Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica
Instituto de Informática / UFRGS

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

6 – Endorrelações, Ordenação e Equivalência

6.1 Propriedades de uma Endorrelação
6.2 Fecho de uma Endorrelação
6.3 Ordenação
6.4 Equivalência e Partição

6 Endorrelações, Ordenação e Equivalência

- **Já foi introduzido**
  - endorrelações são especialmente importantes
- **Estudos desenvolvidos especificamente**
  - *propriedades*
  - fecho
  - ordem
  - equivalência

◆ Importantes aplicações das endorrelações de ordem

- classificação de dados
- semântica de sistemas concorrentes

6 – Endorrelações, Ordenação e Equivalência

6.1 Propriedades de uma Endorrelação

◆ Reflexiva

- todo elemento está relacionado consigo mesmo
- exemplo: igualdade sobre os números reais
  - todo número é igual a si mesmo

◆ Simétrica

- sempre que um elemento estiver relacionado com outro
  - vice-versa também ocorre

- exemplo: parentesco
  - se João é parente de José (por exemplo, são irmãos),
  - então a vice-versa também é verdadeira:

◆ Transitiva

- exemplo: menor sobre os números naturais
  - caso um número seja menor que outro
  - o qual, por sua vez, é menor que um terceiro
  - então o primeiro é menor que o terceiro

- contra-exemplo: faz fronteira com nos países na América do Sul
  - Brasil faz fronteira com a Argentina
  - Argentina faz fronteira com o Chile
  - *entretanto*, o Brasil *não* faz fronteira com o Chile

- **Relacionado com propriedades reflexiva e simétrica**
  - existem as propriedades irreflexiva e anti-simétrica
  - possuem uma noção de dualidade
  - mas *não* são noções complementares
- **Representação via grafos ou matrizes**
  - auxilia no entendimento e estudo das propriedades

Def: Relação Reflexiva, Irreflexiva

A conjunto, R endorrelação em A. Então R é:

- Relação Reflexiva
  - $(\forall a \in A)(a\, R\, a)$
- Relação Irreflexiva ou Relação Anti-Reflexiva
  - $(\forall a \in A)(\neg(a\, R\, a))$

◆ Reflexiva × irreflexiva

- *não* são noções complementares
- negação da reflexiva: $(\exists a \in A)(\neg(a\, R\, a))$
- é possível definir uma relação
  - *simultaneamente* reflexiva e irreflexiva
  - *não* é reflexiva *nem* irreflexiva

Exp: Relação Reflexiva e Irreflexiva

$A = \{ 0, 1, 2 \}$

- **Reflexivas, mas não irreflexivas**
  - $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$
  - $\langle \mathbf{P}(A), \subseteq \rangle$
  - $A^2: A \rightarrow A$
  - $\langle A, = \rangle$
- **Irreflexivas, mas não reflexivas**
  - $\langle \mathbf{Z}, \neq \rangle$
  - $\langle \mathbf{P}(A), \subset \rangle$
  - $\varnothing: A \rightarrow A$
  - $\langle A, R \rangle$ $\quad R = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$
- **Nem reflexiva, nem irreflexiva**
  - $\langle A, S \rangle$ $\quad S = \{ \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$

Matriz

- *Reflexiva*: a diagonal da matriz contém somente verdadeiro
- *Irreflexiva*: a diagonal da matriz contém somente falso

Grafo

- *Reflexiva*: qq nodo tem um arco com origem e destino nele mesmo
- *Irreflexiva*: qq nodo *não* tem um arco com origem e destino nele mesmo

Exp: Relação Reflexiva e Irreflexiva

$A = \{ 0, 1, 2 \}$

- Reflexivas, mas *não* irreflexivas
  - $A^2: A \to A$
  - $\langle A, = \rangle$ = é definida por $\{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$
- Irreflexivas, mas *não* reflexivas
  - $\varnothing: A \to A$
  - $R = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$
- *Não* reflexiva, *nem* irreflexiva: como seria a matriz?

A^2	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

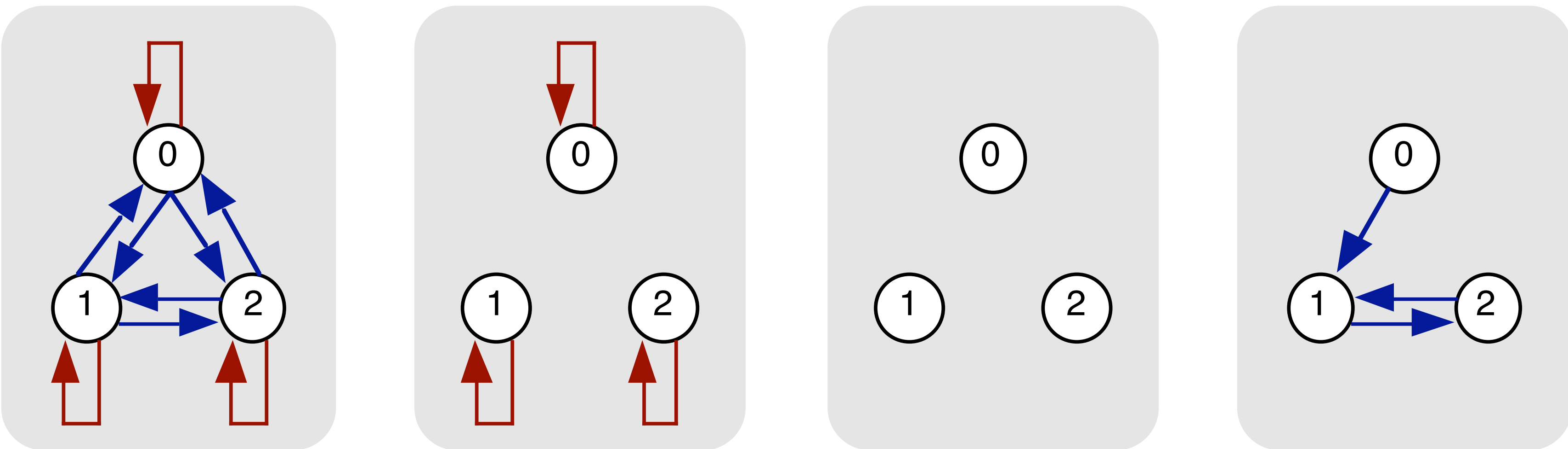
=	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1

$\varnothing$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0

R	0	1	2
0	0	1	0
1	0	0	1
2	0	1	0

Exp: Relação Reflexiva e Irreflexiva

- Reflexivas, mas *não* irreflexivas
  - A^2: A → A
  - ⟨A, =⟩, = é definida por { ⟨0, 0⟩, ⟨1, 1⟩, ⟨2, 2⟩ }
- Irreflexivas, mas *não* reflexivas
  - ∅: A → A
  - R = { ⟨0, 1⟩, ⟨1, 2⟩, ⟨2, 1⟩ }
- *Não* reflexiva, *nem* irreflexiva: como seria o grafo?



