ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2018.2)

Segunda Prova (Parte I & II) – Novembro/2018

Nome: ______________________________ Nº USP: ____________

Turma/Horário: ____________________ Curso: ____________________

Nota 1: Duração da prova: **75** minutos.	**Nota 4:** A prova pode ser feita inteiramente a lápis/lapiseira.
Nota 2: Perguntas durante a prova são **proibidas**.	**Nota 5:** Os versos das folhas podem ser utilizados para a resolução.
Nota 3: É proibido o uso de calculadoras/computadores.	**Nota 6:** Havendo **indicação adequada**, pode-se continuar a resolução de uma questão em uma página de outra questão.

Formulário

Diagonalização	Produto vetorial	Produto escalar	Retas	Planos
$Mv = \lambda v$	"Regra da mão direita"	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$	$X = A + \lambda\vec{u}$	$X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
$\det(M-\lambda I) = 0$	$\vec{u}\wedge\vec{v} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$
$S^{-1}MS = \Lambda$	$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$	$\vec{\text{proj}}_{\vec{w}}^{\vec{u}} = \frac{\langle\vec{u},\vec{w}\rangle}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$		$ax + by + cz + d = 0$

1) Considere a reta $r : (2, 1, 0) + \lambda(3, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
1a) [1.0 ponto] Mostrar que o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é ortogonal a um plano dado por $ax + by + cz + d = 0$.
1b) [1.5 pontos] Determinar uma equação, na forma vetorial, para o plano π, que passa por $A(1, 2, -1)$ e é ortogonal à reta r.

1a) Como não se pode ter os três parâmetros, a, b e c, todos nulos simultaneamente (o que implicaria $d = 0$ e não haveria plano em questão), assume-se que um deles seja diferente de zero; suponha $c \neq 0$. Então, o plano $ax + by + cz + d = 0$ pode ser escrito como

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ z &= -\frac{d}{c} - \frac{a}{c}\lambda - \frac{b}{c}\mu \end{cases},$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. O plano, então, pode ser representado como $X = (0, 0, -\frac{d}{c}) + \lambda(1, 0, -\frac{a}{c}) + \mu(0, 1, -\frac{b}{c})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, donde os vetores $(1, 0, -\frac{a}{c})$ e $(0, 1, -\frac{b}{c})$ podem ser tomados como geradores do plano. Logo, o vetor

$$\left(1, 0, -\frac{a}{c}\right) \wedge \left(0, 1, -\frac{b}{c}\right) = \det\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \end{pmatrix} = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1\right)$$

é ortogonal ao plano, assim como qualquer múltiplo seu. Em particular,

$$c\left(1, 0, -\frac{a}{c}\right) \wedge \left(0, 1, -\frac{b}{c}\right) = (a, b, c)$$

também é ortogonal ao plano.

Para os casos onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ (no lugar de $c \neq 0$), o argumento é desenvolvido *mutatis mutandis*.

1b) Sendo $(3, 1, -1)$ um vetor diretor da reta r, e como $r \perp \pi$, o plano π pode ser representado por $3x + y - z + d = 0$, restando determinar o parâmetro d. Como $A(1, 2, -1) \in \pi$, este ponto deve satisfazer a equação do plano:

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + d = 0\,.$$

Desta equação, chega-se a $d = -6$, e, portanto, $\pi : 3x + y - z - 6 = 0$. Logo, como $z = 3x + y - 6$, tem-se

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ z &= -6 + 3\lambda + \mu \end{cases},$$

donde $\pi : X = (0,0,-6) + \lambda(1,0,3) + \mu(0,1,1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

---

2) [2.5 pontos] Determinar a fórmula geral para a_n e b_n ($n \geq 3$), onde $a_n = 2a_{n-1}+7b_{n-1}$, $b_n = 8a_{n-1}+3b_{n-1}$, e sendo que $a_3 = 20$ e $b_3 = 10$.

