

Lista de Exercícios - Introdução à Estatística

1. Sorteando um número de 1 a 30, qual a probabilidade de que ele seja par ou múltiplo de 5?
2. Lançando-se simultaneamente dois dados não viciados, qual a probabilidade de que suas faces superiores exibam a soma igual a 7 ou 9?
3. Numa pesquisa feita com 600 pessoas de uma comunidade, verificou-se que 200 lêem o jornal A, 300 lêem o jornal B e 150 lêem os jornais A e B. Qual a probabilidade de, sorteando-se uma pessoa, ela ser leitora do jornal A ou do jornal B?
4. Extraí-se aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de a carta extraída ser valete ou carta de paus? Obs: um baralho possui 4 vales e 13 cartas de paus. Só existe 1 valet de paus.
5. Numa urna há 40 bolas brancas, 25 bolas pretas e 15 vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, determine a probabilidade de que ela seja preta ou vermelha.
6. Considere um experimento aleatório e os eventos X e Y associados, tais que $P(X)=1/2$, $P(Y)=1/3$ e $P(X \cap Y)=1/4$. Calcule $P(X \cup Y)$.
7. Quatro universidades—1,2,3 e 4— estão participando de um torneio de basquete. Na primeira etapa, 1 jogará com 2 e 3 com 4. Os dois vencedores disputarão o campeonato e os dois perdedores também jogarão. Um resultado possível pode ser representado por 1324 (1 ganha de 2 e 3 ganha de 4 nos jogos da primeira etapa e 1 ganha de 3 e 2 ganha de 4).
 - (a) Relacione todos os resultados de s
 - (b) Represente por A o evento em que 1 ganha o torneio. Relacione os resultados de A .
 - (c) Represente por B o evento em que 2 seja um dos finalistas do campeonato. Relacione os resultados de B .
 - (d) Quais são os resultados de $A \cup B$ e de $A \cap B$? Quais são os resultados de A' ?
8. Selecione aleatoriamente um estudante em uma determinada universidade e represente por A o evento de ele possuir um cartão de crédito Visa e por B o evento análogo para um MasterCard. Suponha que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ e $P(A \cap B) = 0.25$

- (a) Calcule a probabilidade de que o indivíduo selecionado tenha pelo menos um dos dois tipos de cartão (ou seja, a probabilidade do evento $A \cup B$).
 - (b) Qual é a probabilidade de o indivíduo selecionado não ter nenhum dos tipos de cartão?
 - (c) Descreva, em termos de A e B , o evento em que o estudante selecionado possui um cartão Visa, mas não um MasterCard. Calcule a probabilidade deste evento.
9. A rota usada por um motorista que vai ao trabalho contém dois cruzamentos com semáforos. A probabilidade de que ele tenha de parar no primeiro semáforo é 0.4, a probabilidade análoga para o segundo semáforo é 0.5 e a probabilidade de que ele tenha de parar em pelo menos um dos dois semáforos é 0.6. Qual a probabilidade de ele ter de parar:
- (a) Nos dois semáforos?
 - (b) No primeiro semáforo mas não no segundo?
 - (c) Em exatamente um semáforo?
10. O conselho de estudantes de engenharia de certa faculdade possui um aluno representante de cada uma das áreas de engenharia (civil, elétrica, produção de materiais e mecânica). De quantas formas é possível:
- (a) Selecionar um presidente e um vice-presidente?
 - (b) Selecionar um presidente, um vice-presidente e um secretário?
11. Três moléculas do tipo A , três do tipo B , três do tipo C e três do tipo D serão vinculadas uma à outra para formar uma cadeia molecular. Uma molécula deste tipo é $ABCDABCDABCD$ e outra é $BCDDAAABDBCC$
- (a) Quantas moléculas deste tipo podem ser formadas? (Sugestão: se as três moléculas A forem diferentes uma da outra – A_1, A_2, A_3 – assim como as B, C e D , quantas moléculas haverá? Como esse número será reduzido se não houver distinção entre as moléculas A ?)
 - (b) Suponha que uma molécula composta do tipo descrito seja selecionada aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que todas as moléculas de cada tipo estejam juntas (como em $BBBAAADDD-CCC$)?

