

Tipos Especiais de Listas

Árvores AVL

Sumário

- Conceitos Introdutórios
- Rotação Direita
- Rotação Esquerda
- Rotações Simples
- Rotações Duplas
- Qual Rotação Usar
- ImplementaçãoInserção em Árvores AVL

Conceitos Introdutórios

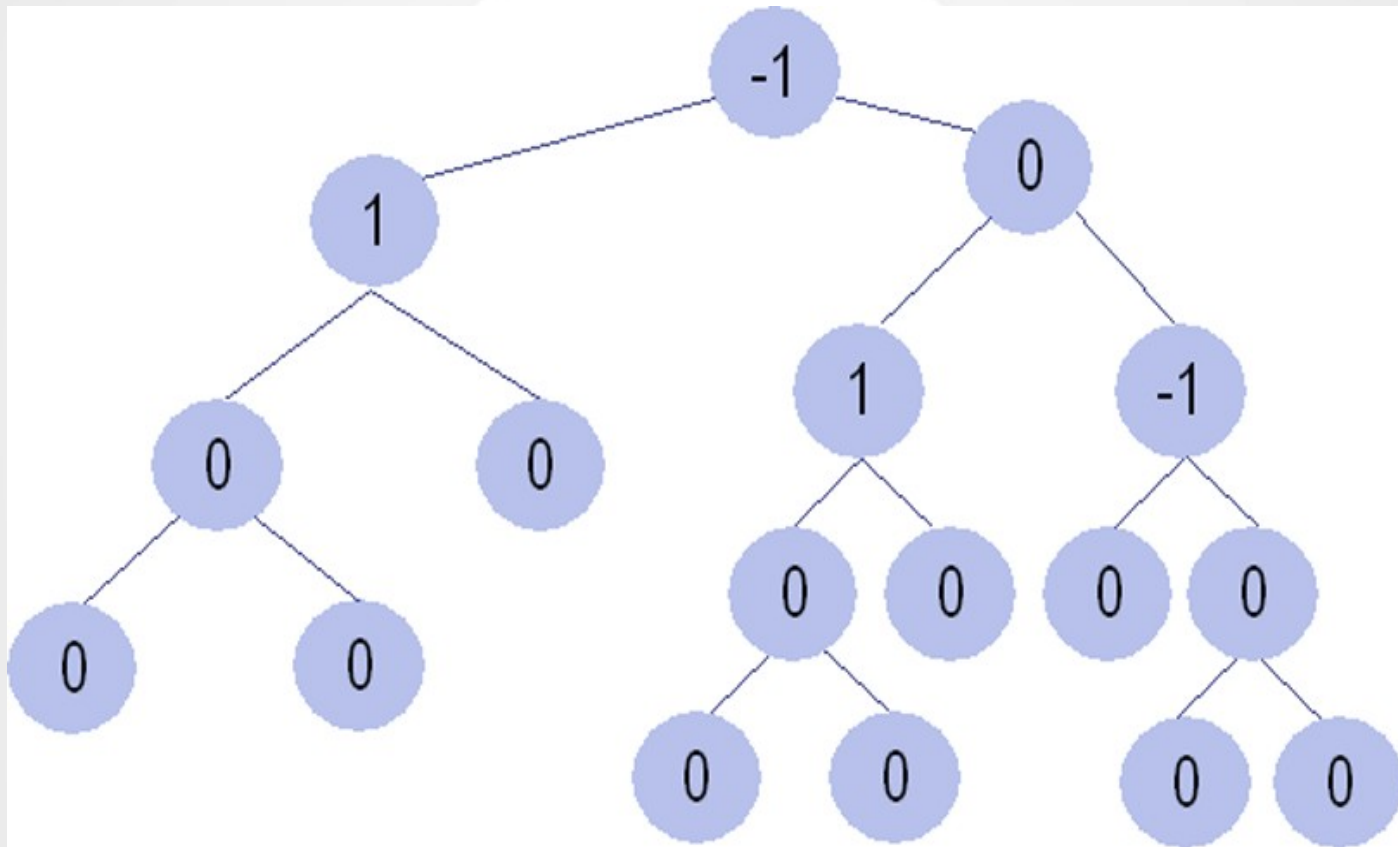
Árvores Binárias de Busca

- Altura de uma árvore binária (AB): igual à profundidade, ou nível máximo, de suas folhas
- A eficiência da busca em árvore **depende do seu Balanceamento**
- Algoritmos de inserção e remoção em ABB não garantem que a árvore gerada a cada passo seja balanceada

Árvores AVL

- Em Árvore AVL: ABB na qual as alturas das duas sub-árvores de todo nó nunca diferem em mais de 1
 - **Fator de balanceamento** de nó: a altura de sua sub-árvore esquerda menos a altura de sua sub-árvore direita
 - $FB(p) = h(TE(p)) - h(TD(p))$
 - Em uma árvore AVL todo nó tem fator de balanceamento igual a 1, -1 ou 0

Árvores AVL

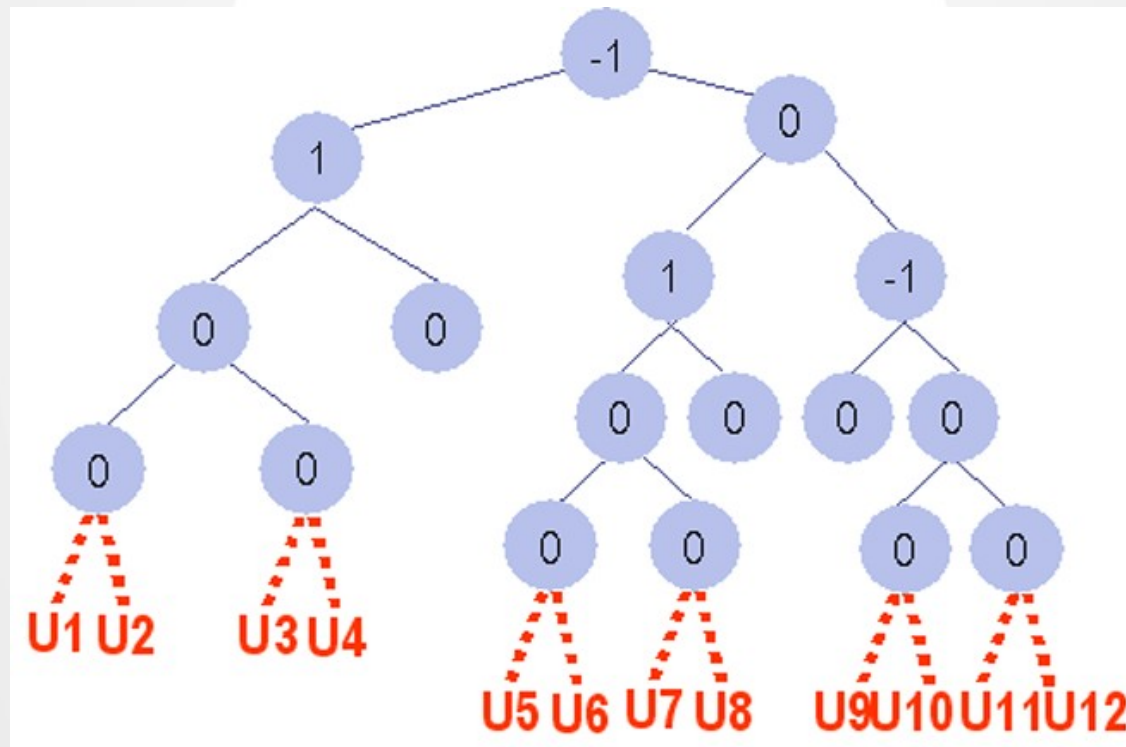


Árvores AVL

- O problema das árvores AVL e das árvores balanceadas de uma forma geral é como manter a estrutura balanceada após operações de **inserção** e **remoção**
- As operações de inserção e remoção sobre ABBs **não garantem o balanceamento**

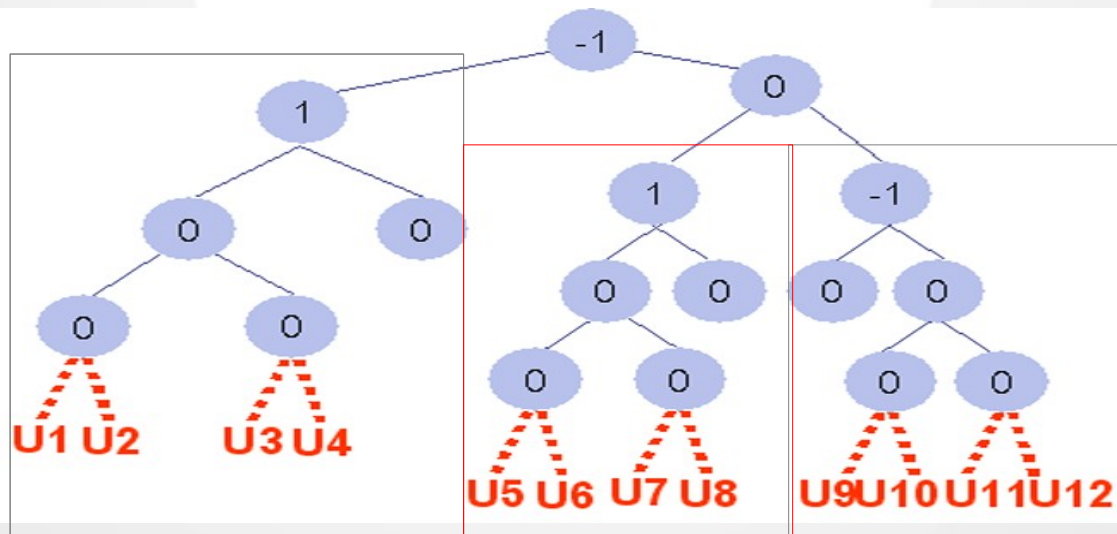
Árvores AVL

- As seguintes inserções tornam a árvore desbalanceada



Árvores AVL

- As seguintes situações podem levar ao desbalaceamento de uma árvore AVL
 - O nó inserido é descendente esquerdo de um nó que tinha **FB = 1** (U1 e U8)
 - O nó inserido é descendente direito de um nó que tinha **FB = 1** (U9 e U12)



Árvores AVL

- Para manter uma árvore balanceada é necessário aplicar uma transformação na árvore tal que
 - **Regra 1** - O percurso em-ordem na árvore transformada seja igual ao da árvore original (isto é, a árvore transformada continua sendo uma ABB)
 - **Regra 2** - A árvore transformada fique balanceada

