Tipos Especiais de Listas

Filas de Prioridade & Heaps

Sumário

- TAD Fila de Prioridade
- Heaps
- Implementação em Arranjo

TAD Fila de Prioridade

- Armazena Itens
- Item: par (chave, informação)

- Operações principais
  - remove(F): remove e retorna o item com maior (menor) prioridade da fila F
  - insere(F, x): insere um item x = (k,i) com chave k

- Operações auxiliares
  - proximo(F): retorna o item com maior (menor) chave da fila F, sem removê-lo
  - conta(F), vazia(F), cheia(F)

TAD Fila de Prioridade

- Diferentes Realizações (implementações)
  - Estáticas
    - Lista estática (arranjo) ordenada
    - Lista estática (arranjo) não ordenada
    - Heap em arranjo
  - Dinâmicas
    - Lista dinâmica ordenada
    - Lista dinâmica não ordenada
    - Heap dinâmico
- Cada realização possui vantagens e desvantagens

TAD Fila de Prioridade

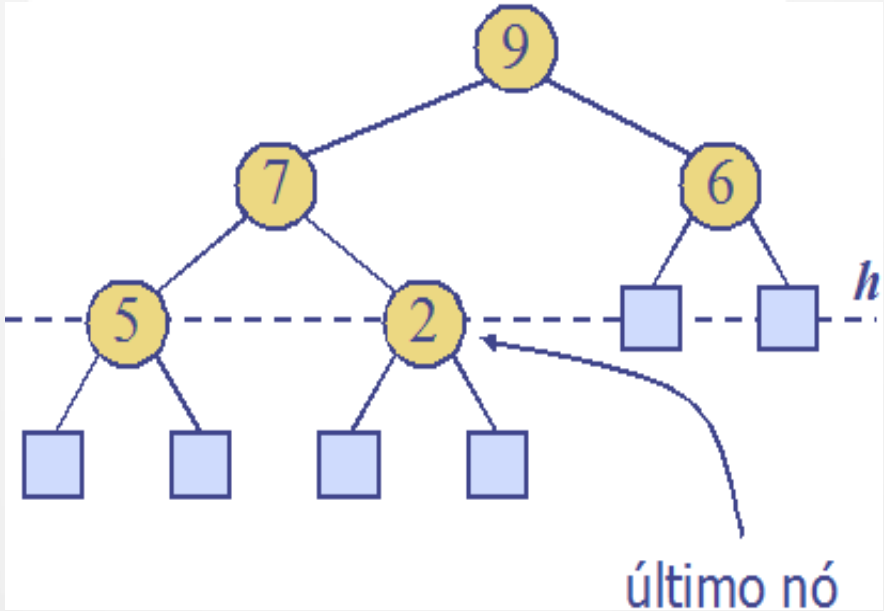
- A Uma das escolhas diretas seria usar uma fila ordenada
  - inserção é O(n)
  - remoção é O(1)
  - próximo é O(1)
- Outra seria usar uma fila não-ordenada
  - inserção é O(1)
  - remoção é O(n)
  - próximo é O(n)

- Portanto uma abordagem mais rápida precisa ser pensada quando grandes conjuntos de dados são considerados

Heaps

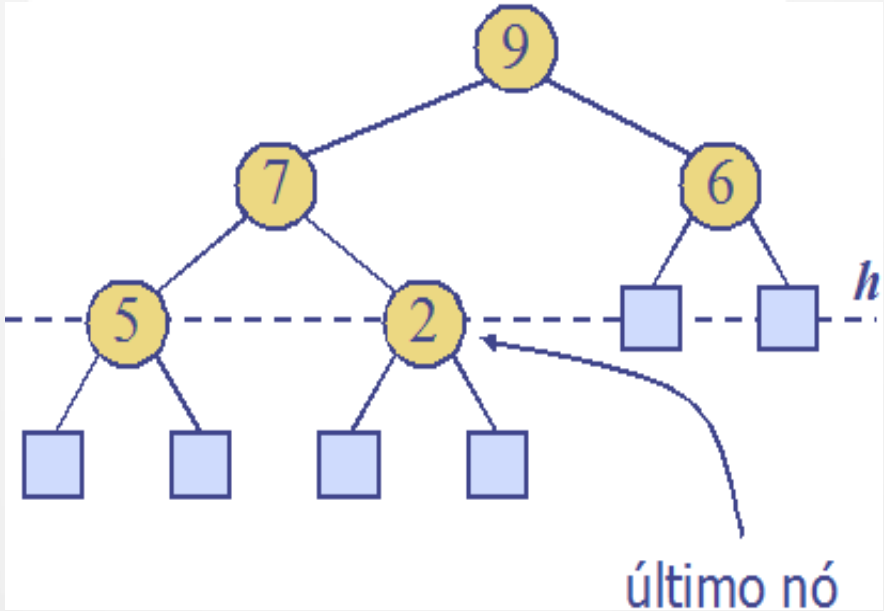
Heaps

- Um heap é uma árvore binária que satisfaz as propriedades
  - Ordem: para cada nó v, exceto o nó raiz, tem-se que
    - chave(v) ≤ chave(pai(v)) - heap máximo
    - chave(v) ≥ chave(pai(v)) - heap mínimo



