ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

Aula 14
Cap 3.3 – Definição de algoritmo e Cap 4.1 – Linguagens Decidíveis

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br

Cap 3.3 – A definição de algoritmo

Tese de Church-Turing

Noção intuitiva de algoritmos	é igual a	*algoritmos de máquina de Turing*

Terminologia para descrever Máquinas de Turing

- Mudança de foco no curso: algoritmos
  - Máquina de Turing como modelo
  - Precisamos estar convencidos de que podemos descrever qualquer algoritmo com uma máquina de Turing

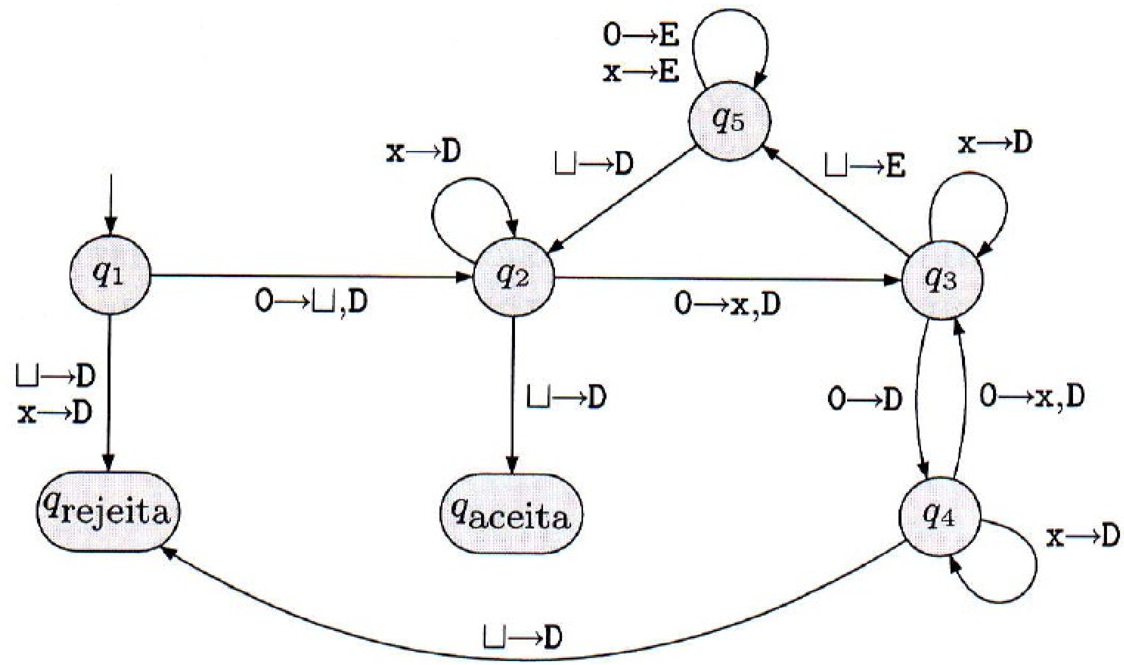
Terminologia para descrever Máquinas de Turing

- 3 níveis de descrição de algoritmos:
  - **Descrição formal**: detalhes da máquina: estados, função de transição, etc.
  - **Descrição de implementação**: escrito em língua natural para descrever como a máquina move a cabeça da fita, lê e escreve dados, etc (sem descrever estados ou função de transição)
  - **Descrição de alto nível**: escrito em língua natural para descrever um algoritmo, omitindo detalhes de implementação

Exemplo – descrição formal (se o nr de zeros de uma cadeia é uma potência de 2)

Agora, damos a descrição formal de $M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{aceita}, q_{rejeita})$:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{aceita}, q_{rejeita}\}$,
- $\Sigma = \{0\}$ e
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.
- Descrevemos δ com um diagrama de estados (veja a Figura 3.8).
- Os estados inicial, de aceitação e de rejeição são q_1, q_{aceita} e $q_{rejeita}$.



Exemplo – descrição de implementação (se o nr de zeros de uma cadeia é uma potência de 2)

EXEMPLO 3.7

Aqui descrevemos uma máquina de Turing (MT) M_2 que decide $A = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$, a linguagem consistindo em todas as cadeias de 0s cujo comprimento é uma potência de 2.

