

## Capítulo 11

### Problema 01

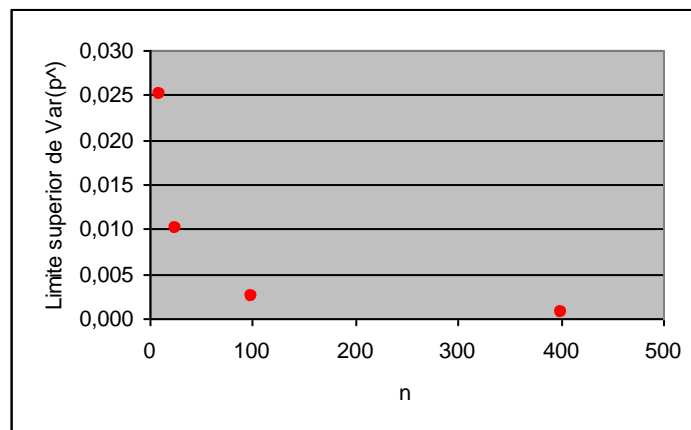
Nº de sucessos	0	1	2	3	4	5
$\hat{p}$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$P(\hat{p})$	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0003

$$E(\hat{p}) = 0,2 = p; \quad Var(\hat{p}) = 0,032 = \frac{p(1-p)}{5}.$$

### Problema 02

$$Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \leq \frac{1}{4n}$$

n	10	25	100	400
Limite superior de $Var(\hat{p})$	0,025	0,01	0,0025	0,000625



### Problema 03

(a)  $X = \sum_{i=1}^n X_i$

$$X \sim \text{Binomial}(n, p); \quad E(X) = np; \quad Var(X) = np(1-p)$$

$$E(\hat{p}_1) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{np}{n} = p;$$

$$Var(\hat{p}_1) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(X) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

(b)  $X_1$  = resultado da 1ª prova

$$X_1 \sim \text{Bernoulli}(p); E(X_1) = p; Var(X_1) = p(1-p)$$

$$E(\hat{p}_2) = E(X_1) = p;$$

$$Var(\hat{p}_2) = Var(X_1) = p(1-p).$$

O estimador  $\hat{p}_2$  não é bom porque só assume os valores 0 ou 1, dependendo do resultado da 1ª prova. Além disso,  $Var(\hat{p}_2) = nVar(\hat{p}_1)$ , ou seja, sua variância é maior que a variância de  $\hat{p}_1$ , para todo  $n$  maior que 1.

#### Problema 04

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E(\hat{p}_1)) = p \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{p}_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1-p)}{n} = 0.$$

Logo,  $\hat{p}_1$  é um estimador consistente de  $p$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E(\hat{p}_2)) = p \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{p}_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(1-p) = p(1-p) \neq 0, \text{ para } p \neq 0 \text{ e } p \neq 1.$$

Logo,  $\hat{p}_2$  não é um estimador consistente de  $p$ .

#### Problema 05

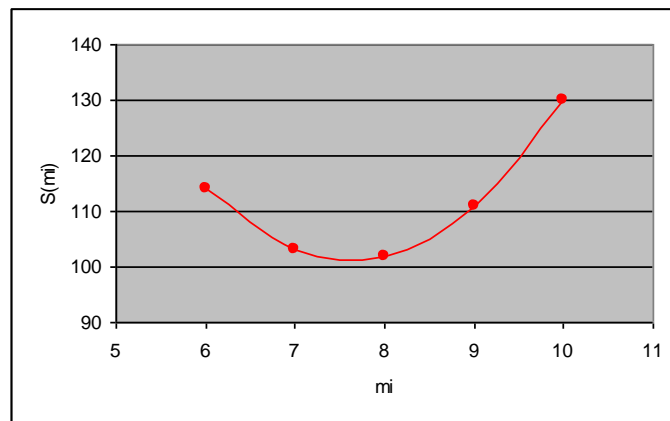
Propriedades dos estimadores	Estimador	
	$t_1$	$t_2$
Viés	2	0
Variância	5	10
EQM	9	10

O estimador  $t_1$  é viesado, enquanto que  $t_2$  é não-viesado. A mediana e a moda de  $t_1$  e  $t_2$  são iguais ou muito próximas de  $\theta = 100$ . Além disso,  $EQM(t_1) = 9$ , enquanto que  $EQM(t_2) = 10$ . A única medida realmente discrepante é a variância:  $Var(t_2) = 2Var(t_1)$ . Como o viés de  $t_1$  é pequeno e sua variância a metade da variância de  $t_2$ , pode-se considerar que  $t_1$  é um estimador melhor que  $t_2$ .

