ACH2012 - Cálculo II

Sistema de Informação - EACH

Lista 1: Integração

1. Encontre a antiderivada mais geral da função. (Verifique sua resposta diferenciando.)

   (a) $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$

   (b) $f(x) = 1 - x^3 + 5x^5 - 3x^7$

   (c) $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}$

   (d) $f(u) = \frac{u^2+3\sqrt{u}}{u^2}$

   (e) $f(\theta) = \cos\theta - 5sen\theta$

   (f) $f(x) = x^{20} + 4x^{10} + 8$

2. Encontre f.

   (a) $f''(x) = 6x + 12x^2$

   (b) $f'(x) = 1 - 6x$, $f(0) = 8$

   (c) $f'(x) = 2x - 3/x^4$, $x > 0$, $f(1) = 3$

   (d) $f'(x) = 2/x$, $x < 0$, $f(-1) = 7$

   (e) $f''(\theta) = \cos\theta$

   (f) $f''(\theta) = \cos\theta + sen\theta$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 4$

3. Uma partícula move-se de acordo com os dados que se seguem. Encontre a posição da partícula.

   (a) $v(t) = sent - \cos t$, $s(0) = 0$

   (b) $v(t) = 1.5\sqrt{t}$, $s(4) = 10$

   (c) $a(t) = t - 2$, $s(0) = 1$, $v(0) = 3$

   (d) $a(t) = \cos t + sent$, $s(0) = 0$, $v(0) = 5$

   (e) $a(t) = 3\cos t + 10sent$, $s(0) = 0$, $s(2\pi) = 12$

   (f) $a(t) = 10 + 2t - 3t^2$, $s(0) = 0$, $s(2) = 10$

4. (a) Uma pedra é lançada de um posto de observação da Torre CN, $450m$ acima do solo.

   (b) Determine a distância da pedra acima do nível do solo no instante t.

   (c) Quanto leva para a pedra atingir o solo?

   (d) Com que velocidade ela atinge o solo?

   (e) Se a pedra for atirada para baixo com uma velocidade de $5m/s$, quanto tempo levará para ela atingir o solo?

5. Uma pedra é largada de um penhasco e atinge o solo com uma velocidade de 120 pés/s. Qual a altura do penhasco?

6. Qual a aceleração necessária para aumentar a velocidade de um carro a $30km/h$ para $50km/h$ em $5s$?

7. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = 2 - x^2$, $0 \leq x \leq 2$, com 4 subintervalos, tomando os pontos amostrais como os extremos direitos. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

8. Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$,, calcule a soma de Riemann com $n = 5$ correta até a sexta casa decimal, tomando como pontos mostrais os pontos médios. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

9. Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \; senx_i \; \Delta x$, $[0, \pi]$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1+x_i} \Delta x$, $[1, 5]$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2} \Delta x$, $[1, 8]$

   (d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5] \Delta x$, $[0, 2]$

10. Use a forma da definição de integral para calcular a integral.

    (a) $\int_{-1}^{5} (1 + 3x) dx$

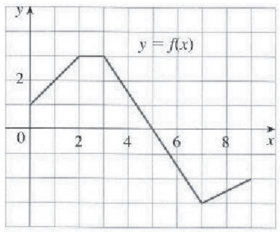
(b) $\int_0^2 (2 - x^2)dx$

(c) $\int_0^5 (1 + 2x^3)dx$

(d) Prove que $\int_a^b x\ dx = \frac{b^2-a^2}{2}$

(e) Prove que $\int_a^b x^2\ dx = \frac{b^3-a^3}{3}$

11. O gráfico de f está mostrado. Calcule casa integral interpretando-a em termos das áreas.



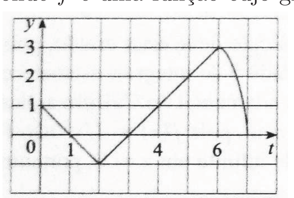
(a) $\int_0^2 f(x)dx$

(b) $\int_0^5 f(x)dx$

(c) $\int_5^7 f(x)dx$

(d) $\int_0^9 f(x)dx$

12. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\ dt$, onde f é uma função cujo gráfico é mostrado.



