ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2018.2)

Primeira Prova (Parte I & II) – Novembro/2018

Nome: ______________________________ Nº USP: ____________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Nota 1: Duração da prova: **75** minutos.
Nota 2: Perguntas durante a prova são **proibidas**.
Nota 3: É proibido o uso de calculadoras/computadores.
Nota 4: A prova pode ser feita inteiramente a lápis/lapiseira.
Nota 5: Os versos das folhas podem ser utilizados para a resolução.
Nota 6: Havendo **indicação adequada**, pode-se continuar a resolução de uma questão em uma página de outra questão.

Formulário

Diagonalização	**Produto vetorial**	**Produto escalar**	**Retas**	**Planos**
$Mv = \lambda v$	"Regra da mão direita"	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert\cos\theta$	$X = A + \lambda\vec{u}$	$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
$\det(M-\lambda I) = 0$	$\vec{u}\wedge\vec{v} = \det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{pmatrix}$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1\\ y = y_0 + \lambda u_2\\ z = z_0 + \lambda u_3\end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1\\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2\\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3\end{cases}$
$S^{-1}MS = \Lambda$	$\lVert\vec{u}\wedge\vec{v}\rVert = \lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert\sin\theta$	$\vec{\text{proj}}_{\vec{w}}^{\vec{u}} = \frac{\langle\vec{u},\vec{w}\rangle}{\lVert\vec{w}\rVert^2}\vec{w}$		$ax + by + cz + d = 0$

1) Considere o plano $\pi : -6x - 4y + 2z + 1 = 0$ e o ponto $P(1,1,1)$.
1a) [1.0 ponto] Mostrar que o vetor $\vec{n} = (3,2,-1)$ é ortogonal ao plano π.
1b) [1.0 ponto] Determinar uma equação da reta r que seja ortogonal ao plano π e que passa pelo ponto P. Determinar o ponto de intersecção $Q = r \cap \pi$.
1c) [0.5 ponto] Determinar a distância entre o ponto P e o plano π.

1a) Inicialmente, como $\pi : z = -\frac{1}{2} + 3x + 2y$, esse plano admite a representação paramétrica

$$\begin{cases} x &= \lambda\\ y &= \mu\\ z &= -\frac{1}{2} + 3\lambda + 2\mu \end{cases} \quad ,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\,,$$

donde $\pi : X = (0,0,-\frac{1}{2}) + \lambda(1,0,3) + \mu(0,1,2)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Logo, o vetor

$$(0,1,2)\wedge(1,0,3) = \det\begin{pmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix} = (3,2,-1)$$

é ortogonal ao plano π, assim como qualquer vetor que for proporcional (por um fator não nulo) a esse. Como $\vec{n} = (0,1,2)\wedge(1,0,3)$, então $\vec{n}\perp\pi$.

1b) A equação da reta pode ser dada por $r : X = P + \lambda\vec{n} = (1,1,1) + \lambda(3,2,-1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Existe um $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que o ponto $Q = P + \alpha\vec{n} = (1+3\alpha, 1+2\alpha, 1-\alpha)$ pertence ao plano π. Este último ponto, portanto, satisfaz a equação do plano π, o que conduz a

$$-6\,(1+3\alpha) - 4\,(1+2\alpha) + 2\,(1-\alpha) + 1 = 0\,,$$

donde se tem $\alpha = -\frac{1}{4}$. Logo, $Q = (\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{5}{4})$.

1c) A distância entre P e o plano é dada pelo comprimento do vetor $\overrightarrow{QP} = P - Q = (\frac{3}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$. De

$$\lVert\overrightarrow{PQ}\rVert = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}\,,$$

a distância entre o ponto P e o plano π é $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

---

2) [2.5 pontos] Determinar a fórmula geral para a_n, onde $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, sendo que $a_0 = a_1 = 1$.

---

2) Representa-se, inicialmente, a relação de recorrência em sua forma matricial

$$u_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = M u_{n-1}\,, \quad n \subset \mathbb{Z}\,, \ \ \text{com} \ \ u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

visto que $a_0 = a_1 = 0$ e $a_2 = 1$.

Como $u_n = M u_{n-1} = M^2 u_{n-2} = \cdots = M^{n-1} u_1$, deve-se obter M^{n-1}, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det\left(M - \lambda I\right) = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -8 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \left(\lambda - 4\right)\left(\lambda - 2\right)\,,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 4$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_1 I\right) v_1 = \begin{pmatrix} 6-(4) & -8 \\ 1 & 0-(4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \ \xi_1 \ = \ 4\eta_1 \right. \,,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\eta_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_2 I\right) v_2 = \begin{pmatrix} 6-(2) & -8 \\ 1 & 0-(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \ \xi_2 \ = \ 2\eta_2 \right. \,,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\eta_2 = 1$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{e sua inversa} \ S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\,,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/4 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 \end{array}\right).$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1} M S$, tem-se $M = S \Lambda S^{-1}$, donde

$$M^{n-1} = \overbrace{\left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right)\cdots\left(S\Lambda S^{-1}\right)}^{n-1 \text{ termos}} = S\Lambda^{n-1}S^{-1}\,,$$

que leva a

$$\begin{aligned} u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= S\Lambda^{n-1}S^{-1}u_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3\cdot 2^n - 4^n \\ 3\cdot 2^{n-1} - 4^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{2}\left(3\cdot 2^n - 4^n\right)\,, \qquad n \in \{0,1,2,\cdots\} \subset \mathbb{Z}\,.$$

