Tipos Especiais de Listas

Árvores Vermelho-Preto

Sumário

- Introdução
- Propriedades
- Inserção
- Remoção

Sumário

- Introdução

Introdução

- As árvores vermelho-preto são árvores binárias de busca “aproximadamente” balanceadas

- Também conhecidas como rubro-negras ou red-black trees

- Foram inventadas por Bayer sob o nome “Árvores Binárias Simétricas” em 1972, 10 anos depois das árvores AVL

Introdução

- As árvores vermelho-preto possuem um flag extra para armazenar a cor de cada nó, que pode ser Vermelho ou Preto

- Além deste, cada nó será composto ainda pelos seguintes campos
  - info (os “dados” do nó)
  - fesq (filho esquerdo)
  - fdir (filho direito)
  - pai

Introdução

- Restringindo o modo como os nós são coloridos desde a raiz até uma folha, assegura-se que nenhum caminho será maior que duas vezes o comprimento de qualquer outro, dessa forma, a árvore é aproximadamente balanceada

Introdução

- Uma árvore vermelho-preto com n nós tem altura máxima

$$2 \log(n + 1)$$

- Por serem "balanceadas" as árvores vermelho-preto possuem complexidade logarítmica em suas operações

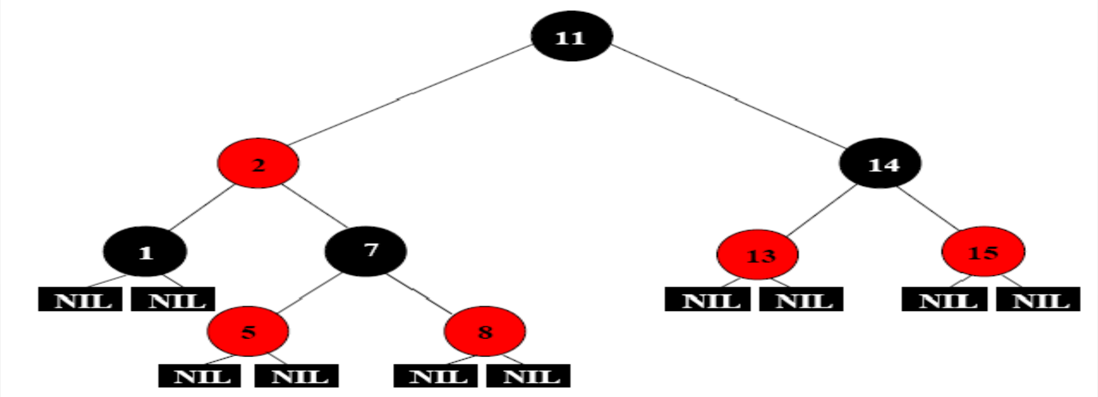
$$O(\log n)$$

Sumário

- Propriedades

Propriedades

- Todo nó é vermelho ou preto
- A raiz é preta
- Toda folha externa (nó NIL) é preta
- Se um nó é vermelho, então ambos seus filhos são pretos
- Todos os caminhos a partir da raiz da árvore até suas folhas passa pelo mesmo número de nós pretos



Propriedades

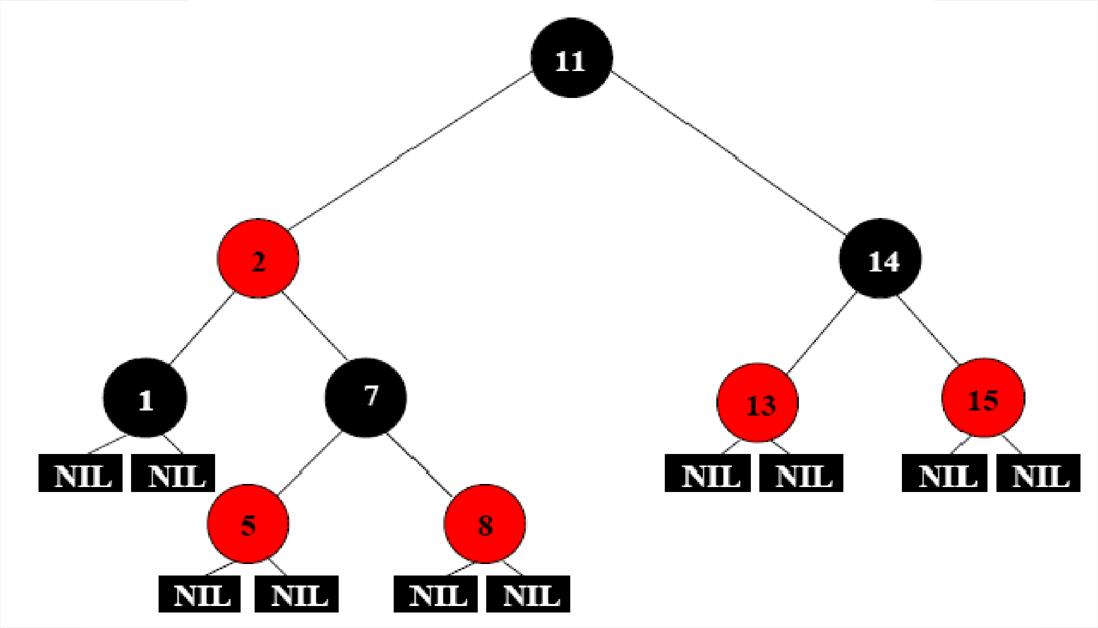
- Um nó que satisfaz as propriedades anteriores é denominado equilibrado, caso contrário é dito desequilibrado

- Em uma árvore vermelho-preta todos os nós estão equilibrados

- Uma condição óbvia obtida das propriedades é que num caminho da raiz até uma sub-árvore vazia não pode existir dois nós vermelhos consecutivos

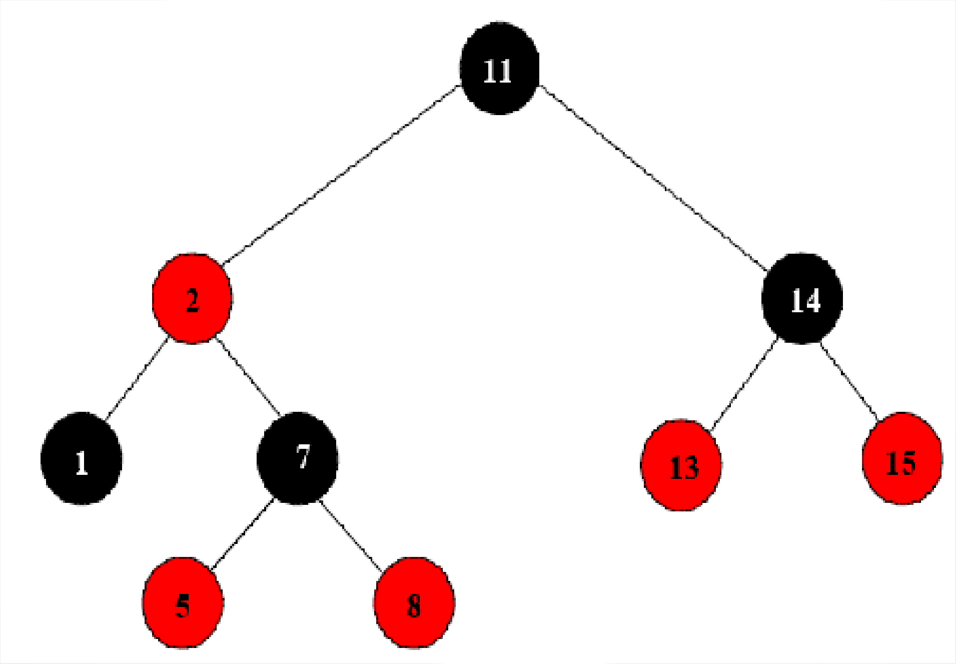
Propriedades

- Formas de representação



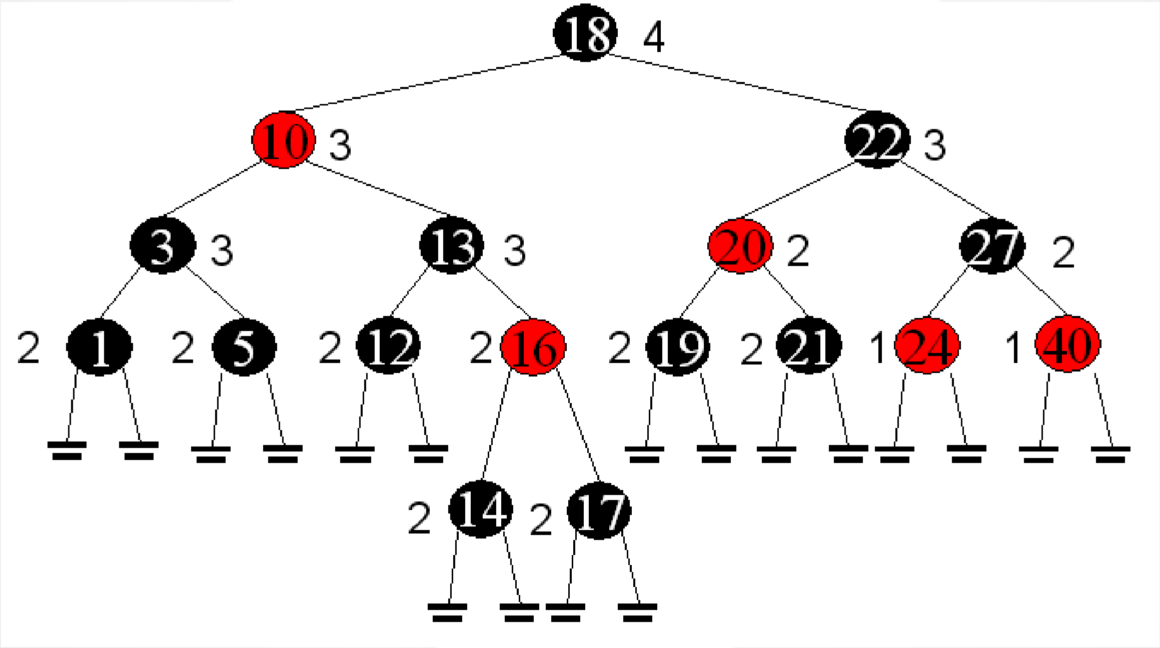
Propriedades

- Formas de representação



Propriedades

- Altura negra: é número de nós negros encontrados até qualquer nó folha externo



Propriedades

Lema 1

- Seja x a raiz de uma (sub)árvore vermelho-preta, então essa terá no mínimo $2^{an(x)} - 1$ nós internos, onde $an(x)$ é a altura negra de x

