Inferência Estatística

Introdução

E.F.T[1]

[1]EACH-USP
Universidade de São Paulo

ACH2053

Outline

1. Teste de Hipóteses
   - Hipóteses Nula e Alternativa
   - A Região Crítica (RC)
   - A Funçaõ Poder
   - Erros Tipo I e Tipo II
   - Nível do Teste
   - Construindo um teste com algum nivel específico de Significância
   - o p valor

Outline

1. Teste de Hipóteses
   - Hipóteses Nula e Alternativa
   - A Região Crítica (RC)
   - A Funçaõ Poder
   - Erros Tipo I e Tipo II
   - Nível do Teste
   - Construindo um teste com algum nivel específico de Significância
   - o p valor

Introdução

Consideramos agora problemas envolvendo um parâmetro θ cujo valor é desconhecido mas pertence a um espaço paramêtrico Ω. Suporemos agora que Ω pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos Ω_0 e Ω_1 e que o analista deve decidir se o valor (desconhecido) de θ pertence a Ω_0 ou Ω_1.

- H_0 denotará a hipótese de que $\theta \in \Omega_0$.
- H_1 denotará a hipótese de que $\theta \in \Omega_1$.

como Ω_0 e Ω_1 são disjuntos e $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$, exatamente uma das hipóteses será verdadeira.

O analista deve decidir se aceitar H_0 ou H_1. Um problema deste tipo, em que apenas existem duas decisões possíveis, é chamado de *problema de Teste de Hipóteses*.

Introdução

Consideramos agora problemas envolvendo um parâmetro θ cujo valor é desconhecido mas pertence a um espaço paramêtrico Ω. Suporemos agora que Ω pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos Ω_0 e Ω_1 e que o analista deve decidir se o valor (desconhecido) de θ pertence a Ω_0 ou Ω_1.

- H_0 denotará a hipótese de que $\theta \in \Omega_0$.
- H_1 denotará a hipótese de que $\theta \in \Omega_1$.

como Ω_0 e Ω_1 são disjuntos e $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$, exatamente uma das hipóteses será verdadeira.

O analista deve decidir se aceitar H_0 ou H_1. Um problema deste tipo, em que apenas existem duas decisões possíveis, é chamado de *problema de Teste de Hipóteses*.

Introdução

Consideramos agora problemas envolvendo um parâmetro θ cujo valor é desconhecido mas pertence a um espaço paramêtrico Ω. Suporemos agora que Ω pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos Ω_0 e Ω_1 e que o analista deve decidir se o valor (desconhecido) de θ pertence a Ω_0 ou Ω_1.

- H_0 denotará a hipótese de que $\theta \in \Omega_0$.
- H_1 denotará a hipótese de que $\theta \in \Omega_1$.

como Ω_0 e Ω_1 são disjuntos e $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$, exatamente uma das hipóteses será verdadeira.
O analista deve decidir se aceitar H_0 ou H_1. Um problema deste tipo, em que apenas existem duas decisões possíveis, é chamado de *problema de Teste de Hipóteses*.

Introdução

Em alguns problemas, o analista poderá fazer coletar algumas informações antes de tomar a decisão, os valores observados lhe fornecerão informação sobre o valor de θ. Um procedimento para decidir ou aceitar H_0 ou aceitar H_1 é chamado de *procedimento de teste* ou simplesmente *teste*.

Hipóteses Nula e Alternativa

Em muitos problemas as duas hipóteses H_0 e H_1 são tratados completamente diferentes, para distingui-las

- H_0 é denotado por Hipótese Nula , e
- H_1 é denotado por Hipótese Alternativa.

Quando realizamos um teste, se decidirmos que θ está em Ω_1, estamos dizendo que *rejeitamos* H_0. Se decidirmos que θ está em Ω_0 dizemos que *não rejeitamos* H_0.

Exemplo:Hipóteses Nula e Alternativa

A amplitude de crânios encontrados em Egito, que datam de aprox. 4000 a.C. foram medidos (em mm), e foram modelados como tendo distribuição Normal com média μ desconhecida e variância 26. Deseja-se compara-los com as medidas de crânios de homens da nossa época (aprox. 140 mm). O espaço paramêtrico Ω poderia ser o dos reais positivos, Ω_0 o intervalo $[140, \infty)$, e $\Omega_1 = (0, 140)$. Neste caso, escreveriamos:

- H_0: $\mu \geq 140$
- H_1: $\mu < 140$

No caso de a média e a variância serem desconhecidas, o espaço paramêtrico Ω seria formado de pares de números reais, $\Omega_0 = [140, \infty) \times (0, \infty)$ e $\Omega_1 = (0, 140) \times (0, \infty)$, desde

Exemplo:Hipóteses Nula e Alternativa

A amplitude de crânios encontrados em Egito, que datam de aprox. 4000 a.C. foram medidos (em mm), e foram modelados como tendo distribuição Normal com média μ desconhecida e variância 26. Deseja-se compara-los com as medidas de crânios de homens da nossa época (aprox. 140 mm). O espaço paramêtrico Ω poderia ser o dos reais positivos, Ω_0 o intervalo $[140, \infty)$, e $\Omega_1 = (0, 140)$. Neste caso, escreveriamos:

- H_0: $\mu \geq 140$
- H_1: $\mu < 140$

No caso de a média e a variância serem desconhecidas, o espaço paramêtrico Ω seria formado de pares de números reais, $\Omega_0 = [140, \infty) \times (0, \infty)$ e $\Omega_1 = (0, 140) \times (0, \infty)$, desde

Hipóteses Simples e Compostas

Suponha que desejarmos testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \theta \in \Omega_0$$

$$H_1 : \theta \in \Omega_1.$$

Para uma destas Hipóteses, o conjunto Ω_i ($i = 0, 1$), pode conter um valor particular de θ ou um cojunto.

