EXERCÍCIOS

1. Faça os seguintes cálculos:
   a) VERDADEIRO $\wedge$ VERDADEIRO $\wedge$ VERDADEIRO $\wedge$ VERDADEIRO $\wedge$ FALSO.
   b) ($\neg$ VERDADEIRO) $\vee$ VERDADEIRO.
   c) $\neg$ (VERDADEIRO $\vee$ VERDADEIRO).
   d) (VERDADEIRO $\vee$ VERDADEIRO) $\wedge$ FALSO.
   e) VERDADEIRO $\vee$ (VERDADEIRO $\wedge$ FALSO).
   Note que, nos quatro últimos exercícios, a ordem em que efetuamos as operações tem importância! Compare as expressões em (b)–(c) e em (d)–(e) e observe que elas são as mesmas, exceto no que se refere à colocação dos parênteses.
   Repense sua resposta a (a). Essa resposta depende da ordem em que fazemos as operações?
2. Com o auxílio de *tabelas verdade*, prove tantas partes do Teorema 5.2 quantas puder.
3. Prove: $(x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$ é logicamente equivalente a x.
4. Prove: $x \to y$ é logicamente equivalente a $(\neg y) \to (\neg x)$.

   Uma afirmação do tipo "se-então" é logicamente equivalente à sua contrapositiva.

5. Prove: $x \leftrightarrow y$ é logicamente equivalente a $(\neg x) \leftrightarrow (\neg y)$.
6. Prove: $x \leftrightarrow y$ é logicamente equivalente a $(x \to y) \wedge (y \to x)$.
7. Prove: $x \leftrightarrow y$ é logicamente equivalente a $(x \to y) \wedge ((\neg x) \to (\neg y))$.
8. Prove: $(x \vee y) \to z$ é logicamente equivalente a $(x \to z) \wedge (y \to z)$.
9. Suponha que tenhamos duas expressões booleanas que envolvam dez variáveis. Para provar que essas duas expressões são logicamente equivalentes, construímos uma tabela verdade. Quantas linhas (além da linha de cabeçalho) essa tabela teria?

   Uma afirmação do tipo "se-então" não é logicamente equivalente à sua recíproca.

10. Como se refutaria uma equivalência lógica? Mostre que:
    a) $x \to y$ não é logicamente equivalente a $y \to x$.
    b) $x \to y$ não é logicamente equivalente a $x \leftrightarrow y$.
    c) $x \vee y$ não é logicamente equivalente a $(x \wedge \neg y) \vee ((\neg x) \wedge y)$.
11. Uma *tautologia* é uma expressão booleana que avalia sempre como VERDADEIRO, independentemente dos valores de suas variáveis. Por exemplo, a expressão $x \vee \neg x$ é VERDADEIRA tanto quando x = VERDADEIRO como quando x = FALSO. $x \vee \neg x$ é, pois, uma tautologia.
    Explique como utilizar uma tabela verdade para provar que uma expressão booleana é uma tautologia e prove que as expressões seguintes são tautologias:
    a) $(x \vee y) \vee (x \vee \neg y)$.
    b) $(x \wedge (x \to y)) \to y$.
    c) $(\neg (\neg x)) \leftrightarrow x$.
    d) $x \to x$.
    e) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$.
    f) FALSO $\to x$.

12. Uma *contradição* é uma expressão booleana que avalia como FALSO, independentemente dos valores de suas variáveis. Por exemplo, $x \wedge \neg x$ é uma contradição.
Prove que as expressões seguintes são contradições:
a) $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge \neg x$.
b) $x \wedge (x \to y) \wedge (\neg y)$.
c) $(x \to y) \wedge ((\neg x) \to y) \wedge \neg y$.

13. Sejam A e B expressões booleanas, isto é, A e B são fórmulas que envolvem variáveis (x, y, z etc.) e operações booleanas ($\wedge$, $\vee$, $\neg$ etc.).
Prove: A é logicamente equivalente a B se e somente se $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia.