#### Problema 06

(a)

$t$	$y_t$	$(y_t - 6)^2$	$(y_t - 7)^2$	$(y_t - 8)^2$	$(y_t - 9)^2$	$(y_t - 10)^2$
1	3	9	16	25	36	49
2	5	1	4	9	16	25
3	6	0	1	4	9	16
4	8	4	1	0	1	4
5	16	100	81	64	49	36
$S(\mu)$		114	103	102	111	130



$S(\mu)$  parece ser mínimo para  $\mu$  aproximadamente igual a 7,5.

(b)

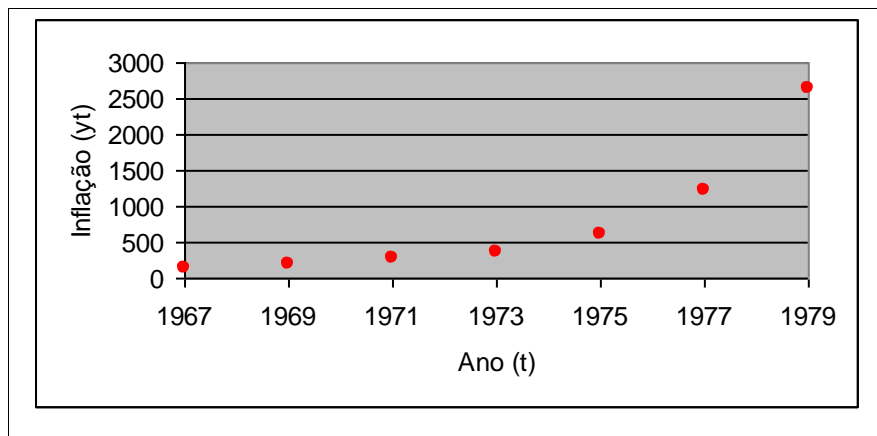
$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = -2\sum_t (y_t - \mu) = -2\sum_t y_t + 2n\mu$$

$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = 0 \Leftrightarrow \mu = \hat{\mu}_{MQ} = \frac{\sum_t y_t}{n} = \bar{y}$$

Logo,  $\hat{\mu}_{MQ} = \bar{y} = 7,6$ . Esse valor é próximo àquele visualizado no gráfico do item (a).

### Problema 07

(a)



$$(b) \quad S(\alpha, \beta) = \sum_t (y_t - \alpha - \beta t)^2$$

$$\frac{dS(\alpha, \beta)}{d\alpha} = -2 \sum_t (y_t - \alpha - \beta t) = -2 \sum_t y_t + 2n\alpha + 2\beta \sum_t t = -2n\bar{y} + 2n\alpha + 2n\beta\bar{t}$$

$$\frac{dS(\alpha, \beta)}{d\beta} = -2 \sum_t t(y_t - \alpha - \beta t) = -2 \sum_t ty_t + 2\alpha \sum_t t + 2\beta \sum_t t^2$$

Igualando a zero, temos:

$$\frac{dS(\alpha, \beta)}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{t}$$

$$\frac{dS(\alpha, \beta)}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow (\bar{y} - \hat{\beta}\bar{t})n\bar{t} + \hat{\beta} \sum_t t^2 = \sum_t ty_t \Leftrightarrow \hat{\beta} = \hat{\beta} = \frac{\sum_t ty_t - n\bar{t}\bar{y}}{\sum_t t^2 - n\bar{t}^2}.$$

Logo, os estimadores de mínimos quadrados de  $\alpha$  e  $\beta$  são dados, respectivamente, por

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{t} \text{ e } \hat{\beta} = \frac{\sum_t ty_t - n\bar{t}\bar{y}}{\sum_t t^2 - n\bar{t}^2}.$$

Na amostra observada, obtemos as seguintes estimativas:

$$\hat{\alpha} = 350026,73 \text{ e } \hat{\beta} = 177,80.$$

(c) A inflação prevista pelo modelo ajustado é

$$\hat{y}(1981) = 350026,73 + 177,80 \times 1981 = 2202,143.$$

(d) Sim, pois a inflação cresceu exponencialmente (e não linearmente) no período observado.

