ACH2043
INTRODUÇÃO À TEORIA DA COMPUTAÇÃO

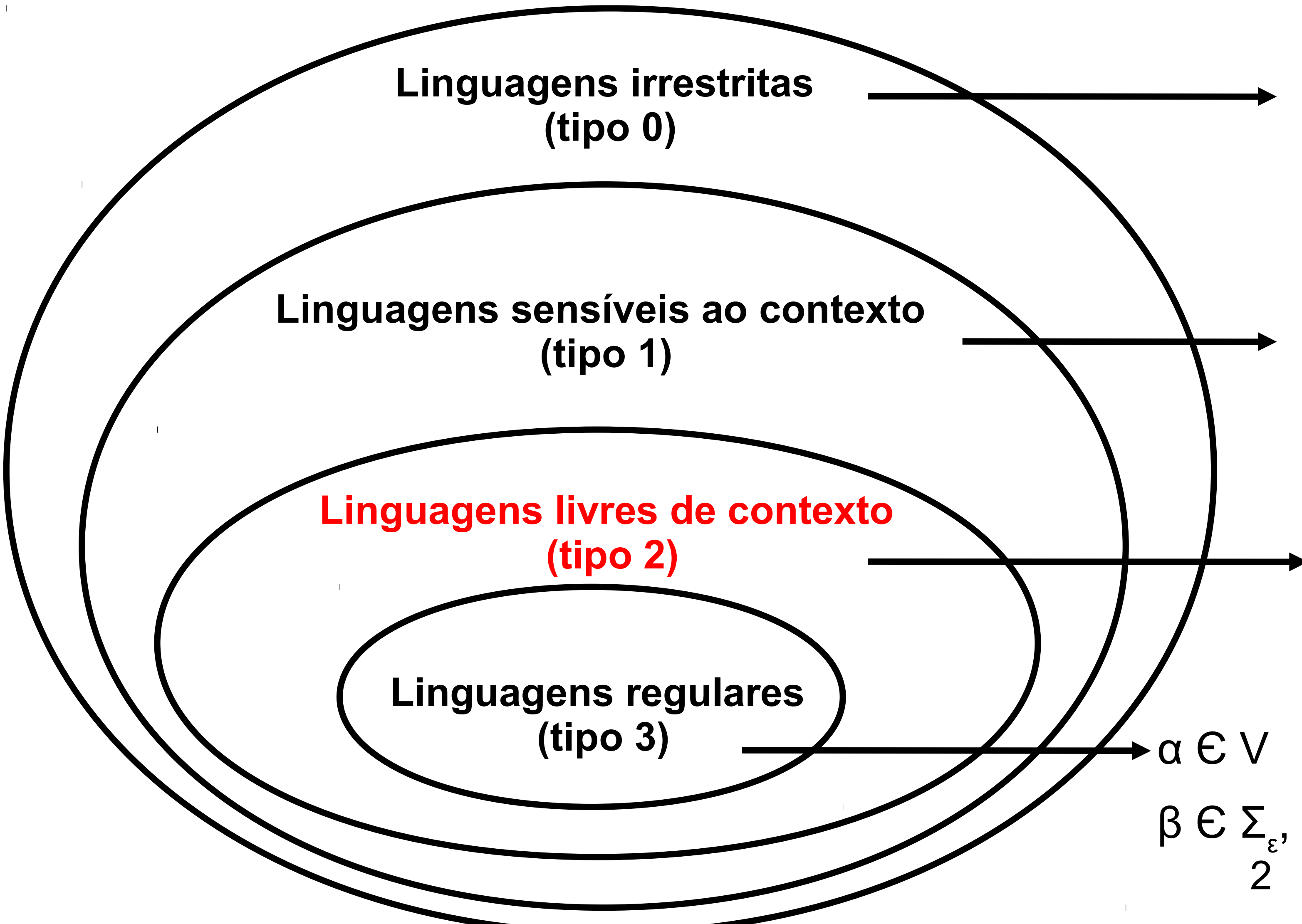
Aula 7

Cap. 2.1 – Gramáticas Livres de Contexto (cont.)
Cap. 2.2 – Autômato com Pilha

Profa. Ariane Machado Lima
ariane.machado@usp.br

Hierarquia de Chomsky

$\alpha \rightarrow \beta$



Tipo 0:
$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$
$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

