

ACH2043

INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

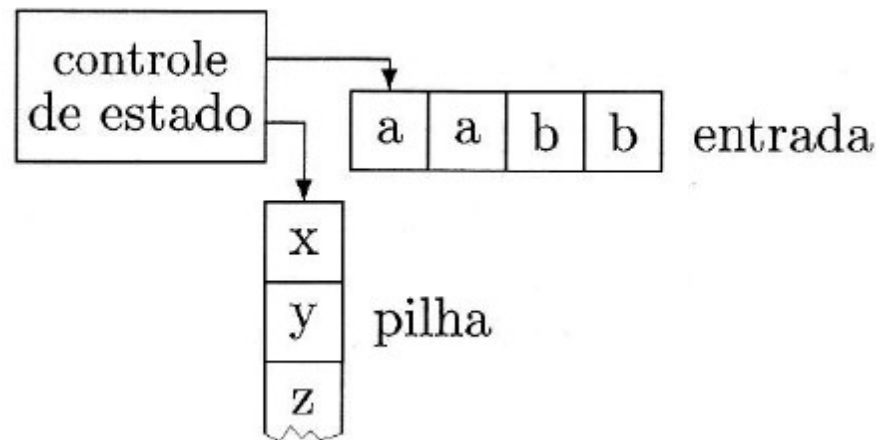
Aula 8

Cap. 2.2 – Autômato com pilha (cont.)

Profa. Arianne Machado Lima
arianne.machado@usp.br

Cap 2.2 – Autômato com pilha (AP)

- Autômato finito com uma memória adicional (leitura e escrita DO TOPO da pilha)



- Lembram de $B = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$?

Cap 2.2 – Autômato com pilha (AP)

- Determinísticos e não-determinísticos
- NÃO são equivalentes
 - Autômatos a pilha não determinísticos reconhecem mais linguagens
- Autômatos a pilha não-determinísticos são equivalentes a gramáticas livres de contexto

Definição formal

DEFINIÇÃO 2.13

Um *autômato com pilha* é uma 6-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, onde Q , Σ , Γ e F são todos conjuntos finitos, e

1. Q é o conjunto de estados,
2. Σ é o alfabeto de entrada,
3. Γ é o alfabeto de pilha,
4. $\delta: Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\epsilon)$ é a função de transição,
5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial, e
6. $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados de aceitação.

Exemplo

$\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$

$$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

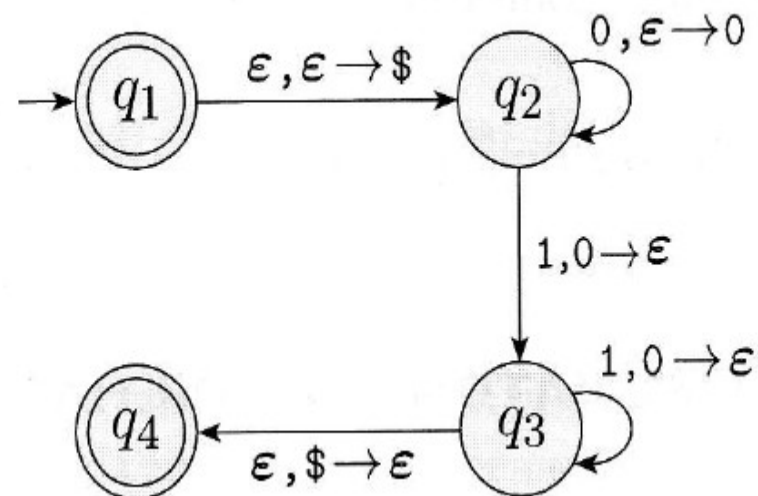
$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$\Gamma = \{0, \$\},$$

$$F = \{q_1, q_4\}, \text{ e}$$

δ é dada pela tabela abaixo, na qual entradas em branco significam \emptyset .

| Entrada: Pilha: | 0 | | | 1 | | | ϵ | | |
|--------------------|---|----|----------------|---|----|-----------------------|------------|----|-----------------------|
| | 0 | \$ | ϵ | 0 | \$ | ϵ | 0 | \$ | ϵ |
| q_1 | | | | | | | | | $\{(q_2, \$)\}$ |
| q_2 | | | $\{(q_2, 0)\}$ | | | $\{(q_3, \epsilon)\}$ | | | |
| q_3 | | | | | | $\{(q_3, \epsilon)\}$ | | | $\{(q_4, \epsilon)\}$ |
| q_4 | | | | | | | | | |



EXEMPLO 2.16

$$\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ e } i = j \text{ ou } i = k\}$$

