ACH0021 – Tratamento e Análise de Dados/Informações (1/2011)

Lista de Exercícios 2

Observação 1: Os exercícios desta lista devem ser resolvidos SEM o uso de ferramentas computacionais
Observação 2: Alguns dos exercícios foram adaptados ou retirados do livro de M. N. Magalhães & A. C. P. de Lima, *Noções de Probabilidade e Estatística*, Edusp (2008).

---

1) Dados os subconjuntos A, B e C de Ω (suponha A, B e C não-vazios), mostre que
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
e) $A \setminus B = A \cap B^c$.

1a) Mostrar-se-á, inicialmente, que $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Se $x \in A \cap (B \cup C)$ (x arbitrário), então x pertence a A e x pertence a B ou C, o que implica x pertencer a A e B ou x pertencer a A e C; logo, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, completando a primeira parte da prova.

Reciprocamente, considere $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (x arbitrário). Desta forma, x pertence a A e B ou x pertence a A e C, e isto implica x pertencer a A e também pertencer a B ou C; em suma, $x \in A \cap (B \cup C)$, donde segue $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

De $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$, tem-se $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1b) Mostrar-se-á, inicialmente, que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Se $x \in A \cup (B \cap C)$ (x arbitrário), então x pertence a A ou x pertence a B e C, o que implica x pertencer a A ou B e x pertencer a A ou C; logo, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, completando a primeira parte da prova.

Reciprocamente, considere $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (x arbitrário). Desta forma, x pertence a A ou B e x pertence a A ou C, e isto implica x pertencer a A ou pertencer a B e C; em suma, $x \in A \cup (B \cap C)$, donde segue $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

De $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, tem-se $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1c) Mostrar-se-á, inicialmente, que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. Se um x arbitrário pertence a $(A \cup B)^c$, então ele não pertence a $A \cup B$; em suma, x não pertence a A e nem a B, o que implica x pertencer a A^c e B^c. Logo, $x \in A^c \cap B^c$, completando a primeira parte da prova.

Reciprocamente, se um x arbitrário pertence a $A^c \cap B^c$, ele pertence a A^c e B^c. Consequentemente, x não pertence a A e nem a B, ou seja, x não pertence a $A \cup B$; logo, $x \in (A \cup B)^c$, donde segue $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$.

De $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$ e $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$, chega-se a $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

1d) Mostrar-se-á, inicialmente, que $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$. Se um x arbitrário pertence a $(A \cap B)^c$, então ele não pertence a $A \cap B$; em suma, x não pertence a A e B simultaneamente, o que implica x pertencer a A^c ou B^c. Logo, $x \in A^c \cup B^c$, completando a primeira parte da prova.

Reciprocamente, se um x arbitrário pertence a $A^c \cup B^c$, ele pertence a A^c ou B^c. Consequentemente, x não pertence a A ou não pertence a B, ou seja, x não pode pertencee aos dois ao mesmo tempo. Em suma, $x \notin A \cap B$; logo, $x \in (A \cap B)^c$, donde segue $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$.

De $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ e $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$, chega-se a $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1e) Mostrar-se-á, inicialmente, que $A \setminus B \subset A \cap B^c$. Se x (arbitrário) pertencer a $A \setminus B$, então ele pertence a A, mas não pertence a B, isto é, x pertence a A e também pertence a B^c. Desta forma, $x \in A \cap B^c$.

Reciprocamente, se x pertencer a $A \cap B^c$, então ele pertence a A e a B^c. Logo, x pertence a A mas não pode pertencer a B, o que implica $x \in A \setminus B$. Tem-se, então, $A \cap B^c \subset A \setminus B$.

De $A \setminus B \subset A \cap B^c$ e $A \cap B^c \subset A \setminus B$, chega-se a $A \setminus B = A \cap B^c$.

2) Sendo A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral, "traduza" as seguintes situações para a linguagem da teoria dos conjuntos:
a) pelo menos um dos eventos ocorre.
b) o evento A ocorre, mas B não ocorre.
c) nenhum dos dois eventos ocorre.
d) exatamente um dos eventos ocorre.

2a) $A \cup B$ 2b) $A \setminus B$ 2c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 2d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (notar que $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$)

3) Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Sabe-se, ainda, que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 200 são esportistas e da biologia noturno. Um aluno é escolhido, ao acaso, e pergunta-se a probabilidade de:
a) ser esportista.
b) ser esportista e aluno da biologia noturno.
c) não ser da biologia.
d) ser esportista ou aluno da biologia.
e) não ser esportista e nem aluno da biologia.

3) Admita a equiprobabilidade no sorteio dos alunos e considere a seguinte notação:

E: Conjunto dos alunos considerados esportistas.
B_d: Conjunto dos alunos de biologia diurno.
B_n: Conjunto dos alunos de biologia noturno.
Ω: Conjunto amostral.

