UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL – UCS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA – CCET
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA – DEIN
PROFA. MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Respostas da Lista de Exercícios 7

1. Use indução matemática para provar que as proposições dadas são verdadeiras para todo inteiro positivo n.

a) $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2) = 2n^2$

Base de Indução - P(1)

Verifique que a propriedade vale para $n = 1$: $2 = 2(1)^2$

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para $n = k$: $2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) = 2k^2$

Passo de Indução - P(*k* + 1)

Prove que a propriedade vale para $n = k + 1$: $2 + 6 + 10 + ... + [4(k+1) - 2] = 2(k+1)^2$

$$P(k+1) = 2 + 6 + 10 + ... + [4(k+1) - 2] =$$
$$2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) + [4(k+1) - 2] \overset{HI}{=}$$
$$2k^2 + [4(k+1) - 2] =$$
$$2k^2 + 4k + 4 - 2 =$$
$$2k^2 + 4k + 2 =$$
$$2(k^2 + 2k + 1) =$$
$$2(k+1)^2$$

b) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$

Base de Indução - P(1)

Verifique que a propriedade vale para $n = 1$: $2 = 1(1+1)$

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para $n = k$: $2 + 4 + 6 + ... + 2k = k(k+1)$

Passo de Indução - P(*k* + 1)

Prove que a propriedade vale para $n = k + 1$: $2 + 4 + 6 + ... + 2(k+1) = (k+1)[(k+1)+1]$

$$P(k+1) = 2 + 4 + 6 + ... + 2(k+1) =$$
$$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1) \overset{HI}{=}$$
$$k(k+1) + 2(k+1) =$$
$$(k+1)(k+2) =$$
$$(k+1)[(k+1)+1]$$

c) 1 + 5 + 9 + ... + $(4n-3) = n(2n-1)$

Base de Indução - P(1)

Verifique que a propriedade vale para *n* = 1: 1 = 1(2.1-1)

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para *n* = *k*: 1 + 5 + 9 + ... + $(4k-3) = k(2k-1)$

Passo de Indução - P(*k* + 1)

Prove que a propriedade vale para *n* = *k* + 1: 1 + 5 + 9 + ... + $[4(k+1)-3] = (k+1)[2(k+1)-1]$

$$P(k+1) = 1+5+9+...+[4(k+1)-3] =$$
$$1+5+9+...+(4k-3)+[4(k+1)-3] \overset{HI}{=}$$
$$k(2k-1)+[4(k+1)-3] =$$
$$2k^2-k+4k+1 =$$
$$2k^2+3k+1 =$$
$$(k+1)(2k+1) =$$
$$(k+1)[2(k+1)-1]$$

d) 1 + 3 + 6 + ... + $\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Base de Indução - P(1)

Verifique que a propriedade vale para *n* = 1: 1 = $\dfrac{1(1+1)(1+2)}{6}$

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para *n* = *k*: 1 + 3 + 6 + ... + $\dfrac{k(k+1)}{2} = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$

Passo de Indução - P(*k* + 1)

Prove que a propriedade vale para *n* = *k* + 1: 1 + 3 + 6 + ... + $\dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \dfrac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}$

$$P(k+1)=1+3+6+...+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=$$

$$1+3+6+...+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\overset{HI}{=}$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=$$

$$\frac{k+1}{6}[k(k+2)+3(k+1+1)]=$$

$$\frac{k+1}{6}(k^2+2k+3k+6)=$$

$$\frac{k+1}{6}(k^2+5k+6)=$$

$$\frac{k+1}{6}(k+2)(k+3)=$$

$$\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{6}$$

e) 4 + 10 + 16 + ... + $(6n-2)=n(3n+1)$

Base de Indução - P(1)

Verifique que a propriedade vale para n = 1: 4 = 1(3.1 + 1)

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para n = k: 4 + 10 + 16 + ... + $(6k-2)=k(3k+1)$

Passo de Indução - P(k + 1)

Prove que a propriedade vale para n = k + 1: 4 + 10 + 16 + ... + $[6(k+1)-2]=(k+1)[3(k+1)+1]$

$$P(k+1)=4+10+16+...+[6(k+1)-2]=$$

$$4+10+16+...+(6k-2)+[6(k+1)-2]\overset{HI}{=}$$

$$k(3k+1)+[6(k+1)-2]=$$

$$3k^2+k+6k+6-2=$$

$$3k^2+7k+4=$$

$$(k+1)(3k+4)=$$

$$(k+1)(3k+3+1)=$$

$$(k+1)[3(k+1)+1]$$

f) $1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

Base de Indução - P(1)

Verifique que a propriedade vale para n = 1: $1^2=\frac{1(2.1-1)(2.1+1)}{3}$

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para $n = k$: $1^2 + 3^2 + ... + (2k - 1)^2 = \dfrac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$

Passo de Indução - P(k + 1)

Prove que a propriedade vale para $n = k + 1$: $4 + 10 + 16 + ... + [2(k+1)-1]^2 = \dfrac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$

$$P(k+1) = 4+10+16+...+[2(k+1)-1]^2 =$$

$$4+10+16+...+(2k-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 \overset{HI}{=}$$

$$\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + [2(k+1)-1]^2 =$$

$$(2k+1)\left[\frac{k(2k-1)}{3} + (2k+1)\right] =$$

$$(2k+1)\left(\frac{2k^2 - k + 6k + 3}{3}\right) =$$

$$(2k+1)\left(\frac{2k^2 + 5k + 3}{3}\right) =$$

$$\frac{(2k+1)(2k+3)(k+1)}{3} =$$

$$\frac{(k+1)[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}{3}$$

2. Prove que $n^2 > n+1$ *para* $n \geq 2$.

Base de Indução - P(2)

