MATEMÁTICA FINANCEIRA CEF-2012

I - CONCEITOS BÁSICOS

II- JUROS SIMPLES

III- JUROS COMPOSTOS

IV- TAXA DE JUROS

V- DESCONTOS

VI- PLANOS OU SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS

VII- CÁLCULO FINANCEIRO: CUSTO REAL EFETIVO DE OPERAÇÕES DE FINACIAMENTO, EMPRÉSTIMO E INVESTIMENTO

VIII- AVALIAÇÃO DE ALTERNATIVAS DE INVESTIMENTO (T.I.R)

I- CONCEITOS BÁSICOS

-Capital (C) – quantidade de dinheiro que será transacionada

-Juro (J) – remuneração pelo uso do capital

-Taxa de Juros (i) – relação entre os juros pagos e o capital num intervalo de tempo chamado período

-Montante (M) – soma do capital com os juros no final do prazo

-Fluxo de Caixa – relação de entradas e saídas de dinheiro

-*Regimes de Capitalização*

- Sistema de Capitalização Simples ou Juros Simples; o juro de qualquer período é constante pois é sempre calculado sobre o capital inicial.
- Sistema de Capitalização Composta ou Juros Compostos; o juro de cada período é calculado sobre o capital inicial *mais os juros acumulados até o período anterior*.
- Na resolução dos problemas é importante que a PERIODICIDADE DA TAXA DE JUROS e o PRAZO de aplicação estejam expressos na mesma unidade de tempo.

II- JURO SIMPLES

O juros será simples quando incidir apenas sobre o valor do capital inicial. Nos períodos subsequentes, os juros não serão acrescidos de novos juros. Capital inicial ou valor principal é o valor inicialmente considerado na transação, antes de somarmos os juros. Suas fórmulas são:

$J = C . i . t$

$M = C + J$

$M = C + C.i.t$

Observe que no lado direito do sinal de igual há um fator comum, a variável C, que pode ser colocada em *evidência,* ficando a fórmula com o seguinte aspecto:

$M = C (1 + it)$

O fator (1 + it) é chamado de FATOR DE ACUMULAÇÃO DE CAPITAL para juros simples.

Para calcular o montante a juros simples, basta multiplicar o capital *C* pelo fator de acumulação de capital (1 + it).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE JUROS SIMPLES

01.

Calcular o montante produzido por um capital de R$ 10.000,00 aplicado a uma taxa de juros de 4% a.a, pelo prazo de 1,5 anos.

dados:

M = ?

C = 10000

i = 4% a.a. = 0,04 a.a.

t (prazo) = 1,5 anos

lembrando:

J = C.i.t

M = C + J

No exemplo apresentado, a unidade de tempo adotada para medir a periodicidade da taxa de juros é igual a do prazo . Então podemos escrever diretamente que t = 1,5.

J = C. i. t

J = 10000 . 0,04 . 1,5

J = 600

M = C + J

M = 10000 + 600

M = R$ 10.600,00

Poderíamos calcular o montante diretamente utilizando a fórmula:

M = C (1 + it). O resultado é o mesmo:

M = 10000 (1 + 0,04 . 1,5)

M = 6000 . 1,06

M = R$ 10.600,00

02.

Calcular o montante produzido por um capital de R$ 10.000,00 durante 3 anos, considerando o regime de juros simples, a uma taxa de 5% a.t.

Dados:

M =?

C = 10000

t = 3 anos

i = 5% a.t.

Observe que o prazo é anual e a taxa é trimestral. Para que possamos calcular os juros é necessário que adotemos a mesma unidade de tempo para a taxa de juros e para o prazo. Iremos converter a taxa, de trimestral para anual.

t = 3 anos
i = 5% a.t. = 20% a.a. (1 ano tem 4 trimestres e, portanto, 5% . 4 = 20% a.a.) = 0,20 a.a.

lembrando:

M = C + J

J = C.i.t

M = C + C.i.t

substituindo os dados:

M = C + C.i.t

M = 10000 + 10000.0,20.3

M = 10000 + 6000

M = R$ 16.000,00

Taxas Proporcionais

Ao transformarmos, na resolução do exercício 2, a taxa de 5% a.t. para 20% a.a., utilizamos o conceito de TAXAS DE JUROS PROPORCIONAIS. Naquele contexto (regime de juros simples), raciocinamos que 5% em um trimestre era a mesma coisa que 20% em quatro trimestres. Observe que:

20%/4 trimestres = 5%/1 trimestre

Assim, duas taxas i_1 e i_2, com os respectivos períodos n_1 e n_2 *medidos na mesma unidade de tempo,* são ditas proporcionais quando obedecerem à seguinte relação:

$i_1/n_1 = i_2/n_2$

Outros exemplos:

2% a.a. é proporcional a 1% a.m., pois 12%/12m = 1%/1m

10% a.s. é proporcional a 20% a.a., pois 10%/1s = 20%/2s

6% a.t. é proporcional a 2% a.m.,pois 6%/3m = 2%/1m

36% a.a. é proporcional a 9% a.t., pois 36%/4t = 9%/1t

03-

Uma dívida, no valor de 1.000, vencida em 01/02/12, será paga em 10/03/12, no sistema de capitalização simples, a uma taxa de juros comercial (1 ano = 360 dias e 1 mês = 30 dias, inclusive fevereiro) de 36% a.a., sobre o valor. Qual o total dos juros pagos:

dados:

J = ?

i = 36% a.a. = 0,1% a.d.= 0,001 a.d.

t = número de dias entre 01/02/12 e 10/03/12 = 40 dias (30 dias de janeiro + 10 dias de fevereiro, uma vez que o ano é o comercial)

C = 1.000

lembrando:

J = C.i.t

Substituindo:

J = C.i.t

J = 1.000 . 0,001.40

J = R$ 40,00

OBSERVAÇÃO:

Para o cálculo dos juros existem três convenções utilizadas na matemática financeira. O examinador deverá dizer qual delas devemos utilizar. As convenções são: juro exato, juro comercial (ou ordinário) e juro bancário.

JURO EXATO

A contagem do número de dias (n) se faz utilizando o ano civil (aquele que é representado no calendário).

Portanto, dada uma taxa anual (i_{anual}), os juros (J) produzidos por um capital (C), durante n dias, serão dados por:

$J = C \cdot i_{anual} \cdot n/365$

n = número de dias contados no calendário do ano civil.

Atenção:

. O número de dias (n) deve ser contado *no calendário,* portanto você deve saber o número exato de dias de cada mês do calendário;

. Caso o ano seja bissexto , a divisão na expressão acima será feita por 366 e não por 365, já que o ano bissexto tem um dia a mais.

Aplicando juro exato ao exercício 03, os juros seriam:

$J = 1000 \cdot 0{,}36 \cdot 41/366$

$J = 40{,}33$

No denominador da expressão acima utilizamos o valor 366 porque 2012 é ano bissexto. O número n de dias entre 01/02/12 e 10/03/12 contados segundo o calendário civil é de 41 (31 dias de janeiro e 10 dias de fevereiro).

JURO COMERCIAL

A contagem do número de dias se faz utilizando o ano comercial (1 ano = 360 e 1 mês = 30 dias, inclusive fevereiro).

Para o caso de juro comercial:

$J = C \cdot i_{anual} \cdot n/360$

n = nº de dias contados no calendário do ano comercial.

Aplicando ao nosso problema:

$J = 1000 \cdot 0{,}36 \cdot 40/360$

J = R$ 40,00

JURO BANCÁRIO

A contagem do número de dias (n) se faz pelo calendário *ano civil,* mas o juro diário é calculado utilizando o *ano comercial.*

Para o caso do juro bancário:

$J = C \cdot i_{anual} \cdot n/360$

n = nº de dias contados no calendário do ano civil.

Aplicando ao problema 03, temos:

$J = 1.000 \cdot 0{,}36 \cdot 41/360$

J = R$ 41,00

CONCLUSÃO:

O juro bancário é o maior.

04-

Qual o capital que aplicado a uma taxa de juros simples de 12% a.a., durante 4 meses, resultou em um montante de R$ 2.512,00?

dados:

C = ?

i = 12% a.a. = 1% a.m. = 0,01 a.m.

n = 4 meses

lembrando:

$M = C + J$

$J = C.i.n$

$M = C + C.i.n$

Substituindo os dados :

$M = C + C.i.n$

$2.512 = C + C.0,01.4$

$2.512 = C + 0,04C$

$2.512 = 1,04C$

$2512/1,04 = C$

$C = 2.415,38$

05-

Qual a taxa de juros simples utilizada em um empréstimo de R$ 3.200,00 cujo valor pago 3 meses após sua contratação foi de R$ 3.800,00?

Dados:

$i = ?$

$C = 3.200$

$M = 3.800$

$n = 3$ meses

lembrando:

(*) $M = C + C.i.n$

Substituindo :

$M = C + C.i.n$

$3800 = 3200 + 3200.i.3$

$3800 = 3200 + 9600.i$

$3800 – 3200 = 9600.i$

$600 = 9600.i$

$600/9600 = i$

$i = 0,0625 = 6,25\%$ a.m.

06- Jorge emprestou de seu amigo Marcos R$ 4.000,00 e pagou pelo empréstimo, R$ 325,00 de juros, a uma taxa de 2,5% a.m. no regime de capitalização simples. Qual foi o período de empréstimo?

Dados:

$C = 4000$

$J = 300$

$i = 2,5\%$ a.m. $= 0,025$ a.m.

$t = ?$

lembrando:

$J = C.i.t$

Substituindo os dados:

$300 = 4000.0,025.t$

$300 = 100.t$

$300/100 = t$

$t = 3$ meses

07-

Qual a taxa de juros simples que aplicada a um determinado capital durante 4 meses o duplicará?

Dados:

Capital = C

J =C

t = 4 meses

i = ?

lembrando:

J = C.i.t

Substituindo:

J = C.i.t

C = C.i.4

C = 4.C.i

$\cancel{C}/4.\cancel{C}$ = i

¼ = i

0,25 = 25% = i = 25% a.m.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO - JUROS SIMPLES

1) O juro produzido por um capital de 5.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 6% a.a. durante 2 anos é igual a:

a) 500,00

b) 1.200,00

c) 1.000,00

d) 800,00

e) 600,00

2) O juro de uma aplicação de 1.000,00 em 18 meses, se a taxa de juros é de 42% a.a. é de:

a) 720,00

b) 420,00

c) 756,00

d) 630,00

e) 1.200,00

3) A quantia a ser aplicada em uma instituição financeira que paga a taxa de juros simples de 8% a.a., para que se obtenha 1.000,00 no fim de 4 anos é:

a) 320,00

b) 543,47

c) 238,09

d) 570,00

e) 757,58

4) Um capital aplicado a 5% ao mês a juro simples, triplicará em:

a) 3 anos

b) 80 meses

c) 40 meses

d) 12 meses

e) 50meses

5) Um principal de R$ 5.000,00 é aplicado à taxa de juros simples de 2,2% a.m., atingindo, depois de certo período, um montante equivalente ao volume de juros gerados por outra aplicação, também a juros simples, de R$ 12.000,00 a 5% a.m. durante 1 ano. O prazo de aplicação do primeiro principal foi de:

a) 10 meses

b) 20 meses

c) 2 anos

d) 1,5 ano

e) 30 meses

6) A taxa de juros simples relativa a uma aplicação de R$ 10.000,00 por um período de 10 meses, que gera um montante de R$ 15.000,00 é de:

a) 48% a.a.

b) 15% a.m.

c) 10% a.m.

d) 100% a.a.

e) 5% a.m.

7) Uma loja oferece um relógio por R$ 3.000,00 à vista ou 20% do valor à vista, como entrada, e mais um pagamento de R$ 2.760,00 após 6 meses. A taxa de juros cobrada é de:

a) 30% a.a.

b) 1% a.d.

c) 3% a.m.

d) 360% a.a.

e) 12% a.a.

8) As taxas de juros ao ano, proporcionais às taxas 25% a.t.; 18% a.b.; 30% a.q. e 15% a.m., são, respectivamente:

a) 100%; 108%; 90%; 180%

b) 100%; 180%; 90%; 108%

c) 75%; 26%; 120%; 150%

d) 75%; 150%; 120%; 26%

e) 100%; 150%; 120%; 108%

9) As taxas de juros bimestrais equivalentes às taxas de 120% a.a.; 150% a.s.; 86% a.q. e 90% a.t. são respectivamente:

a) 40%; 100%; 86%; 120%

b) 60%; 43%; 50%; 20%

c) 20%; 50%; 43%; 60%

d) 120%; 86%; 100%; 40%

e) 20%; 43%; 50%; 60%

10) Uma pessoa aplicou R$ 1.500,00 no mercado financeiro e após 5 anos recebeu o montante de R$ 3.000,00. Que taxa equivalente semestral recebeu?

a) 10%

b) 40%

c) 6,6%

d) 8,4%

e) 12%

11) Os juros simples comercial e exato das propostas abaixo relacionadas são, respectivamente:

- R$ 800,00 a 20% a.a., por 90 dias
- R$ 1.100,00 a 27% a.a., por 135 dias
- R$ 2.800,00 a 30% a.a., por 222 dias

a) 111,38 e 109,85; 518,00 e 510,90; 40,00 e 39,45

b) 40,00 e 39,45; 111,38 e 109,85; 518,00 e 519,90

c) 39,45 e 40,00; 109,85 e 111,38; 510,90 e 518,00

d) 40,00 e 39,95; 109,85 e 111,38; 518,00 e 510,90

e) 40,00 e 111,38; 39,45 e 109,85; 510,90 e 518,00

12) O juro simples exato do capital de R$ 33.000,00, colocado à taxa de 5% a.a., de 2 de janeiro de 1945 a 28 de maio do mesmo ano, foi de:

a) R$ 664,52

b) R$ 660,00

c) R$ 680,00

d) R$ 658,19

e) R$ 623,40

13) A quantia de R$ 1.500,00 foi aplicada à taxa de juros de 42% a.a., pelo prazo de 100 dias. O juro dessa aplicação se for considerado juro comercial e juro exato, será, em R$, respectivamente:

a) 175,00 e 172,12

b) 172,12 e 175,00

c) 175,00 e 172,60

d) 172,60 e 175,00

e) 170,00 e 175,00

14) Um capital de R$ 2.500,00 foi aplicado à taxa de 25% a.a. em 12 de fevereiro de 1996. Se o resgate for efetuado em 03 de maio de 1996, o juro comercial recebido pelo aplicador foi, em R$, de:

a) 138,89

b) 138,69

c) 140,26

d) 140,62

e) 142,60

15) Certa pessoa obteve um empréstimo de R$ 100.000,00, à taxa de juros simples de 12% a.a. Algum tempo depois, tendo encontrado quem lhe emprestasse R$ 150.000,00 à taxa de juros simples de 11% a.a., liquidou a dívida inicial e, na mesma data, contraiu novo débito. Dezoito meses depois de ter contraído o primeiro empréstimo, saldou sua obrigação e verificou ter pago um total de R$ 22.500,00 de juros. Os prazos do primeiro e do segundo empréstimo são, respectivamente:

a) 12 meses e 6 meses

b) 18 meses e 6 meses

c) 6 meses e 12 meses

d) 6 meses e 18 meses

e) 12 meses e 18 meses

16) João fez um depósito a prazo fixo por 2 anos. Decorrido o prazo, o montante, que era de R$ 112.000,00, foi reaplicado em mais um ano a uma taxa de juros 15% superior à primeira. Sendo o montante de R$ 137.760,00 e o regime de capitalização juros simples, o capital inicial era, em R$:

a) 137.760,00

b) 156.800,00

c) 80.000,00

d) 96.000,00

e) 102.000,00

17) O prazo em que um capital colocado à taxa de 5% a.a., rende um juro comercial igual a 1/50 de seu valor é igual a:

a) 144 dias

b) 146 dias

c) 150 dias

d) 90 dias

e) 80 dias

18) Uma pessoa sacou R$ 24.000,00 de um banco sob a condição de liquidar o débito no final de 3 meses e pagar ao todo R$ 24.360,00. A taxa de juro cobrada pelo uso daquele capital foi de:

a) 4,06% a.a.

b) 6% a.a.

c) 4,5% a.a.

d) 8% a.a.

e) 1% a.m.

