Estatística

8 - Distribuições Amostrais

9 - Estimação de Parâmetros por Intervalo

Prof. Marcela A. G. Machado

e-mail: marcela@feg.unesp.br

Página da FEG: www.feg.unesp.br/~marcela

Estatística

Objetivos:

Estatística
- **Descritiva**
  - **Organização**
  - **Descrição**
- **Indutiva**
  - **Análise**
  - **Interpretação**

• Estatística Indutiva:

Tirar conclusões sobre populações através de dados amostrais

• Processo de Indução:

Não é exato; sujeito a variabilidade

• Importante !!!

- Conhecer a PROBABILIDADE de variação do processo de indução.

- Com que PROBABILIDADE se pode confiar nos resultados obtidos dos dados coletados ???

População

É um conjunto de elementos com pelo menos uma característica comum.

Amostra

É um subconjunto de elementos de uma população.

Estatísticas

Valores calculados em função dos elementos da **amostra.**

Distribuição Amostral

À distribuição de probabilidade de uma estatística chama-se distribuição amostral.

Problemas da Estatística Indutiva:

1) Problemas de Estimação (por intervalo)
2) Problemas de Testes de Hipóteses

Distribuição da Média Amostral $\overline{x}$

Distribuição constituída de todos os valores de $\overline{x}$, considerando todas as possíveis amostras de tamanho “n”

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}$$

Parâmetros da Distribuição Amostral de $\overline{x}$

$$\mu(\overline{x}) = \frac{1}{n} \cdot [\mu(x_1) + \mu(x_2) + \cdots + \mu(x_n)]$$

$$\boxed{\mu(\overline{x}) = \frac{1}{n} \cdot [\mu + \mu + \cdots + \mu] = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu}$$

Sendo: x_1, x_2, ..., x_n Variáveis Aleatórias Independentes:

$$\sigma^2(\overline{x}) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot [\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) + \cdots + \sigma^2(x_n)]$$

$$\boxed{\sigma^2(\overline{x}) = \frac{1}{n^2} \cdot [\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$$

Distribuição da Média Amostral $\overline{X}$

Exemplo: População = {2,3,6,8,11}

Amostra de 2 (dois) elementos com reposição.

N = 5 n = 2

Amostras possíveis: $5^2 = 25$ amostras

(2,2)	2,0	(2,3)	2,5	(2,6)	4,0	(2,8)	5,0	(2,11)	6,5
(3,2)	2,5	(3,3)	3,0	(3,6)	4,5	(3,8)	5,5	(3,11)	7,0
(6,2)	4,0	(6,3)	4,5	(6,6)	6,0	(6,8)	7,0	(6,11)	8,5
(8,2)	5,0	(8,3)	5,5	(8,6)	7,0	(8,8)	8,0	(8,11)	9,5
(11,2)	6,5	(11,3)	7,0	(11,6)	8,5	(11,8)	9,5	(11,11)	11,0

População:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6{,}0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}\cdot\left[(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2\right]$$

$$\sigma^2 = 10{,}8$$

Amostra:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \frac{\sum \bar{x}_i}{N^n} = \frac{2{,}0 + 2{,}5 + \ldots + 11{,}0}{5^2} = \frac{150}{25} = 6{,}0 = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sum(\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{N^n} = \frac{\sum(\bar{x}_i - 6{,}0)^2}{25}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = 5{,}40 = \frac{10{,}8}{2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Distribuição da Média Amostral $\bar{X}$

Exemplo: População = {2,3,6,8,11}

Amostra de 2 (dois) elementos sem reposição.

N = 5   n = 2

Amostras possíveis:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$P(\bar{x}_i) = \frac{1}{10} \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x_i$$

Amostras	$\bar{x}$
(2,3)	2,5
(2,6)	4,0
(2,8)	5,0
(2,11)	6,5
(3,6)	4,5
(3,8)	5,5
(3,11)	7,0
(6,8)	7,0
(6,11)	8,5
(8,11)	9,5

$$\boxed{\mu_{\bar{x}} = \sum \bar{x}_i \cdot P(\bar{x}_i) = \frac{2,5 + 4,0 + \cdots + 9,5}{10} = 6,0}$$

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sum (\bar{x}_i - \mu_{\bar{x}})^2 \cdot P(\bar{x}_i)$$

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{10}\left[(2,5-6)^2 + (4,0-6)^2 + \ldots + (9,5-6)^2\right] = 4,05$$

$$\boxed{\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{10,8}{2} \cdot \frac{5-2}{5-1} = 4,05}$$

