ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 11

Cap 3.1 – Máquinas de Turing
Cap 3.2 – Variantes de MT

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br

Máquinas de Turing – Definição formal

Uma ***máquina de Turing*** é uma 7-upla, $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$, onde Q, Σ, Γ são todos conjuntos finitos e

1. Q é o conjunto de estados,
2. Σ é o alfabeto de entrada sem o ***símbolo em branco*** $\sqcup$,
3. Γ é o alfabeto de fita, onde $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\delta : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}$ é a função de transição,
5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial,
6. $q_{aceita} \in Q$ é o estado de aceitação, e
7. $q_{rejeita} \in Q$ é o estado de rejeição, onde $q_{rejeita} \neq q_{aceita}$.

Máquinas de Turing – Definição formal

Uma ***máquina de Turing*** é uma 7-upla, $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}})$, onde Q, Σ, Γ são todos conjuntos finitos e

1. Q é o conjunto de estados,
2. Σ é o alfabeto de entrada sem o ***símbolo em branco*** $\sqcup$,
3. Γ é o alfabeto de fita, onde $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\delta: Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}$ é a função de transição,
5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial,
6. $q_{\text{aceita}} \in Q$ é o estado de aceitação, e
7. $q_{\text{rejeita}} \in Q$ é o estado de rejeição, onde $q_{\text{rejeita}} \neq q_{\text{aceita}}$.

$\delta: Q' \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{E, D\}$, onde Q' é Q sem q_{aceita} e q_{rejeita}

Máquinas de Turing - Funcionamento

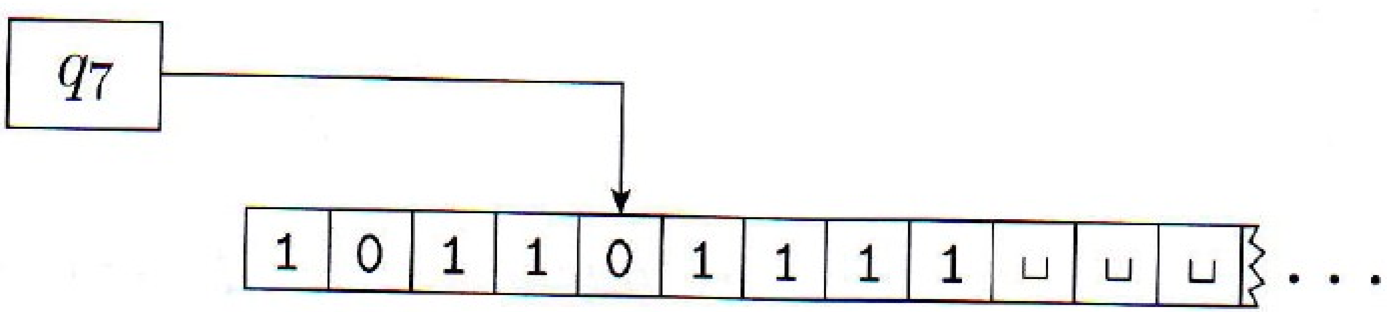
- A entrada fica na porção mais à esquerda da fita
- O símbolo em branco marca o fim da entrada
- A máquina começa apontando para a primeira posição da fita
- Se a máquina está na primeira posição e tenta fazer um movimento para a esquerda, permanece no lugar
- Pára SOMENTE quando entra em um estado de aceitação ou rejeição

Máquinas de Turing - Funcionamento

- **Configuração** - situação atual da máquina:

Máquinas de Turing - Funcionamento

- **Configuração** - situação atual da máquina:
  - Estado atual
  - Conteúdo da fita
  - Posição da cabeça de fita
- Ex:



Máquinas de Turing - Funcionamento

Dizemos que uma configuração C_1 **origina** uma configuração C_2 se a máquina puder ir de C_1 a C_2 em um **único** passo.

