A Ina, Rachel, e Aaron

ÍNDICE

PREFÁCIO À PRIMEIRA EDIÇÃO

AO(À) ESTUDANTE

Bem-vindo(a)!

Você está prestes a embarcar no estudo de um assunto fascinante e importante: a teoria da computação. Ela compreende as propriedades matemáticas fundamentais do hardware, do software, e das aplicações de computadores. Estudando esse assunto buscamos determinar o que pode e o que não pode ser computado, quão rapidamente, com quanto de memória, e sobre que tipo de modelo computacional. O assunto tem conexões óbvias com a prática da engenharia, e, como em muitas ciências, ele também tem aspectos puramente filosóficos.

Sei que muitos de vocês estão ansiosos para estudar este material mas alguns pode não estar aqui por sua própria escolha. Você pode querer obter um grau em ciência ou engenharia da computação, e um curso em teoria é requerido—Deus sabe por que. Afinal de contas, teoria não é coisa velha, enjoada, e, pior ainda, irrelevante?

Para ver que teoria não é nem coisa velha nem enjoada, mas ao contrário bastante compreensível e até interessante, continue leia. Ciência da computação teórica de fato tem muitas idéias grandes e fascinantes, mas ela também tem muitos detalhes pequenos e às vezes tediosos que podem ser cansativos. Aprender qualquer assunto é trabalho árduo, mas fica mais fácil e mais divertido se o assunto é devidamente apresentado. Meu objetivo principal ao escrever este livro é expor você aos aspectos genuinamente excitantes da teoria da computação, sem

se perder em detalhes cansativos. Claro que a única maneira de determinar se teoria lhe interessa é tentar aprendê-la.

Teoria é relevante para a prática. Ela provê ferramentas conceituais que os praticantes usam em engenharia da computação. Projetar uma nova linguagem de programação para uma aplicação especializada? O que você aprendeu sobre *gramáticas* neste curso vem bem a calhar. Lidar com busca por cadeias e casamento de padrões? Lembre-se de *autômatos finitos* e *expressões regulares*. Confrontado com um problema que parece requerer mais tempo de computador do que você pode suportar? Pense no que você aprendeu sobre *NP-completude*. Várias áreas de aplicação tais como protocolos criptográficos modernos, se sustentam em princípios teóricos que você vai aprender aqui.

Teoria também é relevante para você porque ela lhe mostra um lado mais simples, e mais elegante, dos computadores, os quais normalmente consideramos como sendo máquinas complicadas. Os melhores projetos e aplicações de computadores são concebidos com elegância em mente. Um curso teórico pode elevar seu sentido estético e ajudá-lo a construir sistemas mais bonitos.

Finalmente, teoria é bom para você porque estudá-la expande sua mente. Tecnologia de computadores muda rapidamente. Conhecimento técnico específico, embora útil hoje, fica desatualizado em apenas uns poucos anos. Considere por outro lado as habilidades de pensar, exprimir-se claramente e precisamente, para resolver problemas, e saber quando você não resolveu um problema. Essas habilidades têm valor duradouro. Estudar teoria treina você nessas áreas.

Considerações práticas à parte, quase todo mundo trabalhando com computadores tem curiosidade sobre essas criações impressionantes, suas capacidades, e suas limitações. Um novo ramo da matemática cresceu nos últimos 30 anos para responder a certas questões básicas. Aqui está uma que permanece sem solução: Se eu lhe der um número grande, digamos, com 500 dígitos, você pode encontrar seus fatores (os números que o dividem), em uma quantidade de tempo razoável? Mesmo usando um supercomputador, ninguém atualmente conhece como fazer isso em todos os casos *sem o tempo de vida do universo!* O problema da fatoração está relacionado a certos códigos secretos em criptossistemas modernos. Encontre um maneira rápida de fatorar e a fama é toda sua!

AO(À) EDUCADOR(A)

Este livro pretende ser um texto para o final da graduação ou o início da pós-graduação em teoria da computação. Ele contém um tratamento do assunto desenhado em torno de teoremas e provas. Fiz algum esforço para acomodar estudantes com pouca experiência prévia em provar teoremas, embora estudantes mais experientes terão uma vida mais fácil.

Meu objetivo principal ao apresentar o material tem sido torná-lo claro e interessante. Ao fazer isso, tenho enfatizado a intuição e "a grande figura" no assunto em detrimento de alguns detalhes de mais baixo nível.

Por exemplo, muito embora apresente o método de prova por indução no Capítulo 0 juntamente com outros preliminares matemáticos, ela não desempenha um papel importante subseqüentemente. Geralmente não apresento as pro-

vas por indução usuais da corretude de várias construções relativas a autômatos. Se apresentadas claramente, essas construções convencem e não necessitam de muito argumento. Uma indução pode confundir ao invés de esclarecer porque a própria indução é uma técnica um tanto sofisticada que muitos acham misteriosa. Trabalhar o óbvio com uma indução corre o risco de ensinar aos estudantes que prova matemática é uma manipulação formal em vez de ensiná-los o que é e o que não é um argumento cogente.

Um segundo exemplo ocorre nas Partes II e III, onde descrevo algoritmos em prosa ao invés de pseudocódigo. Não gasto muito tempo programando máquinas de Turing (ou quaisquer outros modelos formais). Estudantes hoje vêm com uma formação em programação e acham que a tese de Church–Turing é autoevidente. Daí não apresento simulações excessivamente longas de um modelo por outro para estabelecer sua equivalência.

Além de dar intuição adicional e suprimir alguns detalhes, dou o que poderia ser chamado uma apresentação clássica do material. Muitos teóricos acharão a escolha do material, terminologia, e ordem de apresentação consistente com os de outros livros-texto largamente utilizados. Introduzí terminologia original em apenas uns poucos lugares, quando achei a terminologia padrão particularmente obscura ou confusa. Por exemplo introduzo o termo *redutibilidade por mapeamento* ao invés de *redutibilidade muitos-para-um*.

Prática por meio de resolução de problemas é essencial para aprender qualquer assunto matemático. Neste livro, os problemas são organizados em duas categorias principais chamadas *Exercícios* e *Problemas*. Os Exercícios revisam definições e conceitos. Os Problemas requerem alguma engenhosidade. Problemas marcados com um asterisco são mais difíceis. Tentei tornar tanto os Exercícios quanto os Problemas desafios interessantes.

A PRIMEIRA EDIÇÃO

Introdução à Teoria da Computação primeiro apareceu como uma Edição Preliminar em capa mole. A presente edição difere da Edição Preliminar de várias maneiras substanciais. Os três últimos capítulos são novos: Capítulo 8 sobre complexidade de espaço; Capítulo 9 sobre intratabilidade demonstrável; e Capítulo 10 sobre tópicos avançados em teoria da complexidade. O Capítulo 6 foi expandido para incluir vários tópicos avançados em teoria da computabilidade. Outros capítulos foram melhorados através da inclusão de exemplos e exercícios adicionais.

Comentários de instrutores e estudantes que usaram a Edição Preliminar foram úteis para o polimento dos Capítulos 0 a 7. Obviamente, os erros que eles reportaram foram corrigidos nesta edição.

Os Capítulos 6 e 10 dão um apanhado de vários tópicos mais avançados em teorias de computabilidade e complexidade. Eles não se pretendem compreender uma unidade coesa da maneira que os capítulos remanescentes o são. Esses capítulos foram incluídos para permitir ao instrutor selecionar tópicos opcionais que podem ser de interesse do estudante mais exigente. Os próprios tópicos variam amplamente. Alguns, tais como *Turing-redutibilidade* e *alternação*, são ex-

tensões diretas de outros conceitos no livro. Outros, tais como *teorias lógicas decidíveis* e *criptografia*, são breves introduções a grandes áreas.

REALIMENTAÇÃO PARA O AUTOR

A internet provê novas oportunidades para interação entre autores e leitores. Tenho recebido bastante mensagens eletrônicas oferecendo sugestões, elogios, e críticas, e reportando erros na Edição Preliminar. Por favor continue a se corresponder! Tento responder a cada mensagem pessoalmente, quando o tempo permite. O endereço eletrônico para correspondência relacionada a este livro é

`sipserbook@math.mit.edu`.

Uma página na internet que contém uma lista de erros é mantida no endereço abaixo. Outro material pode ser adicionado àquela página para ajudar a instrutores e estudantes. Diga-me o que gostaria de ver ali. O endereço é

`http://www-math.mit.edu/~sipser/book.html`.

AGRADECIMENTOS

Eu não poderia ter escrito este livro sem a ajuda de muitos amigos, colegas, e minha família.

Quero agradecer aos professores que ajudaram a dar forma a meu ponto de vista científico e estilo educacional. Cinco deles se destacam. Meu orientador de tese, Manuel Blum, a quem devo uma nota especial por sua maneira única de inspirar estudantes através da clareza de pensamento, entusiasmo, e cuidado. Ele é um modelo para mim e para muitos outros. Sou agradecido a Richard Karp por me introduzir à teoria da complexidade, a John Addison por me ensinar lógica e passar aqueles maravilhosos conjuntos de tarefas para casa, a Juris Hartmanis por me introduzir à teoria da computação, e a meu pai por me introduzir na matemática, computadores, e a arte de ensinar.

Este livro cresceu de notas de um curso que ensinei no MIT durante os últimos 15 anos. Estudantes em minhas turmas tomaram tais notas a partir de minhas aulas. Espero que eles me perdoem por não listá-los todos. Meus assistentes de ensino durante anos, Avrim Blum, Thang Bui, Andrew Chou, Benny Chor, Stavros Cosmadakis, Aditi Dhagat, Wayne Goddard, Parry Husbands, Dina Kravets, Jakov Kučan, Brian O'Neill, Ioana Popescu, e Alex Russell, me ajudaram a editar e expandir essas notas e me forneceram alguns dos problemas para tarefa de casa.

Quase três anos atrás, Tom Leighton me persuadiu a escrever um livro-texto sobre a teoria da computação. Eu vinha pensando em fazê-lo durante algum tempo, mas foi preciso a persuasão de Tom para fazer a teoria virar prática. Aprecio seus conselhos generosos sobre escrever livro e sobre muitas outras coisas.

Quero agradecer a Eric Bach, Peter Beebee, Cris Calude, Marek Chrobak, Anna Chefter, Guang-Ien Cheng, Elias Dahlhaus, Michael Fisher, Steve Fisk, Lance Fortnow, Henry J. Friedman, Jack Fu, Seymour Ginsbourg, Oded Gol-

dreich, Brian Grossman, David Harel, Micha Hofri, Dung T. Huynh, Neil Jones, H. Chad Lane, Kevin Lin, Michael Loui, Silvio Micali, Tadao Murata, Christos Papadimitriou, Vaughan Pratt, Daniel Rosenband, Brian Scassellati, Ashish Sharma, Nir Shavit, Alexander Shen, Ilya Shlyakhter, Matt Stallman, Perry Susskind, Y. C. Tay, Joseph Traub, Osamu Watanabe, Peter Widemayer, David Williamson, Derick Wood, e Charles Yang pelos comentários, sugestões, e assistência à medida que a escrita progrediu.

As seguintes pessoas acrescentaram comentários que melhoraram este livro: Isam M. Abdelhameed, Eric Allender, Michelle Atherton, Rolfe Blodgett, Al Briggs, Brian E. Brooks, Jonathan Buss, Jin Yi Cai, Steve Chapel, David Chow, Michael Ehrlich, Yaakov Eisenberg, Farzan Fallah, Shaun Flisakowski, Hjalmtyr Hafsteinsson, C. R. Hale, Maurice Herlihy, Vegard Holmedahl, Sandy Irani, Kevin Jiang, Rhys Price Jones, James M. Jowdy, David M. Martin Jr., Manrique Mata-Montero, Ryota Matsuura, Thomas Minka, Farooq Mohammed, Tadao Murata, Jason Murray, Hideo Nagahashi, Kazuo Ohta, Constantine Papageorgiou, Joseph Raj, Rick Regan, Rhonda A. Reumann, Michael Rintzler, Arnold L. Rozenberg, Larry Roske, Max Rozenoer, Walter L. Ruzzo, Sanathan Sahgal, Leonard Schulman, Steve Seiden, Joel Seiferas, Ambuj Singh, David J. Stucki, Jayram S. Thathachar, H. Venkateswaran, Tom Whaley, Christopher Van Wyk, Kyle Young, and Kyoung Hwan Yun.

Robert Sloan usou uma versão anterior do manuscrito deste livro em uma turma que ele ensinou e me passou inestimáveis comentários e idéias de sua experiência com o manuscrito. Mark Herschberg, Kazuo Ohta, e Latanya Sweeney leram partes do manuscrito e sugeriram melhoramentos extensos. Shafi Goldwasser me ajudou com o material do Capítulo 10.

Recebí suporte técnico especialista de William Baxter da Superscript, que escreveu o pacote de macros LaTeX que implementa o desenho interior, e de Larry Nolan do departamento de matemática do MIT, que mantém tudo funcionando.

Tem sido um prazer trabalhar com o pessoal da PWS Publishing na criação do produto final. Menciono Michael Sugarman, David Dietz, Elise Kaiser, Monique Calello, Susan Garland e Tanja Brull porque tive maior contato com eles, mas sei que muitos outros estiveram envolvidos também. Obrigado a Jerry Moore pela edição de cópia (*copy editing*), a Diane Levy pelo projeto da capa, e a Catherine Hawkes pelo desenho do interior.

Agradeço à National Science Foundation pelo apoio fornecido sob o *grant* CCR-9503322.

Meu pai, Kenneth Sipser, e irmã, Laura Sipser, converteram os diagramas do livro para forma eletrônica. Minha outra irmã, Karen Fisch, nos salvou em várias emergências computacionais, e minha mãe, Justine Sipser, ajudou com os conselhos maternos. Agradeço-os por contribuir sob circunstâncias difíceis, incluindo prazos insanos e software recalcitrante.

Finalmente, meu amor vai para minha esposa, Ina, e minha filha, Rachel. Obrigado por aguentar tudo isso.