Distribuição da Média Amostral $\overline{x}$

- Amostragem com reposição
- População infinita
- Xi: V.A. Independentes

Então

$$\boxed{\begin{aligned} \mu(\overline{x}) &= \mu \\ \sigma^2(\overline{x}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}}$$

- Amostragem sem reposição
- População finita
- Xi: V.A. não Independentes

Então

$$\boxed{\begin{aligned} \mu(\overline{x}) &= \mu \\ \sigma^2(\overline{x}) &= \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} \end{aligned}}$$

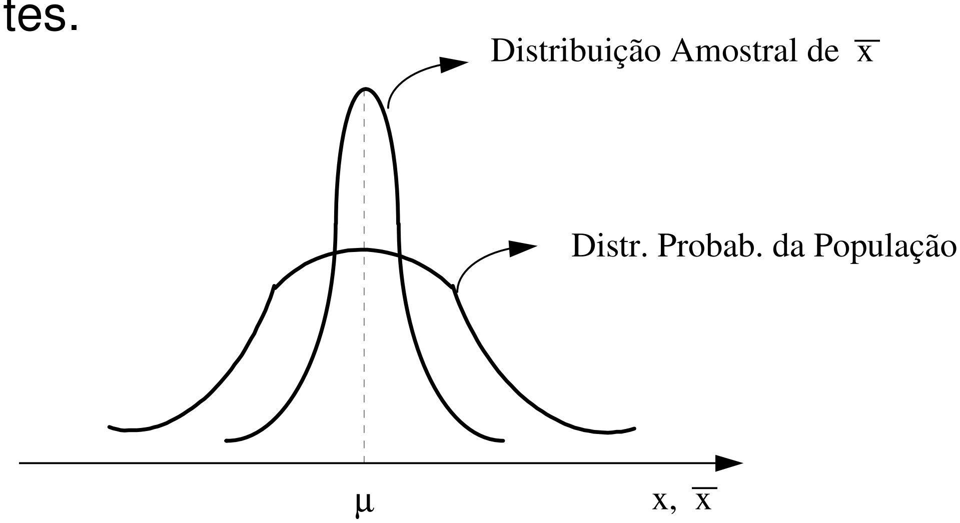
Onde: N $\rightarrow$ tamanho da população

n $\rightarrow$ tamanho da amostra

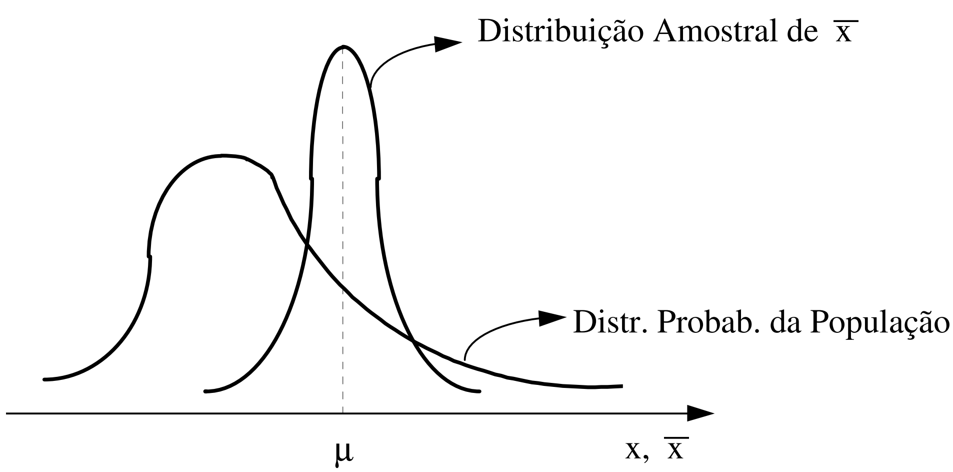
Distribuição da Média Amostral $\overline{X}$

Resultados importantes:

• Se a população for Normal então a Distribuição Amostral de $\overline{x}$ é Normal para qualquer tamanho da amostra, devido ao **Teorema das Combinações Lineares** de Variáveis Normais Independentes.