Máquinas de Turing - Funcionamento

Suponha que tenhamos a, b e c em Γ, assim como u e v em Γ^* e os estados q_i e q_j. Nesse caso $ua\, q_i\, bv$ e $u\, q_j\, acv$ são duas configurações. Digamos que

$$ua\, q_i\, bv \quad \text{origina} \quad u\, q_j\, acv$$

se na função de transição

Máquinas de Turing - Funcionamento

Suponha que tenhamos a, b e c em Γ, assim como u e v em Γ^* e os estados q_i e q_j. Nesse caso $ua\,q_i\,bv$ e $u\,q_j\,acv$ são duas configurações. Digamos que

$$ua\,q_i\,bv \quad \text{origina} \quad u\,q_j\,acv$$

se na função de transição $\delta(q_i, b) = (q_j, c, \mathrm{E})$.

Máquinas de Turing - Funcionamento

Suponha que tenhamos a, b e c em Γ, assim como u e v em Γ^* e os estados q_i e q_j. Nesse caso $ua\,q_i\,bv$ e $u\,q_j\,acv$ são duas configurações. Digamos que

$$ua\,q_i\,bv \quad \text{origina} \quad u\,q_j\,acv$$

se na função de transição $\delta(q_i, b) = (q_j, c, \mathrm{E})$.

$$ua\,q_i\,bv \quad \text{origina} \quad uac\,q_j\,v$$

Máquinas de Turing - Funcionamento

Suponha que tenhamos a, b e c em Γ, assim como u e v em Γ^* e os estados q_i e q_j. Nesse caso $ua\,q_i\,bv$ e $u\,q_j\,acv$ são duas configurações. Digamos que

$$ua\,q_i\,bv \quad \text{origina} \quad u\,q_j\,acv$$

se na função de transição $\delta(q_i, b) = (q_j, c, \mathrm{E})$.

$$ua\,q_i\,bv \quad \text{origina} \quad uac\,q_j\,v$$

se $\delta(q_i, b) = (q_j, c, \mathrm{D})$.

Máquinas de Turing - Funcionamento

- Configuração inicial:
- Configuração de aceitação:
- Configuração de rejeição:

Máquinas de Turing - Funcionamento

- Configuração inicial: q_0w
- Configuração de aceitação:
- Configuração de rejeição:

Máquinas de Turing - Funcionamento

- Configuração inicial: q_0w
- Configuração de aceitação: estado atual = q_{aceita}
- Configuração de rejeição:

Máquinas de Turing - Funcionamento

- Configuração inicial: q_0w
- Configuração de aceitação: estado atual = q_{aceita}
- Configuração de rejeição: estado atual = $q_{rejeita}$

Máquinas de Turing - Funcionamento

- Configuração inicial: q_0w
- Configuração de aceitação: estado atual = q_{aceita}
- Configuração de rejeição: estado atual = $q_{rejeita}$

Uma máquina de Turing M ***aceita*** a entrada w se uma seqüência de configurações $C_1, C_2, \ldots, C_k$ existe, onde

Máquinas de Turing - Funcionamento

- Configuração inicial: q_0w
- Configuração de aceitação: estado atual = q_{aceita}
- Configuração de rejeição: estado atual = $q_{rejeita}$

Uma máquina de Turing M ***aceita*** a entrada w se uma seqüência de configurações $C_1, C_2, \ldots, C_k$ existe, onde

1. C_1 é a configuração inicial de M sobre a entrada w,
2. cada C_i origina C_{i+1} e
3. C_k é uma configuração de aceitação.

Máquinas de Turing

A coleção de cadeias que M aceita é ***a linguagem de M***, ou ***a linguagem reconhecida por M***, denotada $L(M)$.

DEFINIÇÃO 3.5

Chame uma linguagem de ***Turing-reconhecível***, se alguma máquina de Turing a reconhece.[1]

1 - Ou linguagem **recursivamente enumerável** ou linguagem **irrestrita**

Máquinas de Turing (MT) Decisoras

Uma MT é decisora se ela nunca entra em loop (isto é, sempre pára em um estado de aceitação ou de rejeição).

Dizemos que um decisor que reconhece uma linguagem decide essa linguagem.

DEFINIÇÃO 3.6

Chame uma linguagem de ***Turing-decidível*** ou simplesmente ***decidível*** se alguma máquina de Turing a decide.[2]

2 - Ou linguagem **recursiva**

Máquinas de Turing - Exemplos

EXEMPLO 3.7

Aqui descrevemos uma máquina de Turing (MT) M_2 que decide $A = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$, a linguagem consistindo em todas as cadeias de 0s cujo comprimento é uma potência de 2.

