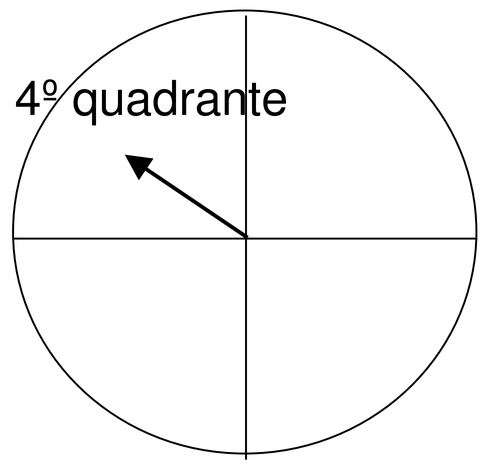
Estatística

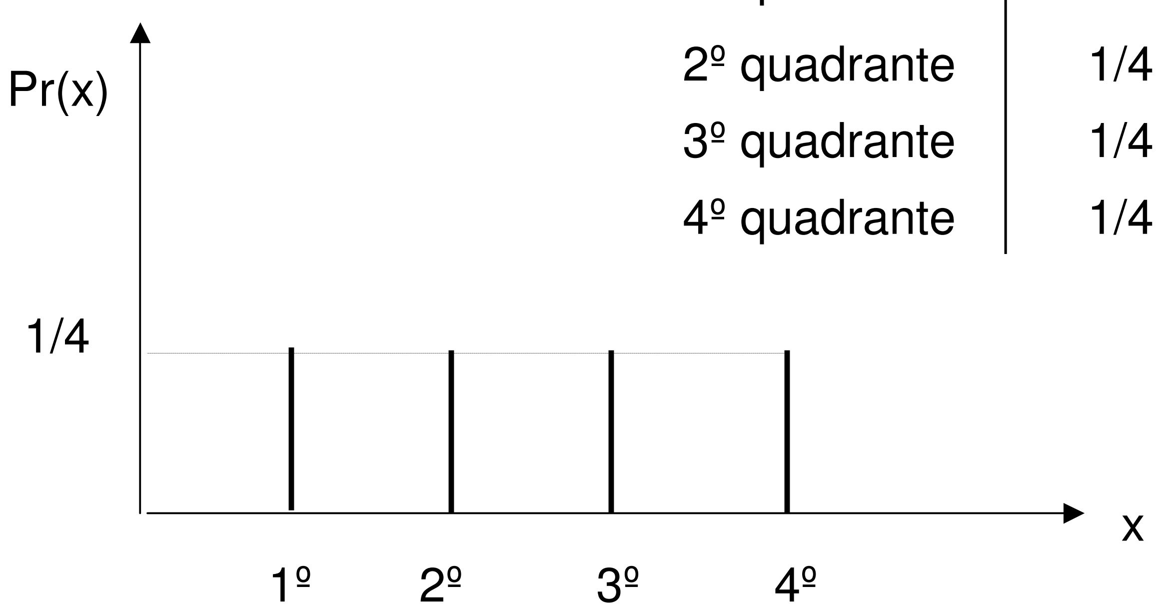
4 - Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Experimento do disco