14. As expressões $x \to y$ podem ser reescritas apenas em termos das operações básicas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$; isto é, $x \to y = (\neg x) \vee y$.
Ache uma expressão logicamente equivalente a $x \leftrightarrow y$ que utilize apenas as operações $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ (e prove que ela é correta).

15. Eis outra operação booleana chamada *ou-exclusivo*. Denota-se pelo símbolo $\veebar$ e é definido pela tabela seguinte:

x	y	$x \veebar y$
VERDADEIRO	VERDADEIRO	FALSO
VERDADEIRO	FALSO	VERDADEIRO
FALSO	VERDADEIRO	VERDADEIRO
FALSO	FALSO	FALSO

a) Prove que $\veebar$ verifica as propriedades comutativa e associativa; isto é, prove as equivalências lógicas $x \veebar y = y \veebar x$ e $(x \veebar y) \veebar z = x \veebar (y \veebar z)$.
b) Prove que $x \veebar y$ é logicamente equivalente a $(x \wedge \neg y) \vee ((\neg x) \wedge y)$. (Assim, $\veebar$ pode expressar-se em termos das operações básicas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$.)
c) Prove que $x \veebar y$ é logicamente equivalente a $(x \vee y) \wedge (\neg (x \wedge y))$. (Trata-se de outra maneira de expressar $\veebar$ em termos de $\wedge$, $\vee$ e $\neg$.)
d) Explique por que a operação $\veebar$ é chamada *ou-exclusivo*.

Uma operação binária é uma operação que combina dois valores. A operação $\neg$ não é binária, porque atua apenas sobre um valor de cada vez; poderíamos chamá-la *unária*.

16. Discutimos várias operações booleanas binárias: $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, e (no problema anterior) $\veebar$. Quantas operações booleanas binárias diferentes pode haver? Em outras palavras, de quantas maneiras diferentes podemos completar a tabela seguinte?

x	y	$x * y$
VERDADEIRO	VERDADEIRO	?
VERDADEIRO	FALSO	?
FALSO	VERDADEIRO	?
FALSO	FALSO	?

EXERCÍCIOS

1. Escreva os seguintes conjuntos relacionando seus elementos entre chaves.
   a) $\{x \in \mathbb{N}\ x \leq 10 \text{ e } 3 \mid x\}$.
   b) $\{x \in \mathbb{Z}: x \text{ é primo e } 2 \mid x\}$.
   c) $\{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 4\}$.
   d) $\{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 5\}$.
   e) $2^{\emptyset}$.
   f) $\{x \in \mathbb{Z}: 10 \mid x \text{ e } x \mid 100\}$.
   g) $\{x{:}x \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } |x| \leq 1\}$.

2. Determine a cardinalidade dos seguintes conjuntos:
   a) $\{x \in \mathbb{Z}: |\ x \leq 10\ |\}$.
   b) $\{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x^2 \leq 2\}$.
   c) $\{x \in \mathbb{Z}: x \in \emptyset\}$.
   d) $\{x \in \mathbb{Z}: \emptyset \in x\}$.
   e) $\{x \in \mathbb{Z}: \emptyset \subseteq \{x\}\}$.
   f) $2^{2^{\{1,2,3\}}}$.
   g) $\{x \in 2^{\{1,2,3,4\}}: |x| = 1\}$.
   h) $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$.

3. Complete cada expressão a seguir escrevendo $\in$ ou $\subseteq$ em lugar de $\bigcirc$.
   a) $2 \bigcirc \{1, 2, 3\}$.
   b) $\{2\} \bigcirc \{1, 2, 3\}$.
   c) $\{2\} \bigcirc \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.
   d) $\emptyset \bigcirc \{1, 2, 3\}$.
   e) $\mathbb{N} \bigcirc \mathbb{Z}$.
   f) $\{2\} \bigcirc \mathbb{Z}$.
   g) $\{2\} \bigcirc 2^{\mathbb{Z}}$.