- Se Ω_i contém um valor particular de θ então H_i é uma *Hipótese simples*.
- Se Ω_i contém mais do que um valor de θ então H_i é uma *Hipótese composta*.

Sob a hipótese simples, a distribuição das observações é completamente especificada, sob a hipótese composta, é especificado apenas a distribuição das observações que

Hipóteses Simples e Compostas

Suponha que desejarmos testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \theta \in \Omega_0$$

$$H_1 : \theta \in \Omega_1 .$$

Para uma destas Hipóteses, o conjunto Ω_i ($i = 0, 1$), pode conter um valor particular de θ ou um cojunto.

- Se Ω_i contém um valor particular de θ então H_i é uma *Hipótese simples*.
- Se Ω_i contém mais do que um valor de θ então H_i é uma *Hipótese composta*.

Sob a hipótese simples, a distribuição das observações é completamente especificada, sob a hipótese composta, é especificado apenas a distribuição das observações que

Hipóteses Simples e Compostas

Suponha que desejarmos testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \theta \in \Omega_0$$

$$H_1 : \theta \in \Omega_1 .$$

Para uma destas Hipóteses, o conjunto Ω_i $(i = 0, 1)$, pode conter um valor particular de θ ou um cojunto.

- Se Ω_i contém um valor particular de θ então H_i é uma *Hipótese simples*.
- Se Ω_i contém mais do que um valor de θ então H_i é uma *Hipótese composta*.

Sob a hipótese simples, a distribuição das observações é completamente especificada, sob a hipótese composta, é especificado apenas a distribuição das observações que

Hipóteses Unilaterais e Bilaterais

Hipóteses unilaterais são da forma

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : \theta \geq \theta_0,$$

com as correspondentes hipóteses alternativas unilaterais

$$H_1 : \theta > \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : \theta < \theta_0$$

Quando a hipótese é simples:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

a hipótese alternativa é usualmente bilateral:

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Hipóteses Unilaterais e Bilaterais

Hipóteses unilaterais são da forma

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : \theta \geq \theta_0,$$

com as correspondentes hipóteses alternativas unilaterais

$$H_1 : \theta > \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_0 : \theta < \theta_0$$

Quando a hipótese é simples:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

a hipótese alternativa é usualmente bilateral:

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Outline

1. Teste de Hipóteses
   - Hipóteses Nula e Alternativa
   - A Região Crítica (RC)
   - A Funçaõ Poder
   - Erros Tipo I e Tipo II
   - Nível do Teste
   - Construindo um teste com algum nivel específico de Significância
   - o p valor

Exemplo: T.H da média de uma Normal com variância conhecida

Suponha que $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ é uma a.a.de uma Normal com média μ desconhecida e variância conhecida σ^2. Desejamos testar as hipóteses:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Poderiamos escolher um número c e rejeitar H_0 se a distância entre $\bar{X}_n$ e μ_0 é maior que c. Para isto, consideramos dois conjuntos:

$$S_0 = \{\mathbf{x} : -c \leq \bar{X}_n - \mu_0 \leq c\}, \quad e \quad S_1 = S_0^C$$

Então, rejeitariamos H_0 se $\mathbf{X} \in S_1$ e não rejeitariamos H_0 se $\mathbf{X} \in S_0$

Exemplo: T.H da média de uma Normal com variância conhecida

Suponha que $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ é uma a.a.de uma Normal com média μ desconhecida e variância conhecida σ^2. Desejamos testar as hipóteses:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Poderiamos escolher um número c e rejeitar H_0 se a distância entre $\bar{X}_n$ e μ_0 é maior que c. Para isto, consideramos dois conjuntos:

$$S_0 = \{\mathbf{x} : -c \leq \bar{X}_n - \mu_0 \leq c\}, \quad e \quad S_1 = S_0^C$$

Então, rejeitariamos H_0 se $\mathbf{X} \in S_1$ e não rejeitariamos H_0 se $\mathbf{X} \in S_0$

Introdução

No caso geral, considere o teste das seguintes hipóteses:

$$H_0 : \theta \in \Omega_0, \quad e \quad H_1 : \theta \in \Omega_1.$$

Antes de tomar a decisão, o analista poderia observar uma a.a. $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ extraída da distribuição que envolve o parâmetro θ. Podemos denotar S como o conjunto de todos os valores possíveis da a.a.
Em este problema, o analista especifica o procedimento de teste, particinando o espaço amostral S em dois subconjuntos. Um deles (S_1) contém os valores de $\mathbf{X}$ para os quais rejeitaria-se H_0, e o outro (S_0) contém os valores de $\mathbf{X}$ para os quais não rejeita-se H_0.

Região Crítica

O conjunto S_1 definido acima é chamado de *região crítica* do teste (em resumo, o teste (procedimento) consiste em especificar a região crítica).

Estatísticas de Teste e Regiões de Rejeição

Seja $\mathbf{X}$ uma a.a de uma distribuição que depende do parâmetro θ. Seja $T = r(\mathbf{X})$ uma estatística, e seja R um subconjunto da reta. Suponha que o procedimento de teste é da forma "*rejeite H_0 se $T \in R$*". Então chamamos T como *estatística de teste* e R como *Região de Rejeição*.

Quando um teste é definido em termos de T e R, $S_1 = \{\mathbf{x} : r(\mathbf{x} \in T\}$ é a região crítica do teste.

No exemplo acima, a estatística de teste é $T = |\bar{X}_n - \mu_0|$ e a Região de Rejeição é o interavalo $[c, \infty)$.