19) Um agricultor, possuidor de um estoque de 5.000 sacas de café, na esperança de uma alta do produto, rejeita uma oferta de compra

desse estoque ao preço de R$ 80,00 a saca. Dois meses mais tarde, forçado pelas circustâncias, vende o estoque ao preço de R$ 70,00 a saca. Sabendo-se que a taxa corrente de juro é de 6% a.a., o prejuízo real do agricultor, em R$, foi de:

a) 350.000,00

b) 50.000,00

c) 54.000,00

d) 38.000,00

e) 404.000,00

20) A taxa de juros anual a que de ser colocado um capital para que produza 1/60 de seu valor em 4 meses é de:

a) 7,2%

b) 8%

c) 4%

d) 6%

e) 5%

21) Um negociante obteve R$ 100.000,00 de empréstimo à taxa de 7% a.a. Alguns meses depois, tendo encontrado quem lhe oferecesse a mesma importância a 6% a.a., assumiu o compromisso com essa pessoa e, na mesma data, liquidou a dívida com a primeira. Um ano depois de realizado o primeiro empréstimo, saldou o débito e

verificou que pagou, ao todo, R$ 6.250,00 de juros. O prazo do primeiro empréstimo foi de?

a) 9 meses

b) 6 meses

c) 11 meses

d) 3 meses

e) 7 meses

22) Uma pessoa deposita num banco um capital que, no fim de 3 meses (na época do encerramento das contas), se eleva, juntamente com o juro produzido, a R$ 18.180,00. Este montante, rendendo juro à mesma taxa e na mesma conta, produz, no fim de 6 meses, outro montante de R$ 18.543,60. O capital inicial foi de, em R$:

a) 18.000,00

b) 16.000,00

c) 15.940,00

d) 17.820,00

e) 17.630,00

23) A taxa de juro do banco foi de:

a) 48% a.a.

b) 3% a.m.

c) 8% a.a.

d) 10% a.a.

e) 4% a.a.

24) O prazo para que o montante produzido por um capital de R$ 1.920,00, aplicado a 25% a.a., se iguale a um outro montante produzido por um capital de R$ 2.400,00 aplicado a 15% a.a., admitindo-se que os dois capitais sejam investidos na mesma data, é de:

a) 4 meses

b) 6 anos

c) 6 meses

d) 2 anos

e) 4 anos

25) Emprestei R$ 55.000,00, durante 120 dias, e recebi juros de R$ 550,00. A taxa mensal aplicada foi de:

a) 2,5% a.m.

b) 25,25% a.m.

c) 2,25% a.m.

d) 0,25% a.m.

e) 4% a.m.

26) Uma pessoa deposita R$ 30.000,00 num banco que paga 4% a.a. de juros, e receber, ao fim de certo tempo, juros iguais a 1/6 do capital. O prazo de aplicação desse dinheiro foi de:

a) 60 meses

b) 80 meses

c) 50 meses

d) 4 anos

e) 2100 dias

27) Uma pessoa emprestou certo capital a 6% a.a. Depois de um ano e meio retirou o capital e os juros e aplicou novamente o total, desta vez a 8% a.a. Sabendo que no fim de 2 anos e meio, após a segunda aplicação, veio a retirar o montante de R$ 26.160,00. O capital emprestado no início foi de, em R$:

a) 20.000,00

b) 21.800,00

c) 23.600,00

d) 19.000,00

e) 19.630,00

28) O capital que, aplicado a uma taxa de 3/4% a.m., produz R$ 10,80 de juros anuais é, em R$:

a) 144,00

b) 97,20

c) 110,00

d) 90,00

e) 120,00

29) Um capital aumentado de seus juros durante 15 meses se elevou a R$ 264,00. Esse mesmo capital diminuído de seus juros durante 10 meses ficou reduzido a R$ 224,00. A taxa empregada foi de:

a) 18% a.a.

b) 8% a.a.

c) 1% a.m.

d) 0,5% a.m.

e) 0,01% a.d.

30) Certa pessoa emprega metade de seu capital juros simples, durante 2 anos, à taxa de 5% a.a. e metade durante 3 anos, à taxa de 8% a.a., obtendo, assim, o rendimento total de R$ 2.040,00. O seu capital é de, em R$:

a) 6.000,00

b) 12.000,00

c) 14.000,00

d) 7.000,00

e) 12.040,00

31) A taxa mensal de um capital igual R$ 4.200,00, aplicado por 480 dias e que rendeu R$ 1.232,00 de juros é de:

a) 2,08%

b) 8.08%

c) 1,83%

d) 3,68%

e) 2,44%

32) (TTN/89) Os juros simples que um capital de 10.000,00 rende em um ano e meio aplicado à taxa de 6% a.a. o valor de:

a) 700,00

b) 1.000,00

c) 1.600,00

d) 600,00

e) 900,00

33) (TTN/89) O capital que, investido hoje a juros simples de 12% a.a., se elevará a R$ 1.296,00 no fim de 8 meses, é de:

a) 1.100,00

b) 1.000,00

c) 1.392,00

d) 1.200,00

e) 1.399,68

34) (TTN/92) Quanto se deve aplicar a 12% ao mês, para que se obtenha os mesmos juros simples que os produzidos por Cr$ 400.000,00 emprestados a 15% ao mês, durante o mesmo período?

a) Cr$ 420.000,00

b) Cr$ 450.000,00

c) Cr$ 480.000,00

d) Cr$ 520.000,00

e) Cr$ 500.000,00

Gabarito:

1E – 2D – 3E – 4C – 5B – 6E – 7A – 8A – 9C – 10A – 11B – 12B – 13C – 14D – 15C -16C – 17A – 18B – 19C – 20E – 21D – 22A – 23E – 24E – 25D – 26C – 27A – 28E – 29B – 30B – 31C – 32E – 33D – 34E

III- JUROS COMPOSTOS

O juro composto é o mais utilizado pelo sistema financeiro, lojas e comércio em geral. Os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para formação de novos juros, ou seja , "juros sobre juros".

Vamos a um exemplo:

Você aplicou R$ 1.000,00 em uma instituição financeira a uma taxa de juros de 2% a.m., *capitalizados mensalmente*, durante 3 meses. Vamos calcular o montante M_3 no final desse prazo.

Temos que:

C = 1.000

$i = 2\%$ a.m. = 0,02 a.m.

$n = 3$ (capitalização mensal)

Então, o montante M_1 no final do primeiro período será dado por:

$M_1 = 1.000$

$M_1 = 1.000 . 1,02$

$M_1 = 1.020$

O montante M_2 no final do segundo período será dado por:

$M_2 = 1.020 (1 + 0,02)$

$M_2 = 1061,21$

O montante M_3 no final do terceiro período será dado por:

$M_3 = 1.040,40 (1 + 0,02)$

$M_3 = 1.061,21$

Verifique que montante do primeiro período foi utilizado para o cálculo do juro do segundo período e assim sucessivamente.

Fórmula do Montante a Juros Compostos

Vamos supor a aplicação de um capital C, durante n períodos, a uma taxa de juros compostos i ao período.

Calculemos o montante M_n no final dos n períodos utilizando o mesmo processo do exemplo anterior, ou seja, período a período.

$M_1 = C(1 + i)$

$M_2 = M_1(1 + i) = C(1 + i) . (1 + i) = C(1 + i)^2$

$M_3 = M_2 (1 + i) = C(1 + i)^2 . (1 + i) = C(1 + i)^3$

Veja que, para o montante do primeiro período, a expressão fica:

$M_1 = C(1 + i)$

Para o montante do segundo período, encontramos:

$M_2 = C(1 + i)^2$

Para o montante do terceiro,

$M_3 = C(1 + i)^3$

É facil concluir que a fórmula do montante do enésimo período será:

$M_n = C(1 + i)^n$

O fator $(1 + i)^n$ é chamado de FATOR DE ACUMULAÇÃO DO CAPITAL para JUROS COMPOSTOS, ou ainda, FATOR DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA, sendo frequentemente indicado pela letra a_n. Como vimos anteriormente, ele guarda alguma semelhança com o fator de acumulação de capital para JUROS SIMPLES, dado pela expressão $(1 + in)$. Tanto no regime de juros simples como no regime de juros compostos, o montante é dado pelo produto do capital pelo respectivo fator de acumulação.

A fórmula dos juros compostos acumulados no final do prazo é obtida a partir da fórmula geral de juros, conforme segue:

$J = M – C$

$J = C(1 + i)^n – C$

Colocando C em evidência, obtemos:

$J_n = C [(1+ i)^n – 1]$

Como saber se um problema é de juros simples ou juros compostos?

Essa dúvida é frequente quando iniciamos o estudo da matemática financeira.

Existem determinadas expressões que indicam o regime de capitalização composta, tais como:

- juros *compostos*
- capitalização *composta*
- montante *composto*
- taxa *composta* de X% a.a. (indica juros compostos com capitalização anual)
- taxa de X% a.m. *capitalizados bimestralmente* (indica juros compostos com capitalização a cada bimestre)

A principal diferença entre o regime simples e o composto, entretanto, é que, em juros compostos, é necessário que saibamos, através do enunciado do problema, o *período das capitalizações*. Em juros simples podíamos *escolher* o período de capitalização que nos conviesse, por exemplo: se a taxa fosse de 24% a.a. e o prazo de 18 meses, poderíamos transformar a taxa para *mensal* (2% a.m.) e usar o prazo em *meses*, ou transformar prazo em *anos* (1,5 anos) e utilizar a taxa *anual*. Em juros compostos não podemos fazer isso, pois o problema dirá como devemos CAPITALIZAR A TAXA, ou seja, se os períodos serão mensais, anuais etc.

Normalmente, do lado da taxa deve vir a indicação de como ela deve ser CAPITALIZADA ou COMPOSTA.

Se o período das capitalizações não coincidir com o da taxa, devemos calcular a taxa para o período dado pela capitalização, utilizando o conceito de TAXAS PROPORCIONAIS.

Exemplos:

- dada uma taxa de 48% ao *ano* CAPITALIZADA MENSALMENTE, devemos transformá-la em uma taxa igual a 4% ao mês.
- dada a taxa de 48% ao *ano* CAPITALIZADA SEMESTRALMENTE, devemos transformá-la em uma taxa de 24% ao *semestre*.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE JUROS COMPOSTOS

01-

Uma pessoa faz uma aplicação no valor de 10.000 durante 11 meses, a uma taxa de juros de 5% a.m. capitalizados mensalmente. Calcular o montante no final do prazo.

Resolução:

C = 10.000

prazo (t) = 11 meses; como a capitalização é mensal,

n = 11

i = 5% a.m. = 0,05 a.m.

$M = C (1 + i)^n$

$M = 10.000 (1 + 0,05)^{11}$

Obs.:

O problema está em calcular o fator de acumulação do capital que normalmente é dado pelo examinador da seguinte forma:

a) no início da prova; exemplo: $(1,05)^{11} = 1,7103$; ou

b) por meio de uma tabela financeira.

Voltando ao cálculo do montante:

M = 10.000 . 1,710339 (você deve utilizar todas as casas decimais fornecidas para o fator)

M = 17.103,39

02-

Calcular o montante de um capital de R$ 100,00 aplicado a juros compostos de 60% a.a., capitalizados mensalmente, durante um ano.

Resolução:

Temos que:
C = 100
i = 60% a.a. capitalizados *mensalmente*
prazo de aplicação (t) = 1 ano = 12 meses

Este exemplo traz uma novidade importantíssima. Como já dissemos anteriormente, em juros compostos é fundamental que se diga qual o PERÍODO DE CAPITALIZAÇÃO dos juros. Vimos, também, que nem sempre ele coincide com a periodicidade da taxa. Neste exercício, por exemplo, a taxa é *anual* mas a capitalização é *mensal*. Precisamos determinar, a partir da taxa dada, uma outra taxa que tenha periodicidade idêntica ao período da capitalização, e fazemos isto, como já foi dito, utilizando o conceito de TAXAS PROPORCIONAIS.

No nosso exemplo, a taxa é de 60% a.a., com capitalização mensal; logo, considerando que um ano tem doze meses, a taxa proporcional mensal será um doze avos da taxa nominal, ou seja: i = 60% a.a. = 5% a.m. = 0,05 a.m.

Neste caso, dizemos que a taxa de juros de 60% a.a. fornecida é uma TAXA NOMINAL. A taxa nominal tem a desvantagem de não poder ser introduzida diretamente na fórmula do montante composto, pois possui período diferente do da capitalização.

Outro cuidado que você deve tomar é com o PRAZO. Da mesma forma que a periodicidade da taxa, o prazo de aplicação também deve estar expresso na mesma unidade de medida de tempo do período de capitalização. Assim, se a capitalização é *mensal*, o prazo tem que ser expresso em *meses*, se a capitalização é trimestral, o prazo tem que ser expresso em *trimestres,* etc.

No prazo de um ano fornecido no enunciado do exercício, temos 12 períodos mensais, logo n = 12.

$M = C\,(1 + i)^n$

$M = 100\,(1 + 0{,}05)^{12}$

Com base em tabelas fornecidas, iremos verificar que, para i = 5% e n = 12,

$(1 + 0,05)^{12} = 1,795856$

Logo,

M = 100 . 1,795856

M = R$ 179,59

Comparando:

a) Se em vez de juros COMPOSTOS, o problema anterior fosse de juros SIMPLES, de quanto seria o montante?

Resposta: seria de R$ 160,00.

Por quê?

Porque o montante de um capital igual a R$ 100,00 aplicado a juros simples de 60% a.a. durante um ano é dado por:

M = C (1 + in)

M = 100 (1 + 0,60 . 1) = 160,00

Por que o montante a juros compostos é maior?

Porque a cada mês o juro é adicionado ao capital, produzindo um montante que será utilizado para calcular o juro do período seguinte.

Portanto, calculamos *juros* sobre *juros*.

b) Veja que, apesar de a taxa nominal ser igual a 60% a.a., o capital, em um ano, aumentou de 79,59%, pois passou de 100,00 para 179,59. Daí se conclui que a taxa nominal (60% a.a.) é apenas uma taxa de *referência*. Deve ser capitalizada de acordo com o período determinado pelo problema.

A taxa produzida na capitalização da taxa nominal é chamada de TAXA EFETIVA DE JUROS. Portanto uma taxa nominal de 60% a.a., capitalizada mensalmente, produz uma taxa efetiva anual de 79,59%.

c) Outra coisa importante é que, para uma mesma taxa nominal, se mudarmos o período de capitalização, a taxa efetiva também mudará.