12. Certa loja faz reparos em componentes de áudio e vídeo. Represente por A o evento em que o próximo componente trazido para conserto seja de áudio e por B o evento em que o próximo componente seja um CD-player (de forma que o evento B está contido em A). Suponha que $P(A) = 0.6$ e $P(B) = 0.05$. Qual é $P(B|A)$?
13. Uma caixa contém seis bolas vermelhas e três verdes e uma segunda caixa contém sete bolas vermelhas e três verdes. Uma bola é retirada da primeira caixa e colocada na segunda. Então uma bola é retirada da segunda caixa e colocada na primeira.
- (a) Qual é a probabilidade de uma bola vermelha ser selecionada na primeira caixa e outra bola vermelha na segunda?
14. Suponha que as proporções de fenótipos sanguíneos em uma população sejam as seguintes:

A	B	AB	O
0.42	0.10	0.04	0.44

- Assumindo que os fenótipos de dois indivíduos selecionados aleatoriamente sejam independentes um do outro, qual é a probabilidade de que ambos os fenótipos sejam **O**? Qual é a probabilidade de que os fenótipos de dois indivíduos selecionados aleatoriamente sejam iguais?
15. Seja X = número de dígitos não-nulos de um código CEP selecionado aleatoriamente. Quais são os valores possíveis de X ? Forneça três resultados possíveis e seus valores associados X .
16. A fmp de X = o número de defeitos graves em um eletrodoméstico selecionado aleatoriamente é

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.08	0.15	0.45	0.27	0.05

Calcule os dados a seguir:

- (a) $E(X)$
- (b) O desvio padrão de X
- (c) $V(X)$

17. Calcule as seguintes probabilidades binomiais diretamente definida pela fórmula de $b(n, p)$:
- (a) $b(8, 0.6) P(X = 3)$
 - (b) $b(8, 0.6) P(X = 5)$
 - (c) $P(X \geq 1)$ quando $n = 12$ e $p = 0.1$.
18. Suponha que 90% de todas as pilhas de certo fabricante tenham voltagens aceitáveis. Um determinado tipo de lanterna necessita de duas pilhas tipo D, e ela só funciona se as duas pilhas tiverem voltagem aceitável. Entre 10 lanternas selecionadas aleatoriamente, qual é a probabilidade de pelo menos nove funcionarem?
19. Um instrutor que lecionou estatística para engenheiros para duas turmas no semestre passado, a primeira com 20 alunos e a segunda com 30, decidiu pedir aos alunos um projeto semestral. Após a entrega de todos os projetos, o instrutor os organizou aleatoriamente antes de corrigi-los. Considere os primeiros 15 projetos a serem corrigidos.
- (a) Qual é a probabilidade de exatamente 10 projetos serem da segunda turma?
 - (b) Qual é a probabilidade de pelo menos 10 projetos serem da segunda turma?
 - (c) Qual é a probabilidade de ao menos 10 projetos serem da mesma turma?
20. Um professor apresenta para seus alunos 10 problemas, afirmando que a prova final consistirá de uma seleção aleatória de 5 delas. Se um estudante sabe resolver 7 dos problemas, qual é a probabilidade que responda
- (a) Todos os 5 problemas
 - (b) pelo menos 4 dos problemas.
21. Para encontrar informação através da internet um usuário escolhe três buscadores. (–)10% das vezes escolhe o buscador A, neste caso de cada 5 vezes não encontra a informação. (–)30% das vezes o usuário escolhe o buscador B, nesse caso a probabilidade de que ache a informação é de 0.75. (–)60% das vezes escolhe o buscador C e a chance de encontrar a informação desejada é de 0.95

