MAE116 – Noções de Estatística

Grupo A - 1º semestre de 2007

Lista de exercícios 6 – Distribuição Normal- **GABARITO**

Exercício 1 (2 pontos)

Uma máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão 10g.

(a) Em quanto deve ser fixado o peso médio para que apenas 10% dos pacotes tenham menos de 500g?

Com a máquina assim regulada,

(b) qual é a probabilidade de que o peso de um pacote exceda 600g?

(c) Determine a porcentagem de pacotes em que o peso não se afasta da média em mais que dois desvios padrão.

(d) Numa amostra de 120 pacotes, qual é o número esperado de pacotes com menos de 500 g?

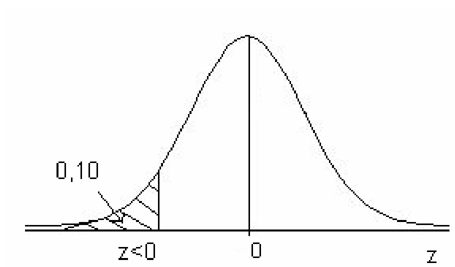
Solução

Seja *X*: peso dos pacotes obtidos por essa máquina. Então $X \sim \mathrm{N}(\mu, 10^2)$.

(a) (0,5 ponto)

Temos que 10% dos pacotes têm menos de 500g, assim temos a seguinte relação,

$$\mathrm{P}(X < 500) = 0{,}10 \Leftrightarrow \mathrm{P}(Z < \frac{500 - \mu}{10}) = 0{,}10$$



Da tabela, temos que $z = \dfrac{500 - \mu}{10} = -1{,}28$. Logo $\mu = 500 + 12{,}8 = \mathbf{512{,}8}$.

Portanto, com a máquina assim regulada, o peso médio deve ser $\mu = 512{,}8\ g$. Assim, a distribuição da máquina de empacotar um determinado produto é dada por $X \sim N(512{,}8; 10^2)$.

(b) (0,5 ponto)

Do item (a) temos que $\mu = 512{,}8$, ou seja, $X \sim N(512{,}8; 10^2)$.

Então, a probabilidade de que o peso de um pacote exceda 600g é

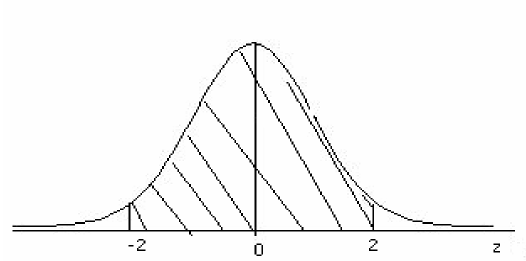
$$\mathrm{P}(X > 600) = \mathrm{P}(Z > \frac{600 - 512{,}8}{10}) = \mathrm{P}(Z > 8{,}72) = 1 - A(8{,}72) \cong 1 - 1 = 0\,.$$

Da tabela, temos que A(8,72) = 1. Logo, P(*X* > 600) = **0.**

(c) (0,5 ponto)

Temos que a porcentagem de pacotes em que o peso não se afasta da média em mais que dois desvios padrão é dado por

$$\mathrm{P}(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = \mathrm{P}(-2 < Z < 2) = 2 \times \left[\mathrm{A}(2) - 0{,}5\right].$$



Da tabela temos que A(2)= 0,9772. Assim, temos que
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 2 \times (0{,}9772 - 0{,}5) =$ **0,9544.**

(d) (0,5 ponto)
Do item (a) temos que a probabilidade de que o peso de um pacote tenha menos de 500g é *p*=0,10. Seja a variável *N*: número de pacotes com menos de 500g.

Considerando uma amostra de 120 pacotes, temos que $N \sim \text{bin}(120; 0{,}10)$. Assim, temos que o número esperado de pacotes com menos de 500 g é dada por
E(*N*) = *n* x *p* = 120 x 0,1 = **12 pacotes**.