Imagine que, no nosso exemplo, a taxa continue a ser 60% a.a., mas com capitalização TRISMESTRAL. Neste caso, considerando-se que em um ano temos quatro trimestres, escrevemos que:

$i = 15\%$ a.t. = 0,15 a.t.

$n = 4$

O montante composto será dado por:

$M = C(1 + i)^n$

$M = 100(1 + 0{,}15)^4$

$M = 100 \times 1{,}749006$

M = R$ 174,90

O montante foi menor porque diminuímos o número de capitalizações (antes elas estavam sendo feitas a cada mês; agora, de três em três meses). A taxa efetiva nesse caso será igual a 74,90% a.a.

03-

Calcular o montante de um capital de R$ 8.000,00 aplicado a uma taxa de 16% a.a., com capitalização semestral, durante 20 anos e 6 meses.

Resolução:

Como capitalização é semestral, é necessário transformar a taxa anual em semestral e expressar o prazo em semestres .

C = 8.000

i = 16% a.a. (taxa nominal) => i = 8% a.s.

t = 20 anos e seis meses = 41 semestres => n = 41

$M = C (1 + i)^n$

$M = 8.000 (1 + 0,08)^{41}$

Caso não encontre o fator na tabela dada, o que fazer?

Simples, utilize o seu conhecimento sobre potências de mesma base:

$(1 + 0,008)^{41} = (1 + 0,008)^{30} . (1 + 0,008)^{11}$

$(1 + 0,008)^{41} = 10,06266 . 2,331639 = 23,462490$

M = 8.000 . 23,462490

M = 187.699,92

04- Calcular o capital e o juros que gerou um montante de R$ 1.210,00 em 2 meses a uma taxa de juros nominal de 60% a.s. capitalizados mensalmente no regime composto.

M = 1210

i = 60% a.s. = 10%a.m. = 0,10

n = 2 meses

C = ?

$M = C(1 + i)^n$

Substituindo:

$1210 = C.(1 + 0,10)^2$

$1210 = C.(1,1)^2$

1210 = C.1,21

C = 1210/1,21

C = R$ 1.000,00

J = M – C

J = 1210 – 1000

J = R$ 210,00

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO - JUROS COMPOSTOS

1) O montante de um capital igual a R$ 47.000,00, no fim de 1 ano, com juros de 48% a.a., capitalizados semestralmente, é, em R$ e desprezando os centavos:

a) 75.248,00

b) 82.010,00

c) 99.459,00

d) 81.576,00

e) 72.267,00

2) O juro pago, no caso do empréstimo de R$ 26.000,00, à taxa de 21% ao semestre, capitalizados bimestralmente, pelo prazo de 10 meses, é, em R$:

a) 10.466,35

b) 36.466,35

c) 9.459,45

d) 12.459,68

e) 10.000,69

3) O montante composto de R$ 86.000,00, colocados a 4,5% a.m., capitalizados mensalmente, em 7 meses, é, em R$ e desprezando os centavos:

a) 113.090,00

b) 115.368,00

c) 117.090,00

d) 129.459,00

e) 114.687,00

4) Qual é o capital que, aplicado a 2,5% a.m., capitalizados trimestralmente, durante 15 meses, produz o montante de R$ 50.000,00? (despreze os centavos)

a) R$ 36.363,00

b) R$ 33.586,00

c) R$ 30.854,00

d) R$ 34.820,00

e) R$ 30.584,00

5) Uma pessoa aplica R$ 680,00 à taxa de juros vigente no mercado de 27,6% a.a., com capitalização mensal, durante dois anos. Utilizando a tabela fornecida no final deste capítulo e o método de interpolação linear, determine os juros proporcionados pela aplicação ao final do prazo dado (despreze os centavos).

a) R$ 670,00

b) R$ 500,00

c) R$ 890,00

d) R$ 420,00

e) R$ 200,00

6) A taxa anual de juros equivalente a 3,5% a.m., capitalizados mensalmente, é, aproximadamente, igual a:

a) 42%

b) 35%

c) 0,50%

d) 51%

e) 10%

7) A taxa trimestral, equivalente a 21,55% a.a. capitalizados anualmente, é, aproximadamente:

a) 5%

b) 7%

c) 8%

d) 9%

e) 10%

8) A taxa nominal anual aproximada, equivalente a uma taxa efetiva de 60,1% a.a., é:

a) 60%

b) 48%

c) 4%

d) 56%

e) 39%

9) A taxa de juros mensal, capitalizada mensalmente, aproximada, que fará um capital dobrar em 1 ano é, aproximadamente, igual a:

a) 8%

b) 7%

c) 5%

d) 9%

e) 6%

10) As taxas efetivas anuais, aproximadas, cobradas nas seguintes hipóteses:
1) taxa nominal 18% a.a., capitalização mensal;
2) taxa nominal 20% a.a., capitalização trimestral;
são iguais a, respectivamente:

a) 19,6% e 21,9%

b) 18,0% e 21,6%

c) 19,6% e 21,6%

d) 21,9% e 19,6%

e) 21,6% e 23,8%

11) (ESAF) A aplicação de um capital de Cz$ 10.000,00, no regime de juros compostos, pelo período de três meses, a uma taxa de 10% a.m., resulta, no final do terceiro mês, num montante acumulado:

a) de Cz$ 3.000,00

b) de Cz$ 13.000,00

c) inferior a Cz$ 13.000,00

d) superior a Cz$ 13.000,00

e) menor do que aquele que seria obtido pelo regime de juros simples

12) (TCDF/94) Um investidor aplicou a quantia de CR$ 100.000,00 à taxa de juros compostos de 10% a.m. Que montante este capital irá gerar após 4 meses?

a) CR$ 140.410,00

b) CR$ 142.410,00

c) CR$ 144.410,00

d) CR$ 146.410,00

e) CR$ 148.410,00

13) (ESAF) Se para um mesmo capital, aplicado durante qualquer período de tempo maior do que zero e a uma certa e a uma certa taxa t, chamarmos:

M_1: Montante calculado no regime de juros simples

M_2: Montante calculado no regime de juros compostos pela convenção exponencial

M_3: Montante calculado no regime de juros compostos pela convenção linear

Teremos:

a) $M_3 > M_1$ para qualquer $t > a$

b) $M_3 = M_1$ para qualquer $0 < t < 1$

c) $M_3 < M_2$ para qualquer $t > 0$, desde que não seja inteiro

d) $M_3 < M_2$ quando t é inteiro

e) $M_2 > M_1$ para qualquer $t > a$

14) (ESAF) Se um capital cresce sucessiva e cumulativamente durante 3 anos, na base de 10% a.a., seu montante final é de:

a) 30% superior ao capital inicial

b) 130% do valor do capital inicial

c) aproximadamente 150% do capital inicial

d) aproximadamente 133% do capital inicial

15) (CEB/94) A caderneta de poupança remunera seus aplicadores à taxa nominal de 6% a.a., capitalizada mensalmente no regime de juros compostos. Qual é o valor do juro obtido pelo capital de R$ 80.000,00 durante 2 meses?

a) R$ 801,00

b) R$ 802,00

c) R$ 803,00

d) R$ 804,00

e) R$ 805,00

16) (BC/94) A taxa de 30% a.t., com capitalização mensal, corresponde a uma taxa efetiva bimestral de:

a) 20%

b) 21%

c) 22%

d) 23%

e) 24%

17) (BANESPA/85) Se você depositar R$ 150.000,00 em um banco que lhe pague juros compostos de 6% a.a., quais serão, respectivamente, os juros e o montante após 1 ano?

a) R$ 900,00 e R$ 150.900,00

b) R$ 6.000,00 e R$ 156.000,00

c) R$ 8.500,00 e R$ 158.500,00

d) R$ 9.000,00 e R$ 159.000,00

e) R$ 9.000,00 e R$ 160.000,00

18) (BANERJ/89) O montante produzido por R$ 10.000,00 aplicados a juros compostos, a 1% ao mês, durante 3 meses, é igual a:

a) R$ 10.300,00

b) R$ 10.303,01

c) R$ 10.305,21

d) R$ 10.321,05

e) R$ 10.325,01

19) (BANESPA/85) Qual o montante de R$ 50.000,00, aplicado à taxa de juros compostos à 3% a.m., por dois meses?

a) R$ 53.045,00

b) R$ 57.045,00

c) R$ 71.000,00

d) R$ 64.750,00

e) R$ 71.000,00

20) (CESGRANRIO/85) Uma pessoa deposita R$ 100.000,00 em uma Caderneta de Poupança que rende 10% a cada mês. Se não fez qualquer retirada, ao final de três meses, ela terá na sua caderneta:

a) R$ 132.000,00

b) R$ 133.100,00

c) R$ 134.200,00

d) R$ 134.500,00

21) (CEDAE/91) Uma pessoa aplicou R$ 50.000,00 a juros compostos, à taxa de 10% ao mês, durante 3 meses. Recebeu de juros a seguinte quantia:

a) R$ 66.500,00

b) R$ 55.000,00

c) R$ 18.500,00

d) R$ 16.550,00

e) R$ 15.000,00

22) (BC) Numa financeira, os juros são capitalizados trimestralmente. Quanto renderá de juros, ali, um capital de R$ 145,00, em um ano, a uma taxa de 40% ao trimestre?

a) R$ 557.032,00

b) R$ 542.880,00

c) R$ 412.032,00

d) R$ 337.000,00

e) R$ 397.988,00

23) (BC) Se aplicarmos R$ 25.000,00 a juros compostos, rendendo 7% a cada bimestre, quanto teremos após 3 anos?

a) R$ 25.000,00 x $(1{,}70)^{6}$

b) R$ 25.000,00 x $(1{,}07)^{18}$

c) R$ 25.000,00 x $(0{,}93)^{3}$

d) R$ 25.000,00 x $(0{,}07)^{18}$

e) R$ 25.000,00 x $(0{,}70)^{18}$

24) (IRPJ/91) O capital de R$ 100.000,00, colocado a juros compostos, capitalizados mensalmente, durante 8 meses, elevou-se no final desse prazo a R$ 170.000,00. A taxa de juros, ao mês, corresponde aproximadamente a:
(considere $(170)^{1/8} = 1{,}068578$)

a) 3,42%

b) 5,15%

c) 6,85%

d) 8,55%

e) 10,68%

25) (BANERJ/89) O capital de R$ 10.000,00 colcando a juros compostos, capitalizados mensalmente, durante 8 meses, elevou-se no final desse prazo a R$ 14.800,00. Com o auxílio de uma calculadora eletrônica verifica-se que:

$(1{,}48)^{1/8} = 1{,}050226$

A taxa mensal de juros a que foi empregado esse capital vale, aproximadamente:

a) 1,05%

b) 1,48%

c) 2,26%

d) 4,80%

e) 5,02%

26) (AA/90) A juros compostos, um capital C, aplicado a 3,6% ao mês, quadruplicará no seguinte número aproximado de meses:

Dados: log 2 = 0,30103, log 1,01536

a) 30

b) 33

c) 36

d) 39

e) 42

27) (ALERJ/91) Um capital de R$ 100.000,00, aplicado a juros compostos, à taxa de 3% ao mês, duplica de valor após um certo número **n** que está compreendido ente:

Dados: log 2 = 0,30103, log 1,03 = 0,01283

a) 8 e 12

b) 12 e 16

c) 16 e 20

d) 20 e 24

e) 24 e 28

28) (BANERJ/89) Um capital foi colocado a juros compostos a uma taxa semestral de 5%. A taxa anual equivalente a essa taxa semestral corresponde a:

a) 10%

b) 10,05%

c) 10,15%

d) 10,25%

e) 10,75%

29) Um certo capital de R$ 100,00 tranformou-se, após uma aplicação a juros compostos, em R$ 6.400,00 com uma taxa de 100% a.a. Quantos anos se passaram?

a) 6 anos

b) 12 anos

c) 18 anos

d) 24 anos

e) 2 anos

30) (ALERJ/91) Um capital **C** foi aplicado, a juros compostos, a uma taxa **i** dada para um certo período. O montante no fim de **n** períodos é **M**. O capital **C** pode ser determinado pela seguinte expressão:

a) $M (1 - i)^n$

b) $M (1 + i)^n$

c) $M/(1 - i)^n$

d) $M/(1 + i)^n$

e) $M [(1 + i)^n - 1]$

31) O valor que devo aplicar hoje, a juros capitalizados bimestralmente de 3,5% ao mês, para obter R$ 22.410,00 de juros ao fim de 1 ano e 4 meses é, em R$:

a) 30.531,91

b) 53.613,00

c) 48.734,47

d) 30.586,84

e) 33.730,09

32) Certo capital foi colocado a juros compostos a 32% a.a., capitalizados trimestralmente, durante 3 anos. Sabendo que rendeu R$ 4.617,00 de juros, o montante obtido foi de, em R$

a) 3.041,42

b) 7.658,16

c) 6.890,05

d) 10.699,95

e) 4.809,32

33) O tempo necessário para que R$ 75.000,00 produza o montante de R$ 155.712,00, à taxa de 22% a.a., com capitalização semestral, é de:

a) 10 semestres

b) 50 meses

c) 7 anos

d) 4 anos e 6 meses

e) 3 anos 6 meses

34) Qual o tempo necessário para que R$ 12.500,00 produzam R$ 6.000,00 de juros a 24% ao ano capitalizados semestralmente? (Sugestão: você chegará a uma equação exponencial; para resolvê-la, utilize os dados da tabela financeira para i = 12% na página 60 e faça uma interpolação linear)

a) 1 ano, 8 meses e 22 dias

b) 684 dias

c) 2 anos

d) 1 ano, 2 meses e 15 dias

e) 700 dias

35) Uma pessoa colocou 3/4 do seu capital a 20% a.a., capitalizados semestralmente, e o restante a 12% a.s., capitalizados trimestralmente. Sabendo-se que a primeira parcela proporcionou R$ 60.769,10 de juros, o montante no final de 4 anos será, em R$:

a) 113.908,54

b) 44.997,32

c) 167.475,30

d) 128.645,00

e) 158.905,24

36) O capital que durante 4 anos, colocado a 12% a.a., capitalizados bimestralmente, produz um juro de R$ 12.252,00 a mais do que seria produzido com capitalizações semestrais é de, em R$:

a) 96.605,00

b) 666.660,00

c) 110.465,00

d) 839.800,74

e) 476.396,00

37) Uma importância no valor de R$ 2.823.774,00 foi dividida em 3 partes, de tal modo que, colocadas a 20% a.a., capitalizados anualmente, produziram montantes iguais nas datas 2, 3, e 5 anos, respectivamente. O valor da parcela que produziu o montante na data 5 é aproximadamente igual a, em R$:

a) 1.170.700,93

b) 975.584,11

c) 849.000,12

d) 560.475,42

e) 677.488,96

38) Um capital foi colocado a 20% a.a., capitalizados semestralmente, e outro a 18% a.a., capitalizados quadrimestralmente. No fim de 2 anos os juros do primeiro capital excederam de R$ 6.741,00 os juros do segundo. Sabendo que o primeiro é R$ 10.000,00 maior que o segundo, um dos capitais, em R$, é igual a:

a) 112.142,00

b) 73.459,00

c) 46.071,94

d) 58.349,00

e) 85.230,00

39) Uma pessoa depositou R$ 10.000,00 num banco, no dia 31/12/71, a juros 24% a.a., capitalizados semestralmente. A partir de 01/01/77 o banco reduziu sua taxa de juro para 22% a.a., capitalizados trimestralmente. O montante daquele depósito no dia 30/06/80 era:

a) 31.058,43

b) 48.586,70

c) 56.596,35

d) 65.722,58

e) 39.520,08

40) O montante no fim de 8 anos, do capital R$ 2.000,00, colocando a juros compostos à taxa de 6,3% a.a., capitalizados atualmente, é:

a) 2.848,35

b) 2.568,48

c) 2.508,94

d) 2.192,22

e) 3.260,58

41) Uma pessoa precisa de R$ 10.000,00 por dois anos. Oferecem-lhe o dinheiro nas seguintes condições:

1) 5,5% a.a. compostos trimestralmente ou;

2) 5,5% a.a. compostos semestralmente, ou ainda;

3) 5,5% a.a. a juros simples

Podemos afirmar que:

a) a condição 1 é pior do que a 3

b) a condição 3 é melhor do que a 2

c) a condição 2 é melhor do que a 1

d) a condição 1 é melhor do que a 3

e) todas são iguais

42) A taxa nominal anual, com capitalizações semestrais, que conduz à taxa efetiva de 40% a.a. é:

a) 34,12%

b) 11%

c) 28,95%

d) 36,64%

e) 30,67%

1E – 2A – 3C – 4D – 5B – 6D – 7A – 8B – 9E – 10C – 11D – 12D – 13B – 14D – 15B – 16B – 17D – 18B – 19A – 20B – 21D – 22C – 23B – 24C – 25E – 26D – 27D – 28D – 29A – 30D – 31A – 32B – 33E – 34A – 35E – 36D – 37E – 38C – 39D – 40E – 41D – 42D

IV - TAXAS DE JUROS

Proporcional;

Equivalente;

Nominal;

Efetiva;

Acumulada;

Real;

Aparente;

Over;

Média.

