Capítulo 8

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

8.1 Introdução

Na definição de integral definida, consideramos a função integranda contínua num intervalo fechado e limitado. Agora, estenderemos esta definição para os seguintes casos:

Funções definidas em intervalos do tipo $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ ou $(-\infty, +\infty)$, ou seja para todo $x \geq a$ ou $x \leq b$ ou para todo $x \in \mathbb{R}$, respectivamente.

A função integranda é descontínua em um ponto c tal que $c \in [a, b]$.

As integrais destas funções são chamadas **integrais impróprias**. As integrais impróprias são de grande utilidade em diversos ramos da Matemática como por exemplo, na solução de equações diferenciais ordinárias via transformadas de Laplace e no estudo das probabilidades, em Estatística.

8.2 Integrais Definidas em Intervalos Ilimitados

Antes de enunciar as definições estudemos o seguinte problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq 1$ e o eixo dos x.

Primeiramente note que a região R é **ilimitada** e não é claro o significado de "área"de uma tal região.

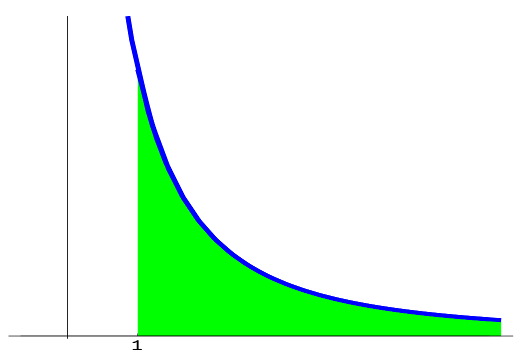

Figura 8.1: Gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq 1$.

Seja R_b a região determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$ e $1 \leq x \leq b$, acima do eixo dos x.

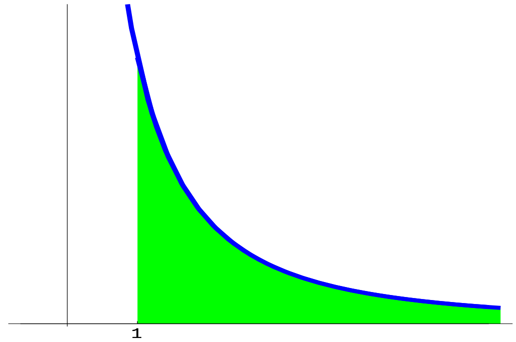

Figura 8.2: Gráfico de $y = \dfrac{1}{x^2}$, $1 \leq x \leq b$.

A área de R_b é:

$$A(R_b) = \int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

É intuitivo que para valores de b, muito grandes, a área da região **limitada** R_b é uma boa aproximação da área da região **ilimitada** R. Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b),$$

quando o limite existe. Neste caso:

$$A(R) = \lim_{b \to +\infty} A(R_b) = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} (1 - \frac{1}{b}) = 1\, u.a.$$

É comum denotar $A(R)$ por:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Esta integral é um exemplo de **integral imprópria** com limite de integração infinito. Motivados pelo raciocínio anterior temos as seguintes definições:

Definição 8.1.

1. *Se f é uma função integrável em $[a, +\infty)$, então:*

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx}$$

2. *Se f é uma função integrável em $(-\infty, b]$, então:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx}$$

3. *Se f é uma função integrável em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, então:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)\, dx + \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\, dx}$$

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário são ditas divergentes.

Exemplo 8.1.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

[1] $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctg(x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} arctg(b) = \frac{\pi}{2}.$$

[2] $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b}+1) = 1.$$

[3] $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^{-x}\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} (-e^{-x})\Big|_a^0 + 1 = +\infty.$$

[4] $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. Seja $u = x^2+1$; logo $du = 2\,x\,dx$:

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2\,u} = -\frac{1}{2\,(x^2+1)}.$$

Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = 0.$$

[5] Calcule a área da região, no primeiro quadrante, determinada pelo gráfico de $y = 2^{-x}$, o eixo dos x e à direita do eixo dos y.

$$A(R) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2^x} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{2^x} = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{2^{-x}}{ln(2)}\right]\Big|_0^b = \frac{1}{ln(2)}\ u.a.$$

[6] Seja $p \in \mathbb{R}$. Calcule $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\,(b^{1-p}-1),\ \ p \neq 1$$

a) Se $p > 1$ temos: $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} b^{1-p} = 0$; logo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}.$$

b) Se $p<1$ temos: $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-p}=\infty$; logo,

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty.$$

c) Se $p=1$, temos: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty} ln(b)=\infty$. Em geral:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\infty & \text{se} \quad p\le 1\\ \dfrac{1}{p-1} & \text{se} \quad p>1.\end{cases}$$

Portanto, a integral converge para $p>1$ e diverge para $p\le 1$.