M_2 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura da esquerda para a direita na fita, marcando um 0 não, e outro, sim.
2. Se no estágio 1, a fita continha um único 0, *aceite*.
3. Se no estágio 1, a fita continha mais que um único 0 e o número de 0s era ímpar, *rejeite*.
4. Retorne a cabeça para a extremidade esquerda da fita.
5. Vá para o estágio 1."

Exemplo – descrição de alto nível (se um polinômio sobre x tem raiz inteira)

M_1 = "A entrada é um polinômio p sobre a variável x.

1. Calcule o valor de p com x substituída sucessivamente pelos valores $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ Se em algum ponto o valor do polinômio resulta em 0, *aceite*."

Terminologia para descrever Máquinas de Turing

- Até agora usamos as descrições formais e de implementação
- Passaremos a usar mais a descrição de alto nível
  - Objetos (O) convertidos em cadeias (<O>)
  - Vários objetos em uma única cadeia ($<O_1, O_2, \ldots, O_k>$)
  - Assumimos que as MTs são capazes de decodificar essas cadeias

Descrição de alto nível de Máquinas de Turing

- M = “ …

  “

- Primeira linha: entrada da máquina
  - w é cadeia
  - <w> é objeto codificado em cadeia – implicitamente MT testa se a codificação está ok, senão rejeita

EXEMPLO 3.23

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Lembre-se de que um grafo é ***conexo*** se todo nó pode ser atingido a partir de cada um dos outros nós passando pelas arestas do grafo. Escrevemos

$$A = \{\langle G \rangle |\ G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}.$$

O que se segue é uma descrição de alto nível de uma MT M que decide A.

$M =$ "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.

2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:

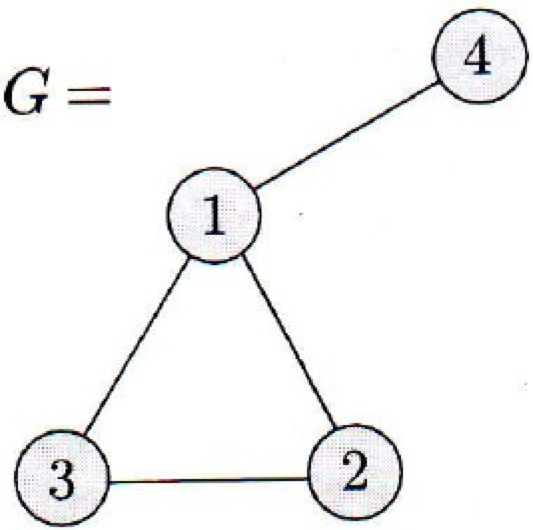
3. Para cada nó em G, marque-o, se ele estiver ligado por uma aresta a um nó que já esteja marcado.

4. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se estiverem, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Codificação:
  - G = (N,E) onde N é o conjunto de nós e E é o conjunto de arestas
  - <G> = lista de nós (números decimais) e lista de arestas (pares desses números)

$G =$



$\langle G \rangle =$

`(1,2,3,4)((1,2),(2,3),(3,1),(1,4))`

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Teste da codificação:
  - Duas listas, uma de decimais e outra de pares de decimais
  - Lista de nós não deve te repetições
  - Lista de arestas só pode ter nós da lista de nós
- Obs.: distinção de elementos – exemplo 3.12 do livro

EXEMPLO 3.23

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Lembre-se de que um grafo é ***conexo*** se todo nó pode ser atingido a partir de cada um dos outros nós passando pelas arestas do grafo. Escrevemos

$$A = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}.$$

O que se segue é uma descrição de alto nível de uma MT M que decide A.

$M =$ "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:
3. Para cada nó em G, marque-o, se ele estiver ligado por uma aresta a um nó que já esteja marcado.
4. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se estiverem, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Estágio 1: M marca o primeiro nó com um ponto no dígito mais à esquerda

EXEMPLO 3.23

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Lembre-se de que um grafo é ***conexo*** se todo nó pode ser atingido a partir de cada um dos outros nós passando pelas arestas do grafo. Escrevemos

$$A = \{\langle G\rangle |\ G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}.$$

O que se segue é uma descrição de alto nível de uma MT M que decide A.

