Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2011 – Cálculo I – 1º sem. 2015
Professor: Dr. José Ricardo G. Mendonça

5ª Lista de Exercícios — Esboço de Curvas — 21 mai. 2015

Todo mundo sabe o que é uma curva até que tenha estudado matemática o suficiente para ficar confuso com o possível número ilimitado de exceções.
Felix Klein (1849–1925)

I. Esboço de curvas

1. Encontre os limites dos seguintes quocientes quando x se torna muito grande nos dois sentidos, isto é, encontre o valor dos limites $\lim_{x\to\pm\infty} q(x)$ para os seguintes quocientes:

   (a) $q(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^4 - 1}$;

   (b) $q(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

   (c) $q(x) = \dfrac{\cos x}{x}$;

   (d) $q(x) = \dfrac{2x^4 - 1}{-4x^3 + x^2}$;

   (e) $q(x) = \dfrac{\cos x^2}{x^2}$;

   (f) $q(x) = \dfrac{x^2 + 1}{-2x^2 - 1}$.

2. Para cada uma das seguintes funções, esboce a curva indicando (*i*) as interseções com os eixos coordenados, (*ii*) os pontos críticos, (*iii*) os intervalos de crescimento e de decrescimento, (*iv*) os máximos e mínimos, (*v*) o comportamento de $f(x)$ quando x se torna muito positivo ou muito negativo e (*vi*) os valores de x para os quais $f(x)$ se torna muito positivo ou muito negativo:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 3}$;

   (b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$;

   (c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$;

   (d) $f(x) = \sin^2 x$;

   (e) $f(x) = x^5 + x$;

   (f) $f(x) = x^6 + x$.

3. Sejam $a < b < c < d$ quatro números reais distintos. Usando a mesma estratégia do exercício anterior, esboce as curvas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = (x-a)(x-b)$;

   (b) $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$;

   (c) $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$.

II. Coordenadas polares e curvas paramétricas

1. Indique em um gráfico os pontos com as seguintes coordenadas polares (r,θ):

   (a) $(2,\pi/4)$;

   (b) $(1,-\pi/4)$;

   (c) $(3,4\pi/3)$;

   (d) $(2,15\pi/8)$.

   (e) $(2,-2)$ (sim, estas são coordenadas polares).

2. Encontre as coordenadas polares (r,θ) dos seguintes pontos (x,y):

   (a) $(1,1)$;

   (b) $(-1,-1)$;

   (c) $(2,\sqrt{2})$;

   (d) $(-1,0)$;

   (e) $(1/2,2\pi/3)$ (sim, estas são coordenadas retangulares).

3. Esboce o gráfico das seguintes funções em coordenadas polares:

   (a) $r = 2$;

   (b) $r = \sin 2\theta$;

   (c) $r = \dfrac{2}{2-\cos\theta}$;

   (d) $r = a\theta$, $a > 0$; essa curva é conhecida como espiral de Arquimedes;

   (e) $r = 1-\sin\theta$; as curvas $r = 1\pm\sin\theta$ e $r = 1\pm\cos\theta$ são conhecidas como cardióides (porque lembram o formato de um coração);

   (f) $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$; essa curva é conhecida como lemniscata de Bernoulli;

   (g) $r^2 = (a^2+b^2)+b^2-2(a+b)b\cos(\frac{a}{b}\theta)$, $a > b > 0$; essa curva é conhecida como epiciclóide e descreve a trajetória de um ponto fixo em um círculo de raio b que "rola" sem deslizamento sobre um outro círculo de raio a.

4. Esboce o gráfico das seguintes curvas dadas parametricamente:

   (a) $x = t+1$, $y = 3t+4$;

   (b) $x = t^2+1$, $y = 3-t$;

(c) $x = 1 - t^2$, $y = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$;

(d) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$;

(e) $r = t^3$, $\theta = \pi t^2$;

(f) $r = t$, $\theta = t^2$.

5. Encontre cinco pontos racionais $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sobre o círculo unitário $r = 1$. Em geral, é *muito* difícil encontrar pontos racionais sobre curvas. Por exemplo, não existe *nenhum* ponto racional sobre a curva $x^n + y^n = 1$ para valores inteiros $n > 2$ — esse é o conteúdo do famoso "último teorema de Fermat"! Essa dificuldade é explorada em alguns esquemas de criptografia de chave pública. A área da matemática que estuda esse assunto (entre outros) é a geometria algébrica, uma das mais sofisticadas áreas de toda a matemática contemporânea.