Algoritmos e Estruturas de Dados II

Profa. Helton Hideraldo Bíscaro

Parte 1 – Introdução a Grafos

Objetivos

- Estudo e resolução de problemas que utilizem estruturas de dados complexas.
- Desenvolvimento e implementação de algoritmos clássicos.

Programa Resumido

- Estruturas de dados para representação de grafos, algoritmos de busca em grafos.
- Algoritmos para classificação externa em disco e fita.
- Arquivos, consultas, organizações seqüênciais, técnicas de indexação, árvores-B e hashing.
- Organização de arquivos: sequencial, aleatória e invertida.
- Estruturas de dados para alocação dinâmica de memória, coleta e compactação de lixo.

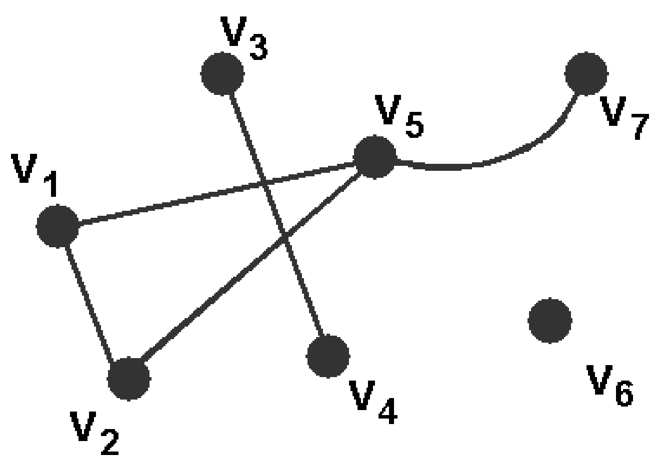
Bibliografia

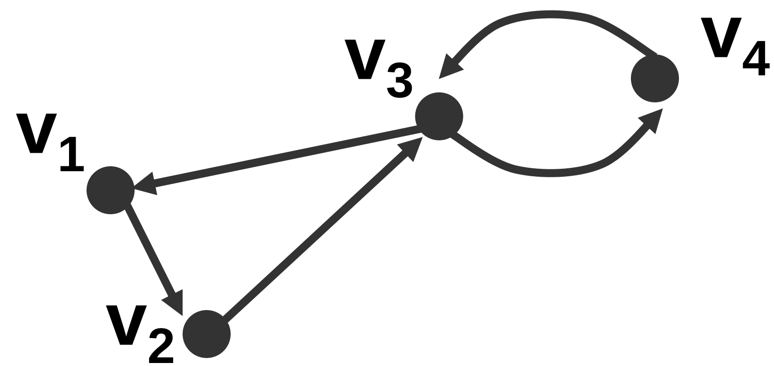
- - TENEMBAUM,A.M. et al Data Structures Using C, Prentice-Hall, 1990.

  - AHO,A.V.; HOPCROFT,J.E.; ULLMAN,J.D. Data Structure and Algorithms. Readings, Addison Wesley, 1982.
  - SZWARCFITER,J.L. Grafos e Algoritmos Computacionais. Editora Campus, 1983.
  - WIRTH,N. Algorithms and Data Structures, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1986.
  - CORMEN, H.T.; LEISERSON, C.E.; RIVEST, R.L. Introduction to Algorithms, MIT Press, McGraw-Hill, 1999.

Grafos - Definições

Visualmente, os grafos são representados por um conjunto de pontos e um conjunto de linhas ou setas ligando esses pontos.

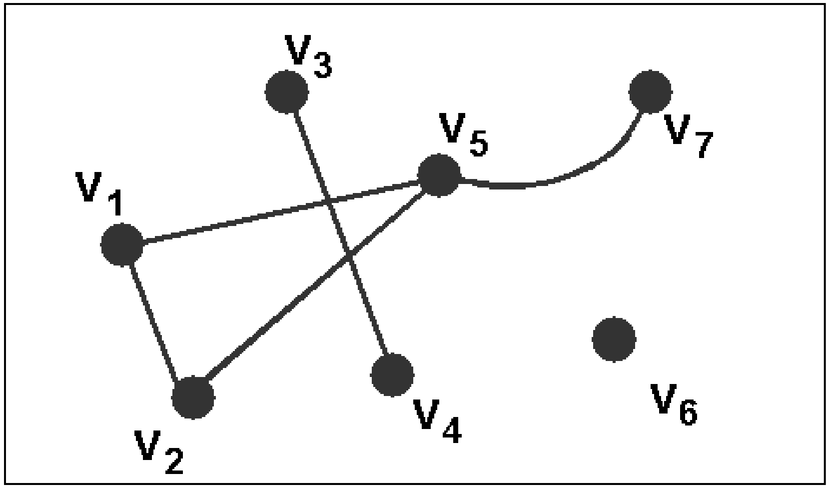




Vértices – são os “pontos”, ou nós.
Arestas – são as linhas ou setas, ou arcos.

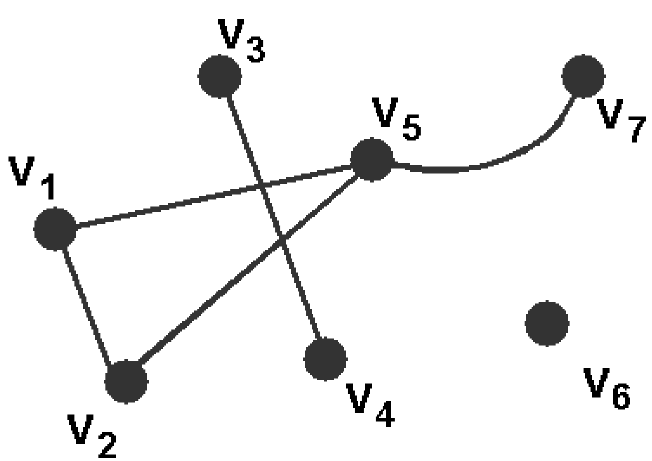
Grafos - Definições

- Grafo é um modelo matemático que representa relacionamentos entre objetos.
- Um grafo G = (V, E) consiste de um conjunto de vértices V, ligados por um conjunto de arestas E.



Grafos - Definições

- Um <u>grafo não direcionado</u>, ou não orientado, G = (V,E) é formado por conjunto não-vazio V de <u>vértices</u>, e um conjunto E de <u>arestas</u>.
- Uma <u>aresta</u> é um par não-ordenado (v_i,v_j), onde v_i e v_j são elementos de V.



$$V = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 ,v_6 ,v_7 \}$$

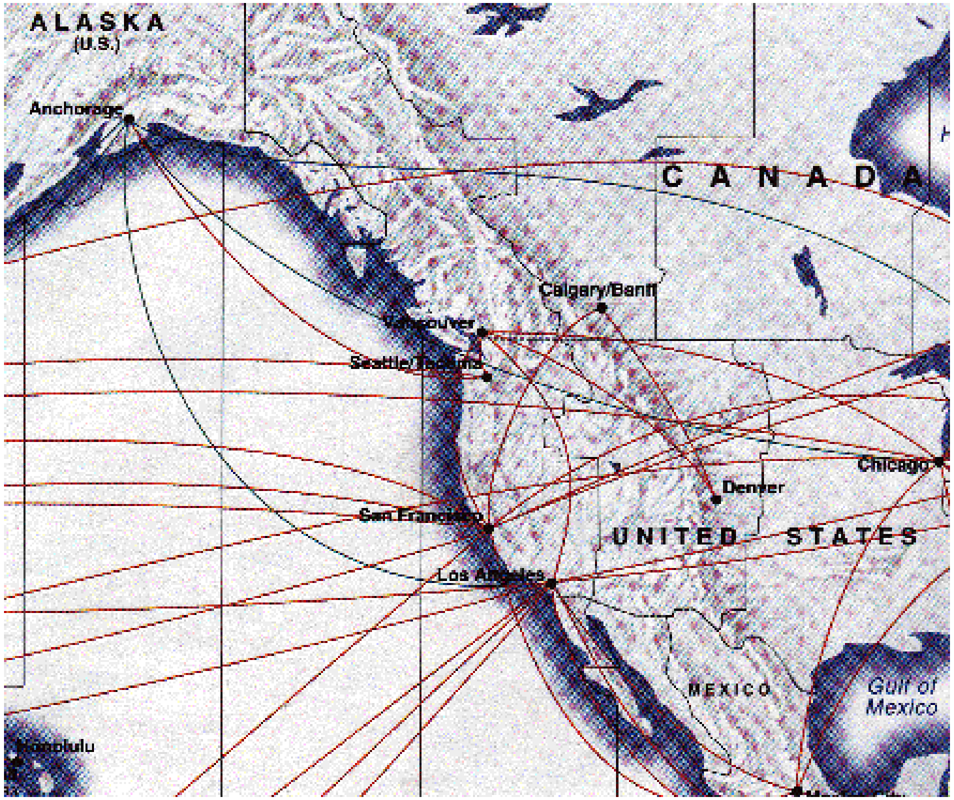
$$E = \{(v_1, v_2),(v_1, v_5), (v_2, v_5), (v_3, v_4),(v_5, v_7) \}$$

Grafos - Aplicações

- Grafos são muito utilizados para modelar sistemas reais como por exemplo:
  - redes de distribuição de energia, telecomunicações
  - malha viária de uma cidade
  - circuitos elétricos
  - processos industriais e processos de negócio

Grafos - Aplicações

- Mapas de rotas aéreas, rodoviárias, etc.



Fonte: http://dwb.unl.edu/Teacher/NSF/C06/C06Mats/GraphTh/GrphTh.html

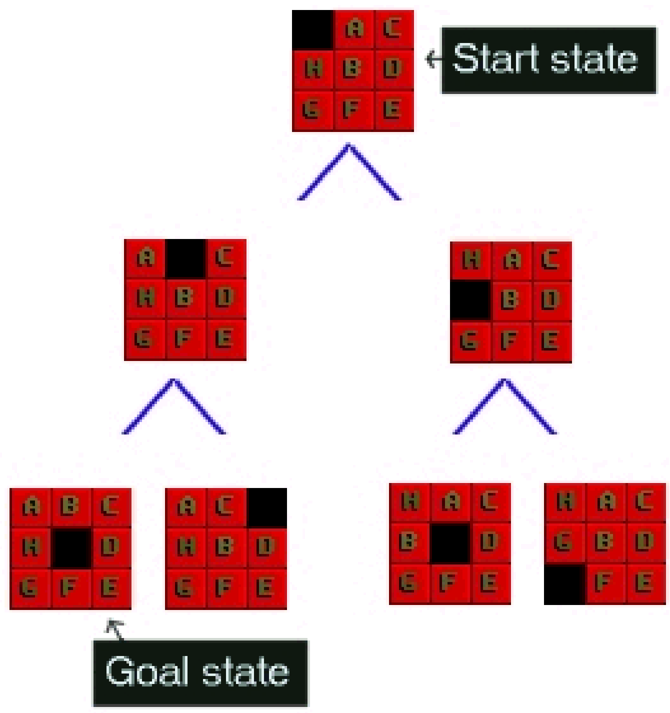
Grafos - Aplicações

- Coloração de mapas: de quantas cores precisamos para construir um mapa de modo que regiões adjacentes não tenham a mesma cor?

Fonte: www.cin.ufpe.br/~if670/2-2005

Grafos - Aplicações

- Teoria dos jogos



Fonte: http://www.geocities.com/jheyesjones/astar.html

Grafos - Aplicações

- Qual é o caminho mínimo entre duas cidades em um mapa?

Fonte: www.cin.ufpe.br/~if670/2-2005

Ordem de um grafo

- A ordem de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, |V| , ou seja, pelo número de vértices de G.

$$G = (V, E)$$

vértices arestas

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $|V| = n$

Número de arestas de um grafo

- O **número de arestas** de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de arestas, **|E|**.

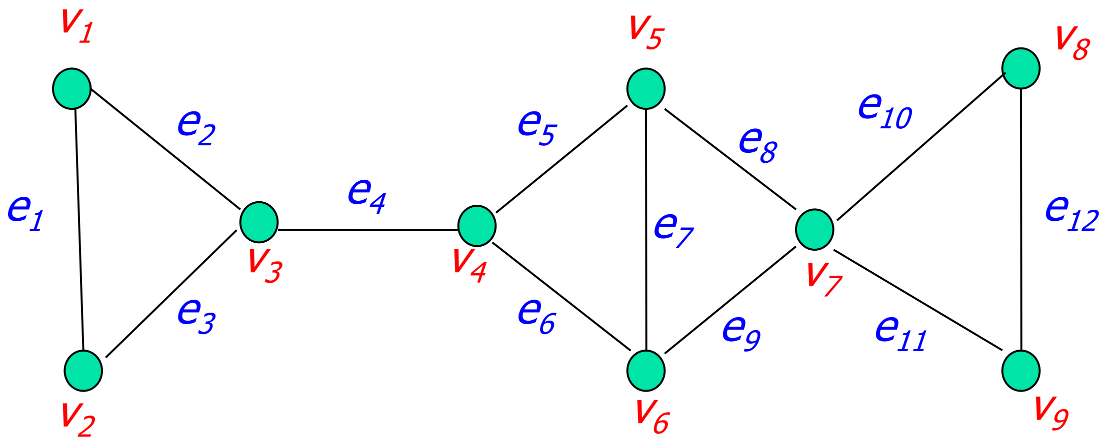
$$G = (V, E)$$

vértices arestas

$$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \qquad |E| = m$$

Exercício

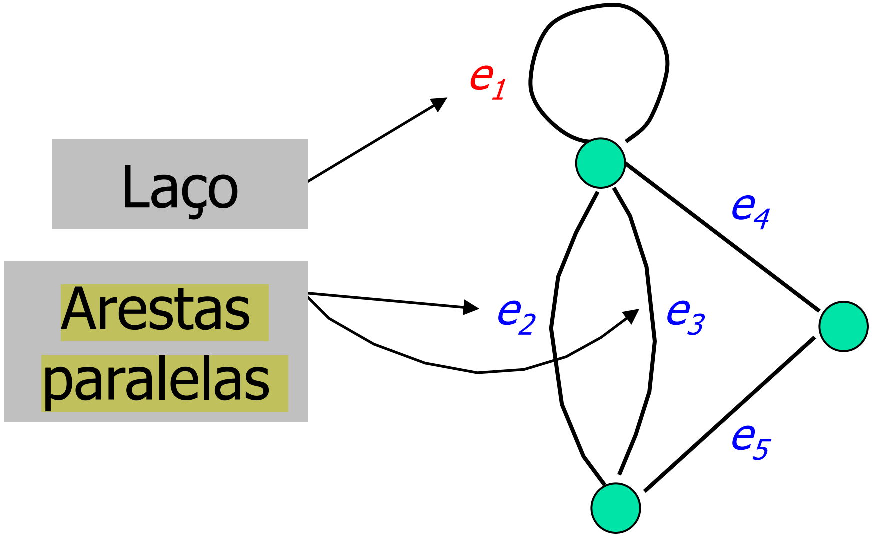
- Dado o grafo G abaixo:



1) Qual a definição formal do grafo G?
2) Qual a ordem do grafo G?
3) Qual o número de arestas de G?

