b) $P(\bar{E}) = ?$, usando a aproximação de Poisson

- $\lambda = n \cdot p$

$10 = n \cdot 0{,}01$

$n = \dfrac{10}{0{,}01}$

$\boxed{n = 1000}$

- $P(E) = P(X=0) + P(X=1)$

$P(E) = \binom{1000}{0} \cdot (0{,}01)^0 \cdot (1-0{,}01)^{1000-0} + \binom{1000}{1} \cdot$

$\cdot (0{,}01)^1 \cdot (1-0{,}01)^{1000-1}$

$P(E) = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}99)^{1000} + 1000 \cdot 0{,}01 \cdot (0{,}99)^{999}$

$\boxed{P(E) = (0{,}99)^{1000} + 10 \cdot (0{,}99)^{999}}$

- $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$\boxed{P(\bar{E}) = 1 - (0{,}99)^{1000} - 10 \cdot (0{,}99)^{999}}$

IV. Variáveis Aleatórias Contínuas

1. a) $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx = 1$ (mostrar)

- $E = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot dx$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sigma} \cdot \exp\left(- \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(- \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right) . dx$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(- \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right) . dx$$

• Sendo $u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, temos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \qquad \frac{dx}{du} = \sigma$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d}{dx}(x-\mu) \qquad \boxed{dx = \sigma \,.\, du}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma}$$

• $$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(- \frac{1}{2} \cdot u^2 \right) . \sigma . du$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\cancel{\sigma}} \cdot \cancel{\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(- \frac{u^2}{2} \right) . du$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(- \frac{u^2}{2} \right) . du \quad (1)$$

• De acordo com o Mathematica, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(- \frac{u^2}{2} \right) . du = \sqrt{2\pi} \quad (2)$$

onde erf é uma função de erro.

• Substituindo a igualdade (2) em (1), temos:

$$E = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \cdot \cancel{\sqrt{2\pi}}$$

$$\boxed{E = 1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot dx = 1 \quad c.q.d$$

b) $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

$\mu_X = ?$

$\sigma_X^2 = ?$

Pela definição de distribuição gaussiana (ou normal), a média e a variância de uma variável aleatória X que obedece à distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ são, respectivamente, μ e σ^2.

2. $$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} \cdot dx$$

a) $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

De maneira geral, sendo $a < c < b$ e $f(x)$ uma função qualquer, temos:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$$

Portanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,.\,dx = \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,.\,dx + \int_{z}^{\infty} e^{-x^2/2}\,.\,dx$$

Considerando $g(x) = e^{-x^2/2}$, é fácil perceber que $g(x) = g(-x)$ e, portanto, trata-se de uma função par. Devido a essa simetria, tem-se que $\int_{z}^{\infty} e^{-x^2/2}\,.\,dx = \int_{-\infty}^{-z} e^{-x^2/2}\,.\,dx$.

Logo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,.\,dx = \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,.\,dx + \int_{-\infty}^{-z} e^{-x^2/2}\,.\,dx$$

De acordo com o site Wolfram Alpha, o valor de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,.\,dx = \sqrt{2\pi}$. Assim:

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,.\,dx + \int_{-\infty}^{-z} e^{-x^2/2}\,.\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.\,\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,.\,dx + \int_{-\infty}^{-z} e^{-x^2/2}\,.\,dx\right)$$

$$\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}}\,.\,\cancel{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,.\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

$$\int_{-\infty}^{-z} e^{-x^2/2}\,.\,dx$$

Pela definição da função $\Phi(z)$, pode-se dizer que:

$$1 = \Phi(z) + \Phi(-z)$$

$$\boxed{\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)} \quad \text{c.q.d}$$

b) $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{ (mostrar)}$$

A função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ é dada por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sigma} \,.\, \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) . \, dt$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sigma} \,.\, \exp\left(-\frac{1}{2} \,.\, \frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}\right) . \, dt$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sigma} \,.\, \exp\left(-\frac{1}{2} \,.\, \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) . \, dt$$

Aplicando a mudança de variáveis $u = \frac{x-\mu}{\sigma}$, temos:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d}{dx}(x-\mu) \qquad \frac{dx}{du} = \sigma$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma} \cdot 1 \qquad \boxed{dx = \sigma \cdot du}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot u^2\right)\cdot\sigma\cdot du$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\cancel{\sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\cdot\cancel{\sigma}\cdot du$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\cdot du$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\cdot du$$

$$\boxed{F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} \quad \text{c.q.d.}$$

3. X : valor da resistência de um resistor

$\mu_X = 1000\ \Omega$

$\sigma_X^2 = 2500\ \Omega^2$

$X \sim N(\mu_X; \sigma_X^2)$

R : evento "resistor escolhido ao acaso é rejeitado".

$P(R) = ?$

• Como a linha de produção fabrica resistores de $1000\ \Omega$, com uma tolerância de 10 % (10% de 1000 = 100), a faixa de valores de resistência r aceitável é $900 \leq r \leq 1100$.