$M =$ "Sobre a entrada $\langle G\rangle$, a codificação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:
3. Para cada nó em G, marque-o, se ele estiver ligado por uma aresta a um nó que já esteja marcado.
4. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se estiverem, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Estágios 2 e 3:
  a) Varre a lista de nós procurando um nó não marcado com ponto (n_1)
     - Marca n_1 com sublinhado

  b) Varre a lista de nós novamente procurando um nó marcado com ponto (n_2)
     - Marca n_2 com sublinhado

  c) Varre a lista de arestas procurando uma aresta entre n_1 e n_2
     - Se acha, tira o sublinhado de n_1 e n_2 e marca n_1 com ponto e volta para o início do estágio 2 (tirando os dois sublinhados)
     - Senão, move o sublinhado de n_2 para outro nó marcado (chame esse de n_2) e repete o passo c)

  d) Se acabarem os nós marcados (n_1 não está conectado a nenhum nó marcado até o momento)
     – Se ainda houver nós não marcados, move o sublinhado de n_1 para o próximo nó não marcado e repete os passos b) e c).
     – Senão vai para o estágio 4 (não conseguiu marcar nenhum nó novo)

EXEMPLO 3.23

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Lembre-se de que um grafo é ***conexo*** se todo nó pode ser atingido a partir de cada um dos outros nós passando pelas arestas do grafo. Escrevemos

$$A = \{\langle G \rangle |\ G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}.$$

O que se segue é uma descrição de alto nível de uma MT M que decide A.

M = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:
3. Para cada nó em G, marque-o, se ele estiver ligado por uma aresta a um nó que já esteja marcado.
4. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se estiverem, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Detalhes de implementação (só desta vez...)

- Estágio 4: varre a lista de nós verificando se todos estão com ponto
  - Se sim, entra em um estado de aceitação
  - senão, entra em um estado de rejeição

Cap 4 – Decidibilidade

Cap. 4.1 – Linguagens Decidíveis

Problemas decidíveis concernentes a linguagens regulares

- Problema da aceitação de uma cadeia w por um AFD B
- Como escrever esse problema em forma de uma linguagem?

Problemas decidíveis concernentes a linguagens regulares

- Problema da aceitação de uma cadeia w por um AFD B
- Como escrever esse problema em forma de uma linguagem?
- A_{AFD} = {<B,w> | B é um AFD que reconhece a cadeia w}
- Mostrar que A_{AFD} é decidível é o mesmo que provar que o problema de aceitação é decidível

TEOREMA 4.1

A_{AFD} é uma linguagem decidível.

IDÉIA DA PROVA Simplesmente precisamos apresentar uma MT M que decide A_{AFD}.

$M =$ "Sobre a entrada $\langle B, w\rangle$, onde B é um AFD, e w, uma cadeia:

1. Simule B sobre a entrada w.
2. Se a simulação termina em um estado de aceitação, *aceite*. Se ela termina em um estado de não-aceitação, *rejeite*."

Prova (só alguns detalhes)

Primeiro, vamos examinar a entrada $\langle B, w \rangle$. Ela é uma representação de um AFD B juntamente com uma cadeia w. Uma representação razoável de B é simplesmente uma lista de seus cinco componentes, Q, Σ, δ, q_0 e F. Quando M recebe sua entrada, M primeiro determina se ela representa apropriadamente um AFD B e uma cadeia w. Se não, M rejeita.

Então, M realiza a simulação diretamente. Ela mantém registro do estado atual de B e da posição atual de B na entrada w escrevendo essa informação na sua fita. Inicialmente, o estado atual de B é q_0 e a posição atual de B sobre a entrada é o símbolo mais à esquerda de w. Os estados e a posição são atualizados conforme a função de transição especificada δ. Quando M termina de processar o último símbolo de w, M aceita a entrada se B estiver em um estado de aceitação; M rejeita a entrada se B estiver em um estado de não-aceitação.

