Descrição de dados Multivariados

EFT

índice

1. Vetores e Matrices
   - Propriedades
2. Autovalores e Autovetores

Propriedades

- Associatividade $x + (y + z) = (x + y) + z$
- Commutatividade x+y = y+x
- Produto de uma constante com um vetor: Z= k*x
- Transposta de um vetor $x^{`}$
- produto escalar (ou interno):

$$x^{`}y = y^{`}x = \sum x_i y_i$$

- Norma quadrática:

$$||x|| = \sqrt{x^{`}x} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^s}$$

- coseno do ângulo entre dois vetores:

$$cos\theta = \frac{x^{`}y}{||x||\ ||y||}$$

- Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|x^{`} y| \leq ||x||\ ||y||$$

- ortogonalidade de vetores:

$$x^{`} y = ||x||\ ||y|| cos\theta = 0$$

dependência linear

- Um conjunto de vetores $x_1, ..., x_p$ é linearmente dependente (LD) se existem escalares $c_1, ..., c_p$ tais que

$$c_1 x_1 + ... + c_p x_p = 0$$

  onde 0 é o vetor nulo.
- em particular o vetor de zeros é LD de qualquer outro vetor.
- Se os vetores são LD, podemos expressar (se existirem) algum deles como C.L do resto: Suponha que $c_1 \neq 0$ chamamos os a_i's como

$$a_i = \frac{c_i}{c_1}$$

  temos então:

$$x_1 = a_2 x_2 + ... + a_p x_p$$

  dado que $a_1 x_1 + ... + a_p x_p = 0$

Espaços Gerados

Se os vetores não são LD, então LI.
Se tivermos p vetores LI, $(x_i, i = 1, ..., p)$ podemos expressar outro vetor x_{p+1} como

$$x_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i$$

Dado um conjunto de vetores (p) LI: $(x_1, ..., x_p) \in \mathcal{R}^n$, com $p \leq n$, chamamos de espaço gerado por esta família de vetores ao conjunto que contém todos os vetores $z \in \mathcal{R}^n$ que podem-se expressar como CL destes. O conjunto $(x_1, ..., x_p)$ é a família base geradora do espaço. Se z pertence a este espaço,

$$z = c_1 x_1 + ... + c_p x_p$$

- A dimensão de um espaço E_p se define como o número de vetores LI que a geram.
- Dizemos que x é ortogonal a E_p se x é ortogonal a todo vetor de E_p. I.e,

$$y \in E_p \quad sse: \; y^{`} x = 0$$

- chamamos de complemento ortogonal de E_p ($C(E_p)$), ao espaço que contém todos os vetores ortogonais a E_p.
- Então, se $x \in E_p$ e $y \in C(E_p)$,

$$x^{`} y = 0$$

- a dimensão de $C(E_p) = n - p$
- Em particular, o complemento ortogonal do espaço gerado por um vetor (que contém todos os vetores ortogoanis a ele) se denomina espaço nulo do vetor.

Matrices - propriedades

- O produto de matrices não é em geral commutativo. $AB \neq BA$
- $A(nxp) \times x(px1) = Ax = C(nx1)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $AB^{`} = B^{`}A$
- $AI = IA = A$

Produto de Kronecker

Resolve o problema de construir matrices grandes cujos elementos são matrices menores.
Dada duas matrices $A(k \times n)$ e $B(p \times q)$ o produto de kronecker $(\otimes)$ se efetúa multiplicando cada elemento da primeira matriz vezes todos os elementos da segunda.

$$dim(A \otimes B) = (k \times p) \times (n \times q)$$

- se c é escalar, $c \otimes A = A \otimes c = cA$
- se x e y são vetores, $x \otimes y^{`} = y^{`} \otimes x$
- $(A \otimes B)^{`} = A^{`} \otimes B^{`}$
- $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ supondo que AC e BD existam.

posto de uma matriz

O posto de uma matriz é o número máximo de vetores fila ou coluna LI.

- Se $A(n \times p)$ com $n \geq p$. O número máximo de vetores LI é p. (neste caso o posto é p). Neste caso dizemos que a matriz é de posto completo.
- $Posto(A(n \times p)) \leq min(n, p)$
- Se $posto(A(n \times p)) = min(n, p)$ então A é de posto completo
- $posto(A + B) \leq posto(A) + posto(B)$
- $posto(AB) \leq min\{posto(A), posto(B)\}$
- $posto(A^{`}A) = posto(AA^{`}) = posto(A)$

Determinantes

- Denomina-se Adjunto do elemento a_{ij} de uma matriz A ao escalar:

$$(-1)^{i+j} m_{ij}$$

- O determinante da matriz A é definido como:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} m_{ij}$$

propriedades

- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
- $|A^{`}| = |A|$
- se A e B são quadradas

$$|AB| = |A|\ |B|$$

- Se A é não singular

$$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} \quad \text{ou seja} \quad |A|\ |A^{-1}| = 1$$