Admite-se, também, que o curso de biologia seja oferecido somente nos dois períodos supracitados e que um aluno não faz o mesmo curso nos dois períodos ($B_d \cap B_n = \emptyset$). Das informações acima, tem-se

$$P(E) = \frac{4000}{10000} = 0,40 \qquad P(B_d) = \frac{500}{10000} = 0,05 \qquad P(B_n) = \frac{700}{10000} = 0,07$$

$$P(E \cap B_d) = \frac{100}{10000} = 0,01 \qquad P(E \cap B_n) = \frac{200}{10000} = 0,02$$

3a) Probabilidade de ser esportista: $P(E) = 0,40$.

3b) Probabilidade de ser esportista e aluno da biologia noturno: $P(E \cap B_n) = 0,02$.

3c) Probabilidade de não ser da biologia (não ser da biologia diurno ou biologia noturno): $P((B_d \cup B_n)^c)$. Como para quaisquer eventos A e B sabe-se que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)\,,$$

então

$$\begin{aligned} P((B_d \cup B_n)^c) &= P(B_d^c \cap B_n^c) = P(B_d^c) + P(B_n^c) - P(B_d^c \cup B_n^c) \\ &= \underbrace{P(B_d^c)}_{1-P(B_d)} + \underbrace{P(B_n^c)}_{1-P(B_n)} - \underbrace{P((\underbrace{B_d \cap B_n}_{\emptyset})^c)}_{P(\Omega)=1} \\ &= 1 - P(B_d) - P(B_n) = 1 - 0,05 - 0,07 = 0,88\,. \end{aligned}$$

3d) Probabilidade de ser esportista ou aluno da biologia (diurno ou noturno): $P(E \cup B_d \cup B_n)$. A regra de adição de probabilidades implica

$$\begin{aligned} P(E \cup B_d \cup B_n) &= P(E \cup (B_d \cup B_n)) = P(E) + \underbrace{P(B_d \cup B_n)}_{1-P((B_d \cup B_n)^c)} - P(\underbrace{E \cap (B_d \cup B_n)}_{(E \cap B_d) \cup (E \cap B_n)}) \\ &= P(E) + 1 - \underbrace{P((B_d \cup B_n)^c)}_{\text{Exercício (3c)}} - \Big[P(E \cap B_d) + P(E \cap B_n) - P(\underbrace{(E \cap B_d) \cap (E \cap B_n)}_{\emptyset,\ \text{pois}\ B_d \cap B_n = \emptyset})\Big] \\ &= 0,40 + 1 - 0,88 - 0,01 - 0,02 = 0,49\,. \end{aligned}$$

3e) Probabilidade de não ser esportista e nem aluno da biologia (diurno ou noturno): $P(E^c \cap (B_d \cup B_n)^c)$.

$$\begin{aligned} P(E^c \cap (B_d \cup B_n)^c) &= P((E \cup B_d \cup B_n)^c) = 1 - \underbrace{P(E \cup B_d \cup B_n)}_{\text{Exercício (3d)}} \\ &= 1 - 0,49 = 0,51\,. \end{aligned}$$

> 4) Sejam A e B dois eventos em um dado espaço amostral de sorte que $P(A) = 0,20$, $P(B) = p$, $P(A \cup B) = 0,50$ e $P(A \cap B) = 0,10$. Determine o valor de p.

4) Da regra de adição de probabilidades, tem-se

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ 0,50 &= 0,20 + p - 0,10\,, \end{aligned}$$

donde $p = 0,40$.

> 5) Dois processadores, A e B, são colocados em teste por várias horas. A probabilidade de que um erro de cálculo ocorra no processador A é de p_a, no processador B, p_b, e, em ambos, p. Determinar a probabilidade de:
> a) pelo menos um dos processadores apresentar erro.
> b) nenhum dos processadores apresentar erro.
> c) apenas o processador A apresentar erro.
> d) apenas o processador B apresentar erro.

5) Definição dos eventos:

A: Ocorrência de erro no processador A; probabilidade de ocorrer erro no processador A: $P(A) = p_a$.
B: Ocorrência de erro no processador B; probabilidade de ocorrer erro no processador B: $P(B) = p_b$.

A ocorrência de erro nos processadores A e B é o evento $A \cap B$, que tem probabilidade $P(A \cap B) = p_{ab}$.