Tipo 1:
$\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$
$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$
$|\alpha| <= |\beta|$

Tipo 2:
$\alpha \in V$
$\beta \in (V \cup \Sigma)^*$

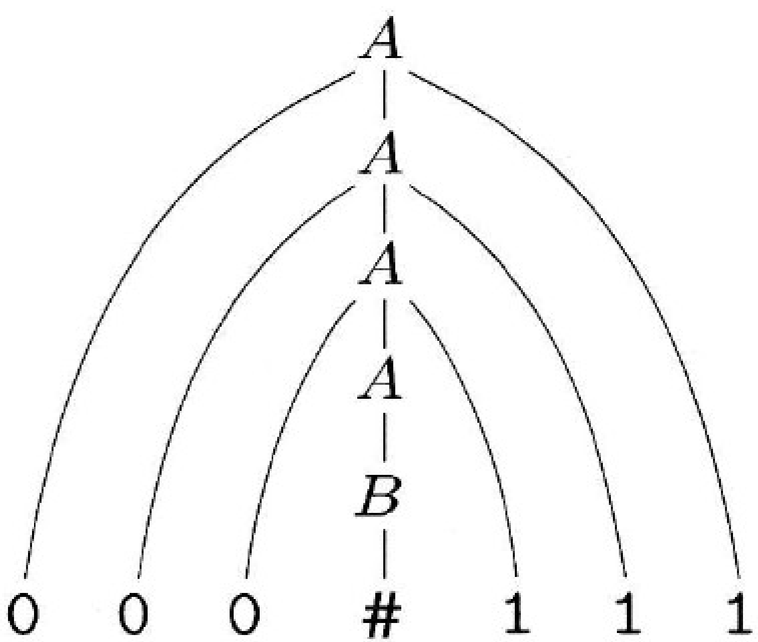
Tipo 3:
$\alpha \in V$
$\beta \in \Sigma_\varepsilon$, $\beta \in V$, $\beta \in$ ($V\Sigma$ou ΣV)

Gramáticas Livres de Contexto

$$A \to 0A1$$
$$A \to B$$
$$B \to \#$$

Por exemplo, a gramática G_1 gera a cadeia 000#111.

$$A \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 000A111 \Rightarrow 000B111 \Rightarrow 000\#111$$



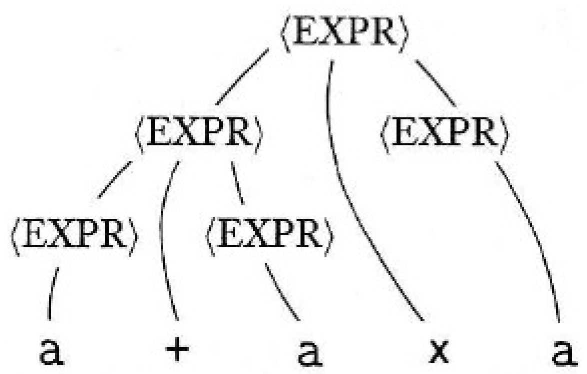
Árvore sintática
ou
Árvore de derivação

Mais exemplos de árvores sintáticas

$$\langle \mathrm{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \mathrm{EXPR} \rangle \texttt{+} \langle \mathrm{EXPR} \rangle \mid \langle \mathrm{EXPR} \rangle \texttt{x} \langle \mathrm{EXPR} \rangle \mid \texttt{(} \langle \mathrm{EXPR} \rangle \texttt{)} \mid \texttt{a}$$