Estatísticas de Teste e Regiões de Rejeição

Seja $\mathbf{X}$ uma a.a de uma distribuição que depende do parâmetro θ. Seja $T = r(\mathbf{X})$ uma estatística, e seja R um subconjunto da reta. Suponha que o procedimento de teste é da forma "*rejeite H_0 se $T \in R$* ". Então chamamos T como *estatística de teste* e R como *Região de Rejeição*.

Quando um teste é definido em termos de T e R, $S_1 = \{\mathbf{x} : r(\mathbf{x} \in T\}$ é a região crítica do teste.

No exemplo acima, a estatística de teste é $T = |\bar{X}_n - \mu_0|$ e a Região de Rejeição é o interavalo $[c, \infty)$.

Procedimentos gerais

- 1. Divida o espaço paramétrico Ω em dois subconjuntos disjuntos Ω_0 e Ω_1.
- 2. Divida o espaço amostral S em dois subconjuntos disjuntos S_0 e S_1.

Essas divisões não são as mesmas, usualmente, o espaço amostral e o espaço paramétrico tem dimensões diferentes.

- Se a a.a. $\mathbf{X}$ estiver em S_1, rejeitamos a hipótese nula Ω_0.
- Se a a.a. $\mathbf{X} \in S_0$, não rejeitamos a hipótese nula Ω_0.

eventualmente conhecemos sobre se S_0 ou S_1 contém $\mathbf{X}$, raramente aprendemos se Ω_0 ou Ω_1 contém θ.

Procedimentos gerais

- 1. Divida o espaço paramétrico Ω em dois subconjuntos disjuntos Ω_0 e Ω_1.
- 2. Divida o espaço amostral S em dois subconjuntos disjuntos S_0 e S_1.

Essas divisões não são as mesmas, usualmente, o espaço amostral e o espaço paramétrico tem dimensões diferentes.

- Se a a.a. $\mathbf{X}$ estiver em S_1, rejeitamos a hipótese nula Ω_0.
- Se a a.a. $\mathbf{X} \in S_0$, não rejeitamos a hipótese nula Ω_0.

eventualmente conhecemos sobre se S_0 ou S_1 contém $\mathbf{X}$, raramente aprendemos se Ω_0 ou Ω_1 contém θ.

Outline

1. Teste de Hipóteses
   - Hipóteses Nula e Alternativa
   - A Região Crítica (RC)
   - A Funçaõ Poder
   - Erros Tipo I e Tipo II
   - Nível do Teste
   - Construindo um teste com algum nivel específico de Significância
   - o p valor

A função poder

Seja δ um procedimento de teste (dependendo da R.C ou de uma estatística), as propriedades de δ podem ser sumarizadas calculando para cada $\theta \in \Omega$ a probabilidade $\pi(\theta|\delta)$ que o teste δ rejeitará H_0 ou a probabilidade $1 - \pi(\theta|\delta)$ que não rejeitará H_0. A função $\pi(\theta|\delta)$ é chamado *a função poder do teste* δ.

- Se S_1 denota a R.C. de δ então

$$\pi(\theta|\delta) = P(\mathbf{X} \in S_1|\theta) \quad \text{para} \quad \theta \in \Omega \tag{1}$$

- Se δ é descrito em função de T e R,

$$\pi(\theta|\delta) = P(T \in R|\theta) \quad \text{para} \quad \theta \in \Omega \tag{2}$$

A função poder

Seja δ um procedimento de teste (dependendo da R.C ou de uma estatística), as propriedades de δ podem ser sumarizadas calculando para cada $\theta \in \Omega$ a probabilidade $\pi(\theta|\delta)$ que o teste δ rejeitará H_0 ou a probabilidade $1 - \pi(\theta|\delta)$ que não rejeitará H_0. A função $\pi(\theta|\delta)$ é chamado *a função poder do teste* δ.

- Se S_1 denota a R.C. de δ então

$$\pi(\theta|\delta) = P(\mathbf{X} \in S_1|\theta) \quad \text{para} \quad \theta \in \Omega \tag{1}$$

- Se δ é descrito em função de T e R,

$$\pi(\theta|\delta) = P(T \in R|\theta) \quad \text{para} \quad \theta \in \Omega \tag{2}$$

A função poder ideal

A função poder ideal seria aquela $\pi(\theta|\delta) = 0$ para cada $\theta \in \Omega_0$ e $\pi(\theta|\delta) = 1$ para cada valor de $\theta \in \Omega_1$.
Se a função poder de um teste δ tiver estes valores, não importará mais qual o valor de θ pois o teste δ levará sempre à decisão correta com probabilidade 1. Isto acontece raramente!.

Exemplo: T.H. sobre a média de uma normal com variância conhecida

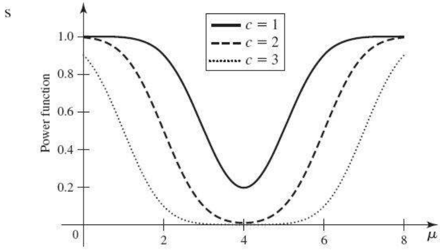
No exemplo anterior o teste δ era baseado em $T = |\bar{X}_n - \mu_0|$ com Região de Rejeição $R = [c, \infty)$. Sabemos que $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Podemos calcular então a função poder: Seja Φ a f.d.A da normal, então

$$\begin{aligned} P(T \in R|\mu) &= P(\bar{X}_n \geq \mu_0 + c|\mu) + P(\bar{X}_n \leq \mu_0 + c|\mu) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 + c - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_0 - c - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

a expressão final é a funçaõ poder $\pi(\mu|\delta)$.

