Escola de Artes, Ciências e Humanidades

1ª Lista de exercícios de
Matrizes, Vetores e Geometria Analítica
Sistemas de Informação
EACH – USP

1ª Questão. Considere as seguintes matrizes:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 6 & 7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & -8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-6 & 9 & -7\\ 7 & -3 & -2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-6 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 4\\ -6 & 0 & 6\end{pmatrix} \text{ e } E=\begin{pmatrix}6 & 9 & -9\\ -1 & 0 & -4\\ -6 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Se for possível calcule:

a) $AB-BA$
b) $2C-D$
c) $\left(2D^t-3E^t\right)^t$
d) D^2-DE

2ª Questão. Conhecendo-se somente os produtos AB e AC, como podemos calcular $A(B+C)$, B^tA^t, C^tA^t e $(ABA)C$?

3ª Questão. Para matrizes quadradas $A=\left(a_{ij}\right)_{nxn}$ definimos o ***traço*** de A como sendo a soma dos elementos da diagonal (principal) de A, ou seja, $tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Mostre que $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.
b) Mostre que $tr(\alpha A)=\alpha\ tr(A)$.
c) Mostre que $tr\left(A^t\right)=tr(A)$.
d) Mostre que $tr(AB)=tr(BA)$.

4ª Questão. Quais das seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida:

a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

5ª Questão. Resolva, usando o método de Gauss-Jordan (escalonamento de matriz), os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$

6ª Questão. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$:

a) Encontre a solução geral do sistema $(A + 4I_3)X = 0$.

b) Encontre a solução geral do sistema $(A - 2I_3)X = 0$.

7ª Questão. Para cada sistema linear dado, encontre todos os valores de a para os quais o sistema não tem solução única e tem infinitas soluções:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + (a^2 - 1)z = a + 1 \end{cases}$

8ª Questão. Uma indústria produz três produtos: X, Y e Z, utilizando dois tipos de insumo, A e B. Para a manufatura de cada kg de X são utilizados 2 gramas do insumo A e 1 grama do insumo B; para cada kg de Y, 1 grama de insumo A e 3 gramas de insumo B e, para cada kg de Z, 3 gramas de A e 5 gramas de B. O preço de venda do kg de cada um dos produtos X, Y e Z é R$ 3,00, R$ 2,00 e R$ 4,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de X, Y e Z manufaturada com 1,9 kg de A e 2,4 kg de B, essa indústria arrecadou R$ 2900,00. Determine quantos kg de cada um dos produtos X, Y e Z foram vendidos.

9ª Questão. Determine os coeficientes a, b, c e d da função polinomial, cujo gráfico passa pelos pontos (0, 10), (1, 7), (3, -11) e (4, -14).

10ª Questão.

a) Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é invertível, se somente se, $ad - bc \neq 0$ e neste caso a inversa é dada por $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) Mostre que se $ad - bc \neq 0$, então o sistema linear $\begin{cases} ax + by = g \\ cx + dy = h \end{cases}$ tem como solução $x = \frac{gd-bh}{ad-bc}$, $y = \frac{ah-cg}{ad-bc}$.

USP Leste

Escola de Artes, Ciências e Humanidades

11ª Questão. Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que se $A+B$ e A são invertíveis, então $(A+B)^{-1} = A^{-1}\,(I + BA^{-1})^{-1}$.

12ª Questão. Se A e B são matrizes quadradas tais que $\det(A) = -2$ e $\det(B) = 3$, calcule $\det\,(A^t B^{-1})$.

13ª Questão. Seja $A = (a_{ij})_{3x3}$ tal que $\det(A) = 3$. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{32} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+a_{32} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

14ª Questão. Encontre os valores de λ para os quais o sistema linear $(A-\lambda I)X = 0$ tem solução não trivial.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

15ª Questão. Mostre as seguintes afirmações:

a) Se $\det(AB) = 0$, então A é não invertível ou B é não invertível.
b) Se α é um escalar e A é uma matriz quadrada, então $\det(\alpha A) = \alpha^n \det\,(A)$.
c) Sejam A e P matrizes nxn com P invertível. Então $\det(P^{-1}AP) = \det\,(A)$.
d) Se $A^{-1} = A^t$, então $\det(A) = \pm 1$.

Algumas respostas:

5) a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}\alpha \\ \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ c) Não tem solução 6) a) $\begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5\alpha \\ 6\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 7)a) $a = 4$ infinitas soluções, $a = -4$ não possui soluções, $a \neq \pm 4$ solução única b) $a = \pm\sqrt{3}$ não possui solução, $a \neq \pm\sqrt{3}$ possui solução única 8) $X = 500\,kg, Y = 300\,kg, Z = 200\,kg$ 9) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$ 13) a)3 b)-6 14) a)2, 2 e 1 b)2, -1 e 3