• O evento R, portanto, pode ser escrito como:

$R = (X < 900) \cup (X > 1100)$

Observemos que o evento $(X < 900) \cap (X > 1100)$ é vazio ($\emptyset$). Assim:

$P(R) = P(X < 900) + P(X > 1100)$

$P(R) = P(X \leq 900) + (1 - P(X \leq 1100))$

$\boxed{P(R) = F_X(900) + (1 - F_X(1100))}$

• Como $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, $\sigma_X = \sqrt{2500} = 50$. Assim, temos:

$$F_X(900) = \Phi\left(\frac{900 - 1000}{50}\right) = \Phi\left(\frac{-100}{50}\right) = \boxed{\Phi(-2)}$$

$$F_X(1100) = \Phi\left(\frac{1100 - 1000}{50}\right) = \Phi\left(\frac{100}{50}\right) = \boxed{\Phi(2)}$$

• $P(R) = \Phi(-2) + (1 - \Phi(2))$

$P(R) = \Phi(-2) + \Phi(-2)$

$\boxed{P(R) = 2 \cdot \Phi(-2)}$

• $$\Phi(-2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{-2} e^{-x^2/2} \cdot dx$$

$$\Phi(-2) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0{,}057$$

$\boxed{\Phi(-2) \cong 0{,}023}$

- $P(R) = 2 \cdot \Phi(-2)$

  $P(R) = 2 \cdot 0{,}023$

  $\boxed{P(R) = 0{,}046}$

4. $X \sim f_X(x)$

a) $f_X(x) = 0$ para $x < 0$

mostrar que, sendo $a > 0$, $P(x \geq a) \leq \mu_X / a$

onde $\mu_X = E(X)$ é o valor esperado de X

- $\mu_X = E(X)$

  $\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx$

  $\mu_X = \int_{-\infty}^{0} x \cdot f_X(x) \cdot dx + \int_{0}^{\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx$

Como $f_X(x) = 0$, para $x < 0$, segue-se que $\int_{-\infty}^{0} x \cdot f_X(x) \cdot dx = 0$. Logo:

$\mu_X = \int_{0}^{\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx$

- $P(x \geq a) = 1 - P(x < a)$

  $P(x \geq a) = 1 - P(X \leq a)$

  $P(x \geq a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f_X(x) \cdot dx$

$$P(x \geq a) = 1 - \left(\int_{-\infty}^{0} fx(x) \cdot dx + \int_{0}^{a} fx(x) \cdot dx \right)$$

uma vez que $a > 0$.

$$P(x \geq a) = 1 - \left(0 + \int_{0}^{a} fx(x) \cdot dx \right)$$

$$\boxed{P(x \geq a) = 1 - \int_{0}^{a} fx(x) \cdot dx} \quad (1)$$

- $$\frac{\mu_x}{a} = \frac{1}{a} \cdot \int_{0}^{\infty} x \cdot fx(x) \cdot dx$$

$$\frac{\mu_x}{a} = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{a} \cdot x \cdot fx(x) \cdot dx$$

$$\boxed{\frac{\mu_x}{a} = \int_{0}^{\infty} \frac{x}{a} \cdot fx(x) \cdot dx} \quad (2)$$

- Como $a > 0$ e, em ambas as expressões, os casos em que $x < 0$ foram desconsiderados, $x \geq 0$ e, portanto, $\frac{x}{a} \geq 0$.

- Por definição de função de densidade probabilística, $fx(x) \geq 0$. Assim, $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{a} \cdot fx(x) \cdot dx$ e $\int_{0}^{a} fx(x) \cdot dx$ são maiores (ou iguais) a zero. Logo:

1. $\frac{\mu_x}{a} \geq 0$

$$2. \int_0^a fx(x) \cdot dx \geq 0$$

$$-\int_0^a fx(x) \cdot dx \leq 0$$

$$-\int_0^a fx(x) \cdot dx + 1 \leq 0 + 1$$

$\boxed{P(x \geq a) \leq 1}$, o que faz sentido, visto que $P(x \geq a)$ é uma probabilidade

Como $\frac{\mu x}{a}$ não possui um limite superior, como acontece em $P(x \geq a)$, possivelmente teremos a seguinte desigualdade

$$P(x \geq a) \leq \frac{\mu x}{a}$$

b) dado $a > 0$

mostrar que $P(|X - \mu_x| \geq a) \leq \sigma_x^2 / a^2$

$\sigma_x{}^2 = Var(X)$

Suponha que X seja uma variável aleatória discreta. Sendo assim, temos:

$$\sigma_x{}^2 = Var(X)$$

$$\sigma_x{}^2 = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot fx(x)$$

$$\sigma_x{}^2 = \sum_{x=-\infty}^{\mu - a} (X - \mu)^2 \cdot fx(x) + \sum_{x > \mu - a}^{x < \mu - a} (x - \mu)^2 \cdot$$

$$. f_X(x) + \sum_{\mu+a}^{\infty} (x-\mu)^2 . f_X(x)$$

$$\sigma_X^2 \geq \sum_{-\infty}^{\mu-a} (x-\mu)^2 . f_X(x) + \sum_{\mu+a}^{\infty} (x-\mu)^2 . f_X(x)$$

No primeiro somatório, $x \leq \mu - a$; no segundo somatório, por ua vez, $x \geq \mu + a$
Em outras palavras, $x - \mu \leq -a$ ou $x - \mu \geq a$. Logo, $(x-\mu)^2 \geq a^2$ e:

$$\sigma_X^2 \geq \sum_{-\infty}^{\mu-a} a^2 . f_X(x) + \sum_{\mu+a}^{\infty} a^2 . f_X(x)$$

$$\sigma_X^2 \geq a^2 . \sum_{-\infty}^{\mu-a} f_X(x) + a^2 . \sum_{\mu+a}^{\infty} f_X(x)$$

$$\sigma_X^2 \geq a^2 . \left[\sum_{-\infty}^{\mu-a} f_X(x) + \sum_{\mu+a}^{\infty} f_X(x) \right]$$

$$\sigma_X^2 \geq a^2 . [P(X \leq \mu - a) + P(X \geq \mu + a)]$$

$$\sigma_X^2 \geq a^2 . [P(X - \mu \leq -a) + P(X - \mu \geq a)]$$

$$\sigma_X^2 \geq a^2 . P(|X - \mu| \geq a)$$

$$a^2 . P(|X - \mu| \geq a) \leq \sigma_X^2$$

$$\boxed{P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma_X^2}{a^2}}$$