ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2013.2)

Prova – Dezembro/2013

---

1) [3,0 pontos] Determinar a fórmula geral de x_n se $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ ($n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$) com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

---

1) Representa-se, inicialmente, a relação de recorrência em sua forma matricial

$$u_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = M u_{n-1} \,, \quad n \in \{2, 3, \cdots\} \subset \mathbb{N} \,, \quad \text{com} \quad u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Como $u_n = M u_{n-1} = M^2 u_{n-2} = \cdots = M^{n-1} u_1$, deve-se obter M^{n-1}, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det\left(M - \lambda I\right) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2) \,,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}^T$ associado a $\lambda_1 = -1$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_1 I\right) v_1 = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 1 & 0-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = -x_1 \,,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ com a escolha $x_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}^T$ associado a $\lambda_2 = 2$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_2 I\right) v_2 = \begin{pmatrix} 1-(2) & 2 \\ 1 & 0-(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 2y_2 \,,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $y_2 = 1$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e sua inversa } S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) .$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1} M S$, tem-se $M = S \Lambda S^{-1}$, donde

$$M^{n-1} = \left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right)\cdots\left(S\Lambda S^{-1}\right) = S\Lambda^{n-1} S^{-1} \,,$$

que leva a

$$\begin{aligned} u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} &= S\Lambda^{n-1} S^{-1} u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n - (-1)^n \\ 2^{n-1} - (-1)^{n-1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Logo,

$$x_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \qquad n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{Z}_+ .$$

---

2) [2,0 pontos] Estudar o sistema $Ax = b$ (existência de solução(ões), *et cætera*) em relação aos parâmetros $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & \xi \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ \eta \end{pmatrix} .$$

---

2) Denote os elementos da matriz A por (a_{ij}). Notar que $a_{2j} = 2a_{1j}$ se, e somente se, $\xi = 4$. Separar-se-á a análise nos casos $\xi = 4$ e $\xi \neq 4$. Se $\xi = 4$, é imediato que o sistema $Ax = b$ não tem raíz se $\eta \neq 6$. Se, por outro lado, $\eta = 6$, então o sistema linear é composto por uma única equação, $\lambda + \mu + 2\nu = 3$, onde $x = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}^T$. Neste caso, há infinitas raízes, que têm a forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \mu - 2\nu \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\} .$$

Por outro lado, se $\xi \neq 4$, então o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu + 2\nu & = & 3 \\ 2\lambda + 2\mu + \xi\nu & = & \eta \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & \dfrac{3\xi - 2\eta}{\xi - 4} - \mu \\ \nu & = & \dfrac{\eta - 6}{\xi - 4} \end{array} \right. ,$$

donde se tem a raíz da forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\xi - 2\eta}{\xi - 4} - \mu \\ \mu \\ \frac{\eta - 6}{\xi - 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\xi - 2\eta}{\xi - 4} \\ 0 \\ \frac{\eta - 6}{\xi - 4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\} .$$

Organizando as informações acima, tem-se

(i) Caso $\xi = 4$ e $\eta \neq 6$

• Sistema sem solução

(ii) Caso $\xi = 4$ e $\eta = 6$

• Sistema com infinitas soluções e da forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\} .$$

(iii) Caso $\xi \neq 4$ (e $\forall \eta \in \mathbb{R}$)

• Sistema com infinitas soluções e da forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3\xi - 2\eta}{\xi - 4} \\ 0 \\ \frac{\eta - 6}{\xi - 4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\} .$$

---

3) Uma fábrica de brinquedos recebeu um pedido de miniaturas de bicicletas, triciclos e carros (4 pneus). Nesta fábrica, todos estes brinquedos são montados com o mesmo tipo/tamanho de pneu. O número total

de brinquedos requisitados foi 7000, e a fábrica tem a disposição um estoque de 19000 pneus. Formular o problema como um sistema linear "da forma $Ax = b$".

a) [0,5 ponto] Determinar $\mathrm{Im}(A)$ (imagem de A).
b) [0,5 ponto] Determinar $\ker(A)$ (*kernel* de A)
c) [1,0 ponto] Determinar todas as combinações possíveis do número de cada um dos três brinquedos mencionados de forma a aproveitar todos os pneus do estoque.

---

3) Denotando por b, t e c, respectivamente, o número de bicicletas, triciclos e carros, as informações acima podem ser representadas pelo sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b+t+c & = & 7000 \\ 2b+3t+4c & = & 19000 \end{array} \right. \Leftrightarrow Ax = b\,, \quad \text{onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\,,\ x = \begin{pmatrix} b \\ t \\ c \end{pmatrix} \ \text{ e } \ b = \begin{pmatrix} 7000 \\ 19000 \end{pmatrix}\,,$$

sujeita ao vínculo

$$b, t, c \in \Omega := \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 7000\}\,.$$

A primeira equação corresponde ao número total de brinquedos, ao passo que a segunda indica o número total de pneus.

Nota: O exercícios (3a) e (3b) (e somente estes) podem assumir a matriz A fora do contexto da estória. Logo, os números envolvidos serão estendidos ao conjunto dos reais.