Exercício 2 (2 pontos)
Usa-se um aparelho de radar para medir a velocidade dos carros numa rodovia na hora do "pico". As velocidades dos carros seguem o modelo normal de probabilidade com média 79km/h. Determinar:

(a) O desvio padrão das velocidades, se 3% dos carros ultrapassam 90km/h;

(b) A porcentagem dos carros que trafegam a menos de 75km/h;

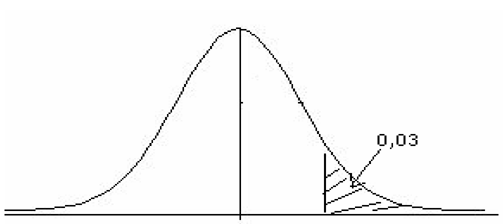
(c) O intervalo central de valores de velocidade tal que 90% dos automóveis circulam, no horário do "pico" nessa rodovia, com velocidade nesse intervalo?

Solução

Seja *X*: velocidade do carro numa rodovia na hora do "pico". Então, $X \sim \text{N}(79; \sigma^2)$.

(a) (0,7 pontos)
Se 3% dos carros ultrapassam 90km/h, temos que

$$P(X > 90) = 0{,}03 \Leftrightarrow P(Z > \frac{90-79}{\sigma}) = 0{,}03\,.$$



Temos que $A(\frac{90-79}{\sigma}) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$.

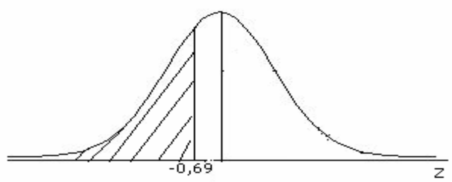
Da tabela, segue que $z = \frac{90-79}{\sigma} = 1{,}89$.

Logo, o desvio padrão é dado por $\sigma = \frac{90-79}{1{,}89} =$ **5,82 Km/h**, implicando que $X \sim \mathrm{N}(79; 5{,}82^2)$.

(b) (0,6 ponto)

A probabilidade dos carros que trafegam a menos de 75km/h é dada por

$$P(X < 75) = P(Z < \frac{75-79}{5{,}82}) = P(Z < -0{,}69) = P(Z > 0{,}69) = 1 - A(0{,}69)$$



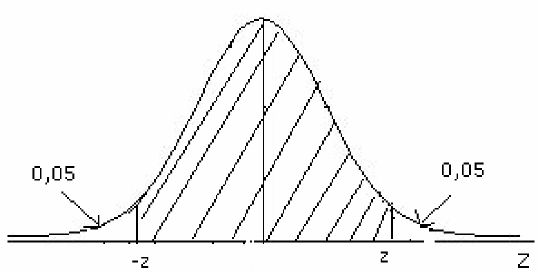
Da tabela, temos que $A(0{,}69) = 0{,}7549$. Logo $P(X < 75) = 1 - 0{,}7549 =$ **0,2451**.

Portanto, a porcentagem de carros que trafegam a menos de 75km/h é 24,51%.

(c) (0,7 ponto)

Temos que 0,9 é a probabilidade do intervalo central de valores de velocidade dos automóveis que circulam no horário do "pico". Seja [x_1, x_2] o intervalo procurado. Então,

$$P(x_1 < X < x_2) = 0{,}9 = P\left(\frac{x_1 - 79}{5{,}82} < Z < \frac{x_2 - 79}{5{,}82}\right)$$



Devemos encontrar z na tabela tal que $A(z) = 0{,}95.$ Da tabela $z = 1{,}65.$ Logo,

$$-z = \frac{x_1 - 79}{5{,}82} = -1{,}65 \Rightarrow x_1 = 79 - 1{,}65 \times 5{,}82 = \textbf{69,4 km/h.}$$

$$z = \frac{x_2 - 79}{5{,}82} = 1{,}65 \Rightarrow x_2 = 79 + 1{,}65 \times 5{,}82 = \textbf{88,6 km/h.}$$

Portanto, o intervalo central de valores de velocidade tal que 90% dos automóveis circulam, no horário do "pico" nessa rodovia é [69,4 km/h ; 88,6 km/h].

Obs.: Considerando $z = 1{,}64$, o intervalo resultante análogo é [69,46 km/h ; 88,54 km/h].

