Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2011 – Cálculo I – 1º sem. 2015
Professor: Dr. José Ricardo G. Mendonça

4ª Lista de Exercícios — 12 mai. 2015
Senos, Cossenos, Máximos e Mínimos, Teorema do Valor Médio

The Mean Value Theorem is the midwife of calculus – not very important or glamorous by itself, but often helping to deliver other theorems that are of major significance.
E. J. Purcell e D. E. Varberg, *Calculus with Analytic Geometry* (1987)

I. Senos e cossenos

1. Dada a tabela de valores das funções $\sin x$ e $\cos x$ para os seguintes "ângulos notáveis",

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1

encontre os seguintes valores:

(a) $\sin \frac{3\pi}{4}$;

(b) $\sin \frac{7\pi}{12}$;

(c) $\sin(\pi - \frac{\pi}{6})$;

(d) $\cos \frac{5\pi}{4}$;

(e) $\cos(2\pi - \frac{\pi}{6})$;

(f) $\tan \frac{\pi}{4}$;

(g) $\tan \frac{7\pi}{8}$.

2. Dado $a \in [0, 2\pi)$, encontre todos os $x \in \mathbb{R}$ tais que $\sin x = \sin a$. *Dica*: estude os casos $a = \pm\pi/2$ e $a \neq \pm\pi/2$ separadamente.

3. Encontre a função derivada das seguintes funções:

(a) $\sin 3x$;

(b) $\cos 7x$;

(c) $\sin(4x^2 + x)$;

(d) $\cos \sqrt{x}$;

(e) $\sin^2\sqrt{x}$;

(f) $\tan(2x^3-\pi)$;

(g) $\tan(\sin x)$;

(h) $\sin(\tan x)$;

(i) $\cos(\tan x)$.

4. Encontre a equação da reta tangente a cada uma das seguintes curvas nos pontos indicados:

(a) $y=\cos 3x$ no ponto $x=\pi/3$;

(b) $y=\sin x$ no ponto $x=\pi/6$;

(c) $y=\sin x+\cos x$ no ponto $x=3\pi/4$;

(d) $y=\tan x$ no ponto $x=-\pi/4$;

(e) $y=\dfrac{1}{\sin x}=\csc x$ (a cossecante do ângulo x) no ponto $x=-\pi/6$.

5. Determine o valor dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ (*Dica*: considere a mudança de variáveis $u=2x$);

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^2}{3x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{1+\sin x}$.

II. Máximos e mínimos

1. Encontre os pontos críticos das seguintes funções e intervalos:

(a) $f(x)=x^2-2x+5$;

(b) $f(x)=-x^2+2x+2$;

(c) $f(x)=x^3+2$;

(d) $f(x)=3x^4-8x^3-30x^2+72x-17$;

(e) $f(x)=\sin x+\cos x$.

2. Uma caixa de base quadrada e aberta em cima deve ser confeccionada de tal forma que sua área externa total seja A. Determine o valor dos lados da base quadrada e a altura da caixa de tal forma que seu volume seja o maior possível.

3. Uma garrafa cilíndrica de base circular e aberta em cima deve ser confeccionada de tal forma que sua área externa total seja A. Determine o valor do raio da base circular e a altura da garrafa de tal forma que seu volume seja o maior possível.

4. Repita os exercícios anteriores para o caso em que a caixa e a garrafa são fechadas em cima.

III. Teorema do valor médio

1. Encontre o número $c \in [a,b]$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ para as seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^3$, $x \in [1,3]$;

   (b) $f(x) = (x-1)^3$, $x \in [-1,2]$;

   (c) $f(x) = x^3$, $x \in [-1,3]$;

   (d) $f(x) = x^2 + 5x$, $x \in [0,2]$.

2. Determine os intervalos em que as seguintes funções são crescentes ou decrescentes:

   (a) $f(x) = x^3 + 1$;

   (b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$;

   (c) $f(x) = x^2 - x + 5$;

   (d) $f(x) = -x^3 + 2x + 1$;

   (e) $f(x) = \sin x + \cos x$.

3. Sejam $x \geqslant 0$ e as funções

$$f_1(x) = x - \sin x, \quad f_3(x) = -x + \frac{x^3}{3!} + \sin x, \quad f_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \sin x,$$

$$f_2(x) = -1 + \frac{x^2}{2!} + \cos x, \quad \text{e} \quad f_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cos x.$$

   (a) Determine se $f_1(x)$ é crescente ou decrescente e usando o valor de $f_1(x)$ em $x = 0$ mostre que $\sin x \leqslant x$.

   (b) Determine quais das funções f_2, f_3, f_4 e f_5 são crescentes ou decrescentes e usando seus valores em $x = 0$ mostre que

$$x - \frac{x^3}{3!} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

   (c) Considerando termos de maior ordem como $(-1)^6 x^6/6!$, $(-1)^7 x^7/7!$ etc. nos lugares apropriados, mostre que o procedimento acima pode ser estendido para obter desigualdades mais "finas" para $\sin x$ e $\cos x$. O que você pode concluir dessas expressões?

4. Assuma que existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = f(x)$, e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer tal que $g'(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma constante real C tal que $g(x) = Cf(x)$. *Dica*: considere a derivada do quociente $g(x)/f(x)$.