Taxas proporcionais: são taxas de juros fornecidas em unidades de tempo diferentes que, ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo, produzem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo, no regime de juros simples.

12% ao ano é proporcional a 6% ao semestre;

1% ao mês é proporcional a 12% ao ano.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Qual é a taxa de juros mensal proporcional a taxa nominal de 12% a.a.?

12% : 12 meses = 1% a.m.

Obs.: Basta dividir a taxa nominal pelo período proporcional solicitado, que nesse caso foi mensal.

Taxas equivalentes: são taxas de juros fornecidas em unidades de tempo diferentes que ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo produzem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo, no regime de juros compostos.

O conceito de taxas equivalentes está, portanto, diretamente ligado ao regime de juros compostos.

Assim, a diferença entre taxas equivalentes e taxas proporcionais se prende exclusivamente ao regime de juros considerado. As taxas proporcionais se baseiam em juros simples, e as taxas equivalentes se baseiam em juros compostos.

No regime de JUROS COMPOSTOS, todavia, *as taxas equivalentes não são necessariamente proporcionais*.

Considere a seguinte situação: um indivíduo aplicou R$ 100,00 durante 1 ano, a uma taxa de 2% a.m., com *capitalização mensal*. Vamos calcular o montante produzido no final do prazo.

C = 100

capitalização *mensal*

i = 2% a.m. = 0,02

t = 1 ano = 12 meses => n = 12

$M = C\,(1 + i)^n$

$M = 100\,(1 + 0{,}02)^{12}$

$M = 100 \,.\, 1{,}268242$

$M = 126{,}82$

Você percebeu que o capital, de 100 passou para um montante de 126,82? Houve, portanto, um aumento de 26,82%.

Se tivéssemos utilizado uma taxa de 26,82% a.a., capitalizada ANUALMENTE, o montante seria de:

$M = C\,(1 + i)^n$

$M = 100\,(1 + 0{,}2682)^1$

$M = 100 \cdot 1{,}2682$

$M = 126{,}82$

Uma vez que os montantes são *iguais*, podemos concluir que a taxa de 2% *ao mês* é EQUIVALENTE, em juros compostos, à taxa de 26,82% *ao ano*.

O mais importante é notarmos que:

$(1 + 0{,}02)^{12} = (1 + 0{,}2682)^{1}$

Ou seja:

Duas taxas são equivalentes quando os seus fatores de capitalização forem iguais ao mesmo prazo.

Esta é a grande dica na resolução de problemas envolvendo taxas equivalentes. Quando se defrontar com um problema sobre taxas equivalentes, você deve impor que os fatores de capitalização sejam iguais. E isto vale tanto para o regime de capitalização simples como para o regime de capitalização composta.

De fato, sabemos que, tanto para juros simples como juros compostos, o montante (M) é dado pelo produto do capital (C) pelo fator de capitalização respectivo (a_n). Considere, então, duas taxas i_1 e i_2, aplicadas sobre o mesmo capital C, durante o mesmo prazo t, produzindo os montantes M_1 e M_2. Sejam $a_{n,1}$ e $a_{n,2}$ os respectivos fatores da acumulação de capital. Se i_1 e i_2 forem EQUIVALENTES, teremos que:

$M_1 = M_2$

$C \cdot a_{n,1} = C \cdot a_{n,2}$

$a_{n,1} = a_{n,2}$

Ou seja, os fatores de acumulação de capital $a_{n,1}$ e $a_{n,2}$ deverão ser iguais.

Nós poderíamos ter fornecido a você uma fórmula para estabelecer diretamente a equivalência entre uma taxa e outra. Não fizemos isso porque é perfeitamente possível resolver os problemas de equivalência igualando os fatores de acumulação, e não queremos que você fique com mais uma fórmula ocupando a sua cabeça.

Exercícios resolvidos

01-

Calcular a taxa anual equivalente a uma taxa de 3% a.m. capitalizada mensalmente.

Resolução:

Se as taxas são equivalentes, seus fatores devem ser iguais no prazo de 1 ano. Segue que:

$(1 + i_{anual})^1 = (1 + 0,03)^{12}$

O expoente do fator da taxa de 3% é igual a 12 porque, em 1 ano, ocorrem 12 capitalizações mensais (a taxa é mensal). Já o expoente da taxa "i_{anual}" é igual a 1 porque, se a taxa é anual, em 1 ano ocorre apenas uma capitalização.

$(1 + i_{anual}) = 1,425760$

$i_{anual} = 1,425760 - 1$

$i_{anual} = 0,425760$

$i_{anual} = 42,57\%$ a.a.

Portanto a taxa de 3% a.m., capitalizada mensalmente, é equivalente à taxa de 42,57% a.a., capitalizada anualmente.

Em vez da taxa efetiva de 3% a.m., o problema poderia ter fornecido uma taxa *nominal* de 36% a.a. com capitalização mensal. Resolveríamos do mesmo jeito, pois a taxa nominal de 36% a.a. corresponde à taxa efetiva de 3% a.m. (basta usar o conceito de taxas proporcionais).

Taxa nominal: são taxas de juros em que a unidade referencial de seu tempo não coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. A taxa nominal é sempre fornecida em termos anuais, e os períodos de capitalização podem ser semestrais, trimestrais, mensais ou diários. São exemplos de taxas nominais:

12% ao ano, capitalizados mensalmente;

24% ao ano, capitalizados semestralmente;

10% ao ano, capitalizados trimestralmente;

18% ao ano, capitalizados diariamente.

A taxa nominal, apesar de bastante utilizada no mercado, não representa uma taxa efetiva e, por isso, não deve ser usada nos cálculos financeiros, no regime de juros compostos.

Toda taxa nominal traz em seu enunciado uma taxa efetiva implícita, que é a taxa de juros a ser aplicada em cada período de capitalização. Essa taxa efetiva implícita é sempre calculada de forma proporcional, no regime de juros simples.

Conforme podemos observar, a taxa efetiva implícita de uma taxa nominal anual é sempre obtida o regime de juros simples. A taxa anual equivalente a essa taxa efetiva implícita é sempre maior que a taxa nominal que lhe deu origem, pois essa equivalência é sempre feita no regime de juros compostos. Essa taxa anual equivalente será tanto maior quanto maior for o número de períodos de capitalização da taxa nominal.

Taxa efetiva: são taxas de juros em que a unidade referencial de sue tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. São exemplos de taxas efetivas:

2% ao mês, capitalizados mensalmente;

3% ao trimestre, capitalizados trimestralmente;

6% ao semestre, capitalizados semestralmente;

10% ao ano, capitalizados anualmente.

Nesse caso, tendo em vista a coincidência nas unidades de medida dos tempos da taxa de juros e dos períodos de capitalização, costuma-se simplesmente dizer: 2% ao mês, 3% ao trimestre, 6% ao semestre e 10% ao ano.

A taxa efetiva é utilizada nas calculadoras financeiras e nas funções financeiras das planilhas eletrônicas.

A TAXA EFETIVA é a taxa verdadeiramente paga em uma aplicação.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01-

Calcular a taxa efetiva anual de uma taxa nominal de 40% a.a. com capitalização trimestral.

Resolução:

I_{ea} = taxa efetiva anual = ?

capitalização trimestral

i_n = 40% a.a. (taxa nominal) => i_{ef} (taxa efetiva trimestral) = 10% a.t.

= 0,10 a.t.

t = 1 ano = 4 trimestres

$(1 + i_{ea})^1 = (1 + 0{,}10)^4$

$1 + i_{ea} = 1{,}4641$

$i_{ea} = 0{,}4641$

$i_{ea} = 46{,}41\%$ a.a.

02-

Considerando-se regime de juros compostos, qual é a taxa mensal capitalizada mensalmente equivalente a uma taxa de 34% a.s.?

Resolução:

Queremos uma taxa mensal i_m que, em 6 meses, produza uma taxa de 34%.

Em 6 meses a taxa mensal terá 6 capitalizações e a taxa semestral, 1 capitalização.

34% a.s. = 0,34 a.s.

$(1 + i_m)^6 = (1 + 0{,}34)$

$(1 + i_m)^6 = 1{,}34$

Normalmente você deveria extrair a raiz sexta de 1,34 e isolar o i_m.
Se o examinador fornecer a raiz sexta de 1,34, que é 1,04998, o cálculo torna-se fácil:

$1 + i_m = 1{,}04998$

$i_m = 1{,}04998 – 1 = 0{,}04998 = 4{,}99\%$ => 5%

Embora pouco provável, pode ser que, ao invés de fornecer a raiz sexta 1,34, ele dê os seguintes dados pra você:

$\log 1{,}34 = 0{,}12710479$

$10^{0{,}02118413} = 1{,}04998$

Este tipo de dado sugere que devemos aplicar logaritmo nos dois lados da equação anterior, para calcular o valor da taxa mensal. Ficaria assim:

$\log (1 + i_m)^6 = \log 1{,}34$

$6 \cdot \log (1 + i_m) = \log 1{,}34$

$\log (1 + i_m) = \log 1{,}34/6$

$\log (1 + i_m) = 0{,}12710479/6 = 0{,}02118413$

$(1 + i_m) = 10^{0{,}02118413}$

$1 + i_m = 1{,}04998$

$i_m = 0{,}04998 = 4{,}9998\% = 5\%$

Se na prova não for fornecida tabela de logaritmo e nem for permitido o uso de máquina de calcular (e isto é o que tem ocorrido mais frequentemente), a alternativa será entrar na tabela financeira determinando qual é a taxa, para n = 6, que produziria um fator de acumulação igual 1,34. É simples. Basta seguir com os olhos a linha n = 6 e localizar a célula que contém o valor mais próximo possível de 1,34. Se você procurar, vai encontrar uma célula com o valor 1,340096, cuja taxa correspondente é de 5%. Portanto, $i_m = 5\%$ a.m.

É evidente que, neste caso, o examinador tem que dar uma mãozinha, fornecendo um fator fácil de procurar na tabela, senão fica inviável a resolução da expressão acima.

taxa acumulada: são taxas de juros com taxas variáveis e normalmente são utilizadas em situações de correções de contratos como, por exemplo, atualização de aluguéis, saldo devedor da casa própria e contratos em geral.

A composição das taxas pode ocorrer de duas formas, com taxas positivas ou com taxas negativas.

taxa real: nada mais é do que a apuração de ganho ou perda em relação a uma taxa de *inflação* ou de um *custo de oportunidade*. Na verdade, significa dizer que taxa real de juros é o verdadeiro ganho financeiro.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Uma aplicação financeira rendeu 10% em um determinado período de tempo, e no mesmo período ocorreu uma inflação de 8%. Qual a taxa real de juros?

Fica claro que o ganho real desta aplicação não foi os 10%, tendo em vista que o rendimento correspondente sofreu uma desvalorização de 8% no mesmo período de tempo.

Assim, para calcular a taxa real, devemos dividir a taxa maior acrescida de uma unidade pela taxa menor acrescida de uma unidade e, após a divisão, subtrair uma unidade, usando a fórmula: $ir = (1 + i>):(1 + i<) - 1$

$i> = 10\% = 0,10$

$i< = 8\% = 0,08$

$ir = (1 + 0,10):(1 + 0,08) - 1$

$ir = 1,10 : 1,08 - 1$

$ir = 1,01851 - 1$

$ir = 0,01851$ ou $1,85\%$

taxa aparente : é a taxa que se obtém numa operação financeira sem se considerar os efeitos da inflação.

Se a inflação for zero, a taxa aparente e a taxa real são iguais.

$$(1 + ia) = (1 + ir).(1 + i\ inf)$$

taxa over: é uma taxa usada pelo mercado financeiro para determinar a rentabilidade por dia útil, normalmente é multiplicada por 30 (conversão do mercado financeiro). Nas empresas, em geral, é utilizada para escolher a melhor taxa para investimento.

Esta prática ganhou maior importância principalmente no início dos anos 90. Várias aplicações são efetuadas tomando como base os dias úteis; entre elas temos as operações de CDIs – Certificados de Depósitos Interbancários.

taxa média: tem como base teórica o conceito estatístico da média geométrica.

Do ponto de vista da matemática financeira, podemos calcular a taxa média de um conjunto de taxas extraindo a raiz enésima, tomando-se como base o número de termos do próprio conjunto de taxas.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE TAXAS DE JUROS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO TAXAS DE JUROS

(Proporcional, Nominal, Efetiva, Equivalente, Real e Aparente)

1) Qual a taxa de juros anual equivalente a 1% a. m.?

2) Determinar as taxas semestral e mensal, proporcionais à taxa de 24% ao ano.

3) Qual é a taxa proporcional ao ano de uma taxa de 3,5% ao trimestre?

4) Qual a melhor taxa para aplicação? 1% a.m ou 12% a.a

5) A taxa nominal ao ano de uma operação de empréstimo:

a) Nunca indica o real custo da operação de empréstimo.

b) Sempre indica o real custo da operação de empréstimo.

c) Indica o real custo da operação de empréstimo apenas se esta tiver prazo de um mês.

d) Índice o real custo da operação de empréstimo apenas se a freqüência de capitalização for igual a 2.

6) Um capital de CR$ 200,00 foi aplicado a juros nominais de 28% ao ano capitalizados trimestralmente. Se o resgate for realizado após 7 meses, o montante será de ?

Use: $(1,07)^{1/3} = 1,0228$ / $(1,07)^{7/3} = 1,1709$ / $(1,0228)^{7} = 1,1709$

7) Calcule a taxa efetiva semestral correspondente a uma taxa nominal de 24% ao ano, com capitalização mensal ?

8) Determine a taxa efetiva trimestral correspondente a uma taxa nominal de 18% ao ano, com capitalização bimestral.

