DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF$^{\text{a}}$.: Karla Lima

EACH-USP

September 17, 2018

O Método

Imagine que você está subindo em uma escada sem fim. Como você pode saber se será capaz de alcançar um degrau arbitrariamente alto?
Suponha que você faça as seguintes afirmações sobre as suas habilidades de subir escadas:

O Método

Imagine que você está subindo em uma escada sem fim. Como você pode saber se será capaz de alcançar um degrau arbitrariamente alto?
Suponha que você faça as seguintes afirmações sobre as suas habilidades de subir escadas:

1. Você pode alcançar o primeiro degrau.
2. Se você alcançar um degrau, você pode sempre passar ao degrau seguinte.

O Método

- Tanto a sentença 1 como a implicação na sentença 2 são verdadeiras;
- Pela sentença 1 você pode chegar ao primeiro degrau e pela sentença 2 você pode chegar ao segundo;
- Novamente pela 2 você pode chegar ao terceiro, e assim sucessivamente;
- Ambas as asserções são necessárias.

O Método

- P(n) denota que o inteiro positivo n tem a propriedade P.
- Como podemos usar a técnica de subir escadas para provar que para todos inteiros positivos n nós temos $P(n)$?

O Método

- $P(n)$ denota que o inteiro positivo n tem a propriedade P.
- Como podemos usar a técnica de subir escadas para provar que para todos inteiros positivos n nós temos $P(n)$?
  1. P(1) (1 tem a propriedade P.)
  2. Para qualquer inteiro positivo k, $P(k) \rightarrow P(k+1)$ (Se algum número tem a propriedade P, então o número seguinte também a tem.)

O Método

- $P(n)$ denota que o inteiro positivo n tem a propriedade P.
- Como podemos usar a técnica de subir escadas para provar que para todos inteiros positivos n nós temos $P(n)$?
  1. P(1) (1 tem a propriedade P.)
  2. Para qualquer inteiro positivo k, $P(k) \to P(k+1)$ (Se algum número tem a propriedade P, então o número seguinte também a tem.)

Se pudermos demonstrar as sentenças 1 e 2, então $P(n)$ vale para qualquer inteiro positivo n, da mesma maneira que nós podemos subir até um degrau arbitrário na escada.

Principio de Indução Matemática

$$\left\{\begin{array}{l} (1)\ P(1)\ \textit{verdadeira} \\ (2)\ (\forall k)[P(k)\ \textit{verdadeira}\ \rightarrow P(k+1)\ \textit{verdadeira}] \end{array}\right\} \longrightarrow P(n)$$

verdadeira para todos os n inteiros positivos.

Principio de Indução Matemática

Passos:

1. Prove que $P(1)$ é verdade! (**base da indução** ou passo básico para a demonstração indutiva).
2. Assuma que $P(k)$ é verdade! (com o intuito de demonstrar o passo indutivo-**hipótese indução**)

Principio de Indução Matemática

Exemplo 1

Prove que a equação $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

Principio de Indução Matemática

Exemplo 2

Prove que $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para qualquer $n > 1$.

Principio de Indução Matemática

Exemplo 3

Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

Principio de Indução Matemática

Exercício

Prove que, para qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.