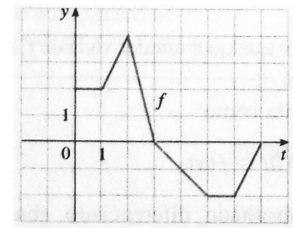
(a) Avalie $g(x)$ para $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ e 6.

(b) Estime $g(7)$.

(c) Onde g tem um valor máximo? Onde possui um valor mínimo?

(d) Faça um esboço do gráfico de g.

13. Seja $g(x) = \int_0^x f(t)\ dt$, onde f é uma função cujo gráfico é mostrado.



(a) Avalie $g(x)$ para $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ e 6.

(b) Em que intervalos g esta crescendo?

(c) Onde g tem um valor máximo?

(d) Faça um esboço do gráfico de g.

14. Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para achar a derivada da função.

(a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+2t}\ dt$

(b) $g(x) = \int_1^x \ln t\ dt$

(c) $g(u) = \int_3^u \frac{1}{x+x^2}\ dx$

(d) $g(x) = \int_x^2 \cos t^2\ dt$

15. Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a integral, ou explique porque ela não existe.

(a) $\int_{-1}^3 x^5\ dx$

(b) $\int_0^4 (1 + 3y - y^2)\ dy$

(c) $\int_0^1 x^{4/5}\ dx$

(d) $\int_{-5}^5 \frac{2}{x^3}\ dx$

(e) $\int_0^2 x(2 + x^5)\ dx$

(f) $\int_\pi^{2/\pi} cossec^2\theta\ d\theta$

(g) $\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3}\ du$

16. Ache a derivada da função

(a) $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}\, du$ (Sugestão: $\int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}\, du = \int_{2x}^{0} \frac{u^2-1}{u^2+1}\, du + \int_{0}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}\, du$)

(b) $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{t}\ sen\ t\ dt$

17. Se $F(x) = \int_1^x f(t)\ dt$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\ du$, determine $F''(2)$.

18. Verifique por diferenciação que a formula está correta.

(a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx = \sqrt{x^2+1} + C$

(b) $\int x \cos x\ dx = x\ sen\ x + \cos x + C$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\ dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

(d) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\ dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x} + C$

19. Ache a integral indefinida geral.

(a) $\int x^{-3/4}\ dx$

(b) $\int x(1+2x^4)\ dx$

(c) $\int (1-t)(2+t^2)\ dt$

(d) $\int (2-\sqrt{x})^2\ dx$

(e) $\int (3e^u + sec^2 u)\ du$

20. Calcule a integral.

(a) $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\ dx$

(b) $\int_{-1}^0 (2x - e^x)\ dx$

(c) $\int_{-2}^2 (3u+1)^2\ du$

(d) $\int_0^4 (2v+5)(3v-1)\ dv$

(e) $\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)\ dt$

(f) $\int_{-2}^{-1} (4y^3 + \frac{2}{y^3})\ dy$

(g) $\int_1^2 \frac{y+5y^7}{y^3}\ dy$

(h) $\int_0^{\pi} (4sen\theta - 3\cos\theta)\ d\theta$

21. A função velocidade (em metros por segundo) é dada por uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Ache (i) o deslocamento e (ii) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

(a) $v(t) = 3t - 5$, $0 \le t \le 3$

(b) $v(t) = t^2 - 2t - 8$, $1 \le t \le 6$

22. A função aceleração (em m/s^2) e a velocidade inicial são dadas por uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Ache (i) a velocidade no instante t e (ii) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