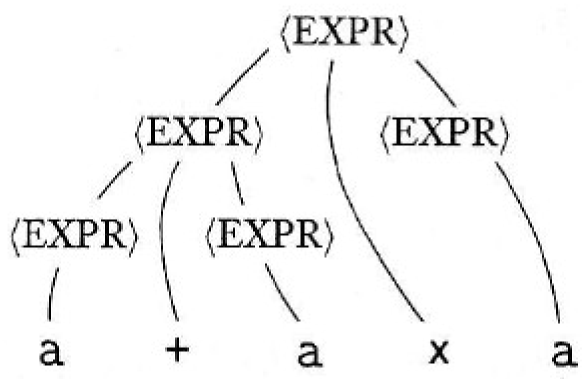
Mais exemplos de árvores sintáticas

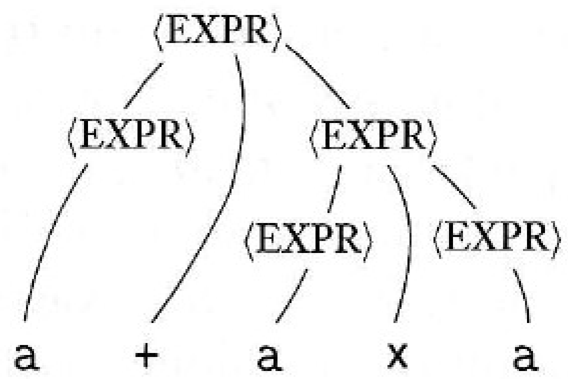
$$\langle \mathrm{EXPR} \rangle \to \langle \mathrm{EXPR} \rangle + \langle \mathrm{EXPR} \rangle \mid \langle \mathrm{EXPR} \rangle \times \langle \mathrm{EXPR} \rangle \mid (\langle \mathrm{EXPR} \rangle) \mid \mathtt{a}$$



Mais exemplos de árvores sintáticas

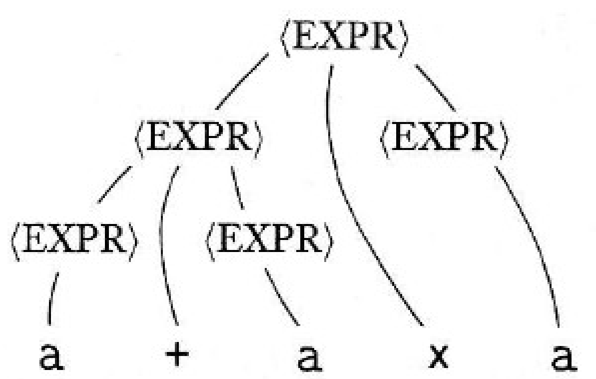
$$\langle \mathrm{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \mathrm{EXPR} \rangle + \langle \mathrm{EXPR} \rangle \mid \langle \mathrm{EXPR} \rangle \times \langle \mathrm{EXPR} \rangle \mid (\langle \mathrm{EXPR} \rangle) \mid \mathtt{a}$$

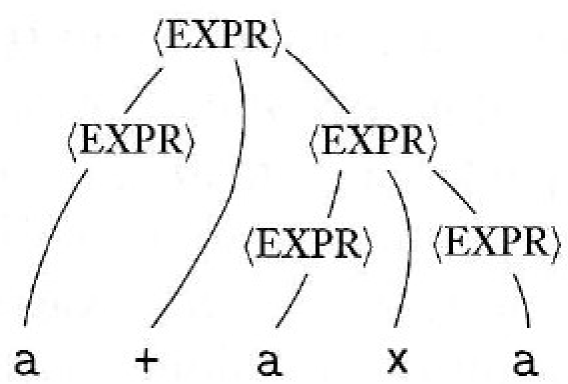




Mais exemplos de árvores sintáticas

$$\langle \mathrm{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \mathrm{EXPR} \rangle + \langle \mathrm{EXPR} \rangle \mid \langle \mathrm{EXPR} \rangle \times \langle \mathrm{EXPR} \rangle \mid (\langle \mathrm{EXPR} \rangle) \mid a$$





Duas árvores sintáticas distintas para a mesma cadeia!!!!

Ambiguidade

DEFINIÇÃO 2.7

Uma cadeia w é derivada ***ambiguamente*** na gramática livre-do-contexto G se ela tem duas ou mais derivações mais à esquerda diferentes. A gramática G é ***ambígua*** se ela gera alguma cadeia ambiguamente.