5a) A probabilidade de pelo menos um dos processadores apresentar erro é $P(A \cup B)$. Pela regra de adição de probabilidades, tem-se

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p_a + p_b - p_{ab}\,.$$

5b) A probabilidade de nenhum dos processadores apresentar erro é $P((A \cup B)^c)$, sendo que

$$P((A \cup B)^c) = 1 - \underbrace{P(A \cup B)}_{\text{Exercício (5a)}} = 1 - p_a - p_b + p_{ab}\,.$$

5c) A probabilidade de apenas o processador A apresentar erro é $P(A \setminus B)$, sendo que $P(A \setminus B) = P(A \cap B^c)$. Como os subconjuntos B e B^c formam uma partição, é imediato que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ (naturalmente, $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$), donde $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ e, por conseguinte,

$$P(A \setminus B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = p_a - p_{ab}\,.$$

5d) Pelos argumentos análogos apresentados no exercício (5c), a probabilidade de somente o processador B apresentar erro é

$$P(B \setminus A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(B \cap A) = p_b - p_{ab}\,.$$

6) Se $P(A\cup B)=p_{ab}$, $P(A)=p_a$ e $P(B)=x$, determine x se:
a) A e B forem mutualmente exclusivos.
b) A e B forem independentes (admita $P(A)\neq 1$).

6a) Para $A\cap B=\emptyset$ (eventos mutualmente exclusivos), a regra da adição de probabilidades implica

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(\underbrace{A\cap B}_{\emptyset}) \quad\Rightarrow\quad p_{ab}=p_a+x-0\,,$$

donde se tem $x=p_{ab}-p_a$.

6b) Para $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ (quando os eventos A e B forem independentes), a regra da adição de probabilidades implica

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)P(B)} \quad\Rightarrow\quad p_{ab}=p_a+x-p_a x\,,$$

donde se tem $x=\frac{p_{ab}-p_a}{1-p_a}$ (para $p_a\neq 1$).

7) Mostre que se os eventos A e B forem independentes, então A^c e B^c também o são.

7) Admite-se, por hipótese, que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, que é a condição de independência entre os eventos A e B. Logo, invocando a regra de adição de probabilidades, tem-se

$$\begin{aligned} P(A^c\cap B^c) &= P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)=1-\Big[P(A)+P(B)-\overbrace{P(A\cap B)}^{\substack{P(A)P(B),\\ \text{por hipótese}}}\Big] \\ &= \underbrace{1-P(A)}_{P(A^c)}-P(B)\Big[\underbrace{1-P(A)}_{P(A^c)}\Big]=P(A^c)\Big[\underbrace{1-P(B)}_{P(B^c)}\Big]=P(A^c)P(B^c)\,, \end{aligned}$$

conforme requisitado.

8) Sejam A, B, C e D pertencentes a um mesmo espaço amostral. Supondo $P(D)>0$, mostre que:
a) $P(A^c|D)=1-P(A|D)$.
b) $P(A\cup B|D)=P(A|D)+P(B|D)-P(A\cap B|D)$.
c) $P(A\cup A^c|D)=1$.
d) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$.

8a) De $A\cup A^c=\Omega$ (onde Ω indica o espaço amostral), pode-se escrever $(A\cup A^c)\cap D=\overbrace{\Omega\cap D}^{D}$, donde $D=(A\cap D)\cup(A^c\cap D)$. Como, naturalmente, $(A\cap D)\cap(A^c\cap D)=\emptyset$, então

$$P(D) \quad=\quad P(A\cap D)+P(A^c\cap D)\,;$$

a divisão desta equação por $P(D)>0$ implica

$$1=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}+\frac{P(A^c\cap D)}{P(D)} \quad\Leftrightarrow\quad P(A^c|D)=1-P(A|D)\,.$$

8b) De $(A\cup B)\cap D=(A\cap D)\cup(B\cap D)$, a regra de adição de probabilidades implica

$$P((A\cup B)\cap D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)-P((A\cap B)\cap D)\,;$$

a divisão desta equação por $P(D)>0$ conduz ao resultado desejado.

8c) De $A \cup A^c = \Omega$ (onde Ω é o espaço amostral), pode-se escrever $(A \cup A^c) \cap D = \overbrace{\Omega \cap D}^{D}$, donde se tem

$$P((A \cup A^c) \cap D) = P(D)\,.$$

A divisão por $P(D) > 0$ desta equação implica $P(A \cup A^c|D) = 1$.

8d) A recorrência sucessiva à regra de adição de probabildiades implica

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) \\
&= \underbrace{P(A \cup B)}_{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} + P(C) - P(\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{(A\cap C)\cup(B\cap C)}) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \underbrace{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}_{P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)} \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\,.
\end{aligned}$$

9) Se $P(A) \neq 0$, $P(B|A) = a/2$, e o evento B sempre é observado quando o evento A ocorre, determine o valor de a.

9) Se o evento B é sempre observado quando A ocorre, então $A \subset B$, donde segue $A \cap B = A$. Logo,

$$P(\underbrace{A \cap B}_{A}) = P(B|A)P(A) \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{a}{2}P(A)\,,$$

que implica $a = 2$, visto que $P(A) \neq 0$.