Def: Relação Simétrica, Anti-Simétrica

A conjunto e R endorrelação em A. Então R é

- Relação Simétrica

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\,R\,b \rightarrow b\,R\,a)$$

- Relação Anti-Simétrica

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a\,R\,b \wedge b\,R\,a \rightarrow a = b)$$

◆ Simetria × Anti-Simetria

- *não* são noções complementares

Exp: Relação Simétrica, Anti-Simétrica

X conjunto qualquer

- Simétricas
  - $X^2: X \to X$, $\varnothing: X \to X$
  - $\langle X, = \rangle$, $\langle X, \neq \rangle$
  - $\langle \mathbf{P}(X), = \rangle$

- Anti-simétricas
  - $\langle X, = \rangle$
  - $\langle \mathbf{P}(X), = \rangle$
  - $\varnothing: X \to X$
  - $\langle \mathbf{N}, R \rangle$, supondo $R = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{N}^2 \mid y = x^2 \}$

- *Nem* simétrica, *nem* anti-simétrica
  - $S = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$

◆ Matriz

- Simétrica
  - metade acima da diagonal: *imagem espelhada* abaixo
- Anti-simétrica
  - célula verdadeira em uma das metades (diagonal)
  - correspondente na outra metade é falsa

◆ Grafo

- Simétrica: entre dois nodos
  - ou *não* existe seta
  - ou existem *duas* setas, uma em cada sentido
- Anti-simétrica
  - no *máximo uma* seta entre dois nodos qq

Exp: Relação Simétrica (S), Anti-Simétrica (AS)

$A = \{ 0, 1, 2 \}$

- A^2 — S
- $\langle A, = \rangle$ — S, AS
- $R: A \to A$ tal que $R = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$ — AS
- $S: A \to A$ tal que $S = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$ — nenhuma

A^2	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

=	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1

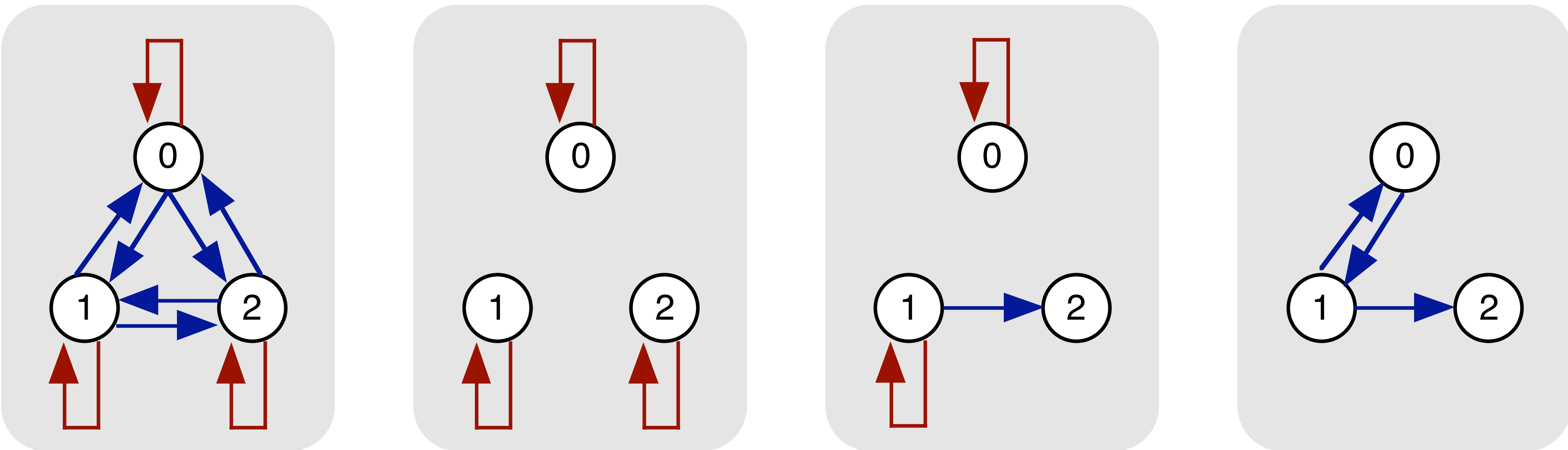
R	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	1
2	0	0	0

S	0	1	2
0	0	1	0
1	1	0	1
2	0	0	0

Exp: Relação Simétrica, Anti-Simétrica

$A = \{ 0, 1, 2 \}$

- A^2 S
- $\langle A, = \rangle$ S, AS
- R: $A \rightarrow A$ tal que $R = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$ AS
- S: $A \rightarrow A$ tal que $S = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$ nenhuma



Def: Relação Transitiva

A conjunto e R endorrelação em A. R é uma Relação Transitiva

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)(a\,R\,b \land b\,R\,c \rightarrow a\,R\,c)$$

Exp: Relação Transitiva

$A = \{ 0, 1, 2 \}$ e X conjunto qq

- $X^2: X \rightarrow X$, $\varnothing: X \rightarrow X$
- $\langle X, = \rangle$
- $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbf{Z}, < \rangle$
- $\langle \mathbf{P}(X), \subseteq \rangle$, $\langle \mathbf{P}(X), \subset \rangle$

Exp: Relação Não-Transitiva

$A = \{ 0, 1, 2 \}$ e X conjunto qq

- $\langle \mathbf{Z}, \neq \rangle$ (por quê?)
- $\langle A, R \rangle$ $R = \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}$
- $\langle A, S \rangle$ $S = \{ \langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$

◆ Representação como matriz: transitividade

- *Não* é especialmente vantajosa

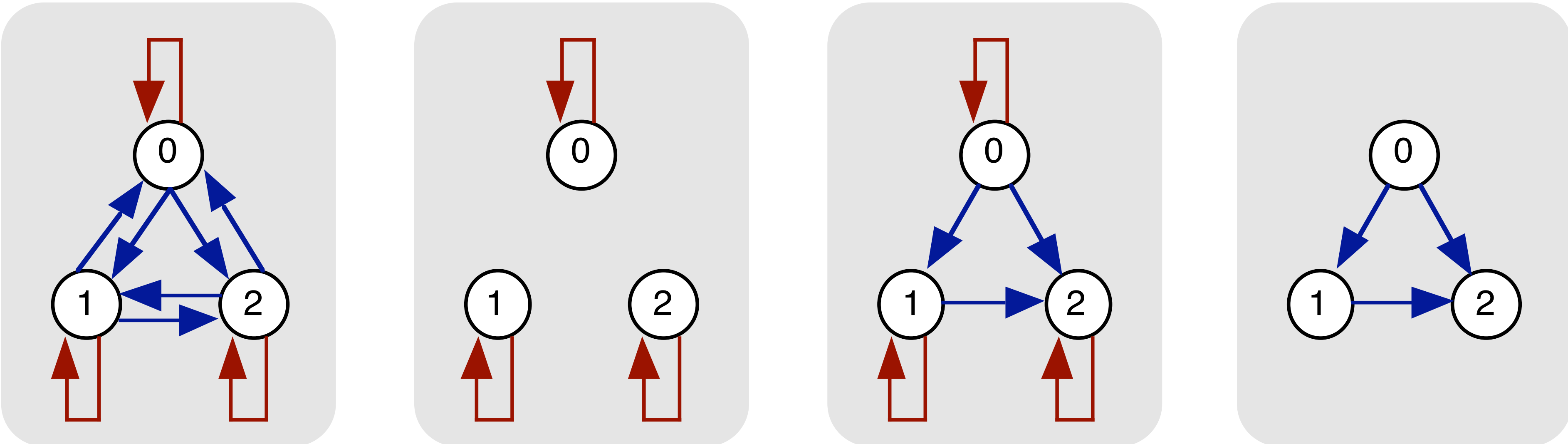
◆ Representação como grafo: transitividade