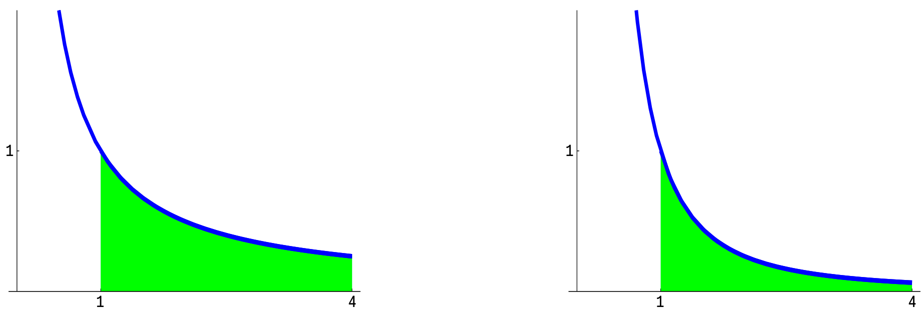

Figura 8.3: Gráficos de $y=\frac{1}{x}$ e $y=\frac{1}{x^2}$, para $x>0$, são,respectivamente.

[7] Calcule a área da região limitada por $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ e o eixo dos x.

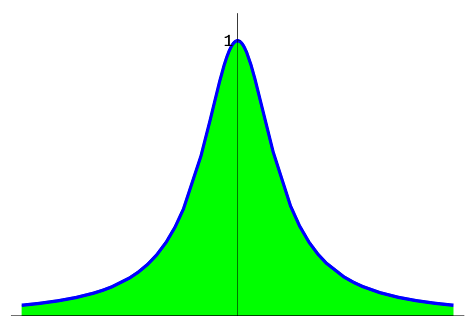

Figura 8.4: Gráfico de $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

$$\begin{aligned}A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}&=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}\\&=\lim_{b\to-\infty}\int_b^0\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+1}.\\&=\lim_{b\to-\infty}(-arctg(b))+\lim_{b\to+\infty} arctg(b)\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\, u.a.\end{aligned}$$

[8] Calcule o volume do sólido de revolução, obtido ao girar ao redor do eixo doxs x, o gráfico de $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

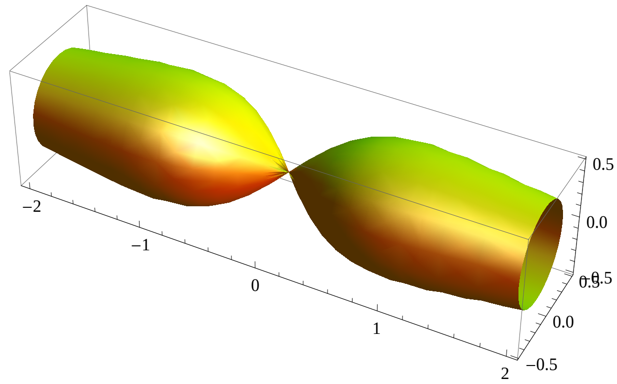

Figura 8.5: Gráfico do volume do exemplo [8].

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{2}\,u.v. \end{aligned}$$

Aplicação

É comum, em aplicações, definir funções via integrais. A seguinte função é amplamente utilizada em diferentes Ciências Aplicadas.