4. Sejam os conjuntos A e B. Prove que $A = B$ se e somente se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. (Isso nos dá uma estratégia ligeiramente diferente de prova para mostrar que dois conjuntos são iguais; compare com o Esquema de Prova 5.)

5. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z} : 4 \mid x\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\}$. Prove que $A \subseteq B$.

6. Generalize o problema anterior. Sejam a e b inteiros, e seja $A = \{x \in \mathbb{Z} : a \mid x\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} : b \mid x\}$.

   Ache e prove uma condição necessária e suficiente para que $A \subseteq B$. Em outras palavras, dada a notação desenvolvida, ache e prove um teorema da forma $A \subseteq B$ se e somente se *alguma condição envolvendo a e b*.

7. Sejam $C = \{x \in \mathbb{Z} : x \mid 12\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Z} : x \mid 36\}$. Prove que $C \subseteq D$.

8. Generalize o problema anterior. Sejam c e d e seja $C = \{x \in \mathbb{Z} : x \mid c\}$ e $D = \{x \in \mathbb{Z} : x \mid d\}$. Ache e prove uma condição necessária e suficiente para que $C \subseteq D$.

EXERCÍCIOS

1. Escreva as sentenças seguintes utilizando a notação de quantificador (isto é, use os símbolos $\exists$ e/ou $\forall$). *Nota*: Como não garantimos que essas afirmações sejam verdadeiras, não procure prová-las!
   a) Todo inteiro é primo.
   b) Há um inteiro que não é primo nem composto.
   c) Existe um inteiro cujo quadrado é 2.
   d) Todos os inteiros são divisíveis por 5.
   e) Algum inteiro é divisível por 7.
   f) O quadrado de qualquer inteiro é não negativo.
   g) Para todo inteiro x, existe um inteiro y tal que $xy = 1$.
   h) Existem dois inteiros x e y tais que $x \;/\; y = 10$.
   i) Existe um inteiro que, quando multiplicado por qualquer inteiro, sempre dá o resultado 0.
   j) Qualquer que seja o inteiro que escolhamos, existe sempre outro inteiro maior do que ele.
   k) Todos amam alguém alguma vez.

2. Escreva a negação de cada uma das sentenças do problema anterior. O leitor deve "mover" a negação dentro dos quantificadores. Dê sua resposta por extenso e simbolicamente. Por exemplo, a negação da parte (a) seria "Existe um inteiro que não é primo" (por extenso) e "$\exists x \in \mathbb{Z}$, x é não primo" (símbolos).

3. O que significa a sentença "Todo o mundo não foi convidado para minha reunião"? Presumivelmente, o sentido dessa sentença não é o que a pessoa tinha em vista. Reformule a sentença de modo a atribuir-lhe o sentido desejado.

4. *Verdadeiro ou Falso*: Assinale como verdadeira ou falsa cada uma das sentenças seguintes sobre inteiros. (Não é preciso provar suas afirmações.)
   a) $\forall x, \forall y, x + y = 0.$
   b) $\forall x, \exists y, x + y = 0.$
   c) $\exists x, \forall y, x + y = 0.$
   d) $\exists x, \exists y, x + y = 0.$
   e) $\forall x, \forall y, xy = 0.$
   f) $\forall x, \exists y, xy = 0.$
   g) $\exists x, \forall y, xy = 0.$
   h) $\exists x, \exists y, xy = 0.$

5. Para cada uma das sentenças seguintes, escreva a negação correspondente, colocando o símbolo $\neg$ o mais à direita possível. Reescreva, então, a negação por extenso. Por exemplo, para a sentença

$$\forall x \in \mathbb{Z}, x \text{ é impar}$$

a negação seria

$$\exists x \in \mathbb{Z}, \neg (x \text{ é impar})$$

que, por extenso, é "Há um inteiro que não é ímpar".

a) $\forall x \in \mathbb{Z}, x < 0$.
b) $\exists x \in \mathbb{Z}, x = x + 1$.
c) $\exists x \in \mathbb{N}, x > 10$.
d) $\forall x \in \mathbb{N}, x + x = 2x$.
e) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x > y$.
f) $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x = y$.
g) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}, x + y = 0$.