Exemplo: T.H. sobre a média de uma normal com variância conhecida

Na figura, consideramos a função poder para 3 testes diferentes com $c = 1, 2, 3$ e com $\mu_0 = 4$, $n = 15$ e $\sigma^2 = 9$



Outline

1. Teste de Hipóteses
   - Hipóteses Nula e Alternativa
   - A Região Crítica (RC)
   - A Funçaõ Poder
   - Erros Tipo I e Tipo II
   - Nível do Teste
   - Construindo um teste com algum nivel específico de Significância
   - o p valor

Erros Tipo I e II

- Erro Tipo I: Rejeitar a Hipótese Nula, quando ela é verdadeira.
- Erro Tipo II: Não Rejeitar a Hipótese Nula, quando ela é falsa.

Erros Tipo I e II

- Erro Tipo I: Rejeitar a Hipótese Nula, quando ela é verdadeira.
- Erro Tipo II: Não Rejeitar a Hipótese Nula, quando ela é falsa.

Erros Tipo I e II em termos da função poder

- Se $\theta \in \Omega_0$, $\pi(\theta|\delta)$ é a prob. de cometer o erro tipo I.
- Se $\theta \in \Omega_1$, $1 - \pi(\theta|\delta)$ é a prob. de cometer o erro tipo II.

Como $\theta \in \Omega_0$ ou $\theta \in \Omega_1$ (não ambos), apenas um dos tipos de erro é possível condicional a θ.

Erros Tipo I e II em termos da função poder

- Se $\theta \in \Omega_0$, $\pi(\theta|\delta)$ é a prob. de cometer o erro tipo I.
- Se $\theta \in \Omega_1$, $1 - \pi(\theta|\delta)$ é a prob. de cometer o erro tipo II.

Como $\theta \in \Omega_0$ ou $\theta \in \Omega_1$ (não ambos), apenas um dos tipos de erro é possível condicional a θ.

Escolha do teste δ

Gostariamos de escolher um δ tal que $\pi(\theta|\delta)$ seja pequeno para $\theta \in \Omega_0$ e que seja alto para $\theta \in \Omega_1$.
Geralmente, estes dois objetivos são contrários, i.e, se escolhemos δ tal que é pequeno para $\pi(\theta|\delta)$, usualmente encontraremos que ele também é pequeno para $\theta \in \Omega_1$.

Escolha do teste δ

Gostariamos de escolher um δ tal que $\pi(\theta|\delta)$ seja pequeno para $\theta \in \Omega_0$ e que seja alto para $\theta \in \Omega_1$.
Geralmente, estes dois objetivos são contrários, i.e, se escolhemos δ tal que é pequeno para $\pi(\theta|\delta)$, usualmente encontraremos que ele também é pequeno para $\theta \in \Omega_1$.

Exemplo da Escolha do teste δ

Seja um teste δ_0 que nunca rejeita H_0, sem importar os dados observados. para este procedimento,

- $\pi(\theta|\delta_0) = 0$ para todo $\theta \in \Omega_0$.
- No entanto, para este mesmo procedimento,também $\pi(\theta|\delta_0) = 0$ para todo $\theta \in \Omega_1$.

Exemplo da Escolha do teste δ

Seja um teste δ_1 que sempre rejeita H_0, sem importar os dados observados. para este procedimento,

- $\pi(\theta|\delta_1) = 1$ para todo $\theta \in \Omega_0$.
- No entanto, para este mesmo procedimento,também $\pi(\theta|\delta_1) = 1$ para todo $\theta \in \Omega_1$.

Escolha do teste δ

Existe então a necessidade de encontrar um balanço entre os dois objetivos: poder pequeno em Ω_0 e alto poder em Ω_1.

O método mais usado é o de escolher um número α_0 entre 0 e 1 tal que:

$$\pi(\theta|\delta) \leq \alpha_0, \quad \text{para todo} \quad \theta \in \Omega_0 \tag{4}$$

Entre os testes que satisfazem a equação acima, procura-se aquele cuja função poder seja tão alto quanto possível para $\theta \in \Omega_1$.

Outro método consistem em construir uma função linear das diferentes probabilidades de erro.

Escolha do teste δ

Existe então a necessidade de encontrar um balanço entre os dois objetivos: poder pequeno em Ω_0 e alto poder em Ω_1.
O método mais usado é o de escolher um número α_0 entre 0 e 1 tal que:

$$\pi(\theta|\delta) \leq \alpha_0, \quad \text{para todo} \quad \theta \in \Omega_0 \tag{4}$$

Entre os testes que satisfazem a equação acima, procura-se aquele cuja função poder seja tão alto quanto possível para $\theta \in \Omega_1$.
Outro método consistem em construir uma função linear das diferentes probabilidades de erro.

Escolha do teste δ

Existe então a necessidade de encontrar um balanço entre os dois objetivos: poder pequeno em Ω_0 e alto poder em Ω_1.
O método mais usado é o de escolher um número α_0 entre 0 e 1 tal que:

$$\pi(\theta|\delta) \leq \alpha_0, \quad \text{para todo} \quad \theta \in \Omega_0 \tag{4}$$

Entre os testes que satisfazem a equação acima, procura-se aquele cuja função poder seja tão alto quanto possível para $\theta \in \Omega_1$.
Outro método consistem em construir uma função linear das diferentes probabilidades de erro.

Exemplo sobre os crânios egipcios

Suponha que uma teoria afirma que a amplitude dos crânios cresceu ao longo do tempo, e que a média da amplitude do homem moderno é de 140 mm. Se μ representa da amplitude dos crânios encontrados em Egito (que datam de aprox. 4000 anos a.C), então a afirmação da teoria é que $\mu < 140$.