- (a) Qual a probabilidade de que o usuário encontre a informação?
- (b) Se o usuário encontrou a informação, com qual destes três buscadores é mais provável que tenha conseguido?
22. A proporção de componentes eletrônicos defeituosos em certos lotes, é uma variável aleatória discreta X cuja distribuição acumulada tenha a seguinte forma: $F(0.01) - F(0.01^{(-)}) = 0.5$, $F(0.1) - F(0.1^{(-)}) = 0.25$, e $F(0.15) - F(0.15^{(-)}) = 0.25$. Tem-se uma grande quantidade de lotes deste tipo.
- (a) Determine a função de probabilidade de X
- (b) Qual é a média(valor esperado) do número de componentes defeituosos por lote?
- (c) Construa o gráfico da FDA.
23. Num estudo de desempenho de uma central de computação, o acesso à CPU é descrito por uma variável Poisson com média de 4 requisições por segundo. Essas requisições podem ser de várias naturezas, tais como: imprimir um arquivo, efetuar um cálculo, enviar uma mensagem, entre outras.
- (a) Escolhendo-se ao acaso um intervalo de 1 segundo, qual é a probabilidade de haver dois ou mais acessos à CPU?
- (b) Considerando-se agora o intervalo de 10 segundos, também escolhido ao acaso, qual a probabilidade de haver 50 acessos?
24. Um robô é programado para operar mediante microprocessadores, e pode falhar em um determinado período (turno de 8 horas) independente dos outros turnos com probabilidade de 0.2. Quando um robô falha pela segunda vez, ele é mandado para a manutenção geral. Determinar
- (a) a probabilidade de que o robô seja enviado para manutenção no máximo no quinto turno.
- (b) o número esperado de turnos até ser enviado à manutenção.
25. Suponha que A e B são eventos mutuamente exclusivos, com $P(A) = 0.3$ e $P(B) = 0.5$. Qual a probabilidade de
- (a) Ambos A ou B ocorram.
- (b) A ocorra mas B não ocorra.

(c) Ambos A e B ocorram.

26. Prove: se X é uma variável aleatória com média μ então a variância de X definida por $Var(X) = E[(x - \mu)^2]$ pode ser escrita como $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
27. Mostre que se A e B são independentes, também A e B^C são independentes.
28. Um sistema é composto por componentes c_1, c_2 e c_3 de modo que funciona se e somente se, pelo menos dois destes três componentes funcionam. Dados os eventos F_i : o componente funciona, $i = 1, 2, 3$ e conhecendo-se as seguintes probabilidades: $P(F_1 \cap F_2) = 0.55$, $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0.3$, $P(F_1 \cap F_2^C \cap F_3) = 0.2$ e $P(F_1^C \cap F_2 \cap F_3) = 0.1$. Determine a confiabilidade do sistema.
29. No canal de comunicação binário, um sinal só pode tomar dois valores (0 ou 1). No entanto, devido a ruído, um sinal com 0 pode ser recebido como 1 ou um sinal com 1 pode ser recebido como 0. A probabilidade de que um sinal que se transmite como 0 e chegue como 0 é de 0.99. Se o sinal foi transmitido como 1, a probabilidade de que se receba como 1 é de 0.95. Sabe-se que a probabilidade de que se transmita um 0 é de 0.75.
- (a) Determine a probabilidade de se transmitir e receber o sinal 1.
- (b) Determine a probabilidade de transmitir o sinal 0 e receber o sinal 1.
- (c) Qual a probabilidade de receber o sinal igual a 1?
- (d) Foi recebido o sinal igual a 1, qual a probabilidade de que o sinal 1 foi o sinal transmitido?
30. Uma variável aleatória X tem a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 10 \\ 0.2, & \text{se } 10 \leq x < 12 \\ 0.5, & \text{se } 12 \leq x < 13 \\ 0.9, & \text{se } 13 \leq x < 25 \\ 1, & \text{se } x \geq 25 \end{cases}$$

