# Geometria de Triângulos e Polígonos

7340 caracteres

Uma parcela importante do trabalho de geometria computacional em GIS é realizada sobre polígonos. Estes tipos de objetos são muito comuns em GIS, e são usados para representar graficamente entidades bidimensionais, tais como o contorno de edificações, propriedades, regiões de uso do solo e, genericamente, todo tipo de divisão territorial, tais como estados, municípios, bairros e setores censitários.

Assim, considerando o uso intensivo de polígonos em GIS, e a natureza das aplicações usuais, os algoritmos empregados para trabalhar com polígonos precisam ser escolhidos cuidadosamente. Neste sentido, é importante conhecer de perto o que se pode conseguir eficientemente a partir de triângulos, que além de serem os polígonos mais simples, são também figuras garantidamente planas, muito usadas na representação de superfícies. O trabalho com triângulos é bastante interessante, e facilitado pelo conhecimento de algumas de suas propriedades e formulações básicas.

## Área do triângulo

Uma vez que na representação vetorial se trabalha com vértices e suas coordenadas, a fórmula elementar da geometria para cálculo da área de um triângulo ("a área de um triângulo é igual à metade do produto entre sua base e sua altura") não é muito prática. Em vez dela, são utilizados dois resultados equivalentes da álgebra linear. O primeiro usa o produto de dois vetores, que determina a área de um paralelogramo, o dobro da área do triângulo que interessa. Outro método calcula a área diretamente, por meio de um determinante 3x3.

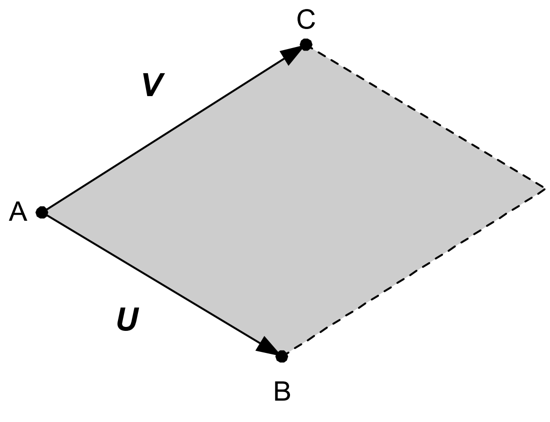


**Figura 1 - Produto vetorial dos vetores *U* e *V*, equivalente ao dobro da área do triângulo *ABC***

O primeiro método pode ser descrito como se segue. Sejam $U$ e $V$ vetores. A área do paralelogramo com lados $U$ e $V$ é $|U \times V|$ (ℵ). O produto vetorial pode ser calculado a partir do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_U & y_U & z_U \\ x_V & y_V & z_V \end{vmatrix} = (y_U z_V - z_U y_V)\hat{i} + (z_U x_V - x_U z_V)\hat{j} + (x_U y_V - y_U x_V)\hat{k}$$

onde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são vetores unitários nas direções *x*, *y* e *z* respectivamente. Como se está tratando de vetores bidimensionais, temos $z_U = z_V = 0$, e portanto a área *S* do triângulo é dada por

$$S = \frac{(x_U y_V - y_U x_V)}{2}$$

Mas, na realidade, $U = B - A$, e $V = C - A$. Portanto, a expressão acima pode ser reescrita como

$$S = \frac{1}{2}(x_A y_B - y_A x_B + y_A x_C - x_A y_C + x_B y_C - y_B x_C) \qquad (א)$$

A área calculada pela expressão acima será positiva se os vértices *A*, *B* e *C* formarem um circuito em sentido anti-horário, e negativa se formarem um circuito no sentido horário. A área será exatamente zero se os três vértices estiverem alinhados.

A expressão acima pode ser também obtida quando se calcula o determinante dos três pares de coordenadas, substituindo a coordenada *z* por 1:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_A y_B - y_A x_B + y_A x_C - x_A y_C + x_B y_C - y_B x_C) \qquad (ב)$$

Também neste caso a área será negativa se a seqüência de vértices estiver orientada em sentido horário, e positiva caso contrário.

## Coordenadas baricêntricas e ponto em triângulo

Para determinar se um determinado ponto pertence ou não a um triângulo, utiliza-se um método baseado em *coordenadas baricêntricas*. Parte-se do fato de que qualquer ponto *p* do triângulo pode ser definido a partir das coordenadas de seus três vértices, de modo que $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$, onde $\lambda_1$, $\lambda_2$ *e* $\lambda_3$ são números reais e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Os coeficientes $\lambda_1$, $\lambda_2$ e $\lambda_3$ são denominados *coordenadas baricêntricas* de *p* em relação a $p_1$, $p_2$ e $p_3$.

