# Estatística

## 13- Testes não-paramétricos

---

Página da FEG: www.feg.unesp.br/~marcela

# Teste de Aderência

IDÉIA:
descobrir qual é a Distribuição de uma Variável Aleatória X, a partir de uma amostra: $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$

Problema:

Seja X: nº que sai na jogada de um dado

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i = O_i$ | 185 | 239 | 206 | 188 | 174 | 208 | 1200 |

A partir da amostra, existe evidência estatística para afirmar que o dado é honesto, ou seja, que X tem Distribuição Equiprovável ???

# TESTE DE HIPÓTESES:

$$\begin{cases} H_0: \text{ X tem Distribuição Equiprovável} \\ H_1: \text{ Tal não ocorre} \end{cases}$$

X equiprovável então $p_i = P(X = i) = \frac{\quad}{\quad}$

Logo, espera-se que em 1200 jogadas saia 200 vezes cada número: $E_i = n \cdot p_i = 1200 \times \frac{\quad}{\quad} = 200$

**O que ocorre**

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i = O_i$ | 185 | 239 | 206 | 188 | 174 | 208 | 1200 |
| $E_i$ | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 1200 |
| $O_i - E_i$ | -15 | 39 | 6 | -12 | -26 | 8 | |
| | | | | | | | |

## TESTE DE HIPÓTESES:

$$\begin{cases} H_0: \text{ X tem Distribuição Equiprovável} \\ H_1: \text{ Tal não ocorre} \end{cases}$$

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i = O_i$ | 185 | 239 | 206 | 188 | 174 | 208 | 1200 |
| $E_i$ | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 | 1200 |
| $O_i - E_i$ | -15 | 39 | 6 | -12 | -26 | 8 | 0 |
| | 1,13 | 7,61 | 0,18 | 0,72 | 3,38 | 0,32 | 13,33 |

$$\boxed{\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \chi^2_{\text{Calculado}}}$$

Critério: Rejeitar $H_0$ se $\boxed{\chi^2_{\text{Calculado}} \text{ for grande!}}$

$\nu = \quad - \quad -$ $\qquad\qquad$ $\nu = \quad - \quad - \quad = 5$

k : número de classes

m : número de parâmetros estimados,

Distribuições $\chi^2$- valores de $\chi^2_{v;P}$ onde $P = P(\chi^2_v \geq \chi^2_{v,P})$

| $v$ \ $P$ | 0,995 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,93E-05 | 3,841 | 5,024 | 6,635 | 7,879 | 10,828 |
| 2 | 0,0100 | 5,991 | 7,378 | 9,210 | 10,597 | 13,816 |
| 3 | 0,0717 | 7,815 | 9,348 | 11,345 | 12,838 | 16,266 |
| 4 | 0,207 | 9,488 | 11,143 | 13,277 | 14,860 | 18,467 |
| 5 | 0,412 | 11,070 | 12,833 | 15,086 | 16,750 | 20,515 |
| 6 | 0,676 | 12,592 | 14,449 | 16,812 | 18,548 | 22,458 |
| 7 | 0,989 | 14,067 | 16,013 | 18,475 | 20,278 | 24,322 |
| 8 | 1,344 | 15,507 | 17,535 | 20,090 | 21,955 | 26,124 |
| 9 | 1,735 | 16,919 | 19,023 | 21,666 | 23,589 | 27,877 |
| 10 | 2,156 | 18,307 | 20,483 | 23,209 | 25,188 | 29,588 |

# Teste de Aderência pelo Método $\chi^2$

**Exemplo:** amostra de tamanho n = 100

| Nº defeitos ($x_i$) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº aparelhos ($f_i$) | 25 | 35 | 18 | 13 | 4 | 2 | 2 | 1 | 0 | ... |

**Testar:** $H_0$ :Distribuição do nº de defeitos é ***Poisson***

$H_1$ : Tal não ocorre

$$\boxed{p_r = P(X = r) = \frac{\mu^r * e^{-\mu}}{r!} \quad (\mathrm{r}=0,1,2,\ldots)}$$

