow{P_1P_0}$  em  $N$ . Como vemos na Figura 4.21, a distância de  $P_0$  a  $\pi$  é igual à norma da projeção, ou seja,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \|\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\|.$$

Mas, pela Proposição 3.4 na página 170, temos que

$$\|\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\| = \left\| \left( \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N}{\|N\|^2} \right) N \right\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{\|N\|}.$$

O que prova o resultado seguinte.

**Proposição 4.4.** *Sejam  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer e  $\pi : ax + by + cz + d = 0$  um plano. A distância de  $P_0$  a  $\pi$  é dada por*

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \|\text{proj}_N \overrightarrow{P_1P_0}\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{\|N\|},$$

em que  $N = (a, b, c)$  e  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  é um ponto de  $\pi$  (isto é, um ponto que satisfaz a equação de  $\pi$ ).

**Exemplo 4.11.** Calcular a distância entre o ponto  $P_0 = (1, 2, 3)$  ao plano

$$\pi : x - 2y + z - 1 = 0.$$

Fazendo  $z = 0$  e  $y = 0$  na equação de  $\pi$ , obtemos  $x = 1$ . Assim, o ponto  $P_1 = (1, 0, 0)$  pertence a  $\pi$ .

$$\overrightarrow{P_1 P_0} = (1 - 1, 2 - 0, 3 - 0) = (0, 2, 3)$$

e

$$N = (1, -2, 1).$$

Assim,

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \|\text{proj}_N \overrightarrow{P_1 P_0}\| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot N|}{\|N\|} = \frac{|0 \cdot 1 + 2(-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

### Distância de Um Ponto a Uma Reta

Sejam  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer e  $r$  uma reta. A distância de  $P_0$  a  $r$  é definida como a distância de  $P_0$  ao ponto de  $r$  mais próximo de  $P_0$ .

Dado um ponto qualquer  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  de  $r$  podemos decompor o vetor  $\overrightarrow{P_1 P_0}$  em duas parcelas, uma na direção do vetor diretor  $V$  de  $r$  e outra perpendicular a ele. A componente na direção do vetor  $V$  é a projeção ortogonal de  $\overrightarrow{P_1 P_0}$  em  $V$ . Como vemos na [Figura 4.22](#),

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 + \|\text{proj}_V \overrightarrow{P_1 P_0}\|^2 = \|\overrightarrow{P_1 P_0}\|^2,$$

ou seja,

$$(\text{dist}(P_0, r))^2 = \|\overrightarrow{P_1 P_0}\|^2 - \|\text{proj}_V \overrightarrow{P_1 P_0}\|^2. \quad (4.10)$$

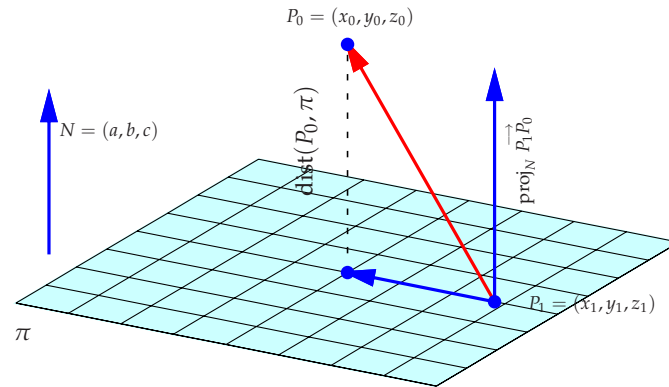


Figura 4.21: Distância de um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  a um plano  $\pi$

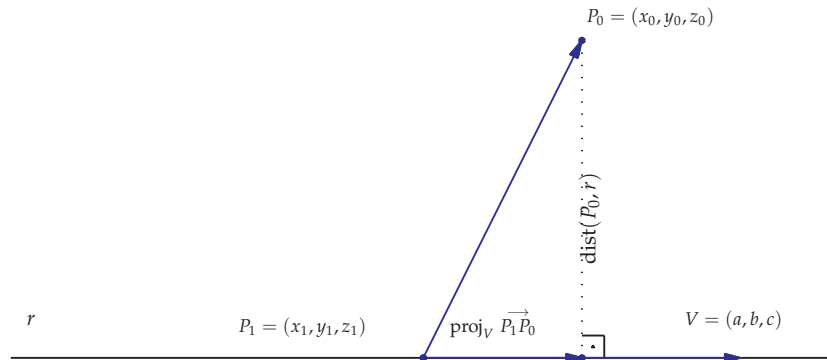


Figura 4.22: Distância de um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  a uma reta  $r$

Mas, pela **Proposição 3.4** na página 170, temos que

$$\|\text{proj}_V \vec{P_1P_0}\|^2 = \left\| \left( \frac{\vec{P_1P_0} \cdot V}{\|V\|^2} \right) V \right\|^2 = \frac{(\vec{P_1P_0} \cdot V)^2}{\|V\|^2}.$$

Substituindo esta expressão em (4.10) e usando a definição do produto escalar na página 161 e da norma do produto vetorial na página 171 obtemos

$$\begin{aligned} (\text{dist}(P_0, r))^2 &= \|\vec{P_1P_0}\|^2 - \frac{(\vec{P_1P_0} \cdot V)^2}{\|V\|^2} = \frac{\|\vec{P_1P_0}\|^2 \|V\|^2 - (\vec{P_1P_0} \cdot V)^2}{\|V\|^2} \\ &= \frac{\|\vec{P_1P_0}\|^2 \|V\|^2 - \|\vec{P_1P_0}\|^2 \|V\|^2 \cos^2 \theta}{\|V\|^2} \\ &= \frac{\|\vec{P_1P_0}\|^2 \|V\|^2 \sin^2 \theta}{\|V\|^2} = \frac{\|\vec{P_1P_0} \times V\|^2}{\|V\|^2}. \end{aligned}$$

Isto prova o resultado seguinte.

**Proposição 4.5.** *Sejam  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto qualquer e*

$$r : \begin{cases} x &= x_1 + t a \\ y &= y_1 + t b \\ z &= z_1 + t c \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

*uma reta. A distância de  $P_0$  a  $r$  é dada por*

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{\|\vec{P_1P_0} \times V\|}{\|V\|}.$$

em que  $V = (a, b, c)$  é um vetor diretor e  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  é um ponto da reta  $r$ .

---

**Exemplo 4.12.** Calcular a distância do ponto  $P_0 = (1, -1, 2)$  à reta

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Um vetor diretor da reta  $r$  é  $V = (2, -1, -3)$  e um ponto de  $r$  é  $P_1 = (1, 0, 2)$ . Assim,

$$\overrightarrow{P_1 P_0} = (1 - 1, -1 - 0, 2 - 2) = (0, -1, 0),$$

$$\overrightarrow{P_1 P_0} \times V = (3, 0, 2),$$

$$\|\overrightarrow{P_1 P_0} \times V\| = \sqrt{13} \text{ e } \|V\| = \sqrt{14}.$$

Portanto,

$$\text{dist}(P_0, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_1 P_0} \times V\|}{\|V\|} = \sqrt{\frac{13}{14}}.$$

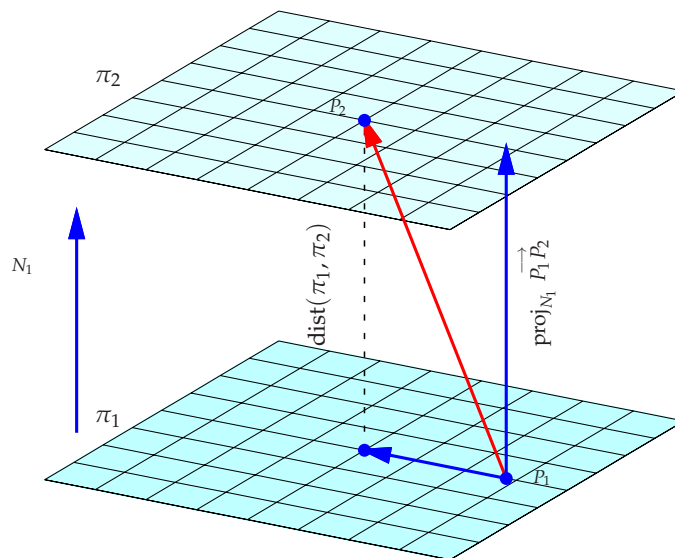


Figura 4.23: Distância entre dois planos



### Distância entre Dois Planos

Sejam dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  quaisquer. A distância entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é definida como a menor distância entre dois pontos, um de  $\pi_1$  e outro de  $\pi_2$ .

Se os seus vetores normais **não** são paralelos, então os planos são concorrentes e neste caso a distância entre eles é igual a zero. Se os seus vetores normais são paralelos, então os planos são paralelos (ou coincidentes) e a distância entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é igual à distância entre um ponto de um deles, por exemplo  $P_2$  de  $\pi_2$ , e o ponto de  $\pi_1$ , mais próximo de  $P_2$  (Figura 4.23). Mas, esta distância é igual à distância de  $P_2$  a  $\pi_1$ . Vamos ver isto em um exemplo.

**Exemplo 4.13.** Os planos  $\pi_1 : x + 2y - 2z - 3 = 0$  e  $\pi_2 : 2x + 4y - 4z - 7 = 0$  são paralelos, pois os seus vetores normais  $N_1 = (1, 2, -2)$  e  $N_2 = (2, 4, -4)$  são paralelos (um é múltiplo escalar do outro). Vamos encontrar a distância entre eles.

Vamos encontrar dois pontos quaisquer de cada um deles. Fazendo  $z = 0$  e  $y = 0$  em ambas as equações obtemos  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 7/2$ . Assim,  $P_1 = (3, 0, 0)$  pertence a  $\pi_1$  e  $P_2 = (7/2, 0, 0)$  pertence a  $\pi_2$ . Portanto, pela **Proposição 4.4** temos que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\pi_1, \pi_2) &= \text{dist}(\pi_1, P_2) = \|\text{proj}_{N_1} \overrightarrow{P_1 P_2}\| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot N_1|}{\|N_1\|} \\ &= \frac{|(7/2 - 3, 0 - 0, 0 - 0) \cdot (1, 2, -2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|(1/2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

### Distância entre Duas Retas

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  duas retas quaisquer. A distância entre  $r_1$  e  $r_2$  é definida como a menor distância entre dois pontos, um de  $r_1$  e outro de  $r_2$ .

Para calcular a distância entre duas retas, vamos dividir em dois casos:

- (a) Se os **vetores diretores são paralelos**, então as retas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas (ou coincidentes). Neste caso, a distância entre elas é igual à distância entre um ponto de  $r_2$  e a reta  $r_1$ , ou vice-versa, entre um ponto de  $r_1$  e a reta  $r_2$  (Figura 4.24). Assim, pela **Proposição 4.5 na página 244**, temos que

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, r_2) = \frac{\|\vec{P_1 P_2} \times V_2\|}{\|V_2\|}, \quad (4.11)$$

em que  $P_1$  e  $P_2$  são pontos de  $r_1$  e  $r_2$  e  $V_1$  e  $V_2$  são vetores diretores de  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente.

- (b) Se os **vetores diretores não são paralelos**, então elas são reversas ou concorrentes. Os dois casos podem ser resolvidos da mesma forma. Estas retas definem dois planos paralelos (que podem ser coincidentes, no caso em que elas são concorrentes). Um é o plano que contém  $r_1$  e é paralelo a  $r_2$ , vamos chamá-lo de  $\pi_1$ . O outro, contém  $r_2$  e é paralelo a  $r_1$ ,  $\pi_2$ . O vetor  $N = V_1 \times V_2$ , é normal (ou perpendicular) a ambos os planos, em que  $V_1$  e  $V_2$  são os vetores diretores de  $r_1$  e  $r_2$  respectivamente. Assim, a distância entre as retas é igual à distância entre estes dois planos (Figura 4.25), ou seja,

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\vec{P_1 P_2} \cdot N|}{\|N\|} = \frac{|\vec{P_1 P_2} \cdot (V_1 \times V_2)|}{\|V_1 \times V_2\|} \quad (4.12)$$

em que  $P_1$  e  $P_2$  são pontos de  $r_1$  e  $r_2$  e  $V_1$  e  $V_2$  são vetores diretores de  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. Observe que se as retas são concorrentes a distância entre

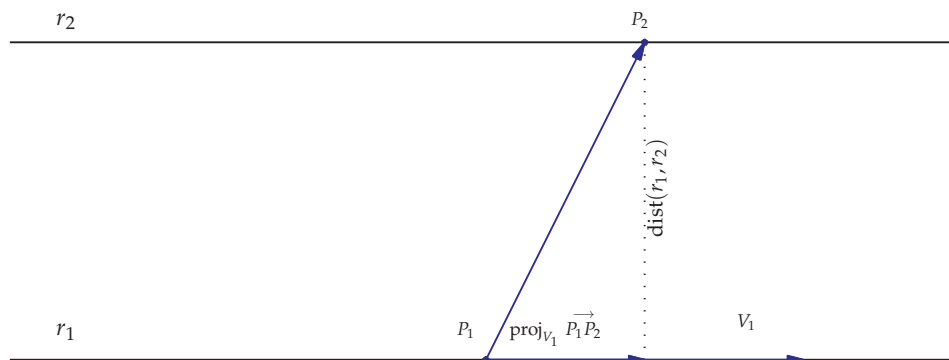


Figura 4.24: Distância entre duas retas paralelas

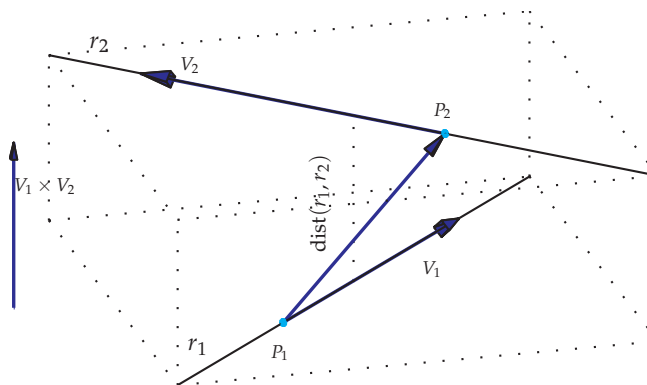


Figura 4.25: Distância entre duas retas reversas

elas é zero, pois os vetores  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $V_1$  e  $V_2$  são coplanares e  $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (V_1 \times V_2) = 0$  (Corolário 3.9 na página 186).

**Exemplo 4.14.** Vamos determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-6}.$$

e

$$r_2 : \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -t \\ z &= 2-3t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

As retas são paralelas, pois seus vetores diretores  $V_1 = (4, -2, -6)$  e  $V_2 = (2, -1, -3)$  (Exemplo 4.5 na página 215) são paralelos (um é um múltiplo escalar do outro, ou ainda as componentes correspondentes são proporcionais). Além disso, o ponto  $P_1 = (1, -1, 2)$  pertence à reta  $r_1$ . Como dissemos acima, a distância de  $r_1$  a  $r_2$  é igual à distância entre um ponto de  $r_2$  e a reta  $r_1$  (Figura 4.24). Assim, pela Proposição 4.5 na página 244, temos que

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, r_2) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times V_2\|}{\|V_2\|} = \sqrt{\frac{13}{14}}.$$

As contas são as mesmas do Exemplo 4.12 na página 245.

**Exemplo 4.15.** Determinar a distância entre as retas

$$r_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = z.$$

e

$$r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

As retas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas aos vetores  $V_1 = (3, 2, 1)$  e  $V_2 = (1, 2, -1)$  e passam pelos pontos  $P_1 = (-1, 1, 0)$  e  $P_2 = (0, 0, 1)$ , respectivamente. As retas não são paralelas, pois seus vetores diretores não são paralelos (observe que a 1ª componente de  $V_1$  é 3 vezes a 1ª componente de  $V_2$ , mas as 2ª's componentes são iguais). Logo,

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (0 - (-1), 0 - 1, 1 - 0) = (1, -1, 1).$$

Um vetor perpendicular a ambas as retas é

$$N = V_1 \times V_2 = (-4, 4, 4).$$

Este vetor é normal aos planos  $\pi_1$  (que contém  $r_1$  e é paralelo a  $r_2$ ) e  $\pi_2$  (que contém  $r_2$  e é paralelo a  $r_1$ ) (veja a [Figura 4.25](#)). Assim,

$$\begin{aligned} \text{dist}(r_1, r_2) &= \text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_1, P_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot N|}{\|N\|} \\ &= \frac{|1(-4) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{|-4|}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

## Exercícios Numéricos (respostas na página 497)

- 4.2.1.** Considere os vetores  $V = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $W = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  e  $U = \vec{i} - 2\vec{j}$ . Seja  $\pi$  um plano paralelo aos vetores  $W$  e  $U$  e  $r$  uma reta perpendicular ao plano  $\pi$ . Ache a projeção ortogonal do vetor  $V$  sobre a reta  $r$ , ou seja, a projeção ortogonal de  $V$  sobre o vetor diretor da reta  $r$ .
- 4.2.2.** Encontrar o ângulo entre o plano  $2x - y + z = 0$  e o plano que passa pelo ponto  $P = (1, 2, 3)$  e é perpendicular ao vetor  $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .
- 4.2.3.** Seja  $\pi_1$  o plano que passa pelos pontos  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (1, 0, 1)$ ,  $C = (1, 1, 0)$  e  $\pi_2$  o plano que passa pelos pontos  $P = (0, 0, 1)$  e  $Q = (0, 0, 0)$  e é paralelo ao vetor  $\vec{i} + \vec{j}$ . Ache o ângulo entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .
- 4.2.4.** Ache todas as retas que passam pelo ponto  $(1, -2, 3)$  e que formam ângulos de  $45^\circ$  e  $60^\circ$  com os eixos  $x$  e  $y$  respectivamente.
- 4.2.5.** Obtenha os vértices  $B$  e  $C$  do triângulo equilátero  $ABC$ , sendo  $A = (1, 1, 0)$  e sabendo que o lado  $BC$  está contido na reta  $r : (x, y, z) = t(0, 1, -1)$ . (Sugestão: Determine os pontos  $P_r$  da reta  $r$  tais que  $\overrightarrow{P_r A}$  faz ângulo de  $60^\circ$  e  $120^\circ$  com o vetor diretor da reta  $r$ )
- 4.2.6.** Seja  $\pi$  o plano que passa pela origem e é perpendicular à reta que une os pontos  $A = (1, 0, 0)$  e  $B = (0, 1, 0)$ . Encontre a distância do ponto  $C = (1, 0, 1)$  ao plano  $\pi$ .
- 4.2.7.** Seja  $r_1$  a reta que passa pelos pontos  $A = (1, 0, 0)$  e  $B = (0, 2, 0)$ , e  $r_2$  a reta

$$x - 2 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 4}{3}.$$

- (a) Encontre as equações da reta perpendicular às retas  $r_1$  e  $r_2$ ;
- (b) Calcule a distância entre  $r_1$  e  $r_2$ .
- 4.2.8.** Dados  $A = (0, 2, 1)$ ,  $r : X = (0, 2, -2) + t(1, -1, 2)$ , ache os pontos de  $r$  que distam  $\sqrt{3}$  de  $A$ . A distância do ponto  $A$  à reta  $r$  é maior, menor ou igual a  $\sqrt{3}$ ? Por que?
- 4.2.9.** Dada a reta  $r : X = (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$  e os pontos  $A = (1, 1, 1)$  e  $B = (0, 0, 1)$ , ache o ponto de  $r$  equidistante de  $A$  e  $B$ .

- 4.2.10.** Encontre a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes de  $A = (1, -1, 2)$  e  $B = (4, 3, 1)$ . Este plano passa pelo ponto médio de  $AB$ ? Ele é perpendicular ao segmento  $AB$ ?
- 4.2.11.** Ache as equações dos planos que são perpendiculares ao vetor  $(2, 2, 2)$  e que distam  $\sqrt{3}$  do ponto  $(1, 1, 1)$ .
- 4.2.12.** Determine os planos que contêm a reta

$$r : \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

e formam com o plano  $\pi_1 : x + z = 0$  um ângulo de  $60^\circ$ .

- 4.2.13.** (a) Verifique que a reta  $r : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, -1, 0)$  é paralela ao plano

$$\pi : x + y + z = 0.$$

(b) Calcule a distância de  $r$  a  $\pi$ .

(c) Existem retas contidas no plano  $\pi$ , que são reversas à reta  $r$  e distam 2 desta?

- 4.2.14.** (a) Determine a equação do plano  $\pi_1$  que passa por  $A = (10/3, 1, -1)$ ,  $B = (1, 9/2, -1)$  e  $C = (1, -1, 5/6)$ .
- (b) Determine a equação do plano  $\pi_2$  que passa por  $D = (-1, 4, -1)$ ,  $E = (3/2, -1, 10)$  e é paralelo ao eixo  $z$ .
- (c) Escreva equações paramétricas para a reta  $r$  interseção dos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .
- (d) Faça um esboço dos planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e da reta  $r$  no primeiro octante.
- (e) Qual o ângulo entre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ ?
- (f) Qual o ponto  $P$  de  $\pi_1$  que está mais próximo da origem? (Sugestão: este ponto é tal que  $\overrightarrow{OP}$  é ortogonal ao plano  $\pi_1$ .)

(g) Qual a área do triângulo  $ABC$ ?

## Exercícios usando o MATLAB®

4.2.15. Use o MATLAB® para resolver os Exercícios Numéricos

## Exercícios Teóricos

4.2.16. Prove que o lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de dois pontos distintos  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$  é um plano que passa pelo ponto médio do segmento  $AB$  e é perpendicular a ele. Esse plano é chamado **plano mediador** do segmento  $AB$ .

4.2.17. Mostre que a distância de um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  a um plano  $\pi : ax + by + cz + d = 0$  é

$$\text{dist}(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.2.18. Mostre que a distância entre dois planos paralelos  $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$  e  $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$  é

$$\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.2.19. Mostre que a distância entre duas retas não paralelas  $r_1 : (x, y, z) = (x_1 + ta_1, y_1 + tb_1, z_1 + tc_1)$  e  $r_2 : (x, y, z) = (x_2 + ta_2, y_2 + tb_2, z_2 + tc_2)$  é

$$\frac{\left| \det \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{\left( \det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \right)^2 + \left( \det \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} \right)^2 + \left( \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right)^2}}$$



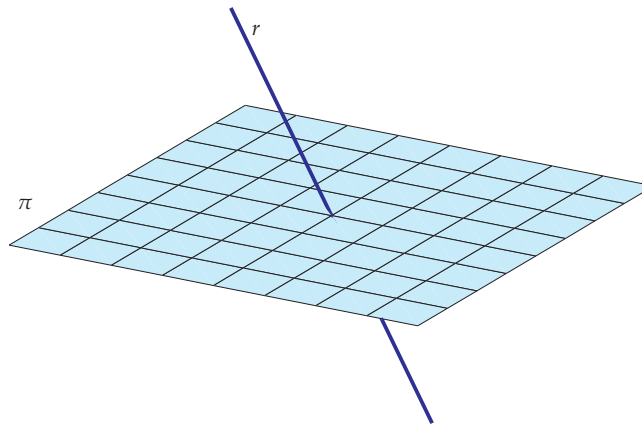


Figura 4.26: Reta e plano concorrentes

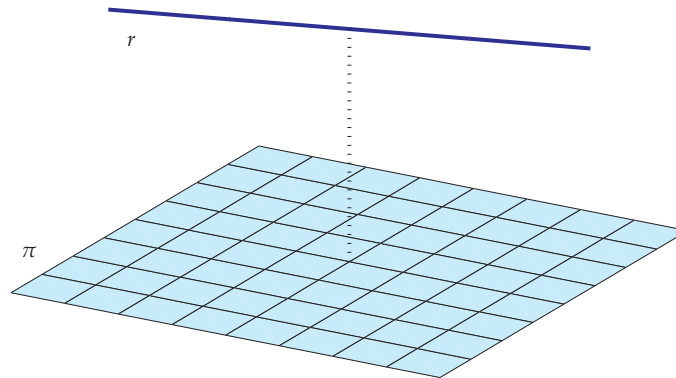


Figura 4.27: Reta e plano paralelos

- 4.2.20.** O ângulo entre uma reta  $r$  que tem vetor diretor  $V = (a_r, b_r, c_r)$  e um plano  $\pi$  que tem vetor normal  $N = (a_\pi, b_\pi, c_\pi)$  é definido pelo complementar do ângulo entre uma reta perpendicular ao plano  $\pi$  e a reta  $r$ . Mostre que

$$\text{sen}(r, \pi) = \frac{|N \cdot V|}{\|N\| \|V\|}.$$

- 4.2.21.** A distância entre uma reta  $r$  que passa por um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e tem vetor diretor  $V = (a_r, b_r, c_r)$  e um plano  $\pi : a_\pi x + b_\pi y + c_\pi z + d_\pi = 0$  é definida como a menor distância entre dois pontos um de  $r$  e outro de  $\pi$ . Se o vetor diretor da reta  $r$ ,  $V = (a_r, b_r, c_r)$ , não é ortogonal ao vetor normal do plano  $\pi$ ,  $N = (a_\pi, b_\pi, c_\pi)$ , então a reta e o plano são concorrentes e a distância entre eles é igual a zero, caso contrário a distância é igual a distância de uma ponto da reta  $r$  ao plano  $\pi$ . Mostre que

$$\text{dist}(r, \pi) = \begin{cases} \frac{|a_\pi x_0 + b_\pi y_0 + c_\pi z_0 + d_\pi|}{\sqrt{a_\pi^2 + b_\pi^2 + c_\pi^2}}, & \text{se } V \cdot N = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## Teste do Capítulo

- 
1. Ache os pontos do plano  $\pi : y = x$  que equidistam dos pontos  $A = (1, 1, 0)$  e  $B = (0, 1, 1)$ .
- 
2. Determine  $m, n \in \mathbb{R}$  para que a reta  $(x, y, z) = (n, 2, 0) + t(2, m, m)$  esteja contida no plano  $\pi : x - 3y + z = 1$ .
- 
3. (a) Encontre a equação do plano  $\pi$  que passa pelos pontos  $A = (0, 0, -1)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  e  $C = (1, 0, 1)$ .  
(b) Encontre a distância da origem ao plano  $\pi$ .
- 
4. (a) Mostre que os planos  $x - y = 0$  e  $y - z = 1$  se interceptam segundo uma reta  $r$ .  
(b) Ache a equação do plano que passa pelo ponto  $A = (1, 0, -1)$  e é perpendicular à reta  $r$ .
-

---

## Capítulo 5

# Espaços $\mathbb{R}^n$

---

### 5.1 Independência Linear

Já vimos que os vetores no plano são identificados com pares ordenados de números reais e que vetores no espaço são identificados com ternos ordenados de números reais. Muito do que estudamos sobre vetores no plano e no espaço pode ser estendido para  $n$ -uplas de números reais, em que  $n$  pode ser um número inteiro positivo.

#### 5.1.1 Os Espaços $\mathbb{R}^n$

---

**Definição 5.1.** Para cada inteiro positivo  $n$ , o **espaço (vetorial)**  $\mathbb{R}^n$  é definido pelo conjunto de todas as  $n$ -uplas ordenadas  $X = (x_1, \dots, x_n)$  de números reais.

---

O conjunto  $\mathbb{R}^1$  é simplesmente o conjunto dos números reais. O conjunto  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto dos pares de números reais e o  $\mathbb{R}^3$  é o conjunto dos ternos de números reais.

No  $\mathbb{R}^3$  o terno de números  $(x_1, x_2, x_3)$  pode ser interpretado geometricamente de duas maneiras: pode ser visto como um ponto, neste caso  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as coordenadas do ponto (Figura 5.1), ou como um vetor, neste caso  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as componentes do vetor (Figura 5.2). Também no  $\mathbb{R}^n$  uma  $n$ -upla pode ser pensada como um vetor ou como um ponto. Por exemplo, a quintupla  $X = (1, -2, 3, 5, 4)$  pode ser pensada como um ponto no  $\mathbb{R}^5$ , quando consideramos  $X$  como um elemento do conjunto  $\mathbb{R}^5$ , ou como um vetor do  $\mathbb{R}^5$ , quando fazemos operações com  $X$ , como as que iremos definir adiante. Vamos chamar os elementos do  $\mathbb{R}^n$  de **pontos** ou de **vetores** dependendo da situação.

Dois vetores  $V = (v_1, \dots, v_n)$  e  $W = (w_1, \dots, w_n)$  no  $\mathbb{R}^n$  são considerados **iguais** se  $v_1 = w_1, \dots, v_n = w_n$ . As operações de soma de vetores e multiplicação de vetor por escalar no  $\mathbb{R}^n$  são definidas de maneira análoga ao que fizemos no plano e no espaço.

---

**Definição 5.2.** (a) A **soma** de dois vetores  $V = (v_1, \dots, v_n)$  e  $W = (w_1, \dots, w_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  é definida por

$$V + W = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n); \quad (5.1)$$

(b) A **multiplicação** de um vetor  $V = (v_1, \dots, v_n)$  do  $\mathbb{R}^n$  por um escalar  $\alpha$  é definida por

$$\alpha V = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n). \quad (5.2)$$

O **vetor nulo** de  $\mathbb{R}^n$  é denotado por  $\bar{0}$  e é definido por  $\bar{0} = (0, \dots, 0)$ . Se  $V = (v_1, \dots, v_n)$  é um vetor do  $\mathbb{R}^n$ , então o **simétrico** de  $V$  é denotado por  $-V$  e é definido por  $-V = (-v_1, \dots, -v_n)$ . A **diferença** de dois vetores no  $\mathbb{R}^n$  é definida por  $V - W = V + (-W)$ . Se  $V$  e  $W$  são vetores do  $\mathbb{R}^n$  tais que  $W = \alpha V$ , para algum escalar  $\alpha$ , então dizemos que  $W$  é um **múltiplo escalar** de  $V$ .

Um vetor  $V = (v_1, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V = [v_1 \quad \dots \quad v_n].$$

Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}, \quad \alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{bmatrix}$$

ou

$$V + W = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 & \dots & v_n + w_n \end{bmatrix},$$

$$\alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 & \dots & \alpha v_n \end{bmatrix}$$

produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais

$$V + W = (v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$$

$$\alpha V = \alpha(v_1, \dots, v_n) = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n).$$

No teorema seguinte enunciamos as propriedades mais importantes da soma de vetores e multiplicação de vetores por escalar no  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 5.1.** *Sejam  $U = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $V = (v_1, \dots, v_n)$  e  $W = (w_1, \dots, w_n)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha$  e  $\beta$  escalares. São válidas as seguintes propriedades:*

- |                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| (a) $U + V = V + U$ ;             | (e) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$ ;       |
| (b) $(U + V) + W = U + (V + W)$ ; | (f) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$ ;    |
| (c) $U + \vec{0} = U$ ;           | (g) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$ ; |
| (d) $U + (-U) = \vec{0}$ ;        | (h) $1U = U$ .                                 |

**Demonstração.** Segue diretamente das propriedades da álgebra matricial ([Teorema 1.1 na página 9](#)). ■

O conceito de vetores pode ser generalizado ainda mais. Um conjunto não vazio onde estão definidas as operações de soma e multiplicação por escalar é chamado **espaço vetorial** se satisfaz as oito propriedades do [Teorema 5.1](#) (ver por exemplo [\[31\]](#)).

### 5.1.2 Combinação Linear

Uma combinação linear de vetores  $V_1, \dots, V_k$ , é simplesmente uma soma de múltiplos escalares de  $V_1, \dots, V_k$ .

---

**Definição 5.3.** Um vetor  $V \in \mathbb{R}^n$  é uma **combinação linear** dos vetores  $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$ , se existem escalares  $x_1, \dots, x_k$  que satisfazem a equação

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_k V_k = V \quad (5.3)$$

ou seja, se a equação vetorial (5.3) possui solução. Neste caso, dizemos também que  $V$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $V_1, \dots, V_k$ .

---

Se  $k = 1$ , então a equação (5.3) se reduz a  $x_1 V_1 = V$ , ou seja,  $V$  é uma combinação linear de  $V_1$  se, e somente se,  $V$  é um múltiplo escalar de  $V_1$ .

**Exemplo 5.1.** Sejam  $V_1 = (1, 0, 0)$  e  $V_2 = (1, 1, 0)$ , vetores de  $\mathbb{R}^3$ . O vetor  $V = (2, 3, 2)$  **não** é uma combinação linear de  $V_1$  e  $V_2$ , pois a equação

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 = V, \quad (5.4)$$

que pode ser escrita como

$$x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 1, 0) = (2, 3, 2),$$



ou ainda,

$$(x_1 + x_2, x_2, 0) = (2, 3, 2),$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 3 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

que **não** possui solução.

**Exemplo 5.2.** O vetor  $V = (2, 3, 0)$  é uma combinação linear de  $V_1 = (1, 0, 0)$  e  $V_2 = (1, 1, 0)$ , pois a equação

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 = V \quad (5.5)$$

ou

$$x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 1, 0) = (2, 3, 0)$$

ou ainda,

$$(x_1 + x_2, x_2, 0) = (2, 3, 0),$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

que possui solução.

**Exemplo 5.3.** O vetor nulo  $\vec{0}$  é sempre combinação linear de quaisquer vetores  $V_1, \dots, V_k$ , pois

$$\vec{0} = 0V_1 + \dots + 0V_k.$$

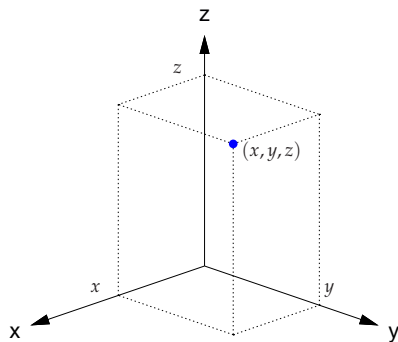


Figura 5.1: Ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

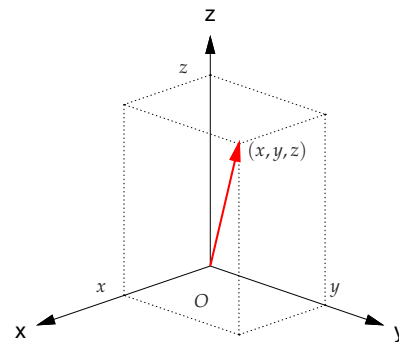


Figura 5.2: Vetor  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

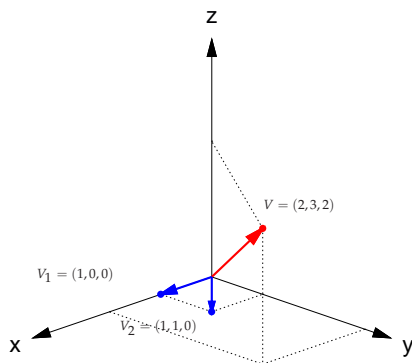


Figura 5.3: O vetor  $V$  **não** é combinação linear de  $V_1$  e  $V_2$

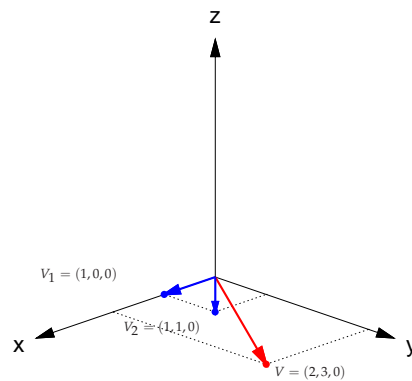


Figura 5.4: O vetor  $V$  **é** combinação linear de  $V_1$  e  $V_2$

**Exemplo 5.4.** Todo vetor  $V = (a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  é uma combinação linear de

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Pois,

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Para verificarmos se um vetor  $B$  é combinação linear de um conjunto de vetores  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , escrevemos a equação vetorial

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = B, \quad (5.6)$$

e verificamos se ela tem solução. Se  $A_1, \dots, A_n$  são vetores de  $\mathbb{R}^m$ , a equação (5.6), pode ser escrita como

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

que é equivalente ao sistema linear

$$AX = B,$$

em que as colunas de  $A$  são os vetores  $A_i$  escritos como matrizes colunas, ou seja,

$$A = [A_1 \dots A_n] \text{ e } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \text{ Isto prova o seguinte resultado.}$$

**Proposição 5.2.** *Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $B$  uma matriz  $m \times 1$ . O vetor  $B$  é combinação linear das colunas de  $A$  se, e somente se, o sistema  $AX = B$  tem solução.*

---

### 5.1.3 Independência Linear

---

**Definição 5.4.** Dizemos que um conjunto  $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_k\}$  de vetores de  $\mathbb{R}^n$  é **linearmente independente (L.I.)** se a equação vetorial

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_k V_k = \vec{0} \quad (5.7)$$

só possui a solução trivial, ou seja, se a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores  $V_1, \dots, V_k$  é aquela em que todos os escalares são iguais a zero. Caso contrário, isto é, se (5.7) possui solução **não** trivial, dizemos que o conjunto  $\mathcal{S}$  é **linearmente dependente (L.D.)**.

---

**Exemplo 5.5.** Um conjunto finito de vetores de  $\mathbb{R}^n$  que contém o vetor nulo é L.D., pois se  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é tal que  $V_j = \vec{0}$ , para algum  $j$ , então  $0V_1 + \dots + 0V_{j-1} + 1V_j + 0V_{j+1} + \dots + 0V_k = \vec{0}$ .

**Exemplo 5.6.** Um conjunto formado por um único vetor,  $\{V_1\}$ , **não nulo** é L.I., pois  $x_1 V_1 = \vec{0}$  é equivalente a  $x_1 = 0$  ou  $V_1 = \vec{0}$ . Mas,  $V_1 \neq \vec{0}$ ; portanto  $x_1 = 0$ .

**Exemplo 5.7.** Se  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é um conjunto de vetores L.D., então qualquer conjunto finito de vetores que contenha  $V_1, \dots, V_k$  é também L.D., pois a equação

$$x_1 V_1 + \dots + x_k V_k + 0 W_1 + \dots + 0 W_m = \vec{0}$$

admite solução não trivial.

**Exemplo 5.8.** Um conjunto formado por dois vetores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{V_1, V_2\}$  é L.D. se, e somente se, a equação  $x_1 V_1 + x_2 V_2 = \vec{0}$  possui solução não trivial. Mas se isto acontece, então um dos escalares  $x_1$  ou  $x_2$  pode ser diferente de zero. Se  $x_1 \neq 0$ , então  $V_1 = (-x_2/x_1)V_2$  e se  $x_2 \neq 0$ , então  $V_2 = (-x_1/x_2)V_1$ . Ou seja, se  $\{V_1, V_2\}$  é L.D., então um dos vetores é múltiplo escalar do outro.

Reciprocamente, se um vetor é múltiplo escalar do outro, digamos se  $V_1 = \alpha V_2$ , então  $1 V_1 - \alpha V_2 = \vec{0}$  e assim eles são L.D. Portanto, podemos dizer que dois vetores são L.D. se, e somente se, um é um múltiplo escalar do outro.

Por exemplo, o conjunto  $\mathcal{S} = \{V_1, V_2\}$ , em que  $V_1 = (1, 0, 1)$  e  $V_2 = (0, 1, 1)$ , é L.I., pois um vetor não é múltiplo escalar do outro.

**Exemplo 5.9.** Um conjunto formado por três vetores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\{V_1, V_2, V_3\}$  é L.D. se, e somente se, a equação  $x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 = \vec{0}$  possui solução não trivial. Mas se isto acontece, então um dos escalares  $x_1$  ou  $x_2$  ou  $x_3$  pode ser diferente de zero. Se  $x_1 \neq 0$ , então  $V_1 = (-x_2/x_1)V_2 + (-x_3/x_1)V_3$ , ou seja, o vetor  $V_1$  é combinação linear de  $V_2$  e  $V_3$ . De forma semelhante, se  $x_2 \neq 0$ , então  $V_2$  é combinação linear de

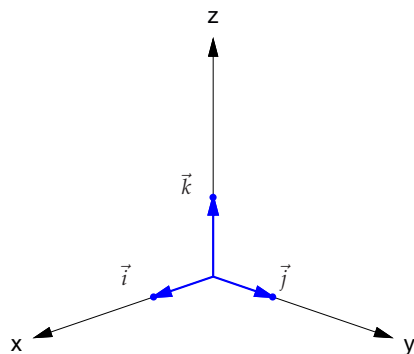


Figura 5.5: Vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$

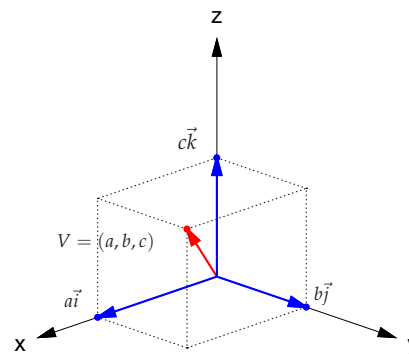


Figura 5.6:  $V = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

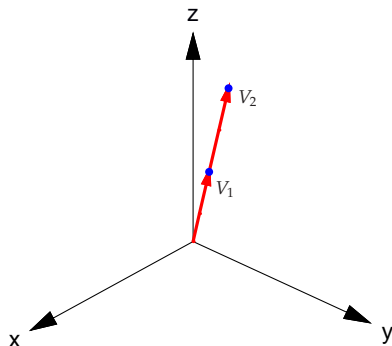


Figura 5.7: Dois vetores linearmente dependentes

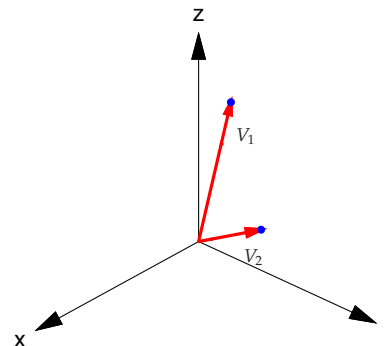


Figura 5.8: Dois vetores linearmente independentes

$V_1$  e  $V_3$  e se  $x_3 \neq 0$ , então  $V_3$  é combinação linear de  $V_1$  e  $V_2$ . Assim, se três vetores  $V_1, V_2$  e  $V_3$  do  $\mathbb{R}^n$  são L.D., então um deles é uma combinação linear dos outros dois, ou seja, em deles é uma soma de múltiplos escalares dos outros dois. No  $\mathbb{R}^3$  temos que se três vetores não nulos são L.D., então ou os três são paralelos (Figura 5.9), ou dois deles são paralelos (Figura 5.10) ou os três são coplanares, isto é, são paralelos a um mesmo plano (Figura 5.11).

Reciprocamente, se um vetor é uma combinação linear dos outros dois, digamos se  $V_1 = \alpha V_2 + \beta V_3$ , então  $1 V_1 - \alpha V_2 - \beta V_3 = \vec{0}$  e assim eles são L.D. Portanto, podemos dizer que três vetores são L.D. se, e somente se, um deles é uma combinação linear dos outros dois. No  $\mathbb{R}^3$ , se três vetores são L.I., então eles não são coplanares (Figura 5.12).

**Exemplo 5.10.** Vamos mostrar que os vetores  $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $E_n = (0, \dots, 0, 1)$  são L.I. em particular os vetores  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  são L.I. A equação

$$x_1 E_1 + \dots + x_n E_n = \vec{0}$$

pode ser escrita como

$$x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1) = (0, \dots, 0).$$

Logo,  $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ , que é equivalente ao sistema

$$x_1 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Para descobrir se um conjunto de vetores  $\{A_1, \dots, A_n\}$  é L.I. precisamos saber se a equação vetorial

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = \vec{0} \quad (5.8)$$

tem somente a solução trivial. Se  $A_1, \dots, A_n$  são vetores de  $\mathbb{R}^m$ , a equação (5.8), pode ser escrita como

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é equivalente ao sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$ , em que as colunas de  $A$  são

os vetores  $A_i$  escritos como matrizes colunas, ou seja,  $A = [A_1 \dots A_n]$  e  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ .

Isto prova o seguinte resultado.

**Proposição 5.3.** *Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$ .*

- (a) *As colunas de  $A$  são linearmente independentes se, e somente se, o sistema  $AX = \vec{0}$  tem somente a solução trivial.*
- (b) *Se  $m = n$ , então as colunas de  $A$  são linearmente independentes se, e somente se,*

$$\det(A) \neq 0.$$



Três ou mais vetores no  $\mathbb{R}^2$ , assim como quatro ou mais vetores no  $\mathbb{R}^3$  e mais de  $n$  vetores no  $\mathbb{R}^n$  são sempre L.D. Pois, nestes casos, o problema de verificar se eles são ou não L.I. leva a um sistema linear homogêneo com mais incógnitas do que equações, que pelo Teorema 1.6 na página 48 tem sempre solução não trivial.

---

**Corolário 5.4.** Em  $\mathbb{R}^n$  um conjunto com mais de  $n$  vetores é L.D.

---

**Exemplo 5.11.** Considere os vetores  $V_1 = (1, 0, 1)$ ,  $V_2 = (0, 1, 1)$  e  $V_3 = (1, 1, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Para sabermos se eles são L.I. ou L.D. escrevemos a equação

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 = \vec{0}.$$

Esta equação vetorial é equivalente ao sistema linear  $AX = \vec{0}$ , em que

$$A = [V_1 \ V_2 \ V_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escalonando a matriz  $[A \mid \vec{0}]$  podemos obter a sua forma escalonada reduzida

$$[R \mid \vec{0}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Concluimos, então que o sistema  $AX = \vec{0}$  possui somente a solução trivial  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Portanto os vetores  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  são L.I.

**Exemplo 5.12.** Sejam  $V_1 = (1, 2, 5)$ ,  $V_2 = (7, -1, 5)$  e  $V_3 = (1, -1, -1)$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ . Para sabermos se eles são L.I. ou L.D. escrevemos a equação

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 = \bar{0}. \quad (5.9)$$

Esta equação vetorial é equivalente ao sistema linear  $AX = \bar{0}$ , em que

$$A = [V_1 \ V_2 \ V_3] = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $[A \mid \bar{0}]$  é equivalente por linhas à matriz escalonada reduzida

$$[R \mid \bar{0}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (5.10)$$

Assim a variável  $x_3$  pode ser uma variável livre que pode, portanto, assumir qualquer valor. Concluimos que o sistema  $AX = \bar{0}$  e a equação vetorial (5.9) têm solução não trivial. Portanto,  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  são L.D.

A expressão “linearmente dependente” sugere que os vetores dependem uns dos outros em algum sentido. O teorema seguinte mostra que este realmente é o caso.

---

**Teorema 5.5.** *Um conjunto  $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_k\}$  ( $k > 1$ ) de vetores é linearmente dependente (L.D.) se, e somente se, pelo menos um dos vetores,  $V_j$ , for combinação linear dos outros vetores de  $\mathcal{S}$ .*

**Demonstração.** Vamos dividir a demonstração em duas partes:

- (a) Se  $V_j$  é uma combinação linear dos demais vetores do conjunto  $\mathcal{S}$ , isto é, se existem escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_k$  tais que

$$\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_{j-1} V_{j-1} + \alpha_{j+1} V_{j+1} + \dots + \alpha_k V_k = V_j,$$

então somando-se  $-V_j$  a ambos os membros ficamos com

$$\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_{j-1} V_{j-1} - V_j + \alpha_{j+1} V_{j+1} + \dots + \alpha_k V_k = \vec{0}. \quad (5.11)$$

Isto implica que a equação  $x_1 V_1 + \dots + x_k V_k = \vec{0}$  admite solução não trivial, pois o coeficiente de  $V_j$  em (5.11) é  $-1$ . Portanto,  $\mathcal{S}$  é L.D.

- (b) Se  $\mathcal{S}$  é L.D., então a equação

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_k V_k = \vec{0} \quad (5.12)$$

admite solução não trivial, o que significa que pelo menos um  $x_j$  é diferente de zero. Então, multiplicando-se a equação (5.12) por  $1/x_j$  e subtraindo-se  $(\frac{x_1}{x_j})V_1 + \dots + (\frac{x_k}{x_j})V_k$  obtemos

$$V_j = -\left(\frac{x_1}{x_j}\right) V_1 - \dots - \left(\frac{x_{j-1}}{x_j}\right) V_{j-1} - \left(\frac{x_{j+1}}{x_j}\right) V_{j+1} - \dots - \left(\frac{x_k}{x_j}\right) V_k.$$

Portanto, um vetor  $V_j$  é combinação linear dos outros vetores de  $\mathcal{S}$ . ■

**Observação.** Na demonstração da segunda parte, vemos que o vetor, cujo escalar na combinação linear, puder ser diferente de zero, pode ser escrito como combinação linear dos outros.

---

**Exemplo 5.13.** Sejam  $V_1 = (1, 2, 5)$ ,  $V_2 = (7, -1, 5)$  e  $V_3 = (1, -1, -1)$  vetores do  $\mathbb{R}^3$ . Vamos escrever um dos vetores como combinação linear dos outros dois. Vimos no Exemplo 5.12 que estes vetores são L.D. De (5.10) segue-se que

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 = \vec{0}$$

se, e somente se,  $x_1 = (2/5)\alpha$ ,  $x_2 = -(1/5)\alpha$  e  $x_3 = \alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Substituindo-se os valores de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  na equação acima, ficamos com

$$(2/5)\alpha V_1 - (1/5)\alpha V_2 + \alpha V_3 = \vec{0}$$

Tomando-se  $\alpha = 1$ , obtemos

$$(2/5)V_1 - (1/5)V_2 + V_3 = \vec{0}$$

multiplicando-se por  $-5$  e somando-se  $2V_1 + 5V_3$ , temos que  $V_2 = 2V_1 + 5V_3$ . Observe que, neste exemplo, qualquer dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos outros. O próximo exemplo mostra que isto nem sempre acontece.

**Exemplo 5.14.** Sejam  $V_1 = (-2, -2, 2)$ ,  $V_2 = (-3, 3/2, 0)$  e  $V_3 = (-2, 1, 0)$ .  $\{V_1, V_2, V_3\}$  é L.D., mas  $V_1$  não é combinação linear de  $V_2$  e  $V_3$  (Figura 5.10 na página 280).

### 5.1.4 Posições Relativas de Retas e Planos

#### Posições Relativas de Duas Retas

Vamos estudar a posição relativa de duas retas, usando a dependência linear de vetores. Sejam  $r_1 : (x, y, z) = (x_1 + ta_1, y_1 + tb_1, z_1 + tc_1)$  e  $r_2 : (x, y, z) = (x_2 + ta_2, y_2 + tb_2, z_2 + tc_2)$  as equações de duas retas.

- (a) Se os **vetores diretores**  $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$  são **L.D.**, então as retas são paralelas ou coincidentes. Além de paralelas, elas são coincidentes, se um ponto de uma delas pertence a outra, por exemplo se  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  pertence a  $r_2$  ou se  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  pertence a  $r_1$ . Ou ainda,
  - (i) Se  $V_1$  e  $\overrightarrow{P_1P_2}$  ou  $V_2$  e  $\overrightarrow{P_1P_2}$  são L.D. (com  $V_1$  e  $V_2$  L.D.), então elas são coincidentes.
  - (ii) Se  $V_1$  e  $\overrightarrow{P_1P_2}$  ou  $V_2$  e  $\overrightarrow{P_1P_2}$  são L.I. (com  $V_1$  e  $V_2$  L.D.), então elas são paralelas distintas.
- (b) Se os **vetores diretores**  $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$  são **L.I.** então as retas são reversas ou concorrentes.
  - (i) Se  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $V_1$  e  $V_2$  são L.D. (com  $V_1$  e  $V_2$  L.I.), então as retas são concorrentes.
  - (ii) Se  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $V_1$  e  $V_2$  são L.I., então as retas são reversas (Figura 5.13).

#### Posições Relativas de Dois Planos

Vamos estudar a posição relativa dos dois planos usando a dependência linear de vetores. Sejam  $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  e  $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  as equações de dois planos.

- (a) Se os **vetores normais**  $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$  são **L.D.**, então os planos são paralelos distintos ou coincidentes. Além de paralelos, eles são coincidentes se, e somente se, todo ponto que satisfaz a equação de um deles, satisfaz também a equação do outro. Ou ainda,
- (a) Se os vetores  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$  são L.D., então as equações são proporcionais e os planos são coincidentes.
- (b) Se os vetores  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$  são L.I. (com  $N_1$  e  $N_2$  L.D.), então os planos são paralelos distintos (Figura 5.15).
- (b) Se os **vetores normais**  $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$  são **L.I.**, então os planos são concorrentes (Figura 5.14).

### Posições Relativas de Reta e Plano

Vamos estudar a posição relativa de uma reta e um plano usando a dependência linear de vetores. Sejam  $r : (x, y, z) = (x_1 + ta_1, y_1 + tb_1, z_1 + tc_1)$  a equação de uma reta e  $\pi$  um plano que passa pelo ponto  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  e é paralelo aos vetores  $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$  e  $V_3 = (a_3, b_3, c_3)$ .

- (a) Se o vetor diretor da reta  $r$ ,  $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ , os vetores paralelos ao plano  $\pi$ ,  $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$  e  $V_3 = (a_3, b_3, c_3)$  são L.D., então a reta e o plano são paralelos ou a reta está contida no plano. A reta está contida no plano se além dos vetores  $V_1, V_2$  e  $V_3$  forem L.D., um ponto da reta pertence ao plano, por exemplo, se  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  pertence a  $\pi$ . Ou ainda,
- (a) Se  $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$  e  $V_3 = (a_3, b_3, c_3)$  são L.D. e  $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ,  $V_3 = (a_3, b_3, c_3)$  e  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  também são L.D., então a reta está contida no plano.
- (b) Se  $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ,  $V_3 = (a_3, b_3, c_3)$  são L.D., mas  $V_2 =$

$(a_2, b_2, c_2)$ ,  $V_3 = (a_3, b_3, c_3)$  e  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  são L.I., então a reta é paralela ao plano, mas não está contida nele.

- (b) Se  $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ,  $V_3 = (a_3, b_3, c_3)$  são L.I., então a reta é concorrente ao plano.

## Exercícios Numéricos (respostas na página 503)

- 5.1.1.** Quais dos seguintes vetores são combinação linear de  $V_1 = (5, -3, 1)$ ,  $V_2 = (0, 4, 3)$  e  $V_3 = (-10, 18, 7)$ ?
- (a)  $(10, -2, 5)$ ; (c)  $(-2, -1, 1)$ ;  
(b)  $(10, 2, 8)$ ; (d)  $(-1, 2, 3)$ .
- 5.1.2.** Os vetores  $V_1 = (5, -3, 1)$ ,  $V_2 = (0, 4, 3)$  e  $V_3 = (-10, 18, 7)$  do exercício anterior são L.D. ou L.I.? Caso sejam L.D. escreva um deles como combinação linear dos outros.
- 5.1.3.** Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente dependentes?
- (a)  $\{(1, 1, 2), (1, 0, 0), (4, 6, 12)\}$ ; (c)  $\{(1, 1, 1), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ ;  
(b)  $\{(1, -2, 3), (-2, 4, -6)\}$ ; (d)  $\{(4, 2, -1), (6, 5, -5), (2, -1, 3)\}$ .
- 5.1.4.** Para quais valores de  $\lambda$  o conjunto de vetores  $\{(3, 1, 0), (\lambda^2 + 2, 2, 0)\}$  é L.D.?
- 5.1.5.** Suponha que  $\{V_1, V_2, V_3\}$  é um conjunto linearmente independente de vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Responda se  $\{W_1, W_2, W_3\}$  é linearmente dependente ou independente nos seguintes casos:
- (a)  $W_1 = V_1 + V_2$ ,  $W_2 = V_1 + V_3$  e  $W_3 = V_2 + V_3$ ;  
(b)  $W_1 = V_1$ ,  $W_2 = V_1 + V_3$  e  $W_3 = V_1 + V_2 + V_3$ .
- 5.1.6.** Sejam  $r_1 : (x, y, z) = (1 + 2t, t, 2 + 3t)$  e  $r_2 : (x, y, z) = (t, 1 + mt, -1 + 2mt)$  duas retas.
- (a) Determine  $m$  para que as retas sejam coplanares (não sejam reversas).  
(b) Para o valor de  $m$  encontrado, determine a posição relativa entre  $r_1$  e  $r_2$ .  
(c) Determine a equação do plano determinado por  $r_1$  e  $r_2$ .
- 5.1.7.** Sejam a reta  $r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + (2t, mt, t)$  e o plano paralelo aos vetores  $V_1 = (1, 2, 0)$  e  $V_2 = (1, 0, 1)$  passando pela origem. Determine o valor de  $m$  para que a reta seja paralela ao plano. Para o valor de  $m$  encontrado a reta está contida no plano?

## Exercício usando o MATLAB®



- 5.1.8. (a) Defina os vetores  $V_1=[1;2;3]$ ,  $V_2=[3;4;5]$  e  $V_3=[5;6;7]$ . Defina o vetor aleatório  $V=\text{randi}(3,1)$ . Verifique se  $V$  é combinação linear de  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ .
- (b) Defina a matriz aleatória  $M=\text{randi}(3,5)$ . Verifique se os vetores definidos pelas colunas de  $M$  são combinação linear de  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ . Tente explicar o resultado.
- (c) Verifique se  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  são linearmente independentes. Se eles forem linearmente dependentes, escreva um deles como combinação linear dos outros e verifique o resultado.

### Exercícios Teóricos

- 5.1.9. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Mostre que  $\det(A) = 0$  se, e somente se, uma de suas colunas é combinação linear das outras.
- 5.1.10. Suponha que  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  é um conjunto de vetores de  $\mathbb{R}^n$  linearmente independente. Mostre que se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  não singular, então  $\{AV_1, AV_2, \dots, AV_n\}$  também é um conjunto linearmente independente.
- 5.1.11. Se os vetores não nulos  $U$ ,  $V$  e  $W$  são L.D., então  $W$  é uma combinação linear de  $U$  e  $V$ ?