10) Uma classe de estatística teve a seguinte distribuição das notas finais: 4 do sexo masculino (M) e 6 do feminino foram reprovados, 8 do sexo masculino e 14 do feminino foram aprovados (A). Calcule:
a) $P(A \cup M^c)$ b) $P(A^c \cap M^c)$ c) $P(A|M)$ d) $P(M^c|A)$ e) $P(M|A)$

10) Dos dados fornecidos, pode-se montar a seguinte tabela de distribuição de notas.

Sexo\Desempenho	Aprovação (A)	Reprovação (A^c)
Masculino (M)	8	4
Feminino (M^c)	14	6

10a) Do total de 32 pessoas, o número total de pessoas aprovadas (homens e mulheres) junto com as mulheres ($A \cup M^c$) é, segundo a tabela, 8+14+6 (respectivamente, homens aprovados, mulheres aprovadas e mulheres reprovadas); logo, $P(A \cup M^c) = 28/32 = 7/8$.

10b) O número de pessoas do sexo feminino e que foram reprovadas (conjunto $A^c \cap M^c$) é 6; logo, $P(A^c \cap M^c) = 6/32 = 3/16$.

10c) Do total de $8 + 4 = 12$ homens, 8 obtiveram aprovação; logo, $P(A|M) = 8/12 = 2/3$.

10d) Do total de $8 + 14 = 22$ pessoas aprovadas, 14 são mulheres; logo, $P(M^c|A) = 14/22 = 7/11$.

10e) Do total de $8+14 = 22$ pessoas aprovadas, 8 são homens; logo, $P(M|A) = 8/22 = 4/11$ (o complementar de $P(M^c|A)$, calculado no exercício (10d)).

11) Peças produzidas por uma máquina são tais que 2%, 8% e 90% delas são, respectivamente, defeituosas, recuperáveis e perfeitas. De um lote, foram sorteadas, para análise, duas peças (com reposição). Determine a probabilidade de:
a) as duas serem defeituosas.
b) pelo menos uma ser perfeita.
c) uma ser recuperável e a outra, perfeita.

11) Definição dos eventos:

D: Sorteio de uma peça defeituosa.
R: Sorteio de uma peça recuperável.
P: Sorteio de uma peça perfeita.

Seja o par $(A, B) \subset \Omega \times \Omega$ (Ω denota o espaço amostral para um sorteio individual) o evento onde A e B são, respectivamente, os resultados do primeiro e segundo sorteios. Assumindo os sorteios independentes, tem-se $P((A, B)) = P(A)P(B)$.

11a) O evento (D, D), das duas peças escolhidas serem defeituosas, realiza-se com probabilidade $P((D, D)) = P(D)P(D) = 0,02 \cdot 0,02 = 0,0004$.

11b) O evento em questão ocorre com probabilidade complementar ao evento (P^c, P^c), onde não há sorteio de peça perfeita nas duas tentativas. Como $P((P^c, P^c)) = (1 - 0,90)(1 - 0,90) = 0,01$, a probabilidade de obter pelo menos uma peça perfeita é $1 - P((P^c, P^c)) = 0,99$.

11c) O evento em questão realiza-se através de dois eventos disjuntos, (R, P) e (P, R). Logo, a probabilidade requisitada é $P((R, P)) + P((P, R)) = 0,08 \cdot 0,90 + 0,90 \cdot 0,08 = 0,144$.

12) Numa cidade, estima-se que cerca de 30% dos habitantes tenham algum tipo de alergia. Sabe-se que 60% dos alérgicos praticam esportes, enquanto que esta porcentagem entre os não-alérgicos é de 30%. Escolhendo-se um indivíduo, de forma aleatória nesta cidade, determine a probabilidade dele:
a) praticar esporte.
b) ser alérgico, dado que não pratica esportes.

12) Definição dos eventos:

A: Alérgicos.
E: Praticantes de esporte.

Sabe-se, do enunciado da quest ao, que $P(A) = 0,30$ (logo, $P(A^c) = 1 - P(A) = 0,70$), $P(E|A) = 0,60$ e $P(E|A^c) = 0,30$.

12a) Como os subconjuntos A e A^c formam uma partição, tem-se $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$ (com $(E \cap A) \cap (E \cap A^c) = \emptyset$), donde se tem

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap A^c) = P(E|A)P(A) + P(E|A^c)P(A^c) = 0,60 \cdot 0,30 + 0,30 \cdot 0,70 = 0,39\,,$$

que é a probabilidade da pessoa praticar esporte.

12b) Do exercício (11a), é imediato que a probabilidade da pessoa não praticar esportes é $P(E^c) = 1 - P(E) = 0,61 \neq 0$. Logo,

$$P(A|E^c) = \frac{P(A \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{P(E^c|A)P(A)}{P(E^c)} = \frac{\big[1 - P(E|A)\big]P(A)}{P(E^c)} = \frac{(1 - 0,60)\,0,30}{0,61} = \frac{12}{61} \approx 0,20\,.$$

13) As preferências de homens e mulheres por cada gênero de filme alugado em uma locadora de vídeos estão apresentadas na tabela abaixo.