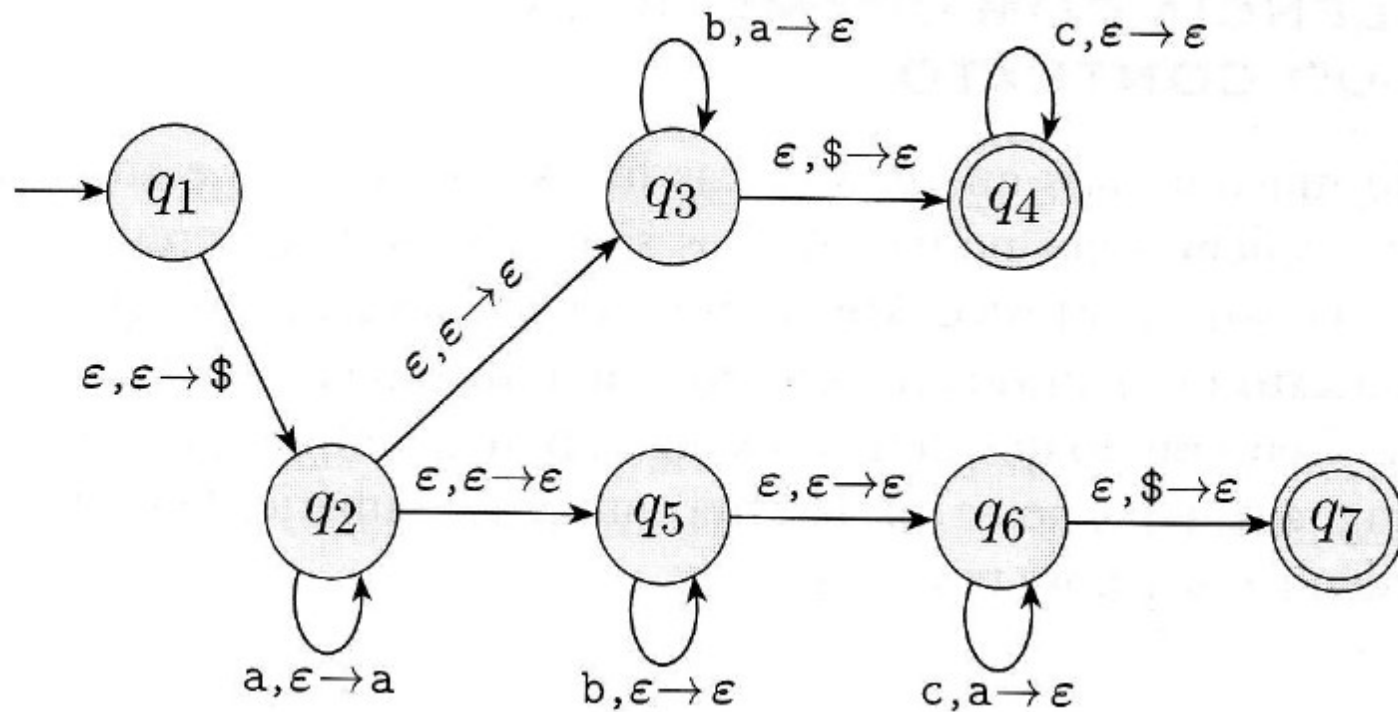
Empilho quando leio a's, e desempilho quando leio b's ou c's?

EXEMPLO 2.16

$$\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ e } i = j \text{ ou } i = k\}$$

Empilho quando leio a's, e desempilho quando leio b's ou c's?

Aqui não-determinismo é essencial!



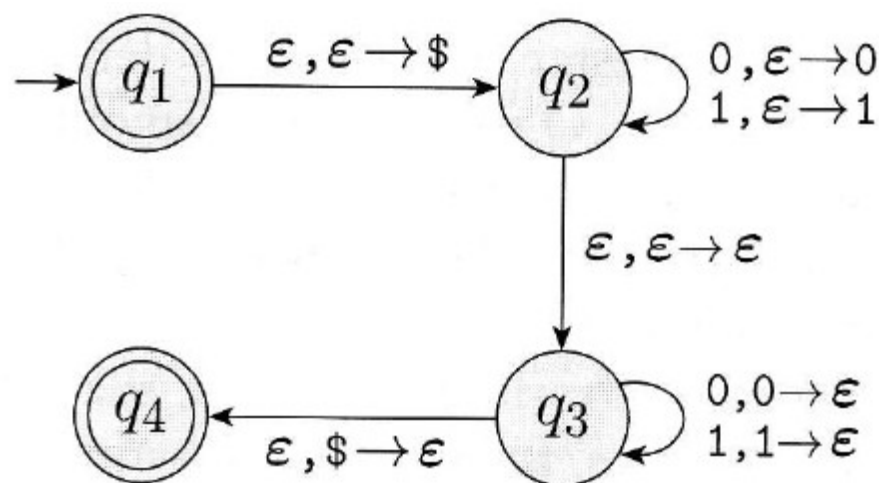
EXEMPLO 2.18

Nesse exemplo, damos um AP M_3 que reconhece a linguagem $\{ww^{\mathcal{R}} \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Lembremo-nos de que $w^{\mathcal{R}}$ significa w escrita de trás para a frente.