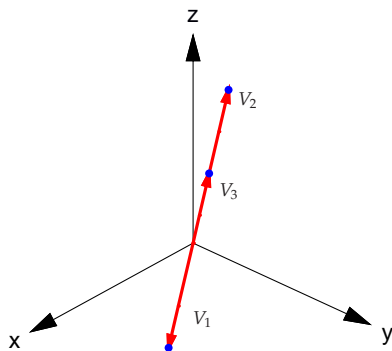


Figura 5.9: Três vetores linearmente dependentes (paralelos)

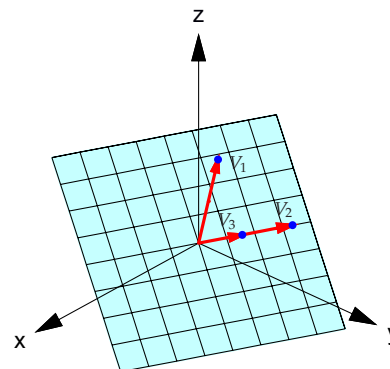


Figura 5.10: Três vetores linearmente dependentes (dois paralelos)

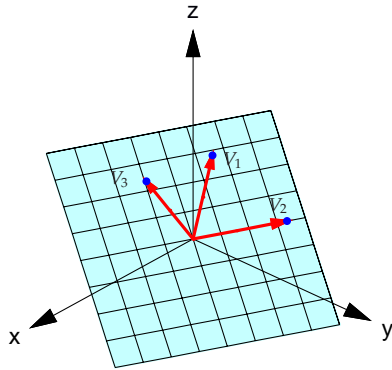


Figura 5.11: Três vetores linearmente dependentes (coplanares)

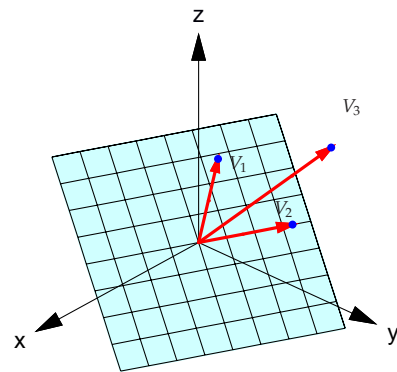


Figura 5.12: Três vetores linearmente independentes

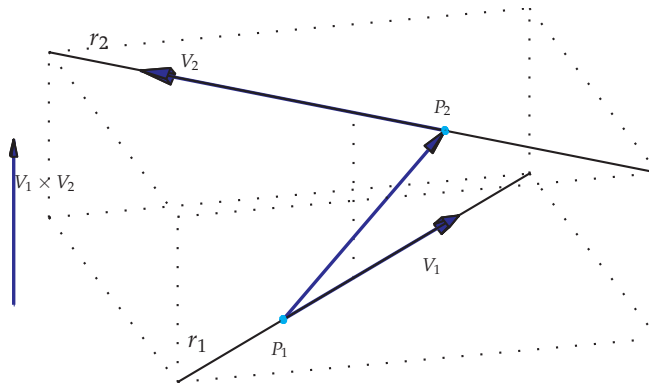


Figura 5.13: Duas retas reversas

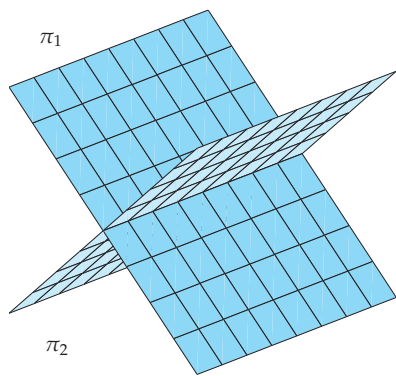


Figura 5.14: Dois planos que se interceptam segundo uma reta

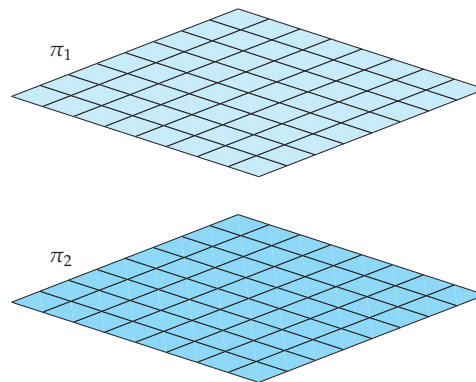


Figura 5.15: Dois planos paralelos

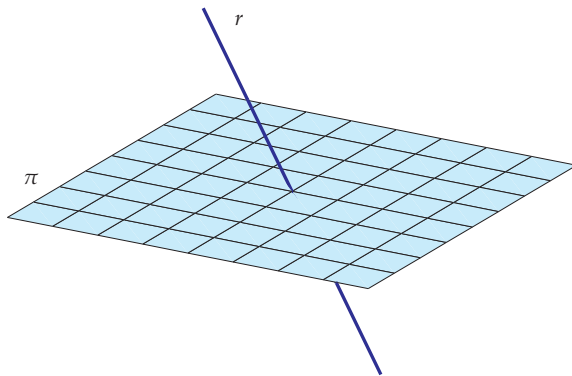


Figura 5.16: Reta e plano concorrentes

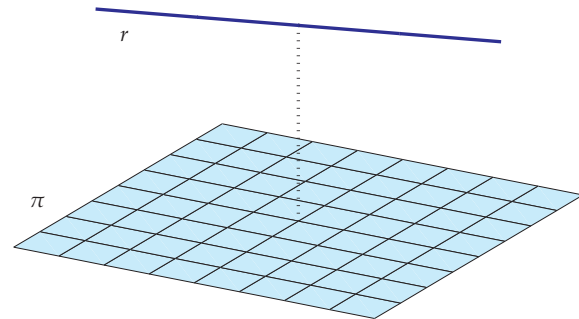


Figura 5.17: Reta e plano paralelos

## 5.2 Subespaços, Base e Dimensão

Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}^n$  o conjunto solução do sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$ . Já vimos na [Proposição 1.7 na página 49](#) que o conjunto  $\mathbb{W}$  satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) Se  $X$  e  $Y$  pertencem a  $\mathbb{W}$ , então  $X + Y$  também pertence a  $\mathbb{W}$ .
- (b) Se  $X$  pertence a  $\mathbb{W}$ , então  $\alpha X$  também pertence a  $\mathbb{W}$  para todo escalar  $\alpha$ .

Revise como foi feita a demonstração dos itens (a) e (b) acima na [Proposição 1.7 na página 49](#). Assim, se  $X$  e  $Y$  são soluções de um sistema homogêneo, então  $X + Y$  e  $\alpha X$  também o são. Portanto, combinações lineares de soluções de  $AX = \vec{0}$  são também soluções de  $AX = \vec{0}$ .

O conjunto solução de um sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$  é chamado de **espaço solução do sistema homogêneo**  $AX = \vec{0}$ . Ele se comporta como se fosse um espaço, no sentido de que fazendo soma de vetores do conjunto ou multiplicando vetores do conjunto por escalar não saímos dele.

Um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}^n$  que satisfaz as propriedades (a) e (b) acima é chamado de **subespaço** de  $\mathbb{R}^n$ . Com relação as operações de soma e multiplicação por escalar podemos “viver” nele sem termos que sair. Assim o espaço solução do sistema homogêneo  $AX = \vec{0}$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Vale também a recíproca, todo subespaço é o espaço solução de um sistema homogêneo ([Exercício 5.2.18 na página 299](#)).

**Exemplo 5.15.** Os exemplos mais triviais de subespaços de  $\mathbb{R}^n$  são o subespaço formado somente pelo vetor nulo,  $\mathbb{W} = \{\vec{0}\}$  e  $\mathbb{W} = \mathbb{R}^n$ . Mas cuidado, o  $\mathbb{R}^2$  não é subespaço de  $\mathbb{R}^3$ , pois o  $\mathbb{R}^2$  (conjunto de pares de números reais) não é um subconjunto do  $\mathbb{R}^3$  (conjunto de ternos de números reais). O plano  $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  mas ele não é o  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 5.16.** Considere o sistema linear

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Cada equação deste sistema é representada por um plano que passa pela origem. O conjunto solução é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  e é a interseção dos planos definidos pelas equações, podendo ser:

- (a) Somente um ponto que é a origem.
- (b) Uma reta que passa pela origem.
- (c) Um plano que passa pela origem.

Vamos escrever toda solução do sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$  como uma combinação linear de um número finito de vetores  $V_1, \dots, V_k$  que são também solução do sistema.

**Exemplo 5.17.** Considere o sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando a matriz aumentada do sistema acima, obtemos a matriz escalonada reduzida

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

E assim a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$x_1 = -\alpha - \gamma, \quad x_2 = \gamma, \quad x_3 = -\alpha + \beta, \quad x_4 = \beta, \quad x_5 = \alpha$$

para todos os valores de  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , ou seja, o conjunto solução do sistema  $AX = \vec{0}$  é

$$\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\alpha - \gamma, \gamma, -\alpha + \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, um elemento qualquer de  $\mathbb{W}$  pode ser escrito como uma combinação linear de vetores de  $\mathbb{W}$ :

$$\begin{aligned} (-\alpha - \gamma, \gamma, -\alpha + \beta, \beta, \alpha) &= (-\alpha, 0, -\alpha, 0, \alpha) + (0, 0, \beta, \beta, 0) + (-\gamma, \gamma, 0, 0, 0) \\ &= \alpha(-1, 0, -1, 0, 1) + \beta(0, 0, 1, 1, 0) + \gamma(-1, 1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Assim, todo vetor de  $\mathbb{W}$  pode ser escrito como combinação linear dos vetores  $V_1 = (-1, 0, -1, 0, 1)$ ,  $V_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$  e  $V_3 = (-1, 1, 0, 0, 0)$  pertencentes a  $\mathbb{W}$  ( $V_1$  é obtido fazendo-se  $\alpha = 1$  e  $\beta = \gamma = 0$ ,  $V_2$  fazendo-se  $\alpha = \gamma = 0$  e  $\beta = 1$  e  $V_3$  fazendo-se  $\alpha = \beta = 0$  e  $\gamma = 1$ ).

Neste caso dizemos que  $V_1 = (-1, 0, -1, 0, 1)$ ,  $V_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$  e  $V_3 = (-1, 1, 0, 0, 0)$  **geram** o subespaço  $\mathbb{W}$ . Em geral temos a seguinte definição.

**Definição 5.5.** Seja  $\mathbb{W}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  (por exemplo, o espaço solução de um sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$ ). Dizemos que os vetores  $V_1, \dots, V_k$  pertencentes a  $\mathbb{W}$ , **geram**  $\mathbb{W}$  ou que  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é um **conjunto de geradores** de  $\mathbb{W}$ , se qualquer vetor de  $\mathbb{W}$  é combinação linear de  $V_1, \dots, V_k$ . Dizemos também que  $\mathbb{W}$  é o **subespaço gerado** por  $V_1, \dots, V_k$ .



Uma questão importante é encontrar o maior número possível de vetores linearmente independentes em um subespaço. O resultado a seguir responde a esta questão.

**Teorema 5.6.** *Seja  $\mathbb{W}$  subespaço de  $\mathbb{R}^n$  (por exemplo, o espaço solução de um sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$ ). Seja  $\{V_1, \dots, V_m\}$  um conjunto de vetores de  $\mathbb{W}$*

(a) *linearmente independente (L.I.),*

(b) *que gera  $\mathbb{W}$  (ou seja, todo vetor  $X$  de  $\mathbb{W}$  é combinação linear de  $V_1, \dots, V_m$ ).*

*Então, um conjunto com mais de  $m$  vetores em  $\mathbb{W}$  é linearmente dependente (L.D.).*

**Demonstração.** Seja  $\{W_1, \dots, W_p\}$  um subconjunto de  $\mathbb{W}$ , com  $p > m$ . Vamos mostrar que  $\{W_1, \dots, W_p\}$  é L.D. Vamos considerar a combinação linear nula de  $W_1, \dots, W_p$

$$x_1 W_1 + x_2 W_2 + \dots + x_p W_p = \vec{0}. \quad (5.13)$$

Como qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  pode ser escrito como combinação linear de  $V_1, \dots, V_m$ , em particular,

$$W_j = b_{1j} V_1 + b_{2j} V_2 + \dots + b_{mj} V_m = \sum_{i=1}^m b_{ij} V_i, \quad \text{para } j = 1, \dots, p. \quad (5.14)$$

Assim, substituindo (5.14) em (5.13) e agrupando os termos que contém  $V_i$ , para  $i = 1, \dots, m$ , obtemos

$$(b_{11} x_1 + \dots + b_{1p} x_p) V_1 + \dots + (b_{m1} x_1 + \dots + b_{mp} x_p) V_m = \vec{0}. \quad (5.15)$$

Como  $\{V_1, \dots, V_m\}$  é L.I., então os escalares na equação (5.15) são iguais a zero. Isto leva ao sistema linear

$$BX = \vec{0},$$

em que  $B = (b_{ij})_{m \times p}$ . Mas, este é um sistema homogêneo que tem mais incógnitas do que equações, portanto possui solução não trivial, (Teorema 1.6 na página 48), como queríamos provar. ■

O resultado anterior mostra que se podemos escrever todo elemento do subespaço  $\mathbb{W}$  como uma combinação linear de vetores  $V_1, \dots, V_m$  L.I. pertencentes a  $\mathbb{W}$ , então  $m$  é o maior número possível de vetores L.I. em  $\mathbb{W}$ .

No Exemplo 5.17 os vetores

$$V_1 = (-1, 0, -1, 0, 1), V_2 = (0, 0, 1, 1, 0) \text{ e } V_3 = (-1, 1, 0, 0, 0)$$

geram  $\mathbb{W}$ . Além disso de

$$\alpha(-1, 0, -1, 0, 1) + \beta(0, 0, 1, 1, 0) + \gamma(-1, 1, 0, 0, 0) = (-\alpha - \gamma, \gamma, -\alpha + \beta, \beta, \alpha)$$

segue-se que  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são L.I. (por que?)

Assim pelo Teorema 5.6 não podemos obter um número maior de vetores, em  $\mathbb{W}$ , L.I. Neste caso dizemos que  $\{V_1, V_2, V_3\}$  é uma **base** de  $\mathbb{W}$ . Em geral temos a seguinte definição.

---

**Definição 5.6.** Seja  $\mathbb{W}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  (por exemplo, o espaço solução de um sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$ ). Dizemos que um subconjunto  $\{V_1, \dots, V_k\}$  de  $\mathbb{W}$  é uma **base** de  $\mathbb{W}$ , se

- (a)  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é um conjunto de geradores de  $\mathbb{W}$  (ou seja, todo vetor de  $\mathbb{W}$  é combinação linear de  $V_1, \dots, V_k$ ) e
- (b)  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é L.I.

**Exemplo 5.18.** Os vetores  $E_1 = (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, \dots, 0, 1)$  formam uma base do  $\mathbb{R}^n$ . Pois, um vetor qualquer do  $\mathbb{R}^n$  é da forma  $V = (a_1, \dots, a_n)$  e pode ser escrito como uma soma de vetores, sendo um vetor para cada parâmetro e cada vetor dependendo apenas de um parâmetro, obtendo

$$\begin{aligned} V = (a_1, \dots, a_n) &= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_n) \\ &= a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + a_n(0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Assim, os vetores  $E_1 = (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, \dots, 0, 1)$  geram o  $\mathbb{R}^n$ . Vimos no **Exemplo 5.10 na página 269** que  $E_1, E_2, \dots, E_n$  são L.I. Esses vetores formam a chamada **base canônica de  $\mathbb{R}^n$** . No caso do  $\mathbb{R}^3$ ,  $E_1 = \vec{i}, E_2 = \vec{j}$  e  $E_3 = \vec{k}$ .

**Exemplo 5.19.** Seja  $\mathbb{W} = \{(x, y, z) = t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\}$  uma reta que passa pela origem. Como o vetor diretor  $V = (a, b, c)$  é não nulo e gera a reta, então  $\{V\}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ .

**Exemplo 5.20.** Seja  $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$  um plano que passa pela origem. Vamos supor que  $a \neq 0$ . Um ponto  $(x, y, z)$  satisfaz a equação  $ax + by + cz = 0$  se, e somente se,

$$z = \alpha, y = \beta, x = -\frac{1}{a}(c\alpha + b\beta), \quad \text{para todos } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Assim, o plano  $\mathbb{W}$  pode ser descrito como  $\mathbb{W} = \{(-\frac{c}{a}\alpha - \frac{b}{a}\beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .

Assim, todo vetor de  $\mathbb{W}$  pode ser escrito como uma soma de vetores, sendo um para cada parâmetro, obtendo

$$(-\frac{c}{a}\alpha - \frac{b}{a}\beta, \beta, \alpha) = (-\frac{c}{a}\alpha, 0, \alpha) + (-\frac{b}{a}\beta, \beta, 0) = \alpha(-\frac{c}{a}, 0, 1) + \beta(-\frac{b}{a}, 1, 0).$$

Assim, todo vetor de  $\mathbb{W}$  pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores  $V_1 = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$  e  $V_2 = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$  pertencentes a  $\mathbb{W}$  ( $V_1$  é obtido fazendo-se  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$  e  $V_2$ , fazendo-se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ ). Portanto,  $V_1 = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$  e  $V_2 = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$  geram o plano  $\mathbb{W}$ . Como  $V_1$  e  $V_2$  são L.I., pois um não é múltiplo escalar do outro, então  $\{V_1, V_2\}$  é uma base do plano  $\mathbb{W}$ . Deixamos como exercício para o leitor encontrar uma base de  $\mathbb{W}$  para o caso em que  $b \neq 0$  e também para o caso em que  $c \neq 0$ .

Segue do [Teorema 5.6 na página 287](#) que se  $\mathbb{W} \neq \{\vec{0}\}$  é um subespaço, então qualquer base de  $\mathbb{W}$  tem o mesmo número de elementos e este é o maior número de vetores L.I. que podemos ter em  $\mathbb{W}$ . O número de elementos de qualquer uma das bases de  $\mathbb{W}$  é chamado de **dimensão de  $\mathbb{W}$** . Se  $\mathbb{W} = \{\vec{0}\}$  dizemos que  $\mathbb{W}$  tem dimensão igual a 0.

**Exemplo 5.21.** A dimensão do  $\mathbb{R}^n$  é  $n$ , pois como foi mostrado no [Exemplo 5.18 na página 289](#),

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, E_n = (0, \dots, 0, 1)$$

formam uma base do  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 5.22.** Pelo Exemplo 5.19 na página 289 uma reta que passa pela origem tem dimensão 1 e pelo Exemplo 5.20 na página 289 um plano que passa pela origem tem dimensão 2.

Vamos mostrar a seguir que se a dimensão de um subespaço  $\mathbb{W}$  é  $m > 0$ , então basta conseguirmos  $m$  vetores L.I. em  $\mathbb{W}$ , que teremos uma base.

---

**Teorema 5.7.** *Seja  $\mathbb{W}$  um subespaço de dimensão  $m > 0$ . Se  $m$  vetores,  $V_1, \dots, V_m \in \mathbb{W}$ , são L.I., então eles geram o subespaço  $\mathbb{W}$  e portanto formam uma base de  $\mathbb{W}$ .*

---

**Demonstração.** Sejam  $V_1, \dots, V_m$  vetores L.I. e seja  $V$  um vetor qualquer do subespaço  $\mathbb{W}$ . Vamos mostrar que  $V$  é combinação linear de  $V_1, \dots, V_m$ . Considere a equação vetorial

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + \dots + x_m V_m + x_{m+1} V = \vec{0} \quad (5.16)$$

Pelo Teorema 5.6 na página 287,  $V_1, \dots, V_m, V$  são L.D., pois são  $m + 1$  vetores em um subespaço de dimensão  $m$ . Então a equação (5.16) admite solução não trivial, ou seja, pelo menos um  $x_i \neq 0$ . Mas,  $x_{m+1} \neq 0$ , pois caso contrário,  $V_1, \dots, V_m$  seriam L.D. Então, multiplicando-se a equação (5.16) por  $1/x_{m+1}$  e subtraindo  $(x_1/x_{m+1})V_1 + (x_2/x_{m+1})V_2 + \dots + (x_m/x_{m+1})V_m$ , obtemos

$$V = - \left( \frac{x_1}{x_{m+1}} \right) V_1 - \dots - \left( \frac{x_m}{x_{m+1}} \right) V_m.$$

■

Dos resultados anteriores, vemos que se a dimensão de um subespaço,  $\mathbb{W}$ , é  $m > 0$ , então basta conseguirmos  $m$  vetores L.I. em  $\mathbb{W}$ , que teremos uma base (Teorema 5.7) e não podemos conseguir mais do que  $m$  vetores L.I. (Teorema 5.6 na página 287).

**Exemplo 5.23.** Do Teorema 5.7 segue-se que  $n$  vetores L.I. do  $\mathbb{R}^n$  formam uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Por exemplo, 3 vetores L.I. do  $\mathbb{R}^3$  formam uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 5.24.** Sejam  $\mathbb{W}$  o plano  $x + y + z = 0$  e  $\mathbb{V}$  o plano  $4x - 2y + z = 0$ . Assim, o plano  $\mathbb{W}$  tem vetor normal  $N_1 = (1, 1, 1)$  e o plano  $\mathbb{V}$  tem vetor normal  $N_2 = (4, -2, 1)$ . A interseção  $\mathbb{W} \cap \mathbb{V}$  é a reta cujo vetor diretor é  $V = N_1 \times N_2 = (3, 3, -6)$  (revise o Exemplo 4.7 na página 221) e que passa pela origem. Assim, a reta que é a interseção,  $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ , tem equação  $(x, y, z) = t(3, 3, -6)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto, o vetor  $V = (3, 3, -6)$  gera a interseção  $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ . Como um vetor não nulo é L.I. o conjunto  $\{V = (3, 3, -6)\}$  é uma base da reta que é a interseção  $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ .

**Alternativamente**, podemos encontrar as equações paramétricas da reta  $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ , interseção dos planos determinando a solução geral do sistema (5.17)

$$\begin{aligned} \mathbb{W} : \quad x + y + z &= 0, \\ \mathbb{V} : \quad 4x - 2y + z &= 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Para isto devemos escalonar a matriz do sistema (5.17):

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Precisamos “zerar” o outro elemento da 1ª coluna, que é a coluna do pivô, para isto, adicionamos à 2ª linha,  $-4$  vezes a 1ª linha.

$$\boxed{-4 \cdot 1^{\text{a}} \text{ linha} + 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ linha}} \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

Agora, já podemos obter facilmente a solução geral do sistema dado, já que ele é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -6y - 3z = 0 \end{cases}$$

A variável  $z$  é uma variável livre. Podemos dar a ela um valor arbitrário, digamos  $t$ , para  $t \in \mathbb{R}$  qualquer. Assim, a solução geral do sistema (5.17) é

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = -\frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

A reta que é a interseção,  $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ , tem equação  $(x, y, z) = t(-1/2, -1/2, 1)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  (revise o Exemplo 4.7 na página 221). Portanto, o vetor  $V = (-1/2, -1/2, 1)$  gera a interseção  $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ . Como um vetor não nulo é L.I. o conjunto  $\{V = (-1/2, -1/2, 1)\}$  é uma base do subespaço que é a reta interseção de  $\mathbb{V}$  com  $\mathbb{W}$ .

---

**Observação.** Como no exemplo anterior, em geral, o espaço solução de um sistema linear homogêneo pode ser visto como uma interseção de subespaços que são as soluções de sistemas formados por subconjuntos de equações do sistema inicial.

---

**Exemplo 5.25.** Considere o subespaço  $\mathbb{W} = \{(a + c, b + c, a + b + 2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Vamos encontrar um conjunto de geradores e uma base para  $\mathbb{W}$ .

Qualquer elemento  $V$  de  $\mathbb{W}$  pode ser escrito como uma soma de vetores, sendo um vetor para cada parâmetro e cada vetor dependendo apenas de um parâmetro, obtendo

$$\begin{aligned} V = (a + c, b + c, a + b + 2c) &= (a, 0, a) + (0, b, b) + (c, c, 2c) \\ &= a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 2). \end{aligned}$$

Logo, definindo  $V_1 = (1, 0, 1)$ ,  $V_2 = (0, 1, 1)$  e  $V_3 = (1, 1, 2)$ , temos que  $\{V_1, V_2, V_3\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Para sabermos se  $\{V_1, V_2, V_3\}$  é base de  $\mathbb{W}$ , precisamos verificar se  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são L.I. Para isto temos que saber se a equação vetorial

$$xV_1 + yV_2 + zV_3 = \vec{0} \quad (5.18)$$

ou equivalentemente,

$$AX = \vec{0}, \quad \text{em que} \quad A = [V_1 \ V_2 \ V_3]$$

só possui a solução trivial. Escalonando a matriz  $A$ , obtemos

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo 5.18 tem solução não trivial. Assim os vetores  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são L.D. A solução de (5.18) é dada por  $x = -\alpha, y = -\alpha$  e  $z = \alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Substituindo-se esta solução em (5.18) obtemos

$$-\alpha V_1 - \alpha V_2 + \alpha V_3 = \vec{0}$$

Tomando-se  $\alpha = 1$  obtemos  $V_3 = V_2 + V_1$ . Assim o vetor  $V_3$  pode ser descartado na geração de  $\mathbb{W}$ , pois ele é combinação linear dos outros dois. Logo, apenas  $V_1$  e  $V_2$  são suficientes para gerar  $\mathbb{W}$ . Como além disso, os vetores  $V_1$  e  $V_2$  são tais que um não é múltiplo escalar do outro, então eles são L.I. e portanto  $\{V_1, V_2\}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ . Observe que a mesma relação que vale entre as colunas de  $R$  vale entre as colunas de  $A$  (por que?).



**Exemplo 5.26.** Considere os vetores  $V_1 = (-1, 1, 0, -3)$  e  $V_2 = (-3, 3, 2, -1)$  linearmente independentes de  $\mathbb{R}^4$ . Vamos encontrar vetores  $V_3$  e  $V_4$  tais que  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  formam uma base de  $\mathbb{R}^4$ . Escalonando a matriz cujas linhas são os vetores  $V_1$  e  $V_2$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{obtemos} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Vamos inserir linhas que são vetores da base canônica na matriz  $R$  até conseguir uma matriz  $4 \times 4$  triangular superior com os elementos da diagonal diferentes de zero. Neste caso acrescentando as linhas  $V_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$  e  $V_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$  em posições adequadas obtemos a matriz

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos verificar que  $V_1, V_2, V_3$  e  $V_4$  são L.I.

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 + x_4 V_4 = \vec{0}$$

é equivalente ao sistema linear

$$CX = \vec{0}, \quad \text{em que } C = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4].$$

Mas como  $\det(\bar{R}) \neq 0$ , então  $\det(C) \neq 0$ , pelo [Teorema 2.13 na página 109](#), pois  $\bar{R}$  pode ser obtida de  $C^t$  aplicando-se operações elementares. Logo  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  é L.I. Como a dimensão do  $\mathbb{R}^4$  é igual a 4, então pelo [Teorema 5.7 na página 291](#),  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^4$ .

## Exercícios Numéricos (respostas na página 507)

**5.2.1.** Encontre um conjunto de geradores para o espaço solução do sistema homogêneo  $AX = \bar{0}$ , em que

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**5.2.2.** Encontre os valores de  $\lambda$  tais que o sistema homogêneo  $(A - \lambda I_n)X = \bar{0}$  tem solução não trivial e para estes valores de  $\lambda$ , encontre uma base para o espaço solução, para as matrizes  $A$  dadas:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(d) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(e) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$(f) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

**5.2.3.** Determine uma base para a reta interseção dos planos  $x - 7y + 5z = 0$  e  $3x - y + z = 0$ .

**5.2.4.** Sejam  $V_1 = (4, 2, -3)$ ,  $V_2 = (2, 1, -2)$  e  $V_3 = (-2, -1, 0)$ .

(a) Mostre que  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são L.D.

(b) Mostre que  $V_1$  e  $V_2$  são L.I.

(c) Qual a dimensão do subespaço gerado por  $V_1, V_2$  e  $V_3$ , ou seja, do conjunto das combinações lineares de  $V_1, V_2$  e  $V_3$ .

(d) Descreva geometricamente o subespaço gerado por  $V_1, V_2$  e  $V_3$ .

**5.2.5.** Dados  $V_1 = (2, 1, 3)$  e  $V_2 = (2, 6, 4)$ :

- (a) Os vetores  $V_1$  e  $V_2$  geram o  $\mathbb{R}^3$ ? Justifique.
- (b) Seja  $V_3$  um terceiro vetor do  $\mathbb{R}^3$ . Quais as condições sobre  $V_3$ , para que  $\{V_1, V_2, V_3\}$  seja uma base de  $\mathbb{R}^3$ ?
- (c) Encontre um vetor  $V_3$  que complete junto com  $V_1$  e  $V_2$  uma base do  $\mathbb{R}^3$ .

**5.2.6.** Seja  $\mathbb{W}$  o plano  $x + 2y + 4z = 0$ . Obtenha uma base  $\{V_1, V_2, V_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $V_1$  e  $V_2$  pertençam a  $\mathbb{W}$ .

**5.2.7.** Considere os seguintes subespaços de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbb{V} = [(-1, 2, 3), (1, 3, 4)] \quad \text{e} \quad \mathbb{W} = [(1, 2, -1), (0, 1, 1)].$$

Encontre as equações paramétricas da reta  $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$  e uma base para o subespaço  $\mathbb{V} \cap \mathbb{W}$ . A notação  $[V_1, V_2]$  significa o subespaço gerado por  $V_1$  e  $V_2$ , ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares de  $V_1$  e  $V_2$ .

**5.2.8.** Seja  $\mathbb{V} = \{(3a + 4b - 4c, 2a - 4b - 6c, -2a - 4b + 2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Determine um conjunto de geradores para  $\mathbb{V}$ .
- (b) Determine uma base para  $\mathbb{V}$ .

**5.2.9.** Dados  $V_1 = (-3, 5, 2, 1)$  e  $V_2 = (1, -2, -1, 2)$ :

- (a) Os vetores  $V_1$  e  $V_2$  geram o  $\mathbb{R}^4$ ? Justifique.
- (b) Sejam  $V_3$  e  $V_4$  vetores do  $\mathbb{R}^4$ . Quais as condições sobre  $V_3$  e  $V_4$  para que  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  seja uma base de  $\mathbb{R}^4$ ?
- (c) Encontre vetores  $V_3$  e  $V_4$  que complete junto com  $V_1$  e  $V_2$  uma base do  $\mathbb{R}^4$ .

**5.2.10.** Dê exemplo de:

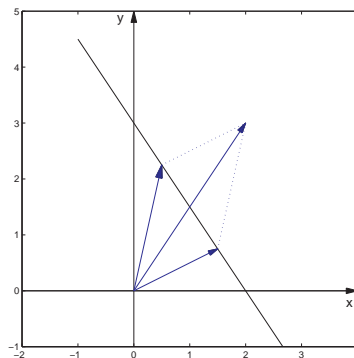
- (a) Três vetores:  $V_1, V_2$  e  $V_3$ , sendo  $\{V_1\}$  L.I.,  $\{V_2, V_3\}$  L.I.,  $V_2$  e  $V_3$  não são múltiplos de  $V_1$  e  $\{V_1, V_2, V_3\}$  L.D.
- (b) Quatro vetores:  $V_1, V_2, V_3$  e  $V_4$ , sendo  $\{V_1, V_2\}$  L.I.,  $\{V_3, V_4\}$  L.I.,  $V_3$  e  $V_4$  não são combinação linear de  $V_1$  e  $V_2$  e  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  L.D.

## Exercício usando o MATLAB®

- 5.2.11.** Defina a matriz aleatória  $A = \text{triu}(\text{randi}(4, 4, 3))$ . Encontre os valores de  $\lambda$  tais que o sistema homogêneo  $(A - \lambda I_4)X = \vec{0}$  tem solução não trivial e para estes valores de  $\lambda$ , encontre uma base para o espaço solução.

## Exercícios Teóricos

- 5.2.12.** Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$ . Mostre que se o conjunto solução do sistema linear  $AX = B$  é um subespaço, então  $B = \vec{0}$ , ou seja, o sistema linear é homogêneo. (Sugestão: se  $X$  é solução de  $AX = B$ , então  $Y = 0X$  também o é.)
- 5.2.13.** Determine uma base para o plano  $ax + by + cz = 0$  no caso em que  $b \neq 0$  e no caso em que  $c \neq 0$ .
- 5.2.14.** Sejam  $V$  e  $W$  vetores do  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que o conjunto dos vetores da forma  $\alpha V + \beta W$  é um subespaço do  $\mathbb{R}^n$ .
- 5.2.15.** Mostre que se uma reta em  $\mathbb{R}^2$  ou em  $\mathbb{R}^3$  não passa pela origem, então ela não é um subespaço. (Sugestão: se ela fosse um subespaço, então ...)



**5.2.16.** Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $B$  uma matriz  $m \times 1$ . Mostre que o conjunto dos vetores  $B$  para os quais o sistema  $A X = B$  tem solução é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Ou seja, mostre que o conjunto

$$\mathcal{I}(A) = \{B \in \mathbb{R}^m \mid B = A X, \text{ para algum } X \in \mathbb{R}^n\}$$

é um subespaço de  $\mathbb{R}^m$ .

**5.2.17.** Sejam  $\mathbb{W}_1$  e  $\mathbb{W}_2$  dois subespaços.

- (a) Mostre que  $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$  é um subespaço.
- (b) Mostre que  $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$  é um subespaço se, e somente se,  $\mathbb{W}_1 \subseteq \mathbb{W}_2$  ou  $\mathbb{W}_2 \subseteq \mathbb{W}_1$ .
- (c) Definimos a **soma dos subespaços**  $\mathbb{W}_1$  e  $\mathbb{W}_2$  por

$$\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2 = \{V_1 + V_2 \mid V_1 \in \mathbb{W}_1 \text{ e } V_2 \in \mathbb{W}_2\}.$$

Mostre que  $\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2$  é um subespaço que contém  $\mathbb{W}_1$  e  $\mathbb{W}_2$ .

**5.2.18.** Sejam  $\mathbb{W}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  e  $\{W_1, \dots, W_k\}$  uma base de  $\mathbb{W}$ . Defina a matriz  $B = [W_1 \dots W_k]^t$ , com  $W_1, \dots, W_k$  escritos como matrizes colunas. Sejam  $\mathbb{W}^\perp$  o espaço solução do sistema homogêneo  $BX = \bar{0}$  e  $\{V_1, \dots, V_p\}$  uma base de  $\mathbb{W}^\perp$ . Defina a matriz  $A = [V_1 \dots V_p]^t$ , com  $V_1, \dots, V_p$  escritos como matrizes colunas. Mostre que  $\mathbb{W}$  é o espaço solução do sistema homogêneo  $AX = \bar{0}$ , ou seja,

$$\mathbb{W} = \{X \in \mathbb{R}^p \mid AX = \bar{0}\}.$$

**5.2.19.** Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $B$  uma matriz  $m \times 1$ . Seja  $X_0$  uma solução (particular) do sistema linear  $A X = B$ . Mostre que se  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é uma base para o espaço solução do sistema homogêneo  $AX = \bar{0}$ , então toda solução de  $A X = B$  pode ser escrita na forma

$$X = X_0 + \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k,$$

em que  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  são escalares. (Sugestão: use o [Exercício 1.2.21 na página 66](#))

**5.2.20.** Mostre que a dimensão do subespaço gerado pelas linhas de uma matriz escalonada reduzida é igual a dimensão do subespaço gerado pelas suas colunas.

- 5.2.21.** Mostre que a dimensão do subespaço gerado pelas linhas de uma matriz é igual a dimensão do subespaço gerado pelas suas colunas. (Sugestão: Considere a forma escalonada reduzida da matriz  $A$  e use o exercício anterior.)

## Apêndice IV: Outros Resultados

---

**Teorema 5.8.** *Um subconjunto  $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  de um subespaço  $\mathbb{W}$  é uma base para  $\mathbb{W}$  se, e somente se, todo vetor  $X$  de  $\mathbb{W}$  é escrito de maneira única como combinação linear de  $V_1, V_2, \dots, V_m$ .*

---

**Demonstração.** Em primeiro lugar, suponha que todo vetor  $X$  de  $\mathbb{W}$  é escrito de maneira única como combinação linear de  $V_1, \dots, V_m$ . Vamos mostrar que  $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ . Como todo vetor é escrito como combinação linear de  $V_1, \dots, V_m$ , basta mostrarmos que  $V_1, \dots, V_m$  são L.I. Considere a equação

$$x_1 V_1 + \dots + x_m V_m = \vec{0}.$$

Como todo vetor é escrito de maneira única como combinação linear de  $V_1, \dots, V_m$ , em particular temos que para  $X = \vec{0}$ ,

$$x_1 V_1 + \dots + x_m V_m = \vec{0} = 0V_1 + \dots + 0V_m,$$

o que implica que  $x_1 = 0, \dots, x_m = 0$ , ou seja,  $V_1, \dots, V_m$  são linearmente independentes. Portanto,  $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  é base de  $\mathbb{W}$ .

Suponha, agora, que  $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$  é base de  $\mathbb{W}$ . Seja  $X$  um vetor qualquer de  $\mathbb{W}$ . Se

$$x_1 V_1 + \dots + x_m V_m = X = y_1 V_1 + \dots + y_m V_m,$$

então

$$(x_1 - y_1) V_1 + \dots + (x_m - y_m) V_m = \vec{0}.$$

Como  $V_1, \dots, V_m$  formam uma base de  $\mathbb{W}$ , então eles são L.I., o que implica que  $x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m$ . Portanto, todo vetor  $X$  de  $\mathbb{W}$  é escrito de maneira única como combinação linear de  $V_1, \dots, V_m$ . ■

---

**Teorema 5.9.** Se  $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_k\}$  é um conjunto de vetores que gera um subespaço  $\mathbb{W}$ , ou seja,  $\mathbb{W} = [\mathcal{S}] = [V_1, \dots, V_k]$ , então existe um subconjunto de  $\mathcal{S}$  que é base de  $\mathbb{W}$ .

---

**Demonstração.** Se  $\mathcal{S}$  é L.I., então  $\mathcal{S}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ . Caso contrário,  $\mathcal{S}$  é L.D. e pelo Teorema 5.5 na página 272, um dos vetores de  $\mathcal{S}$  é combinação linear dos outros. Assim, o subconjunto de  $\mathcal{S}$  obtido retirando-se este vetor continua gerando  $\mathbb{W}$ . Se esse subconjunto for L.I., temos uma base para  $\mathbb{W}$ , caso contrário, continuamos retirando vetores do subconjunto até obtermos um subconjunto L.I. e aí neste caso temos uma base para  $\mathbb{W}$ . ■



Vamos mostrar que se a dimensão de um subespaço  $\mathbb{W}$  é  $m$ , então  $m$  vetores que geram o subespaço,  $\mathbb{W}$ , formam uma base (**Corolário 5.10**) e que não podemos ter menos que  $m$  vetores gerando o subespaço (**Corolário 5.11**).

São simples as demonstrações dos seguintes corolários, as quais deixamos como exercício.

---

**Corolário 5.10.** *Em um subespaço,  $\mathbb{W}$ , de dimensão  $m > 0$ ,  $m$  vetores que geram o subespaço, são L.I. e portanto formam uma base.*

---

---

**Corolário 5.11.** *Em um subespaço,  $\mathbb{W}$ , de dimensão  $m > 0$ , um conjunto com menos de  $m$  vetores não gera o subespaço.*

---

**Teorema 5.12.** Se  $\mathcal{R} = \{V_1, \dots, V_k\}$  é um conjunto de vetores L.I. em um subespaço  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{R}^n$ , então o conjunto  $\mathcal{R}$  pode ser completado até formar uma base de  $\mathbb{W}$ , ou seja, existe um conjunto  $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_m\}$  ( $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ ), que é uma base de  $\mathbb{W}$ .

---

**Demonstração.** Se  $\{V_1, \dots, V_k\}$  gera  $\mathbb{W}$ , então  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ . Caso contrário, seja  $V_{k+1}$  um vetor que pertence a  $\mathbb{W}$ , mas não pertence ao subespaço gerado por  $\{V_1, \dots, V_k\}$ . Então, o conjunto  $\{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}\}$  é L.I., pois caso contrário  $x_1 V_1 + \dots + x_{k+1} V_{k+1} = \vec{0}$ , implicaria que  $x_{k+1} \neq 0$  (por que?) e assim,  $V_{k+1}$  seria combinação linear de  $V_1, \dots, V_k$ , ou seja,  $V_{k+1}$  pertenceria ao subespaço  $\mathbb{W}_k$ . Se  $\{V_1, \dots, V_{k+1}\}$  gera  $\mathbb{W}$ , então  $\{V_1, \dots, V_{k+1}\}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ . Caso contrário, o mesmo argumento é repetido para o subespaço gerado por  $\{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}\}$ .

Pelo [Corolário 5.4 na página 271](#) este processo tem que parar, ou seja, existe um inteiro positivo  $m \leq n$  tal que  $\{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_m\}$  é L.I., mas  $\{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_m, V\}$  é L.D. para qualquer vetor  $V$  de  $\mathbb{W}$ . O que implica que  $V$  é combinação linear de  $\{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_m\}$  (por que?). Portanto,  $\{V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_m\}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ . ■

---

**Corolário 5.13.** *Todo subespaço de  $\mathbb{R}^n$  diferente do subespaço trivial  $\{\vec{0}\}$  tem uma base e a sua dimensão é menor ou igual a  $n$ .*

---

Os próximos resultados são aplicações às matrizes.

---

**Proposição 5.14.** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $m \times n$  equivalentes por linhas. Sejam  $A_1, \dots, A_n$  as colunas  $1, \dots, n$ , respectivamente, da matriz  $A$  e  $B_1, \dots, B_n$  as colunas  $1, \dots, n$ , respectivamente, da matriz  $B$ .*

(a)  $B_{j_1}, \dots, B_{j_k}$  são L.I. se, e somente se,  $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$  também o são.

(b) Se existem escalares  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}$  tais que

$$A_k = \alpha_{j_1} A_{j_1} + \dots + \alpha_{j_k} A_{j_k},$$

então

$$B_k = \alpha_{j_1} B_{j_1} + \dots + \alpha_{j_k} B_{j_k},$$

(c) O subespaço gerado pelas linhas de  $A$  é igual ao subespaço gerado pelas linhas de  $B$ .

---

**Demonstração.** Se  $B$  é equivalente por linhas a  $A$ , então  $B$  pode ser obtida de  $A$  aplicando-se uma sequência de operações elementares. Aplicar uma operação elementar a uma matriz corresponde a multiplicar a matriz à esquerda por uma matriz invertível (**Teorema 1.8 na página 54**). Seja  $M$  o produto das matrizes invertíveis correspondentes às operações elementares aplicadas na matriz  $A$  para se obter a matriz  $B$ . Então  $M$  é invertível e  $B = MA$ .

- (a) Vamos supor que  $B_{j_1}, \dots, B_{j_k}$  são L.I. e vamos mostrar que  $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$  também o são. Se

$$x_{j_1} A_{j_1} + \dots + x_{j_k} A_{j_k} = \vec{0},$$

então multiplicando-se à esquerda pela matriz  $M$  obtemos

$$x_{j_1} MA_{j_1} + \dots + x_{j_k} MA_{j_k} = \vec{0}.$$

Como  $MA_j = B_j$ , para  $j = 1, \dots, n$  (**Exercício 1.1.18 (a) na página 25**), então

$$x_{j_1} B_{j_1} + \dots + x_{j_k} B_{j_k} = \vec{0}.$$

Assim, se  $B_{j_1}, \dots, B_{j_k}$  são L.I., então  $x_{j_1} = \dots = x_{j_k} = 0$ . O que implica que  $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$  também são L.I.

Trocando-se  $B$  por  $A$  o argumento acima mostra que se  $A_{j_1}, \dots, A_{j_k}$  são L.I., então  $B_{j_1}, \dots, B_{j_k}$  também o são.

- (b) Sejam  $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}$  escalares tais que

$$A_k = \alpha_{j_1} A_{j_1} + \dots + \alpha_{j_k} A_{j_k},$$

então multiplicando-se à esquerda pela matriz  $M$  obtemos

$$MA_k = \alpha_{j_1} MA_{j_1} + \dots + \alpha_{j_k} MA_{j_k}.$$

Como  $MA_j = B_j$ , para  $j = 1, \dots, n$  (**Exercício 1.1.18 (a) na página 25**), então

$$B_k = \alpha_{j_1} B_{j_1} + \dots + \alpha_{j_k} B_{j_k}.$$

- (c) A matriz  $B$  é obtida de  $A$  aplicando-se uma sequência de operações elementares às linhas de  $A$ . Assim, toda linha de  $B$  é uma combinação linear das linhas de  $A$ . Logo, o espaço gerado pelas linhas de  $B$  está contido no espaço gerado pelas linhas de  $A$ . Como toda operação elementar tem uma operação elementar inversa, o argumento anterior também mostra que o espaço gerado pelas linhas de  $A$  está contido no espaço gerado pelas linhas de  $B$ . Portanto, eles são iguais.



Vamos agora provar a unicidade da forma escalonada reduzida.

---

**Teorema 5.15.** Se  $R = (r_{ij})_{m \times n}$  e  $S = (s_{ij})_{m \times n}$  são matrizes escalonadas reduzidas equivalentes por linhas a uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , então  $R = S$ .

---

**Demonstração.** Sejam  $S$  e  $R$  matrizes escalonadas reduzidas equivalentes a  $A$ . Sejam  $R_1, \dots, R_n$  as colunas de  $R$  e  $S_1, \dots, S_n$  as colunas de  $S$ . Seja  $r$  o número de linhas não nulas de  $R$ . Sejam  $j_1, \dots, j_r$  as colunas onde ocorrem os pivôs das linhas  $1, \dots, r$ , respectivamente, da matriz  $R$ . Então  $R$  e  $S$  são equivalentes por linha, ou seja, existe uma sequência de operações elementares que podemos aplicar em  $R$  para chegar a  $S$  e uma outra sequência de operações elementares que podemos aplicar a  $S$  e chegar a  $R$ .

Assim, como as colunas  $1, \dots, j_1 - 1$  de  $R$  são nulas o mesmo vale para as colunas  $1, \dots, j_1 - 1$  de  $S$ . Logo o pivô da 1ª linha de  $S$  ocorre numa coluna maior ou igual a

$j_1$ . Trocando-se  $R$  por  $S$  e usando este argumento chegamos a conclusão que  $R_{j_1} = S_{j_1}$  e assim  $R_1 = S_1, \dots, R_{j_1} = S_{j_1}$ .

Vamos supor que  $R_1 = S_1, \dots, R_{j_k} = S_{j_k}$  e vamos mostrar que

$$R_{j_k+1} = S_{j_k+1}, \dots, R_{j_{k+1}} = S_{j_{k+1}}, \quad \text{se } k < r \text{ ou}$$

$$R_{j_r+1} = S_{j_r+1}, \dots, R_n = S_n, \quad \text{se } k = r.$$

Observe que para  $j = j_k + 1, \dots, j_{k+1} - 1$ , se  $k < r$ , ou para  $j = j_r + 1, \dots, n$ , se  $k = r$ , temos que

$$R_j = (r_{1j}, \dots, r_{kj}, 0, \dots, 0) = r_{1j}R_{j_1} + \dots + r_{kj}R_{j_k},$$

o que implica pela [Proposição 5.14 \(b\) na página 305](#) que

$$S_j = r_{1j}S_{j_1} + \dots + r_{kj}S_{j_k}.$$

Mas por hipótese  $R_{j_1} = S_{j_1}, \dots, R_{j_k} = S_{j_k}$ , então,

$$S_j = r_{1j}R_{j_1} + \dots + r_{kj}R_{j_k} = R_j,$$

para  $j = j_k + 1, \dots, j_{k+1} - 1$ , se  $k < r$  ou para  $j = j_r + 1, \dots, n$ , se  $k = r$ .

Logo, se  $k < r$ , o pivô da  $(k+1)$ -ésima linha de  $S$  ocorre numa coluna maior ou igual a  $j_{k+1}$ . Trocando-se  $R$  por  $S$  e usando o argumento anterior chegamos a conclusão que  $R_{j_{k+1}} = S_{j_{k+1}}$  e assim  $R_1 = S_1, \dots, R_{j_r} = S_{j_r}$ . E se  $k = r$ , então  $R_1 = S_1, \dots, R_n = S_n$ .

Portanto  $R = S$ . ■

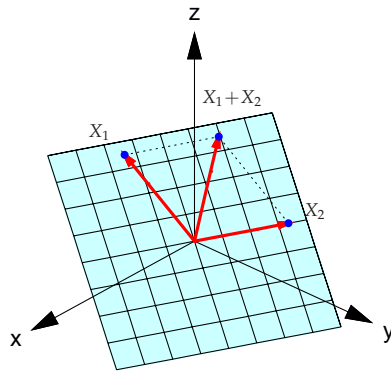


Figura 5.18: Soma de vetores do plano  $ax + by + cz = 0$

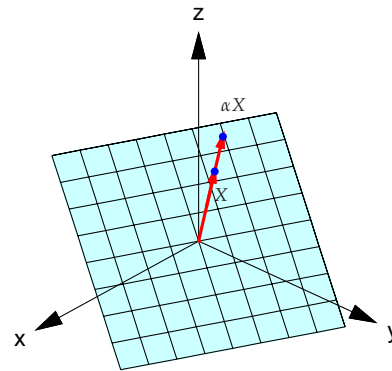


Figura 5.19: Multiplicação de vetor por escalar do plano  $ax + by + cz = 0$

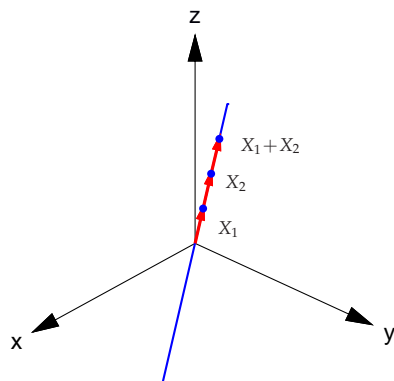


Figura 5.20: Soma de vetores da reta  $(x, y, z) = (at, bt, ct)$

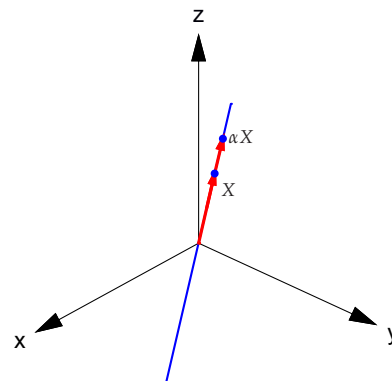


Figura 5.21: Multiplicação de vetor por escalar da reta  $(x, y, z) = (at, bt, ct)$



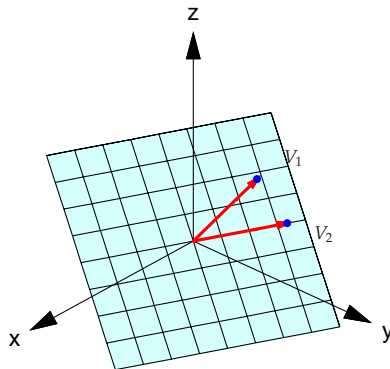


Figura 5.22:  $V_1$  e  $V_2$  que formam uma base para o plano

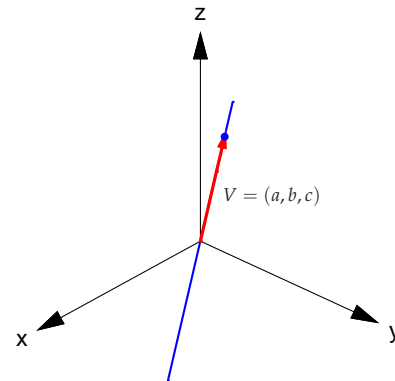


Figura 5.23: Vetor  $V = (a, b, c)$  que é base para a reta  $(x, y, z) = t(a, b, c)$

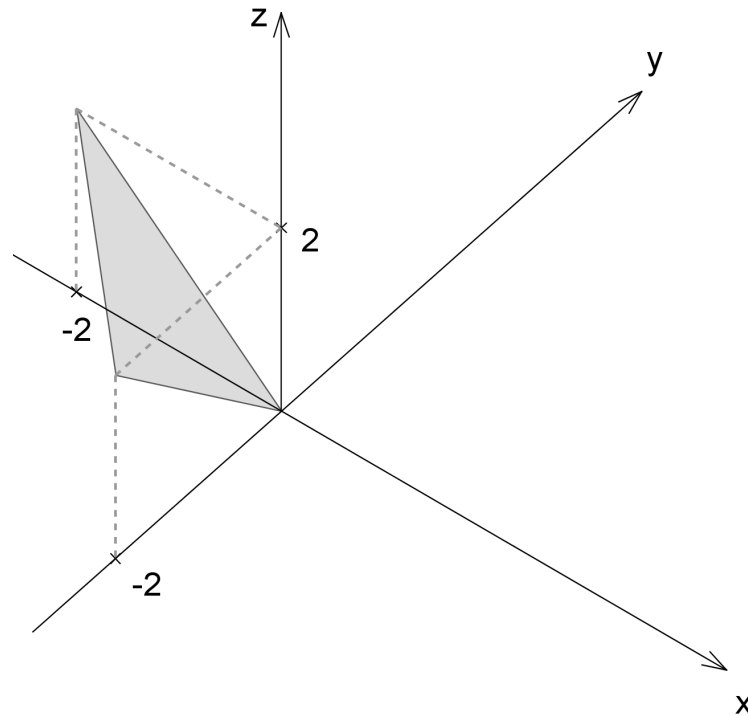


Figura 5.24: O subespaço  $\mathbb{W}$  do Exemplo 5.24

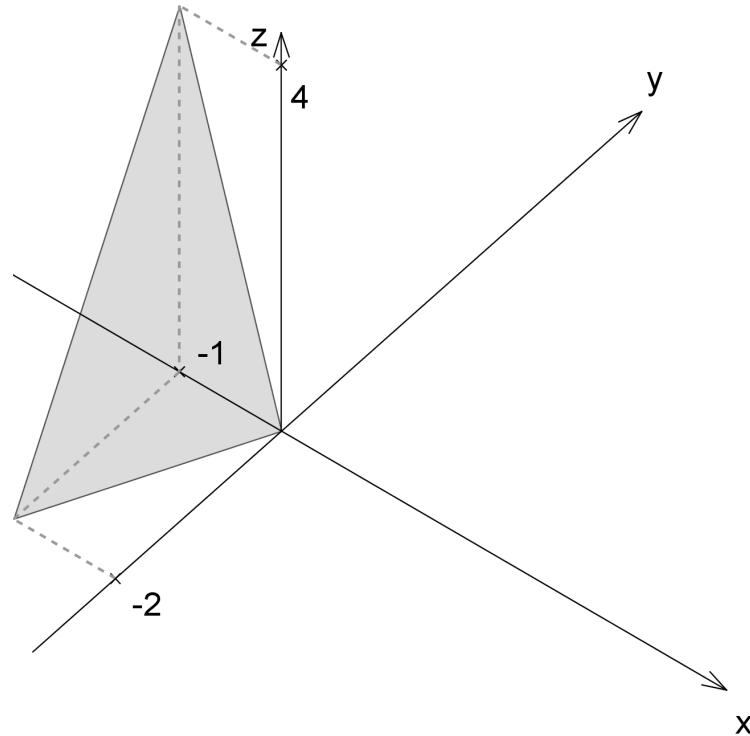


Figura 5.25: O subespaço  $V$  do Exemplo 5.24

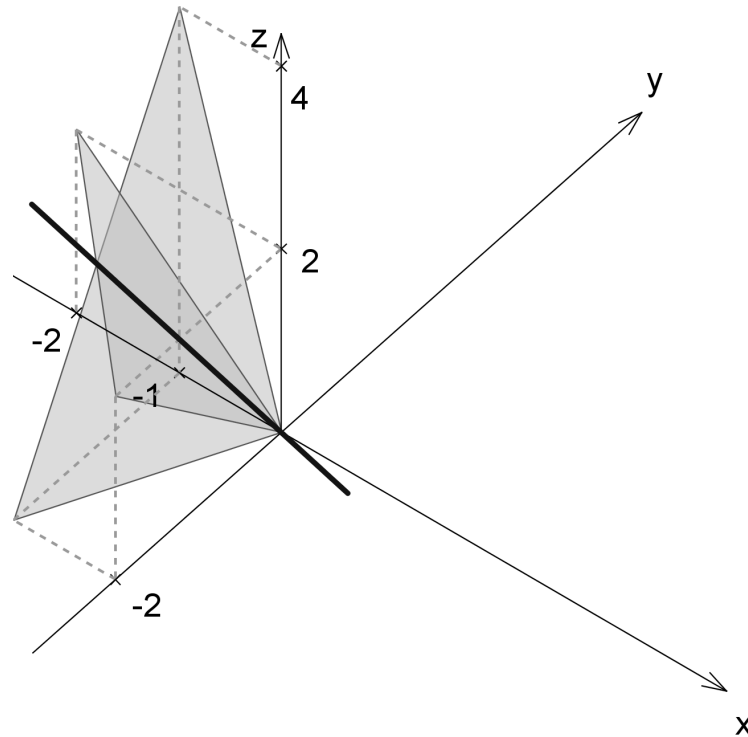


Figura 5.26: Os subespaços  $W$ ,  $V$  e  $V \cap W$  do Exemplo 5.24

## 5.3 Produto Escalar em $\mathbb{R}^n$

### 5.3.1 Produto Interno

Vimos que podemos estender a soma e a multiplicação de vetores por escalar para o  $\mathbb{R}^n$ . Podemos estender também os conceitos de produto escalar e ortogonalidade.

---

**Definição 5.7.** (a) Definimos o **produto escalar ou interno** de dois vetores  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  por

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

(b) Definimos a **norma** de um vetor  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  por

$$||X|| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

---

Escrevendo os vetores como matrizes colunas, o produto interno de dois vetores

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

pode ser escrito em termos do produto de matrizes como

$$X \cdot Y = X^t Y.$$

**Exemplo 5.27.** Sejam  $V = (1, -2, 4, 3, 5)$  e  $W = (5, 3, -1, -2, 1)$  vetores do  $\mathbb{R}^5$ . O produto escalar entre  $V$  e  $W$  é dado por

$$V \cdot W = (1)(5) + (-2)(3) + (4)(-1) + (3)(-2) + (5)(1) = -6.$$

As normas de  $V$  e  $W$  são dadas por

$$\|V\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{55},$$

$$\|W\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{40}.$$

São válidas as seguintes propriedades para o produto escalar e a norma de vetores de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposição 5.16.** Se  $X, Y$  e  $Z$  são vetores de  $\mathbb{R}^n$  e  $\alpha$  é um escalar, então

- (a)  $X \cdot Y = Y \cdot X$  (comutatividade);
- (b)  $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$  (distributividade em relação à soma);
- (c)  $(\alpha X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y) = X \cdot (\alpha Y)$ ;
- (d)  $X \cdot X = \|X\|^2 \geq 0$  e  $\|X\| = 0$  se, e somente se,  $X = \vec{0}$ ;
- (e)  $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$ ;
- (f)  $|X \cdot Y| \leq \|X\| \|Y\|$  (desigualdade de Cauchy-Schwarz);
- (g)  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$  (desigualdade triangular).