- Prova por indução
  - Caso base: Um nó de altura 0 (i.e., nó-folha externo) tem $0 = 2^0 - 1$ nós internos
  - Caso genérico: Um nó x de altura $h > 0$ tem 2 filhos com altura negra $an(x)$ ou $an(x) - 1$, conforme x seja vermelho ou negro. No pior caso, x é negro e as subárvores enraizadas em seus 2 filhos têm $2^{an(x)-1} - 1$ nós internos cada e x tem $2(2^{an(x)-1} - 1) + 1 = 2^{an(x)} - 1$ nós internos

Propriedades

Lema 2

- Uma árvore vermelho-preta com n nós tem no máximo altura $2 \times \log_2(n+1)$

- Prova
  - Se uma árvore tem altura h, a altura negra de sua raiz será no mínimo $h/2$ (pelo propriedade **(4)**) e a árvore terá $n \geq 2^{h/2} - 1$ nós internos (Lema 1)
  - Como consequência, a árvore tem altura $O(\log n)$ e as operações de busca, inserção e remoção podem ser feitas em $O(\log n)$

Sumário

- Inserção

Inserção

- A operação de inserção em uma árvore vermelho-preta começa por uma busca da posição onde o novo nó deve ser inserido

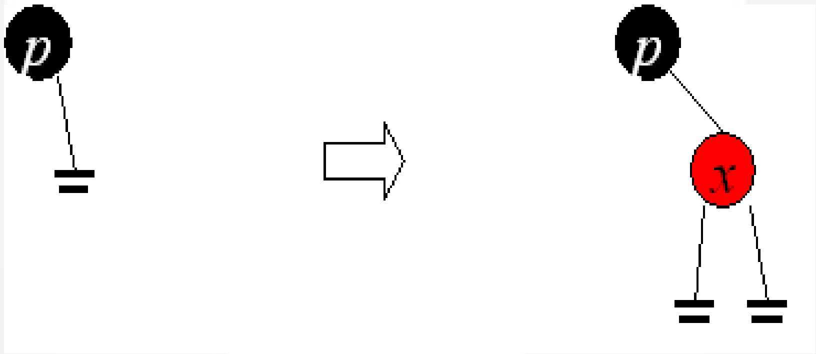
- Essa inserção inicial segue os princípios de uma inserção em Árvore Binária de Busca

- Após a inserção um conjunto de propriedades é testado, e se a árvore não satisfizer essas propriedades, são realizadas rotações e/ou ajustes de cores, de forma que a árvore permaneça balanceada

Inserção

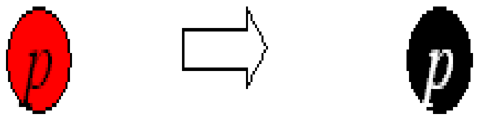
- Um nó é inserido sempre na cor vermelha, assim, não altera a altura negra da árvore

- Se o nó fosse inserido na cor preta, invalidaria a propriedade (5), pois haveria um nó preto a mais em um dos caminhos



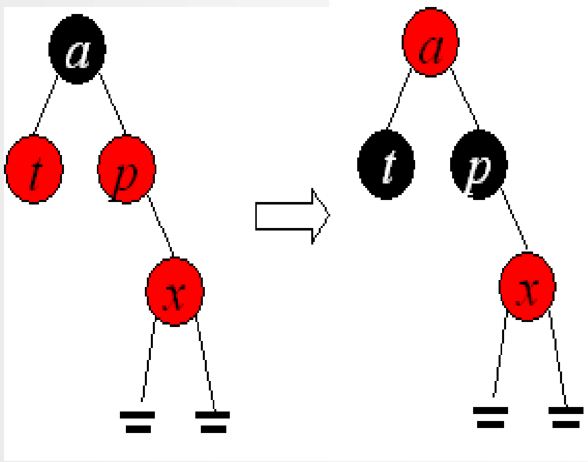
Inserção

- Caso a inserção seja feita em uma árvore vazia, basta alterar a cor do nó para preto, satisfazendo assim a propriedade número (2)



Rotações e Recolorações

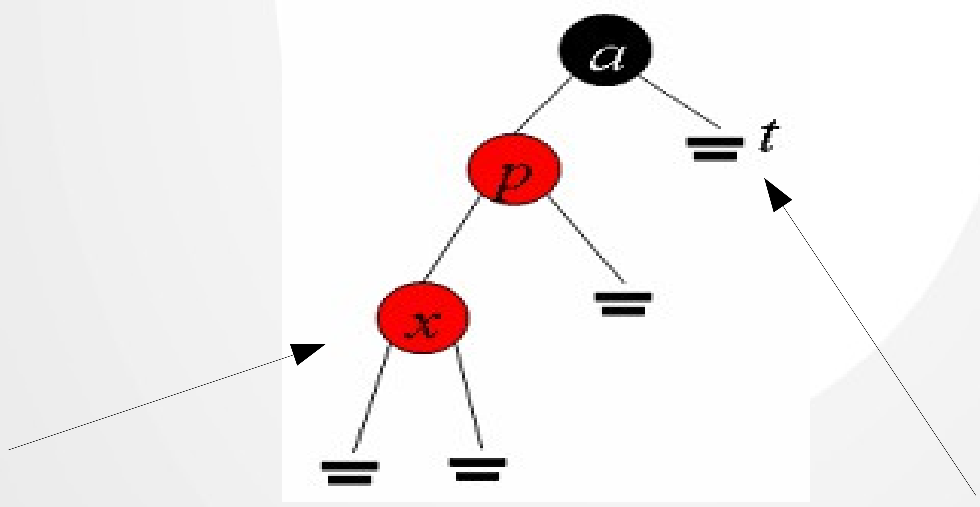
- Caso 1: Suponha agora que p é vermelho e a, o pai de p (e avô de x) é preto. Se t, o irmão de p (tio de x) é vermelho, ainda é possível manter o critério (4) apenas fazendo a recoloração de a, t e p



Obs.: Se o pai de a é vermelho, o rebalanceamento tem que ser feito novamente considerando a como nó inserido

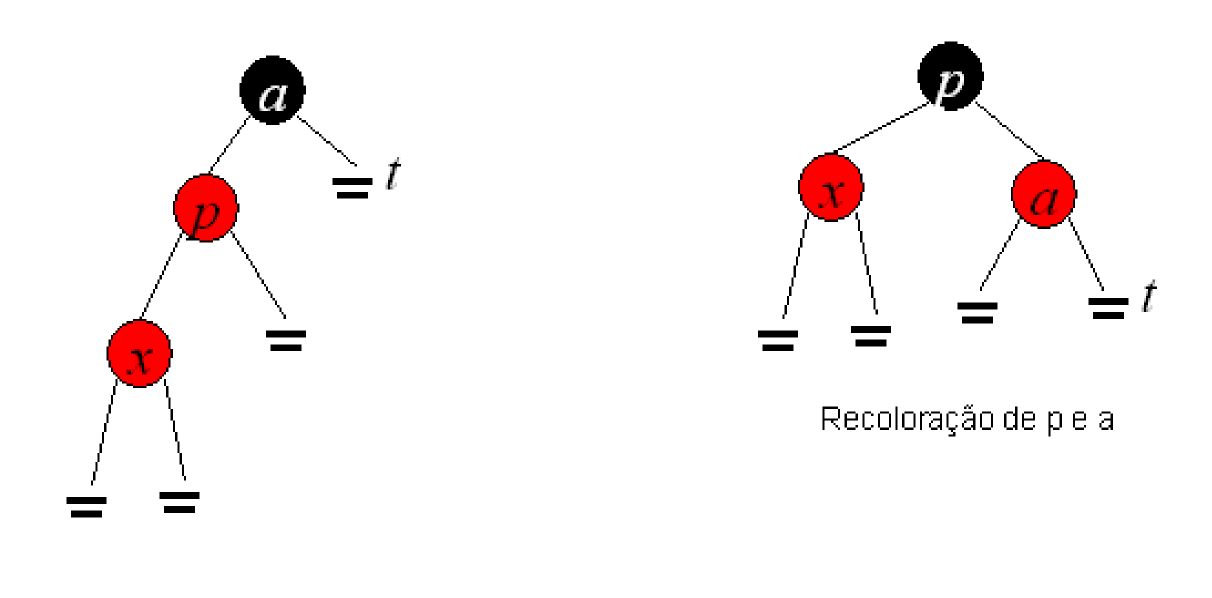
Rotações e Recolorações

- Caso 2: Suponha que p é vermelho, seu pai a é preto e seu irmão t é preto. Neste caso, para manter o critério (4) é preciso fazer rotações envolvendo a, t, p e x.
  - Há 4 sub-casos que correspondem às 4 rotações possíveis



Rotações e Recolorações

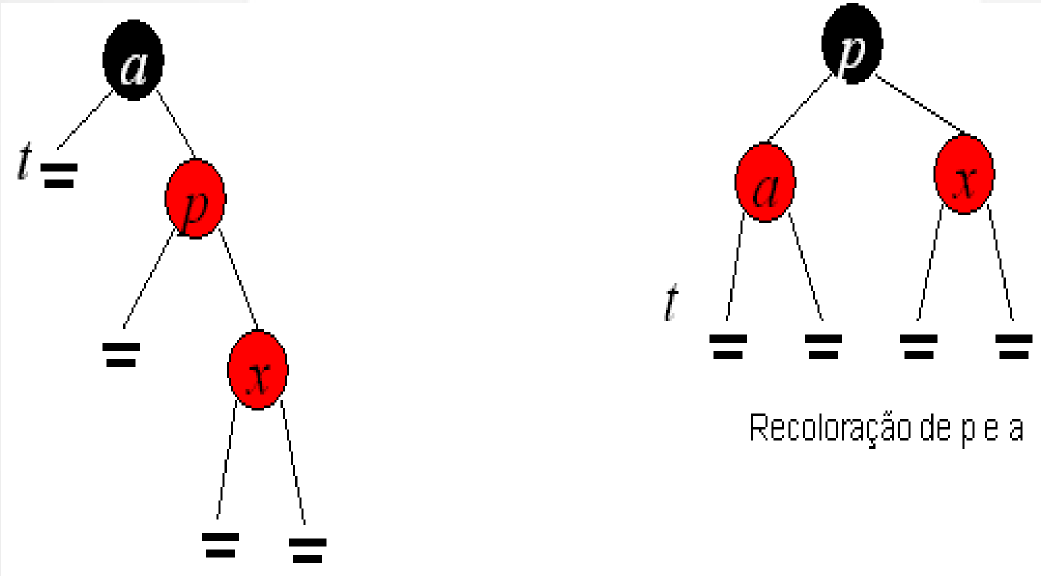
- Caso 2a: O nó x é filho esquerdo de p, e p é filho esquerdo de a
  - Aplicar Rotação Direita



