Estatística

10 -Testes de hipóteses acerca dos parâmetros

Página da FEG: www.feg.unesp.br/~marcela

Teste de Parâmetros

H_0: Hipótese a ser testada - Básica

H_1: Hipótese Alternativa (negação de H_0)

Resultados de Teste de Hipóteses acerca de Parâmetros e suas probabilidades (α e β) condicionadas à realidade:

		REALIDADE	
		H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
DECISÃO	Aceitar H_0	Decisão Correta ($1-\alpha$)	Erro Tipo II (β)
	Rejeitar H_0	Erro Tipo I (α)	Decisão Correta ($1-\beta$)

α : Probabilidade cometer Erro Tipo I
Rejeitar H_0, sendo H_0 Verdadeira
Risco do Vendedor (Produtor)

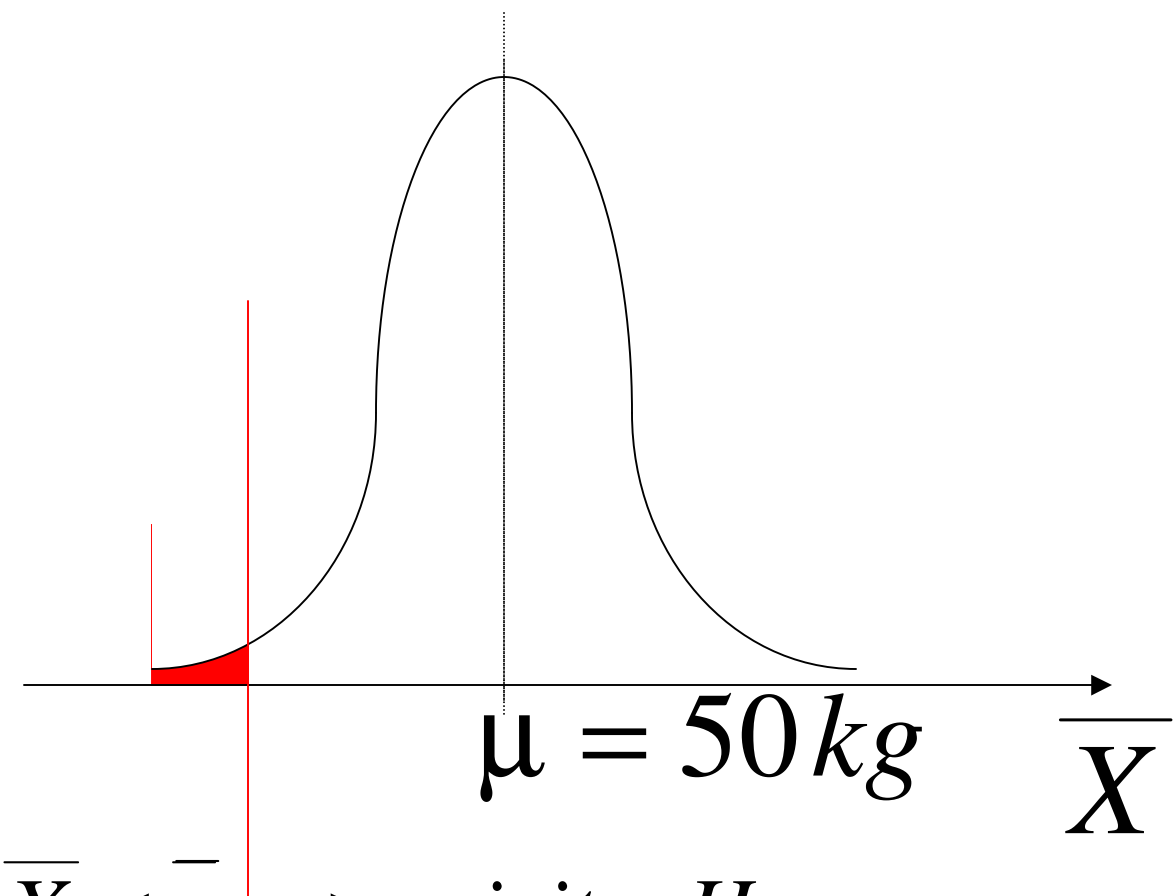
β : Probabilidade cometer Erro Tipo II
Aceitar H_0, sendo H_0 Falsa
Risco do Comprador (Consumidor)

Teste da Média - Exemplo

Problema de aceitação de lote de parafusos, submetido à inspeção por amostragem (CEQ).

Indústria compra parafusos com carga média de ruptura por tração especificada em 50 kg e desvio-padrão de 4 kg. Deseja-se testar a hipótese de que a carga média de ruptura seja de fato 50 kg, contra a alternativa de que ela seja inferior a 50 kg.

Assim: $\begin{cases} H_0 : \mu = 50kg \\ H_1 : \mu < 50kg \end{cases}$



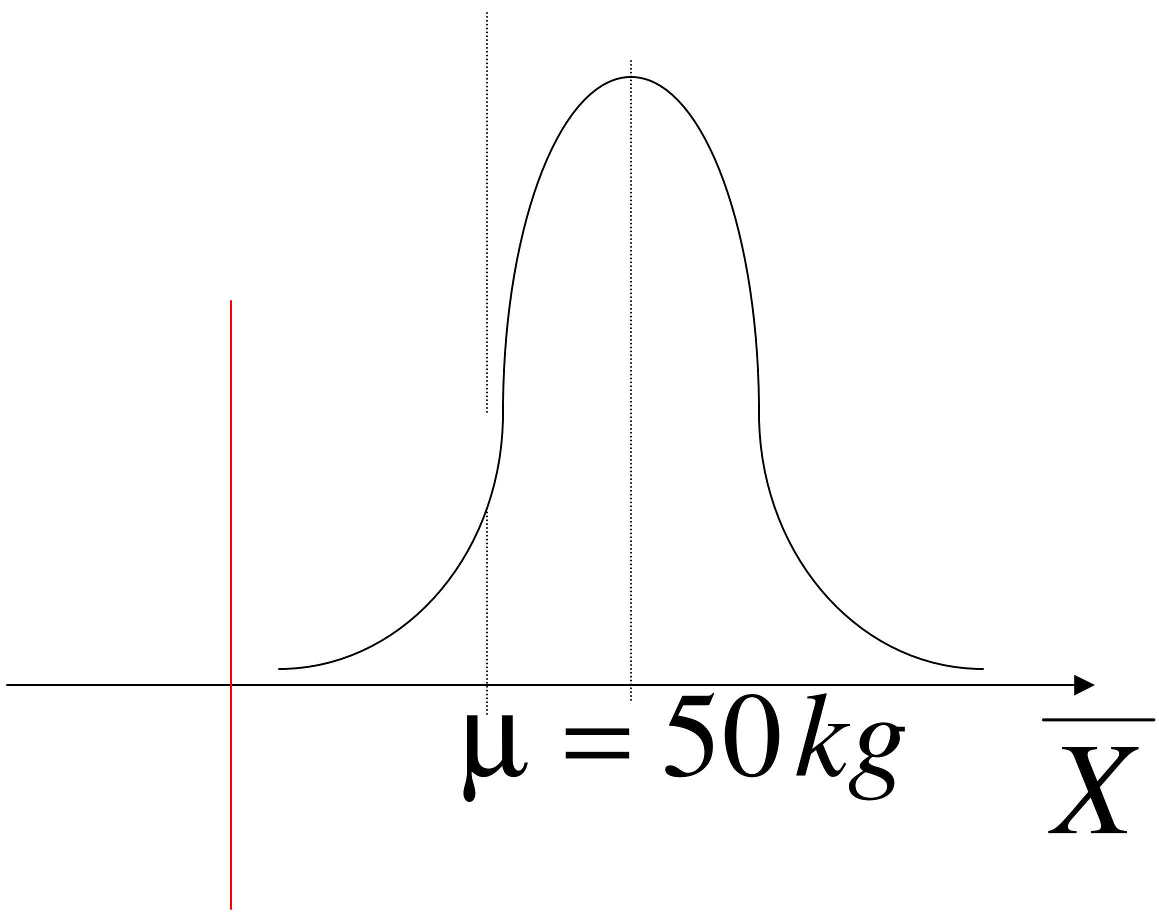
$$\overline{X} < \overline{x}_c \Rightarrow rejeito \ H_0$$

Teste da Média - Exemplo

Problema de aceitação de lote de parafusos, submetido à inspeção por amostragem (CEQ).

Indústria compra parafusos com carga média de ruptura por tração especificada em 50 kg e desvio-padrão de 4 kg. Deseja-se testar a hipótese de que a carga média de ruptura seja de fato 50 kg, contra a alternativa de que ela seja inferior a 50 kg.

