ACH2012 - Cálculo II
Sistema de Informação - EACH

Lista 4: Vetores e Geometria do Espaço

1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de quatro unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distancia de três unidades para abaixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?

2. Esboce os pontos (0,5,2), (4,0,-1), (2,4,6) e (1,-1,2) em um mesmo conjunto de eixos coordenados.

3. Qual dos pontos está mais próximo do plano xy: $P(6, 2, 3)$, $Q(-5, -1, 4)$, ou $R(0, 3, 8)$? Qual ponto pertence ao plano yz?

4. Descreva e esboce no $\mathbb{R}^3$ a superfície representada pela equação $x + y = 2$.

5. Qual a representação de $x = 4$ em $\mathbb{R}^2$? e em $\mathbb{R}^3$? Faça um esboço delas.

6. Qual a representação de $y = 3$ em $\mathbb{R}^3$? O que $z = 5$ representa? Qual a representação do par de equações $y = 3$ e $z = 5$? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos (x, y, z) tal que s $y = 3$ e $z = 5$. Ilustre com um esboço.

7. Mostre que o triângulo com vértices em $P(-2, 4, 0)$, $Q(1, 2, -1)$ e $R(-1, 1, 2)$ é um triângulo equilátero.

8. Determine se os pontos estão alinhados. $A(5, 1, 3)$, $B(7, 9, -1)$ e $C(1, -15, 11)$.

9. Determine a esfera de raio 5 e centro em $(1, -4, 3)$. Qual é a intersecção com o plano xz?

10. Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.
    (a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y - 4z = 28$
    (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$

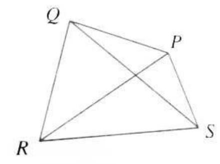
11. Determine a equação da maior esfera com centro em $(5, 4, 9)$ contida no primeiro octante.

12. Descreva em palavras a região de $\mathbb{R}^3$ representada pela equação ou inequação.
    (a) $y = -4$
    (b) $x > 3$

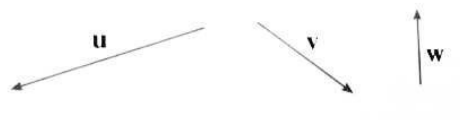
    (c) $0 \le z \le 6$
    (d) $x^2 + y^2 + z^2 > 1$
    (e) $xyz = 0$

13. Qual a relação existente entre o ponto $(4, 5)$ e o vetor $(4, 5)$? Faça um esboço ilustrativo.

14. Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.
    (a) $\vec{PQ} + \vec{QR}$
    (b) $\vec{QS} - \vec{PS}$
    (c) $\vec{RP} + \vec{PS}$
    (d) $\vec{RS} + \vec{SP} + \vec{PQ}$



15. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.
    (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
    (b) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
    (c) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
    (d) $\mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$
    (e) $2\mathbf{v}$
    (f) $2\mathbf{v} + \mathbf{w}$
    (g) $-\frac{1}{2}\mathbf{u}$
    (h) $\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$



16. Determine a soma dos vetores dados e ilustre geometricamente.
    (a) $(3, -1),\ (-2, 4)$
    (b) $(0, 1, 2),\ (0, 0, -3)$
    (c) $(-1, 0, 2),\ (0, 4, 0)$
17. Determine $|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$, e $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$.
    (a) $\mathbf{a} = (-4, 3),\ \mathbf{b} = (6, 2)$
    (b) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j},\ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
    (c) $\mathbf{a} = (6, 2, 3),\ \mathbf{b} = (-1, 5, -2)$
    (d) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
18. Ache um vetor que possui a mesma direção que $(-2, 4, 2)$, mas tem comprimento 6.
19. Determine o produto escalar de dois vetores cujas normas são respectivamente 6 e $\frac{1}{3}$ e o ângulo entre eles é $\pi/4$.
20. Determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
    (a) $\mathbf{a} = (-4, 3),\ \mathbf{b} = (6, 2)$
    (b) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j},\ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
    (c) $\mathbf{a} = (6, 2, 3),\ \mathbf{b} = (-1, 5, -2)$
    (d) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
    (e) $|\mathbf{a}| = 4,\ |\mathbf{b}| = 15,$ *o ângulo entre a e b é $\pi/6$*
    (f) $|\mathbf{a}| = 4,\ |\mathbf{b}| = 10,$ *o ângulo entre a e b é 120^o*
21. Determine o ângulo entre os vetores.
    (a) $\mathbf{a} = (3, 4),\ \mathbf{b} = (5, 12)$
    (b) $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
    (c) $\mathbf{a} = (1, 2, 3),\ \mathbf{b} = (4, 0, -1)$
    (d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
22. Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.
    (a) $\mathbf{u} = (-5, 3, 7),\ \mathbf{v} = (6, -8, 2)$
    (b) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k},\ \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
    (c) $\mathbf{u} = (4, 6),\ \mathbf{v} = (-3, 2)$

