Disciplina: **USP-EACH 2053 Introdução à Estatística**
Documento: **Resumo de Estatística**

CAPÍTULO 1

Permuta: n!
Combinação: n! / (n-r)!r! (combinação de n elementos tomados r a r)

CAPÍTULO 2

Definições:

Espaço amostral: $S=\{1,2,...\}$
Probabilidade do evento E: $P(E)$
Complemento de E: E^c

Axiomas:

Probabilidade do evento E: $P(E)=\lim_{n\to\infty}(n(E)/n)=k$

$0<P(E)<1$
$P(S)=1$
$P(U_{n=1}(E_n))=\sum_{n=1}^{n} P(E_n)$

CAPÍTULO 3

Probabilidade Condicional:

P(A|B) probabilidade de A tal que B tenha ocorrido

Probabilidade Independente:

P(A|B) = P(A) * P(B)

Probabilidade Dependente:

Teorema de Bayes
P(A|B) = P(AB) / P(B) = P(B|A)P(A) / P(B)

CAPÍTULO 4

Esperança:

$$E(X)=X\cdot P(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot p(x_i)) \quad \text{ou} \quad E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx$$

Notações: $E(X)=\mu(x)=\mu_x=\mu$
Propriedades:

a) $E(X)=k\,;k:constante$
b) $E(kX)=kE(X);k:constante$
c) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$
d) $E(aX+b)=aE(X)+b\,;a,b:constante$
e) $E(X-\mu_x)=0$

Variância:

$$VAR(X)=E((X-E(X))^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2 p(x_i) \quad \text{ou} \quad VAR(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_x)^2 \cdot f(x)\,dx$$

Simplificação: $VAR(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ (lei do estatístico inconsciente)

Notações: $VAR(X)=V(X)=\sigma^2(x)=\sigma_x^2=\sigma^2$

Propriedades:

a) $VAR(k)=0\,;k:constante$

b) $VAR(kX)=k^2\,VAR(X);\,k:constante$

c) $VAR(X\pm Y)=VAR(X)+VAR(Y)\pm 2\mathrm{COV}(X,Y)$

d) $VAR(X\pm Y)=E((X\pm Y)^2)-(E(X\pm Y))^2$

Covariância:

$$COV(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-(E(Y)))]$$

Desvio padrão:

$$\sigma=\sqrt{VAR(X)}$$

Probabilidade Conjunta:

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(x_i,y_j)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i}^{n}P(x_i,y_j)=1$$

Distribuição marginal:

$$P(X=x_i)=\sum_{j=i}^{n}P(X=x_i,Y=y_j)$$

Distribuição condicional:

$$P(x_i|y_j)=\frac{P(x_i:y_j)}{P(y_j)};\,j:fixo\,e\,i=\{1,2,...m\}$$

Variáveis Aleatórias Independentes:

$$P(x_i:y_j)=P(x_i)\cdot P(y_j)$$

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$

$$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

Coeficiente de Correlação:

$$\rho=\frac{COV(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

Função Distribuição:

$$F(X)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x}p(x_i)$$

Propriedades:

a) $0\le F(X)\le 1$

b) $F(-\infty)=0$

c) $F(+\infty)=1$

Distribuição de Bernoulli:

Fazendo n tentativas em um experimento dicotômico onde p é a probabilidade de sucesso.

$$P(X=n)=p^n(1-p)^{(1-n)}$$

$$E(X)=p$$

$$VAR(X)=p(1-p)$$

Distribuição de Geométrica:

Fazendo n tentativas até um primeiro sucesso em um experimento dicotômico onde p é a probabilidade de sucesso. Este é um caso particular do Bernoulli.

$$P(X=n)=p(1-p)^{(x-1)}$$
$$E(X)=1/p$$
$$VAR(X)=\frac{(1-p)}{p^2}$$

Distribuição de Pascal:

Fazendo n tentativas até que ocorra r sucessos em um experimento dicotômico onde p é a probabilidade de sucesso. Este é um caso geral para a sistribuição geométrica.

$$q=1-p$$
$$P(X=n)=(\frac{n-1}{r-1})\,p^r q^{(n-r)}$$
$$E(X)=r/p$$
$$VAR(X)=\frac{rq}{p^2}$$

Distribuição de Hipergeométrica:

Retirando n elementos de uma população N, dos quais r elementos tenha uma determinada característica.