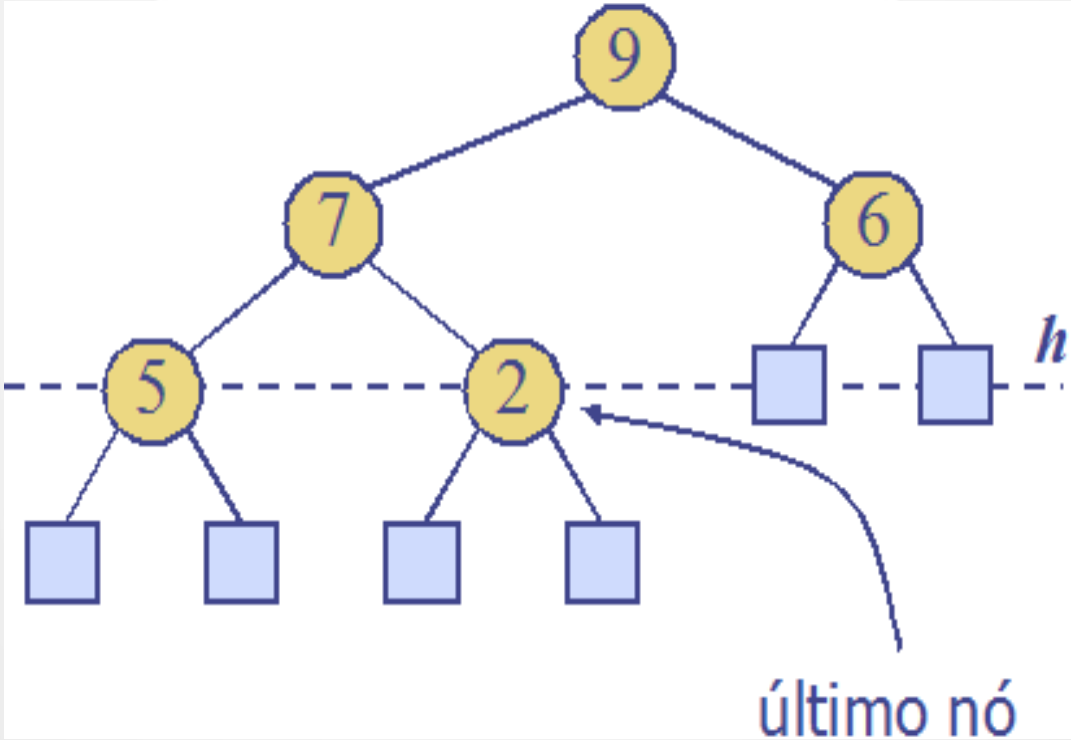
Heaps

- Um heap é uma árvore binária que satisfaz as propriedades
  - Completude: é completa, i.e., se h é a altura
    - Todo nó folha está no nível h ou h - 1
    - O nível h - 1 está totalmente preenchido
    - As folhas do nível h estão todas mais a esquerda



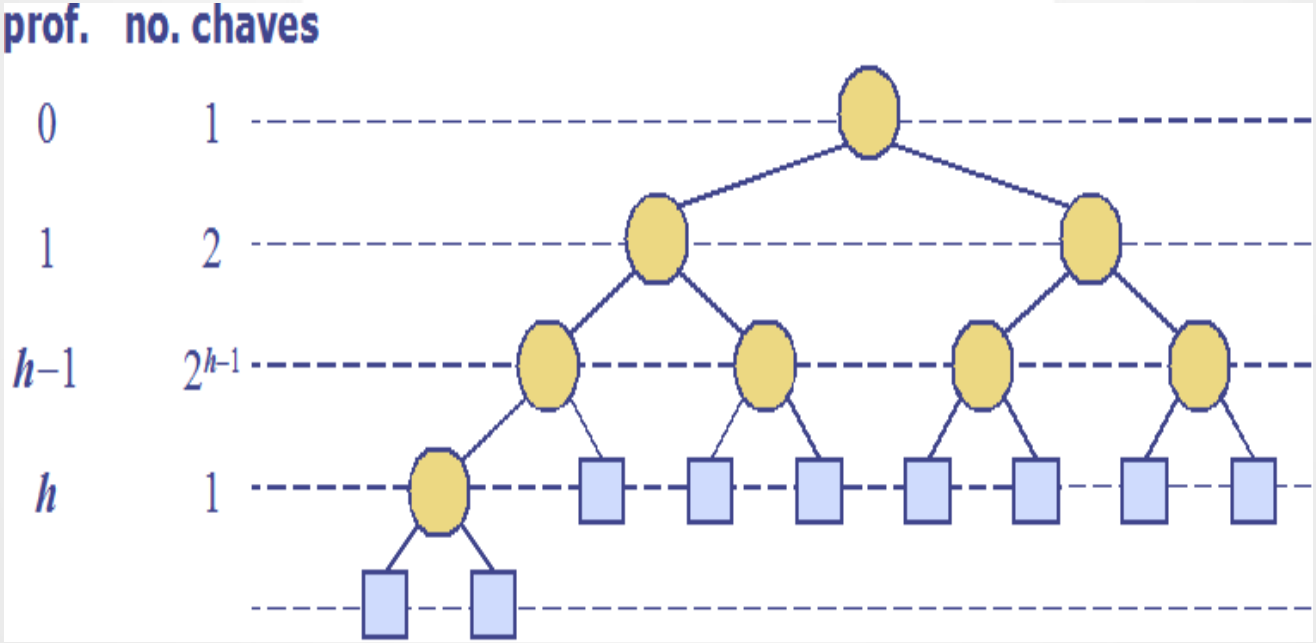
Heaps

- Convenciona-se aqui
  - Último nó: nó interno mais à direita de profundidade h



Altura de um Heap

- Teorema
  - Um heap armazenando n nós possui altura h de ordem O(log n).



