DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF^{a}.: Karla Lima

EACH-USP

October 15, 2018

Conjuntos

Intuitivamente ...

- É uma coleção não-ordenada de objetos,
- todos os objetos em um conjunto gozam de uma mesma propriedade,
- qualquer objeto que contenha a propriedade é um elemento do conjunto e qualquer objeto que não tem a propriedade não é um elemento.

Conjuntos

Notação

- Letras maiúsculas denotam conjuntos e o símbolo $\in$ denota que um elemento pertence ao conjunto.

Exemplo 1: Se $A = \{violeta, \ mostarda, \ vermelho\}$, então mostarda $\in A$ e púrpura $\notin A$.

Conjuntos

Considerações

- A **ordem** na qual os elementos são escritos não importa;
- Cada **elemento de um conjunto** é listado apenas uma vez;
- Dois **conjuntos** são **iguais** se contêm os mesmos elementos.

Conjuntos

Considerações

- A **ordem** na qual os elementos são escritos não importa;
- Cada **elemento de um conjunto** é listado apenas uma vez;
- Dois **conjuntos** são **iguais** se contêm os mesmos elementos.

$A = B$ significa $(\forall x)[(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)]$

Conjuntos

Descrição de Conjuntos

As diversas formas pelas quais descreveremos um conjunto são

1. listando (ou listando parcialmente) os elementos,
2. usando recursão para descrever como gerar o conjunto de elementos, ou
3. descrevendo uma propriedade P que caracterize o conjunto de elementos.

Conjuntos

Descrição de Conjuntos

A notação para um conjunto cujos elementos sejam caracterizados como tendo a propriedade P é $\{x|P(x)\}$.

$$S = \{x|P(x)\} \textit{ significa } (\forall x)[(x \in S \rightarrow P(x)) \wedge (P(x) \rightarrow x \in S)]$$

todo elemento de S tem a propriedade P e tudo o que tem a propriedade P é um elemento de S.

Conjuntos

Exercício

Descreva cada um dos seguintes conjuntos, fornecendo-lhes uma propriedade característica.

a- $\{1, 4, 9, 16\}$

b- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

Conjuntos

Alguns conjuntos mais usados

$\mathbb{N}$ conjunto de todos os inteiros não-negativos ($0 \in \mathbb{N}$)

$\mathbb{Z}$ conjunto de todos os inteiros

$\mathbb{Q}$ conjunto de todos os números racionais

$\mathbb{R}$ conjunto de todos os números reais

$\mathbb{C}$ conjunto de todos os números complexos

Conjuntos

Exemplo

Se $S = \{x | x \in \mathbb{N} \ e \ x < 0\}$ então $S = ?$

Conjuntos

Exemplo

$A = \{x | (\exists y)(y \in \{0, 1, 2\} \ e \ x = y^3)\}$

Exemplo

$B = \{x | x \in \mathbb{N} \ e \ (\exists y)(y \in \mathbb{N} \rightarrow x \leq y)\}$

Exemplo

$C = \{x | x \in \mathbb{N} \ e \ (\forall y)(y \in \mathbb{N} \rightarrow x \leq y)\}$

Conjuntos

Exercício

Descreva cada um dos conjuntos definidos abaixo.

a- $A = \{x | x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow x \geq y)\}$

b- $B = \{x | (\exists y)(\exists z)(y \in \{1, 2\} \text{ e } z \in \{2, 3\} \text{ e } x = y + z)\}$

Relações entre Conjuntos

- Para $A = \{2, 3, 5, 12\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 9, 12\}$, todo elemento de A é também um elemento de B. Quando isto acontece, dizemos que A é um **subconjunto** de B.
- Se A é um subconjunto de B, escrevemos, $A \subseteq B$. Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$, então A é dito um **subconjunto próprio** de B e denotado por $A \subset B$