**Demonstração.** Sejam  $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Usando o fato de que se os vetores são escritos como matrizes colunas, então o produto escalar pode ser escrito como o produto de matrizes,  $X \cdot Y = X^t Y$ , e as propriedades da álgebra matricial (**Teorema 1.1 na página 9**), temos que

- (a)  $X \cdot Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = Y \cdot X$ .
- (b)  $X \cdot (Y + Z) = X^t (Y + Z) = X^t Y + X^t Z = X \cdot Y + X \cdot Z$ .
- (c)  $\alpha(X \cdot Y) = \alpha(X^t Y) = (\alpha X^t) Y = (\alpha X)^t Y = (\alpha X) \cdot Y$ . A outra igualdade é inteiramente análoga.
- (d)  $X \cdot X$  é uma soma de quadrados, por isso é sempre maior ou igual a zero e é zero se, e somente se, todas as parcelas são iguais a zero.
- (e)  $\|\alpha X\|^2 = (\alpha x_1)^2 + \cdots + (\alpha x_n)^2 = \alpha^2(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = \alpha^2 \|X\|^2$ . Tomando a raiz quadrada, segue-se o resultado.

(f) A norma de  $\lambda X + Y$  é maior ou igual a zero, para qualquer  $\lambda$  real. Assim,

$$0 \leq \|\lambda X + Y\|^2 = (\lambda X + Y) \cdot (\lambda X + Y) = (\|X\|^2)\lambda^2 + (2X \cdot Y)\lambda + \|Y\|^2,$$

para qualquer  $\lambda$  real. Logo, o discriminante deste trinômio tem que ser menor ou igual a zero. Ou seja,  $\Delta = 4(X \cdot Y)^2 - 4\|X\|^2\|Y\|^2 \leq 0$ . Logo,  $|X \cdot Y| \leq \|X\|\|Y\|$ .

(g) Pelo item anterior temos que

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= (X + Y) \cdot (X + Y) = \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2 \\ &\leq \|X\|^2 + 2|X \cdot Y| + \|Y\|^2 \\ &\leq \|X\|^2 + 2\|X\|\|Y\| + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2. \end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada, segue-se o resultado. ■

Dizemos que dois vetores  $X$  e  $Y$  são **ortogonais** se  $X \cdot Y = 0$ . As propriedades do produto escalar permitem introduzir o conceito de bases ortogonais no  $\mathbb{R}^n$ . Antes temos o seguinte resultado.

**Proposição 5.17.** Se  $V_1, \dots, V_k$  são vetores **não nulos** de  $\mathbb{R}^n$  **ortogonais**, isto é,  $V_i \cdot V_j = 0$ , para  $i \neq j$ , então

(a) O conjunto  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é L.I.

(b) Se  $V = \sum_{i=1}^k \alpha_i V_i$ , então  $\alpha_i = \frac{V \cdot V_i}{\|V_i\|^2}$ .



**Demonstração.** (a) Considere a equação vetorial

$$x_1 V_1 + \dots + x_k V_k = \vec{0}. \quad (5.19)$$

Fazendo o produto escalar de ambos os membros de (5.19) com  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  e aplicando as propriedades do produto escalar, obtemos

$$x_1 (V_1 \cdot V_i) + \dots + x_i (V_i \cdot V_i) + \dots + x_k (V_k \cdot V_i) = 0. \quad (5.20)$$

Mas,  $V_i \cdot V_j = 0$ , se  $i \neq j$ . Assim, de (5.20) obtemos que

$$x_i ||V_i||^2 = 0.$$

Mas, como  $V_i \neq \vec{0}$ , então  $||V_i|| \neq 0$  e  $x_i = 0$ , para  $i = 1, \dots, k$ .

(b) Seja

$$V = \sum_{i=1}^k \alpha_i V_i. \quad (5.21)$$

Fazendo o produto escalar de  $V$  com  $V_j$ , para  $j = 1, \dots, k$ , obtemos que

$$V \cdot V_j = \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i V_i \right) \cdot V_j = \sum_{i=1}^k (\alpha_i V_i \cdot V_j) = \alpha_j ||V_j||^2.$$

Assim,

$$\alpha_j = \frac{V \cdot V_j}{||V_j||^2}, \quad \text{para } j = 1, \dots, k.$$

■

Observe que o item (a) é uma consequência imediata do item (b).

Definimos a **projeção ortogonal** de um vetor  $V$  sobre um vetor não nulo  $W$ , por

$$\text{proj}_W V = \left( \frac{V \cdot W}{||W||^2} \right) W.$$

Observe que a projeção ortogonal de um vetor  $V$  sobre um vetor não nulo  $W$  é um múltiplo escalar do vetor  $W$ . Além disso temos o seguinte resultado.

---

**Proposição 5.18.** *Seja  $W \in \mathbb{R}^n$  um vetor não nulo. Então,  $V - \text{proj}_W V$  é ortogonal a  $W$ , para qualquer vetor  $V \in \mathbb{R}^n$ .*

---

**Demonstração.** Precisamos calcular o produto escalar de  $W$  com  $V - \text{proj}_W V$ :

$$(V - \text{proj}_W V) \cdot W = V \cdot W - \left( \frac{V \cdot W}{\|W\|^2} \right) W \cdot W = 0.$$

Portanto,  $V - \text{proj}_W V$  é ortogonal a  $W$ .



O próximo resultado é uma generalização da **Proposição 5.18**.

---

**Proposição 5.19.** *Sejam  $W_1, W_2, \dots, W_k$  vetores não nulos de  $\mathbb{R}^n$ , ortogonais entre si, então para qualquer vetor  $V$ ,  $V - \text{proj}_{W_1} V - \dots - \text{proj}_{W_k} V$  é ortogonal a  $W_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ .*

---

**Demonstração.** Vamos calcular o produto interno de  $V - \text{proj}_{W_1} V - \dots - \text{proj}_{W_k} V$  com  $W_j$ , para  $j = 1, \dots, k$ .

$$\left( V - \sum_{i=1}^k \text{proj}_{W_i} V \right) \cdot W_j = V \cdot W_j - \sum_{i=1}^k \left( \frac{V \cdot W_i}{\|W_i\|^2} \right) W_i \cdot W_j = V \cdot W_j - \left( \frac{V \cdot W_j}{\|W_j\|^2} \right) W_j \cdot W_j = 0,$$

pois  $W_i \cdot W_j = 0$ , se  $i \neq j$  e  $W_j \cdot W_j = \|W_j\|^2$ .





Figura 5.27: **Projeção ortogonal do vetor  $V$  sobre o vetor  $W$**

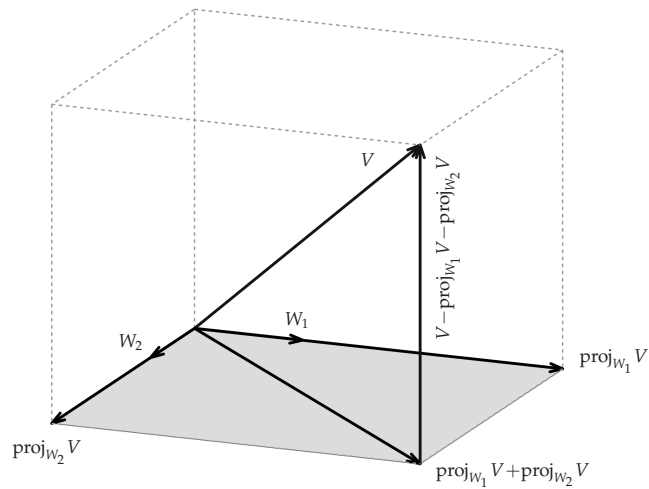


Figura 5.28:  **$V - \text{proj}_{W_1} V - \text{proj}_{W_2} V$  é ortogonal a  $W_1$  e a  $W_2$**

Vamos mostrar no próximo exemplo como encontrar no conjunto solução do sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$  um conjunto com o maior número possível de vetores unitários (com norma igual a 1) ortogonais.

**Exemplo 5.28.** Considere o sistema linear homogêneo  $AX = \vec{0}$ , em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando a matriz aumentada do sistema acima, obtemos a matriz escalonada reduzida

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

E assim a solução geral do sistema pode ser escrita como

$$x_1 = -\alpha - \gamma, \quad x_2 = \gamma, \quad x_3 = -\alpha + \beta, \quad x_4 = \beta, \quad x_5 = \alpha$$

para todos os valores de  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , ou seja, o conjunto solução do sistema  $AX = \vec{0}$  é

$$\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\alpha - \gamma, \gamma, -\alpha + \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, um elemento qualquer de  $\mathbb{W}$  pode ser escrito como uma combinação linear de vetores de  $\mathbb{W}$ :

$$\begin{aligned} (-\alpha - \gamma, \gamma, -\alpha + \beta, \beta, \alpha) &= (-\alpha, 0, -\alpha, 0, \alpha) + (0, 0, \beta, \beta, 0) + (-\gamma, \gamma, 0, 0, 0) \\ &= \alpha(-1, 0, -1, 0, 1) + \beta(0, 0, 1, 1, 0) + \gamma(-1, 1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Assim, todo vetor de  $\mathbb{W}$  pode ser escrito como combinação linear dos vetores  $V_1 = (-1, 0, -1, 0, 1)$ ,  $V_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$  e  $V_3 = (-1, 1, 0, 0, 0)$  pertencentes a  $\mathbb{W}$  ( $V_1$  é obtido fazendo-se  $\alpha = 1$  e  $\beta = \gamma = 0$ ,  $V_2$  fazendo-se  $\alpha = \gamma = 0$  e  $\beta = 1$  e  $V_3$  fazendo-se  $\alpha = \beta = 0$  e  $\gamma = 1$ ). Além disso segue da equação anterior que  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são L.I. Logo  $\{V_1, V_2, V_3\}$  é uma base de  $\mathbb{W}$ .

Vamos, agora, encontrar uma base ortonormal para  $\mathbb{W}$ . Para isso vamos aplicar a [Proposição 5.18 na página 321](#).

$$W_1 = V_1 = (-1, 0, -1, 0, 1);$$

$$W_2 = V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2 = (0, 0, 1, 1, 0) + \frac{1}{3}(-1, 0, -1, 0, 1) = \frac{1}{3}(-1, 0, 2, 3, 1)$$

$$\begin{aligned} W_3 &= V_3 - \text{proj}_{W_1} V_3 - \text{proj}_{W_2} V_3 = (-1, 1, 0, 0, 0) - \frac{1}{3}(-1, 0, -1, 0, 1) - \frac{1}{15}(-1, 0, 2, 3, 1) \\ &= \frac{1}{5}(-3, 5, 1, -1, -2) \end{aligned}$$

Agora, vamos “dividir” cada vetor pela sua norma para obtermos vetores de norma igual a 1 (**unitários**).

$$\begin{aligned} U_1 &= \left( \frac{1}{\|W_1\|} \right) W_1 = \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ U_2 &= \left( \frac{1}{\|W_2\|} \right) W_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{15}}, 0, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}} \right) \\ U_3 &= \left( \frac{1}{\|W_3\|} \right) W_3 = \left( -\frac{3}{2\sqrt{10}}, \frac{5}{2\sqrt{10}}, \frac{1}{2\sqrt{10}}, -\frac{1}{2\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}} \right) \end{aligned}$$

### 5.3.2 Bases Ortogonais e Ortonormais

---

**Definição 5.8.** Seja  $\{V_1, \dots, V_k\}$  uma base de um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ .

- (a) Dizemos que  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é uma **base ortogonal**, se  $V_i \cdot V_j = 0$ , para  $i \neq j$ , ou seja, se quaisquer dois vetores da base são ortogonais;
  - (b) Dizemos que  $\{V_1, \dots, V_k\}$  é uma **base ortonormal**, se além de ser uma base ortogonal,  $\|V_i\| = 1$ , ou seja, o vetor  $V_i$  é **unitário**, para  $i = 1, \dots, m$ .
- 

**Exemplo 5.29.** A **base canônica de  $\mathbb{R}^n$** , que é formada pelos vetores

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad E_n = (0, \dots, 0, 1)$$

é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 5.30.** No [Exemplo 5.28](#),  $\{W_1, W_2, W_3\}$  é uma base ortogonal de  $\mathbb{W}$  e  $\{U_1, U_2, U_3\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{W}$ .

O resultado a seguir mostra que o procedimento usado no [Exemplo 5.28](#) conhecido como **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt** pode ser aplicado a qualquer subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Nas [Figuras 5.29 e 5.30](#) vemos como isto é possível no caso em que o subespaço é o  $\mathbb{R}^3$ , já que o  $\mathbb{R}^3$  é subespaço dele mesmo.



---

**Teorema 5.20.** *Seja  $\{V_1, \dots, V_k\}$  uma base de um subespaço  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Então, existe uma base  $\{U_1, \dots, U_k\}$  de  $\mathbb{W}$  que é ortonormal e tal que o subespaço gerado por  $U_1, \dots, U_j$  é igual ao subespaço gerado por  $V_1, \dots, V_j$  para  $j = 1, \dots, k$ .*

---

**Demonstração.** (a) Sejam

$$\begin{aligned} W_1 &= V_1, \\ W_2 &= V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2, \\ W_3 &= V_3 - \text{proj}_{W_1} V_3 - \text{proj}_{W_2} V_3, \\ &\dots \\ W_k &= V_k - \text{proj}_{W_1} V_k - \text{proj}_{W_2} V_k \dots - \text{proj}_{W_{k-1}} V_k. \end{aligned}$$

Pela [Proposição 5.18](#), segue-se que  $W_2$  é ortogonal a  $W_1$  e  $W_2 \neq \vec{0}$ , pois  $V_1$  e  $V_2$  são L.I. Assim,  $W_1$  e  $W_2$  formam uma base ortogonal do subespaço gerado por  $V_1$  e  $V_2$ . Agora, supondo que  $W_1, \dots, W_{k-1}$  seja uma base ortogonal do subespaço gerado por  $V_1, \dots, V_{k-1}$ , segue-se da [Proposição 5.19](#), que  $W_k$  é ortogonal a  $W_1, \dots, W_{k-1}$ .  $W_k \neq \vec{0}$ , pois caso contrário,  $V_k$  pertenceria ao subespaço gerado por  $W_1, \dots, W_{k-1}$  que é igual ao subespaço gerado por  $V_1, \dots, V_{k-1}$  e assim  $V_1, \dots, V_k$  seriam L.D. Como  $W_1, \dots, W_k$  são ortogonais não nulos, pela [Proposição 5.17 na página 318](#), eles são L.I. e portanto formam uma base do subespaço  $\mathbb{W}$ .

(b) Sejam, agora

$$U_1 = \left( \frac{1}{\|W_1\|} \right) W_1, \quad U_2 = \left( \frac{1}{\|W_2\|} \right) W_2, \quad \dots, \quad U_k = \left( \frac{1}{\|W_k\|} \right) W_k.$$

Assim,  $\{U_1, \dots, U_k\}$  é uma base ortonormal para o subespaço  $\mathbb{W}$ .



## Exercícios Numéricos (respostas na página 520)

- 5.3.1.** Sejam  $X = (1, 1, -2)$  e  $Y = (a, -1, 2)$ . Para quais valores de  $a$ ,  $X$  e  $Y$  são ortogonais?
- 5.3.2.** Sejam  $X = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$  e  $Y = (a, 1/\sqrt{2}, -b)$ . Para quais valores de  $a$  e  $b$ , o conjunto  $\{X, Y\}$  é ortonormal?
- 5.3.3.** Encontre uma base ortonormal para o plano  $x + y + z = 0$ .
- 5.3.4.** Encontre um subconjunto com o maior número possível de vetores ortonormais no subespaço dos vetores  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tais que  $a - b - 2c + d = 0$ .
- 5.3.5.** Encontre um subconjunto com o maior número possível de vetores ortonormais no conjunto solução do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

- 5.3.6.** Considere as retas  $(x, y, z) = t(1, 2, -3)$  e  $(x, y, z) = (0, 1, 2) + s(2, 4, -6)$  em  $\mathbb{R}^3$ . Encontre a equação geral do plano que contém estas duas retas e ache um subconjunto com o maior número possível de vetores ortonormais neste plano.
- 5.3.7.** Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  que tem como base  $\{(1, 1, -1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1, 0, 0, 1)\}$ .
- 5.3.8.** Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  a partir da base  $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ .
- 5.3.9.** Ache as equações dos planos em  $\mathbb{R}^3$  ortogonais ao vetor  $(2, 2, 2)$ , que distam  $\sqrt{3}$  do ponto  $(1, 1, 1)$ . Estes planos são subespaços de  $\mathbb{R}^3$ ? Caso afirmativo, encontre base(s) ortonormal(is) para ele(s).

## Exercícios Teóricos

- 5.3.10.** Mostre que se  $V$  é ortogonal a  $W$ , então  $V$  é ortogonal a  $\alpha W$ , para todo escalar  $\alpha$ .

- 5.3.11.** Mostre que se  $V$  é ortogonal a  $W_1, \dots, W_k$ , então  $V$  é ortogonal a qualquer combinação linear de  $W_1, \dots, W_k$ .
- 5.3.12.** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Prove que se  $X \cdot Y = X \cdot Z$ , então  $Y - Z$  é ortogonal a  $X$ .
- 5.3.13.** Mostre que se  $W_1, \dots, W_k$  são vetores não nulos ortogonais entre si e  $X = \alpha_1 W_1 + \dots + \alpha_k W_k$ , então  $X = \text{proj}_{W_1} X + \dots + \text{proj}_{W_k} X$ .
- 5.3.14.** Sejam  $V_1, \dots, V_k$  vetores linearmente dependentes. Mostre que, aplicando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vetores  $V_1, \dots, V_k$ , se obtém um vetor  $W_i$  que é nulo, para algum  $i = 1, \dots, k$ . (Sugestão: Seja  $V_i$  o primeiro vetor tal que  $V_i \in [V_1, \dots, V_{i-1}] = [W_1, \dots, W_{i-1}]$  e use o exercício anterior.)
- 5.3.15.** Seja  $S = \{W_1, \dots, W_k\}$  uma base ortogonal de um subespaço  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que um todo vetor  $V$  de  $\mathbb{W}$  pode ser escrito como

$$V = \frac{V \cdot W_1}{\|W_1\|^2} W_1 + \frac{V \cdot W_2}{\|W_2\|^2} W_2 + \dots + \frac{V \cdot W_k}{\|W_k\|^2} W_k.$$

(Sugestão: escreva  $V = x_1 W_1 + \dots + x_k W_k$ , faça o produto escalar de  $V$  com  $W_i$  e conclua que  $x_i = \frac{V \cdot W_i}{\|W_i\|^2}$ , para  $i = 1, \dots, k$ .)

- 5.3.16.** Mostre que o conjunto de todos os vetores do  $\mathbb{R}^n$  ortogonais a um dado vetor  $V = (a_1, \dots, a_n)$ ,

$$\mathbb{W} = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid X \cdot V = 0\} \quad \text{é um subespaço de } \mathbb{R}^n.$$

- 5.3.17.** Demonstre que, se  $V$  e  $W$  são vetores quaisquer de  $\mathbb{R}^n$ , então:

- (a)  $V \cdot W = \frac{1}{4} [\|V + W\|^2 - \|V - W\|^2]$  (identidade polar);
- (b)  $\|V + W\|^2 + \|V - W\|^2 = 2(\|V\|^2 + \|W\|^2)$  (lei do paralelogramo).

(Sugestão: desenvolva os segundos membros das igualdades acima observando que  $\|V + W\|^2 = (V + W) \cdot (V + W)$  e  $\|V - W\|^2 = (V - W) \cdot (V - W)$ )

- 5.3.18.** Seja  $\{U_1, \dots, U_n\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $A = [U_1 \dots U_n]$  é uma matriz  $n \times n$  cujas colunas são os vetores  $U_1, \dots, U_n$ , então  $A$  é invertível e  $A^{-1} = A^t$ . (Sugestão: mostre que  $A^t A = I_n$ .)
- 5.3.19.** Mostre que o ângulo entre dois vetores não nulos  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , que é definido como sendo o número real  $\theta$  entre 0 e  $\pi$  tal que

$$\cos \theta = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|},$$

está bem definido, ou seja, que existe um tal número real  $\theta$  e é único. (Sugestão: mostre, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$-1 \leq \frac{X \cdot Y}{\|X\| \|Y\|} \leq 1.)$$

- 5.3.20.** Seja  $\mathbb{W}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que o conjunto de todos os vetores ortogonais a todos os vetores de  $\mathbb{W}$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Este subespaço é chamado de **complemento ortogonal de  $\mathbb{W}$**  e denotado por  $\mathbb{W}^\perp$ , ou seja,

$$\mathbb{W}^\perp = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X \cdot Y = 0, \text{ para todo } Y \in \mathbb{W}\}.$$

- 5.3.21.** Mostre que todo subespaço  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{R}^n$  é o espaço solução de um sistema linear homogêneo. (Sugestão: seja  $\{W_1, \dots, W_k\}$  uma base de  $\mathbb{W}^\perp$  tome  $A = [W_1 \dots W_k]^t$ .)
- 5.3.22.** Embora não exista o produto vetorial de dois vetores em  $\mathbb{R}^n$ , para  $n > 3$ , podemos definir o **produto vetorial de  $n - 1$  vetores**,  $V_1 = (v_{11}, \dots, v_{1n}), \dots, V_{n-1} = (v_{(n-1)1}, \dots, v_{(n-1)n})$  como

$$V_1 \times V_2 \times \dots \times V_{n-1} = \left( (-1)^{n+1} \det(v_{ij})_{j \neq 1}, (-1)^{n+2} \det(v_{ij})_{j \neq 2}, \dots, (-1)^{2n} \det(v_{ij})_{j \neq n} \right).$$

Mostre que:

- (a)  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_{n-1}$  é ortogonal a  $V_1, \dots, V_{n-1}$ .
- (b)  $\alpha(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_{n-1}) = V_1 \times \dots \times \alpha V_i \times \dots \times V_{n-1}$

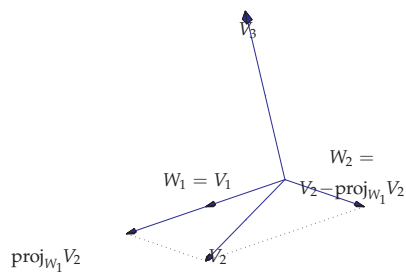


Figura 5.29:  $W_1 = V_1$  e  $W_2 = V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2$

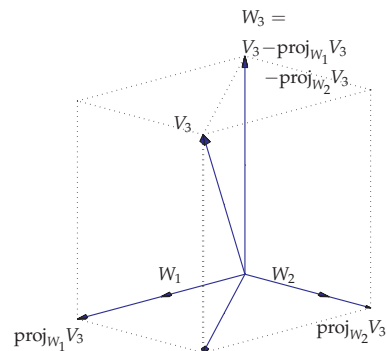


Figura 5.30:  $W_3 = V_3 - \text{proj}_{W_1} V_3 - \text{proj}_{W_2} V_3$

## 5.4 Mudança de Coordenadas

Se as coordenadas de um ponto  $P$  no espaço são  $(x, y, z)$ , então as componentes do vetor  $\overrightarrow{OP}$  também são  $(x, y, z)$  e então podemos escrever

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) \\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\end{aligned}$$

em que  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ . Ou seja, as coordenadas de um ponto  $P$  são iguais aos escalares que aparecem ao escrevermos  $\overrightarrow{OP}$  como uma combinação linear dos vetores canônicos. Assim, o ponto  $O = (0, 0, 0)$  e os vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  determinam um sistema de coordenadas ortogonal,  $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . Para resolver alguns problemas geométricos é necessário usarmos um segundo **sistema de coordenadas ortogonal** determinado por uma origem  $O'$  e por 3 vetores  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$  ortonormais de  $\mathbb{R}^3$ .<sup>\*</sup> Por exemplo, se  $O' = (2, 3/2, 3/2)$ ,  $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$ ,  $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$  e  $U_3 = (0, 0, 1) = \vec{k}$ , então  $\{O', U_1, U_2, U_3\}$  determina um novo sistema de coordenadas: aquele com origem no ponto  $O'$ , cujos eixos  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  são retas que passam por  $O'$  orientadas com os sentidos e direções de  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ , respectivamente (Figura 5.32).

As coordenadas de um ponto  $P$  no sistema de coordenadas  $\{O', U_1, U_2, U_3\}$  é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos  $\overrightarrow{O'P}$  como combinação linear dos vetores  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ , ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'U_1 + y'U_2 + z'U_3,$$

<sup>\*</sup>Em geral, um sistema de coordenadas (**não** necessariamente ortogonal) é definido por um ponto  $O'$  e três vetores  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  L.I. de  $\mathbb{R}^3$  (**não** necessariamente ortonormais) (veja o Exercício 5.4.9 na página 344).

então as coordenadas de  $P$  no sistema  $\{O', U_1, U_2, U_3\}$  são dadas por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2, U_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Vamos considerar inicialmente o caso em que  $O = O'$ . Assim, se  $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ , então  $x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 = \overrightarrow{OP}$  é equivalente ao sistema linear

$$QX' = X, \quad \text{em que} \quad Q = [U_1 \ U_2 \ U_3], \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Como a matriz  $Q$  é invertível (por que?) a solução é dada por

$$X' = Q^{-1}X.$$

Mas, como  $U_1, U_2$  e  $U_3$  formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , então

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \\ U_3^t \end{bmatrix} [U_1 \ U_2 \ U_3] = \begin{bmatrix} U_1^t U_1 & U_1^t U_2 & U_1^t U_3 \\ U_2^t U_1 & U_2^t U_2 & U_2^t U_3 \\ U_3^t U_1 & U_3^t U_2 & U_3^t U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \cdot U_1 & U_1 \cdot U_2 & U_1 \cdot U_3 \\ U_2 \cdot U_1 & U_2 \cdot U_2 & U_2 \cdot U_3 \\ U_3 \cdot U_1 & U_3 \cdot U_2 & U_3 \cdot U_3 \end{bmatrix} = I_3$$

Assim, a matriz  $Q = [U_1 \ U_2 \ U_3]$  é invertível e  $Q^{-1} = Q^t$ . Desta forma as coordenadas de um ponto  $P$  no espaço em relação ao sistema  $\{O, U_1, U_2, U_3\}$ ,  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$  estão unicamente determinados e

$$[P]_{\{O, U_1, U_2, U_3\}} = Q^t [P]_{\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$



Também no plano temos o mesmo tipo de situação que é tratada de forma inteiramente análoga. As coordenadas de um ponto  $P$  no plano em relação a um sistema de coordenadas  $\{O', U_1, U_2\}$ , em que  $U_1$  e  $U_2$  são vetores que formam uma base ortonormal do  $\mathbb{R}^2$ , é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos  $\overrightarrow{O'P}$  como combinação linear de  $U_1$  e  $U_2$ , ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'U_1 + y'U_2,$$

então as coordenadas de  $P$  no sistema  $\{O', U_1, U_2\}$  são dadas por

$$[P]_{\{O', U_1, U_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

As coordenadas de um ponto  $P$  no plano em relação ao sistema  $\{O, U_1, U_2, U_3\}$  estão bem definidas, ou seja,  $x'$  e  $y'$  estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O, U_1, U_2\}} = Q^t [P]_{\{O, E_1, E_2\}} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

em que  $E_1 = (1, 0)$  e  $E_2 = (0, 1)$ . Observe que, tanto no caso do plano quanto no caso do espaço, a matriz  $Q$  satisfaz,  $Q^{-1} = Q^t$ . Uma matriz que satisfaz esta propriedade é chamada **matriz ortogonal**.

**Exemplo 5.31.** Considere o sistema de coordenadas no plano em que  $O' = O$  e  $U_1 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$  e  $U_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ . Se  $P = (2, 4)$ , vamos determinar as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas.

$$Q = [U_1 \ U_2] = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Assim as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O, u_1, u_2\}} = Q^t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} - 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 5.32.** Considere o mesmo sistema de coordenadas do exemplo anterior, mas agora seja  $P = (x, y)$  um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas.

As coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$[P]_{\{O, u_1, u_2\}} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}x + y)/2 \\ (-x + \sqrt{3}y)/2 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 5.33.** Vamos agora considerar um problema inverso àqueles apresentados nos exemplos anteriores. Suponha que sejam válidas as seguintes equações

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases},$$

ou equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

entre as coordenadas  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  de um ponto  $P$  em relação a um sistema de coordenadas  $\{O, U_1, U_2\}$  e as coordenadas de  $P$ ,  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , em relação ao sistema de coordenadas original

$$\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}.$$

Queremos determinar quais são os vetores  $U_1$  e  $U_2$ .

Os vetores  $U_1$  e  $U_2$  da nova base possuem coordenadas  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , respectivamente, em relação ao novo sistema de coordenadas,  $\{O, U_1, U_2\}$ . Pois,  $U_1 = 1U_1 + 0U_2$  e  $U_2 = 0U_1 + 1U_2$ . Queremos saber quais as coordenadas destes vetores em relação ao sistema de coordenadas original,  $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} U_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ U_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ou seja,  $U_1$  e  $U_2$  são as colunas da matriz  $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ .

### 5.4.1 Rotação

Suponha que o novo sistema de coordenadas  $\{O, U_1, U_2\}$  seja obtido do sistema original  $\{O, E_1 = (1, 0), E_2 = (0, 1)\}$  por uma rotação de um ângulo  $\theta$ . Observando a

Figura 5.34, obtemos

$$\begin{aligned} U_1 &= (\cos \theta, \sin \theta) \\ U_2 &= (-\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

seja  $P = (x, y)$  um ponto qualquer do plano. Vamos determinar as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas.

A matriz

$$Q = [U_1 \ U_2] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R_\theta$$

é chamada **matriz de rotação**.

As coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas são dadas por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R_\theta^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O sistema de coordenadas que aparece nos dois primeiros exemplos desta seção podem ser obtidos por uma rotação de um ângulo  $\theta = \pi/6$  em relação ao sistema original.

### 5.4.2 Translação

Vamos considerar, agora, o caso em que  $O' \neq O$ , ou seja, em que ocorre uma **translação** dos eixos coordenados.

Observando a Figura 5.35, obtemos

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}. \quad (5.22)$$

Assim, se  $\overrightarrow{OO'} = (h, k)$ , então

$$\overrightarrow{O'P} = (x', y') = (x, y) - (h, k) = (x - h, y - k)$$

Logo, as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema são dadas por

$$[P]_{\{O', E_1, E_2\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - h \\ y - k \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

O eixo  $x'$  tem equação  $y' = 0$ , ou seja,  $y = k$  e o eixo  $y'$ ,  $x' = 0$ , ou seja,  $x = h$ .

### 5.4.3 Aplicação: Computação Gráfica - Projeção Ortográfica

Esta projeção é usada para fazer desenhos de objetos tridimensionais no papel ou na tela do computador. Com esta projeção os pontos no espaço são projetados ortogonalmente ao plano do desenho.

Para encontrar a projeção de um ponto  $P$  podemos encontrar as coordenadas de  $P$  em relação ao sistema  $\mathcal{S}' = \{O', U_1, U_2, U_3\}$  e tomar as duas primeiras coordenadas.

Como a projeção em qualquer plano paralelo ao plano do desenho fornece as mesmas coordenadas podemos supor que  $O' = O$ , ou seja, que os dois sistemas têm a mesma origem.

A relação entre as coordenadas de um ponto nos dois sistemas

$$\mathcal{S}' = \{O, U_1, U_2, U_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

é dada por

$$X' = Q^t X, \quad \text{em que } Q = [U_1 \ U_2 \ U_3]$$

Vamos encontrar os vetores  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$  em função dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ . O vetor  $U_1$  é paralelo ao plano  $xy$  e é perpendicular ao vetor  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , ou seja,

$$U_1 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0).$$

Os vetores  $U_2$  e  $U_3$  estão no plano definido por  $\vec{k}$  e  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ .

$$U_2 = -\cos \phi (\cos \theta, \sin \theta, 0) + \sin \phi \vec{k} = (-\cos \phi \cos \theta, -\cos \phi \sin \theta, \sin \phi)$$

$$U_3 = \cos \phi \vec{k} + \sin \phi (\cos \theta, \sin \theta, 0) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

Assim a relação entre as coordenadas de um ponto nos dois sistemas

$$\mathcal{S}' = \{O, U_1, U_2, U_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{S} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \phi \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi \\ \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e a projeção é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \phi \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Por exemplo para  $\theta = 30^\circ$  e  $\phi = 60^\circ$  temos que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.50 & 0.87 & 0 \\ -0.43 & -0.25 & 0.87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Usando esta projeção os vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são desenhados como na figura abaixo.

Experimente desenhar o cubo que tem a origem  $O = (0, 0, 0)$  como um dos vértices e como vértices adjacentes à origem  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ . Observe que não é necessário calcular a projeção dos outros pontos (por que?)

## Exercícios Numéricos (respostas na página 524)

**5.4.1.** Encontre as coordenadas do ponto  $P$  com relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{S}$ , nos seguintes casos:

(a)  $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$  e  $P = (1, 3)$ ;

(b)  $\mathcal{S} = \{O, (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$  e  $P = (2, -1, 2)$ ;

**5.4.2.** Encontre o ponto  $P$ , se as coordenadas de  $P$  em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{S}$ ,  $[P]_{\mathcal{S}}$ , são:

(a)  $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , em que  $\mathcal{S} = \{O, (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ .

(b)  $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , em que  $\mathcal{S} = \{O, (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ .

**5.4.3.** Sejam  $[P]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  as coordenadas de um ponto  $P$  em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  e  $[P]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ , em relação ao sistema de coordenadas  $\mathcal{S} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$ . Suponha que temos a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Quais são os vetores  $U_1, U_2$  e  $U_3$ ?

**5.4.4.** Determine qual a rotação do plano em que as coordenadas do ponto  $P = (\sqrt{3}, 1)$  são  $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$ .



5.4.5. Considere o plano  $\pi : 3x - \sqrt{3}y + 2z = 0$ .

- (a) Determine uma base ortonormal para o plano em que o primeiro vetor esteja no plano  $xy$ .
- (b) Complete a base encontrada para se obter uma base ortonormal  $\{U_1, U_2, U_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- (c) Determine as coordenadas dos vetores  $\vec{i}, \vec{j}$  e  $\vec{k}$  no sistema  $\{O, U_1, U_2, U_3\}$ .

5.4.6. Considere dois sistemas de coordenadas  $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  e  $\mathcal{S} = \{O, \vec{i}, U_2, U_3\}$ , em que o sistema  $\mathcal{S}$  é obtido do sistema  $\mathcal{R}$  por uma rotação do ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $x$ . Determine a relação entre as coordenadas,  $(x', y', z')$ , em relação ao sistema  $\mathcal{S}$  e  $(x, y, z)$ , em relação ao sistema  $\mathcal{R}$ .

## Exercícios Teóricos

5.4.7. Mostre que

(a)  $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$ .

(b)  $R_{\theta}^{-1} = R_{-\theta}$ .

5.4.8. Seja  $B$  uma matriz quadrada  $2 \times 2$ .

(a) Verifique que  $R_{\theta} B$  é a matriz obtida girando as colunas de  $B$  de  $\theta$ .

(b) Verifique que  $B R_{\theta}$  é a matriz obtida girando as linhas de  $B$  de  $-\theta$ .

(c) Quais as condições sobre  $B$  e  $\theta$  para que  $R_{\theta} B = B R_{\theta}$ . Dê um exemplo.

5.4.9. Definimos coordenadas de pontos no espaço em relação a um sistema de coordenadas determinado por um ponto  $O'$  e três vetores  $V_1, V_2$  e  $V_3$  L.I. não necessariamente ortonormais do  $\mathbb{R}^3$  da mesma forma como fizemos quando os vetores formam uma base ortonormal. As coordenadas de um ponto  $P$  no sistema de coordenadas  $\{O', V_1, V_2, V_3\}$  é definido como sendo os escalares que aparecem ao escrevermos  $\overrightarrow{O'P}$  como combinação linear dos vetores  $V_1, V_2$  e  $V_3$ , ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'V_1 + y'V_2 + z'V_3,$$

então as coordenadas de  $P$  no sistema  $\{O', V_1, V_2, V_3\}$  são dadas por

$$[P]_{\{O', V_1, V_2, V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Assim, se  $\overrightarrow{O'P} = (x, y, z)$ , então  $x'V_1 + y'V_2 + z'V_3 = \overrightarrow{O'P}$  pode ser escrito como

$$[V_1 \ V_2 \ V_3] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- (a) Mostre que a matriz  $Q = [V_1 \ V_2 \ V_3]$  é invertível.
- (b) Mostre que as coordenadas de um ponto  $P$  no espaço em relação ao sistema  $\{O', V_1, V_2, V_3\}$  estão bem definidas, ou seja,  $x', y'$  e  $z'$  estão unicamente determinados e são dados por

$$[P]_{\{O', V_1, V_2, V_3\}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Q^{-1} [P]_{\{O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}.$$

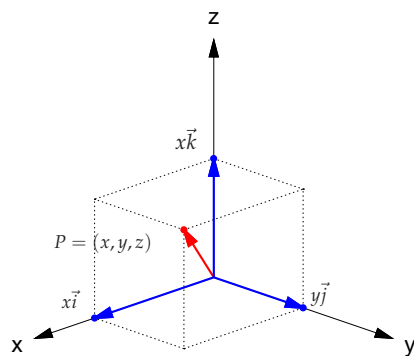


Figura 5.31:  $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

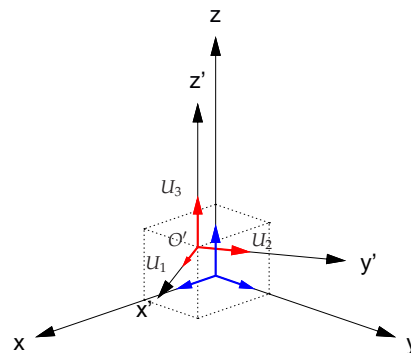


Figura 5.32: Dois sistemas de coordenadas ortogonais  $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  e  $\{O', U_1, U_2, U_3\}$

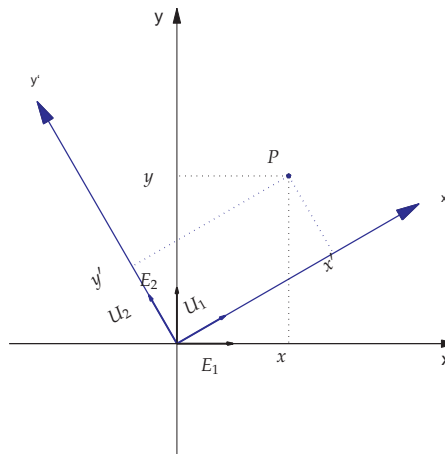


Figura 5.33: Coordenadas de um ponto  $P$  em dois sistemas

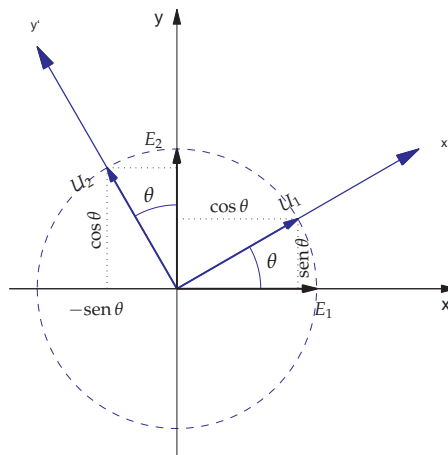


Figura 5.34: Rotação de um ângulo  $\theta$

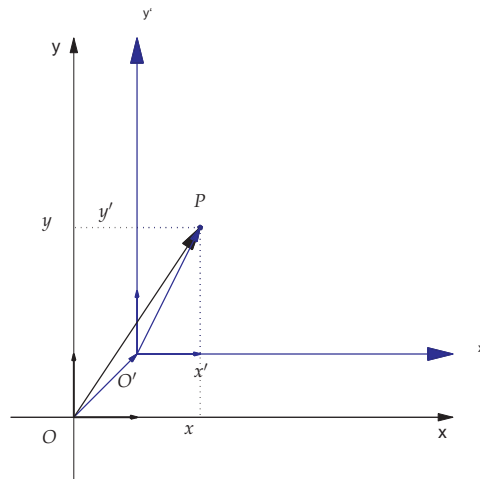


Figura 5.35: Coordenadas de um ponto  $P$  em dois sistemas (translação)

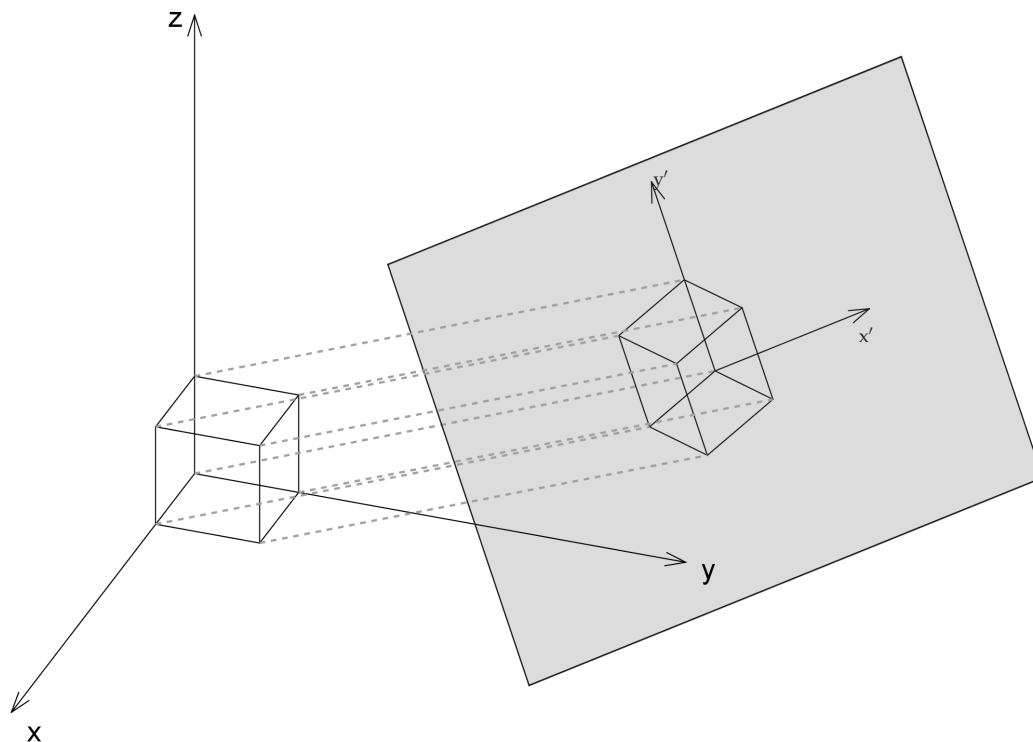


Figura 5.36: **Projeção ortográfica de um cubo**



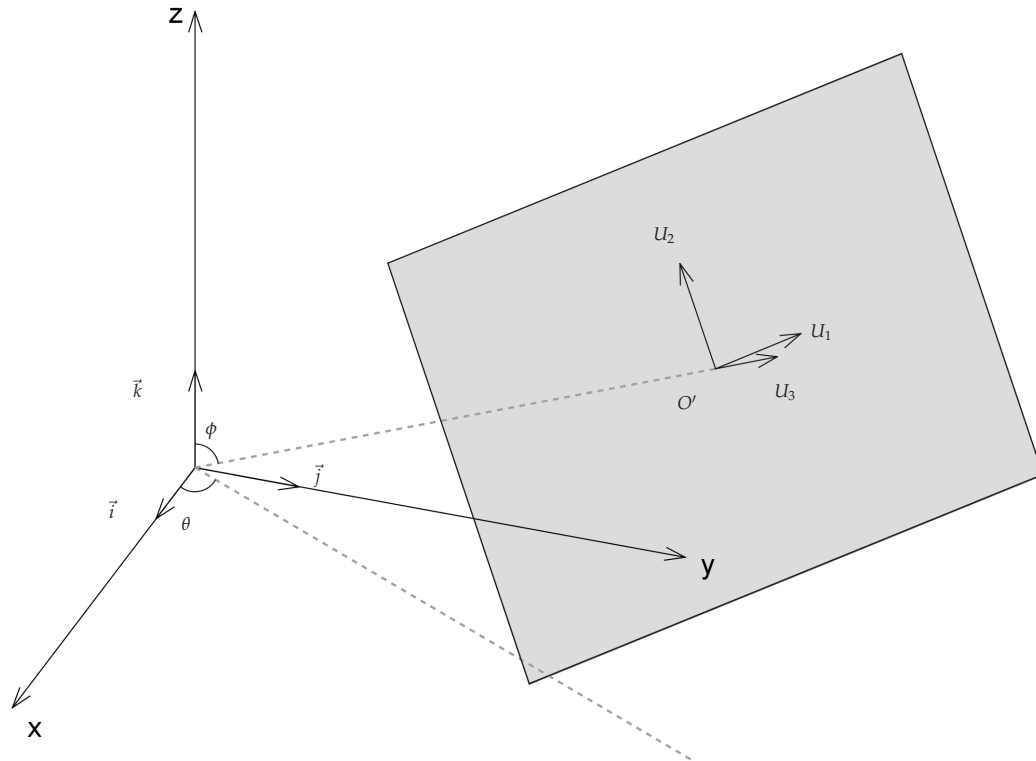


Figura 5.37: sistemas de coordenadas relacionados à projeção ortográfica

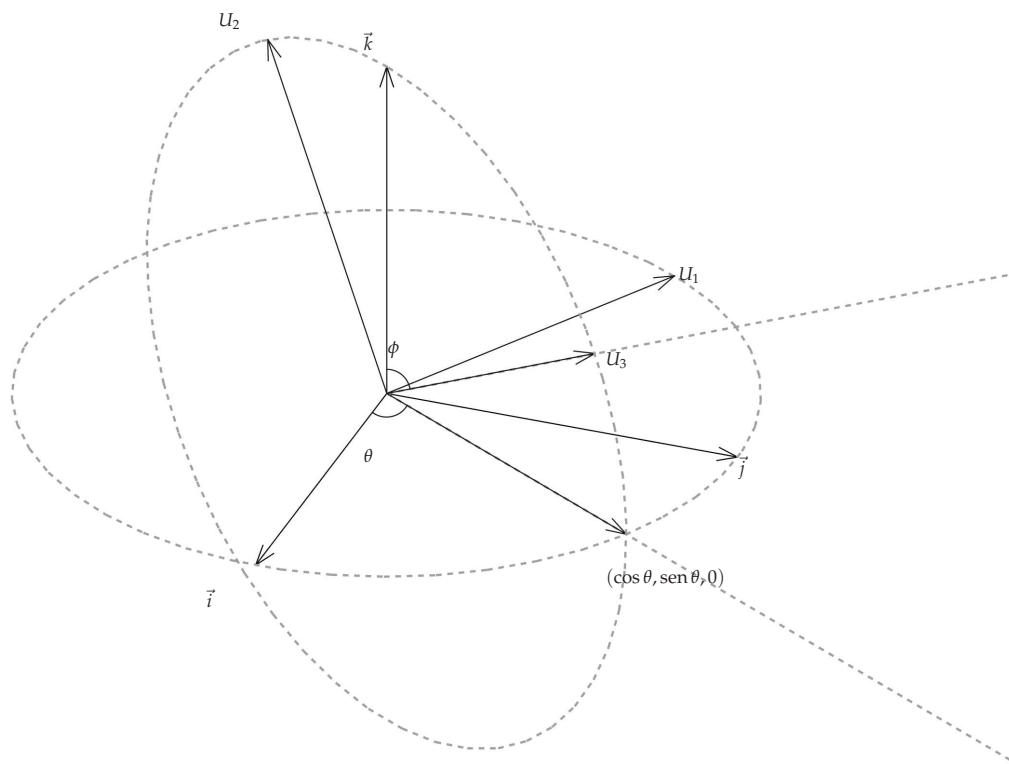


Figura 5.38: Bases relacionadas à projeção ortográfica

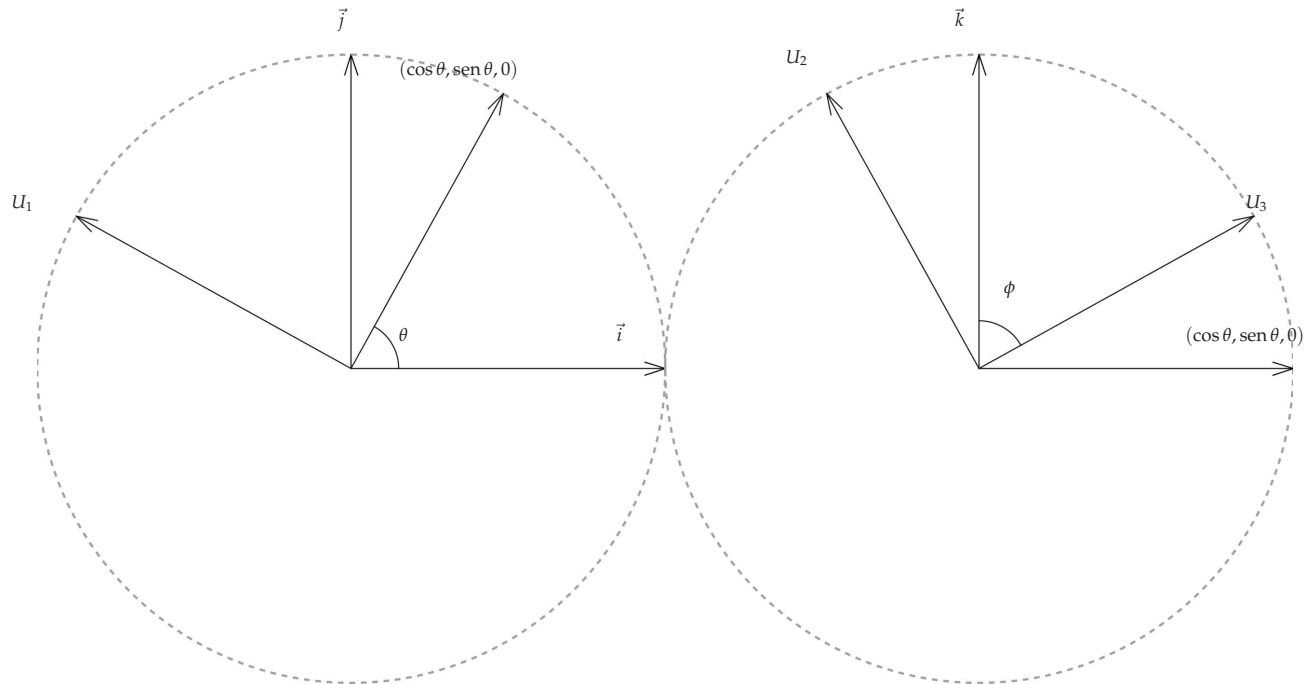


Figura 5.39: Relação entre os vetores das bases  $\{U_1, U_2, U_3\}$  e  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

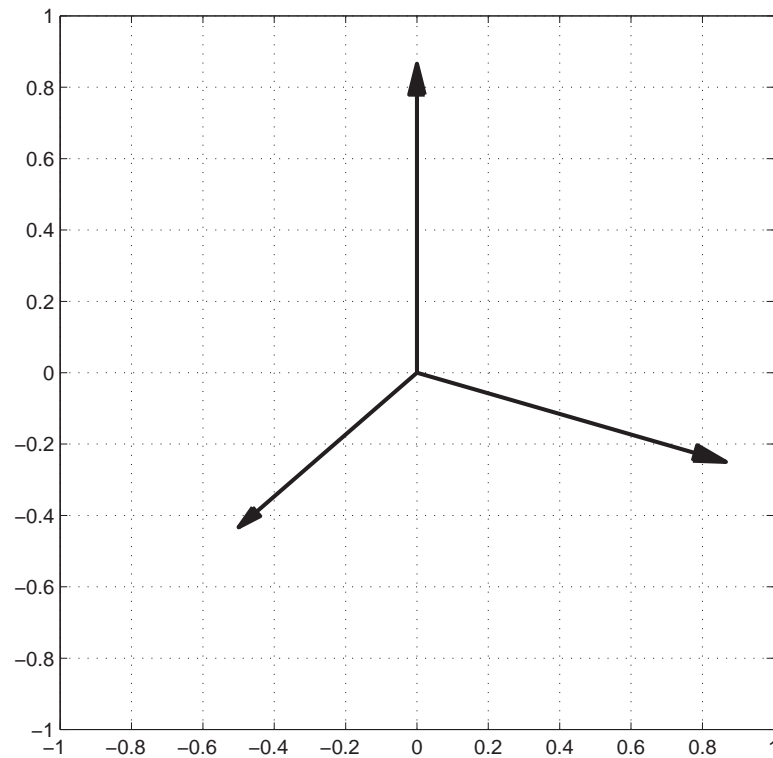


Figura 5.40: Vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  desenhados usando projeção ortográfica

## Teste do Capítulo

---

1. Sejam  $S_1$  e  $S_2$  subconjuntos finitos do  $\mathbb{R}^n$  tais que  $S_1$  seja um subconjunto de  $S_2$  ( $S_1 \neq S_2$ ). Se  $S_2$  é linearmente dependente, então:
    - (a)  $S_1$  pode ser linearmente dependente? Em caso afirmativo dê um exemplo.
    - (b)  $S_1$  pode ser linearmente independente? Em caso afirmativo dê um exemplo.
- 

2. Encontre os valores de  $\lambda$  tais que o sistema homogêneo  $(A - \lambda I_3)X = \vec{0}$  tem solução não trivial e para estes valores de  $\lambda$ , encontre um subconjunto de vetores ortonormais no conjunto solução, para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

---

3. Considere o vetor  $f_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .
  - (a) Escolha  $f_2$  de forma que  $\mathcal{S} = \{f_1, f_2\}$  seja base ortonormal do  $\mathbb{R}^2$ . Mostre que  $\mathcal{S}$  é base.
  - (b) Considere  $P = (\sqrt{3}, 3)$ . Escreva  $P$  como combinação linear dos elementos de  $\mathcal{S}$ .
  - (c) Determine  $[P]_{\{O, \mathcal{S}\}}$ , as coordenadas de  $P$  em relação ao sistema de coordenadas determinado pela origem  $O$  e pela base  $\mathcal{S}$ .

---

## Capítulo 6

# Diagonalização

---

### 6.1 Diagonalização de Matrizes

#### 6.1.1 Motivação

Certos processos são descritos em cada estágio por uma matriz  $A$  quadrada e em  $k$  estágios pela potência  $k$  da matriz  $A$ ,  $A^k$ , em que  $k$  é um número inteiro positivo. Suponha que desejamos saber a matriz que corresponde a  $k$  estágios, para  $k$  um

inteiro positivo qualquer. Se a matriz  $A$  é diagonal,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad A^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Se a matriz  $A$  não é diagonal, mas existe uma matriz  $P$  tal que

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{em que} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

então

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Agora, supondo que  $A^{k-1} = PD^{k-1}P^{-1}$ , temos que

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k-1}A = (PDP^{-1})^{k-1}(PDP^{-1}) \\ &= (PD^{k-1}P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{k-1}(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Assim, podemos facilmente encontrar a  $k$ -ésima potência de  $A$ .

**Exemplo 6.1.** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

mostraremos no Exemplo 6.6 na página 373 que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3^k & (-1)^k \\ -2 \cdot 3^k & 2(-1)^k \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(3^k + (-1)^k) & (-1)^k - 3^k \\ 4((-1)^k - 3^k) & 2(3^k + (-1)^k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vamos descobrir, a seguir, como podemos determinar matrizes  $P$  e  $D$ , quando elas existem, tais que  $A = PDP^{-1}$ , ou multiplicando à esquerda por  $P^{-1}$  e à direita por  $P$ ,  $D = P^{-1}AP$ , com  $D$  sendo uma matriz diagonal. Chamamos **diagonalização** ao processo de encontrar as matrizes  $P$  e  $D$ .

## 6.1.2 Autovalores e Autovetores

**Definição 6.1.** Dizemos que uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , é **diagonalizável**, se existem matrizes  $P$  e  $D$  tais que  $A = PDP^{-1}$ , ou equivalentemente,  $D = P^{-1}AP$ , em que  $D$  é uma matriz diagonal.



**Exemplo 6.2.** Toda matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é diagonalizável, pois

$$A = (I_n)^{-1} A I_n.$$

Vamos supor inicialmente que a matriz  $A$  seja diagonalizável. Então existe uma matriz  $P$  tal que

$$P^{-1}AP = D, \quad (6.1)$$

em que  $D$  é uma matriz diagonal. Vamos procurar tirar conclusões sobre as matrizes  $P$  e  $D$ .

Multiplicando à esquerda por  $P$  ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PD. \quad (6.2)$$

Sejam

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ e } P = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n],$$

em que  $V_j$  é a coluna  $j$  de  $P$ . Por um lado

$$AP = A \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AV_1 & AV_2 & \dots & AV_n \end{bmatrix}$$

(Exercício 1.1.18 na página 25) e por outro lado

$$PD = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 & \dots & \lambda_n V_n \end{bmatrix}$$

(Exercício 1.1.17 na página 25) Assim, (6.2) pode ser reescrita como,

$$\begin{bmatrix} AV_1 & AV_2 & \dots & AV_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 & \dots & \lambda_n V_n \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$AV_j = \lambda_j V_j,$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Ou seja, as colunas de  $P$ ,  $V_j$ , e os elementos da diagonal de  $D$ ,  $\lambda_j$ , satisfazem a equação

$$AX = \lambda X,$$

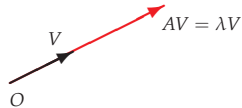
em que  $\lambda$  e  $X$  são incógnitas. Isto motiva a seguinte definição.

**Definição 6.2.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Um número real  $\lambda$  é chamado **autovalor** (real) de  $A$ , se existe um

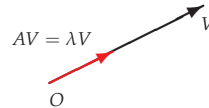
vetor *não nulo*  $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$  de  $\mathbb{R}^n$ , tal que

$$AV = \lambda V. \tag{6.3}$$

Um vetor *não nulo* que satisfaça (6.3), é chamado de **autovetor** de  $A$ .



$$\lambda > 1$$



$$0 < \lambda < 1$$



$$\lambda < 0$$

Observe que, usando o fato de que a matriz identidade

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é tal que  $I_n V = V$ , a equação (6.3) pode ser escrita como

$$AV = \lambda I_n V$$

ou

$$(A - \lambda I_n)V = \vec{0}. \quad (6.4)$$

Como os autovetores são vetores não nulos, os autovalores são os valores de  $\lambda$ , para os quais o sistema  $(A - \lambda I_n)X = \vec{0}$  tem solução não trivial. Mas, este sistema homogêneo tem solução não trivial se, e somente se,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  ([Teorema 2.15 na página 114](#)). Assim temos um método para encontrar os autovalores e os autovetores de uma matriz  $A$ .