Assim: $$\begin{cases} H_0 : \mu = 50kg \\ H_1 : \mu < 50kg \end{cases}$$

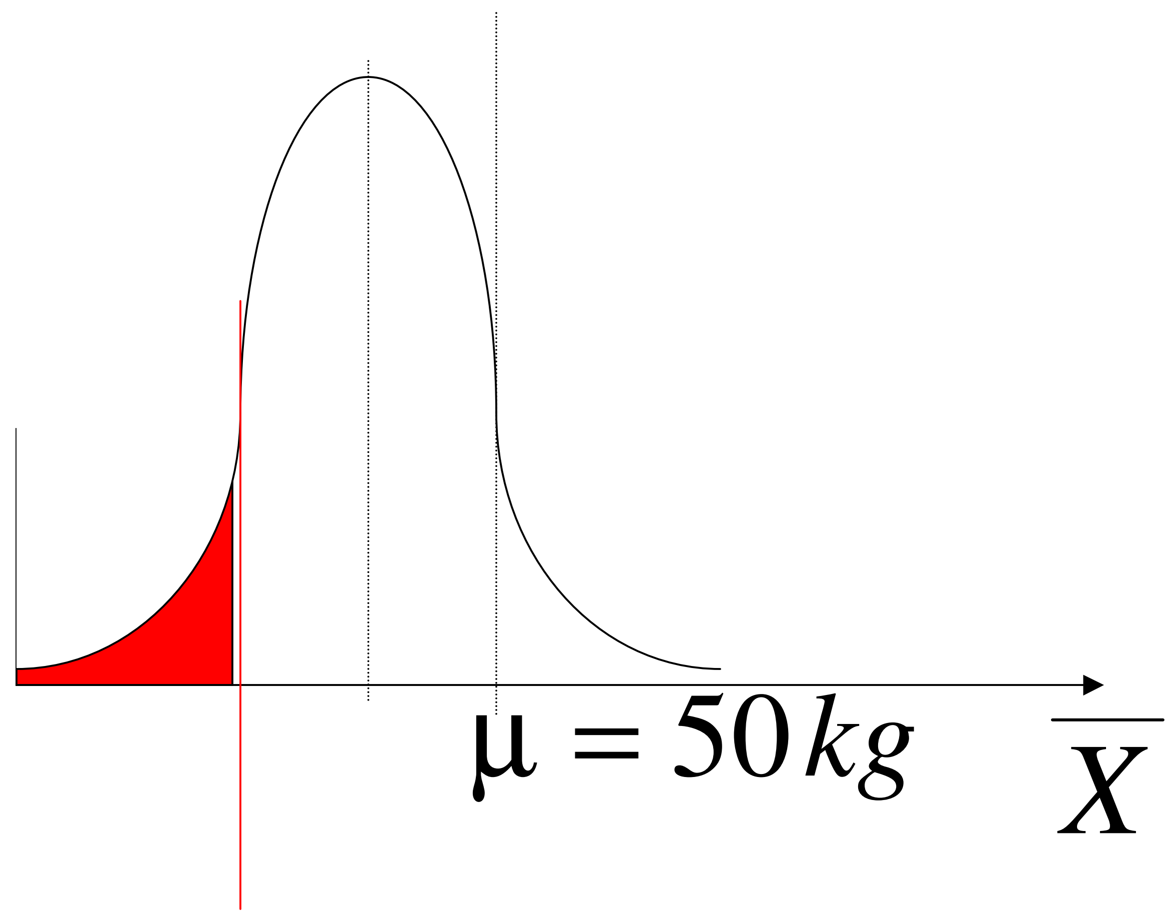


Teste da Média - Exemplo

Problema de aceitação de lote de parafusos, submetido à inspeção por amostragem (CEQ).

Indústria compra parafusos com carga média de ruptura por tração especificada em 50 kg e desvio-padrão de 4 kg. Deseja-se testar a hipótese de que a carga média de ruptura seja de fato 50 kg, contra a alternativa de que ela seja inferior a 50 kg.

Assim:
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 50\,kg \\ H_1 : \mu < 50\,kg \end{cases}$$

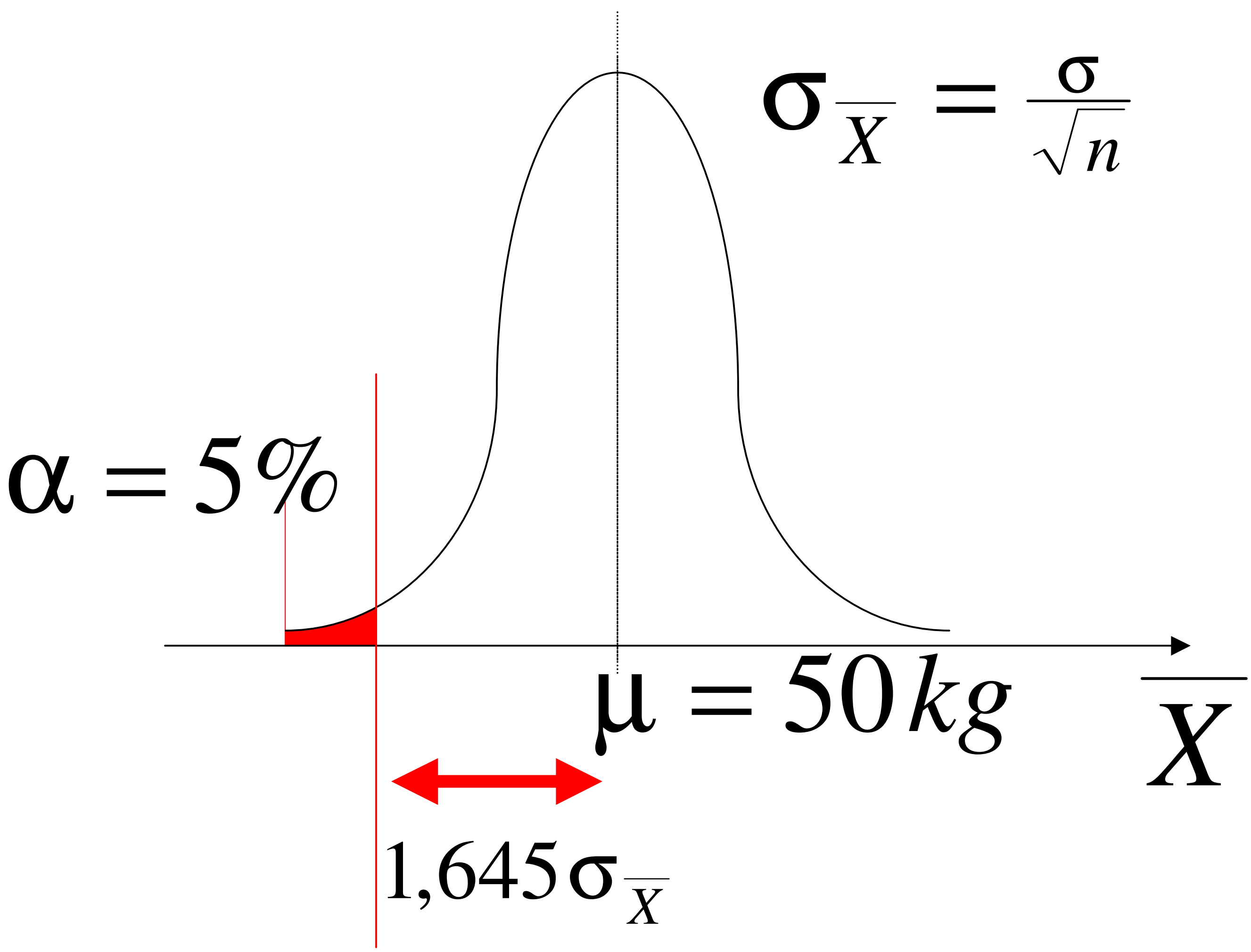


Teste da Média - Exemplo

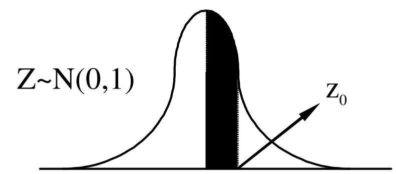
Problema de aceitação de lote de parafusos, submetido à inspeção por amostragem (CEQ).

Indústria compra parafusos com carga média de ruptura por tração especificada em 50 kg e desvio-padrão de 4 kg. Deseja-se testar a hipótese de que a carga média de ruptura seja de fato 50 kg, contra a alternativa de que ela seja inferior a 50 kg.

