UNIVERSIDADE DE CAXIAS DO SUL – UCS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA – CCET
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA – DEIN
PROFA. MÁRCIA RODRIGUES NOTARE

Respostas da Lista de Exercícios 3

1. a) $\{t\}$ b) $\{p,q,r,s,t,u\}$ c) $\{q,r,v,w\}$ d) $\varnothing$
   e) $\{r,v\}$ f) $\{u,w\}$
   g) $\{(p,r),(p,t),(p,v),(q,r),(q,t),(q,v),(r,r),(r,t),(r,v),(s,r),(s,t),(s,v)\}$ h) $\{q,r,v\}$

2. a) $\{1,2,4,5,6,8,9\}$ b) $\{4, 5\}$ c) $\{2, 4\}$ d) $\{1,2,3,4,5,9\}$
   e) $\{2,6,8\}$ f) $\{0,1,3,7,9\}$ g) $\varnothing$ h) $\{0,1,2,3,6,7,8,9\}$
   i) $\{2,3\}$ j) $\{0,1,3,4,7,9\}$ k) $\{2,6,8\}$ l) $\{2,3\}$
   m) $\{(1,2),(1,3),(1,4),(4,2),(4,3),(4,4),(5,2),(5,3),(5,4),(9,2),(9,3),(9,4)\}$

3. O número de elementos que espera-se que o conjunto P(S) tenha é $2^4 = 16$.
   $P(S)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\}\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

4. $P(S) = \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

5. $A = \{x,y\}$

6. a) V b) V c) F d) V e) F f) V
   g) F h) F i) V j) V k) F l) V

7. a) Elemento Neutro

<u>CASO 1</u>: Vamos provar que $(A \cup \varnothing) \subseteq A$.
Seja $x \in (A \cup \varnothing)$.
$x \in (A \cup \varnothing) \Rightarrow$
$x \in A \vee x \in \varnothing \Rightarrow$ (definição de união)
$x \in A$ (elemento neutro)
Logo, $(A \cup \varnothing) \subseteq A$.

<u>CASO 2</u>: Vamos provar que $A \subseteq (A \cup \varnothing)$.
Seja $x \in A$.
$x \in A \Rightarrow$
$x \in A \vee x \in \varnothing \Rightarrow$ (elemento neutro)
$x \in (A \cup \varnothing)$ (definição de união)
Logo, $A \subseteq (A \cup \varnothing)$.

Assim, como $(A \cup \varnothing) \subseteq A$ e $A \subseteq (A \cup \varnothing)$, então $A \cup \varnothing = A$, pela definição de igualdade de conjuntos.

b) Idempotência

<u>CASO 1</u>: Vamos provar que $A \cup A \subseteq A$.
Seja $x \in (A \cup A)$.
$x \in (A \cup A) \Rightarrow$
$x \in A \vee x \in A \Rightarrow$ (definição de união)
$x \in A$ (idempotência)
Logo, $(A \cup A) \subseteq A$.

<u>CASO 2</u>: Vamos provar que $A \subseteq (A \cup A)$.
Seja $x \in A$.
$x \in A \Rightarrow$
$x \in A \vee x \in A \Rightarrow$ (idempotência)
$x \in (A \cup A)$ (definição de união)
Logo, $A \subseteq (A \cup A)$.

Assim, como $(A \cup A) \subseteq A$ e $A \subseteq (A \cup A)$, então $(A \cup A) = A$, pela definição de igualdade de conjuntos.

c) Comutatividade

CASO 1: Vamos provar que $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$.
Seja $x \in (A \cup B)$.
$x \in (A \cup B) \Rightarrow$
$x \in A \vee x \in B \Rightarrow$ (definição de união)
$x \in B \vee x \in A \Rightarrow$ (comutatividade do operador $\vee$)
$x \in (B \cup A)$ (definição de união)
Logo, $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$.