Exercício 3 (2 pontos)

Em uma universidade, as notas dos alunos no curso de Estatística distribuem-se de acordo com uma distribuição normal com média 6 e desvio padrão 1. O professor atribuirá conceitos *A*, *B*, *C* e *R* da seguinte forma:

Nota (*X*)	**Conceito**
$X < 5$	*R*
$5 \leq X < 6{,}5$	*C*
$6{,}5 \leq X < 8$	*B*
$8 \leq X < 10$	*A*

(a) Determine a porcentagem de alunos com conceito *A*, *B*, *C* e *R*.

(b) Suponha que o professor deseja dar aula de reforço aos 10% dos alunos com as notas mais baixas e premiar os 1% dos alunos com notas mais altas. Determine as notas limites para um aluno receber aula de reforço e para ser premiado.

(c) Se 10 alunos são escolhidos ao acaso e com reposição, qual é a probabilidade de que pelo menos 3 tenham obtido conceito *R*?

Solução

Seja *X*: notas dos alunos no curso de estatística. Temos que $X \sim N(6,1)$.

(a) (0,8 ponto)

A probabilidade de um aluno ter conceito *A*, *B*, *C* e *R* é dada por

Conceito A:

$$\mathrm{P}(8 \leq X < 10) = \mathrm{P}\left(\frac{8-6}{1} \leq Z < \frac{10-6}{1}\right) = \mathrm{P}(2 \leq Z < 4) = \mathrm{A}(4) - \mathrm{A}(2) \cong 1 - 0{,}9772 = \mathbf{0{,}0228.}$$

Conceito B:

$$\mathrm{P}(6{,}5 \leq X < 8) = \mathrm{P}\left(\frac{6{,}5-6}{1} \leq Z < \frac{8-6}{1}\right) = \mathrm{P}(0{,}5 \leq Z < 2) = \mathrm{A}(2) - \mathrm{A}(0{,}5) \cong 0{,}9772 - 0{,}6915 = \mathbf{0{,}2857}$$

Conceito C:

$$\mathrm{P}(5 \leq X < 6{,}5) = \mathrm{P}\left(\frac{5-6}{1} \leq Z < \frac{6{,}5-6}{1}\right) = \mathrm{P}(-1 \leq Z < 0{,}5) = \mathrm{A}(0{,}5) - \mathrm{P}(Z < -1) = \mathrm{A}(0{,}5) - \mathrm{P}(Z > 1)$$

$$= \mathrm{A}(0{,}5) - (1 - \mathrm{A}(1)) \cong 0{,}6915 - (1 - 0{,}8413) = \mathbf{0{,}5328}$$

Conceito R:

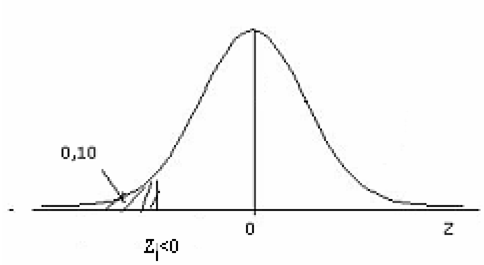
$$\mathrm{P}(X < 5) = \mathrm{P}\left(Z < \frac{5-6}{1}\right) = \mathrm{P}(Z < -1) = \mathrm{P}(Z > 1) = 1 - \mathrm{A}(1) \cong 1 - 0{,}8413 = \mathbf{0{,}1587.}$$

As porcentagens de alunos com conceito *A*, *B*, *C* e *R* são, respectivamente, 2,28%; 28,57%; 53,28% e 15,87%.

(b) **(0,6 ponto)**

Supondo que o professor deseja dar aula de reforço aos 10% dos alunos com as notas mais baixas, temos que,

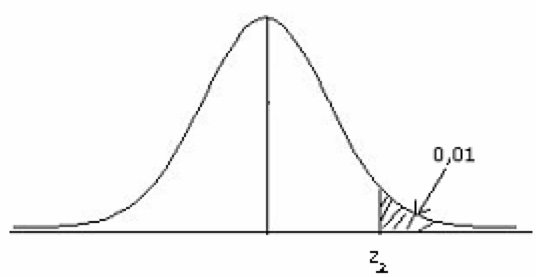
$$0{,}1 = \mathrm{P}(X < x_1) = \mathrm{P}\left(Z < \frac{x_1 - 6}{1}\right)$$



Da tabela, temos que $z_1 = \dfrac{x_1 - 6}{1} = -1{,}28$. Logo, x_1 = 6 – 1,28 = **4,72**.