Assim: $\begin{cases} H_0 : \mu = 50\,kg \\ H_1 : \mu < 50\,kg \end{cases}$



Distribuição normal – valores de $P(0 \leq Z \leq z_0)$



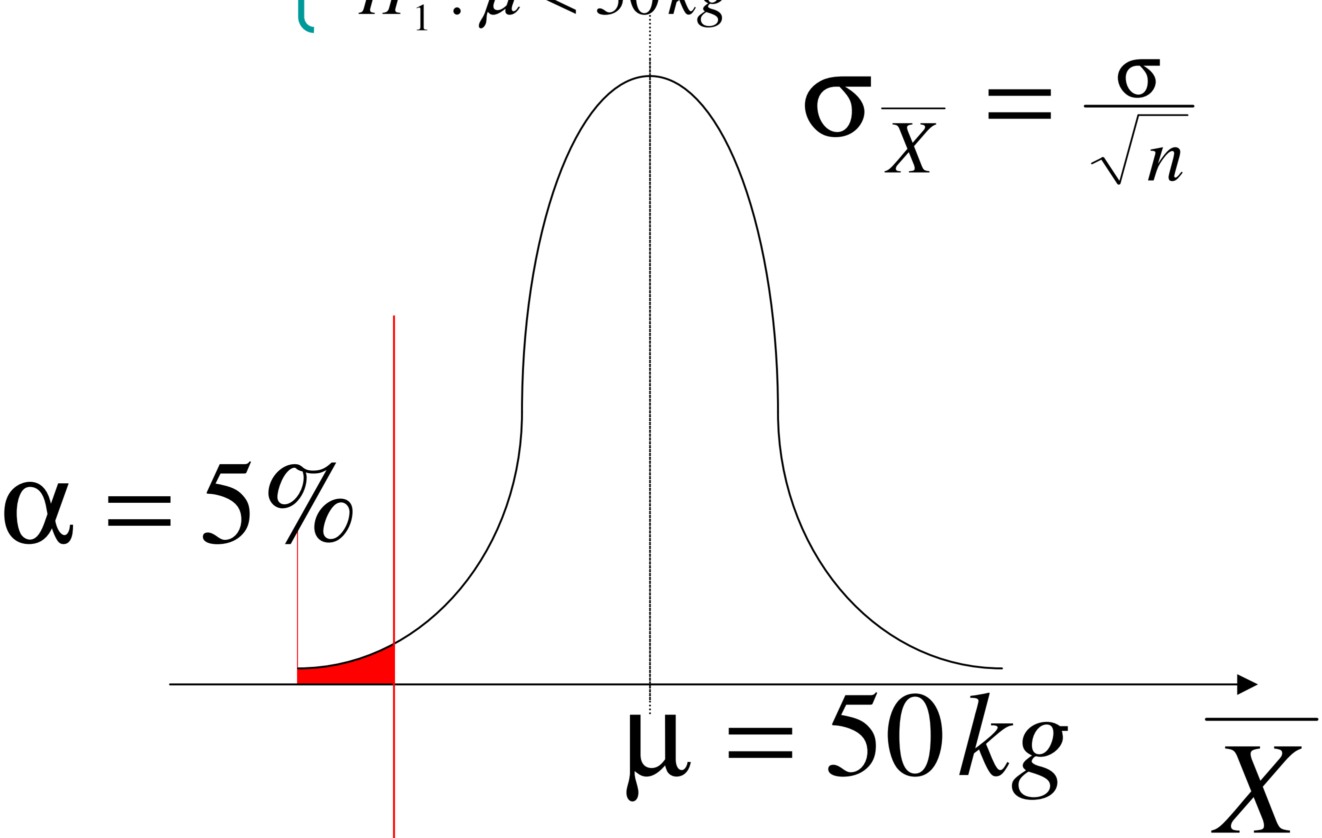
z_0	0	1	2	3	4	5	**6**
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,023
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,063
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,102
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,440
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,451
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,460
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,468
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	**0,475**
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,480
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,484
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,499
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,500

Teste da Média - Exemplo

Problema de aceitação de lote de parafusos, submetido à inspeção por amostragem (CEQ).

Indústria compra parafusos com carga média de ruptura por tração especificada em 50 kg e desvio-padrão de 4 kg. Deseja-se testar a hipótese de que a carga média de ruptura seja de fato 50 kg, contra a alternativa de que ela seja inferior a 50 kg.

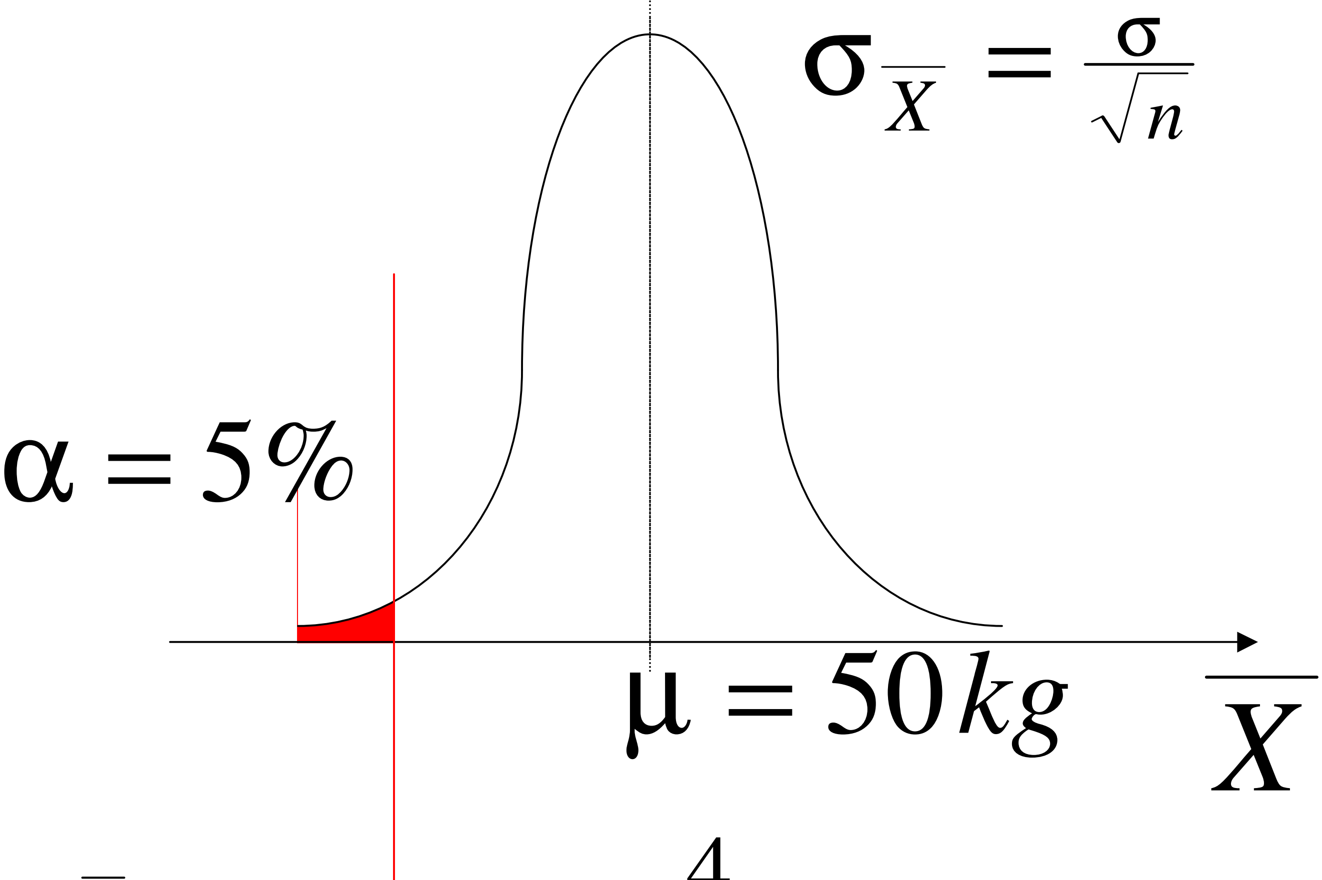
Assim: $\begin{cases} H_0 : \mu = 50\,kg \\ H_1 : \mu < 50\,kg \end{cases}$