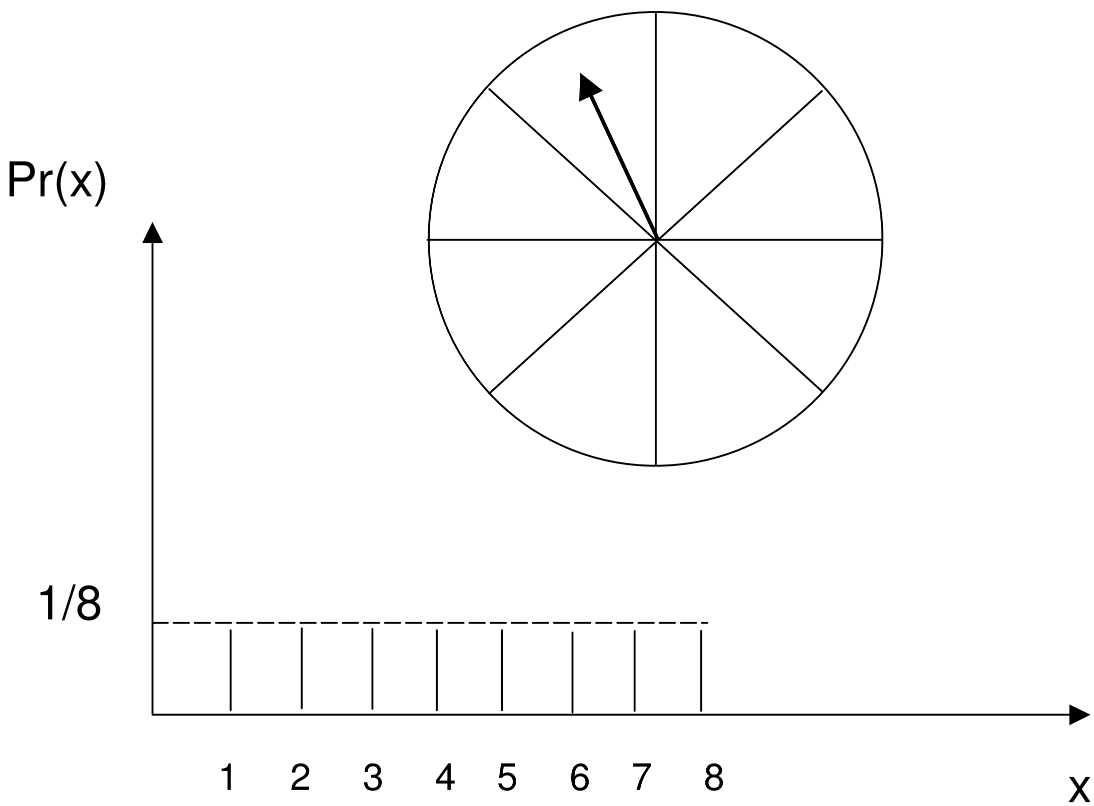
EXPERIMENTO: Girar o ponteiro de um disco na horizontal dividido em 4 quadrantes.
Resultados (V.A.discreta): quadrante em que o ponteiro para

x	Pr(x)
1º quadrante	1/4
2º quadrante	1/4
3º quadrante	1/4
4º quadrante	1/4



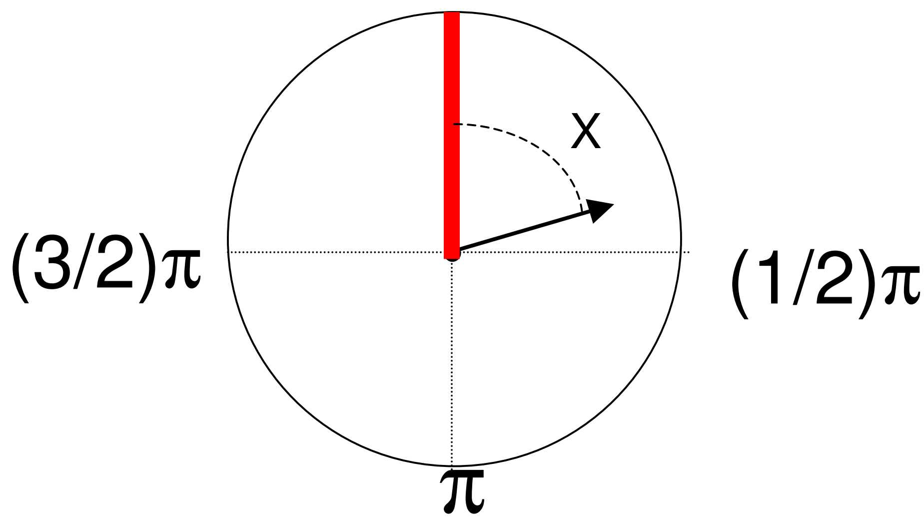
Experimento do disco

EXPERIMENTO: Girar o ponteiro de um disco na horizontal dividido em 8 segmentos.
Resultados (V.A.discreta): segmento em que o ponteiro para