Parâmetro da Poisson $\mu$ estimado por:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i * f_i}{n} = \frac{0*25+\ldots+7*1}{100} = 1{,}55$$

$$p_1 = P(X = 1) = \frac{(1{,}55)^1 * e^{-1{,}55}}{1!} = 1{,}55 * e^{-1{,}55} = 0{,}329$$

| X | O | p | E | $(O_i - E_i)^2 / E_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 25 | 0,212 | 21,2 | 0,618 |
| 1 | 35 | 0,329 | 32,9 | 0,134 |
| 2 | 18 | 0,255 | 25,5 | 2,206 |
| 3 | 13 | 0,132 | 13,2 | 0,003 |
| 4 | 4 | 0,051 | 5,1 | |
| 5 | 2 9 | 0,016 | 1,6 7,2 | 0,450 |
| 6 | 2 | 0,004 | 0,4 | |
| 7 | 1 | 0,001 | 0,1 | |
| Σ | **100** | **1,0** | **100** | ***3,474 = $\chi^2_\nu$*** |

$E_i \geq 5$ (exigência)

$$\nu = k - 1 - m = 5 - 1 - 1 = 3$$

## 2. Teste de Independência (tabelas de contingência)

**Exemplo:** (Ex 01, p. 135-40, COSTA NETO)

Opiniões de homens e mulheres sobre determinado Projeto de Lei:

| | **Opinião** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Sexo** | Favor | Contra | Indiferente | Total |
| Homens | 33 | 12 | 15 | 60 |
| Mulheres | 7 | 20 | 13 | 40 |
| Total | 40 | 32 | 28 | 100 |

$H_0$ : Existe independência entre opinião e sexo

$H_1$ : Tal não ocorre, ou seja, o sexo influencia na opinião

| | **Opinião (Ho Verdadeiro)** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Sexo** | Favor | Contra | Indiferente | Total |
| Homens | 24 | | | 60 |
| Mulheres | 16 | | | 40 |
| Total | 40 | 32 | 28 | 100 |

| | Opinião | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Sexo** | Favor | Contra | Indiferente | Total |
| Homens | 33 | 12 | 15 | 60 |
| Mulheres | 7 | 20 | 13 | 40 |
| Total | 40 | 32 | 28 | 100 |

| | Opinião (Ho Verdadeiro) | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Sexo** | Favor | Contra | Indiferente | Total |
| Homens | 24 | 19,2 | 16,8 | 60 |
| Mulheres | 16 | 12,8 | 11,2 | 40 |
| Total | 40 | 32 | 28 | 100 |

| $O_{ij}$ | $E_{ij} = n*p_i*p_j$ | $O_{ij} - E_{ij}$ | $(O_{ij} - E_{ij})^2 / E_{ij}$ |
|---|---|---|---|
| 33 | 24,0 | 9,0 | 3,375 |
| 12 | 19,2 | -7,2 | 2,700 |
| 15 | 16,8 | -1,8 | 0,193 |
| 7 | 16,0 | -9,0 | 5,063 |
| 20 | 12,8 | 7,2 | 4,050 |
| 13 | 11,2 | 1,8 | 0,289 |
| 100 | 100 | | ***15,670*** $= \chi^2_\nu$ |

$$\nu = (r - 1) * (s - 1) = (2 - 1) * (3 - 1) = 2$$

**Testar:** $H_0$ :Distribuição de X é N(100;5)

$H_1$ :  Tal não ocorre

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 98,5 | 93,6 | 101,2 | 106,4 | 106,0 | 108,7 | 89,1 | 98,8 | 105,5 |
| 96,5 | 91,5 | 90,8 | 95,1 | 96,1 | 89,4 | 97,2 | 98,0 | 100,7 |
| 98,4 | 98,1 | 106,7 | 99,6 | 99,1 | 97,4 | 109,9 | 104,3 | 111,9 |
| 108,3 | 91,9 | 102,7 | 104,5 | 109,6 | 99,6 | 97,4 | 103,4 | 98,1 |
| 92,8 | 95,8 | 92,4 | 98,2 | 99,8 | 100,1 | 98,4 | 111,0 | 91,3 |
| 87,1 | 107,2 | 93,6 | 96,7 | 103,8 | 102,3 | 104,4 | 103,0 | 93,1 |
| **103,5** | 101,6 | 95,3 | 98,8 | 100,7 | 102,8 | 100,7 | 95,4 | 109,4 |
| 100,4 | 104,1 | 104,3 | 96,8 | 95,4 | 105,6 | 94,0 | 92,2 | 103,6 |

| | | | | observado | esperado |
|---|---|---|---|---|---|
| media= | 99,80 | | 100--105 | 29 | 34,13 |
| dp= | 5,43 | | | | |

Tabela A6.2 Distribuição normal – valores de $P(0 \leqslant Z \leqslant z_0)$

| $z_0$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 |
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 |
| 2,2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 |