### Problema 08

Com cálculos análogos aos feitos no Exercício 7, substituindo  $t$  por  $x_t$ , obtemos que

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \beta\bar{x} \text{ e } \hat{\beta} = \frac{\sum_t x_t y_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_t x_t^2 - n\bar{x}^2}.$$

**Problema 09**

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_t x_t y_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_t x_t^2 - n\bar{x}^2} = \frac{2586,43 - 10 \times 3,73 \times 68,66}{169,25 - 10 \times 3,73^2} = 0,844;$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \beta\bar{x} = 68,66 - 0,844 \times 3,73 = 65,513.$$

Logo, o modelo ajustado é dado por

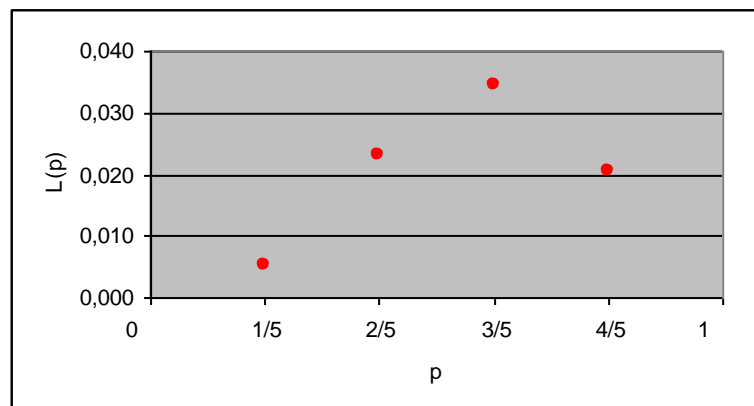
$$\hat{y}_t = 65,513 + 0,844x_t.$$

**Problema 10**

$$L(p) = p^x (1-p)^{n-x} = p^3 (1-p)^2$$

Função de verossimilhança da distribuição Binomial(5;p)

$p$	1/5	2/5	3/5	4/5
$L(p)$	0,005	0,023	0,035	0,020

**Problema 11**

(a)  $P(X = x) = P(x-1 \text{ fracassos e } 1 \text{ sucesso}) = P(FFF \dots FS) = p(1-p)^{x-1}.$

(b) Função de verossimilhança

$$L(p | \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1 | p) \cdots P(X_n = x_n | p) = p(1-p)^{x_1-1} \cdots p(1-p)^{x_n-1} = p^n (1-p)^{\sum x_i - n};$$

Função log-verossimilhança

$$l(p | \mathbf{x}) = \log(L(p | \mathbf{x})) = n \log p + \left(\sum x_i - n\right) \log(1-p);$$

Maximizando em relação a p:

$$l'(p | \mathbf{x}) = \frac{n}{p} - \frac{\sum x_i - n}{1-p} = 0 \Leftrightarrow n(1-p) - (\sum x_i - n)p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{n}{\sum x_i}.$$

Logo, o EMV para  $p$  é dado por

$$\hat{p} = \frac{n}{\sum x_i}.$$

$$(c) \quad \hat{p} = \frac{5}{11} = 0,455.$$

Sim, poderíamos estimar  $p = P(\text{coroa})$  lançando a moeda  $n$  vezes e contando o número de coroas ( $m$ ). Nesse caso,  $\hat{p} = m/n$ .

### Problema 12

Função densidade de probabilidade

$$f(x_i | \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}\right\};$$

Função de verossimilhança

$$L(\mu | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \mu) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}\right\} \right] = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left\{-\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2}\right\};$$

Função log-verossimilhança

$$l(\mu | \mathbf{x}) = \log(L(\mu | \mathbf{x})) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2};$$

Maximizando em relação a  $\mu$ :

$$l'(\mu | \mathbf{x}) = \sum (x_i - \mu) = n\bar{x} - n\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{x}.$$

Logo, o EMV de  $\mu$  é dado por:

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{x}.$$

### Problema 13

Função de probabilidade

$$P(Y_i = y_i | \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!};$$

Função de verossimilhança

$$L(\lambda | \mathbf{y}) = P(Y_1 = y_1 | \lambda) \cdots P(Y_n = y_n | \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y_i}}{y_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum y_i}}{\prod y_i!};$$

Função de log-verossimilhança

$$l(\lambda | \mathbf{y}) = \log(L(\lambda | \mathbf{y})) = -n\lambda + \sum y_i \log \lambda - \log(\prod y_i!);$$

Maximizando em relação a  $\lambda$ :

$$l'(\lambda | \mathbf{y}) = -n + \frac{\sum y_i}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sum y_i}{n} = \bar{y}.$$

