EACH
Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Quarta lista de Cálculo II
Sistemas de Informação

1ª Questão. Sejam $f(x,y) = \ln(x+y-1)$ e $g(x,y) = x^2e^{3xy}$.

a) Calcule $f(1,1)$, $f(e,1)$, $g(2,0)$ e $g(-1,1/3)$.

b) Encontre e faça um esboço do domínio de f e g.

c) Determine a imagem de f e g.

2ª Questão. Encontre e faça um esboço do domínio das seguintes funções:

a) $f(x,y) = \sqrt{x\,y}$

b) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$

c) $f(x,y) = \sqrt{x-y}\,\ln(x+y)$

d) $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

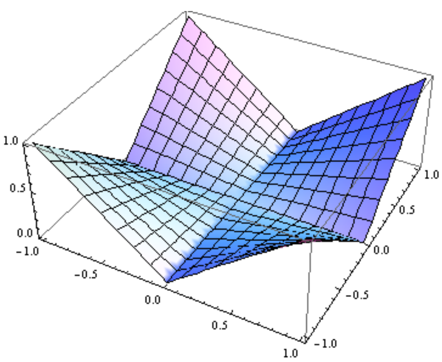
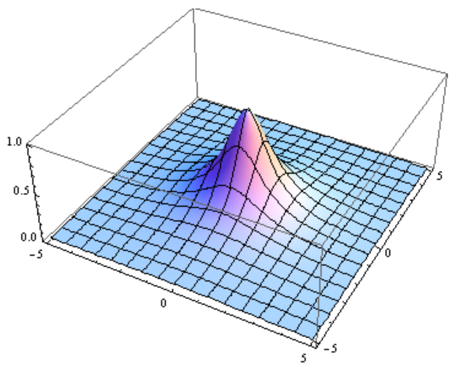
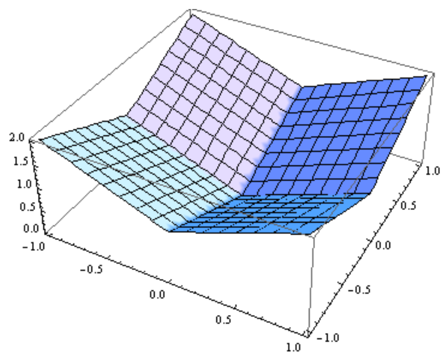
e) $f(x,y) = \sqrt{y} - \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

3ª Questão. Associe cada gráfico à função que o define. Justifique sua escolha.

a) $f(x,y) = |x\,y|$

b) $f(x,y) = |x| + |y|$

c) $f(x,y) = 1/(1 + x^2 + y^2)$

4ª Questão. Esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x,y) = -1$

b) $f(x,y) = 2x - 3y - 1$

c) $f(x,y) = \cos x$

d) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$

e) $f(x,y) = 9 - 4x^2 - y^2$

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

5ª Questão. Desenhe as curvas de nível das seguintes funções:

a) $f(x,y) = (x-y)^2$

b) $f(x,y) = x\,y$

c) $f(x,y) = y\,e^x$

6ª Questão. Uma placa de metal localizada no plano possui temperatura $t(x,y)$ no ponto (x,y). As curvas de níveis de t são chamadas *curvas isotérmicas* desde que todos os pontos nesta curva possuem a mesma temperatura. Esboce algumas das curvas isotérmicas sabendo que a função temperatura é dada por $t(x,y) = 100/(1 + x^2 + 4y^2)$.

7ª Questão. Encontre o limite quando existir, ou mostre que não existe.

a) $\lim_{(x,y)\to(1,4)} e^{-x\sqrt{y}}\cos(\pi/xy)$

b) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{2+y^2}{x^2+xy}\right)$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y\,e^y}{x^4+y^4}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+3y^2}$

8ª Questão. Esboce o conjunto de pontos em que cada uma das seguintes funções é contínua.

a) $f(x,y) = \frac{\cos(x\,y)}{e^{y}-x}$

b) $f(x,y) = \arctan\left(x\sqrt{xy}\right)$

c) $f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\,y^2}{3x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$

9ª Questão. Use coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}; r > 0 \; e \; \theta \in (0,2\pi)$$

para encontrar o limite das seguintes funções quando $(x,y) \to (0,0)$.

a) $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

b) $g(x,y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

c) $h(x,y) = \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$

10ª Questão. Encontre as derivadas parciais das seguintes funções:

a) $f(x,y) = y^5 - 3xy$

b) $m(x,t) = e^{-t/2}\cos(2\pi x)$

c) $r(x,y) = \sqrt{y}\ln x$

d) $z(x,y) = (x-y)^{10}$

e) $h(t,s) = \frac{s-t}{s+t}$

f) $g(x,y) = \arctan(\sqrt{xy})$

g) $u(t,s) = \int_s^t e^{-x}\cos\, x^2 dx$

h) $v(r,s) = r^s$

i) $z(x,y) = f(x)g(y)$

11ª Questão. Seja $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$. Encontre $f_x(1,2)$ e $f_y(1,2)$ e dê uma interpretação para esses números como inclinações de retas.

12ª Questão. Use diferenciação implícita para encontrar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3xy$

b) $z - x = \arctan(yz)$

c) $\sin(xyz) = x + y + 2z$

13ª Questão. A *lei dos gases* para um gás ideal de massa fixa m, temperatura T, pressão P e volume V é dada pela expressão $PV = mRT$ em que R é a constante universal dos gases. Verifique que

$$P_V V_T T_P = -1.$$

14ª Questão. Você concorda com a afirmação da existência de uma função $f(x,y)$ que satisfaz $f_x(x,y) = x + 4y$ e $f_y(x,y) = 3x - y$? Por quê?

15ª Questão. O elipsóide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ numa elipse. Encontre a equação simétrica da reta tangente a esta curva no ponto $(1,2,2)$.

16ª Questão. Verifique se a função $z = \ln(e^x + e^y)$ satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

Algumas respostas. 1)$f(1,1) = 0, f(e,1) = 1, g(2,0) = 4, g(-1,1/3) = 1/e$ b) $x + y \geq 1,\ (-\infty,\infty)$ c)$(-\infty,\infty), [0,\infty)$ 2)a)$xy \geq 0$ b)$x^2 + y^2 > 9$ c)$x \geq |y|$ d)$y \geq x^2, x \neq \pm 1$ e)$x^2 + y^2 \leq 25$ e $y \geq 0$ 7)a)$\sqrt{2}/2e^2$ b)$\ln 2$ c)∞ d)$\nexists$ 9)a)1, b)0, c)1 10)a)$f_x = -3y, f_y = 5y^4 - 3x$ c)$r_x = \frac{\sqrt{y}}{x}, r_y = \frac{\ln x}{2\sqrt{y}}$ e)$h_s = \frac{2t}{(s+t)^2}, h_t = -2s/(s+t)^2$ h)$v_r = s\,r^{s-1}, v_s = (\ln r)\ r^s$ 11) -8 e -4 12)b)$\frac{\partial z}{\partial x} = (1 + y^2z^2)/y^2z^2$ 15)$\frac{2-z}{2} = x - 1, y = 2$