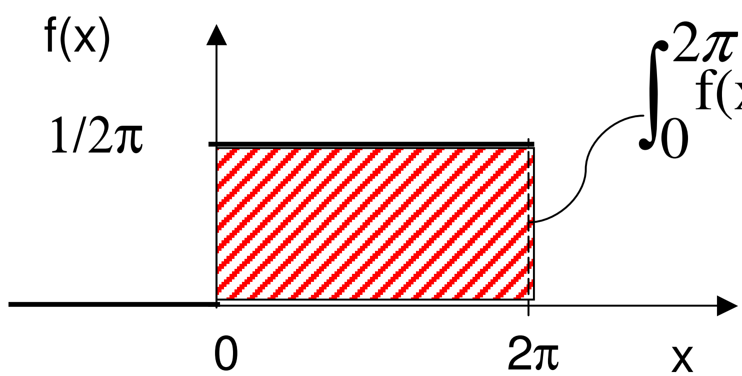


Experimento do disco

EXPERIMENTO: ponteiro girando num disco na horizontal (com uma marca de referência) .



Resultados (V.A.contínua): ângulo X de parada do ponteiro em relação a marca de referência.



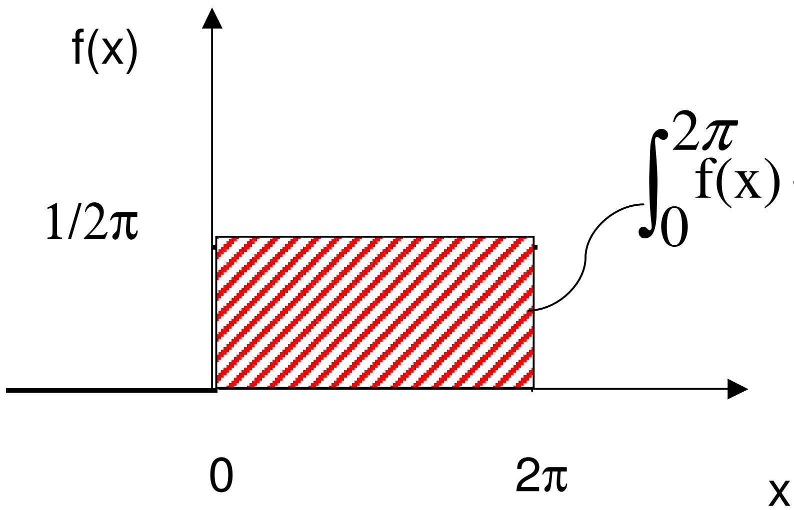
$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot dx = 1$$

f(x): função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1/2\pi & , \quad 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & , \quad x > 2\pi \end{cases}$$

Propriedades de uma v.a.c.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1/2\pi & , \quad 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & , \quad x > 2\pi \end{cases}$$



$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot dx = 1$$

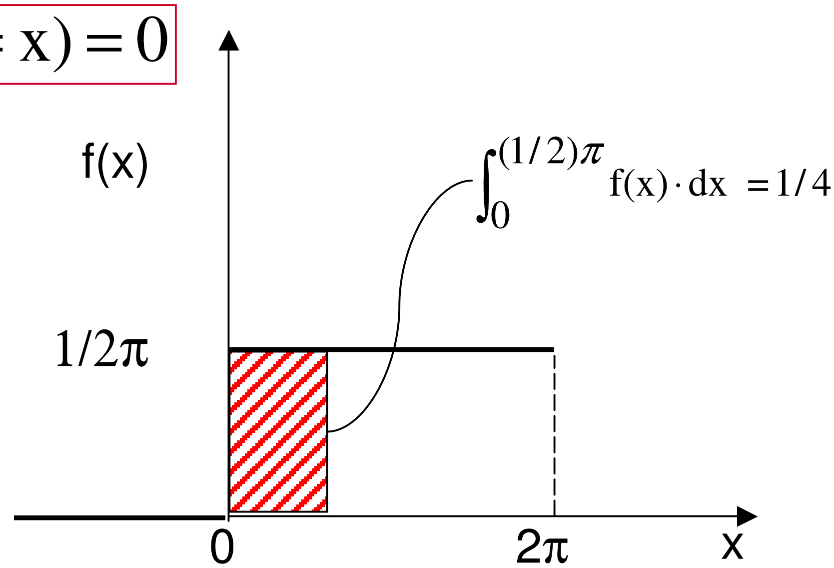
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, dx = \left[\frac{1}{2\pi}x\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1$$