(a) $a(t) = t + 4$, $v(0) = 5$, $0 \le t \le 10$

(b) $a(t) = 2t + 3$, $v(0) = -4$, $0 \le t \le 3$

23. Calcule a integral fazendo a substituição dada.

(a) $\int \cos 3x\ dx$, $u = 3x$

(b) $\int x(4+x^2)^{10}\ dx$, $u = 4 + x^2$

(c) $\int x^2\sqrt{x^9+1}\ dx$, $u = x^3 + 1$

(d) $\int \frac{4}{(1+2x)^3}\ dx$, $u = 1 + 2x$

(e) $\int e^{sen\theta} \cos\theta\ d\theta$, $u = sen\theta$

24. Calcule a integral indefinida.

(a) $\int 2x(x^2+3)^4\ dx$

(b) $\int x^2(x^3+5)^2\ dx$

(c) $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}}\ dx$

(d) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\ dx$

(e) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\ dx$

(f) $\int \sqrt{x}\ sen(1+x^{3/2})\ dx$

(g) $\int \frac{d\ x}{x \ln x}$

25. Calcule a integral definida, se ela existir.

(a) $\int_0^2 (x-1)^{25}\ dx$

(b) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\ dx$

(c) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\ dx$

(d) $\int_0^{\pi/3} \frac{sen\theta}{\cos^2\theta}\ d\theta$

(e) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx$

(f) $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

(g) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^3}$

(h) $\int_{-a}^a x\sqrt{x^2+a^2}\ dx$

26. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x)\ dx = 10$, ache $\int_0^2 f(2x)\ dx$.

27. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x)\ dx = 4$, encontre $\int_0^3 xf(x^2)\ dx$.

28. Suponha f contínua em R, prove que

$$\int_a^b f(-x)\ dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\ dx.$$

29. Se f for contínua em R, prove que

$$\int_a^b f(x+c)\ dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\ dx.$$

Para o caso onde $f(x) \geq 0$, faça um diagrama para interpretar geometricamente essa equação como uma igualdade de áreas.

30. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\ dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\ dx.$$

31. Avalie a integral.

(a) $\int x\cos 5x\ dx$

(b) $\int xe^{-x}\ dx$

(c) $\int re^{r/2}\ dx$

(d) $\int \ln(2x+1)\ dx$

(e) $\int (\ln x)^2\ dx$

(f) $\int t^3e^t\ dt$

(g) $\int_0^{\pi} t\ sen3t\ dt$

(h) $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\ dy$

32. Primeiro faça substituição e então use a integração por partes para avaliar a integral.

(a) $\int sen\sqrt{x}\ dx$

(b) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\ dx$

(c) $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3\cos(\theta^2)\ d\theta$

33. Suponha que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, e $f'(4) = 3$ e que f'' seja contínua. Determine o valor de $\int_1^4 xf''(x)\ dx$

34. (a) Use a integração por partes para mostrar que

$$\int f(x)\ dx = xf(x) - \int xf'(x)\ dx$$

(b) Se f e g são funções inversas e f' é continua, prove que

$$\int_a^b f(x)\ dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\ dy$$

(Sugestão: Use a parte (a) e faça substituição $y = f(x)$.)

(c) No caso onde f e g são funções positivas e $b > a > 0$, desenhe um diagrama para dar a interpretação geométrica à parte (b).

(d) Use a parte (b) para avaliar $\int_1^x \ln x\ dx$

35. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria

(a) $\int_1^{\infty} x^4e^{-x^4}\ dx$

(b) $\int_0^2 \frac{x}{x^2-5x+6}\ dx$

(c) $\int_0^{\pi/2} \sec x \; dx$

(d) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+5} \; dx$

36. Quais das seguintes integrais é imprópria? Por quê?

(a) $\int_1^2 \frac{1}{2x-1} \; dx$

(b) $\int_0^1 \frac{1}{2x-1} \; dx$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen\ x}{1+x^2} \; dx$

(d) $\int_1^2 \ln(x-1) \; dx$

37. Determine se cada integral é convergente ou divergente. Avalie aquelas que são convergentes.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2} \; dx$

(b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}} \; dw$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} \; dx$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} \; dx$

(e) $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x} \; dx$

(f) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} \; dx$

(g) $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4} \; dx$

(h) $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x-1} \; dx$

38. Encontre os valores de p para os quais a integral converge e avalie a integral para aqueles valores de p.

(a) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} \; dx$

(b) $\int_0^1 x^p \ln x \; dx$

(c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} \; dx$

39. (a) Avalie a integral

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \; dx$$

para $n = 0,\ 1,\ 2$ e 3.