Semelhantemente...

$A_{\mathsf{AFN}} = \{\langle B, w\rangle \mid B \text{ é um AFN que aceita a cadeia de entrada } w\}.$

Semelhantemente...

$A_{\mathsf{AFN}} = \{\langle B, w\rangle |\ B$ é um AFN que aceita a cadeia de entrada $w\}$.

TEOREMA 4.2

A_{AFN} é uma linguagem decidível.

PROVA

$N =$ "Sobre a entrada $\langle B, w\rangle$ onde B é um AFN, e w, uma cadeia:

1. Converta AFN B para um AFD equivalente C, usando o procedimento para essa conversão dado no Teorema 1.39.
2. Rode a MT M do Teorema 4.1 sobre a entrada $\langle C, w\rangle$
3. Se M aceita, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Semelhantemente...

$A_{\mathsf{EXR}} = \{\langle R, w\rangle \mid R$ é uma expressão regular que gera a cadeia $w\}$.

Semelhantemente...

$$A_{\mathsf{EXR}} = \{\langle R, w\rangle \mid R \text{ é uma expressão regular que gera a cadeia } w\}.$$

TEOREMA 4.3

A_{EXR} é uma linguagem decidível.

PROVA A seguinte MT P decide A_{EXR}.

P = "Sobre a entrada $\langle R, w\rangle$ onde R é uma expressão regular e w é uma cadeia:

1. Converta a expressão regular R para um AFN equivalente A usando o procedimento para essa conversão dado no Teorema 1.54.
2. Rode a MT N sobre a entrada $\langle A, w\rangle$.
3. Se N aceita, *aceite*; se N rejeita, *rejeite*."

Semelhantemente...

- E para gramáticas regulares?

Problemas decidíveis concernentes a linguagens regulares

- Linguagens regulares são decidíveis (lembram da Hierarquia de Chomsky?)

Teste de vacuidade

$$V_{\mathsf{AFD}} = \{\langle A\rangle |\ A \text{ é um } \mathsf{AFD} \text{ e } L(A) = \emptyset\}.$$

Teste de vacuidade

$$V_{\mathsf{AFD}} = \{\langle A\rangle \mid A \text{ é um } \mathsf{AFD} \text{ e } L(A) = \emptyset\}.$$

TEOREMA 4.4

V_{AFD} é uma linguagem decidível.

Teste de vacuidade

PROVA Um AFD aceita alguma cadeia sse é possível atingir um estado de aceitação a partir do estado inicial passando pelas setas do AFD. Para testar essa condição, podemos projetar uma MT T que usa um algoritmo de marcação similar àquele utilizado no Exemplo 3.23.

T = "Sobre a entrada $\langle A \rangle$ onde A é um AFD:

1. Marque o estado inicial de A.
2. Repita até que nenhum estado novo venha a ser marcado:
3. Marque qualquer estado que tenha uma transição chegando nele a partir de qualquer estado que já está marcado.
4. Se nenhum estado de aceitação estiver marcado, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Equivalência de dois AFDs