$$\overline{x}_c = 50 - 1{,}645\frac{4}{\sqrt{25}} = 48{,}68$$

Teste da Média - Exemplo

Assim: $\begin{cases} H_0 : \mu = 50\,kg \\ H_1 : \mu < 50\,kg \end{cases}$



$$\overline{x}_c = 50 - 1{,}645\,\frac{4}{\sqrt{25}} = 48{,}68$$

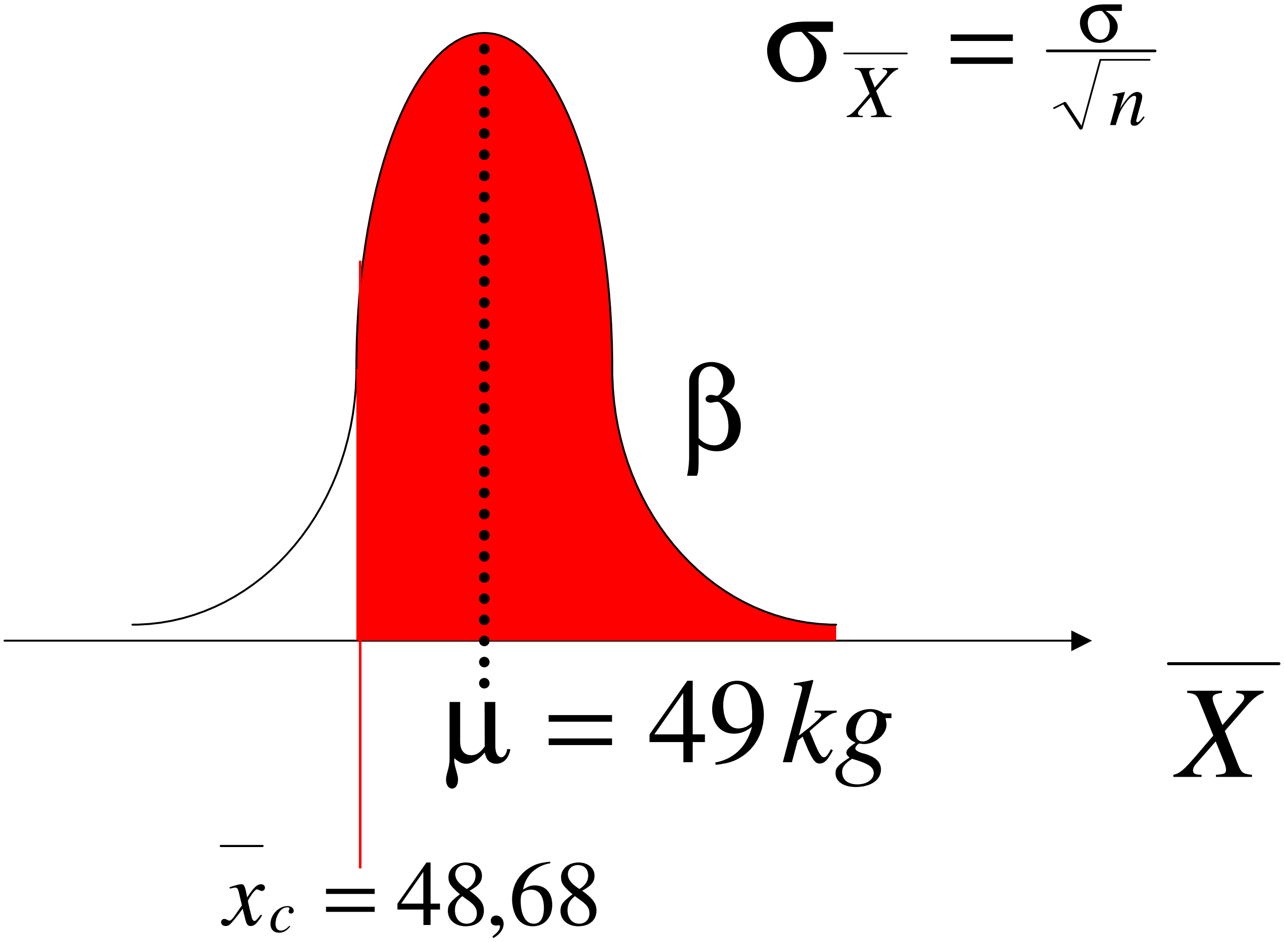
α = P(Rejeitar H_0 , sendo H_0 Verdadeira)

<u>Risco do Vendedor:</u>
Rejeitar o lote, sendo que a carga média não é inferior a 50 kg

Teste da Média - Exemplo

Assim: $\begin{cases} H_0 : \mu = 50\,kg \\ H_1 : \mu < 50\,kg \end{cases}$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

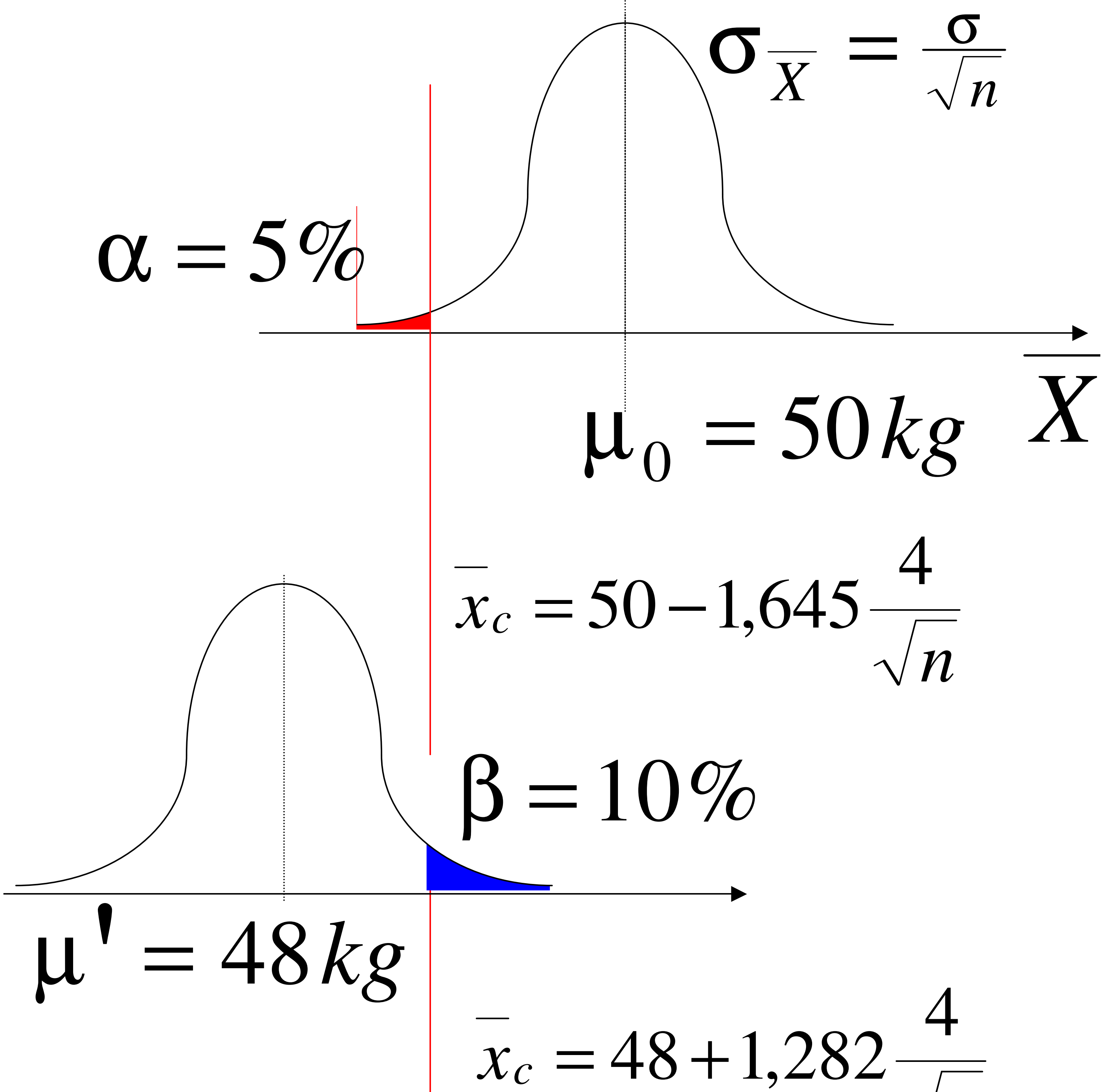


β = P(Aceitar H_0 , sendo H_0 Falso)

<u>Risco do Comprador:</u>
Aceitar o lote, sendo que a carga média é inferior a 50 kg

Teste da Média - Exemplo

Assim: $\begin{cases} H_0: \mu = 50\,kg \\ H_1: \mu < 50\,kg \end{cases}$



$$\bar{x}_c = 50 - 1{,}645\frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x}_c = 48 + 1{,}282\frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{n = \left(\frac{(z_{\alpha} + z_{\beta}) \cdot \sigma}{\mu_0 - \mu'} \right)^2}$$

Teste da Média μ com σ conhecido

Hipóteses	Rejeitar H_0	$\bar{x}_c$ (crítico)
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$\bar{x} < \bar{x}_c$	$\bar{x}_c = \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$\bar{x} > \bar{x}_c$	$\bar{x}_c = \mu_0 + z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\bar{x} < \bar{x}_{C1}$ ou $\bar{x} > \bar{x}_{C2}$	$\bar{x}_{C1} = \mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\bar{x}_{C2} = \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Teste da Média μ com σ desconhecido

Hipóteses	Rejeitar H_0	$\bar{x}_c$ (crítico)
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$\bar{x} < \bar{x}_c$	$\bar{x}_c = \mu_0 - t_{n-1,\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$\bar{x} > \bar{x}_c$	$\bar{x}_c = \mu_0 + t_{n-1,\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\bar{x} < \bar{x}_{C1}$ ou $\bar{x} > \bar{x}_{C2}$	$\bar{x}_{C1} = \mu_0 - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ $\bar{x}_{C2} = \mu_0 + t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Teste da Média μ com σ desconhecido

Exercício (p.123): Dados apresentam a resistência de 10 pedaços de um cabo de aço, ensaiados por tração até a ruptura. Pretende-se saber se esse cabo obedece a especificação, o qual exige que sua carga média de ruptura seja superior a 1500 kg. Qual a sua conclusão, ao nível de 2% de significância?