Logo, o EMV de  $\lambda$  é dado por:

$$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{y}.$$

#### Problema 14.

$$IC(\mu; \gamma) = \left[ \bar{X} - z(\gamma) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z(\gamma) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Média amostral	Tamanho da amostra	Desvio padrão da população	Coeficiente de confiança	$z(\gamma)$	Intervalo de confiança	
					Limite inferior	Limite superior
170	100	15	95%	1,960	167,06	172,94
165	184	30	85%	1,440	161,82	168,18
180	225	30	70%	1,036	177,93	182,07

#### Problema 15

$$(a) \quad IC(\mu; 0,99) = 800 \pm 2,576 \times \frac{100}{20} = ]787,12; 812,88[$$

$$(b) \quad e = 0,98 \Rightarrow z(\gamma) \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,98 \Rightarrow z(\gamma) = 0,98 \frac{\sqrt{n}}{s} = 0,98 \times \frac{20}{100} = 0,196 \Rightarrow \gamma = 15,54\%.$$

$$(c) \quad e = z(\gamma) \frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left( \frac{z(\gamma)s}{e} \right)^2 = \left( \frac{1,96 \times 100}{7,84} \right)^2 = 625.$$

Suposições: Amostragem aleatória simples; tamanho amostral grande.

#### Problema 16

$$(a) \quad P(|\bar{X} - \mu| < e) = \gamma \Leftrightarrow P\left(-\frac{e}{s/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} < \frac{e}{s/\sqrt{n}}\right) = \gamma \Leftrightarrow \frac{e}{s/\sqrt{n}} = z(\gamma) \Leftrightarrow n = \left( \frac{z(\gamma)s}{e} \right)^2$$

$$n = \left( \frac{1,96 \times 10}{1} \right)^2 = 384,16 \cong 385.$$

$$(b) \quad n = \left( \frac{2,576 \times 10}{1} \right)^2 = 663,58 \cong 664.$$

#### Problema 17

$$(a) \quad P(|\bar{X} - \mu| > 1) = 8\% \Leftrightarrow P(|\bar{X} - \mu| < 1) = 92\% ;$$

$$n = \left( \frac{z(\gamma)s}{e} \right)^2 = \left( \frac{1,75 \times 10}{1} \right)^2 = 306,25 \cong 307.$$

$$(b) \quad IC(\mu; 0,92) = 50 \pm 1,75 \times \frac{10}{307} = ]49,0; 51,0[.$$

### Problema 18

$$IC(p; \gamma) = \hat{p} \pm z(\gamma) \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$IC(p; 0,9) = 0,7 \pm 1,645 \sqrt{\frac{0,7 \times 0,3}{625}} = 0,7 \pm 0,030 = ]0,670; 0,730[.$$

$$\text{Intervalo conservador: } IC(p; 0,9) = 0,7 \pm 1,645 \sqrt{\frac{1}{4 \times 625}} = 0,7 \pm 0,033 = ]0,667; 0,733[$$

### Problema 19

$$IC(p; 0,95) = 0,3 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{400}} = 0,3 \pm 0,045 = ]0,255; 0,345[.$$

$$\text{Intervalo conservador: } IC(p; 0,95) = 0,3 \pm 1,96 \sqrt{\frac{1}{4 \times 400}} = 0,3 \pm 0,049 = ]0,251; 0,349[.$$

### Problema 20

$$(a) \quad P(|\hat{p} - p| < e) = \gamma \Leftrightarrow P\left(-\frac{e}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{e}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) = \gamma \Leftrightarrow$$

$$\frac{e}{\sqrt{p(1-p)/n}} = z(\gamma) \Leftrightarrow n = \left(\frac{z(\gamma)}{e}\right)^2 p(1-p)$$

Supondo que a proporção na amostra real seja próxima de  $p$ :

$$n = \left(\frac{1,2816}{0,01}\right)^2 \times 0,6 \times 0,4 \cong 3942$$

$$(b) \quad IC(p; 0,95) = 0,55 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,55 \times 0,45}{3942}} = 0,55 \pm 0,016 = ]0,534; 0,566[.$$

$$\text{Intervalo conservador: } IC(p; 0,95) = 0,55 \pm 1,96 \sqrt{\frac{1}{4 \times 3942}} = 0,55 \pm 0,016 = ]0,534; 0,566[.$$

### Problema 21

$$(a) \quad IC(p; 0,95) = 0,333 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,333 \times 0,667}{300}} = 0,333 \pm 0,053 = ]0,280; 0,387[.$$



Intervalo conservador:

$$IC(p;0,95) = 0,333 \pm 1,96 \sqrt{\frac{1}{4 \times 300}} = 0,333 \pm 0,057 = ]0,277;0,390[.$$

Interpretação: Se pudéssemos construir um grande número de intervalos aleatórios para  $p$ , todos baseados em amostras de tamanho  $n$ , 95% deles conteriam o parâmetro  $p$ .