- Os nós a, p equivalem aos nós a,b em árvore AVL

Rotações e Recolorações

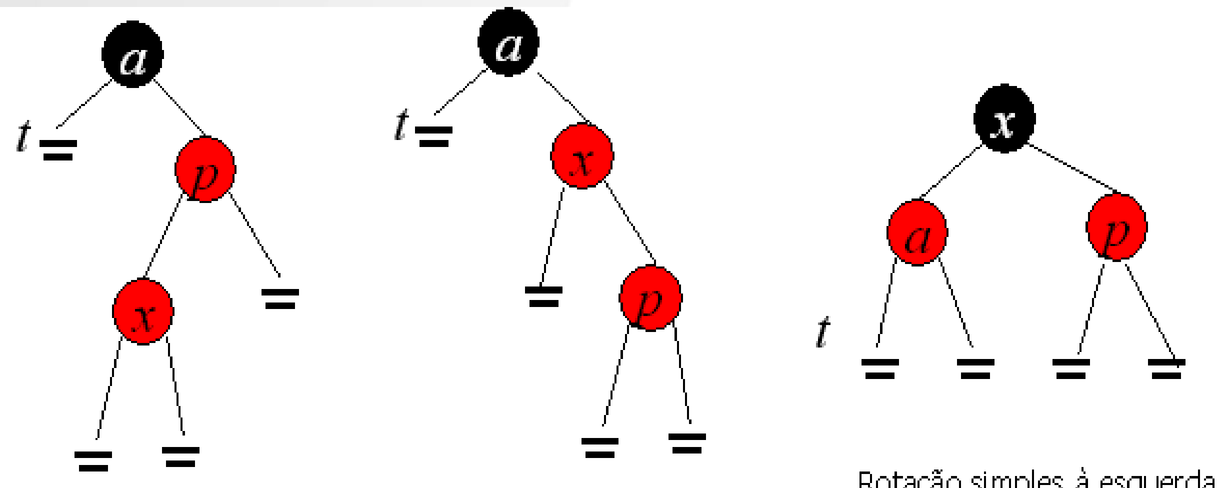
- Caso 2b: O nó x é filho direito de p, e p é filho direito de a
  - Aplicar Rotação Esquerda



- Os nós a, p equivalem aos nós a,b em árvore AVL

Rotações e Recolorações

- Caso 2c: O nó x é filho esquerdo de p, e p é filho direito de a
  - Aplicar Rotação Dupla Esquerda



Rotação simples à direita

Rotação simples à esquerda

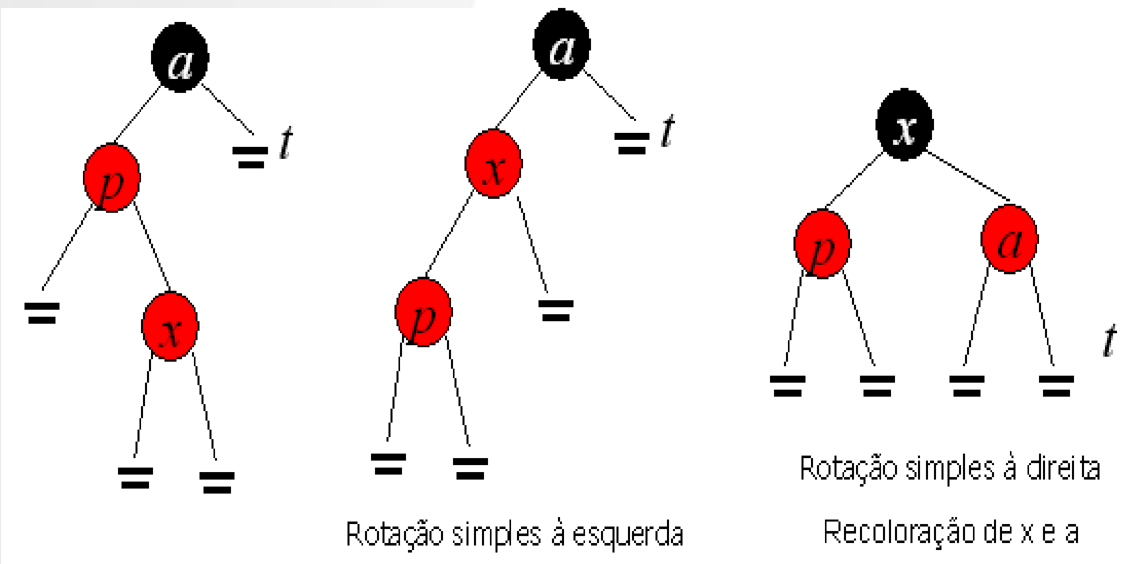
Recoloração de x e a

Fazendo uma analogia com árvore AVL, veja que o nó a possui dois nós consecutivos vermelho, logo poderíamos pensar como fator de balanceamento igual a 2

- Os nós a, p, x equivalem ao nós a, b, c em árvore AVL

Rotações e Recolorações

- Caso 2d: O nó x é filho direito de p, e p é filho esquerdo de a
  - Aplicar Rotação Dupla Direita

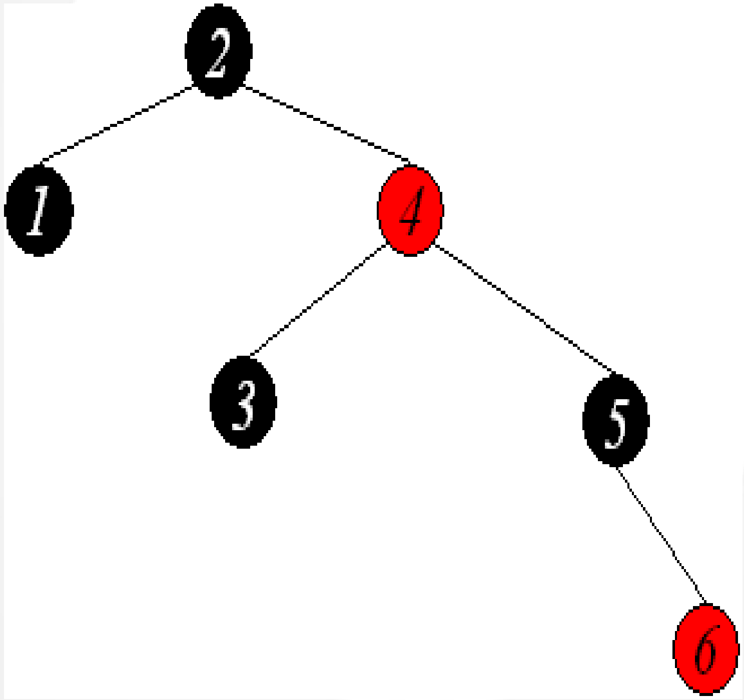


Fazendo uma analogia com árvore AVL, veja que o nó a possui dois nós consecutivos vermelho, logo poderíamos pensar como fator de balanceamento igual a 2