- (a) Determine a função de probabilidade de X ,
- (b) $P(X = 12)$
- (c) $P(12 \leq X \leq 20)$

- (d) Calcule $E[X]$
31. Numa central telefonica, o número de ligações recebidas por minuto é descrita por uma variável Poisson com média de 4 ligações por minuto.
- (a) Escolhendo-se ao acaso o intervalo de 1 minuto, qual a probabilidade de haver duas ou mais ligações?
 - (b) Considerando agora o intervalo de 10 minutos, também escolhido ao acaso, qual a probabilidade de haver 50 ligações?
32. Se $E[X] = 1$ e $Var(X) = 5$, encontre:
- $E[(2 + X)^2]$
 - $Var(4 + 3X)$
33. Em uma prova de múltipla escolha, há três respostas possíveis para cada uma das 5 questões.
- (a) Qual é a probabilidade de que um estudante responda 4 ou mais questões “adivinhandos”?
 - (b) Qual é o número esperado de respostas corretas?
34. A duração (em anos) de um componente eletrônico pode ser considerada como uma variável aleatória X com função de densidade $f(x) = 0.1 \exp^{-0.1x}, x > 0$.
- (a) Se a garantia for de um ano para qualquer componente, que porcentagem dos componentes serão trocadas?
 - (b) Calcule a média de duração dos componentes.
 - (c) Calcule a Função de Distribuição acumulada da variável aleatória X .
 - (d) Considere a seguinte função de utilidade para os componentes:
- $$g(x) = \begin{cases} -100, & \text{se } X \leq 1, \\ 200, & \text{se } X > 1; \end{cases}$$
- qual seria a utilidade esperada do fabricante?
- (e) Mostre que $P(X > t + h | X > t) = P(X > h), \forall h > 0, \forall t > 0$ (falta de memória)

35. A voltagem suministrada por uma fonte geradora no instante t é dado por $X_t = a \cos(\omega t + \Theta)$, com a e ω constantes e Θ uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[-\pi, \pi]$. Calcule o valor esperado desta voltagem.
36. A distribuição da resistência de resistores de um tipo específico é normal, 10% dos equipamentos apresentam resistência maior que 10.256 ohms e 5% menor que 9.671 ohms. Quais são os valores da média e do desvio padrão das resistências?
37. Seja a população formada por $\{2, 4, 4, 6\}$. Considere todas as amostras (com reposição) de tamanho 2.
- Encontre a distribuição de \bar{x} .
 - Verifique se \bar{x} é ou não um estimador viesado de μ .
 - Verifique que $S^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ é um estimador não viesado de σ^2 .
38. Um sistema em série está integrado por dois componentes: o tempo de vida (em anos) do primeiro é X e do segundo é Y . A função de densidade conjunta de X e Y é

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 \exp^{-2y}, & 0 < x < 2y, \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

- Calcule a confiabilidade do sistema para o período de um ano.
 - Encontre a densidade marginal de X .
 - Encontre a densidade condicional de Y dado X .
39. Um canal de comunicação para qual o sinal (transmitido-recebido) pode tomar quatro valores, 0, 1, 2 ou 3. No entanto, devido ao ruído, um sinal transmitido pode se receber com outro valor. Suponha que para um canal deste tipo, a distribuição da probabilidade conjunta de X (valor do sinal transmitido) e Y (valor do sinal recebido), está dada por:

x \ y	0	1	2	3
0	0.28	0.04	0.04	0.04
1	0.03	0.21	0.03	0.03
2	0.02	0.04	0.12	0.02
3	0.03	0.02	0.01	0.04