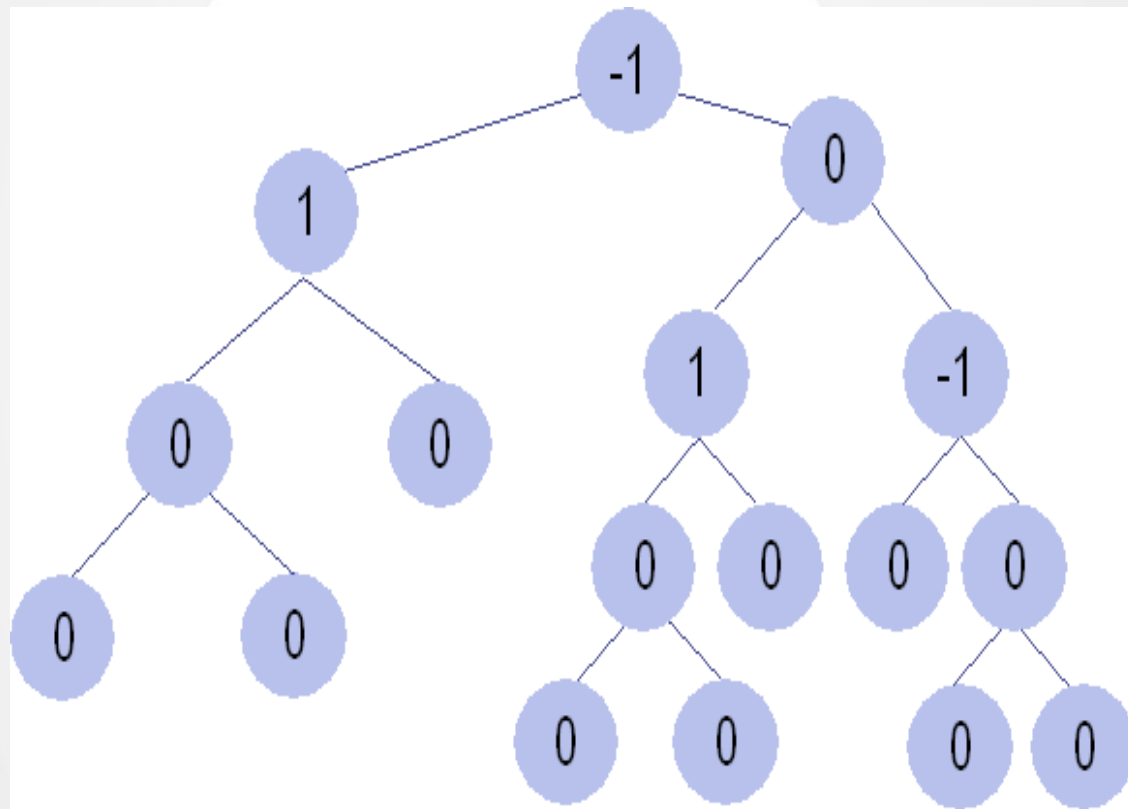
Árvores AVL

- A transformação que mantém a árvore balanceada é chamada de **rotação**
- A rotação pode ser feita à esquerda ou à direita, dependendo do desbalanceamento a ser tratado
- A rotação deve ser realizada de maneira a respeitar as regras 1 e 2 definidas no slide anterior
- Dependendo do desbalanceamento a ser tratado, **uma única rotação pode não ser suficiente**

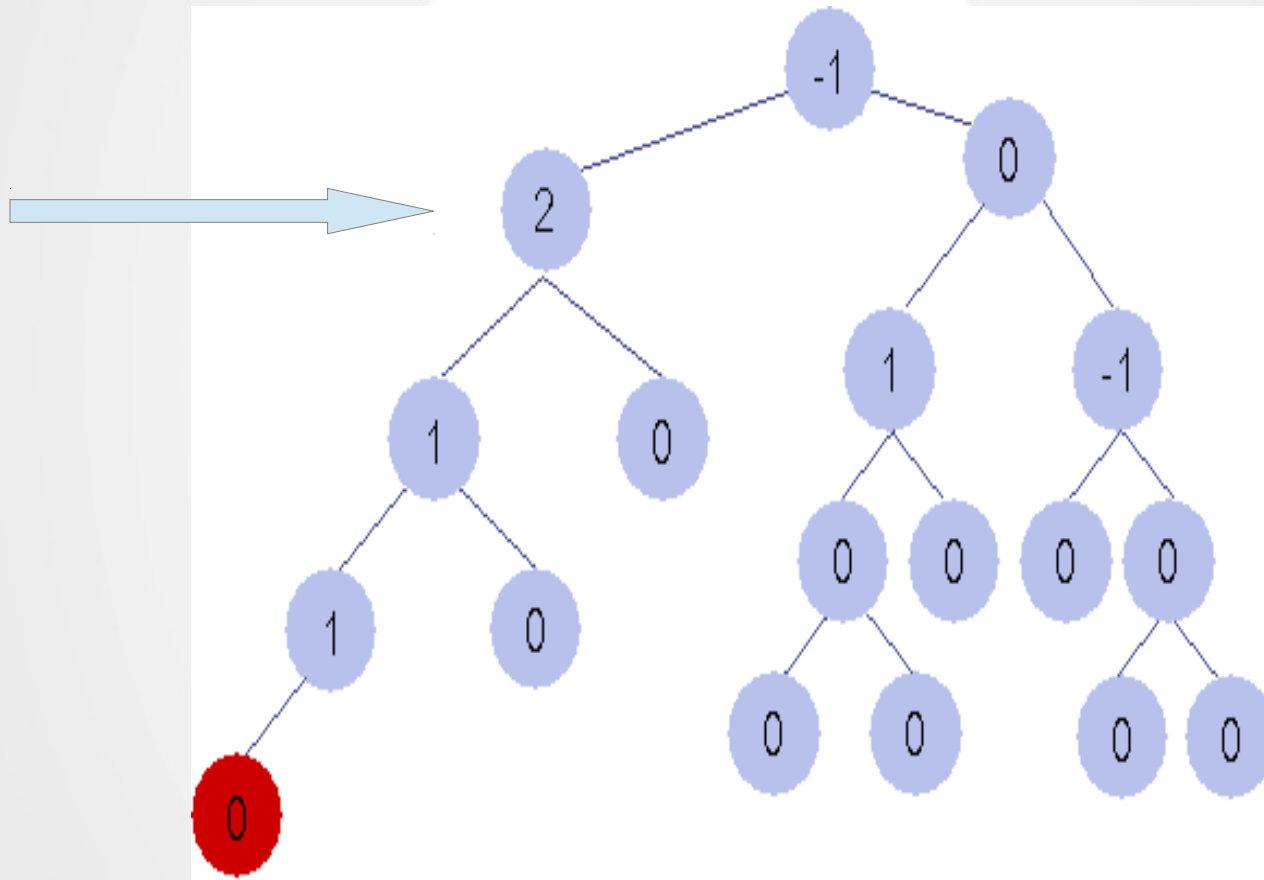


Rotação a direita

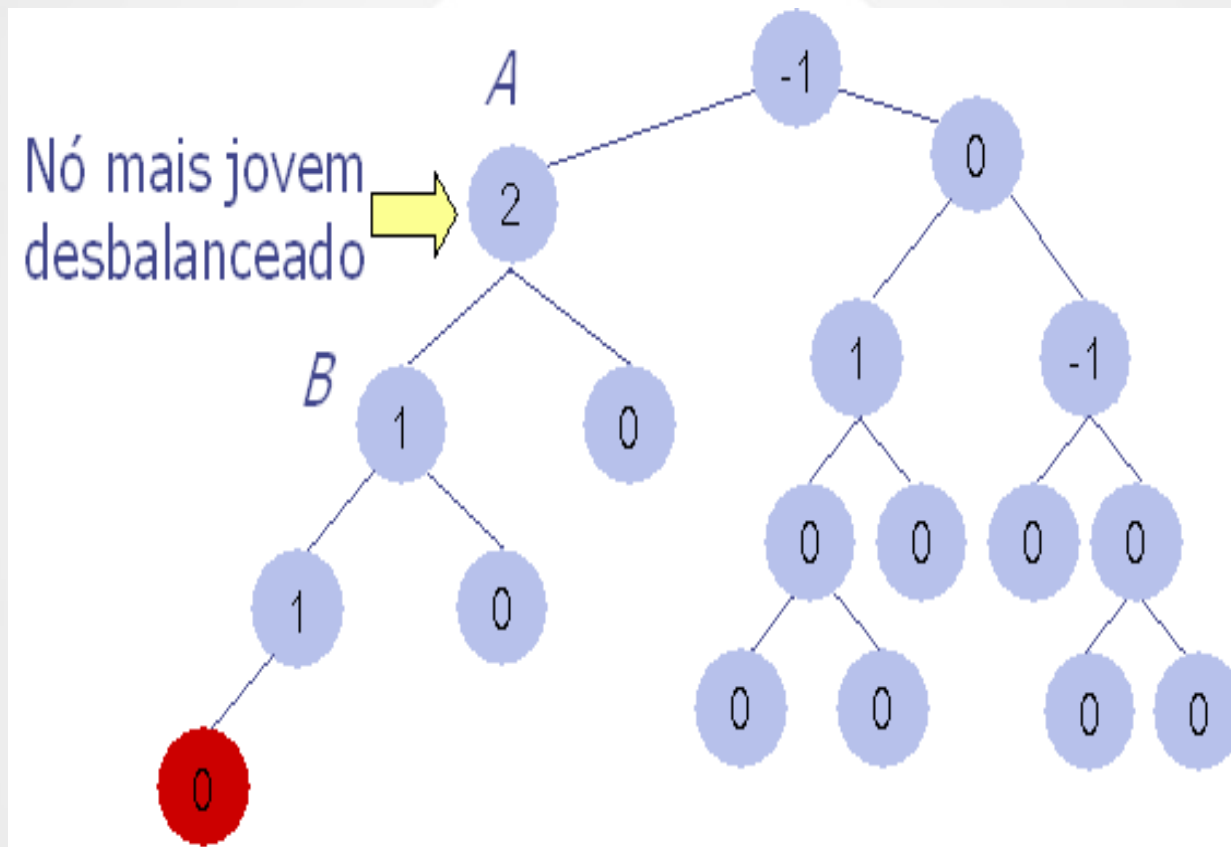
Árvores AVL - Rotação Direita



Árvores AVL - Rotação Direita



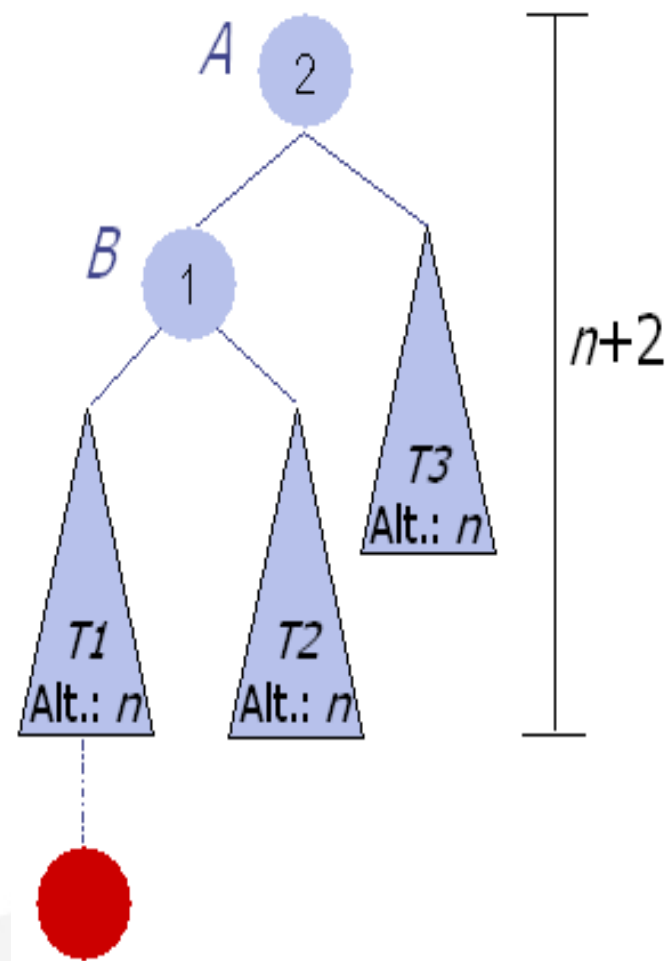
Árvores AVL - Rotação Direita



- A rotação direita consiste em subir o nó B para o lugar de A. A desce para ser sub-árvore direita de B.