- Os nós a, p, x equivalem ao nós a, b, c em árvore AVL

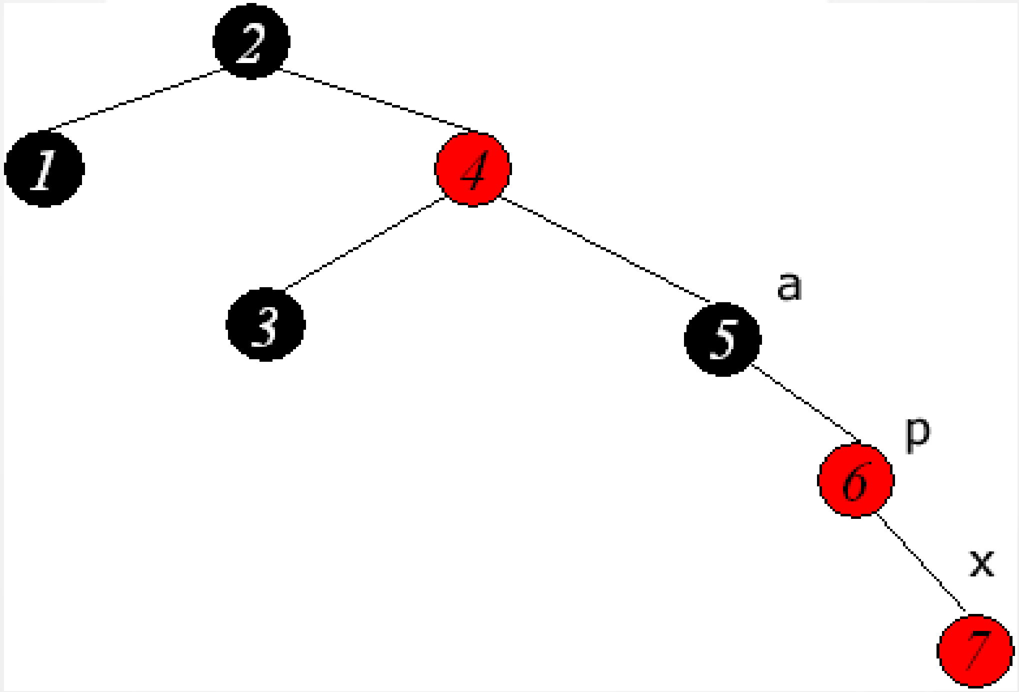
Exemplo 1

- Estado inicial da árvore
  - Vamos inserir um nó com valor 7



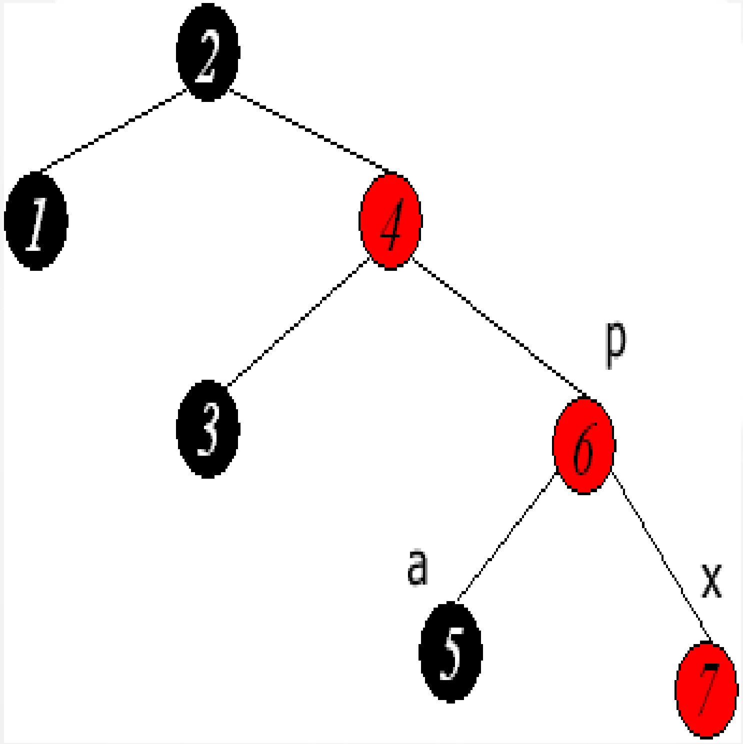
Exemplo 1

- O tio t do elemento inserido x é preto, seu pai p é filho direito de a e x é filho direito de p
  - Caso 2b: requer rotação esquerda em a