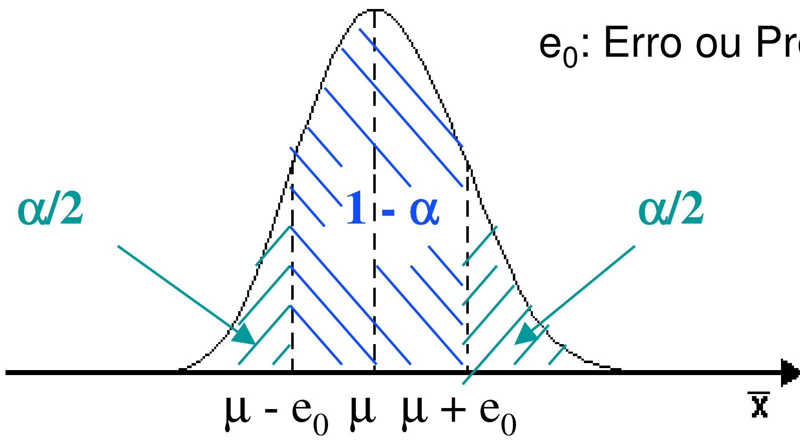
• Se a população não for Normal, mas a amostra for suficientemente grande então a Distribuição Amostral de $\overline{x}$ pode ser aproximada pela Normal, devido ao **Teorema do Limite Central** (no caso de população infinita) ou devido à consideração de amostragem com reposição.



Intervalo de Confiança para a média μ de uma População infinita, com σ conhecido

Sabe-se que uma V. A. $\bar{x} \longrightarrow$ **Normal (μ , σ^2/n)**

e$_0$: Erro ou Precisão do Intervalo



Normal Reduzida: $z_{\alpha/2} = \dfrac{(\mu + e_0) - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

Portanto: $e_0 = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\bar{x} - e_0 \leq \mu \leq \bar{x} + e_0$$

Portanto:

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Nível ou Grau de Confiança

Intervalo de Confiança para a média μ de uma População infinita, com σ conhecido

Exemplo: Considerando-se que uma amostra de 100 elementos extraída de uma população Normal, cujo desvio-padrão é igual a 2,0, forneceu média amostral $\bar{x}$ = 35,6, construir um intervalo com nível de confiança de 95 % para a média μ

Solução: Da tabela da Distribuição Normal Reduzida:

$z_{\alpha/2} = z_{2,5\ \%} = 1{,}96$, logo:

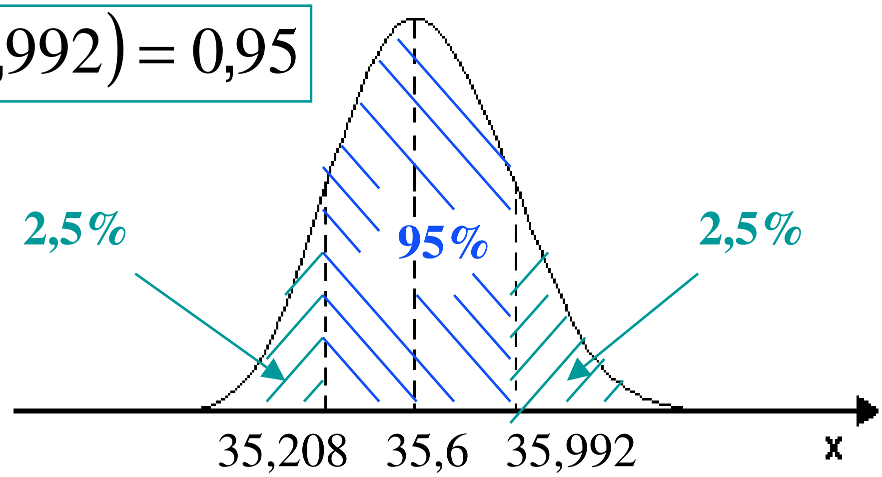
$$e_0 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{2{,}0}{\sqrt{100}} = 0{,}392$$

Intervalo de Confiança:

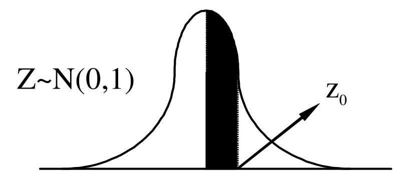
$$\bar{x} \pm e_0 = 35{,}6 \pm 0{,}392$$

Então:

$$P(35{,}208 \le \mu \le 35{,}992) = 0{,}95$$

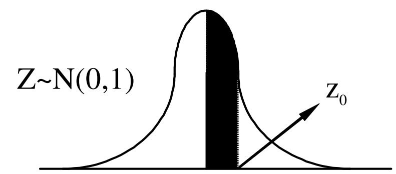


Distribuição normal – valores de $P(0 \leq Z \leq z_0)$



z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Distribuição normal – valores de $P(0 \leq Z \leq z_0)$



z_0	0	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	**0,4750**	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

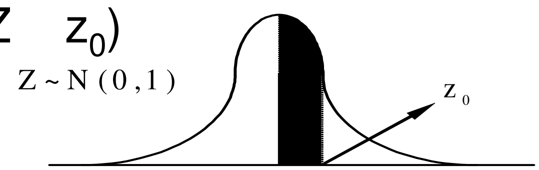
Tamanho da Amostra

Exemplo 1: Qual o tamanho de amostra necessária para se estimar a média de uma população infinita cujo desvio-padrão é igual a 4, com 98 % de confiança e precisão de 0,5?