Altura de um Heap

- Prova

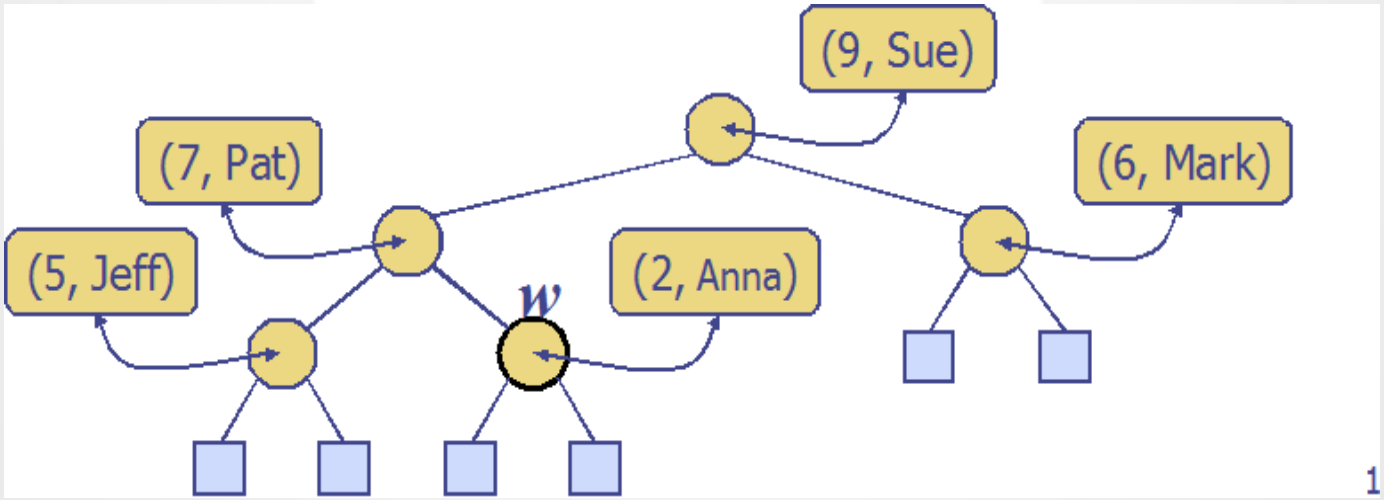
  - Dado que existem 2^i chaves na profundidade $i = 0, \ldots, h-1$ e ao menos 1 chave na profundidade h, tem-se $n \geq 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{h-1} + 1$

  - Isso é uma Progressão Geométrica (PG) com razão $q = 2$, dado que a soma de um PG pode ser calculada por $S_k = \frac{a^k \times q - a_1}{q-1}$, temos $n \geq (2^{h-1} \times 2 - 1) + 1 = 2^h$

  - Logo, $n \geq 2^h$, i.e., $h \leq log_2\ n \Rightarrow h$ é $O(log\ n)$

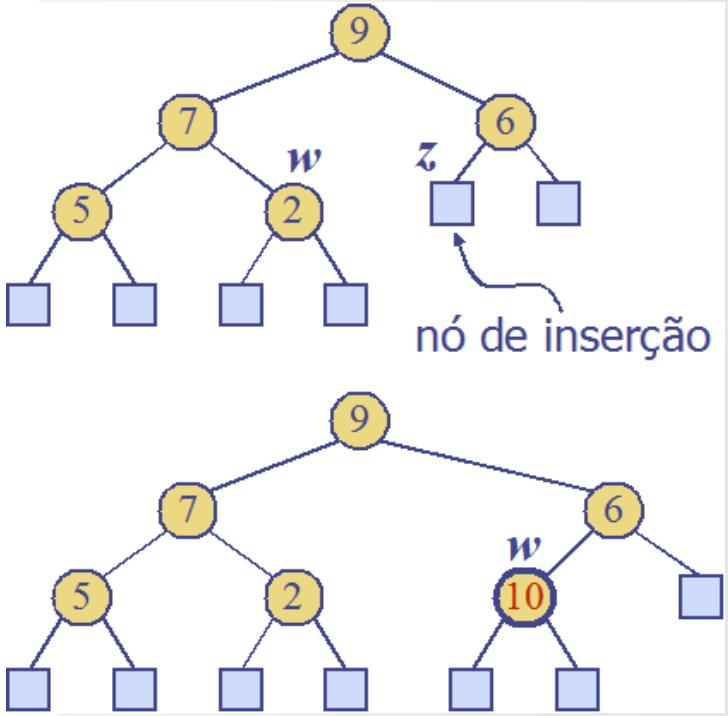
Filas de Prioridade com Heaps

- Armazena-se um Item (chave, informação) em cada nó
- Mantém-se o controle sobre a localização do último nó (w)
- Remove-se sempre o Item armazenado na raiz, devido à propriedade de ordem do heap
  - Heap mínimo: menor chave na raiz do heap
  - Heap máximo: maior chave na raiz do heap



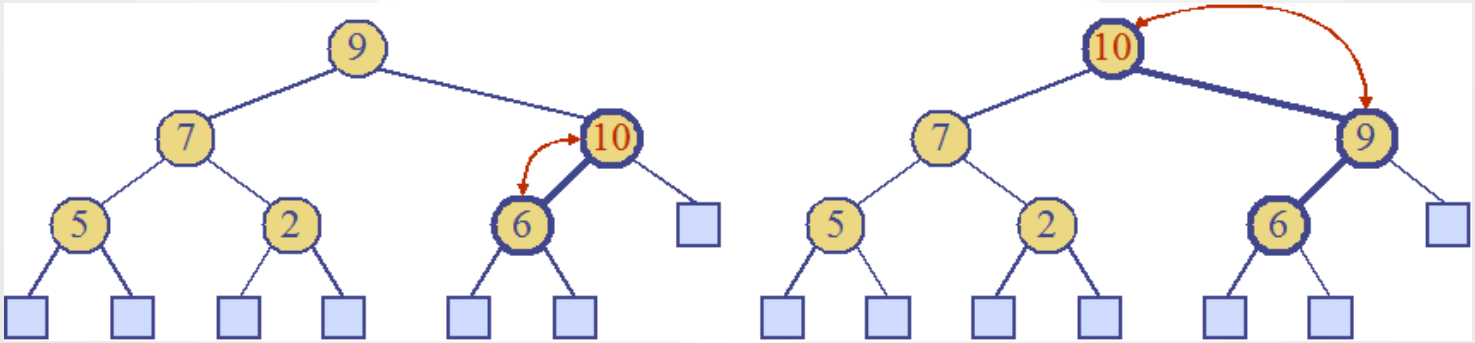
Inserção

- Método insere do TAD fila de prioridade corresponde à inserção de um Item no heap
- O algoritmo consiste de 3 passos
  - 1 Encontrar e criar nó de inserção z (novo último nó depois de w)
  - 2 Armazenar o Item com chave k em z
  - 3 Restaurar ordem do heap (discutido a seguir)



