Disciplina: ACH 2012 - Cálculo II – 2º semestre de 2012

Profa. Dra. Claudia Inés Garcia

Monitor PAE: Thiago Carvalho Sousa

LISTA DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

1. Use (a) a Regra do Trapézio, (b) a Regra do Ponto Médio e (c) a Regra de Simpson para aproximar a integral dada, com o valor especificado de n. Arredonde seu resultado para seis casas decimais.

a) $\int_0^{0.8} \frac{dx}{x^2-1}$, $n=4$

b) $\int_0^1 \sqrt{z}\, e^{-z} dz$, $n=10$

c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{1+x} dx$, $n=10$

d) $\int_0^4 \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$, $n=8$

e) $\int_0^{\frac{1}{2}} sen\left(e^{\frac{t}{2}}\right) dt$, $n=8$

2. Aplicando a Regra de Simpson, calcular a área entre a curva que passa pelos pontos abaixo, o eixo x e as retas x=2 e x=18.

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18
y	0,5	0,9	1,1	1,3	1,7	2,1	1,5	1,1	0,6

3. (a) Para $n=10$, calcule a aproximação da integral $\int_0^{\pi} sen(x) dx$ utilizando a Regra dos Trapézios, a Regra de Simpson, e a Regra do Ponto Médio. Calcule também a estimativa do erro para cada uma destas fórmulas.

b) Resolva a integral usando o Teorema Fundamental do Cálculo, e calcule o erro real associado a cada uma dessas fórmulas. Compare os resultados obtidos com as estimativas dos erros calculados em (a).

c) Que tamanho de n devemos escolher para que as aproximações pela Fórmula dos Trapézios, Fórmula de Simpson e Fórmula do Ponto Médio para a integral do item (a) para que tenham uma precisão de 0,00001?

4. Quão grande deve ser n para garantir que a aproximação pela Regra de Simpson de $\int_0^1 e^{x^2} dx$ tenha uma precisão de 0,00001?

5. Ache as aproximações pela Regra do Valor Médio, pela Regra dos Trapézios e pela Regra de Simpson para as integrais abaixo, considerando $n=6$ e depois $n=12$. Calcule as estimativas dos erros para cada um destes casos. (Arredonde seu resultado para 6 casas decimais. Dica: use um computador, calculadora ou sistema de computação algébrica). Quais observações você pode fazer? Qual método parece ser mais preciso? Em particular, o que acontece quando n é dobrado?

a) $\int_0^2 x^4 dx$

b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

LEMBRETES:

- **Regra do Trapézio:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Onde $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ e $x_i=a+i\cdot\Delta x$

Estimativa do Erro : $|E_T| \leq \frac{K \cdot (b-a)^3}{12 n^2}$, onde $K = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

- **Regra do Ponto Médio (Soma de Riemann)**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x \cdot \left[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + \cdots + f(\bar{x}_n) \right]$$

Onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ = ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$

Estimativa do Erro : $|E_M| \leq \frac{K \cdot (b-a)^3}{24 n^2}$, onde $K = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

- **Regra de Simpson:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4\mathrm{f}(x_1) + 2\mathrm{f}(x_2) + 4\mathrm{f}(x_3) + \cdots + 2\mathrm{f}(x_{n-2}) + 4\mathrm{f}(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

Onde n é par e $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e $x_i = a + i \cdot \Delta x$

Estimativa do Erro : $|E_S| \leq \frac{K \cdot (b-a)^5}{180 n^4}$, onde $K = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$

- **Erro Real de um Método**

$$E = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

Onde M_n é o método de Integração Numérica escolhido para aproximar o valor da integral: Regra do Trapézio, Regra do Valor Médio ou Regra de Simpson.

- **Dica:** use um computador, calculadora ou sistema de computação algébrica para resolver os exercícios propostos. São trabalhosos para serem feitos à mão.

Referências Bibliográficas

STEWART, J. **Cálculo – Volume 1.** São Paulo: Cengage Learning, 2010.

HUMES, A.F.P.C.; MELO, I.S.H.; YOSHIDA, L.K.; MARTINS, W.T. **Noções Básicas de Cálculo Numérico.** São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982.