Tabela de derivadas e primitivas
e
técnicas de derivação e primitivação

Glossário

f	função de x	sin	seno
F	primitiva de f	tan	tangente
C	constante de integração	cot	cotangente
log	logaritmo de base e	csc	cosecante
sinh	seno hiperbólico	arcsin	arco cujo seno é
cosh	coseno hiperbólico	argsinh	argumento cujo seno hiperbólico é

Derivadas

Versão simplificada	Generalização (seja $f = f(x)$)
$a' = 0, \quad a = \text{constante}$	--
$(x^k)' = k\,x^{k-1}, \quad k \in \mathbb{R}$	$(f^k)' = k\,f^{k-1}f', \quad k \in \mathbb{R}$
$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\log f)' = \dfrac{f'}{f}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^f)' = f'e^f$
$(a^x)' = (\log a)a^x, \quad a > 0$	$(a^f)' = (\log a)f'a^f, \quad a > 0$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin f)' = f'\cos f$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos f)' = -f'\sin f$
$(\tan x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan f)' = f'\sec^2 f = \dfrac{f'}{\cos^2 f}$
$(\cot x)' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot f)' = -f'\csc^2 f = -\dfrac{f'}{\sin^2 f}$
$(\sec x)' = \sec x\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$	$(\sec f)' = f'\sec f\tan f = f'\dfrac{\sin f}{\cos^2 f}$
$(\csc x)' = -\csc x\cot x = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$	$(\csc f)' = -f'\csc f\cot f = -f'\dfrac{\cos f}{\sin^2 f}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin f)' = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan f)' = \dfrac{f'}{1+f^2}$
$(\operatorname{arc\,sec} x)' = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$(\operatorname{arc\,sec} f)' = \dfrac{f'}{\lvert f\rvert\sqrt{f^2-1}}$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$(\sinh f)' = f'\cosh f$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$(\cosh f)' = f'\sinh f$

Técnicas de derivação (sejam f e g funções de x)

Derivada da soma $(f+g)' = f'+g'$	Derivada do produto $(f\,g)' = f'g + g'f$
Derivada do quociente $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}, \quad g \neq 0$	Derivada da função composta $\left(f\left[g(x)\right]\right)' = f'\left[g(x)\right]g'(x)$
Derivada parcial $\partial_x f(x,y,\ldots)$: considerar como uma constante tudo o que não seja x e aplicar as regras de derivação em ordem a x usuais.	

N. Sousa, ESAC, 04-09-2008

Primitivas

Versão simplificada	Generalização
$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \qquad k \neq -1$	$\int f' f^k dx = \frac{f^{k+1}}{k+1} + C, \qquad k \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x \rvert + C$	$\int \frac{f'}{f} dx = \log\lvert f \rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int f' e^f dx = e^f + C$
$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x + C, \qquad a > 0$	$\int f' a^f dx = \frac{1}{\log a} a^f + C, \qquad a > 0$
$\int \log x \, dx = x \log x - x + C$	$\int f' \log f \, dx = f \log f - f + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int f' \sin f \, dx = -\cos f + C$
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\int f' \cos f \, dx = \sin f + C$
$\int \tan x \, dx = -\log\lvert \cos x \rvert + C$	$\int f' \tan f \, dx = -\log\lvert \cos f \rvert + C$
$\int \cot x \, dx = \log\lvert \sin x \rvert + C$	$\int f' \cot f \, dx = \log\lvert \sin f \rvert + C$
$\int \sec x \, dx = \log\lvert \sec x + \tan x \rvert + C$	$\int f' \sec f \, dx = \log\lvert \sec f + \tan f \rvert + C$
$\int \csc x \, dx = \log\lvert \csc x - \cot x \rvert + C$	$\int f' \csc f \, dx = \log\lvert \csc f - \cot f \rvert + C$
$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$	$\int f' \sec^2 f \, dx = \tan f + C$
$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$	$\int f' \csc^2 f \, dx = -\cot f + C$
$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$	$\int f' \sec f \tan f \, dx = \sec f + C$
$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$	$\int f' \csc f \cot f \, dx = -\csc f + C$
$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{f'}{a^2 + f^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{f}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{f'}{\sqrt{a^2 - f^2}} dx = \arcsin\left(\frac{f}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{f'}{f\sqrt{f^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec}\left(\frac{f}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \log\left\lvert \frac{x+a}{x-a} \right\rvert + C$	$\int \frac{f'}{a^2 - f^2} dx = \frac{1}{2a} \log\left\lvert \frac{f+a}{f-a} \right\rvert + C$
$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$	$\int f' \arcsin f \, dx = f \arcsin f + \sqrt{1 - f^2} + C$
$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$	$\int f' \arccos f \, dx = f \arccos f + \sqrt{1 - f^2} + C$
$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + C$	$\int f' \arctan f \, dx = f \arctan f - \frac{1}{2} \log(1 + f^2) + C$
$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$	$\int f' \sinh f \, dx = \cosh f + C$
$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$	$\int f' \cosh f \, dx = \sinh f + C$

Técnicas de integração

Integração por partes:	Integração por substituição:
$\int f(x)g(x)dx = g\int f\,dx - \int F\,g'\,dx$	$\int f(x)dx = \int u'(t)\,f\left(u(t)\right)dt, \quad x = u(t)$

Divisão de polinómios:

Sejam $P(x), Q(x), p(x), r(x)$ polinómios em x, com grau $P \geq$ grau Q e grau $p <$ grau Q. Então $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{p(x)}{Q(x)} + r(x)dx$. Para efectuar a divisão, utiliza-se o 'algoritmo de divisão longa' (por vezes também chamado de Regra de Ruffini). Para informação sobre este algoritmo, consultar http://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_long_division (em inglês).

Fracções racionais:

Sejam $P(x), Q(x)$ polinómios em x sem raízes comuns. Para reescrever a fracção $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como soma de fracções mais simples, faça-se:

1. Achar as raízes de $Q(x)$ e suas muliplicidades r
2. Por cada raíz real a, de multiplicidade r, adicionar termos $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-a)^r}$
3. Por cada raíz complexa $a+ib$, de multiplicidade r, adicionar termos
$$\frac{B_1 + C_1 x}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{B_2 + C_2 x}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^2} + \cdots + \frac{B_r + C_r x}{\left((x-a)^2 + b^2\right)^r}$$
4. Calcular os coeficientes A_i, B_i e C_i igualando as expressões 2. + 3. à fracção original (método dos coeficientes indeterminados). Para mais informação, consultar http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_fraction (em inglês).

Algumas funções sem primitiva elementar:

$$\frac{\cos x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad e^{x^2}, \quad \frac{1}{\log x}, \quad x^x, \quad \frac{\sin x}{\log x}, \quad \frac{1}{\arcsin x}, \quad \arcsin e^x$$

Algumas fórmulas úteis

Funções hiperbólicas

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

Fórmulas trigonométricas	Fórmulas hiperbólicas
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$	$\sinh^2 x = \frac{1+\cosh 2x}{2}$
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$	$\cosh^2 x = \frac{-1+\cosh 2x}{2}$
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$	$e^x = \cosh x + \sinh x$