8.2.1 Função Gama

Se $x > 0$, a função Gama é definida e denotada por:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt.$$

Utilizando integração por partes, temos:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Se $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)\,\Gamma(n-1) = n\,(n-1)\,\ldots 2\times 1\times \Gamma(1).$$

Como:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1.$$

Logo, se $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Se $\nu \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+\nu+1) &= (n+\nu)\,\Gamma(n+\nu) \\ &= (n+\nu)\,(n+\nu-1)\,\Gamma(n+\nu-1) \\ &\vdots \\ &= (n+\nu)\,(n+\nu-1)\,(n+\nu-2)\ldots\ldots(\nu+1)\,\Gamma(\nu+1). \end{aligned}$$

Por outro lado, para $x > 0$ temos:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1).$$

Definamos primeiramente a função Γ, para $-1 < x < 0$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1).$$

Por exemplo:

$$\Gamma(-0.2) = -\frac{1}{0.2}\,\Gamma(-0.2+1) = -\frac{1}{0.2}\,\Gamma(0.8).$$

Logo, podemos definir a função Γ, para $-2 < x < -1$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1).$$

Por exemplo:

$$\Gamma(-1.2) = -\frac{1}{1.2}\,\Gamma(-1.2+1) = -\frac{1}{1.2}\,\Gamma(-0.2) = \frac{1}{0.2}\,\frac{1}{1.2}\,\Gamma(0.8).$$

Continuando este processo, podemos definir a função Γ, para $x < 0$ por:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1).$$

Muitas vezes não é possível calcular o valor exato de uma integral imprópria, mas, podemos indagar se uma integral imprópria converge ou diverge.

Proposição 8.1. *Sejam f e g funções integráveis em $[a, +\infty)$ tais que $f(x) \geq g(x) > 0$ para todo $x \geq a$.*

1. *Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge.*

2. *Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.*

A prova, segue diretamente das definições. Seja $f(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$. Para mostrar a convergência da integral de f, é preciso que f seja menor que uma função cuja integral converge. Para mostrar a divergência da integral de f, é preciso que f seja maior que uma função cuja integral diverge.

Exemplo 8.2.

[1] Analise a convergência da integral: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sen(x)+2}{\sqrt{x}} dx$.

Considere a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-1+2}{\sqrt{x}} \leq \frac{sen(x)+2}{\sqrt{x}}.$$

Por outro lado: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx$ diverge; logo, pela proposição, parte 2, temos que a integral dada diverge.

[2] Analise a convergência da integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

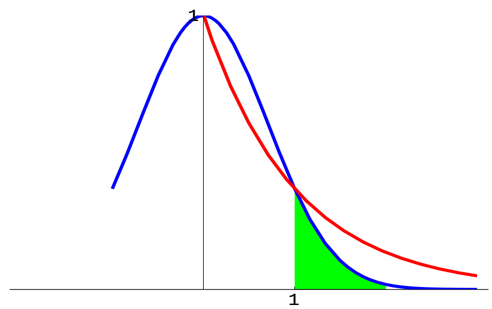

Figura 8.6: Gráfico de e^{-x^2} em azul e de e^{-x} em vermelho, respectivamente.

Claramente $\dfrac{1}{e^{x^2}} \leq \dfrac{1}{e^x}$, para todo $x \geq 1$; então, como

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b\longrightarrow+\infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = \frac{1}{e},$$

temos que a integral dada converge.

8.3 Probabilidades

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ positiva e integrável é chamada densidade de probabilidade se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

Assim denotamos e definimos a probabilidade de um número x estar comprendido entre a e b ($a < b$); por:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Analogamente definimos as outras possibilidades:

$$P(a \leq x) = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad \text{e} \quad P(x \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx$$

Também podemos definir o valor esperado ou esperança do número x, como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

E a variância do número x é definida por:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big[x - E(x)\big]^2\, f(x)\, dx$$

A variável independente x é chamada variável aleatória contínua **(v.a.c)**.

Proposição 8.2.

$$V(x) = E(x^2) - \big[E(x)\big]^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big[x - E(x)\big]^2 f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big[x^2 - 2\,xE(x) + \big[E(x)\big]^2\big]\, f(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)\, dx - 2\, E(x) \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx + \big[E(x)\big]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \\ &= E(x^2) - 2\big[E(x)\big]^2 + \big[E(x)\big]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \\ &= E(x^2) - \big[E(x)\big]^2. \end{aligned}$$

Utilizamos o fato de que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

Exemplos

8.3.1 Distribuição Uniforme

Definimos a função densidade de probabilidade da distribuição uniforme sobre o intervalo $[a, b]$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{outro caso} \end{cases}$$

Observe que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1.$$

O valor esperado do número x:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{a+b}{2}.$$

A variância:

$$V(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[x - \frac{a+b}{2}\right]^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemplo 8.3.

