ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2014.2)

Primeira Prova – Outubro/2014

Nome: ______________________________________ Nº USP: ____________

Turma/Horário: ________________________ Curso: ________________________

Observação 1: Duração da prova: **??** (**??**) minutos.
Observação 2: O uso de calculadora/computador na prova é proibido.

1) [3,0 pontos] Estudar (existência e unicidade da solução) o sistema linear $Ax = b$ segundo as variáveis v e w ($v, w \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}.$$

---

1) Denote $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}^T$. Inicialmente, considere $v \neq 3$.

$\boxed{\text{Caso } v \neq 3}$

Neste caso, existe A^{-1}, que é

$$A^{-1} = \frac{1}{9-3v} \begin{pmatrix} 9 & -v \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com efeito (detalhes omitidos por serem evidentes),

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & v & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & v & 1 & 0 \\ 0 & 9-3v & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{9}{9-3v} & -\frac{v}{9-3v} \\ 0 & 9-3v & -3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{9}{9-3v} & -\frac{v}{9-3v} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{9-3v} & \frac{1}{9-3v} \end{array}\right).$$

Logo, para $v \neq 3$, tem-se

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{9-3v} \begin{pmatrix} 9 & -v \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{9-3v} \begin{pmatrix} -vw \\ w \end{pmatrix}, \qquad \forall w \in \mathbb{R}.$$

Considere, agora, $v = 3$.

$\boxed{\text{Caso } v = 3}$

Neste caso, tem-se o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{rcl} \xi + 3\eta & = & 0 \\ 3\xi + 9\eta & = & w \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \xi + 3\eta & = & 0 \\ \xi + 3\eta & = & \frac{w}{3} \end{array} \right. .$$

Logo, se $w \neq 0$, o sistema não admite solução. Por outro lado, se $w = 0$, então a solução é da forma

$$x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\eta \\ \eta \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Em suma, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Caso } v \neq 3\text{:} & \text{Solução única:} \quad x = \frac{1}{9-3v} \begin{pmatrix} -vw \\ w \end{pmatrix}, \quad w \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ \text{Caso } v = 3\text{:} & \left\{ \begin{array}{ll} \text{Caso } w = 0\text{:} & \text{Infinitas soluções:} \quad x = \eta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta \in \mathbb{R} \\ \text{Caso } w \neq 0\text{:} & \text{Inexistência de solução} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Use por seu próprio risco (M.H.)

2) [3,0 pontos] Determinar a fórmula geral da sequência $x_{n+1} = 2\,x_n - y_n$, $y_{n+1} = -x_n + 2\,y_n$, onde $n \in \{0, 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$. Considere $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$.

---

2) Representa-se, inicialmente, a relação de recorrência em sua forma matricial

$$u_{n+1} := \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M u_n \,, \quad n \in \{0, 1, \cdots\} \subset \mathbb{Z} \,, \qquad \text{com} \qquad u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

Como $u_{n+1} = M u_n = M^2 u_{n-1} = \cdots = M^{n+1} u_0$, deve-se obter M^{n+1}, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det\left(M - \lambda I\right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)\,(\lambda - 3) \,,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}^T$ associado a $\lambda_1 = 3$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_1 I\right) v_1 = \begin{pmatrix} 2-(3) & -1 \\ -1 & 2-(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = -x_1 \,,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ com a escolha $x_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}^T$ associado a $\lambda_2 = 1$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_2 I\right) v_2 = \begin{pmatrix} 2-(1) & -1 \\ -1 & 2-(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = y_2 \,,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $y_2 = 1$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e sua inversa } S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \,,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) .$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1} M S$, tem-se $M = S \Lambda S^{-1}$, donde

$$M^{n+1} = \left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right) \cdots \left(S\Lambda S^{-1}\right) = S \Lambda^{n+1} S^{-1} \,,$$

que leva a

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = S \Lambda^{n+1} S^{-1} u_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{n+1} + 1 \\ -3^{n+1} + 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Logo,

$$x_n = \frac{1 + 3^n}{2} \qquad \text{e} \qquad y_n = \frac{1 - 3^n}{2} \,, \qquad n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{Z}_+ \,.$$

Use por seu próprio risco (M.H.)