Supondo que o professor premia os 1% dos alunos com notas mais altas, temos que

$$0{,}01 = \mathrm{P}(X > x_2) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{x_2 - 6}{1}\right)$$



z_2 é tal que $\mathrm{A}(z_2) = 0{,}99$. Da tabela, temos que $z_2 = 2{,}33$. Então, $z_2 = x_2 - 6 = 2{,}33 \Rightarrow x_2 =$ **8,33.**

Portanto, as notas limites para um aluno receber aula de reforço é 3,67 e para ser premiado é 8,33

c) (0,6 ponto)

Seja *N*: número de alunos que obtém conceito *R*.

Se 10 alunos são escolhidos ao acaso e com reposição, temos que $N \sim bin(10,\ p)$, em que *p* = 0,1587 (foi calculada no item(a)).

No MINITAB, obtemos

```
MTB > pdf;
SUBC> bino 10 0,1587.
```

Probability Density Function

```
Binomial with n = 10 and p = 0,1587
 x  P( X = x )
 0    0,177627
 1    0,335070
 2    0,284429
 3    0,143076
 4    0,047232
 5    0,010692
```

6	0,001681
7	0,000181
8	0,000013
9	0,000001
10	0,000000

Assim, a probabilidade de que pelo menos 3 tenham obtido conceito *R* é dado por
$P(N \geq 3) = 1 - P(N \leq 2) = 1 - (0{,}177627+0{,}335070+0{,}284429) = 1 - 0{,}797126 = \mathbf{0{,}202874}$.

Exercício 4 (2 pontos)
A distribuição dos pesos de homens adultos de uma certa população é normal com média 78 kg e desvio padrão 10 kg, e para as mulheres adultas dessa mesma população é normal com média 65 kg e desvio padrão 8 kg.
(a) Qual é a porcentagem de homens com peso menor que 61 kg?
(b) Qual é a porcentagem de mulheres com peso menor que 61 kg?
(c) Se uma pessoa é sorteada de um grupo no qual o número de homens é o dobro do número de mulheres, qual é a porcentagem de pessoas que deverá pesar menos que 61 kg?

Solução
Sejam *X*: peso de homens adultos e *Y*: peso de mulheres adultas.
Então, $X \sim N(78{,}10^2)$ e $Y \sim N(65{,}8^2)$.
(a) (0,6 ponto)
A porcentagem de homens com peso menor que 61 kg é dada por

$$P(X < 61) = P(Z < \frac{61-78}{10}) = P(Z < -1{,}7) = P(Z > 1{,}7) = 1 - A(1{,}7) = 1 - 0{,}9554 = \mathbf{0{,}0446}$$

Logo, a porcentagem de homens com peso menor que 61 kg é 14,23%.

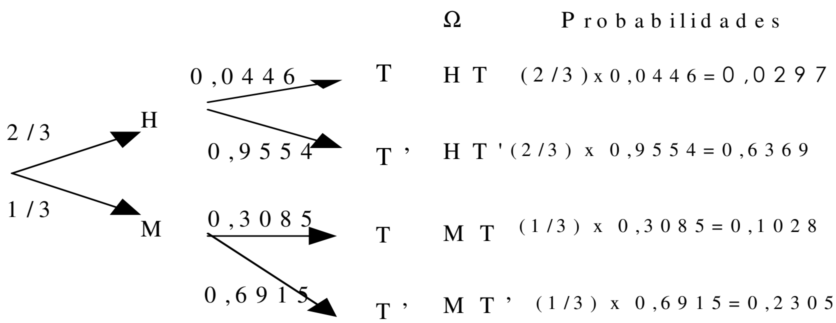
(b) (0,6 ponto)
A porcentagem de mulheres com peso menor que 61 kg é dada por

$$P(Y < 61) = P(Z < \frac{61-65}{8}) = P(Z < -0{,}5) = P(Z > 0{,}5) = 1 - A(0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = \mathbf{0{,}3085}$$

Logo, a porcentagem de mulheres com peso menor que 61 kg é 30,85%.