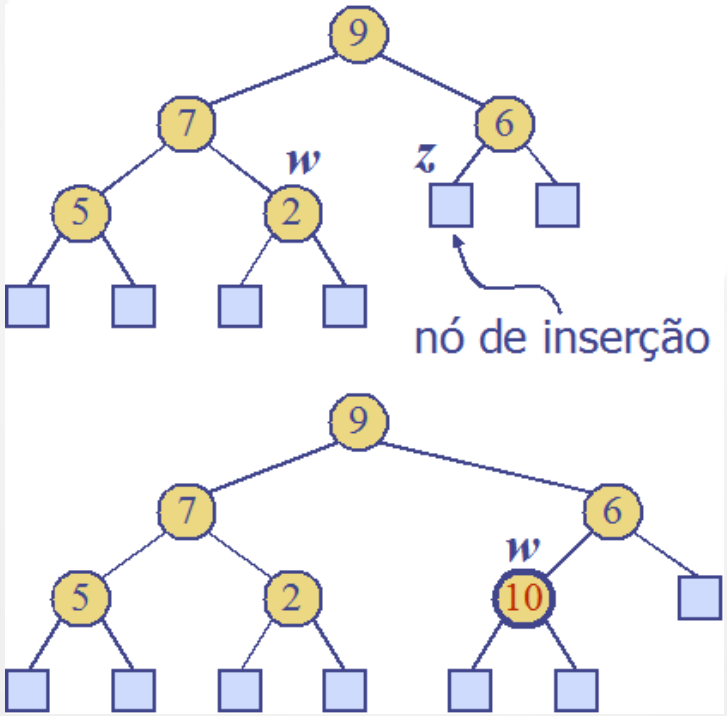
Restauração da Ordem (bubbling-up)

- Após a inserção de um novo Item, a propriedade de ordem do heap pode ser violada
- A ordem do heap é restaurada trocando os itens caminho acima a partir do nó de inserção
  - Termina quando o Item inserido alcança a raiz ou um nó cujo pai possui uma chave maior (ou menor)



Inserção

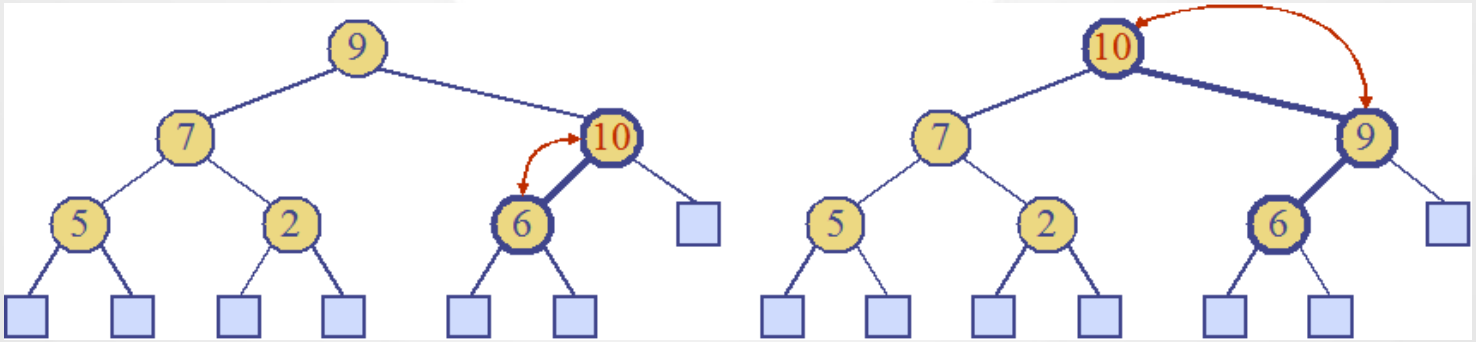
```
Algoritmo Inserir(F,x)
    InserirNoFim(F) //insere na última posição
    bubbling_up(F) //restaura ordem do heap
}
```



Restauração da Ordem (bubbling-up)

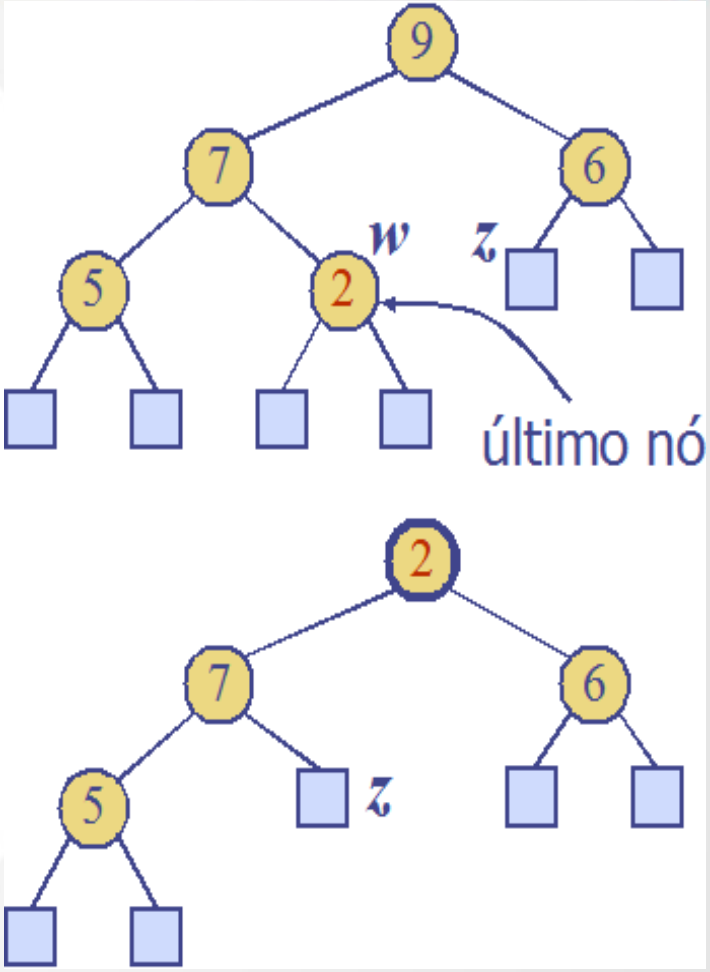
- Para um heap máximo, temos

```
Algoritmo bubbling_up(F)
   w = F.ultimo
   while(!isRoot(F,w))&&(key(F,w) >key(F,parent(F,w)))
   {
    swap(F,w,parent(F,w))
    w = parent(F,w) //sobe
   }
}
```