1508	1518	1492	1505	1515
1507	1510	1505	1496	1498

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1500 \\ H_1 : \mu > 1500 \end{cases}$$

Critério: Rejeitar H_0 se $\bar{x} > \bar{x}_c$

$$\boxed{\bar{x}_C = \mu_0 + t_{n-1,\ \alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$\vec{x} = 1505{,}4$ $\quad s_x = 8{,}195$ $\quad t_{9,2\%} = 2{,}448$ (interpolando)

$$\boxed{\bar{x}_C = 1500 + 2{,}448 \cdot \frac{8{,}195}{\sqrt{10}} = 1506{,}34}$$

$$\text{Como} \quad \bar{x} < \bar{x}_c \Rightarrow \text{Aceita} - \text{se} \ H_0$$

Comentário: Não se pode concluir que o cabo tem resistência maior que 1500 kg, considerando um nível de significância de 2%.

Distribuições *t* de Student - valores de $t_{v,P}$, onde $P = P(t_v \geq t_{v,P})$

v \ P	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617

Teste da Média μ com σ desconhecido

Exemplo (p. 93): Em indivíduos sadios, o consumo renal de oxigênio distribui-se normalmente em torno de 12 cm^3/min. Deseja-se investigar, com base em 5 indivíduos portadores de certa moléstia, se esta tem influência no consumo renal médio de oxigênio. Os consumos medidos foram: 14,4 ; 12,9 ; 15,0 ; 13,7 ; 13,5. Qual a conclusão, ao nível de 1% de significância?

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 12 \\ H_1 : \mu \neq 12 \end{cases}$$

Critério: Rejeitar H_0 se $\begin{cases} \bar{x} < \bar{x}_{C1} \\ \text{ou} \\ \bar{x} > \bar{x}_{C2} \end{cases}$

Onde:

$$\boxed{\bar{x}_{C1} = \mu_0 - t_{n-1,\ \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}} \qquad \boxed{\bar{x}_{C2} = \mu_0 + t_{n-1,\ \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

$$\bar{x} = 13{,}9$$

$$t_{4,\ 0{,}5\%} = 4{,}604 \ \text{(tabela)}$$

$$s_x = 0{,}815$$

Logo:

$$\boxed{\bar{x}_{C1} = 12 - 4{,}604 \cdot \frac{0{,}815}{\sqrt{5}} = 10{,}32} \qquad \boxed{\bar{x}_{C2} = 12 + 4{,}604 \cdot \frac{0{,}815}{\sqrt{5}} = 13{,}68}$$

Como: $\bar{x} = 13{,}9 \Rightarrow \bar{x} > \bar{x}_{C2}$ Portanto: Rejeitar H_0

Comentário: Ao nível de significância de 1%, pode-se afirmar que existe evidência estatística que a moléstia tem influência no consumo renal de oxigênio

Teste da Média μ com σ conhecido

<u>Exemplo (p.91):</u> O desvio-padrão de uma população é conhecido e igual a 22 unidades. (a) Se uma amostra de 100 elementos forneceu uma média igual a 115,8, podemos afirmar que a média da população é menor que 120, ao nível de significância de 5%? (b) Qual o nível de significância associado a média amostral obtida?

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 120 \\ H_1 : \mu < 120 \end{cases}$$

<u>Critério:</u> Rejeitar H_0 se $\bar{x} < x_c$

Onde: $$x_c = \mu_0 - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 120 - z_\alpha \cdot \frac{22}{\sqrt{100}}$$

a) Para α = 5%, da Tabela: $\boxed{z_\alpha = z_{5\%} = 1{,}645}$

Logo: $$x_c = 120 - 1{,}645 \cdot \frac{22}{\sqrt{100}} = 116{,}381$$

Como: $\bar{x} = 115{,}8 < x_c$ Portanto: Rejeitar H_0

Comentário: Ao nível de significância de 5%, pode-se afirmar que μ < 120

---

b) Para $\bar{x} = 115{,}8$ tem-se:

$$z_\alpha = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{115{,}8 - 120}{22/\sqrt{100}} = -1{,}91$$

Logo, da Tabela, tem-se: $\boxed{\alpha = 0{,}5 - 0{,}4719 = 0{,}0281}$

Comentário: nível de significância associado à média amostral $(\bar{x} = 115{,}8)$ é igual a 2,81%

Teste da Variância σ^2

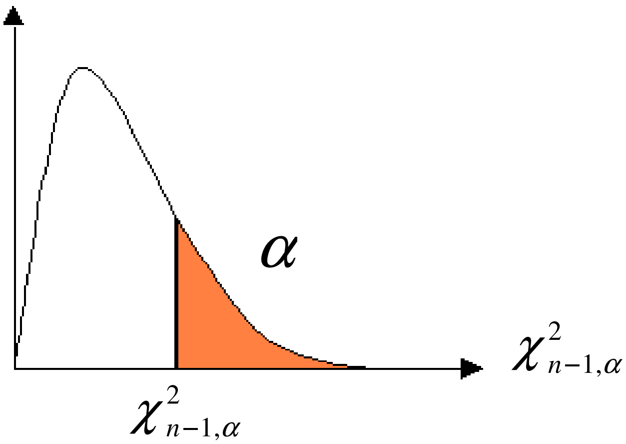
$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$$

Critério: Rejeitar H_0 se:

$$s_x^2 > s_c^2$$

onde:

$$s_c^2 = \chi^2_{n-1,\ \alpha} \cdot \frac{\sigma_0^2}{(n-1)}$$



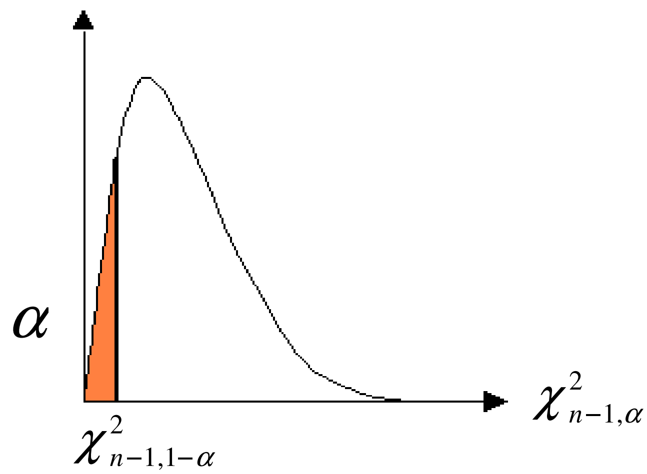
$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$$

Critério: Rejeitar H_0 se:

$$s_x^2 < s_c^2$$

onde:

$$s_c^2 = \chi^2_{n-1,\ 1-\alpha} \cdot \frac{\sigma_0^2}{(n-1)}$$



$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

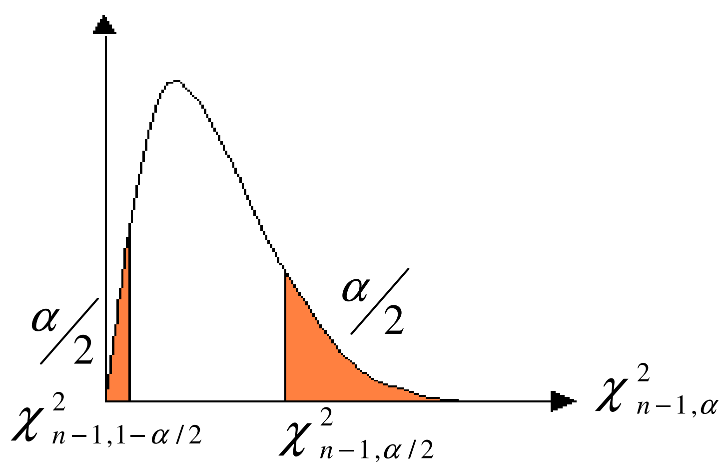
Critério: Rejeitar H_0 se:

$$s_x^2 < s_{c1}^2 \quad \text{ou} \quad s_x^2 > s_{c2}^2$$

onde:

$$s_{c1}^2 = \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0^2}{(n-1)}$$

$$s_{c2}^2 = \chi^2_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_0^2}{(n-1)}$$



Teste da Variância σ^2

Exemplo (p. 105): Uma amostra de 10 elementos de uma população normal forneceu variância igual a 12,4. Este resultado é suficiente para se concluir, ao nível de 5% de significância, que a variância da população é menor que 25?

