EACH
Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Sexta lista de Cálculo II
Sistemas de Informação

1ª Questão. Encontre a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

a) $f(x,y) = x^2y^3 - y^4$, $(2,1)$, $\theta = \pi/4$.

b) $f(x,y) = \sqrt{5x - 4y}$, $(4,1)$, $\theta = -\pi/6$.

2ª Questão. Calcule a derivada direcional da função no ponto indicado e na direção especificada v.

a) $f(x,y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3,4)$, $v = (4,-3)$.

b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(2,1)$, $v = (-1,2)$.

c) $f(x,y) = x^2e^t$, $(2,0)$, $v = (1,1)$.

d) $f(x,y) = e^{-x}\sin y$, $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, $v = (3,-2)$.

3ª Questão. Determine a taxa de variação máxima de f no ponto especificado e indique a direção em que isso ocorre.

a) $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$, $(2,4)$

b) $f(x,y) = xe^{-y} + ye^{-x}$, $(0,0)$

c) $f(x,y) = \sin(x\,y)$, $(1,0)$

4ª Questão. Encontre a direção em que a derivada direcional de $f(x,y) = x^2 + \sin xy$ no ponto $(1,0)$ possui valor 1.

5ª Questão. Próximo a uma bóia, a profundidade de um lago no ponto com coordenadas (x,y) é dado pela expressão $z = 200 + 0.02\,x^2 - 0.001\,y^3$, em que x, y, z são medidos em metros. Um pescador num pequeno bote começa a navegar num ponto $(80,60)$ em direção à bóia que está localizada em $(0,0)$. Verifique se a profundidade aumentará ou diminuirá após a partida do bote. Explique sua resposta.

6ª Questão. A temperatura T, em graus Celsius, num ponto (x,y,z), medido em metros, é dada pela função

$$T(x,y,z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}.$$

a) Calcule a taxa de variação da temperatura no ponto $P = (2,-1,2)$ e direção $v = (3,-3,3)$.

b) Determine a direção e a taxa de variação máxima da temperatura no ponto P.

7ª Questão. Calcule os pontos de máximos e mínimos locais, bem como os pontos de sela das seguintes funções.

a) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

b) $f(x,y) = (1 + xy)(x + y)$

c) $f(x,y) = e^x \cos y$

d) $f(x,y) = x \sin y$

e) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{y^2-x^2}$

8ª Questão. Determine três números positivos x, y, z cuja soma é 100 e o produto é máximo.

9ª Questão. Encontre o ponto do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está mais próximo do ponto $(4,2,0)$.

10ª Questão. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular inscrita numa esfera de raio r.

11ª Questão. Três alelos A, B e O determinam os quatro tipos de sangue A (AA ou AO), B (BB ou BO), O e AB. A lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos numa população que possuem dois diferentes alelos é $P = 2pq + 2pr + 2rq$ onde p, q, r são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $2/3$.

12ª Questão. Calcule os valores de máximo e de mínimo das funções abaixo sobre as restrições especificadas.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $xy = 1$

b) $f(x,y) = x^2y$; $x^2 + 2y^2 = 6$

c) $f(x,y) = e^{xy}$; $x^3 + y^3 = 16$

13ª Questão. Encontre os valores extremos de $f(x,y) = e^{-xy}$ sobre a região $x^2 + 4y^2 \le 16$.

Algumas respostas. 1)b) $\frac{5}{16}\sqrt{3} + 1/4$ 2)a)23/10 c)$4\sqrt{2}$ 3)a)$4\sqrt{2}$, $(-1,1)$ c)1, $(0,1)$ 7)a)Max $f\left(-\frac{1,1}{2}\right) = 11$ b)Pt. Sela $(1,-1), (-1,1)$ c)Não há. d)Pt. Selas$(0, n\pi)$ $n = 1,2,\dots$ e)Min. $f(0,0) = 0$, Pt. Sela $(\pm 1,0)$ 8)100/3, 100/3, 100/3 10)$8r^3/3\sqrt{3}$ 12)a)Min. $f(1,1) = f(-1,-1) = 2$ b)Max. $f(\pm 2,1) = 4$, Min. $f(\pm 2,-1) = -4$ 13) Max. $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{1}{4}}$; Min. $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{4}}$