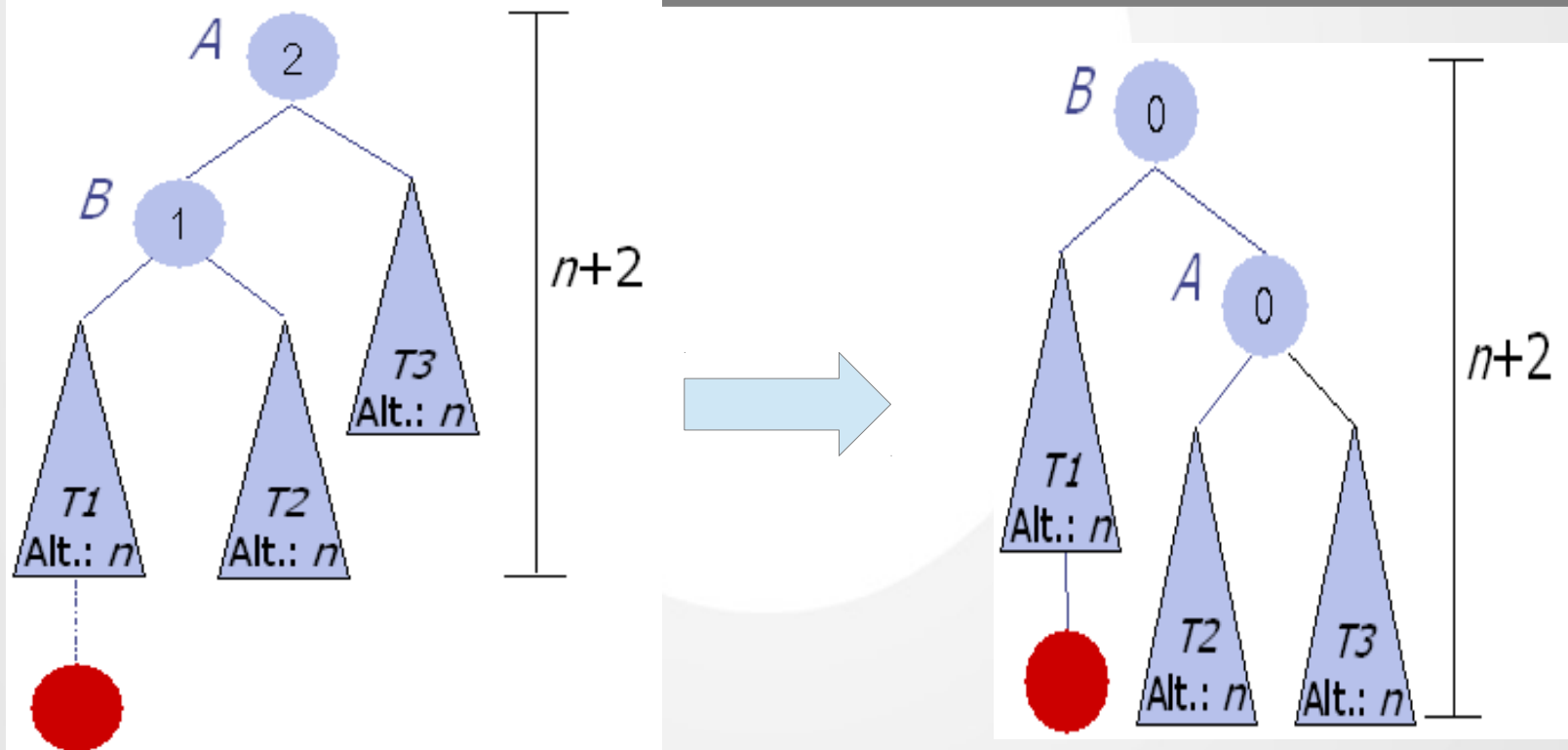
Árvores AVL - Rotação Direita

- A rotação direita tem formato geral ilustrado à direita
- T1, T2 e T3 podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- A é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado

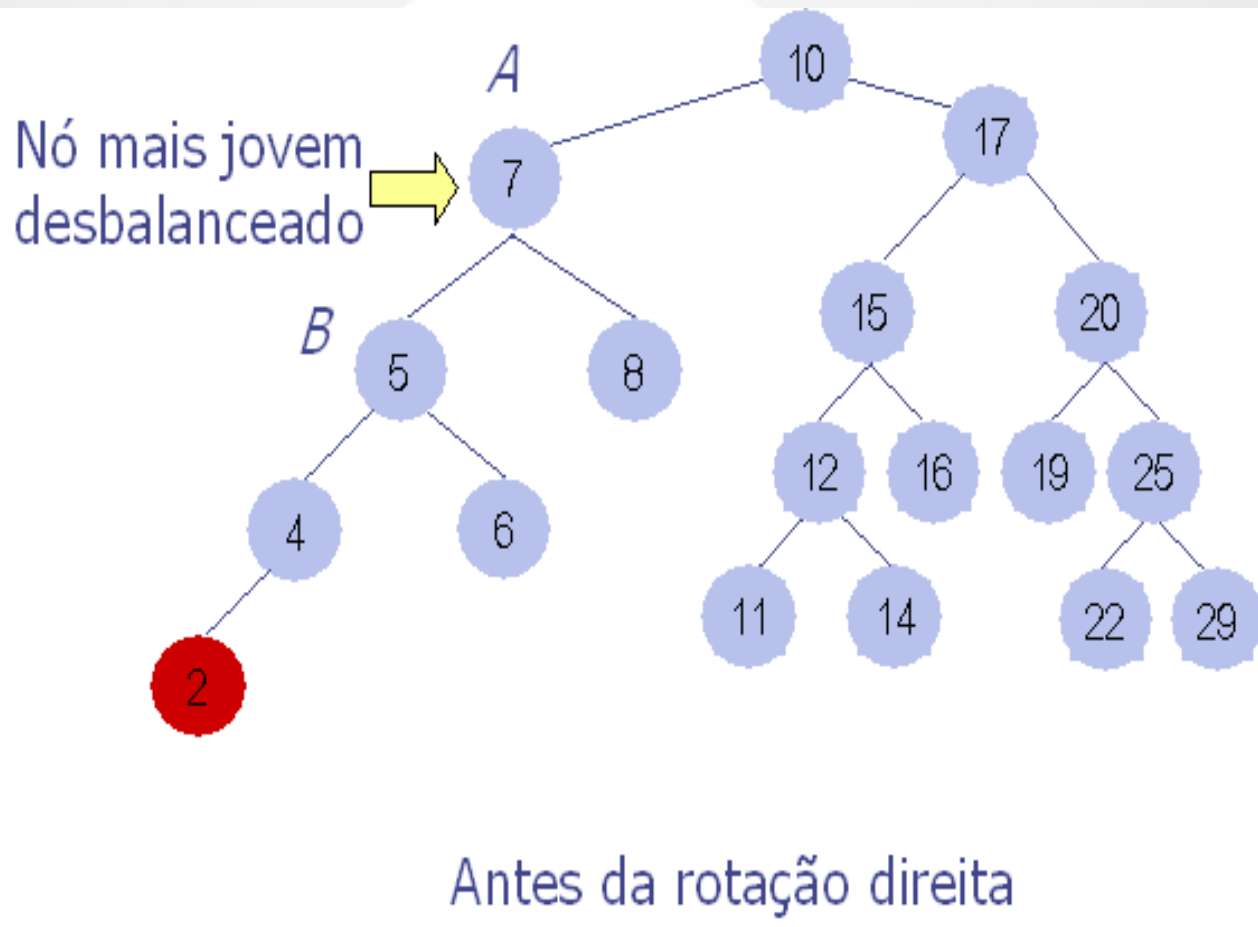


Árvores AVL - Rotação Direita

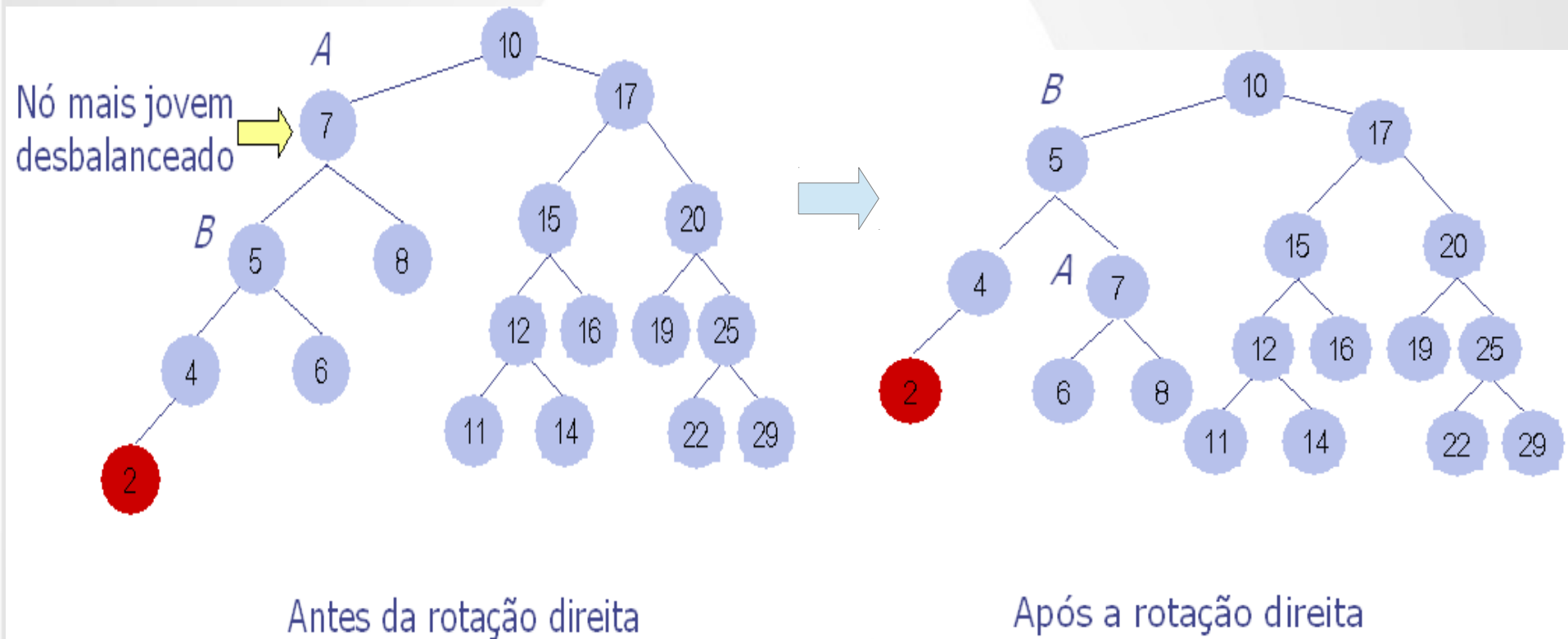
- A rotação direita tem formato geral ilustrado à direita
- T1, T2 e T3 podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- A é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado



Árvores AVL - Rotação Direita



Árvores AVL - Rotação Direita



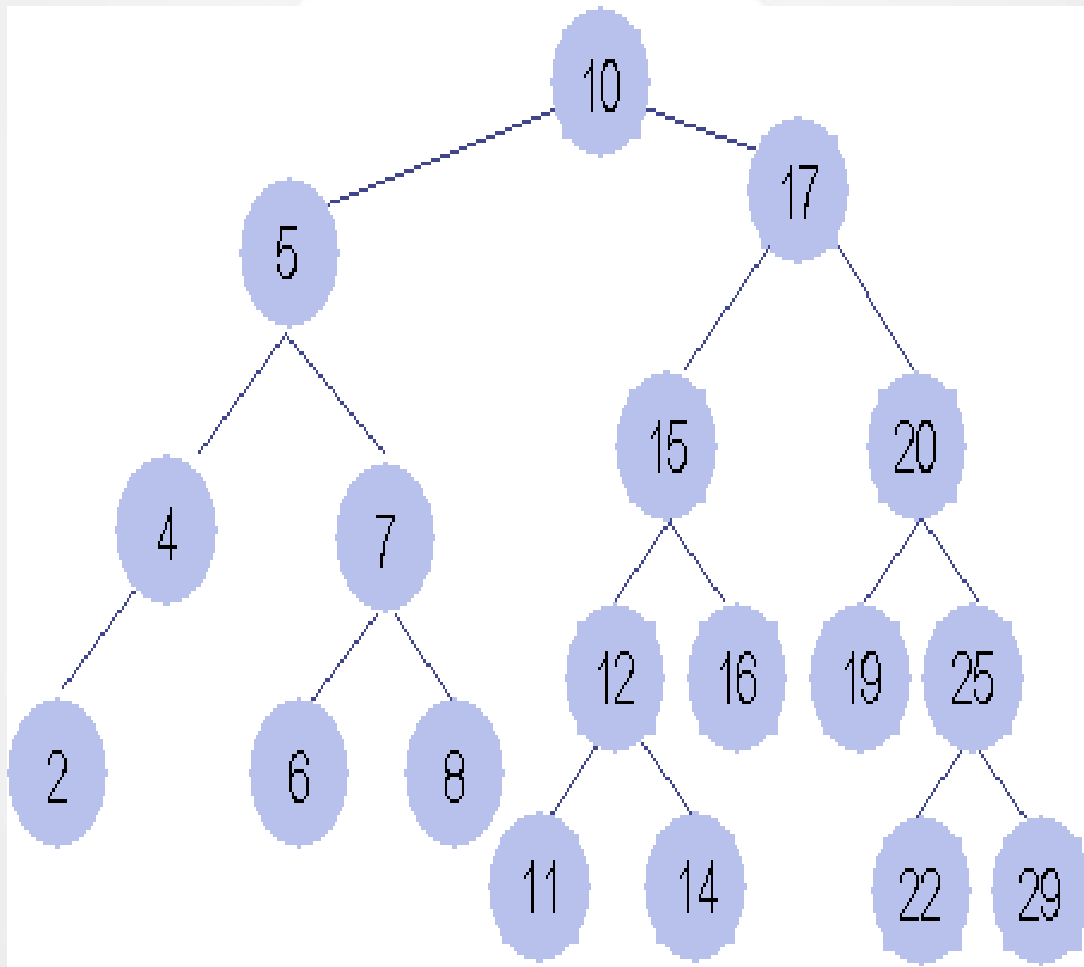
Árvores AVL - Rotação Direita

- Exercício : insira em uma árvore AVL a seqüência de valores: 3; 1. Na ordem que os valores foram listados