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 25 \\ H_1 : \sigma^2 < 25 \end{cases}$$

Critério: Rejeitar H_0 se: $\boxed{s_x^2 < s_c^2}$

onde:

$$\boxed{s_c^2 = \chi^2_{n-1,\ 1-\alpha} \cdot \frac{\sigma_0^2}{(n-1)}}$$

$$s_x^2 = 12{,}4$$

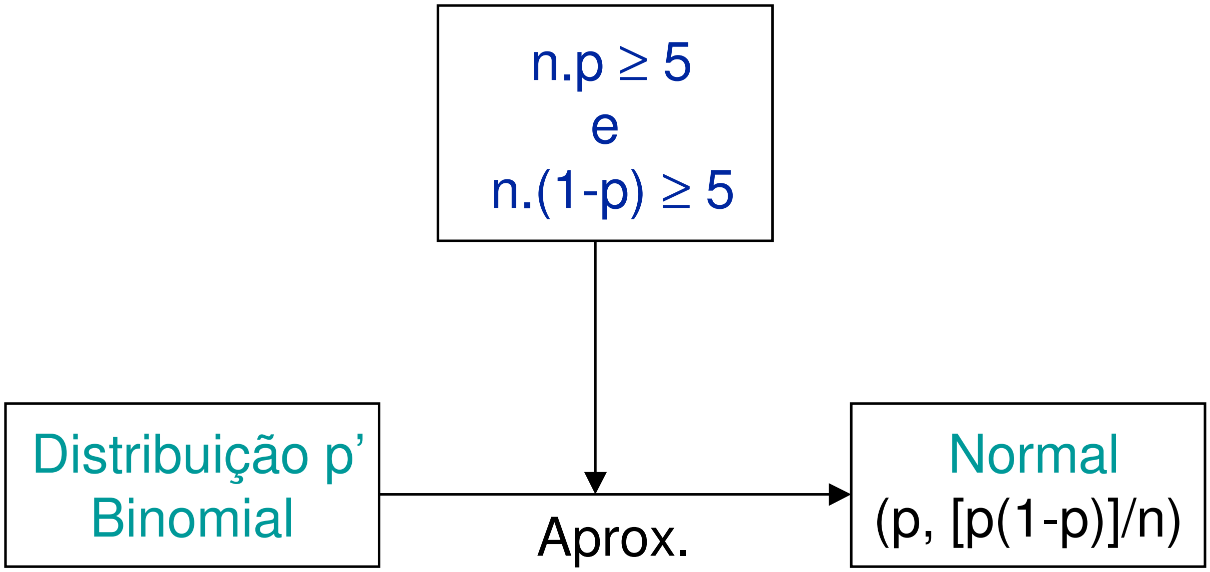
$$s_c^2 = \chi^2_{9,95\%} \cdot \frac{25}{9} = 3{,}325 \cdot \frac{25}{9} = 9{,}23$$

$$\text{Como } s_x^2 > s_c^2 \Rightarrow \text{Aceita-se } H_0$$

<u>Comentário:</u>

Não podemos concluir, com um nível de significância α=5%, que a variância é menor que 25.

Teste da Proporção Populacional: p



Teste da Proporção Populacional é análogo ao Teste da Média (μ)

Caso 1:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \Rightarrow \text{rejeitar } H_0 \text{ se } p' < p_c$$

$$\boxed{p' = \frac{f}{n}}$$

p': proporção amostral
f: freqüência observada
n: tamanho da amostra

$$\boxed{p_c = p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$$

Teste da Proporção Populacional: p

Caso 2:

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases} \Rightarrow \text{rejeitar } H_0 \text{ se } p' > p_c$$

$$\boxed{p' = \frac{f}{n}}$$

p': proporção amostral
f: freqüência observada
n: tamanho da amostra

$$\boxed{p_c = p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

Caso 3:

$$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases} \Rightarrow \text{rejeitar } H_0 \text{ se } p' < p_{c1} \text{ ou } p' > p_{c2}$$

$$\boxed{p_{c1} = p_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

$$\boxed{p_{c2} = p_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

Teste da Proporção Populacional: p

Exemplo (p.106)**:** Desconfiando-se de que uma moeda fosse viciada, lançou-a 100 vezes, obtendo-se 59 caras e 41 coroas. Ao nível de significância de 5%, pode-se afirmar existência de vício na moeda?

Solução: Seja p a proporção do resultado ser **cara**

X: nº de caras em 100 lançamentos → Binomial → (aprox) Normal

Sabe-se que p=0,5, numa moeda não viciada, logo:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0,5 \\ H_1 : p \neq 0,5 \end{cases}$$

Rejeitar H_0 se $p' < p_{c1}$ ou $p' > p_{c2}$

$$p' = \frac{f}{n} = \frac{59}{100} = 0,59$$

$$z_{\alpha/2} = z_{2,5\%} = 1,960$$

$$p_{c1} = p_0 - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p_0(1 - p_0)/n}$$
$$= 0,5 - 1,960 \cdot \sqrt{0,5(1 - 0,5)/100} = 0,402$$

$$p_{c2} = p_0 + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{p_0(1 - p_0)/n}$$
$$= 0,5 + 1,960 \cdot \sqrt{0,5(1 - 0,5)/100} = 0,598$$

$$\text{Logo}: \ p_{c1} < p' < p_{c2} \Rightarrow \text{Aceita} - \text{se } H_0$$

Comentário: Ao nível de significância de 5%, não ficou comprovado a existência de vício na moeda.

Correção de Continuidade

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Binomial}\\\text{(Discreta)}\end{array}} \xrightarrow{\text{Aprox.}} \boxed{\begin{array}{c}\text{Normal}\\\text{(Contínua)}\end{array}}$$

<u>Idéia:</u> "evitar que a Rejeição de H_0 seja resultado da aproximação feita"

Caso 1:

$$p_c = p_0 - z_\alpha \cdot \sqrt{p_0(1-p_0)/n} - \frac{1}{2n}$$

Caso 2:

$$p_c = p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{p_0(1-p_0)/n} + \frac{1}{2n}$$

Caso 3:

p_{c1} análogo ao Caso 1, com $\alpha/2$

p_{c2} análogo ao Caso 2, com $\alpha/2$

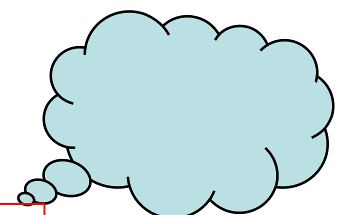
Teste da Proporção Populacional: p

Exemplo (p.126): Numa pesquisa de opinião eleitoral, dentre 80 entrevistados, o candidato João obteve 48 votos, contra apenas 32 do seu opositor. Admitindo-se a amostra como bem representativa do eleitorado, pode-se concluir, ao nível de 1% de significância, que João será o vencedor da eleição?

Seja p: **proporção** de votos dados ao candidato João

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 = 0{,}5 \\ H_1 : p > p_0 = 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow \text{rejeitar} \quad H_0 \ \text{se} \ \ p' > p_c$$

$np_0 > 5$ e $n(1-p_0) > 5$ → Aprox. pela Normal



$$p_c = p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{p_0(1-p_0)/n} + \frac{1}{2n}$$

$$p_c = 0{,}5 + 2{,}33 \cdot \sqrt{0{,}5(1-0{,}5)/80} + \frac{1}{2 \times 80} = 0{,}636$$

