Algoritmos de Ordenação

MergeSort

Professora:

Fátima L. S. Nunes

Algoritmos de Ordenação

- Grande parte das operações de Sistemas de Informações é constituída por buscas em bases de dados.
- Exemplos?

Algoritmos de Ordenação

- Grande parte das operações de Sistemas de Informações é constituída por buscas em bases de dados.
- Exemplos?
  - consultar saldo bancário, fornecendo número da conta corrente;
  - consultar nota no sistema Júpiter, fornecendo número USP;
  - consultar preço de um livro em uma loja, fornecendo seu código.

Algoritmos de Ordenação

- Grande parte das operações de Sistemas de Informações é constituída por buscas em bases de dados.
- Para essas operações, os dados devem estar ordenados.
- Algoritmos de ordenação constituem uma classe muito estudada de algoritmos.
- Por quê?

Algoritmos de Ordenação

- Grande parte das operações de Sistemas de Informações é constituída por buscas em bases de dados.
- Para essas operações, os dados devem estar ordenados.
- Algoritmos de ordenação constituem uma classe muito estudada de algoritmos.
  - é impossível pensar em buscas sem ordenação;
  - buscas exigem que os dados estejam organizados;
  - volume de dados geralmente é grande.

Algoritmos de Ordenação

- Que algoritmos de ordenação já conhecemos (ICC1)?

Algoritmos de Ordenação

- Que algoritmos de ordenação já conhecemos (ICC1)?
  - *Insertion Sort* (Ordenação por Inserção)
  - *Selection Sort* (Ordenação por Seleção)
  - *Bubble Sort* (Ordenação pelo método da Bolha)

  - Já analisamos a complexidade do algoritmo *Insertion Sort*: $O(n^2)$

MergeSort

- Ordenação por intercalação:
  - Dada uma sequência de *n* elementos:
    - divide o arranjo em duas subsequências de *n/2* elementos;
    - classifica as duas subsequências recursivamente, utilizando a própria ordenação por intercalação;
    - faz a intercalação das duas sequências ordenadas, de modo a produzir a resposta ordenada.

MergeSort

- Ordenação por intercalação:
  - Dada uma sequência de *n* elementos:
    - divide o arranjo em duas subsequências de *n/2* elementos;
    - classifica as duas subsequências recursivamente, utilizando a própria ordenação por intercalação;
    - faz a intercalação das duas sequências ordenadas, de modo a produzir a resposta ordenada.

Que técnica de algoritmo é esta?

MergeSort

- Ordenação por intercalação:
  - Dados uma sequência de *n* elementos:
    - Dividir: divide o arranjo em duas subsequências de *n/2* elementos;
    - Conquistar: classifica as duas subsequências recursivamente, utilizando a própria ordenação por intercalação;
    - Combinar: faz a intercalação das duas sequências ordenadas, de modo a produzir a resposta ordenada.

Que técnica de algoritmo é esta? Dividir e Conquistar!
Já sabemos calcular a complexidade!!!

MergeSort

- Recursão não funciona quando a sequência a ser ordenada tem comprimento 1: neste caso não há trabalho a ser feito.
- Operação chave do algoritmo MergeSort:
  - intercalação de duas sequências ordenadas
- Algoritmo (analogia com baralho):
  1. há duas pilhas com cartas ordenadas;
  2. menor carta está com a face para cima em cada pilha;
  3. pegar menor delas e coloca em nova pilha, com face para baixo;
  4. repete 3 até terminar uma das pilhas;
  5. junta cartas da pilha restante.