Ambiguidade

DEFINIÇÃO 2.7

Uma cadeia w é derivada ***ambiguamente*** na gramática livre-do-contexto G se ela tem duas ou mais derivações mais à esquerda diferentes. A gramática G é ***ambígua*** se ela gera alguma cadeia ambiguamente.

- Algumas gramáticas ambíguas podem ser convertidas em não-ambíguas
- Algumas linguagens são inerentemente ambíguas (só podem ser descritas por gramáticas ambíguas)
  - Eu vi o menino com uma luneta

Expressões aritméticas sem ambiguidade

EXEMPLO 2.4

Considere a gramática $G_4 = (V, \Sigma, R, \langle \text{EXPR} \rangle)$.

V é $\{\langle \text{EXPR} \rangle, \langle \text{TERM} \rangle, \langle \text{FACTOR} \rangle\}$ e Σ é $\{\texttt{a}, \texttt{+}, \texttt{x}, \texttt{(}, \texttt{)}\}$. As regras são

$$\begin{aligned}
\langle \text{EXPR} \rangle &\to \langle \text{EXPR} \rangle \texttt{+} \langle \text{TERM} \rangle \mid \langle \text{TERM} \rangle \\
\langle \text{TERM} \rangle &\to \langle \text{TERM} \rangle \texttt{x} \langle \text{FACTOR} \rangle \mid \langle \text{FACTOR} \rangle \\
\langle \text{FACTOR} \rangle &\to \texttt{(} \langle \text{EXPR} \rangle \texttt{)} \mid \texttt{a}
\end{aligned}$$