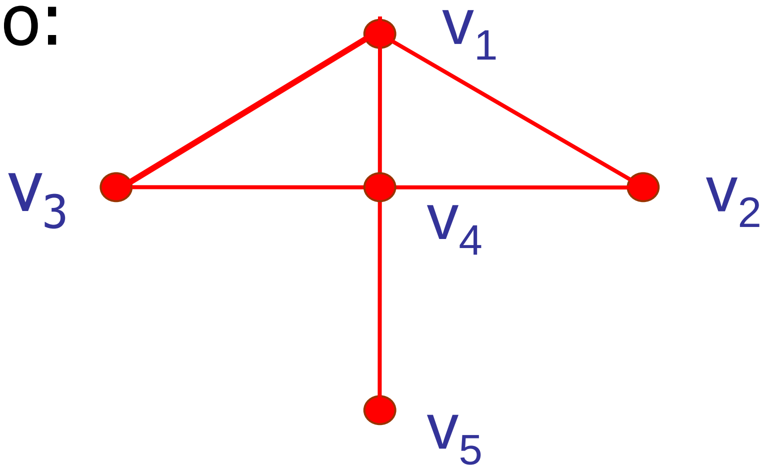
Laços e arestas paralelas

- Uma aresta e= (u, v) é um laço se u = v.
- Duas ou mais arestas são chamadas de arestas paralelas (ou arestas múltiplas) se estas possuírem os mesmos vértices como extremidades.



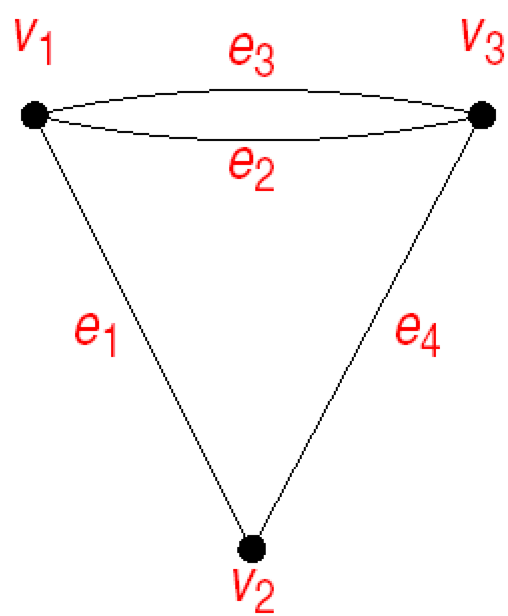
Grafo simples

- Um grafo simples é um grafo sem laços e sem arestas paralelas.
  - Exemplo:



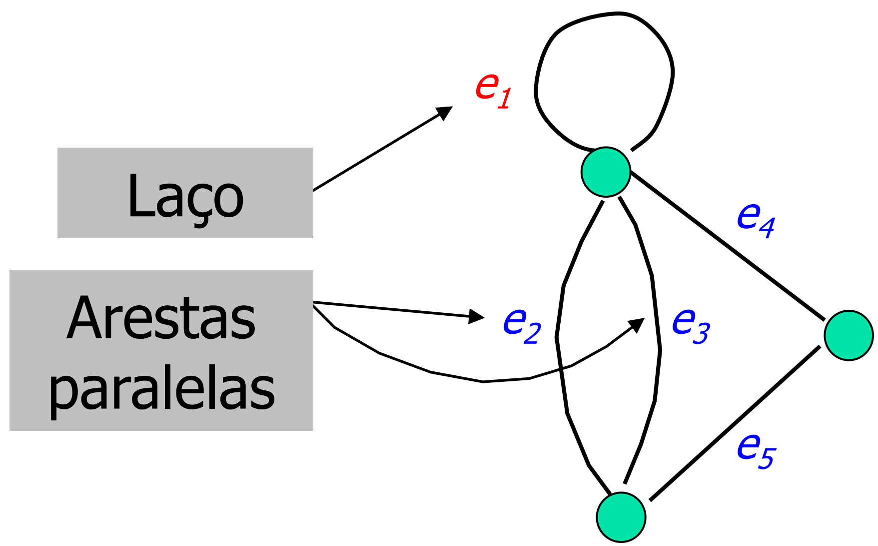
Multigrafo

- Um **multigrafo** é um grafo que não possui laços mas pode ter arestas múltiplas.
  - Exemplo:



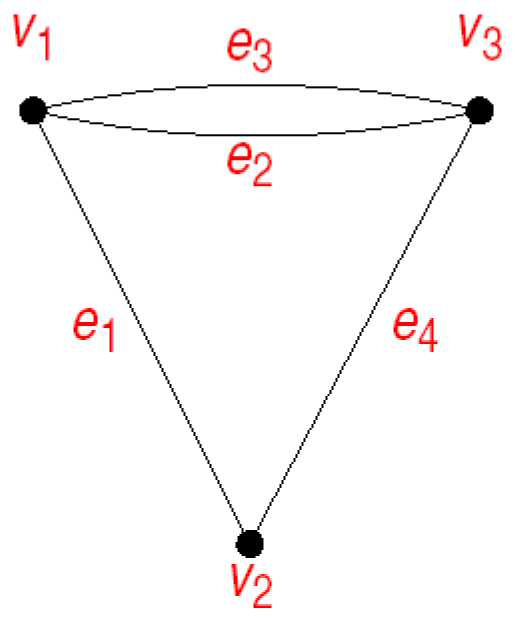
Pseudografo

- Um **pseudografo** é um grafo que pode ter laços e arestas paralelas.
  - Exemplo:



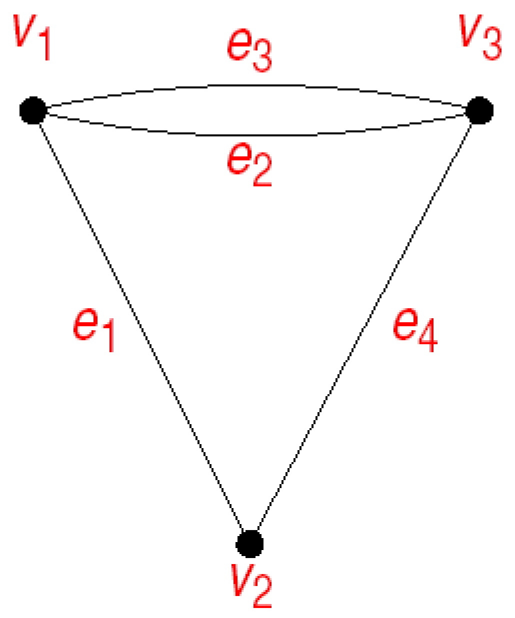
Vértices adjacentes

- Dois vértices que estão conectados por uma aresta são chamados de **adjacentes**.
  - Exemplo:
    - Os vértices v_1 e v_2 são adjacentes.
    - Quais são os outros vértices adjacentes entre si?



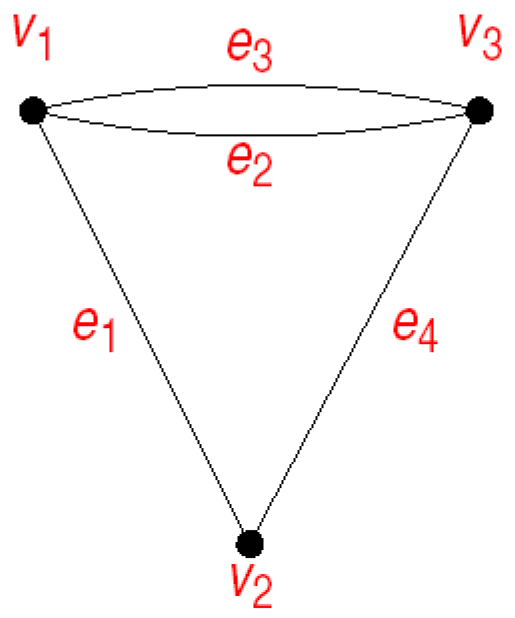
Arestas adjacentes

- Duas arestas são ditas **adjacentes** quando estas possuírem uma extremidade (vértice) comum.
  - Exemplo:
    - As arestas e_1 e e_2 são adjacentes.
    - Quais são as outras arestas adjacentes entre si?



Aresta incidente

- Uma aresta é dita ser **incidente** a cada uma de suas extremidades (vértices).
  - Exemplo:
    - A aresta e_1 é incidente aos vértices v_1 e v_2.
    - As outras arestas são incidentes a quais vértices?



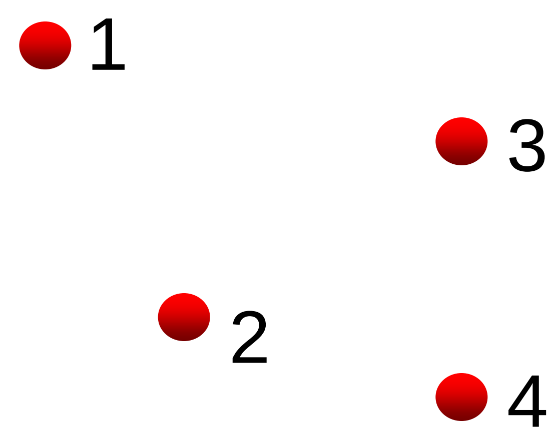
Grafo nulo

- Um grafo é chamado de **grafo nulo** quando o seu número de arestas é igual a zero.
- N_n é um grafo nulo com n vértices.

• Exemplo: N_4

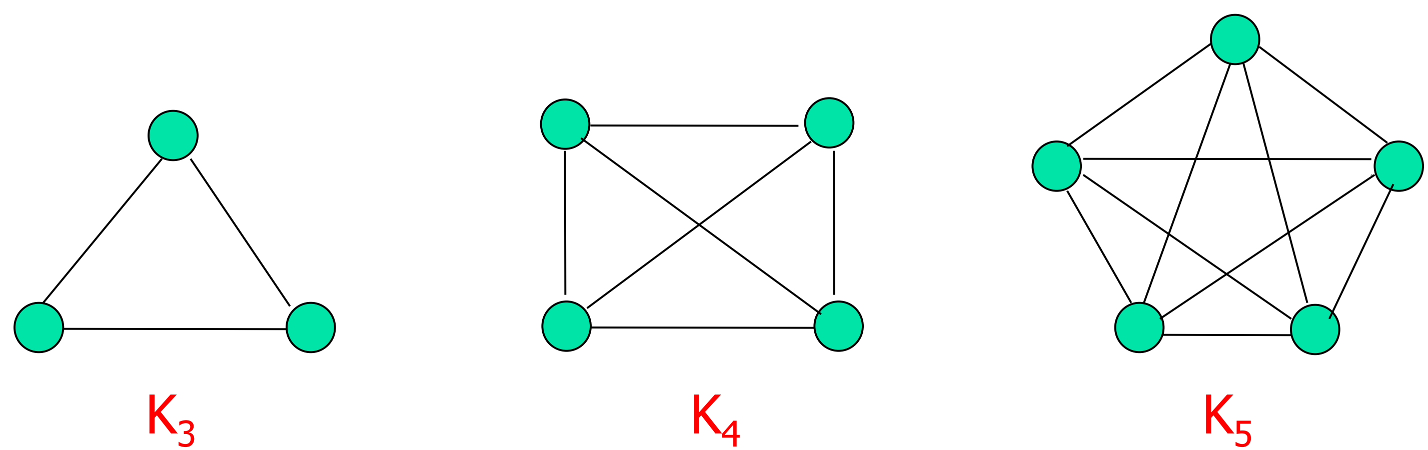
$V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$

$E=\{\ \}$.



Grafo completo

- Um grafo completo é um grafo simples no qual existe exatamente uma aresta entre cada par de vértices distintos.
- K_n é um grafo completo com n vértices.



Fonte: http://www-di.inf.puc-rio.br/~celso/disciplinas

Grafo completo

- Dado um grafo completo K_n, tem-se que:

Vértice	está conectado aos vértices (não conectados ainda)	por meio de #arestas
v_1	$v_2, v_3, \ldots, v_n$	n-1
v_2	$v_4, v_5, \ldots, v_n$	n-2
…	…	…
v_{n-1}	v_n	1
v_n	-	0

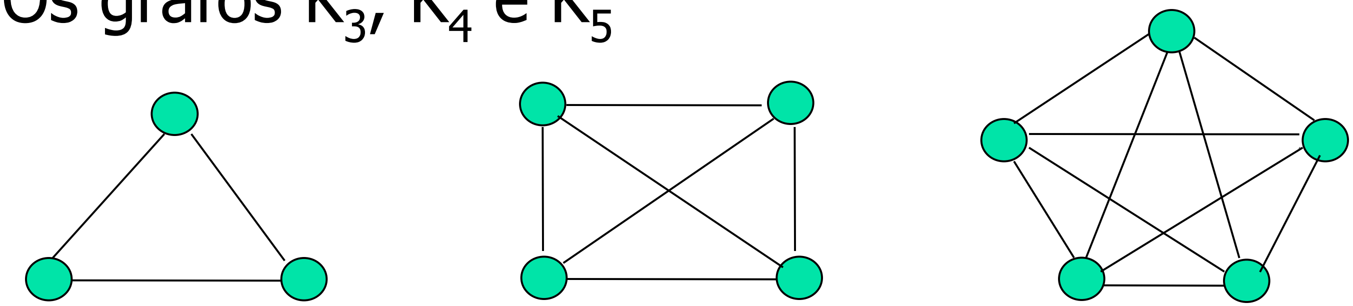
Grafo completo

- Ou, seja a soma total do número de arestas de K_n é:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Grafo completo

- Os grafos K_3, K_4 e K_5



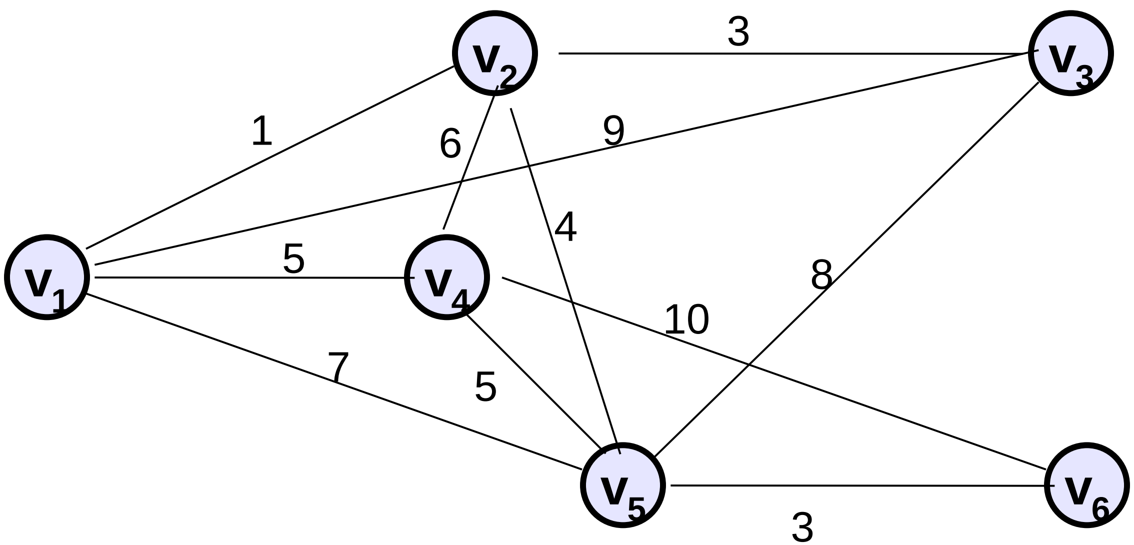
K_3 K_4 K_5

possuem os seguintes números de arestas:

Grafo	#arestas
K_3	3
K_4	6
K_5	10

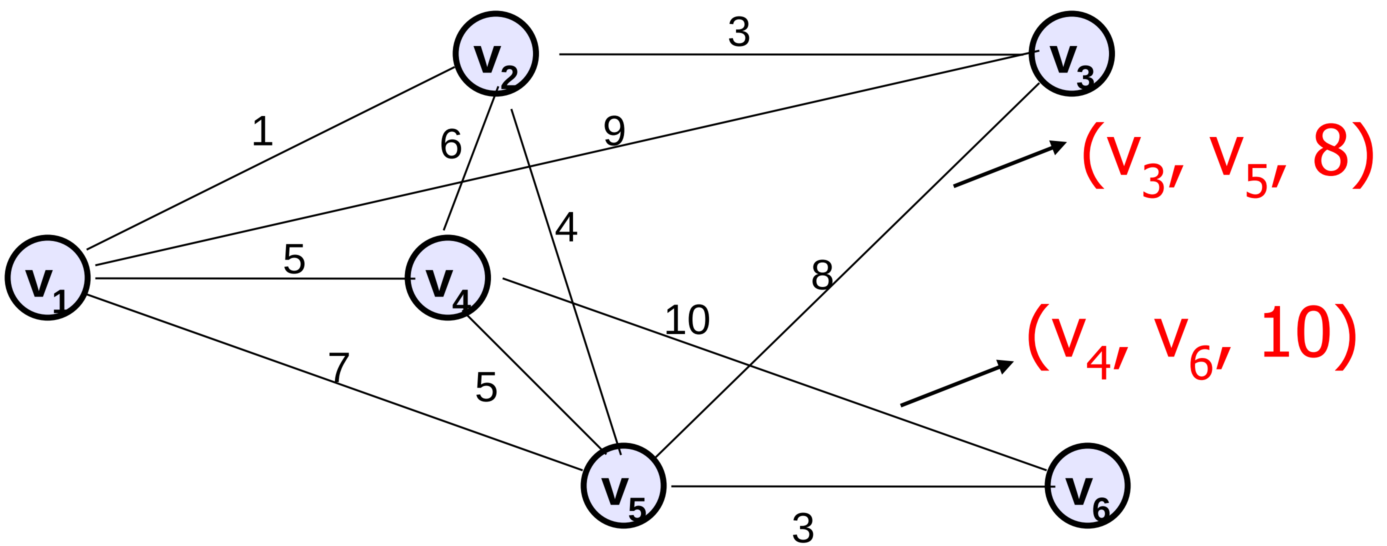
Grafo valorado

- Um grafo valorado G=(V, A) consiste de um conjunto V finito não vazio de vértices, conectados por um conjunto de arestas A, com valores (pesos) associados.