$$EQ_{\mathsf{AFD}} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}.$$

Equivalência de dois AFDs

$$EQ_{\text{AFD}} = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}.$$

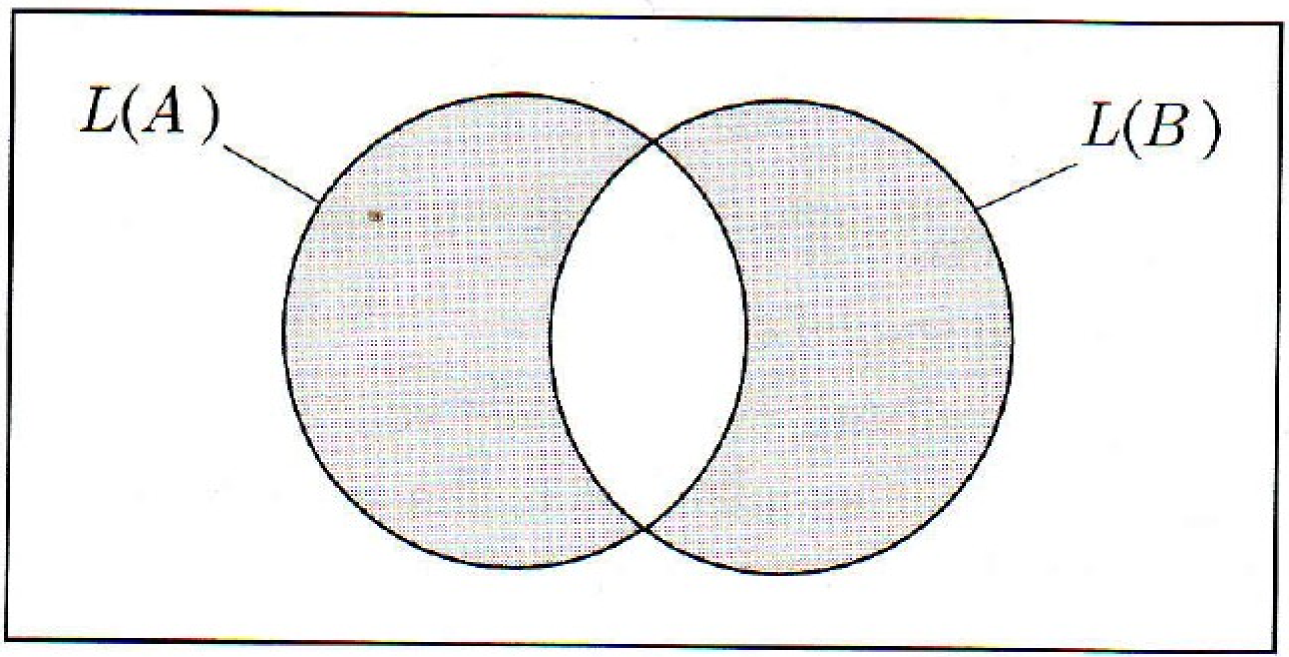
TEOREMA 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

Equivalência de dois AFDs

PROVA Para provar esse teorema, usamos o Teorema 4.4. Construímos um novo AFD C a partir de A e B, tal que C aceita somente aquelas cadeias que são aceitas ou por A ou por B, mas não por ambos. Conseqüentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = \left(L(A) \cap \overline{L(B)}\right) \cup \left(\overline{L(A)} \cap L(B)\right).$$



Equivalência de dois AFDs

$F =$ "Sobre a entrada $\langle A, B\rangle$, onde A e B são AFDs:

1. Construa o AFD C conforme descrito.

2. Rode a MT T do Teorema 4.4 sobre a entrada $\langle C\rangle$.

3. Se T aceita, *aceite*. Se T rejeita, *rejeite*."

Problemas decidíveis concernentes a linguagens livres de contexto

$$A_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G, w\rangle \mid G \text{ é uma } \mathsf{GLC} \text{ que gera a cadeia } w\}$$

Problemas decidíveis concernentes a linguagens livres de contexto

$$A_{\text{GLC}} = \{\langle G, w\rangle \mid G \text{ é uma GLC que gera a cadeia } w\}$$

TEOREMA 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

Problemas decidíveis concernentes a linguagens livres de contexto

IDÉIA DA PROVA Para a GLC G e a cadeia w, queremos determinar se G gera w. Uma idéia é usar G para passar por todas as derivações para determinar se alguma delas é uma derivação de w. Essa idéia não funciona, pois uma quantidade infinita de derivações pode ter que ser testada. Se G não gera w, esse algoritmo nunca pararia. Essa idéia leva a uma máquina de Turing que é um reconhecedor, mas não um decisor, para A_{GLC}.

Problemas decidíveis concernentes a linguagens livres de contexto

IDÉIA DA PROVA Para a GLC G e a cadeia w, queremos determinar se G gera w. Uma idéia é usar G para passar por todas as derivações para determinar se alguma delas é uma derivação de w. Essa idéia não funciona, pois uma quantidade infinita de derivações pode ter que ser testada. Se G não gera w, esse algoritmo nunca pararia. Essa idéia leva a uma máquina de Turing que é um reconhecedor, mas não um decisor, para A_{GLC}.