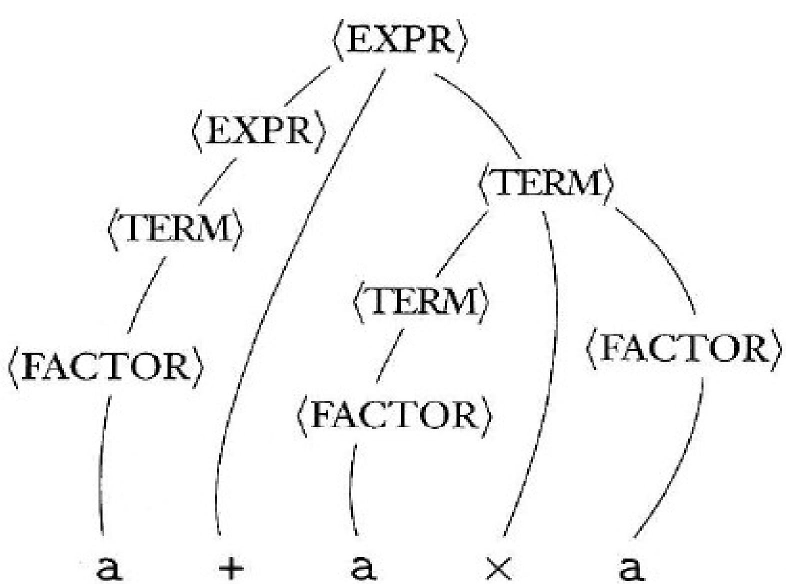
Expressões aritméticas sem ambiguidade

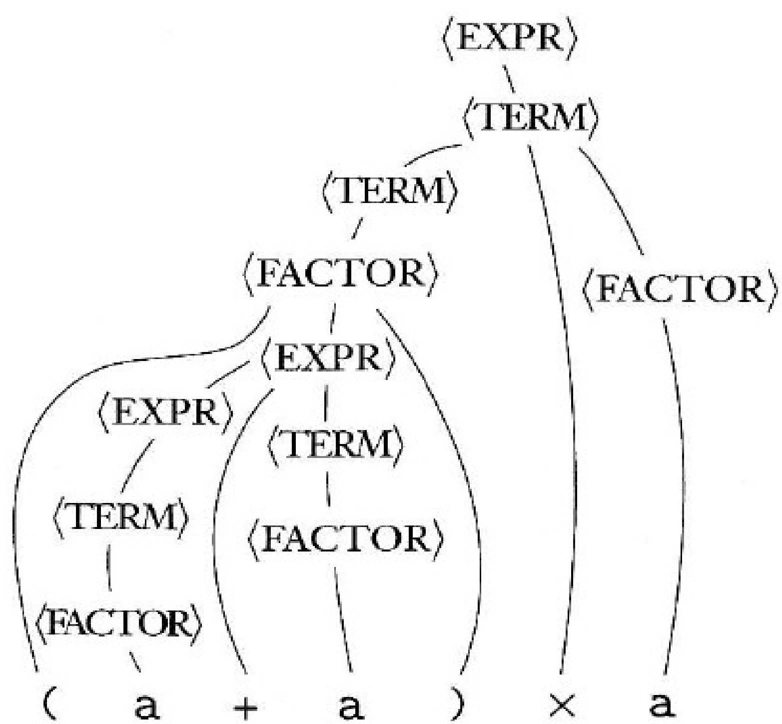
EXEMPLO 2.4

Considere a gramática $G_4 = (V, \Sigma, R, \langle \text{EXPR} \rangle)$.

V é $\{\langle \text{EXPR} \rangle, \langle \text{TERM} \rangle, \langle \text{FACTOR} \rangle\}$ e Σ é $\{\mathtt{a}, +, \times, (,)\}$. As regras são

$$
\begin{aligned}
\langle \text{EXPR} \rangle &\to \langle \text{EXPR} \rangle + \langle \text{TERM} \rangle \mid \langle \text{TERM} \rangle \\
\langle \text{TERM} \rangle &\to \langle \text{TERM} \rangle \times \langle \text{FACTOR} \rangle \mid \langle \text{FACTOR} \rangle \\
\langle \text{FACTOR} \rangle &\to (\langle \text{EXPR} \rangle) \mid \mathtt{a}
\end{aligned}
$$





O caso if then else

<prog> → … <com>...

<com> → ...

<com> → <cond>

<cond> → if <exp> then <com>

<cond> → if <exp> then <com> else <com>

<exp> → …

if <exp> then if <com> then <com> else <com>

O caso if then else

<prog> → … <com>...

<com> → ...

<com> → <cond>

<cond> → if <exp> then <com>

<cond> → if <exp> then <com> else <com>

<exp> → …

if <exp> then if <com> then <com> else <com>

AMBIGUIDADE!!!

O caso if then else

<prog> → … <com>...

<com> → ...

<com> → <cond>

<cond> → if <exp> then <com> endif

<cond> → if <exp> then <com> else <com> endif

<exp> → …

if <exp> then if <com> then <com> endif else <com> endif

ou

if <exp> then if <com> then <com> else <com> endif endif

SEM AMBIGUIDADE!!!

Forma Normal de Chomsky

DEFINIÇÃO 2.8

Uma gramática livre-do-contexto está na ***forma normal de Chomsky*** se toda regra é da forma

$$A \to BC$$
$$A \to a$$

onde a é qualquer terminal e A, B e C são quaisquer variáveis — exceto que B e C não podem ser a variável inicial. Adicionalmente, permitimos a regra $S \to \varepsilon$, onde S é a variável inicial.

Forma Normal de Chomsky

DEFINIÇÃO 2.8

Uma gramática livre-do-contexto está na ***forma normal de Chomsky*** se toda regra é da forma

$$A \rightarrow BC$$
$$A \rightarrow a$$

onde a é qualquer terminal e A, B e C são quaisquer variáveis — exceto que B e C não podem ser a variável inicial. Adicionalmente, permitimos a regra $S \rightarrow \varepsilon$, onde S é a variável inicial.

TEOREMA 2.9

Qualquer linguagem livre-do-contexto é gerada por uma gramática livre-do-contexto na forma normal de Chomsky.