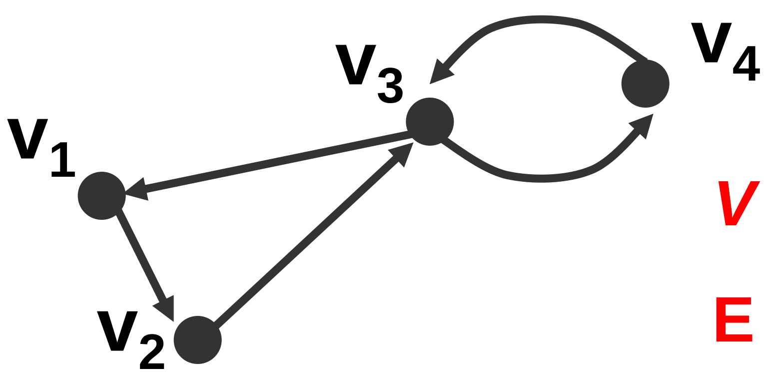
Grafo valorado

- Nesse caso, o conjunto de arestas A consiste de triplas distintas da forma (v, w, valor), em que v e w são vértices em V e valor é um número real.



Grafo direcionado

- Um grafo direcionado (ou dígrafo, ou grafo orientado) G = (V,E) é formado por conjunto não-vazio V de vértices, e um conjunto E de arestas direcionadas.
- Uma aresta aqui é um par ordenado (v_i,v_j), onde v_i e v_j são elementos de V.



Cada aresta (v_i,v_j) possui uma única direção de v_i para v_j.

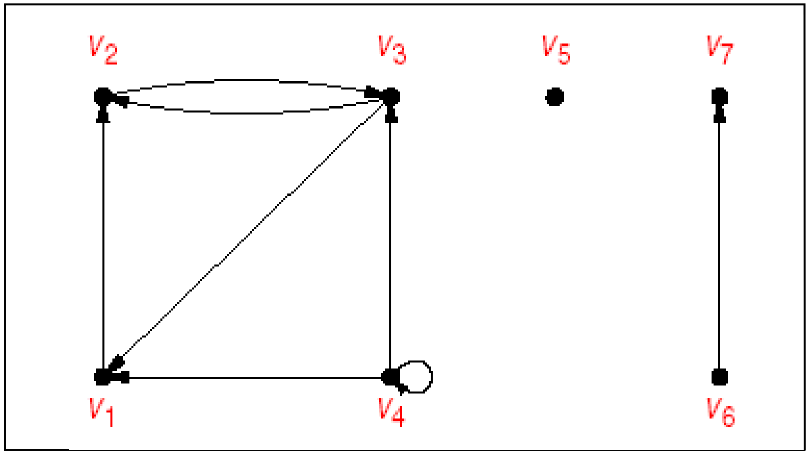
$V = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$E = \{(v_1, v_2),(v_2, v_3),$
$(v_3, v_1), (v_3, v_4),(v_4, v_3) \}$

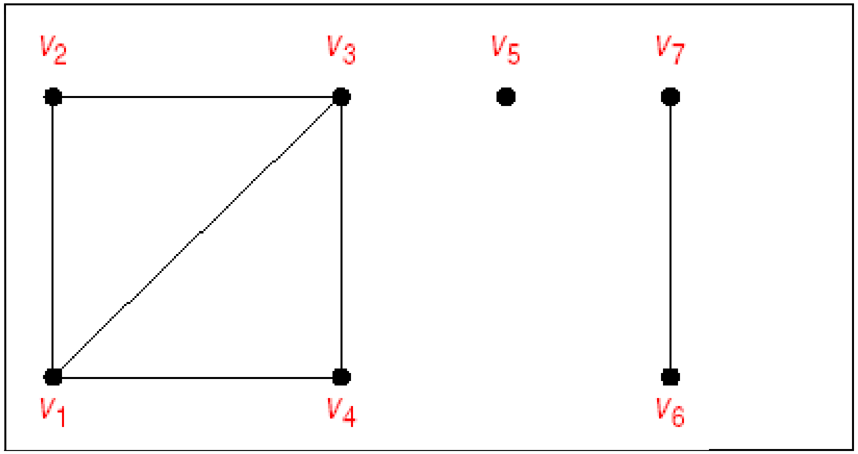
Grafo direcionado

- Para cada grafo direcionado, existe um grafo simples (não direcionado), que é obtido removendo-se as direções das arestas e os laços.

Grafo direcionado

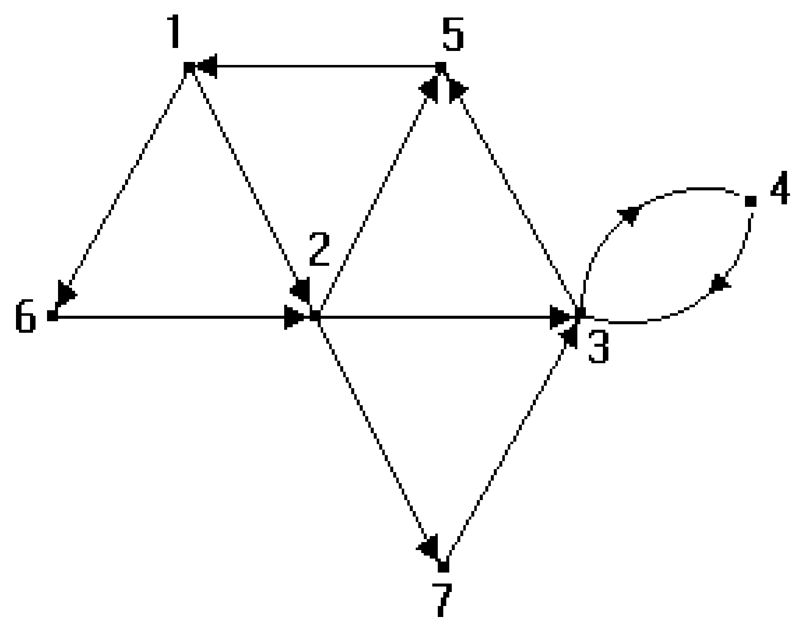


Grafo não direcionado correspondente



Grafo direcionado

- Em um grafo direcionado, uma aresta (v,w) é dita ser divergente do vértice v e convergente ao vértice w.
  - Exemplo

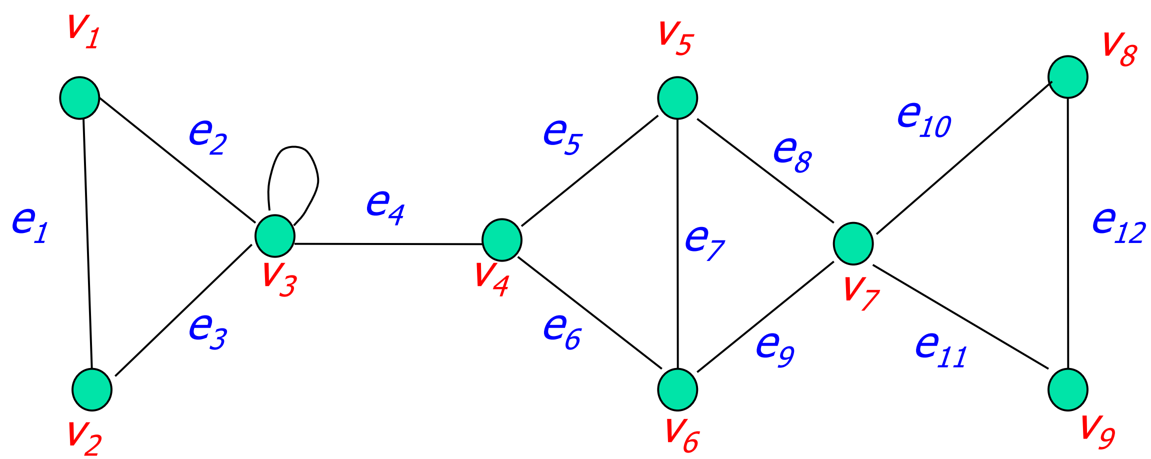


- **(1,6) é divergente de 1 e convergente a 6**
- **(3,5) é divergente de 3 e convergente a 5**

Grau de um vértice

- Em um grafo não direcionado, o grau d(v) de um vértice v é dado pelo número de arestas incidentes a v (ou pelo número de vértices adjacentes a v).
- Obs: Um laço conta duas vezes para o grau de um vértice.

Exemplo



$d(v_1) = d(v_2) = d(v_8) = d(v_9) = 2$

$d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) = 3$

$d(v_7) = 4$

$d(v_3) = 5$

Fonte: http://www-di.inf.puc-rio.br/~celso/disciplinas

Grau de um grafo

- O grau de um grafo é igual à soma dos graus de seus vértices, ou seja:

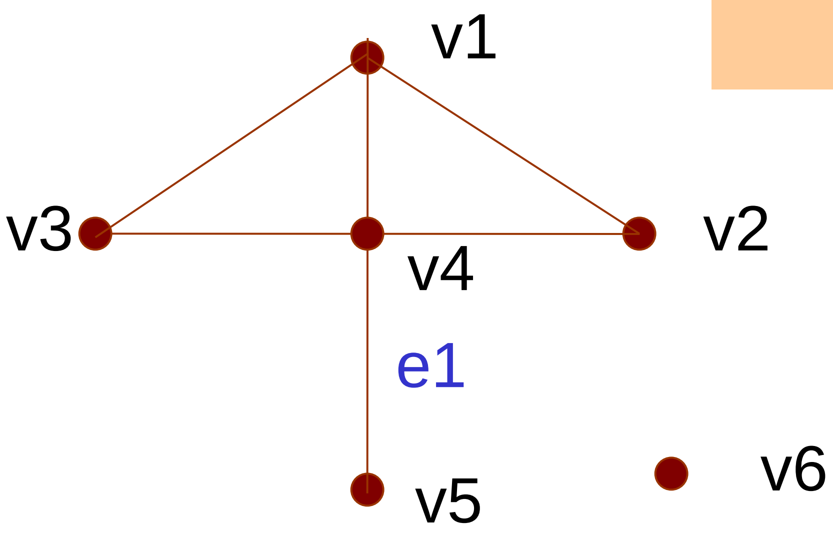
$$\boxed{\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|}$$

- Observe que o resultado acima sempre é um número par.
  - prova inspirada no Teorema do Aperto de Mãos

Grau de um vértice

- Um vértice de grau zero é chamado de vértice isolado;
- Um vértice de grau 1 é chamado de vértice pendente;
- Um vértice de grau ímpar é chamado de vértice ímpar;
- Um vértice de grau par é chamado de vértice par.

Exemplo



V6 é um vértice isolado, d(v6)=0

V5 é um vértice pendente, d(v5)=1

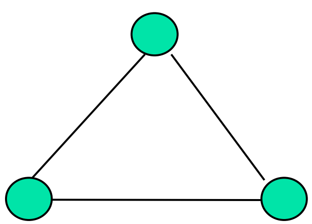
V2 é um vértice par, d(v2)=2

V1 é um vértice ímpar, d(v1)=3

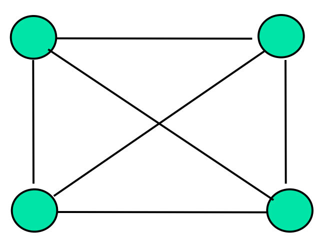
Fonte: www.cin.ufpe.br/~if670/2-2005 z

Grafo regular (k-regular)

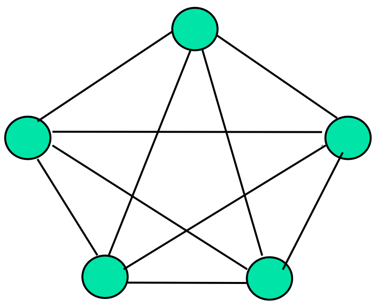
- Um grafo não direcionado é regular se todos os seus vértices têm o mesmo grau (k);
- Qualquer grafo completo K_n é $(n\text{-}1)$-regular.