M_2 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura da esquerda para a direita na fita, marcando um 0 não, e outro, sim.
2. Se no estágio 1, a fita continha um único 0, *aceite*.
3. Se no estágio 1, a fita continha mais que um único 0 e o número de 0s era ímpar, *rejeite*.
4. Retorne a cabeça para a extremidade esquerda da fita.
5. Vá para o estágio 1."

Exemplo para a cadeia 0000

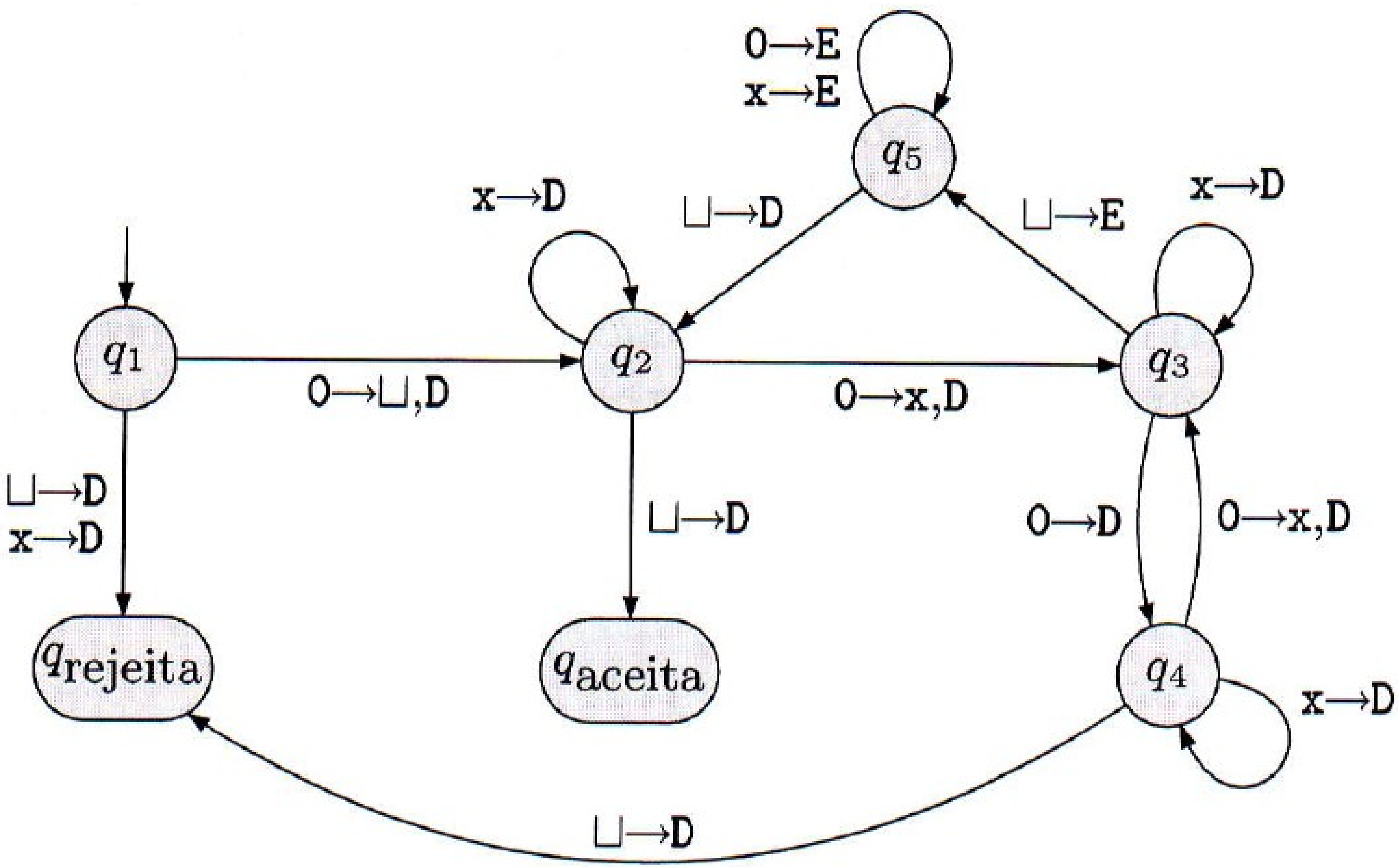
$q_1 0000$
$\sqcup q_2 000$
$\sqcup \mathrm{x} q_3 00$
$\sqcup \mathrm{x} 0 q_4 0$
$\sqcup \mathrm{x} 0 \mathrm{x} q_3 \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} 0 q_5 \mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} q_5 0 \mathrm{x} \sqcup$

