Quarta lista de exercícios de cálculo 2

Sistemas de Informação - 2008

1. Determine se a seqüência converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite:
$(a)\ a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ $(b)\ a_n = \frac{n^3}{4n^3+1}$ $(c)\ a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$
$(d)\ a_n = \frac{2^n+1}{3^n+2}$ $(e)\ a_n = \frac{2+n^3}{1+2n^3}$ $(f)\ a_n = \cos n\pi$
$(g)\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$ $(h)\ a_n = \frac{n+1}{3n-1}$ $(i)\ a_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$
$(j)\ a_n = \ln(n+1) - \ln n$

2. Determine se a seqüência dada é crescente ou decrescente. A seqüência é limitada?
$(a)\ a_n = \frac{1}{5^n}$ $(b)\ a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$

3. Determine se as séries são convergentes ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma:
$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$
$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ $(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$
$(g)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ $(h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$ $(i)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}$
$(j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$ $(l)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$ $(m)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$
$(n)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$ $(o)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ $(p)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$
$(q)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$ $(r)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{4n^2+1}$ $(s)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{\frac{3}{4}}}$

4. Encontre os valores de x para os quais a série $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$ converge. Calcule a soma desta série para os valores de x encontrados.

5. Se a n-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for $s_n = 3 - n2^{-n}$ encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6. Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:
$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-10)^n}$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 2^n}{n!}$
$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ $(f)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^n}$

7. Para quais inteiros positivos k a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$ é convergente ?

8. Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo x. Deduza que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para todo x.

9. Dada uma série qualquer $\sum a_n$ definimos uma série $\sum a_n^+$ cujos termos são todos termos positivos de $\sum a_n$ e uma série $\sum a_n^-$ cujos temos são todos termos negativos de $\sum a_n$, ou seja, $a_n^+ = \frac{a_n+|a_n|}{2}$ e $a_n^- = \frac{a_n-|a_n|}{2}$.

   (a) Quanto vale a_n^+ e a_n^- se $a_n > 0$? E quando $a_n < 0$?

   (b) Mostre que se $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes.

   (c) Mostre que se $\sum a_n$ for condicionalmente convergente, então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são divergentes.

10. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência das séries. (lembre-se que nos extremos do intervalo a série pode, ou não, convergir)
    $(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$ $\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$ $\quad (c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n \ln n}$ $\quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
    $(e)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^3 (x-5)^n$ $\quad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n 3^n}$ $\quad (g)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x+3)^n}{n \ln n}$

11. Se k for um inteiro positivo, encontre o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$

12. Suponha que a série $\sum c_n x^n$ tenha raio de convergência 2 e que a série $\sum d_n x^n$ tenha raio de convergência 3. O que você pode dizer sobre o raio de convergência da série $\sum (c_n + d_n) x^n$?

13. Suponha que o raio de convergência da série de potência $\sum c_n x^n$ seja R. Qual é o raio de convergência da série de potência $\sum c_n x^{2n}$

14. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ Encontre os intervalos de convergência para as funções f,f' e f''.

15. Encontre a série de Maclaurin para $f(x)$ usando a definição de uma série de Maclaurin (Assuma que $f(x)$ tem expansão em série de potência). Também encontre o raio de convergência.
    $(a)\ f(x) = \cos x$ $\quad (b)\ f(x) = (1+x)^{-3}$ $\quad (c)\ f(x) = e^{5x}$ $\quad (d)\ f(x) = \cosh x$

16. Encontre a série de Taylor para $f(x)$ centrada no valor dado de a. (Assuma que $f(x)$ tem expansão em série de potência).
    $(a)\ f(x) = \ln x,\ a = 2$ $\quad (b)\ f(x) = x^{-2},\ a = 1$

17. Avalie a integral indefinida como uma série infinita.
    $(a)\ \int x\cos x^3 dx \quad (b)\ \int \frac{\sin x}{x} dx \quad (c)\ \int \frac{e^x-1}{x} dx$

18. Use séries para avaliar o limite

    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan^{-1} x}{x^3}$ use que $\tan^{-1} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

    (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1+x-e^x}$

    (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$