K_3



K_4



K_5

Grafo regular (k-regular)

- Se um grafo G for regular de grau k, a soma de graus de todos os graus de seus vértices (grau do grafo) será igual a:

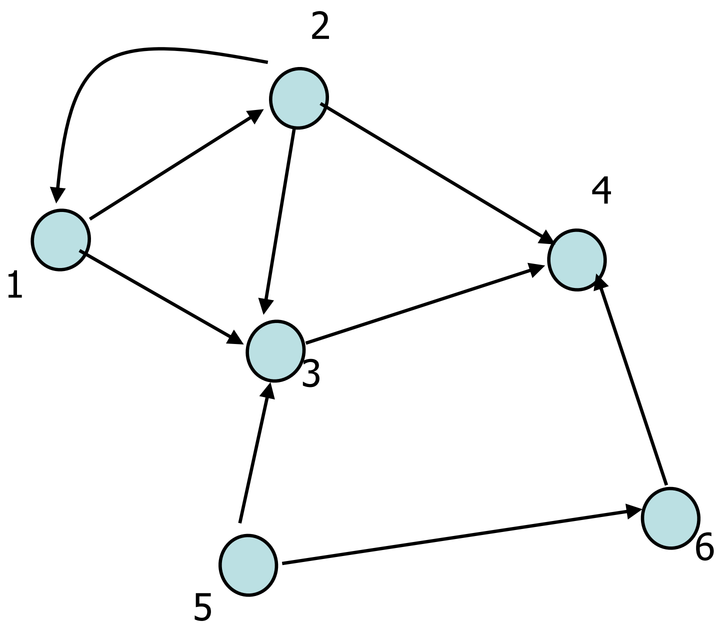
$$\boxed{\sum_{v \in V} d(G) = k|V|}$$

Grau de um vértice

- Em um grafo direcionado:
  - O grau de saída $d^+(v)$ de um vértice v é dado pelo número de arestas divergentes (que saem) de v.
  - O grau de entrada $d^-(v)$ de um vértice v é dado pelo número de arestas convergentes (que chegam) a v.
- Nesse caso, o grau $d(v)$ de um vértice v é dado por:

$$d(v) = d^-(v) + d^+(v)$$

Exemplo



$d^{-}(1) = 1$

$d^{+}(4) = 0$

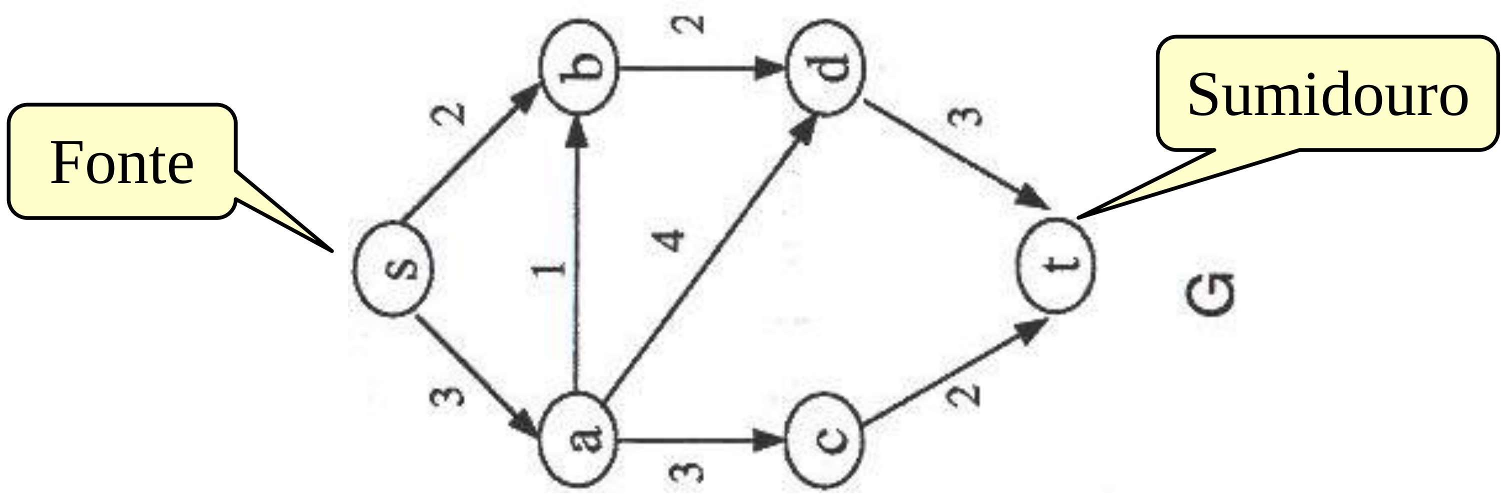
$d^{-}(4) = 3$

$d^{+}(6) = 1$

Fonte: http://www-di.inf.puc-rio.br/~celso/disciplinas

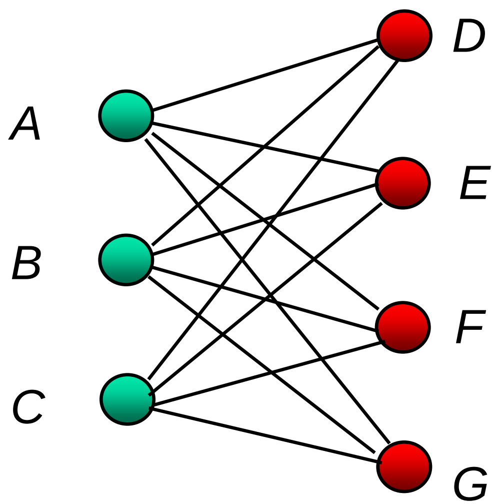
Grau de um vértice

- Um vértice com grau de saída igual a zero, $d^+(v) = 0$, é chamado de sumidouro.
- Um vértice com grau de entrada igual a zero, $d^-(v) = 0$, é chamado de fonte.



Grafo bipartido

- Em um <u>grafo bipartido</u>, o conjunto de vértices V pode ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 tais que: qualquer aresta do grafo possui uma extremidade em V_1 e a outra em V_2.



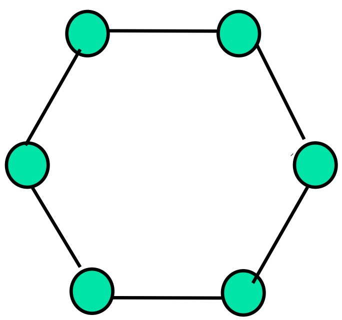
$V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$

$V_1 = \{A, B, C\}$

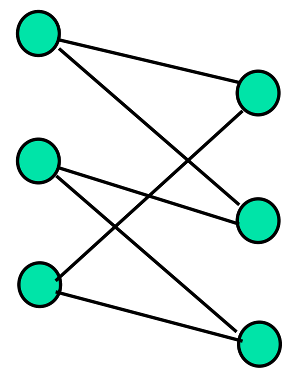
$V_2 = \{D, E, F, G\}$

Exercício

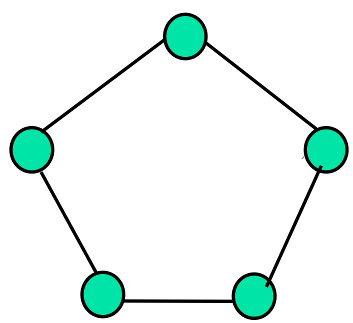
- Quais desses grafos são bipartidos?



a)



b)

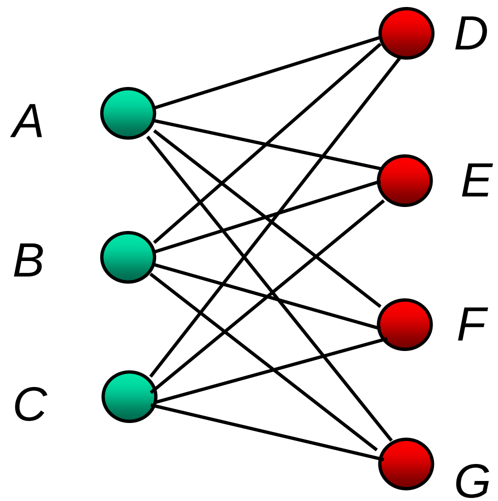


c)

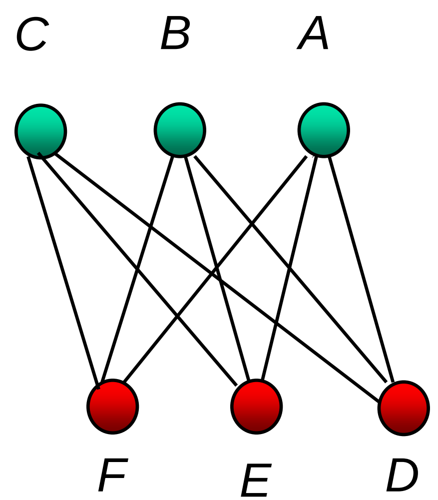
Fonte: http://www-di.inf.puc-rio.br/~celso/disciplinas

Grafo bipartido completo

- Um grafo bipartido completo, $K_{m,n}$, é um grafo bipartido no qual $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$.
- Além disso cada vértice em V_1 está conectado (é adjacente) a todos os vértices em V_2.



$K_{3,4}$



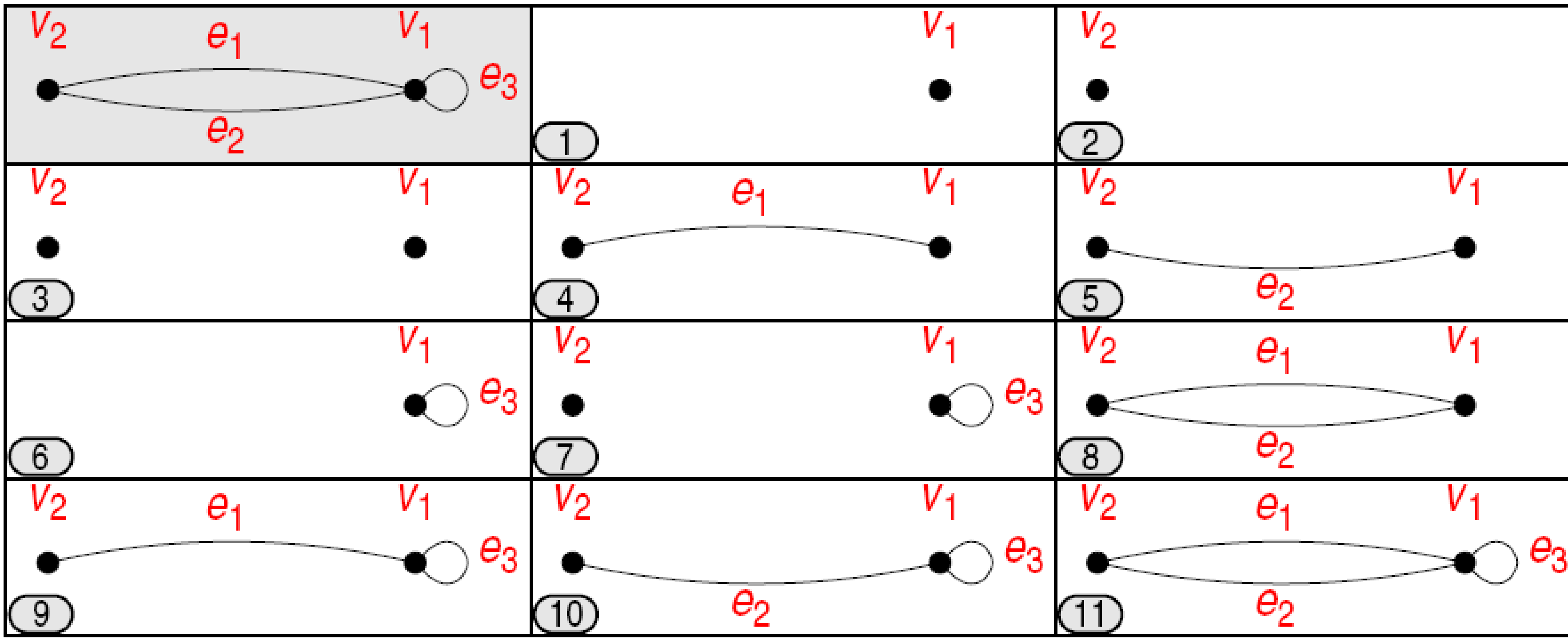
$K_{3,3}$

Subgrafo

- Um grafo $G' = (V', E')$ é um <u>subgrafo</u> do grafo $G = (V, E)$ se, e somente se:
  - cada vértice de G' é também um vértice de G, ou seja, $V' \subseteq V$.
  - cada aresta de G' é também uma aresta de G, ou seja, $E' \subseteq E$.
- Subgrafos podem ser obtidos através da remoção de arestas e vértices.

Exemplo

- Todos os subgrafos do grafo G:



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Complemento de um grafo

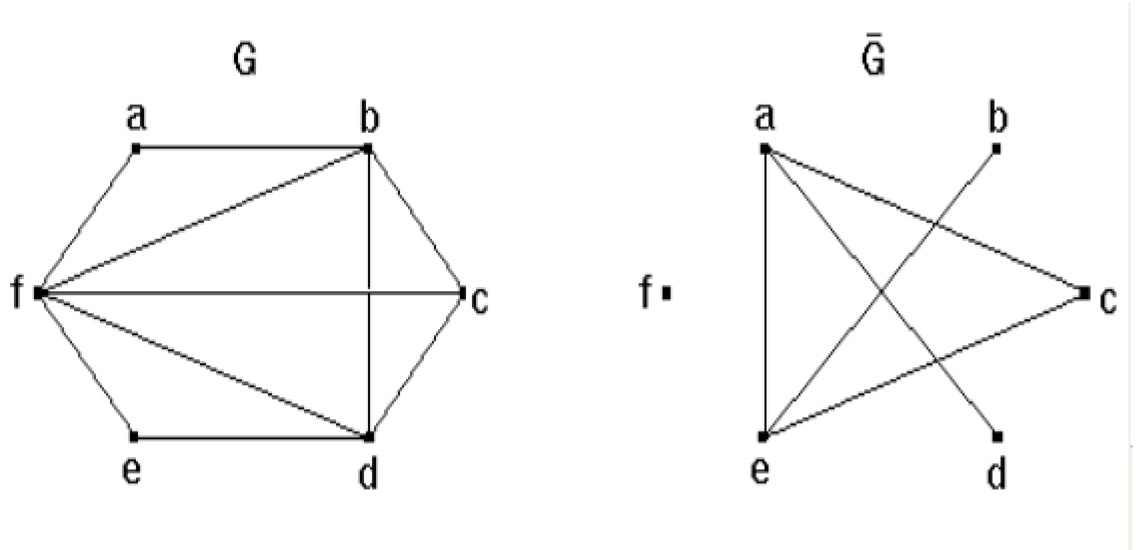
- Seja G = (V, E) um grafo simples.
- Um grafo G’= (V’, E’) é complemento de G se
  - V´ = V
  - dois vértices são adjacentes em G´, se e somente se, não o são em G. Ou seja:

$$(u,v) \in E' \Leftrightarrow (u,v) \notin E$$

$$(u,v) \notin E' \Leftrightarrow (u,v) \in E$$

Exemplo

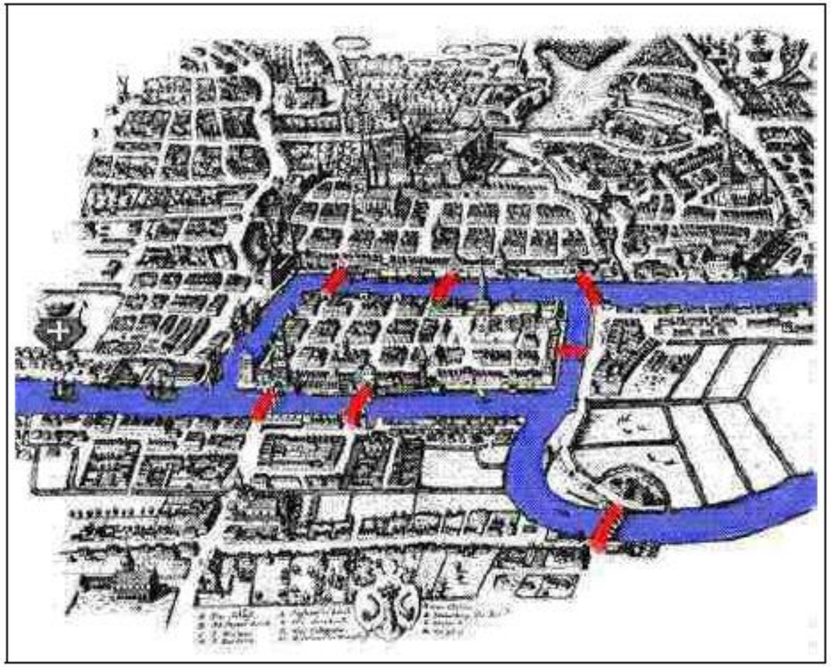
- Os grafos G e G′ são complementares:



Fonte: http:// www.cin.ufpe.br/~if670/2-2005 z

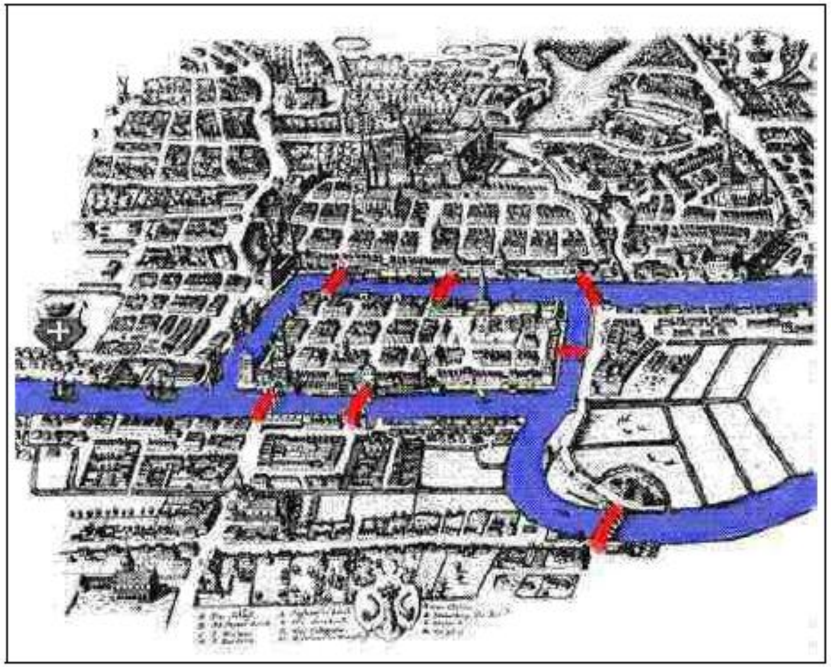
O problema das pontes de Königsberg

- A Teoria dos Grafos começa em 1736.
- Nesse ano, Leonhard Euler publica um artigo que soluciona o Problema das Sete Pontes de Königsberg.