Use: $(1,03)^{1,5} = 1,0453$

9) Qual a taxa efetiva anual correspondente a uma taxa nominal de 6% ao ano, com capitalização mensal?

Use: $(1,005)^{12} = 1,0617$

10) Que taxa efetiva bimestral corresponde à taxa nominal de 9% ao trimestre, com capitalização mensal?

11) Considere uma empresa que precisa tomar um empréstimo de seis meses. A

melhor alternativa é:

a) 24% ao ano de taxa nominal com capitalização semestral

b) 23% ao ano de taxa nominal com capitalização trimestral

c) 22% ao ano de taxa nominal com capitalização bimensal

d) 21% ao ano de taxa nominal com capitalização mensal

12) José e Maria estão discutindo sobre fazer um investimento pelos próximos

180 dias corridos. José conseguiu com seu gerente uma taxa nominal anual de

12% ao ano capitalizada bimestralmente, enquanto que Maria conseguiu uma

taxa efetiva anual de 12% ao ano. Qual a melhor alternativa?

a) Devem aplicar no banco de José.

b) Devem aplicar no banco de Maria.

c) Tanto faz, as duas alternativas geram o mesmo rendimento.

d) Devem aplicar 50% em cada alternativa.

13) Duas taxas de juro são ditas equivalentes quando:

(i) são taxas de juro compostas e

(ii) quando aplicadas a um mesmo capital pelo mesmo período geram mesmo valor de juro.

a) (i) e (ii) são afirmações verdadeiras

b) (i) e (ii) são afirmações falsas

c) (i) é verdadeira e (ii) é falsa

d) (i) é falsa e (ii) é verdadeira

Gabarito:

1) 12,68%	2) 12% a.s. e 2% a.m.		3) 14% a.a.
4) 1% a.m	5) letra A	6) R$ 234,18	7) 12,62 % a.s.
8) 4,53 % a.t.	9) 6,17% a.a.	10) 6,09% a.b.	11) letra D
12) letra A	13) letra A	————————	

V-DESCONTOS

Desconto é uma operação financeira em que o portador de um título de crédito pode vendê-lo a uma instituição financeira antecipando seu recebimento mediante o pagamento de juros.

O cálculo desse juro pode ser efetuado de duas formas:

No regime de capitalização simples ou no regime de capitalização composta

TÍTULOS DE CRÉDITO

NOTA PROMISSÓRIA, LETRA DE CÂMBIO e DUPLICATA.

Tais instrumentos jurídicos são denominados TÍTULOS DE CRÉDITO.

De maneira simples podemos dizer que o TÍTULO DE CRÉDITO é um papel que documenta um compromisso ou uma dívida a ser paga no futuro.

NOTA PROMISSÓRIA

É um título onde uma pessoa confessa que deve a outra, uma certa importância a ser paga em determinado local, numa determinada data.

A pessoa que se confessa devedora é chamada de EMITENTE, pois é ela quem emite o documento. A pessoa a quem esse documento é dirigido (a que deve receber a dívida) é chamada de CREDOR ou TOMADOR ou BENEFICIÁRIO. A data marcada para o pagamento é chamada de DATA DE VENCIMENTO e o valor a ser pago na data do vencimento é chamado de VALOR NOMINAL do compromisso. O valor nominal é sempre o montante do valor que foi emprestado.

Por exemplo: você pediu R$ 5.000 emprestados no banco, para pagar daqui a 6 meses, a uma taxa de 2%a.m., a juros simples.
O gerente então irá calcular qual o montante a ser pago daqui a 6 meses:

$M = C (1 + in)$

$M = 5.000 (1 + 0{,}02 . 6)$

$M = 5.600$

Pronto: você emitirá uma nota promissória no valor nominal de R$ 5.600. Nela deve constar além do valor, o nome do emitente com a assinatura (no caso, você), o nome do beneficiário (no caso, o banco) e a data do vencimento.

LETRA DE CÂMBIO

É um título pelo qual uma pessoa ordena a outra que pague a um terceiro, uma certa quantia em determinada época.

Chama-se SACADOR a pessoa que ordena o pagamento e SACADO a pessoa a quem é dirigida essa ordem. BENEFICIÁRIO ou TOMADOR é a pessoa que irá receber o valor grafado na letra de câmbio.

Da mesma forma que na nota promissória, o valor grafado na letra de câmbio é chamado de VALOR NOMINAL e a data que deve ser resgatada é chamada de DATA DE VENCIMENTO.

Quando a letra de câmbio mencionar o nome do beneficiário, ela é NOMINATIVA; caso contrário, será AO PORTADOR. No Brasil, todavia, títulos de crédito ao portador não existem mais em razão da proibição imposta pela Lei 8021/90; assim, a letra de câmbio aqui só poderá ser nominativa.

Para quem não está acostumado às transações financeiras, parece esquisita uma operação envolvendo três pessoas (sacado, sacador e beneficiário). A letra de câmbio, porém, foi criada com a finalidade de facilitar o comércio. Normalmente, ela é emitida quando uma pessoa (o sacador) é, ao mesmo tempo, *credora* de outra (o sacado) e *devedora* de um terceiro (o beneficiário). Por exemplo: João me deve R$ 500,00 e eu devo R$ 500,00 para Francisco; então eu emito uma letra de câmbio ordenado a João que pague R$ 500,00 para Francisco, e mato dois coelhos com uma cajadada só: com um único documento, liquido a dívida de João para comigo e liquido a minha dívida com Francisco. Para a letra de câmbio que eu emiti valer, porém, ela deverá conter a assinatura de João, aceitando pagá-la. Na letra de câmbio, portanto, deve constar o ACEITE do sacado, que é o reconhecimento do compromisso de atendê-la.

A letra de câmbio pode ser negociada (transferida) de beneficiário para beneficiário, mediante endosso nominativo.

DUPLICATA

É um título de crédito que só existe no Brasil, estritamente utilizado em operações de compra e venda de mercadorias.

O comerciante (EMITENTE), ao vender uma mercadoria a prazo, emite uma duplicata na qual consta o nome do cliente devedor (SACADO), o valor nominal e a data de vencimento, além de outros dados. Após a emissão da duplicata, o cliente deverá assiná-la, isto é, dar o seu ACEITE, que garantirá ao comerciante o recebimento do valor da venda em questão.

A duplicata deve estar associada a uma nota fiscal ou fatura, na qual o vendedor especifica a natureza e a qualidade dos artigos adquiridos pelo comprador, seus respectivos preços, descontos etc., e a importância líquida a ser paga.

OPERAÇÃO DE DESCONTO SIMPLES

Os títulos descritos acima podem ser negociados pelo seu possuidor antes da data do seu vencimento.

Por exemplo, um comerciante, de posse de uma nota promissória ou duplicata no valor de R$ 1.000,00 e que irá vencer daqui a 6 meses, necessitando de dinheiro, pode transferi-la a um banco mediante uma operação denominada DESCONTO. O banco irá “comprar” este título e se encarregará de cobrá-lo de quem se confessa devedor, na data do vencimento. Para o comerciante é como se o pagamento da dívida tivesse sido ANTECIPADO . O valor pago pelo banco na data do desconto é chamado de VALOR ATUAL (V_a) ou VALOR DESCONTADO e o seu cálculo será feito a partir do VALOR NOMINAL (N) ou VALOR DE FACE do título. É evidente que o valor atual é menor do que o valor nominal, pois, teoricamente, deveríamos retirar o juro relativo ao prazo de antecipação; iremos chamar esse juro de DESCONTO (D). A diferença entre o VALOR NOMINAL (N) e o DESCONTO (D) é igual ao VALOR ATUAL (V_a).

$V_a = N – D$

Existem duas convenções para o cálculo do desconto simples, cada uma conduzindo a um resultado diferente:

- DESCONTO RACIONAL (também chamado de DESCONTO POR DENTRO)

- DESCONTO COMERCIAL (também chamado de DESCONTO POR FORA).

Desconto Racional ou Por Dentro

Observe atentamente o esquema acima, mais simplificado, onde estão representados o valor nominal e o atual na operação de desconto.

No DESCONTO RACIONAL simples, o valor atual (V_a) corresponde a um capital (C), aplicado a juros simples, pelo prazo de antecipação, e o valor nominal (N) corresponde ao montante (M) produzido por essa aplicação.

Vimos que a fórmula do montante a juros simples é dada por:
$M = C(1 + in)$

Substituindo M por N, e C por V_a , obtemos:

$N = V_a (1 + in)$

Isolando V_a, temos:

$V_a = N/1 + in$

Esta última fórmula permite calcular o VALOR DESCONTADO racional simples do título (V_a) a partir do seu VALOR DE FACE (N), da taxa de desconto (i) e do número de períodos de antecipação (n). E para calcular o desconto racional simples, basta fazer $D = N - V_a$.

Vejamos um exemplo concreto.

Possuo uma nota promissória com o valor nominal de R$ 440,00 que vai vencer dentro de dois meses, mas preciso de dinheiro agora e por isso resolvo descontá-la. Vou até um banco para que ele me antecipe o pagamento dessa nota promissória. O valor pago pelo banco será igual ao valor atual do documento e poderá ser calculado utilizando-se a fórmula acima.

Suponhamos que a taxa de juros adotada pelo banco seja de 5% a.m., temos então que:

N = 440
i = 5% a.m.
n = 2 meses

Aplicando-se a fórmula do valor atual, temos:

$V_a = 440/1 + 0,05 \cdot 2 = 440/1,10 = 400$

Conclusão: receberei do banco a quantia de R$ 400,00 pela venda de um título de valor nominal igual a R$ 440,00, resgatável somente daqui a 2 meses.

Na realidade, ao efetuar o desconto racional simples, o que o banco está fazendo é me emprestar R$ 400,00 durante 2 meses a uma taxa de juros simples de 5% ao mês.

Para demonstrar isto, vamos considerar um capital de R$ 400,00 aplicado durante 2 meses a uma taxa de juros simples de 5% a.m.

Pela fórmula do montante, teríamos que:

$M = C(1 + in)$

$M = 400 (1 + 0,05 . 2)$

$M = 400 (1,1)$

$M = 440$

Veja que, embora o valor nominal da nota promissória fosse de R$ 440,00, eu só consegui "vendê-la" ao banco por R$ 400,00. Este é o VALOR ATUAL da nota promissória (V_a), o quanto ela vale HOJE. Da mesma forma, o valor nominal (N) de R$ 440,00 que somente verificar-se-à daqui a dois meses, pode ser designado como sendo seu VALOR FUTURO. A diferença entre o valor atual e o valor futuro (ou valor nominal) da nota promissória é o DESCONTO (D) efetuado pelo banco: R$ 40,00. E a taxa de juros utilizado para o cálculo é chamada de TAXA DE DESCONTO (i).

Em suma, em termos de fórmulas, o cálculo do desconto racional é feito como segue (para indicar que o critério do cálculo do desconto é racional simples, vamos utilizar os subíndices $_{rs}$).

Sendo $N = V_{ars} (1 + in)$, decorre que

$V_{ars} = N/1 + in$

onde

- V_{ars} é o valor atual racional simples
- N é o valor nominal do título de crédito
- i é a taxa de desconto
- n é o número de períodos antecipados

E para calcularmos o desconto racional simples (D_{rs}) basta utilizar a fórmula geral do desconto:

$D_{rs} = N - V_{ars}$

Exercício resolvido

1. Considere um título com valor nominal de R$ 1,000, com prazo de vencimento para daqui a 6 meses. Supondo uma taxa de desconto de 5% a.m., qual seria o valor atual racional simples? Qual o valor do desconto respectivo?

Resolução:

N = R$ 1.000

n = 6 meses

i = 5% a.m.

V_{ars} = ?

$V_{ars} = N/1 + in = 1000/1 + 0,05 . 6 = 1000/1,3$

$V_{ars} = 769,23$

$D_{rs} = N - V_{ars} = 1.000 - 769,23$

$D_{rs} = 230,77$

Verifique que se aplicarmos um capital igual a R$ 769,23 durante 6 meses, a uma taxa de juros simples igual a 5% a.m., o montante ao final dos 6 meses será igual a R$ 1.000,00

DESCONTO COMERCIAL OU POR FORA

O desconto comercial tem estrutura de cálculo mais simples do que a do desconto racional, sendo amplamente adotado no Brasil, sobretudo em operações de crédito bancário a curto prazo.

No tópico anterior, quando utilizamos o desconto racional simples, primeiro calculamos o valor atual e depois o desconto. No caso do DESCONTO COMERCIAL SIMPLES (D_{cs}) devemos calcular, primeiramente, o desconto, e depois o valor atual.

O desconto comercial simples nada mais é do que os juros que seriam produzidos pelo valor nominal se ele fosse aplicado pelo prazo de antecipação, à taxa do desconto dada. Sendo assim:

$D_{cs} = N \cdot i \cdot n$

Como dissemos anteriormente e como você pode constatar pela fórmula acima, o desconto comercial incide sobre o valor nominal do título. Em cima desse falor aplicamos a taxa desconto e multiplicamos pelo número de períodos do prazo de antecipação.

Para calcular o VALOR ATUAL COMERCIAL SIMPLES (V_{acs}), é só utilizar a fórmula geral do desconto:

$D = V_a - N$

$D_{cs} = V_{acs} - N$

$V_{acs} = N - D_{cs}$

Substituindo, na equação acima, D_{cs} por N. i . n, temos:

$V_{acs} = N - N \,.\, i \,.\, n$

No lado direito da igualdade aparece o fator comum N, que pode ser colocado em evidência, fornecendo a fórmula para o cálculo direto do valor atual comercial simples:

$V_{acs} = N(1 - in)$

Utilizando o desconto comercial simples, vamos analisar como ficaria o desconto da nota promissória de R$ 440,00 mencionada anteriormente. O prazo de antecipação era de 2 meses e a taxa de desconto, 5% ao mês. Teríamos então que:

$D_{cs} = Nin$

$D_{cs} = 440 \,.\, 0{,}05 \,.\, 2$

$D_{cs} = 44$

$V_{acs} = N - D_{cs} = 440 - 44 = 396$

ou utilizando a fórmula que nos fornece diretamente o valor atual:

$V_{acs} = N(1 - in)$

$V_{acs} = 440(1 - 0{,}05 \,.\, 2) = 440 \,.\, 0{,}90 = 396$

Vimos anteriormente que pelo critério de desconto racional simples eu receberia, pela nota promissória entregue ao banco, o valor de R$

400,00 correspondente a um desconto de R$ 40,00; agora, pelo critério de desconto comercial simples, recebo R$ 396,00, correspondente a um desconto de R$ 44,00. Podemos perceber, então, que para a mesma taxa e mesmo prazo de antecipação, o desconto comercial é maior que o desconto racional.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01-

Para pagamento à vista de um título que vence em 90 dias, um banco oferece 10% de desconto no seu valor nominal. A taxa de desconto racional simples mensal adotada pelo banco foi de aproximadamente:

Resolução:

Considerando desconto racional temos que:

n = 3 meses

D_{rs} = 10% de N = 0,10N

Como $V_{ars} = N - D_{rs}$, temos que $V_{ars} = N - 0{,}10N = 0{,}90N$

Mas $V_{ars} = N/1 + in$

$N/1 + in = 0{,}90N$

$1/1 + i \cdot 3 = 0{,}90$

$1 = 0{,}90\,(1 + i \cdot 3)$

$1 = 0{,}90 + 2{,}7i$

$i = 0{,}10/2{,}7 = 0{,}03703$

i = 3,70%

02-

Uma pessoa tomou emprestado R$ 10.000,00 mediante assinatura de promissória a pagar após um ano, tendo sido contratada uma taxa de juros simples de 25% a.a. Quatro meses antes do vencimento, o devedor resolveu resgatar o título, contanto que fosse efetuado desconto comercial simples à taxa então vigente no mercado de 28% a.a. O valor líquido que o devedor se propõe a pagar, em R$, seria de:

Resolução:

Inicialmente, precisamos calcular o valor nominal (N) da nota promissória. Esse valor é o montante que resultaria de R$ 10.000,00 aplicados a 25% a.a. durante 1 ano. Assim,

M = ?