$\sqcup q_5 \mathrm{x} 0 \mathrm{x} \sqcup$
$q_5 \sqcup \mathrm{x} 0 \mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup q_2 \mathrm{x} 0 \mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} q_2 0 \mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{xx} q_3 \mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{xxx} q_3 \sqcup$
$\sqcup \mathrm{xx} q_5 \mathrm{x} \sqcup$

$\sqcup \mathrm{x} q_5 \mathrm{xx} \sqcup$
$\sqcup q_5 \mathrm{xxx} \sqcup$
$q_5 \sqcup \mathrm{xxx} \sqcup$
$\sqcup q_2 \mathrm{xxx} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{x} q_2 \mathrm{xx} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{xx} q_2 \mathrm{x} \sqcup$
$\sqcup \mathrm{xxx} q_2 \sqcup$
$\sqcup \mathrm{xxx} \sqcup q_{\text{aceita}}$

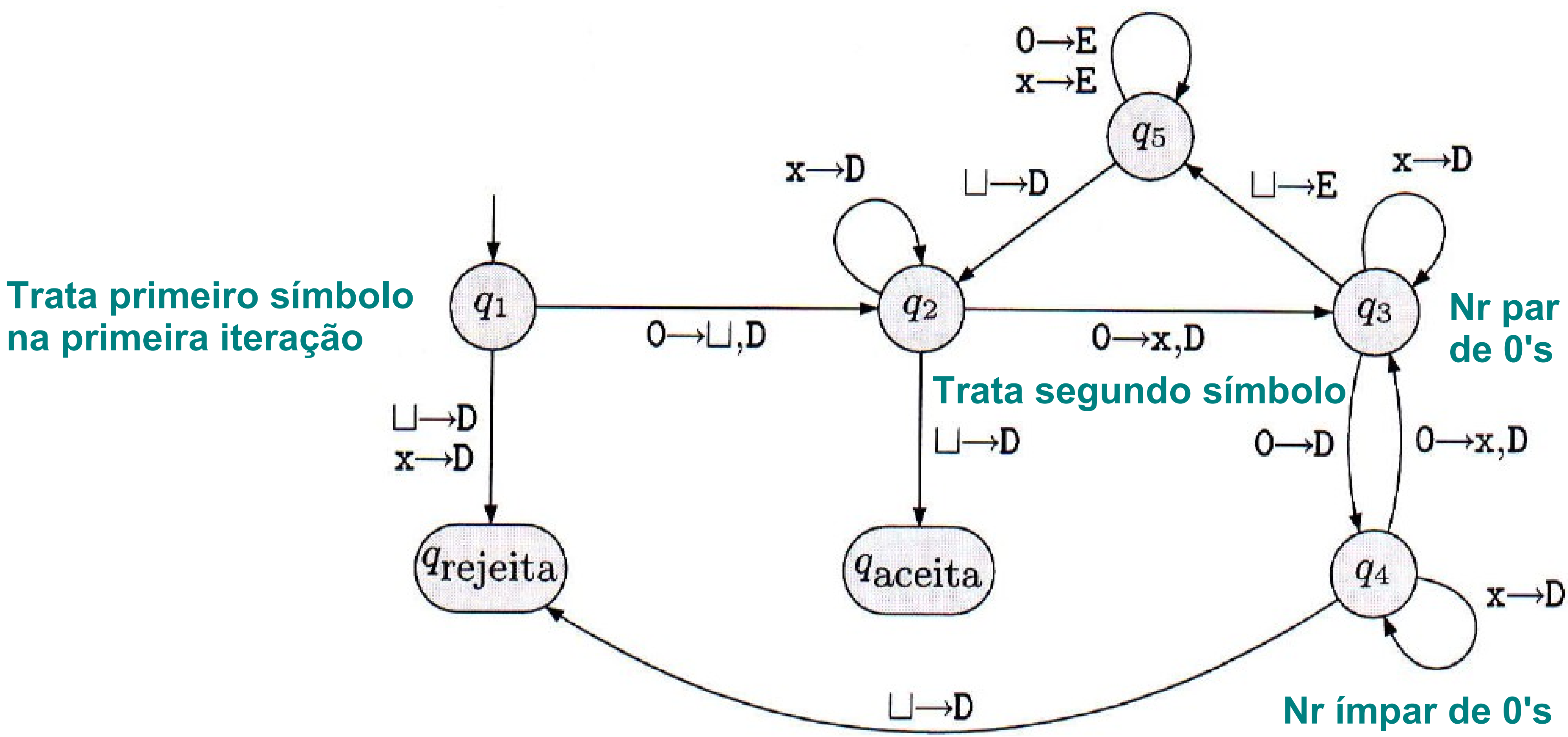
Agora, damos a descrição formal de $M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{aceita}, q_{rejeita})$:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$,
- $\Sigma = \{0\}$ e
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.
- Descrevemos δ com um diagrama de estados (veja a Figura 3.8).
- Os estados inicial, de aceitação e de rejeição são q_1, q_{aceita} e $q_{rejeita}$.