[1] Suponha que a v.a.c. tem distribuição uniforme com esperança igual a 4 e a variância igual $\frac{4}{3}$. Determine $P(x \leq 4)$ e $P(3 \leq x \leq 4)$.

Sabemos que $E(x) = \dfrac{a+b}{2} = 4$ e $V(x) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{4}{3}$, logo:

$$\begin{cases} a+b &= 8 \\ b-a &= 4. \end{cases}$$

Donde $a = 2$ e $b = 6$. Então:

$$P(x \leq 4) = \int_2^4 \frac{dx}{4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 50\%$$

$$P(3 \leq x \leq 4) = \int_3^4 \frac{dx}{4} = \frac{1}{4} \Longrightarrow 25\%.$$

[2] Um atacadista vende entre 100 e 200 toneladas de grãos, com distribuição uniforme de probabilidade. Sabe-se que o ponto de equilíbrio para esta operação corresponde a uma venda de 130 toneladas. Determine a esperança, a variância e a probabilidade de que o comerciante tenha um prejuízo em um determinado dia.

Note que $a = 100$ e $b = 200$, então:

$$E(x) = \frac{100+200}{2} = 150 \quad \text{e} \quad V(x) = \frac{(200-100)^2}{12} = 833.3.$$

Como o equilíbrio (não se perde nem se ganha) acontece quando vende 130 toneladas, devemos calcular:

$$P(x < 130) = \int_{100}^{130} \frac{dx}{100} = \frac{30}{100} = 0.3.$$

Isto é, tem uma probabilidade de 30%.

8.3.2 Distribuição Exponencial

Definimos a função densidade de probabilidade da distribuição exponencial de parâmetro α, por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, e^{-\alpha x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0, \end{cases}$$

$\alpha > 0$. Observe que $f(x) \geq 0$, para todo x.

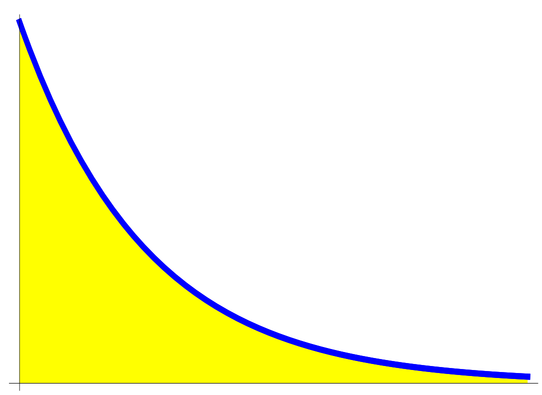

Figura 8.7: Gráfico da distribuição exponencial.

Note que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \alpha \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-\alpha x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} (1 - e^{-\alpha b}) = 1.$$

Por outro lado, a probabilidade de que um número $x \in (a, b)$ é:

$$P(a \le x \le b) = \alpha \int_a^b e^{-\alpha x}\,dx = e^{-a\,\alpha} - e^{-b\,\alpha}$$

O valor esperado do número x:

$$E(x) = \alpha \int_0^{+\infty} x\,e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

A variância:

$$V(x) = \alpha \int_0^{+\infty} \left[x - \frac{1}{\alpha}\right] e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Esta função de densidade de distribuição é frequentemente utilizada para determinar a vida útil de equipamentos eletrônicos e do tempo entre ocorrências de eventos sucessivos, como por exemplo, o tempo entre chegadas de clientes a uma agência bancária.

Exemplo 8.4.

[1] Para determinado tipo de baterias de telefone celular, a função de densidade de probabilidade dara que x horas seja o tempo de vida útil de uma bateria escolhida aleatoriamente é:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/20}}{20} & \text{se} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Determine a probabilidade de que uma bateria escolhida aleatóriamente tenha um tempo de vida útil entre 10 a 15 horas e de uma que funcione pelo menos 50 horas. Determine a esperança e a variância.