Cambridge, Massachusetts ***Michael Sipser***
Outubro de 1996

PREFÁCIO À SEGUNDA EDIÇÃO

A julgar pelas comunicações eletrônicas que tenho recebido de tantos de vocês, a maior deficiência da primeira edição é que ela não provê soluções para nenhum dos problemas. Portanto aqui estão elas. Todo capítulo agora contém uma nova seção *Soluções Selecionadas* que dá respostas a uma porção representativa dos exercícios e problemas daquele capítulo. Para compensar a perda dos problemas resolvidos como desafios interessantes para tarefa de casa, adiconei também uma variedade de novos problemas. Instrutores podem solicitar um Manual do Instrutor que contém soluções adicionais contactando o representante de vendas na sua região designada em `www.course.com`.

Um bom número de leitores teria apreciado maior cobertura de certos tópicos "padrão", particularmente o Teorema de Myhill–Nerode e o Teorema de Rice. Atendí parcialmente a esses leitores desenvolvendo esses tópicos nos problemas resolvidos. Não incluí o Teorema de Myhill–Nerode no corpo principal do texto porque acredito que este curso deveria dar somente uma introdução a autômatos finitos e não uma investigação profunda. Na minha visão, o papel de autômatos finitos aqui é para os estudantes explorarem um modelo formal simples de computação como um prelúdio para modelos mais poderosos, e prover exemplos convenientes para tópicos subseqüentes. É claro que algumas pessoas prefeririam um tratamento mais completo, enquanto outras acham que eu deveria omitir toda referência a (ou pelo menos dependência de) autômatos finitos. Não incluí o Teorema de Rice no corpo principal do texto porque, embora ele possa ser uma "ferramenta" útil para provar indecidibilidade, alguns estudantes podem usá-lo mecanicamente sem de fato entender o que está acontecendo. Por

outro lado, usar reduções para provar indecidibilidade dá uma preparação mais valiosa para as reduções que aparecem em teoria da complexidade.

Devo aos meus assistentes de ensino, Ilya Baran, Sergi Elizalde, Rui Fan, Jonathan Feldman, Venkatesan Guruswami, Prahladh Harsha, Christos Kapoutsis, Julia Khodor, Adam Klivans, Kevin Matulef, Ioana Popescu, April Rasala, Sofya Raskhodnikova, and Iuliu Vasilescu que me ajudaram a confeccionar alguns dos novos problemas e soluções. Ching Law, Edmond Kayi Lee, e Zulfikar Ramzan também contribuíram para as soluções. Agradeço a Victor Shoup por chegar com uma maneira simples de reparar a lacuna na análise do algoritmo de primalidade probabilístico que aparece na primeira edição.

Aprecio os esforços das pessoas na Course Technology em incentivar a mim e às outras partes deste projeto, especialmente Alyssa Pratt e Aimee Poirier. Muito obrigado a Gerald Eisman, Weizhen Mao, Rupak Majumdar, Chris Umans, e Christopher Wilson por suas revisões. Devo a Jerry Moore por seu excelente trabalho de copy-editing e a Laura Segel da ByteGraphics (`lauras@bytegraphics.com`) por sua confecção maravilhosamente precisa das figuras.

O volume de mensagens eletrônicas que recebí tem sido mais do que eu esperava. Ouvir de tantos de vocês de tantos lugares diferentes tem sido absolutamente prazeroso, e tenho tentado responder a todos em algum momento—minhas desculpas àqueles que deixei de responder. Relacionei aqui as pessoas que deram sugestões que especificamente afetaram esta edição, mas agradeço a todos por sua correspondência.

Luca Aceto, Arash Afkanpour, Rostom Aghanian, Eric Allender, Karun Bakshi, Brad Ballinger, Ray Bartkus, Louis Barton, Arnold Beckmann, Mihir Bellare, Kevin Trent Bergeson, Matthew Berman, Rajesh Bhatt, Somenath Biswas, Lenore Blum, Mauro A. Bonatti, Paul Bondin, Nicholas Bone, Ian Bratt, Gene Browder, Doug Burke, Sam Buss, Vladimir Bychkovsky, Bruce Carneal, Soma Chaudhuri, Rong-Jaye Chen, Samir Chopra, Benny Chor, John Clausen, Allison Coates, Anne Condon, Jeffrey Considine, John J. Crashell, Claude Crepeau, Shaun Cutts, Susheel M. Daswani, Geoff Davis, Scott Dexter, Peter Drake, Jeff Edmonds, Yaakov Eisenberg, Kurtcebe Eroglu, Georg Essl, Alexander T. Fader, Farzan Fallah, Faith Fich, Joseph E. Fitzgerald, Perry Fizzano, David Ford, Jeannie Fromer, Kevin Fu, Atsushi Fujioka, Michel Galley, K. Ganesan, Simson Garfinkel, Travis Gebhardt, Peymann Gohari, Ganesh Gopalakrishnan, Steven Greenberg, Larry Griffith, Jerry Grossman, Rudolf de Haan, Michael Halper, Nick Harvey, Mack Hendricks, Laurie Hiyakumoto, Steve Hockema, Michael Hoehle, Shahadat Hossain, Dave Isecke, Ghaith Issa, Raj D. Iyer, Christian Jacobi, Thomas Janzen, Mike D. Jones, Max Kanovitch, Aaron Kaufman, Roger Khazan, Sarfraz Khurshid, Kevin Killourhy, Seungjoo Kim, Victor Kuncak, Kanata Kuroda, Suk Y. Lee, Edward D. Legenski, Li-Wei Lehman, Kong Lei, Zsolt Lengvarszky, Jeffrey Levetin, Baekjun Lim, Karen Livescu, Thomas Lasko, Stephen Louie, TzerHung Low, Wolfgang Maass, Arash Madani, Michael Manapat, Wojciech Marchewka, David M. Martin Jr., Anders Martinson, Lyle McGeoch, Alberto Medina, Kurt Mehlhorn, Nihar Mehta, Albert R. Meyer, Thomas Minka, Mariya Minkova, Daichi Mizuguchi, G. Allen

Morris III, Damon Mosk-Aoyama, Xiaolong Mou, Paul Muir, German Muller, Donald Nelson, Gabriel Nivasch, Mary Obelnicki, Kazuo Ohta, Thomas M. Oleson, Jr., Curtis Oliver, Owen Ozier, Rene Peralta, Alexander Perlis, Holger Petersen, Detlef Plump, Robert Prince, David Pritchard, Bina Reed, Nicholas Riley, Ronald Rivest, Robert Robinson, Christi Rockwell, Phil Rogaway, Max Rozenoer, John Rupf, Teodor Rus, Larry Ruzzo, Brian Sanders, Cem Say, Kim Schioett, Joel Seiferas, Joao Carlos Setubal, Geoff Lee Seyon, Mark Skandera, Bob Sloan, Geoff Smith, Marc L. Smith, Stephen Smith, Alex C. Snoeren, Guy St-Denis, Larry Stockmeyer, Radu Stoleru, David Stucki, Hisham M. Sueyllam, Kenneth Tam, Elizabeth Thompson, Michel Toulouse, Eric Tria, Chittaranjan Tripathy, Dan Trubow, Hiroki Ueda, Giora Unger, Kurt L. Van Etten, Jesir Vargas, Bienvenido Velez-Rivera, Kobus Vos, Alex Vrenios, Sven Waibel, Marc Waldman, Tom Whaley, Anthony Widjaja, Sean Williams, Joseph N. Wilson, Chris Van Wyk, Guangming Xing, Vee Voon Yee, Cheng Yongxi, Neal Young, Timothy Yuen, Kyle Yung, Jinghua Zhang, Lilla Zollei.

Mais que tudo agradeço a minha família—Ina, Rachel, e Aaron—por sua paciência, compreensão, e amor enquanto eu sentava por horas infindáveis aqui em frente à tela do meu computador.

Cambridge, Massachusetts ***Michael Sipser***
Dezembro de 2004

0

INTRODUÇÃO

Começamos com uma visão geral daquelas áreas da teoria da computação que apresentamos neste curso. A seguir, você terá uma chance de aprender e/ou revisar alguns conceitos matemáticos que você vai precisar mais adiante.

0.1

AUTÔMATOS, COMPUTABILIDADE, E COMPLEXIDADE

Este livro enfoca três áreas tradicionalmente centrais da teoria da computação: autômatos, computabilidade, e complexidade. Elas são interligadas pela questão:

Quais são as capacidades e limitações fundamentais dos computadores?

Essa questão vai lá atrás nos anos 1930's quando lógicos matemáticos primeiro começaram a explorar o significado de computação. Avanços tecnológicos desde aquele tempo têm aumentado enormemente nossa capacidade de computar e têm trazido essa questão do domínio da teoria para o mundo do interesse prático.

Em cada uma das três áreas—autômatos, computabilidade, e complexidade—essa questão é interpretada diferentemente, e as respostas variam conforme a interpretação. Após este capítulo introdutório, exploraremos cada área em uma

parte separada deste livro. Aqui, introduzimos essas partes em ordem reversa porque começando do fim você pode entender melhor a razão para o início.

TEORIA DA COMPLEXIDADE

Problemas computacionais vêm em diferentes variedades: alguns são fáceis e alguns são difíceis. Por exemplo, o problema da ordenação é um fácil. Digamos que você precise de arranjar uma lista de números em ordem ascendente. Mesmo um pequeno computador pode ordenar um milhão de números bastante rapidamente. Compare isso a um problema de escalonamento. Digamos que você tenha que encontrar um escalonamento de classes para a universidade inteira para satisfazer algumas restrições razoáveis, tal como nunca duas aulas têm lugar na mesma sala no mesmo tempo. O problema do escalonamento parece ser muito mais difícil que o problema da ordenação. Se você tem somente mil aulas, encontrar o melhor escalonamento pode requerer séculos, até mesmo com um supercomputador.

O que faz alguns problemas computacionalmente difíceis e outros fáce is?

Essa é a questão central da teoria da complexidade. Notavelmente, não sabemos a resposta para ela, embora ela tenha sido intensamente pesquisada durante os últimos 35 anos. Mais adiante, exploramos essa fascinante questão e algumas de suas ramificações.

Em uma das importantes conquistas da teoria da complexidade até agora, pesquisadores descobriram um elegante esquema para classificar problemas conforme sua dificuldade computacional. Ele é análogo à tabela periódica para classificar elementos conforme suas propriedades químicas. Usando esse esquema, podemos demonstrar um método para dar evidência de que certos problemas são computacionalmente difíceis, ainda que sejamos incapazes de provar que eles o são.

Você tem várias opções quando você se depara com um problema que parece ser computacionalmente difícil. Primeiro, entendendo qual aspecto do problema é a raiz da dificuldade, você pode ser capaz de alterá-lo de modo que o problema seja mais facilmente solúvel. Segundo, você pode ser capaz de se contentar com menos que uma solução perfeita para o problema. Em certos casos encontrar soluções que apenas aproximam a solução perfeita é relativamente fácil. Terceiro, alguns problemas são difíceis somente na situação do pior caso, porém fáceis na maior parte do tempo. Dependendo da aplicação, você pode ficar satisfeito com um procedimento que ocasionalmente é lento mas usualmente roda rapidamente. Finalmente, você pode considerar tipos alternativos de computação, tais como computação aleatorizada, que pode acelerar certas tarefas.

Uma área aplicada que tem sido afetada diretamente pela teoria da complexidade é o velho campo da criptografia. Na maioria das áreas, um problema computacional fácil é preferível a um difícil porque os fáceis são mais baratos de resolver. Criptografia é incomum porque ela especificamente requer problemas computacionais que sejam difíceis, ao invés de fáceis, porque códigos secretos têm que ser difíceis de quebrar sem a chave ou senha secreta. A teoria

da complexidade tem mostrado aos criptógrafos o caminho dos problemas computacionalmente difíceis em torno dos quais eles têm projetado novos códigos revolucionários.

TEORIA DA COMPUTABILIDADE

Durante a primeira metade do século XX, matemáticos como Kurt Gödel, Alan Turing, e Alonzo Church descobriram que certos problemas básicos não podem ser resolvidos por computadores. Um exemplo desse fenômeno é o problema de se determinar se um enunciado matemático é verdadeiro ou falso. Essa tarefa é o feijão com arroz dos matemáticos. Parece uma questão natural para resolução por computador porque ela reside estritamente dentro do domínio da matemática. Mas nenhum algoritmo de computador pode realizar essa tarefa.

Entre as conseqüências desse resultado profundo estava o desenvolvimento de idéias concernentes a modelos teóricos de computadores que em algum momento ajudariam a levar à construção de computadores reais.

As teorias da computabilidade e da complexidade são intimamente relacionadas. Na teoria da complexidade, o objetivo é classificar problemas como fáceis e difíceis, enquanto que na teoria da computabilidade a classificação de problemas é por meio da separação entre os que são solúveis e os que não o são. A teoria da computabilidade introduz vários dos concei tos usados na teoria da complexidade.

TEORIA DOS AUTÔMATOS

Teoria dos autômatos lida com as definições e propriedades de modelos matemáticos de computação. Esses modelos desempenham um papel em diversas áreas aplicadas da ciência da computação. Um modelo, chamado *autômato finito*, é usado em processamento de texto, compiladores, e projeto de hardware. Um outro modelo, chamado *gramática livre-do-contexto*, é usado em linguagens de programação e inteligência artificial.

Teoria dos autômatos é um excelente lugar para começar a estudar a teoria da computação. As teorias de computabilidade e complexidade requerem uma definição precisa de um *computador*. A teoria dos autômatos permite praticar com definições formais de computação pois ela introduz conceitos relevantes a outras áreas não-teóricas da ciência da computação.

0.2 NOÇÕES E TERMINOLOGIA MATEMÁTICAS

Como em qualquer assunto matemático, começamos com uma discussão dos objetos matemáticos básicos, ferramentas, e notação que esperamos usar.

CONJUNTOS

Um ***conjunto*** é um grupo de objetos representado como uma unidade. Conjuntos podem conter qualquer tipo de objeto, incluindo números, símbol os, e até mesmo outros conjuntos. Os objetos em um conjunto são chamados ***elementos*** ou ***membros***. Conjuntos podem ser descritos formalmente de várias maneiras. Uma maneira é listar seus elementos dentro de chaves. Por conseguinte, o conjunto

$$\{7, 21, 57\}$$

contém os elementos 7, 21, e 57. Os símbolos $\in$ e $\notin$ denotam pertinência e não-pertinência, respectivamente. Escrevemos $7 \in \{7, 21, 57\}$ e $8 \notin \{7, 21, 57\}$. Para dois conjuntos A e B, dizemos que A é um ***subconjunto*** de B, escrito $A \subseteq B$, se todo membro de A também é um membro de B. Dizemos que A é um ***subconjunto próprio*** de B, escrito $A \subsetneq B$, se A é um subconjunto de B e não é igual a B.