EXEMPLO 2.18

Nesse exemplo, damos um AP M_3 que reconhece a linguagem $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Lembremo-nos de que w^R significa w escrita de trás para a frente. Segue a descrição informal do AP.

Comece empilhando os símbolos que são lidos. A cada ponto, adivinhe não-deterministicamente se o meio da cadeia foi atingido e, se tiver sido, passe a desempilhar um símbolo para cada símbolo lido, checando para garantir que eles sejam os mesmos. Se eles forem sempre os mesmos e a pilha esvaziar ao mesmo tempo em que a entrada terminar, aceite; caso contrário, rejeite.



Equivalência entre APN e GLC

TEOREMA **2.20**

Uma linguagem é livre-do-contexto se e somente se algum autômato com pilha a reconhece.

Autômato com pilha **NÃO DETERMINÍSTICO!!!**

Equivalência entre APN e GLC

LEMA 2.21

Se uma linguagem é livre-do-contexto, então algum autômato com pilha a reconhece.

Ideia da prova:

Uma LLC é gerada por uma GLC

Mostrar como converter uma GLC em um APN equivalente

Conversão GLC em APN (ideia)

- Uma gramática aceita uma cadeia w se, começando pela variável inicial, chega-se a uma cadeia apenas de símbolos terminais (w) após uma sequência de derivações diretas (substituições de variáveis).
- Um autômato aceita uma cadeia w se, começando pelo estado inicial, chega-se ao estado final após uma sequência de mudança de estados (transições)
- Simular cada substituição por uma transição

Conversão GLC em APN (ideia)

- O APN começa empilhando a variável inicial na pilha (na transição do estado inicial para o estado intermediário)
- O estado intermediário possui transições para ele mesmo, em cada uma fazendo uma substituição (derivação) na cadeia que está na pilha
- O APN vai para o estado final quando não há mais substituições a serem feitas

• Ex:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aTb \mid b \\ T &\rightarrow Ta \mid \epsilon \end{aligned}$$

- Problemas a serem resolvidos:
 - O que fazer quando há várias opções de substituição?
 - Como empilhar uma cadeia (e não apenas um símbolo)?
 - Se só podemos ler o topo da pilha, o que fazer quando a primeira variável da forma sentencial não estiver no topo da pilha?

Conversão GLC em APN (ideia)

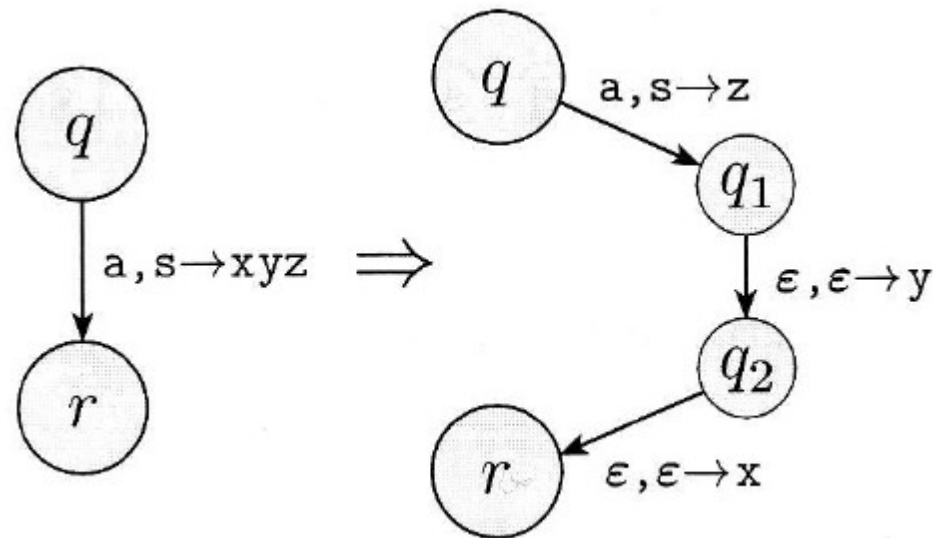
- Problema 1: O que fazer quando há várias opções de substituições?
 - Aproveitar o não determinismo

Conversão GLC em APN (ideia)

- Problema 2: Como empilhar uma cadeia, e não simplesmente um símbolo?