**Proposição 6.1.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .*

(a) *Os autovalores (reais) de  $A$  são as raízes **reais** do polinômio*

$$p(t) = \det(A - t I_n) \quad (6.5)$$

(b) *Para cada autovalor  $\lambda$ , os autovetores associados a  $\lambda$  são os vetores não nulos da solução do sistema*

$$(A - \lambda I_n)X = \vec{0}. \quad (6.6)$$

---

**Definição 6.3.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . O polinômio*

$$p(t) = \det(A - t I_n) \quad (6.7)$$

*é chamado **polinômio característico de  $A$** .*

---

**Exemplo 6.3.** *Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 1-t & -1 \\ -4 & 1-t \end{bmatrix} = (1-t)^2 - 4 = t^2 - 2t - 3.$$

Como os autovalores de  $A$  são as raízes de  $p(t)$ , então os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ .

Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ . Para isto vamos resolver os sistemas  $(A - \lambda_1 I_2)X = \vec{0}$  e  $(A - \lambda_2 I_2)X = \vec{0}$ .

$$(A - \lambda_1 I_2)X = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -2x - y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = 3$  acrescentado o vetor nulo. Agora,

$$(A - \lambda_2 I_2)X = \vec{0}$$

é

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_2 = -1$  acrescentado o vetor nulo.

Para determinarmos os autovalores de uma matriz  $A$  precisamos determinar as raízes reais do seu polinômio característico, que tem a forma  $p(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ . (por que?) Um resultado sobre polinômios que muitas vezes é útil, é o seguinte

**Proposição 6.2.** *Se  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  são inteiros, então as raízes racionais (se existirem) de*

$$p(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0.$$

*são números inteiros e divisores do coeficiente do termo de grau zero  $a_0$ .*

**Demonstração.** Seja  $\frac{p}{q}$  raiz de  $p(t)$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si, então

$$(-1)^n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad (6.8)$$

multiplicando-se por  $q^n$  obtemos

$$(-1)^n p^n = -a_{n-1} p^{n-1} q - \dots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}).$$

Como  $p$  e  $q$  são primos entre si, então  $q = 1$ . Substituindo-se  $q = 1$  na equação (6.8) obtemos

$$(-1)^n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p = -a_0$$

colocando-se  $p$  em evidência obtemos

$$p[(-1)^n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1] = -a_0,$$

o que prova o que queríamos. ■

Por exemplo, se  $p(t) = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6$ , então as possíveis raízes racionais são  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$  e  $\pm 6$ . Substituindo estes valores de  $t$  em  $p(t)$ , vemos que  $p(1) = 0$ , ou seja, 1 é uma raiz de  $p(t)$ . Dividindo  $p(t)$  por  $t - 1$ , obtemos

$$\frac{p(t)}{t-1} = -t^2 + 5t - 6,$$

ou seja,  $p(t) = (t-1)(-t^2 + 5t - 6)$ . Como as raízes de  $-t^2 + 5t - 6$  são 2 e 3, então as raízes de  $p(t)$ , são 1, 2 e 3.

**Exemplo 6.4.** Vamos determinar os autovalores e autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz o polinômio característico é

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 4-t & 2 & 2 \\ 2 & 4-t & 2 \\ 2 & 2 & 4-t \end{bmatrix} \\ &= (4-t) \det \begin{bmatrix} 4-t & 2 \\ 2 & 4-t \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4-t \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 4-t \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= (4-t) \det \begin{bmatrix} 4-t & 2 \\ 2 & 4-t \end{bmatrix} - 4 \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4-t \end{bmatrix} \\ &= (4-t)[(4-t)^2 - 4] - 8(2-t) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 32 \end{aligned}$$

Como não fatoramos o polinômio característico (neste caso até é possível!), sabemos que se ele tem raízes racionais, então elas são números inteiros e são divisores de 32, ou seja, podem ser  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$ . Substituindo-se  $t = \pm 1$  obtemos

$$p(1) = -1 + 12 - 36 + 32 > 0, \quad p(-1) = 1 + 12 + 36 + 32 > 0.$$

Substituindo-se  $t = 2$  obtemos  $p(2) = 0$ . Dividindo-se  $p(t)$  por  $t - 2$  obtemos

$$\frac{p(t)}{t-2} = -t^2 + 10t - 16$$

ou seja,  $p(t) = (t-2)(-t^2 + 10t - 16) = (t-2)^2(8-t)$ . Portanto os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 8$ . Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Para isto vamos resolver os sistemas  $(A - \lambda_1 I_3)X = \vec{0}$  e  $(A - \lambda_2 I_3)X = \vec{0}$ . Como

$$(A - \lambda_1 I_3)X = \vec{0} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim, a solução geral do sistema  $(A - \lambda_1 I_3)X = \vec{0}$  é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-\alpha - \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = 2$  acrescentado o vetor nulo.

Com relação ao autovalor  $\lambda_2 = 8$ , o sistema  $(A - \lambda_2 I_3)X = \vec{0}$  é

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim, a solução geral do sistema  $(A - \lambda_2 I_3)X = \vec{0}$  é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Para cada autovalor  $\lambda$ , o conjunto dos autovetores associados a ele acrescentado o vetor nulo é o conjunto solução do sistema linear homogêneo  $(A - \lambda I_n)X = \vec{0}$  e é chamado de **autoespaço associado ao autovalor  $\lambda$** .

### 6.1.3 Diagonalização

Vamos enunciar e demonstrar o resultado principal deste capítulo. Já vimos que se uma matriz  $A$  é diagonalizável, então as colunas da matriz  $P$ , que faz a diagonalização, são autovetores associados a autovalores, que por sua vez são elementos da matriz diagonal  $D$ . Como a matriz  $P$  é invertível, estes  $n$  autovetores são L.I. Vamos mostrar, a seguir, que se a matriz  $A$  tem  $n$  autovetores L.I., então ela é diagonalizável.

---

**Teorema 6.3.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  que tem  $n$  autovetores L.I.  $V_1, \dots, V_n$  associados a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , respectivamente. Então as matrizes*

$$P = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] \quad e \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

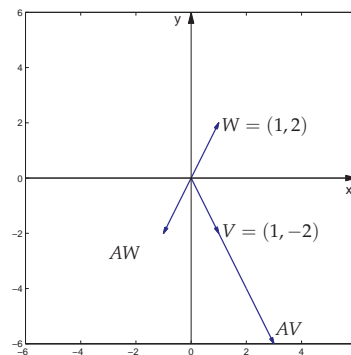
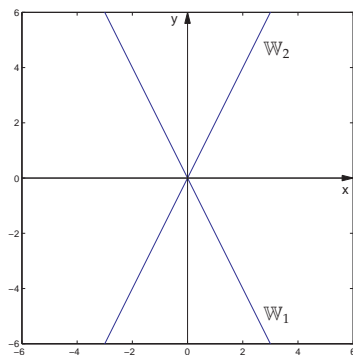


Figura 6.1: Autovetores associados a  $\lambda_1 = 3$  e a  $\lambda_2 = -1$  da matriz do Exemplo 6.3



$W_1$

Figura 6.2: Autoespaços do Exemplo 6.4

são tais que

$$A = PDP^{-1},$$

ou seja,  $A$  é diagonalizável. Reciprocamente, se  $A$  é diagonalizável, então ela possui  $n$  autovetores linearmente independentes.

**Demonstração.** Suponha que  $V_1, \dots, V_n$  são  $n$  autovetores linearmente independentes associados a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , respectivamente. Vamos definir as matrizes

$$P = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Como  $AV_j = \lambda_j V_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ , então

$$\begin{aligned} AP &= A [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] = [AV_1 \ AV_2 \ \dots \ AV_n] \\ &= [\lambda_1 V_1 \ \lambda_2 V_2 \ \dots \ \lambda_n V_n] = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD. \end{aligned}$$

Como  $V_1, \dots, V_n$  são L.I., a matriz  $P$  é invertível. Assim, multiplicando a equação anterior por  $P^{-1}$  à direita obtemos

$$A = PDP^{-1}.$$

Ou seja, a matriz  $A$  é diagonalizável.

Vamos, agora, provar que se  $A$  é diagonalizável, então ela possui  $n$  autovetores L.I. Se a matriz  $A$  é diagonalizável, então existe uma matriz  $P$  tal que

$$A = PDP^{-1}, \quad (6.9)$$

em que  $D$  é uma matriz diagonal. Multiplicando à direita por  $P$  ambos os membros da equação anterior, obtemos

$$AP = PD. \quad (6.10)$$

Sejam

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ e } P = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n],$$

em que  $V_j$  é a coluna  $j$  de  $P$ . Usando as definições de  $P$  e  $D$  temos que

$$AP = A [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] = [AV_1 \ AV_2 \ \dots \ AV_n]$$

$$PD = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 V_1 \ \lambda_2 V_2 \ \dots \ \lambda_n V_n]$$

Assim, de (6.10) segue-se que

$$AV_j = \lambda_j V_j,$$

para  $j = 1, \dots, n$ . Como a matriz  $P$  é invertível, pela [Proposição 5.3 na página 270](#), os autovetores  $V_1, \dots, V_n$  são L.I.



Assim, se uma matriz  $A$  é diagonalizável e  $A = PDP^{-1}$ , então os autovalores de  $A$  formam a diagonal de  $D$  e  $n$  autovetores linearmente independentes associados aos autovalores formam as colunas de  $P$ .

O resultado que vem a seguir, garante que se conseguirmos para cada autovalor, autovetores L.I., então ao juntarmos todos os autovetores obtidos, eles continuarão sendo L.I.

---

**Proposição 6.4.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Se  $V_1^{(1)}, \dots, V_{n_1}^{(1)}$  são autovetores L.I. associados a  $\lambda_1$ ,  $V_1^{(2)}, \dots, V_{n_2}^{(2)}$  são autovetores L.I. associados a  $\lambda_2$ ,  $\dots$ ,  $V_1^{(k)}, \dots, V_{n_k}^{(k)}$  são autovetores L.I. associados a  $\lambda_k$ , com  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  distintos, então  $\{V_1^{(1)}, \dots, V_{n_1}^{(1)}, \dots, V_1^{(k)}, \dots, V_{n_k}^{(k)}\}$  é um conjunto L.I.*

---

**Demonstração.** Vamos demonstrar apenas para o caso em que temos dois autovalores diferentes. O caso geral é inteiramente análogo. Sejam  $V_1^{(1)}, \dots, V_{n_1}^{(1)}$  autovetores L.I. associados a  $\lambda_1$  e  $V_1^{(2)}, \dots, V_{n_2}^{(2)}$  autovetores L.I. associados a  $\lambda_2$ . Precisamos mostrar que a única solução da equação

$$x_1^{(1)} V_1^{(1)} + \dots + x_{n_1}^{(1)} V_{n_1}^{(1)} + x_1^{(2)} V_1^{(2)} + \dots + x_{n_2}^{(2)} V_{n_2}^{(2)} = \vec{0} \quad (6.11)$$

é a solução trivial. Multiplicando a equação (6.11) por  $A$  e usando o fato de que os  $V_i^{(j)}$  são autovetores, obtemos

$$x_1^{(1)} \lambda_1 V_1^{(1)} + \dots + x_{n_1}^{(1)} \lambda_1 V_{n_1}^{(1)} + x_1^{(2)} \lambda_2 V_1^{(2)} + \dots + x_{n_2}^{(2)} \lambda_2 V_{n_2}^{(2)} = \vec{0} \quad (6.12)$$

Multiplicando a equação (6.11) por  $\lambda_1$ , obtemos

$$x_1^{(1)}\lambda_1 V_1^{(1)} + \dots + x_{n_1}^{(1)}\lambda_1 V_{n_1}^{(1)} + x_1^{(2)}\lambda_1 V_1^{(2)} + \dots + x_{n_2}^{(2)}\lambda_1 V_{n_2}^{(2)} = \vec{0}. \quad (6.13)$$

Subtraindo a equação (6.12) da equação (6.13), obtemos

$$x_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1)V_1^{(2)} + \dots + x_{n_2}^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1)V_{n_2}^{(2)} = \vec{0}.$$

Como  $V_1^{(2)}, \dots, V_{n_2}^{(2)}$  são L.I., temos que  $x_1^{(2)} = \dots = x_{n_2}^{(2)} = 0$ . Agora, multiplicando a equação (6.11) por  $\lambda_2$  e subtraindo da equação (6.13) obtemos

$$x_1^{(1)}(\lambda_2 - \lambda_1)V_1^{(1)} + \dots + x_{n_1}^{(1)}(\lambda_2 - \lambda_1)V_{n_1}^{(1)} = \vec{0}.$$

Como  $V_1^{(1)}, \dots, V_{n_1}^{(1)}$  são L.I., temos que  $x_1^{(1)} = \dots = x_{n_1}^{(1)} = 0$ . O que prova que todos os autovetores juntos são L.I. ■

**Exemplo 6.5.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Já vimos no **Exemplo 6.4 na página 365** que seu polinômio característico é  $p(t) = (t - 2)(-t^2 + 10t - 16) = (t - 2)^2(8 - t)$ , os seus autovalores são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 8$  e os autoespaços correspondentes são

$$\mathbb{W}_1 = \{(-\alpha - \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

respectivamente. Vamos encontrar, para cada autoespaço, o maior número possível de autovetores L.I., ou seja, vamos encontrar uma base para cada autoespaço. E o teorema anterior garante que se juntarmos todos estes autovetores eles vão continuar sendo L.I.

Para  $\mathbb{W}_1$ , temos que

$$(-\alpha - \beta, \beta, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1) + \beta(-1, 1, 0).$$

Assim, os vetores  $V_1 = (-1, 0, 1)$  e  $V_2 = (-1, 1, 0)$  geram  $\mathbb{W}_1$ . Como além disso, eles são L.I. (um não é múltiplo escalar do outro), então eles formam uma base para  $\mathbb{W}_1$ . Assim, não podemos ter um número maior de autovetores L.I. associados a  $\lambda_1 = 2$  ([Teorema 5.6 na página 287](#)).

Para  $\mathbb{W}_2$ , temos que o conjunto  $\{V_3 = (1, 1, 1)\}$  é uma base para  $\mathbb{W}_2$ , pois como

$$(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 1),$$

$V_3$  gera  $\mathbb{W}_2$  e um vetor não nulo é L.I. Assim, não podemos ter um número maior de autovetores L.I. associados a  $\lambda_2 = 8$  ([Teorema 5.6 na página 287](#)).

Como  $V_1$  e  $V_2$  são autovetores L.I. associados a  $\lambda_1$  e  $V_3$  é um autovetor L.I. associado a  $\lambda_2$ , então pela [Proposição 6.4 na página 371](#) os autovetores juntos  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são L.I. Assim, a matriz  $A$  é diagonalizável e as matrizes

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = [V_1 \ V_2 \ V_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

**Exemplo 6.6.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Já vimos no **Exemplo 6.3 na página 362** que o seu polinômio característico é  $p(t) = \det(A - t I_2) = t^2 - 2t - 3$ , que os seus autovalores são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$  e que os autoespaços correspondentes são

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathbb{W}_2 = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

respectivamente.

Para  $\lambda_1 = 3$ , temos que  $\{V_1 = (1, -2)\}$  é uma base de  $\mathbb{W}_1$ . Assim, não podemos ter mais autovetores L.I. associados a  $\lambda_1$ . De forma análoga para  $\lambda_2 = -1$ ,  $\{V_2 = (1, 2)\}$  é um conjunto com o maior número possível de autovetores L.I. associados a  $\lambda_2$ . Assim, a matriz  $A$  é diagonalizável e as matrizes

$$P = [V_1 \ V_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são tais que  $D = P^{-1}AP$ .

**Exemplo 6.7.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O seu polinômio característico é  $p(t) = \det(A - t I_2) = t^2$ , assim  $A$  possui um único autovalor:  $\lambda_1 = 0$ . Agora, vamos determinar os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = 0$ . Para isto vamos resolver o sistema  $(A - \lambda_1 I_2)X = \vec{0}$ . Como

$$A - \lambda_1 I_2 = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$



então  $(A - \lambda_1 I_2)X = \vec{0}$  é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

que é o autoespaço correspondente a  $\lambda_1 = 0$ . Assim, para  $\lambda_1 = 0$ , temos que  $\{V_1 = (1, 0)\}$  é um subconjunto L.I. de  $\mathbb{V}_1$ . Pelo [Teorema 5.6 na página 287](#) não podemos ter um número maior de autovetores L.I. associados a  $\lambda_1$  e como só temos um autovalor não podemos ter mais autovetores L.I. Portanto, pelo [Teorema 6.3 na página 367](#), a matriz  $A$  **não** é diagonalizável, ou seja, não existem matrizes  $P$  e  $D$  tais que  $A = PDP^{-1}$ .

**Exemplo 6.8.** Vamos retomar a cadeia de Markov do [Exemplo 1.9 na página 16](#). Vamos supor que uma população é dividida em três estados (por exemplo: ricos, classe média e pobres) e que em cada unidade de tempo a probabilidade de mudança de um estado para outro seja constante no tempo, só dependa dos estados.

Seja  $t_{ij}$  a probabilidade de mudança do estado  $j$  para o estado  $i$  em uma unidade de tempo (geração). A matriz de transição é dada por

$$T = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

Vamos considerar a matriz de transição

$$T = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

Vamos calcular potências  $k$  de  $T$ , para  $k$  um inteiro positivo qualquer. Para isto vamos diagonalizar a matriz  $T$ . Para isso precisamos determinar seus autovalores e autovetores. Para esta matriz o polinômio característico é

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(T - tI_3) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - t & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - t & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - t \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} - t\right) \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - t & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - t \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} - t \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} - t\right) \left[ \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 - \frac{1}{8} \right] - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} - t\right) \\ &= -t^3 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t = t(-t^2 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}) = -t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Portanto os autovalores de  $T$  são  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1/2$  e  $\lambda_3 = 1$ . Agora, vamos determinar os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ . Para isto vamos resolver os sistemas  $(T - \lambda_1 I_3)X = \vec{0}$ ,  $(T - \lambda_2 I_3)X = \vec{0}$  e  $(T - \lambda_3 I_3)X = \vec{0}$ . Como

$$(T - \lambda_1 I_3)X = TX = \vec{0} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim, a solução geral do sistema  $(T - \lambda_1 I_3)X = \bar{0}$  é

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_1 = 0$  acrescentado o vetor nulo. O conjunto  $\{V_1 = (1, -2, 1)\}$  é uma base para  $\mathbb{W}_1$ , pois como  $(\alpha, -2\alpha, \alpha) = \alpha(1, -2, 1)$ ,  $V_1$  gera  $\mathbb{W}_1$  e um vetor não nulo é L.I.

Com relação ao autovalor  $\lambda_2 = 1/2$ , o sistema  $(T - \lambda_2 I_3)X = \bar{0}$  é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim, a solução geral do sistema  $(T - \lambda_2 I_3)X = \bar{0}$  é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto  $\{V_2 = (1, 0, 1)\}$  é uma base para  $\mathbb{W}_2$ , pois como  $(\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1)$ ,  $V_3$  gera  $\mathbb{W}_2$  e um vetor não nulo é L.I.

Com relação ao autovalor  $\lambda_3 = 1$ , o sistema  $(T - \lambda_3 I_3)X = \vec{0}$  é

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A forma escalonada reduzida da matriz aumentada do sistema é

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim, a solução geral do sistema  $(T - \lambda_3 I_3)X = \vec{0}$  é

$$\mathbb{W}_3 = \{(\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda_3 = 1$  acrescentado o vetor nulo. O conjunto  $\{V_1 = (1, 2, 1)\}$  é uma base para  $\mathbb{W}_1$ , pois como  $(\alpha, 2\alpha, \alpha) = \alpha(1, 2, 1)$ ,  $V_1$  gera  $\mathbb{W}_1$  e um vetor não nulo é L.I.

Como  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são autovetores associados a  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , respectivamente, então pela [Proposição 6.4 na página 371](#) os autovetores juntos  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são L.I. Assim, a matriz  $A$  é diagonalizável e as matrizes

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = [V_1 \ V_2 \ V_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que

$$D = Q^{-1}TQ \quad \text{ou} \quad T = QDQ^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 T^k &= QD^kQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^{k+1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - (\frac{1}{2})^{k+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - (\frac{1}{2})^{k+1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^{k+1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Esta é a matriz que dá a transição entre  $k$  unidades de tempo (gerações).

## Exercícios Numéricos (respostas na página 527)

**6.1.1.** Ache o polinômio característico, os autovalores e os autovetores de cada matriz:

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e)  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(f)  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

**6.1.2.** Ache bases para os auto-espacos associados a cada autovalor

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**6.1.3.** Verifique quais das matrizes são diagonalizáveis:

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**6.1.4.** Ache para cada matriz  $A$ , se possível, uma matriz não-singular  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  seja diagonal:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**6.1.5.** Sabendo-se que  $V_1 = (-4, -4, -1)$ ,  $V_2 = (5, 4, 1)$  e  $V_3 = (5, 3, 1)$  são autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{20}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{6} \end{bmatrix}$$

- (a) Sem obter o polinômio característico determine os autovalores correspondentes a estes autovetores.
- (b) A matriz é diagonalizável? Justifique?

**6.1.6.** Dê exemplo de:

- (a) Uma matriz que não tem autovalor (real) (Sugestão: use o Exercício 27 na página 384).
- (b) Uma matriz que tem um autovalor e não é diagonalizável (em  $\mathbb{R}^n$ ).
- (c) Uma matriz que tem dois autovalores e não é diagonalizável (em  $\mathbb{R}^n$ ).

## Exercícios usando o MATLAB®

`>> syms x y z` diz ao MATLAB® que as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  são simbólicas;

`>> A=[a11,a12,...,a1n;a21,a22,...; ...,amn]` cria uma matriz,  $m$  por  $n$ , usando os elementos  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ , ...,  $a_{mn}$  e a armazena numa variável  $A$ ;

`>> A=[A1,...,An]` cria uma matriz  $A$  formada pelas matrizes, definidas anteriormente,  $A_1$ , ...,  $A_n$  colocadas uma ao lado da outra;

>> solve(expr) determina a solução da equação  $\text{expr}=0$ . Por exemplo,  
 >> solve( $x^2-4$ ) determina as soluções da equação  $x^2 - 4 = 0$ ;  
 >> subs(expr,x,num) substitui na expressão expr a variável x por num.  
 >> [P,D]=eig(A) determina matrizes P e D (diagonal) tais que  $AP=PD$ .  
 inv(A) calcula a inversa da matriz A.

A=sym(A) converte a matriz A numa matriz em que os elementos são armazenados no formato simbólico. A função numeric faz o processo inverso.

### Comandos do pacote GAAL:

>> A=randi(n) ou >> A=randi(m,n) cria uma matriz n por n ou m por n, respectivamente, com elementos inteiros aleatórios.

>> escalona(A) calcula passo a passo a forma reduzida escalonada da matriz A.

- 6.1.7.** Defina as matrizes  $B=\text{sym}(\text{randi}(2))$  e  $A=[B-B', \text{zeros}(2,1); \text{zeros}(1,2), \text{randi}]$ . A matriz A é diagonalizável? Por que?
- 6.1.8.** Defina as matrizes  $L=[\text{eye}(2), \text{zeros}(2,1); \text{randi}(1,2), 0]$  e  $A=\text{sym}(L*L')$ . Determine o polinômio característico de A, os autovalores e um conjunto de autovetores linearmente independentes com o maior número possível de vetores. Encontre matrizes P e D (diagonal) tais que  $\text{inv}(P)*A*P=D$ , se possível. Verifique o resultado. Use o comando  $[P,D]=\text{eig}(A)$  e compare com as matrizes que você encontrou.
- 6.1.9.** Defina  $a=\text{randi}$ ,  $b=\text{randi}$  e  $A=\text{sym}([2*a, a-b, a-b; 0, a+b, b-a; 0, b-a, a+b])$ . Determine o polinômio característico de A, os autovalores e um conjunto de autovetores linearmente independentes com o maior número possível de vetores. Encontre matrizes P e D (diagonal) tais que  $\text{inv}(P)*A*P=D$ , se possível. Verifique o resultado. Use o comando  $[P,D]=\text{eig}(A)$  e compare com as matrizes que você encontrou.
- 6.1.10.** Defina  $a=\text{randi}$ ,  $b=\text{randi}$  e  $A=\text{sym}([a, 0, b; 2*b, a-b, 2*b; b, 0, a])$ . Determine o polinômio característico de A, os autovalores e um conjunto de autovetores linearmente independentes com o maior número possível de vetores. Encontre matrizes P e D (diagonal) tais que  $A=P*D*\text{inv}(P)$ , se possível. Verifique o resultado. Use o comando  $[P,D]=\text{eig}(A)$  e compare com as matrizes que você encontrou.



## Exercícios Teóricos

- 6.1.11.** Dizemos que uma matriz  $B$ ,  $n \times n$ , é **semelhante** a uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , se existir uma matriz  $P$  não singular tal que  $B = P^{-1}AP$ . Demonstre:
- (a)  $A$  é semelhante a  $A$ ;
  - (b) Se  $A$  é semelhante a  $B$ , então  $B$  é semelhante a  $A$ ;
  - (c) Se  $A$  é semelhante a  $B$  e  $B$  é semelhante a  $C$ , então  $A$  é semelhante a  $C$ .
- 6.1.12.** Seja  $\lambda$  um autovalor (fixo) de  $A$ . Demonstre que o conjunto formado por todos os autovetores de  $A$  associados a  $\lambda$ , juntamente com o vetor nulo, é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Este subespaço é chamado de **autoespaço associado a  $\lambda$** . Em outras palavras, combinação linear de autovetores associados a um mesmo autovalor é um autovetor associado a esse mesmo autovalor.
- 6.1.13.** Demonstre que se  $A$  e  $B$  são semelhantes, então possuem os mesmos polinômios característicos e portanto os mesmos autovalores.
- 6.1.14.** Demonstre que se  $A$  é uma matriz triangular superior, então os autovalores de  $A$  são os elementos da diagonal principal de  $A$ .
- 6.1.15.** Demonstre que  $A$  e  $A^t$  possuem os mesmos autovalores. O que podemos dizer sobre os autovetores de  $A$  e  $A^t$ ?
- 6.1.16.** Seja  $\lambda$  um autovalor de  $A$  com autovetor associado  $X$ . Demonstre que  $\lambda^k$  é um autovalor de  $A^k = A \dots A$  associado a  $X$ , em que  $k$  é um inteiro positivo.
- 6.1.17.** Uma matriz  $A$  é chamada **nilpotente** se  $A^k = \bar{0}$ , para algum inteiro positivo  $k$ . Reveja o [Exercício 1.1.29 na página 27](#). Demonstre que se  $A$  é nilpotente, então o único autovalor de  $A$  é 0. (Sugestão: use o exercício anterior)
- 6.1.18.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ .
- (a) Mostre que o determinante de  $A$  é o produto de todas as raízes do polinômio característico de  $A$ ; (Sugestão:  $p(t) = \det(A - tI_n) = (-1)^n(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$ .)

(b) Mostre que  $A$  é singular se, e somente se, 0 for um autovalor de  $A$ .

**6.1.19.** Seja  $\lambda$  um autovalor da matriz não-singular  $A$  com autovetor associado  $X$ . Mostre que  $1/\lambda$  é um autovalor de  $A^{-1}$  com autovetor associado  $X$ .

**6.1.20.** Seja  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Ache condições necessárias e suficientes para que  $A$  seja diagonalizável.

**6.1.21.** Se  $V$  e  $W$  são autovetores associados a um autovalor  $\lambda$ , então  $W - \text{proj}_V W$  é também um autovetor associado a  $\lambda$ ? E se  $V$  e  $W$  forem autovetores associados a autovalores diferentes?

**6.1.22.** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $n \times n$ . Mostre que  $AB$  e  $BA$  possuem os mesmos autovalores. (Sugestão: Separe em dois casos:  $\lambda = 0$  e  $\lambda \neq 0$ . No segundo caso, mostre que se  $V$  é autovetor de  $AB$ , então  $BV$  é autovetor de  $BA$ .)

**6.1.23.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  diagonalizável. Mostre que o traço de  $A$  é igual a soma das raízes do seu polinômio característico, incluindo as multiplicidades. (Sugestão: use o fato de que  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .)

**6.1.24.** Suponha que duas matrizes  $n \times n$   $A$  e  $B$  são tais que  $B = \alpha A$ , para um escalar  $\alpha \neq 0$ . Mostre que se  $\lambda$  é autovalor de uma matriz  $A$ , então  $\alpha\lambda$  é autovalor de  $B$ .

**6.1.25.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  com  $n$  autovalores diferentes. Mostre que  $A$  é diagonalizável.

**6.1.26.** (a) Mostre que se  $V$  é autovetor de  $A$ , então  $V$  é autovetor de  $A^k$ . Com qual autovalor?

(b) E se  $V$  é autovetor de  $A^k$ , então  $V$  é autovetor de  $A$ ? (Sugestão: veja o que acontece com uma matriz nilpotente)

**6.1.27.** Dado um polinômio

$$p(t) = (-1)^n (t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)$$

Verifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n},$$

é tal que o seu polinômio característico é  $p(t)$ . Esta matriz é chamada **matriz companheira** do polinômio  $p(t)$ . (Sugestão: verifique para  $n = 2$  e depois supondo que seja verdade para matrizes  $(n - 1) \times (n - 1)$  mostre que é verdade para matrizes  $n \times n$  expandindo em cofatores em relação a primeira coluna)

## 6.2 Diagonalização de Matrizes Simétricas

### 6.2.1 Motivação

O problema da identificação de uma **cônica** (curva no plano descrita por uma equação de 2º grau em  $x$  e  $y$ ) através da sua equação é facilmente resolvido se a equação **não** possui um termo em que aparece o produto  $xy$ . Mas, ao contrário, se aparece este termo misto, temos que fazer uma mudança de coordenadas de forma que nas novas coordenadas ele não apareça. Vejamos o exemplo seguinte.

**Exemplo 6.9.** Considere o problema de identificar uma cônica representada pela equação

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 4. \quad (6.14)$$

Usando matrizes, esta equação pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} 3x + y & x + 3y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4$$

ou

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4$$

ou ainda,

$$X^t A X = 4, \quad (6.15)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como veremos adiante ([Exemplo 6.11 na página 394](#)), podemos escrever

$$A = P D P^t$$

em que

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assim, a equação (6.15) pode ser escrita como

$$(X^t P) D (P^t X) = (P^t X)^t D (P^t X) = 4.$$

Se fazemos a mudança de variáveis (ou de coordenadas)  $X = PX'$ , então como  $P^t P = I_2$ , a equação (6.15) se transforma em

$$X'^t D X' = 4$$

ou

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 4$$

que pode ser reescrita como,

$$2x'^2 + 4y'^2 = 4,$$

ou dividindo por 4, como

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

que é a equação da elipse mostrada na Figura 6.3. Veremos na próxima seção como traçar esta elipse.

A matriz  $P$ , tem a propriedade de que a sua inversa é simplesmente a sua transposta,  $P^{-1} = P^t$ . Uma matriz que satisfaz esta propriedade é chamada de **matriz ortogonal**. O que possibilitou a identificação da cônica, no exemplo anterior, foi o fato de que a matriz  $A$  é diagonalizável através de uma matriz ortogonal  $P$ . Ou seja, existe uma matriz  $P$  tal que  $A = PDP^{-1}$  e  $P^{-1} = P^t$ .

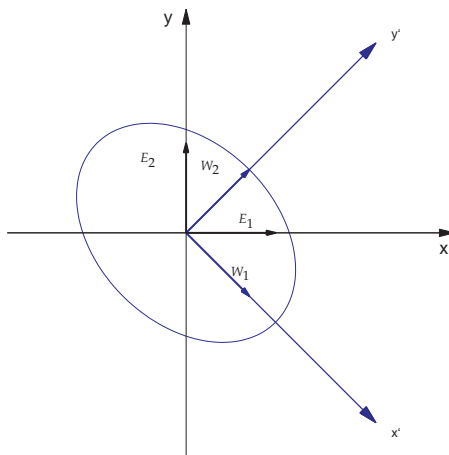


Figura 6.3: **Elipse do Exemplo 6.9**

Já vimos que nem toda matriz é diagonalizável ([Exemplo 6.7 na página 374](#)). Vamos ver que se uma matriz  $A$  é simétrica, então ela é diagonalizável, isto é, existe uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz invertível  $P$  tal que  $A = PDP^{-1}$ . Além disso, para matrizes simétricas, existe uma matriz  $P$  tal que  $A = PDP^t$ . Isto porque existe uma matriz ortogonal  $P$  que faz a diagonalização, ou seja, que tem a propriedade  $P^{-1} = P^t$ . Em algumas aplicações a diagonalização com uma tal matriz é necessária, como por exemplo na identificação de cônicas.

Vamos em primeiro lugar, caracterizar as matrizes ortogonais.

### 6.2.2 Matrizes Ortogonais

Uma matriz  $P$  tal que  $P^{-1} = P^t$  é chamada de matriz **ortogonal**.

---

**Proposição 6.5.** *Uma matriz  $P$  é ortogonal se, e somente se, as suas colunas formam um conjunto ortonormal de vetores.*

---

**Demonstração.** Vamos escrever  $P = [U_1 \dots U_n]$ . Ou seja,  $U_1, \dots, U_n$  são as colunas de  $P$ . A inversa de  $P$  é  $P^t$  se, e somente se,  $P^t P = I_n$ . Mas,

$$P^t P = \begin{bmatrix} U_1^t \\ \vdots \\ U_n^t \end{bmatrix} [U_1 \dots U_n] = \begin{bmatrix} U_1^t U_1 & U_1^t U_2 & \dots & U_1^t U_n \\ U_2^t U_1 & U_2^t U_2 & \dots & U_2^t U_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ U_n^t U_1 & U_n^t U_2 & \dots & U_n^t U_n \end{bmatrix}$$

Logo,  $P^t P = I_n$  se, e somente se,  $U_i^t U_j = U_i \cdot U_j = 0$  para  $i \neq j$  e  $U_i^t U_i = U_i \cdot U_i = 1$  para  $i = 1, \dots, n$ . Ou seja,  $P^t P = I_n$  se, e somente se,  $U_1, \dots, U_n$  são ortonormais. ■

Vamos supor que uma matriz  $A$  é diagonalizável através de uma matriz ortogonal, ou seja, que existe uma matriz  $P$  tal que  $D = P^t A P$  é uma matriz diagonal. Como a matriz  $P$  é uma matriz cujas colunas são autovetores de  $A$ , deduzimos da proposição anterior que uma matriz  $A$  é diagonalizável através de uma matriz ortogonal se, e somente se, ela possui um conjunto ortonormal de autovetores. Como veremos, as matrizes simétricas possuem esta característica.

---

**Proposição 6.6.** *Para uma matriz  $A$  simétrica, os autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais.*

---

**Demonstração.** Sejam  $V_1$  e  $V_2$  autovetores de  $A$  associados aos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente, com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Então,  $AV_1 = \lambda_1 V_1$  e  $AV_2 = \lambda_2 V_2$ .

Agora, se escrevemos os vetores como matrizes colunas, o produto escalar é simplesmente o produto matricial da transposta da primeira matriz pela segunda. Assim,

$$AV_1 \cdot V_2 = (AV_1)^t V_2 = V_1^t A^t V_2 = V_1 \cdot A^t V_2. \quad (6.16)$$

Como  $A$  é simétrica  $A^t = A$  e como  $V_1$  e  $V_2$  são autovetores de  $A$ , temos de (6.16) que

$$\lambda_1 V_1 \cdot V_2 = \lambda_2 V_1 \cdot V_2$$



ou

$$(\lambda_1 - \lambda_2)V_1 \cdot V_2 = 0.$$

Como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , concluímos que  $V_1 \cdot V_2 = 0$ , ou seja,  $V_1, V_2$  são ortogonais. ■

Como autovetores associados a autovalores diferentes já são ortogonais, para diagonalizarmos uma matriz simétrica  $A$  através de uma matriz  $P$  ortogonal, precisamos encontrar, para cada autovalor, autovetores ortonormais associados a eles. Para isso, podemos aplicar a [Proposição 5.18](#) ou a [Proposição 5.19 na página 321](#) a cada conjunto de autovetores L.I. associados a cada um dos autovalores.

**Exemplo 6.10.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta é a matriz do [Exemplo 6.5 na página 372](#). Para esta matriz o polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - tI_3) = (t - 2)^2(8 - t)$$

Portanto os autovalores de  $A$  (raízes reais do polinômio característico) são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 8$ .

Os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 8$  são as soluções de  $(A - \lambda_1 I_3)X = \vec{0}$  e  $(A - \lambda_2 I_3)X = \vec{0}$  respectivamente.

A forma escalonada reduzida de

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

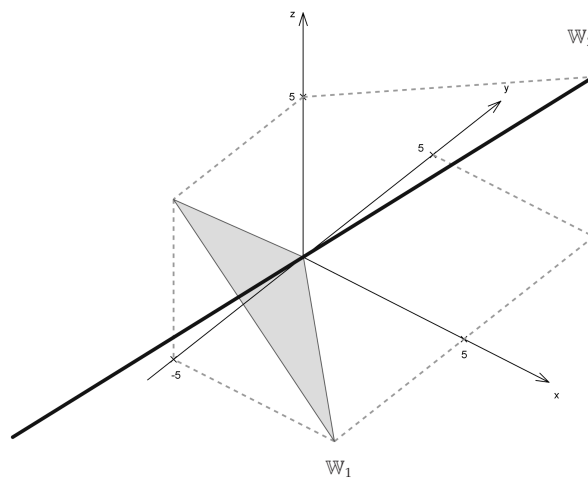


Figura 6.4: Autoespaços do Exemplo 6.10

Portanto o autoespaço associado a  $\lambda_1 = 2$  é

$$\mathbb{W}_1 = \{(-\alpha - \beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

Agora,  $(-\alpha - \beta, \beta, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1) + \beta(-1, 1, 0)$ . Assim, os vetores  $V_1 = (-1, 0, 1)$  e  $V_2 = (-1, 1, 0)$  geram  $\mathbb{W}_1$ . Como além disso, eles são L.I. (um não é múltiplo escalar do outro), então eles formam uma base para  $\mathbb{W}_1$ .

Vamos encontrar dois autovetores ortonormais associados a  $\lambda_1 = 2$ . Para isso vamos usar a [Proposição 5.18 na página 321](#).

$$W_1 = V_1 = (-1, 0, 1); \quad W_2 = V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2 = (-1/2, 1, -1/2)$$

$$U_1 = \left( \frac{1}{\|W_1\|} \right) W_1 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

$$U_2 = \left( \frac{1}{\|W_2\|} \right) W_2 = (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$$

Com relação ao autovalor  $\lambda_2 = 8$ , temos que a forma escalonada reduzida da matriz

$$A - 8I_3 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, o autoespaço associado a  $\lambda_2 = 8$  é

$$\mathbb{W}_2 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O conjunto  $\{V_3 = (1, 1, 1)\}$  é uma base para  $\mathbb{W}_2$ , pois como  $(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 1)$ ,  $V_3$  gera  $\mathbb{W}_2$  e um vetor não nulo é L.I. Assim, o vetor

$$U_3 = \left( \frac{1}{\|V_3\|} \right) V_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$$

forma uma base ortonormal para  $\mathbb{W}_2$ .

Como a matriz  $A$  é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais. Portanto,  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$  são ortonormais e assim a matriz

$$P = [U_1 U_2 U_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

satisfaz  $A = PDP^t$ , em que

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 6.11.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O seu polinômio característico é

$$p(t) = \det(A - tI_2) = t^2 - 6t + 8 = (t - 2)(t - 4).$$

Portanto os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$ . Os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$  são as soluções de  $(A - \lambda_1 I_2)X = \vec{0}$  e  $(A - \lambda_2 I_2)X = \vec{0}$  respectivamente.

A solução geral do sistema  $(A - 2I_2)X = \vec{0}$  é o autoespaço

$$\mathbb{W}_1 = \{(\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Como  $(\alpha, -\alpha) = \alpha(1, -1)$ , então  $V_1 = (1, -1)$  gera  $\mathbb{W}_1$  e como um vetor não nulo é L.I.,  $\{V_1\}$  é uma base de  $\mathbb{W}_1$ . Assim,

$$U_1 = \left( \frac{1}{\|W_1\|} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

é uma base ortonormal de  $\mathbb{W}_1$ .

Para determinar os autovetores associados a autovalor  $\lambda_2 = 4$  não precisamos resolver outro sistema linear. Como a matriz  $A$  é simétrica, pela [Proposição 6.6 na página 390](#), autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Logo o autoespaço associado a  $\lambda_2 = 4$  é dado por

$$\mathbb{W}_2 = \{\alpha(1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O vetor  $V_2 = (1, 1)$  gera  $\mathbb{W}_2$  e como um vetor não nulo é L.I.,  $\{V_2\}$  é uma base de  $\mathbb{W}_2$ .

$$U_2 = \left( \frac{1}{\|W_2\|} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

é uma base ortonormal de  $\mathbb{W}_2$ .

Como a matriz  $A$  é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais. Portanto

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

são tais que  $A = PDP^t$ .

Observe que se uma matriz  $A$  é diagonalizável com uma matriz ortogonal, ou seja, se  $A = PDP^t$ , com  $D$  diagonal e  $P$  ortogonal, então

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = PDP^t = A,$$

ou seja, a matriz  $A$  tem que ser simétrica.

O próximo resultado, que está demonstrado no [Apêndice V na página 400](#), garante que toda matriz simétrica é diagonalizável através de uma matriz ortogonal, ou seja, o procedimento seguido nos dois exemplos anteriores sempre funciona para matrizes simétricas e somente para elas.

---

**Teorema 6.7.** *Se  $A$  é uma matriz simétrica, então ela é diagonalizável com uma matriz ortogonal, ou seja, existe uma matriz ortogonal  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  tal que*

$$A = PDP^t.$$

---

## Exercícios Numéricos (respostas na página 537)

**6.2.1.** Diagonalize cada matriz dada  $A$  por meio de uma matriz ortogonal, ou seja, ache uma matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^t A P$  seja diagonal:

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(g)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(f)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(h)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**6.2.2.** Seja  $A$  uma matriz simétrica. Sabendo-se que

$$V_1 = (0, 2, -2, 1) \quad \text{e} \quad V_2 = (2, 1, -2, 3)$$

são autovetores de  $A$  associados a  $\lambda_1 = 2$  e

$$V_3 = (-2, 0, 1, 2) \quad \text{e} \quad V_4 = (-3, -2, -1, 2)$$

são autovetores associados a  $\lambda_2 = 4$  determine, se possível, uma matriz  $P$  e uma matriz diagonal  $D$  tais que  $A = PDP^t$ .

## Exercícios Teóricos

**6.2.3.** Mostre que se  $A$  é uma matriz ortogonal, então  $\det(A) = \pm 1$ .

**6.2.4.** Mostre que se  $A$  e  $B$  são matrizes ortogonais, então  $AB$  é ortogonal.

- 6.2.5.** (a) Verifique se a matriz  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  é ortogonal;
- (b) Mostre que  $X = (x, y)$  é ortogonal a  $V = (a, b) \neq \vec{0}$  com  $\|X\| = \|V\|$  se, e somente se,  $X = (-b, a)$  ou  $X = (b, -a)$ .
- (c) Mostre que se  $A$  é uma matriz ortogonal  $2 \times 2$ , então existe um número real  $\theta$  tal que

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

A primeira matriz, tem determinante igual a 1, é a **matriz de rotação** (veja a [Subseção 5.4.1 na página 337](#)). Observe que a segunda matriz além de ortogonal é simétrica.

(Sugestão: Comece com uma matriz  $(a_{ij})_{2 \times 2}$  e use o fato de que as colunas são ortonormais. Uma das equações será  $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$ . Faça  $a_{11} = \cos \theta$  e  $a_{21} = \sin \theta$ . Use o item anterior.)

- 6.2.6.** Mostre que se uma matriz  $A$  é diagonalizável por uma matriz ortogonal (isto é, existem  $P$  e  $D$ , com  $P^{-1} = P^t$  e  $D$  diagonal, tais que  $A = PDP^t$ ), então  $A$  é uma matriz simétrica.
- 6.2.7.** Dizemos que uma matriz simétrica  $A$ ,  $n \times n$ , é **(definida) positiva** se  $X^t A X > 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $X \neq \vec{0}$ ,  $X$  escrito como matriz coluna. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

- (a) A matriz  $A$  é definida positiva.
- (b)  $A$  é simétrica e todos os autovalores de  $A$  são positivos.
- (c) Existe uma matriz definida positiva  $B$  tal que  $A = B^2$ . A matriz  $B$  é chamada a **raiz quadrada** de  $A$ .

(Sugestão: Mostre que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a). Na parte (b) $\Rightarrow$ (c) faça primeiro o caso em que  $A$  é uma matriz diagonal)

- 6.2.8.** Seja  $A$  uma matriz invertível  $n \times n$ . Mostre que existe uma matriz simétrica definida positiva  $P$  e uma matriz ortogonal  $U$ , tal que  $A = PU$ . Esta decomposição é única chamada de **decomposição polar** de  $A$ . (Sugestão: Sejam  $P = (AA^t)^{1/2}$  e  $U = P^{-1}A$ . Mostre que  $UU^t = I_n$ .)



**6.2.9.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Para  $k = 1, \dots, n$ , seja  $A_k$  a submatriz obtida de  $A$  eliminando-se as últimas  $n - k$  linhas e colunas.  $A_k$  é chamada **submatriz principal de  $A$  de ordem  $k$** . Mostre que se  $A$  é uma matriz simétrica definida positiva  $n \times n$ , então

- (a)  $A$  é não singular;
- (b)  $\det(A) > 0$ ;
- (c) as submatrizes principais  $A_1, \dots, A_n$  são todas definidas positivas. (Sugestão: considere vetores  $X_k$  tais que os últimos  $n - k$  elementos são nulos.)

## Apêndice V: Autovalores Complexos

Vamos provar que toda matriz simétrica é diagonalizável através de uma matriz ortogonal. Para isto, precisamos trabalhar com matrizes cujas entradas são números complexos. Vamos chamar o conjunto das matrizes  $m \times n$  cujas entradas são números complexos de  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ .

Para uma matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ , definimos o **conjugado da matriz**  $A$ , denotado por  $\overline{A}$  como sendo a matriz  $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$  dada por  $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$ , em que, se  $a_{ij} = \alpha_{ij} + i\beta_{ij}$ , então  $\bar{a}_{ij} = \alpha_{ij} - i\beta_{ij}$ .

Para as matrizes de  $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$  além das propriedades que já foram demonstradas no **Teorema 1.1 na página 9** são válidas as seguintes propriedades, cuja demonstração deixamos a cargo do leitor:

(p) Se  $A \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{C})$  e  $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{C})$ , então

$$\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}.$$

(q) Se  $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , então

$$\overline{\alpha A} = \bar{\alpha} \overline{A}.$$

---

**Proposição 6.8.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  com entradas reais. Se  $Z \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ , é um autovetor de  $A$  associado a um autovalor complexo  $\lambda = \alpha + i\beta$  com  $\beta \neq 0$ , ou seja, se  $AZ = \lambda Z$ , então  $\overline{Z}$  também é um autovetor de  $A$  associado a  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ .*

*Demonstração.*

$$A\bar{Z} = \overline{A} \bar{Z} = \overline{(AZ)} = \overline{\lambda Z} = \bar{\lambda} \bar{Z}.$$

■

**Teorema 6.9.** *Toda matriz simétrica, cujas entradas são números reais, possui autovalor real.*

*Demonstração.* Seja  $A$  uma matriz simétrica, cujas entradas são números reais. Vamos mostrar que as raízes do seu polinômio característico são reais. Seja  $\lambda$  uma raiz do polinômio característico de  $A$ . Então o sistema linear  $(A - \lambda I_n)Z = \vec{0}$  tem solução não trivial  $Z \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ . O que implica que

$$AZ = \lambda Z.$$

Como  $A$  é uma matriz cujas entradas são números reais, pela **Proposição 6.8** temos que  $A\bar{Z} = \bar{\lambda} \bar{Z}$ . Por um lado,

$$\bar{Z}^t AZ = \bar{Z}^t \lambda Z = \lambda \bar{Z}^t Z = \lambda \sum_{i=1}^n |z_i|^2.$$

Por outro lado

$$\bar{Z}^t AZ = \bar{Z}^t A^t Z = (\overline{AZ})^t Z = \bar{\lambda} \bar{Z}^t Z = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |z_i|^2.$$

Logo,  $\bar{\lambda} = \lambda$ , ou seja,  $\lambda$  é um número real.

■

**Demonstração do Teorema 6.7 na página 396.** O resultado é óbvio se  $n = 1$ . Vamos supor que o resultado seja verdadeiro para matrizes  $(n - 1) \times (n - 1)$  e vamos provar que ele é verdadeiro para matrizes  $n \times n$ . Pelo Teorema 6.9 a matriz  $A$  tem um autovalor  $\lambda_1$ . Isto significa que existe autovetores associados a  $\lambda_1$ . Seja  $V_1$  um autovetor de norma igual a 1 associado a  $\lambda_1$ . Sejam  $V_2, \dots, V_n$  vetores tais que  $\{V_1, \dots, V_n\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  (isto pode ser conseguido aplicando-se o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a uma base de  $\mathbb{R}^n$  que contenha  $V_1$ .) Seja  $P_1 = [V_1 \dots V_n]$ . Como  $AV_1 = \lambda_1 V_1$  e  $AV_2, \dots, AV_n$  são combinações lineares de  $V_1, \dots, V_n$ , temos que

$$AP_1 = [AV_1 \dots AV_n] = [V_1 \dots V_n]M = P_1M, \quad (6.17)$$

em que  $M = \left[ \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right]$ . Multiplicando-se à esquerda (6.17) por  $P_1^t$

obtemos  $M = P_1^t A P_1$ . Mas,  $M^t = (P_1^t A P_1)^t = P^t A^t P_1 = P_1^t A P_1 = M$ , ou seja, a matriz  $M$  é simétrica. Portanto,

$$M = \left[ \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

com  $B$  uma matriz simétrica  $(n - 1) \times (n - 1)$ . Como estamos supondo o resultado verdadeiro para matrizes  $(n - 1) \times (n - 1)$ , então existe uma matriz ortogonal  $\tilde{P}_2$ ,

$(n - 1) \times (n - 1)$ , tal que  $D_2 = \tilde{P}_2^t B \tilde{P}_2$  é diagonal. Seja  $P_2 = \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{P}_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right]$ .

Seja  $P = P_1 P_2$ .  $P$  é ortogonal (verifique!) e pela equação (6.17)

$$AP = (AP_1)P_2 = P_1 MP_2 = P_1 \left[ \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B\tilde{P}_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

Mas,  $B\tilde{P}_2 = \tilde{P}_2 D_2$  e assim,

$$AP = P_1 P_2 \left[ \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right] = PD,$$

em que  $D = \left[ \begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D_2 & \\ 0 & & & \end{array} \right]$ . Multiplicando-se à esquerda por  $P^t$  obtemos o resultado. ■

## 6.3 Aplicação: Identificação de Cônicas

Uma **cônica** no plano é definida como o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

em que  $a, b, c, d, e$  e  $f$  são números reais, com  $a, b$  e  $c$  não simultaneamente nulos. Vamos estudar a elipse, a hipérbole e a parábola, que são chamadas **cônicas não degeneradas**. As outras que incluem um único ponto e um par de retas são chamadas **cônicas degeneradas**. Como veremos adiante as cônicas não degeneradas podem ser obtidas da interseção de um cone circular com um plano.

Dizemos que a equação de uma cônica não degenerada está na forma padrão se ela tem uma das formas dadas na [Figura 6.19 na página 425](#).

Nesta seção veremos como a diagonalização de matrizes simétricas pode ser usada na identificação das cônicas cujas equações não estão na forma padrão. Antes, porém, vamos definir as cônicas como conjunto de pontos que satisfazem certas propriedades e determinar as equações na forma padrão.

### 6.3.1 Elipse

---

**Definição 6.4.** A **elipse** é o conjunto dos pontos  $P$  no plano tais que a soma das distâncias de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (**focos**) é constante, ou seja, se  $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$ , então a elipse é o conjunto dos pontos  $P$  tais que

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a,$$

em que  $a > c$ .

---

Uma elipse pode ser desenhada se fixarmos as extremidades de um barbante de comprimento  $2a$  nos focos e esticarmos o barbante com uma caneta. Movimentando-se a caneta, mantendo o barbante esticado, a elipse será traçada (Figura 6.5).

**Proposição 6.10.** (a) A equação da *elipse* cujos focos são  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6.18)$$

(b) A equação da *elipse* cujos focos são  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$  é

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad (6.19)$$

Em ambos os casos  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

### **Demonstração.**

- (a) Vamos provar que se  $P = (x, y)$  pertence a elipse, então ele satisfaz (6.18) e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da recíproca. A elipse é o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  tais que

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a,$$

ou seja,

$$|| \overrightarrow{F_1 P} || + || \overrightarrow{F_2 P} || = 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$



ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como  $a > c$ , então  $a^2 - c^2 > 0$ . Assim, podemos definir  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  e dividir a equação acima por  $a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$ , obtendo (6.18).

(b) Trocando-se  $x$  por  $y$  no item anterior obtemos o resultado.



Nas Figuras 6.6 e 6.7, os pontos  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$  são chamados **vértices da elipse**. Os segmentos  $A_1A_2$  e  $B_1B_2$  são chamados **eixos da elipse**.

A **excentricidade** da elipse é o número  $e = \frac{c}{a}$ . Como,  $c < a$ , a excentricidade de uma elipse é um número real não negativo menor que 1. Observe que se  $F_1 = F_2$ , então a elipse reduz-se ao **círculo** de raio  $a$ . Além disso, como  $c = 0$ , então  $e = 0$ . Assim, um círculo é uma elipse de excentricidade nula.

A elipse é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma **reta geratriz** (reta que gira em torno do eixo do cone de forma a gerá-lo) e que corta apenas uma das folhas da superfície (ver Exercício 6.3.16 na página 437).

### 6.3.2 Hipérbole

---

**Definição 6.5.** A **hipérbole** é o conjunto dos pontos  $P$  no plano tais que o módulo da diferença entre as distâncias de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (**focos**) é constante, ou seja, se  $\text{dist}(F_1, F_2) = 2c$ , então a hipérbole é o conjunto dos pontos  $P$  tais que

$$|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a,$$

em que  $a < c$ .

---

Podemos desenhar uma parte de um ramo de uma hipérbole da seguinte forma. Fixamos uma extremidade de uma régua em um dos focos, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao comprimento da régua menos  $2a$ ) na outra ponta da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada na régua. Girando-se a régua em torno do foco no qual ela foi fixada, mantendo o barbante esticado com a caneta encostada na régua, uma parte de um ramo da hipérbole será traçada (**Figura 6.9**).

**Proposição 6.11.** (a) A equação da **hipérbole** cujos focos são  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.20)$$

e das **assíntotas** (retas para onde a curva se aproxima, quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ) são

$$y = \pm \frac{b}{a}x,$$

(b) A equação da **hipérbole** cujos focos são  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$  é

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (6.21)$$

e das **assíntotas** são

$$x = \pm \frac{a}{b}y.$$

Em ambos os casos  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

### **Demonstração.**

- (a) Vamos provar que se  $P = (x, y)$  é uma ponto da **hipérbole** então ele satisfaz (6.20) e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da recíproca. A **hipérbole** é o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  tais que

$$\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2) = \pm 2a,$$

ou seja,

$$|| \vec{F_1P} || - || \vec{F_2P} || = \pm 2a,$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

ou

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado e simplificando, temos

$$\pm a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, temos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como  $a < c$ , então  $c^2 - a^2 > 0$ . Assim, podemos definir  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$  e dividir a equação acima por  $-a^2b^2 = a^2(a^2 - c^2)$ , obtendo (6.20).

A equação (6.20) pode ser reescrita como

$$y^2 = b^2 \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{b^2}{a^2} x^2 \left( 1 - \frac{a^2}{x^2} \right).$$

Para  $x$  muito grande,  $\frac{a^2}{x^2}$  é próximo de 0 e a equação se aproxima de

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{b}{a} x.$$

(b) Trocando-se  $x$  por  $y$  no item anterior obtemos o resultado.



Nas Figuras 6.10 e 6.11, os pontos  $A_1$  e  $A_2$  são chamados **vértices da hipérbole**. A **excentricidade** da hipérbole é o número  $e = \frac{c}{a}$ . Como,  $c > a$ , a excentricidade de uma hipérbole é um número real maior que 1.

A hipérbole é a curva que se obtém seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, não é paralelo a uma reta geratriz e que corta as duas folhas da superfície (ver Exercício 6.3.16 na página 437).

### 6.3.3 Parábola

---

**Definição 6.6.** Uma **parábola** é o conjunto dos pontos  $P$  no plano equidistantes de uma reta  $r$  (**diretriz**) e de um ponto  $F$  (**foco**), não pertencente a  $r$ , ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos  $P$  tais que

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r).$$

---

Podemos desenhar uma parte da parábola da seguinte forma. Colocamos um esquadro com um lado cateto encostado na reta diretriz, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao lado cateto do esquadro perpendicular à reta diretriz) no foco, a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na reta diretriz. Esticamos o barbante com a caneta de forma que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular à reta diretriz. Deslizando-se o esquadro na direção da reta diretriz mantendo o lado encostado nela, uma parte da parábola é traçada (**Figura 6.13**).

---

**Proposição 6.12.** (a) A equação da **parábola** com foco  $F = (p, 0)$  e reta diretriz  $r : x = -p$  é

$$y^2 = 4px, \tag{6.22}$$

(b) A equação da **parábola** com foco  $F = (0, p)$  e reta diretriz  $r : y = -p$  é

$$x^2 = 4py. \quad (6.23)$$

---

**Demonstração.**

- (a) Vamos provar que se  $P(x, y)$  pertence a parábola, então ele satisfaz (6.22) e deixamos para o leitor, como exercício, a demonstração da recíproca. A parábola é o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  tais que

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r),$$

que neste caso é

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|,$$

Elevando ao quadrado e simplificando, obtemos (6.22).

- (b) Trocando-se  $x$  por  $y$  no item anterior obtemos o resultado.



Nas Figuras 6.14, 6.15, 6.16 e 6.17, o ponto  $P_0$  é o ponto da parábola mais próximo da reta diretriz e é chamado de **vértice da parábola**. A parábola é a curva que se obtém seccionando-se um cone por um plano paralelo a uma **reta geratriz do cone** conforme a Figura 6.18 na página 423 (ver Exercício 6.3.16 na página 437).

Vamos resumir numa tabela as cônicas não degeneradas e suas equações na forma padrão.