- Os experimentadores podem erroneamente dizer que os dados suportam a teoria ($\mu < 140$) quando na verdade $\mu > 140$, ou
- poderiam erroneamente dizer que os dados não suportam a teoria ($\mu > 140$), quando de fato $\mu < 140$

Exemplo sobre os crânios egipcios

Suponha que uma teoria afirma que a amplitude dos crânios cresceu ao longo do tempo, e que a média da amplitude do homem moderno é de 140 mm. Se μ representa da amplitude dos crânios encontrados em Egito (que datam de aprox. 4000 anos a.C), então a afirmação da teoria é que $\mu < 140$.

- Os experimentadores podem erroneamente dizer que os dados suportam a teoria ($\mu < 140$) quando na verdade $\mu > 140$, ou
- poderiam erroneamente dizer que os dados não suportam a teoria ($\mu > 140$), quando de fato $\mu < 140$

Exemplo sobre os crânios egipcios

Suponha que uma teoria afirma que a amplitude dos crânios cresceu ao longo do tempo, e que a média da amplitude do homem moderno é de 140 mm. Se μ representa da amplitude dos crânios encontrados em Egito (que datam de aprox. 4000 anos a.C), então a afirmação da teoria é que $\mu < 140$.

- Os experimentadores podem erroneamente dizer que os dados suportam a teoria ($\mu < 140$) quando na verdade $\mu > 140$, ou
- poderiam erroneamente dizer que os dados não suportam a teoria ($\mu > 140$), quando de fato $\mu < 140$

Exemplo sobre os crânios egipcios

Suponha que uma teoria afirma que a amplitude dos crânios cresceu ao longo do tempo, e que a média da amplitude do homem moderno é de 140 mm. Se μ representa da amplitude dos crânios encontrados em Egito (que datam de aprox. 4000 anos a.C), então a afirmação da teoria é que $\mu < 140$.

- Os experimentadores podem erroneamente dizer que os dados suportam a teoria ($\mu < 140$) quando na verdade $\mu > 140$, ou
- poderiam erroneamente dizer que os dados não suportam a teoria ($\mu > 140$), quando de fato $\mu < 140$

Exemplo sobre os crânios egipcios

É normalmente mais sério o erro que consiste em confirmar uma falsa teoría (própria) do que falsamente (erradamente) rejeita-la.

- Erro tipo I: dizer que $\mu < 140$ (confirmar a teoria, i.e, rejeitar H_0), quando de fato $\mu > 140$ (a teoria é falsa, i.e, H_0 é verdadeiro).

Normalmente são incluidos os pontos limites do intervalo associado com a hipótese, na hipótese nula. Desta forma, temos:

$$H_0 : \mu \geq 140,$$

$$H_1 : \mu \leq 140.$$

Exemplo sobre os crânios egipcios

É normalmente mais sério o erro que consiste em confirmar uma falsa teoría (própria) do que falsamente (erradamente) rejeita-la.

- Erro tipo I: dizer que $\mu < 140$ (confirmar a teoria, i.e, rejeitar H_0), quando de fato $\mu > 140$ (a teoria é falsa, i.e, H_0 é verdadeiro).

Normalmente são incluidos os pontos limites do intervalo associado com a hipótese, na hipótese nula. Desta forma, temos:

$$H_0 : \mu \geq 140,$$

$$H_1 : \mu \leq 140.$$

Outline

1. Teste de Hipóteses
   - Hipóteses Nula e Alternativa
   - A Região Crítica (RC)
   - A Funçaõ Poder
   - Erros Tipo I e Tipo II
   - Nível do Teste
   - Construindo um teste com algum nivel específico de Significância
   - o p valor

Nível do Teste

Um teste que satisfaz a equação 4 é chamado de teste nivel α_0, e dizemos que o teste tem nivel de significância α_0.

O tamanho $\alpha(\delta)$ de um teste δ é definido como:

$$\alpha(\delta) = \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta) \tag{5}$$

Um teste δ é dito ser de nivel α_0 se e somente se o seu tamanho é no máximo α_0 (i.e, $\alpha(\delta) \leq \alpha_0$).

Se a hipótese nula for simples ($H_0 : \theta = \theta_0$), então o tamanho de δ será $\alpha(\delta) = \pi(\theta_0|\delta)$.

Nível do Teste

Um teste que satisfaz a equação 4 é chamado de teste nivel α_0, e dizemos que o teste tem nivel de significância α_0.
O tamanho $\alpha(\delta)$ de um teste δ é definido como:

$$\alpha(\delta) = \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta) \tag{5}$$

Um teste δ é dito ser de nivel α_0 se e somente se o seu tamanho é no máximo α_0 (i.e, $\alpha(\delta) \leq \alpha_0$).
Se a hipótese nula for simples ($H_0 : \theta = \theta_0$), então o tamanho de δ será $\alpha(\delta) = \pi(\theta_0|\delta)$.

Nível do Teste

Um teste que satisfaz a equação 4 é chamado de teste nivel α_0, e dizemos que o teste tem nivel de significância α_0.
O tamanho $\alpha(\delta)$ de um teste δ é definido como:

$$\alpha(\delta) = \sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta) \tag{5}$$

Um teste δ é dito ser de nivel α_0 se e somente se o seu tamanho é no máximo α_0 (i.e, $\alpha(\delta) \leq \alpha_0$).
Se a hipótese nula for simples ($H_0 : \theta = \theta_0$), então o tamanho de δ será $\alpha(\delta) = \pi(\theta_0|\delta)$.