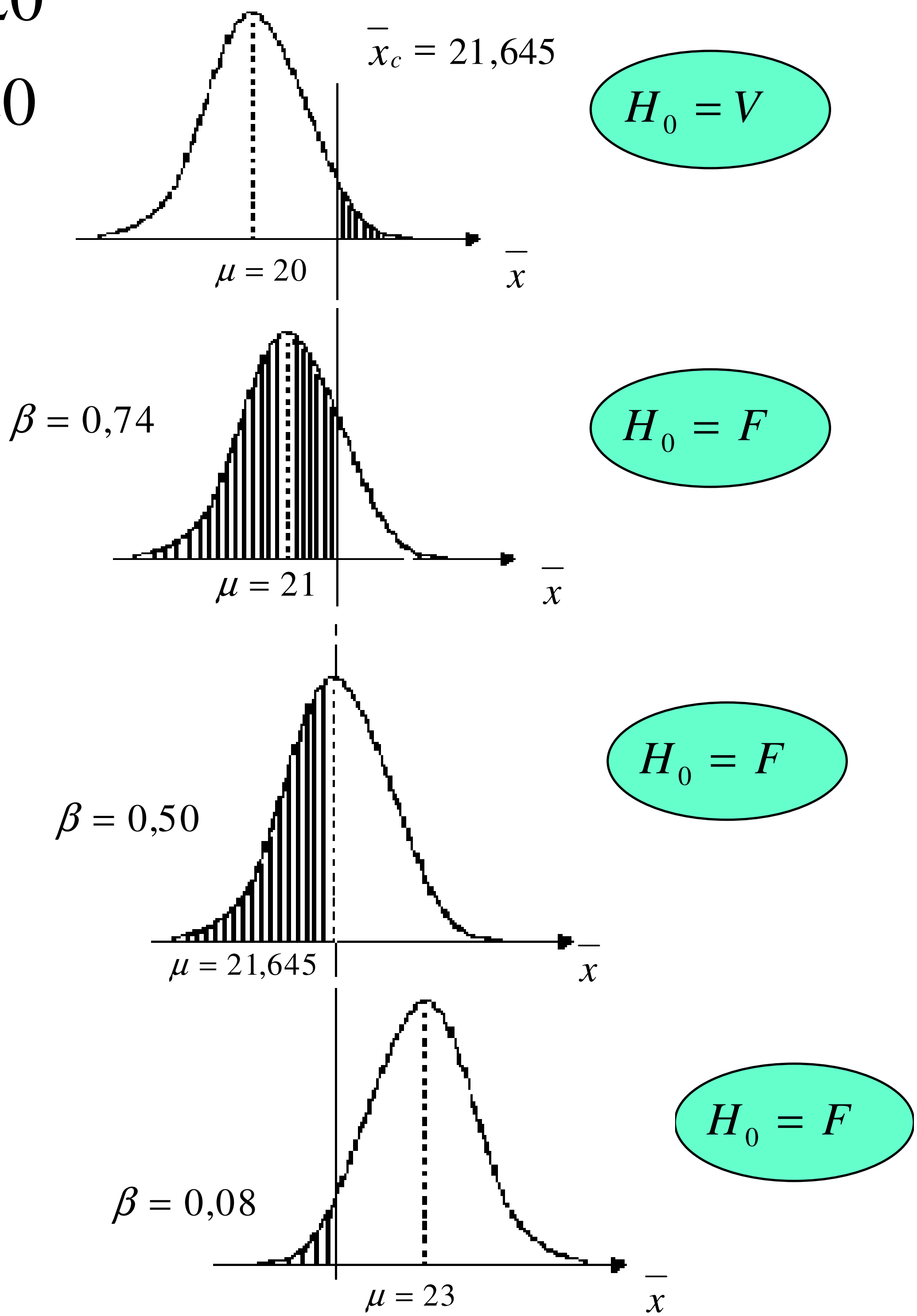
$$p' = \frac{48}{80} = 0{,}6 \ < p_c \Rightarrow \text{Aceita} - \text{se} \ H_0$$

Comentário: Não se pode concluir que João será o vencedor, para um nível de significância de 1%.

Erro Tipo II: ß=P(aceitar H_0, sendo H_0 falsa)

Exemplo: σ=5 n=25 α=5%

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 20 \\ H_1 : \mu > 20 \end{cases}$$



Erro Tipo II: Cálculo de ß (Exemplo)

- Para μ' = 21:

$$z_{\beta_1} = \frac{21{,}645 - 21}{5/\sqrt{25}} = 0{,}645$$

$$\therefore \beta_1 = 0{,}5 + 0{,}2405 = 0{,}7405$$

- Para μ' = 21,645:

$$z_{\beta_2} = \frac{21{,}645 - 21{,}645}{1} = 0$$

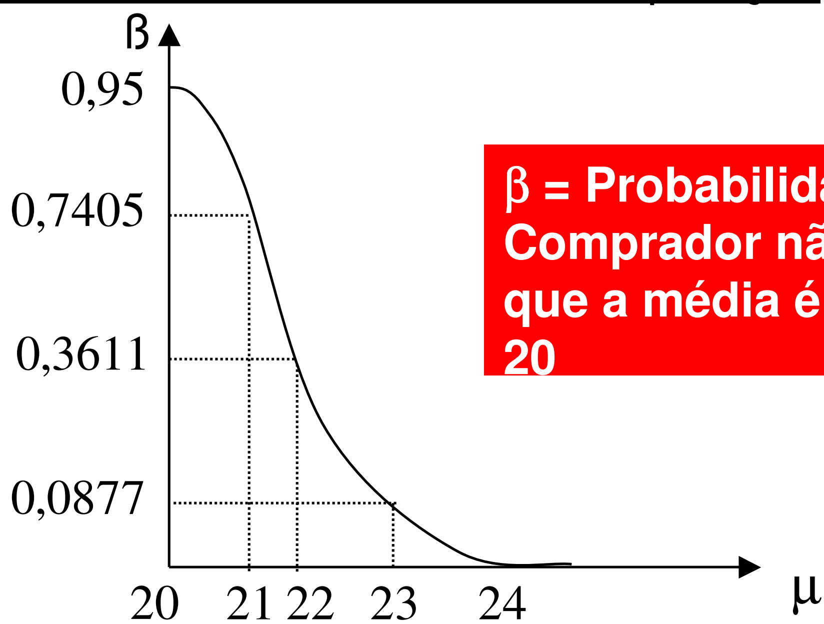
$$\therefore \beta_2 = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$$

- Para μ' = 23:

$$z_{\beta_3} = \frac{21{,}645 - 23}{1} = -1{,}355$$

$$\therefore \beta_3 = 0{,}5 - 0{,}4123 = 0{,}0877$$

<u>CCO: Curva Característica de Operação</u>

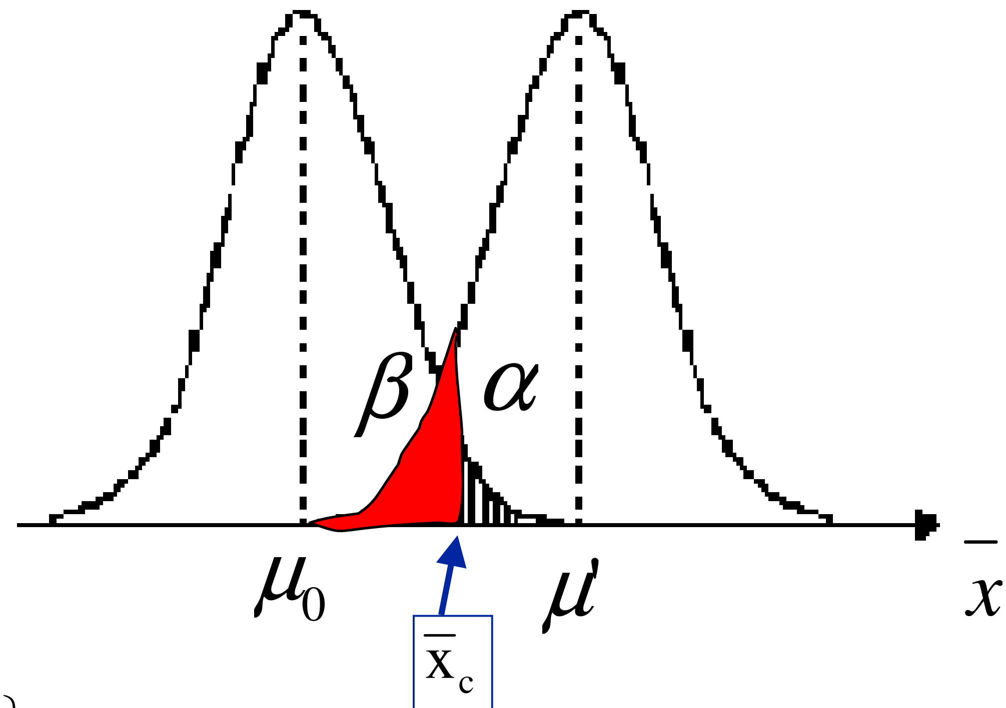


β = Probabilidade do Comprador não detectar que a média é diferente de 20

Tamanho da Amostra para média: Erros tipo I e II

Seja:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_c &= \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \bar{x}_c &= \mu' - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}\right\} \quad \mu' - \mu_0 = (z_\alpha + z_\beta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \boxed{n = \left(\frac{(z_\alpha + z_\beta)\cdot\sigma}{\mu' - \mu_0}\right)^2}$$

Caso $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$

$$\boxed{n = \left(\frac{(z_\alpha + z_\beta)\cdot\sigma}{\mu_0 - \mu'}\right)^2}$$

Caso $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \Rightarrow \mu \leq \mu_1' \text{ ou } \mu \geq \mu_2'$

$$\boxed{n = \max\left\{\left(\frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)\cdot\sigma}{\mu_0 - \mu_1'}\right)^2 ; \left(\frac{(z_{\alpha/2} + z_\beta)\cdot\sigma}{\mu_2' - \mu_0}\right)^2\right\}}$$

Tamanho da Amostra para média: Erros tipo I e II

Exemplo: Considere a resistência média de ruptura dos parafusos especificada em 50 kg, com $\sigma = 4$ kg.