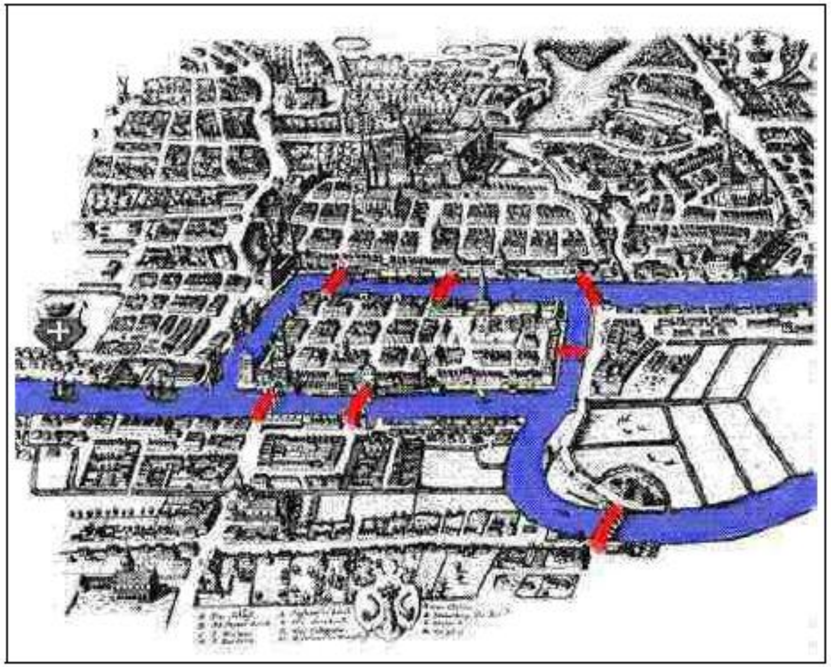
O problema das pontes de Königsberg

- <u>Enunciado</u>: É possível que uma pessoa faça um percurso na cidade de tal forma que inicie e retorne à mesma posição passando por todas as pontes uma única vez?



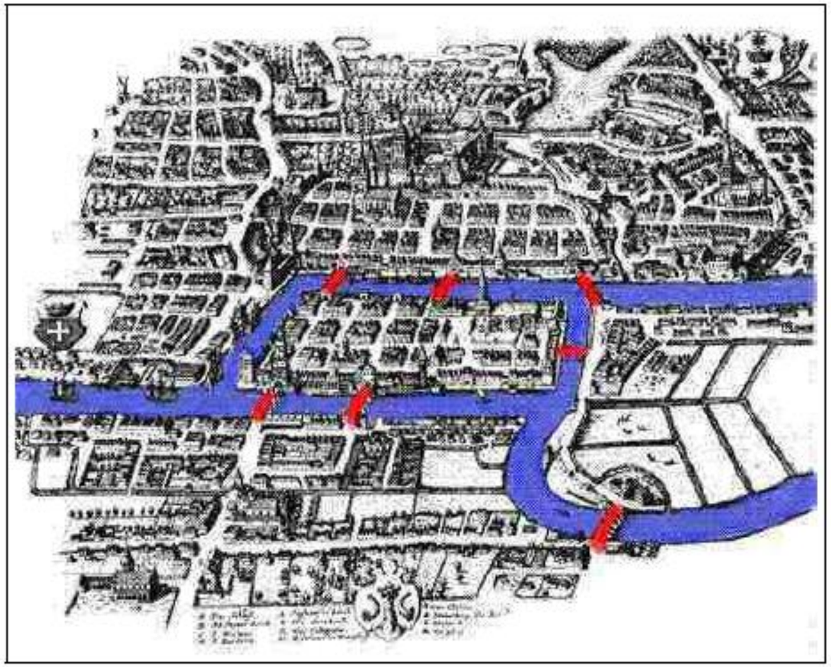
O problema das pontes de Königsberg

- <u>Modelagem (1)</u>: Todos os pontos de uma área contínua podem ser representados por um único ponto (vértice ou nó) já que uma pessoa pode andar de um ponto a outro dessa região sem ter que atravessar uma ponte.



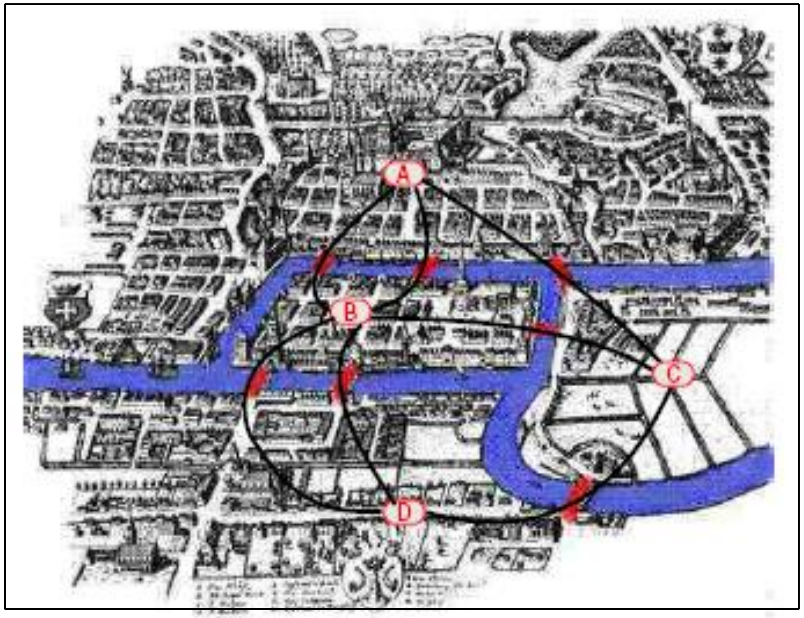
O problema das pontes de Königsberg

- Modelagem (2): Um ponto (vértice ou nó) é conectado a outro se houver uma ponte que ligue esses dois pontos.



O problema das pontes de Königsberg

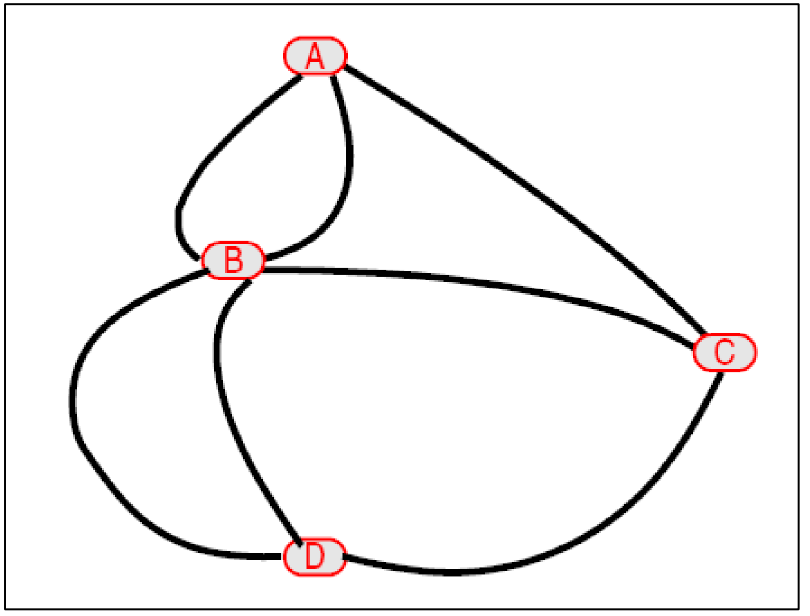
- <u>Modelagem (3)</u>: Graficamente, Euler representou esse problema como mostrado ao lado.



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

O problema das pontes de Königsberg

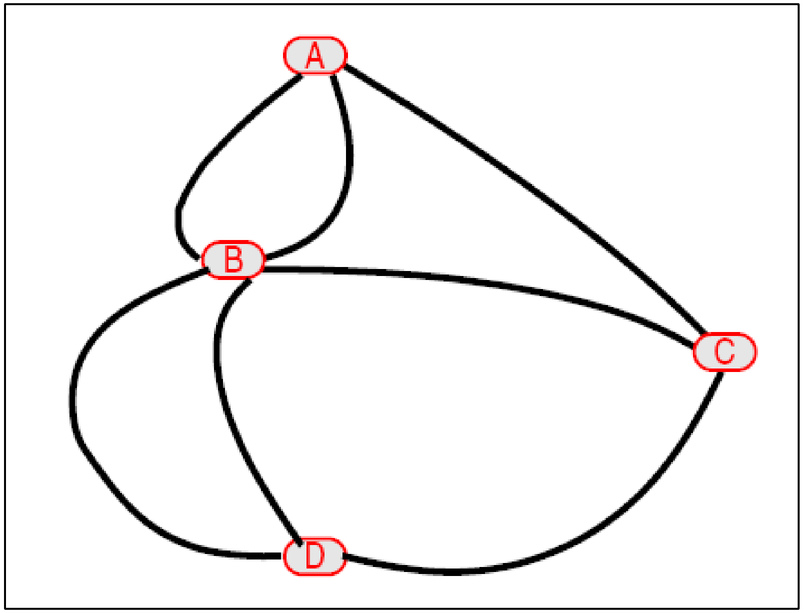
- O problema em grafos (1): É possível achar um caminho que comece e termine em um vértice qualquer (A, B, C, D, E) passando por cada aresta uma única vez?



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

O problema das pontes de Königsberg

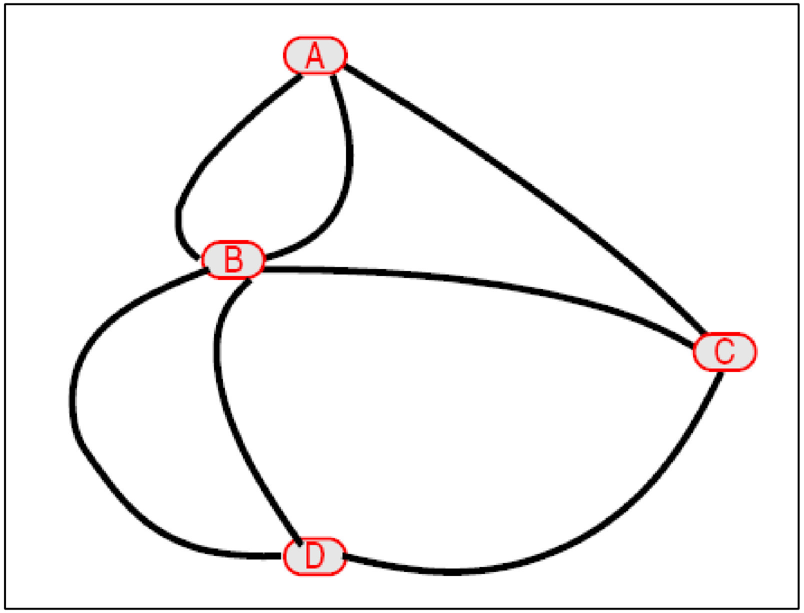
- <u>O problema em grafos (2)</u>: É possível desenhar o grafo ao lado começando e terminando na mesma posição?



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

O problema das pontes de Königsberg

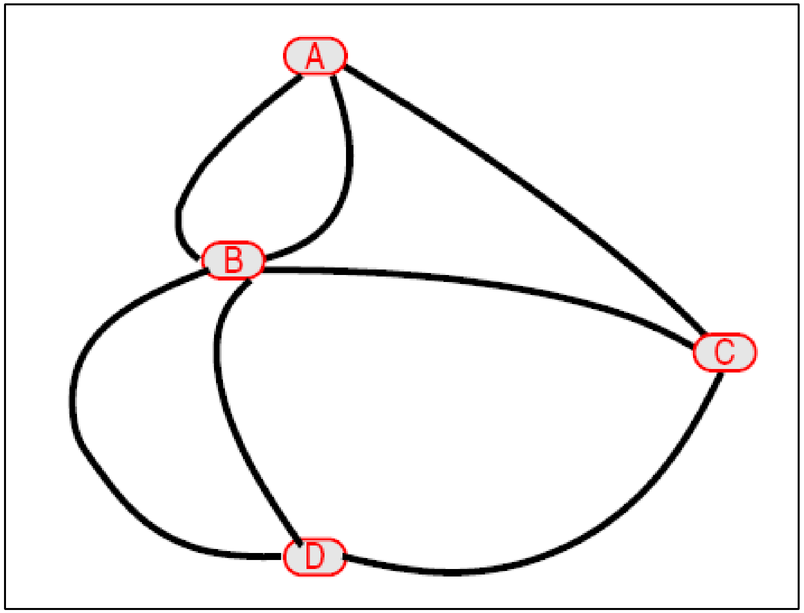
- <u>Raciocínio (1)</u>: partindo do vértice A, toda vez que se passa por qualquer outro vértice, duas arestas são usadas:
  - a aresta de chegada;
  - a aresta de saída.



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

O problema das pontes de Königsberg

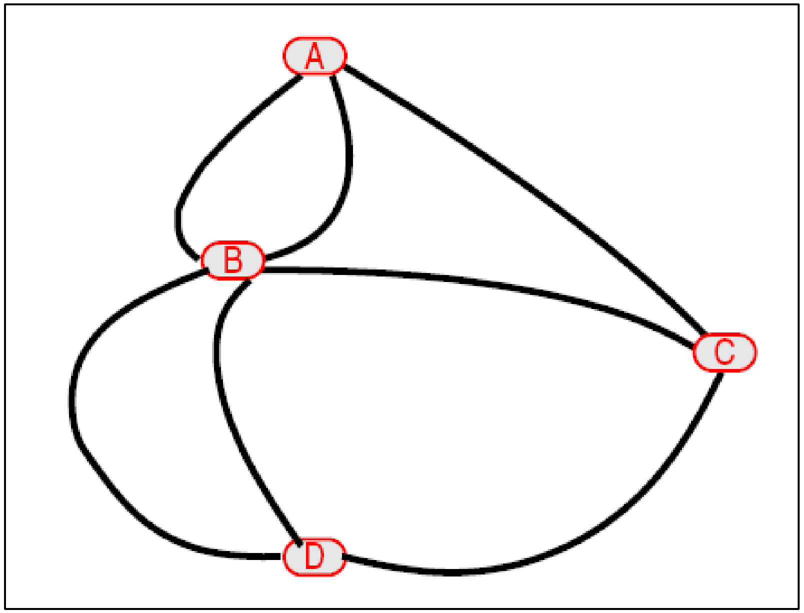
- <u>Raciocínio (2)</u>: assim, se for possível achar uma rota que use todas as arestas do grafo e que comece e termine em A, então:
  - o número total de "chegadas e "saídas" de cada vértice deve ser par.