- interpretação: o grafo explicita todos os caminhos possíveis entre dois nodos
- caminho???

Exp: Relação Transitiva

$A = \{ 0, 1, 2 \}$

- $A^2 : A \rightarrow A$
- $\langle A, = \rangle$
- $\langle A, \leq \rangle$
- $\langle A, < \rangle$



6 – Endorrelações, Ordenação e Equivalência

6.1 Propriedades de uma Endorrelação
6.2 Fecho de uma Endorrelação
6.3 Ordenação
6.4 Equivalência e Partição

6.2 Fecho de uma Endorrelação

- **Freqüentemente é desejável estender uma relação**
  - garantir que satisfaz determinado conjunto de propriedades
  - exemplo: garantir que uma relação R é reflexiva
    - ∗ se R *não* é reflexiva,
    - ∗ então introduz os pares (e somente estes) que garantem a reflexão

Def: Fecho de uma Relação

$R: A \to A$ endorrelação, P conjunto de propriedades

$$\text{FECHO-P}(R)$$

Fecho de R em Relação ao P

- menor endorrelação em A que contém R
- e que satisfaz às propriedades de P

◆ **Portanto, para qq conjunto de propriedades P**

$$R \subseteq \text{FECHO-P}(R)$$

- quando $R = \text{FECHO-P}(R)$?

- **Fecho Reflexivo de R: $A \to A$**

$$\text{FECHO-}\{\text{ reflexiva }\}(R) = R \cup \{ \langle a, a\rangle \mid a \in A \}$$

- **Fecho Simétrico de R: $A \to A$**

$$\text{FECHO-}\{\text{ simétrica }\}(R) = R \cup \{ \langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R \}$$

- **Fecho Transitivo de R: $A \to A$ (definição indutiva!!)**
  - se $\langle a, b\rangle \in R$
    - então $\langle a, b\rangle \in \text{FECHO-}\{\text{ transitiva }\}(R)$
  - se $\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle \in \text{FECHO-}\{\text{ transitiva }\}(R)$
    - então $\langle a, c\rangle \in \text{FECHO-}\{\text{ transitiva }\}(R)$
  - os únicos elementos do fecho transitivo são os construídos acima

- **Dois fechos são especialmente importantes para Computação e Informática**

  - Fecho Transitivo de R

$$R^{+} = \text{FECHO-}\{\ \text{transitiva}\ \}(R)$$

  - Fecho Reflexivo e Transitivo de R

$$R^{*} = \text{FECHO-}\{\ \text{reflexiva, transitiva}\ \}(R)$$

Exp: Fecho de uma Relação

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ e $R: A \to A$ uma endorrelação

$$R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$$

Fecho Reflexivo

???

Fecho Simétrico

???

Fecho Transitivo

???

Fecho Reflexivo e Transitivo

???

Exp: Fecho de uma Relação

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ e $R: A \to A$ uma endorrelação

$$R = \{ \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle \}$$

Fecho Reflexivo

$$\{ \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle \}$$

Fecho Simétrico

$$\{ \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 5, 1\rangle \}$$

Fecho Transitivo

$$R^{+} = \{ \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle \}$$

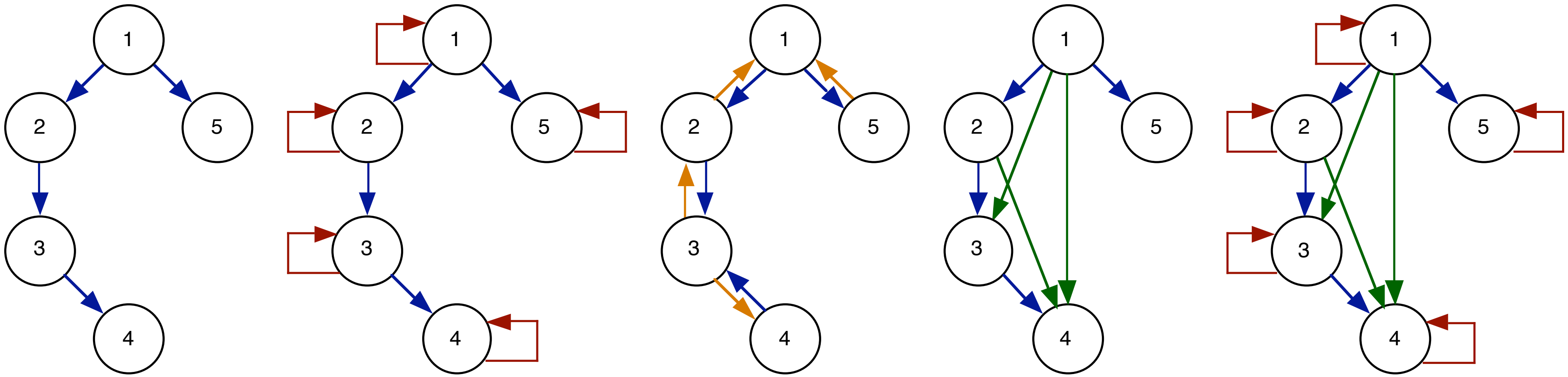
Fecho Reflexivo e Transitivo

$$R^{*} = \{ \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle \}$$

Exp: Fecho de uma Relação

$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ e $R: A \to A$ uma endorrelação

$$R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$$



Fechos ilustrados?