Supor que o comprador especifique também:

a) Se o lote satisfaz a especificação o comprador deseja limitar a 5% a probabilidade de concluir que o lote é insatisfatório.

b) Se o lote tiver resistência média ligeiramente menor que 50 kg, isto não tem tanta importância; o que de fato se deseja é que se a verdadeira resistência média for menor que 48 kg, tal fato seja identificado com pelo menos 90% de probabilidade.

Achar tamanho da amostra e o limite da região crítica.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \Rightarrow n = \left(\frac{z_\beta + z_\alpha}{d'} \right)^2 \qquad d' = \frac{\mu_0 - \mu'}{\sigma}$$

a) $\alpha = 5\%$ $\qquad \mu_0 = 50$

b) $\beta = 10\%$ $\qquad \mu' = 48$

$$d' = \frac{50 - 48}{4} = 0,5$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{z_{5\%} + z_{10\%}}{0,5} \right)^2 = \left(\frac{1,645 + 1,282}{0,5} \right)^2 = 34,3 \qquad \boxed{n=35}$$

$\overline{x_1}$: Limite da região crítica :

$$\overline{x_1} = \mu_0 - z_{5\%} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50 - 1,645 . \frac{4}{\sqrt{35}} = 49$$

Tamanho da Amostra para média: Erros tipo I e II

Exercício (p.123): O peso específico médio de um produto é especificado em 0,8 kg/cm^3. Uma amostra de 12 itens forneceu média 0,81 kg/cm^3 e desvio 0,02 kg/cm^3. O fornecedor indica como sendo 0,01 kg/cm^3 o desvio-padrão do peso específico.

a) Aceitando como válido o desvio padrão dado pelo fornecedor, comente o tamanho da amostra retirada, caso de deseje aceitar que o peso específico é 0,8 kg/cm^3, quando na verdade, ele é superior a 0,82 kg/cm^3 com no máximo 1% de probabilidade (β=1%).

b) Adotando o desvio-padrão da amostra como estimativa do verdadeiro desvio, realize o teste com base na amostra colhida. (α=5%).

$$a)\quad n = \left(\frac{z_\alpha + z_\beta}{d'}\right)^2 \qquad d' = \frac{\mu' - \mu_0}{\sigma} = \frac{0{,}82 - 0{,}8}{0{,}01} = 2$$

$$n = \left(\frac{1{,}645 + 2{,}33}{2}\right)^2 = 4$$

Comentário: A amostra colhida (12) está superdimensionada.

$$b)\begin{cases} H_0 : \mu = 0{,}8 \\ H_1 : \mu > 0{,}8 \end{cases} \qquad \text{Critério : Rejeitar } H_0 \text{ se } \bar{x} > \bar{x}_c$$

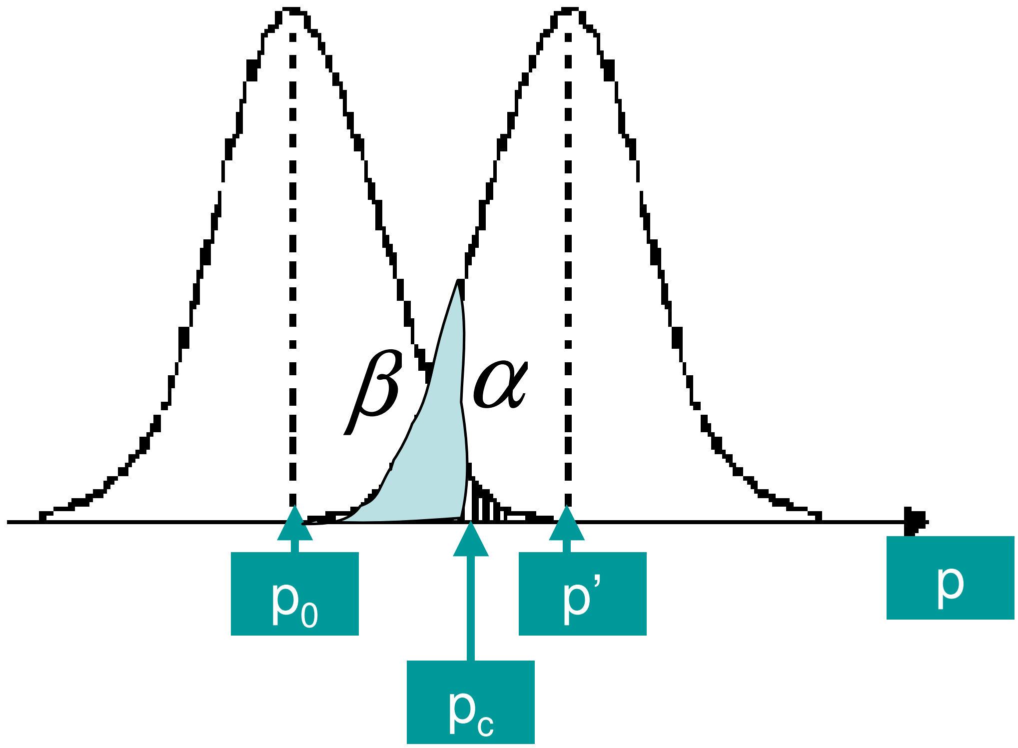
$$\bar{x}_c = \mu_0 + t_{11,5\%}\frac{s}{\sqrt{n}} = 0{,}8 + 1{,}796\frac{0{,}02}{\sqrt{12}} = 0{,}8104$$

Como $\bar{x} = 0{,}81 < \bar{x}_c$ aceita H_0 ao nível de significância de 5%.

Tamanho da Amostra para Proporção: Erros tipo I e II

Seja:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$



$$n = \left(\frac{z_\alpha \sqrt{p_o(1-p_0)} + z_\beta \sqrt{p'(1-p')}}{p' - p_0} \right)^2$$

Tamanho da Amostra para Proporção: Erros tipo I e II

Exemplo (p.125): Um industrial deseja certificar-se de que a fração do merca do que prefere seu produto ao de seu concorrente é superior a 70%. Para tanto, colheu uma amostra aleatória de 165 opiniões, das quais 122 lhe foram favoráveis.
(a) Pode o industrial ficar satisfeito com esse resultado, adotando o nível de 5% de sugnificância?

(a) $$\begin{cases} H_0 : p = 0{,}7 \\ H_1 : p > 0{,}7 \end{cases}$$

Rejeitar H0 se p1 > p_c

p1=(f/n)=(122/165) = 0,74

$$p_c = p_0 + z_\alpha \sqrt{p_0(1 - p_0)/n} + \frac{1}{2n}$$

$$p_c = 0{,}7 + 1{,}645 \sqrt{(0{,}7)(0{,}3)/165} + \frac{1}{2x165} = 0{,}762$$

$$p1 = 0{,}74 < p_c = 0{,}762 \Rightarrow \text{Aceita} - \text{se } H_0$$

Conclusão: O industrial não deve ficar satisfeito.

Exemplo (p.125): Um industrial deseja certificar-se de que a fração do merca do que prefere seu produto ao de seu concorrente é superior a 70%. Para tanto, colheu uma amostra aleatória de 165 opiniões, das quais 122 lhe foram favoráveis.

(a) Pode o industrial ficar satisfeito com esse resultado, adotando o nível de 5% de sugnificância?

(b) Por outro lado, o industrial considera um erro grave de chegar a se desiludir (no caso, admitir que não tem mais de 70% do mercado) quando, na verdade, ele tem mais de 75%. Ele gostaria que a probabilidade de cometer esse erro não superasse 10%. Pergunta-se se a amostra utilizada seria suficiente para atender a essa exigência e ao nível de significância adotado.

(b)

$$\boxed{n = \left(\frac{z_\alpha \sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta \sqrt{p'(1-p')}}{p' - p_0} \right)^2}$$

p_0=0,7 α=5% $z_\alpha = z_{5\%}$ =1,645

p'=0,75 β=10% $z_\beta = z_{10\%}$ =1,282

$$\boxed{n = \left(\frac{1{,}645 \sqrt{0{,}7(1-0{,}7)} + 1{,}282 \sqrt{0{,}75(1-0{,}75)}}{0{,}75 - 0{,}7} \right)^2 = 685}$$

Conclusão: A amostra de 165 opiniões é insuficiente