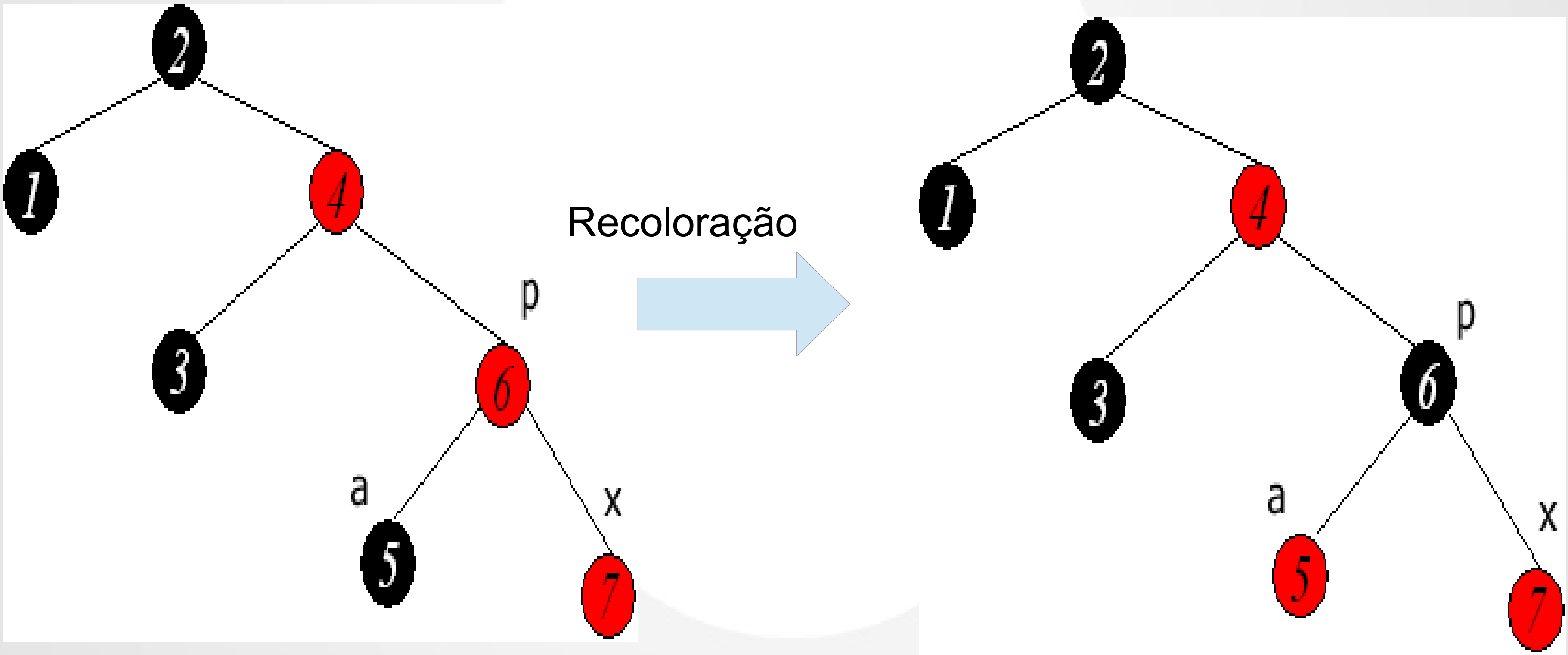
Exemplo 1

- Violação da propriedade pelos nós p e x– recoloração



Exemplo 1

- Recoloração dos nós p e x

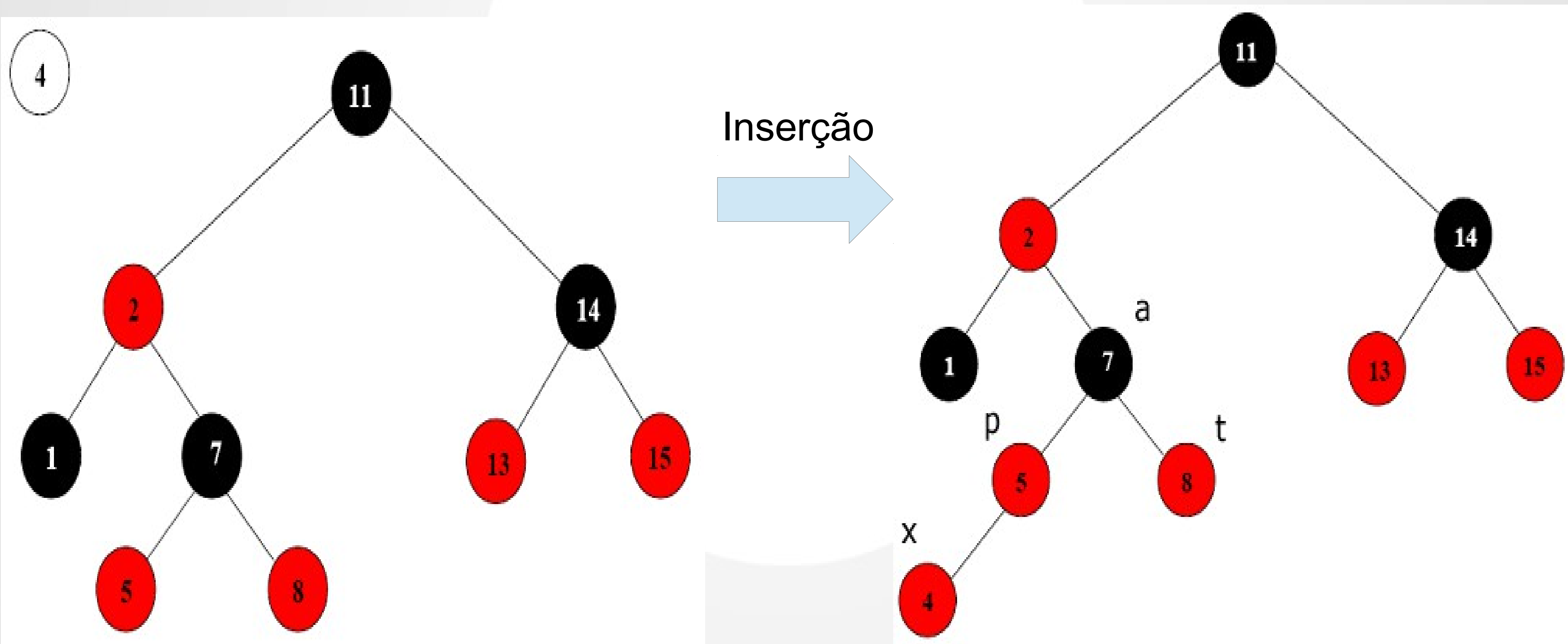


Exemplo 2

- Estado inicial da árvore
  - Vamos inserir o nó com valor 4

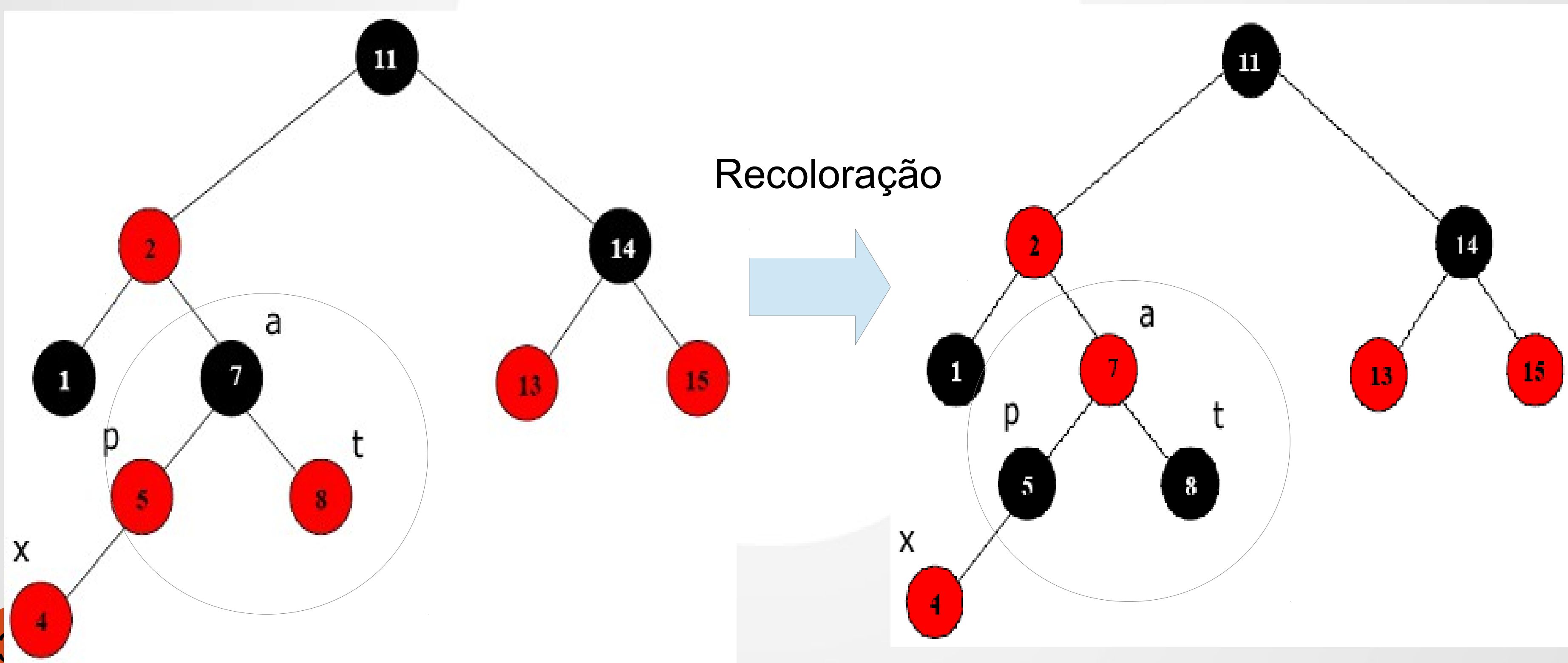
Estado Inicial

Após a inserção



Exemplo 2

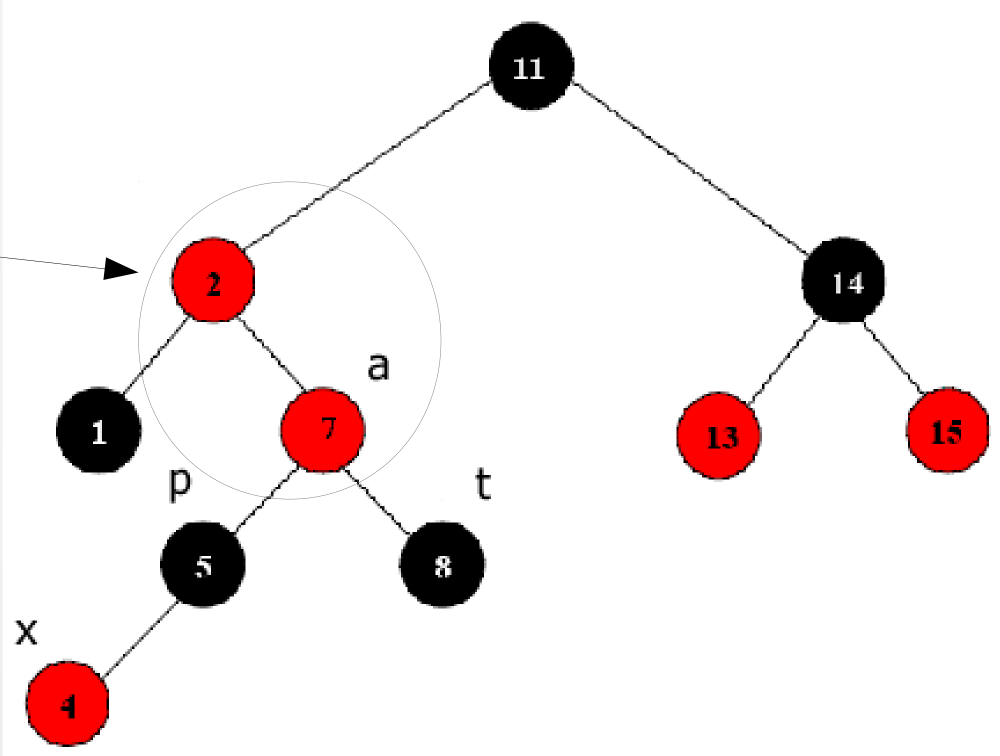
- O tio t do elemento inserido x é vermelho
  - Caso 1: requer a recoloração dos nós a, t e p
- Violação da propriedade (4)



Exemplo 2

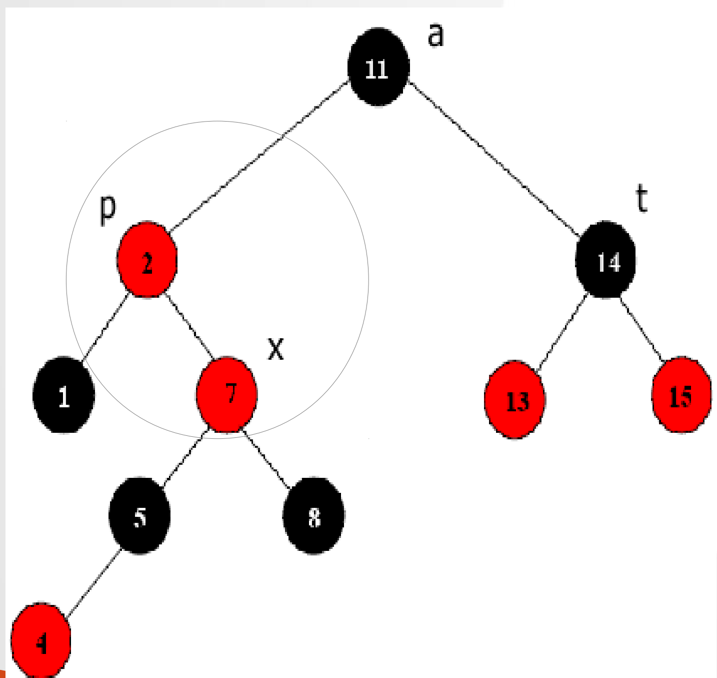
- Nós p e t passam a ser pretos e o nó a passa a ser vermelho
- Violação da propriedade (4) entre os nós a e seu pai

Problema

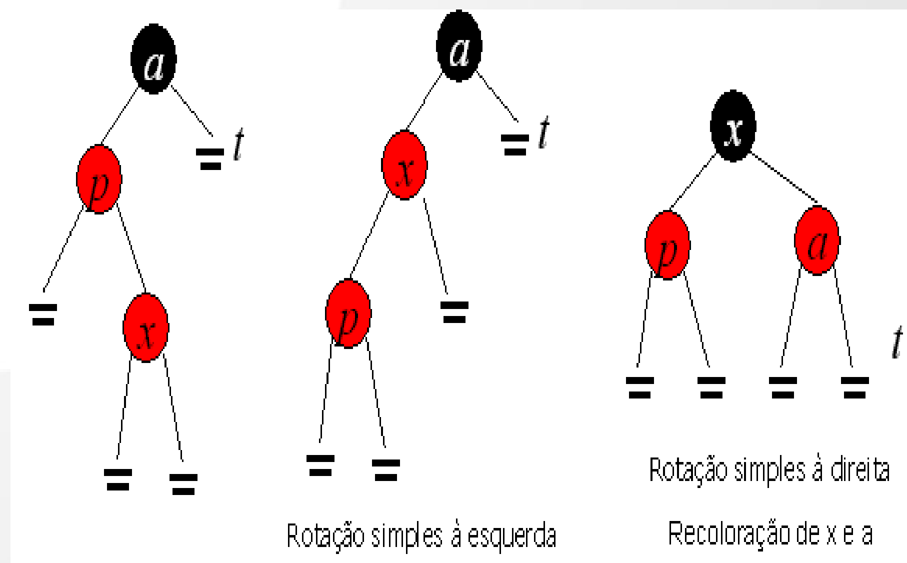


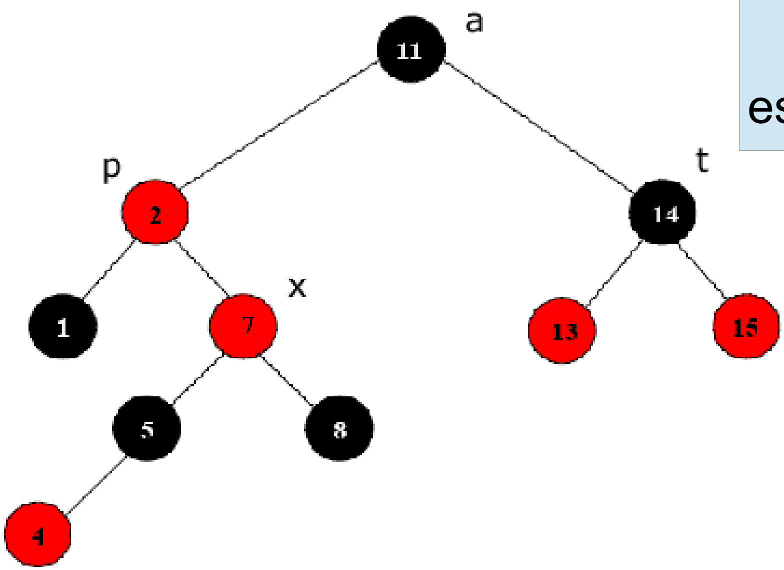
Exemplo 2

- O tio t do elemento inserido x é preto e o elemento inserido é um filho da direita de p
  - Caso 2d: requer rotação dupla direita – rotação esquerda em p e rotação direita em x