Probabilidades

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1/2\pi & , \quad 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & , \quad x > 2\pi \end{cases}$$

$$\boxed{\Pr(X = x) = 0}$$

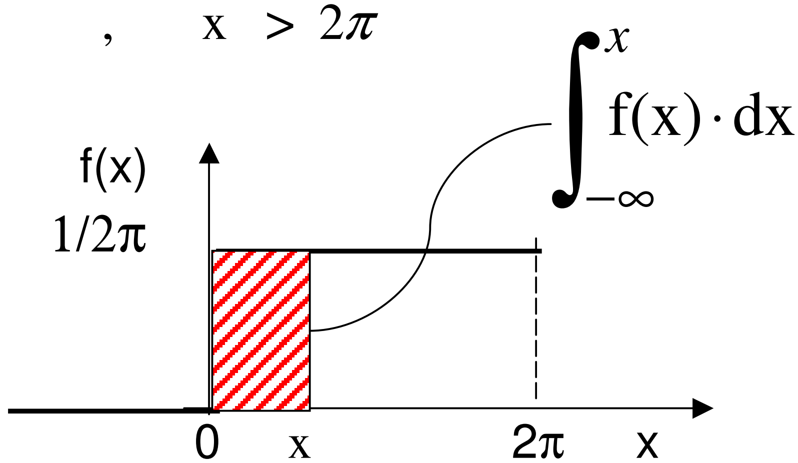


$$\Pr(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad , b > a$$

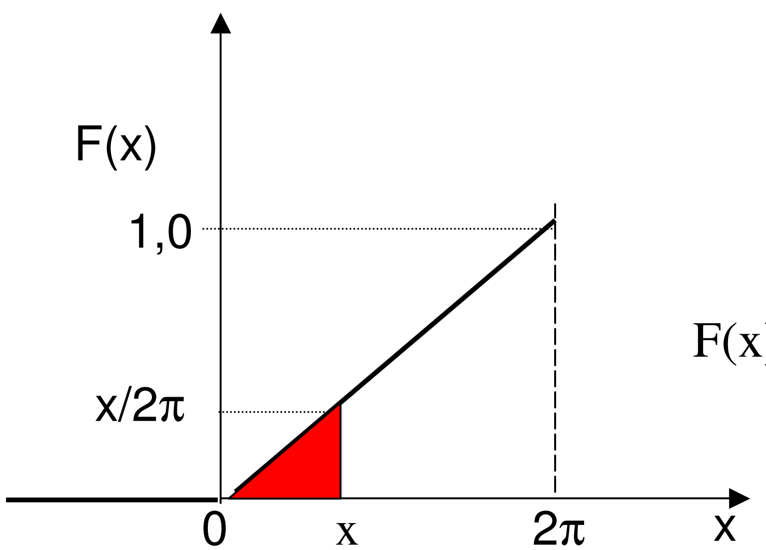
$$\Pr(0 \leq X < \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\pi} \cdot dx = \left[\frac{1}{2\pi} x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

Função Distribuição Acumulada

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1/2\pi & , \quad 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & , \quad x > 2\pi \end{cases}$$



$$F(x) = \Pr[0 < X < x] = \int_0^x \frac{1}{2\pi} \cdot dx = \left[\frac{1}{2\pi} x\right]_0^x = \frac{x}{2\pi}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x/2\pi & , \quad 0 \le x \le 2\pi \\ 1 & , \quad x > 2\pi \end{cases}$$

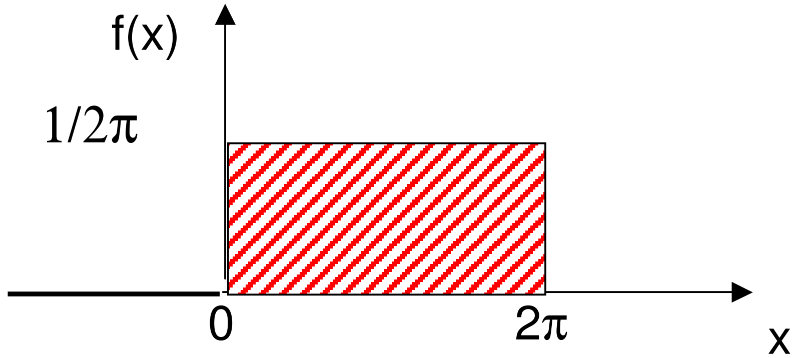
Parâmetro de posição - Média

$$\mu = \mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{x_i} \cdot P(x_i) \qquad \text{(v.a.d.)}$$

$$\mu = \mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{x} \cdot \mathrm{f(x)dx} \qquad \text{(v.a.c.)}$$