A ordem de descrever um conjunto não importa, nem a repetição de seus membros. Obtemos o mesmo conjunto escrevendo $\{57, 7, 7, 7, 21\}$. Se desejamos levar em consideração o número de ocorrências de membros chamamos o grupo um ***multiconjunto*** ao invés de um conjunto. Portanto $\{7\}$ e $\{7, 7\}$ são diferentes como multiconjuntos mas idênticos como conjuntos. Um ***conjunto infinito*** conté uma quantidade infinita de elementos. Não podemos escrever uma lista de todos os elementos de um conjunto infinito, portanto às vezes usamos a notação "..." para dizer, "continue a seqüência para sempre." Por conseguinte, escrevemos o conjunto de ***números naturais*** $\mathcal{N}$ como

$$\{1, 2, 3, \ldots\}.$$

O conjunto de ***inteiros*** $\mathcal{Z}$ é escrito

$$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

O conjunto com 0 membros é chamado o ***conjunto vazio*** e é escrito $\emptyset$.

Quando desejamos descrever um conjunto contendo elementos de acordo com alguma regra, escrevemos $\{n|$ regra sobre $n\}$. Portanto $\{n|\ n = m^2$ para algum $m \in \mathcal{N}\}$ significa o conjunto de quadrados perfeitos.

Se temos dois conjuntos A e B, a ***união*** de A e B, escrito $A \cup B$, é o conjunto que obtemos combinando todos os elementos em A e B em um único conjunto. A ***interseção*** de A e B, escrito $A \cap B$, é o conjunto de elementos que estão em ambos A e B. O ***complemento*** de A, escrito $\overline{A}$, é o conjunto de todos os elementos sob consideração que *não* estão em A.

Como é freqüentemente o caso em matemática, um desenho ajuda a esclarecer um conceito. Para conjuntos, usamos um tipo de desenho chamado um ***diagrama de Venn***. Ele representa conjuntos como regiões delimitadas por linhas circulares. Seja o conjunto COMEÇO-t o conjunto de todas as palavras em inglês que começam com a letra "t." Por exemplo, na figura a seguir o círculo representa o conjunto COMEÇO-t. Vários membros desse conjunto são representados como pontos dentro do círculo.

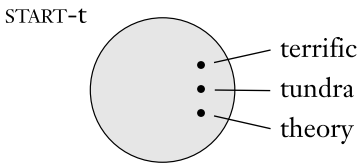


FIGURA 0.1
Diagrama de Venn para o conjunto de palavras em inglês começando com "t"

De maneira semelhante, representamos o conjunto TERMINA-z de palavras em inglês que terminam com "z" na figura seguinte.

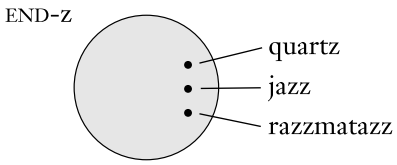


FIGURA 0.2
Diagrama de Venn para o conjunto das palavras em inglês terminando com "z"

Para representar ambos os conjuntos no mesmo diagrama de Venn diagram temos que desenhá-los de modo que eles se sobreponham, indicando que eles compartilham alguns elementos, como mostrado na figura seguinte. Por exemplo, a palavra *topaz* está em ambos os conjuntos. A figura também contém um círculo para o conjunto COMEÇO-j. Ele não se sobrepõe com o círculo para COMEÇO-t porque nenhuma palavra reside em ambos os conjuntos.

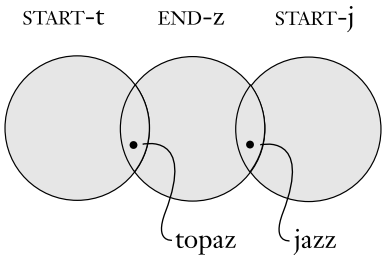


FIGURA 0.3
Círculos que se sobrepõem indicam elementos em comum

Os próximos dois diagramas de Venn mostram a união e a interseção de conjuntos A e B.

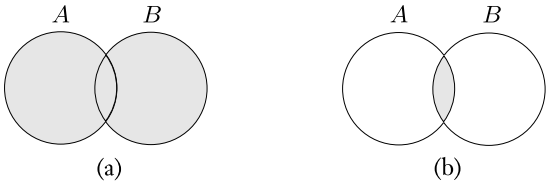


FIGURA 0.4
Diagramas para (a) $A \cup B$ e (b) $A \cap B$

SEQÜÊNCIAS E UPLAS

Uma ***seqüência*** de objetos é uma lista desses objetos na mesma ordem. Usualmente designamos uma seqüência escrevendo a lista dentro de parênteses. Por exemplo, a seqüência 7, 21, 57 seria escrita

$$(7, 21, 57).$$

Em um conjunto a ordem não importa, mas em uma seqüência importa. Daí $(7, 21, 57)$ não é o mesmo que $(57, 7, 21)$. Igualmente, repetição realmente importa em uma seqüência, mas não importa em um conjunto. Portanto $(7, 7, 21, 57)$ é diferente de ambas as outras seqüências, enquanto que o conjunto $\{7, 21, 57\}$ é idêntico ao conjunto $\{7, 7, 21, 57\}$.

Como com conjuntos, seqüências podem ser finitas ou infinitas. Seqüências finitas freqüentemente são chamadas ***uplas***. Uma seqüência com k elementos é umaa ***k-upla***. Portanto $(7, 21, 57)$ é uma 3-upla. Uma 2-upla é também chamada um ***par***.

Conjuntos e seqüências podem aparecer como elementos de outros conjuntos e seqüências. Por exemplo, o ***conjunto das partes*** de A é o conjunto de todos os

subconjuntos de A. Se A for o conjunto $\{0, 1\}$, o conjunto das partes de A é o conjunto $\{ \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\} \}$. O conjunto de todos os pares cujos elementos são 0s e 1s é $\{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \}$.

Se A e B são dois conjuntos, o ***produto cartesiano*** ou ***produto cruzado*** de A e B, escrito $A \times B$, é o conjunto de todos os pares nos quais o primeiro elemento é um membro de A e o segundo elemento é um membro de B.

EXEMPLO 0.5

Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y, z\}$,

$$A \times B = \{ (1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z) \}.$$

Podemos também tomar o produto cartesiano de k conjuntos, A_1, A_2, ..., A_k, escrito $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. Trata-se do conjunto consistindo de todas as k-uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ onde $a_i \in A_i$.

EXEMPLO 0.6

Se A e B são como no Examplo 0.5,

$$A \times B \times A = \{ (1, x, 1), (1, x, 2), (1, y, 1), (1, y, 2), (1, z, 1), (1, z, 2), \\ (2, x, 1), (2, x, 2), (2, y, 1), (2, y, 2), (2, z, 1), (2, z, 2) \}.$$

Se temos o produto cartesiano de um conjunto com si próprio, usamos a abreviação

$$\overbrace{A \times A \times \cdots \times A}^{k} = A^k.$$

EXEMPLO 0.7

O conjunto $\mathcal{N}^2$ é igual a $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Ele consiste de todos os pares de números naturais. Também podemos escrevê-lo como $\{(i, j) | \, i, j \geq 1\}$.

FUNÇÕES E RELAÇÕES

Funções são centrais em matemática. Uma ***função*** é um objeto que estabelece um relacionamento entrada–saída. Uma função toma uma entrada e produz uma saída. Em toda função, a mesma entrada sempre produz a mesma saída. Se f é uma função cuja valor de saída é b quando o valor de entrada é a, escrevemos

$$f(a) = b.$$

Uma função também é chamada ***mapeamento***, e, se $f(a) = b$, dizemos que f mapeia a para b.

Por exemplo, a função do valor absoluto abs toma o número x como entrada e retorna x se x for positivo e $-x$ se x for negativo. Portanto $abs(2) = abs(-2) = 2$. Adição é um outro exemplo de uma função, escrita add. A entrada para a função adição é um par de números, e a saída é a soma daqueles números.

O conjunto de possíveis entradas para a função é chamado seu ***domínio***. As saídas de uma função vêm de um conjunto chamado seu ***contradommínio.*** A notação para dizer que f é uma função com domínio D e contradomínio C é

$$f\colon D \longrightarrow C.$$

No caso da função abs, se estamos trabalhando com inteiros, o domínio e o contradomínio são $\mathcal{Z}$, portanto escrevemos $abs\colon \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$. No caso da função adição para inteiros, o domínio é o conjunto de pares de inteiros $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ e o contradomínio é $\mathcal{Z}$, portanto escrevemos $add\colon \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$. Note que uma função pode não necessariamente usar todos os elementos do contradomínio especificado. A função abs nunca toma o valor -1 embora $-1 \in \mathcal{Z}$. Uma função que de fato usa todos os elementos do contradomínio é dita ser ***sobre*** o contradomínio.

Podemos descrever uma função específica de várias maneiras. Uma maneira é com um procedimento para computar uma saída a partir de uma entrada especificada. Uma outra maneira é com uma tabela que lista todas as entradas possíveis e dá a saída para cada entrada.

EXEMPLO 0.8

Considere a função $f\colon \{0,1,2,3,4\} \longrightarrow \{0,1,2,3,4\}$.

n	$f(n)$
0	1
1	2
2	3
3	4
4	0

Essa função adiciona 1 a sua entrada e aí então dá como saída o resultado módulo 5. Um número módulo m é o resto da divisão por m. Por exemplo, o ponteiro dos minutos no mostrador de um relógio counta módulo 60. Quando fazemos aritmética modular definimos $\mathcal{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Com essa notação, a função supramencionada f tem a forma $f\colon \mathcal{Z}_5 \longrightarrow \mathcal{Z}_5$. ■

EXEMPLO 0.9

Às vezes uma tabela bi-dimensional é usada se o domínio da função é o produto cartesiano de dois conjuntos. Aqui está uma outra função, $g\colon \mathcal{Z}_4 \times \mathcal{Z}_4 \longrightarrow \mathcal{Z}_4$. A

entrada na linha rotulada i e na coluna rotulada j na tabela é o valor de $g(i, j)$.

g	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

A função g é a função adição módulo 4. ■

Quando o domínio de uma função f é $A_1 \times \cdots \times A_k$ para alguns conjuntos $A_1, \ldots, A_k$, a entrada para f é uma k-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ e chamamos os a_i de ***argumentos*** para f. Uma função com k argumentos é chamada uma ***função k-ária***, e k é chamada a ***aridade*** da função. Se k é 1, f tem um único argumento e f é chamada uma ***função unária***. Se k é 2, f é uma ***função binária***. Certas funções binárias familiares são escritas em uma ***notação infixa*** especial, com o símbolo para a função colocado entre seus dois argumentos, ao invés de na ***notação prefixa***, com o símbolo precedendo. Por exemplo, a função adição adi usualmente é escrita em notação infixa com símbolo $+$ entre seus dois argumentos como em $a + b$ ao invés de na notação prefixa $adi(a, b)$.

Um ***predicado*** ou ***propriedade*** é uma função cujo contradomínio é $\{\text{VERDADEIRO}, \text{FALSO}\}$. Por exemplo, seja par uma propriedade que é VERDADEIRO se sua entrada é um número par e FALSO se sua entrada é um número ímpar. Por conseguinte, $par(4) = \text{VERDADEIRO}$ e $par(5) = \text{FALSO}$.

Uma propriedade cujo domínio é um conjunto de k-uplas $A \times \cdots \times A$ é chamada uma ***relação***, uma ***relação k-ária***, ou uma ***relação k-ária sobre A***. Um caso comum é uma relação 2-ária, chamada uma ***relação binária***. Quando se escreve uma expressão envolvendo uma relação binária, normalmente usamos notação infixa. Por exemplo, "menor que" é uma relação usualmente escrita o símbolo de operação infixo $<$. "Igualdade," escrita com o símbolo $=$ é uma outra relação familiar. Se R é uma relação binária, o enunciado aRb significa que $aRb = \text{VERDADEIRO}$. De modo semelhante se R é uma relação k-ária, o enunciado $R(a_1, \ldots, a_k)$ significa que $R(a_1, \ldots, a_k) = \text{VERDADEIRO}$.

EXEMPLO 0.10

Em um jogo infantil chamado Tesoura–Papel–Pedra, os dois jogadores escolhem simultaneamente um membro do conjunto {TESOURA, PAPEL, PEDRA} e indicam suas escolhas com sinais de mão. Se as duas escolhas são iguais, o jogo começa. Se as escolhas diferem, um jogador vence, conforme a relação *bate*.

bate	TESOURA	PAPEL	PEDRA
TESOURA	FALSO	VERDADEIRO	FALSO
PAPEL	FALSO	FALSO	VERDADEIRO
PEDRA	VERDADEIRO	FALSO	FALSO

Dessa tabela determinamos que TESOURA *bate* PAPEL é VERDADEIRO e que

PAPEL *bate* TESOURA é FALSO. ■

Às vezes descrever predicados com conjuntos ao invés de funções é mais conveniente. O predicado $P\colon D \longrightarrow \{\text{VERDADEIRO}, \text{FALSO}\}$ pode ser escrito (D, S), onde $S = \{a \in D |\ P(a) = \text{VERDADEIRO}\}$, ou simplesmente S se o domínio D for óbvio do contexto. Daí, a relação *bate* pode ser escrita

$$\{(\text{TESOURA, PAPEL}),\ (\text{PAPEL, PEDRA}),\ (\text{PEDRA, TESOURA})\}.$$

Um tipo especial de relação binária, chamada um ***relação de equivalência***, captura a noção de dois objetos sendo iguais em alguma característica. Uma relação binária R é uma relação de equivalência se R satisfaz três condições:

1. R é ***reflexiva*** se para todo x, xRx;
2. R is ***simétrica*** se para todo x e y, xRy implica yRx; e
3. R é ***transitiva*** se para todo x, y, e z, xRy e yRz implica xRz.