Devemos calcular $P(10 \le x \le 15)$ e $P(x \ge 50)$, então:

$$P(10 \le x \le 15) = \int_{10}^{15} \frac{e^{-x/20}}{20}\,dx = 0.134 \cong 13.4\%$$

$$P(x \ge 50) = \int_{50}^{+\infty} \frac{e^{-x/20}}{20}\,dx = 0.082 \cong 8.2\%.$$

Determinemos a esperança e a variância:

$$E(x) = 20 \quad \text{e} \quad V(x) = 400.$$

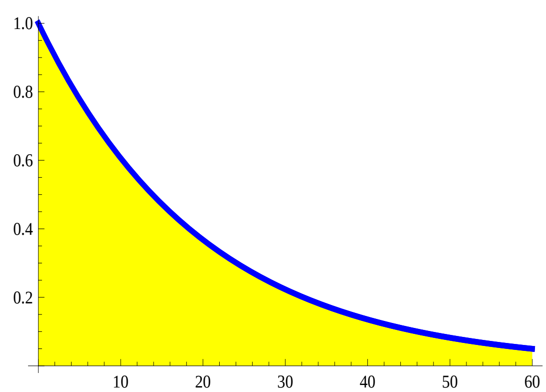

Figura 8.8: Gráfico da distribuição exponencial do exemplo [1].

[2] O tempo de espera entre o pedido de atendimento num banco é uma v.a.c. com distribuição exponencial com média igual a 10 minutos. Determine a probabilidade do tempo de espera superior a 10 minutos. Ache a esperança e a variância.

Note que:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1\, e^{-0.1x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Logo:

$$P(10 \leq x) = \int_{10}^{+\infty} 0.1\, e^{-0.1x} = e^{-1} \cong 0.368 = 36.8\%,$$

e:

$$E(x) = 10\, min. \quad \text{e} \quad V(x) = 100\, min.$$

8.4 Integrais de Funções Descontínuas

Problema: Calcular a área da região R determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \leq 9$ e o eixo dos x.

Notamos que a região R é **ilimitada** pois a função f nem é definida no ponto $x = 0$.

Seja R_ε a região determinada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e $\varepsilon \leq x \leq 9$, $\varepsilon > 0$ pequeno.

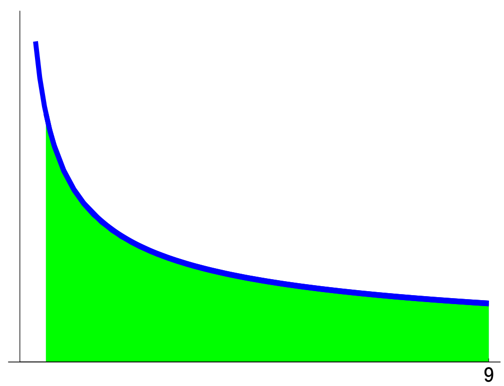

Figura 8.9: A região R_ε.

A área de R_ε é:

$$A(R_\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{9} = \big(6 - 2\sqrt{\varepsilon}\big)\, u.a.$$

É intuitivo que para valores de ε muito pequenos, a área da região **limitada** R_ε é uma boa aproximação da área da região **ilimitada** R. Isto nos induz a escrever:

$$A(R) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} A(R_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \big(6 - 2\sqrt{\varepsilon}\big) = 6\, u.a.$$

$\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ é um exemplo de integral **imprópria** com integrando ilimitado. Motivados pelo raciocínio anterior, temos as seguintes definições:

Definição 8.2.

1. *Se f é uma função integrável em $(a,b]$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to a^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,dx}$$

2. *Se f é uma função integrável em $[a,b)$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to b^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,dx}$$

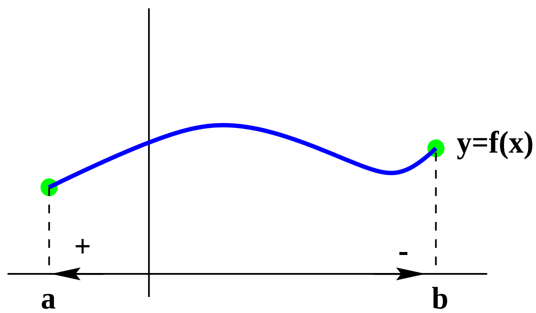

Figura 8.10:

3. *Se f é uma função integrável em $[a,b]$ exceto em c tal que $a<c<b$, então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to c^-}\int_a^\varepsilon f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to c^+}\int_\varepsilon^b f(x)\,dx}$$

Se nas definições anteriores os limites existirem, as integrais impróprias são ditas convergentes; caso contrário, são ditas divergentes.

Exemplo 8.5.