Com as coordenadas dos pontos *p*, $p_1$, $p_2$ e $p_3$, e a equação $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, constrói-se um sistema de três equações e três incógnitas para encontrar as coordenadas baricêntricas:

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 &+ \lambda_2 x_2 &+ \lambda_3 x_3 &= x_p \\ \lambda_1 y_1 &+ \lambda_2 y_2 &+ \lambda_3 y_3 &= y_p \end{aligned}$$

O sistema acima tem por determinante exatamente aquele apresentado na Equação ב, cujo valor corresponde ao dobro da área do triângulo $p_1p_2p_3$. A área é não-nula, pois $p_1$, $p_2$ e $p_3$ não são alinhados por hipótese, já que são vértices de um triângulo. Assim, o sistema tem solução única para cada $p$.

Os valores de $\lambda_1$, $\lambda_2$ e $\lambda_3$ podem ser obtidos usando a regra de Cramer, e expressos em termos de áreas de triângulos. Temos, portanto:

$$\lambda_1 = \frac{S(pp_2p_3)}{S(p_1p_2p_3)},\ \lambda_2 = \frac{S(p_1pp_3)}{S(p_1p_2p_3)} \text{ e } \lambda_3 = \frac{S(p_1p_2p)}{S(p_1p_2p_3)}$$

A análise do sinal das coordenadas baricêntricas indica a região do plano em que se encontra $p$, em relação ao triângulo $p_1p_2p_3$ (ב). Observe-se que, para isso, as áreas devem ser orientadas, ou seja, devem ser calculadas com sinal.

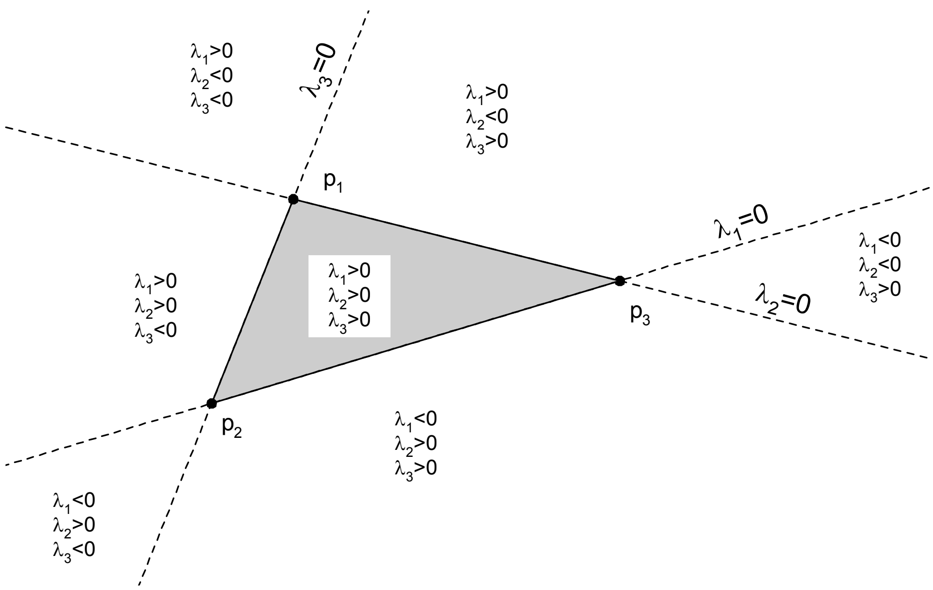


**Figura 2 - Sinais das coordenadas baricêntricas**

Com esse resultado, torna-se simples implementar um algoritmo que determine se um ponto está contido em um triângulo. Basta obter as coordenadas do ponto e dos vértices do triângulo, e calcular as coordenadas baricêntricas. Se todas as três forem positivas, o ponto pertence ao interior do triângulo. Se todas as três forem maiores que ou iguais a zero, o ponto pertence ao interior ou à fronteira do triângulo.

Alguém poderia imaginar que seria possível, considerando o algoritmo simples para determinar se um ponto pertence ou não a um triângulo, simplesmente dividir o polígono em triângulos e checar o ponto dado contra cada um deles. O problema é justamente dividir o polígono em triângulos, um algoritmo mais complexo que o usado para determinar diretamente se um ponto pertence a um polígono, apresentado nesta coluna na edição ??. De qualquer maneira, um algoritmo baseado em coordenadas baricêntricas funciona muito bem quando se tem estruturas com triângulos já definidos, como TINs (*Triangular Irregular Networks*).