Agora, damos a descrição formal de $M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{aceita}, q_{rejeita})$:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$,
- $\Sigma = \{0\}$ e
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.
- Descrevemos δ com um diagrama de estados (veja a Figura 3.8).
- Os estados inicial, de aceitação e de rejeição são q_1, q_{aceita} e $q_{rejeita}$.



EXEMPLO 3.9

O que segue é uma descrição formal de $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{aceita}, q_{rejeita})$, a máquina de Turing que descrevemos informalmente na página 145, para decidir a linguagem $B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

- $Q = \{q_1, \ldots, q_{14}, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$,
- $\Sigma = \{0,1,\#\}$, e $\Gamma = \{0,1,\#,x,\sqcup\}$.
- Descrevemos δ com um diagrama de estados (veja a figura seguinte).
- Os estados inicial, de aceitação e de rejeição são q_1, q_{aceita} e $q_{rejeita}$.

0 1 1 0 0 0 # 0 1 1 0 0 0 $\sqcup$ $\cdots$

x 1 1 0 0 0 # 0 1 1 0 0 0 $\sqcup$ $\cdots$

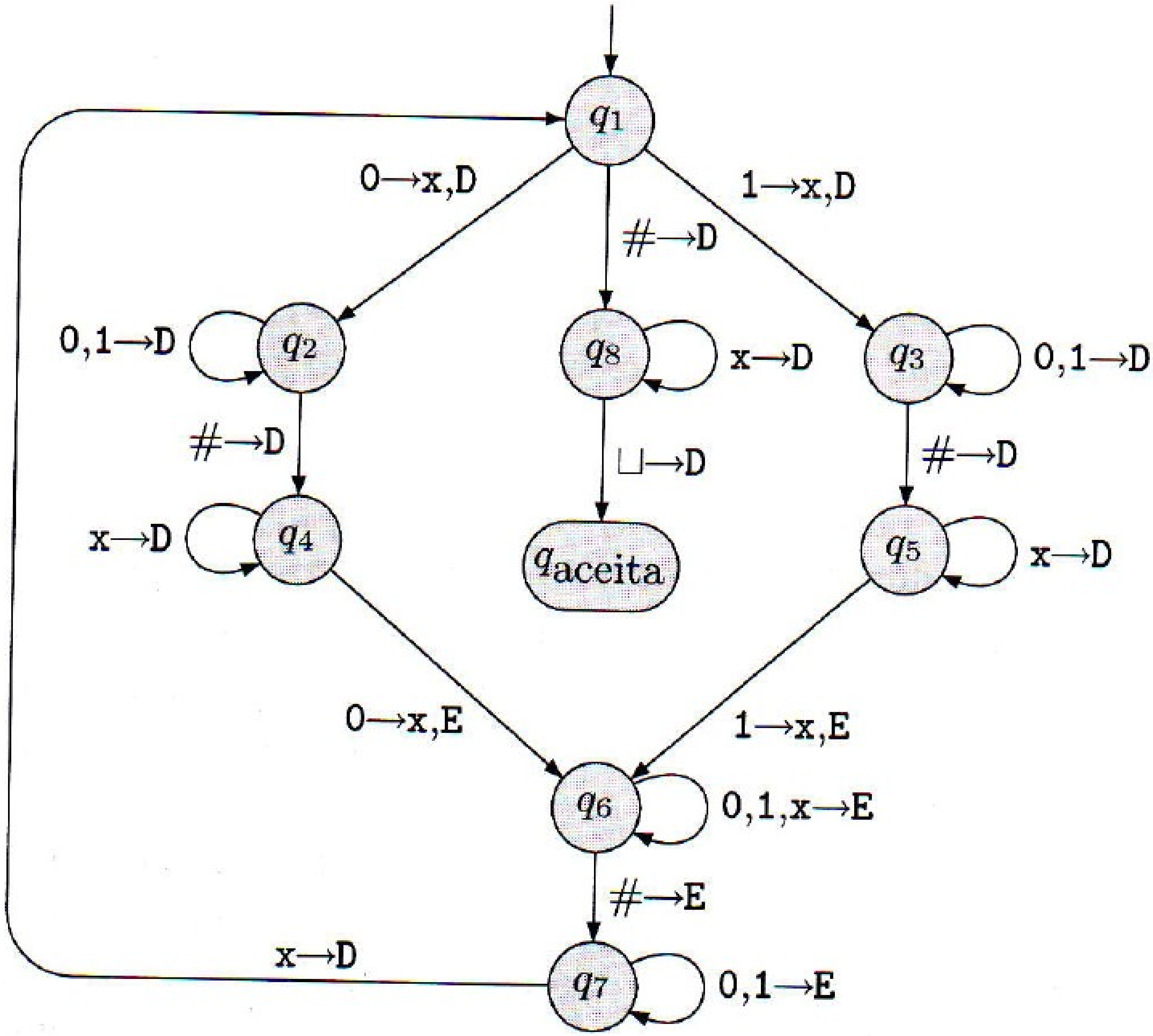