Sexo\Filme	Comédia	Romance	Policial
Homens	150	90	200
Mulheres	100	200	60

Sorteando-se, ao acaso, uma dessas locações, determine a probabilidade de:

a) uma mulher ter alugado um filme policial.
b) uma mulher ter alugado um filme, sabendo-se que o gênero era policial.
c) o filme ser policial, dado que foi alugado por uma mulher.
d) o filme não ser policial, dado que foi alugado por um homem.

13a) De um total de $150 + 100 + 90 + 200 + 200 + 60 = 800$ locações, 60 filmes correspondem à situação mencionada, implicando a probabilidade de $\frac{60}{800} = \frac{3}{40}$.

13b) De um total de $200 + 60 = 260$ locações de filmes policiais, as mulheres alugaram 60 deles, implicando a probabilidade de $\frac{60}{260} = \frac{3}{13}$.

13c) De um total de $100 + 200 + 60 = 360$ locações por mulheres, 60 filmes correspondem à situação mencionada, implicando a probabilidade de $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$.

13d) De um total de $150 + 90 + 200 = 440$ locações de filmes por homens, $150 + 90 = 240$ correspondem à situação mencionada, implicando a probabilidade de $\frac{240}{440} = \frac{6}{11}$.

14) Em um bairro existem três empresas de TV a cabo e 20 mil residências. A empresa TA tem 2100 assinantes, a TB tem 1850 e a empresa TC tem 2600 assinantes, sendo que algumas residências em condomínios subscrevem aos serviços de mais de uma empresa. Assim, há 420 residências que são assinantes de TA e TB, 120 de TA e TC, 180 de TB e TC e 30 que são assinantes das três empresas. Se uma residência desse bairro é sorteada ao acaso, determinar a probabilidade de:
a) ser assinante somente da TA.
b) assinar pelo menos uma delas.
c) não ter TV a cabo.

14) Definição dos eventos:

A: Assinatura com a empresa TA.
B: Assinatura com a empresa TB.
C: Assinatura com a empresa TC.

Assumindo equiprobabilidade no sorteio das residências, tem-se

$$\begin{array}{lll} P(A) = \frac{2100}{20000} = 0,1050\,, & P(B) = \frac{1850}{20000} = 0,0925\,, & P(C) = \frac{2600}{20000} = 0,1300\,, \\ P(A\cap B) = \frac{420}{20000} = 0,0210\,, & P(A\cap C) = \frac{120}{20000} = 0,0060\,, & P(B\cap C) = \frac{180}{20000} = 0,0090 \end{array}$$

e $P(A\cap B\cap C) = \frac{30}{20000} = 0,0015$.

14a) A probabilidade de ser assinante somente da TA é dada por

$$\begin{aligned} P(A\cap B^c\cap C^c) &= P(A\cap (B\cup C)^c) = P(A) - P(A\cap (B\cup C)) = P(A) - P((A\cap B)\cup(A\cap C)) \\ &= P(A) - \big[P(A\cap B) + P(A\cap C) - P(A\cap B\cap C)\big] \\ &= 0,1050 - \big[0,0210 + 0,0060 - 0,0015\big] = 0,0795\,, \end{aligned}$$

onde usou-se o fato de $(B\cup C)$ e $(B\cup C)^c$ constituírem uma partição (vide primeira linha) e a regra da adição de probabilidades.

14b) A probabilidade de assinar pelo menos uma das TV a cabo é dada por

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P((A\cup B)\cup C) = P(A\cup B) + P(C) - P((A\cup B)\cap C) \\ &= \overbrace{P(A) + P(B) - P(A\cap B)}^{P(A\cup B)} + P(C) - P((A\cap C)\cup(B\cap C)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - \big[P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)\big] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C) \\ &= 0,1050 + 0,0925 + 0,1300 - 0,0210 - 0,0060 - 0,0090 + 0,0015 = 0,2930\,, \end{aligned}$$

onde a regra de adição de probabilidades foi invocada sucessivas vezes.

14c) A probabilidade de não ter TV a cabo é dada por

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) \;=\; P((A \cup B \cup C)^c) = 1 - \underbrace{P(A \cup B \cup C)}_{\text{Exercício (14b)}} = 1 - 0,2930 = 0,7070\,.$$

> 15) Das pacientes de uma clínica de ginecologia com idade acima de 40 anos, 60% são ou foram casadas e 40% são solteiras. Sendo solteira, a probabilidade de ter apresentado um distúrbio hormonal no último ano é de 10%, enquanto que para as demais essa probabilidade aumenta para 30%. Determinar:
> a) a probabilidade de uma paciente escolhida ao acaso ter apresentado um distúrbio hormonal (no último ano).
> b) se a paciente sorteada teve distúrbio hormonal (no último ano), a probabilidade de ser solteira.
> c) se duas pacientes são escolhidas ao acaso e com reposição, a probabilidade de pelo menos uma ter manifestado distúrbio (no último ano).

