ACH2011 - Cálculo I

Lista 5: Aplicações da Derivação

1. Explique a diferença entre mínimo local e mínimo absoluto.

2. Suponha que f seja uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$.

   (a) Que teorema garante a existência de valores máximos e mínimos absolutos para f?

   (b) Quais as etapas que você deve seguir para encontrar esses valores máximos e mínimos?

3. Esboce o gráfico de uma função f que seja continua em $[1, 5]$ e tenha as propriedades dados.

   (a) Máximo absoluto em 3, mínimo absoluto em 2, mínimos local em 4.

   (b) Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 2, máximo local em 3 e mínimos local em 2 e 4.

   f não tem máximo ou mínimos locais, mas 2 e 4 são números críticos.

4. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja derivável em 2.

   (b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja continua, mas não derivável em 2.

   (c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja continua em 2.

5. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.

   (b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontinua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

6. Encontre os números críticos da função.

   (a) $f(x) = 5x^2 + 4x$

   (b) $f(x) = |3x - 4|$

   (c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$

   (d) $f(\theta) = 2\cos\theta + sen^2\theta$

   (e) $f(x) = x^2 e^{-3x}$

   (f) $f(x) = x^{-2} \ln x$

7. Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de f no intervalo dado.

(a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $[0, 3]$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $[0, 2]$

(c) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$, $[-1, 2]$

(d) $f(\theta) = 2\cos\theta + sen\ 2\theta$, $[0, \pi/2]$

(e) $f(x) = \ln x^2 + x + 1$, $[-1, 1]$

(f) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$, $[0, 1]$

8. Demonstre que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem nem máximos nem mínimos locais.

9. Se f tiver um valor mínimo em c, mostre que a função $g(x) = -f(x)$ tem um valor máximo em c.

10. Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

    (a) $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $[0, 4]$

    (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$, $[0, 2]$

    (c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$

11. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

12. Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema do Valor Médio.

    (a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $[-1, 1]$

    (b) $f(x) = e^{-2x}$, $[0, 3]$

13. Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

14. Mostre que a equação $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

15. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

16. (a) Suponha que f seja derivável em R e tenha duas raízes. Mostre que f' tem pelo menos uma raiz.

    (b) Suponha que f seja duas vezes derivável em R e tenha três raízes. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz real.

    (c) Você pode generalizar os ítens (a) e (b)?

17. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geq 2$ para $1 \leq x \leq 4$, quão pequeno pode ser $f(4)$?

18. Suponha que $3 \leq f'(x) \leq 5$ para todo x. Mostre que $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$.

19. Se $f'(x) = c$ (c uma constante) para todo x, use o Corolário da aula para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguma constante d.

20. Um número a é chamado ponto fixo de uma função f se $f(a) = a$. Demonstre que se $f'(x) \neq 1$ para todo número real x, então f tem no máximo um ponto fixo.

21. Encontre o limite. Use a Regra de L'Hôspital quando for apropriado. Se existir um método mais elementar, use-o. Se a Regra de LHôspital não for aplicável, explique por quê.

    (a) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

    (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x^b-1}$

    (c) $\lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{\cos x}{1-\ sen\ x}$

    (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

    (e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

    (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3}$

    (g) $\lim_{x\to 0} \frac{5^x-3^x}{x}$

    (h) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

    (i) $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

    (j) $\lim_{x\to\infty}(x - \ln x)$

22. Demonstre que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$
para todo n inteiro positivo. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

23. Demonstre que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \infty$$
para todo p positivo. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

24. Se f' for contínua, use a Regra de LHôspital para mostrar que
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$
Explique o significado dessa equação utilizando um diagrama.

25. Se f'' for contínua, mostre que
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$
.