(b) Utilizando a estimativa da amostra observada ( $\hat{p} = 0,333$ ):

$$n = \left( \frac{1,96}{0,02} \right)^2 \times 0,333 \times 0,667 \cong 2134.$$

Utilizando o valor máximo de  $p(1-p)$ :

$$n = \left( \frac{1,96}{0,02} \right)^2 \times \frac{1}{4} \cong 2401$$

Interpretação: Utilizando o tamanho amostral encontrado, teremos uma probabilidade de 95% de que a proporção amostral difira do verdadeiro valor de  $p$  por menos que 2%.

## Problema 22

(a)

Propriedades	Estimador	
	t	t'
Média	10	9,9
Vício	0,0	-0,1
Variância	4,8	3,79
EQM	4,8	3,8

O estimador  $t$  é não-viesado, porém tem variância maior que  $t'$ , o qual é viesado. O EQM de  $t'$  é menor que o de  $t$ .

(b) Pode-se escolher  $t'$ , pois seu vício é pequeno, e sua variância e EQM são bem menores que os de  $t$ .

## Problema 23

(a)  $IC(\mu;0,95) = 150 \pm 1,96 \times \frac{5}{6} = 150 \pm 1,633 = ]148,37;151,63[;$

(b)  $e = z(\gamma) \frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left( \frac{z(\gamma)s}{e} \right)^2 = \left( \frac{1,96 \times 5}{0,98} \right)^2 = 100.$

**Problema 24**

$$(a) \quad IC(\mu; 0,90) = 6,222 \pm 1,645 \times \frac{2}{3} = 6,222 \pm 1,097 = ]5,13; 7,32[$$

$$(b) \quad e = z(\gamma) \frac{s}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left( \frac{z(\gamma)s}{e} \right)^2 = \left( \frac{1,645 \times 2}{0,01} \right)^2 = 108241.$$

- (c) Como  $n$  é pequeno ( $n = 9$ ), não seria razoável simplesmente substituir o desvio padrão populacional pelo amostral. Pode-se usar o desvio padrão amostral  $s$ , e substituir a estatística  $z$  pela estatística  $t$ , obtida de uma distribuição  $t$ -Student com  $n-1$  graus de liberdade.

**Problema 25**

$$IC(\mu; 0,95) = 400 \pm 1,96 \times \frac{103,923}{10} = 400 \pm 20,37 = ]379,63; 420,37[$$

**Problema 26**

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_i t y_i - n \bar{t} \bar{y}}{\sum_i t^2 - n \bar{t}^2} = \frac{529,40 - 10 \times 5,50 \times 8,55}{385,00 - 10 \times 5,50^2} = 0,717;$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \bar{\beta} \bar{t} = 8,55 - 0,717 \times 5,50 = 4,607.$$

Logo, o modelo ajustado é dado por

$$\hat{y}_t = 4,607 + 0,717t.$$

Novembro ( $t = 11$ ): 12,49;

Dezembro ( $t = 12$ ): 13,21;

Julho ( $t = 19$ ): 18,23;

Agosto ( $t = 20$ ): 18,95.

**Problema 27**

$$(a) \quad IC(p; 0,90) = 0,6 \pm 1,645 \sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{300}} = 0,6 \pm 0,047 = ]0,553; 0,647[.$$

*Intervalo conservador:*

$$IC(p; 0,90) = 0,6 \pm 1,645 \sqrt{\frac{1}{4 \times 300}} = 0,6 \pm 0,047 = ]0,553; 0,647[.$$

(b)

$$P(|\hat{p} - p| < 0,001) = P\left(\frac{-0,001}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < \frac{0,001}{\sqrt{p(1-p)/n}}\right) \cong$$

$$P\left(\frac{-0,001}{\sqrt{0,6 \times 0,4/300}} < Z < \frac{0,001}{\sqrt{0,6 \times 0,4/300}}\right) = P(-0,035 < Z < 0,035) = 2,820\%$$

$$(c) \quad n = \left(\frac{z(\gamma)}{e}\right)^2 p(1-p) \cong \left(\frac{1,96}{0,0005}\right)^2 \times 0,6 \times 0,4 = 3.687.936.$$

Não parece factível, pois o tamanho amostral é muito grande. Deve-se aumentar  $e$  ou diminuir  $\gamma$ .