15) Definição dos eventos:

S: Solteira (denotar-se-á por S^c aquelas que são ou foram casadas).
D: Ocorrência de distúrbio hormonal no último ano.

Sabe-se que $P(S) = 0,40$, $P(S^c) = 0,60$, $P(D|S) = 0,10$ e $P(D|S^c) = 0,30$.

15a) Notando que os subconjuntos S e S^c formam uma partição, pode-se representar o evento D por $D = (D \cap S) \cup (D \cap S^c)$ (com $(D \cap S) \cap (D \cap S^c) = \emptyset$). Desta forma, a probabilidade de uma paciente escolhida ao acaso ter apresentado um distúrbio hormonal (no último ano) é dada por

$$P(D) \;=\; P(D \cap S) + P(D \cap S^c) = P(D|S)P(S) + P(D|S^c)P(S^c) = 0,10 \cdot 0,40 + 0,30 \cdot 0,60 = 0,22\,.$$

15b) Sabendo-se, pelo exercício (15a), que $P(D) \neq 0$, a probabilidade da paciente ser solteira, dado que teve distúrbio hormonal (no último ano), é dada por

$$P(S|D) \;=\; \frac{P(S \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|S)P(S)}{\underbrace{P(D)}_{\text{Exercício (15a)}}} = \frac{0,10 \cdot 0,40}{0,22} = \frac{2}{11} \approx 0,18\,.$$

15c) Do exercício (15a), a probabilidade da paciente escolhida não ter apresentado distúrbio no último ano é $P(D^c) = 1 - P(D)$. Como o sorteio das duas pacientes (com reposição) é independente, a probabilidade de nenhuma das duas ter manifestado o problema é $P(D^c)P(D^c)$, o que implica a probabilidade de pelo menos uma delas ter apresentado distúrbio hormonal no último ano ser a probabilidade complementar $1 - P(D^c)P(D^c) = 1 - \big[1 - P(D)\big]^2 = 1 - (1 - 0,22)^2 = 0,3916$.

> 16) Sabe-se que, dados os eventos A, B e C de um espaço amostral Ω, tem-se $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(A \cap B \cap C) = 1/6$ e $P(B \cap C) = 1/4$. Estime $P(A)$ (em termos de cotas inferior e superior).

16) Como $A \cap B \cap C \subset A$, tem-se

$$P(A) \geq P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6}\,.$$

Por outro lado, como $(B \cap C)$ e $(B \cap C)^c$ formam uma partição e $A \cap (B \cap C)^c \subset (B \cap C)^c$, tem-se

$$\begin{aligned} P(A) \;&=\; P(A \cap (B \cap C)) + P(A \cap (B \cap C)^c) \\ &\leq\; P(A \cap B \cap C) + P((B \cap C)^c) = P(A \cap B \cap C) + 1 - P(B \cap C) = \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{11}{12}\,. \end{aligned}$$

Logo, tem-se $\frac{1}{6} \leq P(A) \leq \frac{11}{12}$.

17) Numa região, a probabilidade de chuva em um dia qualquer de primavera é de $0,1$. Um meteorologista acerta suas previsões em 80% dos dias em que chove e em 90% dos dias em que não chove.
a) Determinar a probabilidade deste meteorologista acertar a previsão.
b) Havendo acerto na previsão feita, determinar a probabilidade de ter sido um dia de chuva.

17) Definição dos eventos:

A: Acerto da previsão pelo meteorologista.
C: Ocorrência de chuva (em um dia qualquer de primavera).

A partir das informações fornecidas, sabe-se que $P(C) = 0,1$ (logo, $P(C^c) = 1 - P(C) = 0,9$), $P(A|C) = 0,8$ e $P(A|C^c) = 0,9$.

17a) Notando que os subconjuntos C e C^c formam uma partição, pode-se escrever $A = (A \cap C) \cup (A \cap C^c)$, e a probabilidade deste meteorologista acertar a previsão é dada por

$$P(A) \quad = \quad P(A \cap C) + P(A \cap C^c) = P(A|C)P(C) + P(A|C^c)P(C^c) = 0,8 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,9 = 0,89\,.$$

17b) Do exercício (17a), sabe-se que $P(A) \neq 0$. Havendo acerto na previsão feita, a probabilidade de ter sido um dia de chuva é dada por

$$P(C|A) \quad = \quad \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|C)P(C)}{P(A)} = \frac{0,8 \cdot 0,1}{0,89} = \frac{8}{89} \approx 0,09\,.$$

18) Um médico desconfia que um paciente tem tumor no abdômen, já que isto ocorreu em 70% dos casos similares que tratou. Se o paciente de fato tiver o tumor, o exame ultra-som o detectará com probabilidade $0,9$. Entretanto, se ele não tiver o tumor, o exame pode, erroneamente, indicar que tem com probabilidade $0,1$. Se o exame detectou um tumor, determinar a probabilidade do paciente tê-lo de fato.