x 1 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 $\sqcup$ $\cdots$

x 1 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 $\sqcup$ $\cdots$

x x 1 0 0 0 # x 1 1 0 0 0 $\sqcup$ $\cdots$

x x x x x x # x x x x x x $\sqcup$ $\cdots$

aceita



Transições implícitas para $q_{rejeita}$ (indo para a direita, por convenção) quando aparece um símbolo não definido na transição.

3.2 – Variantes de Máquinas de Turing

Variantes de Máquinas de Turing

Máquina de Turing é um modelo robusto: ela e suas variações reconhecem a mesma classe de linguagens

Máquinas de Turing Multifita

- K fitas
- Cada fita tem sua própria cabeça para leitura e escrita
- Inicialmente, a cadeia de entrada fica na fita 1, e as demais fitas com branco

$$\delta : Q \times \Gamma^k \longrightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\mathrm{E}, \mathrm{D}, \mathrm{P}\}^k$$

$$\delta(q_i, a_1, \ldots, a_k) = (q_j, b_1, \ldots, b_k, \mathrm{E}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{E})$$

TEOREMA 3.13

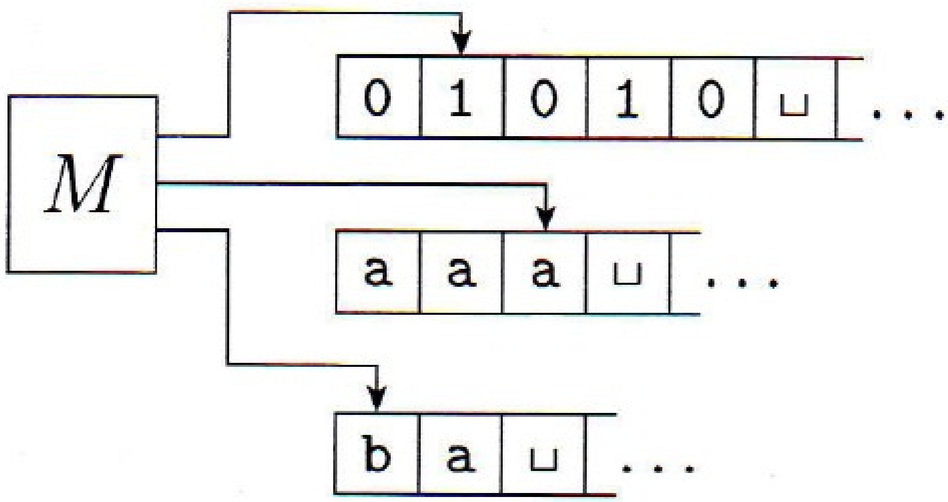
Toda máquina de Turing multifita tem uma máquina de Turing de uma única fita que lhe é equivalente.