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

Suponha que uma a.a. $X_1, ..., X_n$ é tomada de uma distribuiçã uniforme no intervalo $[0, \theta]$, com θ desconhecido $(\theta > 0)$. Suponha também que desejamos testar as hipóteses:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad 3 \leq \theta \leq 4 \\
H_1 &: \quad \theta < 3 \quad \text{ou} \quad \theta > 4
\end{aligned}
$$

Sabemos que o EMV de θ é $Y_n = max\{X_1, ..., X_n\}$. Se o tamanho da amostra aumentar, o valor de Y_n será próximo de θ com alta probabilidade.

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

Suponha que uma a.a. $X_1, ..., X_n$ é tomada de uma distribuiçã uniforme no intervalo $[0, \theta]$, com θ desconhecido ($\theta > 0$). Suponha também que desejamos testar as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad 3 \leq \theta \leq 4 \\ H_1 &: \quad \theta < 3 \quad \text{ou} \quad \theta > 4 \end{aligned}$$

Sabemos que o EMV de θ é $Y_n = max\{X_1, ..., X_n\}$. Se o tamanho da amostra aumentar, o valor de Y_n será próximo de θ com alta probabilidade.

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

Suponha que o teste δ não rejeita H_0 se $2,9 < Y_n < 4$, e rejeita H_0 se Y_n não estiver neste intervalo.

- A R.C. do teste δ contém os valores de $X_1, ..., X_n$ para os quais $Y_n \leq 2,9$ ou $Y_n \geq 4$.
- Em termos da estatística do teste Y_n, a R.R. é a união dos intervalos $(-\infty, 2,9] \cup [4, \infty)$.
- A função poder de δ é especificado pela relação:

$$\pi(\theta|\delta) = Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) + Pr(Y_n \geq 4|\theta)$$

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

Suponha que o teste δ não rejeita H_0 se $2,9 < Y_n < 4$, e rejeita H_0 se Y_n não estiver neste intervalo.

- A R.C. do teste δ contém os valores de $X_1, ..., X_n$ para os quais $Y_n \leq 2,9$ ou $Y_n \geq 4$.
- Em termos da estatística do teste Y_n, a R.R. é a união dos intervalos $(-\infty, 2,9] \cup [4, \infty)$.
- A função poder de δ é especificado pela relação:

$$\pi(\theta|\delta) = Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) + Pr(Y_n \geq 4|\theta)$$

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

Suponha que o teste δ não rejeita H_0 se $2,9 < Y_n < 4$, e rejeita H_0 se Y_n não estiver neste intervalo.

- A R.C. do teste δ contém os valores de $X_1, ..., X_n$ para os quais $Y_n \leq 2,9$ ou $Y_n \geq 4$.
- Em termos da estatística do teste Y_n, a R.R. é a união dos intervalos $(-\infty, 2,9] \cup [4, \infty)$.
- A função poder de δ é especificado pela relação:

$$\pi(\theta|\delta) = Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) + Pr(Y_n \geq 4|\theta)$$

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

- Se $\theta \leq 2.9$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = 1$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Desta forma, $\pi(\theta|\delta) = 1$ se $\theta \leq 2.9$.
- Se $2,9 < \theta \leq 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Neste caso, $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$
- Se $\theta > 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 1 - (\frac{4}{\theta})^n$ A função poder será então $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n + 1 - (\frac{4}{\theta})^n$

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

- Se $\theta \leq 2.9$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = 1$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Desta forma, $\pi(\theta|\delta) = 1$ se $\theta \leq 2.9$.
- Se $2,9 < \theta \leq 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Neste caso, $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$
- Se $\theta > 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 1 - (\frac{4}{\theta})^n$ A função poder será então $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n + 1 - (\frac{4}{\theta})^n$

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

- Se $\theta \leq 2.9$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = 1$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Desta forma, $\pi(\theta|\delta) = 1$ se $\theta \leq 2.9$.
- Se $2,9 < \theta \leq 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Neste caso, $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$
- Se $\theta > 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 1 - (\frac{4}{\theta})^n$ A função poder será então $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n + 1 - (\frac{4}{\theta})^n$

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

- Se $\theta \leq 2.9$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = 1$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Desta forma, $\pi(\theta|\delta) = 1$ se $\theta \leq 2.9$.
- Se $2,9 < \theta \leq 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Neste caso, $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$
- Se $\theta > 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 1 - (\frac{4}{\theta})^n$ A função poder será então $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n + 1 - (\frac{4}{\theta})^n$

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

- Se $\theta \leq 2.9$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = 1$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Desta forma, $\pi(\theta|\delta) = 1$ se $\theta \leq 2.9$.
- Se $2,9 < \theta \leq 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Neste caso, $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$
- Se $\theta > 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 1 - (\frac{4}{\theta})^n$ A função poder será então $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n + 1 - (\frac{4}{\theta})^n$

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

- Se $\theta \leq 2.9$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = 1$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Desta forma, $\pi(\theta|\delta) = 1$ se $\theta \leq 2.9$.
- Se $2,9 < \theta \leq 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 0$. Neste caso, $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$
- Se $\theta > 4$, então $Pr(Y_n \leq 2,9|\theta) = (\frac{2,9}{\theta})^n$ e $Pr(Y_n \geq 4|\theta) = 1 - (\frac{4}{\theta})^n$ A função poder será então $\pi(\theta|\delta) = (\frac{2,9}{\theta})^n + 1 - (\frac{4}{\theta})^n$

Exemplo: T.H. sobre a Distribuição Uniforme

o tamanho de δ é $\alpha(\delta) = \sup_{3 \leq \theta \leq 4} \pi(\theta|\delta)$. Pode ser visto da figura abaixo e cálculos que $\alpha(\delta) = \pi(3|\delta) = (29/30)^n$. Se o $n = 68$, então o tamanho é $(29/30)^{68} = 0.0997$. Desta forma δ é de nivel α_0 para cada nivel de significância $\alpha_0 \geq 0.0997$.