CASO 2: Vamos provar que $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$.
Seja $x \in (B \cup A)$.
$x \in (B \cup A) \Rightarrow$
$x \in B \vee x \in A \Rightarrow$ (definição de união)
$x \in A \vee x \in B \Rightarrow$ (comutatividade do operador $\vee$)
$x \in (A \cup B)$ (definição de união)
Logo, $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$.

Assim, como $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ e $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$, então $(A \cup B) = (B \cup A)$, pela definição de igualdade de conjuntos.

8. Sim, uma vez que valem os dois sentidos da implicação, pode-se provar o teorema utilizando equivalências.

Prova: Seja $x \in A \cup (B \cup C)$.
$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow$
$x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow$ (definição de união)
$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$ (definição de união)
$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow$ (associatividade do operador $\vee$)
$x \in (A \cup B) \vee x \in C \Leftrightarrow$ (definição de união)
$x \in (A \cup B) \cup C$ (definição de união)

Logo, como $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ e $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$, então $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, pela definição de igualdade de conjuntos.

9. a) Elemento Neutro
Seja $x \in A \cap U$.
$x \in (A \cap U) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \in U \Leftrightarrow$ (definição de intersecção)
$x \in A$ (definição de U)

Logo, como $A \subseteq (A \cap U)$ e $(A \cap U) \subseteq A$, então $A \cap U = A$, pela definição de igualdade de conjuntos. Analogamente, prova-se que $A = U \cap A$.

b) Idempotência
Seja $x \in (A \cap A)$.
$x \in (A \cap A) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow$ (definição de intersecção)
$x \in A$ (idempotência)

Logo, como $A \subseteq (A \cap A)$ e $(A \cap A) \subseteq A$, então $A = (A \cap A)$, pela definição de igualdade de conjuntos.

c) Comutatividade
Seja $x \in (A \cap B)$.
$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow$ (definição de intersecção)
$x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow$ (comutatividade do operador $\wedge$)
$x \in (B \cap A) \Leftrightarrow$ (definição de intersecção)

Logo, como $(A \cap B) \subseteq (B \cap A)$ e $(B \cap A) \subseteq (A \cap B)$, então, pela definição de igualdade de conjuntos, $(A \cap B) = (B \cap A)$.

d) Associatividade

Seja $x \in (A \cap (B \cap C))$.

$x \in (A \cap (B \cap C)) \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge x \in (B \cap C) \Leftrightarrow$ (definição de intersecção)

$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$ (definição de intersecção)

$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$ (associatividade do operador $\wedge$)

$x \in (A \cap B) \wedge x \in C \Leftrightarrow$ (definição de intersecção)

$x \in ((A \cap B) \cap C)$ (definição de intersecção)

Logo, como $(A \cap (B \cap C)) \subseteq ((A \cap B) \cap C)$ e $((A \cap B) \cap C) \subseteq (A \cap (B \cap C))$, então, pela definição de igualdade de conjuntos, $(A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C)$.

10. Seja $x \in A \cup (B \cap C)$.

$x \in (A \cup (B \cap C)) \Leftrightarrow$

$x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow$ (definição de união)

$x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$ (definição de intersecção)

$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow$ (distributividade do operador $\vee$ sobre $\wedge$)

$x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow$ (definição de união)

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (definição de intersecção)

Logo, como $(A \cap (B \cup C)) \subseteq ((A \cup B) \cap (A \cup C))$ e $((A \cup B) \cap (A \cup C)) \subseteq (A \cap (B \cup C))$, então, pela definição de igualdade de conjuntos, $(A \cap (B \cup C)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$.

11.

a) Para provar que $A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$, podemos considerar essa igualdade como $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$.

Seja $x \in \sim(A \cap B)$.

$x \in \sim(A \cap B) \Leftrightarrow$

$x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow$ (definição de complemento)

$\neg(x \in (A \cap B)) \Leftrightarrow$ (definição de $\notin$)

$\neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ (definição de intersecção)

$\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \Leftrightarrow$ (propriedade de DeMorgan aplicada ao operador $\wedge$)

$x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow$ (definição de $\notin$)

$x \in \sim A \vee x \in \sim B \Leftrightarrow$ (definição de complemento)

$x \in (\sim A \cup \sim B)$ (definição de união)

Logo, $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$.

b) Para provar que $A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$, podemos considerar essa igualdade como $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$.

Seja $x \in \sim(A \cup B)$.

$x \in \sim(A \cup B) \Leftrightarrow$

$x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow$ (definição de complemento)

$\neg(x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow$ (definição de $\notin$)

$\neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow$ (definição de união)

$\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \Leftrightarrow$ (propriedade de DeMorgan para o operador $\vee$)

$x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow$ (definição de $\notin$)

$x \in \sim A \wedge x \in \sim B \Leftrightarrow$ (definição de complemento)

$x \in (\sim A \cap \sim B)$ (definição de intersecção)

Logo, $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$.

12.

a) $(A \cup B) \cap \sim A = B \cap \sim A$

Seja $x \in (A \cup B) \cap \sim A$.

$x \in (A \cup B) \cap \sim A \Leftrightarrow$	
$x \in (A \cup B) \wedge x \in \sim A \Leftrightarrow$	(definição de intersecção)
$(x\in A \vee x\in B) \wedge x\in \sim A \Leftrightarrow$	(definição de união)
$(x\in A \wedge x\in \sim A) \vee (x\in B \wedge x\in \sim A) \Leftrightarrow$	(distributividade do operador $\wedge$ sobre $\vee$)
$x\in \varnothing \vee (x\in B \wedge x\in \sim A) \Leftrightarrow$	(contradição)
$(x\in B \wedge x\in \sim A) \Leftrightarrow$	(elemento neutro)
$x \in (B \cap \sim A)$	(definição de intersecção)

Logo, $(A \cup B) \cap \sim A = B \cap \sim A$.

b) $(A \cap B) \cup A = A$

$(A \cap B) \cup A =$	
$(A \cup A) \cap (A \cup B) =$	(distributividade de $\cup$ sobre $\cap$)
$A \cap (A \cup B) =$	(idempotência)
A	(definição de intersecção)

c) $A \cup (\sim A \cap B) = A \cup B$

$A \cup (\sim A \cap B) =$	
$(A \cup \sim A) \cap (A \cup B) =$	(distributividade de $\cup$ sobre $\cap$)
$U \cap (A \cup B) =$	($A \cup \sim A = U$)
$A \cup B$	(elemento neutro da intersecção)

d) $A \cap (\sim A \cup B) = A \cap B$

$A \cap (\sim A \cup B) =$	
$(A \cap \sim A) \cup (A \cap B) =$	(distributividade de $\cap$ sobre $\cup$)
$\varnothing \cup (A \cap B) =$	($A \cap \sim A = \varnothing$)
$A \cap B$	(elemento neutro da união)

e) $\sim((A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B)) = (\sim A \cap B) \cup (A \cap \sim B)$

$\sim((A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B)) =$	
$\sim(((A \cap B) \cup \sim A) \cap ((A \cap B) \cup \sim B)) =$	(distributividade de $\cup$ sobre $\cap$)
$\sim(((A \cup \sim A) \cap (B \cup \sim A)) \cap ((A \cup \sim B) \cap (B \cup \sim B))) =$	(distributividade de $\cup$ sobre $\cap$)
$\sim((U \cap (B \cup \sim A)) \cap ((A \cup \sim B) \cap U)) =$	(elemento neutro da união)
$\sim((B \cup \sim A) \cap (A \cup \sim B)) =$	(elemento neutro da intersecção)
$\sim(B \cup \sim A) \cup \sim(A \cup \sim B) =$	(DeMorgan)
$(\sim B \cap \sim\sim A) \cup (\sim A \cap \sim\sim B) =$	(DeMorgan)
$(\sim B \cap A) \cup (\sim A \cap B) =$	(duplo complemento)
$(\sim A \cap B) \cup (\sim B \cap A) =$	(comutatividade)
$(\sim A \cap B) \cup (A \cap \sim B)$	(comutatividade)