MergeSort

- Algoritmo:

```
merge (A,p,q,r) // A=arranjo; p,q,r=índices, p≤ q < r
// A[p..q] e A [q+1..r] estão ordenados
// intercala os subarranjos para formar novo arranjo A

// define subarranjos
n1 ← q-p+1
n2 ← r-q

// popular subarranjos
criar arranjos L[1..n1+1] e R [1..n2+1]
para i ← 1 até n1
    L[i] ← A[p+i-1]
para j ← 1 até n2
    faça R[j] ← A[q+j]

// continua...
```

MergeSort

- Algoritmo:

```
merge (A,p,q,r) // A=arranjo;p,q,r=índices, p≤ q < r
// ... continuação

// definir sentinela (para evitar testar se chegou fim)
L[n1+1] ← ∞
L[n2+1] ← ∞

//  mesclar subarranjos
para k ← p até r
     se L[i] ≤ R[j]
          A[k] ← L[i]
          i ← i + 1
     senão
          A[k] ← R[j]
          j ← j + 1
     fim se
fim para
```

MergeSort

- Complexidade do algoritmo Merge:
- A cada passo:
  - verifica 2 posições atuais (cartas superiores da pilha de baralho) e decide qual pegar;
  - tempo constante em cada passo;
  - Quantas vezes executa este passo?

MergeSort

- Complexidade do algoritmo Merge:
- A cada passo:
  - verifica 2 posições atuais (cartas superiores da pilha de baralho) e decide qual pegar;
  - tempo constante em cada passo;
  - Quantas vezes executa este passo? n vezes
  - Portanto, complexidade = $O(n)$, onde $n=r-p+1$

MergeSort

- Agora que já sabemos como mesclar os subarranjos, vamos definir o algoritmo recursivo da ordenação por intercalação:
- Dados A, p, r:
  - ordena elementos do subarranjo A [p..r];
  - se p≥r, o subarranjo tem no máximo um elemento (já está ordenado);
  - caso contrário, faz a divisão: calcula um índice q que particiona A [p..r] em dois subarranjos: A[p..q] contendo n/2 elementos e A[q+1..r] contendo n/2 elementos.

MergeSort

- Dados A, p, r:
  - ordena elementos do subarranjo A [p..r];
  - se p≥r, o subarranjo tem no máximo um elemento (já está ordenado);
  - caso contrário, faz a divisão: calcula um índice q que particiona A [p..r] em dois subarranjos: A[p..q] contendo n/2 elementos e A[q+1..r] contendo n/2 elementos.

```
mergeSort (A,p,r)

???
```

MergeSort

mergeSort (A,p,r)

```
se p < r
    q ← ⌊(p+r)/2⌋
    mergeSort(A, p, q)
    mergeSort(A, q+1,r)
    merge(A,p,q,r)
```

MergeSort

mergeSort (A,p,r)

```
se p < r
      q ← ⌊(p+r)/2⌋
      mergeSort(A, p, q)
      mergeSort(A, q+1,r)
      merge(A,p,q,r)
```