$$\boxed{e_0 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}5}$$

$$n = \left(\frac{z_{1\%} \cdot \sigma}{e_0}\right)^2 = \left(\frac{2{,}33 \cdot 4}{0{,}5}\right)^2 = 346{,}3$$

Distribuição normal – valores de P(0 Z z_0)



z_0	0	1	2	3	4
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,016
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,487
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,490
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	[illegible]	0,492
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,494
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,49
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,496
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,497

Intervalo de Confiança para a média μ de uma População infinita, com σ desconhecido

$$\boxed{P\left(\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha}$$

Neste caso:

$$\boxed{e_0 = t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}}$$

Distribuição *t* - *Student*

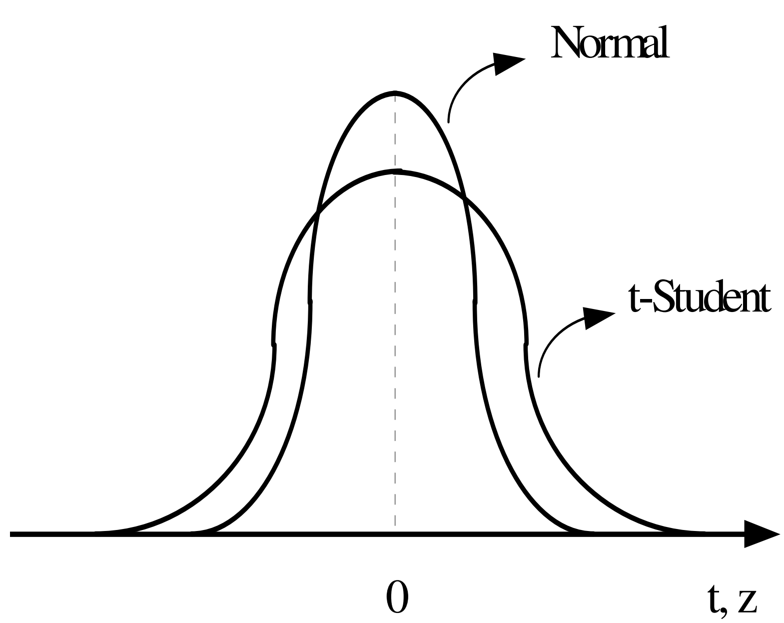
A partir de uma amostra aleatória de *n* valores retirados de uma população N(μ,σ^2), obtêm-se a estatística:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \rightarrow z \in \text{N(1,0)}, \quad \text{pois: } \mu_{\bar{x}} = \mu \quad \text{e} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Substituindo-se σ (desconhecido) por s_x :

$$\boxed{\frac{\bar{x} - \mu}{s(x) \big/ \sqrt{n}} = t_{n-1}} \quad \text{(t - Student com } \nu = \text{n-1)}$$

$\mu(t_{n-1})=0$ $\boxed{n \rightarrow \infty, \quad s(x) \rightarrow \sigma \quad \therefore \quad t \rightarrow N(0,1)}$



Intervalo de Confiança para a média μ de uma População infinita, com σ desconhecido

Exemplo: Uma amostra de 4 elementos extraídas de uma população com Distribuição Normal forneceu média $\bar{x}$ = 8,20 e desvio-padrão *s* = 0,40. Construir um intervalo com nível de confiança de 99 % para a média dessa população.

Solução: Intervalo de Confiança: $\boxed{\bar{x} \pm e_0}$

Onde: $e_0 = t_{n-1,\alpha/2} \cdot \dfrac{s_x}{\sqrt{n}}$

Da tabela t de Student: $t_{n-1,\alpha/2} = t_{3,\ 0,5\%} = 5{,}841$

Logo: $e_0 = t_{n-1,\alpha/2} \cdot \dfrac{s_x}{\sqrt{n}} = 5{,}841 \cdot \dfrac{0{,}40}{\sqrt{4}} \cong 1{,}168$