18) Definição dos eventos:

T: Ocorrência de tumor.
U: Indicação de tumor pelo exame ultra-som.

A partir das informações fornecidas, sabe-se que $P(T) = 0,7$ (logo, $P(T^c) = 1 - P(T) = 0,3$), $P(U|T) = 0,9$ e $P(U|T^c) = 0,1$. Notando que os subconjuntos T e T^c formam uma partição, pode-se escrever $U = (U \cap T) \cup (U \cap T^c)$, e a probabilidade do exame detectar tumor é dada por

$$P(U) \quad = \quad P(U \cap T) + P(U \cap T^c) = P(U|T)P(T) + P(U|T^c)P(T^c) = 0,9 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,66 \neq 0\,.$$

Desta forma, havendo indicação de tumor pelo ultra-som, a probabilidade do paciente tê-lo de fato é dada por

$$P(T|U) \quad = \quad \frac{P(T \cap U)}{P(U)} = \frac{P(U|T)P(T)}{P(U)} = \frac{0,9 \cdot 0,7}{0,66} = \frac{21}{22} \approx 0,95\,.$$

19) Acredita-se que numa certa população, 20% de seus habitantes sofrem de algum tipo de alergia e são classificados como alérgicos para fins de saúde pública. Sendo alérgico, a probabilidade de ter reação a um certo antibiótico é de $0,5$. Para os não alérgicos, esta probabilidade é de $0,05$. Uma pessoa dessa população teve reação ao ingerir o antibiótico; determinar a probabilidade dela ser do grupo não alérgico.

19) Definição dos eventos:

A: Pessoa com alergia.
R: Reação ao antibiótico.

A partir das informações fornecidas, sabe-se que $P(A) = 0,20$ (logo, $P(A^c) = 1 - P(A) = 0,80$), $P(R|A) = 0,50$ e $P(R|A^c) = 0,05$. Notando que os subconjuntos A e A^c formam uma partição, pode-se escrever $R = (R \cap A) \cup (R \cap A^c)$, e a probabilidade da pessoa apresentar reação ao antibiótico é dada por

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \cap A) + P(R \cap A^c) = P(R|A)P(A) + P(R|A^c)P(A^c) \\ &= 0,50 \cdot 0,20 + 0,05 \cdot 0,80 = 0,14 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Desta forma, havendo reação ao antibiótico, a probabilidade desta pessoa não ser do grupo alérgico é dada por

$$P(A^c|R) = 1 - P(A|R) = 1 - \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = 1 - \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = 1 - \frac{0,50 \cdot 0,20}{0,14} = \frac{2}{7} \approx 0,29\,.$$

20) Uma família viaja ao litoral. A probabilidade de congestionamento na estrada é $0,6$. Havendo congestionamento, a probababilidade dos filhos brigarem no carro é $0,8$ e, sem congestionamento, a briga pode aparecer com probabilidade $0,4$. Quando há briga, com ou sem congestionamento, a probabilidade do pai perder a paciência com os filhos é de $0,7$. Havendo congestionamento, o pai pode perder a paciência com os filhos mesmo sem brigas, o que ocorre com probabilidade $0,5$. Quando não há congestionamento e nem brigas, o pai não perde a paciência. Determinar a probabilidade de:
a) não ter havido congestionamento se o pai não perdeu a paciência com os filhos.
b) ter havido briga, dado que o pai perdeu a paciência com os filhos.

20) Definição dos eventos:

C: Ocorrência de congestionamento.
B: Ocorrência de briga dos filhos.
$\tilde{P}$: Perca de paciência do pai.