Arranjo inicial

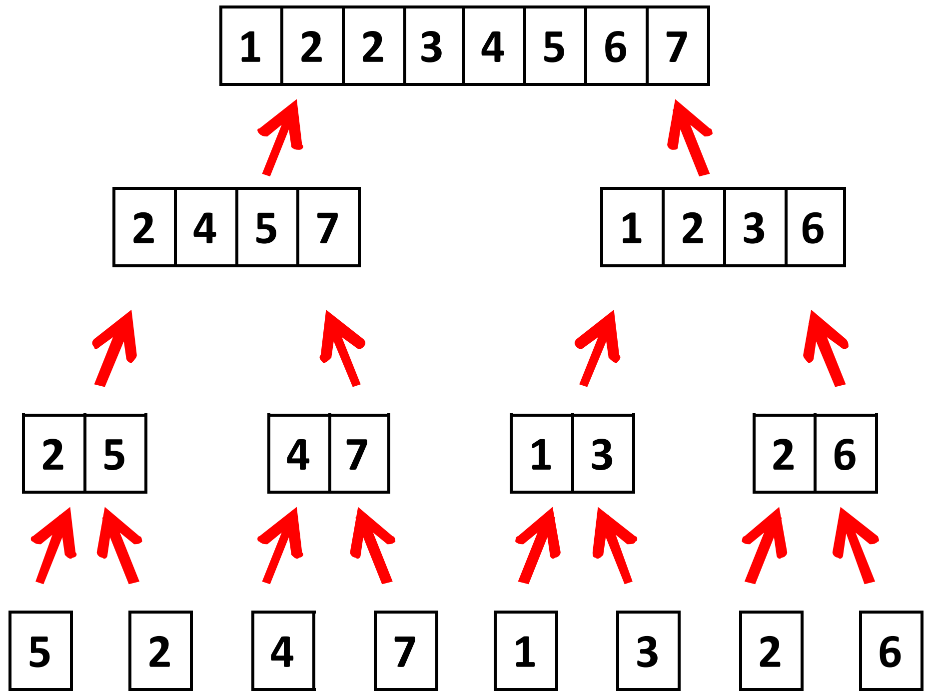
5	2	4	7	1	3	2	6

Divide até obter subarranjos com tamanho 1.
Então, começa a mesclar...

MergeSort

mergeSort (A,p,r)

```
se p < r
      q ← ⌊(p+r)/2⌋
      mergeSort(A, p, q)
      mergeSort(A, q+1,r)
      merge(A,p,q,r)
```



MergeSort

- Analisando a complexidade do MergeSort
- É um algoritmo recursivo.
- Portanto, devemos usar recorrência.
- Temos que definir T(n):
  - se ***n*** suficientemente pequeno (exemplo: ***n*** **≤** ***c*** para alguma constante *c*), a solução direta demorará um tempo constante, que consideraremos O(1)

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

MergeSort

- Analisando a complexidade do MergeSort
- É um algoritmo recursivo.
- Portanto, devemos usar recorrência.
- Temos que definir T(n):

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

  - se ***n*** suficientemente pequeno (exemplo: $n \le c$ para alguma constante *c*), a solução direta demorará um tempo constante, que consideraremos $O(1)$
  - supomos que o problema seja dividido em ***a*** subproblemas, cada um com tamanho ***1/b*** do tamanho do problema original.

MergeSort

- Analisando a complexidade do MergeSort
- É um algoritmo recursivo.
- Portanto, devemos usar recorrência.
- Temos que definir T(n):
  - se ***n*** suficientemente pequeno (exemplo: $n \leq c$ para alguma constante *c*), a solução direta demorará um tempo constante, que consideraremos $O(1)$
  - supomos que o problema seja dividido em ***a*** subproblemas, cada um com tamanho ***1/b*** do tamanho do problema original.
  - no caso da ordenação por intercalação: a=b=???

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

MergeSort

- Analisando a complexidade do MergeSort
- É um algoritmo recursivo.
- Portanto, devemos usar recorrência.
- Temos que definir T(n):

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

  - se ***n*** suficientemente pequeno (exemplo: $n \leq c$ para alguma constante *c*), a solução direta demorará um tempo constante, que consideraremos $O(1)$
  - supomos que o problema seja dividido em ***a*** subproblemas, cada um com tamanho ***1/b*** do tamanho do problema original.
  - no caso da ordenação por intercalação: a=b=2

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

$$T(n) = \begin{cases} O(1), \ \ n \le c \\ aT(n/b) + D(n) + C(n), caso\ contrário \end{cases}$$

- Dividir: somente calcula o ponto médio do subarranjo $\Rightarrow$ constante $\Rightarrow$ D(n) = O(1)
- Conquistar: resolvemos recursivamente dois subproblemas, cada um com tamanho n/2 $\Rightarrow$ 2T(n/2)
- Combinar: já vimos que o método ***merge*** *em um subarranjo com* ***n*** *elementos tem o tempo* O(n)

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

$$T(n) = \begin{cases} O(1), \ \ n \le c \\ aT(n/b) + D(n) + C(n), caso \ contrário \end{cases}$$

