

# Primeira Lista de Exercícios

## Indução Finita e Recursão

Norton Trevisan Roman

18 de agosto de 2018

1. Prove que  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}, \forall n \geq 1$
2. Prove que  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2, \forall n \geq 1$
3. Prove que  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 0$
4. Prove que  $2^n \geq n^2, \forall n \geq 4$
5. Prove que a soma dos cubos de três números naturais positivos sucessivos é divisível por 9
6. Prove que todo número natural não nulo pode ser escrito como a soma de diferentes potências de 2 (indução forte).
7. Prove que  $n! > n^2, \forall n \geq 4$
8. Prove que  $2^n < n!, \forall n \geq 4$
9. Prove que  $3^{2n} + 7$  é divisível por 8,  $\forall n \geq 1$
10. Prove que  $n^3 + 2n$  é divisível por 3,  $\forall n \geq 1$
11. Prove que o produto de quaisquer três inteiros positivos consecutivos é divisível por 3
12. O que está errado com a seguinte “demonstração” por indução matemática? Iremos provar que, para todo inteiro positivo  $n$ ,  $n$  é igual a 1 mais  $n$ .  
Suponha que  $P_k$  é verdadeira, ou seja  
 $k = k + 1$   
Somando 1 a ambos os lados da equação, temos:  
 $k + 1 = k + 2$   
logo  $P_{k+1}$  é verdadeira.
13. O que está errado com a seguinte “demonstração” por indução matemática? Iremos provar que todos os computadores são construídos pelo mesmo fabricante. Em particular, iremos provar que para qualquer conjunto de  $n$  computadores, onde  $n$  é um inteiro positivo, todos os computadores desse conjunto são construídos pelo mesmo fabricante. Inicialmente provaremos  $P_1$ , o que é trivial, pois um conjunto de um único computador tem apenas um fabricante. Agora vamos assumir  $P_k$ , ou seja, em qualquer conjunto de  $k$  computadores, todos os computadores foram construídos pelo mesmo fabricante. Para provar  $P_{k+1}$ , tomemos qualquer dos  $k + 1$  computadores. Coloque um dos  $k + 1$

computadores (chame-o de HAL) fora do conjunto. Por nossa suposição, os  $k$  computadores remanescentes têm o mesmo fabricante. Troquemos HAL de posição com um dos  $k$  computadores. No novo grupo de  $k$  computadores, pela hipótese de indução, todos têm o mesmo fabricante. Então o fabricante de HAL é o mesmo dos outros computadores, o que prova que os  $k + 1$  computadores têm o mesmo fabricante.

(dica: [https://en.wikipedia.org/wiki/All\\_horses\\_are\\_the\\_same\\_color](https://en.wikipedia.org/wiki/All_horses_are_the_same_color))

14. Escreva um método recursivo `maxmin` que calcule o valor do elemento máximo e do elemento mínimo de um arranjo  $a = [0 \dots n - 1]$  de  $n$  elementos
15. Escreva um método recursivo que calcule a soma dos dígitos de um inteiro positivo  $n$ . A soma dos dígitos de 132, por exemplo, é 6
16. Uma quantia de R\$500,00 foi investida em uma conta remunerada a uma taxa de juro composto anual de 10%
  - (a) Escreva a definição recursiva para  $S(n)$ , o saldo na conta no início do  $n$ -ésimo ano
  - (b) Depois de quantos anos a quantia excederá o valor de R\$700,00?
17. Em um experimento, certa colônia de bactérias tem inicialmente uma população de 50.000. Uma leitura é feita a cada duas horas, e no final de cada duas horas de intervalo há três vezes mais bactérias que antes.
  - (a) Escreva a definição recursiva para  $A(n)$ , onde  $A(n)$  é o número de bactérias presentes no início do  $n$ -ésimo período de 2h
  - (b) No início de qual intervalo existem 1.350.000 bactérias presentes?
18. Uma coleção  $S$  de cadeias de caracteres é definida recursivamente por:
  - 'a' e 'b' pertencem a  $S$
  - Se  $X$  pertence a  $S$ , então  $Xb$  também pertence a  $S$

Escreva um procedimento que implemente essa definição e diga quais das seguintes cadeias pertencem a  $S$ :

- (a) a
- (b) ab
- (c) aba
- (d) aaab
- (e) bbbbb

19. Uma coleção  $W$  de cadeias de símbolos é definida recursivamente por
  - a, b e c pertencem a  $W$
  - Se  $X$  pertence a  $W$ , então  $a(X)c$  também pertence a  $W$ .

Escreva um procedimento que implemente essa definição e diga quais das seguintes cadeias pertencem a  $W$ :

- (a)  $a(b)c$

(b)  $a(a(b)c)c$

(c)  $a(abc)c$

(d)  $a(a(a(a)c)c)c$

(e)  $a(aacc)c$