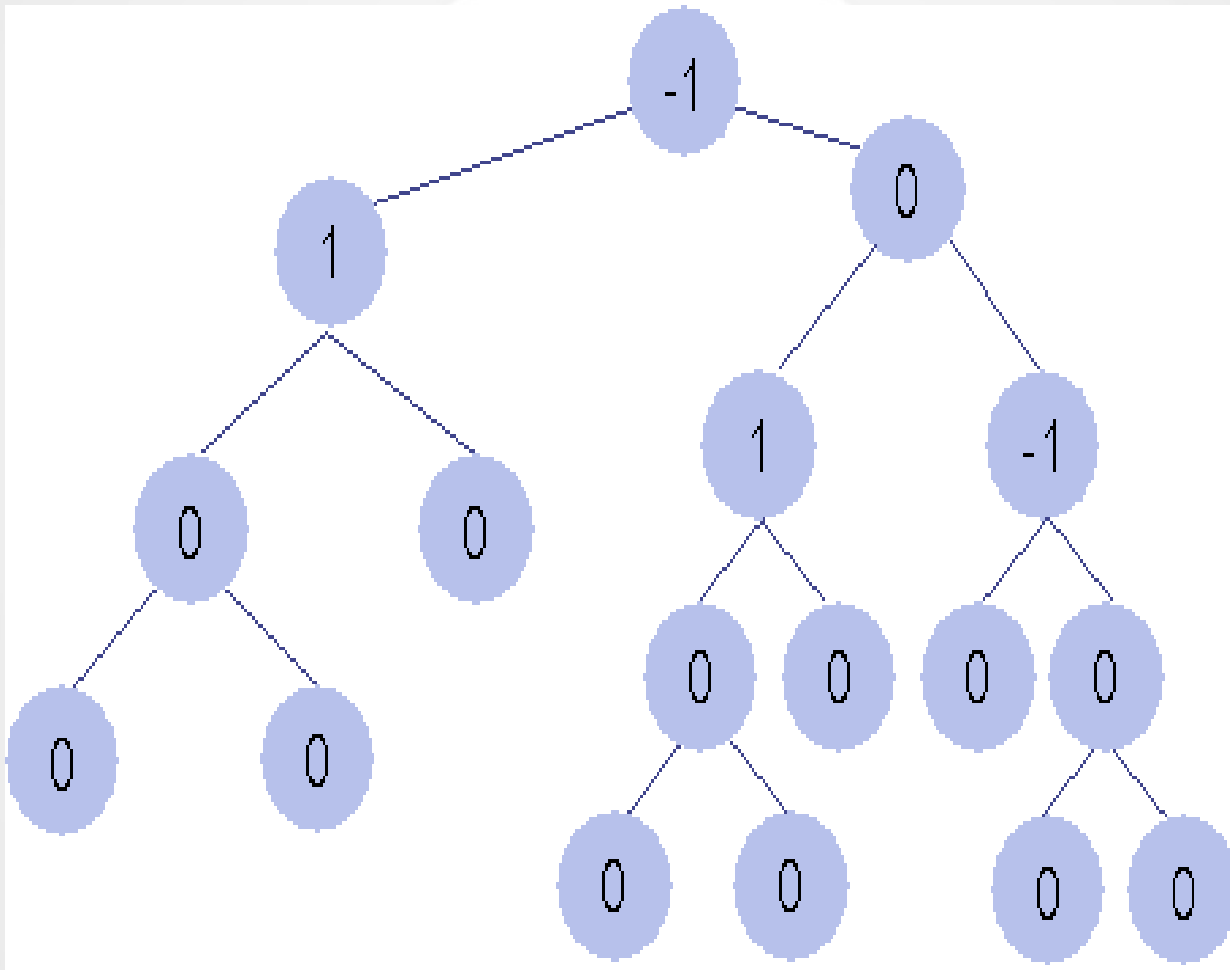


Rotação a esquerda

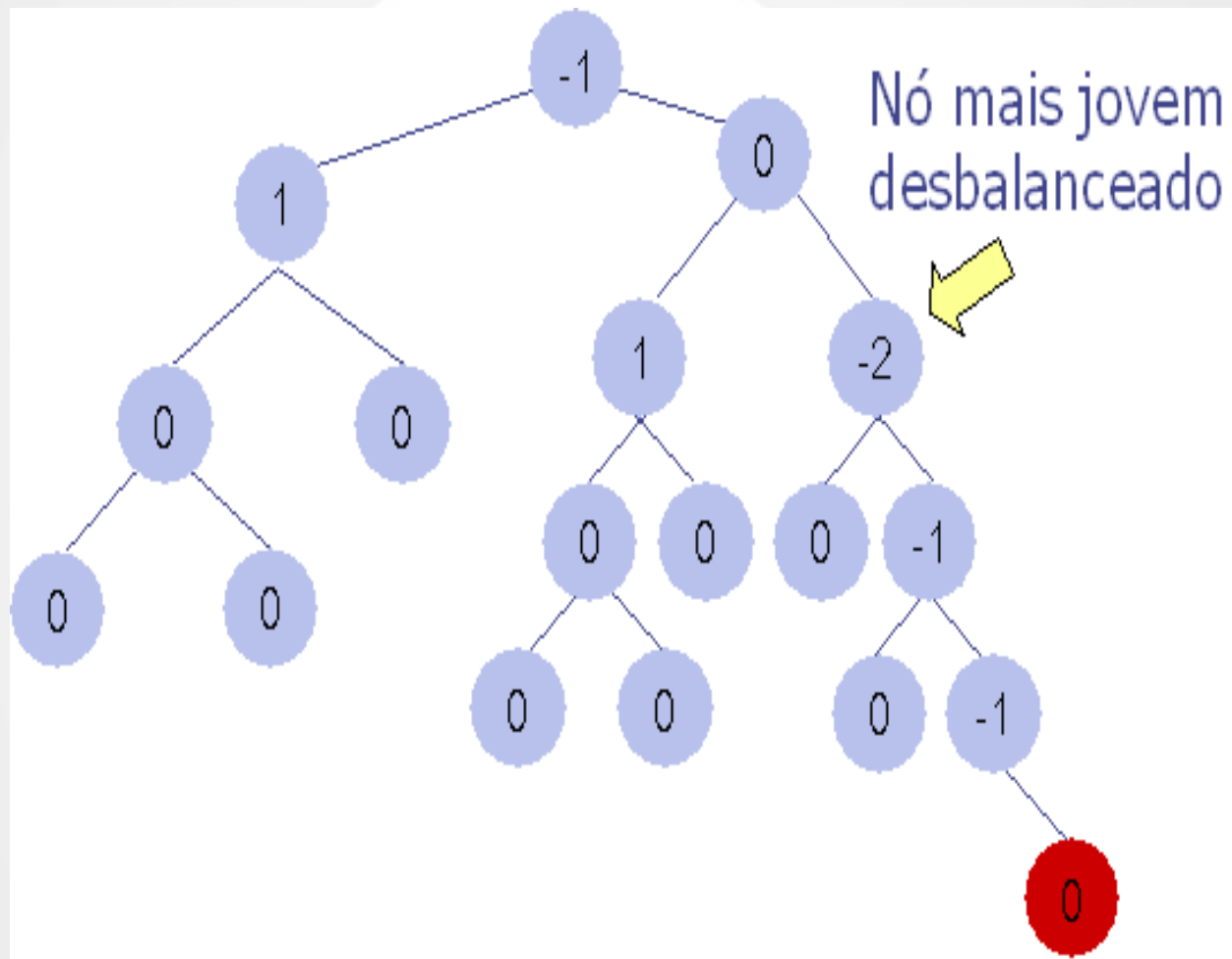
Árvores AVL - Rotação Esquerda



Árvores AVL - Rotação Esquerda

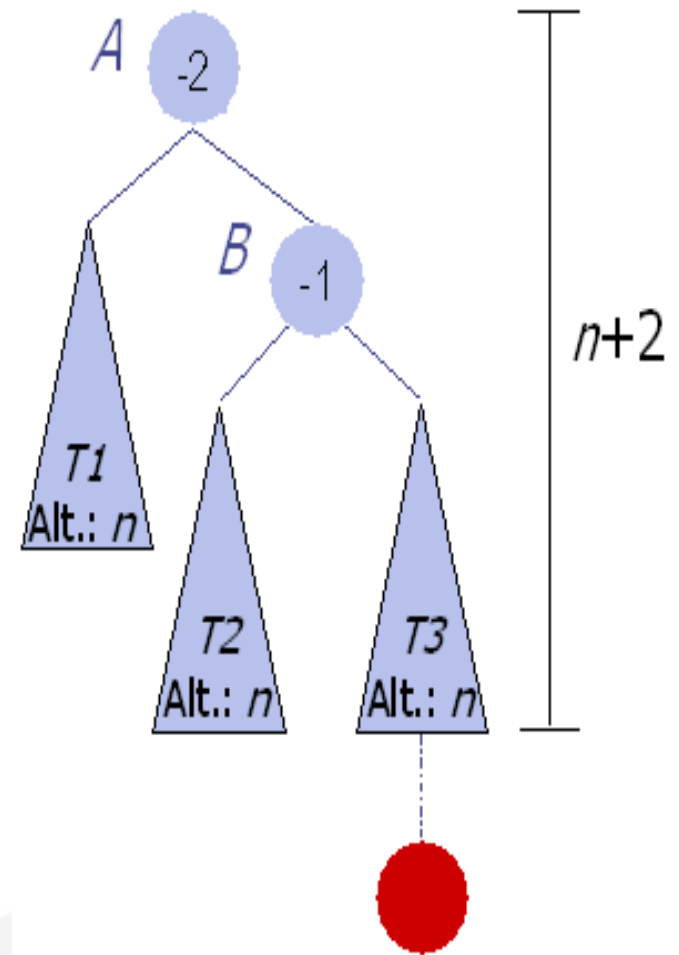


Árvores AVL - Rotação Esquerda



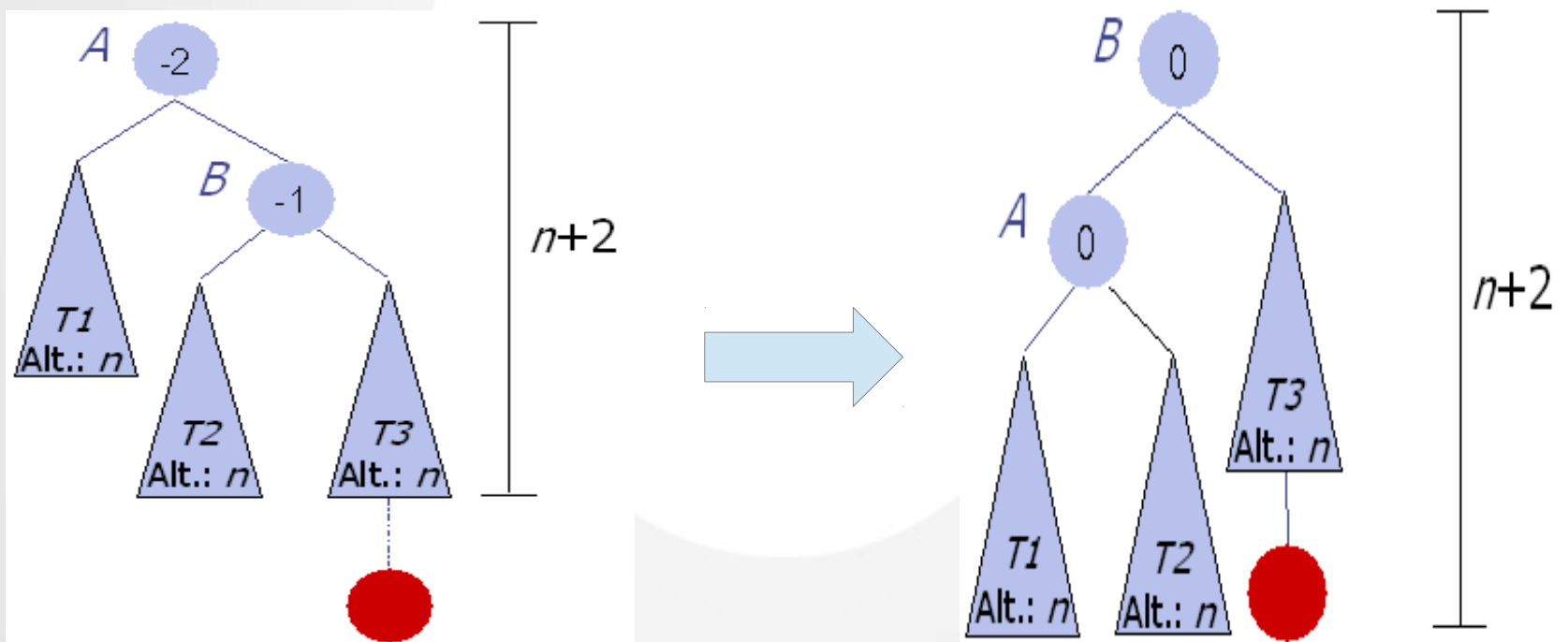
Árvores AVL - Rotação Esquerda

- A rotação esquerda tem formato geral ilustrado à direita
- T1, T2 e T3 podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- A é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado

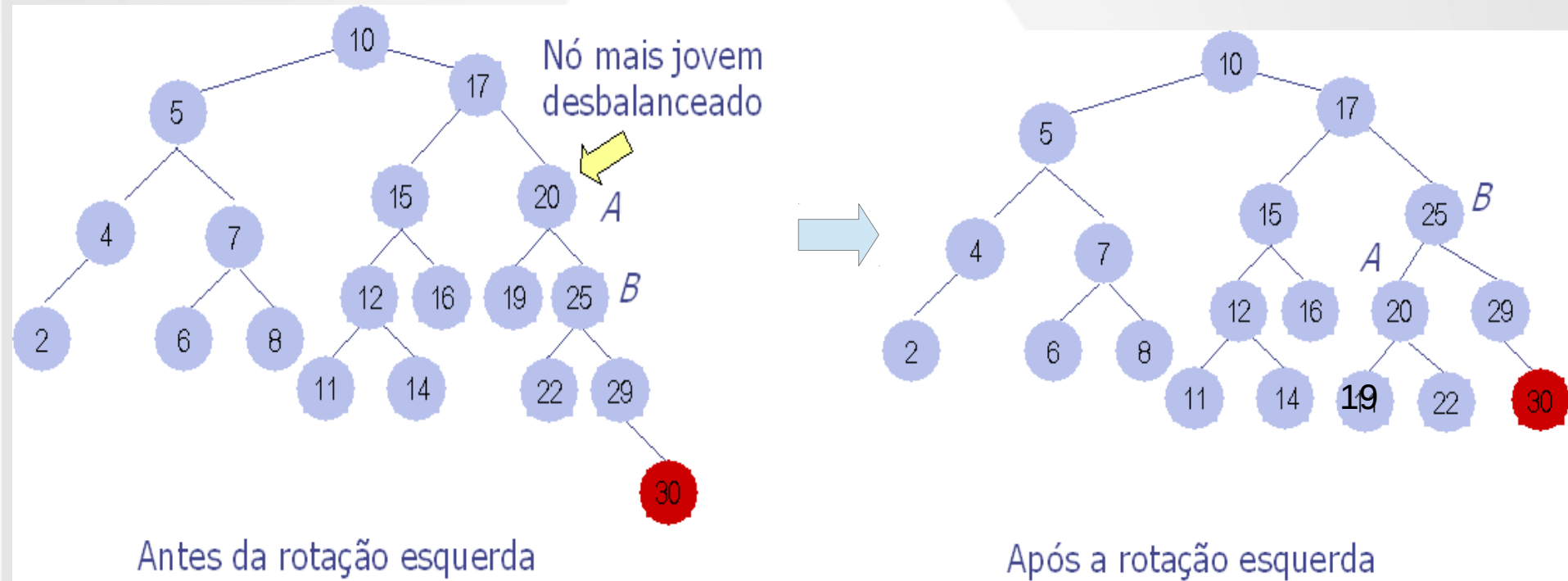