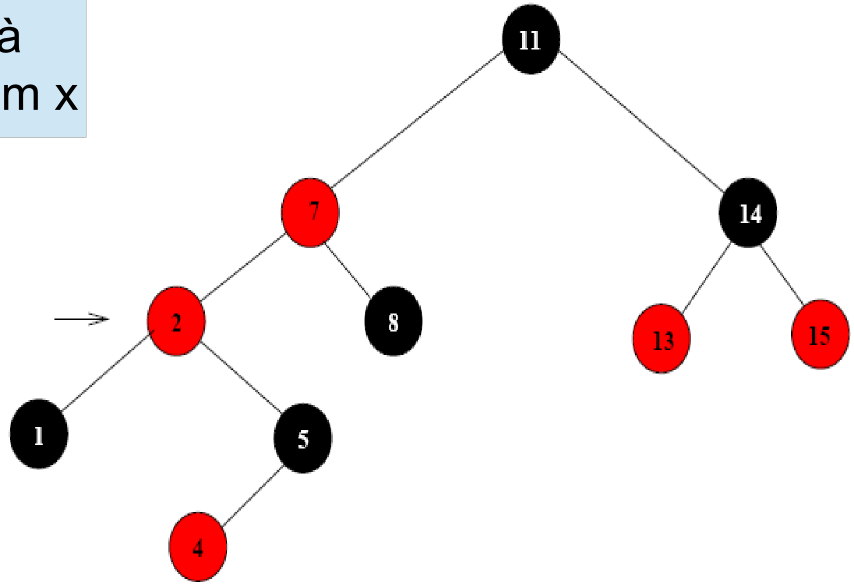


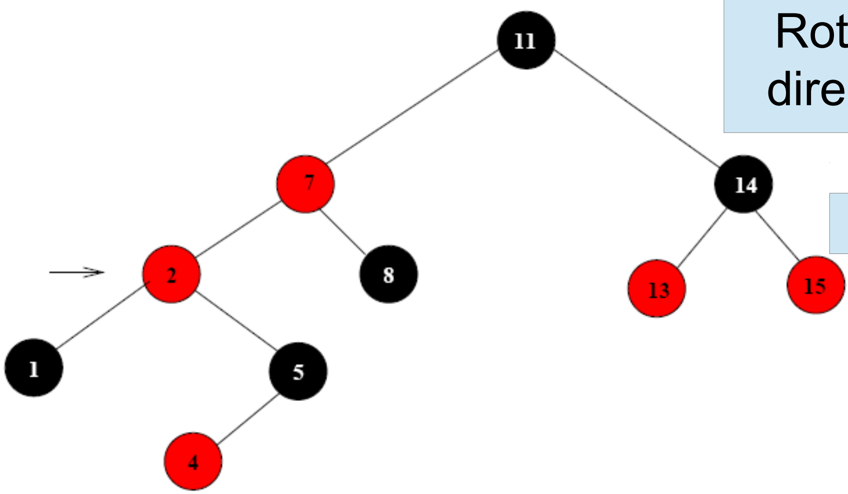
Análogo ao caso 2d, visto anteriormente



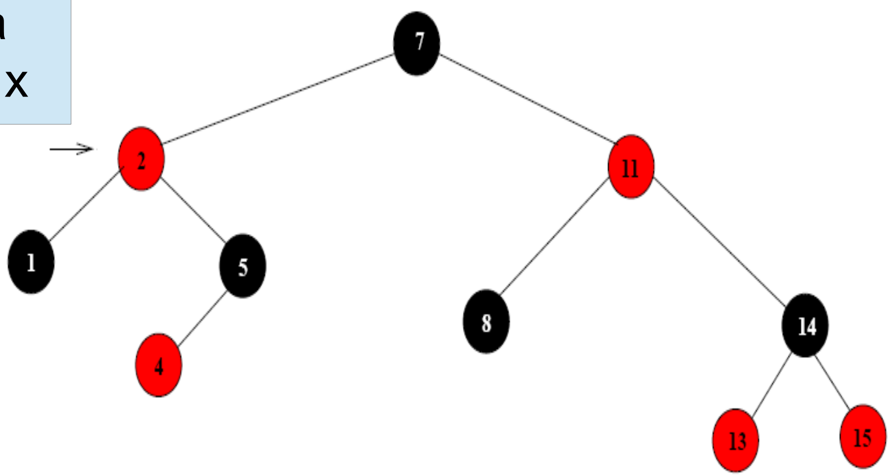


Rotação à esquerda em x

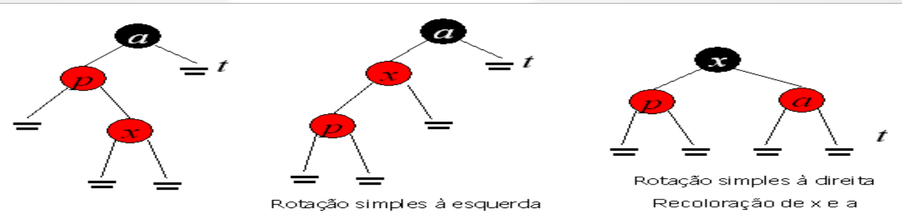




Rotação à direita em x

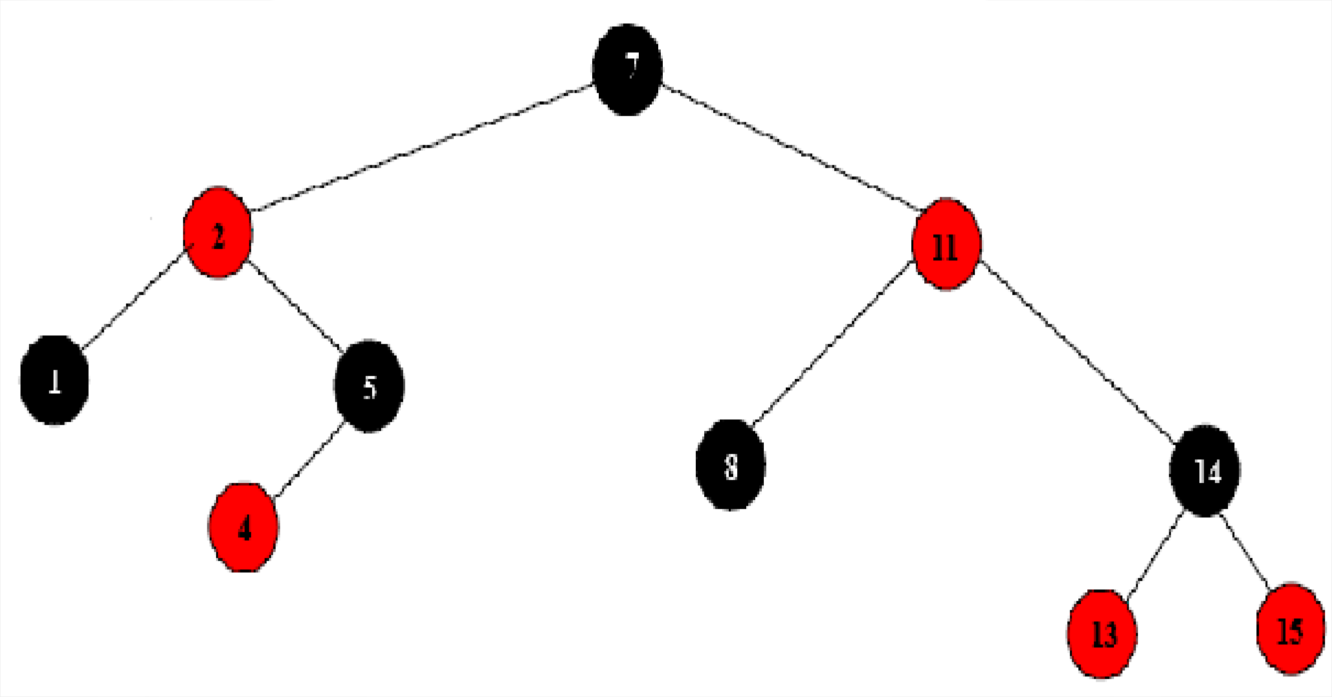


Caso 2d



Exemplo 2

- O Processo termina porque já atingiu a raiz da árvore



Complexidade da Inserção

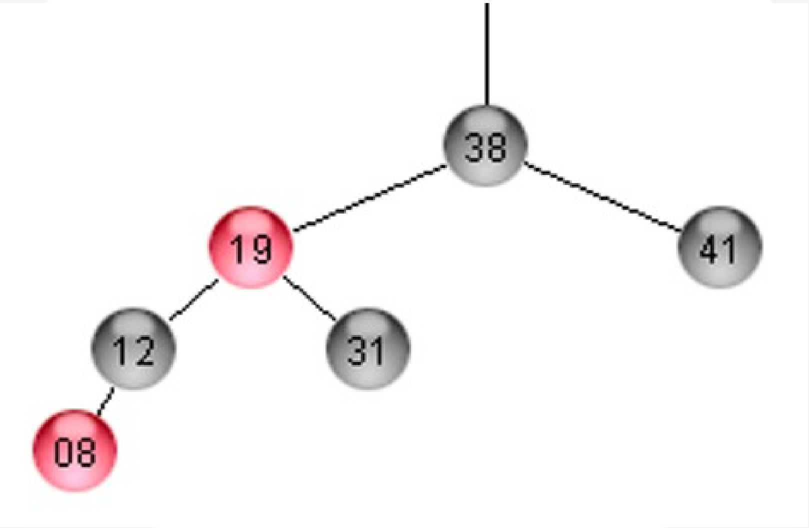
- Rebalanceamento tem custo O(1)
- Rotações têm custo O(1)
- Inserção tem custo O(log n)

Exercício

- Inserir
  - 41 - 38 - 31 - 12 - 19 - 8

Exercício

- Inserir
  - 41 - 38 - 31 - 12 - 19 - 8



Sumário

- Remoção

Remoção

- A remoção nas árvores vermelho-pretas se inicia com uma etapa de busca e remoção como nas árvores binárias de busca convencionais

- Então se alguma propriedade vermelho-preta for violada, a árvore deve ser rebalanceada

Remoção

- Remoção Efetiva
  - Após as operações de rotação/alteração de cor necessárias, a remoção do nó é efetivamente realizada,restabelecendo-se as propriedades da árvore

- Remoção Preguiçosa
  - Consiste em apenas marcar um determinado nó como removido, sem efetivamente retirá-lo da árvore

Remoção

- Caso a remoção efetiva seja de um nó vermelho, esta é realizada sem problemas, pois todas as propriedades da árvore se manterão intactas

- Se o nó a ser removido for preto, a quantidade de nós pretos em pelo menos um dos caminhos da árvore foi alterado, o que implica em que algumas operações de rotação e/ou alteração de cor sejam feitas para manter o balanceamento da árvore

Remoção

Nó a ser removido é Intermediário

Não há problema por que as cores permanecem iguais
Existe apenas troca de valores