3) [2.5 pontos] Determinar uma equação para a reta r, sabendo-se que:

(i) r situa-se a uma distância $\sqrt{12}$ do plano $\pi : x + y - z - 1 = 0$ (lembrete: $\vec{n} = (1, 1, -1)$ é um vetor ortogonal ao plano π);

(ii) r é paralela à reta $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) r é concorrente à reta $t : X = (1, 1, 1) + \lambda(1, 3, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

---

3) Define-se, primeiramente, um plano σ ao qual r está contida e que $\sigma \parallel \pi$. Como $\pi \parallel \sigma$, tem-se $\sigma : x + y - z + d = 0$, e deve-se determinar d de sorte que a distância entre os planos seja $\sqrt{12}$. Considere $A(1, 0, 0) \in \pi$ e $B(0, 0, d) \in \sigma$, além de $\vec{BA} = A - B = (1, 0, -d)$; a distância $\sqrt{12}$ entre os planos é dada por

$$\begin{aligned} \sqrt{12} = \|\vec{\text{proj}}_{\vec{n}} \vec{BA}\| &= \left\| \frac{\langle \vec{BA}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \frac{\left| \langle \vec{BA}, \vec{n} \rangle \right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(1, 0, -d) \cdot (1, 1, -1)|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{|1 + d|}{\sqrt{3}} \,, \end{aligned}$$

donde $d = 5$ ou $d = -7$.

Ademais, Como a reta t é concorrente aos planos π e σ (visto que o vetor diretor de t, $(1, 3, 1)$, não é ortogonal ao vetor $\vec{n} = (1, 1, -1)$, que é ortogonal aos planos π e σ), o ponto de intersecção Q entre t e σ é um ponto pertencente à reta r. Logo, a partir da equação de t, existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $Q(1+\alpha, 1+3\alpha, 1+\alpha)$ também pertence ao plano σ; desta forma, o ponto Q deve satisfazer a equação do plano $\sigma : x+y-z+d = 0$, *id est*,

$$(1 + \alpha) + (1 + 3\alpha) - (1 + \alpha) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{d + 1}{3} \,,$$

donde $Q(\frac{2-d}{3}, -d, \frac{2-d}{3})$.

Finalmente, como $r \parallel s$, e um vetor diretor de s é $(1, 0, 1)$, tem-se $r : X = Q + \lambda(1, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo,

$$r : X = (-1, -5, -1) + \lambda(1, 0, 1) \quad \text{ou} \quad r : X = (3, 7, 3) + \lambda(1, 0, 1) \,, \quad \lambda \in \mathbb{R} \,.$$

---

4) [2.5 pontos] Estudar o sistema $Ax = b$ segundo os parâmetros α e β, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$; a matriz $x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ é o vetor das variáveis. Nota: quando o sistema apresentar infinitas raízes, determinar, explicitamente, uma solução particular de $Ax = b$ e o kernel de A.

---

4) Primeiramente, $\det A = 2 - \alpha$, donde dois casos são analisados.

$\boxed{\text{Caso } \alpha \neq 2}$

Se $\alpha \neq 2$, a matriz inversa A^{-1} existe, e a solução do sistema é única com $x = A^{-1}b$. Neste caso, tem-se $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & -\alpha & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{2-\alpha} & -\frac{1}{2-\alpha} \\ 0 & 2-\alpha & -\alpha & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{2-\alpha} & -\frac{1}{2-\alpha} \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha}{2-\alpha} & \frac{1}{2-\alpha} \end{array}\right)$, donde se tem a matriz inversa,

$$A^{-1} = \frac{1}{2 - \alpha} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \,,$$

e os detalhes operacionais foram omitidos por serem evidentes. A solução, que é única neste caso, é

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{2 - \alpha} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2 - \alpha} \begin{pmatrix} 2 - \beta \\ \beta - \alpha \end{pmatrix} \,,$$

e é válida para qualquer valor de $\beta \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Caso } \alpha = 2}$

Nesta situação, o sistema pode ser escrito como
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \beta \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta - 2 \end{array}\right)$

Notar que se $\beta \neq 2$, o sistema não apresenta solução (vide segunda linha da matriz em questão). Ademais, se $\beta = 2$, o sistema assume a forma
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$,
e admite infinitas raízes. Para $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}^T$, uma solução particular x_p para o sistema acima pode ser encontrada impondo $\eta = 0$, que implica $\xi = 1$. Logo,

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ademais, o kernel $x_K = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}^T$ pode ser encontrado mediante
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, que implica $\eta = -\xi$. Logo, $x_K = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}^T = \xi \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, com $\xi \in \mathbb{R}$, donde

$$\ker(A) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] .$$

Por conseguinte, a solução geral desse caso é

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Em suma,

$$\begin{cases} \alpha \neq 2 : x = \frac{1}{2-\alpha} \begin{pmatrix} 2 - \beta \\ \beta - \alpha \end{pmatrix} & \text{(Sistema com solução única)} \\ \alpha = 2 \begin{cases} \beta \neq 2 : \text{Sistema sem solução} \\ \beta = 2 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \ \lambda \in \mathbb{R} & \text{(Sistema com infinitas soluções)} \end{cases} \end{cases} .$$