Remoção

- Método remove do TAD fila de prioridade corresponde à remoção do Item da raiz
- O algoritmo de remoção consiste de 3 passos
  - 1 Armazenar o conteúdo do nó raiz do heap (para retorno)
  - 2 Copiar o conteúdo do w no nó raiz e remover o nó w
  - 3 Restaurar ordem do heap (discutido a seguir)

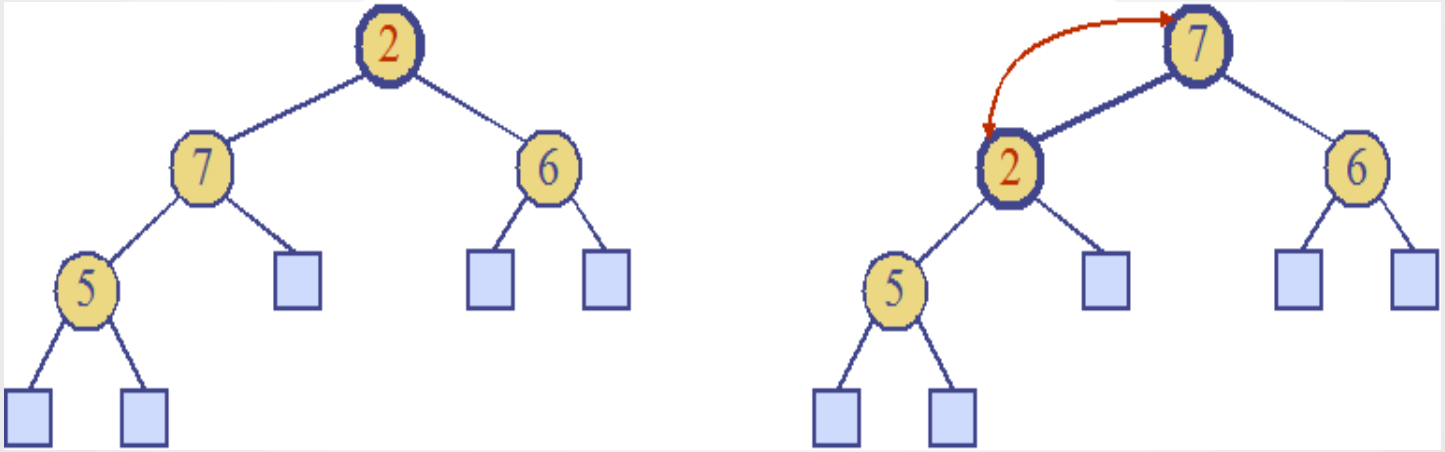


Remoção

- Utilizar o último nó para substituição da raiz na remoção possui várias vantagens, entre elas
  - Completude garantida (passo 2)
  - Implementação em tempo constante através de arranjo (discutida posteriormente)

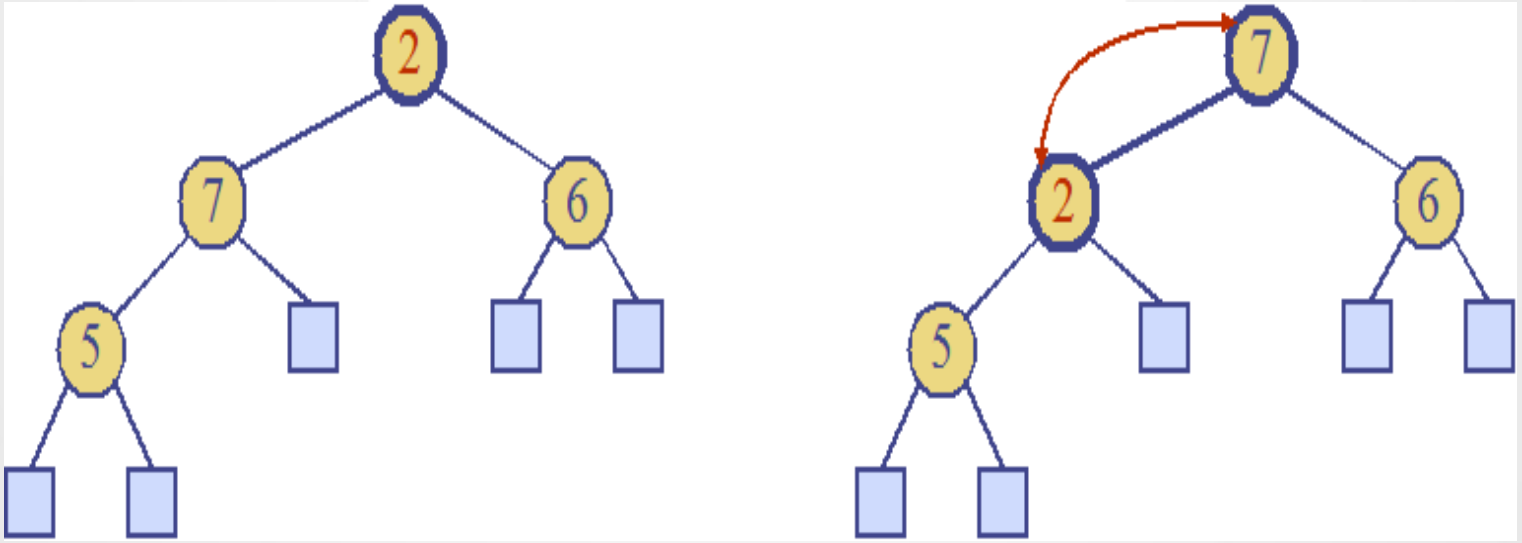
Restauração da Ordem (bubbling-down)

