

**Universidade de São Paulo**  
**Escola de Artes, Ciências e Humanidades**

**ACH2011 – Cálculo I – 1º sem. 2015**  
**Professor: Dr. José Ricardo G. Mendonça**

**6ª Lista de Exercícios — Funções Inversas — 11 jun. 2015**

*Age is a function of mind over matter – if you don't mind, it doesn't matter.*  
Leroy Robert “Satchel” Paige (1849–1925)

**I. Funções inversas**

1. A derivada da função inversa  $x = g(y)$  da função  $y = f(x)$  é dada por

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Prove este resultado considerando a derivada da função composta  $y = f(g(y))$ .

2. Seja a função  $y = \cos x$  definida no intervalo  $[0, \pi]$ . Mostre que a função inversa  $x = \arccos y$  existe, determine seu domínio e calcule sua derivada.
3. Seja a função  $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ . Defina a função inversa da secante em um intervalo apropriado e determine sua derivada.
4. Encontre a derivada das seguintes funções:

(a)  $\arcsin(x^2 - 1)$ ;

(b)  $\arccos(2x + 5)$ ;

(c)  $\frac{1}{\arcsin x}$ ;

(d)  $\frac{2}{\arccos 2x}$ .

**II. Funções  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  e  $\arctan x$**

1. Seja  $g(y) = \arctan y$ . Quanto valem  $g(1)$ ,  $g(-1)$ ,  $g(1/\sqrt{3})$  e  $g(\sqrt{3})$ ? Quanto valem  $g'(1)$ ,  $g'(-1)$ ,  $g'(1/\sqrt{3})$  e  $g'(\sqrt{3})$ ?
2. Suponha que queiramos definir a função inversa de  $\tan x$  no intervalo  $\pi/2 < x < 3\pi/2$ . Determine a derivada dessa função inversa.
3. Encontre a derivada das seguintes funções:
- (a)  $\arctan 3x$ ;
- (b)  $\arctan \sqrt{x}$ ;

(c)  $\arcsin x + \arccos x$ ;

(d)  $x \arcsin x$ ;

(e)  $\arctan(\sin 2x)$ ;

(f)  $\frac{\sin x}{\arcsin x}$ ;

(g)  $\arcsin(\cos x - x^2)$ ;

(h)  $(\arcsin 2x + \arctan x^2)^{3/2}$ .

4. Suponha que você se encontra no campo a uma distância desconhecida de um pico de altura também desconhecida. Mostre como você pode determinar tanto a distância ao pico quanto a sua altura usando somente um transferidor. Esse exercício exemplifica o princípio de funcionamento básico do astrolábio, instrumento de campo e de navegação antigo.
5. Um avião a 1500 m de altitude está voando horizontalmente em linha reta para longe de um observador em terra. Quando o ângulo de elevação do avião vale  $\pi/4$ , ele (o ângulo) está diminuindo a uma taxa de 0,05 rad/s. Qual é a velocidade instantânea do avião nesse momento?

★ — ★ — ★