DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF^{a}.: Karla Lima

EACH-USP

October 24, 2018

Operação em Conjuntos

- Dado um conjunto arbitrário S, podemos definir algumas operações binárias e unárias no conjunto $\mathcal{P}(S)$, S, neste caso, é chamado o conjunto universo.
- Uma operação binária em $\mathcal{P}(S)$ precisa atuar em quaisquer dois subconjuntos de S para produzir um único subconjunto de S.

Operação em Conjuntos

Definição - União de Conjuntos

Sejam A, $B \in \mathcal{P}(S)$. A união de A e B, denotada por $A \cup B$, é $\{x | x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$.

Definição - Interseção de Conjuntos

Sejam A, $B \in \mathcal{P}(S)$. A interseção de A e B, denotada por $A \cap B$, é $\{x | x \in A \text{ } e \text{ } x \in B\}$.

Definição - Complemento de um Conjunto

Para um conjunto $A \in \mathcal{P}(S)$, o complemento de A, A' é $\{x | x \in S \text{ } e \text{ } x \notin A\}$.

Operação em Conjuntos

Exemplo

Sejam
$A = \{x | \text{x é um inteiro não negativo par}\}$
$B = \{x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ } e \text{ } x = 2y + 1\}$
$C = \{x | (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ } e \text{ } x = 4y\}$.

Operação em Conjuntos

Produto Cartesiano

- Sejam A e B subconjuntos de S. O **produto cartesiano** (produto cruzado) de A e B, denotado por $A\ X\ B$ é definido por $A\ X\ B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$
- Denotaremos por A^n para denotar o conjunto de todas as n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de elementos de A.

O produto cartesiano não é uma operação binária em $\mathcal{P}(S)$.

Identidade em Conjuntos

Identidades de Conjuntos Básicas

1a. $A \cup B = B \cup A$	1b. $A \cap B = B \cap A$	(propriedades comutativas)
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(propriedades associativas)
3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(propriedades distributivas)
4a. $A \cup \varnothing = A$	4b. $A \cap S = A$	(propriedades de identidade)
5a. $A \cup A' = S$	5b. $A \cap A' = \varnothing$	(propriedades de complemento)

Operação em Conjuntos

Exercício

Demonstre que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Operação em Conjuntos

Exemplo

Demonstre que $[A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)') = \emptyset$.

Operação em Conjuntos

O **dual** para cada identidade de conjunto são obtidos substituindo-se $\cup$ por $\cap$ e trocando S por $\emptyset$.

Exemplo

O dual de:
$[A \cup (B \cap C)] \cap [A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)' = \emptyset$ é
$[A \cap (B \cup C)] \cup [A' \cap (B \cup C)] \cup (B \cup C)' = S$.

Operação em Conjuntos

Exercício

Demonstre que $[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap C'] = A \cup B$.

Contagem

Combinatória

A combinatória é o ramo da Matemática que trata da contagem. Tratar a contagem é importante, sempre que temos recursos finitos.

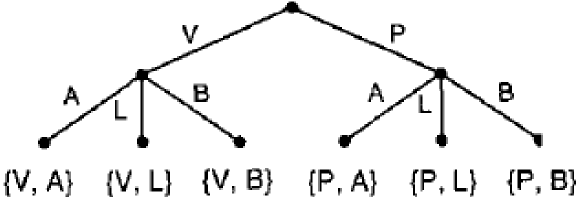
- Quanto espaço um banco de dados consome?
- Quantos usuários a configuração de um computador pode suportar?
- Quantos cálculos um determinado algoritmo envolve (eficiência)?

Contagem

Princípio da Multiplicação

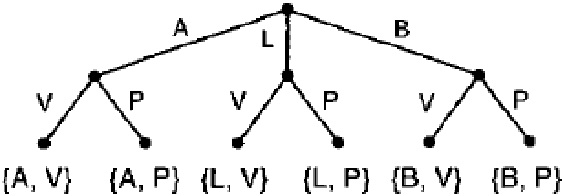
Exemplo - A uma criança é permitido escolher um dentre dois confeitos, um vermelho e outro preto, e um entre três chicletes, amarelo, lilás e branco. Quantos conjuntos diferentes de doces a criança pode ter?