Intervalo de Confiança: $\boxed{\bar{x} \pm e_0 = 8{,}20 \pm 1{,}168}$

Então: $P\left(\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \dfrac{s_x}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \dfrac{s_x}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$

$$\boxed{P(7{,}032 \le \mu \le 9{,}368) = 0{,}99}$$

Distribuições *t* de Student - valores de $t_{v,P}$, onde $P = P(t_v \geq t_{v,P})$

v \ P	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617

Distribuição da Variância Amostral *s*²

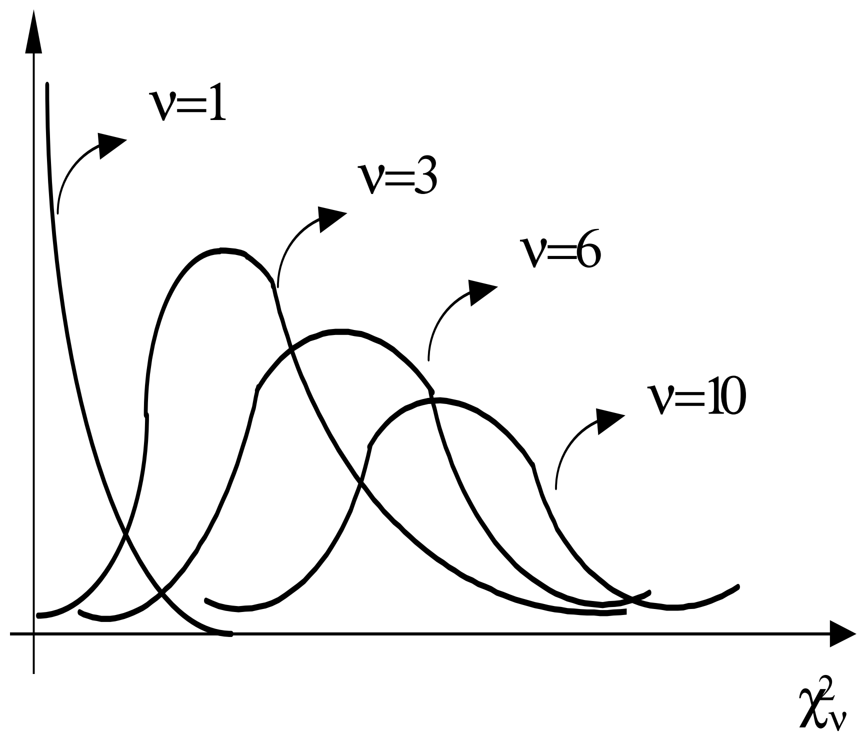
$$\boxed{s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$\boxed{\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2}$$

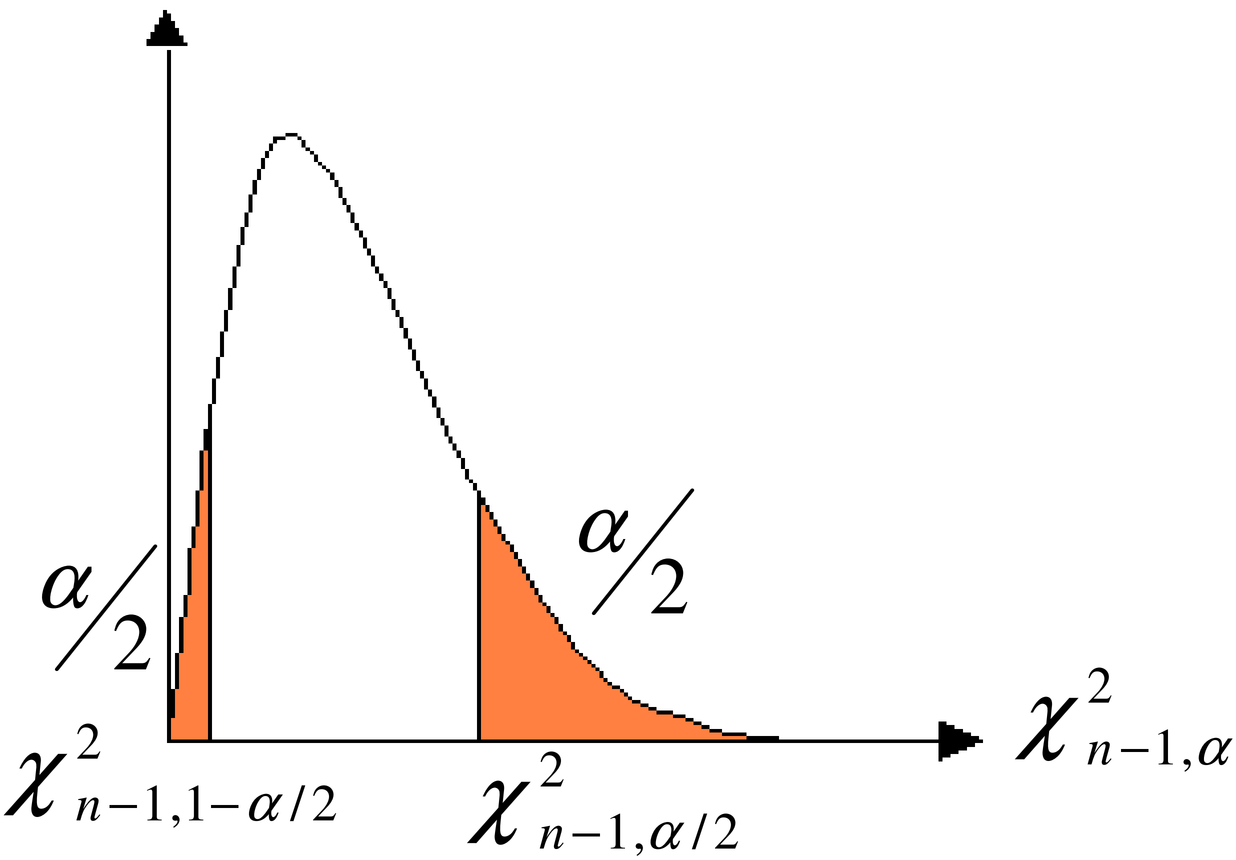
$$s^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} \cdot \chi_{n-1}^2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi_{n-1}^2}$$