Amostras sem reposição $\binom{N}{n}$, sucessos $\binom{r}{k}$, fracassos $\binom{N-r}{n-k}$ $\quad 0\leq k\leq n$ e $k\leq r$

$$P(X=n)=\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$E(X)=np$$
$$VAR(X)=np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$
$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Distribuição de Binomial:

Fazendo n tentativas em experimentos i.i.d. dicotômicos (com 2 resultados) onde p é a probabilidade de sucesso e x é a quantidade de sucessos.

Notação: $X:B(n,p)$

n=número de eventos

p=probabilidade

x=quantidade de sucessos

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{(n-x)}$$
$$E(X)=np$$
$$VAR(X)=np(1-p)$$
$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Distribuição de Polinomial:

Considere um experimento aleatório com k eventos $\{A_{1,}A_{2.}..A_k\}$ sendo $P(A_i)=p_i$ e

$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Seja X_i o número de ocorrências de A_i em n tentativas. Este é o caso genérico para a Binomial.

Notação:

$X : P(n, p_{1,} p_{2,}..)$

n número de tentativas independentes

p_i probabilidade de cada evento A_i

$$P(X_1 = x_{1,} X_2 = x_{2,}..) = \frac{n!}{n_1! n_2! ...} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ...$$

$$E(X_i) = n_i p_i$$

$$VAR(X_i) = n_i p_i q_i$$

Distribuição de Poisson:

Quando a probabilidade de sucesso em um intervalo é proporcional ao intervalo.

Notação:

$X : P(\lambda)$

λ relação de ocorrência com o intervalo np

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$VAR(X) = \lambda$$

Aproximação Binomial pela Poisson quando n>30 ($n \to \infty ; p \to 0$) onde $\lambda = np$

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{e^{-np} \cdot (np)^k}{k!}$$

Variáveis Contínuas:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx$$

$$VAR(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{x}{dx} F(x)$$

Distribuição Uniforme:

Quando a probabilidade de ocorrência f(x) é constante k no intervalo a, b.

$$f.d.p.\ f(x) = \left\{ \begin{matrix} k\, se\, a \leq x \leq b \\ 0\, se\, x < a\, ou\, x > b \end{matrix} \right\}$$

$F(X) = 1 = \int_a^b k dx = kb - ka = k(b-a) = 1$ portanto $k = \frac{1}{b-a}$ e $f(x) = \frac{1}{b-a}$ e

$$F(x) = \left\{ \begin{matrix} 0\, se\, x < a \\ \frac{x-a}{b-a} se\, a \leq x \leq b \\ 1\, se\, b < x \end{matrix} \right\}$$

$$E(X)=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{b+a}{2}$$
$$E(X^2)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$
$$VAR(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuição Exponencial:

Quando a probabilidade de ocorrência f(x) é dada pela equação:

$$f.d.p.\ f(x)=\begin{Bmatrix} \lambda e^{-\lambda x}\, se\, x>0 \\ 0\, se\, x<0 \end{Bmatrix}$$
$$F(X)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx=1$$
$$F(x)=1=\int_0^x \lambda e^{-\lambda s}\,ds=1-e^{-\lambda x}$$
$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$
$$VAR(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Distribuição Normal:

Quando a probabilidade de ocorrência f(x) é dada pela equação:

Notação: $X:N(\mu,\sigma^2)$

μ =média

σ =desvio padrão

$E(X)=\mu$

$VAR(X)=\sigma^2$

Variável normal reduzida: $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$$E(Z)=\frac{1}{\mu}VAR(X)=0$$
$$VAR(Z)=\frac{1}{\sigma^2}VAR(X)=1$$

Aproximação da Binomial pela Normal:

Quando $B(n,p)$ para n>20 então $\mu=np$ e $\sigma=\sqrt{npq}$ e $Z=\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}\equiv N(0,1)$

Distribuição de funções de variáveis aleatórias normais:

$$X:N(\sum_{i=1}^n \mu_i,\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$$
$$E(X)=\sum_{i=1}^n \mu_i$$
$$VAR(X)=VAR(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n VAR(X_i)+2\sum_{i\neq j}^n COV(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$
$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \quad \text{então} \quad \bar{X}=N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$