Contagem



Escolher confeito

Escolher chiclete



Escolher chiclete

Escolher confeito

Contagem

Princípio da Multiplicação

Se existem n_1 possibilidades para um primeiro evento e n_2 possibilidades para um segundo evento, então existem $n_1.n_2$ possibilidades para a sequência dos dois eventos.

O Princípio da Multiplicação é útil, quando desejamos contar o número de possibilidades totais de uma tarefa que pode ser quebrada em uma sequência de etapas sucessivas.

Princípio da Multiplicação

Exemplo

A última parte do número de seu telefone contém quatro dígitos. Quantos números de quatro dígitos existem? E sem repetição?

Exemplo

Se um homem tem quatro ternos, oito camisas e cinco gravatas, quantas combinações ele pode compor?

Princípio da Multiplicação

Exemplo

Para qualquer conjunto finito S, seja $|S|$ o número de elementos em S. Se A e B são conjuntos finitos, então $|AXB| = |A| \bullet |B|$

Princípio da Adição

Exemplo

Suponha que desejamos escolher uma sobremesa dentre três tortas e quatro bolos. De quantas formas isto pode ser feito?

Contagem

Princípio da Adição

Se A e B são eventos disjuntos com n_1 e n_2 possibilidades, respectivamente, então o número total de possibilidades para o evento A ou B é $n_1 + n_2$.

Contagem

Princípio da Adição

Se A e B são eventos disjuntos com n_1 e n_2 possibilidades, respectivamente, então o número total de possibilidades para o evento A ou B é $n_1 + n_2$.

O Princípio da Adição é útil sempre que desejamos contar o número total de resultados possíveis para uma tarefa que pode ser quebrada em dois casos disjuntos.

Princípio da Adição

Exemplo

Sejam A e B conjuntos finitos disjuntos $|A \cup B| = |A| + |B|$

Princípio da Adição

Exemplo

Sejam A e B conjuntos finitos, então
$|A - B| = |A| - |A \cap B|$ e
$|A - B| = |A| - |B|$ se $B \subseteq A$.

Princípio da Adição

Exemplo

Sejam A e B conjuntos finitos, então
$|A - B| = |A| - |A \cap B|$ e
$|A - B| = |A| - |B|$ se $B \subseteq A$.

Exemplo

Quantos inteiros de três dígitos (números entre 100 e 999) são pares?

Princípio da Adição

Exemplo

Sejam A e B conjuntos finitos, então
$|A - B| = |A| - |A \cap B|$ e
$|A - B| = |A| - |B|$ se $B \subseteq A$.

Exemplo

Quantos inteiros de três dígitos (números entre 100 e 999) são pares?

Exemplo

Suponha que os quatro últimos dígitos de um número de telefone precisam incluir, pelo menos, um dígito repetido. Quantos números deste tipo existem?

Princípio da Inclusão e Exclusão

Princípio da Inclusão e Exclusão

se A e B são quaisquer conjuntos de um conjunto universo S, então $A - B$, $B - A$ e $A \cap B$ são conjuntos mutuamente disjuntos.

- Exemplo: se $x \in A - B$ então $x \notin B$, portanto $x \notin B - A$ e $x \notin A \cap B$.
- Qual o outro nome do conjunto $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$?.
- Como representar $|A \cup B|$ (Princípio da Inclusão e Exclusão para dois conjuntos)?
- Como representar $|A \cup B \cup C|$(Princípio da Inclusão e Exclusão para três conjuntos)?

Princípio da Casa de Pombo

Princípio da Casa de Pombo

Se mais do que k itens são distribuídos entre k caixas, então pelo menos uma caixa conterá mais de um item.

Exemplo

Quantas pessoas precisam estar no mesmo quarto para se garantir que pelo menos duas pessoas têm o sobrenome iniciado pela mesma letra?

Princípio da Casa de Pombo

Princípio da Casa de Pombo

Se mais do que k itens são distribuídos entre k caixas, então pelo menos uma caixa conterá mais de um item.

Exemplo

Quantas pessoas precisam estar no mesmo quarto para se garantir que pelo menos duas pessoas têm o sobrenome iniciado pela mesma letra?

Exemplo

Prove que se 51 inteiros positivos entre 1 e 100 são escolhidos, então pelo menos um deles divide outro?