C = 10.000

i = 25% a.a.

n = 1 ano

M = C(1 + in)

M = 10.000 (1 + 0,25 . 1)

M = 10.000 (1,25)

M = 12.500

O valor nominal ou valor de face (N) da nota promissória, portanto, é R$ 12.500,00. Vamos calcular o desconto comercial considerando a taxa de desconto de 28% a.a. Sendo a taxa de desconto *anual*, precisaremos expressar a antecipação de 4 meses em anos: 4 meses = 1/3 de ano. Segue que n = 1/3. Uma vez que o desconto é comercial, ele será calculado sobre o valor nominal:

$D_{cs} = N.\ i\ .n$

$D_{cs} = 12.500\ .\ 0{,}28\ .\ 1/3$

$D_{cs} = 1.166{,}66$

$V_{acs} = N - D_{cs}$

$V_{acs} = 12.500 - 1.166{,}66$

$V_{acs} = 11.333{,}34$

DESCONTO BANCÁRIO

É o DESCONTO COMERCIAL acrescido de uma TAXA DE DESPESAS BANCÁRIAS, aplicada sobre o valor nominal.

A taxa de despesas bancárias está relacionada com a as despesas administrativas do banco, necessárias para efetuar a operação (papel, funcionário, energia elétrica, telefone, correio etc.)

Iremos chamar de "h" a taxa de despesas bancárias. Sendo assim, o desconto bancário ficará:

$D_b = Nin + Nh$

Colocando N em evidência, temos:

$D_b = N\ (in + h)$

Relações Entre o Desconto Racional e o Desconto Comercial

Conforme vimos anteriormente, o desconto comercial simples (D_{cs}) é igual aos juros produzidos pelo valor nominal (N). Já o desconto racional simples (D_{rs}) é igual aos juros produzidos pelo valor atual racional simples (V_{ars}). Decorre que para uma mesma taxa de desconto e mesmo prazo de antecipação o desconto comercial é maior que o desconto racional, pois a base de cálculo do primeiro (valor nominal) é maior que a base de cálculo do segundo (valor atual).

Podemos demonstrar as relações acima matematicamente.

No desconto racional simples, nós vimos que:

$V_{ars} = N/(1 + in)$ (I)

e que

$D_{rs} = N – V_{ars}$ (II)

Vamos substituir (I) em (II):

$D_{rs} = N – N/(1 + in)$

Colocando tudo sobre o mesmo denominador:

$D_{rs} = N + Nin – N/(1 + in)$

Desenvolvendo, fica:

$D_{rs} = Nin/(1 + in) = D_{cs}/(1 + in)$

Decorre que:

$D_{cs} = D_{rs} (1 + in)$

Vamos que o desconto comercial simples nada mais é do que o desconto racional simples multiplicado pelo fator de acumulação de capital. Em outras palavras, poderíamos dizer que o desconto comercial seria o montante originado de um capital igual ao desconto racional, aplicado no período e à taxa de desconto dados.

Voltemos à formula $D_{cs} = D_{rs} (1 + in)$. Aplicando a propriedade distributiva, teremos:

$D_{cs} = D_{rs} + D_{rs}\, in$

Passando o termo D_{rs} para o lado esquerdo do sinal de igual, chegaremos ao seguinte resultado:

$D_{cs} – D_{rs} = D_{rs}\, in$

Vemos então que a diferença entre os descontos comercial e racional é igual ao juro simples do desconto racional.

Exercício resolvido

(FTE/91) A diferença entre o desconto comercial e o racional de um título emitido a 150 dias de prazo, à taxa de desconto de 2% a.m., é de $ 1.200,00. Calcular o valor nominal do título.

Resolução:

Temos que:

$D_{cs} – D_{rs} = 1.200$

$n = 5$ meses

$i = 2\%$ a.m.

$N = ?$

$D_{cs} – D_{rs} = D_{rs}in$

$1.200 = D_{rs} . 0,02 .5$

$D_{rs} = 1.200 / 0,1 = 12.000$

$D_{cs} – D_{rs} = 1.200$

$D_{cs} = 1.200 + 12.000$

$D_{cs} = 13.200$

Mas $D_{cs} = 13.200 = N.i.n$

$N . 0,02 . 5 = 13.200$

$N = 13.200 / 0,1 = 132.000$

N = $ 132.00,00

Taxa Efetiva de Desconto

TAXA EFETIVA (i_{ef}) de desconto é a taxa de juros que, aplicada sobre o valor descontado do título, produz montante igual ao seu valor nominal.

Com relação à definição acima, cabem duas observações:

1. a definição de taxa efetiva coincide com a de taxa de desconto racional; portanto, quando estivermos trabalhando com DESCONTO RACIONAL , a taxa efetiva (i_{ef}) será a própria taxa de desconto racional (i_r);

2. quando estivermos trabalhando com DESCONTO COMERCIAL, a taxa efetiva (i_{ef}) será MAIOR do que a taxa de desconto comercial (i_c); no caso, corresponderá à taxa de juros que, aplicada sobre o valor atual COMERCIAL simples, produz, no final do prazo de antecipação, montante de valor idêntico ao valor nominal do título.

Exercício resolvido

Uma duplicata de valor nominal R$ 1.000, com vencimento para daqui a 4 meses, foi descontada à taxa de desconto comercial simples de 5% a.m. Determine o valor da taxa *efetiva* de desconto.

Resolução:

Dados:

$N = 1.000$

$i_c = 5\%$ a.m. $= 0{,}05$ a.m.

$n = 4$

Inicialmente calcularemos o valor atual comercial simples da duplicata (V_{acs}):

$V_{acs} = N(1 - i_c \, . \, n)$ (Equação I)

$V_{acs} = 1.000\ (1 - 0{,}05 \, . \, 4)$

$V_{acs} = 1.000\ (0{,}08)$

$V_{acs} = 800$

Capitalizando-se esse valor durante 4 meses, à taxa efetiva i_{ef} que queremos calcular, deveremos obter como montante o valor nominal R$ 1.000. Partindo da fórmula do montante simples, temos:

$M = C(1 + in)$

A expressão acima, transcrita nos termos do problema proposto, fica assim:

$N = V_{acs}\ (1 + in)$

Substituindo as letras dessa fórmula pelos valores numéricos do problema, obtemos:

$1.000 = 800\ (1 + i_{ef}\ .\ 4)$

$1.000/800 = 1 + i_{ef}\ .\ 4$

$1,25 = 1 + i_{ef}\ .\ 4$

$0,25 = i_{ef}\ .\ 4$

$I_{ef} = 0,25/4 = 0,0625 = 6,25\%$ a.m.

Conclusão: para uma taxa de desconto comercial simples igual a 5% a.m., a taxa efetiva de desconto é de 6,25% a.m.

Se, em vez de desconto *comercial,* utilizássemos desconto *racional*, a taxa efetiva seria a própria taxa de desconto.

Existe uma fórmula que nos fornece a relação entre a taxa de desconto comercial e a taxa efetiva. Para chegar a ela, basta conjugar as equações I e II marcadas no exercício resolvido acima, desenvolver a equação resultante, simplificá-la e isolar a incógnita i_{ef}. Você obterá a seguinte expressão:

$i_{ef} = i_c/1 - i_c\ .\ n$

Na fórmula acima,

i_{ef} = taxa de desconto efetiva;
i_c = taxa de desconto comercial;
n = número de períodos de antecipação.

Observe que, na fórmula dada, não aparece N. Assim, para calcular o valor da taxa efetiva de desconto de um título, não é necessário saber o seu valor nominal. Basta saber a taxa de desconto comercial e o número de períodos de antecipação.

Exercício resolvido

Uma duplicata com vencimento para daqui a 4 meses, foi descontada à taxa de desconto comercial de 5% a.m. Determine o valor de taxa efetiva de desconto.

Resolução:

i_c = 5% a.m. = 0,05 a.m.

n = 4m.

i_{ef} = ?

$i_{ef} = i_c/1 - i_c . n = 0{,}05/1 - 0{,}05 . 4 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$ a.m.

O resultado obtido é idêntico ao do problema anterior porque, na realidade é o mesmo problema. A única diferença é que, neste último, não foi fornecido o valor nominal do título, dado irrelevante para o cálculo da taxa efetiva de desconto.

Descontos Simples – Questões Comentadas

Lembrando:

Descontos Simples

Racional (ou “por dentro”) $N = A \cdot (1 + i \cdot n)$

Comercial (ou “por fora”) $A = N \cdot (1 - i \cdot n)$

Desconto $D = N - A$

Qual o desconto simples por fora de um título que, 3 meses antes do seu vencimento, gerou um valor atual de R$9.700,00 à taxa de 12%a.a.?

12% ao ano equivalem a 1% ao mês = 0,01

Comercial (ou “por fora”)
$A = N \cdot (1 - i \cdot n)$
$9700 = N \cdot (1 - 0{,}01 \cdot 3)$
$9700 = N \cdot 0{,}97$
$N = 10.000$
$D = N - A = 10.000 - 9700 = 300$ reais.

O possuidor de um título a prazo no valor nominal de R$10.000,00 descontou-o por fora à taxa de 6%a.a em sistema simples, faltando 90 dias para o seu vencimento. Qual o valor líquido recebido?

6% ao ano equivalem a 0,5% ao mês = 0,005

90 dias equivale a 3 meses

O valor do título é sempre o valor Nominal.

Comercial (ou “por fora”)
$A = N \cdot (1 \square i \cdot n)$
$A = 10.000 \cdot (1 \square 0{,}005 \cdot 3)$
$A = 10.000 \cdot 0{,}985$
$A = 9850$ reais.
$D = N - A = 10.000 - 9850 = 150$ reais

Qual o desconto racional (por dentro) simples de um título de R$102.000,00 de valor nominal, 60 dias antes do seu vencimento, à taxa de 12%a.a.?

12% ao ano equivalem a 1% ao mês = 0,01

60 dias equivale a 2 meses

Racional (ou “por dentro”)

$N = A \cdot (1 + i \cdot n)$
$102.000 = A \cdot (1 + 0{,}01 \cdot 2)$
$102.000 = A \cdot 1{,}02$
A = 100.000

D = N – A = 102.000 – 100.000 = 2.000 reais

Qual é o desconto racional de um título de R$228.000,00, pagável 7 meses antecipadamente, à taxa de 24%a.a. em sistema simples?

24% ao ano equivale a 2% ao mês = 0,02

Racional (ou “por dentro”)

$N = V \cdot (1 + i \cdot n)$
$228.000 = A \cdot (1 + 0{,}02 \cdot 7)$
$228.000 = A \cdot 1{,}14$
A = 200.00

D = N – A = 228.000 – 200.000 = 28.000 reais

(Petrobrás-2008) Uma empresa descontou um título com valor nominal igual a R$12.000,00, quatro meses antes de seu vencimento, mediante uma taxa de desconto simples igual a 3% ao mês. Sabendo que empresa pagará ainda uma tarifa de 8% sobre o valor nominal, a empresa deverá receber, em reais,

(A) 12.000,00 (B) 10.000,00 (C) 9.600,00 (D) 9.200,00 (E) 9.000,00

Quando em desconto simples não se fala nada é comercial.
Comercial (ou “por fora”)
$A = N \cdot (1 - i \cdot n)$

$A = 12000(1 - 0,03 \cdot 4)$
$A = 12000(1 - 0,12)$
$A = 12000(0,88)$
$A = 10.560$, mas ainda terá uma tarifa de 8% do valor nominal a ser paga.
Tarifa = 0,08 x 12000 = 960 reais, então receberá 10.560 – 960 = 9.600 reais. (alternativa c)

(Petrobrás-2008) A fim de antecipar o recebimento de cheques pré-datados, uma lojista paga 2,5% a.m. de desconto comercial. Em março, ele fez uma promoção de pagar somente depois do Dia das Mães e recebeu um total de R$120.000,00 em cheques pré-datados, com data de vencimento para 2 meses depois. Nesta situação, ele pagará, em reais, um desconto total de

(A) 4.000,00 (B) 4.500,00 (C) 5.000,00 (D) 5.200,00 (E) 6.000,00

Se não fala nada, é desconto simples. Se não se fala nada no simples, é comercial.
Comercial (ou "por fora")
$A = N \cdot (1 - i \cdot n)$
$VA = 120.000(1 - 0,025 \cdot 2)$
$A = 120.000(1 - 0,05)$
$V = 120.000 \cdot 0,95$
Veja por aqui que o valor atual será 95% de 120.000, então o desconto é de 5% do valor nominal.
D = 0,05 x 120.000 = 6.000 reais

OPERAÇÃO DE DESCONTO COMPOSTO

O conceito de desconto em juros compostos é bastante semelhante ao visto no regime de juros simples.

N = valor nominal do título que deve ser descontado

V_a = valor atual ou valor descontado

D = desconto

i = taxa de desconto

n = número de períodos de antecipação.

Cálculo do Desconto (D) e do Valor Atual (V_a)

Existem duas maneiras de calcularmos o desconto composto. A primeira utiliza o conceito de DESCONTO RACIONAL (desconto por dentro) e a segunda utiliza o conceito de DESCONTO COMERCIAL (desconto por fora).

Desconto Racional Composto ou Desconto Composto Por Dentro

Neste caso consideramos que o valor nominal N é igual ao montante do valor atual racional composto V_{arc} para um número de períodos n igual ao da antecipação. Ou seja, se aplicássemos o valor atual racional composto durante os n períodos de antecipação, a juros compostos, o montante seria igual ao valor nominal.

A taxa de juros utilizada para o cálculo é chamada de taxa de desconto racional composto.

Sendo assim:

$M = C\ (1 + i)^n$

$N = V_{arc}\ (1 + i)^n$

$V_{arc} = N/(1 + i)^n$

Para calcularmos o desconto racional composto devemos fazer:

$D_{rc} = N - V_{arc}$

Desconto Comercial Composto ou Desconto Composto Por Fora

O desconto comercial composto é pouco utilizado nas operações práticas, razão pela qual raramente é pedido em exame.
Em todo caso, lá vai a fórmula que dá o valor atual para o desconto comercial composto:

$V_{acc} = N\ (1 - i)^n$

E o desconto comercial composto será dado por:

$D_{cc} = N - V_{acc}$

Comparação entre o Desconto Simples e o Desconto Composto

Com tantas fórmulas de desconto, é provável que você acabe se confundindo na hora de aplicá-las, sobretudo se for numa situação de tensão, como é a da prova. Sugerimos a você, então que memorize a tabela abaixo, na qual são apresentadas as diversas fórmulas do VALOR ATUAL para todas as modalidades de desconto. Guarde apenas as fórmulas do VALOR ATUAL e para calcular o desconto, qualquer que seja ele, basta usar, em qualquer das situações apresentadas, o conceito geral $D = N - A$

CAPITALIZAÇÃO / DESCONTOS	SIMPLES	COMPOSTO
RACIONAL (POR DENTRO)	$A = N/(1 + in)$ $D = N - A$	$A = N/(1 + i)^n$ $D = N - A$
COMERCIAL (POR FORA)	$A = N.(1 – in)$ $D = N – A$ (*)	$A = N (1 – i)^n$ $D = N - A$ (**)
Obs.	(*) mais usado no Brasil	(**) menos usado no Brasil

Para ajudá-lo a memorizar, observe as seguintes regularidades:

- Todas as fórmulas apresentam o valor nominal N no numerador
- Quando o desconto é RACIONAL, existe denominador; quando é COMERCIAL, não
- Quando o desconto é COMPOSTO, o n aparece como *expoente*; quando o desconto é SIMPLES, o n *multiplica* a taxa

Exercícios resolvidos

1. (CEB-IDR) Antecipando em dois meses o pagamento de um título, obtive um desconto racional composto, que foi calculado com base na taxa de 20% a.m. Sendo R$ 31.104,00 o valor nominal do título, quanto paguei por ele, em R$?

