Lista 3: Relações entre conjuntos e Álgebra dos Conjuntos

1) Determina os conjuntos A e B tais que:

$A' = \{ f, g, h, l \}$, $A \cap B = \{ d, e \}$ e $A \cup B = \{ a, b, d, e, f \}$.

2) Sejam A, B e C conjuntos. Prova que:

a) $A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$

b) $A - B = B' - A'$

c) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

d) $(A - B)' = A' \cup B$

3) Sejam *A*, *B* e *C* conjuntos. Verifique se as proposições abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando a sua resposta.

a) $A \cup (B - A) = A \cup B$

b) $A \cap B = A \cap C \leftrightarrow B = C$

c) $(A' \cup B')' = A \cap B$

d) $(A \cup B) - C = A \cup (B - C)$

e) $A \cap B = \varnothing \rightarrow A \subseteq B'$

f) $A - B = A - C \leftrightarrow B = C$

g) $A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B$

h) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

4) Sejam A um conjunto qualquer não vazio e o produto cartesiano A x A .
A afirmação verdadeira é:
a) $A \subset A \times A$ b) $A \times A \not\subset A \times A$ c) $A \times A \neq A$ d) $\varnothing \not\subset A \times A$ e) nenhuma

5) Se $A = \{\varnothing\}$, então:
a) P (A) é um conjunto unitário b) P (A) é um conjunto vazio c) $\varnothing \notin$ P (A) d) P (A) é um conjunto par
e) $P(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

6) Sendo $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ pode-se afirmar que:
a) A é o conjunto das partes do conjunto {a,b}
b) $b \in A$ c) $\{a\} \notin A$ d) $\{a\} \subset A$ e) $\{a,b\} \in A$

7) Quando: $A \subseteq B$ e $A \neq B$, qual(ais) afirmativa(s) abaixo é(são) verdadeira(s)?
a) $A \cup B = B$ b) $A \cap B = B$ c) $A - B = \varnothing$ d) $A \cap B = A$

8) Se A e B são subconjuntos de X, dentre as proposições seguintes a falsa é:
a) $(A \cap B) \subseteq A, \forall A, B \in P(X)$
b) $(A \cap B) \subseteq (A \cup B), \forall A, B \in P(X)$
c) $\varnothing \subseteq (A \cap B), \forall A, B \in P(X)$
d) $B \subseteq (A \cap B), \forall A, B \in P(X)$
e) $(A \cup A) \cap B = (B \cap B) \cap A, \forall A, B \in P(X)$

Exercícios complementares:
Referência: Menezes P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática

Página	Exercícios
63	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 10

Respostas

1. $A = \{ a, b, d, e \}$, $B = \{ d, e, f \}$

2. a) Sejam A, B conjuntos tais que $A \subseteq B$. Seja $x \in A$.
Como $A \subseteq B$,temos que $x \in B$.
Então $x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$. Portanto, $A \subseteq A \cap B$.
Por outro lado, temos que: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$. Portanto $x \in A$.
Temos então que $A \cap B \subseteq A$. Desta forma podemos concluir que $A \cap B = A$.
Logo, $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$.

b) Sejam A, B conjuntos quaisquer.
Então: $B' - A' = \{ x / x \in B' \wedge x \notin A' \} = \{ x / x \notin B \wedge x \in A \} = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \} = A - B$
Logo, $A – B = B' - A'$.

c) Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Então:
$\forall x, x \in A \cup (B - C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B - C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) - (C - A)$
Logo, $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$.

d) Sejam A, B conjuntos quaisquer.
$\forall x, x \in (A - B)' \Leftrightarrow x \notin A - B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A' \cup B$
Logo, $(A - B)' = A' \cup B$.

3. a) A proposição é verdadeira. PROVA:
Sejam A e B conjuntos.
$\forall x, x \in A \cup (B - A) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cup B$.
Logo, $A \cup (B - A) = A \cup B$.

b) A proposição é falsa. PROVA:
Existem os conjuntos $A = \{ 1, 2 \}$, $B = \{ 1, 3, 4 \}$ e $C = \{ 1, 5, 9 \}$ tais que:
$A \cap B = \{ 1 \} \wedge A \cap C = \{ 1 \}$, ou seja: $A \cap B = A \cap C$.
Mas $B \neq C$.
Logo, $\neg (A \cap B = A \cap C \rightarrow B = C)$.
Logo, a proposição $(A \cap B = A \cap C \leftrightarrow B = C)$ é falsa.

c) A proposição é verdadeira. PROVA:
Sejam A e B conjuntos. Então, usando uma das leis de De Morgan para conjuntos, temos:
$(A' \cup B')' = (A')' \cap (B')' = A \cap B$.
Logo, $(A' \cup B')' = A \cap B$.

d) A proposição é falsa. PROVA:
Existem os conjuntos $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 4, 5 \}$ e $C = \{ 1, 5 \}$ tais que:
$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ e
$(A \cup B) - C = \{2, 3, 4 \}$
Mas:
$B - C = \{ 4, 5 \} - \{ 1, 5 \} = \{ 4 \}$
$A \cup (B - C) = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
Então, neste caso, $(A \cup B) - C \neq A \cup (B - C)$.
Logo, a proposição é falsa.

e) A proposição é verdadeira. PROVA:
Sejam A e B conjuntos quaisquer tais que $A \cap B = \emptyset$. Então:
$\forall x, x \in A \Rightarrow x \notin B$, pois $A \cap B = \emptyset$.
Mas: $x \notin B \Leftrightarrow x \in B'$.
Logo, $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B'$.
Conclusão : $A \subseteq B'$.

f) A proposição é falsa. PROVA:
Existem os conjuntos A = { 1, 2 }, B = { 2, 3 } e C = { 2, 4 } tais que
A - B = { 1 } e A - C = { 1 }
Mas $B \neq C$.

g) A proposição é falsa. PROVA:
Se escolhermos A = { 1, 2 } e $B = \varnothing$, teremos:
$A \times B = \varnothing$ e $B \times A = \varnothing$
Porém $A \neq B$.

h) A proposição é falsa. PROVA:
Existem A = { 1, 2 } e B = { 3, 4 }, C = { 4, 5 } onde
$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ e $(A \cup B) \cap C = \{ 4 \}$.
$B \cap C = \{ 4 \}$ e $A \cup (B \cap C) = \{1,2,4 \}$.
E então $\{ 4 \} \neq \{ 1, 2, 4 \}$.

4. c

5. d

6. e

7. a, c, d

8. d