6 – Endorrelações, Ordenação e Equivalência

6.1 Propriedades de uma Endorrelação
6.2 Fecho de uma Endorrelação
6.3 Ordenação
6.4 Equivalência e Partição

6.3 Ordenação

- **Relação de ordem**
  - tipo especial e importante de relação
  - reflete a noção intuitiva de ordem
  - exemplos de relações de ordem já estudadas
    - continência em conjuntos
    - implicação em proposições
    - menor ou igual (ou simplesmente menor)
- **Propriedades fundamentais de uma ordem?**
- **Outras Propriedades de uma ordem?**

◆ **Necessário introduzir a seguinte terminologia**

Def: Relação Conexa

$R: A \rightarrow A$ uma endorrelação. Então R é uma Relação Conexa se

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \, R \, b \vee b \, R \, a \vee a = b)$$

Exp: Relação Conexa

$A = \{ a \}$, $B = \{ a, b \}$ e $C = \{ 0, 1, 2 \}$

- $\varnothing: B \rightarrow B$ ✘
- $(C, <)$, dado que $<$ é definida por $\{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \}$ ✔
- $=: A \rightarrow A$ ✔

Exp: Filas de caixas de um banco (motivacional)

- Propriedades fundamentais

Transitiva uma noção intuitiva da ordem

- se João antecede José, e José antecede de Maria,
  - então João antecede Maria

Anti-simétrica princípio que melhor caracteriza a ordem

- a ordenado em relação à b e vice-versa
  - só faz sentido se a for igual a b
  - no exemplo, se for o mesmo cliente

Exp: …Filas de caixas de um banco

- Outras Propriedades

Parcial/Conexa. As duas são válidas

- no exemplo, nem todos os clientes estão relacionados entre si
  - caixa para idosos, grávidas e outros (fila separada)

Reflexiva/Irreflexiva. As duas são válidas

- Reflexiva
  - $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$)
- Irreflexiva
  - $\langle \mathbf{Z}, < \rangle$)
- no exemplo motivacional: natural considerar irreflexiva
  - reflexiva (todo cliente antecede a si próprio) faz sentido

6 – Endorrelações, Ordenação e Equivalência

6.3.1 Relação de Ordem

Def: Relação de Ordem Parcial/Conexa Ampla/Estrita

$R: A \to A$ uma endorrelação

Relação de Ordem Parcial (Ampla)

Reflexiva, anti-simétrica e transitiva

Relação de Ordem Parcial Estrita

Irreflexiva, anti-simétrica e transitiva

Relação de Ordem Conexa (Ampla) ou Cadeia

de ordem parcial ampla e conexa

Relação de Ordem Conexa Estrita ou Cadeia Estrita

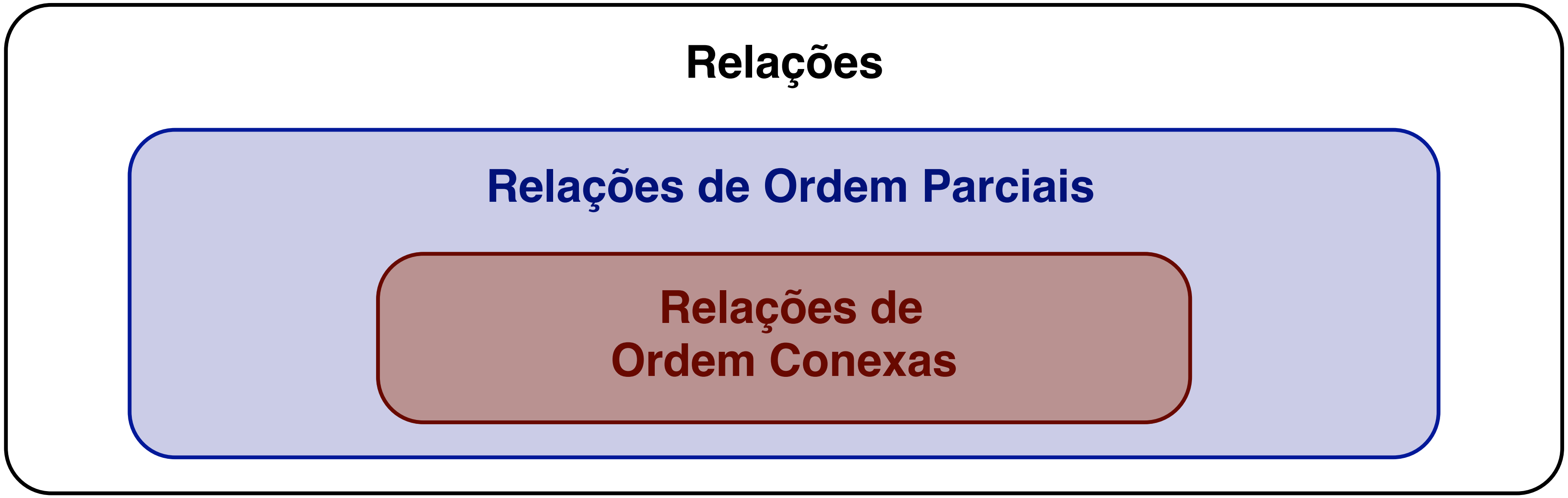
de ordem parcial estrita e conexa

	Ordem Parcial	Ordem Parcial Estrita	Cadeia	Cadeia Estrita
Reflexiva	✔		✔	
Irreflexiva		✔		✔
Anti-simétrica	✔	✔	✔	✔
Transitiva	✔	✔	✔	✔
Conexa			✔	✔

◆ Anti-simetria e transifividade

- propriedades de qualquer tipo de relação de ordem

- **Toda relação de ordem conexa (ampla ou estrita)**
  - é uma relação de ordem parcial (ampla ou estrita)
  - vice-versa nem sempre é verdadeira (por quê?)



- **Para $\langle A, R \rangle$, o conjunto A é dito**
  - Conjunto (parcialmente/conexamente, amplamente/estritamente) ordenado
- **Poset $\langle A, R \rangle$**
  - do inglês, *partial ordered set*
  - $\langle A, R \rangle$, relação de ordem parcial

Exp: Relação de Ordem Parcial/Conexa, Ampla/Estrita

Ordem parcial (ampla)

- $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$
- $\langle \mathbf{P}(A), \subseteq \rangle$
- $\langle \mathbf{Q}, = \rangle$
- implicação em proposições lógicas
- $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{N}^2 \mid x$ divide y (resto zero) $\}$

Ordem parcial estrita

- $\langle \mathbf{N}, < \rangle$
- $\langle \mathbf{P}(A), \subset \rangle$

Ordem conexa (cadeia)

- $\langle \mathbf{N}, \leq \rangle$

Ordem conexa estrita (cadeia estrita)

- $\langle \mathbf{N}, < \rangle$

Exp: Ordem Lexicográfica

Ordem lexicográfica

- importante exemplo de relação de ordem conexa para CC
- para um dado alfabeto $\Sigma = \{ a, b \}$

$$\Sigma^* = \{ \varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots \}$$

As palavras em Σ^* são listadas em ordem lexicográfica

- por tamanho de palavra (número de símbolos)
- para palavras do mesmo tamanho, por ordem "alfabética"
  - supondo $a < b$