Das informações fornecidas, sabe-se que:

$$\begin{array}{rclrclrclrcl} P(C) &=& 0,6 & P(B|C) &=& 0,8 & P(B|C^c) &=& 0,4 & & & \\ P(\tilde{P}|B \cap C) &=& 0,7 & P(\tilde{P}|B \cap C^c) &=& 0,7 & P(\tilde{P}|B^c \cap C) &=& 0,5 & P(\tilde{P}|B^c \cap C^c) &=& 0 \end{array}$$

Segue, imediatamente, que

$$\begin{array}{lclclclcl} P(C^c) &=& 1 - P(C) &=& 1 - 0,6 &=& 0,4 & & \\ P(B \cap C) &=& P(B|C)P(C) &=& 0,8 \cdot 0,6 &=& 0,48 & & \\ P(B \cap C^c) &=& P(B|C^c)P(C^c) &=& 0,4 \cdot 0,4 &=& 0,16 & & \\ P(B^c \cap C) &=& P(B^c|C)P(C) &=& \big[1 - P(B|C)\big]P(C) &=& (1 - 0,8)\,0,6 &=& 0,12 \\ P(B^c \cap C^c) &=& P(B^c|C^c)P(C^c) &=& \big[1 - P(B|C^c)\big]P(C^c) &=& (1 - 0,4)\,0,4 &=& 0,24 \end{array}$$

Notando que os subconjuntos $(B \cap C)$ e $(B \cap C)^c$ formam uma partição, assim como os pares B e B^c, e C e C^c, a probabilidade do pai perder a paciência é dada por

$$\begin{aligned} P(\tilde{P}) &= P(\tilde{P} \cap (B \cap C)) + P(\tilde{P} \cap (B \cap C)^c) \\ &= P(\tilde{P} \cap B \cap C) + P(\tilde{P} \cap (B^c \cup C^c)) \\ &= P(\tilde{P} \cap B \cap C) + P((\tilde{P} \cap B^c) \cup (\tilde{P} \cap C^c)) \\ &= P(\tilde{P} \cap B \cap C) + \underbrace{P(\tilde{P} \cap B^c)}_{P((\tilde{P} \cap B^c) \cap C) + P((\tilde{P} \cap B^c) \cap C^c)} + \underbrace{P(\tilde{P} \cap C^c)}_{P((\tilde{P} \cap C^c) \cap B) + P((\tilde{P} \cap C^c) \cap B^c)} - P(\tilde{P} \cap B^c \cap C^c) \\ &= P(\tilde{P}|B \cap C)P(B \cap C) + P(\tilde{P}|B^c \cap C)P(B^c \cap C) + P(\tilde{P}|B^c \cap C^c)P(B^c \cap C^c) + \\ &\quad + P(\tilde{P}|B \cap C^c)P(B \cap C^c) + \cancel{P(\tilde{P}|B^c \cap C^c)P(B^c \cap C^c)} - \cancel{P(\tilde{P}|B^c \cap C^c)P(B^c \cap C^c)} \\ &= 0,7 \cdot 0,48 + 0,5 \cdot 0,12 + 0 \cdot 0,24 + 0,7 \cdot 0,16 = 0,508\,. \end{aligned}$$

A probabilidade do pai não perder a paciência é, naturalmente, $P(\tilde{P}^c) = 1 - P(\tilde{P}) = 0,492$.

20a) Sendo $P(\tilde{P}) \neq 0$ e notando que os subconjuntos B e B^c formam uma partição, a probabilidade de não ter havido congestionamento se o pai não perdeu a paciência com os filhos é dada por

$$\begin{aligned}
P(C^c|\tilde{P}^c) &= \frac{P(C^c \cap \tilde{P}^c)}{P(\tilde{P}^c)} = \frac{P((C^c \cap \tilde{P}^c) \cap B) + P((C^c \cap \tilde{P}^c) \cap B^c)}{P(\tilde{P}^c)} \\
&= \frac{P(\tilde{P}^c|B \cap C^c)P(B \cap C^c) + P(\tilde{P}^c|B^c \cap C^c)P(B^c \cap C^c)}{P(\tilde{P}^c)} \\
&= \frac{\big[1 - P(\tilde{P}|B \cap C^c)\big]P(B \cap C^c) + \big[1 - P(\tilde{P}|B^c \cap C^c)\big]P(B^c \cap C^c)}{P(\tilde{P}^c)} \\
&= \frac{\big(1 - 0,7\big) \cdot 0,16 + (1 - 0) \cdot 0,24}{0,492} = \frac{24}{41} \approx 0,585\,.
\end{aligned}$$

20b) Como $P(\tilde{P}) \neq 0$, e notando que os subconjuntos C e C^c formam uma partição, a probabilidade de ter havido briga, dado que o pai perdeu a paciência com os filhos, é dada por

$$\begin{aligned}
P(B|\tilde{P}) &= \frac{P(B \cap \tilde{P})}{P(\tilde{P})} = \frac{P((B \cap \tilde{P}) \cap C) + P((B \cap \tilde{P}) \cap C^c)}{P(\tilde{P})} \\
&= \frac{P(\tilde{P}|B \cap C)P(B \cap C) + P(\tilde{P}|B \cap C^c)P(B \cap C^c)}{P(\tilde{P})} \\
&= \frac{0,7 \cdot 0,48 + 0,7 \cdot 0,16}{0,508} = \frac{112}{127} \approx 0,882\,.
\end{aligned}$$