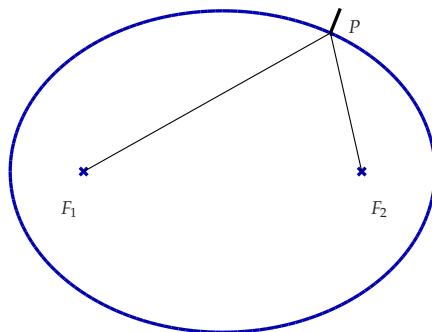


Figura 6.5: Elipse que é o conjunto dos pontos  $P$  tais que  $\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a$



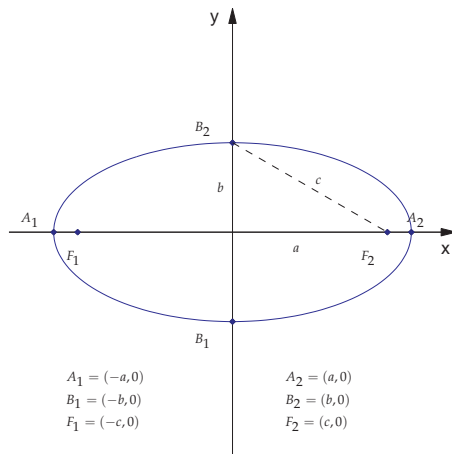


Figura 6.6: Elipse com focos nos pontos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$

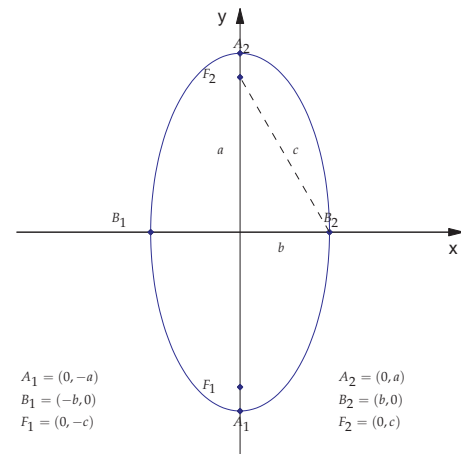


Figura 6.7: Elipse com focos nos pontos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$

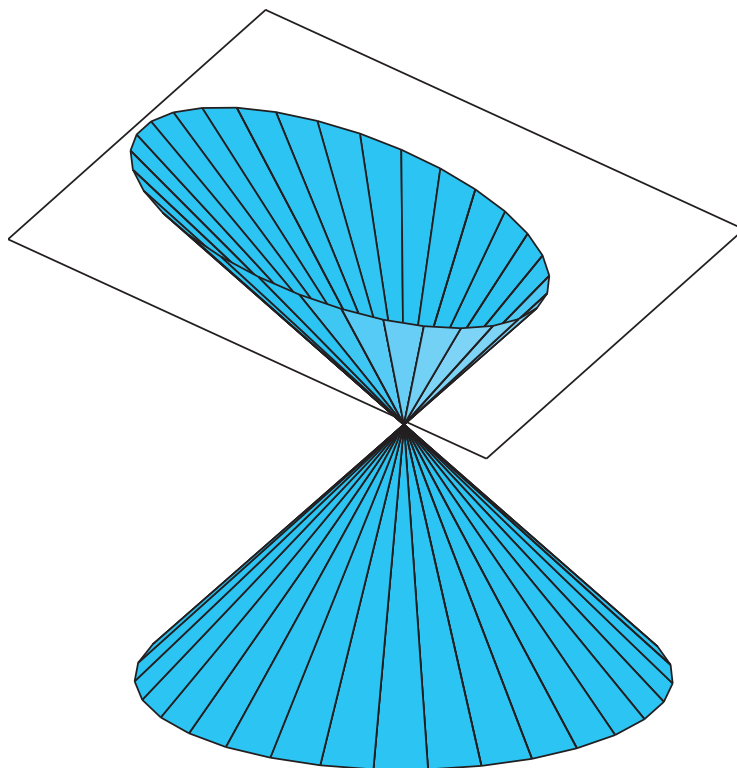


Figura 6.8: Elipse obtida seccionando-se um cone com um plano

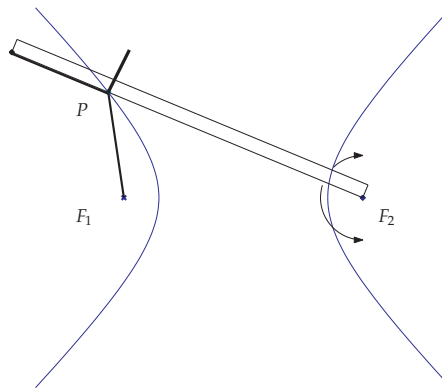


Figura 6.9: Hipérbole que é o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  tais que  $|\text{dist}(P, F_1) - \text{dist}(P, F_2)| = 2a$

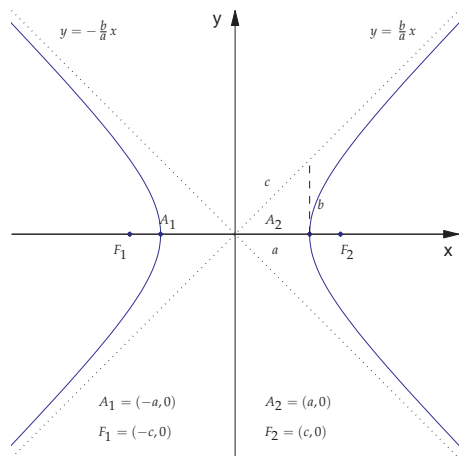


Figura 6.10: Hipérbole com focos nos pontos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$

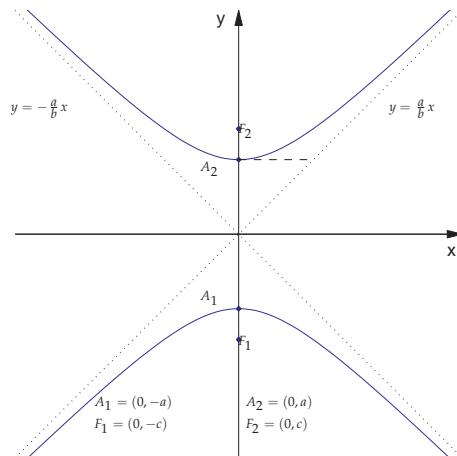


Figura 6.11: Hipérbole com focos nos pontos  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$

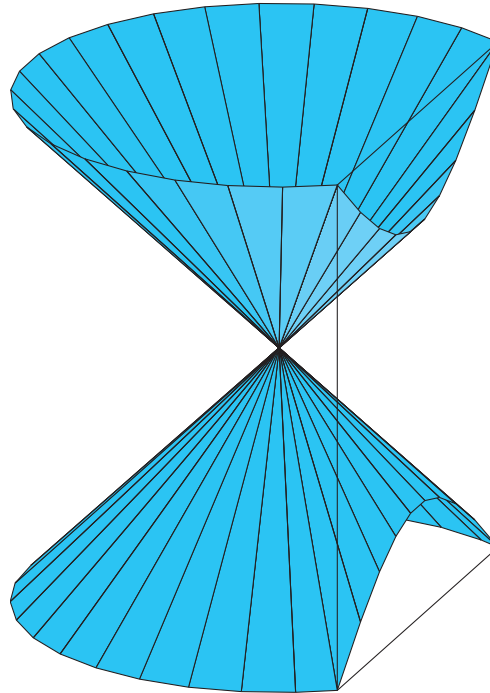


Figura 6.12: Hipérbole obtida seccionando-se um cone com um plano

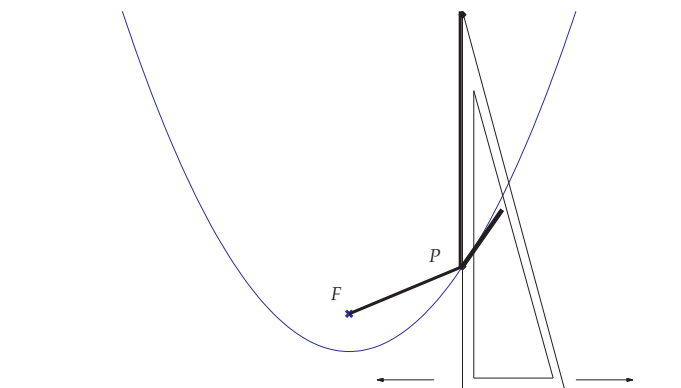


Figura 6.13: Parábola que é o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  tais que  $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, r)$

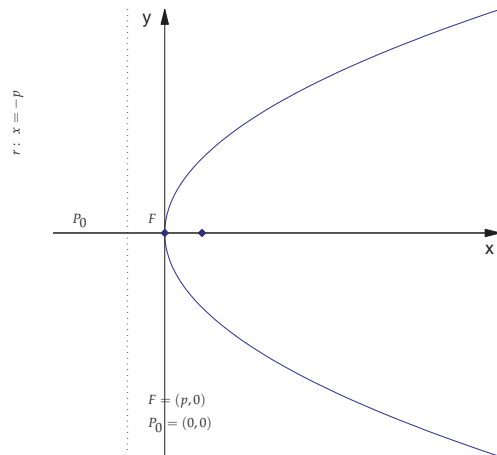


Figura 6.14: Parábola com foco no ponto  $F = (p, 0)$  e  $p > 0$

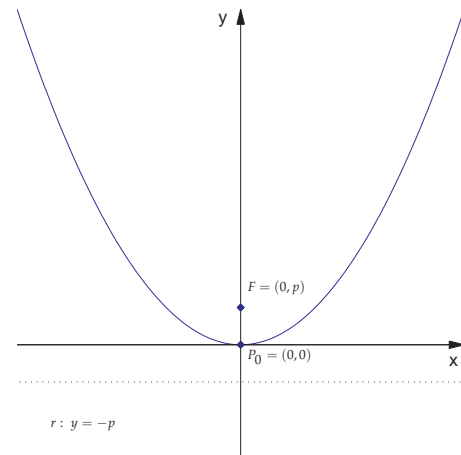


Figura 6.15: Parábola com foco no ponto  $F = (0, p)$  e  $p > 0$

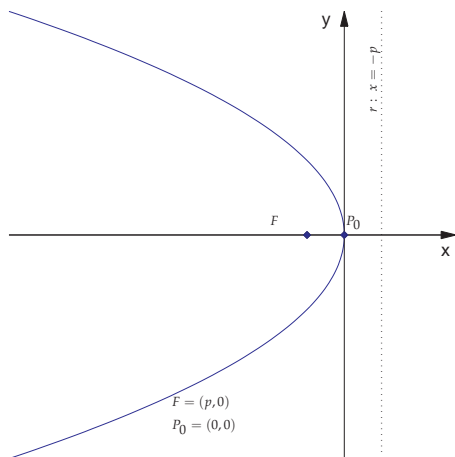


Figura 6.16: Parábola com foco no ponto  $F = (p, 0)$  e  $p < 0$

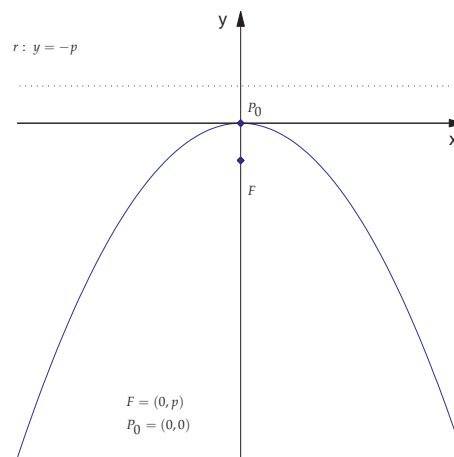


Figura 6.17: Parábola com foco no ponto  $F = (0, p)$  e  $p < 0$



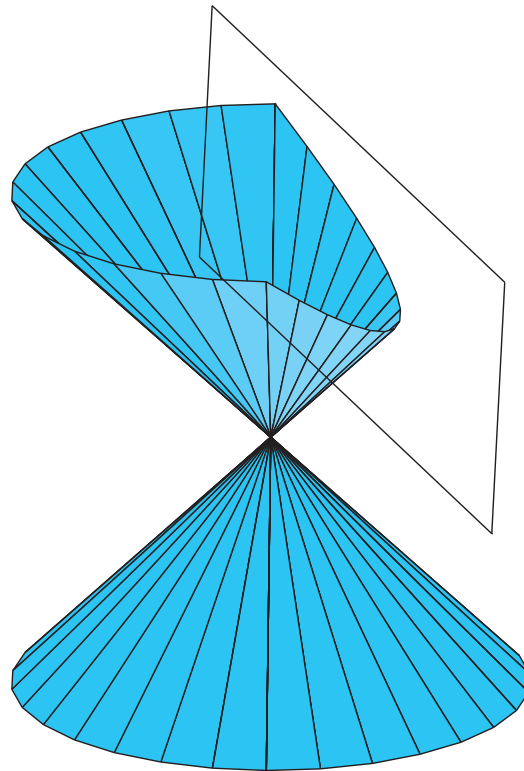
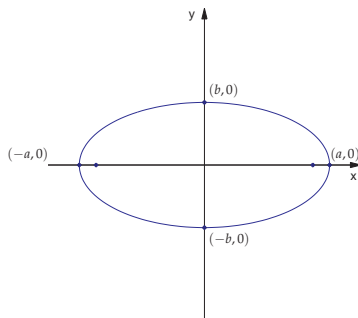


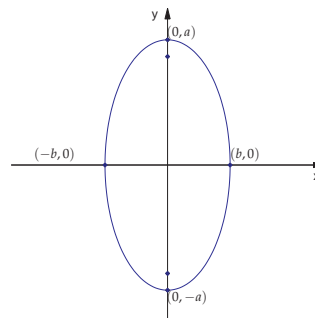
Figura 6.18: **Parábola obtida seccionando-se um cone com um plano**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$$

Elipse

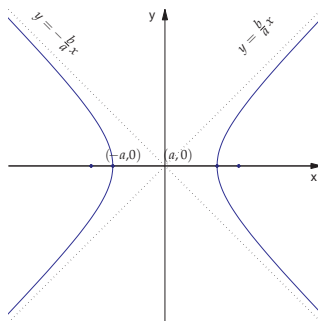


$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, a > b$$

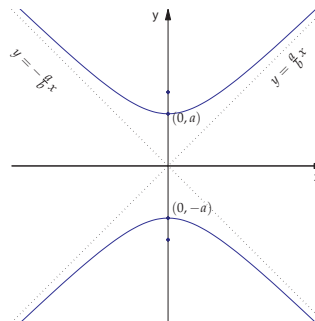


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



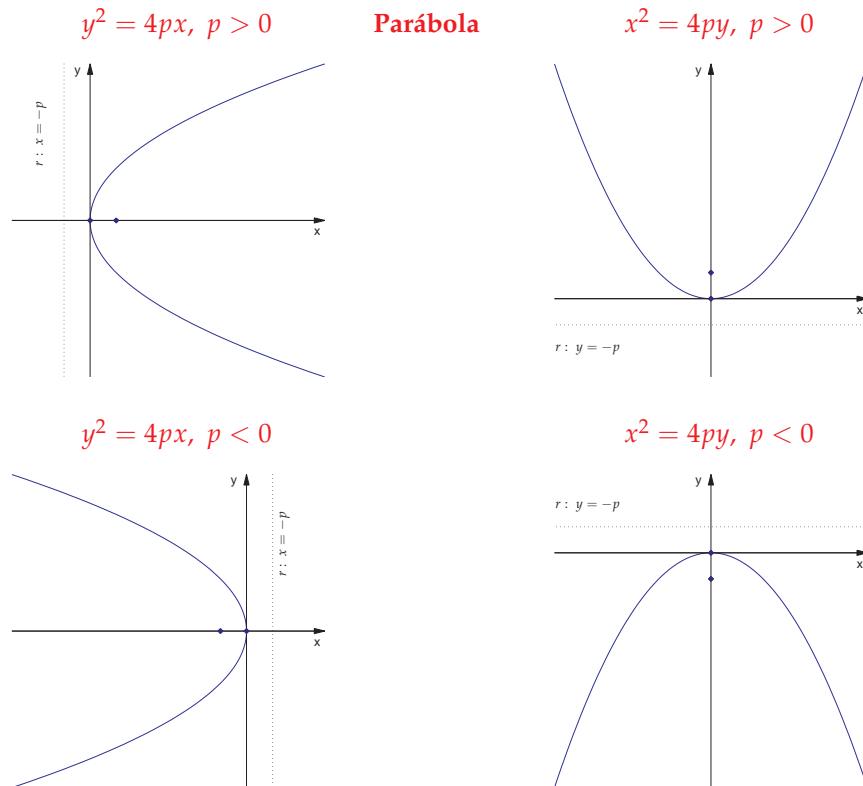


Figura 6.19: Cônicas não degeneradas com equações na forma padrão

Vamos ver, agora, como a diagonalização de matrizes simétricas pode ser usada na identificação das cônicas cujas equações não estão na forma padrão. Vamos estudar alguns exemplos.

**Exemplo 6.12.** Considere a cônica  $C$  cuja equação é

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0.$$

Esta equação pode ser escrita como

$$X^t A X - 36 = 0, \quad (6.24)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de  $A$  é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 8 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36.$$

Logo, os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 9$ . Os autovetores associados a  $\lambda_1 = 4$  são as soluções não nulas do sistema

$$(A - 4I_2)X = \vec{0}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cujas soluções são

$$\mathbb{W}_1 = \{(2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim,  $V_1 = (2, 1)$  é uma base para  $\mathbb{W}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  e é L.I. E  $W_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$  é uma base ortonormal para  $\mathbb{W}_1$ .

Não precisamos resolver outro sistema linear para encontrar os autovetores associados a  $\lambda_2 = 9$ . Como a matriz  $A$  é simétrica, pela [Proposição 6.6 na página 390](#), autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. Assim o autoespaço associado a  $\lambda_2 = 9$  é dado por

$$\mathbb{W}_2 = \{\alpha(1, -2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Logo  $V_2 = (1, -2)$  é uma base para  $\mathbb{V}_2$ , pois gera  $\mathbb{V}_2$  e é L.I. E  $W_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$  é uma base ortonormal para  $\mathbb{W}_2$ . Portanto,

$$A = PDP^t$$

em que,

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

e

$$P = [W_1 \quad W_2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Pelo [Exercício 6.2.5 na página 398](#) a matriz  $P$  é uma matriz de rotação.

Substituindo-se  $A = PDP^t$  na equação (6.24) obtemos

$$X^t P D P^t X - 36 = 0.$$

Substituindo-se  $X = PX'$ , ou equivalentemente,  $X' = P^t X$ , em que  $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  na equação (6.24), obtemos

$$X'^t D X' - 36 = 0,$$

ou

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0,$$

ou ainda

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1 \quad (6.25)$$

que é a equação de uma elipse cujo esboço é mostrado na **Figura 6.20**. Para fazer o esboço do gráfico, em primeiro lugar temos que traçar os eixos  $x'$  e  $y'$ . O eixo  $x'$  é obtido fazendo  $y' = 0$  na equação

$$X = PX' \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

e o eixo  $y'$  é obtido fazendo  $x' = 0$ . Assim eixo  $x'$  passa pela origem, é paralelo e possui o mesmo sentido do vetor  $W_1$ , que tem coordenadas  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  em relação ao sistema de coordenadas  $x'y'$ . Ou seja,  $W_1 = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , que é a primeira coluna de  $P$ . O eixo  $y'$  passa pela origem, é paralelo e possui o mesmo sentido de  $W_2$  que tem coordenadas  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  em relação ao sistema de coordenadas  $x'y'$ . Ou seja,  $W_2 = P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , que é a segunda coluna de  $P$ . Depois, a partir da equação (6.25), verificamos na **Figura 6.19 na página 425** a forma da curva em relação aos eixos  $x'$  e  $y'$ .

**Exemplo 6.13.** Considere a cônica cuja equação é dada por

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0.$$

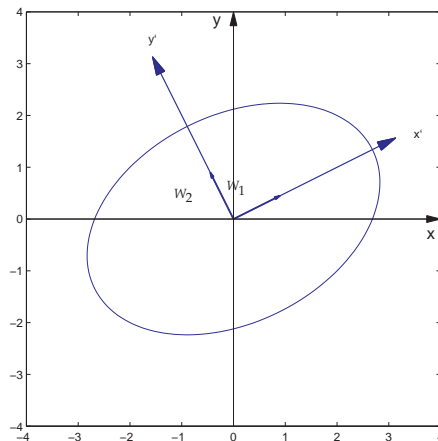


Figura 6.20: Elipse do Exemplo 6.12

Esta equação pode ser escrita como

$$X^t AX + KX + 4 = 0, \quad (6.26)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } K = \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & -\frac{80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

A matriz  $A$  é a mesma do exemplo anterior. Assim, temos que

$$A = PDP^t$$

em que,

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \text{ e } P = [W_1 \ W_2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Substituindo-se  $A = PDP^t$  na equação (6.26) obtemos

$$X^t PDP^t X + KX + 4 = 0.$$

Substituindo-se  $X = PX'$  ou  $X' = P^t X$ , em que  $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ .

$$X'^t DX' + KPX' + 4 = 0,$$

ou

$$4x'^2 + 9y'^2 - 8x' - 36y' + 4 = 0.$$

ou ainda,

$$4(x'^2 - 2x') + 9(y'^2 - 4y') + 4 = 0$$

Completando-se os quadrados, obtemos

$$4[(x'^2 - 2x' + 1) - 1] + 9[(y'^2 - 4y' + 4) - 4] + 4 = 0$$



ou

$$4(x' - 1)^2 + 9(y' - 2)^2 - 36 = 0.$$

Fazendo-se mais uma mudança de variáveis

$$x'' = x' - 1 \text{ e} \quad (6.27)$$

$$y'' = y' - 2 \quad (6.28)$$

obtemos

$$4x''^2 + 9y''^2 - 36 = 0$$

ou

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{4} = 1 \quad (6.29)$$

que é a equação de uma elipse cujo esboço é mostrado na [Figura 6.21](#). Antes de fazer o esboço do gráfico temos que traçar os eixos  $x''$  e  $y''$ , que por sua vez são translações dos eixos  $x'$  e  $y'$ . O eixo  $x'$  tem a direção e o sentido do vetor  $W_1 = P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  (a primeira coluna de  $P$ ). O eixo  $y'$  tem a direção e o sentido do vetor  $W_2 = P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  (a segunda coluna de  $P$ ). O eixo  $x''$  tem equação  $y'' = 0$ . Usando a equação (6.27) obtemos  $y' = 2$ . O eixo  $y''$  tem equação  $x'' = 0$ . Usando a equação (6.28) obtemos  $x' = 1$ . Depois, a partir da equação (6.29), verificamos na [Figura 6.19 na página 425](#) a forma da curva em relação aos eixos  $x''$  e  $y''$ .

Os exemplos anteriores são casos particulares do próximo teorema, cuja demonstração é feita da mesma forma que fizemos com os exemplos e por isso deixamos para o leitor a tarefa de escrevê-la.

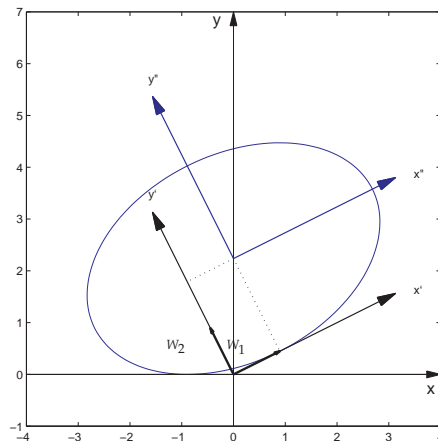


Figura 6.21: **Elipse** do Exemplo 6.13

**Teorema 6.13.** Considere a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (6.30)$$

com  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ , sendo  $a, b$  e  $c$  não simultaneamente nulos. Então existe um sistema de coordenadas ortogonal  $x'y'$ , em que a equação (6.30) tem a forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0,$$

em que  $\lambda_1, \lambda_2$  são os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Mais ainda,

$$X = PX',$$

em que  $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ,  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  e  $P$  é uma matriz ortogonal ( $P^{-1} = P^t$ ).

---

## Exercícios Numéricos (respostas na página 544)

Identificar a cônica, achar a equação no último sistema de coordenadas utilizado e fazer um esboço do gráfico.

**6.3.1.**  $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$ ;

**6.3.2.**  $3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81 = 0$ ;

**6.3.3.**  $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$ ;

**6.3.4.**  $21x^2 + 6xy + 13y^2 - 132 = 0$ ;

**6.3.5.**  $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$ ;

**6.3.6.**  $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90 = 0$ ;

**6.3.7.**  $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 82 = 0$ ;

**6.3.8.**  $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x = 36$ ;

**6.3.9.**  $6x^2 + 9y^2 - 4xy - 4\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y = 5$ ;

**6.3.10.**  $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy + 6x = 0$ ;

**6.3.11.**  $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70 = 0$ ;

**6.3.12.**  $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$ ;

## Exercícios usando o MATLAB®

**Comandos do pacote GAAL:**

`>> [P,D]=diagonal(A)` diagonaliza a matriz A, de forma que  $AP=PD$ , em que D é uma matriz diagonal e P é uma matriz ortogonal.

>> `subst(expr, [x;y], [a;b])` substitui na expressão `expr` as variáveis `x, y` por `a, b`, respectivamente.

>> `ellipse(a,b)` desenha a elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

>> `ellipse(a,b, [U1 U2])` desenha a elipse  $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ , em que  $x'$  e  $y'$  são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

>> `ellipse(a,b, [U1 U2], X0)` desenha a elipse  $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$ , em que  $x''$  e  $y''$  são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

>> `hiperbx(a,b)` desenha a hipérbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

>> `hiperbx(a,b, [U1 U2])` desenha a hipérbole  $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ , em que  $x'$  e  $y'$  são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

>> `hiperbx(a,b, [U1 U2], X0)` desenha a hipérbole  $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$ , em que  $x''$  e  $y''$  são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

>> `hiperby(a,b)` desenha a hipérbole  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ .

>> `hiperby(a,b, [U1 U2])` desenha a hipérbole  $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$ , em que  $x'$  e  $y'$  são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

>> `hiperby(a,b, [U1 U2], X0)` desenha a hipérbole  $\frac{y''^2}{a^2} - \frac{x''^2}{b^2} = 1$ , em que  $x''$  e  $y''$  são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e pelo ponto `X0`.

>> `parabx(p)` desenha a parábola  $y^2 = 4px$ .

>> `parabx(p, [U1 U2])` desenha a parábola  $y'^2 = 4px'$ , em que  $x'$  e  $y'$  são as coordenadas em relação à base ortonormal `U1` e `U2`.

>> `parabx(p, [U1 U2], X0)` desenha a parábola  $y''^2 = 4px''$ , em que  $x''$  e  $y''$  são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal `U1` e `U2` e por `X0`.

>> paraby(p) desenha a parábola  $x^2 = 4py$ .

>> paraby(p, [U1 U2]) desenha a parábola  $x'^2 = 4py'$ , em que  $x'$  e  $y'$  são as coordenadas em relação à base ortonormal U1 e U2.

>> paraby(p, [U1 U2], X0) desenha a parábola  $x''^2 = 4py''$ , em que  $x''$  e  $y''$  são as coordenadas em relação ao sistema de coordenadas determinado pela base ortonormal U1 e U2 e por X0.

### 6.3.13. Use o MATLAB® para resolver os Exercícios Numéricos

## Exercícios Teóricos

- 6.3.14. (a) Verifique que com o procedimento abaixo realmente desenhemos uma parte de um ramo de uma hipérbole. Fixamos uma extremidade de uma régua em um dos focos, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao comprimento da régua menos  $2a$ ) na outra ponta da régua e a outra extremidade do barbante no outro foco. Esticamos o barbante com uma caneta de forma que ela fique encostada na régua. Girando-se a régua em torno do foco no qual ela foi fixada, mantendo o barbante esticado com a caneta encostada na régua, uma parte de um ramo da hipérbole será traçada (Figura 6.9 na página 417).
- (b) Verifique que com o procedimento abaixo realmente desenhemos uma parte de um ramo de uma parábola. Colocamos um esquadro com um lado cateto encostado na reta diretriz, fixamos uma extremidade de um barbante (de comprimento igual ao lado cateto do esquadro perpendicular à reta diretriz) no foco, a outra extremidade na ponta do esquadro oposta ao lado que está encostado na reta diretriz. Esticamos o barbante com a caneta de forma que ela fique encostada no lado do esquadro perpendicular à reta diretriz. Deslizando-se o esquadro na direção da reta diretriz mantendo o lado encostado nela uma parte da parábola é traçada (Figura 6.13 na página 420).
- 6.3.15. Mostre que um espelho parabólico reflete na direção do foco os raios que incidem paralelos ao seu eixo de simetria seguindo os seguintes passos:
- (a) Considere a parábola  $y^2 = 4px$ . Usando o fato de que a inclinação da reta tangente à parábola no ponto  $P = (\frac{y_0^2}{4p}, y_0)$  é  $\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y_0}$ . Mostre que se o raio incidente tem equação  $y = y_0$ , então a

equação do raio refletido que passa por  $P = (\frac{y_0^2}{4p}, y_0)$  é

$$y - y_0 = \frac{4py_0}{y_0^2 - 4p^2} \left( x - \frac{y_0^2}{4p} \right).$$

Use o fato de que  $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ .

(b) Mostre que o raio refletido intercepta o eixo  $x$  em  $x = p$ .

**6.3.16.** Mostre que a interseção de um cone circular com plano que não passa pelo seu vértice é uma cônica seguindo os seguintes passos:

(a) Considere dois sistemas de coordenadas  $\mathcal{R} = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  e  $\mathcal{S} = \{O, \vec{i}, U_2, U_3\}$ , em que o sistema  $\mathcal{S}$  é obtido do sistema  $\mathcal{R}$  por uma rotação de ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $x$ . Mostre que é válida a seguinte relação entre as coordenadas,  $(x', y', z')$ , em relação ao sistema  $\mathcal{S}$  e  $(x, y, z)$ , em relação ao sistema  $\mathcal{R}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ (\cos \theta)y + (\sin \theta)z \\ -(\sin \theta)y + (\cos \theta)z \end{bmatrix}.$$

(b) Mostre que o cone circular de equação

$$x'^2 + y'^2 = z'^2$$

no sistema  $\mathcal{S}$ , tem equação

$$x^2 + (\cos 2\theta)y^2 + (2 \sin 2\theta)yz - (\cos 2\theta)z^2 = 0$$

no sistema  $\mathcal{R}$ .

(c) Mostre que a interseção do cone com o plano  $z = 1$  é a cônica no plano de equação

$$x^2 + (\cos 2\theta)y^2 + (2 \sin 2\theta)y = \cos 2\theta$$

(d) Mostre que se  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ , então a cônica é a parábola no plano de equação

$$x^2 \pm 2y = 0.$$

(e) Mostre que se  $\theta \neq \pm \frac{\pi}{4}$ , então a cônica no plano tem equação

$$\frac{x^2}{\sec 2\theta} + \frac{(y + \tan 2\theta)^2}{\sec^2 2\theta} = 1,$$

que é uma elipse se  $|\theta| < \frac{\pi}{4}$  e uma hipérbole se  $\frac{\pi}{4} < |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ .

**6.3.17.** Demonstre o Teorema 6.13 na página 433.

**6.3.18.** Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto dos pontos do plano que satisfazem a equação

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

com  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ , sendo  $a, b$  e  $c$  não simultaneamente nulos. Consideremos a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$ . Sejam  $\lambda$  e  $\mu$  os autovalores de  $A$ .

- (a) Mostre que  $\lambda\mu = ac - b^2/4$ .
- (b) Mostre que se  $b^2 - 4ac < 0$ , então  $\mathcal{C}$  é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio.
- (c) Mostre que se  $b^2 - 4ac > 0$ , então  $\mathcal{C}$  é uma hipérbole, ou um par de retas concorrentes.
- (d) Mostre que se  $b^2 - 4ac = 0$ , então  $\mathcal{C}$  é uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.



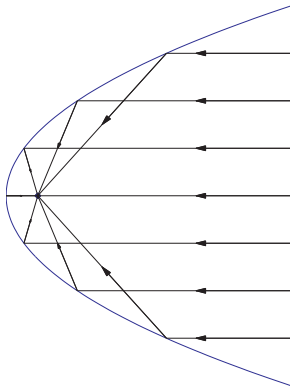


Figura 6.22: Parábola refletindo na direção do foco os raios paralelos ao seu eixo de simetria.

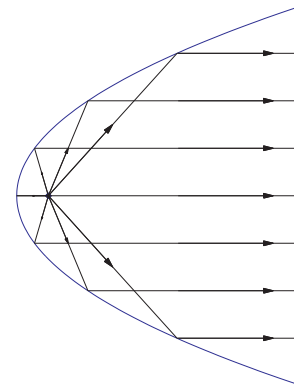


Figura 6.23: Parábola refletindo na direção do seu eixo de simetria os raios originários do foco.

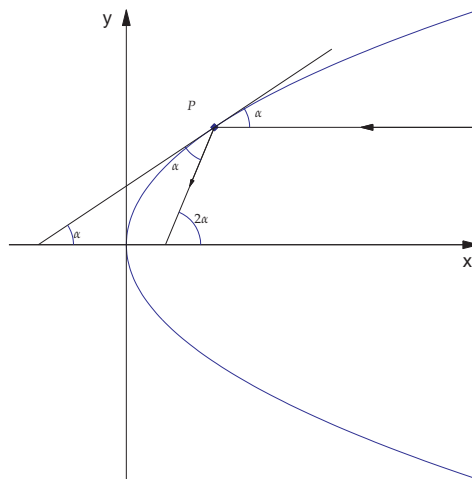


Figura 6.24: Parábola refletindo na direção do foco os raios paralelos ao seu eixo de simetria.

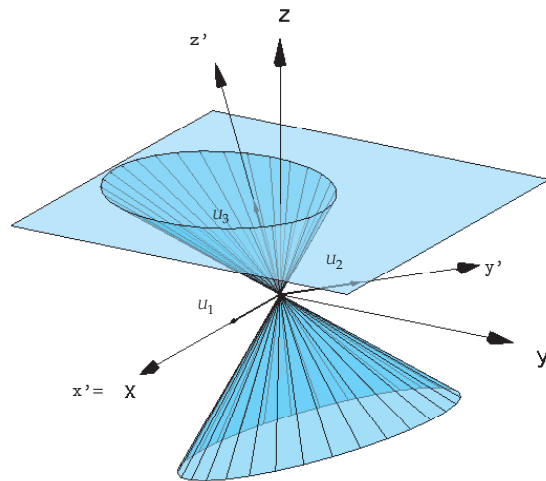


Figura 6.25: Elipse interseção do cone circular com um plano

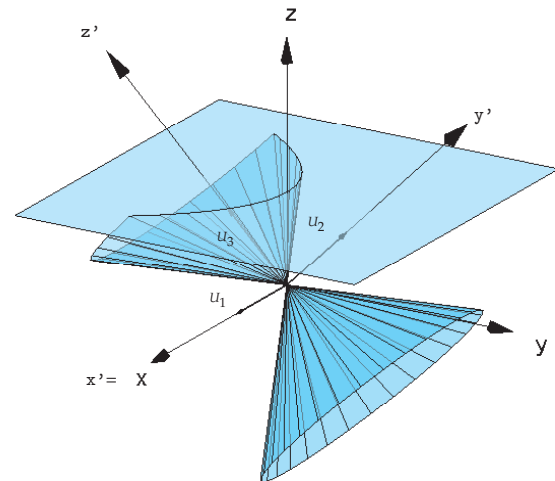


Figura 6.26: Parábola interseção do cone circular com um plano

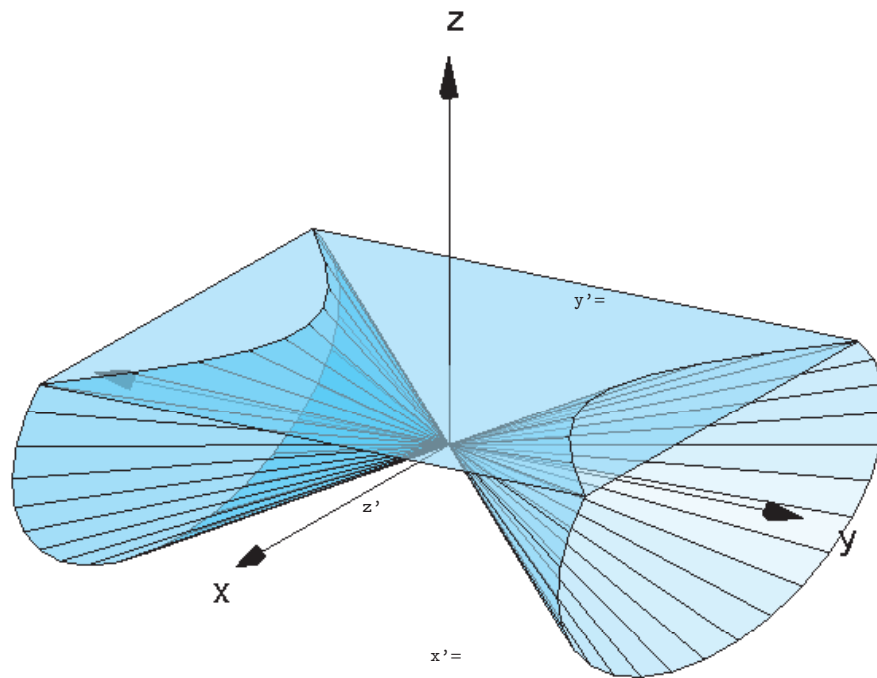


Figura 6.27: Hipérbole interseção do cone circular com um plano

## Teste do Capítulo

---

1. (a) Encontre matrizes  $P$  e  $D$  tais que

$$D = P^t A P,$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}.$$

- (b) Identificar a cônica, achar a equação no último sistema de coordenadas utilizado e fazer um esboço do gráfico.

$$8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70 = 0$$

---

2. Verifique quais das matrizes seguintes são diagonalizáveis:

(a)  $\begin{bmatrix} a & b \\ 3b & c \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

---

3. (a) Seja  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Calcule  $D^{10}$ .

- (b) Sabendo-se que  $A = P^{-1}DP$ , calcule  $A^{10}$ .
- 

4. Diga se é verdadeiro ou falso cada item abaixo, justificando.

- (a) Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$  com somente 1 autovalor, então  $A$  não é diagonalizável;

- (b) Se  $V$  e  $W$  são autovetores associados a um autovalor  $\lambda$ , então  $W - \text{proj}_V W$  é também um autovetor associado a  $\lambda$ .
- (c) Se  $A$  não é singular, então  $0$  não é autovalor de  $A$ ;
- (d) As matrizes  $A$  e  $A^2$  possuem os mesmos autovetores;

---

# Respostas dos Exercícios

---

## 1.1. Matrizes (página 17)

```
1.1.1. >> A=[2,0;6,7]; B=[0,4;2,-8]; C=[-6,9,-7;7,-3,-2];
>> D=[-6,4,0;1,1,4;-6,0,6]; E=[6,9,-9;-1,0,-4;-6,0,-1];
>> A*B-B*A
    -24    -20
     58     24
>> 2*C-D
??? Error using ==> - Matrix dimensions must agree.
>> 2*D-3*E
    -30    -19     27
     5      2     20
     6      0     15
>> D*(D-E)
     80     34    -22
    -10     -4     45
     72     30    -12
```

No item (c) foram usadas as propriedades (l) e (n) do Teorema 1.1 na página 9 e no item (d) foi usada a propriedade (i).

1.1.2.  $A(B+C) = AB+AC$ ,  $B^t A^t = (AB)^t$ ,  $C^t A^t = (AC)^t$ ,  $(ABA)C = (AB)(AC)$ .

1.1.3. (a) >> A=[-3,2,1;1,2,-1];B=[2,-1;2,0;0,3];

```

>> C=[-2,1,-1;0,1,1;-1,0,1];
>> syms d1 d2 d3
>> D=diag([d1,d2,d3]);
>> E1=[1;0;0];E2=[0;1;0];E3=[0;0;1];
>> B*A
      -7      2      3
      -6      4      2
       3      6     -3
>> A*B
      -2      6
       6     -4

(b) >> [A*E1-A(:,1),A*E2-A(:,2),A*E3-A(:,3)]
      0      0      0
      0      0      0
      0      0      0
>> E1.'*B-B(1,:)
      0      0
>> E2.'*B-B(2,:)
      0      0
>> E3.'*B-B(3,:)
      0      0

(c) >> C1=C(:,1);C2=C(:,2);C3=C(:,3);
>> C*D-[d1*C1,d2*C2,d3*C3]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]

(d) >> C1=C(1,:);C2=C(2,:);C3=C(3,:);
>> D*C-[d1*C1;d2*C2;d3*C3]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]

(e) >> B1=B(:,1);B2=B(:,2);
>> A*B-A*[B1,B2]
      0      0
      0      0

(f) >> A1=A(1,:);A2=A(2,:);
>> A*B-[A1;A2]*B
      0      0
      0      0

```

1.1.4. >> syms x y z  
>> A=[1,-3,0;0,4,-2]; X=[x;y;z];  
>> A\*X



```

[ x-3*y]
[ 4*y-2*z]
>> x*A(:,1)+y*A(:,2)+z*A(:,3)
[ x-3*y]
[ 4*y-2*z]

```

1.1.5. >> syms x  
 >> A=[x,4,-2]; B=[2,-3,5];  
 >> solve(A\*B.')

```
11
```

1.1.6. >> syms y  
 >> A=[1,1/y;y,1];  
 >> A^2-2\*A  
 [ 0, 0]  
 [ 0, 0]

1.1.7. >> syms x y z w  
 >> X=[x,y;z,w]; M=[0,1;-1,0];  
 >> X\*M-M\*X  
 [ -y-z, x-w]  
 [ x-w, z+y]  
 >> syms a b c d  
 >> A=[x,y;-y,x]; B=[a,b;-b,a];  
 >> A\*B-B\*A  
 [ 0, 0]  
 [ 0, 0]

1.1.8. (a) Sejam  $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

```

>> syms x y z w
>> syms a b c d
>> A=[x,0;0,y];B=[a,b;c,d];
>> A*B
[ x*a, x*b]
[ y*c, y*d]
>> B*A
[ x*a, b*y]
[ c*x, y*d]

```

Como  $yb = xb$ , para todo  $b$ , em particular para  $b = 1$ , obtemos que  $y = x$ . Assim, a matriz  $A$  que além de ser diagonal tem os elementos da diagonal iguais.

(b) Sejam  $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ .

```
>> A=[x,y;z,w];B=[a,b;c,d];
>> A*B
[ x*a+y*c, x*b+y*d]
[ z*a+w*c, z*b+w*d]
>> B*A
[ x*a+z*b, a*y+b*w]
[ c*x+d*z, y*c+w*d]
```

Comparando os elementos de posição 1,1 obtemos que  $cy = bz$ , para todos os valores de  $b$  e  $c$ . Em particular para  $b = 0$  e  $c = 1$ , obtemos que  $y = 0$  e para  $b = 1$  e  $c = 0$ , obtemos que  $z = 0$ . Ou seja, a matriz  $A$  tem que ser diagonal. Assim, pelo item anterior temos que a matriz  $A$  tem que ser diagonal com os elementos da diagonal iguais.

1.1.9. >> A=[0,1,0;0,0,1;0,0,0];

```
>> A^2,A^3
```

```
ans=0      0      1
      0      0      0
      0      0      0
```

```
ans =0      0      0
      0      0      0
      0      0      0
```

1.1.10. (a) >> A=[1,1/2;0,1/3]

```
A =
    1.0000    0.5000
         0    0.3333
```

```
>> A^2,A^3,A^4,A^5
```

```
ans =
    1.0000    0.6667
         0    0.1111
```

```
ans =
    1.0000    0.7222
         0    0.0370
```

```
ans =
    1.0000    0.7407
         0    0.0123
```

```
ans =
    1.0000    0.7469
         0    0.0041
```

```
>> A^6,A^7,A^8,A^9
```

```
ans =
    1.0000    0.7490
         0    0.0014
```

```
ans =
    1.0000    0.7497
         0    0.0005
```

```
ans =
```

```

      1.0000    0.7499
      0        0.0002
ans =
      1.0000    0.7500
      0        0.0001

```

A sequência parece estar convergindo para a matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(b) >> A=[1/2,1/3;0,-1/5]

```

A =
      0.5000    0.3333
      0       -0.2000
>> A^2,A^3,A^4,A^5
ans =
      0.2500    0.1000
      0        0.0400
ans =
      0.1250    0.0633
      0       -0.0080
ans =
      0.0625    0.0290
      0        0.0016
ans =
      0.0312    0.0150
      0       -0.0003
>> A^6,A^7,A^8,A^9
ans =
      0.0156    0.0074
      0        0.0001
ans =
      0.0078    0.0037
      0        0.0000
ans =
      0.0039    0.0019
      0        0.0000
ans =
      0.0020    0.0009
      0        0.0000

```

A sequência parece estar convergindo para a matriz nula  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

1.1.11. (a) >> A=[0,0,1;1,0,0;0,1,0];  
 >> A=sym(A)  
 [ 0, 0, 1]

```

[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
>> A^2
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]
[ 1, 0, 0]
>> A^3
[ 1, 0, 0]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 1]

```

Para  $k = 3$ ,  $A^k = I_3$ .

```

(b) >> A=[0,1,0,0;-1,0,0,0;0,0,0,1;...
0,0,1,0];
>> A=sym(A)
[ 0, 1, 0, 0]
[ -1, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 0]
>> A^2
[ -1, 0, 0, 0]
[ 0, -1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
>> A^3
[ 0, -1, 0, 0]
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 0]
>> A^4
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]

```

Para  $k = 4$ ,  $A^k = I_4$ .

```

(c) >> A=[0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1;0,0,0,0];
>> A=sym(A)
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
>> A^2
[ 0, 0, 1, 0]

```

```

[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
>> A^3
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
>> A^4
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]

```

Para  $k = 4$ ,  $A^k = \vec{0}$ .

**1.1.12.** Concluímos que é muito raro encontrar matrizes cujo produto comute.

**1.1.13.** Concluímos que matrizes diagonais em geral comutam. Pode-se mostrar que elas sempre comutam ([Exercício 28 na página 27](#)).

**1.1.14.** Se a matriz  $A$  for diagonal, então o produto comuta, se os elementos da diagonal de  $A$  são iguais. (ver [Exercício 17 na página 24](#)). A probabilidade de um tal par de matrizes comute é aproximadamente igual a probabilidade de que a primeira matriz tenha os elementos da sua diagonal iguais, ou seja,  $11/11^3 = 1/11^2 \approx 1\%$ .

## 1.2. Sistemas Lineares (página 57)

**1.2.1.** As matrizes que estão na forma reduzida escalonada são  $A$  e  $C$ .

$$\text{1.2.2. (a) } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 7\alpha \\ 2 - 3\alpha \\ -5 - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(b) } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - 3\alpha + 6\beta \\ \beta \\ 7 - 4\alpha \\ 8 - 5\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(c) } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$(d) X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 8\alpha - 7\beta \\ \beta \\ 5 - 6\alpha \\ 9 - 3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1.2.3. (a) >> A=[1,1,2,8;-1,-2,3,1;3,-7,4,10];

>> escalona(A)

eliminação 1:

1\*linha 1 + linha 2 ==> linha 2

-3\*linha 1 + linha 3 ==> linha 3

[ 1, 1, 2, 8]

[ 0, -1, 5, 9]

[ 0, -10, -2, -14]

eliminação 2:

-1\*linha 2 ==> linha 2

[ 1, 1, 2, 8]

[ 0, 1, -5, -9]

[ 0, -10, -2, -14]

-1\*linha 2 + linha 1 ==> linha 1

10\*linha 2 + linha 3 ==> linha 3

[ 1, 0, 7, 17]

[ 0, 1, -5, -9]

[ 0, 0, -52, -104]

eliminação 3:

-1/52\*linha 3 ==> linha 3

[ 1, 0, 7, 17]

[ 0, 1, -5, -9]

[ 0, 0, 1, 2]

-7\*linha 3 + linha 1 ==> linha 1

5\*linha 3 + linha 2 ==> linha 2

[ 1, 0, 0, 3]

[ 0, 1, 0, 1]

[ 0, 0, 1, 2]

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) >> A=[2,2,2,0;-2,5,2,1;8,1,4,-1];

>> escalona(A)

eliminação 1:

1/2\*linha 1 ==> linha 1

[ 1, 1, 1, 0]

[ -2, 5, 2, 1]

[ 8, 1, 4, -1]

```

2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-8*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 1, 1, 0]
[ 0, 7, 4, 1]
[ 0, -7, -4, -1]
eliminação 2:
1/7*linha 2 ==> linha 2
[ 1, 1, 1, 0]
[ 0, 1, 4/7, 1/7]
[ 0, -7, -4, -1]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
7*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 3/7, -1/7]
[ 0, 1, 4/7, 1/7]
[ 0, 0, 0, 0]

```

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}\alpha \\ \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

```

(c) >> A=[0,-2,3,1;3,6,-3,-2;6,6,3,5]
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 3, 6, -3, -2]
[ 0, -2, 3, 1]
[ 6, 6, 3, 5]
1/3*linha 1 ==> linha 1
[ 1, 2, -1, -2/3]
[ 0, -2, 3, 1]
[ 6, 6, 3, 5]
-6*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 2, -1, -2/3]
[ 0, -2, 3, 1]
[ 0, -6, 9, 9]
eliminação 2:
-1/2*linha 2 ==> linha 2
[ 1, 2, -1, -2/3]
[ 0, 1, -3/2, -1/2]
[ 0, -6, 9, 9]
-2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
6*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 2, 1/3]
[ 0, 1, -3/2, -1/2]
[ 0, 0, 0, 6]

```

O sistema **não** tem solução!

```
1.2.4. >> A=[1,-2,1;2,-5,1;3,-7,2];
>> B1=[1;-2;-1];B2=[2;-1;2];
>> escalona([A,B1,B2])
eliminação 1:
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2, 1, 1, 2]
[ 0, -1, -1, -4, -5]
[ 0, -1, -1, -4, -4]
eliminação 2:
-1*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2, 1, 1, 2]
[ 0, 1, 1, 4, 5]
[ 0, -1, -1, -4, -4]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 3, 9, 12]
[ 0, 1, 1, 4, 5]
[ 0, 0, 0, 0, 1]
```

(a)  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 3\alpha \\ 4 - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(b) O sistema **não** tem solução!

```
1.2.5. (a) >> A=[1,0,5;1,1,1;0,1,-4];
>> B=A+4*eye(3);
>> escalona([B,zeros(3,1)])
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 5, 1, 0]
[ 5, 0, 5, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
(-5)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 5, 1, 0]
[ 0, -25, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
eliminação 2:
linha 3 <==> linha 2
[ 1, 5, 1, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, -25, 0, 0]
(-5)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
```



```
(25)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 1, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

```
(b) >> B=A-2*eye(3);
>> escalona([B,zeros(3,1)])
eliminação 1:
(-1)*linha 1 ==> linha 1
[ 1, 0, -5, 0]
[ 1, -1, 1, 0]
[ 0, 1, -6, 0]
(-1)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, -5, 0]
[ 0, -1, 6, 0]
[ 0, 1, -6, 0]
eliminação 2:
(-1)*linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, -5, 0]
[ 0, 1, -6, 0]
[ 0, 1, -6, 0]
(-1)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -5, 0]
[ 0, 1, -6, 0]
[ 0, 0, 0, 0]
```

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha \\ 6\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

```
1.2.6. (a) >> syms a
>> A=[1,2,-3,4;3,-1,5,2;4,1,a^2-14,a+2];
>> escalona(A)
eliminação 1:
-3*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 2, -3, 4]
[ 0, -7, 14, -10]
[ 0, -7, a^2-2, a-14]
eliminação 2:
-1/7*linha 2 ==> linha 2
[ 1, 2, -3, 4]
```

```
[ 0, 1, -2, 10/7]
[ 0, -7, a^2-2, a-14]
-2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
7*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{bmatrix}$$

i. Se  $a^2 - 16 = 0$  e  $a - 4 = 0$ , então o sistema tem infinitas soluções. Neste caso,  $a = 4$ ;

ii. Se  $a^2 - 16 = 0$  e  $a - 4 \neq 0$ , então o sistema não tem solução. Neste caso,  $a = -4$ ;

iii. Se  $a^2 - 16 \neq 0$ , então o sistema tem solução única. Neste caso,  $a \neq \pm 4$ ;

(b) >> A=[1,1,1,2;2,3,2,5;2,3,a^2-1,a+1];

>> escalona(A)

eliminação 1:

-2\*linha 1 + linha 2 ==> linha 2

-2\*linha 1 + linha 3 ==> linha 3

[ 1, 1, 1, 2]

[ 0, 1, 0, 1]

[ 0, 1, a^2-3, a-3]

eliminação 2:

-1\*linha 2 + linha 1 ==> linha 1

-1\*linha 2 + linha 3 ==> linha 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 3 & a - 4 \end{bmatrix}$$

i. Se  $a^2 - 3 = 0$  e  $a - 4 = 0$ , então o sistema tem infinitas soluções. Este caso não pode ocorrer;

ii. Se  $a^2 - 3 = 0$  e  $a - 4 \neq 0$ , então o sistema não tem solução. Neste caso,  $a = \pm\sqrt{3}$ ;

iii. Se  $a^2 - 3 \neq 0$ , então o sistema tem solução única. Neste caso,  $a \neq \pm\sqrt{3}$ ;

### 1.2.7.

	X	Y	Z
gramas de A/kg	2	1	3
gramas de B/kg	1	3	5
preço/kg	3	2	4

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$	kg de X kg de Y kg de Z	$\begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{bmatrix}$	gramas de A gramas de B arrecadação
---	-------------------------------	--	---

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1900 \\ 2400 \\ 2900 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[2,1,3,1900;1,3,5,2400;3,2,4,2900];
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 3, 5, 2400]
[ 2, 1, 3, 1900]
[ 3, 2, 4, 2900]
(-2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(-3)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 3, 5, 2400]
[ 0, -5, -7, -2900]
[ 0, -7, -11, -4300]
eliminação 2:
(-1/5)*linha 2 ==> linha 2
[ 1, 3, 5, 2400]
[ 0, 1, 7/5, 580]
[ 0, -7, -11, -4300]
(-3)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(7)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 4/5, 660]
[ 0, 1, 7/5, 580]
[ 0, 0, -6/5, -240]
eliminação 3:
(-5/6)*linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 4/5, 660]
[ 0, 1, 7/5, 580]
[ 0, 0, 1, 200]
(-4/5)*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
(-7/5)*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, 0, 500]
[ 0, 1, 0, 300]
[ 0, 0, 1, 200]
```

Foram vendidos 500 kg do produto X, 300 kg do produto Y e 200 kg do produto Z.

**1.2.8.** Substituindo os pontos na função obtemos:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 10 \\ 27a + 9b + 3c + d = 7 \\ 64a + 16b + 4c + d = -11 \end{cases}.$$

Substituindo  $d = 10$  nas outras equações e escalonando a matriz aumentada do sistema correspondente:

```
>> escalona([1,1,1,-3;27,9,3,-21;64,16,4,-24])
```

```

eliminação 1:
-27*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-64*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 1, 1, -3]
[ 0, -18, -24, 60]
[ 0, -48, -60, 168]
eliminação 2:
-1/18*linha 2 ==> linha 2
[ 1, 1, 1, -3]
[ 0, 1, 4/3, -10/3]
[ 0, -48, -60, 168]
-1*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
48*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1/3, 1/3]
[ 0, 1, 4/3, -10/3]
[ 0, 0, 4, 8]
eliminação 3:
1/4*linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1/3, 1/3]
[ 0, 1, 4/3, -10/3]
[ 0, 0, 1, 2]
1/3*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
-4/3*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, 0, 1]
[ 0, 1, 0, -6]
[ 0, 0, 1, 2]

```

Assim, os coeficientes são  $a = 1, b = -6, c = 2$  e  $d = 10$  e o polinômio  $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$ .

**1.2.9.** Substituindo os pontos na equação do círculo obtemos:

$$\begin{cases} -2a + 7b + c = -[(-2)^2 + 7^2] = -53 \\ -4a + 5b + c = -[(-4)^2 + 5^2] = -41 \\ 4a - 3b + c = -[4^2 + 3^2] = -25 \end{cases}.$$

```

>> A=[-2,7,1,-53;-4,5,1,-41;4,-3,1,-25];
>> escalona(A)
eliminação 1:
-1/2*linha 1 ==> linha 1
[ 1, -7/2, -1/2, 53/2]
[ -4, 5, 1, -41]
[ 4, -3, 1, -25]
4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
-4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -7/2, -1/2, 53/2]
[ 0, -9, -1, 65]

```

```

[ 0, 11, 3, -131]
eliminação 2:
-1/9*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -7/2, -1/2, 53/2]
[ 0, 1, 1/9, -65/9]
[ 0, 11, 3, -131]
7/2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-11*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1/9, 11/9]
[ 0, 1, 1/9, -65/9]
[ 0, 0, 16/9, -464/9]
eliminação 3:
9/16*linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1/9, 11/9]
[ 0, 1, 1/9, -65/9]
[ 0, 0, 1, -29]
1/9*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
-1/9*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, 0, -2]
[ 0, 1, 0, -4]
[ 0, 0, 1, -29]

```

Os coeficientes são  $a = -2$ ,  $b = -4$  e  $c = -29$  e a equação do círculo é  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 29 = 0$ .

**1.2.10.** (a) 

```
>> syms b1 b2 b3
>> A=[1,-2,5,b1;4,-5,8,b2;-3,3,-3,b3];
>> escalona(A)
eliminação 1:
-4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
3*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2, 5, b1]
[ 0, 3, -12, b2-4*b1]
[ 0, -3, 12, b3+3*b1]
eliminação 2:
1/3*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2, 5, b1]
[ 0, 1, -4, 1/3*b2-4/3*b1]
[ 0, -3, 12, b3+3*b1]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
3*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -3, -5/3*b1+2/3*b2]
[ 0, 1, -4, 1/3*b2-4/3*b1]
[ 0, 0, 0, b3-b1+b2]
```

O sistema é consistente se, e somente se,  $b_3 - b_1 + b_2 = 0$ .

```
(b) >> syms b1 b2 b3
>> A=[1,-2,-1,b1;-4,5,2,b2;-4,7,4,b3];
>> escalona(A)
eliminação 1:
4*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
4*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2, -1, b1]
[ 0, -3, -2, b2+4*b1]
[ 0, -1, 0, b3+4*b1]
eliminação 2:
linha 3 <==> linha 2
[ 1, -2, -1, b1]
[ 0, -1, 0, b3+4*b1]
[ 0, -3, -2, b2+4*b1]
-1*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2, -1, b1]
[ 0, 1, 0, -b3-4*b1]
[ 0, -3, -2, b2+4*b1]
2*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
3*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1, -7*b1-2*b3]
[ 0, 1, 0, -b3-4*b1]
[ 0, 0, -2, b2-8*b1-3*b3]
```

O sistema é consistente para todos os valores reais de  $b_1, b_2$  e  $b_3$ .