### Problema 28

$$(a) \quad IC(p; 0,98) = 0,4 \pm 2,326 \sqrt{\frac{1}{4 \times 10000}} = 0,4 \pm 0,012 = ]0,388; 0,412[.$$

$$(b) \quad IC(p; 0,98) = 0,4 \pm 2,326 \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{10000}} = 0,4 \pm 0,011 = ]0,389; 0,411[.$$

### Problema 29

$$IC(p; 0,95) = 0,52 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,52 \times 0,48}{400}} = 0,52 \pm 0,049 = ]0,471; 0,569[.$$

### Problema 30

$$e = z(\gamma) \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Leftrightarrow z(\gamma) = \frac{e\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} = \frac{0,045 \times 10}{\sqrt{0,6 \times 0,4}} = 0,919 \Rightarrow \gamma = 64,2\%$$

### Problema 31

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right) \text{ e } \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right), \text{ independentes.}$$

Logo:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$$

Portanto, o intervalo de confiança para  $\mu_1 - \mu_2$  é dado por:

$$IC(\mu_1 - \mu_2; \gamma) = \bar{X} - \bar{Y} \pm z(\gamma) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

**Problema 32**

$$(a) \quad IC(\mu_A; 0,95) = 50 \pm 1,96 \frac{10}{4} = 50 \pm 4,9 = ]45,1; 54,9[;$$

$$IC(\mu_B; 0,95) = 60 \pm 1,96 \frac{10}{5} = 60 \pm 3,92 = ]56,08; 63,92[.$$

$$(b) \quad IC(\mu_1 - \mu_2; 0,95) = 50 - 60 \pm 1,96 \sqrt{\frac{100}{16} + \frac{100}{25}} = -10 \pm 6,28 = ]-16,28; -3,72[.$$

O zero não está contido no intervalo. Logo, há evidências de que as duas médias são diferentes.

**Problema 33**

$$\hat{p}_A - \hat{p}_B \sim N\left(p_A - p_B; \frac{p_A(1-p_A)}{n_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{n_B}\right)$$

$$IC(p_A - p_B; \gamma) = \hat{p}_A - \hat{p}_B \pm z(\gamma) \sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{n_A} + \frac{p_B(1-p_B)}{n_B}}$$

$$IC(p_A - p_B; 0,95) = 0,450 - 0,583 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,450 \times 0,550}{400} + \frac{0,583 \times 0,417}{600}} = \\ = -0,133 \pm 0,063 = ]-0,196; -0,070[$$

**Problema 34**

$$\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq k) \leq \frac{Var(\bar{X})}{k^2} = \frac{\sigma^2}{nk^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Logo,  $\bar{X}$  é consistente.

**Problema 35**

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Var(k/n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}, \text{ pois } Var\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

**Problema 36**

$$\delta = 1 - \gamma = 1 - 0,95 = 0,05$$

$$n = \frac{1}{4\delta\varepsilon^2} = \frac{1}{4 \times 0,05 \times 0,05^2} = 2000$$

**Problema 37**

Função densidade de probabilidade

$$f(x_i | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\};$$

Função de verossimilhança

$$L(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \exp\left\{-\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Função log-verossimilhança

$$l(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x}) = \log(L(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x})) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{2\sigma^2};$$

Maximizando em relação a  $\mu$  e  $\sigma^2$ :

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x})}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu) = \frac{1}{2\sigma^2} (n\bar{x} - n\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{x}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\mu, \sigma^2 | \mathbf{x})}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum (x_i - \mu)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sigma^2} \left( -n + \frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \sigma^2 &= \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n} \end{aligned}$$

Logo, os EMV's de  $\mu$  e  $\sigma^2$  são dados por:

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{x} \text{ e } \hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

### Problema 38

(a)  $E(T_1) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E(X) = 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta$ . Logo,  $T_1$  é um estimador não-viciado para  $\theta$ .