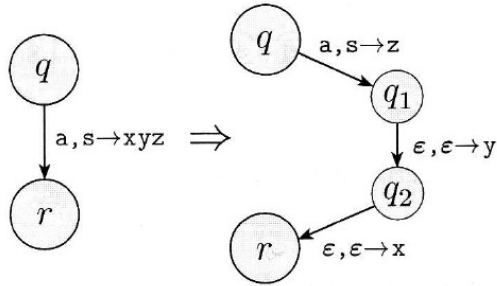
Conversão GLC em APN (ideia)

- Problema 2: Como empilhar uma cadeia, e não simplesmente um símbolo?



Conversão GLC em APN (ideia)

Problema 2: Como empilhar uma cadeia, e não simplesmente um símbolo?



Sejam q e r estados do AP e suponha que a esteja em Σ_ϵ e s em Γ_ϵ . Digamos que queiramos que o AP vá de q para r quando ele lê a e desempilha s . Além do mais, queremos empilhar a cadeia inteira $u = u_1 \cdots u_l$ ao mesmo tempo. Podemos implementar essa ação introduzindo novos estados q_1, \dots, q_{l-1} e montando a tabela de transição da seguinte maneira

$\delta(q, a, s)$ deve conter (q_1, u_l) ,

$\delta(q_1, \epsilon, \epsilon) = \{(q_2, u_{l-1})\}$,

$\delta(q_2, \epsilon, \epsilon) = \{(q_3, u_{l-2})\}$,

\vdots

$\delta(q_{l-1}, \epsilon, \epsilon) = \{(r, u_1)\}$.

Conversão GLC em APN (ideia)

- Problema 3: Se só podemos ler o topo da pilha, o que fazer quando a primeira variável da forma sentencial não estiver no topo da pilha?

Conversão GLC em APN (ideia)

- Problema 3: Se só podemos ler o topo da pilha, o que fazer quando a primeira variável da forma sentencial não estiver no topo da pilha?
 - Sempre faremos a derivação mais à esquerda
 - Se o começo da forma sentencial contiver terminais, desempilho esses símbolos “casando-os” com a entrada (por meio de transições).

Conversão GLC em APN (ideia)

