ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (1/2012)

Primeira Prova – Abril/2012

Nome: ______________________________ Nº USP: __________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Observação 1: Duração da prova: **100** (**cem**) minutos.
Observação 2: O uso de calculadora/computador na prova é proibido.

1) [3,0 pontos] Uma fábrica de brinquedos recebeu um pedido de monociclos, bicicletas e triciclos. Nesta fábrica, todos estes brinquedos são montados com o mesmo tipo/tamanho de pneu. O número total de brinquedos requisitados é 40, e a fábrica tem a disposição um estoque de 90 pneus. Determinar todas as combinações possíveis do número de cada um dos três brinquedos mencionados de forma a aproveitar todos os pneus do estoque.

---

1) Denotando por m, b e t, respectivamente, o número de monociclos, bicicletas e triciclos, as informações acima podem ser representadas pelo sistema linear

$$\begin{cases} m+b+t &= 40 \\ m+2b+3t &= 90 \end{cases},$$

sujeita aos vínculos $0 \leq m, b, t \leq 40$. A primeira equação corresponde ao número total de brinquedos, ao passo que a segunda indica o número total de pneus. Como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 2 & 3 & 90 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-1) \\ \longleftarrow (+) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longleftarrow (+) \\ \times(-1) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \end{array}\right),$$

o sistema pode ser reescrito como $Ax = b$, onde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -10 \\ 50 \end{pmatrix} \quad \text{e } x \text{ a solução geral do problema.}$$

Uma solução particular x_p do problema pode ser obtida impondo $t = 0$, implicando $x_p = \begin{pmatrix} -10 & 50 & 0 \end{pmatrix}^T$. Esta solução, embora satisfaça $Ax_p = b$, **não** é realística (número negativo de monociclos), mas este ponto será consertado mais adiante.

A solução geral do problema é dada por $x = x_p + x_k$, onde $\{x_k\}$ gera o kernel de A ($Ax_k = 0$). Logo, denotando $x_k = \begin{pmatrix} \mu & \beta & \tau \end{pmatrix}^T$,

$$Ax_k = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \beta \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mu - \tau &= 0 \\ \beta + 2\tau &= 0 \end{cases} \Rightarrow \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \tau \\ -2\tau \\ \tau \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\}.$$

A solução geral do sistema $Ax = b$ é dada por

$$x = x_p + x_k = \begin{pmatrix} -10 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Contudo, para obter soluções realísticas e que obedeçam às condições impostas pelo problema (número de brinquedos como inteiros não-negativos e menores que 40[1]), o valor de τ deve percorrer um subconjunto da reta real, que é o intervalo dos inteiros entre 10 e 25, ou $[10, 25] \subset \mathbb{Z}$. De forma mais explícita, tem-se

Monociclo(s)	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
Bicicleta(s)	30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	08	06	04	02	00
Triciclo(s)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
τ	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Tabela 1: Quantidade de monociclo(s), bibicleta(s) e triciclo(s) que satisfazem as condições exigidas.

[1] No caso, especificar $m, b, t \geq 0$ implica $m, b, t \leq 40$.

2) Miscelânea.

a) [2,5 pontos] Estudar a solução de $Ax = b$, onde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R})\,.$$

b) [0,5 ponto] Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear com $T(1,2) = (1,1)$ e $T(2,1) = (1,2)$. Determinar $T(x,y)$. **Hint:** Notar que $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ e perceber que tanto a base canônica quanto a base $B := \{(1,2),(1,1)\}$ geram $\mathbb{R}^2$.

2a) De

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 1 & 2a \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-a) \quad \times(-1) \\ (+) \\ (+) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-a & 3-2a & -a \\ 0 & a-1 & -1 & 2a-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(1) \\ (+) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-a & 3-2a & -a \\ 0 & 0 & 2-2a & a-1 \end{array}\right),$$

divide-se a análise em dois casos. Se $a = 1$, então o sistema adquire a forma

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-a & 3-2a & -a \\ 0 & 0 & 2-2a & a-1 \end{array}\right) \overset{a=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (+) \\ \times(-2) \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Se $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T$, então $\xi + \eta = 3$ e $\mu = -1$. Uma solução particular é (impondo $\eta = 0$) $x_p = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$, ao passo que o kernel de A é dado por (aproveitando o escalonamento acima)