Distribuição χ^2_ν



$$\sigma^2 = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1}}$$



Intervalo de Confiança para a Variância da População

$$P\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de Confiança para a Variância da População - Exemplo

Uma amostra de 11 elementos, extraída de uma população com Distribuição Normal, forneceu variância s^2 = 7,08.

Construir um intervalo de 90 % de confiança para a variância dessa população

Solução:

$$P\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,\ \alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,\ 1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

Da tabela Qui-Quadrado:

$$\chi^2_{n-1,\ \alpha/2} = \chi^2_{10,\ 5\%} = 18{,}307$$

$$\chi^2_{n-1,\ 1-\alpha/2} = \chi^2_{10,\ 95\%} = 3{,}940$$

Logo:

$$LI = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,\ \alpha/2}} = \frac{(11-1)\cdot 7{,}08}{18{,}307} = 3{,}86$$

$$LS = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} = \frac{(11-1)\cdot 7{,}08}{3{,}940} = 17{,}96$$

Portanto:

$$P(3{,}86 \le \sigma^2 \le 17{,}96) = 0{,}90$$

Distribuição Qui-Quadrado

ν \ α	0,95	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05
1	0,004	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841
2	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991
3	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815
4	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488
5	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,071
6	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592
7	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067
8	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507
9	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	[illegible]
10	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307
11	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675
12	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026
13	5,892	7,042	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362
14	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685
15	7,261	8,547	11,036	14,339	18,245	22,307	24,996
16	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296
17	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587
18	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869
19	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144
20	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410
21	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671
22	12,338	14,042	17,240	21,337	26,039	30,813	33,924
23	13,091	14,848	18,137	22,337	27,141	32,007	35,172
24	13,848	15,659	19,037	22,337	28,241	33,196	36,415
25	14,611	16,473	19,939	24,337	29,339	34,382	37,652

Intervalo de Confiança para o Desvio-Padrão da População

Como:

$$\boxed{P\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,\ \alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,\ 1-\alpha/2}}\right) = 1-\alpha}$$

Então:

$$\boxed{P\left(s\cdot\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{n-1,\ \alpha/2}}} \le \sigma \le s\cdot\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{n-1,\ 1-\alpha/2}}}\right) = 1-\alpha}$$

Caso de amostras grandes (n>30),

pode-se, alternativamente, usar:

$$\boxed{P\left(s\cdot\left(1-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2\cdot(n-1)}}\right) \le \sigma \le s\cdot\left(1+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{2\cdot(n-1)}}\right)\right) = 1-\alpha}$$

Distribuição Amostral de *f* e *p´*

f : freqüência absoluta com que foi observada alguma característica em cada elemento de uma amostra de tamanho “n”

SUCESSO: quando a característica foi observada
FRACASSO: caso contrário

Seja: p = Prob. de Sucesso em cada elemento da amostra

q = Prob. de Fracasso

f tem Distribuição Binomial

$$\mu_f = E(f) = np$$

$$\sigma_f^2 = \sigma^2(f) = npq$$

p’ : freqüência relativa com que foi observada alguma característica numa amostra de tamanho “n”

$$\boxed{p' = \frac{f}{n}}$$

$$\mu_{p'} = E(p') = p$$

$$\sigma^2{}_{p'} = \sigma^2(p') = \frac{p \cdot q}{n}$$

Intervalo de Confiança para a Proporção Populacional

- (1) Intervalo de Confiança: $\boxed{P\left(p'-e_0 \le p \le p'+e_0\right) = 1-\alpha}$