Resolução:

O prazo de antecipação é de 2 meses, portanto n => 2. A taxa de desconto composto é de 20% a.m. (vamos admitir capitalização mensal), portanto i = 20% a.m. O valor nominal do título é N = 31.104. O problema quer o valor atual do título V_{arc} = ?
Utilizando a expressão do valor atual para o desconto racional composto, temos:

$V_{arc} = N/(1 + i)^n \Rightarrow V_{arc} = 31.104/(1 + 0,20)^2 = 31.104/1,44 = 21.600$

2. (TCDF-IDR) Uma empresa tomou emprestados de um banco CR$ 1.000.000,00 à taxa de juros compostos de 19,9% a.m., por 6 meses. No entanto, 1 mês antes do vencimento, a empresa decidiu liquidar a dívida. Qual o valor a ser pago, em CR$, se o banco opera com uma taxa de desconto racional composto de 10% a.m.?
Considere $(1,199)^6 = 2,97$

Resolução:

Nosso primeiro procedimento será calcular o valor do montante M da dívida no final dos 6 meses, ou seja, o seu valor nominal. Temos que:
C = 1.000.000

n = 6 meses

i = 19,9% a.m. = 0,199 a.m.

$M = C (1 + i)^n = 1.000.000 (1 + 0,199)^6$

$M = 1.000.000 \times (1,199)^n = 1.000.000 \times 2,97 = 2.970.000$

O valor nominal da dívida, portanto, será N = 2.970.000

A antecipação é de 1 mês, logo, n = 1

A taxa de juros é de 10% a.m. => i = 10% a.m. = 0,10 a.m.

O problema pede o valor atual com um mês de antecipação:

$V_{arc} = N/(1 + i)^n \Rightarrow V_{arc} = 2.970.000/(1 + 0,10)^1 = 2.970.000/1,10$

$V_{arc} = 2.700.000$

Descontos Compostos – Questões comentadas

Lembrando:

Descontos Compostos

Racional (ou "por dentro") $A = N/(1 + i)^n$

Comercial (ou "por fora") $A = N (1 - i)^n$

Desconto D = N – A

Um título de valor nominal igual a R$12.100,00 é resgatado 2 meses antes de seu vencimento, segundo o critério de desconto racional composto. Sabendo-se que a taxa de juro composto é de 10% a.m., qual o valor do desconto?

Racional (ou "por dentro")
$A = N/(1 + i)^n$
$A = 12100/(1 + 0,10)^2$
$A = 12.100 /(1\ 0,1)^2$
$A = 12.100 /1,21$
$A = 10.000$

Desconto D = N – A = 12.100 – 10.000 = 2.100 reais

Um título de valor nominal igual a R$10.000,00 é resgatado 2 meses antes de seu vencimento, segundo o critério de desconto comercial composto. Sabendo-se que a taxa de juro composto é de 10% a.m., qual o valor do desconto?

Comercial (ou “por fora”)

$A = N (1 - i)^n$

$A= 10000(1 - 0,1)^2$
$A = 10000(0,9)^2$
$A = 10000.0,81$
$A = 8100$

Desconto D = N – A = 10.000 – 8.100 = 1.900 reais

Um título de valor nominal de R$500.000,00 vai ser resgatado três meses antes de seu vencimento sob o regime de desconto comercial composto. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial é de 96% a.a, qual o valor descontado e o valor do desconto, considerando capitalização mensal? Dado: $(1 - 0,08)^3 = 0,78$
96% ao ano equivale a 8% ao mês = 0,08

Valor descontado é o Valor atual “A”

Comercial (ou “por fora”)

$A = N (1 - i)^n$

$A = 500000(1 - 0,08)^3$
$A = 500000.0,78$
$A = 390.000$

Desconto D = N – A = 500.000 – 390.000 = 110.000 reais

Um título de valor nominal de R$25.200,00 vai ser resgatado três meses antes de seu vencimento sob o regime de desconto racional composto. Sabendo-se que a taxa de desconto racional é de 96% a.a, qual o valor descontado e o valor do desconto, considerando capitalização mensal? Dado: $(1,08)^3 = 1,26$.

96% ao ano equivale a 8% ao mês = 0,08

Racional (ou “por dentro”) n

$A = N/(1 + i)^n$

$A = 25200 (1+ 0,08)^3$

$A = 25200.1,26$

$A = 20000$

Desconto D = N – V D = 25.200 – 20.000 = 5.200 reais

(CEF – 2008) Um título de valor nominal R$ 24.200,00 será descontado dois meses antes do vencimento, com taxa composta de desconto de 10% ao mês. Sejam D o valor do desconto comercial composto e d o valor do desconto racional composto. A diferença D – d, em reais, vale:

(A) 399,00 (B) 398,00 (C) 397,00 (D) 396,00 (E) 395,00

Desconto composto

N = 24200
n = 2
i = 10% = 0,1

Racional Composto (d)

$A = N/(1 + i)^n$

$d = 24200/(1 + 0,1)^2$

$d = 24200/1,21$

$d = 20000$

Comercial Composto (D)

$A = N (1 – i)^n$

$D = 24200(1 – 0,1)^2$

$D = 24200.0{,}9^2$
$D = 24200.0{,}81$
$D = 19602$

$D - d = 20000 - 19602 = 398$

VI- PLANOS OU SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS:

Um sistema de amortização nada mais é do que um plano de pagamento de uma dívida, ou seja, de um empréstimo ou financiamento.

Os pagamentos para se amortizar (quitar) uma dívida podem ser feitos em parcelas iguais ou diferentes, com periodicidade mensal, trimestral, anual, quinzenal ou em períodos variáveis.

Os sistemas de amortização mais utilizados em todos os países implicam em prestações mensais compostas por duas parcelas distintas: uma de capital (chamada de amortização) e outra de juros. E neste caso, os sistemas mais utilizados no mundo são o Sistema de Prestações Iguais (ou uniformes) e o Sistema de Amortização Constante (SAC). No primeiro sistema, as parcelas de amortização são crescentes e os juros decrescentes; já no caso do SAC, como o próprio nome já diz, as parcelas de amortização são iguais (ou constantes) e os juros decrescentes.

Observações importantes:

1. ***Apenas no Brasil o Sistema de Prestações Iguais (ou uniformes) é conhecido por Sistema Price;***

2. ***Em todos os sistemas de pagamentos a taxa de juros incide sempre sobre o saldo devedor existente no final do período imediatamente anterior; e por essa razão, os juros serão sempre decrescentes caso se amortize qualquer valor.***

Para melhor entendimento, vamos a um exemplo mostrando como se obtém as prestações através dos dois sistemas mencionados. Vamos considerar os seguintes dados:

- Valor do empréstimo: R$ 1.000,00;
- Número de prestações: 10
- Taxa mensal de juros: 10%

(NESTE TEXTO NÃO VAMOS CONSIDERAR OS EFEITOS DA CORREÇÃO MONETÁRIA)

Sistema de Prestações Iguais (PRICE)

Este é o sistema mais adotado no mundo. Acredito que represente pelo menos 80% dos planos de liquidação de um empréstimo ou financiamento. O valor das prestações é obtido através da seguinte fórmula, cuja validade é universal:

$$\text{PRESTAÇÃO} = \text{VF} \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

em que **VF** é o valor financiado, **n** o número de prestações e **i** a taxa mensal de juros.

Substituindo, temos:

$$\text{PRESTAÇÃO} = 1.000,00 \times \frac{(1,10)^{10} \times 0,10}{(1,10)^{10} - 1} = 162,75$$

O valor da prestação pode também ser facilmente obtido através da conhecida calculadora financeira HP-12C, fazendo-se como segue:

DIGITAR	VISOR	SIGNIFICADO
10 **n**	10,00	Número de prestações
10 **i**	10,00	Taxa mensal de juros
1000 **CHS PV**	-1.000,00	Valor do empréstimo
PMT	162,75	Valor das prestações mensais

É importante destacar que a calculadora, ao apresentar no visor o valor R$162,75, utilizou um programa que resolve a fórmula acima especificada. Portanto, o PMT da calculadora informa o valor da prestação de acordo com a Tabela Price.

A decomposição de cada uma dessas prestações em parcelas de amortização e de juros, bem como os respectivos saldos devedores após o seu pagamento, estão discriminados no quadro a seguir.

Nº DE ORDEM	SALDO DEVEDOR	AMORT.	JUROS	VALOR DA PRESTAÇÃO
0	1.000,00	-	-	-
1	937,25	62,75	100,00	162,75
2	868,23	69,02	93,73	162,75
3	792,31	75,92	86,82	162,75
4	708,80	83,51	79,23	162,75
5	616,93	91,87	70,88	162,75
6	515,88	101,05	61,69	162,75
7	404,72	111,16	51,59	162,75
8	282,45	122,27	40,47	162,75
9	147,95	134,50	28,25	162,75
10	0,00	147,95	14,80	162,75
TOTAL	-	1.000,00	627,45	1.627,45

É importante observar três regras fundamentais, válidas para quaisquer sistemas de amortização, inclusive para o SAC:

1. O valor da parcela de juros resulta sempre da aplicação da taxa de juros sobre o saldo devedor correspondente ao mês imediatamente anterior;
2. O valor da parcela de amortização referente a cada mês é dado pela diferença entre o valor da prestação e o valor da parcela de juros;
3. O saldo devedor de um mês é sempre igual ao saldo devedor do mês anterior, subtraída a parcela de amortização do mês.

Como já mencionado anteriormente, o quadro acima nos mostra que num sistema de prestações iguais, que no Brasil chamamos de PRICE, os valores das parcelas de amortização são crescentes e as de juros decrescentes.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Trata-se do segundo plano mais utilizado no Brasil e no mundo. O SAC é um sistema "intuitivo", e não necessita de muitas explicações. A partir do cálculo da parcela de amortização constante, constrói-se facilmente a coluna "SALDO DEVEDOR" e a seguir a coluna "JUROS"; por fim, a coluna "VALOR DA PRESTAÇÃO" resulta da soma das parcelas de amortização e de juros.

Os valores das prestações são obtidos de forma bastante simples, como nos mostra os dados contidos no quadro mostrado a seguir. A construção desse plano começa pelo valor da parcela de amortização, como segue:

$$\text{Valor da parcela de amortização} = \frac{1.000,00}{10} = 100,00$$

A partir dessa parcela, e seguindo-se as três regras fundamentais já descritas, obtém-se facilmente os valores das demais colunas, como nos mostra o quadro abaixo.

Nº DE ORDEM	SALDO DEVEDOR	AMORT.	JUROS	VALOR DA PRESTAÇÃO
0	1.000,00	-	-	-
1	900,00	100,00	100,00	200,00
2	800,00	100,00	90,00	190,00
3	700,00	100,00	80,00	180,00
4	600,00	100,00	70,00	170,00
5	500,00	100,00	60,00	160,00
6	400,00	100,00	50,00	150,00
7	300,00	100,00	40,00	140,00
8	200,00	100,00	30,00	130,00
9	100,00	100,00	20,00	120,00
10	-	100,00	10,00	110,00
TOTAL	-	1.000,00	550,00	1.550,00

Em quaisquer outros sistemas, como o SAM (Sistema de Amortização Misto) ou o SACRE (Sistema de Amortizações Crescentes), a decomposição das prestações em parcelas de juros e de amortização se faz de maneira idêntica.

Prof. José Dutra Vieira Sobrinho

Outubro/2009

VII- CÁLCULO FINANCEIRO: CUSTO REAL EFETIVO DE OPERAÇÕES DE FINACIAMENTO, EMPRÉSTIMO E INVESTIMENTO

CET - Custo Efetivo Total

CET – Custo Efetivo Total é a porcentagem anual que o cliente paga ao contratar uma operação de empréstimo, financiamento ou leasing.

O **CET** engloba todas as despesas de uma operação de crédito, tais como a taxa de cadastro, seguro, gravame, IOF, registro e serviços de terceiros.
É importante que o cliente tenha prévia ciência do CET.

Por que o CET foi instituído?
O objetivo do CET é informar ao consumidor o custo real de uma operação de crédito, apresentando todos os custos que incidem na operação pretendida antes de contratá-la. Dessa forma, o consumidor tem condições de comparar as ofertas do mercado e escolher a melhor.

Por que o CET pode variar entre instituições financeiras?
Como o **CET** é composto por taxa de juros, custos de tarifas, tributos, registros e despesas com pagamento de terceiros, o valor desses custos pode variar de uma instituição para outra. Por exemplo: mesmo que as taxas de juros de duas instituições sejam iguais, o **CET** pode variar, em função do valor de uma tarifa ser diferente entre essas instituições.

Taxa Efetiva

A taxa efetiva é aquela que o período de formação e incorporação dos juros ao capital coincide com aquele a que a taxa está referida.
Exemplos:
a) Uma taxa de 5% ao mês com capitalização mensal.
b) Uma taxa de 75% ao ano com capitalização anual.
c) Uma taxa de 11% ao trimestre com capitalização trimestral.

Taxa Real

A taxa real é aquela que expurga o efeito da inflação no período. Dependendo dos casos, a taxa real pode assumir valores negativos. Podemos afirmar que a taxa real corresponde à taxa efetiva corrigida pelo índice inflacionário do período.

Existe uma relação entre a taxa efetiva, a taxa real e o índice de inflação no período. Vejamos:
$1+i_{ef}=(1+i_r)(1+i_{inf})$

Onde,

$i_{ef} \rightarrow$ **é a taxa efetiva**
$i_r \rightarrow$ **é a taxa real**
$i_{inf} \rightarrow$ **é a taxa de inflação no período**

Seguem alguns exemplos para compreensão do uso da fórmula.

Exemplo 1. Certa aplicação financeira obteve rendimento efetivo de 6% ao ano. Sabendo que a taxa de inflação no período foi de 4,9%, determine o ganho real dessa aplicação.

Solução: A solução do problema consiste em determinar o ganho real da aplicação corrigido pelo índice inflacionário do período, ou seja, determinar a taxa real de juros dessa aplicação financeira. Temos que:

$$i_{ef} = 6\%\ a.a. = \frac{6}{100} = 0{,}06$$
$$i_{inf} = 4{,}9\%\ a.a. = \frac{4{,}9}{100} = 0{,}049$$
$$i_r = ?$$

Aplicando a fórmula que relaciona os três índices, teremos:

$$1 + i_{ef} = (1 + i_r)(1 + i_{inf})$$

$$1 + 0{,}06 = (1 + i_r)(1 + 0{,}049)$$
$$1{,}06 = (1 + i_r) \cdot 1{,}049$$
$$1 + i_r = \frac{1{,}06}{1{,}049}$$
$$1 + i_r = 1{,}01$$
$$i_r = 1{,}01 - 1$$
$$i_r = 0{,}01 \cdot 100 = 1\%\ a.a$$

Portanto, o ganho real dessa aplicação financeira foi de 1% ao ano.