(b) Como  $T_1$  é um estimador não-viesado:

$$EQM(T_1) = Var(T_1) = Var(2\bar{X}) = 4Var(\bar{X}) = 4 \frac{Var(X)}{n} = \frac{4}{n} \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

(c)  $T_1$  é consistente, pois  $T_1$  é não-viesado e  $\lim_{n \rightarrow \infty} (Var(T_1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\theta^2}{3n} \right) = 0$ .

### Problema 39

$$(a) \quad E(M) = \int_0^\theta x \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{\theta^n} \left( \frac{\theta^{n+1}}{n+1} \right) = \theta \frac{n}{n+1}. \text{ Logo, } M \text{ é um estimador}$$

viesado. Seu viés é dado por

$$V(\theta) = E(M) - \theta = \theta \frac{n}{n+1} - \theta = -\frac{1}{n+1} \theta.$$

$$\text{Logo: } \lim_{n \rightarrow \infty} (V(\theta)) = 0.$$

(b) Como  $T_2$  é não-viesado:

$$EQM(T_2) = Var(T_2) = Var\left(\frac{n+1}{n} M\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Var(M).$$

Mas:  $Var(M) = E(M^2) - [E(M)]^2$ , onde

$$E(M^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^{n+1} dx = \frac{n}{\theta^n} \left( \frac{\theta^{n+2}}{n+2} \right) = \theta^2 \frac{n}{n+2}.$$

Logo:

$$EQM(T_2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left( \theta^2 \frac{n}{n+2} - \theta^2 \frac{n^2}{(n+1)^2} \right) = \frac{1}{n(n+2)} \theta^2$$

(c) Temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Var(t_2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+2)} \theta^2 = 0. \text{ Além disso, } T_2 \text{ é não-viciado. Logo, } T_2 \text{ é um}$$

estimador consistente.

#### Problema 40

$$\frac{Var(T_2)}{Var(T_1)} = \frac{\frac{\theta^2}{n(n+2)}}{\frac{\theta^2}{3n}} = \frac{3}{n+2} \Leftrightarrow Var(T_2) = \frac{3}{n+2} Var(T_1)$$

n	1	2	10	50	100
$Var(T_2)/Var(T_1)$	1,000	0,750	0,250	0,058	0,029

Logo, para  $n$  grande, a variância de  $T_2$  é muito menor que a variância de  $T_1$ .

#### Problema 41

$$\text{Temos que } \bar{X} \sim N\left(\frac{\theta}{2}; \frac{\theta^2}{12n}\right).$$

$$P\left(-1,645 < \frac{\bar{X} - \theta/2}{\theta/\sqrt{12n}} < 1,645\right) = 90\% \Rightarrow P\left(2\left(\bar{X} - \frac{1,645\theta}{\sqrt{12n}}\right) < \theta < 2\left(\bar{X} + \frac{1,645\theta}{\sqrt{12n}}\right)\right).$$

(a) Usando  $T_1 = 2\bar{X}$  como estimador de  $\theta$ :

$$IC(\theta;90\%) = \left[ 2\left(\bar{X} - \frac{1,645 \times 2\bar{X}}{\sqrt{12n}}\right); 2\left(\bar{X} + \frac{1,645 \times 2\bar{X}}{\sqrt{12n}}\right) \right] = \left[ 2\bar{X}\left(1 - \frac{3,29}{\sqrt{12n}}\right); 2\bar{X}\left(1 + \frac{3,29}{\sqrt{12n}}\right) \right]$$

(b) Usando  $T_2 = \frac{n+1}{n}M$  como estimador de  $\theta$ :

$$IC(\theta;90\%) = \left[ 2\left(\bar{X} - \frac{1,645(n+1)M}{n\sqrt{12n}}\right); 2\left(\bar{X} + \frac{1,645(n+1)M}{n\sqrt{12n}}\right) \right].$$

(c)  $IC(\theta;90\%) = \left[ 2\left(\bar{X} - \frac{1,645M}{\sqrt{12n}}\right); 2\left(\bar{X} + \frac{1,645M}{\sqrt{12n}}\right) \right].$

(d) Serão aproximadamente iguais, pois para  $n$  grande,  $(n+1)/n \approx 1$ .