- (2) Caso *n·p* ≥ 5 e *n·(1 - p)* ≥ 5 pode-se aproximar a Binomial pela Normal. Assim sendo, pode-se considerar que p' tem Distribuição Normal

- Sendo p' um estimador de p, tem-se: $\boxed{e_0 = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}}$

Logo, Intervalo de Confiança:

$$\boxed{P\left(p' - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \le p \le p' + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}\right) = 1-\alpha}$$

Intervalo de Confiança para a Proporção Populacional - Exemplo

Retirada uma amostra de 1.000 peças da produção de uma máquina, verificou-se que 35 eram defeituosas. Construir um intervalo com nível de confiança de 95% para a proporção de defeituosas fornecida por essa máquina.

Solução:

$$P\left(p' - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \leq p \leq p' + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}\right) = 1-\alpha$$

Considerando que as condições de aproximação da Binomial pela Normal estão satisfeitas:

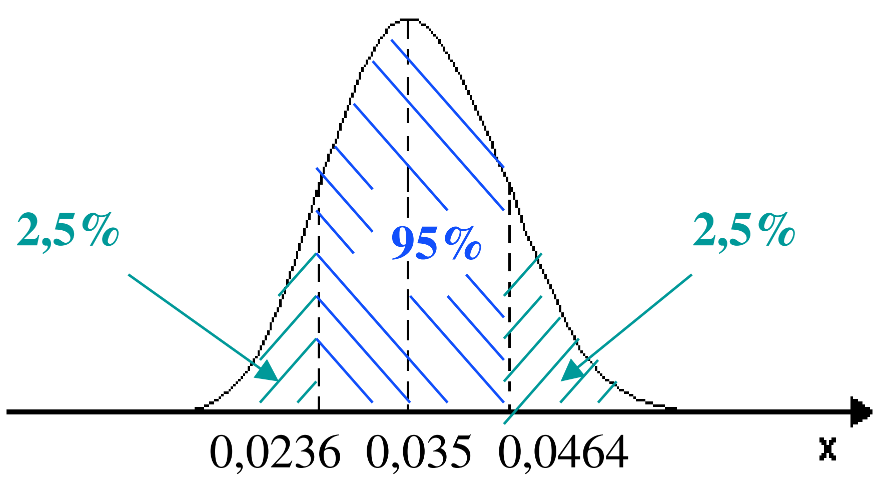
$$p' = \frac{f}{n} = \frac{35}{1.000} = 0{,}035$$

$$z_{\alpha/2} = z_{2{,}5\%} = 1{,}96$$

$$e_0 = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}035 \cdot 0{,}965}{1.000}} = 0{,}0114$$

Intervalo de Confiança: $$p' \pm e_0 = 0{,}035 \pm 0{,}0114$$

Portanto: $$P(0{,}0236 \leq p \leq 0{,}0464) = 0{,}95$$



Tamanho da Amostra

Exemplo 2: Qual o tamanho de amostra suficiente para estimarmos a proporção de defeituosos fornecidos por uma máquina, com precisão de 0,02 e 95 % de confiança, sabendo que essa proporção seguramente não é superior a 0,20?

Solução: De acordo com o anteriormente exposto, temos:

$$n = \left(\frac{z_{2,5\%}}{e_0}\right)^2 \cdot p_0 \cdot (1 - p_0) = \left(\frac{1{,}960}{0{,}02}\right)^2 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}80 = 1.536{,}64$$

Logo, será suficiente uma amostra de 1.537 elementos.

Estimação com base em diversas amostras

Sejam *k* amostras:

Estimação da média μ: Média ponderada das médias amostrais (peso: tamanho de cada amostra)

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 \cdot n_1 + \bar{x}_2 \cdot n_2 + \ldots + \bar{x}_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Estimação da variância σ^2: Média ponderada das variâncias amostrais (peso: grau de liberdade de cada amostra)

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2 + \ldots + (n_k - 1) \cdot s_k^2}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k}$$

Estimação do desvio-padrão σ :

- ✓ Amostras grandes (n>30): Raiz Quadrada da Variância s^2

$$s = \sqrt{s^2}$$

- ✓ Amostras pequenas (n<30): Média aritmética das variâncias amostrais

$$s = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_k}{k}$$

Estimação da proporção *p* :

calcula-se a média ponderada das freqüências relativas amostrais (peso: tamanho de cada amostra)

$$p' = \frac{p'_1 \cdot n_1 + p'_2 \cdot n_2 + \ldots + p'_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

Exercícios (Costa Neto, Ed.2000, p.80)

3. Uma amostra de quinze elementos retirada de uma população normalmente distribuída forneceu $\bar{x}$ = 32,4 e s^2 = 2,56. Construa intervalos de 95% e 99 % de confiança para:

a) a média da população;

b) a variância da população;

c) o desvio-padrão da população.