---

2) Representa-se, inicialmente, a relação de recorrência em sua forma matricial

$$u_n := \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = M u_{n-1}\,, \quad n \subset \mathbb{Z}\,, \quad \text{com} \quad u_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}\,.$$

Como $u_n = M u_{n-1} = M^2 u_{n-2} = \cdots = M^{n-3} u_3$, deve-se obter M^{n-3}, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det\left(M - \lambda I\right) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 8 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 10)\,(\lambda + 5)\,,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = 10$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_1 = -5$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_1 I\right) v_1 = \begin{pmatrix} 2-(-5) & 7 \\ 8 & 3-(-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \eta_1 & = & -\xi_1 \end{array} \right.\,,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\xi_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_2 = 10$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_2 I\right) v_2 = \begin{pmatrix} 2-(10) & 7 \\ 8 & 3-(10) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \xi_2 & = & \frac{7}{8}\eta_2 \end{array} \right.\,,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ com a escolha $\eta_2 = 8$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ e sua inversa } S^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/15 & 1/15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 8/15 & -7/15 \\ 0 & 1 & 1/15 & 1/15 \end{array}\right)\,.$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1}MS$, tem-se $M = S\Lambda S^{-1}$, donde

$$M^{n-3} = \overbrace{\left(S\Lambda S^{-1}\right)\left(S\Lambda S^{-1}\right)\cdots\left(S\Lambda S^{-1}\right)}^{n-3 \text{ termos}} = S\Lambda^{n-3}S^{-1}\,,$$

que leva a

$$\begin{aligned} u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= S\Lambda^{n-3}S^{-1}u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^{n-3} \left[\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 \cdot 10^{n-3} + 6 \cdot (-5)^{n-3} \\ 16 \cdot 10^{n-3} - 6\,(-5)^{n-3} \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = 14 \cdot 10^{n-3} + 6 \cdot (-5)^{n-3} \quad \text{e} \quad b_n = 16 \cdot 10^{n-3} - 6\,(-5)^{n-3}\,, \qquad n \in \{3,4,5,\cdots\} \subset \mathbb{Z}\,.$$

3) [2.5 pontos] Determinar a equação para a reta r, sabendo-se que:

(i) o ângulo entre r e s é $\frac{\pi}{3}$, com $r \cap s \neq \varnothing$. Aqui, $s : X = (2,1,1) + \lambda\vec{u}$, $\vec{u} = (1, \sqrt{2}, -1)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
(ii) $P(3,1,1) \in r$.

Determinar, também, o ponto de intersecção entre as duas retas.

---

3) Seja $Q = r \cap s$. Existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (2+\xi, 1+\xi\sqrt{2}, 1-\xi)$, pois $Q \in s$. Deve-se term em mente que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (\xi - 1, \xi\sqrt{2}, -\xi)$ é $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$. Ademais, uma equação para r pode ser dada por

$$r : X = P + \lambda\overrightarrow{PQ}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

restando determinar $\overrightarrow{PQ}$ ou qualquer múltiplo não-nulo desse vetor. Quanto à relação entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\vec{u}$, tem-se

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{u} \rangle = \|\overrightarrow{PQ}\| \|\vec{u}\| \cos\theta$$

ou

$$(\xi - 1, \xi\sqrt{2}, -\xi) \cdot (1, \sqrt{2}, -1) = \sqrt{(\xi-1)^2 + \left(\xi\sqrt{2}\right)^2 + (-\xi)^2}\sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2 + (-1)^2}\cos\theta$$

onde $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Para $\theta = \frac{\pi}{3}$, tem-se

$$4\xi - 1 = \sqrt{4\xi^2 - 2\xi + 1}\,,$$

donde $\xi = \frac{1}{2}$; neste caso, $Q(\frac{5}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$. De forma similar, para $\theta = \frac{2\pi}{3}$, tem-se

$$4\xi - 1 = -\sqrt{4\xi^2 - 2\xi + 1}\,,$$

donde $\xi = 0$; neste caso, $Q(2,1,1)$.

Logo, $\overrightarrow{PQ} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}) \propto (1, -\sqrt{2}, 1)$ $(\theta = \frac{\pi}{3})$ ou $\overrightarrow{PQ} = (-1,0,0) \propto (1,0,0)$ $(\theta = \frac{2\pi}{3})$ e, portanto,

$$r : X = (3,1,1) + \lambda(1, -\sqrt{2}, 1) \quad \text{ou} \quad r : X = (3,1,1) + \lambda(1,0,0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

No primeiro caso, $r \cap s = \{(\frac{5}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})\}$; no segundo, $r \cap s = \{(2,1,1)\}$.

---

4) [2,5 pontos] Uma certa agência de viagens vendeu para um turista um pacote cujo valor é de 500 reais. Desprovido de cartão de crédito, o turista pagou, à vista, utilizando cédulas de 2, 10 e 20 reais. Sabendo-se que foram utilizadas 50 cédulas para pagar o valor exato do pacote, o objetivo deste problema é determinar todas as combinações possíveis de cédulas para o pagamento. Para tal, descrever o problema como um sistema linear $Ax = b$ e determinar
a) A imagem de A, $\mathrm{Im}(A)$. Aqui, $A \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
b) O *kernel* de A, $\ker(A)$. Aqui, $A \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.
c) A solução completa do problema.

---

4) Denotando por ξ, η e μ o número de cédulas de 2, 10 e 20 reais, respectivamente, o problema pode ser descrito pelo sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \xi + \eta + \mu & = & 50 \\ 2\xi + 10\eta + 20\mu & = & 500 \end{array} \right. ,$$

ou $Ax = b$, onde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \qquad x := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b := \begin{pmatrix} 50 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

4a) Sendo $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{M}_{2\times1}(\mathbb{R}) : y = Ax \,, x \in \mathbb{M}_{4\times1}(\mathbb{R})\}$, e com $x = \begin{pmatrix}\xi & \eta & \mu\end{pmatrix}^T$, tem-se

$$Ax = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 10 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \mu\end{pmatrix} = \xi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\20\end{pmatrix}.$$

Os vetores $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\20\end{pmatrix}$ formam uma sequência de vetores linearmente dependente. Com efeito,

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 10\\ 1 & 20\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 8\\ 1 & 20\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 8\\ 0 & 18\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 0 & 18\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 18\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

donde se nota que a imagem é gerada pelo conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ (as passagens no escalonamento acima foram omitidas por serem evidentes). Finalmente, tem-se

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{\xi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times1}(\mathbb{R}) : \xi, \eta \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2.$$

4b & 4c) Do sistema $Ax = b$, tem-se (detalhes omitidos por serem evidentes)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 50\\ 2 & 10 & 20 & 500\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 50\\ 1 & 5 & 10 & 250\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 50\\ 0 & 4 & 9 & 200\end{array}\right),$$

id est, após um escalonamento simples, o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}50\\200\end{pmatrix} \left\{\begin{array}{lcl}\xi + \eta + \mu & = & 50\\ 4\eta + 9\mu & = & 200\end{array}\right..$$

Uma solução particular x_p do problema pode ser obtida impondo $\mu = 0$, implicando $\xi = 0$ e $\eta = 50$; por conseguinte, $x_p = \begin{pmatrix}0 & 50 & 0\end{pmatrix}^T$.

A solução geral do problema é dada por $x = x_p + x_k$, onde $\{x_k\}$ gera o kernel de A ($Ax_k = 0$). Sendo $\ker(A) = \{x \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : Ax = 0\}$, com $x = \begin{pmatrix}\xi & \eta & \mu\end{pmatrix}^T$, tem-se

$$0 = Ax = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 10 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \mu\end{pmatrix}.$$

Com base na simplificação obtida anteriormente, tem-se

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 9 & 0\end{array}\right) \left\{\begin{array}{lcl}\xi + \eta + \mu & = & 0\\ 4\eta + 9\mu & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\xi & = & 5\mu/4\\ \eta & = & -9\mu/4\end{array}\right..$$

Logo, como $\begin{pmatrix}\xi & \eta & \mu\end{pmatrix}^T = \frac{1}{4}\mu\begin{pmatrix}5 & -9 & 4\end{pmatrix}^T$, tem-se

$$\ker(A) = \left\{\xi\begin{pmatrix}5\\-9\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \xi \in \mathbb{R}\right\}.$$

Logo, chega-se à solução geral do sistema $Ax = b$, que é dada por

$$x = x_p + x_k = \begin{pmatrix}0\\50\\0\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}5\\-9\\4\end{pmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Contudo, para obter soluções realísticas e que obedeçam às condições impostas pelo problema (número de cédulas como inteiros não-negativos), o valor de ξ deve percorrer um subconjunto da reta real, que é o intervalo dos inteiros entre 0 e 5, ou $[0, 5] \subset \mathbb{Z}$:

$$x = \begin{pmatrix}0\\50\\0\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}5\\-9\\4\end{pmatrix}, \quad \xi \in [0,5] \subset \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad x \in \left\{\begin{pmatrix}0\\50\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\41\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\32\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}15\\23\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}20\\14\\16\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}25\\5\\20\end{pmatrix}\right\}.$$