Para tornar essa máquina de Turing um decisor, precisamos garantir que o algoritmo tenta somente uma quantidade finita de derivações. No Problema 2.26 (página 136), mostramos que, se G estivesse na forma normal de Chomsky, qualquer derivação de w teria $2n - 1$ passos, onde n é o comprimento de w. Nesse caso, verificar apenas as derivações com $2n - 1$ passos para determinar se G gera w seria suficiente. Existe somente uma quantidade finita de tais derivações. Podemos converter G para a forma normal de Chomsky, usando o procedimento dado na Seção 2.1.

Problemas decidíveis concernentes a linguagens livres de contexto

PROVA A MT S para A_{GLC} segue.

$S =$ "Sobre a entrada $\langle G, w\rangle$, onde G é uma GLC, e w, uma cadeia:

1. Converta G para uma gramática equivalente na forma normal de Chomsky.
2. Liste todas as derivações com $2n - 1$ passos, onde n é o comprimento de w, exceto se $n = 0$; nesse último caso, liste todas as derivações com 1 passo.
3. Se alguma dessas derivações gera w, *aceite*; se não, *rejeite*."

Problemas decidíveis concernentes a linguagens livres de contexto

PROVA A MT S para A_{GLC} segue.

S = "Sobre a entrada $\langle G, w \rangle$, onde G é uma GLC, e w, uma cadeia:

1. Converta G para uma gramática equivalente na forma normal de Chomsky.
2. Liste todas as derivações com $2n - 1$ passos, onde n é o comprimento de w, exceto se $n = 0$; nesse último caso, liste todas as derivações com 1 passo.
3. Se alguma dessas derivações gera w, *aceite*; se não, *rejeite*."

Ineficiente, mas funciona!

Problemas decidíveis concernentes a linguagens livres de contexto

- Resultados semelhantes para autômatos a pilhas, uma vez que é possível passar de uma representação para a outra
- Porém, não é uma boa ideia simular um AP diretamente em uma MT. Por quê?

Problemas decidíveis concernentes a linguagens livres de contexto

- Linguagens livres de contexto são decidíveis (lembram da Hierarquia de Chomsky?)

Vacuidade de GLCs

$$V_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é uma GLC e } L(G) = \emptyset\}.$$

TEOREMA 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

Vacuidade de GLCs

IDÉIA DA PROVA

- Testar se a GLC gera alguma cadeia de terminais => testar se a variável inicial gera uma cadeia de terminais
- Marcar cada variável que gera uma cadeia de terminais
  - Terminais
  - Variáveis que estão no lado esquerdo de pelo menos uma regra cujo lado direito está todo marcado
- Verificar se a variável inicial está marcada

Vacuidade de GLCs

PROVA

$R =$ "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, onde G é uma GLC:

1. Marque todos os símbolos terminais em G.
2. Repita até que nenhuma variável venha a ser marcada:
3. Marque qualquer variável A onde G tem uma regra $A \rightarrow U_1U_2 \cdots U_k$ e cada símbolo $U_1, \ldots, U_k$ já tenha sido marcado.
4. Se a variável inicial não está marcada, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Equivalência de GLCs

$$EQ_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ e } H \text{ são GLCs e } L(G) = L(H)\}.$$

Equivalência de GLCs

$$EQ_{\text{GLC}} = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ e } H \text{ são GLCs e } L(G) = L(H)\}.$$

- Técnica semelhante a mostrar se dois AFDs são equivalentes?

Equivalência de GLCs

$$EQ_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ e } H \text{ são GLCs e } L(G) = L(H)\}.$$

- Técnica semelhante a mostrar se dois AFDs são equivalentes?
- Problema: LLCs não são fechadas com relação às operações de complementação e intersecção!

Equivalência de GLCs

$$EQ_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ e } H \text{ são GLCs e } L(G) = L(H)\}.$$

- Técnica semelhante a mostrar se dois AFDs são equivalentes?
- Problema: LLCs não são fechadas com relação às operações de complementação e intersecção!
- Na verdade, EQ_{GLC} é indecidível!