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \xi + \eta = 0 \text{ e } \mu = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ -\xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \xi \in \mathbb{R} \right\} \qquad (a = 1)\,,$$

o que implica o conjunto das soluções (completas) de $Ax = b$ (para $a = 1$) ser

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3+\xi \\ -\xi \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \xi \in \mathbb{R} \right\} \qquad (a = 1)\,.$$

Se, por outro lado, $a \neq 1$, então

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-a & 3-2a & -a \\ 0 & 0 & 2-2a & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(\frac{1}{1-a}) \\ \times(\frac{1}{2-2a}) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3-2a}{1-a} & -\frac{a}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (+) \\ (+) \\ \times(\frac{2a-3}{1-a}) \quad \times(-2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-4a}{2-2a} \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (+) \\ \times(-1) \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2-2a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3-4a}{2-2a} \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right),$$

e tem-se uma solução única, que é $\begin{pmatrix} \frac{1}{2-a} & \frac{3-4a}{2-2a} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T$.

Reunindo os resultados acima,

$$\text{Solução:} \begin{cases} a = 1 & : \quad \left\{ \begin{pmatrix} 3+\xi \\ -\xi \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \xi \in \mathbb{R} \right\} \\ \\ a \neq 1 & : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2-2a} \\ \frac{3-4a}{2-2a} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

2b) A relação entre a base canônica $\{(1,0),(0,1)\}$ e a base $B = \{(1,2),(2,1)\}$ pode ser encontrada por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (1,0) & = & \alpha(1,2)+\beta(2,1) \\ (0,1) & = & \gamma(1,2)+\delta(2,1) \end{array} \right. \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}\,, \beta = \frac{2}{3}\,, \gamma = \frac{2}{3} \text{ e } \delta = -\frac{1}{3}\,.$$

Como $(x,y) = x(1,0)+y(0,1)$, então, pela linearidade de T, tem-se

$$\begin{aligned} T(x,y) &= xT(1,0)+yT(0,1) = xT\left[-\frac{1}{3}(1,2)+\frac{2}{3}(2,1)\right] + yT\left[\frac{2}{3}(1,2)-\frac{1}{3}(2,1)\right] \\ &= -\frac{x}{3}T(1,2)+\frac{2x}{3}T(2,1)+\frac{2y}{3}T(1,2)-\frac{y}{3}T(2,1) \\ &= -\frac{x}{3}(1,1)+\frac{2x}{3}(1,2)+\frac{2y}{3}(1,1)-\frac{y}{3}(1,2) \\ &= \left(\frac{x}{3}+\frac{y}{3}, x\right)\,. \end{aligned}$$

---

3) Sabe-se que uma dada função $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,.$$

a) [1,0 ponto] Mostrar que se uma função g integrável em $(-\pi,\pi)$ for par, então $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(x)\,dx$. Mostrar, também, que se g for ímpar, tem-se $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = 0$.
b) [2,0 pontos] Determinar a_0, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ "em função de f". Assumir todas as propriedades "convenientes" para f (f seccionalmente diferenciável, *et cætera*).
c) [1,0 ponto] Expressar f em sua série de Fourier se $f(x) = x$.

3a) Se g for par em $(-\pi,\pi)$, então $g(x) = g(-x)$, $x \in (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}$. Logo,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{0} g(x)\,dx}_{\substack{x=-y \\ dx=-dy}} + \int_0^{\pi} g(x)\,dx = \int_0^{\pi} \underbrace{g(-y)}_{=g(y)}\,dy + \int_0^{\pi} g(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(x)\,dx\,.$$

Se g for ímpar em $(-\pi,\pi)$, então $g(x) = -g(-x)$, $x \in (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx &= \underbrace{\int_{-\pi}^{0} g(x)\,dx}_{\substack{x=-y \\ dx=-dy}} + \int_0^{\pi} g(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} \underbrace{g(-y)}_{=-g(y)}\,(-dy) + \int_0^{\pi} g(x)\,dx = -\int_0^{\pi} g(y)\,dy + \int_0^{\pi} g(x)\,dx \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

3b) Inicialmente, sabe-se que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos(nx)\cos(mx) & = & \dfrac{1}{2}\Big[\cos\left[(n+m)x\right] + \cos\left[(n-m)x\right]\Big] \\ \sin(nx)\sin(mx) & = & \dfrac{1}{2}\Big[\cos\left[(n-m)x\right] - \cos\left[(n+m)x\right]\Big] \\ \sin(nx)\cos(mx) & = & \dfrac{1}{2}\Big[\sin\left[(n+m)x\right] + \sin\left[(n-m)x\right]\Big] \end{array} \right. .$$