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 0 & , \quad \mathrm{x} < 0 \\ 1/2\pi & , \quad 0 \le \mathrm{x} \le 2\pi \\ 0 & , \quad \mathrm{x} > 2\pi \end{cases}$$

$$\mu = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \mathrm{x\,dx} = \left[\frac{1}{4\pi} x^2 \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{4\pi} = \pi$$



Parâmetro de dispersão - Variância

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1/2\pi & , \quad 0 \le x \le 2\pi \\ 0 & . \quad x > 2\pi \end{cases}$$

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$\mu = E(X) = \pi$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{2\pi} x^2 \frac{1}{2\pi} dx = \left[\frac{x^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{6\pi}$$

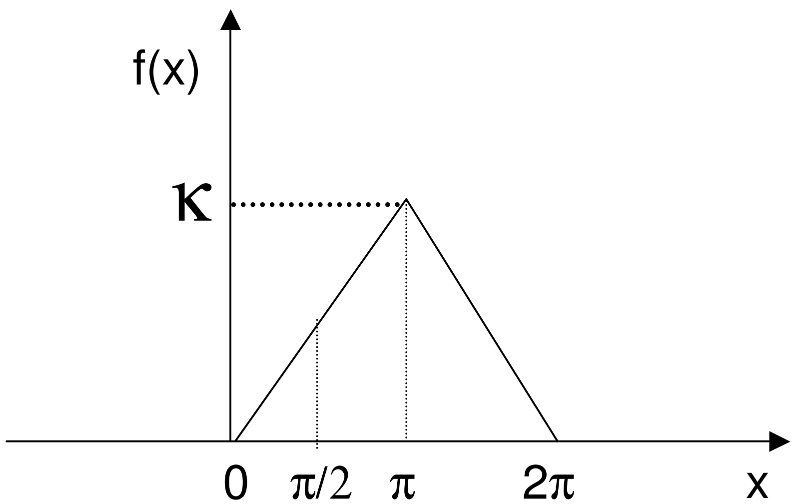
$$\sigma^2 = \frac{8\pi^3}{6\pi} - \pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} - \pi^2 = \frac{\pi^2}{3}$$

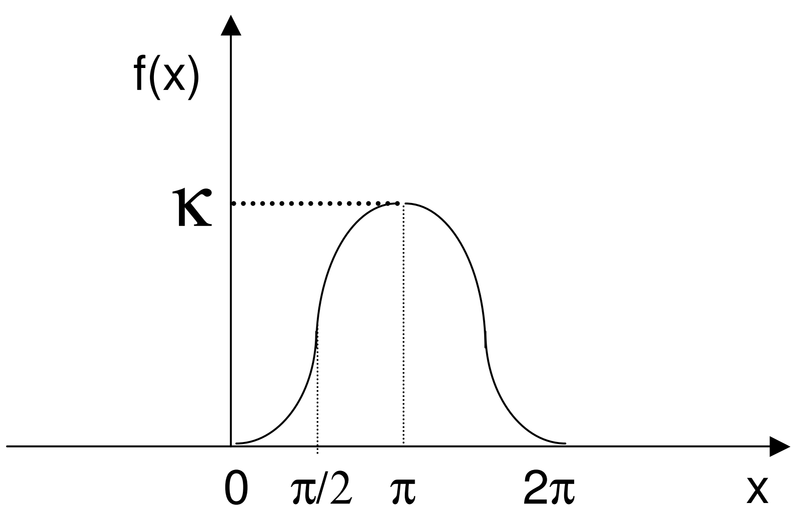
$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Experimento do disco

EXPERIMENTO: ponteiro girando num disco inclinado (com uma marca de referência) .

Resultados (V.A.contínua): ângulo de parada do ponteiro com relação a marca de referência.