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

O problema das pontes de Königsberg

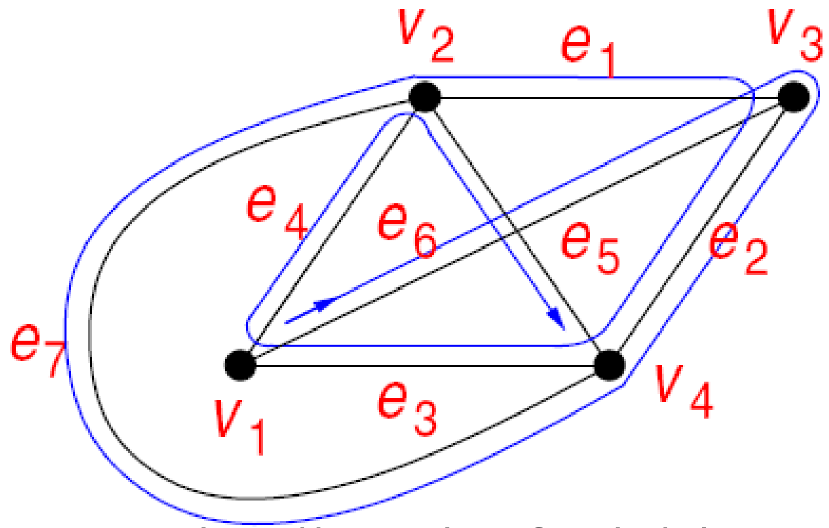
- Raciocínio (3): entretanto, tem-se:
  - d(A) = d(C) = d(D) = 3;
  - d(B) = 3;
- Conclusão: não é possível resolver esse problema.



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Caminho

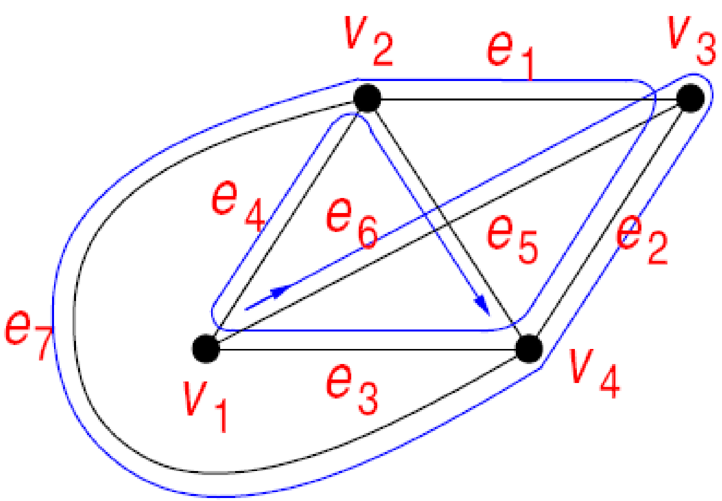
- Um <u>caminho</u> de v a w é uma sequência de vértices e arestas alternados, tais que:
  - cada aresta no caminho é incidente ao nó anterior e ao nó posterior.



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Caminho

- Um caminho tem a forma:
  - ***$(v=)v_0e_1v_1e_2v_2\ldots v_{n-1}e_nv_n(=w)$***
- ***ou, ainda:***
  - ***$v_0(v_0,v_1)v_1(v_1,v_2)v_2\ldots v_{n-1}(v_{n-1},v_n)v_n$***



• Um possível caminho entre v_1 e v_4: $v_1e_6v_3e_2v_4e_7v_2e_1v_3e_2v_4e_3v_1e_4v_2e_5v_4$

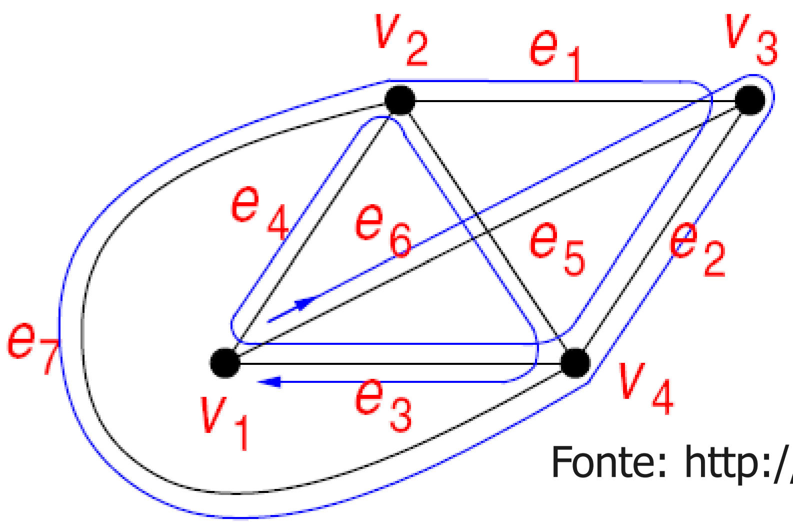
• Os vértices v_1 e v_4 são as <u>extremidades</u> desse caminho.

Caminho

- Se o grafo tiver arestas paralelas:
  - deve-se indicar qual delas está sendo usada.
- Em um caminho de v_0 a v_n :
  - os vértices v_0 e v_n são as <u>extremidades</u> do caminho.
- ***Se existir um caminho c de v para w então w é <u>alcançável</u> a partir de v via c.***

Caminho fechado

- Um caminho fechado é aquele que começa e termina no mesmo vértice:
  - $(v=)v_0e_1v_1e_2v_2\ldots v_{n-1}e_nv_n(=w)$
- ***em que:***
  - $v = w$



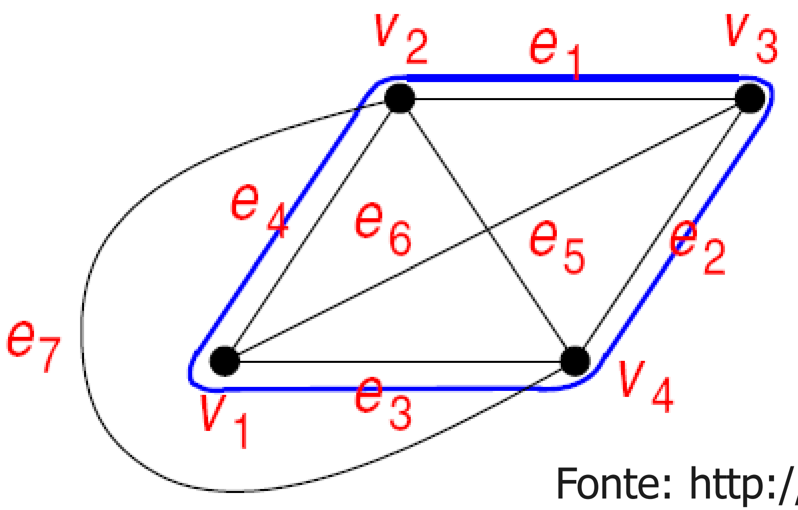
• Um possível caminho fechado:

$v_1e_6v_3e_2v_4e_7v_2e_1v_3e_2v_4e_3v_1e_4v_2e_5v_4e_3v_1$

Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Caminho trivial e ciclo

- Um <u>caminho trivial</u> de v para v consiste apenas do vértice v (sem arestas).
- ***Um caminho fechado com pelo menos uma aresta é chamado de <u>ciclo</u>.***

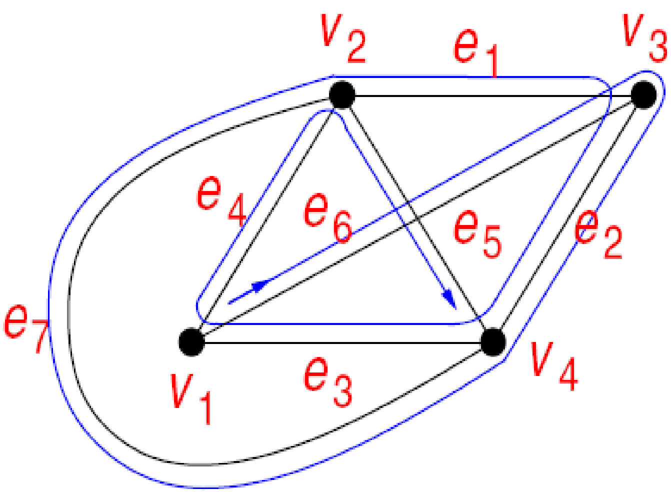


O caminho fechado $v_1v_2v_3v_4v_1$ forma o mesmo ciclo que os caminhos:
$v_2v_3v_4v_1v_2$
$v_3v_4v_1v_2v_3$
$v_4v_1v_2v_3v_4$.

Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Caminho

- Um grafo sem ciclos é chamado de <u>acíclico</u>.
- O <u>comprimento</u> de um caminho é igual ao número de arestas percorridas nesse caminho.

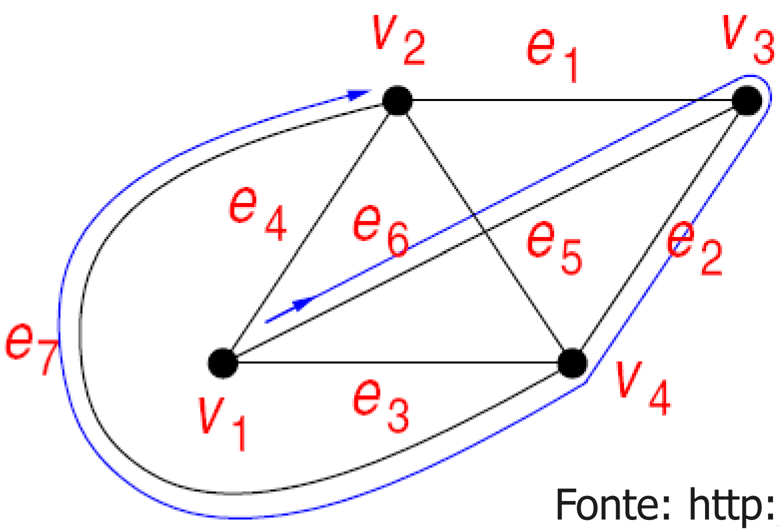


- Um possível caminho entre v_1 e v_4: $v_1e_6v_3e_2v_4e_7v_2e_1v_3e_2v_4e_3v_1e_4v_2e_5v_4$
- O comprimento desse caminho é 8.

Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Caminho simples

- Diz-se que um caminho é <u>simples</u> se este não tiver vértices repetidos.
  - É claro que um caminho simples também não tem arestas repetidas.



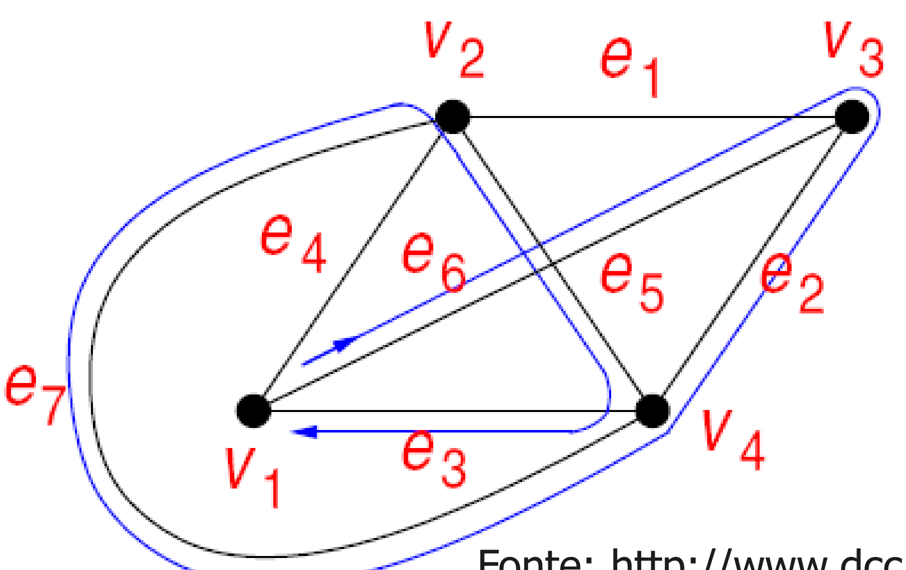
- Um exemplo de caminho simples: $v_1e_5v_3e_2v_4e_7v_2$

Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Circuito

- Um <u>circuito</u> é um caminho fechado (ciclo) e sem arestas repetidas.

> • Um exemplo de circuito:
> $v_1e_6v_3e_2v_4e_7v_2e_5v_4e_3v_1$

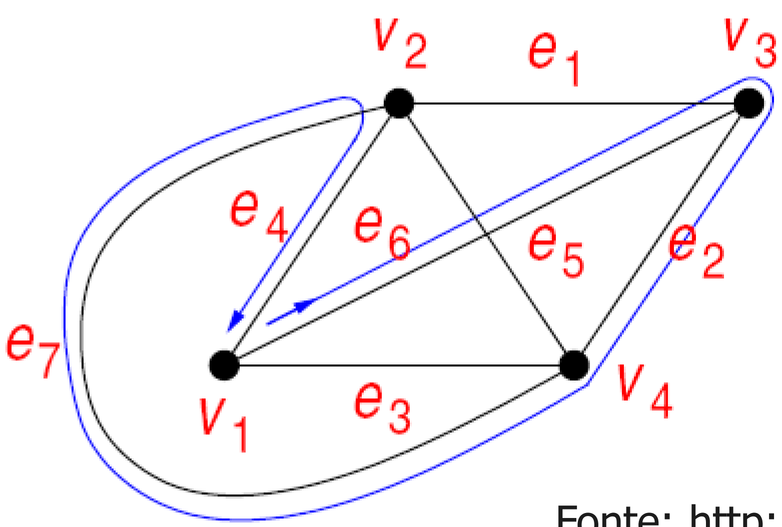


Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Circuito simples

- Um <u>circuito (ciclo) simples</u> é um <u>circuito (ciclo)</u> sem vértices duplicados.

• Um exemplo de circuito simples: $v_1e_6v_3e_2v_4e_7v_2e_4v_1$



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

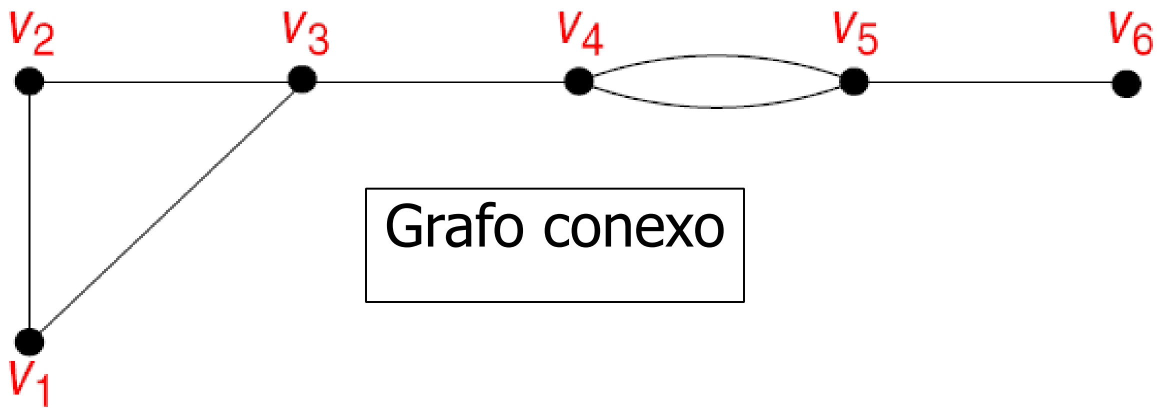
Grafo conexo

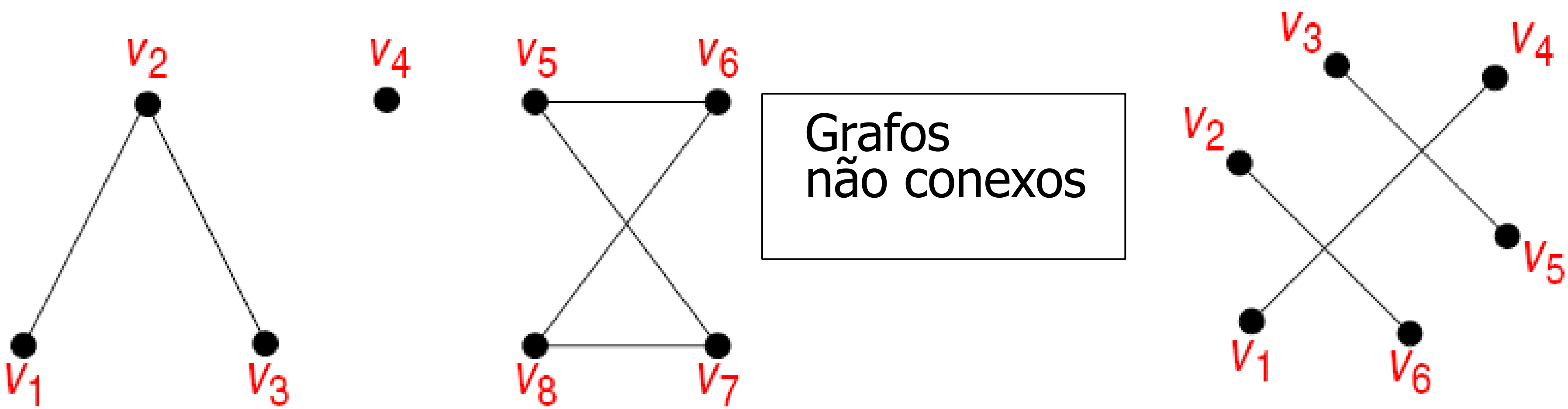
- Informalmente, um grafo é conexo (ou conectado) se for possível caminhar a partir de qualquer vértice para qualquer outro vértice no grafo por meio de um conjunto de arestas adjacentes.