(c) (0,8 ponto)
Suponha que se tem um grupo no qual o número de homens é o dobro do número de mulheres.
Seja *T*: pessoa pesa menos 61 kg.
Temos que o número de homens é o dobro do número de mulheres, logo, nesse grupo a proporção de Homens (*H*) é 2/3 e a proporção de mulheres(*M*) é 1/3.

Dos itens (a) e (b) temos que $P(T|H) = 0{,}0446$ e $P(T|M) = 0{,}3085$. Assim, temos



A porcentagem de pessoas que deverá pesar menos que 61 kg é

$$\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}(H \cap T) + \mathrm{P}(M \cap T) = \frac{2}{3} \times 0{,}0446 + \frac{1}{3} \times 0{,}3085 = 0{,}0297 + 0{,}1028 = \mathbf{0{,}1326}.$$

Exercício 5 (2 pontos)

Uma empresa produz televisores de 2 tipos, tipo *A* (comum) e tipo *B* (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal, sendo que no tipo *A* com média 9 meses e desvio padrão 2 meses e, no tipo *B*, com média 12 meses e desvio padrão 3 meses. Os televisores de tipo *A* e *B* são produzidos com lucro de 1000 u.m. e 2000 u.m., respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 3000 u.m. e 8000 u.m., respectivamente.

(a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo *A* e do tipo *B*;

(b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo *A* e para os televisores do tipo *B*;

(c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo *A* ou do tipo *B*?

Solução:

Sejam as variáveis aleatórias,

A: tempo para ocorrência de defeitos nos televisores de tipo *A* $\Rightarrow$ $A \sim \mathrm{N}(9, 2^2)$.

B: tempo para ocorrência de defeitos nos televisores de tipo *B* $\Rightarrow$ $B \sim \mathrm{N}(12, 3^2)$.

a) (0,7 ponto)

Garantia**:** apresentar defeito até 6 meses de uso.

Então as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B são dadas, respectivamente, por

$$\mathrm{P}(A < 6) = \mathrm{P}(Z < \frac{6-9}{2}) = \mathrm{P}(Z < -1{,}5) = \mathrm{P}(Z > 1{,}5) = 1 - A(1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = \mathbf{0{,}0668},$$

$$\mathrm{P}(B < 6) = \mathrm{P}(Z < \frac{6-12}{3}) = \mathrm{P}(Z < -2) = \mathrm{P}(Z > 2) = 1 - A(2) = 1 - 0.9772 = \mathbf{0{,}0228}.$$

Assim, a probabilidade de haver restituição nos televisores do tipo A é 0,0668 e no tipo B é 0,0228.

b) (0,7 ponto)

Sejam,
L_A: lucro dos televisores do tipo *A*
L_B: lucro dos televisores do tipo *B*.

Então a distribuição de probabilidades das variáveis aleatórias L_A e L_B são dadas, respectivamente, por

L_A	$P(L_A)$
-3000	$P(A < 6)$ = 0,0668
1000	$P(A \geq 6)$ = 0,9332
	1

L_B	$P(L_B)$
-8000	$P(B < 6)$ = 0,0228
2000	$P(B \geq 6)$ = 0,9772
	1

Portanto,
Lucro médio para os televisores do tipo *A*:
$E(L_A)$=-3000 $\times$ 0,0668+ 1000 $\times$ 0,9332 = **732,8 u.m.**

Lucro médio para os televisores do tipo *B*:
$E(L_B)$=-8000 $\times$ 0,0228 + 2000 $\times$ 0,9772 = **1772 u.m.**

c) (0,6 pontos)
Levando-se os lucros médios dos 2 tipos de televisores, a empresa deve incentivar as vendas dos aparelhos de tipo *B*, pois apresentam um lucro médio maior.