3) Uma certa agência de viagens vendeu para um turista um pacote cujo valor é de 2050 reais. Desprovido de cartão de crédito, o turista pagou, à vista, utilizando cédulas de 10, 50 e 100 reais. Sabendo-se que foram utilizadas 45 cédulas para pagar o valor exato do pacote, determine todas as possíveis combinações de cédulas que o turista pôde eventualmente utilizar. Descrever o problema como um sistema linear $Ax = b$ e determinar:
3a) [1,5 pontos] $\mathrm{Im}(A)$ (imagem de A).
3b) [1,5 pontos] $\ker(A)$ (*kernel* de A).
3c) [1,0 ponto] Solução completa necessariamente a partir do item (3b) e solução particular.

---

3) Denotando por ξ, η e μ o número de cédulas de 10, 50 e 100 reais, respectivamente, o problema pode ser descrito pelo sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \xi + \eta + \mu & = & 45 \\ 10\xi + 50\eta + 100\mu & = & 2050 \end{array} \right. ,$$

ou $Ax = b$, onde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 50 & 100 \end{pmatrix}, \qquad x := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b := \begin{pmatrix} 45 \\ 2050 \end{pmatrix}.$$

3a) Sendo $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) : y = Ax\,, x \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})\}$, com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 50 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Os vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 50 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}$ formam uma sequência de vetores linearmente dependente. Com efeito,

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 50 \\ 1 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 40 \\ 1 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 40 \\ 0 & 90 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \\ 0 & 90 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde se nota que a imagem é gerada pelo conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (as passagens no escalonamento acima foram omitidas por serem evidentes). Finalmente, tem-se

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) : \xi, \eta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3b) Sendo $\ker(A) = \{x \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : Ax = 0\}$, com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$0 = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 50 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Com o escalonamento (detalhes omitidos por serem evidentes)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 50 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 40 & 90 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 9/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & 9/4 \end{pmatrix},$$

o sistema $Ax = 0$ é equivalente a resolver

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & 9/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{lcl} \xi - \frac{5}{4}\mu & = & 0 \\ \eta + \frac{9}{4}\mu & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \xi & = & \frac{5}{4}\mu \\ \eta & = & -\frac{9}{4}\mu \end{array} \right. .$$

Use por seu próprio risco (M.H.)

Logo, como $\begin{pmatrix}\xi & \eta & \mu\end{pmatrix}^T = \mu \begin{pmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{9}{4} & 1\end{pmatrix}^T = \tilde{\mu} \begin{pmatrix}5 & -9 & 4\end{pmatrix}^T$, com $\mu = 4\tilde{\mu}$, tem-se

$$\ker(A) = \left\{ \xi \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \xi \in \mathbb{R} \right\} .$$

3c) Do sistema $Ax = b$, tem-se (detalhes omitidos por serem evidentes)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 10 & 50 & 100 & 2050 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 40 & 90 & 1600 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & 9/4 & 40 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/4 & 5 \\ 0 & 1 & 9/4 & 40 \end{array} \right) ,$$

id est, após um escalonamento simples, o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & 9/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 40 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{rcl} \xi - \frac{5}{4}\mu & = & 5 \\ \eta + \frac{9}{4}\mu & = & 40 \end{array} \right. .$$

Uma solução particular x_p do problema pode ser obtida impondo $\mu = 0$, implicando $x_p = \begin{pmatrix}5 & 40 & 0\end{pmatrix}^T$.

A solução geral do problema é dada por $x = x_p + x_k$, onde $\{x_k\}$ gera o kernel de A ($Ax_k = 0$). Logo, do item anterior (e fazendo as devidas mudanças), chega-se à solução geral do sistema $Ax = b$, que é dada por

$$x = x_p + x_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad \xi \in \mathbb{R} .$$

Contudo, para obter soluções realísticas e que obedeçam às condições impostas pelo problema (número de cédulas como inteiros não-negativos), o valor de ξ deve percorrer um subconjunto da reta real, que é o intervalo dos inteiros entre 0 e 4, ou $[0, 4] \subset \mathbb{Z}$:

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad \xi \in [0, 4] \subset \mathbb{Z} .$$

Use por seu próprio risco (M.H.)