Árvores AVL - Rotação Esquerda

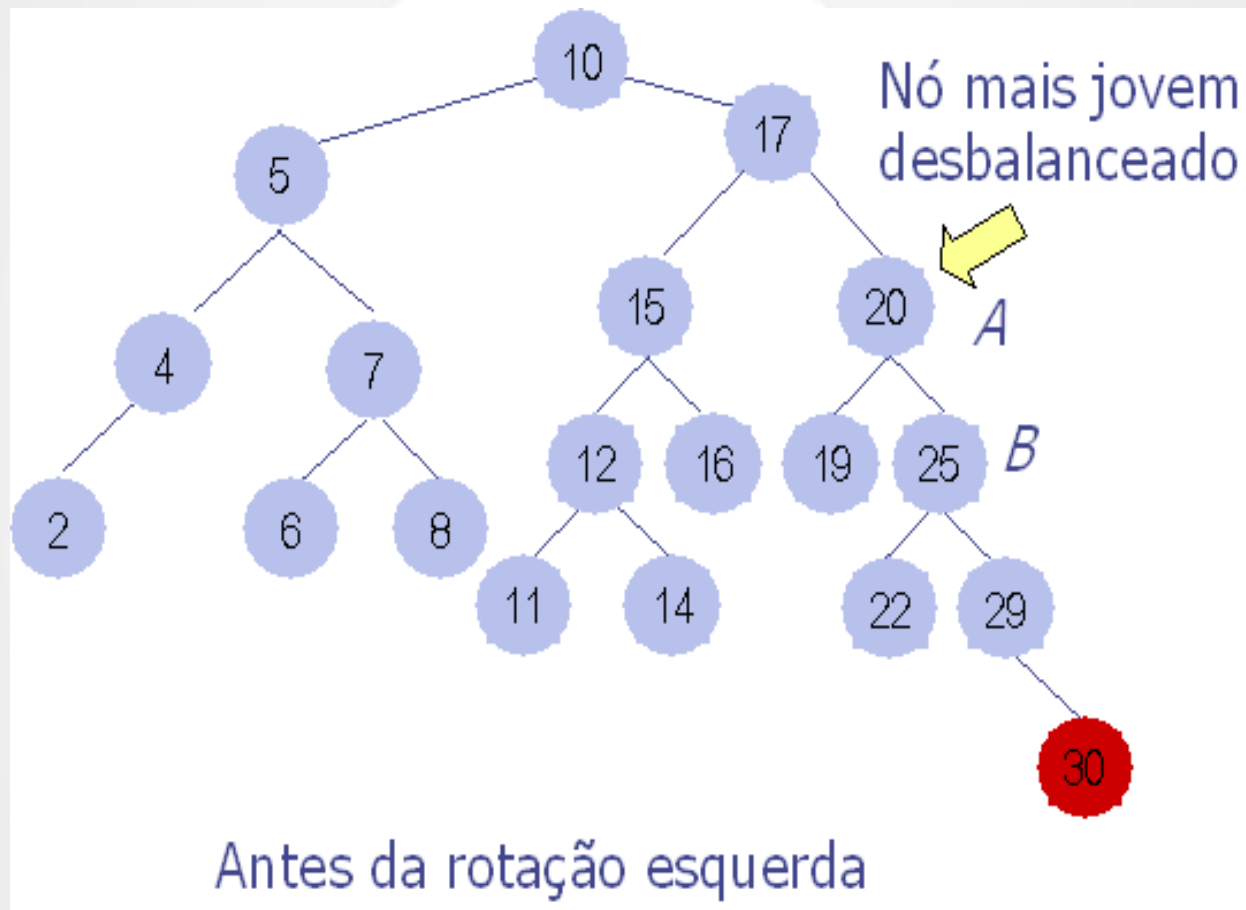
- A rotação esquerda tem formato geral ilustrado à direita
- T1, T2 e T3 podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- A é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado



Árvores AVL - Rotação Esquerda



Árvores AVL - Rotação Esquerda



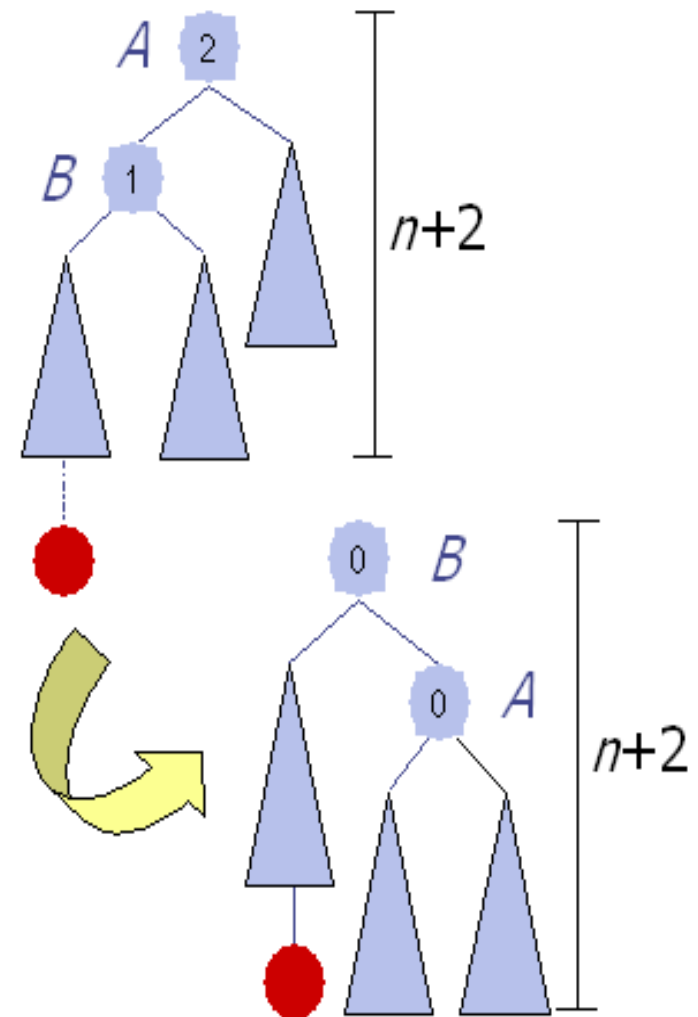
Árvores AVL - Rotação Direita

- Exercício : insira em uma árvore AVL a seqüência de valores: 3; 1. Na ordem que os valores foram listados