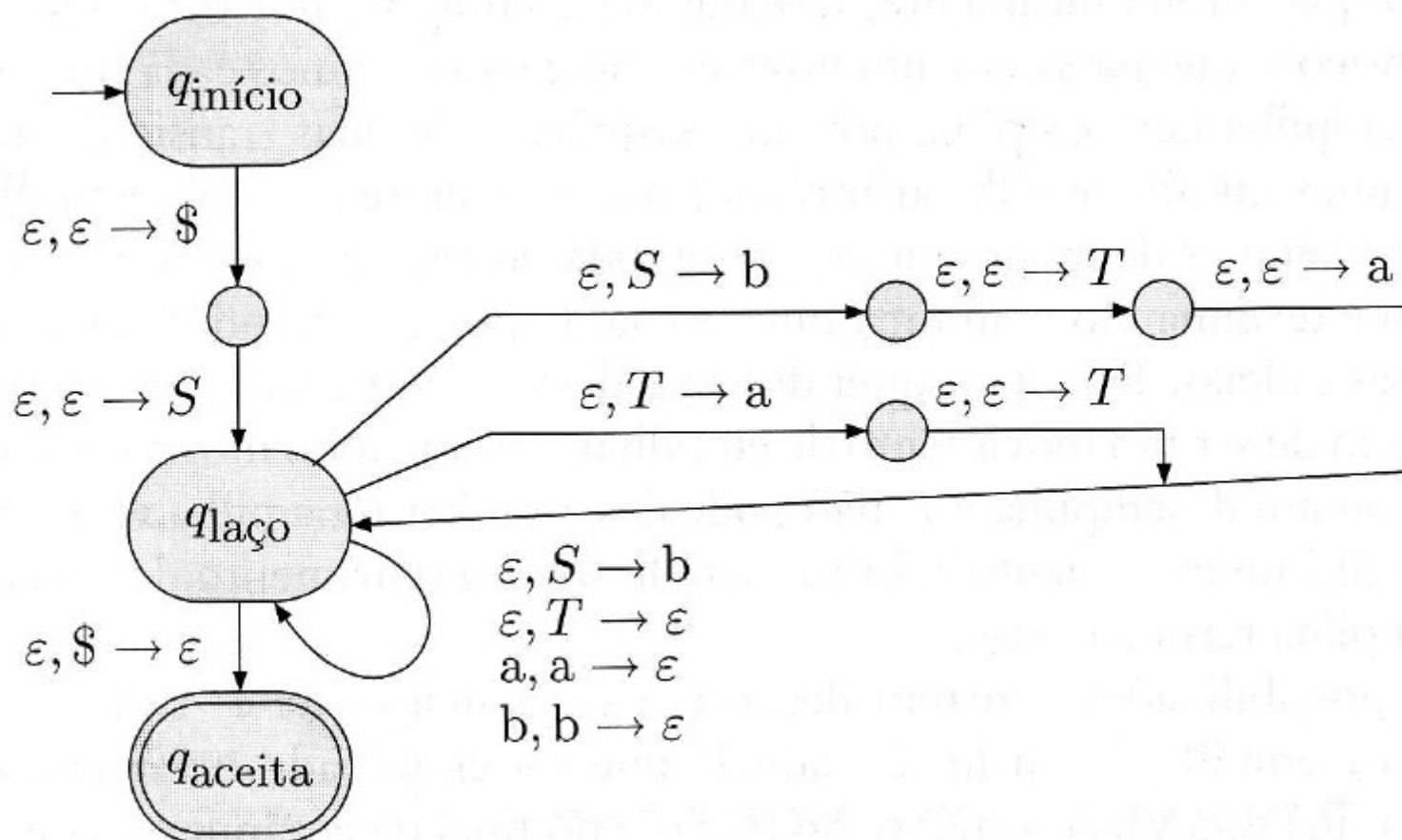
- Exemplo

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aTb \mid b \\ T &\rightarrow Ta \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Conversão GLC em APN (ideia)

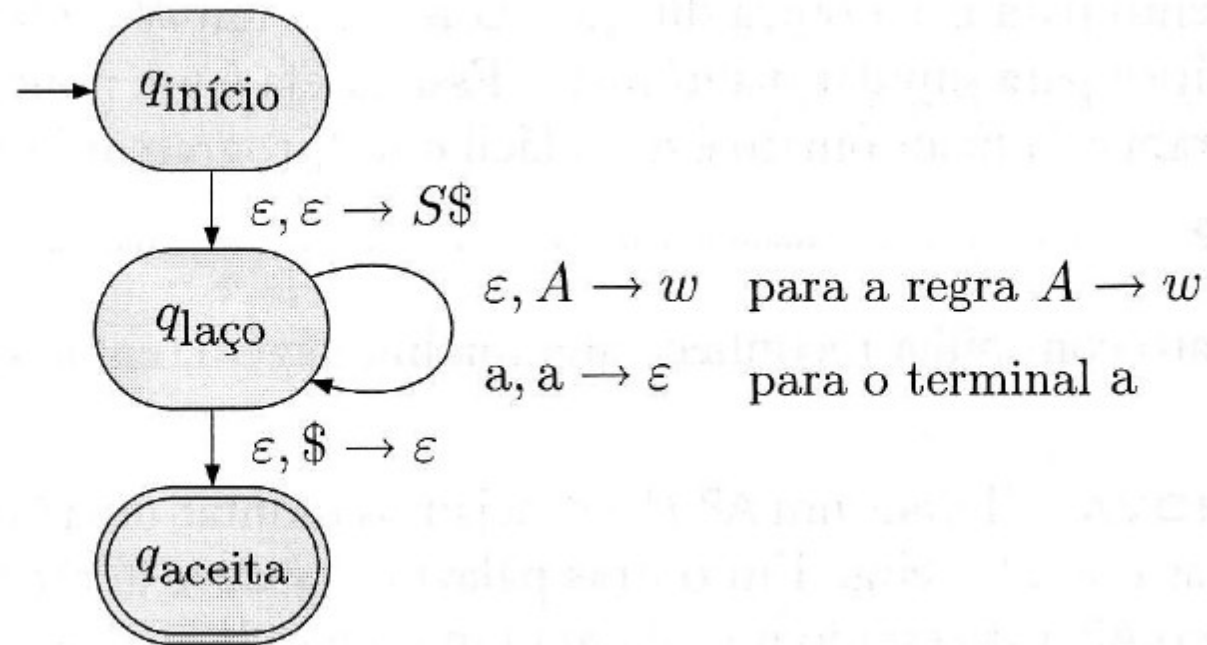
- Exemplo

$$S \rightarrow aTb \mid b$$
$$T \rightarrow Ta \mid \varepsilon$$



Conversão GLC em APN (ideia)

- Caso Geral:



Equivalência entre APN e GLC

TEOREMA 2.20

Uma linguagem é livre-do-contexto se e somente se algum autômato com pilha a reconhece.