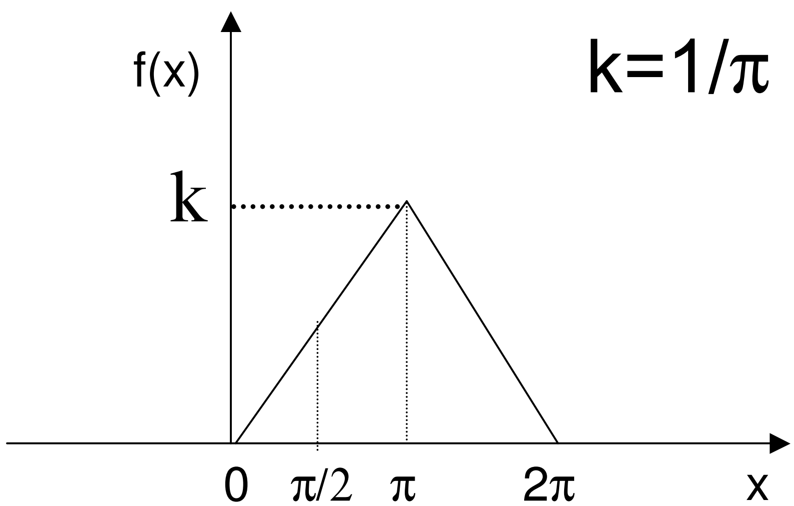




Experimento do disco

EXPERIMENTO: ponteiro girando num disco inclinado (com uma marca de referência) .

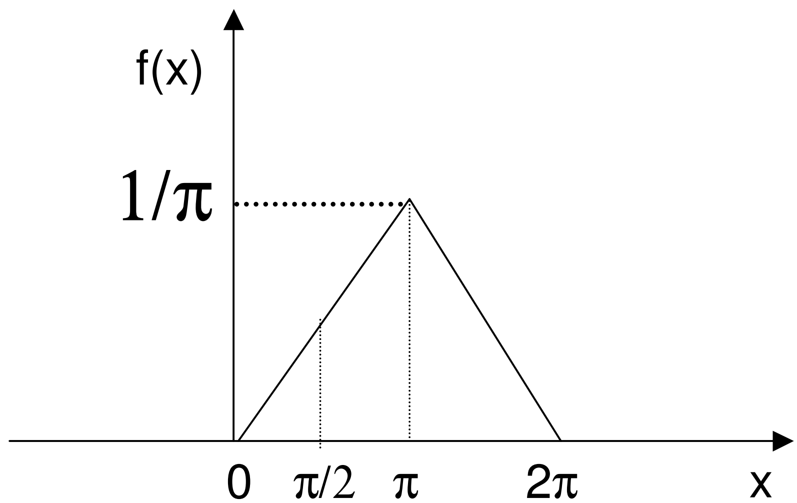
Resultados (V.A.contínua): ângulo de parada do ponteiro com relação a marca de referência.



Experimento do disco

EXPERIMENTO: ponteiro girando num disco inclinado (com uma marca de referência) .

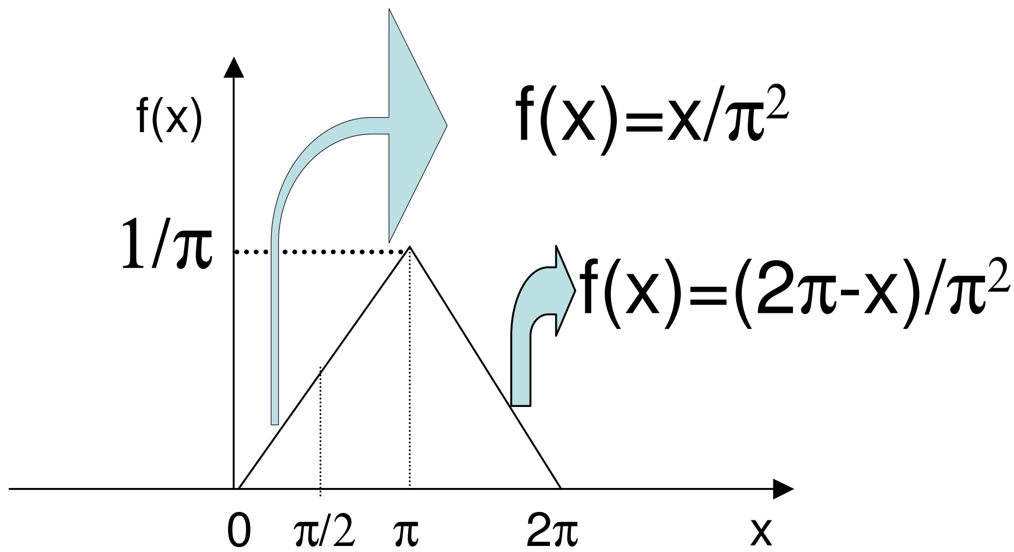
Resultados (V.A.contínua): ângulo de parada do ponteiro com relação a marca de referência.