Grafo conexo

- **<u>Definições</u>: Seja G um grafo.**
  - **(1) Dois vértices v e w de G estão conectados se, e somente se, existe um caminho de v para w.**
  - **(2) G é conexo se, e somente se, dado um par qualquer *de vértice v e w em G, existe um caminho de v para w.***

Exemplo

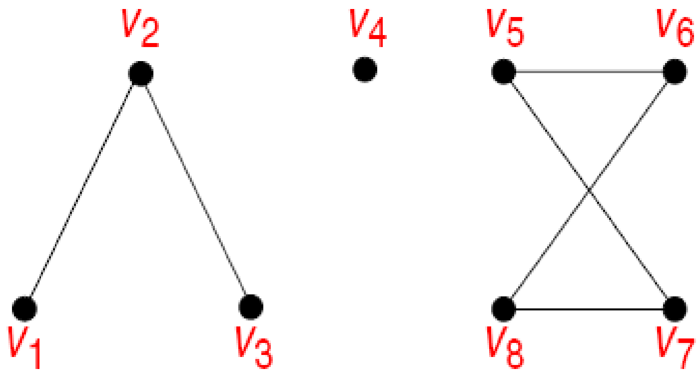




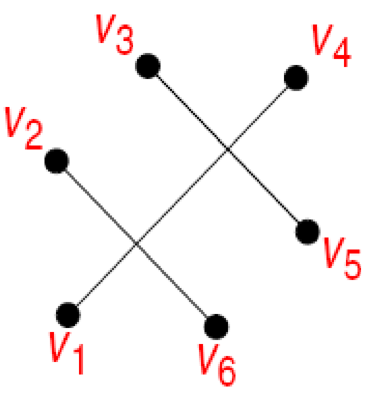
Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Componentes conexas

- **Um <u>componente conexo</u> de um grafo é um subgrafo conexo de maior tamanho possível.**
- **Exemplo: os grafos G_2 e G_3 possuem, cada um, três componentes conexas.**



G_2



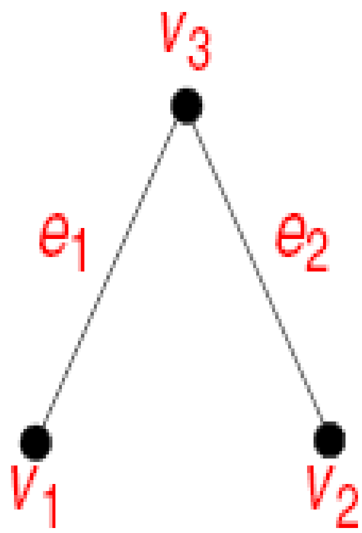
G_3

Componentes conexas

- **<u>Definições</u>: Um subgrafo H é componente conexa de um grafo G se, e somente se:**
  - **(1) *H é um subgrafo de G;***
  - **(2) H é conexo;**
  - **(3) *Nenhum subgrafo conexo de G tem H como um subgrafo e contém vértices* ou arestas que não estão em H.**
- **Um grafo é a união de todas as suas componentes conexas**

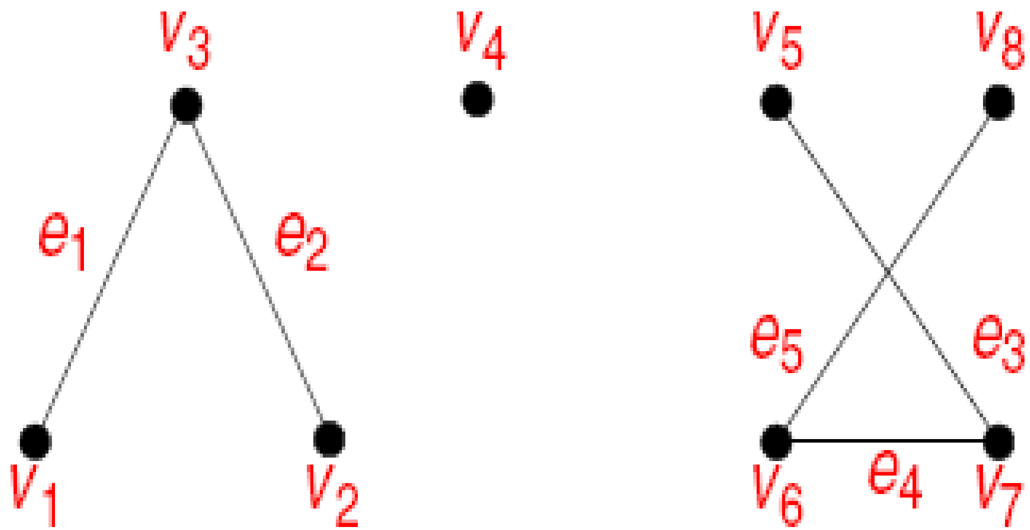
Exercício

- **Quais são as componentes conexas do grafo abaixo?**



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

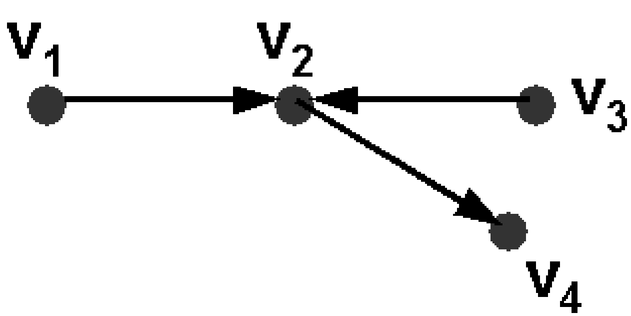
Exercício



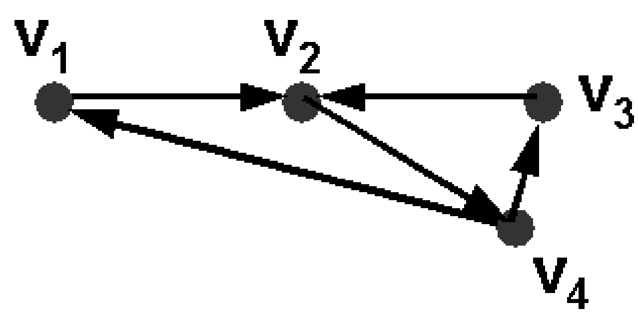
- ***H_1: $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ $E_1 = \{e_1, e_2\}$***
- H_2: $V_2 = \{v_4\}$ $E_2 = \{\}$
- H_3: $V_3 = \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ $E_3 = \{e_3, e_4, e_5\}$

Grafo fortemente conexo

- **Um <u>grafo dirigido</u> G = (V,E) é <u>fortemente conexo (conectado)</u> se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.**



Grafo conexo



Grafo fortemente conexo

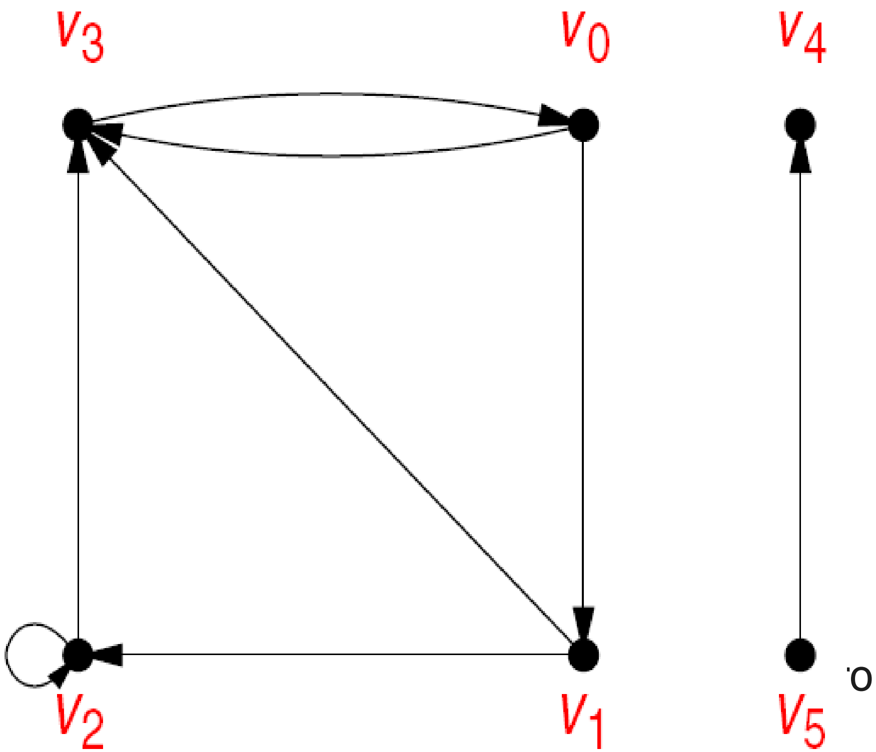
Componentes fortemente conexas

- ***As <u>componentes fortemente conexas</u> de um grafo direcionado são conjuntos de vértices sob a relação "são mutuamente alcançáveis".***

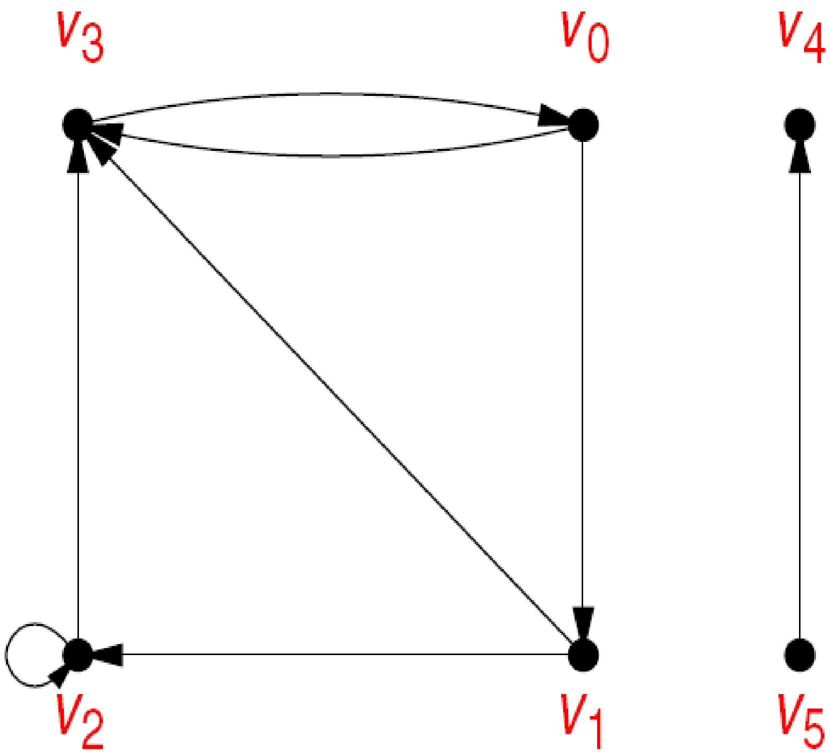
- ***Um grafo dirigido fortemente conexo tem apenas uma componente fortemente conexa.***

Exercício

- **Quais são as componentes fortemente conexas do grafo abaixo?**



Exercício



- ***H_1: V_1 = {v_0, v_1, v_2, v_3}***
- H_2: V_2 = {v_4}
- H_3: V_3 = {v_5}

Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Caminho e circuito Euleriano

- ***Caminho Euleriano** é aquele que contém cada aresta do grafo exatamente uma vez.*
- ***Um circuito Euleriano passa pelo menos uma vez por cada vértice e exatamente uma única vez por cada aresta do grafo.***

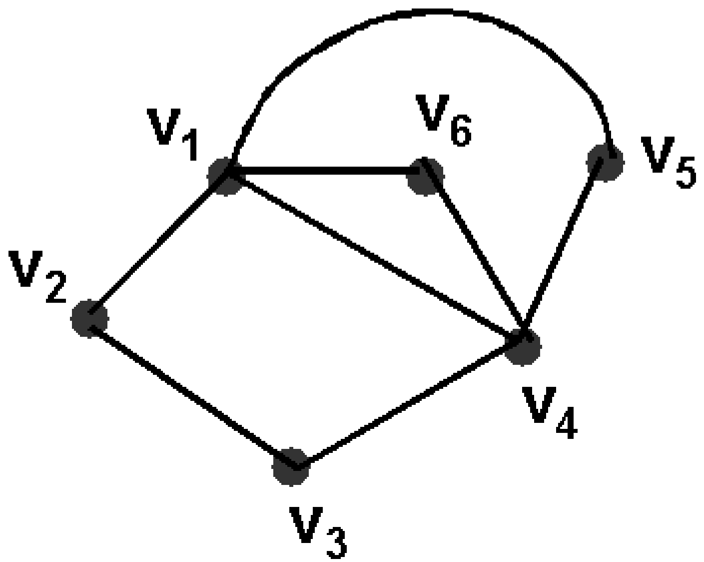
Caminho e circuito Euleriano

- ***Em um grafo Euleriano, existe um circuito que contém todas as suas arestas.***
- ***Teorema: Um grafo G possui um circuito Euleriano se, e somente se:***
  - ***G é conexo; e***
  - ***cada vértice de G tem grau par.***

Exemplo

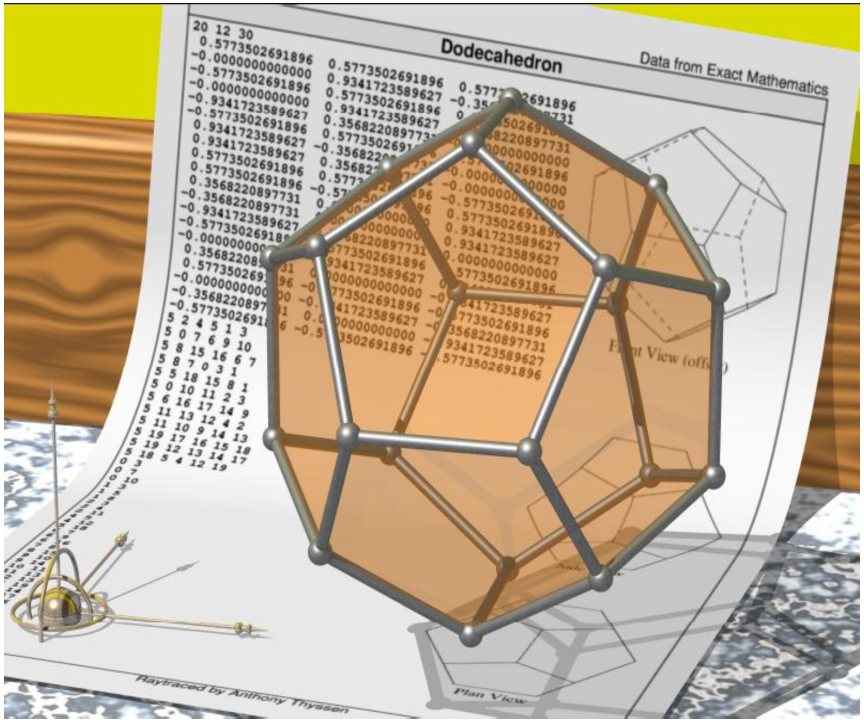
- $v_1v_6v_4v_1v_2v_3v_4v_5v_1$ é um circuito (caminho) Euleriano.