(b) Estime o valor de

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \; dx$$

quando n é um inteiro positivo arbitrário.

40. (a) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \; dx$$

é divergente.

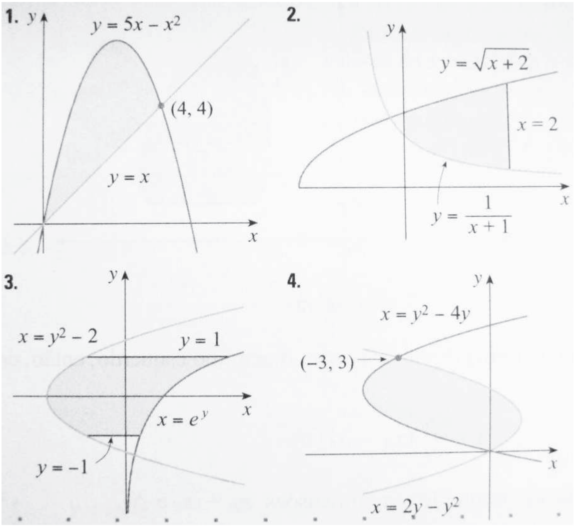
(b) Mostre que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x \; dx = 0$$

Isso mostra que não podemos definir

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \; dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x \; dx = 0$$

41. Encontre as áreas das regiões sombreadas.

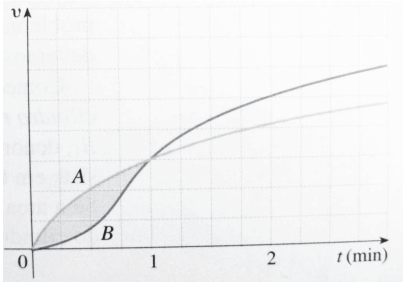


42. Avalie a integral e interprete-a como a área de uma região. Esboce a região.

    (a) $\int_{-1}^{1} |x^3 - x| \; dx$

    (b) $\int_{0}^{4} |\sqrt{x+2} - x| \; dx$

43. Dois carros, A e B, largam lado a lado a partir do repouso. A figura mostra os gráficos de suas funções de rapidez.



    (a) Qual carro estará na frente após 1 minuto? Explique.

    (b) Qual o significado da área da região sombreada?

    (c) Qual carro estará na frente após 2 minuto? Explique.

    (d) Estime quando os carros estarão novamente lado a lado.

44. Encontre o valor médio da função no intervalo dado.

    (a) $f(x) = x^2$, $[-1, 1]$

    (b) $f(x) = 1/x$, $[1, 4]$

    (c) $f(x) = \cos x$, $[0, \pi/2]$

    (d) $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$, $[0, 2]$

    (e) $f(t) = te^{-t^2}$, $[0, 5]$

    (f) $f(\theta) = \sec\theta \tan\theta$, $[0, \pi/4]$

    (g) $f(x) = \cos^4 x \; sen \; x$, $[0, \pi]$

    (h) $f(r) = 3/(1+r)^2$, $[1, 6]$

45. Se f é continua e $\int_1^3 f(x) \; dx = 8$, mostre que f assume o valor 4 pelo menos uma vez no intervalo $[1, 3]$.

46. Encontre os valores de b tais que o valor médio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ no intervalo $[0, b]$ é igual a 3.

47. Em uma certa cidade a temperatura (em F^o) t horas depois das 9 horas foi aproximada pela função

$$T(t) = 50 + 14 \; sen \frac{\pi t}{12}.$$

    Calcule a temperatura média durante o período entre 9:00hs e 21:00hs.

48. Prove o Teorema do Valor Médio para Integrais usando o Teorema do Valor Médio para derivadas, para a função $F(x) = \int_a^x f(t) \; dt$.