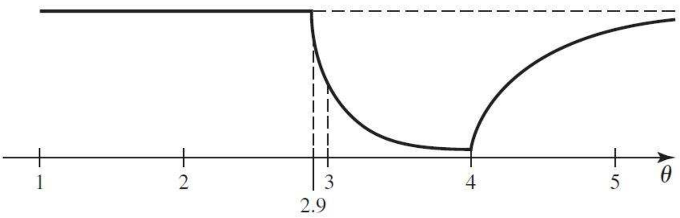


Figura: 1

Outline

1. Teste de Hipóteses
   - Hipóteses Nula e Alternativa
   - A Região Crítica (RC)
   - A Funçaõ Poder
   - Erros Tipo I e Tipo II
   - Nível do Teste
   - Construindo um teste com algum nivel específico de Significância
   - o p valor

Definiçaõ

Suponha que desejarmos testar as hipóteses:

$$H_0 : \theta \in \Omega_0$$

$$H_1 : \theta \in \Omega_1$$

Seja T uma estatística e suponha que nosso teste rejeitará H_0 se $T \geq c$, para alguma constante c. Suponha também que desejamos que nosso teste tenha tenha nivel de significância α_0.

Definiçaõ

A função poder do nosso teste é $\pi(\theta|\delta) = P(T \geq c|\theta)$ e desejamos

$$\sup_{\theta \in \Omega_0} P(T \geq c|\theta) \leq \alpha_0 \tag{6}$$

É claro que a função acima será satisfeita para valores grandes de c mas não para valores pequenos. Se desejarmos que a função poder tenha o maior valor possível para $\theta \in \Omega_1$, devemos construir c o mais pequeno possível que satisfaça a equação 6. Se T tiver distribuição continua, é simples encontrar o c apropriado.

Exemplo: T.H. sobre a média de uma normal com variância conhecida

No exemplo acima, nosso teste rejeitaria $H_0 : \mu = \mu_0$ se $|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c$. Como H_0 é simples, o lado esquerdo da equação 6 reduz à prababilidade que $|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c$ (assumindo que $\mu = \mu_0$).

Como $Y_n = \bar{X}_n - \mu_0 \sim N(0, \sigma^2/n)$ quando $\mu = \mu_0$, podemos achar c tal que o tamanho é α_0 para cada α_0. Assim, c deve ser o $1 - \alpha/2$ quantil da distribuição de Y. Este quantil é $c = \Phi^{-1}(1 - \alpha_0/2_\sigma n^{-1/2}$.

Exemplo: T.H. sobre a média de uma normal com variância conhecida

No exemplo acima, nosso teste rejeitaria $H_0 : \mu = \mu_0$ se $|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c$. Como H_0 é simples, o lado esquerdo da equação 6 reduz à prababilidade que $|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c$ (assumindo que $\mu = \mu_0$).
Como $Y_n = \bar{X}_n - \mu_0 \sim N(0, \sigma^2/n)$ quando $\mu = \mu_0$, podemos achar c tal que o tamanho é α_0 para cada α_0. Assim, c deve ser o $1 - \alpha/2$ quantil da distribuição de Y. Este quantil é $c = \Phi^{-1}(1 - \alpha_0/2_\sigma n^{-1/2}$.

Exemplo: T.H. sobre a média de uma normal com variância conhecida

No exemplo acima, nosso teste rejeitaria $H_0 : \mu = \mu_0$ se $|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c$. Como H_0 é simples, o lado esquerdo da equação 6 reduz à prabablidade que $|\bar{X}_n - \mu_0| \geq c$ (assumindo que $\mu = \mu_0$).
Como $Y_n = \bar{X}_n - \mu_0 \sim N(0, \sigma^2/n)$ quando $\mu = \mu_0$, podemos achar c tal que o tamanho é α_0 para cada α_0. Assim, c deve ser o $1 - \alpha/2$ quantil da distribuição de Y. Este quantil é $c = \Phi^{-1}(1 - \alpha_0/2_\sigma n^{-1/2}$.

Exemplo: T.H. sobre a média de uma normal com variância conhecida

Quando testamos hipóteses sobre a média da normal, é tradicional escrever o teste em termo da estatística:

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \tag{7}$$

Exemplo: T.H. sobre a parâmetro da Bernoulli

Suponha que $X_1, ..., X_n$ forma uma a.a. de uma distribuição de Bernoulli com parâmetro p. Suponha que desejamos testar a hipóteses

$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

Exemplo: T.H. sobre a parâmetro da Bernoulli

Seja $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim bin(n, p)$, quanto maior o valor de p, maior será o valor de Y. Suponha que escolhemos rejeitar H_0 se $Y \geq c$ para algum c. Suponha também que desejamos que o tamanho do teste seja proximo a α_0 sem supera-lo. É fácil checar que $P(Y \geq c|p)$ é uma função crescente em p. Desta forma, o tamanho do teste será $P(Y \geq c|p = p_0)$. De isto, temos que c será o menor número tal que $P(Y \geq c|p = p_0) \leq \alpha_0$.

Exemplo: T.H. sobre a parâmetro da Bernoulli

Se $n = 10$, $p_0 = 0,3$ e $\alpha_0 = 0,1$, calculamos $\sum_{y=6}^{1} 0P(Y = y|p = 0,3) = 0,0473$ e $\sum_{y=5}^{1} 0P(Y = y|p = 0,3) = 0,1503$. Para manter o tamanho do teste proximo de $0,1$, escolhemos $c > 5$. (Cada valor de c no intervalo $(5,6]$ produz o mesmo teste desde que Y só toma valores inteiros.