LEMA 2.21

Se uma linguagem é livre-do-contexto, então algum autômato com pilha a reconhece.

Equivalência entre APN e GLC

TEOREMA 2.20

Uma linguagem é livre-do-contexto se e somente se algum autômato com pilha a reconhece.

LEMA 2.21

Se uma linguagem é livre-do-contexto, então algum autômato com pilha a reconhece.

LEMA 2.27

Se um autômato com pilha reconhece alguma linguagem, então ela é livre-do-contexto.

Conversão APN em GLC (ideia)

- Para facilitar, vamos considerar que o APN possui as seguintes características:
 1. Ele tem um único estado de aceitação, q_{aceita} .
 2. Ele esvazia sua pilha antes de aceitar.
 3. Cada transição ou empilha um símbolo (um movimento de *empilha*) ou desempilha um símbolo (um movimento de *desempilha*), mas não faz ambas as coisas ao mesmo tempo.

Conversão APN em GLC (ideia)

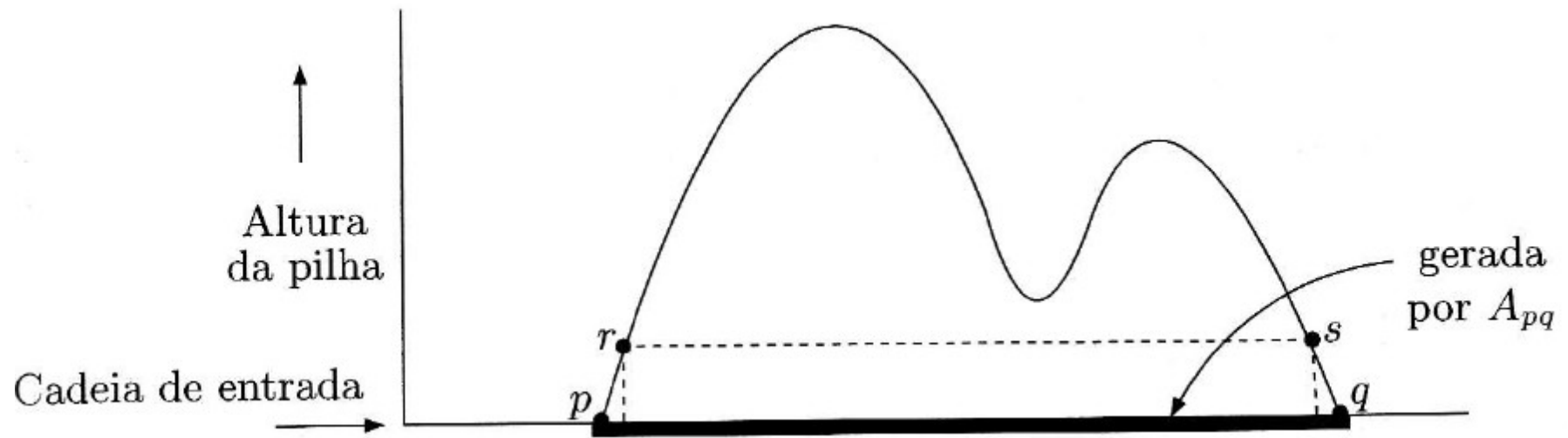
- G deve gerar uma cadeia x se x faz o APN ir do estado inicial ao estado de aceitação.
- Para cada par de estados (p, q) , criamos uma variável A_{pq} que gere todas as cadeias x que levam o APN do estado p (com uma pilha vazia) ao estado q (com uma pilha vazia).
- Neste APN:
 - no estado p (com pilha vazia), o primeiro movimento é de EMPILHA.
 - O último movimento é de DESEMPILHA (chegando no estado q , com pilha vazia)

Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de p a q (reconhecendo x), 2 situações:
 - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em q
 - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em q