- Se
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$
onde A_{11} e A_{22} são matrizes quadradas, então:
$$|A| = |A_{11}|\ |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}| \quad ou$$
$$|A| = |A_{22}|\ |A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$$
- Sejam $B(p \times n)$, $C(n \times p)$ e $A(p \times p)$ não singular,
$$|A + BC| = |A^{-1}|\ |I_p + A^{-1}BC| \quad ou$$
$$|A + BC| = |A^{-1}|\ |I_n + CA^{-1}B|$$

- caso especial:

$$|A + bb^{`}| = |A|(1 + b^{`}A^{-1}b)$$

- Seja $b(p \times 1)$ e $A(p \times p)$ não singular:

$$|A + bb^{`}| = |A|(1 + b^{`}A^{-1}b)$$

- Se $B(p \times n)$ e $C(n \times p)$ então:

$$|I_p + BC| = |I_n + CB|$$

- a área S entre dois vetores v_1 e v_2 pode ser definido como:

$$S = ||v_2||.||v_1||sen\theta$$

- se permutarmos duas filas ou colunas entre si, mudará apenas o sinal do determinante.
- Se uma fila ou coluna for CL dos outros, se supõe então que o posto é menor que n e a matriz é chamada de **Singular**.
- Se A é diagonal ou triangular

$$|A| = \prod_{i=1}^{p} a_i i$$

Traço de uma matriz

$$tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$$

Propriedades:

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$
- $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$ se os produtos existirem
- se C é simétrica,

$$tr(C^2) = tr(CC) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$$

Matriz de dados

$\mathtt{X} = \{x_{ij}\}$

onde $i = 1, ..., n$(indivíduo), $j = 1, ..., p$ (variável)

propriedades

- $tr(\lambda) = \lambda$
- $tr(AB) = tr(BA)$
- $\sum_i x_i^{`} A x_i = tr(AT)$ onde $T = \sum_i x_i x_i^{`}$
- $tr(B^{-1}AB) = tr(A)$

Formas Quadráticas

Se transformarmos um vetor x mediante $y = Bx$, a norma ao quadrado de y será:

$$y^{`} y = x^{`} BBx = x^{A} x \geq 0$$

onde $A = B^{`} B$ é uma matriz quadrada e simétrica.
Chamamos de Forma Quadrática a uma expressão escalar do tipo

$$x^{`} Ax$$

a expressão geral de uma forma quadrática é:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

- Uma matriz A é semidefinida positiva se qualquer forma quadrática formada a partir dela é um número não negativo (para qualquer $x \neq 0$.
- Se a forma quadrática é sempre positiva, diremos que a matriz A é definida positiva

Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada A não singular de ordem n, define-se A^{-1} a uma matriz de ordem n não singular, tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{`})^{-1} = (A^{-1})^{`}$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

Inversa da soma de matrices

Sejam $A(n \times n)$, $C(p \times p)$ matrices não singulares. Sejam também $B(n \times p)$ e $D(p \times n)$ duas outras matrices. Então:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$$

se $c = 1$ e B e D vetores (b e $d^{`}$ respectivamente)

$$(A + bd^{`})^{-1} = A^{-1} - A^{-1}b(d^{`}A^{-1}b + 1)^{-1}d^{`}A^{-1}$$

Quando A e C tem a mesma ordem:

$$(A + C)^{-1} = C^{-1}(A^{-1} + C^{-1})^{-1}A^{-1}$$

Matrices ortogonais

Verificamos que uma matriz C não singular, é ortogonal se

$$C^{`}C = I$$

isto implica que

$$C^{`} = C^{-1}$$

- $A^{-1} = A^{`}$
- $A^{`}A = I$
- $|A| = \pm 1$
- Se A e B são ortogonais, $C = AB$ também é ortogonal.

Autovetores

u é um autovetor de A se

$$Au = \lambda u$$

onde λ é um escalar.

- Se u é um autovetor e multiplicarmos por qualquer $a \neq 0$ então au será um autovetor de A
- $||u|| = 1$ será um autovetor normalizado, isto indica que $-u$ é também um autovetor.
- para calcular $Au = \lambda u$ então $(A - \lambda I)u = 0$ terá solução não nula se e somente se $(A - \lambda I)$ for não singular.
- As raices da equação polinómica

$$|A - \lambda I| = 0$$

  serão os autovalores de A

propriedades

- se λ é um autovalor de A, λ^r é um autovalor de A^r
  em particular, se A é não singular, e $\lambda \neq 0$, λ^{-1} é um autovalor de A^{-1}
- se λ é um autovalor de A, então λ também é autovalor de $A^{`}$
- $tr(A) = \sum_i \lambda_i$
- $|A| = \prod_i \lambda_i$
- Se P é não singular, as matrizes A e $P^{-1}AP$ tem os mesmos autovalores

- As matrices A e $A + I$ tem os mesmos autovetores, e se λ é um autovalor de A, $\lambda \pm 1$ é um autovalor de $A \pm I$
- As matrices quadradas ABC, BCA e CAB onde A B e C são gerais e os produtos existem, tem os mesmos autovalores não nulos.
- Se A é triangular, os autovalores são os elementos da diagonal.
- sejam $A(n \times n)$ e $B(p \times p)$, os np autovetores de $A \otimes B$ são o produto de kronecker dos autovetores de A e B

Diagonalização de matrices simétricas