- Após a remoção, a propriedade de ordem do heap pode ser violada
- A ordem do heap é restaurada trocando os itens caminho abaixo a partir da raiz



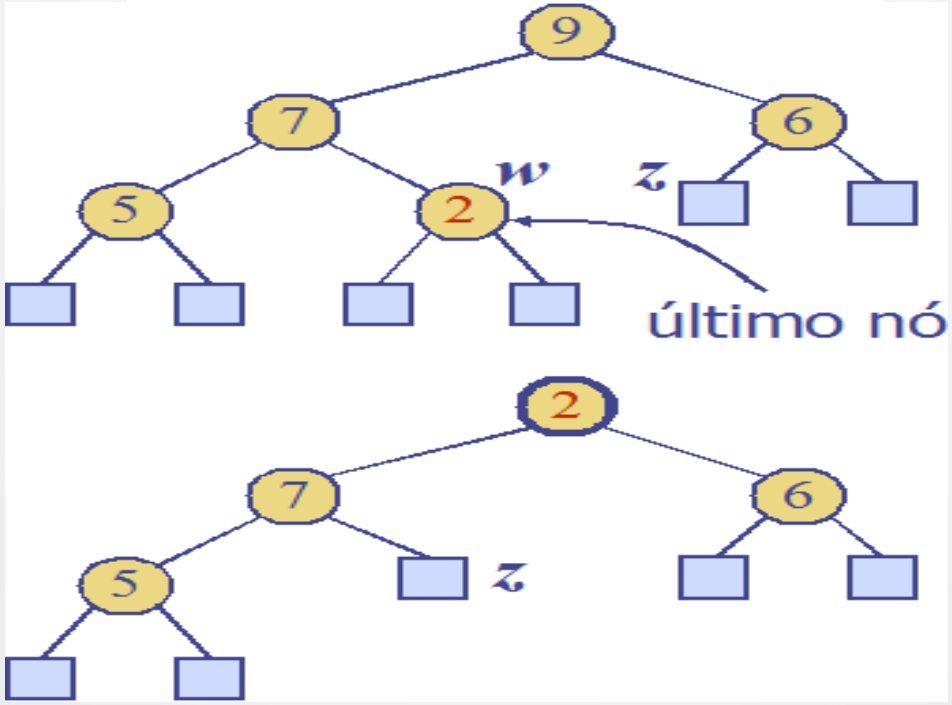
Restauração da Ordem (bubbling-down)

- O algoritmo bubbling-down
  - Termina quando o Item movido para a raiz alcança um nó que não possui filho com chave maior que sua
  - Quando ambos os filhos possuem chave maior que o Item inserido, a troca é feita com o filho de maior chave



Restauração da Ordem (bubbling-down)

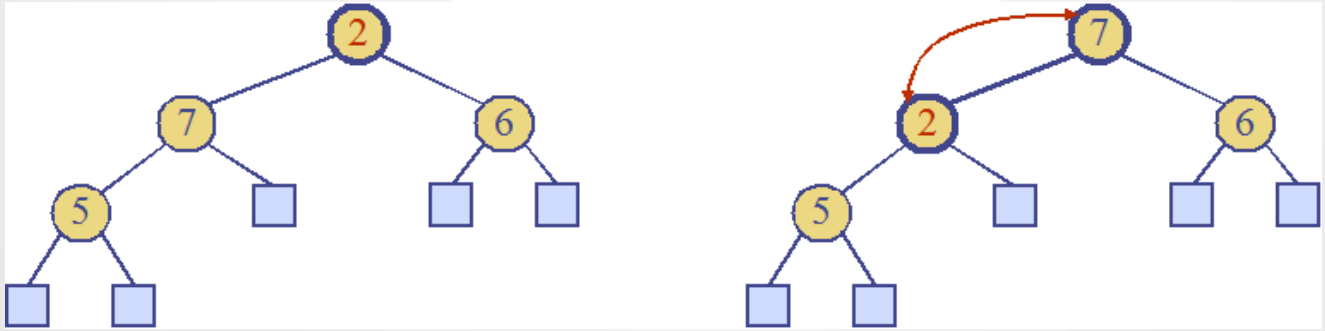
```
Algoritmo Remover(F,x)
   x = inicio(F) //retorna o primeiro nó
   inicio(F) = fim(F) //copia fim no início
   bubbling_down(F) //restaura ordem do heap
```



Restauração da Ordem (bubbling-up)

- Para um heap máximo, temos

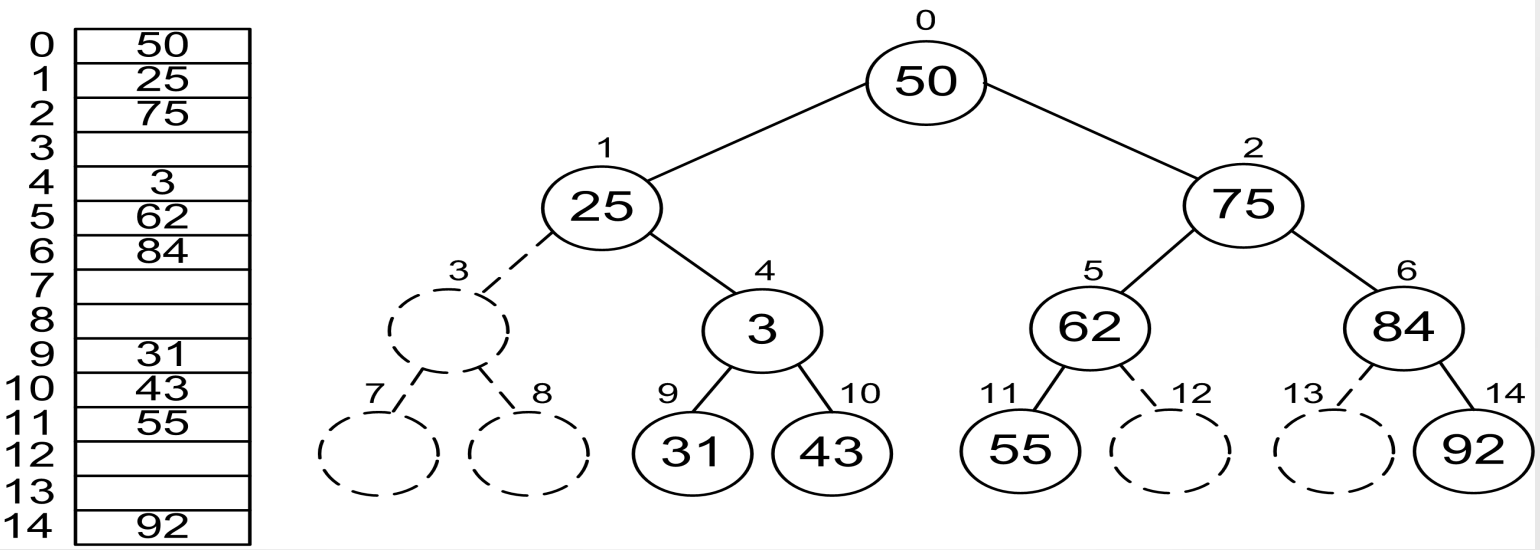
```
Algoritmo bubbling_up(F)
    w = inicio(F)
    while(tem_filho(w)) {
        m = maior_filho(w)
        if(chave(w) >= chave(m)) break
        swap(F,w,m)
        w = m //desce
   }
}
```