Prova

- (S não pode aparecer do lado direito de nenhuma regra)

Prova

- Novo símbolo inicial S_0 e nova regra $S_0 \to S$

Prova

- Novo símbolo inicial S_0 e nova regra $S_0 \rightarrow S$
- Para toda regra $A \rightarrow \varepsilon$, $A \neq S$,
  - Remove a regra $A \rightarrow \varepsilon$
  - Se existe $R \rightarrow \alpha A \beta$, , $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$
  - Se existe $R \rightarrow A$,
-
  -
  -
-
  -
  -

Prova

- Novo símbolo inicial S_0 e nova regra $S_0 \rightarrow S$
- Para toda regra $A \rightarrow \varepsilon$, $A \neq S$,
  - Remove a regra $A \rightarrow \varepsilon$
  - Se existe $R \rightarrow \alpha A \beta$, acrescenta $R \rightarrow \alpha\beta$, $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$
  - Se existe $R \rightarrow A$, acrescenta $R \rightarrow \varepsilon$

Prova

- Novo símbolo inicial S_0 e nova regra $S_0 \rightarrow S$
- Para toda regra $A \rightarrow \varepsilon$, $A \neq S$,
  - Remove a regra $A \rightarrow \varepsilon$
  - Se existe $R \rightarrow \alpha A \beta$, acrescenta $R \rightarrow \alpha\beta$, $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$
  - Se existe $R \rightarrow A$, acrescenta $R \rightarrow \varepsilon$
- Para toda regra $A \rightarrow B$
  - Remove a regra $A \rightarrow B$
  - Se existe $B \rightarrow \alpha$, acrescenta , $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$
-
  -
  -

Prova

- Novo símbolo inicial S_0 e nova regra $S_0 \rightarrow S$
- Para toda regra $A \rightarrow \varepsilon$, $A \neq S$,
  - Remove a regra $A \rightarrow \varepsilon$
  - Se existe $R \rightarrow \alpha A \beta$, acrescenta $R \rightarrow \alpha\beta$, $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$
  - Se existe $R \rightarrow A$, acrescenta $R \rightarrow \varepsilon$
- Para toda regra $A \rightarrow B$
  - Remove a regra $A \rightarrow B$
  - Se existe $B \rightarrow \alpha$, acrescenta $A \rightarrow \alpha$, $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$

Prova

- Novo símbolo inicial S_0 e nova regra $S_0 \rightarrow S$
- Para toda regra $A \rightarrow \varepsilon$, $A \neq S$,
  - Remove a regra $A \rightarrow \varepsilon$
  - Se existe $R \rightarrow \alpha A\beta$, acrescenta $R \rightarrow \alpha\beta$, $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$
  - Se existe $R \rightarrow A$, acrescenta $R \rightarrow \varepsilon$
- Para toda regra $A \rightarrow B$
  - Remove a regra $A \rightarrow B$
  - Se existe $B \rightarrow \alpha$, acrescenta $A \rightarrow \alpha$, $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$
- Substitui cada regra $A \rightarrow u_1u_2..u_k$, $u_i \in (V \cup \Sigma)$ por
  - $A \rightarrow u_1A_1$, $A_1 \rightarrow u_2A_2$, … $A_{k-2} \rightarrow u_{k-1}u_k$, se $k >= 3$
  - $A \rightarrow U_1U_2$, $U_1 \rightarrow u_1$, $U_2 \rightarrow u_2$ se $k = 2$ e $u_i \in \Sigma$

Exemplo

1. A GLC original G_6 é mostrada à esquerda. O resultado de se aplicar o primeiro passo para introduzir uma nova variável inicial aparece à direita.

$$\begin{aligned} S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \\ A &\to B \mid S \\ B &\to \mathtt{b} \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S_0} &\to \boldsymbol{S} \\ S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \\ A &\to B \mid S \\ B &\to \mathtt{b} \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Exemplo

2. Remova as regras ε $B \to \varepsilon$, mostrado à esquerda, e $A \to \varepsilon$, mostrado à direita.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathbf{a} \\
A &\to B \mid S \mid \boldsymbol{\varepsilon} \\
B &\to \mathtt{b} \mid \cancel{\varepsilon}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid \boldsymbol{SA} \mid \boldsymbol{AS} \mid \boldsymbol{S} \\
A &\to B \mid S \mid \cancel{\varepsilon} \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

Exemplo

3a. Remova regras unitárias $S \to S$, mostrado à esquerda, e $S_0 \to S$, mostrado à direita.