6. As duas afirmações seguintes significam a mesma coisa?

$$\forall x, \forall y, \text{ afirmações sobre } x \text{ e } y.$$

$$\forall y, \forall x, \text{ afirmações sobre } x \text{ e } y.$$

Explique.
E quanto às duas afirmações a seguir, significam elas a mesma coisa?

$$\exists x, \exists y, \text{ afirmações sobre } x \text{ e } y.$$

$$\exists y, \exists x, \text{ afirmações sobre } x \text{ e } y.$$

Explique.

EXERCÍCIOS

1. Para os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$, calcule:
   a) $A \cup B$.
   b) $A \cap B$.
   c) $A - B$.
   d) $B - A$.
   e) $A \Delta B$. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
   f) $A \times B$.
   g) $B \times A$.

2. Prove o Teorema 10.3.

3. Anteriormente, apresentamos um diagrama de Venn da propriedade distributiva $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Construa um diagrama de Venn da outra propriedade distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. A ilustração pelo diagrama de Venn constitui uma prova? (Trata-se de uma questão filosófica.)

5. Sejam A, B e C conjuntos, com $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Prove ou refute: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$.

6. Suponha A, B e C conjuntos disjuntos dois a dois. Prove ou refute: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$.

7. Para os conjuntos A e B, prove ou refute: $A \cup B = A \cap B$ se e somente se $A = B$.

8. Para os conjuntos A e B, prove ou refute: $|A \Delta B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

9. Para os conjuntos A e B, prove ou refute: $|A \Delta B| = |A - B| + |B - A|$.

10. Seja A um conjunto. Prove: $A - \emptyset = A$ e $\emptyset - A = \emptyset$.

11. Seja A um conjunto. Prove: $A \Delta A = \emptyset$ e $A \Delta \emptyset = A$.

12. Prove que $A \subseteq B$ se somente se $A - B = \emptyset$.

13. Sejam A e B conjuntos não-vazios. Prove que $A \times B = B \times A$ se e somente se $A = B$. Por que razão é necessária a condição de A e B serem não-vazios?

14. Formule e prove condições necessárias e suficientes para que $A - B = B - A$. Em outras palavras, estabeleça um teorema da forma "Sejam os conjuntos A e B. Temos $A - B = B - A$ se e somente se (uma condição sobre A e B)". Prove, então, seu resultado.

15. Dê uma demonstração padrão da Proposição 10.12 e ilustre-a com um diagrama de Venn.

16. Verdadeiro ou Falso. Para cada uma das afirmações a seguir, determine se é verdadeira ou falsa e prove sua afirmação. Isto é, para cada afirmação verdadeira, apresente uma prova, e para cada afirmação falsa dê um contra-exemplo (com explanação). No que segue, A, B e C denotam conjuntos.
a) $A - (B - C) = (A - B) - C$.
b) $(A - B) - C = (A - C) - B$.
c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.
d) Se $A = B - C$, então $B = A \cup C$.
e) Se $B = A \cup C$, então $A = B - C$.
f) $|A - B| = |A| - |B|$.
g) $(A - B) \cup B = A$.
h) $(A \cup B) - B = A$.