### Problema 42

$$T_1 = 5,094; T_2 = 4,997.$$

Estimador	$IC(\theta;90\%)$	
	Limite inferior	Limite superior
$T_1$	4,941	5,247
$T_2$	4,944	5,244
$M$	4,944	5,244

### Problema 44

$$IC(\mu;0,95) = 10,3 \pm 1,96 \frac{1,4}{\sqrt{600}} = 10,3 \pm 0,112 = ]10,19;10,4[.$$

### Problema 45

$$E(T_1) = E\left(\frac{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{2}\right) = \frac{1}{2}(E(\hat{\mu}_1) + E(\hat{\mu}_2)) = \mu;$$

$$E(T_2) = E\left(\frac{4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{5}\right) = \frac{1}{5}(4E(\hat{\mu}_1) + E(\hat{\mu}_2)) = \mu;$$

$$E(T_3) = E(\hat{\mu}_1) = \mu.$$

(i) Logo, os três estimadores são não-viesados.

$$Var(T_1) = Var\left(\frac{\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{2}\right) = \frac{1}{4}(Var(\hat{\mu}_1) + Var(\hat{\mu}_2)) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} Var(\hat{\mu}_2) = \frac{Var(\hat{\mu}_2)}{3} = 0,333 Var(\hat{\mu}_2)$$

$$Var(T_2) = Var\left(\frac{4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2}{5}\right) = \frac{1}{25}(16Var(\hat{\mu}_1) + Var(\hat{\mu}_2)) = \frac{19}{75} Var(\hat{\mu}_2) = 0,253 Var(\hat{\mu}_2)$$

$$Var(T_3) = Var(\hat{\mu}_1) = \frac{Var(\hat{\mu}_2)}{3} = 0,333Var(\hat{\mu}_2)$$

(ii) Ordenando segundo a eficiência:  $Var(T_2) < Var(T_1) = Var(T_3)$ .

### Problema 46

Temos que  $\lambda = E(Y)$  (1º momento populacional). Pelo método dos momentos, a estimativa para  $\lambda$  é dada pelo 1º momento amostral, isto é,  $\hat{\lambda}_M = \bar{Y}$ .

### Problema 47

Amostra de bootstrap sorteada

Indivíduo	22	15	74	35	74	78	17	78	87	57
Nota	4,0	7,5	6,5	3,0	6,5	7,0	6,5	7,0	6,5	7,5

												Desvio	
												Desvio	absoluto
Amostra	Notas											Médio	mediano
1	3,0	7,0	7,0	3,0	6,5	4,0	6,5	6,5	6,5	7,5	6,5	1,5	1,3
2	4,0	7,5	6,5	3,0	6,5	6,5	6,5	6,5	4,0	6,5	6,5	1,3	0,8
3	6,5	3,0	7,0	7,0	6,5	6,5	7,0	6,5	3,0	6,5	6,5	1,2	0,8
4	7,0	7,0	6,5	7,0	7,5	7,5	7,0	7,5	7,5	6,5	7,0	0,3	0,4
5	6,5	6,5	6,5	7,0	7,5	6,5	4,0	7,0	6,5	4,0	6,5	0,9	0,6
6	7,0	6,5	7,0	7,5	3,0	7,5	3,0	7,0	4,0	7,0	7,0	1,6	1,3
7	6,5	6,5	3,0	7,5	6,5	6,5	7,5	7,5	6,5	7,0	6,5	0,7	0,3
8	7,0	7,0	6,5	4,0	3,0	7,5	7,0	6,5	3,0	6,5	6,5	1,5	1,2
9	6,5	7,0	3,0	6,5	6,5	6,5	6,5	7,5	4,0	6,5	6,5	1,0	0,5
10	4,0	6,5	6,5	4,0	7,5	7,0	7,0	7,5	3,0	6,5	6,5	1,4	1,3
11	7,5	7,0	3,0	7,5	7,0	7,5	7,0	4,0	7,5	6,5	7,0	1,2	1,1
12	7,5	6,5	3,0	6,5	4,0	3,0	7,5	6,5	4,0	6,5	6,5	1,6	1,5
13	7,5	6,5	6,5	6,5	4,0	7,5	4,0	6,5	7,5	6,5	6,5	0,9	0,7
14	6,5	3,0	6,5	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	7,0	6,5	7,0	0,7	0,6
15	7,5	7,0	6,5	7,5	7,5	6,5	7,0	3,0	7,5	7,5	7,3	0,9	0,8
<b>Desvio padrão</b>												<b>0,3</b>	<b>0,4</b>

Portanto, as estimativas de bootstrap dos parâmetros de interesse são dadas por:

$$\hat{ep}(Med) = 0,3; \hat{ep}(DM) = 0,4; \hat{ep}(DAM) = 0,4$$