Exemplo 2. Certa categoria profissional obteve reajuste salarial de 7% ao ano. Sabendo que a inflação no período foi de 10%, determine o valor do reajuste real e interprete o resultado.

Solução: Temos que

$$i_{ef} = 7\%\ a.a. = 0{,}07$$
$$i_{inf} = 10\%\ a.a. = 0{,}1$$
$$i_r = ?$$

Aplicando a fórmula, teremos:

$$1 + i_{ef} = (1 + i_r)(1 + i_{inf})$$

$$1 + 0{,}07 = (1 + i_r)(1 + 0{,}1)$$
$$1{,}07 = (1 + i_r) \cdot 1{,}1$$
$$1 + i_r = \frac{1{,}07}{1{,}1}$$
$$1 + i_r = 0{,}972$$
$$i_r = 0{,}972 - 1$$
$$i_r = -0{,}028 \cdot 100 = -2{,}8\%\ a.a.$$

Como a taxa real foi negativa, podemos afirmar que essa categoria profissional teve perdas salariais do período, uma vez que o reajuste salarial foi abaixo do índice inflacionário do período.

VIII- ANÁLISE DE INVESTIMENTOS – TIR

Em uma operação financeira de Investimento ou Financiamento, existem várias situações que interferem na nossa decisão sobre a escolha de uma dentre as várias possíveis alternativas. Em geral, temos o conhecimento da Taxa de Mercado, também conhecida como a Taxa de Atratividade do Mercado e desejamos saber a taxa real de juros da operação, para poder tomar uma decisão.

Existem dois importantes objetos matemáticos que são utilizados na análise da operação financeira de Investimento ou Financiamento: Valor Presente Líquido (NPV) e Taxa Interna de Retorno – T.I.R

Taxa Interna de Retorno (TIR): Define-se como a taxa de desconto em que o Valor Presente do fluxo de caixa futuro de um investimento se iguala ao custo do investimento.
É calculada mediante um processo de tentativa e erro.
Quando os valores presentes líquidos do custo e dos retornos se igualam a zero, a taxa de desconto utilizada é a TIR.
Se essa taxa excede o retorno exigido - chamada taxa de atratividade - o investimento é aceitável.
Pode haver mais de uma TIR para determinado conjunto de fluxos de caixa.

A Taxa Mínima de Atratividade (TMA): é uma taxa de juros que representa o mínimo que um investidor se propõe a ganhar quando faz um investimento, ou o máximo que um tomador de dinheiro se propõe a pagar quando faz um financiamento.

O valor presente líquido (VPL): Também conhecido como **valor atual líquido (VAL)** ou método do valor atual, é a fórmula matemático-financeira de se determinar o valor presente de pagamentos futuros descontados a uma taxa de juros apropriada, menos o custo do investimento inicial. Basicamente, é o calculo de quanto os futuros pagamentos somados a um custo inicial estaria valendo atualmente. Temos que considerar o conceito de valor do dinheiro no tempo, pois, exemplificando, R$ 1 milhão hoje, não valeria R$ 1 milhão daqui a uma ano, devido ao custo de oportunidade de se colocar, por exemplo, tal montante de dinheiro na poupança para render juros

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

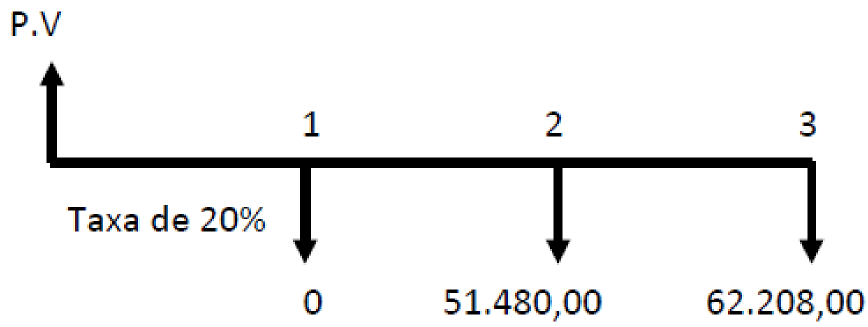
01-

Uma máquina com vida útil de 3 anos é adquirida hoje (data 0) produzindo os respectivos retornos: R$ 0,00 no final do primeiro ano, R$ 51.480,00 no final do segundo ano e R$ 62.208,00 no final do terceiro ano. O correspondente valor para a taxa interna de retorno encontrado foi de 20% ao ano. Então, o preço de aquisição da máquina na data 0 é de

(A) R$ 86.100,00.
(B) R$ 78.950,00.
(C) R$ 71.750,00.
(D) R$ 71.500,00.
(E) R$ 71.250,00.

Resposta certa: letra E

Fluxo de Pagamento



1. Trazer a primeira parcela a Valor Presente:

$$\frac{51.480}{(1,20)^2} = 35.750$$

2. Trazer a segunda parcela a Valor Presente:

$$\frac{62.208}{(1,20)^3} = 36.000$$

3. Somar as duas parcelas para encontrar o Valor Presente TOTAL:

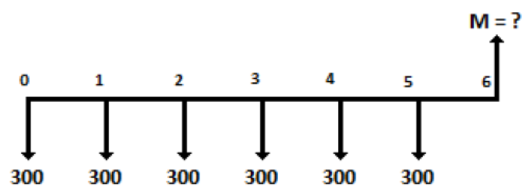
$$35.750 + 36.000 = 71.750,00$$

02-

Uma aplicação consiste em 6 depósitos consecutivos, mensais e iguais no valor de R$ 300,00 (trezentos reais) cada um. Se a taxa de juros compostos utilizada é de 5% ao mês, o montante, em reais, um mês após o último dos 6 depósitos, é

(A) 2.040,00
(B) 2.142,00
(C) 2.240,00
(D) 2.304,00
(E) 2.442,00

Primeiro temos que enxergar o fluxo de caixa dessa situação:



Agora como temos a tabela de fator de acumulação de Capital de uma série de pagamento, vamos verificar que fator temos que utilizar:
i = 5% → olhar tabela: coluna 5% e linha 6 (6 meses de depósitos) → FAC = 6,80

6 depósitos de R$ 300,00:

300 x FAC = 300 x 6,80 = 2040

Temos também que o saque é feito um mês após o último depósito, logo temos que capitalizar o valor encontrado:

M = PV.(1 + i.t) → M = 2040.(1,05) → M = 2142,00

O Montante é de R$ 2.142,00.

03-

Um investimento consiste na realização de 12 depósitos mensais de R$ 100,00, sendo o primeiro deles feito um mês após o início da transação. O montante será resgatado um mês depois do último depósito. Se a taxa de remuneração do investimento é de 2% ao mês, no regime de juros compostos, o valor do resgate, em reais, será

(A) 1200,00 (B) 1224,00
(C) 1241,21 (D) 1368,03
(E) 2128,81

Resposta certa: letra d

Como o depósito se inicia um mês após a operação, logo estamos diante de uma série **póstecipada**

Devemos multiplicar o valor dos depósitos pela F.A.C para 12 depósitos a uma taxa de 2%. Para isso devemos consultar o valor na tabela fornecida pela prova.

M = 100 x FAC (12,2%)
M = 100 x 13,412 = 1.341,20

Como ele deseja o saldo um mês depois do ultimo depósito devemos multiplicar o montante encontrado por 1,02 para captalizarmos mais um periodo. Logo o montade desejado será de:

04-

A tabela abaixo apresenta o fluxo de caixa de um certo projeto.

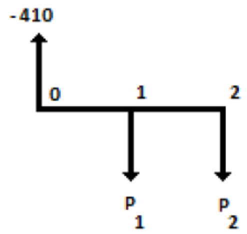
Período (anos)	0	1	2
Valor (milhares de reais)	410	P	P

Para que a taxa interna de retorno anual seja 5%, o valor de P, em milhares de reais, deve ser

(A) 216,5 (B) 217,5
(C) 218,5 (D) 219,5
(E) 220,5

Resposta certa: letra e

Primeiro vamos enxergar o fluxo de caixa:



i = 5%

1º passo: levar o momento 0 ao 1:

410 x 1,05 = 430,50

2º passo: como sabemos que as parcelas "P" são iguais, vamos trazer o momento 2 para o 1 também:

Temos: $\frac{P_2}{(1{,}05)}$

Daí podemos calcular:

$$430{,}50 = P + P1{,}05$$

Calculando o MMC temos:

$$452{,}02 = (1{,}05)$$

$$2{,}05P = 452{,}02$$

$$P = 220{,}50$$

Logo a parcela P é a igual a R$ 220,50.

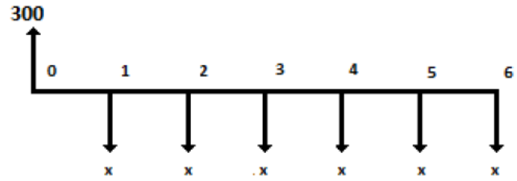
05-

Um empréstimo de R$ 300,00 será pago em 6 prestações mensais, sendo a primeira delas paga 30 dias após o empréstimo, com juros de 4% ao mês sobre o saldo devedor, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC). O valor, em reais, da quarta prestação será

(A) 50,00 (B) 52,00
(C) 54,00 (D) 56,00
(E) 58,00

Resposta certa: letra d

Primeiro vamos enxergar o fluxo de caixa:



Como temos um (SAC) sabemos que a amortização é constante, todo mês amortizamos o mesmo valor, logo vamos calcular quanto será amortizado em cada prestação:

$$Amort. = \frac{300}{6} = 50$$

Como queremos saber qual o valor em reais da 4ª parcela, temos que calcular quanto foi amortizado até a 3ª parcela:

3 x 50 = 150 reais.
Portanto a dívida na quarta parcela é dada pela equação:

$$P4 = 150\ x\ 0{,}04 + 50 = 6 + 50 = 56\ reais$$

Para entendermos a equação acima, temos que entender que sobre o saldo devedor incide o juros de 4 % dada no exercício.

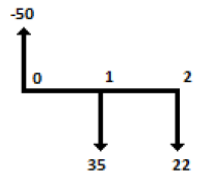
06-

A tabela abaixo apresenta o fluxo de caixa de um certo projeto.

Valor (Milhares de reais)	- 50	35	22
Período (anos)	0	1	2

A taxa interna de retorno anual é igual a
(A) 10% (B) 12%
(C) 15% (D) 18%
(E) 20%

Resposta certa: letra a



Esta questão é complicada pois temos que calcular esta taxa através de interpolação, mas como temos alternativas vamos testá-las, já que se cair questões desse tipo em concursos públicos, eles darão as taxas para testarmos qual delas irá zerar nosso fluxo de caixa:

Temos como alternativas: 10%, 12%, 15%, 18% e 20%.

Temos que testar a alternativa com a taxa do meio das apresentadas:

1º teste: 15%

Vamos levar a entrada de (-50) para os momentos 1 e 2.

1- 50 x 1,15 = 57,50 – 35 = 22,50, como vamos capitalizar novamente esse valor vai passar dos 22 reais do momento 2.

2º teste: 10%

1- 50 x 1,10 = 55 – 35 = 20;
2- 20 x 1,10 = 22 – 22 = 0;

Portanto a taxa interna de retorno é de 10% para esse Fluxo de Caixa deste projeto.

1º teste: 15%

Vamos levar a entrada de (-50) para os momentos 1 e 2.

1- 50 x 1,15 = 57,50 – 35 = 22,50, como vamos capitalizar novamente esse valor vai passar dos 22 reais do momento 2.

2º teste: 10%

1- 50 x 1,10 = 55 – 35 = 20;
2- 20 x 1,10 = 22 – 22 = 0;

Portanto a taxa interna de retorno é de 10% para esse Fluxo de Caixa deste projeto.

07-

Uma empresa deverá escolher um entre dois projetos X e Y, mutuamente excludentes, que apresentam os seguintes fluxos de caixa:

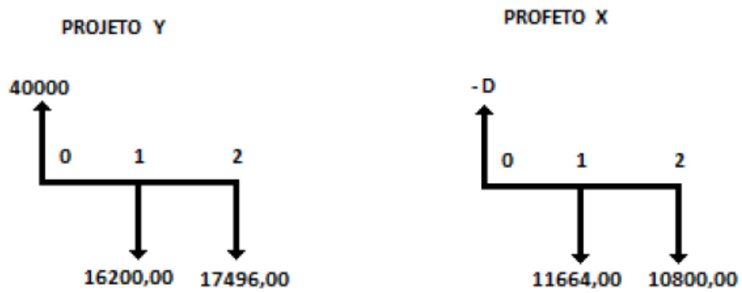
Ano	Projeto X R$	Projeto Y R$
0	–D	–40 000,00
1	10 800,00	16 200,00
2	11 664,00	17 496,00

A taxa mínima de atratividade é de 8% ao ano (capitalização anual) e verifica-se que os valores atuais líquidos referentes aos dois projetos são iguais. Então, o desembolso D referente ao projeto X é igual a

(A) R$ 30 000,00
(B) R$ 40 000,00
(C) R$ 45 000,00
(D) R$ 50 000,00
(E) R$ 60 000,00

Resposta certa: letra a

Vamos primeiro ver os fluxos de caixa dos dois projetos:



i = 8% a.a

Vamos antecipar as parcelas para o momento zero no projeto Y.

$$\frac{17496}{(1,08)^2} = 15000$$

162001,081=15000

P + P = 15000 + 15000 = 30000

J = 40000 – 30000 = 10000

Vamos antecipar as parcelas para o momento zero no projeto X.

$$\frac{11664}{(1{,}08)^2} = 10000$$

108001,081=10000

P + P = 10000 + 10000 = 20000

X = 20000 + 10000 = 30000.

Fator de Acumulação de Capital

$(1+i)^n$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%
1	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08
2	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,17
3	1,03	1,06	1,09	1,12	1,16	1,19	1,23	1,26
4	1,04	1,08	1,13	1,17	1,22	1,26	1,31	1,36
5	1,05	1,10	1,16	1,22	1,28	1,34	1,40	1,47
6	1,06	1,13	1,19	1,27	1,34	1,42	1,50	1,59

Fator de Acumulação de Capital de uma Série de Pagamentos

s(n,i)	1%	2%	3%	4%	5%
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2	2,01	2,02	2,03	2,04	2,05
3	3,03	3,06	3,09	3,12	3,15
4	4,06	4,12	4,18	4,25	4,31
5	5,10	5,20	5,31	5,42	5,53
6	6,15	6,31	6,47	6,63	6,80
7	7,21	7,43	7,66	7,90	8,14
8	8,29	8,58	8,89	9,21	9,55
9	9,37	9,75	10,16	10,58	11,03
10	10,46	10,95	11,46	12,01	12,58
11	11,57	12,17	12,81	13,49	14,21
12	12,68	13,41	14,19	15,03	15,92
13	13,81	14,68	15,62	16,63	17,71
14	14,95	15,97	17,09	18,29	19,60
15	16,10	17,29	18,60	20,02	21,58