Escola de Artes, Ciências e Humanidades

2ª Lista de exercícios de
Matrizes, Vetores e Geometria Analítica
Sistemas de Informação
EACH – USP

1ª Questão. Sejam $u = (4,1,2,3)$, $v = (0,3,8,-2)$ e $w = (3,1,2,2)$ e calcule:

a) $u \cdot (2v - 3w)$

b) $||u + v||$

c) $||u|| + ||v||$

d) $||u|| + ||-2u||$

e) $\frac{w}{||w||}$

2ª Questão. Mostre que:

a) $u \cdot v = \frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2$.

b) Se $u, v \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais, então $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

3ª Questão. Para quais valores de μ o conjunto de vetores $\{(3,1,0), (\mu^2+2,2,0)\}$ é linearmente dependente?

4ª Questão. Encontre os valores de μ para os quais o sistema homogêneo $(A - \mu I)X = 0$ tem solução não trivial e para estes valores de μ, encontre uma base para o espaço solução do sistema.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5ª Questão. Suponha que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores do $\mathbb{R}^n$. Verifique se $\{w_1, w_2, w_3\}$ é linearmente dependente ou independente nos seguintes casos:

a) $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$, $w_3 = v_2 + v_3$

b) $w_1 = v_1$, $w_2 = v_1 + v_2$, $w_3 = v_1 + v_2 + v_3$

6ª Questão. Encontre um conjunto de geradores para o espaço solução do sistema homogêneo $AX = 0$ em que

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

7ª Questão. Determine uma base para a reta interseção dos planos $x - 7y + 5z = 0$ e $3x - y + z = 0$.

8ª Questão. Dados $v_1 = (2,1,3)$ e $v_2 = (2,6,4)$:

a) Os vetores v_1 e v_2 geram $\mathbb{R}^3$? Justifique.

b) Quais as condições sobre um terceiro vetor v_3 do $\mathbb{R}^3$ para que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$?

c) Encontre um vetor v_3 para que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

9ª Questão. Dados $v_1 = (-3,5,2,1)$ e $v_2 = (1,-2,-1,2)$:

a) Os vetores v_1 e v_2 geram $\mathbb{R}^4$? Justifique.

Escola de Artes, Ciências e Humanidades

b) Encontre vetores v_3 e v_4 em $\mathbb{R}^4$ para os quais $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^4$.

10ª Questão. Seja $\mathcal{M} = \{(3a+4b-4c, 2a-4b-6c, -2a-4b+2c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine um conjunto de geradores para $\mathcal{M}$.

b) Determine uma base para $\mathcal{M}$.

11ª Questão. Para que valores de a e b o conjunto $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(a, \frac{1}{\sqrt{2}}, b\right)\right\}$ é ortonormal?

12ª Questão. Encontre uma base ortonormal para o conjunto solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases}.$$

13ª Questão. Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para $W = [(1,1,-1,0),(0,2,0,1),(-1,0,0,1)]$.

14ª Questão. Encontre uma base ortonormal para o conjunto solução do sistema linear homogêneo $x-y-2z+w=0$.

15ª Questão. Encontre as coordenadas do ponto P com relação ao sistema de coordenadas S:

a. $S = \{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$ e $P = (1,3)$

b. $S = \{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$ e $P = (2,-1,2)$

16ª Questão.

i. Mostre que a área de um triângulo ABC formado pelos pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e C= (x_3, y_3) pode ser calculada por

$$\text{área } ABC = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii. Use o resultado anterior para encontrar a área do triângulo de vértices $(3,3), (4,0), (-2,-1)$.

17ª Questão. Mostre que $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$ em que $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Algumas respostas:

3) $\mu = \pm 2$ 4) a) $\mu = 1, \{(1,-2,1)\}$ b) $\mu = 1, \{(0,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$ 6) a) $\{(-1,-1,1,0)\}$ b) $\{(1,0,0,1),(0,-2,1,0)\}$ 7) $\{(-1,7,10)\}$ 8) $c)\ (0,0,1)$ 9) $b)\ (0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$ 10) a) $\mathcal{M} = [(3,2,-2),(4,-4,-4),(0,-6,2)]$ b) $\{(1,0,-2),\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\}$ 11) $a = \frac{1}{2}, b = -1/2$ 14) $\left\{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, 0, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right), \left(\frac{1}{42}\sqrt{42}, \frac{1}{7}\sqrt{42}, -\frac{1}{21}\sqrt{42}, \frac{1}{42}\sqrt{42}\right)\right\}$ 15) a) $[P]_s = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ b) $[P]_s = (3\sqrt{2}/2, 2, \sqrt{2}/2)$