```
1.2.11. >> A=[0,1,7,8;1,3,3,8;-2,-5,1,-8];
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 3, 3, 8]
[ 0, 1, 7, 8]
[ -2, -5, 1, -8]
2*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 3, 3, 8]
[ 0, 1, 7, 8]
[ 0, 1, 7, 8]
eliminação 2:
-3*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
-1*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -18, -16]
[ 0, 1, 7, 8]
[ 0, 0, 0, 0]
>> I=eye(3);E=oe(-1,2,3,I),...
F=oe(-3,2,1,I),G=oe(2,1,3,I),H=oe(I,1,2)
E=[ 1, 0, 0]F=[ 1, -3, 0]
```

```

[ 0, 1, 0] [ 0, 1, 0]
[ 0, -1, 1] [ 0, 0, 1]
G = [ 1, 0, 0] H = [ 0, 1, 0]
    [ 0, 1, 0] [ 1, 0, 0]
    [ 2, 0, 1] [ 0, 0, 1]
>> E*F*G*H*A
[ 1, 0, -18, -16]
[ 0, 1, 7, 8]
[ 0, 0, 0, 0]

```

1.2.12. (a) >> A=[1,2,0,-3,1,0,2;1,2,1,-3,1,2,3;...  
1,2,0,-3,2,1,4;3,6,1,-9,4,3,9]

```

>> escalona(A)
[ 1, 2, 0, -3, 0, -1, 0]
[ 0, 0, 1, 0, 0, 2, 1]
[ 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

```

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & -3x_4 & & - & x_6 = 0 \\ & x_3 & & + & 2x_6 = 1 \\ & & & x_5 & + & x_6 = 2 \end{cases}$$

$$X = [\alpha + 3\beta - 2\gamma \quad \gamma \quad 1 - 2\alpha \quad \beta \quad 2 - \alpha \quad \alpha]^t,$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

(b) >> A=[1,3,-2,0,2,0,0;2,6,-5,-2,4,-3,-1;...  
0,0,5,10,0,15,5;2,6,0,8,4,18,6]

```

>> escalona(A)
[ 1, 3, 0, 4, 2, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 2, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1/3]
[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]

```

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & + 4x_4 & + & 2x_5 & = 0 \\ & x_3 & + 2x_4 & & = 0 \\ & & & & x_6 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$X = [-2\alpha - 4\beta - 3\gamma \quad \gamma \quad -2\beta \quad \beta \quad \alpha \quad 1/3]^t,$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

1.2.13. >> syms a, B=[4,3,1,6]';  
>> A=[1,1,1,1;1,3,-2,a;  
2,2\*a-2,-a-2,3\*a-1;3,a+2,-3,2\*a+1]  
>> escalona([A,B])  
[ 1, 0, 0, 0, (4\*a-11)/(a-5)]  
[ 0, 1, 0, 0, -4/(a-5)]  
[ 0, 0, 1, 0, -4/(a-5)]  
[ 0, 0, 0, 1, -1/(a-5)]

```
>> solve(-3/2*a+5/4+1/4*a^2,a)
ans = [ 1] [ 5]
```

Se  $a \neq 1$  e  $a \neq 5$ , então  $X = \left[ \frac{4a-11}{a-5} \quad \frac{-4}{a-5} \quad \frac{-4}{a-5} \quad \frac{-1}{a-5} \right]^t$ .

```
>> C=subs(A,a,1)
>> escalona([C,B])
[ 1, 0, 0, 1, 2]
[ 0, 1, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 1, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0, 0]
```

Se  $a = 1$ , então  $X = [2 - \alpha, 1, 1, \alpha]^t \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

```
>> D=subs(A,a,5)
>> escalona([D,B])
[ 1, 0, 5/2, -1, 0]
[ 0, 1, -3/2, 2, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0, 0]
```

Se  $a = 5$ , então o sistema não tem solução.

**1.2.14. (a)**

```
>> A=[1,2,3,1,8;1,3,0,1,7;1,0,2,1,3];
>> escalona(A)
[ 1, 0, 0, 1, 1]
[ 0, 1, 0, 0, 2]
[ 0, 0, 1, 0, 1]
```

$$\{(1 - \alpha, 2, 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

**(b)**

```
>> A=[1,1,3,-3,0;0,2,1,-3,3;1,0,2,-1,-1];
>> escalona(A)
[ 1, 0, 0, 1, 1]
[ 0, 1, 0, -1, 2]
[ 0, 0, 1, -1, -1]
```

$$\{(1 - \alpha, 2 + \alpha, -1 + \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

**(c)**

```
>> A=[1,2,3,0;1,1,1,0;1,1,2,0;1,3,3,0];
>> escalona(A)
[ 1, 0, 0, 0]
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
```



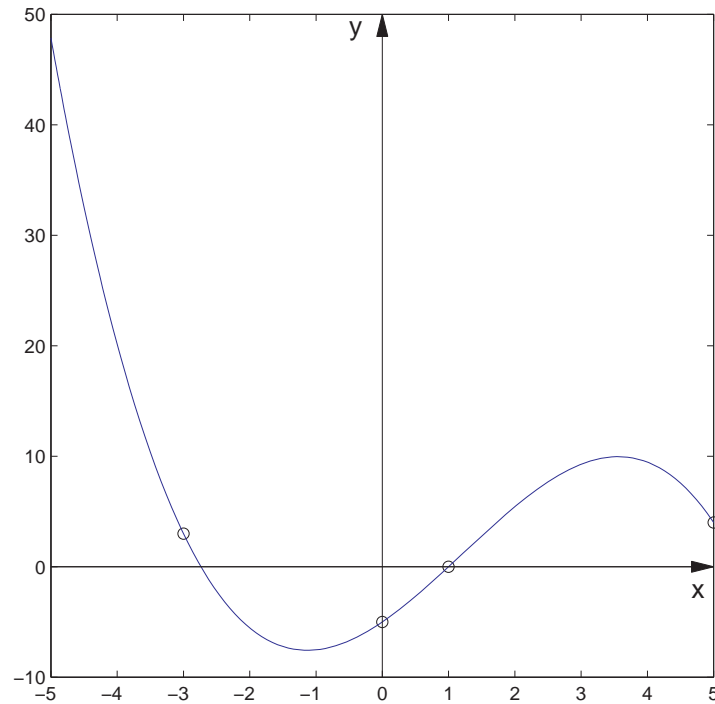
[ 0, 0, 0, 0]

$\{(0,0,0)\}$

```
1.2.15. >> P=randi(4,2)
P =  5  4
     -3  3
       1  0
       0 -5
>> A=matvand(P(:,1),3),B=P(:,2)
A =125  25  5  1
    -27  9  -3  1
       1  1  1  1
       0  0  0  1
B =  4
     3
      0
     -5
>> R=escalona([A,B])
R = [ 1,  0,  0,  0, -163/480]
     [ 0,  1,  0,  0,  99/80]
     [ 0,  0,  1,  0, 1969/480]
     [ 0,  0,  0,  1,    -5]

>> p=poly2sym(R(:,5),x)
p = -163/480*x^3+99/80*x^2+1969/480*x-5
>> clf,po(P),syms x,plotf1(p,[-5,5])
>> eixos
```

Pode não ser possível encontrar o polinômio, se mais de um ponto tiver a mesma abscissa  $x_i$ .



**Observação.** A sua resposta pode ser diferente da que está aqui.

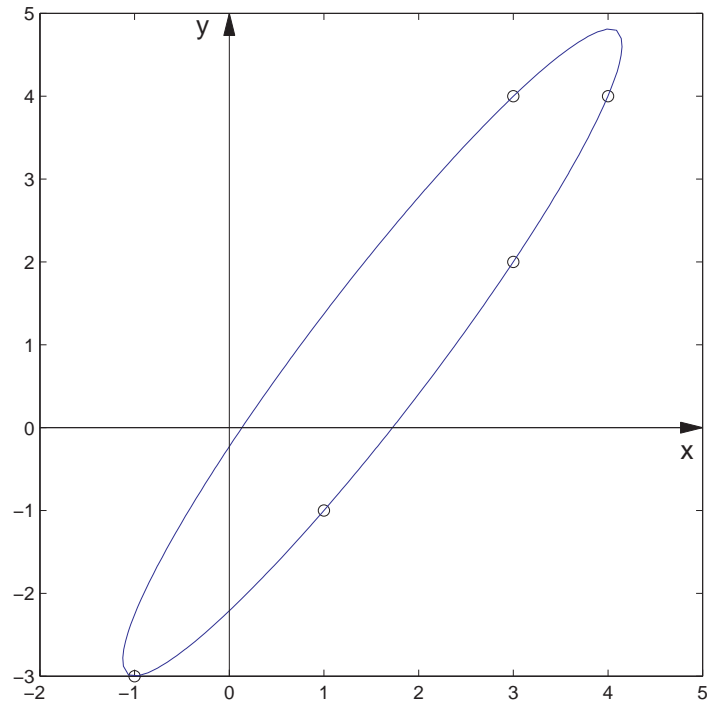
```
1.2.16. >> P=randi(5,2)
P =
     3     2
    -1    -3
     1    -1
     3     4
     4     4
>> A=matvand(P,2)
```

```

A =  9      6      4      3      2      1
     1      3      9     -1     -3      1
     1     -1      1      1     -1      1
     9     12     16      3      4      1
    16     16     16      4      4      1
>> R=escalona([A,zeros(5,1)])
R =  [1,      0,      0,      0,      0, -35/8,      0]
     [0,      1,      0,      0,      0,  45/8,      0]
     [0,      0,      1,      0,      0,   -2,      0]
     [0,      0,      0,      1,      0, 65/8,      0]
     [0,      0,      0,      0,      1, -39/8,      0]

>> p=poly2sym2([-R(:,6);1],x,y)
p =35/8*x^2-45/8*x*y-65/8*x+1+2*y^2+39/8*y
>> clf,po(P),syms x y,
>> plotci(p,[-5,5],[-5,5])
>> eixos

```



**Observação.** A sua resposta pode ser diferente da que está aqui.

- 1.2.17.** (a) A inversa da operação elementar de trocar duas linhas é ela mesma.
- (b) A inversa da operação elementar de multiplicar uma linha por um escalar,  $\alpha \neq 0$ , é a operação de multiplicar a mesma linha pelo escalar  $1/\alpha$ .
- (c) A inversa de somar à linha  $k$ ,  $\alpha$  vezes a linha  $l$ , é somar à linha  $k$ ,  $-\alpha$  vezes a linha  $l$ .

- 1.2.18.** (a) Basta multiplicar qualquer linha da matriz pelo escalar 1.
- (b) Pelo exercício anterior cada operação elementar,  $e$ , tem uma operação elementar inversa,  $e^{-1}$ , do mesmo tipo que desfaz o que a operação  $e$  fez. Se aplicando as operações elementares  $e_1, \dots, e_k$  na matriz  $A$  chegamos na matriz  $B$ , então aplicando-se as operações elementares  $e_k^{-1}, \dots, e_1^{-1}$  na matriz  $B$  chegamos na matriz  $A$ .
- (c) Se aplicando as operações elementares  $e_1, \dots, e_k$  na matriz  $A$  chegamos na matriz  $B$  e aplicando as operações elementares  $e_{k+1}, \dots, e_l$  na matriz  $B$  chegamos na matriz  $C$ , então aplicando-se as operações elementares  $e_1, \dots, e_l$  na matriz  $A$  chegamos na matriz  $C$ .

## 2.1. Matriz Inversa (página 94)

2.1.1. A matriz é singular, pois o sistema homogêneo tem solução não trivial (Teorema 2.8 na página 84).

2.1.2. (a) 

```
>> A=[1,2,3;1,1,2;0,1,2];
>> B=[A,eye(3)];
>> escalona(B)
[1, 0, 0, 0, 1,-1]
[0, 1, 0, 2,-2,-1]
[0, 0, 1,-1, 1, 1]
```

(b) 

```
[1, 0, 0, 3, 2,-4]
[0, 1, 0,-1, 0, 1]
[0, 0, 1, 0,-1, 1]
```

(c) 

```
[1, 0, 0, 0, 7/3,-1/3,-1/3,-2/3]
[0, 1, 0, 0, 4/9,-1/9,-4/9, 1/9]
[0, 0, 1, 0,-1/9,-2/9, 1/9, 2/9]
[0, 0, 0, 1,-5/3, 2/3, 2/3, 1/3]
```

(d) 

```
[1, 0, 0, 1, -1, 0]
[0, 1, 0, 3/2, 1/2,-3/2]
[0, 0, 1, -1, 0, 1]
```

(e) 

```
[ 1 0 1 1 0 -2 ]
[ 0 1 1 0 0 1 ]
[ 0 0 0 -1 1 1 ]
Continua ? (s/n) n
```

(f) 

```
[1, 0, 0, 1/4, 5/4,-3/4, 1/2, 0]
[0, 1, 0, 1/2,-1/2, 1/2, 0, 0]
[0, 0, 1, 1/4, 1/4, 1/4,-1/2, 0]
[0, 0, 0, 0, -2, -1, -2, 1]
Continua ? (s/n) n
```

2.1.3. 

```
>> syms a
>> A=[1,1,0;1,0,0;1,2,a];
>> escalona(A)
```

```
[ 1 0 0 ]
[ 0 1 0 ]
[ 0 0 a ] Continua ? (s/n) n
```

Para valores de  $a$  diferentes de zero a matriz  $A$  tem inversa.

2.1.4. 

```
>> invA=[3,2;1,3]; invB=[2,5;3,-2];
>> invAB=invB*invA
invAB =      11      19
           7       0
```

2.1.5. 

```
>> invA=[2,3;4,1]; B=[5;3];
>> X=invA*B
X =
    19
    23
```

2.1.6.

$$\begin{aligned}
 A^k &= PD^kP^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} 3^k & (-1)^k \\ -2 \cdot 3^k & 2(-1)^k \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(3^k + (-1)^k) & (-1)^k - 3^k \\ 4((-1)^k - 3^k) & 2(3^k + (-1)^k) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2.1.7. 

```
>> A=[1,2,3;2,1,2;0,1,2];
>> escalona([A,eye(3)])
eliminação 1:
(-2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 2, 3, 1, 0, 0]
[ 0, -3, -4, -2, 1, 0]
[ 0, 1, 2, 0, 0, 1]
eliminação 2:
linha 3 <==> linha 2
[ 1, 2, 3, 1, 0, 0]
[ 0, 1, 2, 0, 0, 1]
[ 0, -3, -4, -2, 1, 0]
(-2)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(3)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1, 1, 0, -2]
[ 0, 1, 2, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 2, -2, 1, 3]
eliminação 3:
(1/2)*linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -1, 1, 0, -2]
[ 0, 1, 2, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 1, -1, 1/2, 3/2]
(1)*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
(-2)*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, 0, 0, 1/2, -1/2]
[ 0, 1, 0, 0, 2, -1]
[ 0, 0, 1, -1, 1/2, 3/2]
```

```
>> I=eye(3);E1=oe(2,1,2,I);E2=oe(I,2,3);...
E3=oe(2,2,1,I);E4=oe(-3,2,3,I);...
E5=oe(2,3,I);E6=oe(-1,3,1,I);E7=oe(2,3,2,I);
>> E1*E2*E3*E4*E5*E6*E7
    1    2    3
    2    1    2
    0    1    2
```

```
2.1.8. >> menc=lerarq('menc1.txt'); key=lerarq('key.txt');
>> y=char2num(menc); M=char2num(key);
>> N=escalona([M,eye(3)])
>> N=N(:,6:10)
>> x=N*y;
>> num2char(x)
ans =
Desejo boa sorte a todos que estudam Álgebra Linear !
>> menc=lerarq('menc2.txt');
>> y=char2num(menc);
>> x=N*y;
>> num2char(x)
ans = Buda tinha este nome por que vivia setado!
```

Deve ser uma matriz com entradas entre 0 e 118 invertível de forma que a sua inversa seja uma matriz com entradas inteiras.

## 2.2. Determinantes (página 120)

2.2.1.  $\det(A^2) = 9$ ;  $\det(A^3) = -27$ ;  $\det(A^{-1}) = -1/3$ ;  $\det(A^t) = -3$ .

2.2.2.  $\det(A^t B^{-1}) = \det(A) / \det(B) = -2/3$ .

2.2.3. (a)  $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + a_{32} \end{bmatrix} =$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{bmatrix} = \det(A) + 0 = 3$$

(b)  $\det \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{11} - a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{22} & a_{21} - a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a_{32} & a_{31} - a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} +$$



$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{12} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -2 \det(A) = -6$$

2.2.4. (a)  $\det \begin{bmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ re^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{bmatrix} =$

$$e^{2rt} \det \begin{bmatrix} 1 & t \\ r & (1+rt) \end{bmatrix} = e^{2rt}$$

(b)  $\det \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ \alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t & \alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ \cos \beta t & \sin \beta t \end{bmatrix} +$

$$\beta \det \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} = \beta$$

2.2.5. (a) 

```
>> A=[1,-2,3,1;5,-9,6,3;-1,2,-6,-2;2,8,6,1];
>> detopelp(A)
eliminação 1:
-5*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
1*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
-2*linha 1 + linha 4 ==> linha 4
[ 1, -2, 3, 1]
[ 0, 1, -9, -2]
[ 0, 0, -3, -1]
[ 0, 12, 0, -1]
eliminação 2:
-12*linha 2 + linha 4 ==> linha 4
[ 1, -2, 3, 1]
[ 0, 1, -9, -2]
[ 0, 0, -3, -1]
[ 0, 0, 108, 23]
eliminação 3:
-1/3*linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2, 3, 1]
[ 0, 1, -9, -2]
[ 0, 0, 1, 1/3]
[ 0, 0, 108, 23]
det(A) = -3*det(A)
-108*linha 3 + linha 4 ==> linha 4
```

```
[ 1, -2, 3, 1]
[ 0, 1, -9, -2]
[ 0, 0, 1, 1/3]
[ 0, 0, 0, -13]
ans = 39
```

```
(b) >> A=[2,1,3,1;1,0,1,1;0,2,1,0;0,1,2,3];
>> detopelp(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 0, 1, 1]
[ 2, 1, 3, 1]
[ 0, 2, 1, 0]
[ 0, 1, 2, 3]
det(A) = (-1)*det(A)
-2*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, 1, 1]
[ 0, 1, 1, -1]
[ 0, 2, 1, 0]
[ 0, 1, 2, 3]
eliminação 2:
-2*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
-1*linha 2 + linha 4 ==> linha 4
[ 1, 0, 1, 1]
[ 0, 1, 1, -1]
[ 0, 0, -1, 2]
[ 0, 0, 1, 4]
eliminação 3:
-1*linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 1, 1]
[ 0, 1, 1, -1]
[ 0, 0, 1, -2]
[ 0, 0, 1, 4]
det(A) = (-1)*(-1)*det(A)
-1*linha 3 + linha 4 ==> linha 4
[ 1, 0, 1, 1]
[ 0, 1, 1, -1]
[ 0, 0, 1, -2]
[ 0, 0, 0, 6]
ans = 6
```

```
2.2.6. (a) >> A=[0,1,2;0,0,3;0,0,0];
>> p=det(A-x*eye(3))
p =-x^3
>> solve(p)
[0] [0] [0]
```

$$(b) \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-x)(3-x)(-2-x) \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-x)(4-5x+x^2) \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8-2x+5x^2-x^3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.2.7. (a) 

```
>> A=[2,0,0;3,-1,0;0,4,3];
>> B=A-x*eye(3);
>> p=det(B)
p=(2-x)*(-1-x)*(3-x)
>> solve(p)
[ 2] [-1] [ 3]
```

$$(b) \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-x)^2(1-x) \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-x)(2-x)(-1-x)(3-x) \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} p \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-x)^2(1-x)^2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.2.8. (a) 

```
>> Bm1=subs(B,x,-1);
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 0]
[0, 1, 1]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

```
>> B2=subs(B,x,2);
>> escalona(B2)
[1, 0, 1/4]
[0, 1, 1/4]
[0, 0, 0]
```

$$\mathbb{W}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\alpha \\ 4\alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

```
>> B3=subs(B,x,3);
>> escalona(B3)
[1, 0, 0]
```

$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{W}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b)  $\begin{bmatrix} 1, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{W}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -3\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{W}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c)  $\begin{bmatrix} 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{W}_{-1} = \{ [ -\alpha \quad \alpha \quad 0 \quad 0 ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{W}_1 = \{ [ \alpha \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 29/3 \\ 0, & 1, & 0, & 7/3 \\ 0, & 0, & 1, & 3 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{W}_2 = \{ [ -29\alpha \quad -7\alpha \quad -9\alpha \quad 3\alpha ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & -9/4, & 0 \\ 0, & 1, & -3/4, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

$$[0, 0, \quad 0, 0]$$

$$\mathbb{W}_3 = \{ [ \begin{smallmatrix} 9\alpha & 3\alpha & 4\alpha & 0 \end{smallmatrix} ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

(d) 
$$\begin{aligned} & [1, 0, -3, 0] \\ & [0, 1, 3, 0] \\ & [0, 0, 0, 1] \\ & [0, 0, 0, 0] \end{aligned}$$

$$\mathbb{W}_1 = \{ [ \begin{smallmatrix} 3\alpha & -3\alpha & \alpha & 0 \end{smallmatrix} ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

$$\begin{aligned} & [0, 1, 0, 0] \\ & [0, 0, 1, 0] \\ & [0, 0, 0, 1] \\ & [0, 0, 0, 0] \end{aligned}$$

$$\mathbb{W}_2 = \{ [ \begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} ]^t \mid \alpha \in \mathbb{R} \}.$$

**2.2.9.** Concluimos que é muito raro encontrar matrizes invertíveis.

### 3.1. Soma de Vetores e Multiplicação por Escalar (página 150)

3.1.1. >>  $OA = [0, -2]$ ;  $OB = [1, 0]$ ;

```
>> AB=OB-OA
AB = 1      2
>> AC=2*AB
AC = 2      4
>> OC=OA+AC
OC = 2      2
```

$C = (2, 2)$ .

3.1.2. Os pontos  $P_1 = (0, 1)$  e  $P_2 = (1, 3)$  são pontos da reta. Assim o vetor  $V = \overrightarrow{P_1P_2} = (1, 2)$  é paralelo a reta.

3.1.3. A inclinação da reta é  $a = \frac{v_2}{v_1} = \frac{3}{2}$ . Assim uma equação da reta tem a forma  $y = \frac{3}{2}x + b$ . Substituindo-se  $x = 1$  e  $y = 2$  obtemos  $b = \frac{1}{2}$ . Uma equação para a reta é  $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ .

3.1.4. A equação  $3X - 2V = 15(X - U)$  é equivalente a  $3X - 2V = 15X - 15U$ . Somando-se  $-15X + 2V$  obtemos  $-15X + 3X = 2V - 15U$  ou  $-12X = 2V - 15U$  multiplicando-se por  $-\frac{1}{12}$  obtemos  $X = \frac{5}{4}U - \frac{1}{6}V$ .

3.1.5. Multiplicando-se a segunda equação por 2 e somando-se a primeira, obtemos  $12X = 3U + 2V$  ou  $X = \frac{1}{4}U + \frac{1}{6}V$ . Substituindo-se  $X$  na primeira equação obtemos,  $\frac{3}{2}U + V - 2Y = U$  ou  $2Y = \frac{1}{2}U + V$  ou  $Y = \frac{1}{4}U + \frac{1}{2}V$ .

3.1.6. >>  $OP = [2, 3, -5]$ ;  $V = [3, 0, -3]$ ;

```
>> OQ=OP+V
OQ = 5      3      -8
Q = (5, 3, -8).
```

3.1.7. >>  $OP = [1, 0, 3]$ ;  $OM = [1, 2, -1]$ ;

```
>> MP=OP-OM;  OPlinha=OM-MP
OPlinha = 1      4      -5
P' = (1, 4, -5).
```

3.1.8. (a) >>  $OA = [5, 1, -3]$ ;  $OB = [0, 3, 4]$ ;  $OC = [0, 3, -5]$ ;

```
>> AB=OB-OA, AC=OC-OA,
AB = -5      2      7
AC = -5      2      -2
```

Os pontos não são colineares, pois  $\overrightarrow{AC} \neq \lambda \overrightarrow{AB}$ .

(b) >>  $OA = [-1, 1, 3]$ ;  $OB = [4, 2, -3]$ ;  $OC = [14, 4, -15]$ ;

```
>> AB=OB-OA, AC=OC-OA,
AB = 5      1      -6
AC = 15      3      -18
```

Os pontos são colineares, pois  $\vec{AC} = 3 \vec{AB}$ .

**3.1.9.** >> OA=[1,-2,-3];OB=[-5,2,-1];OC=[4,0,-1];  
 >> DC=OB-OA, OD=OC-DC  
 DC =     -6     4     2  
 OD =     10     -4     -3  
 O ponto é D = (10,-4,-3).

**3.1.10.** (a) A equação  $xV + yW = U$  é equivalente ao sistema  $\begin{cases} 9x & - & y & = & -4 \\ -12x & + & 7y & = & -6 \\ -6x & + & y & = & 2 \end{cases}$ , cuja matriz aumentada é a matriz que tem colunas  $V, W$  e  $U$ .

>> V=[9,-12,-6];W=[-1,7,1];U=[-4,-6,2];  
 >> escalona([V;W;U]')  
 [     1,     0, -2/3]  
 [     0,     1, -2]  
 [     0,     0,     0]  
 Assim,  $U = -2/3V - 2W$ .

(b) >> V=[5,4,-3];W=[2,1,1];U=[-3,-4,1];  
 >> escalona([V;W;U]')  
 [     1,     0, -5/3]  
 [     0,     1, 8/3]  
 [     0,     0, -20/3]  
 Assim,  $U$  não é combinação linear de  $V$  e  $W$ .

**3.1.11.** Para ser um paralelogramo um dos vetores  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  e  $\vec{AD}$  tem que ser igual a soma dos outros dois.

(a) >> OA=[4,-1,1];OB=[9,-4,2];  
 >> OC=[4,3,4];OD=[4,-21,-14];  
 >> AC=OC-OA  
 AC = 0     4     3  
 >> AB=OB-OA  
 AB = 5     -3     1  
 >> AD=OD-OA  
 AD = 0     -20     -15

Não é um paralelogramo.

(b) Somente o vértice  $D$  é diferente.

>> OD=[9,0,5];  
 >> AD=OD-OA  
 AD = 5     1     4

É um paralelogramo de vértices consecutivos  $A, B, D$  e  $C$ .

**3.1.12.** Resolvendo a equação vetorial  $U = xV$  obtemos que

$$U = (6, -4, -2) = -\frac{2}{3}(-9, 6, 3) = -\frac{2}{3}V.$$

Fazendo o mesmo para  $U = xW$  obtemos que não existe solução, logo somente os vetores  $U$  e  $V$  são paralelos.

### 3.2. Produtos de Vetores (página 191)

**3.2.1.** Um ponto  $P = (x, y)$  pertence a reta se, e somente se,

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot N = 0.$$

ou seja, se, e somente se,

$$(x + 1, y - 1) \cdot (2, 3) = 0$$

ou

$$2x + 3y - 1 = 0$$

**3.2.2.** Uma esfera de raio igual a 2. Se for no espaço é um cilindro de raio igual a 2, se for no plano é uma circunferência de raio igual a 2.

**3.2.3.** >>  $V = [1, 2, -3]$ ;  $W = [2, 1, -2]$ ;  
>>  $Va = (V+W)/\text{no}(V+W)$ ,  $Vb = (V-W)/\text{no}(V-W)$ , ...  
>>  $Vc = (2*V-3*W)/\text{no}(2*V-3*W)$

$$Va = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{43}} & \frac{3}{\sqrt{43}} & -\frac{5}{\sqrt{43}} \end{bmatrix},$$

$$Vb = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix},$$

$$Vc = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} & 0 \end{bmatrix}$$

**3.2.4.** >> `syms x`  
>>  $V = [x, 3, 4]$ ;  $W = [3, 1, 2]$ ;  
>> `solve(pe(V,W))`  
-11/3  
Para  $x = -11/3$ ,  $V$  e  $W$  são perpendiculares.

**3.2.5.** >>  $V = [x, 2, 4]$ ;  $W = [x, -2, 3]$ ;  
>> `pe(V,W)`  
 $x^2 + 8$   
A equação  $x^2 + 8$  não tem solução real.

**3.2.6.** >>  $Va = [2, 1, 0]$ ;  $Wa = [0, 1, -1]$ ;  $Vb = [1, 1, 1]$ ;  
>>  $Wb = [0, -2, -2]$ ;  $Vc = [3, 3, 0]$ ;  $Wc = [2, 1, -2]$ ;  
>>  $\cos VaWa = \text{pe}(Va, Wa) / (\text{no}(Va) * \text{no}(Wa))$ , ...  
>>  $\cos VbWb = \text{pe}(Vb, Wb) / (\text{no}(Vb) * \text{no}(Wb))$ , ...



>>  $\cos VcWc = \text{pe}(Vc, Wc) / (\text{no}(Vc) * \text{no}(Wc))$   
 $\cos VaWa = \frac{1}{10} \sqrt{5} \sqrt{2}$ ,  $\cos VbWb = -\frac{1}{3} \sqrt{3} \sqrt{2}$ ,  $\cos VcWc = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ . O ângulo entre  $Va$  e  $Wa$  é  $\arccos(\sqrt{10}/10)$  entre  $Vb$  e  $Wb$  é  $\arccos(-\sqrt{6}/3)$  e entre  $Vc$  e  $Wc$  é  $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ .

3.2.7. >>  $W = [-1, -3, 2]$ ;  $V = [0, 1, 3]$ ;  
 >>  $W1 = (\text{pe}(W, V) / \text{pe}(V, V)) * V$ ,  $W2 = W - W1$   
 $W1 = \begin{matrix} 0 & 3/10 & 9/10 \end{matrix}$   
 $W2 = \begin{matrix} -1 & -33/10 & 11/10 \end{matrix}$

3.2.8. >>  $V = [2, 2, 1]$ ;  $W = [6, 2, -3]$ ;  
 >>  $X = V / \text{no}(V) + W / \text{no}(W)$ ,  $U = X / \text{no}(X)$   
 $X = [32/21, 20/21, -2/21]$   
 $U = \begin{bmatrix} \frac{16}{357} \sqrt{17} \sqrt{21} & \frac{10}{357} \sqrt{17} \sqrt{21} & -\frac{1}{357} \sqrt{17} \sqrt{21} \end{bmatrix}$

3.2.9. >>  $A = [2, 2, 1]$ ;  $B = [3, 1, 2]$ ;  $C = [2, 3, 0]$ ;  $D = [2, 3, 2]$ ;  
 >>  $M = [B-A; C-A; D-A]$ ,  $\det M = \det(M)$   
 $M = \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \det M = 2$   
 >>  $A = [2, 0, 2]$ ;  $B = [3, 2, 0]$ ;  $C = [0, 2, 1]$ ;  $D = [10, -2, 1]$ ;  
 >>  $M = [B-A; C-A; D-A]$ ,  $\det M = \det(M)$   
 $M = \begin{matrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \end{matrix} \quad \det M = 0$

No item (a) os pontos **não** são coplanares e no item (b) eles são coplanares.

3.2.10. >>  $A = [2, 1, 6]$ ;  $B = [4, 1, 3]$ ;  $C = [1, 3, 2]$ ;  $D = [1, 2, 1]$ ;  
 >>  $M = [B-A; C-A; D-A]$ ,  $\det M = \det(M)$   
 $M = \begin{matrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \end{matrix} \quad \det M = -15$

O volume do paralelepípedo é 15 unidades de vol.

3.2.11. >>  $A = [1, 0, 1]$ ;  $B = [2, 1, 3]$ ;  $C = [3, 2, 4]$ ;  
 >>  $V = \text{pv}(A-B, C-B)$ ,  $\text{norma} = \text{no}(V)$   
 $AD = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \end{matrix}$   
 $\text{norma} = \sqrt{2}$   
 A área do paralelogramo é  $\sqrt{2}$  unidades de área.

3.2.12. >>  $A = [1, 2, 1]$ ;  $B = [3, 0, 4]$ ;  $C = [5, 1, 3]$ ;  
 >>  $V = \text{pv}(B-A, C-A)$ ,  $\text{norma} = \text{no}(V)$   
 $AD = \begin{matrix} -1 & 8 & 6 \end{matrix}$   
 $\text{norma} = \sqrt{101}$   
 A área do triângulo é  $\sqrt{101}/2$  unidades de área.

**3.2.13.**

```
>> syms x y z
>> X=[x,y,z]; V=[1,0,1]; W=[2,2,-2];
>> expr1=pv(X,V)-W, expr2=pe(X,X)-6
expr1 = [ y-2, z-x-2, -y+2]
expr2 = x^2+y^2+z^2-6
>> S=solve(expr1(1),expr1(2),expr1(3),expr2)
S = x: [2x1 sym] y: [2x1 sym] z: [2x1 sym]
>> S.x, S.y, S.z
ans = [ -1] [ -1] ans = [ 2] [ 2] ans = [ 1] [ 1]
Logo, X = (-1,2,1).
```

**3.2.14.**

```
>> X=[x,y,z]; V=[1,1,0]; W=[-1,0,1]; U=[0,1,0];
>> expr1=pe(X,V), expr2=pe(X,W),...
>> expr3=pe(X,X)-3, expr4=pe(X,U)
expr1=x+y,expr2=z-x,expr3=x^2+y^2+z^2-3,expr4=y
>> solve(expr1,expr2,expr3)
S = x: [2x1 sym] y: [2x1 sym] z: [2x1 sym]
>> S.x, S.y, S.z
ans = [ -1] [ 1] ans = [ 1] [ -1] ans = [ -1] [ 1]
Como y tem que ser maior que zero, X = (-1,1,-1).
```

**3.2.15.**

```
>> A=[3,0,2];B=[4,3,0];C=[8,1,-1];
>> pe(B-A,C-A), pe(A-B,C-B), pe(A-C,B-C)
14,0,21
Portanto o ângulo reto está no vértice B.
```

**3.2.16.** (a)

$$\begin{aligned}(xV + yW) \cdot V &= x||V||^2 + yW \cdot V = 20 \\ (xV + yW) \cdot W &= xV \cdot W + y||W||^2 = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}25x + 5y &= 20 \\ 5x + 4y &= 5\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos  $x = 11/15$  e  $y = 1/3$ . Assim

$$X = \frac{11}{15}V + \frac{1}{3}W.$$

(b)

$$\begin{aligned}(xV + yW) \times V &= yW \times V \\ (xV + yW) \cdot W &= xV \cdot W + y||W||^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} yW \times V &= 0 \\ xV \cdot W + y||W||^2 &= 5x + 4y = 12 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos  $x = 12/5$  e  $y = 0$ . Assim

$$X = \frac{12}{5}V.$$

3.2.17.

3.2.18.

3.2.19.

3.2.20. Seja  $AB$  a base do triângulo isosceles e  $M$  o seu ponto médio. Vamos mostrar que  $\vec{CM} \cdot \vec{AB} = 0$ .

$$\begin{aligned} \vec{CM} \cdot \vec{AB} &= \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}) \cdot \vec{AB} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}) \cdot (\vec{CB} - \vec{CA}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{CA} \cdot \vec{CB} - ||\vec{CA}||^2 + \\ &\quad + ||\vec{CB}||^2 - \vec{CB} \cdot \vec{CA}) = 0 \end{aligned}$$

3.2.21. Seja  $AB$  o lado situado no diâmetro da circunferência e  $O$  seu centro. Vamos mostrar que  $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$ .

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= (\vec{CO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{CO} + \vec{OB}) \\ &= ||\vec{CO}||^2 + \vec{CO} \cdot \vec{OB} + \\ &\quad + \vec{OA} \cdot \vec{CO} - ||\vec{OB}||^2 = 0 \end{aligned}$$

3.2.22. Se as diagonais são perpendiculares, então  $(U + V) \cdot (U - V) = 0$ . Mas,

$$(U + V) \cdot (U - V) = ||U||^2 - ||V||^2.$$

Então, os lados adjacentes têm o mesmo comprimento e como ele é um paralelogramos todos os lados têm o mesmo comprimento.

**3.2.23.** Vamos mostrar que  $U \cdot V = 0$ .

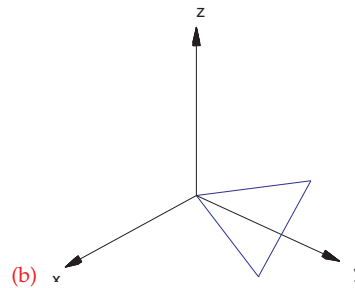
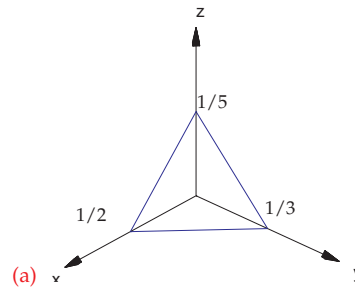
$$||U + V||^2 = ||U||^2 + 2U \cdot V + ||V||^2$$

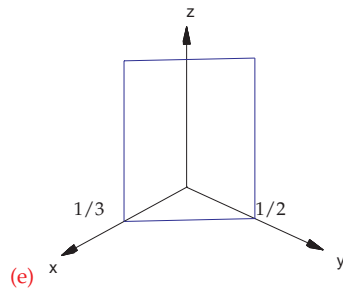
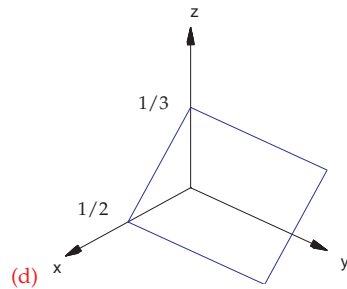
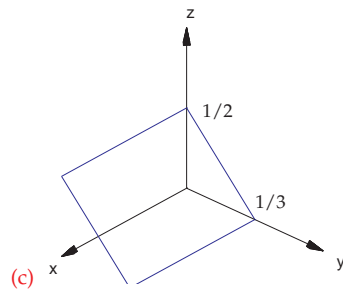
$$||U - V||^2 = ||U||^2 - 2U \cdot V + ||V||^2$$

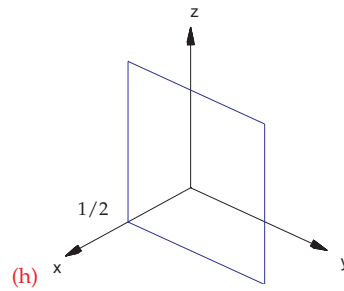
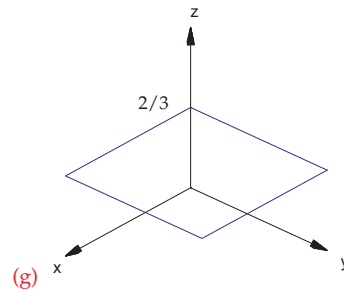
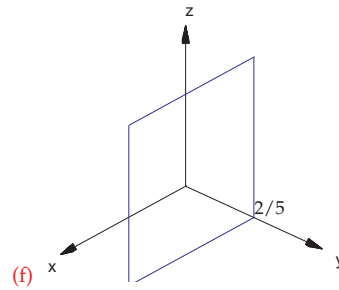
Assim  $||U + V|| = ||U - V||$  implica que  $U \cdot V = 0$ .

## 4.1. Equações de Retas e Planos (página 227)

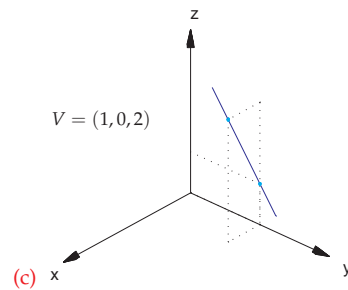
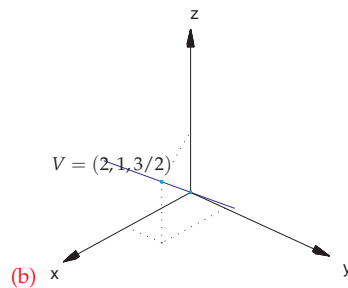
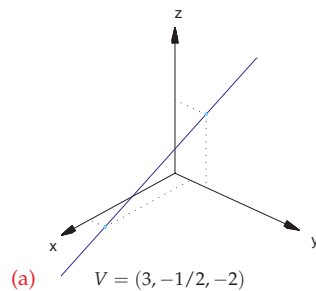
## 4.1.1.



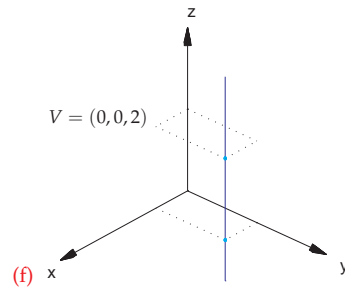
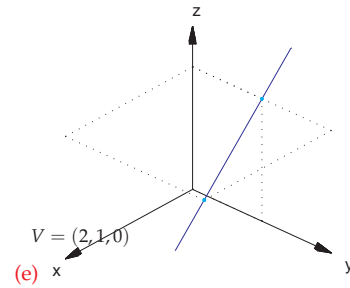
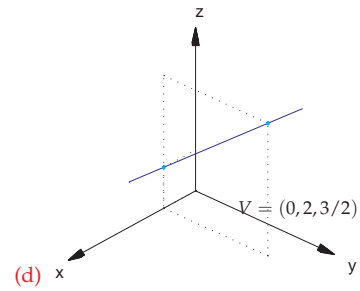


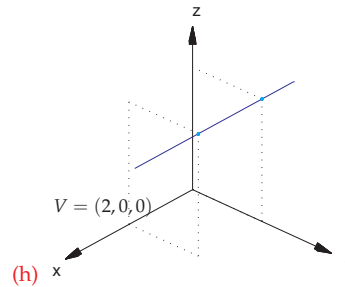
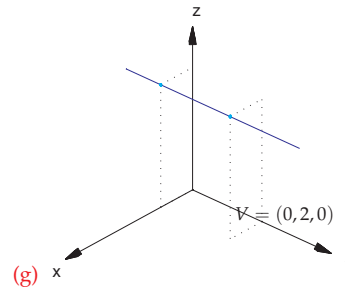


4.1.2.









**4.1.3.** Como o novo plano é paralelo ao plano  $2x - y + 5z - 3 = 0$ , então o vetor  $N = (2, -1, 5)$  é também vetor normal do plano procurado. Assim, a equação dele é  $2x - y + 5z + d = 0$ . Para determinar  $d$  substituímos o ponto  $P = (1, -2, 1)$  na equação do plano:

```
>> syms x y z d
>> expr=2*x-y+5*z+d
expr = 2*x-y+5*z+d
>> subst(expr,[x,y,z],[1,-2,1])
ans = 9+d
```

Assim a equação do plano é  $2x - y + 5z - 9 = 0$ .

**4.1.4.** Os vetores normais dos outros planos,  $N_1 = (1, 2, -3)$  e  $N_2 = (2, -1, 4)$ , são paralelos a ao plano procurado  $\pi$ . Assim o produto vetorial  $N_1 \times N_2$  é um vetor normal a  $\pi$ .

```
>> N1=[1,2,-3];N2=[2,-1,4];
>> N=pv(N1,N2)
```

```
N = 5    -10    -5
```

Assim, a equação de  $\pi$  é  $5x - 10y - 5z + d = 0$ . Para determinar  $d$  substituímos o ponto  $P = (2, 1, 0)$  na equação do plano:

```
>> expr=5*x-10*y-5*z+d
expr = 5*x-10*y-5*z+d
>> subst(expr,[x,y,z],[2,1,0])
ans = d
```

Assim, a equação do plano  $\pi$  é  $5x - 10y - 5z = 0$ .

- 4.1.5.** Como o plano procurado passa pelos pontos  $P = (1, 0, 0)$  e  $Q = (1, 0, 1)$  e é perpendicular ao plano  $y - z = 0$ , então os vetores  $\vec{PQ} = (0, 0, 1)$  e o vetor normal do plano  $y - z = 0$ ,  $N_1 = (0, 1, -1)$  são paralelos ao plano procurado  $\pi$ . Assim o produto vetorial  $\vec{PQ} \times N_1$  é um vetor normal a  $\pi$ .

```
>> PQ=[0,0,1];N1=[0,1,-1];
>> N=pv(PQ,N1)
N = -1    0    0
```

Assim, a equação de  $\pi$  é  $-x + d = 0$ . Para determinar  $d$  substituímos o ponto  $P = (1, 0, 0)$  na equação do plano, obtendo que a equação de  $\pi$  é  $-x + 1 = 0$ .

- 4.1.6.** A equação da reta é  $(x, y, z) = (t, 2t, t)$ . Substituindo-se o ponto da reta na equação do plano obtemos o valor de  $t$

```
>> V=[1,2,1];
>> syms t
>> t=solve(2*t+2*t+t-5)
t = 1
```

Substituindo-se este valor de  $t$  nas equações paramétricas da reta obtemos o ponto  $P = (1, 2, 1)$ .

- 4.1.7.** Um ponto da reta  $r$  é da forma  $P_r = (9t, 1 + 6t, -2 + 3t)$  e um ponto da reta  $s$  é da forma  $P_s = (1 + 2s, 3 + s, 1)$ . As retas se cortam se existem  $t$  e  $s$  tais que  $P_r = P_s$ , ou seja, se o sistema seguinte tem solução

$$\begin{cases} 9t &= 1 + 2s \\ 1 + 6t &= 3 + s \\ -2 + 3t &= 1 \end{cases}$$

```
>> escalona([9,-2,1;6,-1,2;3,0,3])
[ 9, -2,  1]
[  6, -1,  2]
[  3,  0,  3]
eliminação 1:
(1/9)*linha 1 ==> linha 1
[  1, -2/9, 1/9]
```

```

[ 6, -1, 2]
[ 3, 0, 3]
(-6)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(-3)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, -2/9, 1/9]
[ 0, 1/3, 4/3]
[ 0, 2/3, 8/3]
eliminação 2:
(3)*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2/9, 1/9]
[ 0, 1, 4]
[ 0, 2/3, 8/3]
(2/9)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(-2/3)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, 1]
[ 0, 1, 4]
[ 0, 0, 0]

```

A solução do sistema é  $t = 1$  e  $s = 4$ . Substituindo-se ou  $t = 1$  na equação da reta  $r$  ou  $s = 4$  na equação da reta  $s$  obtemos o ponto da interseção  $P = (9, 7, 1)$ .

- 4.1.8.** Os vetores diretores das retas,  $V_1 = (2, 2, 1)$  e  $V_2 = (1, 1, 1)$ , são paralelos ao plano procurado  $\pi$ . Assim, o produto vetorial  $V_1 \times V_2$  é um vetor normal a  $\pi$ .

```

>> V1=[2,2,1]; V2=[1,1,1]; P1=[2,0,0];
>> N=pv(V1,V2)
N = 1 -1 0

```

Assim, a equação de  $\pi$  é  $x - y + d = 0$ . Para determinar  $d$  substituímos o ponto  $P_1 = (2, 2, 1)$  da reta  $r$  na equação do plano:

```

>> expr=x-y+d
expr =x-y+d
>> subst(expr,[x,y,z],P1)
ans =2+d

```

Assim, a equação do plano  $\pi$  é  $x - y - 2 = 0$ .

- 4.1.9.** (a) Substituindo-se o ponto  $P = (4, 1, -1)$  nas equações da reta  $r$  obtemos valores diferentes de  $t$ :

```

>> solve('4=2+t'), solve('1=4-t'),...
>> solve('-1=1+2*t')
ans = 2 ans = 3 ans = -1

```

Logo não existe um valor de  $t$  tal que  $P = (2 + t, 4 - t, 1 + 2t)$ .

- (b) O ponto  $Q = (2, 4, 1)$  é um ponto do plano  $\pi$  procurado. Assim,  $\pi$  é paralelo aos vetores  $\vec{PQ} = (-2, 3, 2)$  e o vetor diretor da

reta  $r$ ,  $V = (1, -1, 2)$ . Logo, o produto vetorial  $\vec{PQ} \times V$  é um vetor normal ao plano  $\pi$ :

```
>> P=[4,1,-1]; Q=[2,4,1]; V=[1,-1,2];
>> PQ=Q-P
PQ = [-2, 3, 2]
>> N=pv(PQ,V)
N =      8      6     -1
expr = 8*x-39+6*y-z
```

Substituindo-se o ponto  $P$  ou o ponto  $Q$  na equação de  $\pi$  obtemos que a equação do plano  $\pi$  é  $8x + 6y - z - 39 = 0$ .

**4.1.10.** O vetor  $N = (-1, 1, -1)$  é normal ao plano. A equação do plano é então  $-x + y - z + d = 0$ . Fazendo  $z = 0$  nas equações dos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  e resolvendo o sistema resultante, obtemos  $x = 0$  e  $y = 1$ . Portanto, o ponto  $P = (0, 1, 0)$  pertence a  $\pi_1$  e a  $\pi_2$ . Substituindo-se o ponto  $P = (0, 1, 0)$  na equação do plano  $-x + y - z + d = 0$  obtemos que a equação procurada é  $x - y + z + 1 = 0$ .

**4.1.11. (a)**

```
>> N1=[1,2,-3]; N2=[1,-4,2]; V=pv(N1,N2)
V =      -8      -5      -6
```

Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é  $V = (-8, -5, -6)$ .

**(b)**

```
>> N1=[2,-1,4]; N2=[4,-2,8]; V=pv(N1,N2)
V =      0      0      0
```

Os planos são paralelos.

**(c)**

```
>> N1=[1,-1,0]; N2=[1,0,1]; V=pv(N1,N2)
V =      -1      -1      1
```

Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é  $V = (-1, -1, 1)$ .

**4.1.12.** O vetor normal ao plano é um vetor diretor da reta procurada. Assim as equações paramétricas de  $r$  são  $(x, y, z) = (1 + t, 2 - t, 1 + 2t)$ .

**4.1.13.** O vetor diretor da reta procurada é ortogonal ao mesmo tempo aos vetores normais dos dois planos, portanto o produto vetorial deles é um vetor diretor da reta procurada.

```
>> pv([2,3,1],[1,-1,1])
      4      -1     -5
```

$(x, y, z) = (1 + 4t, -t, 1 - 5t)$ .

**4.1.14.**

```
>> escalona([1,1,-1,0;2,-1,3,1])
      1      0      2/3      1/3
      0      1     -5/3     -1/3
```

A reta interseção dos planos é  $(x, y, z) = (1/3 - 2/3t, -1/3 + 5/3t, t)$ . O vetor diretor  $V = (-2/3, 5/3, 1)$  desta reta é paralelo ao plano procurado. O ponto  $P = (1/3, -1/3, 0)$  é um ponto da reta e é também portanto um ponto do plano procurado  $\pi$ . O vetor  $\vec{AP}$  é também um vetor paralelo a  $\pi$ . Assim o produto vetorial  $\vec{AP} \times V$  é um vetor normal a  $\pi$ .

```
>> A=[1,0,-1]; P=[1/3,-1/3,0];
>> V=[-2/3,5/3,1];
>> AP=P-A
AP = [-2/3, -1/3, 1]
>> N=pv(AP,V)
N = [-2, 0, -4/3]
```

Substituindo-se o ponto  $A$  ou o ponto  $P$  na equação  $-2x - 4/3z + d = 0$  obtemos a equação do plano  $6x + 4z - 2 = 0$ .

**4.1.15.**

```
>> syms t s
>> A=[0,1,0]; B=[1,1,0]; C=[-3,1,-4]; D=[-1,2,-7];
>> BA=B-A, CD=D-C,
BA = 1 0 0
CD = 2 1 -3
```

$P_r = (t, 1, 0)$  é um ponto qualquer da reta  $r$  e  $P_s = (-3 + 2s, 1 + s, -4 - 3s)$  é um ponto qualquer da reta  $s$ . Precisamos encontrar pontos  $P_r$  e  $P_s$  tais que  $\vec{P_s P_r} = \alpha V$ , ou seja, precisamos encontrar  $t$  e  $s$  tais que  $(t - 2s + 3, -s, 3s + 4) = (\alpha, -5\alpha, -\alpha)$ .

```
>> escalona([1,-2,-1,-3;0,-1,5,0;0,3,1,-4])
[ 1, -2, -1, -3]
[ 0, -1, 5, 0]
[ 0, 3, 1, -4]
eliminação 2:
(-1)*linha 2 ==> linha 2
[ 1, -2, -1, -3]
[ 0, 1, -5, 0]
[ 0, 3, 1, -4]
(2)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(-3)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -11, -3]
[ 0, 1, -5, 0]
[ 0, 0, 16, -4]
eliminação 3:
(1/16)*linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -11, -3]
[ 0, 1, -5, 0]
[ 0, 0, 1, -1/4]
(11)*linha 3 + linha 1 ==> linha 1
(5)*linha 3 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 0, 0, -23/4]
[ 0, 1, 0, -5/4]
```

```

[ 0, 0, 1, -1/4]
Pr0 = [-23/4, 1, 0]
Ps0 = [-11/2, -1/4, -1/4]
V = [1/4, -5/4, -1/4]

```

Encontramos que  $t = -23/4$ ,  $s = -5/4$  e  $\alpha = -1/4$ . Substituindo-se ou  $t = -23/4$  em  $P_r = (t, 1, 0)$  obtemos que a equação da reta é  $(x, y, z) = (-23/4 + t, 1 - 5t, -t)$ .

**4.1.16.** (a) `>> N1=[2,-1,1]; N2=[1,2,-1]; V=pv(N1,N2)`  
`V = -1 3 5`

Os planos se interceptam segundo uma reta que tem vetor diretor  $V = (-1, 3, 5)$ .

```

(b) >> escalona([2,-1,1,0;1,2,-1,1])
[ 2, -1, 1, 0]
[ 1, 2, -1, 1]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1, 2, -1, 1]
[ 2, -1, 1, 0]
(-2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[ 1, 2, -1, 1]
[ 0, -5, 3, -2]
eliminação 2:
(-1/5)*linha 2 ==> linha 2
[ 1, 2, -1, 1]
[ 0, 1, -3/5, 2/5]
(-2)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
[ 1, 0, 1/5, 1/5]
[ 0, 1, -3/5, 2/5]

```

Um ponto qualquer da reta  $r$  é  $P_r = (1/5 - t, 2/5 + 3t, 5t)$ . Vamos determinar o valor de  $t$  tal que  $\vec{AP_r}$  seja perpendicular ao vetor diretor da reta  $r$ .

```

>> syms t
>> Pr=[1/5-t,2/5+3*t,5*t];A=[1,0,1];
>> APr=Pr-A
APr = [ -4/5-t, 2/5+3*t, 5*t-1]
>> expr=pe(APr,[-1,3,5])
expr = -3+35*t
>> t=solve(expr)
t = 3/35

```

Substituindo-se  $t = 3/35$  em  $\vec{AP_r} = (-4/5 - t, 2/5 + 3t, 5t - 1)$ , obtemos o vetor diretor da reta procurada e assim a equação da reta é  $(x, y, z) = (1 - (31/35)t, (23/35)t, 1 - (4/7)t)$ .

```

4.1.17. >> V1=[1,2,-3]; P1=[0,0,0];
>> V2=[2,4,-6]; P2=[0,1,2];
>> pv(V1,V2)
ans = 0 0 0
>> syms x y z; X=[x,y,z];
>> M=[X-P1;V1;P2-P1], expr=det(M)
M = [ x, y, z]
     [ 1, 2, -3]
     [ 0, 1, 2] expr = 7*x-2*y+z

```

Como o produto vetorial de  $V_1$  e  $V_2$  (os dois vetores diretores das retas) é igual ao vetor nulo, então as retas são paralelas. Neste caso, os vetores  $V_1$  e  $\overrightarrow{P_1P_2}$  são não colineares e paralelos ao plano procurado. Assim,  $7x - 2y + z = 0$  é a equação do plano.

```

4.1.18. (a) >> N1=[1,2,-3]; N2=[1,-4,2]; V=pv(N1,N2)
V = -8 -5 -6

```

Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é  $V = (-8, -5, -6)$ . Fazendo  $y = 0$  nas equações obtemos um sistema de duas equações e duas incógnitas cuja solução é  $x = -3, z = 1$ . Assim,  $P_0 = (-3, 0, 1)$  é um ponto da reta e as equações paramétricas da reta são

$$\begin{cases} x = -3 - 8t \\ y = -5t \\ z = 1 - 6t \end{cases} \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

```

(b) >> N1=[1,-1,0]; N2=[1,0,1]; V=pv(N1,N2)
V = -1 -1 1

```

Os planos se interceptam segundo uma reta cujo vetor diretor é  $V = (-1, -1, 1)$ . Claramente  $P_0 = (0, 0, 0)$  é um ponto da reta e as equações paramétricas da reta são

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

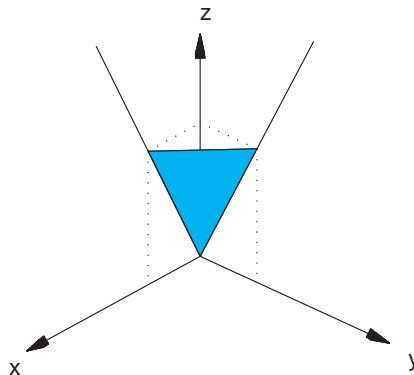
4.1.19. (a)

$$r: (x, y, z) = t(0, 1, 2)$$

$$s: (x, y, z) = t(1, 0, 2)$$

$$t: (x, y, z) = (0, 1, 2) + s(1, -1, 0)$$





(b)  $A = (0, 0, 2)$ ,  $B = (0, 1, 2)$  e  $C = (1, 0, 2)$ .

$$\begin{aligned} \text{vol} &= \frac{1}{6} | \vec{OA} \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC}) | \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(c)  $\text{area} = \frac{1}{2} \| \vec{OB} \times \vec{OC} \| = \frac{1}{2} \| (2, 2, -1) \| = \frac{3}{2}$

(d)

$$h = \text{dist}(\pi, A) = \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{3}.$$

**4.1.20.** (a) Um ponto qualquer da reta  $r_1$  é descrito por  $P_{r_1} = (-1 + t, 2 + 3t, 4t)$  e um ponto qualquer da reta  $r_2$  é da forma  $P_{r_2} =$

$(-1 + s, 1 + 2s, -2 + 3s)$ . Aqui é necessário o uso de um parâmetro diferente para a reta  $r_2$ . O vetor

$$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-2 + s - t, -1 + 2s - 3t, -2 + 3s - 4t)$$

“liga” um ponto qualquer de  $r_1$  a um ponto qualquer de  $r_2$ . Vamos determinar  $t$  e  $s$  tais que o vetor  $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$  seja perpendicular ao vetor diretor  $V_1 = (1, 3, 4)$  de  $r_1$  e ao vetor diretor  $V_2 = (1, 2, 3)$  de  $r_2$ , ou seja, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_1 &= -13 + 19s - 26t &= 0 \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_2 &= -10 + 14s - 19t &= 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é  $t = 8/3, s = 13/3$ . Logo  $P_{r_1} = (11/3, 10, 32/3)$ ,  $P_{r_2} = (10/3, 29/3, 11)$  e  $V_3 = \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-1, -1, 1)$ . Assim as equações paramétricas da reta procurada são

$$r_3 : \begin{cases} x &= 11/3 - t \\ y &= 10 - t, \\ z &= 32/3 + t \end{cases} \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Um ponto qualquer da reta  $r_1$  é descrito por  $P_{r_1} = (-1 + t, 2 + 3t, 4t)$  e um ponto qualquer da reta  $r_2$  é da forma  $P_{r_2} = (s, 4 + 2s, 3 + 3s)$ . Aqui é necessário o uso de um parâmetro diferente para a reta  $r_2$ . O vetor

$$\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (1 + s - t, 2 + 2s - 3t, 3 + 3s - 4t)$$

“liga” um ponto qualquer de  $r_1$  a um ponto qualquer de  $r_2$ . Vamos determinar  $t$  e  $s$  tais que o vetor  $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$  seja perpendicular ao vetor diretor  $V_1 = (1, 3, 4)$  de  $r_1$  e ao vetor diretor  $V_2 = (1, 2, 3)$  de  $r_2$ , ou seja, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_1 &= 19 + 19s - 26t &= 0 \\ \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} \cdot V_2 &= 14 + 14s - 19t &= 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é  $t = 0, s = -1$ . Logo  $P_{r_1} = (-1, 2, 0)$ ,  $P_{r_2} = (-1, 2, 0)$  e  $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (0, 0, 0)$ . Neste caso o vetor  $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}$  não pode ser o vetor diretor da reta procurada. Vamos tomar como vetor diretor da reta procurada o vetor  $V_3 = V_1 \times V_2 = (1, 1, -1)$ .