18. Desenhe um diagrama de Venn para quatro conjuntos. Note que o diagrama de Venn de três conjuntos que temos utilizado tem oito regiões (inclusive a região que circunda os quatro círculos), correspondentes aos oito modos possíveis de associação que um objeto pode ter. Um objeto pode estar ou não estar em A, estar ou não em B e estar ou não estar em C.
Explique por que essa situação origina oito possibilidades.
Seu diagrama de Venn deve mostrar quatro conjuntos, A, B, C e D. Quantas regiões ele terá?
No seu diagrama, sombreie o conjunto $A \Delta B \Delta C \Delta D$.
Nota: Seu diagrama não precisa usar círculos para demarcar os conjuntos. Na verdade, é impossível criar um diagrama de Venn para quatro conjuntos utilizando círculos! O leitor deve utilizar outras formas.

Uma versão ampliada da inclusão-exclusão.

19. Sejam os conjuntos A, B e C. Prove que
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

A conexão entre operações com conjuntos e a álgebra booleana.

20. Há uma relação íntima entre os conceitos da teoria dos conjuntos e os conceitos da álgebra booleana. Os símbolos $\wedge$ e $\vee$ são versões de $\cap$ e de $\cup$, respectivamente. Isso é mais do que uma coincidência. Consideremos:
$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$
$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$
Estabeleça relações análogas entre as noções $\subseteq$ e Δ da teoria dos conjuntos e noções da álgebra booleana.

21. Prove que a diferença simétrica é uma operação comutativa; ou seja, para conjuntos A e B, verifica-se $A \Delta B = B \Delta A$.

22. Prove que a diferença simétrica é uma operação associativa; isto é, para quaisquer conjuntos A, B e C, temos $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

23. Ilustre $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ com um diagrama de Venn.

24. Prove a Proposição 10.15.

25. Sejam os conjuntos A, B e C. Prove:
a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
c) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
d) $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$.

EXERCÍCIOS

1. Para cada uma das seguintes relações definidas no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine se a relação é reflexiva, anti-reflexiva, anti-simétrica e/ou transitiva.

   a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.
   b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$.
   c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$.
   d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$.
   e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Digamos que dois inteiros estão próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2 (isto é, os números estão a uma distância de no máximo 2). Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Representemos por R esta relação *estar próximo de.*
   a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados. Sua resposta deve apresentar-se como segue:
   $$R = \{(x, y) : \cdots\}$$
   Prove ou refute:
   b) R é reflexiva.
   c) R é anti-reflexiva.
   d) R é simétrica.
   e) R é anti-simétrica.
   f) R é transitiva.

3. Determine R^{-1} para cada uma das seguintes relações:
   a) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$.
   b) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
   c) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, x - y = 1\}$.
   d) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \mid y\}$.
   e) $R = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}, xy > 0\}$.

4. Seja R uma relação sobre um conjunto A. Prove ou refute: Se R é anti-simétrica, então R é anti-reflexiva.

5. Seja R a relação *tem o mesmo tamanho que* definida sobre todos os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$ (isto é, $A\ R\ B$ se e somente se $|A| = |B|$). Quais das cinco propriedades (reflexiva, anti-reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva) R possui? Prove suas respostas.

6. Considere a relação $\subseteq$ em $2^{\mathbb{Z}}$ (isto é, a relação *é um subconjunto de* definida em todos os conjuntos de inteiros). Que propriedades da Definição 11.6 $\subseteq$ possui? Prove suas respostas.

7. Que é $\leq^{-1}$?

8. A propriedade *anti-reflexiva* não é a mesma que não-reflexiva. Para ilustrar, faça o seguinte:
   a) Dê um exemplo de relação em um conjunto que não seja nem reflexiva nem anti-reflexiva.
   b) Dê um exemplo de relação em um conjunto que seja ao mesmo tempo reflexiva e anti-reflexiva.
   A parte (a) não é muito difícil, mas, para (b), o leitor deverá criar um exemplo assaz estranho.

9. Uma forma interessante de dizer que R é simétrica é $R = R^{-1}$. Prove isto (isto é, prove que uma relação R é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$).

10. Prove: Uma relação R em um conjunto A é anti-simétrica se e somente se
$$R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) : a \in A\}.$$