$$\left.\begin{array}{l} X=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=0 \\ X=\pi \Rightarrow f(x)=1/\pi \end{array}\right\} \quad f(x)=x/\pi^2$$

$$\left.\begin{array}{l} X=\pi \quad \Rightarrow f(x)=1/\pi \\ X=2\pi \quad \Rightarrow f(x)=0 \end{array}\right\} \quad f(x)=(2\pi-x)/\pi^2$$

Probabilidade

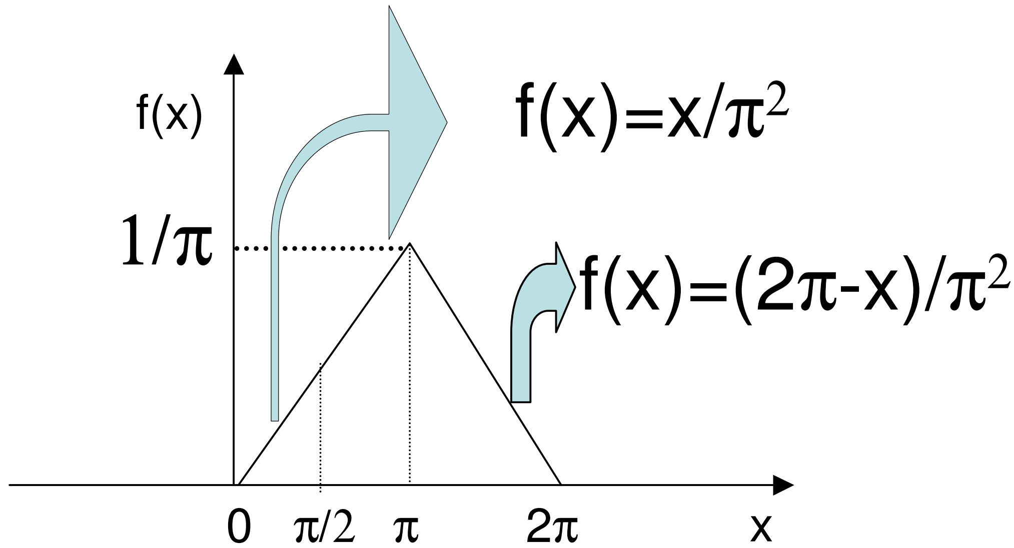


$$\Pr(\pi/2 \leq X < 3\pi/2) = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x) \cdot dx \quad ,$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} x/\pi^2 \cdot dx \; + \; \int_{\pi}^{3\pi/2} (2\pi - x)/\pi^2 \cdot dx$$

$$= \left.\frac{x^2}{2\pi^2}\right|_{\pi/2}^{\pi} + \left.\frac{2x}{\pi}\right|_{\pi}^{3\pi/2} - \left.\frac{x^2}{2\pi^2}\right|_{\pi}^{3\pi/2} = 6/8$$

Função Distribuição Acumulada



$$\mathrm{F(x)} = \Pr\left(\pi \le \mathrm{X} < x\right) = \frac{1}{2} + \int_{\pi}^{x} (2\pi - x)/\pi^2 \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} + \left.\frac{2x}{\pi}\right|_{\pi}^{x} - \left.\frac{x^2}{2\pi^2}\right|_{\pi}^{x} = \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} + \frac{2x}{\pi} - \frac{x^2}{2\pi^2}$$

$$\mathrm{F(X)} = 0 \quad \text{se} \quad \mathrm{x} \le 0$$

$$= \frac{\mathrm{x}^2}{2\pi^2} \quad \text{se} \quad 0 < x \le \pi$$

$$= -1 + \frac{2x}{\pi} - \frac{x^2}{2\pi^2} \quad \text{se} \quad \pi < x \le 2\pi$$