Assim as equações paramétricas da reta procurada são

$$r_3 : \begin{cases} x &= -1 + t \\ y &= 2 + t, \\ z &= -t \end{cases} \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

## 4.2. Ângulos e Distâncias (página 252)

4.2.1. 

```
>> V=[1,3,2];W=[2,-1,1];U=[1,-2,0];
>> N=pv(W,U), projecao=(pe(V,N)/pe(N,N))*N
N = 2      1      -3      projecao = -1/7  -1/14  3/14
```

4.2.2. 

```
>> N1=[2,-1,1]; N2=[1,-2,1];
>> costh=pe(N1,N2)/(no(N1)*no(N2))
costh = 5/6
>> acos(5/6)*180/pi
ans = 33.5573
```

O ângulo é  $\arccos(5/6) \approx 33,5^\circ$ .

4.2.3. 

```
>> A=[1,1,1];B=[1,0,1];C=[1,1,0];
>> P=[0,0,1];Q=[0,0,0];V=[1,1,0];
>> N1=pv(B-A,C-A), N2=pv(Q-P,V),...
>> costh=pe(N1,N2)/(no(N1)*no(N2))
N1 = 1      0      0,  N2 = 1      -1      0,
costh = 1/2*2^(1/2)
```

O ângulo é  $\arccos(\sqrt{2}/2) = 45^\circ$ .

4.2.4. O vetor diretor da reta procurada  $V = (a, b, c)$  faz ângulo de  $45^\circ$  com o vetor  $\vec{i}$  e  $60^\circ$  com o vetor  $\vec{j}$ . Podemos fixar arbitrariamente a norma do vetor  $V$ . Por exemplo, podemos tomar o vetor  $V$  com norma igual a 2.

$$V = (a, b, c)$$

$$||V||^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

$$\frac{|V \cdot \vec{i}|}{||V||} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \Rightarrow |a| = 1$$

$$\frac{|V \cdot \vec{j}|}{||V||} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \Rightarrow |b| = 1$$

Substituindo-se estes valores em  $a^2 + b^2 + c^2 = 4$ :

$$2 + 1 + c^2 = 4, \Rightarrow |c| = 1$$

Assim, existem aparentemente, oito retas que passam pelo ponto  $P = (1, -2, 3)$  e fazem ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $x$  e  $60^\circ$  com o eixo  $y$ . Elas são  $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(\pm\sqrt{2}, \pm 1, \pm 1)$ . Na verdade existem quatro retas (distintas), pois um vetor diretor e o seu simétrico determinam a mesma reta. Elas são  $(x, y, z) = (1, -2, 3) + t(\sqrt{2}, \pm 1, \pm 1)$ .

```

4.2.5. >> syms t, A=[1,1,0]; V=[0,1,-1]; Pr=[0,t,-t];
>> PrA=A-Pr, expr1=pe(PrA,V)
PrA = [1, 1-t, t] expr1 = 1-2*t
expr2 = 2*(1-t+t^2)^(1/2)
>> expr2=no(PrA)*no(V)
>> solve((expr1/expr2)^2-1/4)
[0] [1]
>> B=subs(Pr,t,0), C=subs(Pr,t,1)
B = [0, 0, 0] C = [0, 1, -1]

```

```

4.2.6. >> A=[1,0,0]; B=[0,1,0]; C=[1,0,1]; O=[0,0,0];
>> N=B-A
-1    2    0
>> dist=abs(pe(N,C-O))/no(N)
dist =1/2^(1/2)

```

A distância é igual a  $1/\sqrt{2}$ .

```

4.2.7. (a) >> syms t s
>> A=[1,0,0]; B=[0,2,0]; V2=[1,2,3]; P2=[2,3,4];
>> Pr1=A+t*(B-A), Pr2=P2+s*V2
Pr1 = [1-t, 2*t, 0] Pr2 = [2+s, 3+2*s, 4+3*s]

```

$P_2 = (1-t, 2t, 0)$  é um ponto qualquer da reta  $r_1$  e  $P_2 = (2+s, 3+2s, 4+3s)$  é um ponto qualquer da reta  $r_2$ . Devemos determinar  $t$  e  $s$  tais que o vetor  $\overrightarrow{P_1 P_2}$  seja perpendicular aos vetores diretores de  $r_1$  e de  $r_2$ .

```

>> Pr1Pr2=Pr2-Pr1
Pr1Pr2 = [1+s+t, 3+2*s-2*t, 4+3*s]
>> expr1=pe(Pr1Pr2,B-A), expr2=pe(Pr1Pr2,V2)
expr1 = 5+3*s-5*t expr2 = 19+14*s-3*t
>> S=solve('5+3*s-5*t','19+14*s-3*t')
>> S.t, S.s
t = 13/61, s = -80/61
>> Pr10=subs(Pr1,t,13/61),
Pr10 = [48/61, 26/61, 0]
>> Pr20=subs(Pr2,s,-80/61)
Pr20 = [42/61, 23/61, 4/61]
>> V=Pr20-Pr10, expr=Pr10*t*V
V = [-6/61, -3/61, 4/61]
expr = [48/61-6/61*t, 26/61-3/61*t, 4/61*t]
A equação da reta é  $(x,y,z) = (48/61 - (6/61)t, 26/61 - (3/61)t, (4/61)t)$ .

```

(b) A distância entre  $r_1$  e  $r_2$  é igual a norma do vetor  $\overrightarrow{P_1 P_2} = (-6/61, -3/61, 4/61)$  que é igual a  $1/\sqrt{61}$ .

```

4.2.8. >> A=[0,2,1]; Pr=[t,2-t,-2+2*t];
>> APr=Pr-A, dist=no(APr)

```

```

APr = [t, -t, -3+2*t]
dist = 3^(1/2)*(2*t^2+3-4*t)^(1/2)
>> solve(dist^2-3)
[1] [1]
>> P=subs(Pr,t,1)
P = [1, 1, 0]

```

A distância de  $A$  até a reta  $r$  é igual a  $\sqrt{3}$ .

```

4.2.9. >> syms t
>> A=[1,1,1]; B=[0,0,1]; Pr=[1+t,t,t];
>> APr=Pr-A, BPr=Pr-B
APr = [t, -1+t, -1+t] BPr = [1+t, t, -1+t]
>> dist1q=pe(APr,APr), dist2q=pe(BPr,BPr)
dist1q = 3*t^2+2-4*t dist2q = 2+3*t^2
>> solve(dist1q-dist2q)
t=0
>> subs(Pr,t,0)
[1, 0, 0]

```

O ponto  $P = (1,0,0)$  é equidistante de  $A$  e  $B$ .

```

4.2.10. >> A=[1,-1,2]; B=[4,3,1]; X=[x,y,z];
>> AX=X-A, BX=X-B,
AX = [x-1, y+1, z-2] BX = [x-4, y-3, z-1]
>> dist1q=pe(AX,AX), dist2q=pe(BX,BX)
dist1q = x^2-2*x+6+y^2+2*y+z^2-4*z
dist2q = x^2-8*x+26+y^2-6*y+z^2-2*z
>> expr=dist1q-dist2q
expr = 6*x-20+8*y-2*z

```

A equação do lugar geométrico é  $6x + 8y - 2z - 20 = 0$ . Este plano passa pelo ponto médio de  $AB$ , pois o ponto médio de  $AB$  é  $M = \vec{OM} = 1/2(\vec{OA} + \vec{OB})$  (Exercício 1.18 na página 156) satisfaz a equação do plano. O plano é perpendicular ao segmento  $AB$ , pois  $N = (6,8,-2)$  é paralelo a  $\vec{AB} = (3,4,-1)$ .

```

4.2.11. >> syms x y z d
>> expr1=2*x+2*y+2*z+d;
>> P1=[0,0,-d/2]; N=[2,2,2]; P=[1,1,1];
>> expr2=abs(pe(P-P1,N))/no(N)
expr2 = 1/6 |6+d| sqrt(3)
>> solve(expr2-sqrt(3),d)
ans = [ 0] [-12]

```

Os planos  $2x + 2y + 2z = 0$  e  $2x + 2y + 2z - 12 = 0$  satisfazem as condições do exercício.

```

4.2.12. >> N2=[1,-2,2]; N3=[3,-5,7];
>> V=pv(N2,N3)
V = -4 -1 1

```

$$N = (a, b, c), N_1 = (1, 0, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|N \cdot N_1|}{\|N\| \|N_1\|} = \cos(\pi/3) \\ \frac{\|N\|^2}{N \cdot V} = \frac{2}{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{2} \\ a^2+b^2+c^2 = 2 \\ -4a-b+c = 0 \end{array} \right.$$

Da 1a. equação (usando a 2a. equação) segue que

$$|a+c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1 - a.$$

Da 3a. equação

$$b = c - 4a = \pm 1 - 5a,$$

Substituindo-se os valores de  $b$  e  $c$  encontrados na 2a. equação:

$$a^2 + (\pm 1 - 5a)^2 + (\pm 1 - a)^2 = 2,$$

$$27a^2 = \pm 12a, \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = \pm 4/9.$$

$$N = (0, 1, 1) \text{ ou } N = (4/9, -11/9, 5/9)$$

Os planos  $y + z = 0$  e  $4x - 11y + 5z = 0$  satisfazem as condições do exercício

**4.2.13.** (a)  $N \cdot V_r = (1, 1, 1) \cdot (1, -1, 0) = 0$

(b) Tomando  $P_\pi = (0, 0, 0)$  e  $P_r = (1, 0, 1)$ :

$$d(r, \pi) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_\pi} \cdot N|}{\|N\|} = \frac{|(1, 0, 1) \cdot (1, 1, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(c) Não. Pois se  $s$  é uma reta reversa à  $r$  contida em  $\pi$ , então

$$d(r, s) = d(r, \pi) = \frac{2}{\sqrt{3}} < 2.$$

**4.2.14.** (a)  $\overrightarrow{AB} = (-7/3, 7/2, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-7/3, -2, 11/6)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (77/12, 77/18, 77/6)$$

$$N_1 = (36/77) \vec{AB} \times \vec{AC} = (3, 2, 6)$$

A equação do plano é  $3x + 2y + 6z - 6 = 0$

(b)  $\vec{DE} = (5/2, -5, 11)$

$$\vec{DE} \times \vec{k} = (-5, -5/2, 0)$$

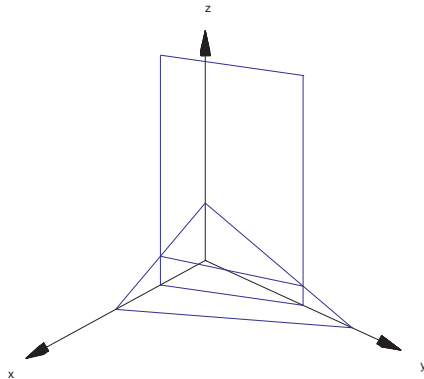
$$N_2 = -(2/5) \vec{DE} \times \vec{k} = (2, 1, 0)$$

A equação do plano é  $2x + y - 2 = 0$

(c)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 2 & 2 \\ 0 & -1/3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix}$

As equações paramétricas da reta são  $(x, y, z) = (-2 + 6t, 6 - 12t, t)$ .

(d)



(e)  $\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{\|N_1\| \|N_2\|} = \frac{8}{7\sqrt{5}}$

(f)  $\vec{OP} = \text{proj}_{N_1} \vec{OA} = \frac{N_1 \cdot \vec{OA}}{\|N_1\|^2} N_1 = \frac{6}{49} (3, 2, 6)$

$$(g) \text{ area} = \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|/2 = \|(77/12, 77/18, 77/6)\|/2 = \frac{77}{72} \|(3, 2, 6)\| = \frac{539}{72}$$



## 5.1. Independência Linear (página 278)

**5.1.1.** Podemos resolver os quatro sistemas de uma única vez.

```
>> v1=[5,-3,1];v2=[0,4,3];v3=[-10,18,7];
>> va=[10,-2,5];vb=[10,2,8];vc=[-2,-1,1];
>> vd=[-1,2,3];
>> A=[v1;v2;v3;va;vb;vc;vd]';
>> escalona(A)
[ 5, 0, -10, 10, 10, -2, -1]
[ -3, 4, 18, -2, 2, -1, 2]
[ 1, 3, 7, 5, 8, 1, 3]
eliminação 1:
linha 3 <==> linha 1
[ 1, 3, 7, 5, 8, 1, 3]
[ -3, 4, 18, -2, 2, -1, 2]
[ 5, 0, -10, 10, 10, -2, -1]
Continua ? (s/n) s
(3)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(-5)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 3, 7, 5, 8, 1, 3]
[ 0, 13, 39, 13, 26, 2, 11]
[ 0, -15, -45, -15, -30, -7, -16]
Continua ? (s/n) s
eliminação 2:
(1/13)*linha 2 ==> linha 2
[ 1, 3, 7, 5, 8, 1, 3]
[ 0, 1, 3, 1, 2, 2/13, 11/13]
[ 0, -15, -45, -15, -30, -7, -16]
Continua ? (s/n) s
(-3)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(15)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -2, 2, 2, 7/13, 6/13]
[ 0, 1, 3, 1, 2, 2/13, 11/13]
[ 0, 0, 0, 0, 0, -61/13, -43/13]
Continua ? (s/n) n
```

Assim, os vetores dos itens (a) e (b) são combinação linear de  $V_1, V_2$  e  $V_3$ , pois os sistemas  $[V_1 \ V_2 \ V_3]X = V$ , para os vetores  $V$  dos itens (a) e (b) têm solução, enquanto para os vetores dos itens (c) e (d) não têm solução.

**5.1.2.** Do escalonamento realizado no item anterior deduzimos que o sistema  $[V_1 \ V_2 \ V_3]X = \vec{0}$  tem solução não trivial. Logo, os vetores  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são L.D. A solução é  $x = 2\alpha, y = -3\alpha$  e  $z = \alpha$ . Escolhendo  $\alpha = 1$  e substituindo os valores de  $x, y$  e  $z$  na equação  $xV_1 + yV_2 + zV_3 = \vec{0}$  obtemos que  $V_3 = -2V_1 + 3V_2$ .

**5.1.3.** (a) `>> v1=[1,1,2];v2=[1,0,0];`

```
>> v3=[4,6,12]
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,3)].'
      1      1      4      0
      1      0      6      0
      2      0     12      0
>> R=escalona(A)
      1      0      6      0
      0      1     -2      0
      0      0      0      0
```

Logo, a equação  $x(1,1,2) + y(1,0,0) + z(4,6,12) = \vec{0}$  admite solução não trivial. Isto implica que os vetores do item (a) são L.D.

```
(b) >> v1=[1,-2,3];v2=[-2,4,-6];
>> A=[v1;v2;zeros(1,3)].'
      1     -2      0
     -2      4      0
      3     -6      0
>> R=escalona(A)
      1     -2      0
      0      0      0
      0      0      0
```

Logo, a equação  $x(1,-2,3) + y(-2,4,-6) = \vec{0}$  admite solução não trivial. Isto implica que os vetores da item (b) são L.D. Observe que o segundo vetor é  $-2$  vezes o primeiro.

```
(c) >> v1=[1,1,1];v2=[2,3,1];
>> v3=[3,1,2];
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,3)].'
      1      2      3      0
      1      3      1      0
      1      1      2      0
>> R=escalona(A)
      1      0      0      0
      0      1      0      0
      0      0      1      0
```

Logo, a equação  $x(1,1,1) + y(2,3,1) + z(3,1,2) = \vec{0}$  só admite a solução trivial. Isto implica que os vetores do item (c) são L.I.

```
(d) >> v1=[4,2,-1];v2=[6,5,-5];v3=[2,-1,3];
>> A=[v1;v2;v3;zeros(1,3)].'
      4      6      2      0
      2      5     -1      0
     -1     -5      3      0
>> R=escalona(A)
      1      0      2      0
```

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Logo, o sistema  $x(4, 2, -1) + y(2, 3, 1) + z(2, -1, 3) = \vec{0}$  admite solução não trivial. Isto implica que os vetores do item (d) são L.D.

```
5.1.4. >> syms a
>> A=[3,1,0;a^2+2,2,0;0,0,0]
A =
[3, a^2+2, 0]
[1,      2, 0]
[0,      0, 0]
>> escalona(A)
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
[ 1      2      0 ]
[          ]
[      2      ]
[ 3  a  + 2  0 ]
[          ]
[ 0      0      0 ]
Continua ? (s/n) s
-(3)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
[ 1      2      0 ]
[          ]
[      2      ]
[ 0  a  - 4  0 ]
[          ]
[ 0      0      0 ]
Continua ? (s/n) n
>> solve(a^2-4)
ans = [ 2] [-2]
```

Para  $\lambda = \pm 2$  o conjunto de vetores é L.D.

5.1.5. (a)  $x_1 W_1 + x_2 W_2 + x_3 W_3 = x_1(V_1 + V_2) + x_2(V_1 + V_3) + x_3(V_2 + V_3) = (x_1 + x_2)V_1 + (x_1 + x_3)V_2 + (x_2 + x_3)V_3 = \vec{0}$ . Como  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são por hipótese L.I., os escalares que os estão multiplicando têm que ser iguais a zero. O que leva ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

```
>> A=[1,1,0;1,0,1;0,1,1]
>> escalona(A)
[ 1, 1, 0]
[ 1, 0, 1]
[ 0, 1, 1]
```

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema e a equação vetorial inicial têm somente a solução trivial  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Portanto os vetores  $W_1, W_2$  e  $W_3$  são L.I.

- (b)  $x_1 W_1 + x_2 W_2 + x_3 W_3 = x_1 V_1 + x_2(V_1 + V_3) + x_3(V_1 + V_2 + V_3) = (x_1 + x_2 + x_3)V_1 + x_3 V_2 + (x_2 + x_3)V_3 = \vec{0}$  Como  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são por hipótese L.I., os escalares que os estão multiplicando têm que ser iguais a zero. O que leva ao sistema 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 Assim, o sistema e a equação vetorial inicial têm somente a solução trivial  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Portanto os vetores  $W_1, W_2$  e  $W_3$  são L.I.

- 5.1.6. (a) 

```
>> syms m,P1=[1,0,2];V1=[2,1,3];
>> P2=[0,1,-1];V2=[1,m,2*m];
>> expr=det([V1;V2;P2-P1])
expr = -9*m+6
>> solve(expr)
ans = 2/3
```

Para  $m = 2/3$  as retas são coplanares.

- (b) Para  $m = 2/3$ , os vetores diretores  $V_1 = (2,1,3)$  e  $V_2 = (1,2/3,4/3)$  são L.I., pois um não é múltiplo escalar do outro. Portanto, as retas são concorrentes.
- (c) 

```
>> syms x y z; P=[x,y,z];
>> V2=subs(V2,m,2/3)
V2 = [ 1, 2/3, 4/3]
>> N=pv(V1,V2)
N = [ -2/3, 1/3, 1/3]
```

Tomando como vetor normal  $-3N = (2, -1, -1)$  a equação do plano é  $2x - y - z + d = 0$ . Para determinar  $d$  substituímos o ponto  $P_1 = (1,0,2)$  na equação do plano:

```
>> subst(2*x-y-z+d,[x,y,z],[1,0,2])
>> ans= d
```

Assim, a equação do plano é  $2x - y - z = 0$ .

- 5.1.7. Precisamos determinar  $m$  para que os vetores  $W = (2, m, 1)$ ,  $V_1 = (1, 2, 0)$  e  $V_2 = (1, 0, 1)$  sejam L.D.

```
>> syms m
>> W=[2,m,1];V1=[1,2,0];V2=[1,0,1];
>> solve(det([W;V1;V2]))
ans = 2
```

Para  $m = 2$  a reta é paralela ao plano. A reta está contida no plano se, e somente se, os vetores  $\overrightarrow{OP_1}, V_1, V_2$  forem L.D., em que  $P_1 = (1, 1, 1)$  é um ponto da reta.

```
>> P1=[1,1,1];
>> det([P1;V1;V2])
ans = -1
```

A reta não está contida no plano.

5.1.8. (a) 

```
>> V1=[1;2;3]; V2=[3;4;5]; V3=[5;6;7];
>> V=randi(3,1)
V =
     0
     4
     3
>> escalona([V1,V2,V3,V])
ans = 1     0    -1     0
      0     1     2     0
      0     0     0     1
```

Assim,  $V$  não é combinação linear de  $V_1, V_2$  e  $V_3$ .

(b) 

```
>> M=randi(3,5)
M = -2    -4     1    -5     5
      3    -3    -3     3     0
     -5    -3    -3    -1    -1
>> escalona([V1,V2,V3,M])
1  0 -1  0  37/13 -101/26 173/26 -96/13
0  1  2  0 -29/13  37/26 -85/26  51/13
0  0  0  1  1/13  -4/13 12/13  -4/13
```

Assim, nenhuma das colunas de  $M$  é combinação linear de  $V_1, V_2$  e  $V_3$ . Como as colunas de  $M$  foram geradas aleatoriamente, o mais provável é que elas não pertençam ao plano gerado por  $V_1, V_2$  e  $V_3$ .

(c)  $V_3 = -V_1 + 2V_2$ , que é a mesma relação que é válida entre as colunas de forma escalonada reduzida da matriz  $[V_1, V_2, V_3, M]$ .

## 5.2. Subespaços Base e Dimensão (página 296)

5.2.1. (a) 

```
>> A=[1,0,1,0,0;1,2,3,1,0;2,1,3,1,0]
      1     0     1     0     0
      1     2     3     1     0
      2     1     3     1     0
>> R=escalona(A)
      1     0     1     0     0
      0     1     1     0     0
      0     0     0     1     0
```

Encontramos a forma reduzida escalonada da matriz  $[A \mid \vec{0}]$ , que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(-\alpha, -\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(-\alpha, -\alpha, \alpha, 0) = \alpha(-1, -1, 1, 0).$$

Logo,  $\{V = (-1, -1, 1, 0)\}$  gera  $\mathbb{W}$ .

```
(b) >> A=[1,1,2,-1,0;2,3,6,-2,0;-2,1,2,2,0]
      1  1  2 -1  0
      2  3  6 -2  0
      -2 1  2  2  0
>> R=escalona(A)
      1  0  0 -1  0
      0  1  2  0  0
      0  0  0  0  0
```

Encontramos a forma reduzida escalonada da matriz  $[A \mid \vec{0}]$ , que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, -2\beta, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$\begin{aligned} (\alpha, -2\beta, \beta, \alpha) &= \\ &= (\alpha, 0, 0, \alpha) + (0, -2\beta, \beta, 0) \\ &= \alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(0, -2, 1, 0). \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V_1 = (1, 0, 0, 1), V_2 = (0, -2, 1, 0)\}$  gera  $\mathbb{W}$ .

```

5.2.2. (a) >> syms x
>> A=[0,0,1;1,0,-3;0,1,3];
>> B=A-x*eye(3)
[-x, 0, 1]
[ 1, -x, -3]
[ 0, 1, 3-x]
>> solve(det(B))
ans = [1] [1] [1]
>> B1=subs(B,x,1)
-1 0 1
1 -1 -3
0 1 2
>> escalona([B1,zeros(3,1)])
1 0 -1 0
0 1 2 0
0 0 0 0

```

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(\alpha, -2\alpha, \alpha) = \alpha(1, -2, 1).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (1, -2, 1)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```

(b) >> A=[2,2,3,4;0,2,3,2;0,0,1,1;0,0,0,1]
>> B=A-x*eye(4)
[2-x, 2, 3, 4]
[ 0, 2-x, 3, 2]
[ 0, 0, 1-x, 1]
[ 0, 0, 0, 1-x]
>> solve(det(B))
ans = [2] [2] [1] [1]
>> B1=subs(B,x,1)
1 2 3 4
0 1 3 2
0 0 0 1
0 0 0 0
>> escalona([B1,zeros(4,1)])
1 0 -3 0 0
0 1 3 0 0

```

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 & & - & 3x_3 & & = & 0 \\ & x_2 & + & 3x_3 & & = & 0 \\ & & & & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(3\alpha, -3\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(3\alpha, -3\alpha, \alpha, 0) = \alpha(3, -3, 1, 0).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (3, -3, 1, 0)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```
>> B2=subs(B,x,2)
      0      2      3      4
      0      0      3      2
      0      0     -1      1
      0      0      0     -1
>> escalona([B2,zeros(4,1)])
      0      1      0      0      0
      0      0      1      0      0
      0      0      0      1      0
      0      0      0      0      0
```

$$\begin{cases} x_2 & & & & = & 0 \\ & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_4 & & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 0, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(\alpha, 0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0, 0).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (1, 0, 0, 0)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```
(c) >> A=[1,1,-2;-1,2,1;0,1,-1]
      >> B=A-x*eye(3)
      [1-x,    1,    -2]
```



```

[ -1, 2-x, 1]
[ 0, 1, -1-x]
>> solve(det(B))
ans = [ 1] [ 2] [-1]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
      2      1      -2
     -1      3      1
      0      1      0
>> escalona([Bm1,zeros(3,1)])
      1      0      -1      0
      0      1      0      0
      0      0      0      0

```

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (1, 0, 1)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```

>> B1=subs(B,x,1)
      0      1      -2
     -1      1      1
      0      1      -2
>> escalona([B1,zeros(3,1)])
      1      0      -3      0
      0      1      -2      0
      0      0      0      0

```

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(3\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(3\alpha, 2\alpha, \alpha) = \alpha(3, 2, 1).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (3, 2, 1)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```
>> B2=subs(B,x,2)
    -1     1    -2
    -1     0     1
     0     1    -3
>> escalona([B2,zeros(3,1)])
     1     0    -1     0
     0     1    -3     0
     0     0     0     0
```

$$\begin{cases} x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 3\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(\alpha, 3\alpha, \alpha) = \alpha(1, 3, 1).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (1, 3, 1)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```
(d) >> A=[-1,2,2,0;-1,2,1,0;-1,1,2,0;0,0,0,1];
>> B=A-x*eye(4)
B =
    [-1-x,     2,     2,     0]
    [-1,    2-x,     1,     0]
    [-1,     1,    2-x,     0]
    [ 0,     0,     0,    1-x]
>> solve(det(B))
ans = [ 1] [ 1] [ 1] [ 1]
>> B1=subs(B,x,1);
>> escalona(B1)
    [-2,  2,  2,  0]
    [-1,  1,  1,  0]
    [-1,  1,  1,  0]
    [ 0,  0,  0,  0]
eliminação 1:
linha 2 <==> linha 1
    [-1,  1,  1,  0]
    [-2,  2,  2,  0]
    [-1,  1,  1,  0]
    [ 0,  0,  0,  0]
(-1)*linha 1 ==> linha 1
    [ 1, -1, -1,  0]
    [-2,  2,  2,  0]
```

```

[ -1,  1,  1,  0]
[  0,  0,  0,  0]
(2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(1)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[  1, -1, -1,  0]
[  0,  0,  0,  0]
[  0,  0,  0,  0]
[  0,  0,  0,  0]

```

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\beta + \gamma, \gamma, \beta, \alpha) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(\beta + \gamma, \gamma, \beta, \alpha) = \alpha(0, 0, 0, 1) + \beta(1, 0, 1, 0) + \gamma(1, 1, 0, 0).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V_1 = (0, 0, 0, 1), V_2 = (1, 0, 1, 0), V_3 = (1, 1, 0, 0)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 0) &= (\beta + \gamma, \gamma, \beta, \alpha) \\ &= \alpha(0, 0, 0, 1) + \beta(1, 0, 1, 0) + \gamma(1, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

implica que  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```

(e) >> A=[2,3,0;0,1,0;0,0,2]
>> B=A-x*eye(3)
B = [ 2-x,  3,  0]
     [  0, 1-x,  0]
     [  0,  0, 2-x]
>> solve(det(B))
[ 2] [ 2] [ 1]
>> B1=subs(B,x,1)
B1 = [ 1, 3, 0]
     [ 0, 0, 0]
     [ 0, 0, 1]

```

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(-3\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(-3\alpha, \alpha, 0) = \alpha(-3, 1, 0).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (-3, 1, 0)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```
>> B2=subs(B,x,2)
B2 = [ 0, 3, 0]
      [ 0, -1, 0]
      [ 0, 0, 0]
```

$$\begin{cases} 3x_2 & = & 0 \\ -x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(\alpha, 0, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V_1 = (1, 0, 0), V_2 = (0, 0, 1)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um vetor não é múltiplo escalar do outro, o conjunto  $\mathcal{B}$  é L.I. Assim,  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```
(f) >> A=[2,3,0;0,2,0;0,0,2]
>> B=A-x*eye(3)
B = [ 2-x, 3, 0]
      [ 0, 2-x, 0]
      [ 0, 0, 2-x]
>> solve(det(B))
[ 2] [ 2] [ 2]
>> B2=subs(B,x,2)
B2 = [ 0, 3, 0]
      [ 0, 0, 0]
      [ 0, 0, 0]
```

$$\begin{cases} 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(\alpha, 0, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V_1 = (1, 0, 0), V_2 = (0, 0, 1)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um vetor não é múltiplo escalar do outro, o conjunto  $\mathcal{B}$  é L.I. Assim,  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

5.2.3. 

```
>> N1=[1,-7,5];
>> N2=[3,-1,1];
>> V=pv(N1,N2)
V =      -2    14    20
```

A equação paramétrica da reta interseção dos dois subespaços é  $(x, y, z) = t(-2, 14, 20)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim,  $\{V = (-2, 14, 20)\}$  é uma base para a reta.

5.2.4. (a) 

```
>> v1=[4,2,-3];v2=[2,1,-2];v3=[-2,-1,0];
>> escalona([v1;v2;v3;zeros(1,3)]')
[ 4,  2, -2,  0]
[  2,  1, -1,  0]
[ -3, -2,  0,  0]
eliminação 1:
(1/4)*linha 1 ==> linha 1
[  1, 1/2, -1/2,  0]
[  2,  1,  -1,  0]
[ -3, -2,  0,  0]
(-2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(3)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[  1, 1/2, -1/2,  0]
[  0,  0,  0,  0]
[  0, -1/2, -3/2,  0]
eliminação 2:
linha 3 <==> linha 2
[  1, 1/2, -1/2,  0]
[  0, -1/2, -3/2,  0]
[  0,  0,  0,  0]
(-2)*linha 2 ==> linha 2
[  1, 1/2, -1/2,  0]
[  0,  1,  3,  0]
[  0,  0,  0,  0]
(-1/2)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
[  1,  0, -2,  0]
[  0,  1,  3,  0]
[  0,  0,  0,  0]
```

Os vetores  $V_1, V_2$  e  $V_3$  são L.D., pois a equação  $xV_1 + yV_2 + zV_3 = \vec{0}$  admite solução não trivial.

- (b) Os vetores  $V_1$  e  $V_2$  são L.I. pois um vetor não é múltiplo escalar do outro.
- (c) Do item (a) obtemos que a solução de  $xV_1 + yV_2 + zV_3 = \vec{0}$  é  $(x, y, z) = (2\alpha, -3\alpha, \alpha)$ . Tomando  $\alpha = 1$  obtemos  $2V_1 - 3V_2 + V_3 = \vec{0}$ , ou seja,  $V_3 = -2V_1 + 3V_2$ . Logo,  $V_3$  não é necessário para gerar o subespaço gerado por  $V_1, V_2$  e  $V_3$ . Como pelo item

anterior  $V_1$  e  $V_2$  são L.I., então  $V_1$  e  $V_2$  formam uma base para o subespaço gerado por  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  e a dimensão é 2.

- (d) É o plano que passa pela origem paralelo aos vetores  $V_1$  e  $V_2$  ou

$$\gg \text{pv}(v1, v2) \\ \begin{matrix} -1 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Este subespaço é um plano que passa pela origem com vetor normal  $N = V_1 \times V_2 = (-1, 2, 0)$ , ou seja, é o plano  $x - 2y = 0$ .

- 5.2.5.** (a) Não, pois basta tomarmos um vetor que não está no subespaço gerado por  $V_1$  e  $V_2$  (que é um plano que passa pela origem), que ele não será combinação linear de  $V_1$  e  $V_2$ .
- (b) Para que  $V_1, V_2$  e  $V_3$  formem uma base de  $\mathbb{R}^3$  basta que  $V_1, V_2$  e  $V_3$  sejam L.I. Para isso  $V_3 = (a, b, c)$  deve ser um vetor que não seja combinação linear de  $V_1$  e  $V_2$ .
- (c) Devemos acrescentar um vetor  $V_3$  que não seja combinação linear de  $V_1$  e  $V_2$ . Por exemplo  $V_3 = (0, 0, 1)$ . Como a dimensão do  $\mathbb{R}^3$  é igual a 3, então pelo **Teorema 5.7 na página 291**  $V_3 = (0, 0, 1)$ , é tal que  $V_1, V_2$  e  $V_3$  formam uma base de  $\mathbb{R}^3$ .

- 5.2.6.** Fazendo  $z = \alpha$  e  $y = \beta$  na equação do plano obtemos que

$$x = -2\beta - 4\alpha.$$

Assim, os pontos do plano  $x + 2y + 4z = 0$  são da forma

$$(x, y, z) = (-2\beta - 4\alpha, \beta, \alpha), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

ou seja, são da forma

$$(x, y, z) = \alpha(-4, 0, 1) + \beta(-2, 1, 0) = \alpha V_1 + \beta V_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

em que  $V_1 = (-4, 0, 1)$  e  $V_2 = (-2, 1, 0)$ .

Assim,  $V_1$  e  $V_2$  formam uma base do plano  $\mathbb{W}$ , pois são L.I. (um não é múltiplo escalar do outro) e geram  $\mathbb{W}$  (todo vetor de  $\mathbb{W}$  é combinação linear deles).

Para estender  $V_1$  e  $V_2$  a uma base de  $\mathbb{R}^3$ , precisamos acrescentar um vetor que não seja combinação linear de  $V_1$  e  $V_2$ . Uma maneira de se conseguir isso é tomar um vetor que não pertença ao plano, ou seja, um vetor  $(a, b, c)$  tal que  $a + 2b + 4c \neq 0$ . Por exemplo  $V_3 = (1, 0, 0)$ .

- 5.2.7.**  $\gg V1=[-1,2,3]; V2=[1,3,4];$   
 $\gg N1=\text{pv}(V1,V2)$   
 $N1 = \begin{matrix} -1 & 7 & -5 \end{matrix}$   
 $\gg V3=[1,2,-1]; V4=[0,1,1];$   
 $\gg N2=\text{pv}(V3,V4)$   
 $N2 = \begin{matrix} 3 & -1 & 1 \end{matrix}$

```
>> V=pv(N1,N2)
V =
     2    -14    -20
```

A reta interseção dos dois subespaços é  $(x, y, z) = t(2, -14, -20)$ , para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ . Uma base para a reta é  $\{V = (2, -14, -20)\}$ .

### 5.2.8. (a)

$$\begin{aligned} V &= (3a + 4b - 4c, 2a - 4b - 6c, -2a - 4b + 2c) \\ &= (3a, 2a, -2a) + (4b, -4b, -4b) + (-4c, -6c, 2c) \\ &= a(3, 2, -2) + b(4, -4, -4) + c(-4, -6, 2). \end{aligned}$$

Logo, definindo  $V_1 = (3, 2, -2)$ ,  $V_2 = (4, -4, -4)$  e  $V_3 = (-4, -6, 2)$ , então  $\{V_1, V_2, V_3\}$  gera  $\mathbb{V}$ .

```
(b) >> V1=[3,2,-2]; V2=[4,-4,-4]; V3=[-4,-6,2];
>> escalona([V1;V2;V3]')
[ 3, 4, -4]
[ 2, -4, -6]
[-2, -4, 2]
eliminação 1:
(1/3)*linha 1 ==> linha 1
[ 1, 4/3, -4/3]
[ 2, -4, -6]
[-2, -4, 2]
(-2)*linha 1 + linha 2 ==> linha 2
(2)*linha 1 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 4/3, -4/3]
[ 0, -20/3, -10/3]
[ 0, -4/3, -2/3]
eliminação 2:
(-3/20)*linha 2 ==> linha 2
[ 1, 4/3, -4/3]
[ 0, 1, 1/2]
[ 0, -4/3, -2/3]
(-4/3)*linha 2 + linha 1 ==> linha 1
(4/3)*linha 2 + linha 3 ==> linha 3
[ 1, 0, -2]
[ 0, 1, 1/2]
[ 0, 0, 0]
```

A solução de  $xV_1 + yV_2 + zV_3 = \vec{0}$  é  $(x, y, z) = (2\alpha, \alpha/2, \alpha)$ . Tomando  $\alpha = 2$  obtemos  $4V_1 + V_2 + 2V_3 = \vec{0}$ . Ou seja,  $V_2 = -2V_3 - 4V_1$ .

Assim o vetor  $V_2$  pode ser descartado na geração de  $\mathbb{V}$ , pois ele é combinação linear dos outros dois. Logo, apenas  $V_1$  e  $V_3$

são suficientes para gerar  $\mathbb{V}$ . Como além disso, os vetores  $V_1$  e  $V_3$  são tais que um não é múltiplo escalar do outro, então eles são L.I. e portanto  $\{V_1, V_3\}$  é uma base de  $\mathbb{V}$ . Também  $\{V_1, V_2\}$  ou  $\{V_2, V_3\}$  são bases.

- 5.2.9. (a) Não pois são necessários 4 vetores L.I. para se obter uma base de  $\mathbb{R}^4$  (Teorema 5.7 na página 291).  
 (b)  $V_3$  e  $V_4$  devem ser L.I. e não pertencerem ao subespaço gerado por  $V_1$  e  $V_2$ .  
 (c) Escalonando a matriz cujas linhas são  $V_1$  e  $V_2$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

obtemos

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Acrescentando as linhas  $V_3 = [0\ 0\ 1\ 0]$  e  $V_4 = [0\ 0\ 0\ 1]$ :

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos verificar que  $V_1, V_2, V_3$  e  $V_4$  são L.I.

$$x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3 + x_4 V_4 = \vec{0}$$

é equivalente ao sistema  $CX = \vec{0}$ , em que  $C = [V_1\ V_2\ V_3\ V_4]$ . Mas como  $\det(\bar{R}) \neq 0$  então  $\det(C) \neq 0$ , pelo Teorema 2.13 na página 109, pois  $\bar{R}$  pode ser obtida de  $C^t$  aplicando-se operações elementares. Logo  $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$  é L.I. Como a dimensão do  $\mathbb{R}^4$  é igual a 4, então pelo Teorema 5.7 na página 291  $V_1, V_2, V_3, V_4$  formam uma base de  $\mathbb{R}^4$ .

```
5.2.10. >> A=triu(randi(4,4,3))
A = -1    -2     1     1
      0     2    -2    -2
      0     0    -1     2
      0     0     0     0
>> B=A-x*eye(4)
B =
[ -1-x,    -2,     1,     1]
[   0,   2-x,    -2,    -2]
[   0,     0,  -1-x,     2]
[   0,     0,     0,   -x]
>> solve(det(B))
```



```

[ -1] [ -1] [  2] [  0]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
Bm1 =
[  0, -2,  1,  1]
[  0,  3, -2, -2]
[  0,  0,  0,  2]
[  0,  0,  0,  1]
>> escalona(Bm1)
[ 0, 1, 0, 0]
[ 0, 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0, 1]
[ 0, 0, 0, 0]

```

$$\begin{cases} x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(\alpha, 0, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(\alpha, 0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0, 0).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (1, 0, 0, 0)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```

>> B2=subs(B,x,2)
B2 =
[ -3, -2,  1,  1]
[  0,  0, -2, -2]
[  0,  0, -3,  2]
[  0,  0,  0, -2]
>> escalona(B2)
[  1, 2/3,  0,  0]
[  0,  0,  1,  0]
[  0,  0,  0,  1]
[  0,  0,  0,  0]

```

$$\begin{cases} x_1 + 2/3x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(-2\alpha, 3\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(-2\alpha, 3\alpha, 0, 0) = \alpha(-2, 3, 0, 0).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (-2, 3, 0, 0)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

```
>> B0=subs(B,x,0)
B0 =
[ -1, -2,  1,  1]
[  0,  2, -2, -2]
[  0,  0, -1,  2]
[  0,  0,  0,  0]
>> escalona(B0)
[ 1,  0,  0,  3]
[ 0,  1,  0, -3]
[ 0,  0,  1, -2]
[ 0,  0,  0,  0]
```

$$\begin{cases} x_1 & & & 3x_4 & = & 0 \\ & x_2 & & -3x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(-3\alpha, 3\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(-3\alpha, 3\alpha, 2\alpha, \alpha) = \alpha(-3, 3, 2, 1).$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{V = (-3, 3, 2, 1)\}$  gera  $\mathbb{W}$ . Como um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I., então  $\mathcal{B}$  é base para  $\mathbb{W}$ .

### 5.3. Produto Escalar em $\mathbb{R}^n$ (página 329)

```
5.3.1. >> syms a
>> x=[1,1,-2];y=[a,-1,2];
>> solve(pe(x,y))
ans = 5
```

```
5.3.2. >> syms a b
>> x=[1/2^(1/2),0,1/2^(1/2)];y=[a,1/2^(1/2),-b];
>> sol=solve(pe(x,y),no(y)-1)
```

```
sol =
  a: [2x1 sym]
  b: [2x1 sym]
>> sol.a, sol.b
ans = [ 1/2] [ -1/2] ans = [ 1/2] [ -1/2]
```

**5.3.3.** O conjunto dado consiste dos vetores da forma:

$$\begin{aligned}(-\alpha - \beta, \beta, \alpha) &= (-\alpha, 0, \alpha) + (-\beta, \beta, 0) \\ &= \alpha(-1, 0, 1) + \beta(-1, 1, 0)\end{aligned}$$

```
>> v1=[-1,0,1];v2=[-1,1,0];
>> w1=v1; w2=v2-proj(w1,v2);
>> u1=w1/no(w1), u2=w2/no(w2)
```

$$\begin{aligned}u_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ u_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

**5.3.4.** O conjunto dado consiste dos vetores da forma:

$$\begin{aligned}(-\alpha + 2\beta + \gamma, \gamma, \beta, \alpha) &= \\ (-\alpha, 0, 0, \alpha) + (2\beta, 0, \beta, 0) + (\gamma, \gamma, 0, 0) &= \\ \alpha(-1, 0, 0, 1) + \beta(2, 0, 1, 0) + \gamma(1, 1, 0, 0)\end{aligned}$$

```
>> v1=[-1,0,0,1];v2=[2,0,1,0];v3=[1,1,0,0];
>> w1=v1; w2=v2-proj(w1,v2);
>> w3=v3-proj(w1,v3)-proj(w2,v3);
>> u1=w1/no(w1), u2=w2/no(w2), u3=w3/no(w3)
```

$$\begin{aligned}u_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ u_2 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ u_3 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{42}\sqrt{42} & \frac{1}{7}\sqrt{42} & -\frac{1}{21}\sqrt{42} & \frac{1}{42}\sqrt{42} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

**5.3.5.** >> A=[1,1,-1,0;2,1,2,0];  
>> escalona(A)  
1 0 3 0  
0 1 -4 0

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tem como solução geral

$$\mathbb{W} = \{(-3\alpha, 4\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Agora, para qualquer elemento de  $\mathbb{W}$  temos:

$$(-3\alpha, 4\alpha, \alpha) = \alpha(-3, 4, 1).$$

Um conjunto formado por um único vetor não nulo é sempre L.I.

```
>> v=[-3,4,1];
```

```
>> u=v/no(v)
```

$$u = \begin{bmatrix} -\frac{3}{26} \sqrt{26} & \frac{2}{13} \sqrt{26} & \frac{1}{26} \sqrt{26} \end{bmatrix}$$

```
5.3.6. >> V1=[1,2,-3]; P1=[0,0,0];
>> V2=[2,4,-6]; P2=[0,1,2];
>> pv(V1,V2)
ans = 0 0 0
>> syms x y z; X=[x,y,z];
>> M=[X-P1;V1;P2-P1], expr=det(M)
M =
[ x, y, z]
[ 1, 2, -3]
[ 0, 1, 2]
expr = 7*x-2*y+z
```

Como o produto vetorial de  $V_1$  e  $V_2$  (os dois vetores diretores das retas) é igual ao vetor nulo, então as retas são paralelas. Neste caso, os vetores  $V_1$  e  $P_1P_2$  são não colineares e paralelos ao plano procurado. Assim,  $7x - 2y + z = 0$  é a equação do plano, que passa pela origem, logo é um subespaço. Este subespaço consiste dos vetores da forma:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, -7\alpha + 2\beta) &= (\alpha, 0, -7\alpha) + (0, \beta, 2\beta) \\ &= \alpha(1, 0, -7) + \beta(0, 1, 2) \end{aligned}$$

```
>> V1=[1,0,-7];V2=[0,1,2];
>> W1=V1; W2=V2-proj(W1,V2)
W2 = [ 7/25, 1, 1/25]
>> U1=W1/no(W1), U2=W2/no(W2)
U1 = [ 1/10, 0, -7/10]
U2 = [ 7/45, 5/9, 1/45]
```

```
5.3.7. >> v1=[1,1,-1,0];v2=[0,2,0,1];v3=[-1,0,0,1];
>> w1=v1; w2=v2-proj(w1,v2)
w2 = [-2/3, 4/3, 2/3, 1]
```

```
>> w3=v3-proj(w1,v3)-proj(w2,v3)
w3 = [-4/11, -3/11, -7/11, 6/11]
>> u1=w1/no(w1),u2=w2/no(w2),u3=w3/no(w3)
```

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \sqrt{3} & \frac{1}{3} \sqrt{3} & -\frac{1}{3} \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{33} \sqrt{11} \sqrt{3} & \frac{4}{33} \sqrt{11} \sqrt{3} & \frac{2}{33} \sqrt{11} \sqrt{3} & \frac{1}{11} \sqrt{11} \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{55} \sqrt{110} & -\frac{3}{110} \sqrt{110} & -\frac{7}{110} \sqrt{110} & \frac{3}{55} \sqrt{110} \end{bmatrix}$$

5.3.8. >> v1=[1,1,1];v2=[0,1,1];v3=[1,2,3];  
 >> w1=v1; w2=v2-proj(w1,v2)  
 w2 = [-2/3, 1/3, 1/3]  
 >> w3=v3-proj(w1,v3)-proj(w2,v3)  
 w3 = [0, -1/2, 1/2]  
 >> u1=w1/no(w1),u2=w2/no(w2),u3=w3/no(w3)

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \sqrt{3} & \frac{1}{3} \sqrt{3} & \frac{1}{3} \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \sqrt{2} \sqrt{3} & \frac{1}{6} \sqrt{2} \sqrt{3} & \frac{1}{6} \sqrt{2} \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

5.3.9. >> syms x y z d  
 >> expr1=2\*x+2\*y+2\*z+d;  
 >> P1=[0,0,-d/2]; N=[2,2,2]; P=[1,1,1];  
 >> expr2=abs(pe(P-P1,N))/no(N)

$$\text{expr2} = 1/6 |6 + d| \sqrt{3}$$

```
>> solve(expr2-sqrt(3),d)
ans = [ 0] [-12]
```

Os planos  $2x + 2y + 2z = 0$  e  $2x + 2y + 2z - 12 = 0$  satisfazem as condições do exercício. Apenas o primeiro plano é um subespaço. Este subespaço consiste dos vetores da forma:

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, -\alpha - \beta) &= (\alpha, 0, -\alpha) + (0, \beta, -\beta) \\ &= \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) \end{aligned}$$

```
>> V1=[1,0,-1];V2=[0,1,-1];
>> W1=V1; W2=V2-proj(W1,V2)
W2 = [ -1/2, 1, -1/2]
>> U1=W1/||W1|| U2=W2/||W2||
U1 = [ 1/2*sqrt(2) 0 -1/2*sqrt(2) ]
U2 = [ -1/6*sqrt(3)*sqrt(2) 1/3*sqrt(3)*sqrt(2) -1/6*sqrt(3)*sqrt(2) ] .
```

## 5.4. Mudança de Coordenadas (página 342)

5.4.1. (a) 

```
>> v1=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2)]);
>> v2=sym([1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> p=[1,3];
>> A=[v1;v2;p].';
>> escalona(A)
[1, 0, -2^(1/2)]
[0, 1, 2*2^(1/2)]
```

Assim, as coordenadas de  $P$  em relação ao sistema  $S$  são:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(b) 

```
>> v1=sym([1/sqrt(2),-1/sqrt(2),0]);
>> v2=sym([0,0,1]);
>> v3=sym([1/sqrt(2),1/sqrt(2),0]);
>> p=[2,-1,2]; A=[v1;v2;v3;p].';
>> escalona(A)
[ 1, 0, 0, 3/2*2^(1/2)]
[ 0, 1, 0, 2]
[ 0, 0, 1, 1/2*2^(1/2)]
```

Assim, as coordenadas de  $P$  em relação ao sistema  $S$  são:

$$\begin{bmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ 2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

5.4.2. (a) 

```
>> v1=sym([-1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> v2=sym([1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> v=2*v1+v2
[ -sqrt(2)/2 3*sqrt(2)/2 ]
```

```
(b) >> v1=sym([0,1/sqrt(2),-1/sqrt(2)]);
>> v2=sym([1,0,0]);
>> v3=sym([0,1/sqrt(2),1/sqrt(2)]);
>> v=-v1+v2+2*v3
v =
      3      1      3
[ 1  sqrt(2)/2  3*sqrt(2)/2 ]
```

**5.4.3.** As coordenadas de  $U_1, U_2$  e  $U_3$  em relação ao sistema  $\mathcal{S} = \{O, U_1, U_2, U_3\}$  são dadas por  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , respectivamente. Assim,  $U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$  e  $U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

```
5.4.4. >> p=sym([sqrt(3),1]).'; pr=sym([sqrt(3),-1]).';
>> A=[cos(th),-sin(th);sin(th),cos(th)];
>> expr=A*pr-p
expr = [ cos(th)*3^(1/2)+sin(th)-3^(1/2)
        sin(th)*3^(1/2)-cos(th)-1]
>> solve(expr(1,1),expr(2,1),th)
ans = 1/3*pi
```

A rotação é de  $\pi/3$ .

**5.4.5.** (a) Fazendo  $z = 0$  obtemos  $3x - \sqrt{3}y = 0$ . Tomando  $x = \sqrt{3}$ , obtemos  $y = 3$ . Assim podemos tomar como primeiro vetor da base do plano.

$$V_1 = (\sqrt{3}, 3, 0).$$

Fazendo  $y = 0$  obtemos  $3x + 2z = 0$ . Tomando  $x = -2$ , obtemos  $z = 3$ . Assim podemos tomar como segundo vetor da base do plano

$$V_2 = (-2, 0, 3).$$

Agora vamos encontrar uma base ortogonal do plano

$$W_1 = V_1 = (\sqrt{3}, 3, 0)$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2 \\
 &= (-2, 0, 3) - \frac{-2\sqrt{3}}{12}(\sqrt{3}, 3, 0) \\
 &= \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right) = \frac{1}{2}(-3, \sqrt{3}, 6)
 \end{aligned}$$

- (b) Para completar a uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  basta completarmos com o vetor normal do plano  $W_3 = (3, -\sqrt{3}, 2)$ . Assim a base ortonormal do  $\mathbb{R}^3$  é

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}, 3, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\
 U_2 &= \frac{1}{4\sqrt{3}}(-3, \sqrt{3}, 6) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
 U_3 &= \frac{1}{4}(3, -\sqrt{3}, 2) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

- (c) Seja

$$\begin{aligned}
 Q &= [U_1 \ U_2 \ U_3] \\
 X &= QX' \quad X' = Q^t X \\
 [\vec{i}]_{\{O, U_1, U_2, U_3\}} &= Q^t [1 \ 0 \ 0]^t = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right) \\
 [\vec{j}]_{\{O, U_1, U_2, U_3\}} &= Q^t [0 \ 1 \ 0]^t = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\
 [\vec{k}]_{\{O, U_1, U_2, U_3\}} &= Q^t [0 \ 0 \ 1]^t = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

#### 5.4.6.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



## 6.1. Diagonalização de Matrizes (página 380)

## 6.1.1.

```
(a) >> A=[1,1;1,1];
>> B=A-x*eye(2)
[1-x, 1]
[ 1, 1-x]
>> p=det(B)
p =-2*x+x^2
>> solve(p)
[0] [2]
>> B0=subs(B,x,0)
[1, 1]
[1, 1]
>> escalona(B0)
1 1
0 0
>> B2=subs(B,x,2)
[-1, 1]
[ 1, -1]
>> escalona(B2)
1 -1
0 0
```

$$\mathbb{V}_0 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(c)

```
>> A=[0,1,2;0,0,3;0,0,0];
>> B=A-x*eye(3)
[-x, 1, 2]
[ 0, -x, 3]
[ 0, 0, -x]
>> p=det(B)
p=-x^3
>> solve(p)
[0] [0] [0]
```

$$\mathbb{V}_0 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(d)

```
(b) >> A=[1,-1;2,4];
>> B=A-x*eye(2)
[1-x, -1]
[ 2, 4-x]
>> p=det(B)
p =6-5*x+x^2
>> solve(p)
[3] [2]
>> B2=subs(B,x,2)
[-1, -1]
[ 2, 2]
>> escalona(B2)
1 1
0 0
>> B3=subs(B,x,3)
[-2, -1]
[ 2, 1]
>> escalona(B3)
1 1/2
0 0
```

$$\mathbb{V}_2 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_3 = \{(-\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

```
>> B0=subs(B,x,0)
[0, 1, 2]
[0, 0, 3]
[0, 0, 0]
>> escalona(B0)
[0, 1, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

```

>> A=[1,0,0;-1,3,0;3,2,-2];
>> B=A-x*eye(3)
[1-x, 0, 0]
[-1, 3-x, 0]
[ 3, 2, -2-x]
>> p=det(B)
p=(1-x)*(3-x)*(-2-x)
>> solve(p)
[ 1][ 3][ -2]
>> B1=subst(B,x,1)
[ 0, 0, 0]
[-1, 2, 0]
[ 3, 2, -3]
>> escalona(B1)
[1, 0, -3/4]
[0, 1, -3/8]
[0, 0, 0]

>> Bm2=subs(B,x,-2)
[ 3, 0, 0]
[-1, 5, 0]
[ 3, 2, 0]
>> escalona(Bm2)
[1, 0, 0]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]

>> B3=subs(B,x,3)
[-2, 0, 0]
[-1, 0, 0]
[ 3, 2, -5]
>> escalona(B3)
[1, 0, 0]
[0, 1, -5/2]
[0, 0, 0]

```

$$\mathbb{V}_{-2} = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_1 = \{(6\alpha, 3\alpha, 8\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_3 = \{(0, 5\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(e)

```

>> A=[2,-2,3;0,3,-2;0,-1,2];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x, -2, 3]
[ 0, 3-x, -2]
[ 0, -1, 2-x]
>> p=det(B)
p=(2-x)*(4-5*x+x^2)
>> solve(p)
[2][4][1]
>> B1=subs(B,x,1)
[1, -2, 3]
[0, 2, -2]
[0, -1, 1]
>> escalona(B1)
[1, 0, 1]
[0, 1, -1]
[0, 0, 0]

>> B2=subs(B,x,2)
[0, -2, 3]
[0, 1, -2]
[0, -1, 0]
>> escalona(B2)
[0, 1, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]

>> B4=subs(B,x,4)
[-2, -2, 3]
[ 0, -1, -2]
[ 0, -1, -2]
>> escalona(B4)
[1, 0, -7/2]
[0, 1, 2]
[0, 0, 0]

```

$$\mathbb{V}_1 = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V}_4 = \{(7\alpha, -4\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(f)

```

>> A=[2,2,3;1,2,1;2,-2,1];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x, 2, 3]
[ 1, 2-x, 1]
[ 2, -2, 1-x]
>> p=det(B)
p =-8-2*x+5*x^2-x^3
>> solve(p)
[ 2] [ 4] [-1]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[3, 2, 3]
[1, 3, 1]
[2, -2, 2]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]

>> B2=subs(B,x,2)
[0, 2, 3]
[1, 0, 1]
[2, -2, -1]
>> escalona(B2)
[1, 0, 1]
[0, 1, 3/2]
[0, 0, 0]
>> B4=subs(B,x,4)
[-2, 2, 3]
[ 1, -2, 1]
[ 2, -2, -3]
>> escalona(B4)
[1, 0, -4]
[0, 1, -5/2]
[0, 0, 0]

```

$$\mathbb{V}_{-1} = \{(-\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{V}_2 = \{(-2\alpha, -3\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ e } \mathbb{V}_4 = \{(8\alpha, 5\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

6.1.2. (a)

```

>> A=[2,0,0;3,-1,0;0,4,3];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x, 0, 0]
[ 3, -1-x, 0]
[ 0, 4, 3-x]
>> p=det(B)
p =(2-x)*(-1-x)*(3-x)
>> solve(p)
[ 2] [-1] [ 3]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[3, 0, 0]
[3, 0, 0]
[0, 4, 4]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 0]
[0, 1, 1]
[0, 0, 0]

>> B2=subs(B,x,2)
[0, 0, 0]
[3, -3, 0]
[0, 4, 1]
>> escalona(B2)
[1, 0, 1/4]
[0, 1, 1/4]
[0, 0, 0]
>> B3=subst(B,x,3)
[-1, 0, 0]
[ 3, -4, 0]
[ 0, 4, 0]
>> escalona(B3)
[1, 0, 0]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]

```

$\mathbb{V}_{-1} = \{(0, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(0, -1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_{-1}$ , pois gera  $\mathbb{V}_{-1}$  ( $(0, -\alpha, \alpha) = \alpha(0, -1, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(-\alpha, -\alpha, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(-1, -1, 4)\}$  é base para  $\mathbb{V}_2$ , pois gera  $\mathbb{V}_2$  ( $(-\alpha, -\alpha, 4\alpha) = \alpha(-1, -1, 4)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_3 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(0, 0, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_3$ , pois gera  $\mathbb{V}_3$  ( $(0, 0, \alpha) = \alpha(0, 0, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

(b)

```
>> A=[2,3,0;0,1,0;0,0,2];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x, 3, 0]
[ 0, 1-x, 0]
[ 0, 0, 2-x]
>> p=det(B)
p =(2-x)^2*(1-x)
>> solve(p)
[2] [2] [1]
>> B1=subs(B,x,1)
[1, 3, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 1]
>> escalona(B1)
[1, 3, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
>> B2=subs(B,x,2)
[0, 3, 0]
[0, -1, 0]
[0, 0, 0]
>> escalona(B2)
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(-3\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(-3, 1, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  ( $(-3\alpha, \alpha, 0) = \alpha(-3, 1, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, 0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_1 = (1, 0, 0), V_2 = (0, 0, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_2$ , pois gera  $\mathbb{V}_2$  ( $(\alpha, 0, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1)$ ) e é L.I. ( $xV_1 + yV_2 = \vec{0}$  se, e somente se,  $(x, 0, y) = (0, 0, 0)$  ou  $x = 0$  e  $y = 0$ ).