Nó a ser removido é folha

Nó é vermelho

Ok. Não altera o balanceamento da árvore

Nó é preto

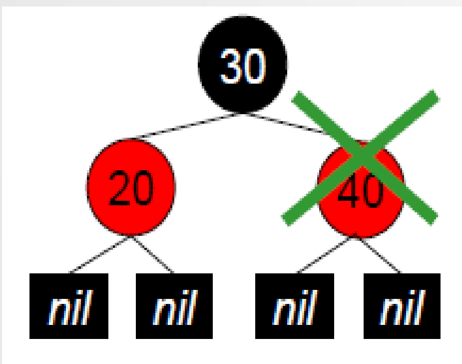
Problema: Duplo preto

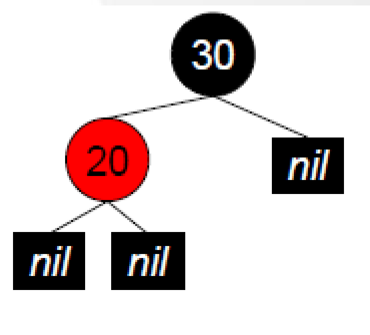
Caso 0

Remoção do nó vermelho

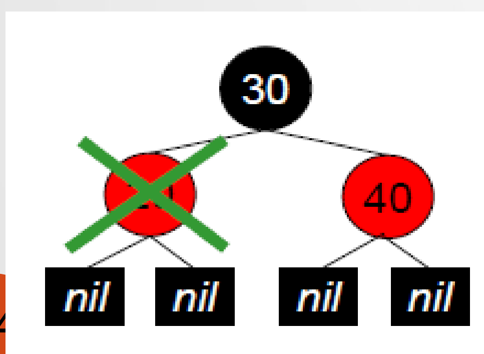
Nenhuma alteração será necessário

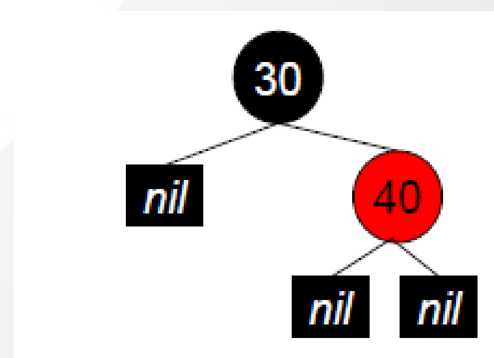
Remoção do valor 40





Remoção do valor 20





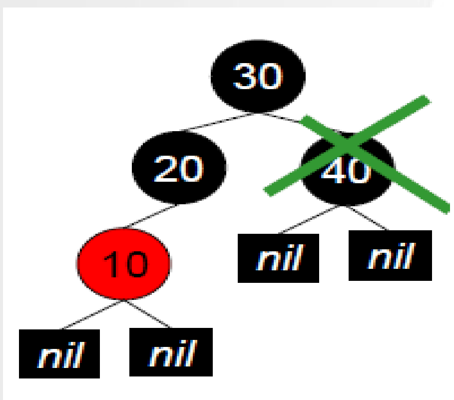
Nó removido é preto

Caso 01

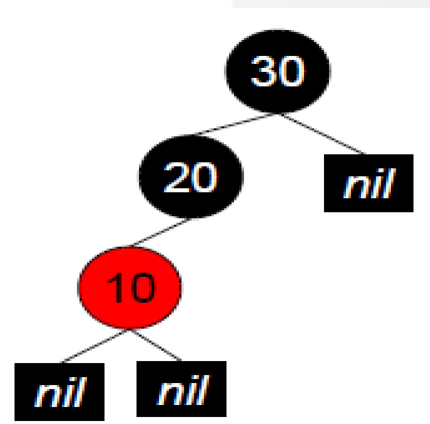
Irmão é preto e tem filho vermelho

Rotação e recoloração

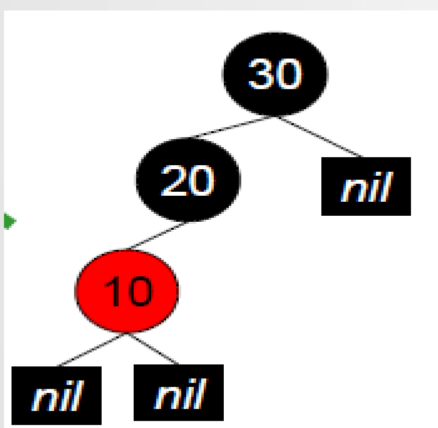
Remoção do valor 40



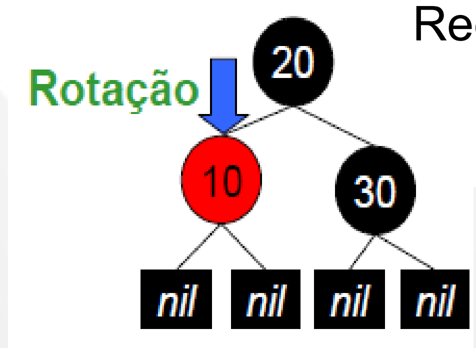
Remoção



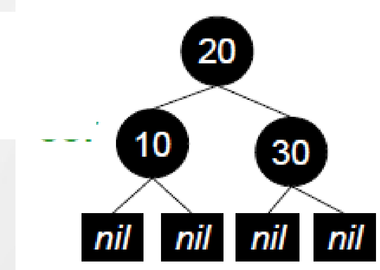
Viola a regra - Todos os Caminhos a partir da raiz da árvore até suas folhas passa pelo mesmo número de nós pretos



Rotação à direita



Recoloração



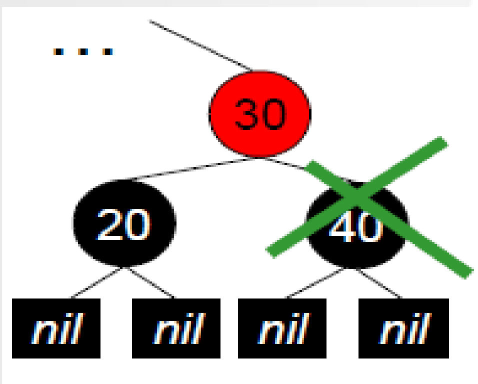
Caso 02

Irmão é preto e tem dois filhos preto

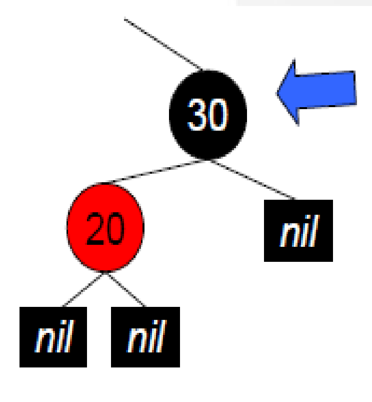
Recoloração

Remoção do valor 40

Ao remover



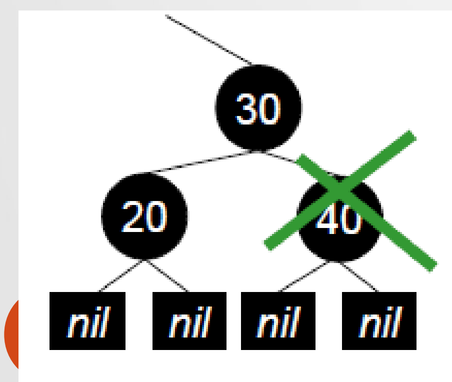
Remoção/
Recoloração



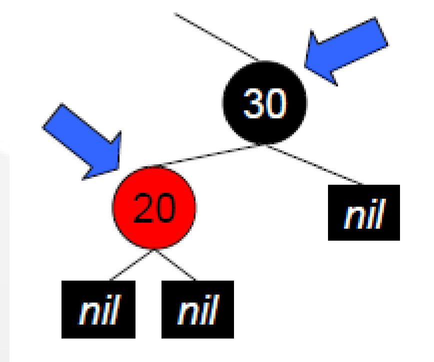
Viola a regra -
Todos os Caminhos a partir da raiz da árvore até suas folhas passa pelo mesmo número de nós pretos