TEOREMA 3.13

Toda máquina de Turing multifita tem uma máquina de Turing de uma única fita que lhe é equivalente.

Seja S uma MT de fita única e M uma MT de k fitas.

S pode simular M:

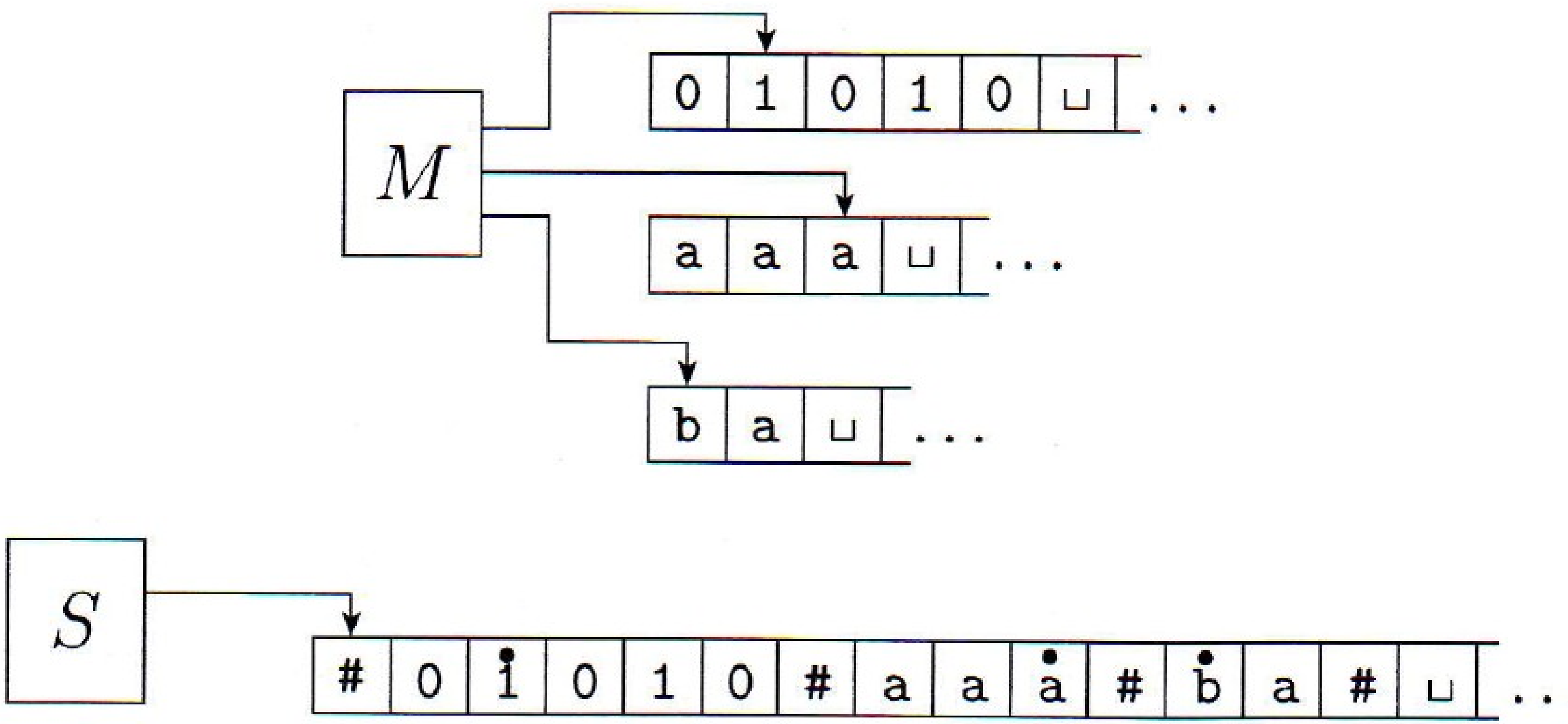


TEOREMA 3.13

Toda máquina de Turing multifita tem uma máquina de Turing de uma única fita que lhe é equivalente.