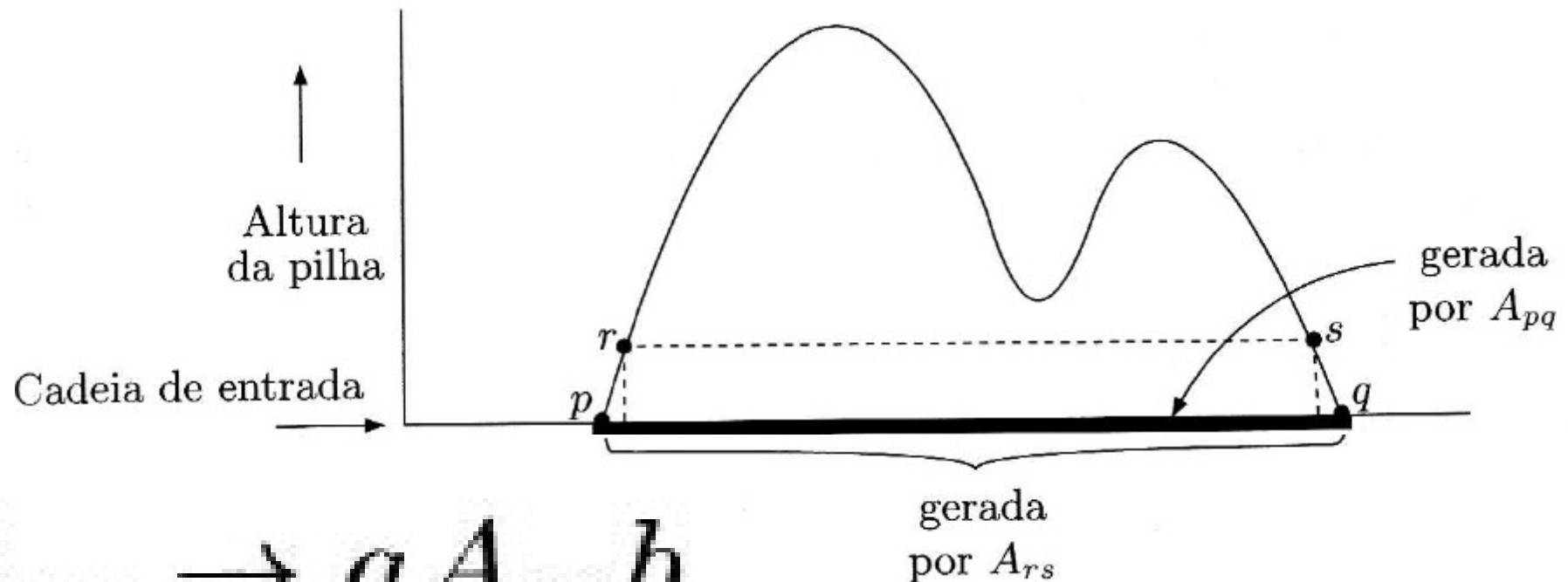
Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de p a q (reconhecendo x), 2 situações:
 - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em q
 - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho. antes de chegar em q



Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de p a q (reconhecendo x), 2 situações:
 - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em q
 - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho. antes de chegar em q



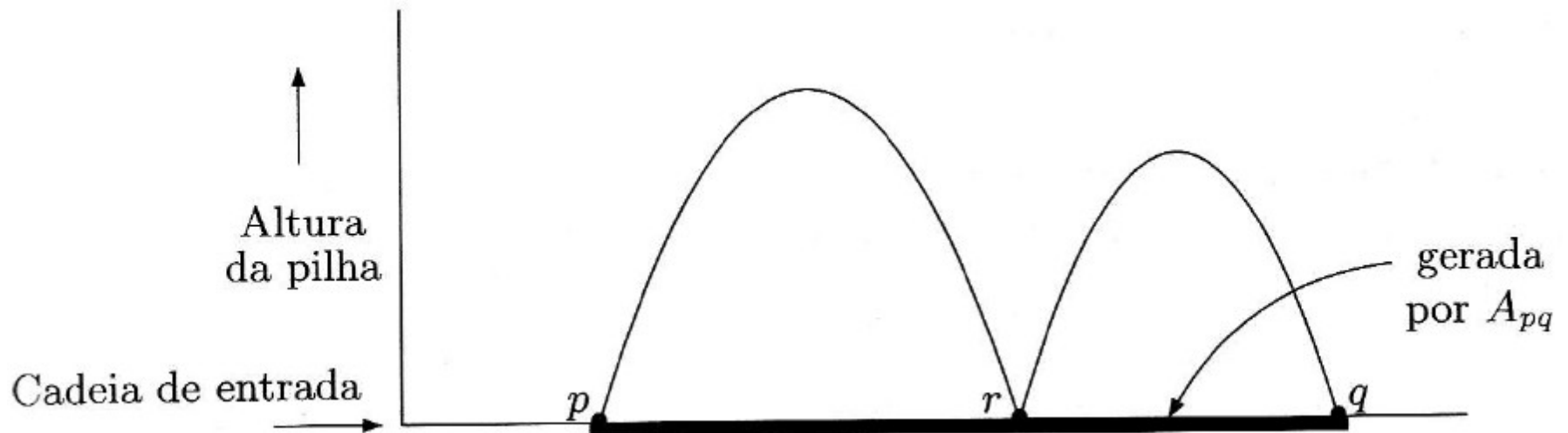
$$A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$$

Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de p a q (reconhecendo x), 2 situações:
 - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em q
 - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em q

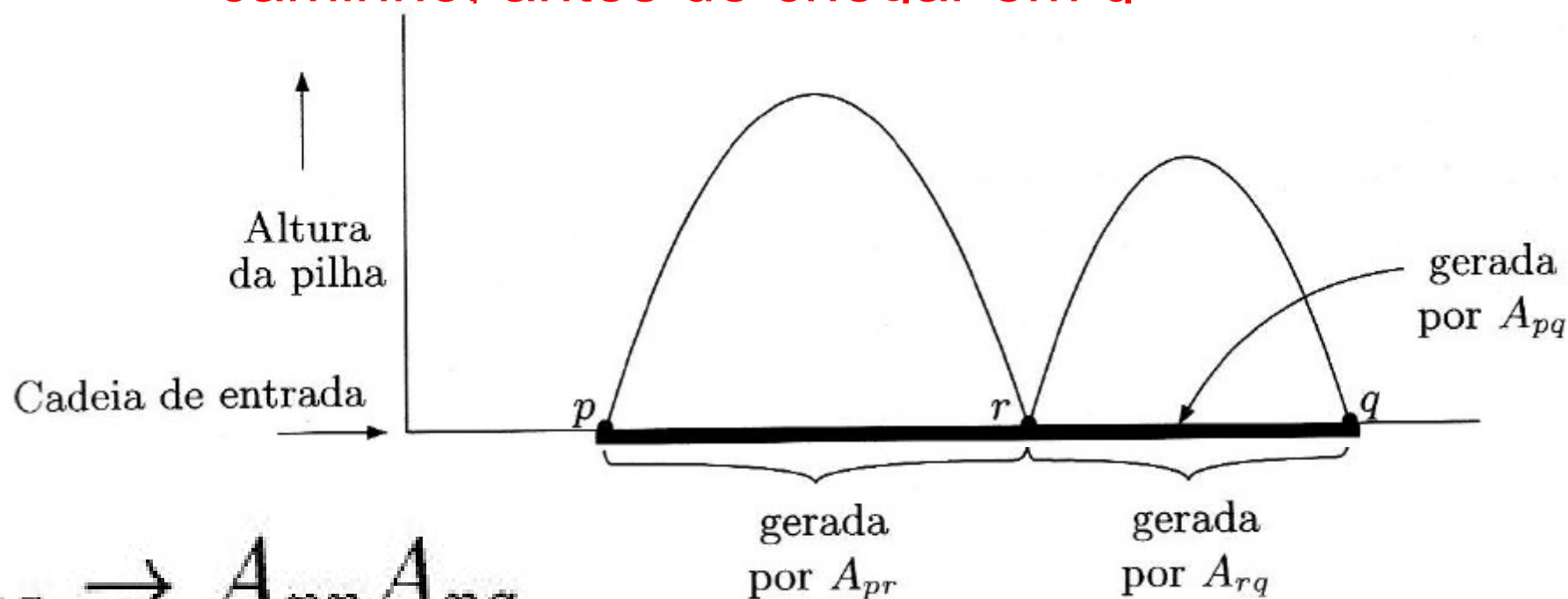
Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de p a q (reconhecendo x), 2 situações:
 - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em q
 - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em q



Conversão APN em GLC (ideia)

- No caminho de p a q (reconhecendo x), 2 situações:
 - A pilha só se torna vazia novamente quando chega em q
 - A pilha se torna vazia em algum ponto do caminho, antes de chegar em q



$$A_{pq} \rightarrow A_{pr} A_{rq}$$

Conversão APN em GLC (PROVA)

PROVA Digamos que $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_{aceita}\})$ e vamos construir G . As variáveis de G são $\{A_{pq} \mid p, q \in Q\}$. A variável inicial é $A_{q_0, q_{aceita}}$. Agora descrevemos as regras de G .

- Para cada $p, q, r, s \in Q$, $t \in \Gamma$ e $a, b \in \Sigma_\epsilon$, se $\delta(p, a, \epsilon)$ contém (r, t) e $\delta(s, b, t)$ contém (q, ϵ) , ponha a regra $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$ em G .
- Para cada $p, q, r \in Q$, ponha a regra $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$ em G .
- Finalmente, para cada $p \in Q$, ponha a regra $A_{pp} \rightarrow \epsilon$ em G .