Rotação Simples

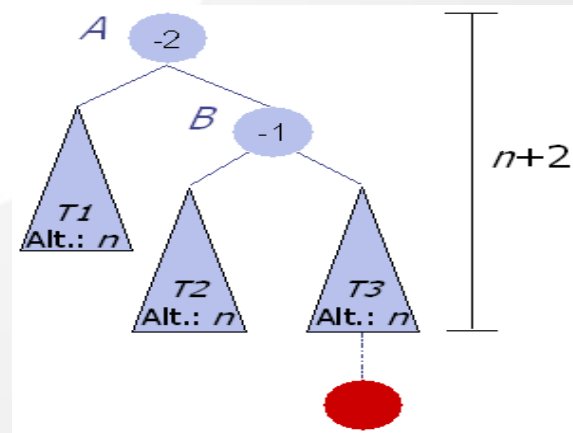
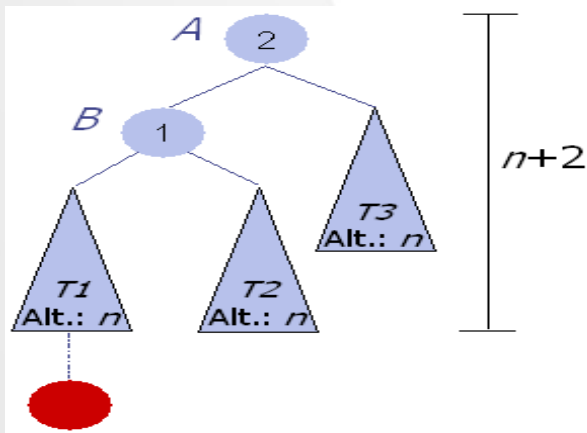
Árvores AVL - Rotação Simples

- Tanto para a rotação direita quanto para a rotação esquerda, a sub-árvore resultante tem como altura a mesma altura da sub-árvore original
- Isso significa que o fator de balanceamento de nenhum nó acima de A é afetado



Árvores AVL - Rotação Simples

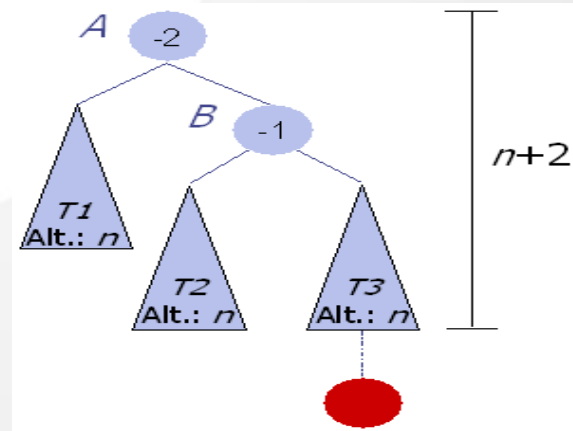
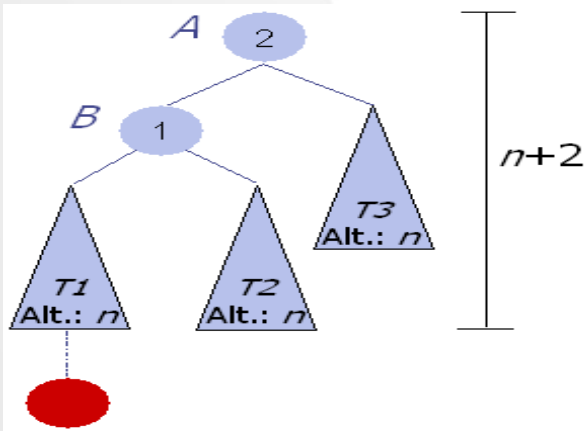
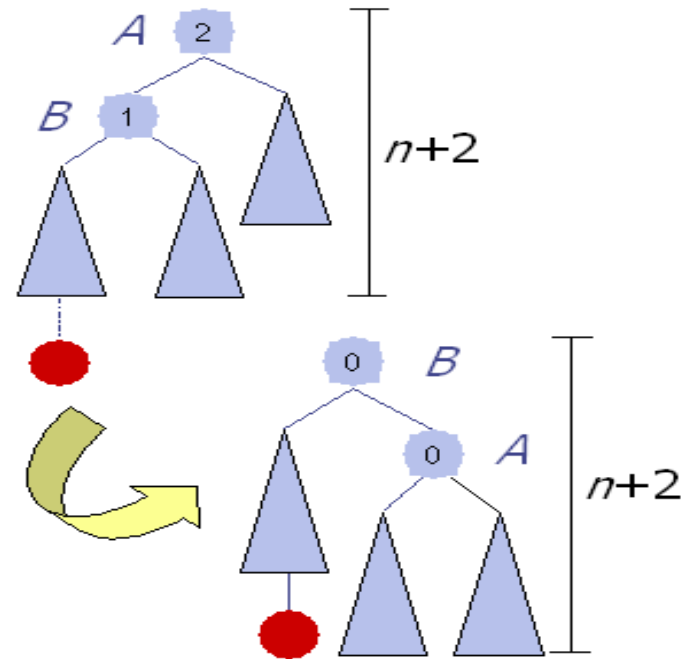
- Quando se deve utilizar a rotação direita ou esquerda?



Árvores AVL - Rotação Simples

- Quando se deve utilizar a rotação direita ou esquerda?

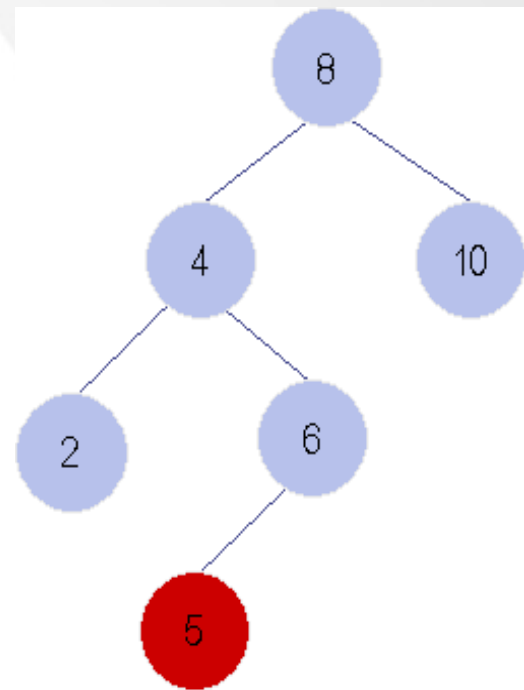
- Quando o fator de balanceamento do nó A é positivo, a rotação é direita. Se for negativo a rotação é esquerda



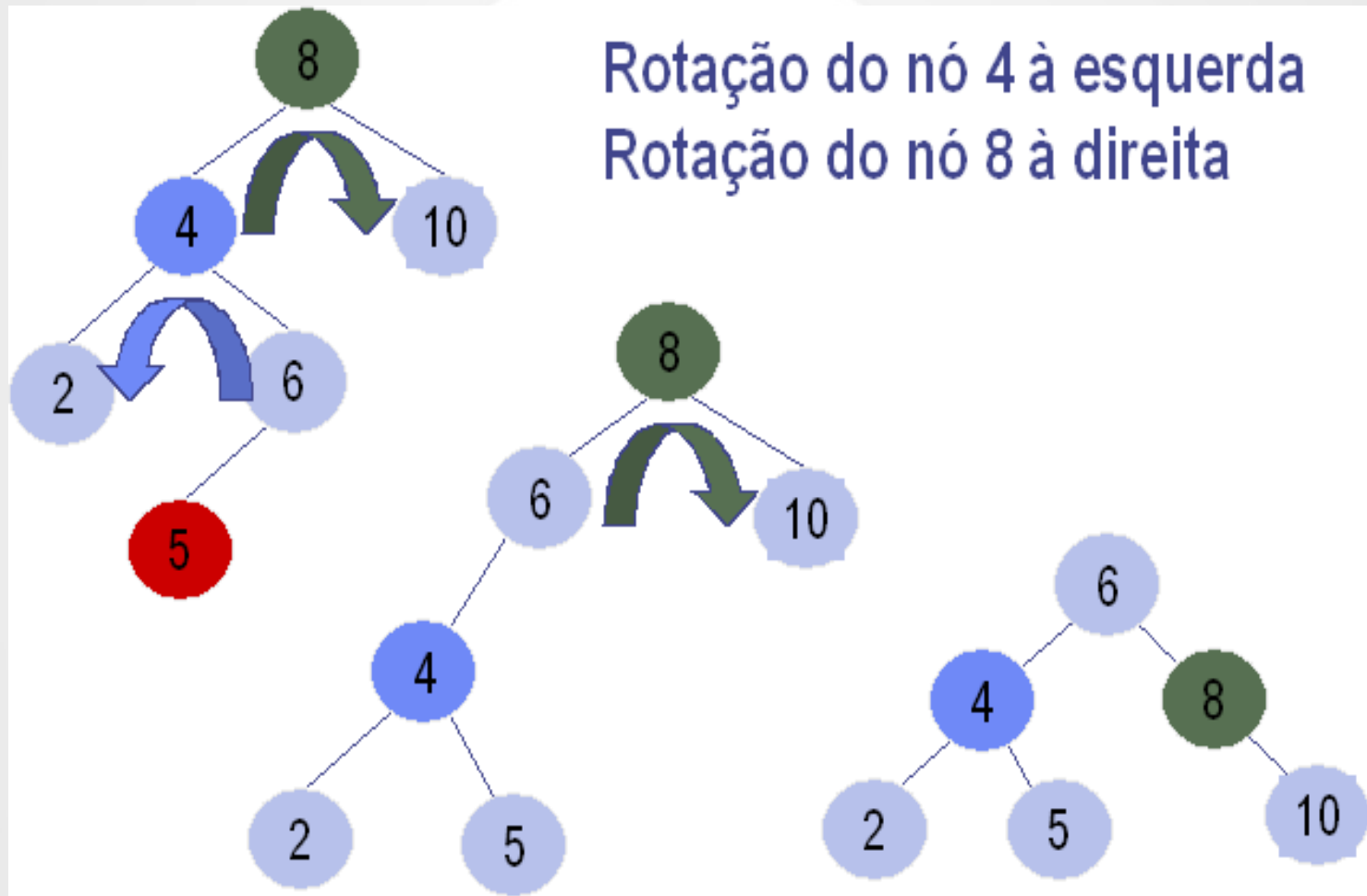
Rotação Duplas

Árvores AVL - Rotação Duplas

- Será que as rotações simples solucionam todos os tipos de desbalanceamento?
 - **Infelizmente, não**
- Existem situações nas quais é necessário uma rotação dupla