Seja S uma MT de fita única e M uma MT de k fitas.

S pode simular M:



Funcionamento de S:

- Preparação da fita: (ex: $w = w_1 \cdots w_n$)

Funcionamento de S:

- Preparação da fita: (ex: $w = w_1 \cdots w_n$)

$$\#\dot{w}_1 w_2 \cdots w_n \#\dot{\sqcup}\#\dot{\sqcup}\# \cdots \#$$

Funcionamento de S:

- Preparação da fita: (ex: $w = w_1 \cdots w_n$)

$$\#\overset{\bullet}{w}_1 w_2 \cdots w_n \#\overset{\bullet}{\sqcup}\#\overset{\bullet}{\sqcup}\# \cdots \#$$

- Leitura dos símbolos atuais:

Funcionamento de S:

- Preparação da fita: (ex: $w = w_1 \cdots w_n$)

$$\#\dot{w}_1 w_2 \cdots w_n \#\dot{\sqcup}\#\dot{\sqcup}\# \cdots \#$$

- Leitura dos símbolos atuais: percorre a fita lendo os símbolos com ponto em cima (até o (k+1)-ésimo #)

Funcionamento de S:

- Preparação da fita: (ex: $w = w_1 \cdots w_n$)

$$\#\dot{w}_1 w_2 \cdots w_n \#\dot{\sqcup}\#\dot{\sqcup}\# \cdots \#$$

- Leitura dos símbolos atuais: percorre a fita lendo os símbolos com ponto em cima (até o (k+1)-ésimo #)

  Atualização das cabeças:

Funcionamento de S:

- Preparação da fita: (ex: $w = w_1 \cdots w_n$)

$$\#\dot{w}_1 w_2 \cdots w_n \#\dot{\sqcup}\#\dot{\sqcup}\# \cdots \#$$

- Leitura dos símbolos atuais: percorre a fita lendo os símbolos com ponto em cima (até o (k+1)-ésimo #)

  Atualização das cabeças: percorre a fita fazendo as atualizações conforme a função de transição (tirando e colocando pontos para atualizar as cabeças de fitas), (até o (k+1)-ésimo #)

Funcionamento de S:

- Preparação da fita: (ex: $w = w_1 \cdots w_n$)

$$\#\dot{w}_1 w_2 \cdots w_n \#\dot{\sqcup}\#\dot{\sqcup}\# \cdots \#$$

- Leitura dos símbolos atuais: percorre a fita lendo os símbolos com ponto em cima (até o (k+1)-ésimo #)

  Atualização das cabeças: percorre a fita fazendo as atualizações conforme a função de transição (tirando e colocando pontos para atualizar as cabeças de fitas), (até o (k+1)-ésimo #)

- Se uma cabeça de fita vai para um “#”:

Funcionamento de S:

- Preparação da fita: (ex: $w = w_1 \cdots w_n$)

$$\#\dot{w}_1 w_2 \cdots w_n \#\dot{\sqcup}\#\dot{\sqcup}\# \cdots \#$$

- Leitura dos símbolos atuais: percorre a fita lendo os símbolos com ponto em cima (até o (k+1)-ésimo #)

  Atualização das cabeças: percorre a fita fazendo as atualizações conforme a função de transição (tirando e colocando pontos para atualizar as cabeças de fitas), (até o (k+1)-ésimo #)

- Se uma cabeça de fita vai para um “#”: desloca o conteúdo da fita para a direita e coloca o símbolo no lugar daquele “#”

COROLÁRIO 3.15

Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se alguma máquina de Turing multifita a reconhece.

COROLÁRIO 3.15

Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se alguma máquina de Turing multifita a reconhece.

Prova:

Linguagem L é TR => MTM reconhece L:

- L é TR => existe uma MT de fita única que a reconhece => existe uma MT multifita que a reconhece (pois fita única é um caso especial de multifita)

MTM reconhece L => Linguagem L é TR:

- MTM reconhece L => uma MT fita única a reconhece (pelo teorema) => L é TR