$$= 1 \qquad \text{se} \quad x > 2\pi$$

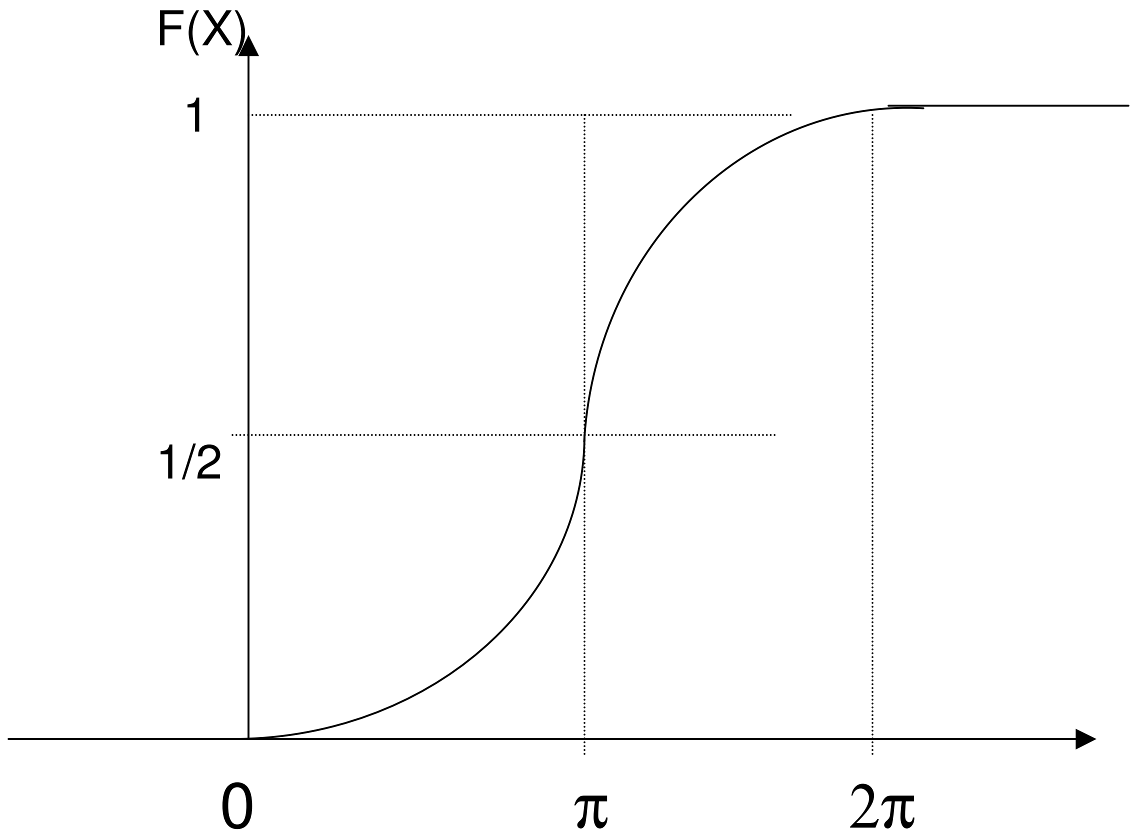
Função Distribuição Acumulada

$$F(X) = 0 \quad \text{se} \quad x \le 0$$

$$= \frac{x^2}{2\pi^2} \quad \text{se} \quad 0 < x \le \pi$$

$$= -1 + \frac{2x}{\pi} - \frac{x^2}{2\pi^2} \quad \text{se} \quad \pi < x \le 2\pi$$

$$= 1 \quad \text{se} \quad x > 2\pi$$



Propriedades da média e da variância

Propriedades da média:

(a) $E(k) = k \quad , \quad k = \text{constante}$

(b) $E(kX) = kE(X)$

(c) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

(d) $E(X \pm k) = E(X) \pm k$

(e) $E(XY) = E(X) \, . \, E(Y)$ caso X , Y independentes

Propriedades da variância:

(a) $\sigma^2(k) = 0 \quad , \quad k = \text{constante}$

(b) $\sigma^2(kX) = k^2 \cdot \sigma^2(X)$

(c) $\boxed{\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) \quad , \quad X , Y \text{ independentes}}$

(d) $\sigma^2(X \pm k) = \sigma^2(x)$