(c)

```
>> A=[1,2,3,4;0,-1,3,2;0,0,3,3;0,0,0,2];
>> B=A-x*eye(4)
[1-x, 2, 3, 4]
[ 0, -1-x, 3, 2]
[ 0, 0, 3-x, 3]
[ 0, 0, 0, 2-x]
>> p=det(B)
p =(1-x)*(2-x)*(-1-x)*(3-x)
>> solve(p)
[ 1] [ 2] [-1] [ 3]
```

```
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[2, 2, 3, 4]
[0, 0, 3, 2]
[0, 0, 4, 3]
[0, 0, 0, 3]
>> escalona(Bm1)
[1, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> B2=subs(B,x,2)
[-1, 2, 3, 4]
[ 0, -3, 3, 2]
[ 0, 0, 1, 3]
[ 0, 0, 0, 0]
>> escalona(B2)
[1, 0, 0, 29/3]
[0, 1, 0, 7/3]
[0, 0, 1, 3]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[0, 2, 3, 4]
[0, -2, 3, 2]
[0, 0, 2, 3]
[0, 0, 0, 1]
>> escalona(B1)
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> B3=subst(B,x,3)
[-2, 2, 3, 4]
[ 0, -4, 3, 2]
[ 0, 0, 0, 3]
[ 0, 0, 0, -1]
>> escalona(B3)
[1, 0, -9/4, 0]
[0, 1, -3/4, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_{-1} = \{(-\alpha, \alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(-1, 1, 0, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_{-1}$ , pois gera  $\mathbb{V}_{-1}$  ( $(-\alpha, \alpha, 0, 0) = \alpha(-1, 1, 0, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, 0, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(1, 0, 0, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  ( $(\alpha, 0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(-29\alpha, -7\alpha, -9\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(-29, -7, -9, 3)\}$  é base para  $\mathbb{V}_2$ , pois gera  $\mathbb{V}_2$  ( $(-29\alpha, -7\alpha, -9\alpha, 3\alpha) = \alpha(-29, -7, -9, 3)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_3 = \{(9\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(9, 3, 4, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_3$ , pois gera  $\mathbb{V}_3$  ( $(9\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 0) = \alpha(9, 3, 4, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

(d)

```
>> A=[2,2,3,4;0,2,3,2;0,0,1,1;0,0,0,1];
>> B=A-x*eye(4)
[2-x, 2, 3, 4]
[ 0, 2-x, 3, 2]
[ 0, 0, 1-x, 1]
[ 0, 0, 0, 1-x]
>> p=det(B)
p =(2-x)^2*(1-x)^2
>> solve(p)
[2][2][1][1]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[1, 2, 3, 4]
[0, 1, 3, 2]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
>> escalona(B1)
[1, 0, -3, 0]
[0, 1, 3, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(3\alpha, -3\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(3, -3, 1, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  ( $(3\alpha, -3\alpha, \alpha, 0) = \alpha(3, -3, 1, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, 0, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(1, 0, 0, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_2$ , pois gera  $\mathbb{V}_2$  ( $(\alpha, 0, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

### 6.1.3.

```
(a) >> A=[1,4;1,-2];
>> B=A-x*eye(2)
[1-x, 4]
[ 1, -2-x]
```

```
>> p=det(B)
p =-6+x+x^2
>> solve(p)
[ 2] [-3]
```

A matriz  $A$  possui dois autovalores diferentes, logo possui dois autovetores L.I. (Proposição 6.4 na página 371). A matriz  $A$  é diagonalizável pois, é  $2 \times 2$  e possui dois autovetores L.I. (Teorema 6.3 na página 367).

```
(b) >> A=[1,0;-2,1];
>> B=A-x*eye(2)
[1-x, 0]
[-2, 1-x]
>> p=det(B)
p =(1-x)^2
>> solve(p)
[1] [1]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[ 0, 0]
[-2, 0]
>> escalona(numeric(B1))
[1, 0]
[0, 0]
```

$$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

A matriz  $A$  não é diagonalizável pois, não possui dois autovetores L.I. (Teorema 6.3 na página 367).

```
(c) >> A=[1,1,-2;4,0,4;1,-1,4]
A =      1      1      -2
      4      0      4
      1     -1      4
>> B=A-x*eye(3); p=det(B)
p =5*x^2-6*x-x^3
>> solve(p)
ans = [0] [2] [3]
```

A matriz  $A$  possui três autovalores diferentes, logo possui três autovetores L.I. (Proposição 6.4 na página 371). A matriz  $A$  é diagonalizável pois, é  $3 \times 3$  e possui três autovetores L.I. (Teorema 6.3 na página 367).

```
(d) >> A=[1,2,3;0,-1,2;0,0,2];
>> B=A-x*eye(3)
[1-x, 2, 3]
[ 0, -1-x, 2]
[ 0, 0, 2-x]
>> p=det(B)
p =(1-x)*(-1-x)*(2-x)
>> solve(p)
[ 1] [-1] [ 2]
```

A matriz  $A$  possui três autovalores diferentes, logo possui três autovetores L.I. (Proposição 6.4 na página 371). A matriz  $A$  é diagonalizável pois, é  $3 \times 3$  e possui três autovetores L.I. (Teorema 6.3 na página 367).

## 6.1.4.

```
(a) >> A=[1,1,2;0,1,0;0,1,3];
>> B=A-x*eye(3)
[1-x, 1, 2]
[ 0, 1-x, 0]
[ 0, 1, 3-x]
>> p=det(B)
p =(1-x)^2*(3-x)
>> solve(p)
[1] [1] [3]

>> B1=subs(B,x,1)
[0, 1, 2]
[0, 0, 0]
[1, 1, 2]
>> escalona(B1)
[ 0, 1, 2]
[ 0, 0, 0]
[ 0, 0, 0]

>> B3=subs(B,x,3)
[-2, 1, 2]
[ 0, -2, 0]
[ 0, 1, 0]
>> escalona(B3)
[ 1, 0, -1]
[ 0, 1, 0]
[ 0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(\beta, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(1, 0, 0), (0, -2, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  ( $(\beta, -2\alpha, \alpha) = \alpha(0, -2, 1) + \beta(1, 0, 0)$ ) e são L.I. (um vetor não é múltiplo escalar do outro)

$\mathbb{V}_3 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(1, 0, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_3$ , pois gera  $\mathbb{V}_3$  ( $(\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
(b) >> A=[4,2,3;2,1,2;-1,-2,0];
>> B=A-x*eye(3)
[4-x, 2, 3]
[ 2, 1-x, 2]
```

```
[ -1, -2, -x]
>> p=det(B)
p =-7*x+5*x^2+3-x^3
>> solve(p)
[3] [1] [1]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[ 3,  2,  3]
[ 2,  0,  2]
[-1, -2, -1]
>> escalona(B1)
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

```
>> B3=subs(B,x,3)
[ 1,  2,  3]
[ 2, -2,  2]
[-1, -2, -3]
>> escalona(B3)
[1, 0, 5/3]
[0, 1, 2/3]
[0, 0,  0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(-\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(-1, 0, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  ( $(-\alpha, 0, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(-5\alpha, -2\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(-5, -2, 3)\}$  é base para  $\mathbb{V}_2$ , pois gera  $\mathbb{V}_2$  ( $(-5\alpha, -2\alpha, 3\alpha) = \alpha(-5, -2, 3)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

A matriz não é diagonalizável pois só possui dois autovalores e cada um deles só possui um autovetor L.I. associado ([Teorema 6.3 na página 367](#)).

(c) >> A=[1,2,3;0,1,0;2,1,2];

```
>> B=A-x*eye(3)
[1-x,  2,  3]
[  0, 1-x,  0]
[  2,  1, 2-x]
>> p=det(B)
p =-4+x+4*x^2-x^3
>> solve(p)
[ 1] [ 4] [-1]
>> B1=subst(B,x,1)
[0, 2, 3]
[0, 0, 0]
[2, 1, 1]
>> escalona(B1)
[1, 0, -1/4]
[0, 1, 3/2]
[0, 0,  0]
```

```
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[2, 2, 3]
[0, 2, 0]
[2, 1, 3]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 3/2]
[0, 1,  0]
[0, 0,  0]
```

```
>> B4=subs(B,x,4)
[-3, 2, 3]
[ 0, -3, 0]
[ 2,  1, -2]
>> escalona(B4)
[1, 0, -1]
[0, 1,  0]
[0, 0,  0]
```

$\mathbb{V}_{-1} = \{(-3\alpha, 0, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(-3, 0, 2)\}$  é base para  $\mathbb{V}_{-1}$ , pois gera  $\mathbb{V}_{-1}$  ( $(-3\alpha, 0, 2\alpha) = \alpha(-3, 0, 2)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, -6\alpha, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(1, -6, 4)\}$  é base para  $\mathbb{V}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  ( $(\alpha, -6\alpha, 4\alpha) = \alpha(1, -6, 4)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_4 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(1, 0, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_4$ , pois gera  $\mathbb{V}_4$  ( $(\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I.



$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(d) >> A=[3,-2,1;0,2,0;0,0,0];
>> B=A-x*eye(3)
[3-x, -2, 1]
[ 0, 2-x, 0]
[ 0, 0, -x]
>> p=det(B)
p = -(3-x)*(2-x)*x
>> solve(p)
[3] [2] [0]
>> B2=subs(B,x,2)
[1, -2, 1]
[0, 0, 0]
[0, 0, -2]
>> escalona(B2)
[1, -2, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

```
>> B0=subs(B,x,0)
[3, -2, 1]
[0, 2, 0]
[0, 0, 0]
>> escalona(B0)
[1, 0, 1/3]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
>> B3=subs(B,x,3)
[0, -2, 1]
[0, -1, 0]
[0, 0, -3]
>> escalona(B3)
[0, 1, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_0 = \{(-\alpha, 0, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(-1, 0, 3)\}$  é base para  $\mathbb{V}_0$ , pois gera  $\mathbb{V}_0$  ( $(-\alpha, 0, 3\alpha) = \alpha(-1, 0, 3)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_2 = \{(2\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(2, 1, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_2$ , pois gera  $\mathbb{V}_2$  ( $(2\alpha, \alpha, 0) = \alpha(2, 1, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$\mathbb{V}_3 = \{(\alpha, 0, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{(1, 0, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_3$ , pois gera  $\mathbb{V}_3$  ( $(\alpha, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
6.1.5. (a) >> V1=[-4,-4,-1]';
>> V2=[5,4,1]';
>> V3=[5,3,1]';
>> A=sym([-1/3,-5/6,20/3;-2/3,-1/6,16/3;-1/6,-1/6,11/6]);
>> [A*V1,A*V2,A*V3]
[ -2, 5/3, 5/2]
[ -2, 4/3, 3/2]
[ -1/2, 1/3, 1/2]
```

Se  $V$  é autovetor de  $A$  então  $AV = \lambda V$ , ou seja,  $AV$  é um múltiplo escalar de  $V$ . Assim, concluímos que  $V_1$  é autovetor associado a  $\lambda_1 = 1/2$ ,  $V_2$  é autovetor associado a  $\lambda_2 = 1/3$  e  $V_3$  é autovetor associado a  $\lambda_3 = 1/2$ .

- (b)  $V_1$  e  $V_3$  são autovetores associados a  $1/2$  e  $V_2$  associado a  $1/3$ . Como  $\{V_1, V_3\}$  é L.I. (um não é múltiplo escalar do outro) e ao juntarmos autovetores L.I. associados a diferentes autovalores eles continuam L.I., então a matriz  $A$  tem 3 autovetores L.I. Como ela é  $3 \times 3$ , é portanto diagonalizável.

## 6.1.6.

6.1.7. >> B=randi(2), A=[B-B',zeros(2,1);zeros(1,2),randi]

```
B = 5 -1
    3 0
A = 0 -4 0
    4 0 0
    0 0 -3
>> syms x, p=det(A-x*eye(3)), solve(p)
p = -3*x^2-x^3-48-16*x
ans = [ -3] [ 4*i] [ -4*i]
>> escalona(A+3*eye(3))
ans = [ 1, 0, 0]
      [ 0, 1, 0]
      [ 0, 0, 0]
```

A matriz  $A$  não é diagonalizável pois ela só tem um autovalor e auto espaço associado a este autovalor tem dimensão 2. Assim, não é possível encontrar 3 autovetores L.I.

6.1.8. >> L=[eye(2),zeros(2,1);randi(1,2),0]; A=L\*L'

```
A = 1 0 2
    0 1 -2
    2 -2 8
>> syms x, p=det(A-x*eye(3)), solve(p)
p = -9*x+10*x^2-x^3
ans = [ 0] [ 1] [ 9]
>> escalona(A)
ans = [ 1, 0, 2]
      [ 0, 1, -2]
      [ 0, 0, 0]
```

O autoespaço associado ao autovalor  $\lambda = 0$  é

$$\mathbb{V}_0 = \{(-2\alpha, 2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim,  $\{V_1 = (-2, 2, 1)\}$  é um conjunto com o maior número possível de autovetores L.I. associado a  $\lambda = 0$ .

```
>> escalona(A-eye(3))
ans = [ 1, -1, 0]
      [ 0, 0, 1]
      [ 0, 0, 0]
```

O autoespaço associado ao autovalor  $\lambda = 1$  é

$$\mathbb{V}_1 = \{(\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim,  $\{V_2 = (1, 1, 0)\}$  é um conjunto com o maior número possível de autovetores L.I. associado a  $\lambda = 1$ .

```
>> escalona(A-9*eye(3))
ans = [ 1, 0, -1/4]
      [ 0, 1, 1/4]
      [ 0, 0, 0]
```

O autoespaço associado ao autovalor  $\lambda = 9$  é

$$\mathbb{V}_9 = \{(\alpha, -\alpha, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Assim,  $\{V_3 = (1, -1, 4)\}$  é um conjunto com o maior número possível de autovetores L.I. associado a  $\lambda = 9$ .

```
>> V1=[-2,2,1];V2=[1,1,0];V3=[1,-1,4];
>> P=[V1',V2',V3']; D=diag([0,1,9])
P = -2 1 1
     2 1 -1
     1 0 4
D = 0 0 0
    0 1 0
    0 0 9
>> inv(P)*A*P
ans = 0 0 0
      0 1 0
      0 0 9
>> [P,D]=eig(sym(A))
P = [-1, -2, 1]
     [ 1, 2, 1]
     [-4, 1, 0]
D = [ 9, 0, 0]
     [ 0, 0, 0]
     [ 0, 0, 1]
```

Os elementos da diagonal da matriz  $D$  têm que ser os autovalores de  $A$ . As matrizes  $D$  podem diferir na ordem com que os autovalores aparecem. As colunas de  $P$  são autovetores associados aos autovalores que aparecem nas colunas correspondentes de  $D$ . Assim, fazendo uma reordenação das colunas das matrizes  $P$  e  $D$  de forma que as matrizes  $D$  sejam iguais, as colunas de uma matriz  $P$  são múltiplos escalares das colunas correspondentes da outra matriz  $P$ .

## 6.2. Diagonalização de Matrizes Simétricas (página 397)

### 6.2.1.

```
(a) >> A=[2,2;2,2];
>> B=A-x*eye(2)
     [2-x, 2]
     [ 2, 2-x]
>> p=det(B)
```

```
p = -4*x + x^2
>> solve(p)
[0] [4]
```

```
>> B0=subs(B,x,0)
[2, 2]
[2, 2]
>> escalona(B0)
[1, 1]
[0, 0]
```

```
>> B4=subs(B,x,4)
[-2, 2]
[ 2, -2]
>> escalona(B4)
[1, -1]
[0, 0]
```

$\mathbb{V}_0 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_1 = (-1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_0$ , pois gera  $\mathbb{V}_0$  ( $(-\alpha, \alpha) = \alpha(-1, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $W_1 = (1/\|V_1\|)V_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{W_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_0$ .

$\mathbb{V}_4 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_2 = (1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_4$ , pois gera  $\mathbb{V}_4$  ( $(\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $W_2 = (1/\|V_2\|)V_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{W_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_4$ .

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(b) >> A=[2,1;1,2];
>> B=A-x*eye(2)
[2-x, 1]
[ 1, 2-x]
>> p=det(B)
p = 3-4*x + x^2
>> solve(p)
[3] [1]
```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[1, 1]
[1, 1]
>> escalona(numeric(B1))
[1, 1]
[0, 0]
```

```
>> B3=subs(B,x,3)
[-1, 1]
[ 1, -1]
>> escalona(B3)
[1, -1]
[0, 0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_1 = (-1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  ( $(-\alpha, \alpha) = \alpha(-1, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $W_1 = (1/\|V_1\|)V_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{W_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_1$ .

$\mathbb{V}_3 = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_2 = (1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_3$ , pois gera  $\mathbb{V}_3$  ( $(\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $W_2 = (1/\|V_2\|)V_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{W_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_3$ .

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
(c) >> A=[0,0,1;0,0,0;1,0,0];
>> B=A-x*eye(3)
[-x, 0, 1]
[ 0, -x, 0]
[ 1, 0, -x]
>> p=det(B)
p =-x^3+x
>> solve(p)
[ 0] [-1] [ 1]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[1, 0, 1]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 1]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
V0 = {(0, α, 0) | α ∈ ℝ}. {V1 = (0, 1, 0)} é base para V0, pois gera V0 ((0, α, 0) = α(0, 1, 0)) e um vetor não nulo é L.I.
{V1 = (0, 1, 0)} é base ortonormal de V0, pois ||V1|| = 1.
```

```
>> B0=subs(B,x,0)
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
[1, 0, 0]
>> escalona(B0)
[1, 0, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
>> B1=subs(B,x,1)
[-1, 0, 1]
[ 0, -1, 0]
[ 1, 0, -1]
>> escalona(B1)
[1, 0, -1]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

$V_{-1} = \{(-\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_2 = (-1, 0, 1)\}$  é base para  $V_{-1}$ , pois gera  $V_{-1}$  ( $(-\alpha, 0, \alpha) = \alpha(-1, 0, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $W_2 = (1/\|V_2\|)V_2 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ .  $\{W_2 = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $V_{-1}$ .

$V_1 = \{(\alpha, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_3 = (1, 0, 1)\}$  é base para  $V_1$ , pois gera  $V_1$  ( $(\alpha, 0, \alpha) = \alpha(1, 0, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $W_3 = (1/\|V_3\|)V_3 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ .  $\{W_3 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $V_1$ .

Como a matriz  $A$  é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais ([Proposição 6.6 na página 390](#)). Portanto,  $\{W_1, W_2, W_3\}$  é uma base ortonormal de autovetores de  $A$ .

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

(d) >> A=[0,0,0;0,2,2;0,2,2];
    >> B=A-x*eye(3)
    [-x, 0, 0]
    [ 0, 2-x, 2]
    [ 0, 2, 2-x]
    >> p=det(B)
    p =-x*(-4*x+x^2)
    >> solve(p)
    [0] [0] [4]
    >> B0=subs(B,x,0)
    [0, 0, 0]
    [0, 2, 2]
    [0, 2, 2]

    >> escalona(B0)
    [0, 1, 1]
    [0, 0, 0]
    [0, 0, 0]
    >> B4=subs(B,x,4)
    [-4, 0, 0]
    [ 0, -2, 2]
    [ 0, 2, -2]
    >> escalona(B4)
    [1, 0, 0]
    [0, 1, -1]
    [0, 0, 0]

```

$\mathbb{V}_0 = \{(\alpha, -\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_1 = (1, 0, 0), V_2 = (0, -1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_0$ , pois gera  $\mathbb{V}_0$  ( $(\alpha, -\beta, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, -1, 1)$ ) e é L.I. ( $xV_1 + yV_2 = \vec{0}$  se, e somente se,  $(x, -y, y) = (0, 0, 0)$  ou  $x = 0$  e  $y = 0$ ). Sejam  $W_1 = V_1$ ,  $W_2 = V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2 = V_2 - \vec{0} = V_2$ . Sejam  $U_1 = (1/\|W_1\|)W_1 = W_1 = V_1 = (1, 0, 0)$  e  $U_2 = (1/\|W_2\|)W_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{U_1 = (1, 0, 0), U_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_0$ .

$\mathbb{V}_4 = \{(0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_3 = (0, 1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_4$ , pois gera  $\mathbb{V}_4$  ( $(0, \alpha, \alpha) = \alpha(0, 1, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $U_3 = (1/\|V_3\|)V_3 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{U_3 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_4$ . Como a matriz  $A$  é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais ([Proposição 6.6 na página 390](#)). Portanto,  $\{U_1, U_2, U_3\}$  é uma base ortonormal de autovetores de  $A$ .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```

(e) >> A=[1,1,0;1,1,0;0,0,1];
    >> B=A-x*eye(3)
    [1-x, 1, 0]
    [ 1, 1-x, 0]
    [ 0, 0, 1-x]
    >> p=det(B)
    p =-2*x+3*x^2-x^3
    >> solve(p)
    [0] [1] [2]

    >> B0=subs(B,x,0)
    [1, 1, 0]
    [1, 1, 0]
    [0, 0, 1]
    >> escalona(B0)
    [1, 1, 0]
    [0, 0, 1]
    [0, 0, 0]

```

```
>> B1=subs(B,x,1)
[0, 1, 0]
[1, 0, 0]
[0, 0, 0]
>> escalona(B1)
[1, 0, 0]
[0, 1, 0]
[0, 0, 0]
```

```
>> B2=subs(B,x,2)
[-1, 1, 0]
[1, -1, 0]
[0, 0, -1]
>> escalona(B2)
[1, -1, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_0 = \{(-\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_1 = (-1, 1, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_0$ , pois gera  $\mathbb{V}_0$  ( $(-\alpha, \alpha, 0) = \alpha(-1, 1, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $U_1 = (1/\|V_1\|)V_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ .  $\{U_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_0$ .

$\mathbb{V}_1 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_2 = (0, 0, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  ( $(0, 0, \alpha) = \alpha(0, 0, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $W_2 = (1/\|V_2\|)V_2 = (0, 0, 1)$ .  $\{W_2 = (0, 0, 1)\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_1$ .

$\mathbb{V}_2 = \{(\alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_3 = (1, 1, 0)\}$  é base para  $\mathbb{V}_2$ , pois gera  $\mathbb{V}_2$  ( $(\alpha, \alpha, 0) = \alpha(1, 1, 0)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $W_3 = (1/\|V_3\|)V_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ .  $\{W_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_2$ .

Como a matriz  $A$  é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais ([Proposição 6.6 na página 390](#)). Portanto,  $\{W_1, W_2, W_3\}$  é uma base ortonormal de autovetores de  $A$ .

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
(f) >> A=[2,1,1;1,2,1;1,1,2];
>> B=A-x*eye(3)
[2-x, 1, 1]
[1, 2-x, 1]
[1, 1, 2-x]
>> p=det(B)
p =4-9*x+6*x^2-x^3
>> solve(p)
[4] [1] [1]
>> B1=subs(B,x,1)
[1, 1, 1]
[1, 1, 1]
[1, 1, 1]
```

```
>> escalona(B1)
[1, 1, 1]
[0, 0, 0]
[0, 0, 0]
>> B4=subst(B,x,4)
[-2, 1, 1]
[1, -2, 1]
[1, 1, -2]
>> escalona(B4)
[1, 0, -1]
[0, 1, -1]
[0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_1 = \{(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_1 = (-1, 1, 0), V_2 = (-1, 0, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_1$ , pois gera  $\mathbb{V}_1$  ( $(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$ ) e é L.I. (um vetor não é múltiplo escalar do outro). Sejam  $W_1 = V_1$ ,  $W_2 = V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2 = V_2 - (-1/2, 1/2, 0) = (-1/2, -1/2, 1)$ . Sejam  $U_1 = (1/\|W_1\|)W_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$  e  $U_2 = (1/\|W_2\|)W_2 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ .  $\{U_1, U_2\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_1$ .

$\mathbb{V}_4 = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_3 = (1, 1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_4$ , pois gera  $\mathbb{V}_4$  ( $(\alpha, \alpha, \alpha) = \alpha(1, 1, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $U_3 = (1/\|V_3\|)V_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ .  $\{U_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_4$ . Como a matriz  $A$  é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais (Proposição 6.6 na página 390). Portanto,  $\{U_1, U_2, U_3\}$  é uma base ortonormal de autovetores de  $A$ .

$$P = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
(g) >> A=[1,2,0,0;2,1,0,0;0,0,1,2;0,0,2,1];
>> B=A-x*eye(4)
[1-x, 2, 0, 0]
[ 2, 1-x, 0, 0]
[ 0, 0, 1-x, 2]
[ 0, 0, 2, 1-x]
>> p=det(B)
p =9+12*x-2*x^2-4*x^3+x^4
>> solve(p)
[-1] [-1] [ 3] [ 3]
```

```
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[2, 2, 0, 0]
[2, 2, 0, 0]
[0, 0, 2, 2]
[0, 0, 2, 2]
>> escalona(Bm1)
[1, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 1]
[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> B3=subs(B,x,3)
[-2, 2, 0, 0]
[ 2, -2, 0, 0]
[ 0, 0, -2, 2]
[ 0, 0, 2, -2]
>> escalona(B3)
[1, -1, 0, 0]
[0, 0, 1, -1]
[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0]
```

$\mathbb{V}_{-1} = \{(-\alpha, \alpha, -\beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_1 = (-1, 1, 0, 0), V_2 = (0, 0, -1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_{-1}$ , pois gera  $\mathbb{V}_{-1}$  ( $(-\alpha, \alpha, -\beta, \beta) = \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(0, 0, -1, 1)$ ) e é L.I. (um vetor não é múltiplo escalar do outro). Sejam  $W_1 = V_1$ ,  $W_2 = V_2 - \text{proj}_{W_1} V_2 = V_2 - \vec{0} = V_2$ . Sejam  $U_1 = (1/\|W_1\|)W_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$  e  $U_2 = (1/\|W_2\|)W_2 = (0, 0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{U_1, U_2\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_{-1}$ .

$\mathbb{V}_3 = \{(\alpha, \alpha, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_3 = (1, 1, 0, 0), V_4 = (0, 0, 1, 1)\}$  é base para  $\mathbb{V}_3$ , pois gera  $\mathbb{V}_3$  ( $(\alpha, \alpha, \beta, \beta) = \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, 1)$ ) e é L.I. (um vetor não é múltiplo escalar do outro). Sejam  $W_3 = V_3$ ,  $W_4 = V_4 - \text{proj}_{W_3} V_4 = V_4 - \vec{0} = V_4$ . Sejam  $U_3 = (1/\|W_3\|)W_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$  e  $U_4 = (1/\|W_4\|)W_4 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{U_1, U_2\}$  é base ortonormal de  $\mathbb{V}_3$ . Como a matriz  $A$  é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais (Proposição 6.6 na página 390).



Portanto,  $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$  é uma base ortonormal de autovetores de  $A$ .

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
(h) >> A=[0,0,0,0;0,0,0,0;0,0,0,1;0,0,1,0];
>> B=A-x*eye(4)
[-x, 0, 0, 0]
[ 0, -x, 0, 0]
[ 0, 0, -x, 1]
[ 0, 0, 1, -x]
>> p=det(B)
p =x^2*(x^2-1)
>> solve(p)
[ 0] [ 0] [ 1] [-1]
>> Bm1=subs(B,x,-1)
[1, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 1]
[0, 0, 1, 1]
>> escalona(Bm1)
[1, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, 1]
[0, 0, 0, 0]
```

```
>> B0=subs(B,x,0)
[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 1, 0]
>> escalona(B0)
[0, 0, 1, 0]
[0, 0, 0, 1]
[0, 0, 0, 0]
[0, 0, 0, 0]
>> B1=subs(B,x,1)
B1 =
[-1, 0, 0, 0]
[ 0, -1, 0, 0]
[ 0, 0, -1, 1]
[ 0, 0, 1, -1]
>> escalona(B1)
[1, 0, 0, 0]
[0, 1, 0, 0]
[0, 0, 1, -1]
[0, 0, 0, 0]
```

$V_0 = \{(\alpha, \beta, 0, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_1 = (1, 0, 0, 0), V_2 = (0, 1, 0, 0)\}$  é base para  $V_0$ , pois gera  $V_{-1}$  ( $(\alpha, \beta, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, 0)$ ) e é L.I. (um vetor não é múltiplo escalar do outro). Claramente  $V_1 \cdot V_2 = 0$  e possuem norma igual a 1. Sejam  $U_1 = V_1$  e  $U_2 = V_2$ .  $\{U_1, U_2\}$  é base ortonormal de  $V_0$ .

$V_1 = \{(0, 0, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_3 = (0, 0, -1, 1)\}$  é base para  $V_1$ , pois gera  $V_{-1}$  ( $(0, 0, -\alpha, \alpha) = \alpha(0, 0, -1, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $U_3 = (1/\|V_3\|)V_3 = (0, 0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{U_3 = (0, 0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $V_1$ .

$V_{-1} = \{(0, 0, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ .  $\{V_4 = (0, 0, 1, 1)\}$  é base para  $V_{-1}$ , pois gera  $V_{-1}$  ( $(0, 0, \alpha, \alpha) = \alpha(0, 0, 1, 1)$ ) e um vetor não nulo é L.I. Seja  $U_4 = (1/\|V_4\|)V_4 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .  $\{U_4 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$  é base ortonormal de  $V_{-1}$ . Como a matriz  $A$  é simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais ([Proposição 6.6 na página 390](#)). Portanto,

$\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$  é uma base ortonormal de autovetores de  $A$ .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**6.2.2.** Como a matriz é simétrica ela é diagonalizável. Além disso, também por ser simétrica, autovetores associados a autovalores diferentes são ortogonais. Assim basta ortogonalizar dentro de cada autoespaço.

```
>> W1=V1;
>> W2=V2-proj(W1,V2)
W2 = [ 2, -1, 0, 2]
>> W3=V3;
>> W4=V4-proj(W3,V4)
W4 = [ -1, -2, -2, 0]
>> U1=W1/no(W1)
U1 = [ 0, 2/3, -2/3, 1/3]
>> U2=W2/no(W2)
U2 = [ 2/3, -1/3, 0, 2/3]
>> U3=W3/no(W3)
U3 = [ -2/3, 0, 1/3, 2/3]
```

$$P = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4] = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \\ -2/3 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

### 6.3. Aplicação ao Estudo de Cônicas (página 434)

**6.3.1.**

```
>> A=[9,-2;-2,6];
>> syms x y; X=[x;y];
>> expr=simplify(X.'*A*X-30)
```

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

```
>> syms x1 y1; X1=[x1;y1];
>> expr=subst(expr,X,P*X1)


$$5x_1^2 + 10y_1^2 - 30$$

>> expr=expr/30


$$x_1^2/6 + y_1^2/3 - 1$$

>> ellipse(sqrt(6),sqrt(3),P)
```

**6.3.2.** >> A=[3,-4;-4,-12];  
>> expr=simplify(X.'\*A\*X+81)

```


$$3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81$$

>> [P,D]=diagonal(A)


$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{17}/17 & -4\sqrt{17}/17 \\ 4\sqrt{17}/17 & \sqrt{17}/17 \end{bmatrix}$$

D=[-13,0]
[ 0,4]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

```


$$-13x_1^2 + 4y_1^2 + 81$$

>> expr=expr/81


$$-\frac{13}{81}x_1^2 + \frac{4}{81}y_1^2 + 1$$

>> hiperbx(9/sqrt(13),9/2,P)
```

**6.3.3.** >> A=[2,-2;-2,-1];  
>> expr=simplify(X.'\*A\*X+K\*X+24)

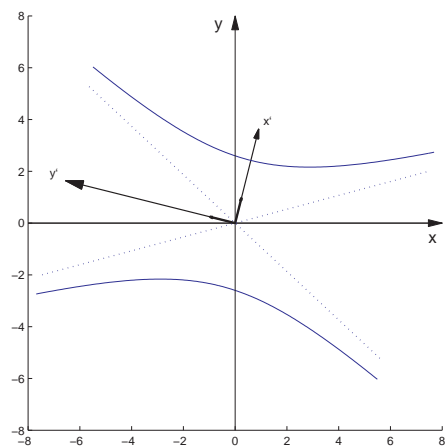
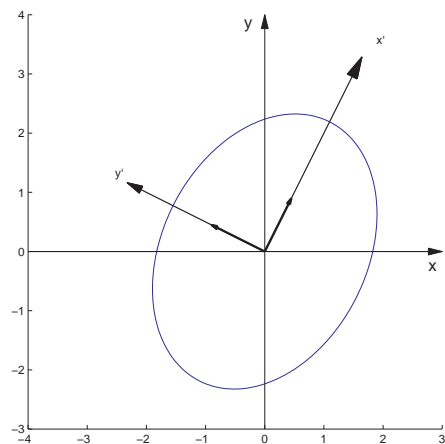
```


$$2x^2 - 4xy - y^2 + 24$$

>> [P,D]=diagonal(A)


$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2\sqrt{5}/5 & 1\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

D = [-2, 0]
[ 0, 3]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```



$$-2x_1^2 + 3y_1^2 + 24$$

```
>> expr=expr/24
```

$$-x_1^2/12 + y_1^2/8 + 1$$

```
>> hiperbx(sqrt(12),sqrt(8),P)
```

```
6.3.4. >> A=[21,3;3,13];
>> expr=simplify(X.'*A*X-132)
```

$$21x^2 + 6xy + 13y^2 - 132$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \\ -3\sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 22 \end{bmatrix}$$

```
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$12x_1^2 + 22y_1^2 - 132$$

```
>> expr=expr/132
```

$$x_1^2/11 + y_1^2/6 - 1$$

```
>> ellipse(sqrt(11),sqrt(6),P)
```

```
6.3.5. >> A=[4,-10;-10,25];
>> K=[-15,-6];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X)
```

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y$$

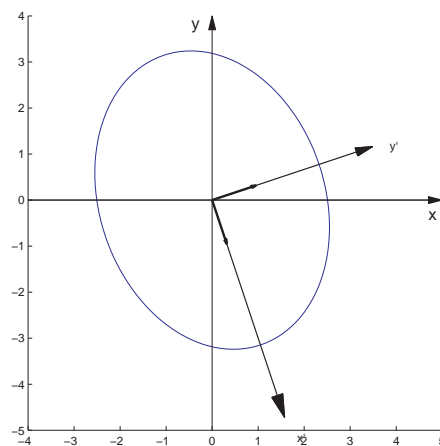
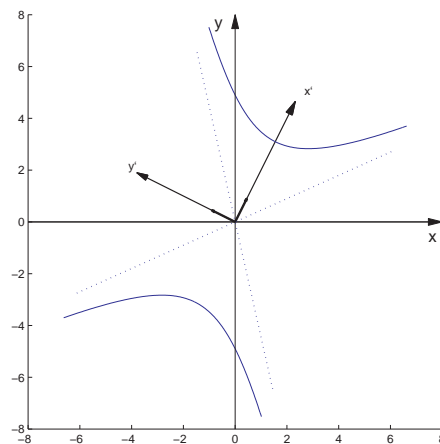
```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{29}\sqrt{29} & -\frac{2}{29}\sqrt{29} \\ \frac{2}{29}\sqrt{29} & \frac{5}{29}\sqrt{29} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 29 \end{bmatrix}$$

```
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$29y_1^2 - 3\sqrt{29}x_1$$



```
>> expr=expr/29
```

$$y_1^2 - \frac{3}{29} \sqrt{29} x_1$$

```
>> parabox(3/(4*sqrt(29)),P)
```

**6.3.6.**

```
>> A=[9,3;3,1]; K=[-10*10^(1/2),10*10^(1/2)];  
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+90)
```

$$9x^2 + 6xy + y^2 - 10\sqrt{10}x + 10\sqrt{10}y + 90$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/10 & 3\sqrt{10}/10 \\ -3\sqrt{10}/10 & \sqrt{10}/10 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

```
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$10y_1^2 - 20y_1 - 40x_1 + 90$$

```
>> expr=subst(expr,y1,y2+1)
```

$$10y_2^2 + 80 - 40x_1$$

```
>> expr=subst(expr,x1,x2+2)
```

$$10y_2^2 - 40x_2$$

```
>> expr=expr/10
```

$$y_2^2 - 4x_2$$

```
>> paraby(1,P,[2;1])
```

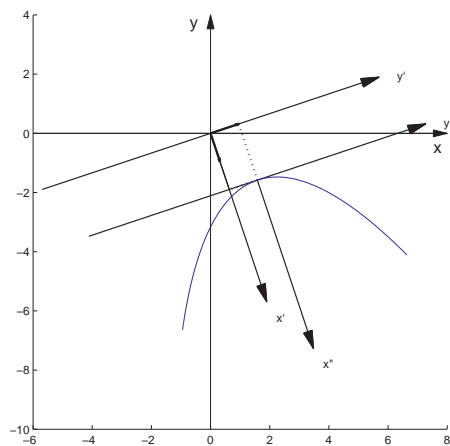
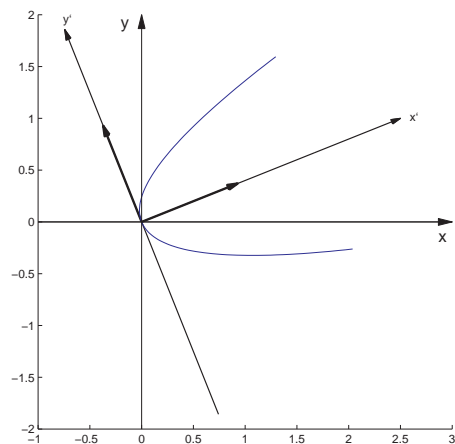
**6.3.7.**

```
>> A=[5,-3;-3,5];  
>> K=[-30*(2)^(1/2),18*(2)^(1/2)];  
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+82)
```

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 30\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 82$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$





```

D = [2, 0]
    [0, 8]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)

 $2x_1^2 + 8y_1^2 - 12x_1 + 48y_1 + 82$ 
>> X0=[3;-3];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)

 $2x_2^2 - 8 + 8y_2^2$ 
>> expr=expr/8

 $x_2^2/4 - 1 + y_2^2$ 
>> ellipse(2,1,P,X0)
6.3.8. >> A=[5,6;6,0];
>> K=[-12*(13)^(1/2),0];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X-36)

 $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}x - 36$ 
>> [P,D]=diagonal(A)

 $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{bmatrix}$ 

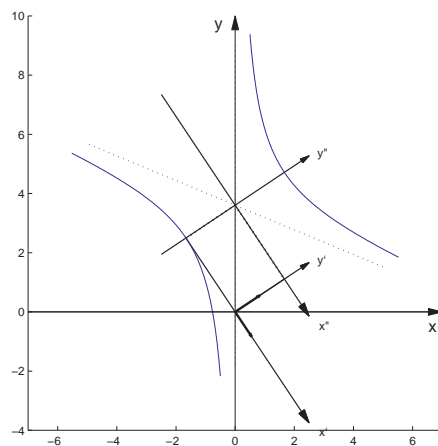
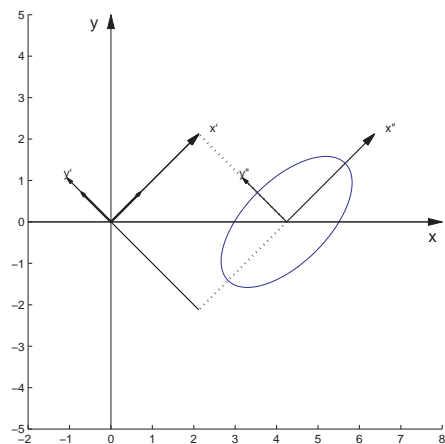
D = [-4, 0]
    [ 0, 9]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)

 $-4x_1^2 + 9y_1^2 - 24x_1 - 36y_1 - 36$ 
>> X0=[-3;2];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)

 $-4x_2^2 - 36 + 9y_2^2$ 
>> expr=expr/36

 $-x_2^2/9 - 1 + y_2^2/4$ 
>> hiperby(2,3,P,X0)
6.3.9. >> A=[6,-2;-2,9];
>> K=[-4*5^(1/2),-18*5^(1/2)];
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X-5)

```



$$6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4\sqrt{5}x - 18\sqrt{5}y - 5$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

```
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$5x_1^2 + 10y_1^2 - 26x_1 - 32y_1 - 5$$

```
>> X0=[26/10;32/20];
```

```
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$5x_2^2 - \frac{322}{5} + 10y_2^2$$

```
>> expr=expr*5/322
```

$$\frac{25}{322}x_2^2 - 1 + \frac{25}{161}y_2^2$$

```
>> ellipse(sqrt(322)/5,sqrt(161)/5,P,X0)
```

**6.3.10.**

```
>> A=[1,3^(1/2);3^(1/2),-1];  
>> K=[6,0];  
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X)
```

$$x^2 + 2xy\sqrt{3} - y^2 + 6x$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$2x_1^2 - 2y_1^2 + 3\sqrt{3}x_1 - 3y_1$$

```
>> X0=[-3*3^(1/2)/4;-3/4];
```

```
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)
```

$$2x_2^2 - 9/4 - 2y_2^2$$

```
>> expr=expr*4/9
```

$$\frac{8}{9}x_2^2 - 1 - \frac{8}{9}y_2^2$$

```
>> hiperbx(3/sqrt(8),3/sqrt(8),P,X0)
```

**6.3.11.**

```
>> A=[8,-8;-8,8];  
>> K=[33*2^(1/2),-31*2^(1/2)];  
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+70)
```

$$8x^2 - 16xy + 8y^2 + 33\sqrt{2}x - 31\sqrt{2}y + 70$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

```
>> expr=subst(expr,X,P*X1)
```

$$16y_1^2 + 2x_1 - 64y_1 + 70$$

```
>> expr=subst(expr,y1,y2+2)
```

$$16y_2^2 + 6 + 2x_1$$

```
>> expr=subst(expr,x1,x2-3)
```

$$16y_2^2 + 2x_2$$

```
>> expr=expr/16
```

$$y_2^2 + x_2/8$$

```
>> parabx(-1/32,P,[-3;2])
```

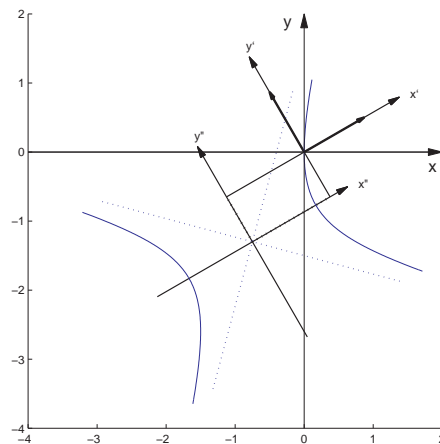
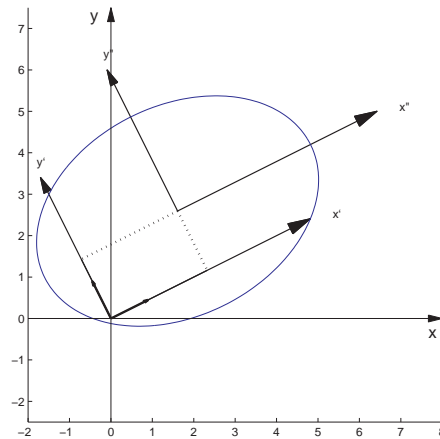
**6.3.12.**

```
>> A=[1,-3;-3,-7];  
>> K=[10,2];  
>> expr=simplify(X.'*A*X+K*X+9)
```

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9$$

```
>> [P,D]=diagonal(A)
```

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$



```

D = [-8, 0]
    [ 0, 2]
>> expr=subst(expr,X,P*X1)

$$-8x_1^2 + 2y_1^2 + \frac{8}{5}\sqrt{10}x_1 - \frac{14}{5}\sqrt{10}y_1 + 9$$

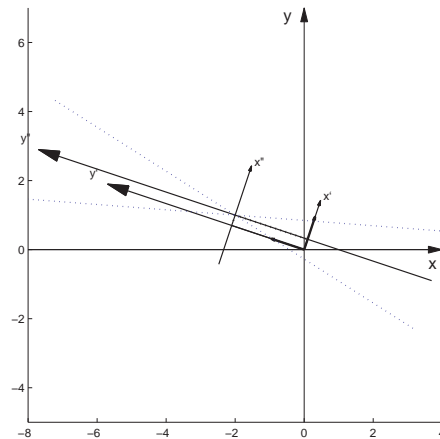
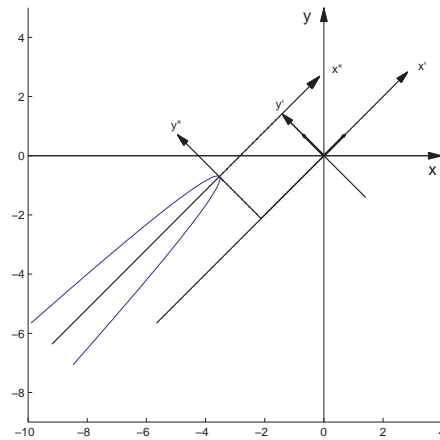
>> X0=[1/10^(1/2);7/10^(1/2)];
>> expr=subst(expr,X1,X2+X0)

$$-8x_2^2 + 2y_2^2$$

>> hiperby(4,1,P,X0,'d')

```

Esta é uma cônica degenerada. A equação representa as duas retas  $y''^2 = 4x''^2$ , ou  $y'' = \pm 2x''$ .



---

# Bibliografia

---

- [1] Howard Anton e Chris Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, São Paulo, 8a. edição, 2000.
- [2] José L. Boldrini, Sueli I. R. Costa, Vera L. Figueiredo, e Henry G. Wetzler. *Álgebra Linear*. Ed. Harbra Ltda., São Paulo, 3a. edição, 1986.
- [3] Paulo Boulos e Ivan de C. e Oliveira. *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Makron Books, São Paulo, 2a. edição, 1987.
- [4] Frederico F. C., filho. *Introdução ao MATLAB*. Departamento de Ciência da Computação - UFMG, Belo Horizonte, Fevereiro de 2000.
- [5] Carlos A. Callioli, Hygino H. Domingues, e Roberto C. F. Costa. *Álgebra Linear e Aplicações*. Atual Editora, São Paulo, 6a. edição, 1995.
- [6] Adilson Gonçalves e Rita M. L. de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Edgard Blücher, Rio de Janeiro, 1977.



- [7] Alésio de Caroli, Carlos A. Callioli, e Miguel O. Feitosa. *Matrizes, Vetores, Geometria Analítica*. Nobel, São Paulo, 1976.
- [8] João Pitombeira de Carvalho. *Álgebra Linear - Introdução*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edição, 1977.
- [9] Nathan M. dos Santos. *Vetores e Matrizes*. Livros Técnicos e Científicos Ed. S.A., Rio de Janeiro, 3a. edição, 1988.
- [10] John B. Fraleigh e Raymond A. Beauregard. *Linear Algebra*. Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 3a. edição, 1995.
- [11] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, e Lawrence E. Spence. *Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3a. edição, 1997.
- [12] G. H. Golub e C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins U.P., Baltimore, 3a. edição, 1996.
- [13] Stanley I. Grossman. *Elementary Linear Algebra*. Saunders College Publishing, New York, 5a. edição, 1994.
- [14] David R. Hill e David E. Zitarelli. *Linear Algebra Labs with MATLAB*. Macmillan Publishing Company, New York, 1994.
- [15] Morris W. Hirsch e Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, Inc., New York, 1974.
- [16] Kenneth Hoffman e Ray Kunze. *Álgebra Linear*. Livros Técnicos e Científicos Ed. S.A., Rio de Janeiro, 3a. edição, 1979.
- [17] Bernard Kolman. *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações*. Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 6a. edição, 1998.
- [18] Serge Lang. *Introduction to Linear Algebra*. Springer, New York, 2a. edição, 1986.
- [19] Serge Lang. *Linear Algebra*. Springer Verlag, New York, 3a. edição, 1987.
- [20] David C. Lay. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2a. edição, 1999.

- [21] Steven Leon, Eugene Herman, e Richard Faulkenberry. *ATLAST Computer Exercises for Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [22] Steven J. Leon. *Álgebra Linear com Aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 5a. edição, 1998.
- [23] Emília Giraldes, Vitor H. Fernandes, e Maria P. M Smith. *Curso de Álgebra Linear e Geometria Analítica*. Mc Graw Hill, Lisboa, 1995.
- [24] Elon L. Lima. *Coordenadas no Espaço*. SBM, Rio de Janeiro, 1993.
- [25] Elon L. Lima. *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2a. edição, 1996.
- [26] Elon L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [27] Seymour Lipschutz. *Álgebra Linear*. McGraw-Hill, São Paulo, 3a. edição, 1994.
- [28] Mathworks Inc. *Student Edition of MATLAB Version 5 for Windows*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.
- [29] Carl D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [30] Ben Noble e James W. Daniel. *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3a. edição, 1988.
- [31] Reginaldo J. Santos. *Álgebra Linear e Aplicações*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2004.
- [32] Reginaldo J. Santos. *Introdução à Álgebra Linear*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2004.
- [33] Reginaldo J. Santos. *Matrizes Vetores e Geometria Analítica*. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2004.
- [34] Shayle R. Searle. *Matrix Algebra Useful for Statistics*. John Wiley and Sons, New York, 1982.
- [35] Georgi E. Shilov. *Linear Algebra*. Dover Publications Inc., New York, 1977.
- [36] Carl P. Simon e Lawrence Blume. *Mathematics for Economists*. W. W. Norton and Co. Inc., New York, 1994.

- [37] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Álgebra Linear*. Makron Books, São Paulo, 2a. edição, 1987.
- [38] Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. Makron Books, São Paulo, 2a. edição, 1987.
- [39] Gilbert Strang. *Linear Algebra and its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, Inc., Orlando, 3a. edição, 1988.
- [40] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1993.

---

# Índice Alfabético

---

## Ângulo

- entre planos, 136
- entre reta e plano, 233
- entre retas, 120
- entre vetores, 97

## Assíntota, 241

## Autoespaço, 243

## Autovalor(es), 207

## Autovetor(es), 207

## axiss, 200, 235

## Base

- canônica, 191, 212
- de subespaço, 185
- ortogonal, 210
- ortonormal, 210

## box, 201, 234

## Cadeia de Markov, 15

## Círculo, 229

## c1f, 67

## Cofator de um elemento, 63, 71

## Combinação linear, 86, 168, 171, 194

## Complemento ortogonal, 250

## Cônicas, 211, 373

## (não) degeneradas, 215

## identificação de, 218, 275

## Conjugado de uma matriz, 461

## Decomposição polar de uma matriz, 452

## Dependência linear, 179

## Desigualdade de Cauchy-Schwarz, 174

## Desigualdade triangular, 175

## desvet, 198, 232

## det, 192

Determinante, 58  
  de Vandermonde, 209  
  propriedades do, 86  
detopelp, 192  
diag, 24  
diagonal, 296  
Diagonalização  
  de matrizes, 199  
  de matrizes simétricas, 373  
Dimensão, 203  
Distância  
  de um ponto a um plano, 150  
  de um ponto a uma reta, 159  
  de uma reta a um plano, 236  
  entre dois planos, 168  
  entre dois pontos, 90  
  entre duas retas, 179  
  
eig, 325  
Eixo(s)  
  da elipse, 226  
eixos, 68, 200, 234  
Elipse, 219  
  excentricidade da, 227  
elipse, 298  
Equação (equações)  
  da reta, 164  
  geral do plano, 110  
  linear, 19  
  paramétricas da reta, 168  
  paramétricas do plano, 156

Equação(equações)  
  vetorial da reta, 169  
Escalar, 4  
escalona, 68  
Espaço (espaços)  
   $\mathbb{R}^n$ , 141  
  solução, 155  
  vetoriais, 164  
Excentricidade  
  da elipse, 227  
  da hipérbole, 245  
eye, 24  
  
Foco(s)  
  da elipse, 220  
  da Hipérbole, 234  
  da parábola, 250  
  
Geradores, 171, 172  
Gerar, 171  
Gram-Schmidt (processo de ortogonalização), 214  
Grandezas vetoriais, 80  
  
Hipérbole, 233  
hiperbx, 301  
hiperby, 304  
  
Identidade de Lagrange, 260  
Identidade polar, 243  
Identificação de cônicas, 218, 275  
Independência linear, 179

Interpolação polinomial, 131

inv, 325

Lei do paralelogramo, 243

lin, 243

lineplan, 247

lineseg, 199, 233

Matriz (matrizes), 1

(definida) positiva, 447

escalonada, 32

escalonada reduzida, 31

anti-simétrica, 32

aumentada, 22

coluna, 2, 158, 159

coluna de, 1

companheira, 218, 368

conjugado de, 461

de rotação, 214, 444

de transição, 16

de Vandermonde, 137

decomposição polar de, 452

determinante de, 58

diagonal, 28, 182

diagonal (principal) de, 2

diagonalizável, 201

diferença entre, 14

do sistema linear, 21

elementar, 52

elemento de, 2

entrada de, 2

equivalente por linhas, 42

identidade, 10

iguais, 3

inversa de, 41

invertível, 41

linha, 2, 158, 159

linha de, 1

múltiplo escalar de, 4

multiplicação por escalar, 4

não invertível, 42

nilpotente, 34, 351

nula, 10

ortogonal, 195, 388

potência, 14

produto de, 5

propriedades de, 9

quadrada, 2

raiz quadrada de, 450

semelhantes, 339

simétrica, 32

singular, 42

soma de, 3

submatriz principal de, 454

traço de, 33

transposta de, 8

triangular inferior, 78

triangular superior, 204

matvand, 68

Menor de um elemento, 58

Método de Gauss, 40

Método de Gauss-Jordan, 33  
Mudança de coordenadas, 173  
Múltiplo escalar, 4, 110, 157

no, 230

Norma de um vetor, 85, 167

Notação de somatório, 6, 9, 35

numeric, 25, 326

oe, 67

opel, 67

Operação elementar, 22

Parábola, 249

parabx, 307

paraby, 311

pe, 230

Pivô, 26

plan, 244

Plano (planos), 110

vetor normal do, 110

concorrentes, 244

equação geral do, 110

equações paramétricas do, 156

mediador, 230

paralelos, 244

plotci, 68

plotf1, 68

po, 199, 233

Polinômio característico, 214

poline, 246

poly2sym, 67

poly2sym2, 68

Pontos

colineares, 188

coplanares, 189

poplan, 246

Posições relativas

de dois planos, 242

de duas retas, 233

de plano e reta, 250

Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, 214

Produto

vetorial em  $\mathbb{R}^n$ , 253

escalar ou interno, 104, 166

propriedades do, 121

misto, 175

vetorial, 136

propriedades do, 149

vetorial duplo, 266

Produto vetorial duplo, 266

Projeção ortogonal, 128, 188

Projeção Ortográfica, 222

pv, 231

Raiz quadrada de uma matriz, 450

randi, 25, 327

Regra da mão direita, 143

Regra de Cramer, 159

Reta (retas), 164

concorrentes, 120

diretriz da parábola, 249

- equação vetorial da, 169
- equações paramétricas da, 168
- geratriz do cone, 230
- paralelas, 120
- reversas, 120
- vetor diretor da, 168
- rota, 201, 235
- Rotação, 212
- Segmento (de reta) orientado, 80
- Sistema de coordenadas, 179
  - cartesianas, 112
  - retangulares, 112
  - retangulares no espaço, 124
- Sistema de equações lineares, 19
- Sistema homogêneo, 45
- Sistema(s) linear(es), 19
  - conjunto solução de, 20
  - consistente, 66
  - equivalentes, 25
  - homogêneo, 45
  - solução (geral) de, 20
- Solução
  - geral de sistema linear, 20
- solve, 25
- Soma de subespaços, 267
- Subespaço(s), 155
  - dimensão de, 203
  - gerado por, 171, 172, 174
  - soma de, 267
- Submatriz principal, 454
- subs, 67, 324
- subst, 242, 297
- sym, 25, 326
- syms, 24
- tex, 200, 236
- Translação, 217
- Variáveis livres, 38
- Vértice(s)
  - da elipse, 227
  - da hipérbole, 245
  - da parábola, 259
- Vetor (vetores), 2, 80, 150
  - ângulo entre, 97
  - canônicos, 157
  - colineares, 110
  - combinação linear de, 168
  - componentes de, 114, 122, 143, 154
  - comprimento de, 85
  - coplanares, 188
  - de estado, 16
  - diferença de, 105, 156
  - geradores, 171, 172
  - iguais, 150
  - independência linear de, 179
  - linearmente (in)dependentes, 179
  - multiplicação por escalar, 105, 121, 150, 153
  - múltiplo escalar, 110, 157
  - norma de, 85, 167
  - normal ao plano, 110



nulo, [102](#), [154](#)  
ortogonais, [98](#), [183](#)  
paralelos, [105](#)  
produto escalar ou interno de, [104](#), [166](#)  
produto misto de, [175](#)  
produto vetorial de, [136](#)  
simétrico, [103](#), [155](#)  
soma de, [95](#), [120](#), [150](#), [152](#)  
unitário, [90](#), [210](#)  
unitários, [208](#)

zeros, [24](#)

zoom3, [202](#), [235](#)