- Portanto, este grafo é Euleriano.



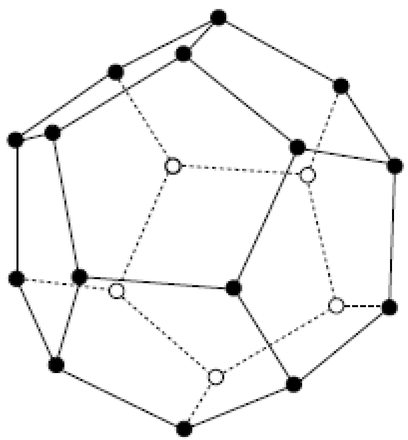
Jogo de Hamilton

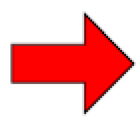
- Em 1859, Willian Hamilton propôs um jogo na forma de um dodecaedro (sólido de 12 faces).
- Cada vértice recebeu o nome de uma cidade: Londres, Paris, Hong Kong, New York, etc.

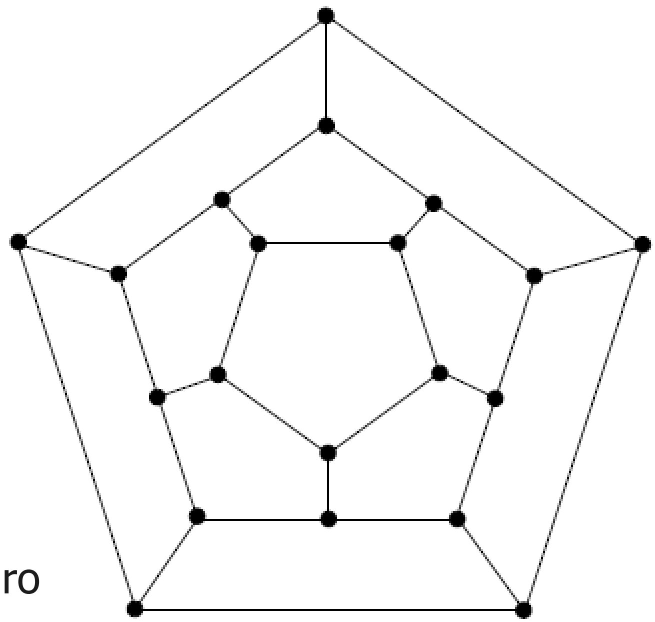


Jogo de Hamilton

- <u>Problema</u>: é possível começar um caminho em uma cidade e visitar todas as outras cidades exatamente uma única vez e retornar à cidade de partida?



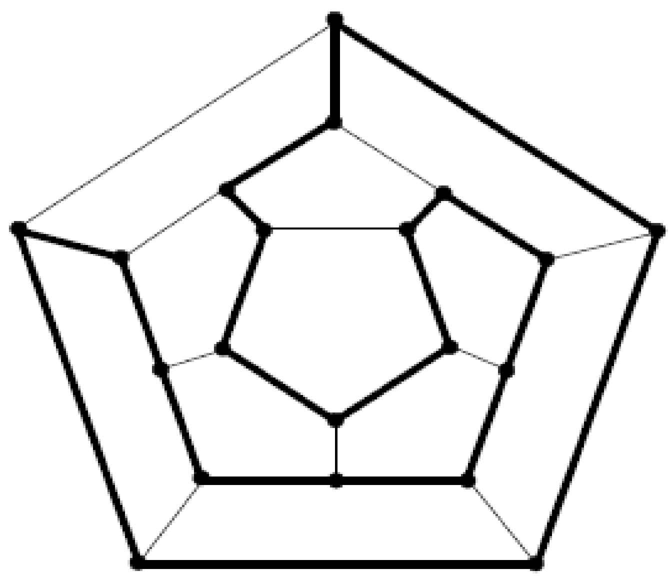




Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Jogo de Hamilton

- Uma possível solução para esse problema é:



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Circuito Hamiltoniano

- ***Um <u>circuito Hamiltoniano</u> para um grafo G é uma seqüência de vértices adjacentes e arestas distintas tal que cada vértice de G aparece exatamente uma única vez.***

Circuito Hamiltoniano X circuito Euleriano

- ***Um circuito Euleriano:***
  - ***inclui todas as arestas uma única vez.***
  - ***inclui todos os vértices, mas que podem ser repetidos, ou seja, pode não gerar um circuito Hamiltoniano.***
- ***Um circuito Hamiltoniano:***
  - ***inclui todos os vértices uma única vez (exceto o inicial = final).***
  - ***pode não incluir todas as arestas, ou seja, pode não gerar um circuito Euleriano.***

Circuito Hamiltoniano X circuito Euleriano

- ***Utilizando o teorema apresentado no slide 92, é possível determinar se um grafo G possui um circuito Euleriano.***

- ***Não existe um teorema que indique se um grafo possui um circuito Hamiltoniano***
  - ***nem se conhece um algoritmo eficiente (polinomial) para achar um circuito Hamiltoniano.***

Técnica para mostrar que um grafo não possui um circuito Hamiltoniano

- ***Porém, existe uma técnica simples que pode ser usada para mostrar que um grafo não possui um circuito Hamiltoniano...***

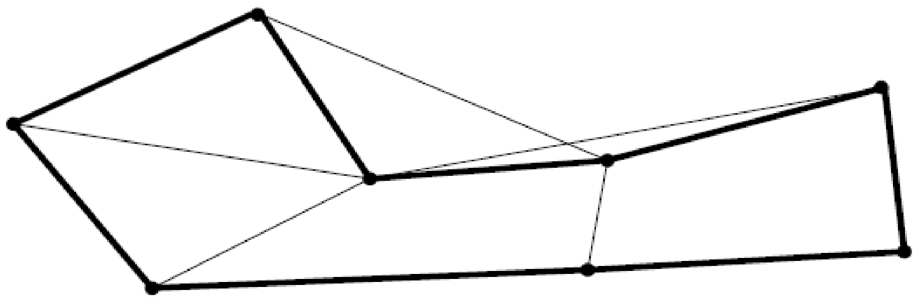
- ***Suposição: Um grafo G tem um circuito Hamiltoniano C dado por:***

$$C : v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{n-1} e_n v_n$$

Técnica para mostrar que um grafo não possui um circuito Hamiltoniano

- ***Como C é um circuito simples, todas as arestas e_i são distintas e todos os vértices são distintos, exceto $v_0 = v_n$.***

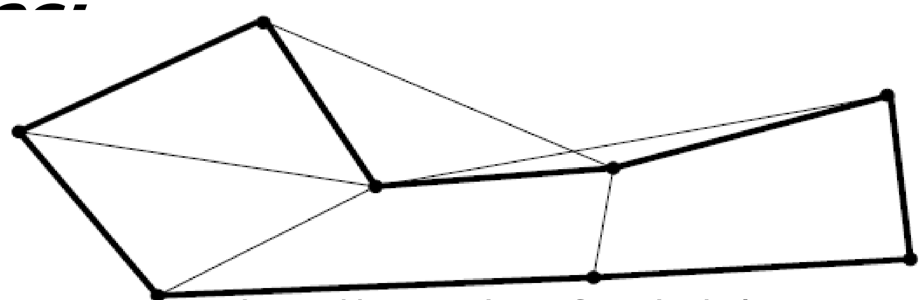
- ***Seja H um subgrafo de G que é formado pelos vértices e arestas de C, como mostrado abaixo:***



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Técnica para mostrar que um grafo não possui um circuito Hamiltoniano

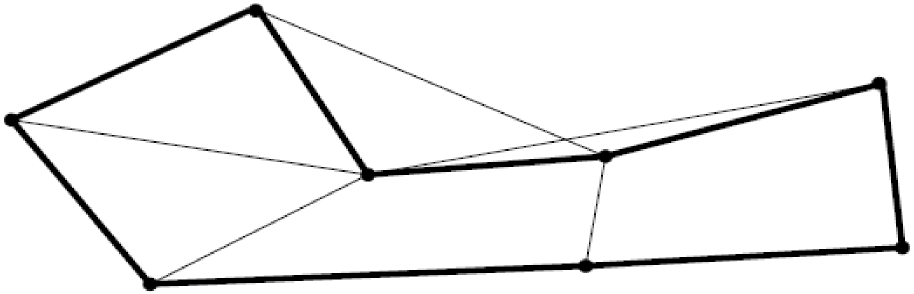
- ***Se um grafo G tem um circuito Hamiltoniano então G tem um subgrafo H com as seguintes propriedades:***
  - ***1. H contém cada vértice de G;***
  - ***2. H é conexo;***
  - ***3. H tem o mesmo número de arestas e de vértic***
  - ***4. Cad***



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Técnica para mostrar que um grafo não possui um circuito Hamiltoniano

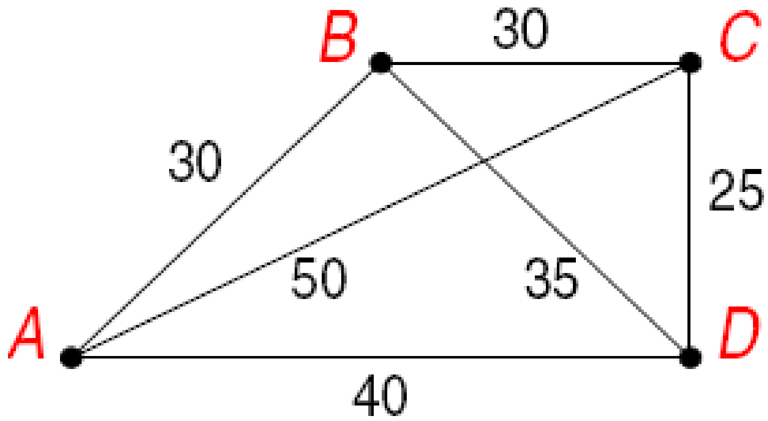
- ***Se um grafo G não tem um subgrafo H com propriedades (1)–(4) então G não possui um circuito Hamiltoniano.***



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

O Problema do Caixeiro Viajante

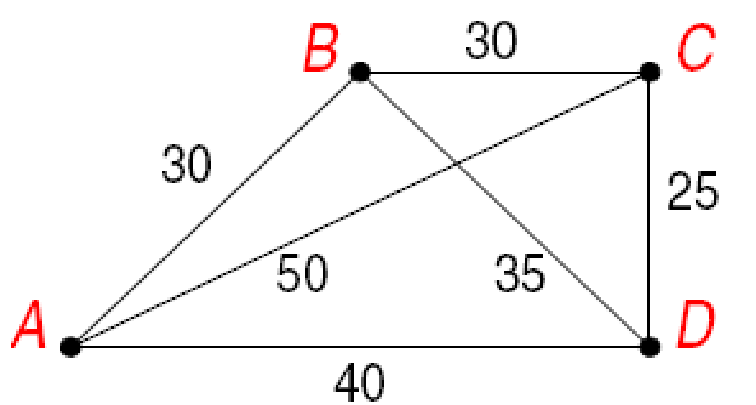
- ***O grafo valorado abaixo representa quatro cidades (A,B,C,D) e as distâncias, em quilômetros, entre elas.***



Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

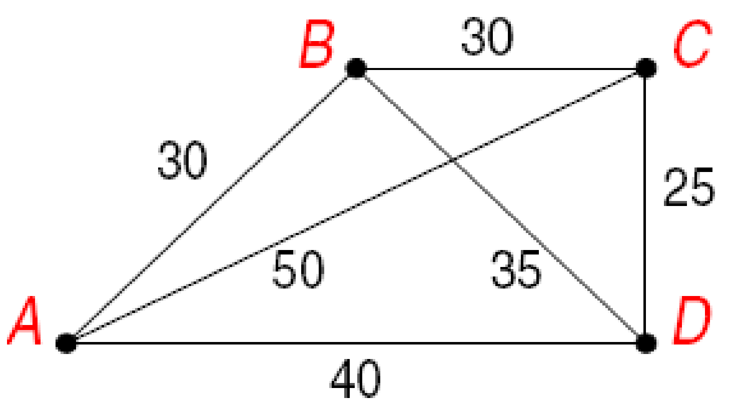
O Problema do Caixeiro Viajante

- ***Um caixeiro viajante deve percorrer um circuito Hamiltoniano, ou seja, visitar cada cidade exatamente uma única vez e voltar a cidade inicial.***
  - ***Que rota deve ser escolhida para minimizar o total da d***



O Problema do Caixeiro Viajante

- ***Uma possível solução:***
  - ***Enumere todos os possíveis circuitos Hamiltonianos começando e terminando em A;***
  - ***Calcule a distância de cada um deles;***
  - ***Determine o menor deles.***

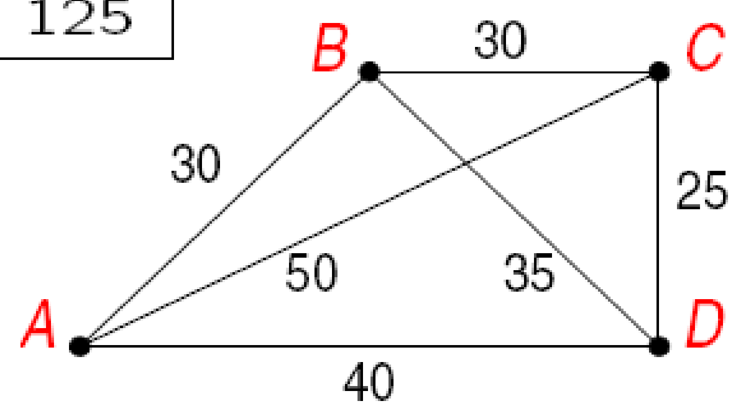


O Problema do Caixeiro Viajante

Rota	Distância (km)
$ABCDA$	$30 + 30 + 25 + 40 = 125$
$ABDCA$	$30 + 35 + 25 + 50 = 140$
$ACBDA$	$50 + 30 + 35 + 40 = 155$
$ACDBA$	$50 + 25 + 35 + 30 = 140$
$ADBCA$	$40 + 35 + 30 + 50 = 155$
$ADCBA$	$40 + 25 + 30 + 30 = 125$

Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

- Tanto a rota ABCDA ou ADCBA tem uma distância total de 125 km.



O Problema do Caixeiro Viajante

- ***Algoritmo para resolver esse problema:***
  - ***atualmente, força bruta, como feito no exemplo anterior.***
  - ***problema da classe NP-Completo.***

Tópico da
Teoria da Computação

O Problema do Caixeiro Viajante

- ***Exemplo**: para o grafo K_{30} existem*

$$29! \approx 8,84 \times 10^{30}$$

circuitos Hamiltonianos diferentes começando e terminando num determinado vértice.

- ***Mesmo se cada circuito puder ser achado e calculado em apenas 1μs, seriam necessários aproximadamente $2,8 \times 10^{17}$ anos para terminar a computação***

Fonte: http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro