ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (1/2012)

Prova de Recuperação – Julho/2012

Nome: ______________________________ Nº USP: __________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Observação 1: Duração da prova: **90** (**cem**) minutos.
Observação 2: O uso de calculadora/computador na prova é proibido.

1) [3,5 pontos] Determinar a fórmula geral de x_n se $x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1}$ ($n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$), com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

---

1) Representa-se, inicialmente, a relação de recorrência em sua forma matricial

$$u_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = M u_{n-1} \,, \quad n \in \{2, 3, \cdots\} \subset \mathbb{N} \,, \quad \text{com} \quad u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Como $u_n = M u_{n-1} = M^2 u_{n-2} = \cdots = M^{n-1} u_1$, deve-se obter M^{n-1}, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det(M - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 2) \,,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}^T$ associado a $\lambda_1 = 3$ satisfaz

$$0 = (M - \lambda_1 I)\, v_1 = \begin{pmatrix} 5-(3) & -6 \\ 1 & 0-(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 3y_1 \,,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $y_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}^T$ associado a $\lambda_2 = 2$ satisfaz

$$0 = (M - \lambda_2 I)\, v_2 = \begin{pmatrix} 5-(2) & -6 \\ 1 & 0-(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow y_2 = x_2 \,,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $x_2 = 1$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e sua inversa } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} ,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) .$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1} M S$, tem-se $M = S \Lambda S^{-1}$, donde

$$M^{n-1} = \left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right) \cdots \left(S\Lambda S^{-1}\right) = S \Lambda^{n-1} S^{-1} \,,$$

que leva a

$$
\begin{aligned}
u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} &= S\Lambda^{n-1}S^{-1}u_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3^n - 2^n \\ 3^{n-1} - 2^{n-1} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$x_n = 3^n - 2^n \,, \qquad n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{Z}_+ \,.$$

---

2) [3,5 pontos] Uma confeitaria recebeu um pedido de bolos que podem ser de até três tipos, A, B e C. Nesta confeitaria, há um estoque de 500 cerejas que precisa ser integralmente usado neste pedido, visto que a data de validade das cerejas está próxima de expirar. O número total de bolos é 50. Determinar todas as combinações possíveis do número de cada um dos três tipos de bolos de forma a aproveitar todas as cerejas do estoque (a possibilidade de haver zero bolo de um ou dois tipos também deve ser considerada). Sabe-se que os bolos A, B e C requerem, respectivamente, 5, 7 e 13 cerejas. **Nota:** O exercício deve ser resolvido, **necessariamente**, passando pelas etapas de encontrar uma solução particular e o kernel.

---

2) Denotando por a, b e c, respectivamente, o número de bolos do tipo A, B e C, as informações acima podem ser representadas pelo sistema linear

$$\begin{cases} a + b + c &= 50 \\ 5a + 7b + 13c &= 500 \end{cases} ,$$

sujeita aos vínculos $0 \leq a, b, c \leq 50$. A primeira equação corresponde ao número total de bolos, ao passo que a segunda indica o número total de cerejas. Como

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 5 & 7 & 13 & 500 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-5) \\ (+) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 2 & 8 & 250 \end{array}\right) \times(1/2) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 4 & 125 \end{array}\right) ,$$

o sistema pode ser reescrito como $Ax = b$, onde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} , \quad b := \begin{pmatrix} 50 \\ 125 \end{pmatrix} \qquad \text{e } x \text{ a solução geral do problema.}$$

Uma solução particular x_p do problema pode ser obtida impondo $c = 0$, implicando $x_p = \begin{pmatrix} -75 & 125 & 0 \end{pmatrix}^T$. Esta solução, embora satisfaça $Ax_p = b$, **não** é realística (número negativo de bolos), mas este ponto será consertado mais adiante.

A solução geral do problema é dada por $x = x_p + x_k$, onde $\{x_k\}$ gera o kernel de A ($Ax_k = 0$). Logo, denotando $x_k = \begin{pmatrix} \mu & \beta & \tau \end{pmatrix}^T$,

$$Ax_k = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \beta \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mu + \beta + \tau &= 0 \\ \beta + 4\tau &= 0 \end{cases} \Rightarrow \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 3\tau \\ -4\tau \\ \tau \end{pmatrix} : \tau \in \mathbb{R} \right\} .$$

A solução geral do sistema $Ax = b$ é dada por

$$x = x_p + x_k = \begin{pmatrix} -75 \\ 125 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \tau \in \mathbb{R} \,.$$

Contudo, para obter soluções realísticas e que obedeçam às condições impostas pelo problema (número de brinquedos como inteiros não-negativos e menores que 50[1]), o valor de τ deve percorrer um subconjunto da reta real, que é o intervalo dos inteiros entre 25 e 31, ou $[25, 31] \subset \mathbb{Z}$. De forma mais explícita, tem-se

[1] No caso, especificar $m, b, t \geq 0$ implica $m, b, t \leq 40$.

Bolo(s) do tipo A	00	03	06	09	12	15	18
Bolo(s) do tipo B	25	21	17	13	09	05	01
Bolo(s) do tipo C	25	26	27	28	29	30	31
τ	25	26	27	28	29	30	31

Tabela 1: Quantidade dos bolos do tipo A, B e C que satisfazem as condições exigidas.

---

3) [3,0 pontos] Dividir um número positivo a como a soma de três termos não-negativos de sorte que o produto destes seja máximo (fazer, no exercício, um estudo dos ponto(s) crítico(s) – ponto(s) de máximo/ mínimo/ sela/ inconclusivo?).

---

3) Denote por x, y e $a-x-y$ os três números em questão, sendo $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $a-x-y \geq 0$ (ou $x+y \leq a$). Estas três condições definem o interior do triângulo esquematizado na Figura 1, juntamente com as fronteiras $0 \leq x \leq a$ com $y=0$, $0 \leq y \leq a$ com $x=0$ e a reta $y=-x+a$ com $0 \leq x \leq a$. O problema consiste na maximização da função $P:[0,a]\times[0,a] \to \mathbb{R}$ com $P(x,y) := xy\,(a-x-y)$. O conjunto de pontos críticos desta função é determinado segundo $\vec{\nabla}P(x,y)=\vec{0}$, *id est*, a solução do sistema

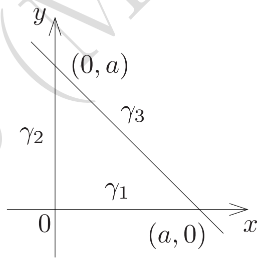

Figura 1: Domínio do problema.

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial}{\partial x}P(x,y) = y\,(a-x-y) - xy \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial}{\partial y}P(x,y) = x\,(a-x-y) - xy \end{cases}$$

define os pontos críticos. As possíveis soluções são $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,a)$ e $(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$. Como as três primeiras raízes pertencem ao contorno, serão analisadas mais adiante. Como $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(\frac{a}{3},\frac{a}{3}) = C = \frac{\partial^2}{\partial y^2}P(\frac{a}{3},\frac{a}{3}) = -\frac{2a}{3}$, $B = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}P(\frac{a}{3},\frac{a}{3}) = -\frac{a}{3}$ e $AC - B^2 = \frac{a^2}{3} > 0$ com $A<0$, o ponto crítico $(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ úm ponto de máximo local, sendo $P(\frac{a}{3},\frac{a}{3}) = \frac{a^3}{27}$. A fim de averiguar se se trata de um máximo global, verificar-se-á o comportamento de P nas fronteiras:

$$\begin{array}{lclll} \text{Fronteira } \gamma_1 & : & y=0 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq a & \Rightarrow & P(x,0)=0 \\[1ex] \text{Fronteira } \gamma_2 & : & x=0 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq a & \Rightarrow & P(0,y)=0 \\[1ex] \text{Fronteira } \gamma_3 & : & y=a-x \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq a & \Rightarrow & P(x,y=a-x)=0 \end{array}$$

Como o valor da função é nula nas três fronteiras, o ponto $(\frac{a}{3},\frac{a}{3})$ é, também, um ponto de máximo global. Logo, os três números requisitados pelo exercício são idênticos e iguais a $\frac{a}{3}$.