Verifique que a propriedade vale para $n = 2$: $2^2 > 2 + 1$

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para $n = k$: $k^2 > k+1, k \geq 2$

Passo de Indução - P(k + 1)

Prove que a propriedade vale para $n = k + 1$: $(k+1)^2 > (k+1)+1$

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \overset{HI}{>} k+1+2k+1 = 3k+1+1 > (k+1)+1$$

3. Prove que $2^n < n!$ *para* $n \geq 4$.

Base de Indução - P(4)

Verifique que a propriedade vale para $n = 4$: $2^4 < 4!$

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para $n = k$: $2^k < k!, k \geq 4$

Passo de Indução - P(k + 1)
Prove que a propriedade vale para n = k + 1: $2^{k+1} < (k+1)!$

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \overset{HI}{<} 2 \cdot k! \overset{pois K \geq 4}{<} (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

4. Prove que $2^{3n} - 1$ *é divisível por 7, para qualquer inteiro positivo n.*
Base de Indução - P(1)
Verifique que a propriedade vale para n = 1: $2^{3.1}$-1 = 8-1 = 7 é divisível por 7

Hipótese de Indução - P(k)
Suponha que a propriedade vale para n = k: $2^{3k} - 1$ é divisível por 7, ou seja:
$2^{3k} - 1 = 7m$, para algum inteiro m
Podemos reescrever como: $2^{3k} = 7m + 1$

Passo de Indução - P(k + 1)
Prove que a propriedade vale para n = k + 1: $2^{3(k+1)} - 1$ é divisível por 7, ou seja, que $2^{3(k+1)} - 1 = 7m$

$$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k+3} - 1 = 2^{3k} \cdot 2^3 - 1 \overset{HI}{=} [(7m+1) \cdot 8] - 1 = 7 \cdot 8m + 8 - 1 = 7 \cdot 8m + 7 = 7(8m+1)$$

5. Escreva os cinco primeiros valores das seguintes seqüências:
a) 10, 20, 30, 40, 50
b) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$
c) 1, 5, 13, 29, 54
d) $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ ou $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}$
e) 2, 2, 6, 14, 34

6. Prove a propriedade dada dos números de Fibonacci diretamente da definição.
a) F(n + 1) + F(n – 2) = 2F(n) para n ≥ 3
Sabemos, pela definição de seqüência de Fibonacci, que um elemento é igual a soma dos dois elementos anteriores. Logo, podemos escrever que:
F(n + 1) = F(n -1) + F(n) e que
F(n - 2) = F(n) - F(n - 1)
Então, temos que:
F(n + 1) + F(n – 2) = [F(n - 1) + F(n)] + [F(n) - F(n - 1)] =
F(n) + F(n) =
2F(n)

b) F(n) = 5F(n – 4) + 3F(n – 5) para n ≥ 6
Pela definição, podemos escrever que um elemento é igual a soma dos dois elementos anteriores. Então:

F(n) = F(n - 2) + F(n - 1)
F(n - 1) = F(n - 3) + F(n - 2)
F(n - 2) = F(n - 4) + F(n - 3)
F(n - 3) = F(n - 5) + F(n - 4)

Logo, partindo do lado esquerdo da igualdade, temos:

$$
\begin{aligned}
F(n) &= F(n-2) + F(n-1) = \\
&[F(n-4) + F(n-3)] + [F(n-3) + F(n-2)] = \\
&F(n-4) + 2F(n-3) + F(n-2) = \\
&F(n-4) + 2[F(n-5) + F(n-4)] + [F(n-4) + F(n-3)] = \\
&F(n-4) + 2F(n-5) + 2F(n-4) + F(n-4) + [F(n-5) + F(n-4)] = \\
&5F(n-4) + 3F(n-5)
\end{aligned}
$$

7. Prove a propriedade dada dos números de Fibonacci para todo $n \geq 1$, através da indução matemática.

a) $F(1) + F(2) + ... + F(n) = F(n + 2) – 1$

Base de Indução - P(1)

Verifique que a propriedade vale para $n = 1$: $F(1) = F(1 + 2) - 1 = F(3) - 1 = 2 - 1 = 1$

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para $n = k$: $F(1) + F(2) + ... + F(k) = F(k + 2) – 1$

Passo de Indução - P(*k* + 1)

Prove que a propriedade vale para $n = k + 1$: $F(1) + F(2) + ... + F(k + 1) = F(k + 3) – 1$

$$
\begin{aligned}
&F(1) + F(2) + ... + F(k + 1) = \\
&F(1) + F(2) + ... + F(k) + F(k + 1) \overset{HI}{=} \\
&F(k + 2) – 1 + F(k + 1) = \\
&[F(k + 1) + F(k + 2)] - 1 = \\
&F(k + 3) - 1
\end{aligned}
$$

b) $F(2) + F(4) + ... + F(2n) = F(2n + 1) – 1$

Base de Indução - P(1)

Verifique que a propriedade vale para $n = 1$: $F(2) = F(2.1 + 1) - 1 = F(3) - 1 = 2 - 1 = 1$

Hipótese de Indução - P(k)

Suponha que a propriedade vale para $n = k$: $F(2) + F(4) + ... + F(2k) = F(2k + 1) – 1$

Passo de Indução - P(*k* + 1)

Prove que a propriedade vale para $n = k + 1$: $F(1) + F(2) + ... + F(2k + 2) = F(2k + 3) –1$

$$
\begin{aligned}
&F(1) + F(2) + ... + F(2k + 2) = \\
&F(1) + F(2) + ... + F(2k) + F(2k + 2) \overset{HI}{=} \\
&F(2k + 1) – 1 + F(2k + 2) = \\
&F(2k + 3) - 1
\end{aligned}
$$