Calcule as seguintes integrais impróprias:

[1] $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}}\,dx.$

Fazendo $u = sen(x)$ temos: $\displaystyle\int \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{sen(x)}$. Logo,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{\sqrt{sen(x)}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{sen(x)}\bigg|_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2-2\sqrt{sen(\varepsilon)}) = 2.$$

[2] $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 2^-}\int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 2^-} arcsen(\frac{x}{2})\bigg|_0^\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 2^-}(arcsen(\frac{\varepsilon}{2})) = \frac{\pi}{2}.$$

[3] $\displaystyle\int_{-4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

Observe que a função integranda não é definida em $-2 \in [-4, 1]$.

$$\begin{aligned}
\int_{-4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} &= \lim_{\varepsilon \to -2^-} \int_{-4}^{\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} + \lim_{\varepsilon \to -2^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} \\
&= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to -2^-} (x+2)^{\frac{2}{3}} \Big|_{-4}^{\varepsilon} + \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to -2^+} (x+2)^{\frac{2}{3}} \Big|_{\varepsilon}^{1} \\
&= \frac{3}{2} \big[\lim_{\varepsilon \to -2^-} (-\sqrt[3]{4} + \varepsilon^{\frac{2}{3}}) + \lim_{\varepsilon_2 \to -2^+} (\sqrt[3]{9} - \varepsilon^{\frac{2}{3}}) \big] \\
&= \frac{3}{2} (\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}).
\end{aligned}$$

[4] Calcule o comprimento da astróide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$, $a > 0$.

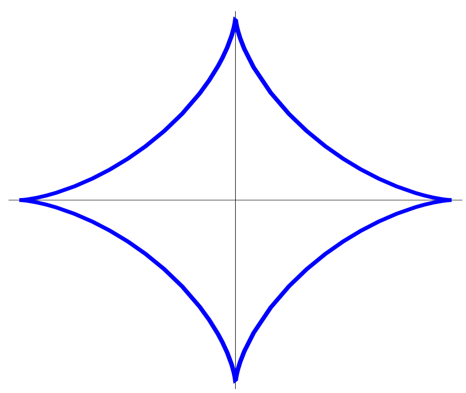

Figura 8.11: A astróide.

A curva não é diferenciável nos pontos de interseção com os eixos coordenados; pela simetria, calcularemos o comprimento da curva no primeiro quadrante e multiplicaremos o resultado por 4. Derivando implicitamente a equação da astróide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ em relação a x:

$$y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}; \quad \text{então,} \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Na última igualdade usamos o fato de que $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$; logo,

$$L = 4\sqrt[3]{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 4\sqrt[3]{a} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 4\sqrt[3]{a} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \big[\frac{3\,(a^{\frac{2}{3}} - \varepsilon^{\frac{2}{3}})}{2}\big] = 6\,a\,u.c.$$

[5] Calcule a área limitada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$, e pelas retas $x = 2$ e $x = 5$. $a > 0$.

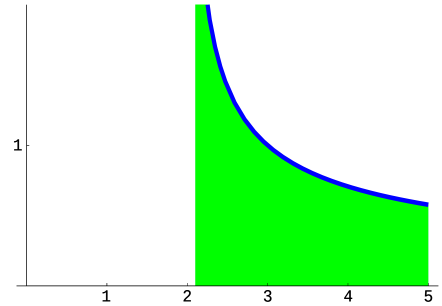

Figura 8.12: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

$$A = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{\varepsilon \to 2^+} \int_\varepsilon^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = 2 \lim_{\varepsilon \to 2^+} \sqrt{x-2}\Big|_\varepsilon^5 = 2\sqrt{3}\, u.a.$$

Numa integral imprópria com limite superior infinito e cuja função integranda não é definida no limite inferior, procedemos assim: Se f é integrável em $(a, +\infty)$ então

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to a^+} \int_\varepsilon^c f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx}$$

onde $a < c$; analogamente nos outros casos.

Exemplo 8.6.

[1] $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} &= \lim_{\varepsilon \to 2^+} \int_\varepsilon^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} + \lim_{b \to +\infty} \int_3^b \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 2^+} arcsec(\frac{x}{2})\Big|_\varepsilon^3 + \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} arcsec(\frac{x}{2})\Big|_3^b \\ &= \frac{1}{2}\Big[\lim_{\varepsilon \to 2^+} arccos(\frac{2}{x})\Big|_\varepsilon^3 + \lim_{b \to +\infty} arccos(\frac{2}{x})\Big|_3^b \Big] \\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

[2] Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ e o eixo dos x.