- (a) Determine a probabilidade de transmitir e receber o mesmo valor do sinal.
 - (b) Determine a probabilidade de receber um 0.
 - (c) Foi recebido um valor 0. Determine a distribuição dos valores transmitidos.
 - (d) Encontre as distribuições marginais de X e Y .
 - (e) Encontre a distribuição da soma $X + Y$.
 - (f) Calcule a covariância de X, Y .
40. A poupança dos moradores de uma cidade (medidas em milhares de reais) é considerada uma variável aleatória contínua X , cujo modelo probabilístico está determinado pela regra $f(x) = x^2/9, 0 \leq x \leq 3$.
- (a) Qual a porcentagem de habitantes desta cidade que poupam mais de mil reais?
 - (b) Qual é a poupança média dos habitantes?
 - (c) Segundo as autoridades, o consumo dos habitantes da cidade em relação a poupança está dado por $Y = 1 + 4X$. Determine a densidade de Y .
41. Se $P(A \cap C/B) = 0.1, P(A \cap C^C/B) = 0.2$, encontre $P(A/B)$.
42. Um sistema de proteção contra-incêndios tem dois componentes básicos, um de detecção e outro de extinção. O primeiro envia um aviso ao segundo componente quando detecta algum sinal de incêndio (fumaça ou possível aumento na temperatura). O segundo, apenas quando o primeiro dá o aviso, ativa os alarmes e os extintores. Por experiência, sabe-se que existe uma probabilidade de 0.1 de apresentar-se algum sinal de incêndio e, neste caso, os componentes sempre atuam. No entanto, quando não apresentam estes sinais, existe uma probabilidade de 0.01 de que o componente de detecção envie um aviso ao componente de extinção que, neste caso, ativa os alarmes e os extintores com uma probabilidade de 0.05. Encontre a probabilidade de que o sistema de proteção contra incêndios responda incidentalmente, i.e, na ausência dos sinais de incêndio.
43. Se $P(A \cap B^C \cap C) = 0.8$ e $P(A \cap B^C \cap C \cap D^C) = 0.5$
- (a) Encontre $P(A \cap B^C \cap C \cap D)$
 - (b) Encontre $P(A^C \cup B \cup C^C \cup D^C)$

44. O tempo de resposta (em segundos) de um procedimento (tempo que temora para o procedimento realizar um pedido) é uma variável aleatória X com uma função de densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{57}{40} - \frac{51(x-1)^2}{10}; & 0.5 < x < 1.5 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Determine a probabilidade de que o tempo de resposta esteja entre 0.8s e 1s.
 - (b) Encontre a média e o desvio padrão do tempo de resposta do processo.
 - (c) Determine $P(|X - \mu_X| < 2\sigma_X)$.
45. A ocorrência de certo evento catastrófico para a economia ocorre de acordo a um processo Poisson com uma taxa de um a cada 5 anos.
- (a) Determine a probabilidade de que num período de 10 anos não ocorra mais de duas vezes este evento catastrófico.
 - (b) Encontre a probabilidade de que num período de 5 anos, ocorra mais de duas vezes este evento catastrófico.
 - (c) Um projeto deve executar durante um período de dez anos. Se este evento não se apresenta durante o período de execução do projeto, o custo é de 200 unidades monetárias (u.m); Em outro caso este custo incrementa-se em 100 u.m. por cada unidade de tempo faltante até terminar a execução do projeto. Determine o valor esperado do custo de execução do projeto.
 - (d) Qual é a probabilidade de que passem mais de 20 anos até que ocorra três vezes o dito evento?
46. Para a variável X com distribuição exponencial de parâmetro λ mostre que $P(X > t + h | X > t) = P(X > h), \forall h > 0, \forall t > 0$ (falta de memória).
47. Se o comprimento da rosca de um parafuso tem distribuição normal com media 5cm e a empresa considera como aceitáveis os parafusos que cuja medida não estão mais do que 45% ao redor da media. Quais são então os limites para os tamanhos aceitáveis?
48. Sejam P, Q e R probabilidades tais que para cada evento A de Ω : $Q(A) = P(A/B)$ e $R(A) = Q(A/C)$. Demonstre que para cada evento A : $R(A) = P(A/B \cap C)$.