$$\begin{aligned} S_0 &\to S \\ S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \mid S \\ A &\to B \mid S \\ B &\to \mathtt{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &\to S \mid \boldsymbol{ASA} \mid \mathbf{a}\boldsymbol{B} \mid \mathbf{a} \mid \boldsymbol{SA} \mid \boldsymbol{AS} \\ S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\ A &\to B \mid S \\ B &\to \mathtt{b} \end{aligned}$$

Exemplo

3b. Remova as regras unitárias $A \rightarrow B$ e $A \rightarrow S$.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\rightarrow ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\rightarrow ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\rightarrow B \mid S \mid \mathbf{b} \\
B &\rightarrow \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\rightarrow ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\rightarrow ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\rightarrow S \mid \mathtt{b} \mid \boldsymbol{ASA} \mid \mathbf{a}\boldsymbol{B} \mid \mathbf{a} \mid \boldsymbol{SA} \mid \boldsymbol{AS} \\
B &\rightarrow \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
S_0 &\rightarrow ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\rightarrow ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\rightarrow S \mid \mathtt{b} \mid \boldsymbol{ASA} \mid \mathbf{a}\boldsymbol{B} \mid \mathbf{a} \mid \boldsymbol{SA} \mid \boldsymbol{AS} \\
B &\rightarrow \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

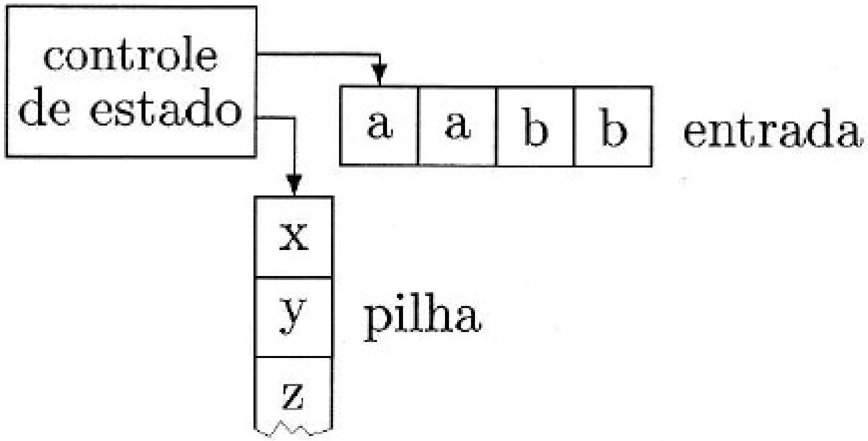
4. Converta as regras remanescentes para a forma apropriada acrescentando variáveis e regras adicionais. A gramática final em forma normal de Chomsky, a seguir, é equivalente a G_6. (Na realidade, o procedimento dado no Teorema 2.9 produz diversas variáveis U_i juntamente com várias regras $U_i \rightarrow \mathtt{a}$. Simplificamos a gramática resultante usando uma única variável U e a regra $U \rightarrow \mathtt{a}$.)

$$
\begin{aligned}
S_0 &\rightarrow AA_1 \mid UB \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\rightarrow AA_1 \mid UB \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\rightarrow \mathtt{b} \mid AA_1 \mid UB \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A_1 &\rightarrow SA \\
U &\rightarrow \mathtt{a} \\
B &\rightarrow \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

Cap 2.2 – Autômato com pilha (AP)

Cap 2.2 – Autômato com pilha (AP)

- Autômato finito com uma memória adicional (leitura e escrita DO TOPO da pilha)



- Lembram de B = $\{0^n1^n \mid n >= 0\}$?

Cap 2.2 – Autômato com pilha (AP)

- Determinísticos e não-determinísticos

- NÃO são equivalentes
  - Autômatos a pilha não determinísticos reconhecem mais linguagens

- Autômatos a pilha não-determinísticos são equivalentes a gramáticas livres de contexto

Definição formal

DEFINIÇÃO 2.13

Um ***autômato com pilha*** é uma 6-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, onde Q, Σ, Γ e F são todos conjuntos finitos, e

1. Q é o conjunto de estados,
2. Σ é o alfabeto de entrada,
3. Γ é o alfabeto de pilha,
4. $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$ é a função de transição,
5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial, e
6. $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados de aceitação.