EXEMPLO 0.11

Defina uma relação de equivalência sobre os números naturais, escrita $\equiv_7$. Para $i, j \in \mathcal{N}$ digamos que $i \equiv_7 j$, se $i - j$ é um múltiplo de 7. Essa é uma relação de equivalência porque ela satisfaz as três condições. Primeiro, ela é reflexiva, pois $i - i = 0$, que é um múltiplo de 7. Segundo, ela é simétrica, pois $i - j$ é um múltiplo de 7 se $j - i$ é um múltiplo de 7. Terceiro, ela é transitiva, pois sempre que $i - j$ é um múltiplo de 7 e $j - k$ é um múltiplo de 7, então $i - k = (i - j) + (j - k)$ é a soma de dois múltiplos de 7 e portanto também um múltiplo de 7. ■

GRAFOS

Um ***grafo não-direcionado***, ou simplesmente um a ***grafo***, é um conjunto de pontos com linhas conectando alguns dos pontos. Os pontos são chamados ***nós*** ou ***vértices***, e as linhas são chamadas ***arestas***, como mostrado na figura a seguir.

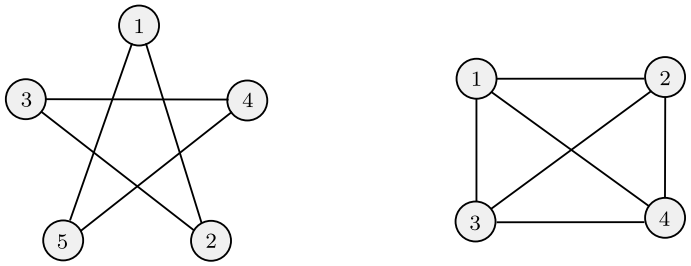


FIGURA 0.12
Exemplos de grafos

O número de arestas em um nó específico é o ***grau*** daquele nó. Na Figura 0.12(a) todos os nós têm grau 2. Na Figura 0.12(b) todos os nós têm grau 3. Não mais que uma aresta é permitida entre quaisquer dois nós.

Em um grafo G que contém nós i e j, o par (i, j) representa a aresta que conecta i e j. A ordem de i e j não importa em um grafo não-direcionado, portanto os pares (i, j) e (j, i) representam a mesma aresta. Às vezes descrevemos arestas com conjuntos, como em $\{i, j\}$, ao invés de pares se a ordem dos nós não for importante. Se V é o conjunto de nós de G e E é o conjunto de arestas, dizemos que $G = (V, E)$. Podemos descrever um grafo com um diagrama ou mais formalmente especificando V e E. Por exemplo, uma descrição formal do grafo na Figura 0.12(a) é

$$\big(\{1, 2, 3, 4, 5\},\ \{(1, 2),\ (2, 3),\ (3, 4),\ (4, 5),\ (5, 1)\}\big),$$

e uma descrição formal do grafo na Figura 0.12(b) é

$$\big(\{1, 2, 3, 4\},\ \{(1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 3),\ (2, 4),\ (3, 4)\}\big).$$

Grafos freqüentemente são usados para to representar dados. Nós podem ser cidades e arestas as estradas que as conectam, ou nós podem ser componentes elétricas e arestas os fios entre elas. Às vezes, por conveniência, rotulamos os nós e/ou arestas de um grafo, que então é chamado um ***grafo rotulado***. A Figura 0.13 mostra um grafo cujos nós são cidades e cujas arestas são rotuladas com o custo em dólares da tarifa aérea sem-escalas mais barata para viajar entre aquelas cidades se voar sem-escalas entre elas é possível.

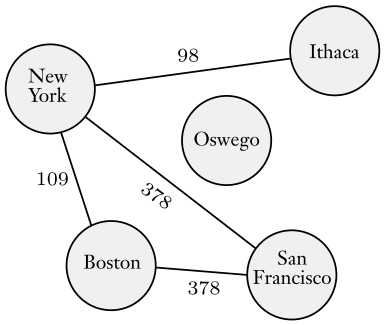


FIGURA 0.13
Tarifas aéreas sem-escalas mais baratas entre várias cidades

Dizemos que o grafo G é um ***subgrafo*** do grafo H se os nós de G formam um subconjunto dos nós de H, e as arestas de G são as arestas de H sobre os nós correspondentes. A figura a seguir mostra um grafo H e um subgrafo G.

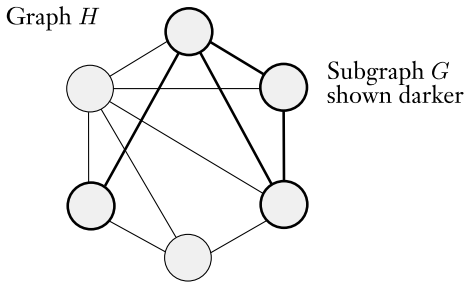


FIGURA 0.14
Grafo G (mais escuro) é um subgrafo de H

Um ***caminho*** em um grafo é uma seqüência de nós conectados por arestas. Um ***caminho simples*** é um caminho que não repete nenhum nó. Um grafo é ***conexo*** se cada dois nós têm um caminho entre eles. Um caminho é um ***ciclo*** se ele começa e termina no mesmo nó. Um ***ciclo simples*** é aquele que contém pelo menos três nós e repete somente o primeiro e o último nós. Um grafo é uma ***árvore*** se ele é conexo e não tem ciclos simples, como mostrado na Figura 0.15. Uma árvore pode conter um nó especialmente designado chamado a ***raiz***. Os nós de grau 1 em uma árvore, exceto a raiz, são chamados as ***folhas*** da árvore.

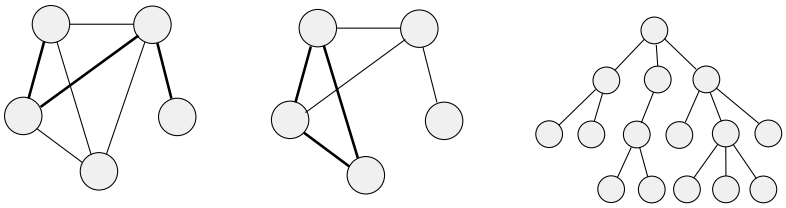


FIGURA 0.15
(a) Um caminho em um grafo, (b) um ciclo em um grafo, e (c) uma árvore

Se ele tem setas ao invés de linhas, o grafo é um ***grafo direcionado***, como mostrado na figura a seguir. O número de setas apontando a partir de um dado nó é o ***grau de saída*** daquele nó, e número de setas apontando para um dado nó é o ***grau de entrada***.

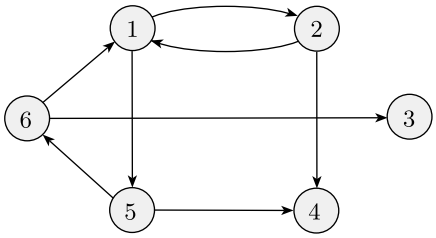


FIGURA 0.16
Um grafo direcionado

Em um grafo direcionado representamos uma aresta de i para j como um par (i, j). A descrição formal de um grafo direcionado G é (V, E) onde V é o conjunto de nós e E é o conjunto de arestas. A descrição formal do grafo na Figura 0.16 é

$$\big(\{1,2,3,4,5,6\},\ \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3)\}\big).$$

Um caminho no qual todas as setas apontam na mesma direção que seus passos é chamado um ***caminho direcionado***. Um grafo direcionado é ***fortemente conexo*** se um caminho direcionado conecta cada dois nós.

EXEMPLO 0.17

O grafo direcionado mostrado aqui representa a relação dada no Exemplo 0.10.

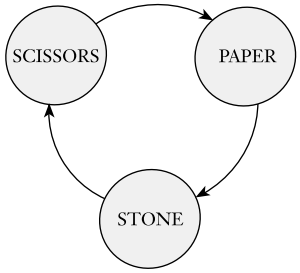


FIGURA 0.18
O grafo da relação *bate*

Grafos direcionados são uma forma útil de se exibir relações binárias. Se R é uma relação binária cujo domínio é $D \times D$, um grafo rotulado $G = (D, E)$ representa R, onde $E = \{(x, y) | \, xRy\}$. A Figura 0.18 ilustra essa representação.

Se V é o conjunto de nós e E é o conjunto de arestas, a notação para um grafo G consistindo desses nós e arestas é $G = (V, E)$.

CADEIAS E LINGUAGENS

Cadeias de caracteres são blocos básicos fundamentais em ciência da computação. O alfabeto sobre o qual as cadeias são definidas pode variar com a aplicação. Para nossos propósitos, definimos um ***alfabeto*** como sendo qualquer conjunto finito não-vazio. Os membros do alfabeto são os ***símbolos*** do alfabeto. Geralmente usamos letras gregas maiúsculas Σ e Γ para designar alfabetos e o fonte 'máquina de escrever' para símbolos de um alfabeto. Abaixo estão alguns poucos exemplos de alfabetos.

$\Sigma_1 = \{\texttt{0},\texttt{1}\}$;

$\Sigma_2 = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \texttt{d}, \texttt{e}, \texttt{f}, \texttt{g}, \texttt{h}, \texttt{i}, \texttt{j}, \texttt{k}, \texttt{l}, \texttt{m}, \texttt{n}, \texttt{o}, \texttt{p}, \texttt{q}, \texttt{r}, \texttt{s}, \texttt{t}, \texttt{u}, \texttt{v}, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}\}$;

$\Gamma = \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}\}$.

Uma ***cadeia sobre um alfabeto*** é uma seqüência de símbolos daquele alfabeto, usualmente escrito um seguido do outro e não separados por vírgulas. Se $\Sigma_1 = \{\texttt{0},\texttt{1}\}$, então $\texttt{01001}$ é uma cadeia sobre Σ_1. Se $\Sigma_2 = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{z}\}$, então $\texttt{abracadabra}$ é uma cadeia sobre Σ_2. Se w é uma cadeia sobre Σ, o ***comprimento*** de w, escrito $|w|$, é o número de símbolos que ele contém. A cadeia de comprimento zero é chamada a ***cadeia vazia*** e é escrita ε. A cadeia vazia desempenha o papel do 0 em um sistema numérico. Se w tem comprimento n, podemos escrever $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ onde cada $w_i \in \Sigma$. O ***reverso*** de w, escrito $w^{\mathcal{R}}$, é a cadeia obtida escrevendo w na ordem inversa (i.e., $w_n w_{n-1} \cdots w_1$). A cadeia z é uma

subcadeia de w se z aparece consecutivamente dentro de w. Por exemplo, `cad` é uma subcadeia de `abracadabra`.

Se temos a cadeia x de comprimento m e a cadeia y de comprimento n, a ***concatenação*** de x e y, escrito xy, é a cadeia obtida concatenando-se y ao final de x, como em $x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_n$. Para concatenar uma cadeia com si própria muitas vezes usamos a notação com expoente

$$\overbrace{xx \cdots x}^{k} = x^k.$$

A ***ordenação lexicográfica*** de cadeias é a mesma que a ordenação familiar do dicionário, exceto que cadeias mais curtas precedem cadeias mais longas. Por conseguinte, a ordenação lexicográfica de todas as cadeias sobre o alfabeto {0,1} é

$$(\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots).$$

Uma ***linguagem*** é um conjunto de cadeias.

LÓGICA BOOLEANA

A ***lógica booleana*** é um sistema matemático construído em torno dos dois valores VERDADEIRO e FALSO. Embora originalmente concebido como matemática pura, esse sistema é hoje considerado como sendo os fundamentos da eletrônica digital e do desenho de computadores. Os valores VERDADEIRO e FALSO são chamados os ***valores booleanos*** e são freqüentemente representados pelos valores 1 e 0. Usamos valores booleanos em situações com duas possibilidades, tais como um fio que pode ter uma voltagem alta ou baixa, uma proposição que pode ser verdadeira or falsa, ou uma questão que pode ser respondida com sim ou não. Podemos manipular valores booleanos com duas operações especialmente desenhadas, chamadas as ***operações booleanas***. A mais simples dessas operações é a operação de ***negação*** ou **NÃO**, designada com o símbolo $\neg$. A negação de um valor booleano é o valor oposto. Portanto $\neg 0 = 1$ e $\neg 1 = 0$. A operação de ***conjunção***, ou **E**, é designada com o símbolo $\wedge$. A conjunção de dois valores booleanos é 1 se ambos aqueles valores são 1. A operação de ***disjunção***, ou **OU**, é designada com o símbolo $\vee$. A disjunção de dois valores booleanos é 1 se um daqueles valores é 1. Resumimos essa informação da seguinte maneira.

$0 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$	$\neg 0 = 1$
$0 \wedge 1 = 0$	$0 \vee 1 = 1$	$\neg 1 = 0$
$1 \wedge 0 = 0$	$1 \vee 0 = 1$	
$1 \wedge 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$	

Usamos operações booleanas para combinar enunciados simples em expressões booleanas mais complexas, tal qual usamos as operações aritméticas $+$ e $\times$ para construir expressões aritméticas complexas. Por exemplo, se P é o valor

booleano representando a veracidade do enunciado "o sol está brilhando" e Q representa a veracidade do enunciado "hoje é Segunda-Feira", podemos escrever $P \wedge Q$ para representr o valor-verdade do enunciado "o sol está brilhando *e* hoje é Segunda-Feira" e de forma similar para $P \vee Q$ com *e* substituído por *ou*. Os valores P e Q são chamados os ***operandos*** da operação.

Várias outras operações booleanas ocasionalmente aparecem. A operação de ***ou exclusivo***, ou **XOR**, é designada pelo símbolo $\oplus$ e é 1 se um mas não os dois de seus operandos for 1. A operação de ***igualdade***, escrita com o símbolo $\leftrightarrow$, é 1 se ambos os seus operandos têm o mesmo valor. Finalmente, a operação de ***implicaão*** é designadad pelo símbolo $\rightarrow$ e é 0 se seu primeiro operando é 1 e seu segundo operando é 0; caso contrário $\rightarrow$ é 1. Resumimos essa informação da seguinte forma.

$0 \oplus 0 = 0$	$0 \leftrightarrow 0 = 1$	$0 \rightarrow 0 = 1$
$0 \oplus 1 = 1$	$0 \leftrightarrow 1 = 0$	$0 \rightarrow 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$	$1 \leftrightarrow 0 = 0$	$1 \rightarrow 0 = 0$
$1 \oplus 1 = 0$	$1 \leftrightarrow 1 = 1$	$1 \rightarrow 1 = 1$

Podemos estabelecer vários relacionamentos entre essas operações. Na realidade, podemos expressar todas as operações booleanas em termos das operações E e NÃO, como mostram as seguintes identidades. As duas expressões em cada linha são equivalentes. Cada linha row expressa a operação na coluna da esquerda em termos de operações acima dela e E e NÃO.