3a) Sendo $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) : y = Ax\,, x \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\}$. Com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\,.$$

Os vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ formam uma sequência de vetores linearmente dependente. Com efeito,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

donde se nota que a imagem é gerada pelo conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (as passagens no escalonamento acima foram omitidas por serem evidentes). Finalmente, tem-se

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) : \xi, \eta \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

3b) Sendo $\ker(A) = \{x \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : Ax = 0\}$, com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$0 = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{rcl} \xi + \eta + \mu & = & 0 \\ 2\xi + 3\eta + 4\mu & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \eta & = & -2\xi \\ \mu & = & \xi \end{array} \right.\,.$$

Logo, como $\begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T = \xi \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$\ker(A) = \left\{ \xi \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \xi \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

3c) Após um escalonamento simples, o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ t \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 5000 \end{pmatrix} .$$

Uma solução particular x_p do problema pode ser obtida impondo $c = 0$, implicando $x_p = \begin{pmatrix} 2000 & 5000 & 0 \end{pmatrix}^T$.

A solução geral do problema é dada por $x = x_p + x_k$, onde $\{x_k\}$ gera o kernel de A ($Ax_k = 0$). Logo, do exercício 3b (e fazendo as devidas mudanças), chega-se à solução geral do sistema $Ax = b$, que é dada por

$$x = x_p + x_k = \begin{pmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \xi \in \mathbb{Z} .$$

Contudo, para obter soluções realísticas e que obedeçam às condições impostas pelo problema (número de brinquedos como inteiros não-negativos (e menores que 7000 – embora esta condição seja automaticamente satisfeita com a não-negatividade dos números de brinquedos), o valor de ξ deve percorrer um subconjunto da reta real, que é o intervalo dos inteiros entre 0 e 2500, ou $[0, 2500] \subset \mathbb{Z}$:

$$x = \begin{pmatrix} 2000 \\ 5000 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \xi \in [0, 2500] \subset \mathbb{Z} .$$

---

4) [3,0 pontos] Determinar a equação vetorial da reta t (há, talvez, mais de uma possibilidade), onde as seguintes propriedades são verificadas:
- t pertence ao plano σ_2.
- A reta r é paralela a t e a distância entre as duas é 1.
- A reta r é intersecção de $\sigma_1 : X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, 1, 0)$ e $\sigma_2 : x + y + z - 1 = 0$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

---

4) O problema será resolvido em duas etapas: (i) determinação de uma equação para a reta r e (ii) determinação de uma equação para a reta t.

(i) Equação da reta r.

A equação geral de σ_1 é dada por

$$\det \begin{pmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -x + y + z - 1 = 0 ;$$

desta forma, nota-se que os pontos $P = (0, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 0)$ pertencem a σ_1 e σ_2. Consequentemente, a equação de r pode ser dada por

$$r : X = P + \lambda\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1) + \lambda(0, 1, -1) , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

(i) Equação da reta t.

Como a reta t é paralela à r, sua equação deve ser da forma

$$t : X = A + \mu(0, 1, -1) , \quad \mu \in \mathbb{R} ,$$

onde resta encontrar o(s) candidato(s) para o ponto A. Considere, agora, uma reta auxiliar, u, que passa por r e t e que seja ortogonal e concorrente às duas (tal reta existe por $r \parallel t$). Naturalmente, $u \in \sigma_2$. Seja $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ um vetor diretor de u. Fabrica-se u de sorte que $P \in u$; logo,

$$u : X = (0, 0, 1) + \lambda\vec{v} .$$

Como $\vec{v}$ deve ser ortogonal a $(0,1,-1)$ (que é um vetor diretor de r e t), deve-se ter

$$\vec{v}\cdot(0,-1,1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\cdot 0+\beta\cdot(-1)+\gamma\cdot 1=0 \quad \text{ou} \quad \beta=\gamma\,.$$

Em outros termos, $\vec{v}=(\alpha,\beta,\beta)$ e $u: X=(0,0,1)+\lambda(\alpha,\beta,\beta)$. Existem infinitos vetores ortogonais a r, mas deve-se escolher um que pertença ao plano σ_2. Se $u\in\sigma_2$, deve-se ter $\alpha=-2\beta$ (resultado obtido a partir da equação $\sigma_2: x+y+z-1=0$), donde

$$u: X=(0,0,1)+\lambda(-2,1,1)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Notar que $u\cap r=P=\{(0,0,1)\}$, quando $\lambda=0$. Se $u\cap t$ ocorre no ponto A quando $\lambda=a$ (e $u\cap t=\{(-2a,a,a+1)\}$), a distância entre P e A deve ser 1:

$$\|A-P\|=1 \quad\Rightarrow\quad (-2a-0)^2+(a-0)^2+(a+1-1)^2=1\,,$$

donde $a=\frac{1}{\sqrt{6}}$ ou $a=-\frac{1}{\sqrt{6}}$. Logo, $A=(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},1+\frac{1}{\sqrt{6}})$ ou $A=(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},1-\frac{1}{\sqrt{6}})$.

Desta forma, tem-se

$$t: X=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},1+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\lambda(0,1,-1) \quad \text{ou} \quad t: X=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},1-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\lambda(0,1,-1)\,.$$

Dada a reta r no plano σ_2, há duas possibilidades para uma reta paralela, pertencente no mesmo plano e a uma distância 1.