

Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2011 – Cálculo I – 1º sem. 2015
Professor: Dr. José Ricardo G. Mendonça

3ª Lista de Exercícios — Limites e Derivadas — 13 abr. 2015

*If you stop at general math,
you're only going to make general math money.*
Snoop Doggy Dogg (1971–)

Nos exercícios a seguir, considere que todas as funções são de \mathbb{R} em \mathbb{R} e possuem domínios apropriados.

I. Limites

1. Encontre a inclinação das seguintes curvas nos pontos indicados:

- (a) $y = 2x^2$ em $x = 1$;
- (b) $y = x^2 + 1$ em $x = -1$;
- (c) $y = 2x - 7$ em $x = 2$;
- (d) $y = 1/x$ em $x = 2$;
- (e) $y = x^3$ em $x = \frac{1}{2}$.

2. Usando a definição da derivada como o limite de $h \rightarrow 0$ do quociente $[f(x+h) - f(x)]/h$ (chamado de quociente de Newton), encontre a derivada das seguintes funções justificando em cada passo as propriedades dos limites usadas (limite do produto, limite da soma etc.) e dê a equação da reta tangente em $x = 2$:

- (a) $f(x) = x^2 + 1$;
- (b) $f(x) = 2x^2 + x$;
- (c) $f(x) = \frac{2}{2x+1}$;
- (d) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x$;
- (e) $f(x) = (x+2)(x-1)$;
- (f) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$.

3. Seja $f(x) = -x$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 2$ se $x > 0$. Encontre $f'(x)$ em $x = -1$ e as derivadas à esquerda e à direita de $f(x)$ em $x = 0$, caso elas existam.
4. Seja $f(x) = |x| + x$. Existe $f'(0)$? Para que valores de x a derivada de $f(x)$ existe e é única?

5. Determine se as seguintes funções possuem derivada em $x = 0$ e, se sim, determine $f'(0)$:

$$(a) f(x) = |x|x; \quad (b) f(x) = x^2|x|; \quad (c) f(x) = -|x|x^3.$$

II. Potências

1. Escreva as expansões de $(x+h)^3$, $(x+h)^4$ e $(x+h)^5$ em termos de x e h e obtenha a derivada de $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ e $f(x) = x^5$ diretamente a partir da definição de derivada ($\lim_{h \rightarrow 0}$ do quociente de Newton).

2. Encontre a derivada das seguintes potências:

$$(a) f(x) = x^{2/3}; \quad (b) f(x) = x^{-3/2}; \quad (c) f(x) = x^{5/11}.$$

3. Dê a inclinação de cada uma das curvas a seguir nos pontos indicados e escreva a equação da reta tangente passando pelo ponto:

(a) $y = x^9$ no ponto $x = 1$;

(b) $y = x^{-3/4}$ no ponto $x = 16$;

(c) $y = \sqrt{x}$ no ponto $x = 3$;

(d) $y = x^{\sqrt{2}}$ no ponto $x = 10$.

III. Derivadas de somas, produtos e quocientes de funções

1. Encontre as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x^{1/3}$;

(b) $f(x) = 25x^{-1} + 12\sqrt{x}$;

(c) $f(x) = (2x+3)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)$;

(d) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+5x+1}$;

(e) $f(x) = (x+1)(x^2+5x^{7/2})$;

(d) $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)}$.

2. Qual é a inclinação da curva $s = \frac{t^2}{t^2+1}$ no ponto $t = 2$ e qual é a inclinação da reta tangente à curva nesse ponto?

IV. Regra da cadeia

Em cada um dos casos a seguir, procure identificar as funções $f(u)$ e $g(x)$ antes de proceder à derivação da função composta $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ pela regra da cadeia.

1. Encontre a derivada de cada uma das funções $h(x)$ dadas a seguir:

- (a) $h(x) = (x+1)^8$;
- (b) $h(x) = \sqrt{2x^2 - 5}$;
- (c) Sabendo que a derivada da função trigonométrica $\cos x$ vale $(\cos x)' = -\sin x$, calcule a derivada de $h(x) = \cos^3 x = (\cos x)^3$;
- (d) Sabendo que a derivada da função trigonométrica $\sin x$ vale $(\sin x)' = \cos x$, calcule a derivada de $h(x) = \sin 3x$. Verifique essa derivada a partir da identidade $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ (você consegue derivar esta identidade?);
- (e) $h(x) = \sin(2x^2 + 1)$;
- (f) $h(x) = \tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$;
- (g) Sabendo que a derivada do logaritmo natural $\ln x$ vale $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, calcule a derivada de $h(x) = \ln(x^2 + 1)$;
- (h) $h(x) = \ln(\cos 2x)$.