Escola de Artes, Ciências e Humanidades

4ª Lista de Matrizes Vetores e Geometria Analítica

Sistemas de Informação

EACH – USP

1ª Questão. Encontre o polinômio característico, os autovalores e os autovetores de cada matriz:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2ª Questão.

a. Seja λ um autovalor fixo de $A = (a_{ij})_{nxn}$. Mostre que o conjunto formado por todos os autovetores de A associados a λ, juntamente com o vetor nulo, é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Este subespaço é chamado de *autoespaço associado a* λ.
b. Determine uma base para os autoespaços associados a cada autovalor das seguintes matrizes:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3ª Questão. Se possível, encontre para cada matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$, uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4ª Questão. Prove as seguintes afirmações para uma matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$:

a. Se A é uma matriz triangular superior, então os autovalores de A são os elementos da sua diagonal principal.
b. A e A^t possuem os mesmos autovalores.
c. Se λ é um autovalor de uma matriz invertível A com autovetor associado X, então $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1} com autovetor associado X.
d. Se A é diagonalizável por uma matriz ortogonal (isto é, existem P ortogonal e D diagonal tal que $D = P^t AP$), então A é uma matriz simétrica.

Escola de Artes, Ciências e Humanidades

5ª Questão.

a) Verifique se a matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é ortogonal.

b) Mostre que $X = (x, y)$ é ortogonal a $Y = (a, b) \neq (0,0)$ com $\|X\| = \|Y\|$, se e somente se $X = (-b, a)$ ou $X = (b, -a)$.

6ª Questão. Diagonalize cada matriz por meio de uma matriz ortogonal.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

7ª Questão. Identificar a cônica, achar a equação no último sistema de coordenadas utilizado e fazer um esboço do gráfico.

a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 30$

b) $3x^2 - 8xy - 12y^2 + 81 = 0$

c) $2x^2 - 4xy - y^2 = -24$

d) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$

Respostas: Use o Mathematica.