QQ alfabeto ordenado Σ, *induz* o conjunto ordenado Σ^*

6 – Endorrelações, Ordenação e Equivalência

6.3.2 Classificação de Dados

- **Ordenação de um conjunto de dados**
  - importante área de pesquisa
    - denominada de classificação de dados
    - *sort*, em inglês
  - é fácil construir um algoritmos de classificação
    - entretanto, c/ aumento do número de dados
    - tempo (processamento) e espaço (memória) se tornam *críticos*
  - complexidade de algoritmos
    - estudo do tempo/espaço consumidos por um algoritmos
    - também, importante área de pesquisa

Exp: Algoritmo de Classificação

Já foi comentado

- grande maioria das LP
- *não* possuem boas facilidades para manipular conjuntos

Ordenação de um conjunto de dados

- realizada usando variáveis do tipo arranjo
- seqüência com número fixo de componentes, todos do mesmo tipo

Exp: Algoritmo de Classificação

Por exemplo, trechos de programa em Pascal

```
vetor = array[1..30] of integer
```

```
dados = array[1..10] of char
```

Cada componente pode ser diretamente acessado

- nome da variável arranjo seguido do índice entre colchetes

```
vetor[10] := 33
```

```
if dados[i] = 'a' then …
```

Exp: Algoritmo de Classificação - bubblesort

Ordenação (menor ou igual) de 10 caracteres em um arranjo **`dados`**

`dados[1] ≤ dados[2] ≤ dados[3] ≤ ... ≤ dados[10]`

Bubble (borbulha)

- dados mais “leves” sobem

Uma solução (trecho de programa Pascal). Suponha que

- **`trocou`** é variável do tipo **`boolean`**
- **`aux`** é variável do tipo **`char`**

Exp: Algoritmo de Classificação

```
trocou := true;
while trocou
do begin
   trocou := false;
   for  i := 1 to 9
   do   if dados[i] > dados[i+1]
        then begin
             aux := dados[i];
             dados[i] := dados[i+1];
             dados[i+1] := aux;
             trocou := true
             end
   end
```

Exp: Algoritmo de Classificação

Possível execução do algoritmo

Inicial	c	a	d	b	a	b	d	f	e	f
Interação 1	a	c	b	a	b	d	d	e	f	f
Interação 2	a	b	a	b	c	d	d	e	f	f
Interação 3	a	a	b	b	c	d	d	e	f	f
Interação 4	a	a	b	b	c	d	d	e	f	f

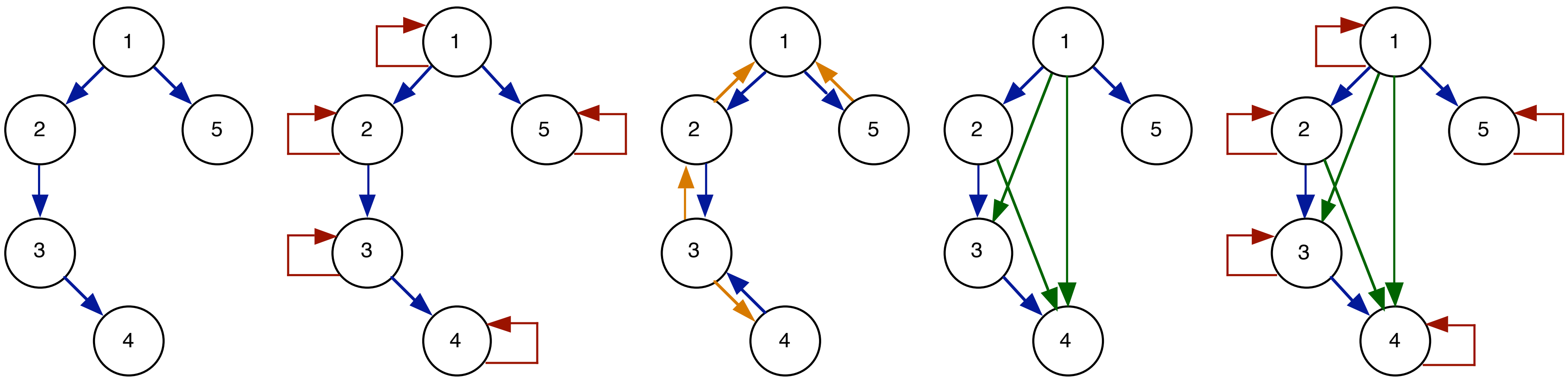
O algoritmo proposto

- *eficiente* em termos de espaço (por quê?)
- *não* é eficiente em termos do tempo, para grandes volumes

6 – Endorrelações, Ordenação e Equivalência

6.3.3 Diagrama de Hasse

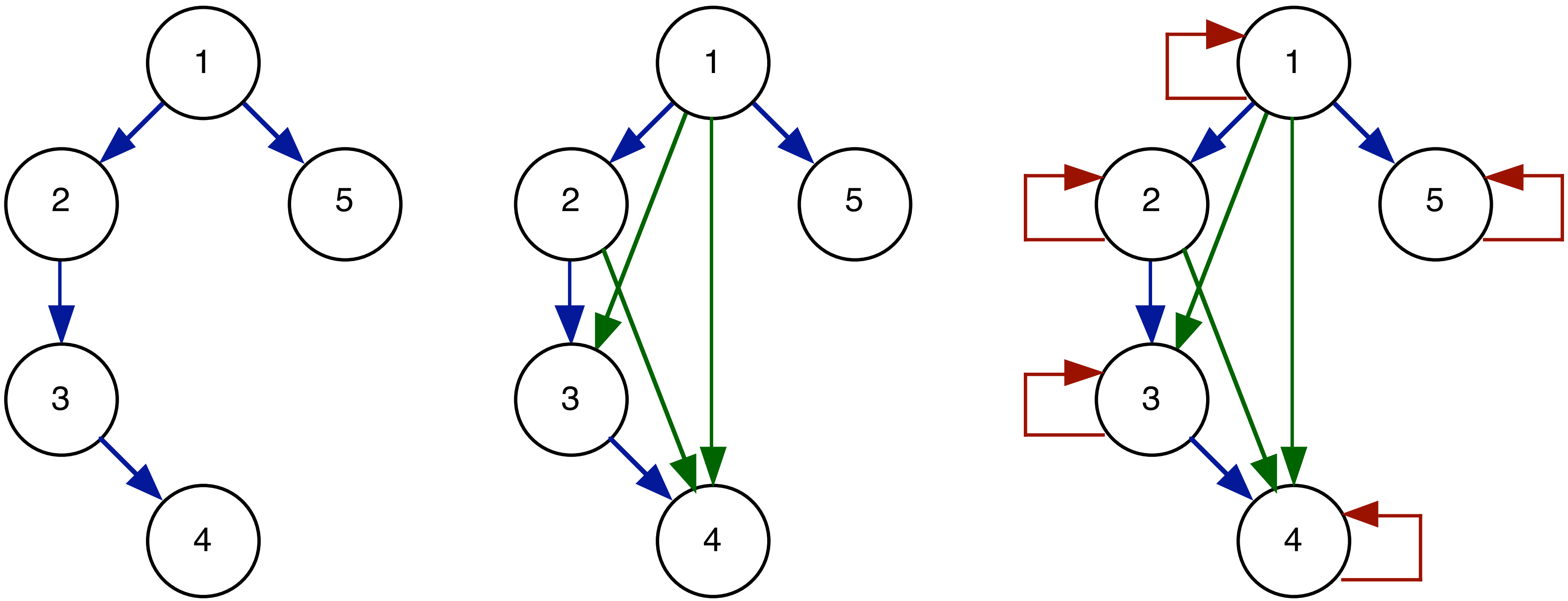
- **Relação de ordem pode ser representada como grafo**
  - como qualquer outra relação