$P \vee Q$	$\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
$P \leftrightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
$P \oplus Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$

A ***lei distributiva*** para E e OU vem para ajudar na manipulação de expressões booleanas. Ela é similar à lei distributiva para adição e multiplicação, que afirma que $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. A versão booleana vem sob duas formas:

- $P \wedge (Q \vee R)$ equals $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$, and its dual
- $P \vee (Q \wedge R)$ equals $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Note que o dual da lei distributiva para adição e multiplicação não se verifica em geral.

RESUMO DOS TERMOS MATEMÁTICOS

Alfabeto	Um conjunto finito de objetos chamados símbolos
Aresta	Uma linha em um grafo
Argumento	Uma entrada para uma função
Árvore	Um grafo conexo sem ciclos simples
Cadeia	Uma lista finita de símbolos de um alfabeto
Cadeia vazia	A cadeia de comprimento zero
Caminho	Uma seqüência de nós em um grafo conectados por arestas
Caminho simples	Um caminho sem repetição
Ciclo	Um caminho que começa e termina no mesmo nó
Complemento	Uma operação sobre um conjunto, formando o conjunto de todos os elementos não presentes
Concatenação	Uma operação que junta cadeias de um conjunto com cadeias de um outro conjunto
Conjunção	Operação booleana E
Conjunto	Um grupo de objetos
Conjunto vazio	O conjunto sem membros
Contradomínio	O conjunto do qual as saídas de uma função são retiradas
Disjunção	Operação booleana OU
Domínio	O conjunto de possíveis entradas para uma função
Elemento	Um objeto em um conjunto
Função	Uma operação que traduz entradas em saídas
Grafo	Uma coleção de pontos e linhas conectando alguns pares de pontos
Grafo conexo	Um grafo com caminhos conectando cada dois nós
Grafo direcionado	Uma coleção de pontos e setas conectando alguns pares de pontos
Interseção	Uma operação sobre conjuntos formando o conjunto de elementos comuns
k-upla	Uma lista de k objetos
Linguagem	Um conjunto de cadeias
Membro	Um objeto em um conjunto
Nó	Um ponto em um grafo
Operação booleana	Uma operação sobre valores booleanos
Par	Uma lista de dois elementos, também chamada uma 2-upla
Predicado	Uma função cujo contradomínio é {VERDADEIRO, FALSO}
Produto cartesiano	Uma operação sobre conjuntos formando um conjunto de todas as uplas de elementos dos respectivos conjuntos
Propriedade	Um predicado
Relação	Um predicado, mais tipicamente quando o domínio é um conjunto de k-uplas
Relação binária	Uma relação cujo domínio é um conjunto de pares
Relação de equivalência	Uma relação binária que é reflexiva, simétrica, e transitiva
Seqüência	Uma lista de objetos
Símbolo	Um membro de um alfabeto
União	Uma operação sobre conjuntos combinando todos os elementos em um único conjunto
Valor booleano	Os valores VERDADEIRO ou FALSO, freqüentemente representados por 1 ou 0
Vértice	Um ponto em um grafo

0.3 DEFINIÇÕES, TEOREMAS, E PROVAS

Teoremas e provas são o coração e a alma da matemática e definições são seu espírito. Essas três entidades são centrais para todo assunto matemático, incluindo o nosso.

Definições descrevem os objetos e noções que usamos. Uma definição pode ser simples, como na definição de *conjunto* dada anteriormente neste capítulo, ou complexa como na definição de *segurança* em um sistema criptográfico. Precisão é essencial a qualquer definição matemática. Ao definir algum objeto temos que deixar claro o que constitui aquele objeto e o que não.

Após termos definido vários objetos e noções, usualmente fazemos ***enunciados matemáticos*** sobre eles. Tipicamente um enunciado expressa que algum objeto tem uma certa propriedade. O enunciado pode ou não ser verdadeiro, mas como uma definição, ele tem que ser preciso. Não pode haver qualquer ambigüidade sobre seu significado.

Uma ***prova*** é um argumento lógico convincente de que um enunciado é verdadeiro. Em matemática um argumento tem que ser justo, isto é, convincente em um sentido absoluto. No cotidiano ou em Direito, o padrão de prova é mais baixo. Um processo por assassinato requer prova "além de qualquer dúvida razoável." O peso da evidência pode compelir o júri a aceitar a inocência ou culpa do suspeito. Entretanto, evidência não desempenha papel nenhum em uma prova matemática. Um matemático requer prova além de *qualquer* dúvida.

Um ***teorema*** é um enunciado matemático demonstrado verdadeiro. Geralmente reservamos o uso dessa palavra para enunciados de especial interesse. Ocasionalmente provamos enunciados que são interessantes somente porque eles ajudam na prova de um outro enunciado mais significativo. Tais enunciados são chamados ***lemas***. Ocasionalmente um teorema ou sua prova podem nos permitir concluir facilmente que aqueles outro enunciados relacionados são verdadeiros. Esses enunciados são chamados ***corolários*** do teorema.

ENCONTRANDO PROVAS

A única maneira de determinar a veracidade ou a falsidade de um enunciado matemático é com uma prova matemática. Infelizmente, encontrar provas não é sempre fácil. Não é possível reduzir a um simples conjunto de regras ou processos. Durante este curso, você será requisitado a apresentar provas de vários enunciados. Não desespere somente pela idéia! Muito embora ninguém tenha uma receita para produzir provas, algumas estratégias gerais úteis estão disponíveis.

Primeiro, leia cuidadosamente o enunciado que você quer provar. Você entende toda a notação? Reescreva o enunciado com suas próprias palavras. Quebre-o em partes e considere cada parte separadamente.

Às vezes as partes de um enunciado de múltiplas partes não são imediatamente evidentes. Um tipo de enunciado de múltiplas partes que ocorre freqüentemente tem a forma "P se e somente se Q", freqüentemente escrito "P sse Q", onde ambos P e Q são enunciados matemáticos. Essa notação é uma abreviação para um enunciado de duas-partes. A primeira parte é "P somente se Q," que significa: Se P é verdadeiro, então Q é verdadeiro, escrito $P \Rightarrow Q$. A segunda é "P se Q," que significa: Se Q é verdadeiro, então P é verdadeiro, escrito $P \Leftarrow Q$. A primeira dessas partes é a ***direção de ida*** do enunciado original e a segunda é a ***direção reversa***. Escrevemos "P se e somente se Q" como $P \iff Q$. Para provar um enunciado dessa forma você tem que provar cada uma das duas direções. Freqüentemente, uma dessas direções é mais fácil de provar que a outra.

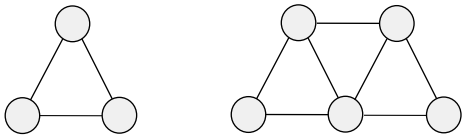
Um outro tipo de enunciado de múltiplas partes afirma que dois conjuntos A e B são iguais. A primeira parte afirma que A é um subconjunto de B, e a segunda parte afirma que B é um subconjunto de A. Portanto uma maneira comum de provar que $A = B$ é provar que todo membro de A também é um membro de B e que todo membro de B também é um membro de A.

A seguir, quando você quiser provar um enunciado ou parte dele, tente obter um sentimento intuitivo, "lá de dentro", do por que ele deveria ser verdadeiro. Experimentar com exemplos é especialmente útil. Por conseguinte, se o enunciado diz que todos os objetos de um certo tipo têm uma propriedade específica, escolha uns poucos objetos daquele tipo e observe que eles na realidade têm mesmo aquela propriedade. Após fazer isso, tente encontrar um objeto que falha em ter a propriedade, chamado um ***contra-exemplo***. Se o enunciado é de fato verdadeiro, você não será capaz de encontrar um contra-exemplo. Ver onde você esbarra em dificuldade quando você tenta encontrar um contra-exemplo pode ajudar você a entender por que o enunciado é verdadeiro.

EXEMPLO 0.19

Suponha que você deseja provar o enunciado *para todo grafo G, a soma dos graus de todos os nós em G é um número par*.

Primeiro, pegue uns poucos grafos e observe esse enunciado em ação. Aqui estão dois exemplos.

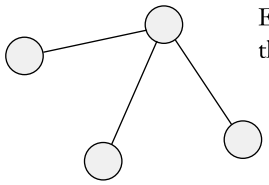


sum = 2+2+2 = 6

sum = 2+3+4+3+2 = 14

A seguir, tente encontrar um contra-exemplo, ou seja, um grafo no qual a

soma é um número ímpar.



Você pode agora começar a ver por que o enunciado é verdadeiro e como to prová-lo? ■

Se você ainda está engasgado tentando provar um enunciado, tente algo mais fácil. Tente provar um caso especial do enunciado. Por exemplo, se você está tentando provar que alguma propriedade é verdadeira para todo $k > 0$, primeiro tente prová-la para $k = 1$. Se você conseguir, tente-a para $k = 2$, e assim por diante até que você possa entender o caso mais geral. Se um caso especial é difícil de provar, tente um caso especial diferente ou talvez um caso especial do caso especial.

Finalmente, quando você acreditar que você encontrou a prova, você deve escrevê-la apropriadamente. Uma prova bem-escrita é uma seqüência de enunciados, na qual cada um segue por simples raciocínio dos enunciados anteriores na seqüência. Cuidadosamente escrever uma prova é importante, tanto para permitir que um leitor a entenda quanto para você ter certeza de que ela está livre de erros.

O que segue são algumas dicas para se produzir uma prova.

- *Seja paciente*. Encontrar provas leva tempo. Se você não vê como fazê-lo imediatamente, não se preocupe. Pesquisadores às vezes trabalham por semanas ou até anos para encontrar uma única prova.
- *Volte a ela*. Dê uma olhada no enunciado que você quer provar, pense nele um pouco, deixe-o, e aí então retorne uns poucos minutos ou horas mais tarde. Deixe a parte inconsciente, intuitiva de sua mente ter uma chance de trabalhar.
- *Seja claro*. Quando você está construindo sua intuição para o enunciado que você está tentando provar, use figuras e/ou textos simples, claros. Você está tentando desenvolver sua percepção sobre o enunciado, e desorganização atrapalha a percepção. Além disso, quando você está escrevendo uma solução para uma outra pessoa ler, a clareza ajudará aquela pessoa a entendê-la.
- *Seja conciso*. Brevidade ajuda a você a expressar idéias de alto nível sem se perder em detalhes. Boa notação matemática é útil para expressar idéias

concisamente. Porém assegure-se de incluir o bastante de seu raciocínio quando está escrevendo uma prova de modo que o leitor possa facilmente entender o que você está tentando dizer.

Para praticar, vamos provar uma das leis de DeMorgan.

TEOREMA 0.20

Para quaisquer dois conjuntos A e B, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Primeiro, o significado desse teorema está claro? Se você não entende o significado dos símbolos $\cup$ ou $\cap$ ou a barra superior, revise a discussão na página 4.

Para provar esse teorema temos que mostrar que os dois conjuntos $\overline{A \cup B}$ e $\overline{A} \cap \overline{B}$ são iguais. Lembre-se que podemos provar que dois conjuntos são iguais mostrando que todo membro de um conjunto também é membro do outro e vice versa. Antes de olhar para a prova que se segue, considere uns poucos exemplos e aí então tentar prová-la você mesmo.

PROVA Esse teorema afirma que dois conjuntos, $\overline{A \cup B}$ e $\overline{A} \cap \overline{B}$, são iguais. Provamos essa asserção mostrando que todo elemento de um também é um elemento do outro e vice versa.

Suponha que x seja um elemento de $\overline{A \cup B}$. Então x não está em $A \cup B$ da definicção do complemento de um conjunto. Por conseguinte, x não está em A e x não está em B, da definição da união de dois conjuntos. Em outras palavras, x está em $\overline{A}$ e x está em $\overline{B}$. Logo, a definição da interseção de dois conjuntos mostra que x está em $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Para a outra direção, suponha que x esteja em $\overline{A} \cap \overline{B}$. Então x está em ambos $\overline{A}$ e $\overline{B}$. Por conseguinte, x não está em A e x não está em B, e portanto não na união desses dois conjuntos. Logo, x está no complemento da união desses conjuntos; em outras palavras, x está em $\overline{A \cup B}$ o que completa a prova do teorema.

Vamos agora provar o enunciado no Exemplo 0.19.

TEOREMA 0.21

Para todo grafo G, a soma dos graus de todos os nós em G é um número par.

PROVA Toda aresta em G está conectada a dois nós. Cada aresta contribui 1 para o grau de cada nó ao qual ela está conectada. Por conseguinte, cada aresta contribui 2 para a soma dos graus de todos os nós. Logo, se G contém e arestas, então a soma dos graus de todos os nós de G é $2e$, que é um número par.

0.4 TIPOS DE PROVA

Vários tipos de argumentos surgem freqüentemente em provas matemáticas. Aqui, descrevemos uns poucos que normalmente ocorrem na teoria da computação. Note que uma prova pode conter mais que um tipo de argumento porque a prova pode conter dentro dela várias subprovas diferentes.

PROVA POR CONSTRUÇÃO

Muitos teoremas enunciam que um tipo particular de objeto existe. Uma maneira de provar um teorema desse é demonstrar como construir o objeto. Essa técnica é uma ***prova por construção***.

Vamos usar uma prova por construção para provar o seguinte teorema. Definimos um grafo como sendo ***k-regular*** se todo nó no grafo tem grau k.

TEOREMA 0.22

Para cada número par n maior que 2, existe um grafo 3-regular com n nós.

PROVA Seja n um número par maior que 2. Construa o grafo $G = (V, E)$ com n nós da seguinte forma. O conjunto de nós de G é $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, e o conjunto de arestas de G é o conjunto

$$E = \{\, \{i, i+1\} \mid \text{ for } 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{\, \{n-1, 0\}\,\}$$
$$\cup \{\, \{i, i+n/2\} \mid \text{ for } 0 \leq i \leq n/2-1\}.$$

Desenhe os nós desse grafo escritos consecutivamente ao redor da circunferência de um círculo. Nesse caso as arestas descritas na linha superior de E ligam pares adjacentes ao longo do círculo. As arestas descritas na linha inferior de E ligam nós em lados opostos do círculo. Essa figura mental claramente mostra que todo nó em G tem grau 3.