    (d) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k},\ \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
    (e) $\mathbf{u} = (a, b, c),\ \mathbf{v} = (-b, a, 0)$
23. Use os valores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$, e $R(6, -2, -5)$ é retângulo.
24. Para que valores de b sãos os vetores $(-6, b, 2)$ e (b, b^2, b) ortogonais?
25. Determine um vetor unitário ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.
26. Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor:
    (a) $(3, 4, 5)$
    (b) $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
27. Determine o vetor projeção e a projeção escalar de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$.
    (a) $\mathbf{a} = (3, -4),\ \mathbf{b} = (5, 0)$
    (b) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
    (c) $\mathbf{a} = (4, 2, 0),\ \mathbf{b} = (1, 1, 1)$
    (d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
28. Mostre que $\mathbf{b} - \mathbf{proj_a b}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$.
29. Suponha que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sejam vetores não-nulos.
    (a) Sob quais circunstâncias $comp_b a = comp_a b$?
    (b) Sob quais circunstâncias $\mathbf{proj_b a} = \mathbf{proj_a b}$?
30. Determine o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifique que ele é ortogonal $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.
    (a) $\mathbf{a} = (1, 2, 0),\ \mathbf{b} = (0, 3, 1)$
    (b) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
    (c) $\mathbf{a} = (t, t^2, t^3),\ \mathbf{b} = (1, 2t, 3t^2)$
    (d) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k},\ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$
31. Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esboce $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vetores com inicio na origem.
32. Se $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, 3)$, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.
33. Se $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 0)$ e $\mathbf{c} = (0, 0, -4)$, mostre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

34. Determine dois vetores unitários que sejam perpendiculares tanto a $(1,-1,1)$ quanto a $(0,4,4)$.

35. Use o produto misto para determinar se os pontos $P(1,0,1)$, $Q(2,4,6)$, $R(3,-1,2)$ e $S(6,2,8)$ pertencem ao mesmo plano.

36. Suponha que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

   (a) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

   (b) Se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

   (c) Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, é verdade que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

37. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.

   (b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.

   (c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.

   (d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelas.

   (e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.

   (f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

   (g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.

   (h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelas.

   (i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.

   (j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelos.

   (k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.

   (l) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelas.

38. Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.

   (a) A reta que passa pelo ponto $(1,2,-3)$ e é paralela ao vetor $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

   (b) A reta que passa pelo ponto $(-2,4,10)$ e é paralela ao vetor $(3,1,-8)$.

   (c) A reta que passa pela origem e é paralela à reta $x = 2t$, $y = 1 - t$, $z = 4 + 3t$.

39. Determine as equações paramétricas e na forma simétrica para a reta.

   (a) A reta que passa pela origem e pelo ponto $(1,2,3)$.

   (b) A reta que passa pelos pontos $(1,3,2)$ e $(-4,3,0)$.

   (c) A reta que passa por $(1,-1,1)$e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$.

   (d) A reta que é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

40. Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de intersecção.

   (a) $L_1 : x = -6t,\ y = 1 + 9t,\ z = -3t$ e $L_2 : x = 1 + 2s,\ y = 4 - 3s,\ z = s$.

   (b) $L_1 : x = 1 + 2t,\ y = 3t,\ z = 2 - t$ e $L_2 : x = -1 + s,\ y = 4 + s,\ z = 1 + 3s$.

41. Determine a equação do plano.

   (a) O plano que passa pelo ponto $(6,3,2)$ e é perpendicular ao vetor $(-2,1,5)$.

   (b) O plano que passa pelo ponto $(4,0,3)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

   (c) O plano que passa pelo ponto $(-2,8,10)$ e é perpendicular a reta $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - 3t$.

   (d) O plano que passa pelo ponto $(-1,6,-5)$ e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$.

   (e) O plano que contém a reta a $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$.

   (f) O plano que passa pelos pontos $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$.

42. Determine o ponto dado pela intersecção da reta $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 5t$ com o plano $x - y + 2z = 9$.

43. Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

   (a) $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0.$

   (b) $2z = 4y - x, \quad 3x - 12y + 6z = 1.$

   (c) $x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1.$

   (d) $4y - 2z = x, \quad 8y = 1 + 2x + 4z.$

   (e) $x + 2y + 2z = 1, \quad 2x - 2y + 2z = 1.$

44. Determine a equação na forma simétrica da reta de intersecção dos planos $x + y - z = 2$ e $3x - 4y + 5z = 6$. Determine o ângulo entre os planos.

45. Determine a equação paramétrica da reta obtida pela intersecção dos planos $z = x + y$ e $2x - 5y - z = 1$.

46. (a) Determine a distancia do ponto $(2,8,5)$ ao plano $x - 2y - 2z = 1$.

   (b) Determine a distancia entre os planos paralelos $z = x + 2y + 1$, $3x + 6y - 3z = 4$.