  - (quais relações são de ordem? Qual o tipo?)
  - *jamais* ocorrerá um ciclo (por quê?)
    - excetuando-se endo-arcos ou endo-arestas
    - arcos com origem e destino em um mesmo nodo

Entretanto, p/ relação de ordem

- "poluição visual" ocasionada transitividade e reflexividade
- usual omitir as arestas que podem ser deduzidas



Esse tipo de representação: Diagrama de Hasse

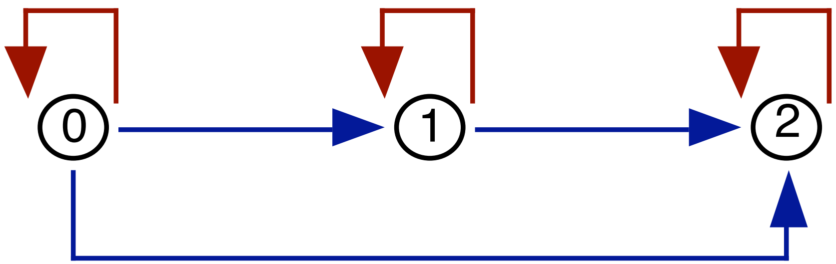
- nodos: pontos (ou pequenos círculos) *ou* elemento do conjunto

Exp: Relação como Grafo × Diagrama de Hasse

Conjunto parcialmente ordenado $\langle \{ 1, 2, 3 \}, \leq \rangle$

$$\leq = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3) \}$$

Grafo × Diagrama de Hasse



Obs: Representações Alternativas - Diagrama de Hasse

Arestas *não*-orientadas

- elementos do menor para o maior, de baixo para cima

6 – Endorrelações, Ordenação e Equivalência

6.1 Propriedades de uma Endorrelação
6.2 Fecho de uma Endorrelação
6.3 Ordenação
 6.3.1 Relação de Ordem
 6.3.2 Classificação de Dados
 6.3.3 Diagrama de Hasse
 6.3.4 Conjuntos Ordenados e Semântica de Sistemas Concorrentes
6.4 Equivalência e Partição

6.3.4 Conjuntos Ordenados e Semântica de Sistemas Concorrentes

- **Conj. ordenados são usados com freqüência em CC**
- **Semântica para sistemas concorrentes**
  - importante exemplo
  - *clara* e *simples* visão de concorrência
  - concorrência verdadeira
- **É importante distinguir sintaxe de semântica**
  - Sintaxe trata das propriedades livres de uma linguagem
    - exemplo: verificação gramatical de programas
  - Semântica objetiva dar interpretação
    - exemplo: significado ou valor a um programa

- **Sintaxe preocupa-se com a forma**
  - manipula símbolos
- **Semântica preocupa-se em dar um significado**
  - aos símbolos sintaticamente válidos
  - exemplo: “estes símbolos representam os valores inteiros”
- **Questões sintáticas**
  - disciplinas como *Linguagens Formais*
- **Questões semânticas**
  - disciplinas como *Semântica Formal*
- **Compiladores**
  - integra ambas as questões

- **Historicamente, problema sintático**
  - reconhecido antes do semântico
  - primeiro a receber tratamento adequado
  - são mais simples que os semânticos
- **Conseqüência, ênfase à sintaxe levou à idéia de que**
  - questões das linguagens de programação
  - resumiam-se às questões da sintaxe

◆ Atualmente, Teoria da Sintaxe

- construções matemáticas bem definidas
- universalmente reconhecidas
- Gramáticas de Chomsky

◆ Formalização de uma questão semântica

- freqüentemente, tratamento matemático complexo
- dificulta entendimento e aplicação

◆ Assim, construções matemáticas

- capaz de dar semântica de forma simples e expressiva
- extremanente importante para a CC
- exemplo
  - ∗ relações de ordem como semântica de sistemas concorrentes

Exp: Conj. Parcialmente Ordenados $\times$ Concorrência

Programa seqüencial, em linguagens tipo Pascal

- o símbolo **;** representa dependência causal

```
c1; c2; c3
```

Uma semântica

$$\langle \{ c1, c2, c3 \}, \leq_C \rangle$$

- onde $c1 \leq_C c2$, $c2 \leq_C c3$ e portanto, $c1 \leq_C c3$

Mais precisamente

$$\leq_C = \{ (c1, c2), (c2, c3), (c1, c3) \}$$

Exp: Conj. Parcialmente Ordenados × Concorrência

De forma análoga, considere

```
p1; p2
```

```
q1; q2; q3
```

Semânticas

$$\langle \{ p1, p2 \}, \leq_p \rangle \quad \text{onde} \quad p1 \leq_p p2$$

$$\langle \{ q1, q2, q3 \}, \leq_q \rangle \quad \text{onde} \quad q1 \leq_q q2 \ \text{ e } \ q2 \leq_q q3$$

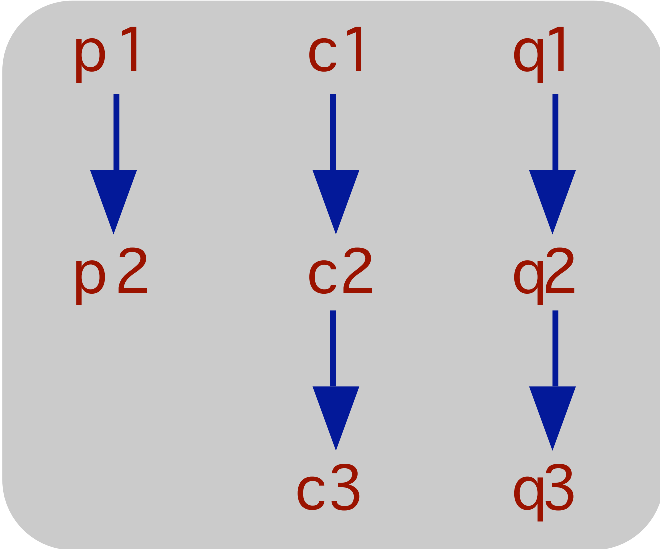
Suponha os 3 programas concorrentes *sem* qualquer sincronização

