ACH2002 – Introdução à Ciência da Computação II

Professor: Delano Medeiros Beder

EACH – Segundo Semestre de 2008

1. Prove que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}, \forall n \geq 1$

   Seja $S(n)$ a seguinte soma: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2, \forall n \geq 1$.

   Gostaríamos de provar que a seguinte afirmação é verdadeira: $S(n) = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}, \forall n \geq 1$.

   <u>Caso base:</u>

   Para $n = 1$, temos que $S(1) = \frac{2*1^3+3*1^2+1}{6} = 1 = 1^2$. $\surd$

   <u>Passo Indução:</u>

   Suponha por hipótese de indução que

   $S(n-1) = \frac{2(n-1)^3+3(n-1)^2+n-1}{6} = \frac{2n^3-6n^2+6n-2+3n^2-6n+3+n-1}{6} = \frac{2n^3-3n^2+n}{6}$

   No entanto, $S(n) = S(n-1) + n^2 \Rightarrow \frac{2n^3-3n^2+n}{6} + n^2 = \frac{2n^3+6n^2-3n^2+n}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

   $S(n) = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$. O que queríamos provar. $\surd$

2. Prove que $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 3 + 2n - 1 = n^2, \forall n \geq 1$

   Seja $S(n)$ a seguinte soma: $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 3 + 2n - 1, \forall n \geq 1$.

   Gostaríamos de provar que a seguinte afirmação é verdadeira: $S(n) = n^2, \forall n \geq 1$.

   <u>Caso base:</u>

   Para $n = 1$, temos que $S(1) = 1^2 = 1$. $\surd$

   <u>Passo Indução:</u>

   Suponha por hipótese de indução que

   $S(n-1) = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$

   No entanto, $S(n) = S(n-1) + 2n - 1 \Rightarrow n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$

   $S(n) = n^2$. O que queríamos provar. $\surd$

3. Prove que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}, \forall n \geq 1$

   Seja $S(n)$ a seguinte soma: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3, \forall n \geq 1$.

   Gostaríamos de provar que a seguinte afirmação é verdadeira: $S(n) = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}, \forall n \geq 1$.

   <u>Caso base:</u>

   Para $n = 1$, temos que $S(1) = \frac{1^4+2*1^3+1^2}{4} = 1 = 1^3$. $\surd$

   <u>Passo Indução:</u>

   Suponha por hipótese de indução que

   $S(n-1) = \frac{(n-1)^4+2(n-1)^3+(n-1)^2}{4} = \frac{n^4-4n^3+6n^2-4n+1+2n^3-6n^2+6n-2+n^2-2n+1}{4} = \frac{n^4-2n^3+n^2}{4}$

   No entanto, $S(n) = S(n-1) + n^3 \Rightarrow \frac{n^4-2n^3+n^2}{4} + n^3 = \frac{n^4-2n^3+n^2+4n^3}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

   $S(n) = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$. O que queríamos provar. $\surd$

4. Prove que $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-3)^3 + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2, \forall n \geq 1$

   Seja $S(n)$ a seguinte soma: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-3)^3 + (2n-1)^3, \forall n \geq 1$.

   Gostaríamos de provar que a seguinte afirmação é verdadeira: $S(n) = 2n^4 - n^2, \forall n \geq 1$.

   Caso base:

   Para $n = 1$, temos que $S(1) = 2 * 1^4 - 1^2 = 2 - 1 = 1 = 1^3$. $\checkmark$

   Passo Indução:

   Suponha por hipótese de indução que

   $S(n-1) = 2(n-1)^4 - (n-1)^2 = 2(n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) - (n^2 - 2n + 1)$

   $S(n-1) = 2n^4 - 8n^3 + 12n^2 - 8n + 2 - n^2 + 2n - 1$

   No entanto, $S(n) = S(n-1) + (2n-1)^3$

   Como $(2n-1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1$, temos que

   $S(n) = 2n^4 - 8n^3 + 12n^2 - 8n + 2 - n^2 + 2n - 1 + 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 \Rightarrow$

   $\Rightarrow 2n^4 + 8n^3 - 8n^3 + 12n^2 - 12n^2 - n^2 - 8n + 2n + 6n + 2 - 1 - 1 = 2n^4 - n^2$

   $S(n) = 2n^4 - n^2$. O que queríamos provar. $\checkmark$

5. Prove que $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 0$

   Seja $S(n)$ a seguinte soma: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n, \forall n \geq 0$.

   Gostaríamos de provar que a seguinte afirmação é verdadeira: $S(n) = 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 0$.

   Caso base:

   Para $n = 0$, temos que $S(0) = 2^{0+1} - 1 = 1$. $\checkmark$

   Passo Indução:

   Suponha por hipótese de indução que

   $S(n-1) = 2^{n-1+1} - 1 = 2^n - 1$

   No entanto, $S(n) = S(n-1) + 2^n \Rightarrow 2^n - 1 + 2^n = 2 * 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$

   $S(n) = 2^{n+1} - 1$. O que queríamos provar. $\checkmark$

6. Prove que $2^n \geq n^2, \forall n \geq 4$.

   Seja $P(n)$ a seguinte afirmação: $2^n \geq n^2, \forall n \geq 4$.

   Gostaríamos de provar que $P(n)$ é verdadeira.

   Caso base:

   Para $n = 4$, temos que $P(4)$ é verdadeiro, pois $2^4 \geq 4^2$. $\checkmark$

   Passo Indução:

   Suponha por hipótese de indução que $P(n)$ é verdadeiro ($2^n \geq n^2, \forall n \geq 4$), precisamos provar que $P(n+1)$ também é. Isto é, $2^{n+1} \geq (n+1)^2, \forall n \geq 4$.