Para $n, m \geq 1$ e $n = m$, tem-se

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos(nx)\cos(mx) & = & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos^2(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \left[\frac{1+\cos(2nx)}{2}\right] = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2nx)}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \\[3ex]
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx)\sin(mx) & = & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin^2(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \left[\frac{1-\cos(2nx)}{2}\right] = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \\[3ex]
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx)\cos(mx) & = & 0
\end{array}\right. ,$$

onde a última integral é nula por se tratar de uma função ímpar ($\sin(nx)\cos(mx) = -\sin(-nx)\cos(-nx)$) integrada em um intervalo simétrico em relação à origem.

Para $n, m \geq 1$ e $n \neq m$, tem-se

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos(nx)\cos(mx) & = & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{1}{2}\Big[\cos\left[(n+m)x\right] + \cos\left[(n-m)x\right]\Big] \\
 & = & \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(n+m)x]}{n+m} + \frac{\sin[(n-m)x]}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\[3ex]
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx)\sin(mx) & = & \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \frac{1}{2}\Big[\cos\left[(n-m)x\right] - \cos\left[(n+m)x\right]\Big] \\
 & = & \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(n-m)x]}{n-m} - \frac{\sin[(n+m)x]}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \\[3ex]
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx)\cos(mx) & = & 0
\end{array}\right. ,$$

onde a última integral é nula por se tratar de uma função ímpar ($\sin(nx)\cos(mx) = -\sin(-nx)\cos(-nx)$) integrada em um intervalo simétrico em relação à origem.

Em suma,

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \cos(nx)\cos(mx) & = & \pi\delta_{n,m} \\[3ex]
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx)\sin(mx) & = & \pi\delta_{n,m} \\[3ex]
\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dx\, \sin(nx)\cos(mx) & = & 0
\end{array}\right. ,$$

onde símbolo $\delta_{n,m}$ é o delta de Kronecker: $\delta_{n,m} = 1$ para $n = m$ e $\delta_{n,m} = 0$ se $n \neq m$.

Integrando a série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

de $-\pi$ a π (produto interno de cada um dos termos com 1), obtém-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\, dx}_{\pi a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\,,$$

visto que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = \left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = -\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

para $n \geq 1$.

De forma análoga, multiplicando a série de Fourier por $\cos(mx)$ e integrando em $(-\pi,\pi)$, chega-se a (invocando os resultados das integrais acima)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx &= \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos(mx)\,dx}^{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx}^{=\pi\delta_{n,m}} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx}^{=0} \\
&= \pi a_m\,,
\end{aligned}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n\in\mathbb{N})\,.$$

De forma análoga, multiplicando a série de Fourier por $\sin(mx)$ e integrando em $(-\pi,\pi)$, chega-se a (invocando os resultados das integrais acima)

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx &= \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin(mx)\,dx}^{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,dx}^{=0} + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx}^{=\pi\delta_{n,m}} \\
&= \pi b_m\,,
\end{aligned}$$

donde

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n\in\mathbb{N})\,.$$

Reunindo os resultados acima, tem-se

$$\left\{\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n\in\mathbb{N}) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n\in\mathbb{N})
\end{aligned}\right. .$$

3c) Notando que no intervalo $(-\pi,\pi)$ a função

$$\left\{\begin{array}{lcll}
f(x) &=& x = -(-x) = -f(-x) & \text{é ímpar} \\
f(x)\cos(nx) &=& x\cos(nx) = -(-x)\cos[n(-x)] = -f(-x)\cos[n(-x)] & \text{é ímpar} \\
f(x)\sin(nx) &=& x\sin(nx) = (-x)\sin[n(-x)] = f(-x)\sin[n(-x)] & \text{é par}
\end{array}\right.$$

para $n\in\mathbb{N}$, tem-se (usando os resultados do exercício (3a))

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

e

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \underbrace{x}_{\substack{u=x\\ du=dx}}\ \underbrace{\sin(nx)\,dx}_{\substack{dv=\sin(nx)\,dx\\ v=-\frac{\cos(nx)}{n}}} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]dx}_{=-\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi}=0} = -\frac{2\cos(n\pi)}{n} = \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$(f(x) =)x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)\,.$$