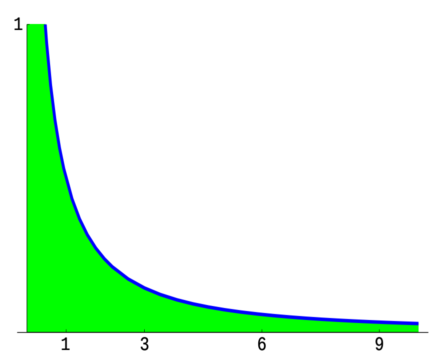

Figura 8.13: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$.

Como $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = 2\,arctg(\sqrt{x})$, então:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} + \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\,arctg(\sqrt{x})\Big|_\varepsilon^1 + \lim_{b\to+\infty} 2\,arctg(\sqrt{x})\Big|_1^b \\
&= 2\left[\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\pi - 4\,arctg(\sqrt{\varepsilon})}{4} + \lim_{b\to+\infty} \frac{4\,arctg(\sqrt{b}) - \pi}{4}\right] \\
&= \pi\; u.a.
\end{aligned}$$

8.5 Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais impróprias, caso sejam convergentes:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

(b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,e^{-x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,ln(x)}$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{cosh(x)}{1+senh(x)}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,5^{-x^2}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,cosh(x)\,dx$

(j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{ln(x)}{x}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

(l) $\displaystyle\int_0^{+\infty} sen(t\,\pi)\,e^{-t}\,dt$

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2\,x-3)^2}$

(n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

(o) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2\,x+5}$

(p) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$

(q) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,sen(x)\,dx$

(r) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$

(s) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

(t) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\,ln^3(x)}$

(u) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,sen(x)\,dx$

(v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1}$

(w) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

(x) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,ln^2(x)}$

2. Calcule a área das regiões determinadas por:

(a) $y = (e^x + e^{-x})^{-1}$ $\quad(b)$ $y = x^{-2}$, $y = e^{-2x}$ e $x \geq 1$

(c) $y = \frac{1}{x^4+1}$ e o eixo dos x.

3. Calcule as seguintes integrais impróprias, caso sejam convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{cos(x^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

(d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x\,\sqrt[7]{(ln(x))^2}}$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$

(g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1-cos(x)}$

(h) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2\,x-x^2}}$

(i) $\displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[5]{(5-x)^2}}$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2\,\sqrt{4-x^2}}$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(l) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

(m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{cos(x)}$

(n) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4\,x-x^2-3}}$

(o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3\,x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

(p) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\,\sqrt{x^2-1}}$

(q) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\,ln^2(x)}$

(r) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x\,\sqrt{ln(x)}}$

(s) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$

(t) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2}\,sen(\frac{1}{x})\,dx$

(u) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)}$

(v) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\,\sqrt[3]{ln(x)}}$

4. Determine o valor de s tal que as seguintes integrais impróprias sejam convergentes:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,sen(t)\,dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,e^{t}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-st}\,dt$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,senh(t)\,dt$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}\,cosh(t)\,dt$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos(x)}{x^s}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{(sen(x))^s}$

5. Seja $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$, $x>0$; esta função é chamada função gama. Verifique:

(a) $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$, $x>0$.

(b) Se $n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$

6. Seja $f(x) = \begin{cases} a\,x^2 & \text{se} \quad |x| \le 3 \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 3 \end{cases}$. Determine a de modo que f seja função de densidade de probabilidade.

7. Determine k para que $f(t) = e^{k\,|t|}$ seja função de densidade de probabilidade.

8. Verifique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,x^{2\,n+1}\,dx = \frac{n!}{2}$; $n \in \mathbb{N}$.

9. Se f é função de densidade de probabilidade, defina a probabilidade de um número x ser maior que a, ser menor que a.

10. Numa fábrica de circuitos impressos, a vida útil desses circuitos tem uma distribuição descrita pela densidade de probabilidade $f(x) = 0.002\,e^{-0.002x}$ se $x \geq 0$, onde x é medido em horas.

    (a) Qual é a probabilidade dos circuitos funcionarem em menos de 600 horas?

    (b) Qual é a probabilidade dos circuitos continuarem funcionando após 600 horas?