Implementação em Arranjos

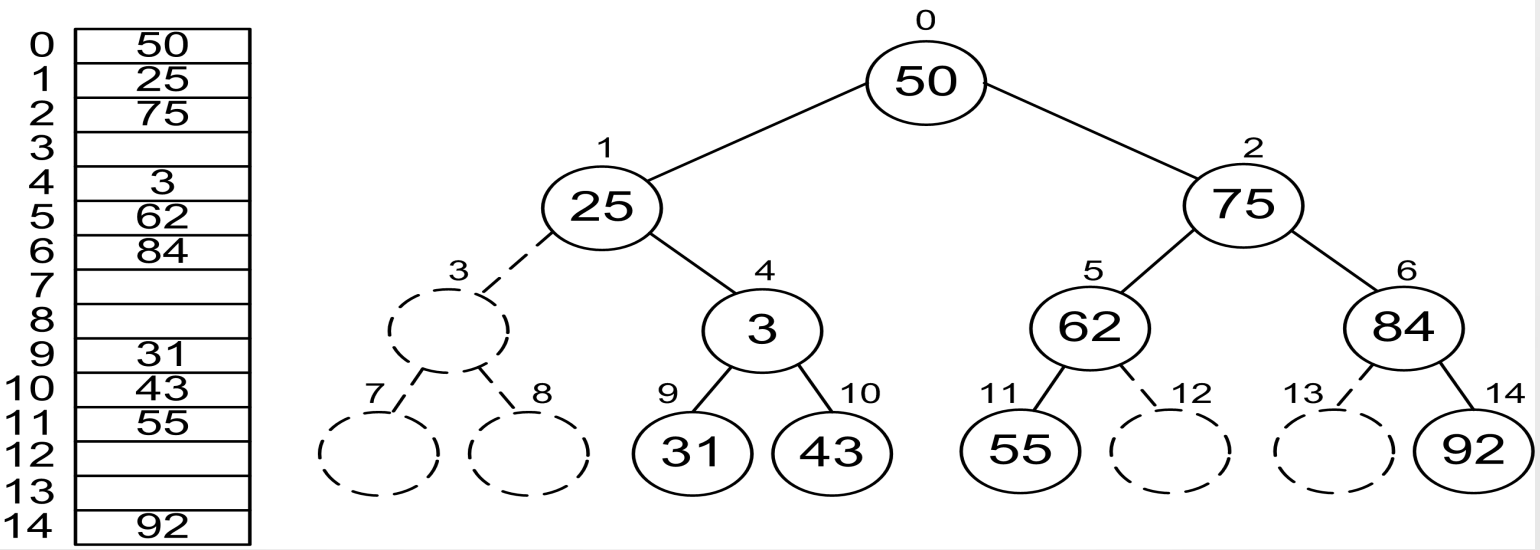
Restauração da Ordem (bubbling-up)

- Vetores podem ser empregados para representar árvores binárias
- Caminha-pela árvore nível por nível, da esquerda para direita armazenando os nós no vetor
  - O primeiro nó fica na posição 0 do vetor, seu filho a esquerda fica na posição 1, e assim por diante.