PROVA POR CONTRADIÇÃO

Em uma forma comum de argumento para se provar um teorema, assumimos que o teorema é falso e aí então mostramos que essa suposição leva a uma conseqüência obviamente falsa, chamada uma contradição. Usamos esse tipo de raciocínio freqüentemente no cotidiano, como no seguinte exemplo.

EXEMPLO 0.23

Jack vê Jill, que acaba de chegar da rua. Observando que ela está completamente enxuta, ele sabe que não está chovendo. Sua "prova" de que não está chovendo é que, *se estivesse chovendo* (a suposição de que o enunciado é falso), *Jill estaria molhada* (a conseqüência obviamente falsa). Portanto não pode estar chovendo.

A seguir, vamos provar por contradição que a raiz quadrada de 2 é um número irracional. Um número é ***racional*** se ele é uma fração m/n onde m e n são inteiros; em outras palavras, um número racional é a *razão* de inteiros m e n. Por exemplo, $2/3$ obviamente é um número racional. Um número é ***irracional*** se ele não é racional.

TEOREMA 0.24

$\sqrt{2}$ is irracional.

PROVA Primeiro, assumimos para os propósitos de mais tarde obter uma contradição que $\sqrt{2}$ é racional. Por conseguinte,

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

onde ambos m e n são inteiros. Se ambos m e n são divisíveis pelo mesmo inteiro maior que 1, divida ambos por esse inteiro. Fazer isso não muda o valor da fração. Agora, pelo menos um de m e n tem que ser um número ímpar.

Multiplicamos ambos os lados da equação por n e obtemos

$$n\sqrt{2} = m.$$

Elevamos ao quadrado ambos os lados e obtemos

$$2n^2 = m^2.$$

Devido ao fato de que m^2 é 2 vezes o inteiro n^2, sabemos que m^2 é par. Therefore m, também, é par, pois o quadrado de um número ímpar sempre é ímpar. Portanto podemos escrever $m = 2k$ para algum inteiro k. Então, substituindo m por $2k$, obtemos

$$\begin{aligned} 2n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por 2 obtemos

$$n^2 = 2k^2.$$

Mas esse resultado mostra que n^2 é par e portanto que n é par. Por conseguinte, estabelecemos que tanto m quanto n são pares. Mas tínhamos reduzido m e n de modo que eles *não* fosse ambos pares, uma contradição.

PROVA POR INDUÇÃO

Prova por indução é um método avançado usado para mostrar que todos os elementos de um conjunto infinito têm uma propriedade especificada. Por exemplo, podemos usar uma prova por indução para mostrar que uma expressão aritmética computa uma quantidade desejada para toda atribuição a suas variáveis ou que um programa funciona corretamente em todos os passos ou para todas as entradas.

Para ilustrar como a prova por indução funciona, vamos tomar o conjunto infinito como sendo os números naturais, $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, e dizer que a propriedade é chamada $\mathcal{P}$. Nosso objetivo é provar que $\mathcal{P}(k)$ é verdadeiro para cada número natural k. Em outras palavras, queremos provar que $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro, assim como $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$, $\mathcal{P}(4)$, e assim por diante.

Toda prova por indução consiste de duas partes, o ***passo da indução*** e a ***base***. Cada parte é uma prova individual em si própria. O passo da indução prova que para cada $i \geq 1$, se $\mathcal{P}(i)$ é verdadeiro, então $\mathcal{P}(i+1)$ também o é. A base prova que $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro.

Quando tivermos provado ambas as partes, o resultado desejado segue—a saber, que $\mathcal{P}(i)$ é verdadeiro para cada i. Por que? Primeiro, sabemos que $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro porque a base sozinha a prova. Segundo, sabemos que $\mathcal{P}(2)$ é verdadeiro porque o passo da indução prova que, se $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro então $\mathcal{P}(2)$ é verdadeiro, e já sabemos que $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro. Terceiro, sabemos que $\mathcal{P}(3)$ é verdadeiro porque o passo da indução prova que, se $\mathcal{P}(2)$ é verdadeiro então $\mathcal{P}(3)$ é verdadeiro, e já sabemos que $\mathcal{P}(2)$ é verdadeiro. Esse processo continua para todos os números naturais, mostrando que $\mathcal{P}(4)$ é verdadeiro, $\mathcal{P}(5)$ é verdadeiro, e assim por diante.

Uma vez que você entende o parágrafo precedente, você pode facilmente entender variações e generalizações da mesma idéia. Por exemplo, a base não necessariamente precisa começar com 1; ela pode começar com qualquer valor b. Nesse caso a prova por indução mostra que $\mathcal{P}(k)$ é verdadeiro para todo k que é no mínimo b.

No passo da indução a suposição de que $\mathcal{P}(i)$ é verdadeiro é chamado a ***hipótese da indução***. Às vezes ter a hipótese da indução mais forte que $\mathcal{P}(j)$ é verdadeiro para todo $j \leq i$ é útil. A prova por indução ainda funciona porque, quando desejamos provar que $\mathcal{P}(i+1)$ é verdadeiro já temos provado que $\mathcal{P}(j)$ é verdadeiro para todo $j \leq i$.

O formato para escrever uma prova por indução é o seguinte.

Base: Prove que $\mathcal{P}(1)$ é verdadeiro.

$\vdots$

Passo da Indução: Para cada $i \geq 1$, assuma que $\mathcal{P}(i)$ é verdadeiro e use essa suposição para mostrar que $\mathcal{P}(i+1)$ é verdadeiro.

$\vdots$

Agora, vamos provar por indução a corretude da fórmula usada para calcular o tamanho dos pagamentos mensais de prestações da casa própria. Ao comprar

uma casa, muitas pessoas tomam por empréstimo algo do dinheiro necessário para a aquisição e pagam esse empréstimo sobre um certo número de anos. Tipicamente, os termos de tais pagamentos estipulam que uma quantidade fixa de dinheiro é paga a cada mês para cobrir os juros, assim como uma parte do montante original, de modo que o total é pago em 30 anos. A fórmula para se calcular o tamanho dos pagamentos mensais é envolvida em mistério, mas na realidade é bastante simples. Ela afeta a vida de muitas pessoas, portanto você deveria achá-la interessante. Usamos indução para provar que ela funciona, tornando-a uma boa ilustração dessa técnica.

Primeiro, fixamos os nomes e significados de diversas variáveis. Seja P o *principal*, o montante do empréstimo original. Seja $I > 0$ a *taxa de juros* anual do empréstimo, onde $I = 0,06$ indica uma taxa de juros de 6%. Seja Y o pagamento mensal. Por conveniência definimos uma outra variável M de I, para o multiplicador mensal. Ela é a taxa pela qual o empréstimo muda a cada mês por causa dos juros sobre ele. Seguindo a prática financeira padrão assumimos a composta de juros mensal, portanto $M = 1 + I/12$.

Duas coisas acontecem a cada mês. Primeiro, o montante do empréstimo tende a crescer devido ao multiplicador mensal. Segundo, o montante tende a decrescer devido ao pagamento mensal. Seja P_t o montante do empréstimo remanescente após o t-ésimo mês. Então $P_0 = P$ é o montante do empréstimo original, $P_1 = MP_0 - Y$ é o montante do empréstimo após um mês, $P_2 = MP_1 - Y$ é o montante do empréstimo após dois meses, e assim por diante. Agora estamos prontos para enunciar e provar um teorema por indução sobre t que dá uma fórmula para o valor de P_t.

TEOREMA 0.25

Para cada $t \geq 0$,

$$P_t = PM^t - Y\left(\frac{M^t - 1}{M - 1}\right).$$

PROVA

Base: Prove que a fórmula é verdadeira para $t = 0$. Se $t = 0$, então a fórmula afirma que

$$P_0 = PM^0 - Y\left(\frac{M^0 - 1}{M - 1}\right).$$

Podemos simplificar o lado direito observando que $M^0 = 1$. Portanto obtemos

$$P_0 = P,$$

que se verifica porque definimos P_0 como sendo P. Por conseguinte, provamos que a base da indução é verdadeira.

Passo da Indução: Para cada $k \geq 0$ assuma que a fórmula é verdadeira para $t = k$ e mostre que ela é verdadeira para $t = k + 1$. A hipótese da indução afirma que

$$P_k = PM^k - Y\left(\frac{M^k - 1}{M - 1}\right).$$

Nosso objetivo é provar que

$$P_{k+1} = PM^{k+1} - Y\left(\frac{M^{k+1} - 1}{M - 1}\right).$$

Fazemos isso por meio dos seguintes passos. Primeiro, da definição de P_{k+1} a partir de P_k, sabemos que

$$P_{k+1} = P_k M - Y.$$

Por conseguinte, usando a hipótese da indução para calcular P_k,

$$P_{k+1} = \left[PM^k - Y\left(\frac{M^k - 1}{M - 1}\right)\right] M - Y.$$

Multiplicando ambos os lados por M e reescrevendo Y resulta em

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= PM^{k+1} - Y\left(\frac{M^{k+1} - M}{M - 1}\right) - Y\left(\frac{M - 1}{M - 1}\right) \\ &= PM^{k+1} - Y\left(\frac{M^{k+1} - 1}{M - 1}\right). \end{aligned}$$

Portanto a fórmula está correta para $t = k + 1$, o que prova o teorema.

O Problema 0.14 pede para você usar a fórmula precedente para calcular os reais pagamentos de amortização.

EXERCÍCIOS

0.1 Examine as descrições formais de conjuntos abaixo de modo que você entenda quais membros eles contêm. Escreva uma descrição informal breve em português de cada conjunto.

- **a.** $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
- **b.** $\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$
- **c.** $\{n |\ n = 2m$ para algum m em $\mathcal{N}\}$
- **d.** $\{n |\ n = 2m$ para algum m em $\mathcal{N}$, e $n = 3k$ para algum k em $\mathcal{N}\}$
- **e.** $\{w |\ w$ é uma cadeia de `0`s e `1`s e w é igual ao reverso de $w\}$

f. $\{n \mid n \text{ é um inteiro e } n = n + 1\}$

0.2 Escreva descrições formais dos seguinte conjuntos:

a. O conjunto contendo os números 1, 10, e 100.
b. O conjunto contendo todos os inteiros que são maiores que 5.
c. O conjunto contendo todos os inteiros que são maiores que 5.
d. O conjunto contendo a cadeia `aba`
e. O conjunto contendo a cadeia vazia.
f. O conjunto contendo absolutamente nada.

0.3 Seja A o conjunto $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\}$ e B o conjunto $\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$.

a. A é um subconjunto de B?
b. B é um subconjunto de A?
c. Quem é $A \cup B$?
d. O que é $A \cap B$?
e. O que é $A \times B$?
f. O que é the power set of B?

0.4 Se A tem a elementos e B tem b elementos, quantos elementos estão em $A \times B$? Explique sua resposta.

0.5 Se C é um conjunto com c elementos, quantos elementos estão no conjunto das partes de C? Explique sua resposta.

0.6 Seja X o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e Y o conjunto $\{6, 7, 8, 9, 10\}$. A função unária $f\colon X \longrightarrow Y$ e a função binária $g\colon X \times Y \longrightarrow Y$ são descritas nas tabelas seguintes.

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

g	6	7	8	9	10
1	10	10	10	10	10
2	7	8	9	10	6
3	7	7	8	8	9
4	9	8	7	6	10
5	6	6	6	6	6

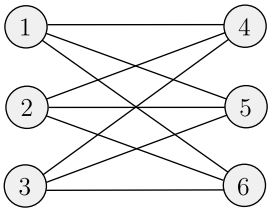
a. Qual é o valor de $f(2)$?
b. Quais são o contradomínio e o domínio de f?
c. Qual é o valor de $g(2, 10)$?
d. Quais são o contradomínio e o domínio de g?
e. Qual é o valor de $g(4, f(4))$?

0.7 Para cada item, dê uma relação que satisfaz a condição.

a. Reflexiva e simétrica mas não transitiva
b. Reflexiva e transitiva mas não siméetrica
c. Siméetrica e transitiva mas não reflexiva

0.8 Considere o grafo não-direcionado $G = (V, E)$ onde V, o conjunto de nós, é $\{1, 2, 3, 4\}$ e E, o conjunto de arestas, é $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}\}$. Desenhe o grafo G. Qual é o grau do nó 1? do nó 3? Indique um caminho do nó 3 ao nó 4 sobre seu desenho de G.

0.9 Escreva uma descrição formal do seguinte grafo.



PROBLEMAS

0.10 Encontre o erro na seguinte prova de que $2 = 1$.
Considere a equação $a = b$. Multiplque ambos os lados por a para obter $a^2 = ab$. Subtraia b^2 de ambos os lados para obter $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Agora fatore cada lado, $(a+b)(a-b) = b(a-b)$, e divida cada lado por $(a-b)$, para chegar em $a+b = b$. Finalmente, faça a e b iguais a 1, o que mostra que $2 = 1$.

0.11 Encontre o erro na seguinte prova de que todos os cavalos são da mesma cor.
AFIRMAÇÃO: Em qualquer conjunto de h cavalos, todos os cavalos são da mesma cor.
PROVA: Por indução sobre h.

Base: Para $h = 1$. Em qualquer conjunto contendo somente um cavalo, todos os cavalos claramente são da mesma cor.

Passo da Indução: Para $k \geq 1$ assuma que a afirmação é verdadeira para $h = k$ e prove que ela é verdadeira para $h = k + 1$. Tome qualquer conjunto H de $k + 1$ cavalos. Mostramos que todos os cavalos nesse conjunto são da mesma cor. Remova um cavalo desse conjunto para obter o conjunto H_1 com apenas k cavalos. Pela hipótese da indução, todos os cavalos em H_1 são da mesma cor. Agora reponha o cavalo removido e remova um diferente para obter o conjunto H_2. Pelo mesmo argumento, todos os cavalos em H_2 são da mesma cor. Conseqüentemente todos os cavalos em H têm que ter a mesma cor, e a prova está completa.

0.12 Mostre que todo grafo com 2 ou mais nós contém dois nós que têm graus iguais.

R* **0.13** **Teorema de Ramsey.** Seja G um grafo. Um ***clique*** em G é um subgrafo no qual cada dois nós são conectados por uma aresta. Um ***anticlique***, também chamado um ***conjunto independente***, é um subgrafo no qual cada dois nós não são conectados por uma aresta. Mostre que todo grafo com n nós contém ou clique ou um anticlique com pelo menos $\frac{1}{2}\log_2 n$ nós.