Solução:

Amostra: n = 15

$\bar{x}$ = 32,4

$s^2 = 2{,}56 \rightarrow s = 1{,}60$

a. Média da população:

Para 95 %: $t_{14,\ 2,5\%}$ = 2,145

$$e_0 = t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}} = t_{14,2,5\%} \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}} = 2{,}145 \cdot \frac{1{,}60}{\sqrt{15}} = 0{,}8861$$

IC = $\bar{x} \pm e_0$ = 32,4 ± 0,8861.

Para 99 %: $t_{14,\ 0,5\%}$ = 2,977,

$$e_0 = 2{,}977 \cdot \frac{1{,}60}{\sqrt{15}} = 1{,}2299$$

IC = $\bar{x} \pm e_0$ = 32,4 ± 1,2299

Exercícios (Costa Neto, Ed.2000, p.80)
Exercício 3 (continuação)

b. Variância da população:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

Para 95 %: $\chi^2_{14,\ 97,5\%} = 5{,}629$ $\chi^2_{14,\ 2,5\%} = 26{,}119$

$$\frac{14\cdot 2{,}56}{26{,}119} \le \sigma^2 \le \frac{14\cdot 2{,}56}{5{,}629}$$

Intervalo: $1{,}372 \le \sigma^2 \le 6{,}367$

Para 99 %: $\chi^2_{14,\ 99,5\%} = 4{,}075$ $\chi^2_{14,\ 0,5\%} = 31{,}319$

$$\frac{14\cdot 2{,}56}{31{,}319} \le \sigma^2 \le \frac{14\cdot 2{,}56}{4{,}075}$$

Intervalo: $1{,}144 \le \sigma^2 \le 8{,}795$

---

c. Desvio-padrão da população:

Para 95 %: $1{,}372 \le \sigma^2 \le 6{,}367 \rightarrow 1{,}1713 \le \sigma \le 2{,}523$

Para 99 %: $1{,}144 \le \sigma^2 \le 8{,}795 \rightarrow 1{,}0696 \le \sigma \le 2{,}9656$

Distribuições *t* de Student - valores de $t_{v,P}$, onde $P = P(\ t_v \ \geq \ t_{v,P}\ )$

v \ P	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617

Exercícios (Costa Neto, Ed.2000, p.81)

11. Sabe-se que a variação das dimensões fornecidas por uma máquina independem dos ajustes do valor médio. Duas amostras de dimensões das peças produzidas forneceram:

amostra 1	12,2	12,4	12,1	12,0	12,7	12,4
amostra 2	14,0	13,7	13,9	14,1	13,9	

Estabeleça um intervalo de 95 % de confiança para o desvio-padrão. **Solução:**

$$\boxed{IC: \sqrt{\frac{\nu \cdot s^2}{\chi^2_{\nu;\alpha/2}}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{\nu \cdot s^2}{\chi^2_{\nu;1-\alpha/2}}}}$$

amostra 1: $n_1 = 6$ $\bar{x} = 12{,}3$ $s_1 = 0{,}253$

amostra 2: $n_2 = 5$ $\bar{x} = 13{,}92$ $s_2 = 0{,}148$

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot s_1^2 + (n_2 - 1)\cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(6-1)\cdot(0{,}253)^2 + (5-1)\cdot(0{,}148)^2}{6+5-2}$$

$$s_p^2 = 0{,}0453 \qquad s_p = 0{,}2128$$

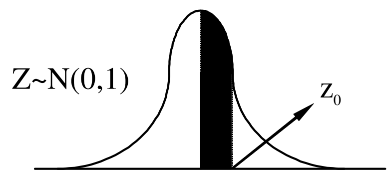
$$\nu = n_1 + n_2 - 2 = 6 + 5 - 2 = 9$$

$$\chi^2_{\nu,1-\alpha/2} = \chi^2_{9;97,5\%} = 2{,}700 \qquad \chi^2_{\nu,\alpha/2} = \chi^2_{9;2,5\%} = 19{,}023$$

$$\boxed{IC: \sqrt{\frac{(9)\cdot 0{,}0453}{19{,}023}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{(9)\cdot 0{,}0453}{2{,}700}}}$$

$$\boxed{IC: 0{,}147 \le \sigma \le 0{,}389}$$

Distribuição normal – valores de $P(0 \leq Z \leq z_0)$



z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000