Outline

1. Teste de Hipóteses
   - Hipóteses Nula e Alternativa
   - A Região Crítica (RC)
   - A Funçaõ Poder
   - Erros Tipo I e Tipo II
   - Nível do Teste
   - Construindo um teste com algum nivel específico de Significância
   - o p valor

Introdução

Suponha que no exemplo da média de uma normal com variância conhecia, escolhemos testar H_0 no nível $\alpha_0 = 0,05$. Calculamos então a estatística do teste e rejeitamos H_0 se $Z \geq \Phi^{-1}(1 - \frac{0,05}{2}) = 1,96$. Por exemplo, suponha que $Z = 2,78$ é observado. Então rejeitariamos H_0. Suponha que anunciamos o resultado, dizendo que rejeitamos H_0 no nível $0,05$, o que outro analista poderia dizer, se ele decide testar utilizando outro nivel?

Introdução

Ainda no exemplo, o valor observado de Z foi $2,78$, a hipótese H_0 seria rejeitada α_0 tal que $2,78 \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha_0/2)$. Usando a tabela da normal, esta desigualdade resulta em $\alpha_0 \geq 0,0054$. Este valor $0,0054$ é chamado o *p-valor* para os dados observados no teste de hipótese. Como $0,01 \geq 0,0054$ o analista rejeitaria H_0 no nível $0,01$.

Definição

O *p- valor* é o menor nível de α_0 tal que rejeitariamos a hipótese nula no nível α_0 com os dados observados.

O *p-valor* é muitas vezes chamado de nível de significância observado.

Um experimentador rejeitará H_0 se e somente se, o p-valor é no máximo α_0, está usando um teste com nível de significância α_0.

Será reportado então que o valor de Z foi $2,78$ e que o correspondente *p-valor* foi $0,0054$. Uma vantagem de se reportar desta maneira é que não é necessário selecionar de antemão o valor de α_0.

Definição

O *p- valor* é o menor nível de α_0 tal que rejeitariamos a hipótese nula no nível α_0 com os dados observados.
O *p-valor* é muitas vezes chamado de nível de significância observado.
Um experimentador rejeitará H_0 se e somente se, o p-valor é no máximo α_0, está usando um teste com nível de significância α_0.
Será reportado então que o valor de Z foi $2,78$ e que o correspondente *p-valor* foi $0,0054$. Uma vantagem de se reportar desta maneira é que não é necessário selecionar de antemão o valor de α_0.

Definição

O *p- valor* é o menor nível de α_0 tal que rejeitariamos a hipótese nula no nível α_0 com os dados observados.
O *p-valor* é muitas vezes chamado de nível de significância observado.
Um experimentador rejeitará H_0 se e somente se, o p-valor é no máximo α_0, está usando um teste com nível de significância α_0.
Será reportado então que o valor de Z foi $2,78$ e que o correspondente *p-valor* foi $0,0054$. Uma vantagem de se reportar desta maneira é que não é necessário selecionar de antemão o valor de α_0.

Definição

O *p- valor* é o menor nível de α_0 tal que rejeitariamos a hipótese nula no nível α_0 com os dados observados.
O *p-valor* é muitas vezes chamado de nível de significância observado.
Um experimentador rejeitará H_0 se e somente se, o p-valor é no máximo α_0, está usando um teste com nível de significância α_0.
Será reportado então que o valor de Z foi $2,78$ e que o correspondente *p-valor* foi $0,0054$. Uma vantagem de se reportar desta maneira é que não é necessário selecionar de antemão o valor de α_0.

Cálculo do p-valor

Se os testes são da forma *rejeitar a hipótese nula se* $T \geq c$, a maneira de calcular os p-valores é:

- para cada t, seja δ_t o teste que rejeita H_O se $T \geq t$.
- o p-valor quando $T = t$ é observado é o tamanho do teste δ_t.
- o p-valor é igual a:

$$\sup_{\theta \in \Omega_0} \pi(\theta|\delta_1) = \sup_{\theta \in \Omega_0} Pr(T \geq t|\theta) \tag{8}$$

Exemplo: Parâmetro da Bernoulli

No exemplo acima, foi usado um teste que rejeita H_0 se $Y \geq c$. O p-valor quando $Y = y$ é observado e será $\sup_{p \geq p_0} P(Y \geq y|p)$. Vemos que $P(Y \geq y|p)$ cresce como função de p. Desta forma, o p-valor é $P(Y \geq y|p = p_0)$. Por exemplo, seja $p_0 = 0,3$ e $n = 10$. Se $Y = 6$ é observado, então, $P(Y \geq 6|p = 0,3) = 0,00473$.
O cálculo do p-valor é mais complicado quando o teste não puder ser colocado na forma *rejeite a hipótese nula se $T \geq t$*.

Exemplo: Parâmetro da Bernoulli

No exemplo acima, foi usado um teste que rejeita H_0 se $Y \geq c$. O p-valor quando $Y = y$ é observado e será $\sup_{p \geq p_0} P(Y \geq y|p)$. Vemos que $P(Y \geq y|p)$ cresce como função de p. Desta forma, o p-valor é $P(Y \geq y|p = p_0)$. Por exemplo, seja $p_0 = 0,3$ e $n = 10$. Se $Y = 6$ é observado, então, $P(Y \geq 6|p = 0,3) = 0,00473$.
O cálculo do p-valor é mais complicado quando o teste não puder ser colocado na forma *rejeite a hipótese nula se* $T \geq t$.