R **0.14** Use o Teorema 0.25 para derivar uma fórmula para calcular o tamanho do pagamento mensal para uma amortização em termos do principal P, taxa de juros I, e o número de pagamentos t. Assuma que, após t pagamentos tiverem sido feitos, o

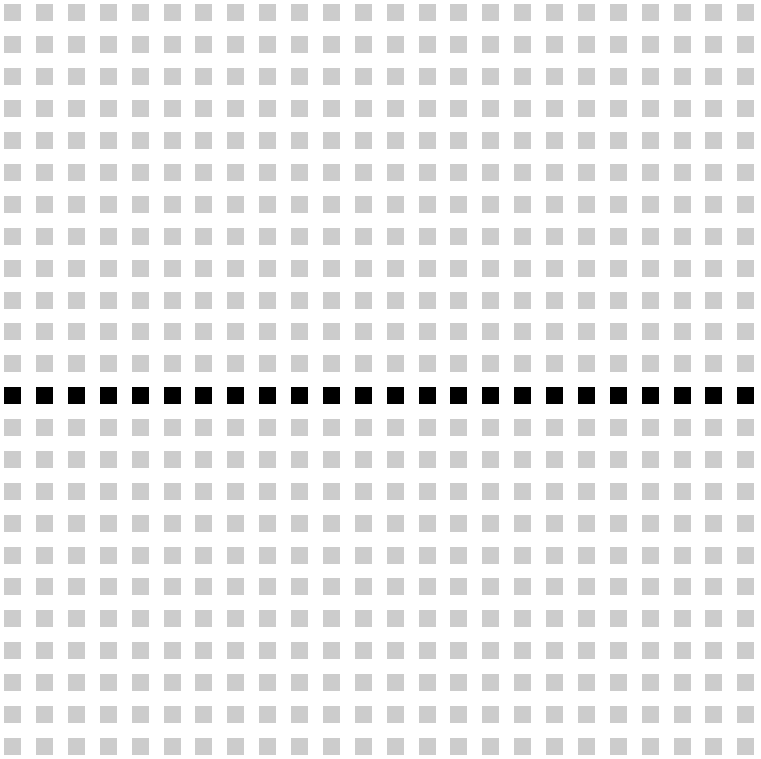
montante do empréstimo é reduzido a 0. Use a fórmula para calcular o montante em dólares de cada pagamento mensal para uma amortização de 30-anos com 360 pagamentos mensais sobre um montante de empréstimo inicial de $100.000 com uma taxa anual de juros de 5%.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

0.13 Crie espaço para duas pilhas de nós, A e B. Então, começando com o grafo inteiro, repetidamente adicione cada nó remanescente x a A se seu grau é maior que a metade do número de nós remanescentes e a B caso contrário, e descarte todos os nós aos quais x não está (está) conectado se ele foi adicionado a A (B). Continue até que nenhum nó restou. No máximo metade dos nós são descartados a cada um desses passos, portanto pelo menos $\log_2 n$ passos ocorrerão antes que o processo termine. Cada passo adiciona um nó a uma das duas pilhas, portanto uma das pilhas termina com pelo menos $\frac{1}{2}\log_2 n$ nós. A pilha A contém os nós de um clique e a pilha B contém os nós de um anticlique.

0.14 Fazemos $P_t = 0$ e resolvemos para Y para obter a fórmula: $Y = PM^t(M-1)/(M^t-1)$. Para $P = \$100.000$, $I = 0,05$, and $t = 360$ temos $M = 1 + (0,05)/12$. Usamos uma calculadora para encontrar que $Y \approx \$536,82$ é o pagamento mensal.

PARTE UM



AUTÔMATOS E LINGUAGENS

1

LINGUAGENS REGULARES

A teoria da computação começa com uma pergunta: O que é um computador? É talvez uma questão boba, pois todo mundo sabe que essa coisa sobre a qual estou teclando é um computador. Mas esses computadores reais são bastante complicados—demasiado para nos permitir estabelecer uma teoria matemática manuseável sobre eles diretamente. Ao invés, usamos um computador idealizado chamado um ***modelo computacional***. Como com qualquer modelo em ciência, um modelo computacional pode ser preciso em algumas maneiras mas talvez não em outras. Conseqüentemente usaremos vários modelos computacionais diferentes, dependendo das características nas quais desejamos focar. Começamos com o modelo mais simples, chamado a ***máquina de estados finitos*** ou ***autômato finito***.

1.1 AUTÔMATOS FINITOS

Autômatos finitos são bons modelos para computadores com uma quantidade extremamente limitada de memória. O que um computador pode fazer com uma memória tão pequena? Muitas coisas úteis! Na verdade, interagimos com tais computadores o tempo todo, pois eles residem no coração de vários dispositivos eletromecânicos.

O controlador para uma porta automática é um exemplo de tal dispositivo. Freqüentemente encontradas em entradas e saídas de supermercados, portas automáticas se abrem completamente ao sentir que uma pessoa está se aproximando. Uma porta automática tem um tapete na frente para detectar a presença de uma pessoa que está prestes a atravessar a passagem. Um outro tapete está localizado atrás da passagem de modo que o controlador pode manter a porta aberta o tempo suficiente para a pessoa passar durante todo o percurso e também de sorte que a porta não atinja alguém que permanece parada atrás dela no momento que ela abre. Essa configuração é mostrada na figura seguinte.

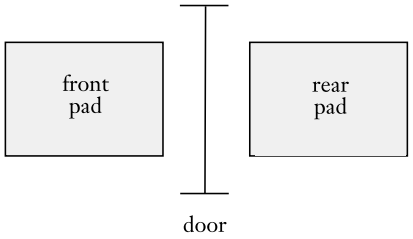


FIGURA 1.1
Visão superior de uma porta automática

O controlador está em um dos dois estados: "ABERTO" ou "FECHADO," representando a condição correspondente da porta. Como mostrado nas figuras seguintes, há quatro condições de entrada possíveis: "FRENTE" (significando que uma pessoa está pisando no tapete da frente da porta de passagem), "ATRÁS" (significando que uma pessoa está pisando sobre o tapete atrás da porta de passagem), "AMBOS" (significando que pessoas estão pisando em ambos os tapetes), e "NENHUM" (significando que ninguém está pisando sobre qualquer dos tapetes).

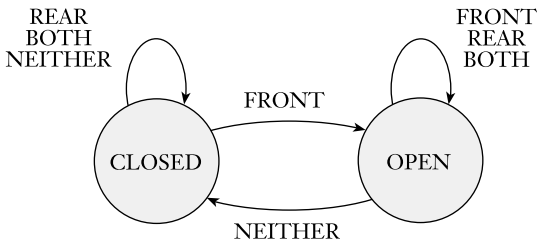


FIGURA 1.2
Diagrama de estados para um controlador de porta automática

		sinal de entrada			
		NENHUM	FRENTE	ATRÁS	AMBOS
estado	FECHADO	FECHADO	ABERTO	FECHADO	FECHADO
	ABERTO	FECHADO	ABERTO	ABERTO	ABERTO

FIGURA 1.3
Tabela de transição de estados para o controlador de porta automática

O controlador se move de estado para estado, dependendo da entrada que ele recebe. Estando no estado FECHADO e recebendo a entrada NENHUM ou ATRÁS, ele permanece no estado FECHADO. Adicionalmente, se a entrada AMBOS for recebida, ele permanece FECHADO porque abrindo a porta se arrisca bater em alguém sobre o tapete de trás. Mas se a entrada FRENTE chegar, ele move para o estado ABERTO. No estado ABERTO, se a entrada FRENTE, ATRÁS, ou AMBOS for recebida, ele permanece em ABERTO. Se a entrada NENHUM chegar, ele retorna a FECHADO.

Por exemplo, um controlador poderia iniciar no estado FECHADO e receber a série de sinais de entrada FRENTE, ATRÁS, NENHUM, FRENTE, AMBOS, NENHUM, ATRÁS, e NENHUM. Ele então passaria pela série de estados FECHADO (iniciando), ABERTO, ABERTO, FECHADO, ABERTO, ABERTO, FECHADO, FECHADO, e FECHADO.

Pensar num controlador de porta automática como um autômato finito é útil porque isso sugere formas padrão de representação como nas Figuras 1.2 e 1.3. Esse controlador é um computador que tem somente um único bit de memória, capaz de registrar em quais dos dois estados o controlador está. Outros dispositivos comuns têm controladores com memórias um pouco maiores. Em um controlador de elevador um estado pode representar o andar no qual o elevador está e as entradas poderiam ser os sinais recebidos dos botões. Esse computador poderia precisar de vários bits para guardar essa informação. Controladores para diversos aparelhos domésticos como lavadora de pratos e termostatos eletrônicos, assim como peças de relógios digitais e calculadoras, são exemplos adicionais de computadores com memórias limitadas. O desenho de tais dispositivos requer se manter em mente uma metodologia e uma terminologia de autômatos finitos.

Autômatos finitos e suas contrapartidas probabilísticas ***cadeias de Markov*** são ferramentas úteis quando estamos tentando reconhecer padrões em dados. Esses dispositivos são utilizados em processamento de voz e em reconhecimento de caracteres óticos. Cadeias de Markov têm sido usadas para modelar e fazer previsões de mudança de preços em mercados financeiros.

Vamos agora dar uma olhada mais cuidadosa em autômatos finitos de uma perspectiva matemática. Desenvolveremos uma definição precisa de um autômato finito, terminologia para descrever e manipular autômatos finitos, e resultados teóricos que descrevem seu poder e suas limitações. Além de lhe dar um entendimento mais claro do que são autômatos finitos e o que eles podem

e não podem fazer, esse desenvolvimento teórico vai lhe permitir praticar e se tornar mais confortável com definições matemáticas, teoremas, e provas em um cenário relativamente simples.

Ao começar a descrever a teoria matemática de autômatos finitos, fazemos isso no nível abstrato, sem referência a qualquer aplicação específica. A seguinte figura mostra um autômato finito chamado M_1.

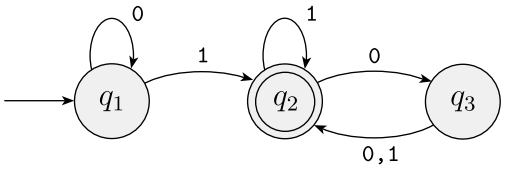


FIGURA 1.4
Um autômato finito chamado M_1 que tem três estados

A Figura 1.4 é denominada ***diagrama de estado*** de M_1. O autômato tem três ***estados***, rotulados q_1, q_2, e q_3. O ***estado inicial***, q_1, é indicado pela seta apontando para ele a partir do nada. O ***estado de aceitação***, q_2, é aquele com um duplo círculo. As setas saindo de um estado para o outro são chamadas ***transições***.

Quando esse autômato recebe uma cadeia de entrada tal como `1101`, ele processa essa cadeia e produz uma saída. A saída é ***aceita*** ou ***rejeita***. Consideraremos apenas esse tipo de saída sim/não no momento para manter as coisas simples. O processamento começa no estado inicial de M_1. O autômato recebe os símbolos da entrada cadeia de entrada um por um da esquerda para a direita. Após ler cada símbolo, M_1 move de um estado para outro ao longo da transição que tem aquele símbolo como seu rótulo. Quando ele lê o último símbolo, M_1 produz sua saída. A saída é *aceite* se M_1 está agora no estado de aceitação e *rejeite* se ele não está.

Por exemplo, quando alimentamos a cadeia de entrada `1101` à máquina M_1 na Figura 1.4, o processamento procede da seguinte forma.

1. Começa no estado no estado q_1.
2. Lê `1`, segue a transição de q_1 para q_2.
3. Lê `1`, segue a transição de q_2 para q_2.
4. Lê `0`, segue a transição de q_2 para q_3.
5. Lê `1`, segue a transição de q_3 para q_2.
6. *Aceite* porque M_1 está no estado de aceitação q_2 no final da entrada.

Experimentando com essa máquina sobre uma variedade de cadeias de entrada revela que ela aceita as cadeias `1`, `01`, `11`, e `0101010101`. Na realidade, M_1 aceita qualquer cadeia que termina com um símbolo `1`, pois ela vai para seu estado de aceitação q_2 sempre que ela lê o símbolo symbol `1`. Além disso, ela aceita as

cadeias 100, 0100, 110000, e 0101000000, e qualquer cadeia que termina com um número par de 0s seguindo o último 1. Ela rejeita outras cadeias, tais como 0, 10, 101000. Você pode descrever a linguagem consistindo de todas as cadeias que M_1 aceita? Faremos isso em breve.

DESCRIÇÃO FORMAL DE UM AUTÔMATO FINITO

Na seção precedente usamos diagramas de estado para introduzir autômatos finitos. Agora definimos autômatos finitos formalmente. Embora diagramas de estado sejam mais fáceis de entender intuitivamente, precisamos da definição formal também, por duas razões específicas.

Primeiro, uma definição formal é precisa. Ela resolve quaisquer incertezas sobre o que é permitido em um autômato finito. Se você estivesse incerto sobre se autômatos finitos pudessem ter 0 estados de aceitação ou se eles têm que ter exatamente uma transição saindo de todo estado para cada símbolo de entrada possível, você poderia consultar a definição formal e verificar que a resposta é sim em ambos os casos. Segundo, uma definição formal provê notação. Boa notação ajuda a você pensar e expressar seus pensamentos claramente.

A linguagem de uma definição formal é um tanto misteriosa, tendo alguma semelhança com a linguagem de um documento legal. Ambos necessitam ser precisos, e todo detalhe deve ser explicitado. Um autômato finito tem várias partes. Possui um conjunto de estados e regras para ir de um estado para outro, dependendo do símbolo de entrada. Tem um alfabeto de entrada que indica os símbolos de entrada permitidos. Tem um estado inicial e um conjunto de estados de aceitação. A definição formal diz que um autômato finito é uma lista daqueles cinco objetos: conjunto de estados, alfabeto de entrada, regras para movimentação, estado inicial e estados de aceitação. Em linguagem matemática, uma lista de cinco elementos é freqüentemente chamada 5-upla. Daí, definimos um autômato finito como sendo uma 5-upla consistindo dessas cinco partes.