Remoção do valor 40

Ao remover



Remoção/
Recoloração

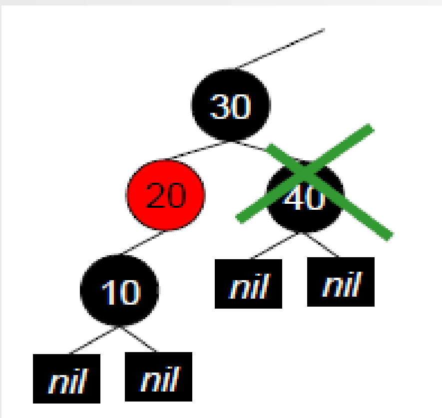


Nó removido é preto

Caso 03

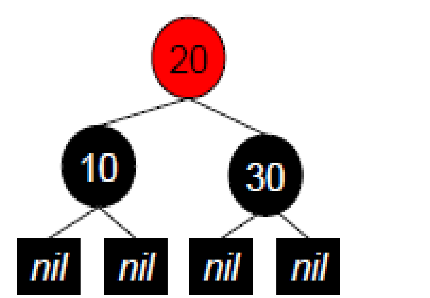
Irmão é vermelho → Rotação

Remoção do valor 40



Ao remover

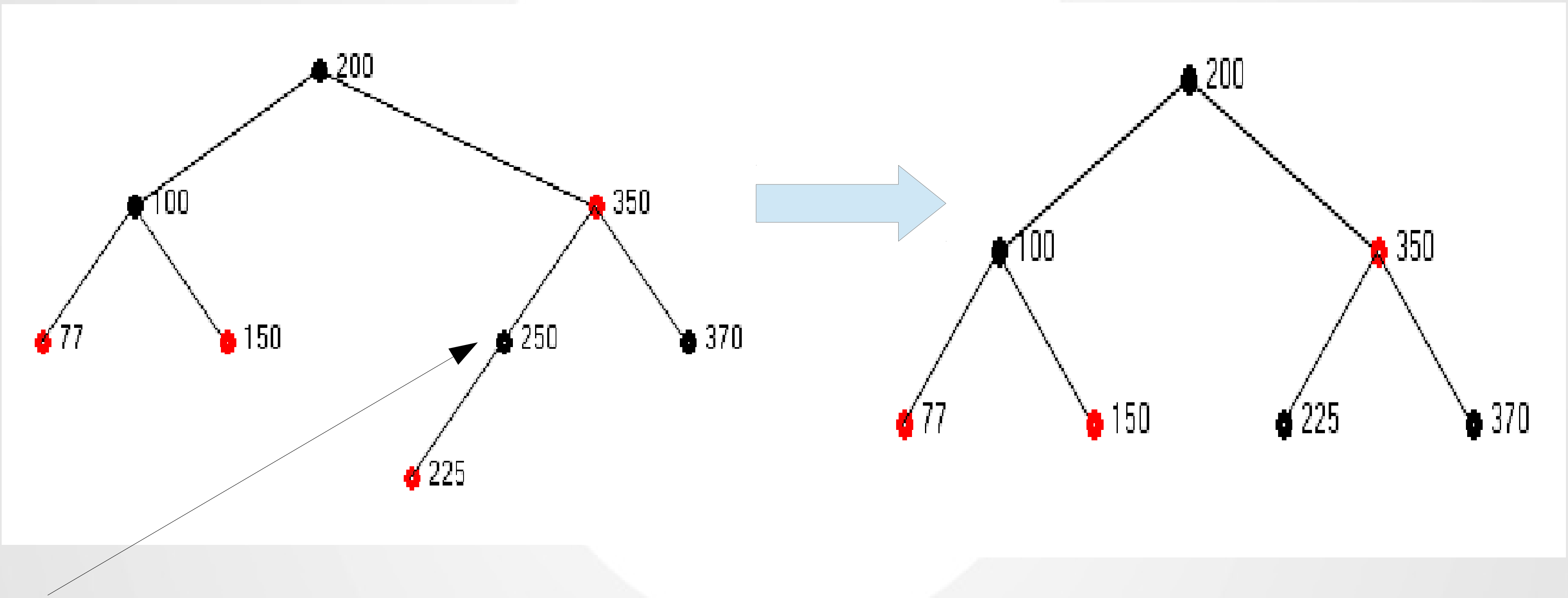
Rotação



Viola a regra - Todos os Caminhos a partir da raiz da árvore até suas folhas passa pelo mesmo número de nós pretos

Exemplo 1

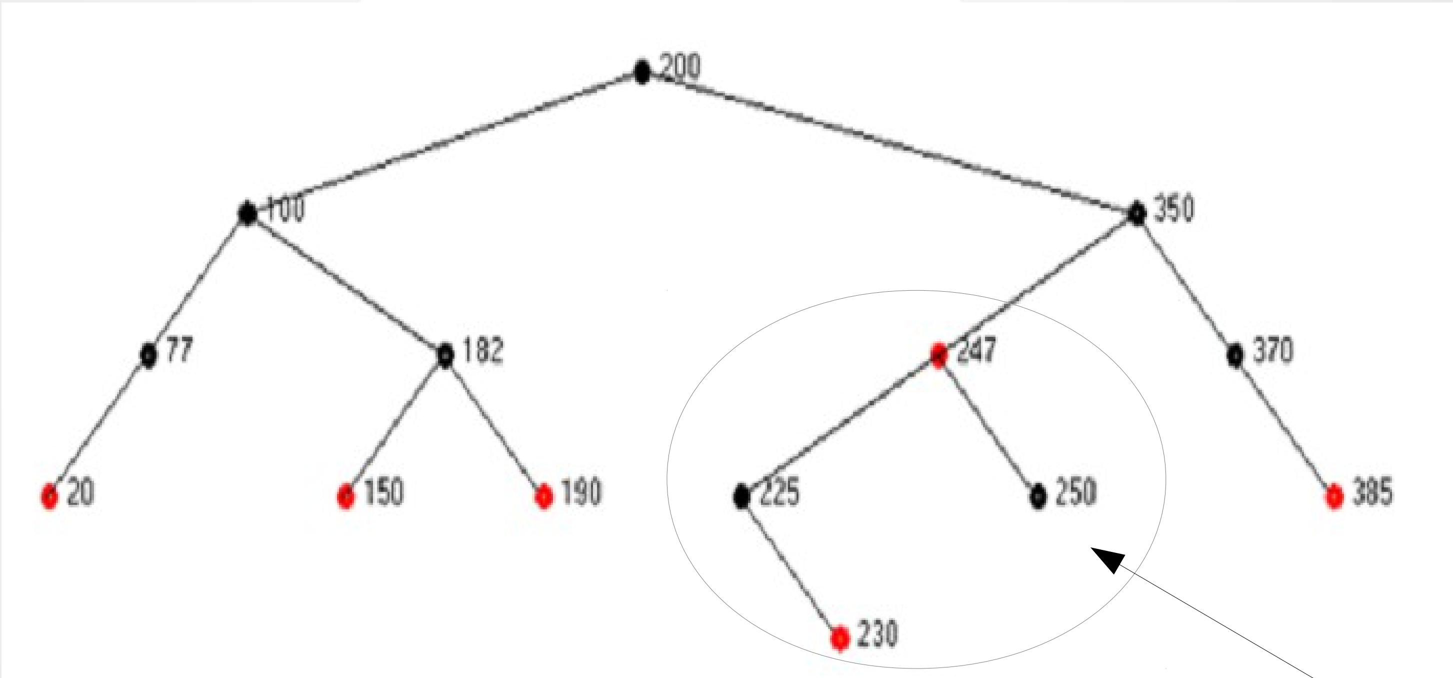
- Remover o nó 250



Troca os valores e mantém as cores

Exemplo 2

- Remover o nó 250



Nó a ser removido é folha

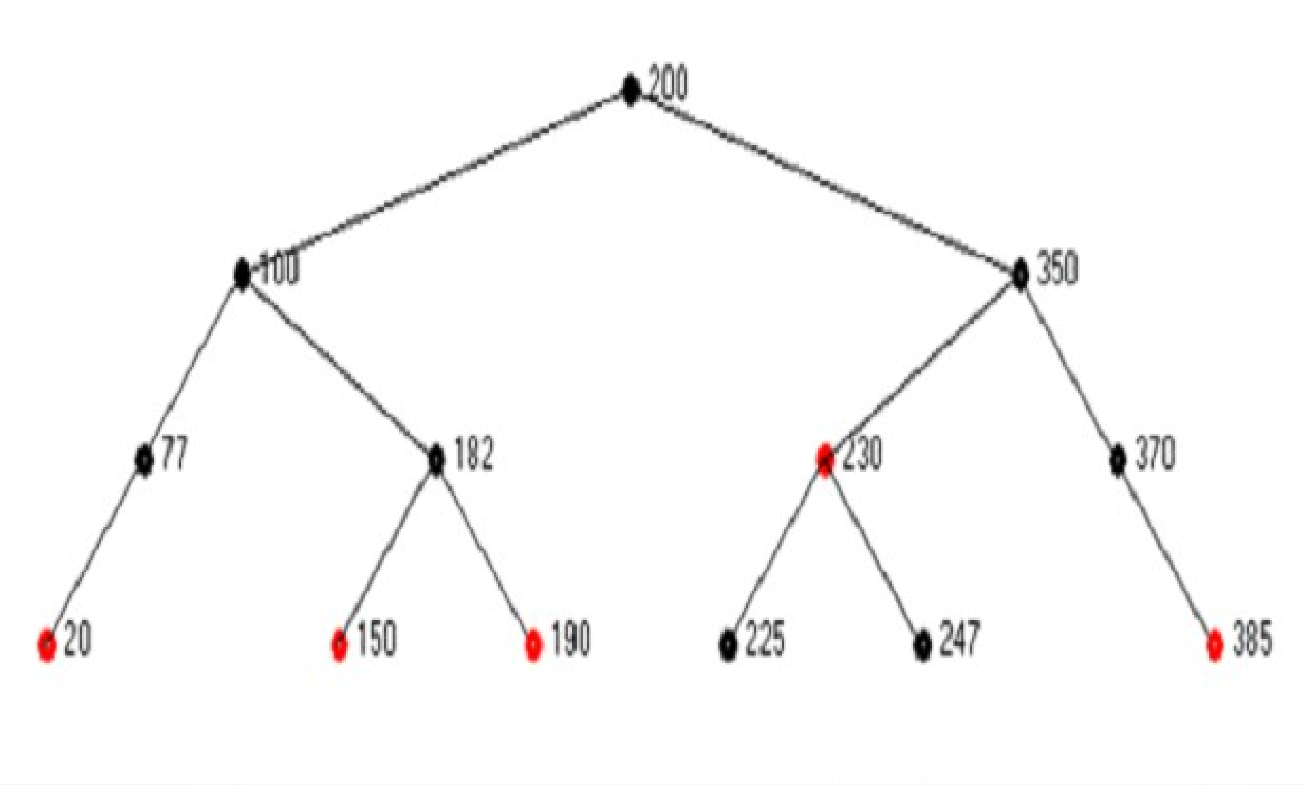
Nó é preto

Irmão é preto e tem filho vermelho

Rotação e recoloração

Exemplo 1

- Remover o nó 250



Comparação entre árvores

Árvore	AVL	Árvore B	Rubro Negra
Fator de balanceamento	Cada nó possui um campo ***bal***, que pode ser 0 (balanceada), 1 (desbalanceada a direita) e -1 (desbalanceada a esquerda).	Total de chaves de uma página (ordem-1).	Cada nó possui um campo ***cor*** que pode ser rubro ou negro.
Método de balanceamento	Se uma subárvore de um nó estiver 2 níveis maior que a outra subárvore (bal = 1 ou -1) ocorre uma rotação.	O nó que excede o número de chaves é dividido em dois novos nós (split).	Caso haja dois nós rubros consecutivos ou a quantidade de nós negros até qualquer folha não sejam iguais ocorre uma rotação e, se preciso troca de cores.
Tolerância de desbalanceamento	Uma subárvore pode estar 1 nível maior que a outra subárvore de um nó	Zero. Ela sempre está balanceada.	Uma subárvore não pode estar 2 vezes maior que a outra subárvore de um nó.
Crescimento	De cima pra baixo (raiz → folhas)	De baixo pra cima (folhas → raiz)	De cima pra baixo (raiz → folhas)

PosComp 2010

23) Assinale a alternativa em que todas as propriedades de uma árvore vermelho e preto são verdadeiras.

a) Todo nó é vermelho ou preto. A raiz pode ser vermelha ou preta. Todas as folhas são vermelhas.

b) A raiz é preta. Todas as folhas são vermelhas. Para cada nó, todos os caminhos, desde um nó até as folhas descendentes, contêm um mesmo número de nós pretos.

c) Toda folha é preta. Todo nó é vermelho ou preto. A raiz é preta.

d) Se um nó é vermelho, ambos os filhos são vermelhos. A raiz pode ser vermelha ou preta. Todas as folhas são pretas.

e) Todas as folhas são vermelhas. Todo nó é vermelho ou preto. A raiz pode ser vermelha ou preta.