Coloração de Grafos

Helton Hideraldo Bíscaro

14 de agosto de 2012

Apresentação

Problema

Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que estados adjacentes não podem ter a mesma cor?

Grafos

Teorema das quatro cores

Provado em 1976, se constitui em um dos resultados mais importantes da matemática no Século XX, permaneceu sem solução desde 1852 e possui aplicação em muitos problemas práticos.

Grafos

Definição

Uma **coloração** de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices, de modo que vértices adjacentes tenham cores distintas.

- Um grafo G tem k-coloração se ele pode ser colorido com k cores.
- Se G tem k-coloração mas não pode ter $(k-1)$- coloração:
  - O número cromático de G é k.
  - G é k-cromático.
  - $\chi(G) = k$.

Grafos

Teorema*

Um grafo G é bipartido se e somente se todo ciclo de G possuir comprimento par.

Para alguns tipos de grafos, o número cromático é facil de determinar (C_i representa um grafo cíclico de i vértices):

- C_{2p}: número cromático $=2$
- C_{2p+1}: número cromático $=3$
- K_p: número cromático $=$ p
- Grafo bipartido número cromático $=2$

Teorema

O número cromático de um grafo é 2 se e somente se ele é bipartido.

Grafos

Demonstração *Ida:*

Suponhamos que duas cores são suficientes para colorir o grafo G. Seja agora um ciclo de G de comprimento ímpar. Ja sabemos que o número cromático de um grafo cíclico de comprimento ímpar é 3. Portanto G não pode conter tal ciclo. Como todo ciclo de G dever ser par, podemos concluir, o grafo é bipartido.

Demonstração *Volta:*

Seja G um grafo bipartido, e X e Y os dois conjuntos de vértices que formam esse grafo bipartido. Como nenhum vértice de X é adjacente a outro vértice do mesmo conjunto, todos podem receber a mesma cor. Da mesma maneira, atribuimos a outra cor aos vértices de Y. Como todas as arestas do grafo ligam um vértices de X com um vértice de Y, não temos vértices adjacentes com a mesma cor.

Grafos

Alguns teoremas úteis:

- Se G e um grafo e k e o maior grau de seus vértices, entao G tem $(k+1)$-coloração.
- Se G é um grafo conectado que não é completo, e se o maior grau de seus vértices é $k, (k \geq 3)$, então G tem (k)-coloração.
- Appel e Hasken provaram em 1976 que todo grafo planar admite 4-coloração.
- Como determinar o número cromático de um grafo?

Grafos

Algoritmos gulosos com heurísticas

Utilizaremos a seguinte convenção: cada cor é identificada por um número inteiro.

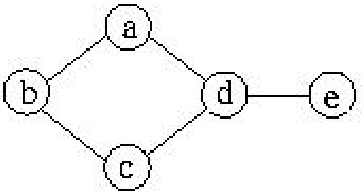
Algoritmo 1: Algoritmo Ingênuo

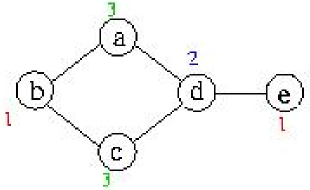
Entrada: Um Grafo G
Saída: Grafo G colorido

$i := 1$;
para cada *vértive v não colorido* **faça**
    se *Nenhum vértice adjacente a v possui a cor i* **então**
        Atribuir a cor i ao vértice v;
    senão
        $i := i + 1$;
        Atribuir a cor i ao vértice v;
retorna G

Grafos

Resultado: (Ordem de visitação b,e,d,a,c)





Grafos: Usaremos (-1) para representar ausência de cor.

Algoritmo 2: Algoritmo Ingênuo Alterado

Entrada: Um Grafo G
Saída: Grafo G colorido
para $i := 1$ *até* n **faça**
  $Cor[i] := -1;$

carregar todas as posições
sem cores

$c := 1;$ $Cor[1] := 1;$ (primeira cor usada)
para $v := 2$ *até* n **faça**
  $ok := TRUE;$
  para $k := 1$ *até* c **faça**
    para cada *vértice u adjacente a v* **faça**
u vai até 0 a 2
      se $Cor[u] = k$ **então**
k é o número da cor
        $ok := FALSE;$ (v já tem um vértice adjacente com essa cor)
        sair;
    se $ok = TRUE$ **então**
      $Cor[v] := k;$ **sair**;
  se $ok = FALSE$ **então**
    $c := c + 1;$ (Todas as cores atuais são usadas pelos vértice adjacentes)
    $Cor[v] := c;$
retorna Cor

Grafos

Quanto maior o grau de um vértice, mais difícil será colori-lo

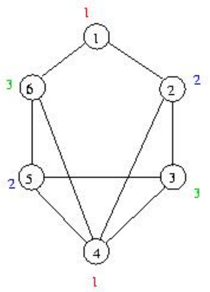
Algoritmo 3: Algoritmo Maior Grau Primeiro

Entrada: Um Grafo G
Saída: Grafo G colorido
Ordenar os vértices de G em ordem não crescente de grau;
$i := 1$;
para cada *vértive v não colorido* **faça**
    $ok := TRUE$;
    para $k := 1$ *até* i **faça**
        se *Nenhum vértice adjacente a v possui a cor k* **então**
            Atribuir a cor k ao vértice v;
            $ok := FALSE$;
            sair
    se $ok = TRUE$ **então**
        $i := i + 1$;
        Atribuir a cor i ao vértice v;
retorna G

Grafos

Resultado

a)



b)

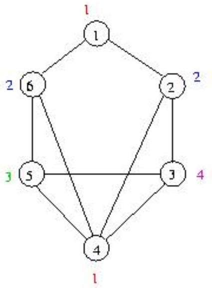


Figura: Coloração a) Ordem 4, 5, 3, 6, 2, 1; b) Ordem 4, 6, 2, 5, 3, 1

Grafos

Exercício

Analise o custo de execução dos algoritmos de coloração apresenados.

Melhore O algoritmo **Maior Grau Primeiro** para que ele compute exatamente o número cromático de G

Teorema*: Prova:

Ida: Seja X e Y as duas partições de G. Todo caminho em G alterna um vértice de X com um vertice de Y. Isso é a conseqüência da definição de grafo bipartido. Supondo que um ciclo contém um vértice vi em uma das duas partições. Para voltar a esse vértice, é preciso ir na outra partição e voltar um número par de vezes.

Volta: Seja G um grafo onde todo ciclo é de comprimento par. Seja um vértice vi de G. Colocamos num conjunto X o vértice vi e todos os outros que são a uma distância par de vi. Os outros vértices formam o conjunto Y. Se não tivesse nenhuma aresta ligando dois vértices de X ou dois vértices de Y, respeitariamos as condições para que o grafo seja bipartido. Suponha que existe uma outra aresta entre dois vértices a e b de X (ou Y). Já temos um caminho par entre a e b. Acrescentando a nova aresta, obteriamos um ciclo de comprimento ímpar, o que contradiz a hipótese. Portanto, não pode existir outra aresta entre qualquer par de vértices que já está em X e o grafo é bipartido.