- independentes

Semântica induzida pela união disjunta de conjuntos

$$\langle \{ c1, c2, c3 \} + \{ p1, p2 \} + \{ q1, q2, q3 \}, \leq_c + \leq_p + \leq_q \rangle$$

Exp: Conj. Parcialmente Ordenados × Concorrência



Todas as componentes são independentes (concorrentes)

- excetuando-se quando especificado o contrário
- quando definido um par da relação de ordem
- determinando uma restrição de seqüencialidade

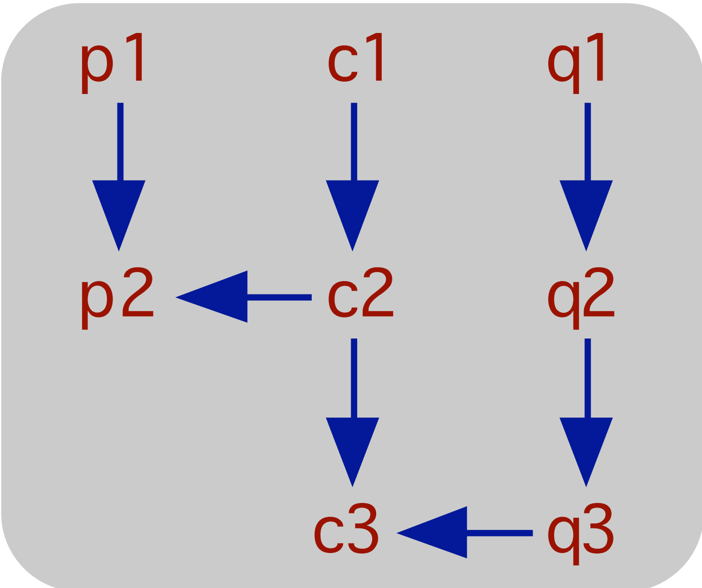
Exp: Conj. Parcialmente Ordenados × Concorrência

Suponha que

- ocorrência de **p2** depende de **c2**
- ocorrência de **c3** depende de **q3**

Sincronização: suficiente incluir os pares $c2 \leq p2$ e $q3 \leq c3$

$\langle\{c1\ c2,c3\}+\{p1,p2\}+\{q1,q2,q3\}, \leq_c+\leq_p+\leq_q+\{(c2,p2,), (q3,c3)\}\rangle$



◆ Observe que

- união disjunta = composição paralela de sistemas
- inclusão de pares = sincronizações
- operações simples e de fácil entendimento
  - operadores poderosos
  - para especificar sistemas concorrentes e comunicantes

Observação: Estrutura de Eventos

Um dos modelos para concorrência mais conhecidos

- baseado em conjuntos ordenados

Conjunto ordenado

- seqüencialidade e concorrência

Juntamente com uma relação de conflito

- não-determinismo ou escolha
- conceito introduzido ao longo da disciplina

◆ Exercício: Conj. Parcialmente Ordenados × Linguagem de Programação

Para verificar a expressividade dos conjuntos parcialmente ordenados

Para alguma linguagem de programação concorrente

- faça um esboço de um programa concorrente
- similar ao caso exemplificado
- *compare* as especificações
- qual o mais simples?

Comparativamente com muitas das linguagens usualmente adotadas

- conjuntos parcialmente ordenados
- fornecem soluções mais simples e claras

6 – Endorrelações, Ordenação e Equivalência

6.4 Equivalência e Partição

- **Relação de equivalência é importante para CC**
  - reflete uma noção de igualdade semântica
  - entidades com formas diferentes (sintaticamente diferentes)
  - podem ser equivalentes (“igualadas”)

  - exemplo: $\Leftrightarrow$

  - exemplos no quotidiano (suponha um conjunto de pessoas)
    - mesma idade
    - mesma altura
    - mesmo sexo

- **Propriedades que caracterizam equivalência?**

◆ Considerando a noção semântica de igualdade

- *Reflexiva*. Qq elemento é sempre "igual" a si mesmo
- *Transitiva*. Intuitiva em qualquer noção de "igualdade"
- *Simétrica*. Mais caracteriza a "igualdade" (e diferencia da ordem)

◆ Importante resultado de uma relelação de equivalência

- $R: A \to A$ induz uma partição do conjunto A
  - ∗ em subconjuntos disjuntos e não-vazios
  - ∗ classes de equivalência
- exemplo: relação "mesmo sexo"
  - ∗ classe de equivalência das pessoas do sexo feminino
  - ∗ classe de equivalência das pessoas do sexo masculino

Def: Relação de Equivalência

$R: A \rightarrow A$ é uma Relação de Equivalência se for

- Reflexiva
- Simétrica
- Transitiva

Def: Partição de um Conjunto

Partição do conjunto A é um conjunto de

- subconjuntos *não*-vazios e mutuamente disjuntos de A
  - ∗ blocos da partição ou classes de equivalência
- união de todos os blocos resulta em A

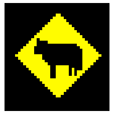
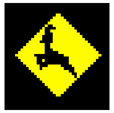
Quais são os blocos da partição do vazio?

◆ Notação para classe de equivalência

- $\{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ é partição de A
- é usual denotar por um elemento representativo da classe
  - para $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$

$$[a_1] = A_1, \ldots, [a_n] = A_n$$

◆ Aplicação da notação: Código Nacional de Trânsito

-  vaca: representa genericamente a *classe* animais
-  alce: representa genericamente a *classe* animais selvagens

◆ Aplicação da notação: Claudiomiro

Queria agradecer a Antarctica pelas Brahma que enviou lá para casa

◆ Importante resultado (adiante)

- cada relação de equivalência $R: A \to A$
- induz uma *única* partição do conjunto A

Exp: Relação de Equivalência

- $\langle A, =\rangle$
- $\langle \mathbf{P}(A), =\rangle$
- $\varnothing: \varnothing \to \varnothing$
- $A^2: A \to A$

Qual seria a correspondente partição em cada caso?

Exp: Relação de Equivalência e Partição

$$R = \{ (a, b) \in \mathbf{N}^2 \mid a \text{ MOD } 2 = b \text{ MOD } 2 \}$$

MOD: resto da divisão inteira

- R é uma relação de equivalência?