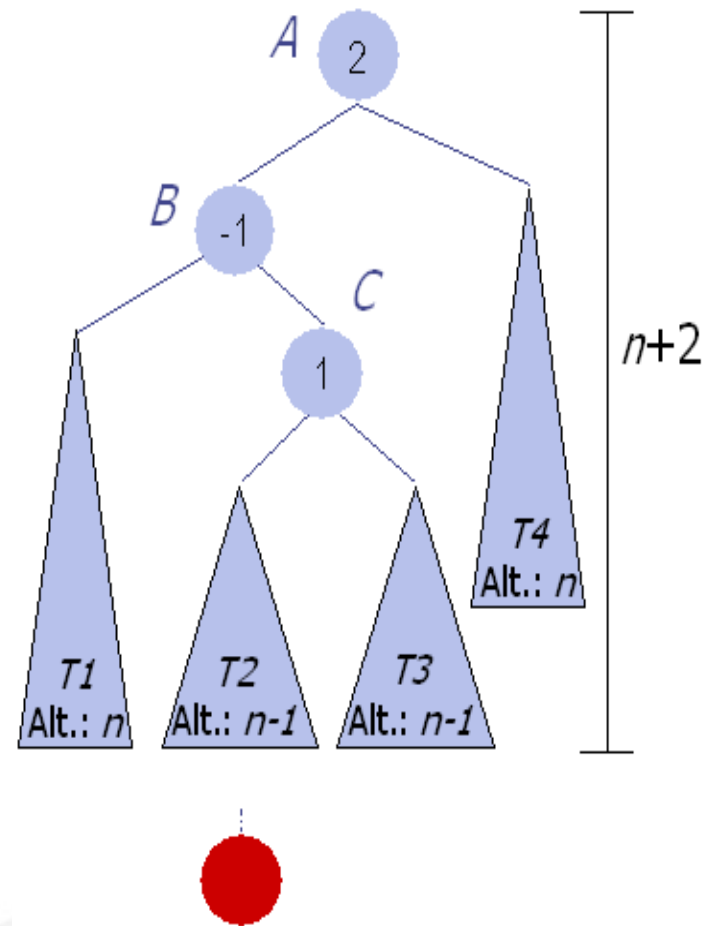


Árvores AVL - Rotação Duplas



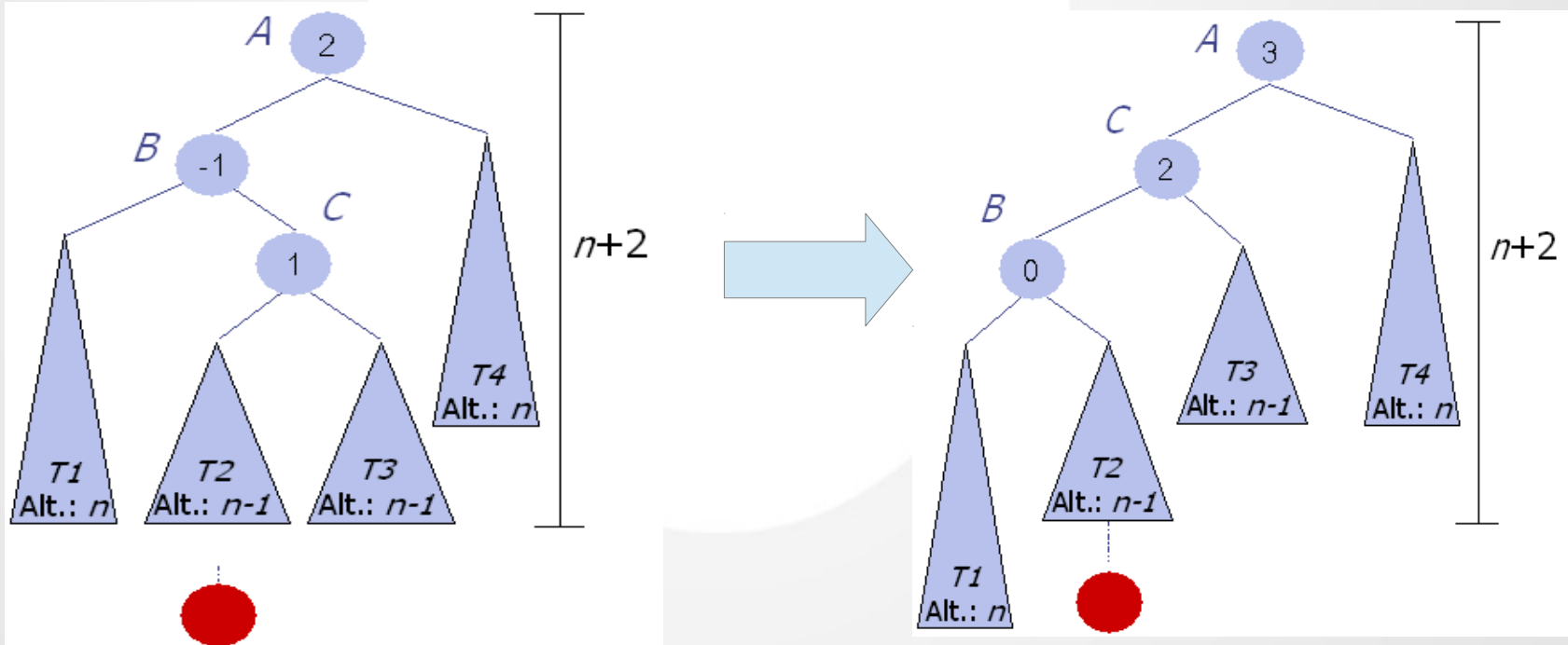
Árvores AVL - Rotação Esq/Dir

- A rotação dupla esquerda/direita tem formato geral ilustrado à direita
- T_1 , T_2 , T_3 e T_4 podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- A é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado



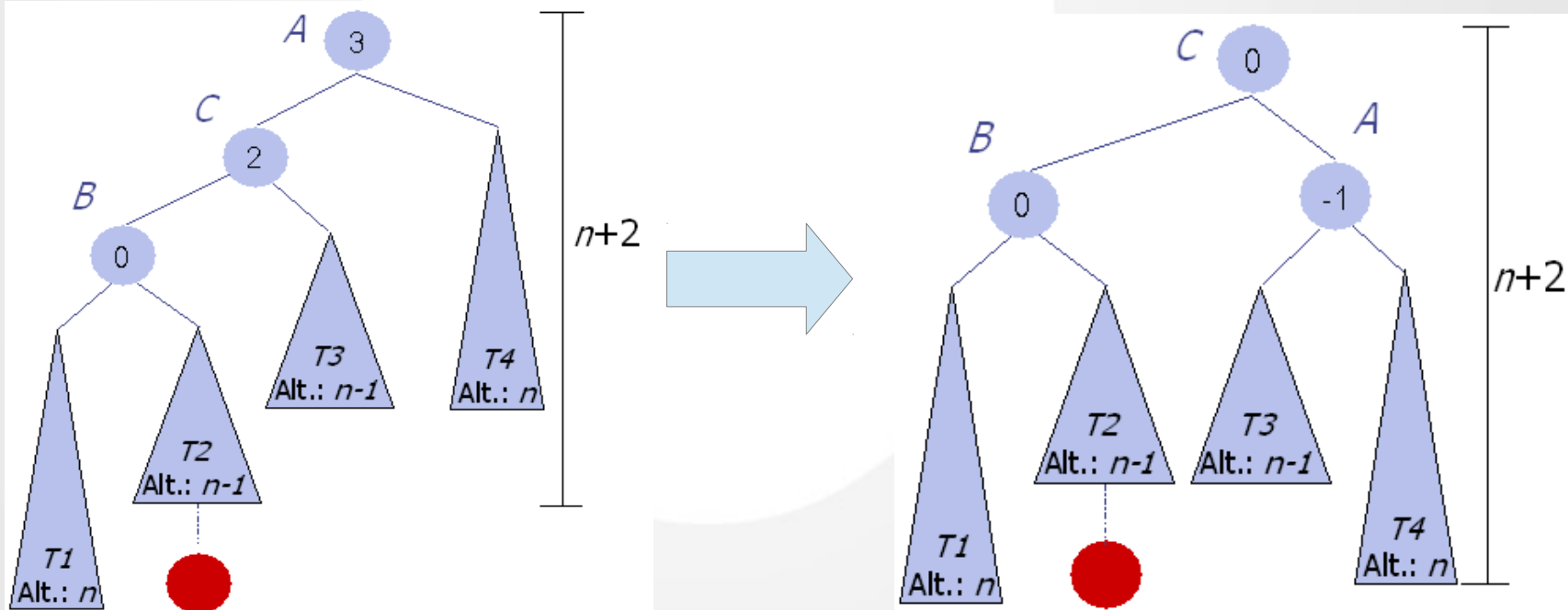
Árvores AVL - Rotação Esq/Dir

- Passo 1: rotação esquerda em B
- A princípio a rotação esquerda parece deixar a árvore ainda mais desbalanceada
- Entretanto...



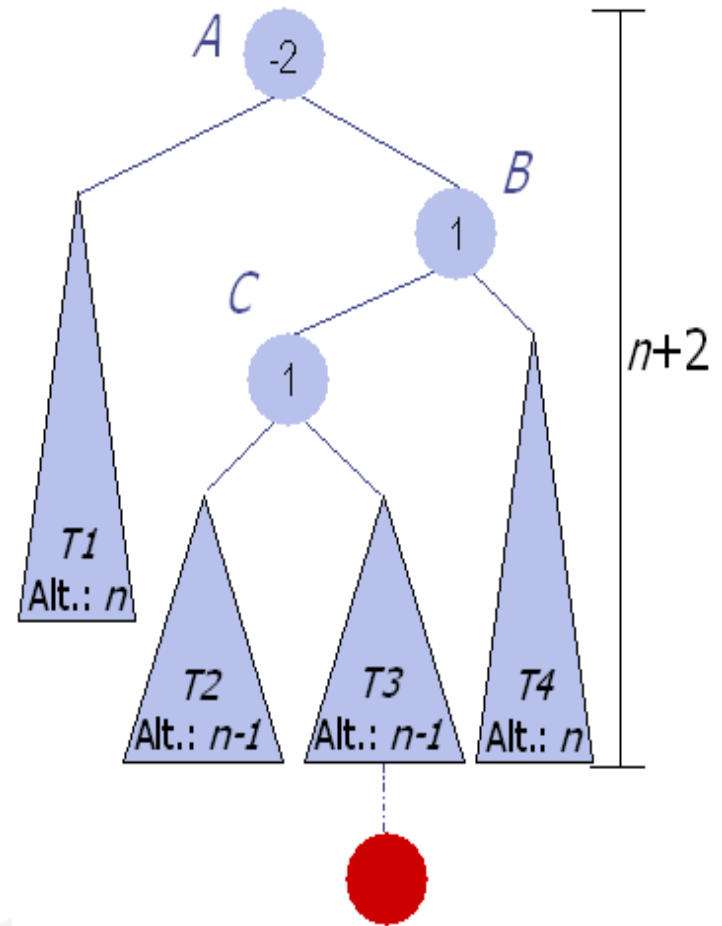
Árvores AVL - Rotação Esq/Dir

- Passo 2: rotação direita em A
- Repare que a altura final da sub-árvore é $n + 2$
- Funciona também se o novo nó tivesse sido inserido em T3.



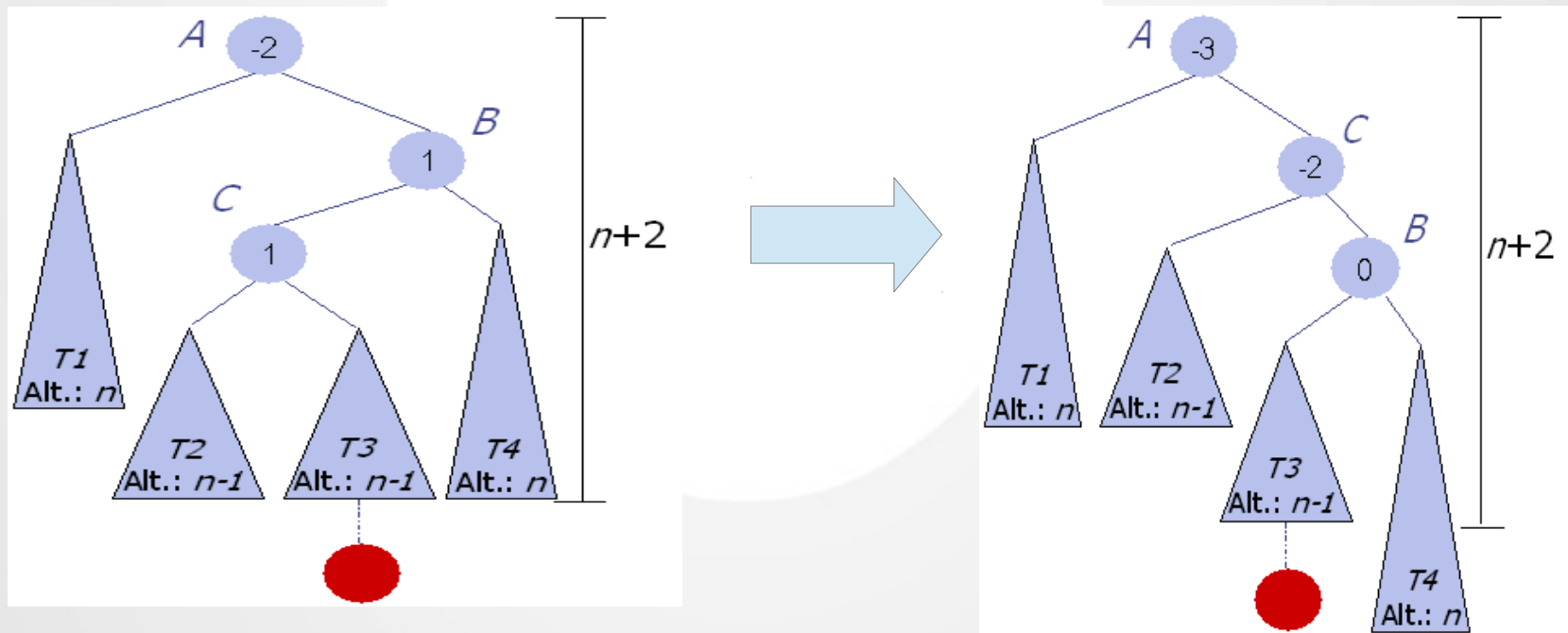
Árvores AVL - Rotação Dir/Esq

- A rotação dupla direita/esquerda tem formato geral ilustrado à direita
- T1, T2, T3 e T4 podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- A é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado



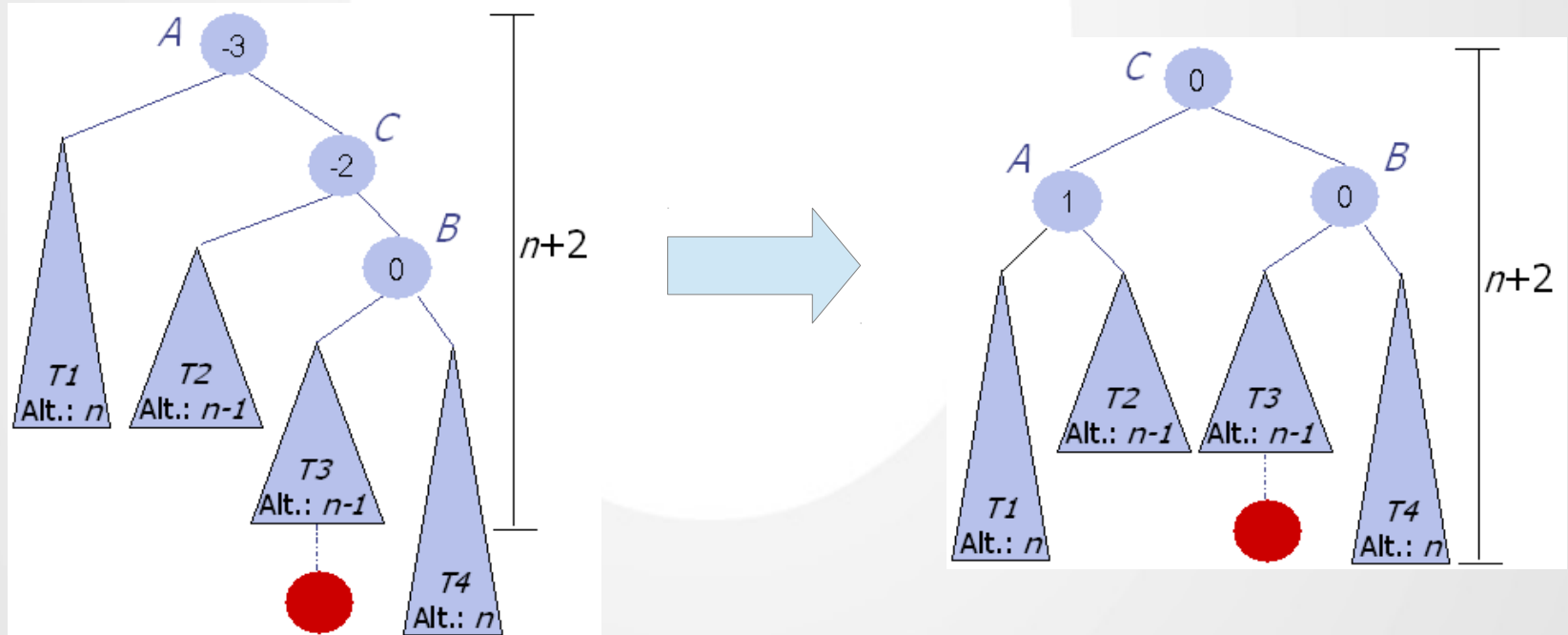
Árvores AVL - Rotação Dir/Esq

- Passo 1: rotação direita em B
- A princípio a rotação direita parece deixar a árvore ainda mais desbalanceada
- Entretanto...



Árvores AVL - Rotação Esq/Dir

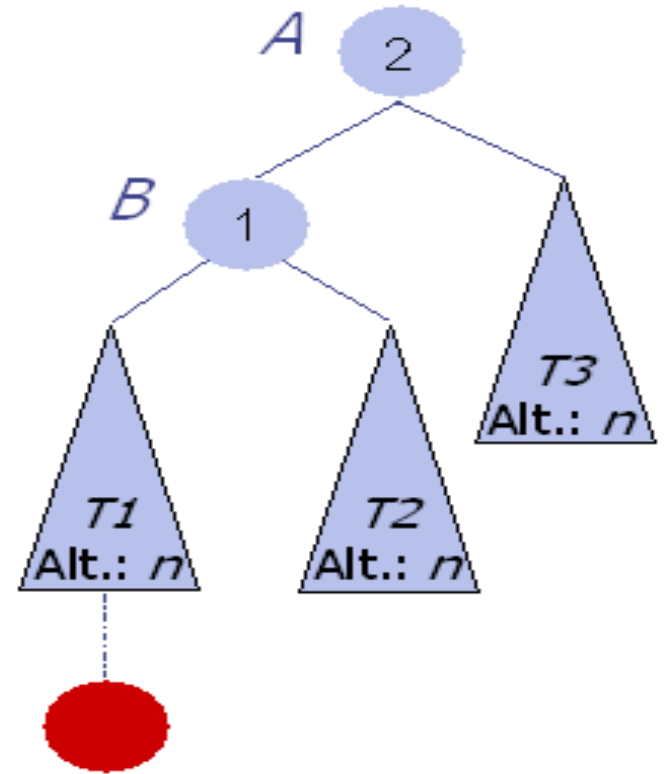
- Passo 2: rotação esquerda em A
- Repare que a altura final da sub-árvore é $n + 2$
- Funciona também se o novo nó tivesse sido inserido em T3.



Qual rotação usar

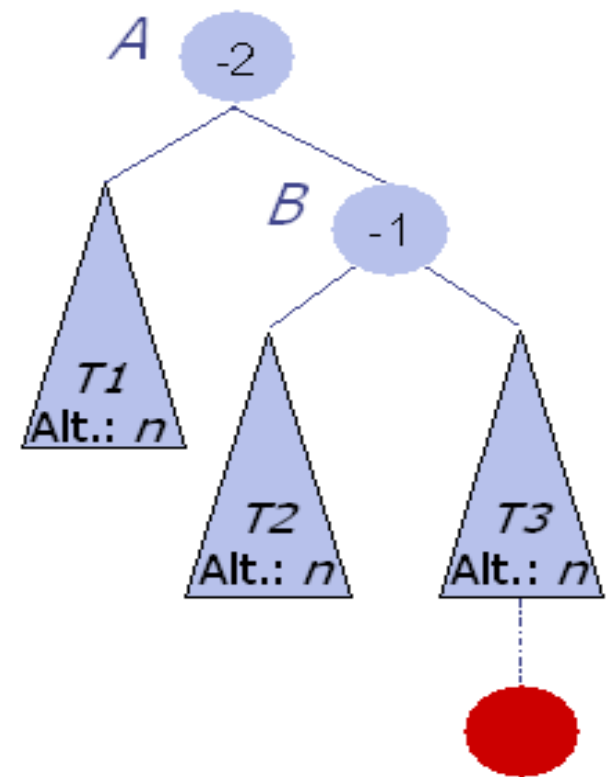
Como decidir qual rotação usar?

- Se o **sinal** do nó A e do nó B forem **iguais** então a rotação é **simples**
- Se o fator de balanceamento nó A (nó mais jovem a se tornar desbalanceado) **for positivo**, então a rotação é **direita**



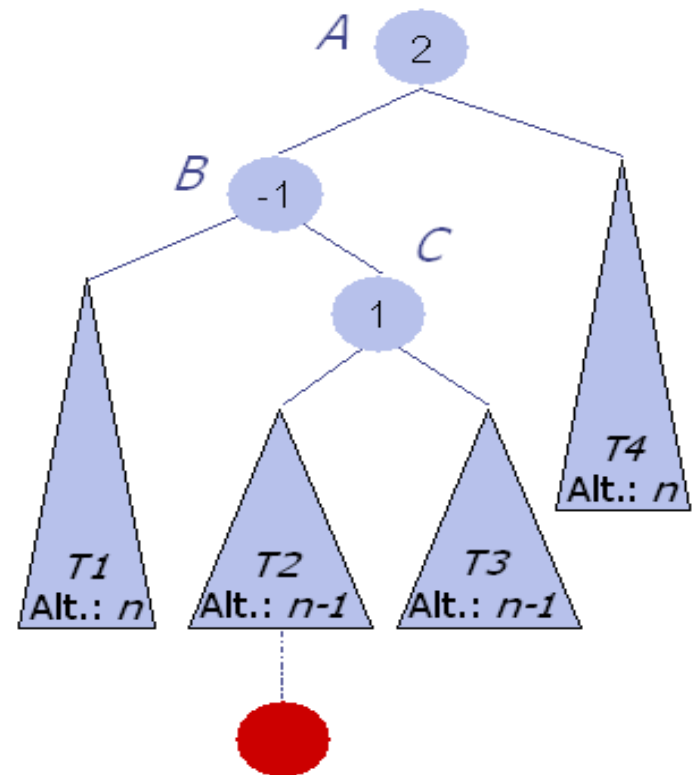
Como decidir qual rotação usar?

- Se o sinal do nó A e do nó B forem **iguais** então a rotação é **simples**
- Se o fator de balanceamento nó A (nó mais jovem a se tornar desbalanceado) for **negativo**, então a rotação é **esquerda**



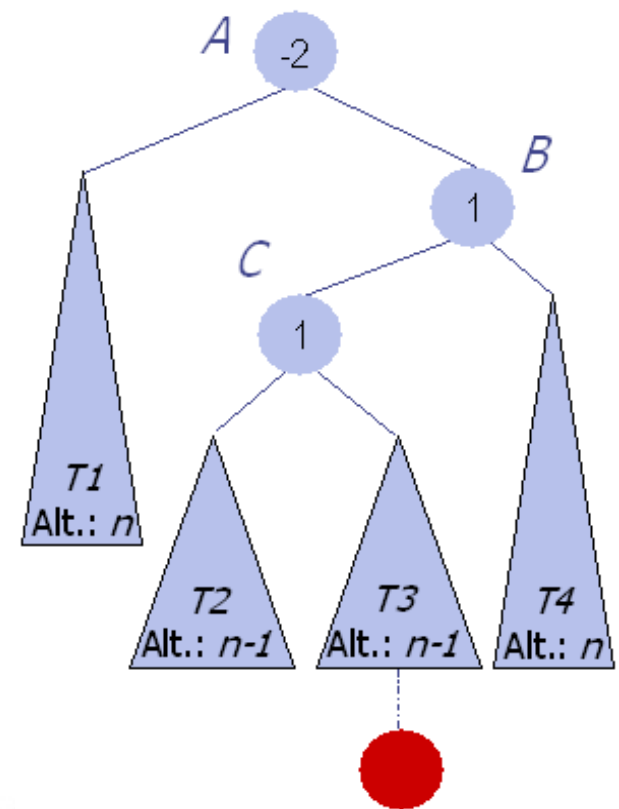
Como decidir qual rotação usar?

- Se o sinal do nó A e do nó B forem **diferentes** então a **rotação é dupla**
- Se o fator de balanceamento nó A (nó mais jovem a se tornar desbalanceado) **for positivo**, então a rotação é **esquerda/direita**



Como decidir qual rotação usar?

- Se o sinal do nó A e do nó B forem **diferentes** então a rotação é dupla
- Se o fator de balanceamento nó A (nó mais jovem a se tornar desbalanceado) for **negativo**, então a rotação é **direita/esquerda**



Implementação