49. Para converter dois sinais digitais em analógicos, para sua transmissão, usa-se um de três modems disponíveis: m_1 , m_2 e m_3 . Por experiência, sabe-se que a probabilidade de usar m_1 é de 0.2 e de 0.45 a de usar m_2 . Também sabe-se as seguintes probabilidades: 0.01, a de usar m_1 e de efetuar mal a conversão, 0.1 a de usar m_2 e realizar bem a conversão e 0.3 a de usar m_3 e efetuar mal a conversão. Qual a probabilidade de efetuar mal a conversão?
50. Admite-se que cada pneu dianteiro de um determinado tipo de veículo deve ter pressão de 26psi. Suponha que a pressão real seja uma variável aleatória X para o pneu direito e Y para o pneu esquerdo, com função densidade conjunta:
- $$f(x, y) = \begin{cases} K(x^2 + y^2), & 20 \leq x \leq 30, \quad 20 \leq y \leq 30, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$
- (a) Qual é o valor de K ?
- (b) Qual é a probabilidade de dois pneus estarem com valores inferior a ideal?
- (c) Determine a distribuição marginal da pressão de ar do pneu direito.
- (d) São X e Y independentes?
51. Suponha que o tempo de espera de um ônibus no período da manhã é uniformemente distribuído entre $[0, 5]$, o tempo de espera deste ônibus à tarde é uniformemente distribuído $[0, 10]$ e independente do período da manhã.
- (a) Se você pegar o ônibus cada manhã e tarde durante uma semana, qual o tempo total de espera? [defina as variáveis aleatórias X_1, \dots, X_5 para manhãs e X_6, \dots, X_{10} para tardes]
- (b) Qual a variância do tempo total de espera?
52. A corporação MNM tomará aos seus empregados um teste de aptidão. Os scores do teste são normalmente distribuídos com média 75 e desvio padrão 15. Uma amostra de 25 indivíduos é tomada de uma população de 500.
- (a) Qual é o valor esperado e o desvio padrão de \bar{x} ?
- (b) Qual a probabilidade de que o score médio do teste aplicado na amostra esteja entre 70.14 e 82.14?

(c) Encontre o valor de C tal que $P(\bar{x} \geq C) = 0.015$

53. Seja a população formada por $\{1, 3, 4, 5\}$. Considere todas as amostras (com repetição) de tamanho 2.

(a) Encontre a distribuição de \bar{x}

(b) Verifique se \bar{x} é ou não um estimador viesado de μ .

54. Dois componentes de um microcomputador tem a seguinte fdp conjunta para seus tempos de vida útil X e Y :

$$f(x, y) = \begin{cases} x \exp^{-x(1+y)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

(a) Qual é a probabilidade de que o tempo de vida X do primeiro componente seja maior que 3?

(b) Encontre as fdp marginais de X e Y . São independentes? (explique).

(c) Qual a probabilidade de que o tempo de vida de pelo menos um dos componentes seja maior que 3?

55. Bastien Inc. é uma fábrica de pequenos automóveis cujo consumo médio é de 50 milhas por galão de gasolina em estradas. A fábrica desenvolveu um motor mais eficiente para seus automóveis e agora anuncia que o novo automóvel consome menos, i.e, um galão rende mais que 50 milhas em estradas. Um teste independente provou 36 destes automóveis e o consumo médio foi de 51.5 milhas por galão, com desvio padrão de 6 milhas por galão.

(a) Com significância de 0.05, estabeleça as hipóteses e teste a veracidade da propaganda.

56. Abby e Bianca marcaram para lanchar entre o meio-dia e as 13h. Denotando o tempo de chegada de Abby por X e o tempo de chegada de Bianca por Y , supondo que X e Y são independentes com fdp $f_X(x)$ e $f_Y(y)$

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq X \leq 1, \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 \leq Y \leq 1, \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

(a) Determine o tempo médio de espera (o tempo que um indivíduo espera pelo outro em média ou valor esperado). [dica: $h(X, Y) = |x - y|$, considere isto também para o domínio da variação.]