Intuitivamente, R induz uma partição de $\mathbf{N}$

- [0], a classe de equivalência dos número pares (resto zero)
- [1], a classe de equivalência dos número ímpares (resto um)

◆ Teorema mostra como construir uma partição

- a partir de uma relação de equivalência
- prova é especialmente interessante
  - simples
  - 3 técnicas de demonstração: direta, contraposição e absurdo

Teorema: Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

$R: A \rightarrow A$ uma relação de equivalência

Então, R induz uma partição do conjunto A

Prova:

Suponha $R: A \to A$ uma relação de equivalência. Para qq $a \in A$, seja

$$[a]_R = \{ b \in A \mid a R b \}$$

Então, é uma partição de A

$$\{ [a]_R \mid a \in A \}$$

(agrupa elementos relacionados entre si como classe de equivalência)

Para *provar* que é uma partição de A

- cada classe de equivalência é não-vazia
- qq duas classes de equivalência distintas são disjuntas
- união de todas as classes de equivaliencia resulta em A

Prova: *Cada classe é não-vazia* (*direta*)

Suponha $a \in A$. Então

- $a \in A \Rightarrow$ reflexividade de R
- $a R a \Rightarrow$ definição de $[a]_R$
- $a \in [a]_R$

Logo, cada classe de equivalência é não-vazia

Prova: *Qq duas classes distintas são disjuntas*

Inicialmente, é provado o seguinte resultado sobre classes distintas

Se $[\,a\,]_R \neq [\,b\,]_R$, então $\neg(a\,R\,b)$ (contraposição)

- suponha que $a\,R\,b$
- a prova de $[\,a\,]_R = [\,b\,]_R$ é dividida em dois casos

Caso 1. $[\,b\,]_R \subseteq [\,a\,]_R$. Suponha $c \in [\,b\,]_R$

- $c \in [\,b\,]_R \Rightarrow$ definição de $[\,b\,]_R$
- $b\,R\,c \Rightarrow$ transitividade de R suposto que $a\,R\,b$
- $a\,R\,c \Rightarrow$ definição de $[\,a\,]_R$
- $c \in [\,a\,]_R \Rightarrow$ definição de subconjunto
- $[\,b\,]_R \subseteq [\,a\,]_R$

Prova: *Qq duas classes distintas são disjuntas*

Caso 2. $[\,a\,]_R \subseteq [\,b\,]_R$. Suponha $c \in [\,a\,]_R$

- $c \in [\,a\,]_R \Rightarrow$ — definição de $[\,a\,]_R$
- $a\,R\,c \Rightarrow$ — simetria de R
- $c\,R\,a \Rightarrow$ — transitividade de R suposto que $a\,R\,b$
- $c\,R\,b \Rightarrow$ — simetria de R
- $b\,R\,c \Rightarrow$ — definição de $[\,b\,]_R$
- $c \in [\,b\,]_R \Rightarrow$ — definição de subconjunto
- $[\,a\,]_R \subseteq [\,b\,]_R$

Logo, se $[\,a\,]_R \neq [\,b\,]_R$, então $\neg(a\,R\,b)$

Prova: *Qq duas classes distintas são disjuntas*

Se $[a]_R \neq [b]_R$, então $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$ (absurdo)

Suponha que $[a]_R \neq [b]_R$ e $[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$. Então:

- $[a]_R \neq [b]_R \wedge [a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing \Rightarrow$ prova anterior
- $\neg(a\,R\,b) \wedge [a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing \Rightarrow$ definição de intersecção
- $\neg(a\,R\,b) \wedge (\exists c \in A)(c \in [a]_R \wedge c \in [b]_R) \Rightarrow$ def. de $[a]_R$, $[b]_R$
- $\neg(a\,R\,b) \wedge a\,R\,c \wedge b\,R\,c \Rightarrow$ simetria de R
- $\neg(a\,R\,b) \wedge a\,R\,c \wedge c\,R\,b \Rightarrow$ transitividade de R
- $\neg(a\,R\,b) \wedge a\,R\,b$, o que é um *absurdo*!

Logo, quaisquer duas classes de equivalência distintas são disjuntas

Prova: *União das classes resulta em A* (*direta*)

A prova é dividida em dois casos (duas continências)

Caso 1. A está contido na união

- $a \in A \Rightarrow$ classe de equivalência é não-vazia
- $a \in [\, a \,]_R \Rightarrow$ definição de união
- a pertence à união de todas as classes de equivalência

Caso 1. União está contida em A

- a pertence à união de todas as classes $\Rightarrow$ definição de união
- $(\exists b \in A)(a \in [\, b \,]_R) \Rightarrow$ definição de classe
- $b \; R \; a \Rightarrow$ suposto que $R: A \to A$
- $a \in A$

Logo, a união de todas as classes de equivalência resulta em A

Prova:

Como $\{ [a]_R \mid a \in A \}$ é tal que

- cada classe de equivalência é não-vazia
- qq duas classes de equivalência distintas são disjuntas
- união de todas as classes de equivalencia resulta em A

tem-se que R induz uma partição do conjunto A ❑

◆ Portanto

- para construir a partição induzida pela relação
- basta agrupar os elementos que estão relacionados entre si
- como uma classe de equivalência

Exp: Relação de Equivalência $\Rightarrow$ Partição

$$R = \{ (a, b) \in \mathbf{N}^2 \mid a \text{ MOD } 2 = b \text{ MOD } 2 \}$$

Claramente, $a\,R\,b$ sse

- a e b, quando dividido por 2
- ou tem ambos resto zero ou ambos resto um
- ou seja, são ambos pares ou ambos ímpares

Portanto, R induz uma partição de $\mathbf{N}$

- $[\,0\,]$, a classe de equivalência dos número pares (resto zero)
- $[\,1\,]$, a classe de equivalência dos número ímpares (resto um)

◆ Os seguintes teoremas não serão provados

Teorema: Partição Induzida por uma Relação de Equivalência é Única

Seja $R: A \to A$ relação de equivalência. Então, a partição de A induzida por R é *única*

Teorema: Partição $\Rightarrow$ Relação de Equivalência

Seja A conjunto. Então, qq partição de A induz uma relação de equivalência $R: A \to A$

Def: Conjunto Quociente

A conjunto, $R: A \rightarrow A$ endorrelação de equivalência

Conjunto Quociente

$$A / R$$

é a partição de A induzida pela relação de equivalência R

$$A / R = \{ [a]_R \mid a \in A \}$$

Exp: Conjunto Quociente: $\mathbf{Q}$

$\mathbf{N}_+ = \mathbf{N} - \{0\}$ naturais positivos

$\mathbf{F} = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}_+$ frações

Relação de equivalência

$$R = \{ \langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in \mathbf{F}^2 \mid a/b = c/d \}$$

Portanto, $\mathbf{Q}$ é o conjunto quociente $\mathbf{F} / R$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} / R$$

Cada número racional é uma classes de equivalência de frações

- $[\,0\,]_R = \{ 0/1, 0/2, 0/3,\dots \}$
- $[\,1/2\,]_R = \{ 1/2, 2/4, 3/6,\dots \}$
- $[\,5/4\,]_R = \{ 5/4, 10/8, 15/12,\dots \}$

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

Matemática Discreta para Ciência da Computação

P. Blauth Menezes

blauth@inf.ufrgs.br

Departamento de Informática Teórica

Instituto de Informática / UFRGS