Cilindros e Superfícies Quádricas

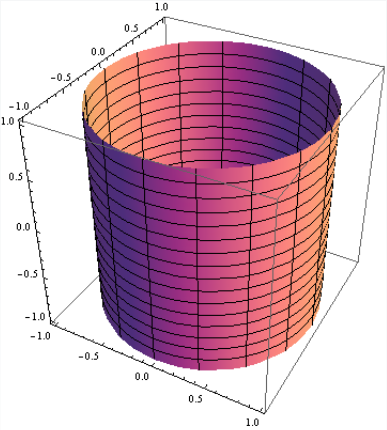
Marcone C. Pereira

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
Universidade de São Paulo

Cilindros

Um *cilindro* é a superfície composta de todas as retas que são paralelas a uma dada reta no espaço e passam por uma mesma curva de algum plano do $\mathbb{R}^3$.

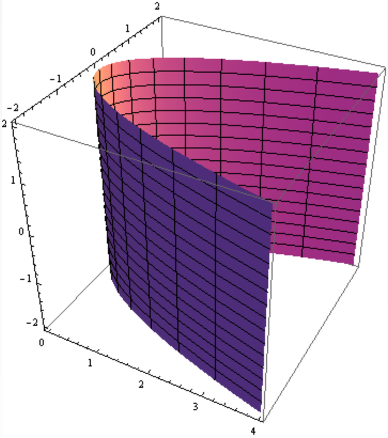
Cilindros Circulares



Uma equação para o cilindro circular

$$x^2 + y^2 = 1$$

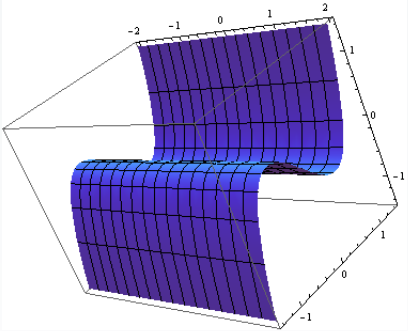
Cilindros Parabólicos



Uma equação para o cilindro parabólico

$$y = x^2$$

Cilindros Quaisquer



Uma equação para o cilindro acima

$$z = x(x-1)(x+1)$$

Superfícies Quádricas

Uma *superfície quádrica* é o gráfico no espaço de uma equação de segundo grau nas variáveis x, y, e z. A forma geral é:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

em que a, b, c, d, e, f, g, h, i e j são números reais.

As quádricas mais importantes são *elipsóides*, *hipérbolóides*, *cones elípticos* e *parábolóides*.

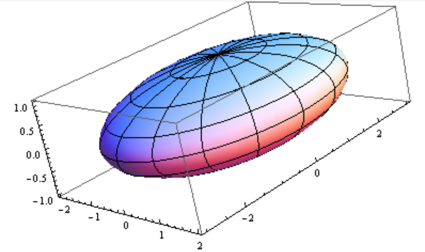
Equação

O elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

corta os eixos coordenados em $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0)$ e $(0, 0, \pm c)$. A superfície é simétrica em relação a cada um dos planos coordenados já que as variáveis na equação de definição estão elevadas ao quadrado. Todos os cortes por planos são elípses.

Elipsóide



Equação deste elipsóide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1.$$

Parabolóide Elíptico

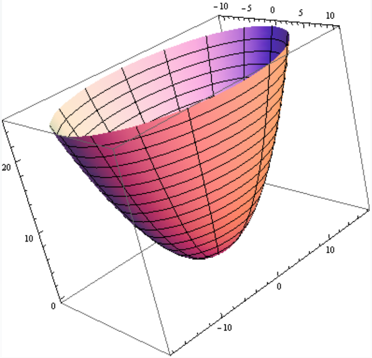
Equação

O parabolóide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

é simétrico em relação aos planos $x = 0$ e $y = 0$. Cortes horizontais são elípses e cortes verticais são parábolas.

Parabolóide Elíptico



Equação deste parabolóide

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{z}{2}.$$

Cone Elíptico

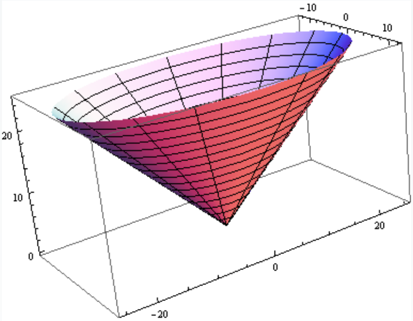
Equação

O cone elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

é simétrico em relação aos três planos coordenados. Cortes horizontais são elipses e cortes verticais são hipérboles, exceto quando usamos os planos coordenados $x = 0$ ou $y = 0$, que são um par de retas.

Cone Elíptico



Equação deste cone elíptico

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{z^2}{4}.$$

Parabolóide Hiperbólico

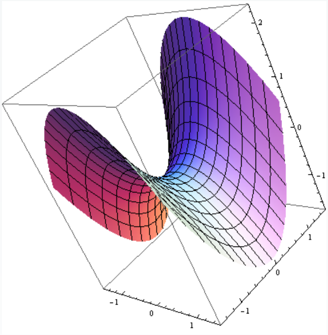
Equação

O parabolóide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \quad c > 0$$

é simétrico em relação aos planos coordenados $x = 0$ e $y = 0$. Cortes horizontais são hipérboles e cortes verticais são parábolas.

Parabolóide Hiperbólico



Equação deste hiperbolóide

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = \frac{z}{3}.$$

Hiperbolóide de Uma Folha

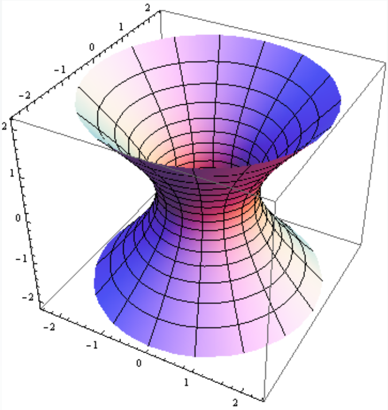
Equação

O hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

é simétrico em relação a cada um dos três planos coordenados. Cortes horizontais são elipses e cortes verticais são hipérboles.

Hiperbolóide de Uma Folha



Equação deste hiperbolóide

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Hiperbolóide de Duas Folhas

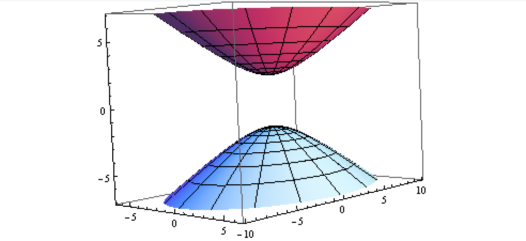
Equação

O hiperbolóide de duas folhas

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

é simétrico em relação a cada um dos três planos coordenados. Cortes horizontais são elipses ou vazio, dependendo do valor de z. Cortes verticais são hipérboles.

Hiperbolóide de Duas Folhas

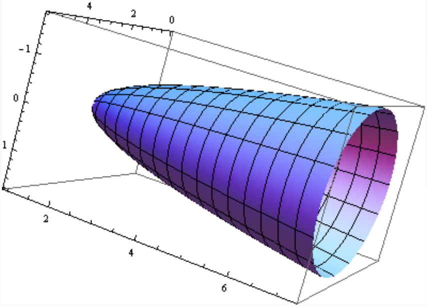


Equação deste hiperbolóide

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Exercício

Classifique a superfície quádrica $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.



Uma equação para este parabolóide eliptico é:

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2.$$