Relações entre Conjuntos

Exemplo

Seja

$$A = \{1, 7, 9, 15\}$$

$$B = \{7, 9\}$$

$$C = \{7, 9, 15, 20\}$$

Então as seguintes sentenças (dentre outras) são todas verdadeiras:

$$B \subseteq C,\ 15 \in C$$

$$B \subseteq A,\ \{7, 9\} \subseteq B$$

$$B \subset A,\ \{7\} \subseteq A$$

$$A \not\subseteq C,\ \emptyset \subseteq C$$

Relações entre Conjuntos

Exemplo

Seja

$$A = \{x|x \in \mathbb{R} \ e \ x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

e

$$B = \{x|x \in \mathbb{N} \ e \ 1 \leq x \leq 4\}$$

Prove que $A \subset B$.

Relações entre Conjuntos

- A e B são iguais se contêm os mesmos elementos.
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

Relações entre Conjuntos

- A e B são iguais se contêm os mesmos elementos.
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$

Exemplo

Prove que

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \ e \ x^2 < 15\} = B = \{x | x \in \mathbb{N} \ e \ 2x < 7\}$$

Relações entre Conjuntos

- Dado um conjunto S, podemos criar um novo conjunto cujos elementos sejam todos os subconjuntos de S.
- Este novo conjunto é chamado de **conjunto das partes** de S, $\mathcal{P}(S)$.
- $\mathcal{P}(S)$ conterá pelo menos o $\emptyset$ e o próprio S ($\emptyset \subseteq S$ e $S \subseteq S$).

Relações entre Conjuntos

Exemplo

Para $A = \{1, 2, 3\}$, qual $\mathcal{P}(A)$?

Relações entre Conjuntos

Exercício

Se S tem n elementos então $\mathcal{P}(S)$ tem quantos elementos (prove por indução)?

Operações Binárias e Unárias

- Uma operação binária atua sobre dois números e uma operação unária atua sobre um único número.
- Um par ordenado é denotado por (x, y), onde x é o primeiro componente do par e y é o segundo.
- A ordem é importante em um par ordenado; portanto, os conjuntos $\{1, 2\}$ e $\{2, 1\}$ são iguais mas os pares ordenados $(1, 2)$ e $(2, 1)$ não o são.
- Dois pares ordenados (x, y) e (u, v) são iguais apenas quando $x = u$ e $y = v$.

Operações Binárias e Unárias

Exercício

Seja $S = \{3, 4\}$. Liste todos os pares ordenados (x, y) de elementos de S,

Operações Binárias e Unárias

Definição: Operação Binária

- É uma **operação binária** sobre um conjunto S se para qualquer par ordenado (x, y) de elementos de S , $x \circ y$ existe, é único (**bem-definida**) e é um elemento de S (S é fechado sob a operação) .

A adição, subtração e multiplicação são todas operações binárias em $\mathbb{Z}$. Por exemplo, quando realizamos a adição no par ordenado de inteiros (x, y), $x + y$ existe, é único e é inteiro. E a divisão?

Operações Binárias e Unárias

Exemplo

As operações lógicas de conjunção, disjunção, implicação e equivalência são operações binárias no conjunto das wffs proposicionais.

Operações Binárias e Unárias

Uma operação pode não ser uma operação binária em um conjunto S por três motivos:

- Existem elementos $x, y \in S$ para os quais $x \circ y$ não existe.
- Existem elementos $x, y \in S$ para os quais $x \circ y$ fornece mais de um resultado.
- Existem elementos $x, y \in S$ para os quais $x \circ y$ não pertence a S.

Operações Binárias e Unárias

Exemplo

Seja $x \circ y$ definida em $\mathbb{N}$ por $x \circ y = \begin{cases} 1 \ se \ x \geq 5 \\ 0 \ se \ x \leq 5 \end{cases}$

Operações Binárias e Unárias

Exemplo

A subtração é uma operação binária em $\mathbb{N}$?

Operações Binárias e Unárias

Exercícios

ESTUDAR OPERAÇÃO ENTRE CONJUNTOS!