Coordenadas Baricêntricas

Marcelo Walter (adapted from Alain Fournier)

September 22, 2005

A figura 1 ilustra a interpolação usual utilizada para cálculo dos valores internos a um triângulo. Esta interpolação é utilizada em várias tarefas de computação gráfica, como obtenção dos valores de z no contexto do *z-buffer* e no modelo de iluminação de Gouraud.

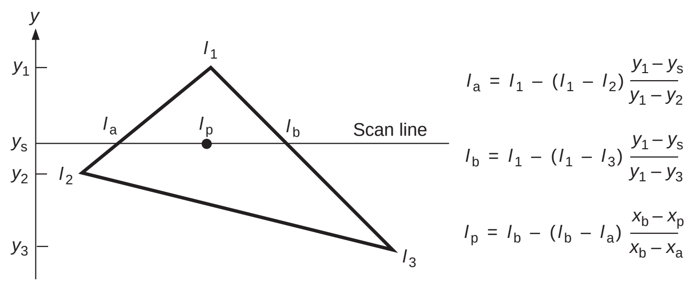

Figure 1: Interpolação de valores num triângulo.

Uma desvantagem desta interpolação é que ela não é *invariante* para transformações afim. Em algumas tarefas, como Traçado de Raios, seria interessante trabalharmos com uma interpolação que fosse invariante para transformações afim. Na prática significa termos uma maneira inequívoca de expressar um ponto interno a um triângulo que seja *imune*, digamos assim, as transformaç ões usuais da CG. Uma interpolação que satisfaz esta condição é obtida através do conceito de **Coordenadas Baricêntricas**.

Vamos supor que temos um triângulo $P_1P_2P_3$ e um ponto P, como ilustrado na figura 2 (nas figuras $\sim u$ significa *é proporcional a u*). Nos queremos escrever as coordenadas de P como:

$$P = uP_1 + vP_2 + wP_3$$

tal que $u + v + w = 1$. u,v e w são as *coordenadas baricêntricas* de P, porque esta é a posição do centro de gravidade de três pontos de massa posicionados em P_1, P_2 e P_3 com massas proporcionais a u, v e w.

Dados os 4 pontos, a definição destas coordenadas é dada por:

$$u = \frac{area(PP_2P_3)}{area(P_1P_2P_3)}$$

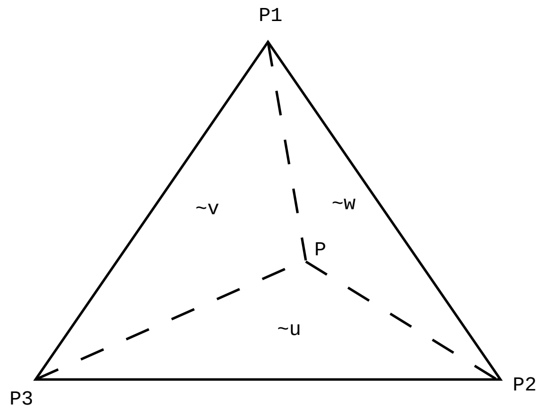

Figure 2: Triângulo $P_1P_2P_3$ e ponto P.

$$v = \frac{area(P_1PP_3)}{area(P_1P_2P_3)}$$

$$w = \frac{area(P_1P_2P)}{area(P_1P_2P_3)}$$

Podemos facilmente verificar que quando $P = P_1$, as coordenadas baricêntricas são $(1, 0, 0)$, quando $P = P_2$ elas são $(0, 1, 0)$ e quando $P = P_3$ elas valem $(0, 0, 1)$. A área do triângulo $P_1P_2P_3$ pode ser calculada por[1]:

$$Area(P_1P_2P_3) = \frac{1}{2}\|(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)\|$$

onde $||V||$ representa o módulo do vetor V e $\times$ representa o produto vetorial.

Veja se você entendeu o conceito de coordenadas baricêntricas respondendo corretamente as perguntas abaixo:

- Quais os valores de u,v e w para situar um ponto P no centróide de um triângulo genérico qualquer?
- Suponha um triângulo T dado por $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (4, 2)$ e $P_3 = (2, 5)$ e um ponto Q com coordenadas baricêntricas dadas por $Q = (0.2, 0.3, 0.5)$. Calcule a nova posição do ponto Q no triângulo T' obtido a partir de T com $P_1' = P_1$, $P_2' = P_2$ e $P_3' = SP_3$, onde $S = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$

[1] Porquê? Lembre-se da interpretação geométrica do produto vetorial.