**Área de polígono**

A área de um polígono pode ser calculada usando um somatório simples, baseado na soma de áreas de triângulos.

O cálculo pode ser feito como se segue. Sejam $x_i$ e $y_i$ as coordenadas do vértice $v_i$ do polígono $P$, com $n$ vértices. A área do polígono é dada por

$$A(P) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) \qquad (ג)$$

Observe-se que, na expressão acima, quando se tem $i = n - 1$, é necessário ter $x_n = x_0$ e $y_n = y_0$, de acordo com a definição de polígono, caracterizando o seu fechamento.

O sinal da área calculada indica o sentido da seqüência de vértices. A área será negativa se os vértices estiverem em sentido horário, ou positiva se em sentido anti-horário, exatamente como no caso da área do triângulo (Equação א). Como já foi dito, a base do raciocínio para o desenvolvimento do somatório é o mesmo do cálculo da área de um triângulo. O somatório da Equação ג corresponde à soma da área de $n$ triângulos, formados entre um ponto arbitrário (no caso, a origem do sistema de coordenadas) e cada par seqüencial de vértices ($v_i$, $v_{i+1}$).

**Centróide de um polígono**

Em muitas situações práticas, é necessário determinar, dado um polígono qualquer, seu *centro de gravidade* ou *centro de massa*, mais conhecido em GIS como *centróide*. Em GIS, o centróide é muitas vezes criado e relacionado ao polígono para viabilizar o armazenamento de dados alfanuméricos associados no banco de dados geográfico. É também usado como ponto de lançamento automático de textos gráficos, para identificação de elementos em tela e plotados.

O centro de gravidade de um triângulo é simplesmente a média das coordenadas de seus vértices, ou seja, as coordenadas do centro de gravidade de um triângulo ABC seriam:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Novamente, seria possível estender esse resultado para calcular o centróide de todo o polígono a partir de sua divisão em triângulos. No entanto, existe uma solução mais simples e independente da triangulação, e que leva em conta triângulos com áreas positivas e negativas, como no cálculo da área do polígono. O mesmo processo de média ponderada pela área pode ser usado, considerando todos os triângulos formados entre um ponto fixo, por exemplo (0, 0), e cada par de vértices sucessivos, ($v_i$, $v_{i+1}$).

Assim, temos que

$$A(P) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} + x_i) \times (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})}{3A(P)} \qquad (ד)$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1} + y_i) \times (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1})}{3A(P)}$$

Curiosamente, parte dos GIS considera uma definição alternativa de centróide, em que mesmo se situa “aproximadamente no centro do polígono”. Assim, o centróide pode ser determinado por diversos processos, como o centro do retângulo envolvente mínimo, o centro de um círculo inscrito ou circunscrito ao polígono, ou mesmo definido intuitivamente pelo usuário. Uma forma freqüentemente usada para determinar um centróide consiste em simplesmente obter a média aritmética das coordenadas *x* e *y* dos vértices. Embora menos computacionalmente intensivo do que o método apresentado nesta seção, o processo da média tem seus resultados afetados por características dos objetos, ou mesmo pelo processo de digitalização dos polígonos. Como se pode perceber na ג, a existência, por alguma razão, de uma concentração de vértices em uma região do polígono causa um deslocamento indesejável do centróide. O deslocamento ocorre justamente em direção à região com maior densidade de vértices, o que pode prejudicar aplicações simples, como o posicionamento de textos gráficos.

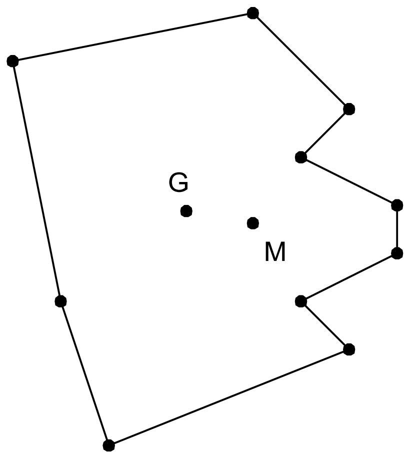


**Figura 3 - Centróides calculados pela média (M) e como centro de gravidade (G)**

*Aprofunde-se neste assunto em:*

Figueiredo, L. H., Carvalho, P. C. P. *Introdução à Geometria Computacional*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1991.

O’Rourke, J. *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, 1994.

*Sobre o autor:*

**Clodoveu Davis** é engenheiro civil, doutor em Ciência da Computação e Assessor de Desenvolvimento e Estudos da Prodabel - Empresa de Informática e Informação do Município de Belo Horizonte.

**e-mail:** cdavis@uol.com.br