   (1) $2^n \geq n^2 \Rightarrow 2 * 2^n \geq 2n^2 \Rightarrow 2^{n+1} \geq 2n^2, \forall n \geq 4$.

   (2) $2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2, \forall n \geq 4 \Rightarrow 2n^2 > (n+1)^2, \forall n \geq 4$.

   Por (1) e (2), temos que $2^{n+1} \geq 2n^2 > (n+1)^2, \forall n \geq 4$.

   $2^{n+1} > (n+1)^2, \forall n \geq 4$. O que queríamos provar. $\checkmark$

7. Prove que $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}, \forall n \geq 1$

   Seja $S(n)$ a seguinte soma: $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}, \forall n \geq 1$.

   Gostaríamos de provar que $S(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}, \forall n \geq 1$ é verdadeira.

   <u>Caso base:</u>

   Para $n = 1$, temos que $S(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. $\surd$

   <u>Passo Indução:</u>

   Suponha por hipótese de indução que

   $S(n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-2}$

   No entanto, $S(n) = S(n-1) + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$

   $S(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}$

   Como $\frac{1}{n} = \frac{2}{2n}$, temos que $S(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{2}{2n}$

   $S(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$. O que queríamos provar. $\surd$

8. Prove a soma dos cubos de três numeros naturais positivos sucessivos é divisível por 9. Isto é, $\forall n \geq 1, n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9.

   Seja $P(n)$ a seguinte afirmação: $\forall n \geq 1, n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9.

   Gostaríamos de provar que $P(n)$ é verdadeira.

   <u>Caso base:</u>

   Para $n = 1$, temos que $P(n)$ é verdadeiro, pois $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$ que é divisível por 9. $\surd$

   <u>Passo Indução:</u>

   Suponha por hipótese de indução que $P(n)$ é verdadeiro, ou seja, $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9.

   Precisamos provar que $P(n+1)$ também é. Isto é, $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ é divisível por 9.

   Sabemos que $(n+1)^3 = n^3 + 9n^2 + 27n + 27$

   $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+2)^3 + (n+3)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \Rightarrow$

   $\Rightarrow n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9(n^2 + 3n + 3)$

   (1) Por hipótese de indução sabemos que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ é divisível por 9.

   (2) $9(n^2 + 3n + 3)$ é divisível por 9.

   Por (1) e (2) temos que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9(n^2 + 3n + 3)$ é divisível por 9.

   Desta forma, $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ é divisível por 9. O que queríamos provar. $\surd$

9. Prove que todo número natural $n > 1$ pode ser escrito como o produto de primos.

   Seja $P(n)$ a seguinte afirmação: todo número natural $n > 1$ pode ser escrito como um produto de primos. Gostaríamos de provar que $P(n)$ é verdadeira.

   Caso base:

   Para $n = 2$. Verdadeiro, pois pode ser escrito como um produto de um primo, ele mesmo. $\surd$

   Passo Indução:

   Suponha por hipótese de indução (forte) que $P(k)$ é verdadeiro para todo natural $k < n$. Vamos provar que $P(n)$ é verdadeiro.

   Há dois casos: n é primo ou n é composto. Se n é primo então obviamente $P(n)$ é verdadeiro.

   Suponha então que n é composto. Isto significa que n possui algum divisor distinto de 1 e n, digamos, a. Assim, existe algum natural b tal que $n = ab$. Note que $2 \leq a < n$ e $2 \leq b < n$.

   Pela hipótese de indução, tanto a quanto b podem ser escritos como produtos de primos. Então n pode ser escrito também como produto de primos: basta usar os primos que aparecem nas fatorações de a e b.

   Desta forma, provamos que n pode ser escrito como produto de primos. $\surd$

10. Prove que todo natural $n > 0$ pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2.

    Seja $P(n)$ a seguinte afirmação: todo natural $n > 0$ pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2. Gostaríamos de provar que $P(n)$ é verdadeira.

    Caso base:

    Para $n = 1$. $P(1)$ é verdadeiro pois 1 pode ser escrito como 2^0. $\surd$

    Passo Indução:

    Suponha por hipótese de indução (forte) que $P(k)$ é verdadeiro para todo natural $1 \leq k < n$. Vamos provar que $P(n)$ é verdadeiro.

    Há dois casos: n é potência de 2 ou não.

    Se n é potência de 2 então $P(n)$ é verdadeiro: n pode ser escrito como 2^k, onde $k = log_2 n$.

    Suponha então que n não é potência de 2.

    Podemos considerar então que $n = a + b$, onde $a = 2^l$, $b = n \bmod 2^l$ e $l = \lfloor log_2 n \rfloor, l \geq 0$.

    Note que

    - $1 \leq a < n$, pois $l \geq 0$ e
    - $1 \leq b < n$, pois n não é potência de 2.

    Pela hipótese de indução, tanto a quanto b podem ser escritos como a soma de diferentes potências de 2. Então n pode ser escrito também como a soma de diferentes potências de 2: basta usar a potências de 2 que aparecem nas representações de a e b. No entanto, falta provar que a e b usam potências de 2 distintas em suas representações.

    O número natural a pode ser escrito como a soma de apenas uma potência de 2 (2^l).

    Desde que $1 \leq b < 2^l - 1$, 2^l não faz parte da representação de b. Desta forma, a e b usam potências de 2 distintas em suas representações.

    Logo, provamos que n pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2. $\surd$