- Dividir: somente calcula o ponto médio do subarranjo $\Rightarrow$ constante $\Rightarrow$ D(n) = O(1)
- Conquistar: resolven subproblemas, cada /2)
- Combinar: já vimos que o método ***merge*** o *um subarranjo com n elementos tem o tempo* O(n)

D(n) + C(n) = O(1) + O(n) = O(n)

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

- Portanto:

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & se\ n = 1 \\ 2T(n/2) + n, & se\ n > 1 \end{cases}$$

- Podemos resolver esta equação pelo Teorema Mestre ou simplesmente expandindo-a (aula 11):

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

- Portanto:

$$T(n)=\begin{cases} O(1), & se\ n=1 \\ 2T(n/2)+n, & se\ n>1 \end{cases}$$

aT(n/b)+f(n)

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

- Portanto:

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & se\ n = 1 \\ 2T(n/2) + n, & se\ n > 1 \end{cases}$$

aT(n/b)+f(n)

- Teorema mestre: a= ?, b= ?, f(n) = ?

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

- Portanto:

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & se\ n = 1 \\ 2T(n/2) + n, & se\ n > 1 \end{cases}$$

- Teorema mestre: a= 2, b= 2, f(n) = n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$$

- Uma vez que $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ temos o caso 2.
- Portanto???

$f(n) = O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right), algum\ \epsilon > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

$f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right)$

$f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \epsilon}\right), algum\ \epsilon > 0 \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

- Portanto:

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & se\ n = 1 \\ 2T(n/2) + n, & se\ n > 1 \end{cases}$$

- Teorema mestre: a= 2, b= 2, f(n) = n

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$$

- Uma vez que $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ temos o caso 2.
- Portanto: $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right) = \Theta(n \lg n)$

$$f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right) \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right)$$

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

- Uma última observação:
  - é possível fazer a intercalação sem usar um vetor auxiliar;
  - neste caso, temos que deslocar os elementos de um dos subvetores, quando necessário, para dar lugar ao elemento a ser inserido (menor dos dois subvetores).
  - Como fica a complexidade?

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

- Uma última observação:
  - é possível fazer a intercalação sem usar um vetor auxiliar;
  - neste caso, temos que deslocar os elementos de um dos subvetores, quando necessário, para dar lugar ao elemento a ser inserido (menor dos dois subvetores).
  - Como fica a complexidade?
    - no pior caso, em todas as iterações haverá ***n*** deslocamentos:

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & se\ n = 1 \\ 2T(n/2) + n^2, & se\ n > 1 \end{cases}$$

MergeSort

```
mergeSort (A,p,r)
se p < r
  q ← ⌊(p+r)/2⌋
  mergeSort(A, p, q)
  mergeSort(A, q+1,r)
  merge(A,p,q,r)
```

- Uma última observação:
  - é possível fazer a intercalação sem usar um vetor auxiliar;
  - neste caso, temos que deslocar os elementos de um dos subvetores, quando necessário, para dar lugar ao elemento a ser inserido (menor dos dois subvetores).
  - Como fica a complexidade?
    - no pior caso, em todas as iterações haverá ***n*** deslocamentos:

$$T(n) = \begin{cases} O(1), & se\ n = 1 \\ 2T(n/2) + n^2, & se\ n > 1 \end{cases}$$

complexidade passa a ser $\Theta(n^2)$, provando que intercalação é a etapa crucial do ***MergeSort***

Referências

- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest & Clifford Stein. Algoritmos - Tradução da 2a. Edição Americana. Editora Campus, 2002.
- Nívio Ziviani. Projeto de Algoritmos com implementações em C e Pascal. Editora Thomson, 2a. Edição, 2004 (texto base)
- Notas de aula – Prof. Delano Beder – EACH-USP

Algoritmos de Ordenação

MergeSort

Professora:

Fátima L. S. Nunes

SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

EACH