Computação com um AP

Um autômato com pilha $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ computa da seguinte maneira. Ele aceita a entrada w se w puder ser escrita como $w = w_1 w_2 \cdots w_m$, onde cada $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, e existem uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ e cadeias $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ que satisfazem as três condições a seguir. As cadeias s_i representam a seqüência de conteúdo da pilha que M tem no ramo de aceitação da computação.

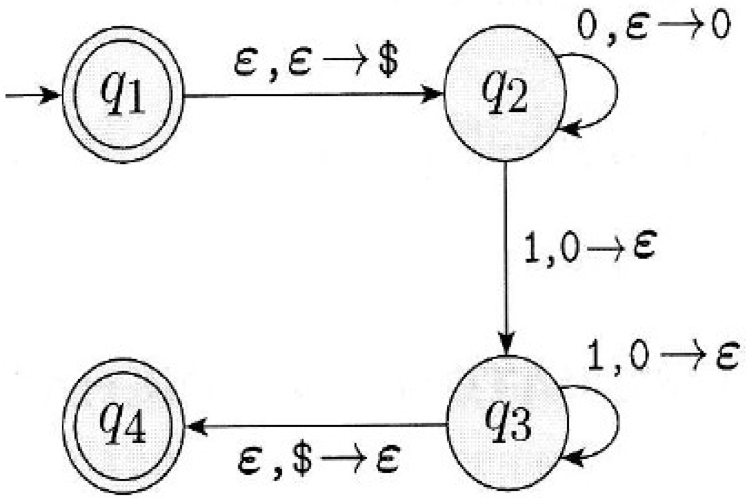
1. $r_0 = q_0$ e $s_0 = \varepsilon$. Essa condição significa que M inicia apropriadamente, no estado inicial e com uma pilha vazia.
2. Para $i = 0, \ldots, m-1$, temos $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, onde $s_i = at$ e $s_{i+1} = bt$ para algum $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ e $t \in \Gamma^*$. Essa condição afirma que M se move apropriadamente, conforme o estado, a pilha e o próximo símbolo de entrada.
3. $r_m \in F$. Essa condição afirma que um estado de aceitação ocorre ao final da entrada.

Exemplo

$\{0^n 1^n | n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$

Exemplo

$\{0^n1^n | n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$



Exemplo

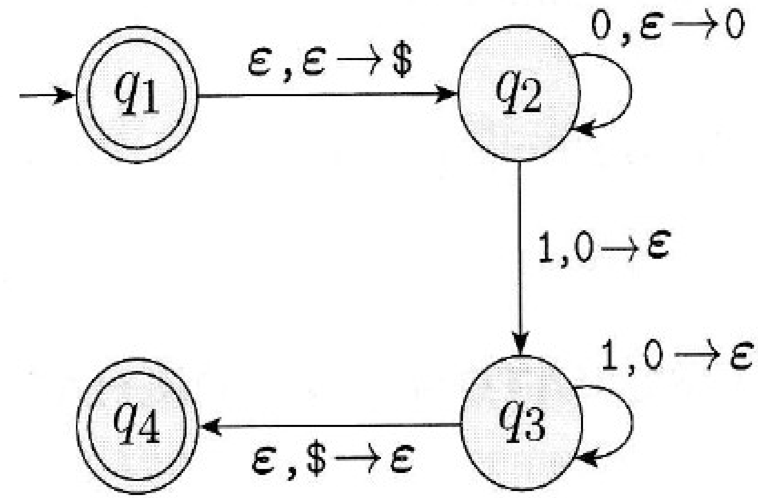
$\{0^n1^n | n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$

$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$,

$\Sigma = \{0,1\}$,

$\Gamma = \{0, \$\}$,

$F = \{q_1, q_4\}$, e



δ é dada pela tabela abaixo, na qual entradas em branco significam $\emptyset$.

Entrada:	0			1			ε		
Pilha:	0	\$	ε	0	\$	ε	0	\$	ε
q_1									$\{(q_2, \$)\}$
q_2			$\{(q_2, 0)\}$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$					
q_3				$\{(q_3, \varepsilon)\}$				$\{(q_4, \varepsilon)\}$	
q_4									