MVGA&Mathematica

Marcone Corrêa Pereira
Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Nesta nota de aula, pretendemos introduzir alguns comandos básicos do programa *Mathematica*, que poderão nos auxiliar na resolução das listas de exercícios de nossa disciplina *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*.
Para isto, considere a seguinte matriz quadrada 4x4:

```
a = {{1, 2, 0, 0}, {2, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 2}, {0, 0, 2, 1}}
MatrixForm[a]
```

```
{{1, 2, 0, 0}, {2, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 2}, {0, 0, 2, 1}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

No *Mathematica*, as matrizes devem ser digitadas como uma lista de vetores linhas ordenados, de acordo com notação utilizada neste exemplo.
Com o comando *MatrixForm* podemos visualisar a lista *a* na forma matricial.
<u>Atenção</u>: Os comandos são executados através da tecla *enter* ou quando precionamos as teclas *shift+return.*
Quando digitamos a entrada I*n[1]*, utilizamos basicamente dois comandos:
1° definimos a matriz *a*.
2° digitamos o comando *MatrixForm*.
Estes comandos devem ser separados por *Return* ou digitados em entradas diferentes como abaixo:

```
a = {{1, 2, 0, 0}, {2, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 2}, {0, 0, 2, 1}}
```

```
{{1, 2, 0, 0}, {2, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 2}, {0, 0, 2, 1}}
```

```
MatrixForm[a]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular o determinante e a inversa de uma matriz quadrada através dos comandos *Det[ ]* e *Inverse[ ]*:

```
adet = Det[a]
ainversa = Inverse[a]
```

9

$$\left\{\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right\}, \left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{0, 0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

As vezes é conveniente denotarmos os objetos de interesse para a realização de futuros cálculos. Abaixo utilizamos o símbolo *%* para nos referirmos à última saída. Neste caso, a última saída é a inversa da matriz *a* que também pode ser visualizada na forma matricial.

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Observe que podemos obter o mesmo resultado através do nome atribuído a este objeto:

```
MatrixForm[ainversa]
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Através dos comandos *Eigenvalues[ ]* podemos calcular os autovalores de uma matriz quadrada e através do comando *Eigenvectors[ ]* os autovetores linearmente independentes.

```
avalores = Eigenvalues[a]
avetores = Eigenvectors[a]

{-1, -1, 3, 3}
{{0, 0, -1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}, {1, 1, 0, 0}}
```

Cuidado ao interpretar os resultados obtidos pelo programa. A saída do comando *Eigenvalues[a]* é uma lista de quatro números reais, que são os autovalores da matriz *a.* Já a saída do comando *Eigenvectors[a]* é uma lista de quatro vetores, os autovetores da matriz *a.*
A ordem dos autovalores e autovetores é importante. O i-ésimo autovalor está associado ao i-ésimo autovetor.
Vamos verificar isto?
Para tanto, multiplicaremos a matriz *a* pelos seus autovetores, utilizando o comando '.', e multiplicaremos os autovalores pelos seus autovetores associados.

```
{a . avetores[[1]], a . avetores[[2]], a . avetores[[3]], a . avetores[[4]]}
{{0, 0, 1, -1}, {1, -1, 0, 0}, {0, 0, 3, 3}, {3, 3, 0, 0}}
```

```
{avalores[[1]] * avetores[[1]], avalores[[2]] * avetores[[2]], avalores[[3]] * avetores[[3]],
 avalores[[4]] * avetores[[4]]}
{{0, 0, 1, -1}, {1, -1, 0, 0}, {0, 0, 3, 3}, {3, 3, 0, 0}}
```

O comando * representa a multiplicação de um vetor por um escalar. Também é utilizada para

realizar a multiplicação entre escalares reais ou complexos.
O comando *[[i]]* digitado imediatamente depois do nome da lista, seleciona o i-ésimo elemento da lista correspondente. Por exemplo, *avetores[[3]]* seleciona o terceiro elemente da lista *avetores*.
Como esperado, temos que os resultados são iguais.
Existe um comando no *Mathematica* que calcula os autovalores e autovetores de uma só vez.
Eigensystem[m] encontra uma lista *{valores, vetores}* contendo os autovalores e autovetores da matriz *m*.

```
Eigensystem[a]
```

```
{{-1, -1, 3, 3}, {{0, 0, -1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}, {1, 1, 0, 0}}}
```

```
(* Os autovalores estão na primeira lista *)
Eigensystem[a][[1]]
```

```
{-1, -1, 3, 3}
```

```
(* Os autovetores estão na segunda lista *)
Eigensystem[a][[2]]
```

```
{{0, 0, -1, 1}, {-1, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 1}, {1, 1, 0, 0}}
```

Note que a matriz *a* é simétrica, logo diagonalizável. Isto também pode ser verificado pelo fato dela possuir quatro autovetores linearmente independentes.
Agora, podemos encontrar facilmente a matriz invertível *p* e a matriz diagonal *d* tal que *a=pdp^-1*.
De fato, definimos a matriz *d* através dos autovalores encontrados e definimos a matriz *p* através da transposta da lista *avetores* usando o comando *Transpose[ ]*:

```
p = Transpose[avetores]
MatrixForm[p]
```

```
{{0, -1, 0, 1}, {0, 1, 0, 1}, {-1, 0, 1, 0}, {1, 0, 1, 0}}
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
d = {{-1, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {0, 0, 3, 0}, {0, 0, 0, 3}}
MatrixForm[d]
```

```
{{-1, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {0, 0, 3, 0}, {0, 0, 0, 3}}
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Usando o comando == verificamos nossos cálculos realizados até agora.

```
a == p . d . Inverse[p]
```

```
True
```

Exercício: Ortonormalize os autovetores da matriz *a* usando o *Mathematica* para encontrar uma matriz ortogonal *q* tal que *a=qdq^t***.**