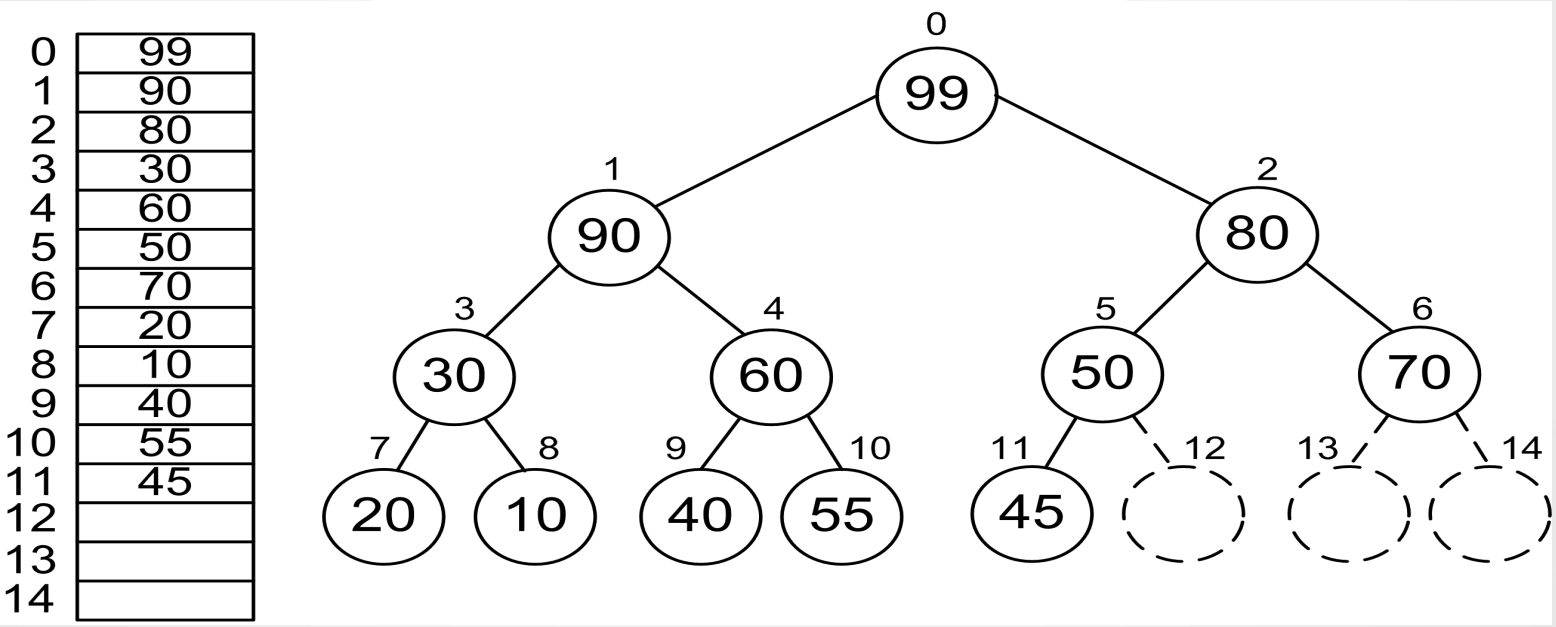
Implementação em Arranjo

- Nessa definição, dado o indice de um item, podemos encontrar seu
  - filho a esquerda : 2 ∗indice + 1
  - filho a direita : 2 ∗indice + 2
  - pai: (indice − 1)/2



Implementação em Arranjo

- Como o Heap é uma árvore completa, o vetor não vai ter “buracos” faltando itens
- Os itens que faltam sempre ficam no fim do vetor



Implementação em Arranjo - Estrutura

- Para um heap máximo, temos

```
#define TAM 100

typedef struct {
      int valor;
      int chave;
} ITEM;
```

```
typedef struct {
    ITEM itens[TAM];
    int fim;
} FILA_PRIORIDADE;
```

Implementação em Arranjo - Métodos Básicos

```
int vazia(FILA_PRIORIDADE *fila) {
    return (fila->fim == -1);
}
```

```
void criar(FILA_PRIORIDADE *fila) {
     fila->fim = -1;
}
```

```
int cheia(FILA_PRIORIDADE *fila) {
    return (fila->fim == TAM-1);
}
```

Implementação em Arranjo - Inserçao

```
int inserir(FILA_PRIORIDADE *fila, ITEM *item) {
    if (!cheia(fila)) {
    fila->fim++; //move o fim da fila
    fila->itens[fila->fim] = *item; //adiciona novo item
    bubbling_up(fila); //restaura ordem do heap
    return 1;
    }
  return 0;
}
```

Implementação em Arranjo - Inserçao

```
void bubbling_up(FILA_PRIORIDADE *fila) {
    int indice = fila->fim;
    int pai = (indice-1)/2;
    while (indice > 0 && //não é a raiz
    fila->itens[indice].chave > fila->itens[pai].chave) {
        //troco os nós de posição
        ITEM tmp = fila->itens[indice];
        fila->itens[indice] = fila->itens[pai];
        fila->itens[pai] = tmp;
        indice = pai; //move índice para cima
        pai = (pai-1)/2; //pai recebe o próprio pai
    }
}
```

Implementação em Arranjo - Remoçao

```
int remover(FILA_PRIORIDADE *fila, ITEM *item) {
     if (!vazia(fila)) {
       *item = fila->itens[0]; //retorna o primeiro item
        //copia o último para a primeira posição
        fila->itens[0] = fila->itens[fila->fim];
        fila->fim--; //decrementa o tamanho da lista
        bubbling_down(fila); //restaura ordem do heap
        return 1;
     }
   return 0;
}
```

Implementação em Arranjo - Remoçao

```
void bubbling_down(FILA_PRIORIDADE *fila) {
  int indice = 0;
  while (indice < fila->fim / 2) {
     //enquanto nó tiver ao menos um filho
     int filhoesq = 2 * indice + 1;
     int filhodir = 2 * indice + 2;
     int maiorfilho; //encontra maior filho
     if (filhodir <= fila->fim &&
     fila->itens[filhoesq].chave <
     fila->itens[filhodir].chave)
     {
    maiorfilho = filhodir;
     }
```

```
void bubbling_down(FILA_PRIORIDADE *fila) {
   int indice = 0;
   while (indice < fila->fim / 2) {
     //enquanto nó tiver ao menos um filho
     int filhoesq = 2 * indice + 1;
     int filhodir = 2 * indice + 2;
     int maiorfilho; //encontra maior filho
     if (filhodir <= fila->fim && //tem filho a direita
     fila->itens[filhoesq].chave < fila->itens[filhodir].chave) {
           maiorfilho = filhodir;
     }else {
     maiorfilho = filhoesq;
     }
    //pare caso o item seja igual ou maior ao maior filho
   if (fila->itens[indice].chave >= fila->itens[maiorfilho].chave)
    {
      break;
    }
    //troco o maior filho com o pai
    ITEM tmp = fila->itens[indice];
    fila->itens[indice] = fila->itens[maiorfilho];
    fila->itens[maiorfilho] = tmp;
    indice = maiorfilho; //desce
   }
}
```

Comparação de Filas de Prioridade

- Nessa definição, dado o indice de um item, podemos encontrar seu
  - filho a esquerda : 2 ∗indice + 1
  - filho a direita : 2 ∗indice + 2
  - pai: (indice − 1)/2