Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2011 – Cálculo I – 1º sem. 2015
Professor: Dr. José Ricardo G. Mendonça

1ª Lista de Exercícios — Números e Funções — 05 mar. 2015

Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.
Kung-Fu Tzu (551–479 a. C.)

I. Números

1. Sabendo que $\sqrt{2}$ é um número irracional, mostre que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ também é um número irracional.

2. Prove as seguintes desigualdades para todos os números reais $x, y \in \mathbb{R}$:

   (a) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
   (b) $|x-y| \leqslant |x|+|y|$.
   (c) $|x-y| \geqslant |x|-|y|$.
   (d) $|x+y| \geqslant |x|-|y|$. Dica: escreva $x = x+y-y$ e aplique a desigualdade triangular.
   (e) $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$.
   (f) Dados os números reais $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, deduza a desigualdade triangular generalizada $|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$.

3. Reescreva cada uma das seguintes expressões envolvendo os números reais arbitrários a, b e c em termos de pelo menos um valor absoluto a menos:

   (a) $||a+b|-|a|-|b||$.
   (b) $||a+b|+|c|-|a+b+c||$.
   (c) $|a^2-2ab+b^2|$.
   (d) $||\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{5}-\sqrt{7}||$.

4. Reescreva cada uma das seguintes expressões envolvendo os números reais arbitrários x e y sem usar valores absolutos, tratando os diversos casos separadamente, se necessário:

   (a) $|x+y|-|y|$.
   (b) $||x|-1|$.
   (c) $|x|-|x^2|$.
   (d) $x-|x-|x||$.

5. Sejam a e b números reais positivos tais que $a < b$. Mostre que $a^2 < b^2$ e que portanto $a^n < b^n$ para todo número inteiro $n > 2$.

6. Sejam a, b, c e d números reais positivos tais que $a/b < c/d$. Mostre que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

7. Sejam a e b números reais positivos. Mostre que $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ e que se $a < b$ temos também $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$.

8. Determine todos os números $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes desigualdades:

   (a) $(x+1)(x-2) < 0$.

   (b) $(x-1)(x+1) > 0$.

   (c) $x(x+1) \leqslant 0$.

   (d) $(4x+7)^8(2x+3) < 0$.

   (e) $|x| < 3$.

   (f) $|x-3| < 1$.

   (g) $|2x+1| \leqslant 1$.

   (h) $|x^2-2| \leqslant 1$.

   (i) $0 < |x+2| < 1$.

   (j) $|x+1| + |x-1| > 2$.

   (k) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$.

9. Sejam $a \vee b = \max\{a,b\}$ e $a \wedge b = \min\{a,b\}$, respectivamente, o maior e o menor valor entre a, $b \in \mathbb{R}$. Mostre que $a \vee b = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$, $a \wedge b = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$ e interprete essas identidades geometricamente. Obtenha uma expressão para $\max\{a,b,c\}$.

II. Funções

1. Seja a função real $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Quanto vale $g(x) = f(2x+1)$ e para que valores de $x \in \mathbb{R}$ essa função está definida?

2. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3}$ está bem definida? Quanto vale $f(\sqrt{2})$?

3. Seja a função real $f(x) = \frac{1}{2}(|x|+x)$. Quanto vale $f(1)$, $f(-1)$, $f(-\pi)$, $f(0)$ e $f(\sqrt{3})$? Descreva informalmente o comportamento dessa função e faça a conexão com o ex. I.9.

4. Uma função real $f(x)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ é denominada uma *função par* se $f(-x) = f(x)$ e uma *função ímpar* se $f(-x) = -f(x)$. Determine a paridade das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x$.

(b) $f(x) = x^2$.

(c) $f(x) = x^5$.

(d) $f(x) = |x^3|$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

5. Seja $f(x)$ uma função qualquer definida para todos os números reais. Mostre que $g(x) = f(x) + f(-x)$ é uma função par, $h(x) = f(x) - f(-x)$ é uma função ímpar e que, portanto, qualquer função real pode ser escrita como a soma de uma função par e de uma função ímpar.

6. Seja f uma regra que associa a cada $x \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ um elemento t do conjunto de triângulos T cuja área vale x. A regra f é uma função? Porque? Considere agora uma regra g que associa a cada elemento $t \in T$ um $x \in \mathbb{R}^+$ que corresponde à área do triângulo t. A regra g é uma função? Porque? Descreva maneiras (quanto mais simples, melhores) de especificar os elementos do conjunto T de maneira única.

7. Sejam f, g e h três funções reais quaisquer. Mostre que a função composta $f \circ (g \circ h)$ é igual à função composta $(f \circ g) \circ h$ e que ambas são iguais a $f \circ g \circ h$, isto é, que a composição de funções é uma relação *associativa*, de forma que não precisamos usar parênteses quando realizamos a composição de várias funções. Repare, no entanto, que em geral a associação de funções é *não-comutativa*, isto é, em geral $f \circ g \neq g \circ f$.

8. Sejam $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ e $g(x) = x^2 + 2$. Determine $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e seus respectivos domínios $\mathscr{D}(f \circ g)$ e $\mathscr{D}(g \circ f)$.

III. Potências

1. Para cada um dos seguintes valores de a e x, encontre a^x e x^a:

   (a) $a = 2, x = 3$.

   (b) $a = 3, x = 2$.

   (c) $a = 5, x = -1$.

   (d) $a = \frac{1}{2}, x = 4$.

   (e) $a = \frac{1}{3}, x = 2$.

   (f) $a = -\frac{1}{2}, x = 4$.

   (g) $a = -3, x = -1$.

   (h) $a = -2, x = -2$.

   (i) $a = -1, x = -4$.

   (j) $a = -\frac{1}{2}, x = 9$.

2. Para que valores de n podemos definir $\sqrt[n]{x}$, a raiz n-ésima de x, para todo $x \in \mathbb{R}$?