Usamos algo denominado ***função de transição***, freqüentemente denotado δ, para definir as regras para movimentação. Se o autômato finitos tem uma seta de um estado x para um estado y rotulada com o símbolo de entrada 1, isso significa que, se o autômato está no estado x quando ele lê um 1, ele então move para o estado y. Podemos indicar a mesma coisa com a função de transição dizendo que $\delta(x, 1) = y$. Essa notação é uma espécie de abreviação matemática. Colocando tudo junto chegamos na definição formal de autômatos finitos.

DEFINIÇÃO 1.5

Um ***autômato finito*** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

1. Q é um conjunto finito denominado os ***estados***,
2. Σ é um conjunto finito denominado o ***alfabeto***,
3. $\delta\colon Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ é a ***função de transição***,[1]
4. $q_0 \in Q$ é o ***estado inicial***, e
5. $F \subseteq Q$ é o ***conjunto de estados de aceitação***.[2]

A definição formal descreve precisamente o que queremos dizer por um autômato finito. Por exemplo, returnando à pergunta anterior sobre se 0 estados de aceitação é permissível, você pode ver que fazer F ser o conjunto vazio $\emptyset$ dá origem a 0 estados de aceitação, o que é permissível. Além disso, a função de transição δ especifica exatamente um próximo estado para cada combinação possível de um estado e um símbolo de entrada. Isso responde à nossa outra pergunta afirmativamente, mostrando que exatamente uma seta de transição sai de todo estado para cada símbolo de entrada possível.

Podemos utilizar a notação da definição formal para descrever autômatos finitos individuais especificando cada uma das cinco partes listadas na Definição 1.5.Por exemplo, vamos retornar ao autômato finito M_1 que discutimos anteriormente, redesenhado aqui por conveniência.

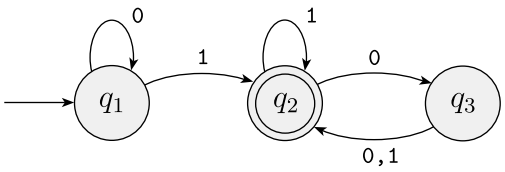


FIGURA 1.6
O autômato finito M_1

Podemos descrever M_1 formalmente escrevendo $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, onde

1. $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$,
2. $\Sigma = \{0,1\}$,

[1] Remeta-se de volta à página 8 se você estiver incerto sobre o significado de $\delta\colon Q \times \Sigma \longrightarrow Q$.

[2] Os estados de aceitação às vezes são chamados ***estados finais***.

3. δ é descrito como

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

4. q_1 é o estado inicial, e

5. $F = \{q_2\}$.

Se A é o conjunto de todas as cadeias que a máquina M aceita, dizemos que A é a ***linguagem da máquina M*** e escrevemos $L(M) = A$. Dizemos que ***M reconhece A*** ou que ***M aceita A***. Em razão do termo *aceita* ter significados diferentes quando nos referimos a máquinas que aceitam cadeias e a máquinas que aceitam linguagens, preferimos o termo *reconhece* para linguagens de forma a evitar confusão.

Uma máquina pode aceitar várias cadeias, mas ela sempre reconhece somente uma linguagem. Se a máquina não aceita nenhuma cadeia, ela ainda assim reconhecerá uma linguagem—a saber, a linguagem vazia $\emptyset$.

Em nosso exemplo, seja

$$A = \{w | \, w \text{ contém pelo menos um } \texttt{1} \text{ e um número par de } \texttt{0}\text{s seguem o último } \texttt{1}\}.$$

Então $L(M_1) = A$, ou, equivalentemente, M_1 reconhece A.

EXEMPLOS DE AUTÔMATOS FINITOS

EXEMPLO 1.7

Aqui está o diagrama de estados do autômato finito M_2.

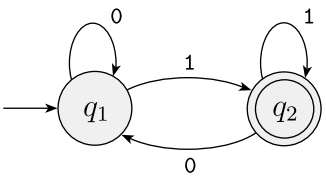


FIGURA 1.8
Diagrama de estados do autômato finito de dois-estados M_2

Na descrição formal $M_2 = \big(\{q_1, q_2\}, \{\texttt{0},\texttt{1}\}, \delta, q_1, \{q_2\}\big)$. A função de transição

δ é

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

Lembre-se que o diagrama de estados de M_2 e a descrição formal de M_2 contêm a mesma informação, somente de forma diferente. Você pode sempre ir de um para o outro se necessário.

Uma boa maneira de começar a entender qualquer máquina é tentá-la sobre algumas cadeias de entrada de amostra. Quando você faz esses "experimentos" para ver como a máquina está funcionando, seu método de funcionamento freqüentemente se torna aparente. Na cadeia de amostra `1101` a máquina M_2 começa no seu estado inicial q_1 e procede primeiro para o estado q_2 após ler o primeiro `1`, e então para os estados q_2, q_1 e q_2 após ler `1`, `0` e `1`. A cadeia é aceita porque q_2 é um estado de aceitação. Mas a cadeia `110` deixa M_2 no estado q_1, portanto ela é rejeitada. Depois de tentar uns poucos exemplos mais, você veria que M_2 aceita todas as cadeias que terminam em um `1`. Conseqüentemente $L(M_2) = \{w | \ w \text{ termina em um } \mathtt{1}\}$.

EXEMPLO 1.9

Considere o autômato finito M_3.

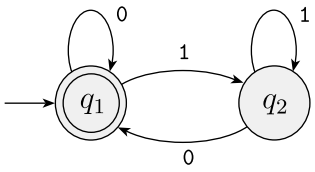


FIGURA 1.10
Diagrama de estados do autômato finito de dois-estados M_3

A máquina M_3 é semelhante a M_2 exceto pela localização do estado de aceitação. Como de costume, a máquina aceita todas as cadeias que a deixam num estado de aceitação quando ela tiver terminado de ler. Note que, em razão do estado inicial também ser um estado de aceitação, M_3 aceita a cadeia vazia ε. Assim que uma máquina começa a ler a cadeia vazia ela está no final, portanto se o estado inicial é um estado de aceitação, ε é aceita. Além da cadeia vazia, essa máquina aceita qualquer cadeia terminando com um `0`. Aqui,

$$L(M_3) = \{w | \ w \text{ é a cadeia vazia } \varepsilon \text{ ou termina em um } \mathtt{0}\}.$$

EXEMPLO 1.11

A figura seguinte mostra uma máquina de cinco-estados M_4

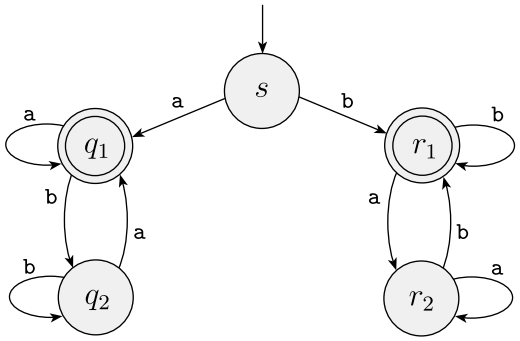


FIGURA 1.12
Autômato finito M_4

A máquina M_4 tem dois estados de aceitação, q_1 e r_1, e opera sobre o alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. Um pouco de experimentação nos mostra que ela aceita as cadeias `a`, `b`, `aa`, `bb`, e `bab`, mas não as cadeias `ab`, `ba`, ou `bbba`. Essa máquina começa no estado s, e depois que ela lê o primeiro símbolo na entrada, ela vai ou para a esquerda nos estados q ou para a direita nos estados r. Em ambos os casos ela nunca pode returnar ao estado inicial (diferentemente dos exemplos anteriores), pois ela não tem como sair de qualquer outro estado e voltar para s. Se o primeiro símbolo na cadeia de entrada é `a`, então ela vai para a esquerda e aceita quando a cadeia termina com um `a`. Similarmente, se o primeiro símbolo é um `b`, a máquina vai para a direita e aceita quando a cadeia termina em um `b`. Portanto M_4 aceita todas as cadeias que começam e terminam com `a` ou que começam e terminam com `b`. Em outras palavras, M_4 aceita cadeias que começam e terminam com o mesmo símbolo. ■

EXEMPLO 1.13

A Figura 1.14 mostra a máquina M_5, que tem um alfabeto de entrada de quatro-símbolos, $\Sigma = \{\langle \text{RESET} \rangle, 0, 1, 2\}$. Tratamos $\langle \text{RESET} \rangle$ como um único símbolo.

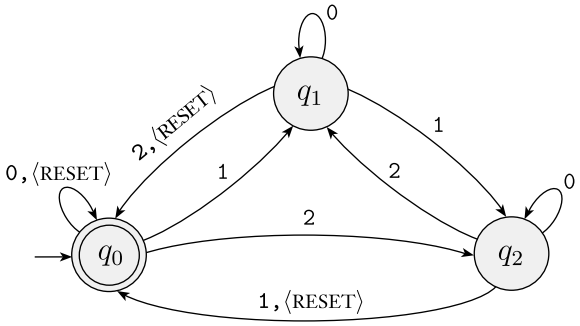


FIGURA 1.14
Autômato finito M_5

A máquina M_5 mantém um contador da soma dos símbolos numéricos de entrada que ela lê, módulo 3. Toda vez que ela recebe o símbolo ⟨RESET⟩ ela reinicia o contador para 0. Ela aceita se a soma é 0, módulo 3, ou, em outras palavras, se a soma é um múltiplo de 3. ■

Descrever um autômato finito por diagrama de estados não é possível em alguns casos. Isso pode ocorrer quando o diagrama seria demasiado grande para desenharou se, como nesse exemplo, a descrição depende de algum parâmetro não-especificado. Nesses casos recorremos a uma descrição formal para especificar a máquina.

EXEMPLO 1.15

Considere uma generalização do Exemplo 1.13, usando o mesmo alfabeto de quatro-símbolos Σ. Para cada $i \geq 1$ seja A_i a linguagem de todas as cadeias onde a soma dos números é um múltiplo de i, exceto que a soma é reinicializada para 0 sempre que o símbolo ⟨RESET⟩ aparece. Para cada A_i damos um autômato finito B_i, reconhecendo A_i. Descrevemos a máquina B_i formalmente da seguinte forma: $B_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_0, \{q_0\})$, onde Q_i é o conjunto de i estados $\{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}\}$, e desenhamos a função de transição δ_i de modo que para cada j, se B_i está em q_j, a soma corrente é j, módulo i. Para cada q_j faça

$$\delta_i(q_j, \mathtt{0}) = q_j,$$
$$\delta_i(q_j, \mathtt{1}) = q_k, \text{ onde } k = j + 1 \text{ módulo } i,$$
$$\delta_i(q_j, \mathtt{2}) = q_k, \text{ onde } k = j + 2 \text{ módulo } i, \text{ e}$$
$$\delta_i(q_j, \langle \text{RESET} \rangle) = q_0.$$

■

DEFINIÇÃO FORMAL DE COMPUTAÇÃO

Até agora descrevemos autômatos finitos informalmente, usando diagramas de estados, e com uma definição formal, como uma 5-upla. A descrição informal é mais fácil de absorver inicialmente, mas a definição formal é útil para tornar a noção precisa, resolvendo quaisquer ambigüidades que possam ter ocorrido na descrição informal. A seguir fazemos o mesmo para uma computação de um autômato finito. Já temos uma idéia informal da maneira pela qual ele computa, e agora a formalizamos matematicamente.

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um autômato finito e suponha que $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ seja uma cadeia onde cada w_i é um membro do alfabeto Σ. Então M ***aceita*** w se uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_n$ em Q existe com três condições:

1. $r_0 = q_0$,
2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$, para $i = 0, \ldots, n-1$, e
3. $r_n \in F$.

A Condição 1 diz que a máquina começa no estado inicial. A Condição 2 diz que a máquina vai de estado para estado conforme a função de transição. A Condição 3 diz que a máquina aceita sua entrada se ela termina em um estado de aceitação. Dizemos que M ***reconhece a linguagem*** A se $A = \{w |\ M \text{ aceita } w\}$.

DEFINIÇÃO 1.16

Uma linguagem é chamada de uma ***linguagem regular*** se algum autômato finito a reconhece.

EXEMPLO 1.17

Tome a máquina M_5 do Exemplo 1.13. Seja w a cadeia

$$\texttt{10}\langle\text{RESET}\rangle\texttt{22}\langle\text{RESET}\rangle\texttt{012}$$

Então M_5 aceita w conforme a definição formal de computação porque a seqüência de estados na qual ela entra quando está computando sobre w é

$$q_0, q_1, q_1, q_0, q_2, q_1, q_0, q_0, q_1, q_0,$$

o que satisfaz as três condições. A linguagem de M_5 é

$$L(M_5) = \{w |\ \text{a soma dos símbolos em } w \text{ é 0 módulo 3, exceto que } \langle\text{RESET}\rangle \text{ retorna o contador para 0}\}.$$

Como M_5 reconhece essa linguagem, ela é uma linguagem regular. ■

PROJETANDO AUTÔMATOS FINITOS

Seja um autômato ou uma peça de arte, projetar é um processo criativo. Como tal ele não pode ser reduzido a uma receita ou fórmula simples. Entretanto, você pode achar uma abordagem específica útil ao projetar vários tipos de autômatos. Ou seja, ponha-se *a si próprio* no lugar da máquina que você está tentando projetar e então veja como você se conduziria para realizar a tarefa da máquina. Fazer de conta que você é a máquina é um truque psicológico que ajuda a sua mente inteira no processo de projetar.

Vamos projetar um autômato finito usando o método "leitor como autômato" que acabamos de descrever. Suponha que lhe é dada alguma linguagem e você deseja projetar um autômatoa finito que a reconheça. Fazendo de conta que você é o autômato, você recebe uma cadeia de entrada e tem que determinar se ela é um membro da linguagem que o autômato é suposto reconhecer. Você vai vendo os símbolos na cadeia um por um. Depois de cada símbolo você tem que decidir se a cadeia vista até então está na linguagem. A razão é que você, como a máquina, não sabe quando o final da cadeia está vindo, portanto você tem que estar sempre pronto com a resposta.

Primeiro, de modo a tomar essas decisões, você tem que adivinhar o que você precisa lembrar sobre a cadeia à medida que você a está lendo. Por que não simplesmente lembrar de tudo que você viu? Lembre-se que você está fazendo de conta que é um autômato finito e que esse tipo de máquina tem somente um número finito de estados, o que significa memória finita. Imagine que a entrada seja extremamente longa—digamos, daqui para a lua—de modo que você não poderia de forma alguma se lembrar da coisa inteira. Você tem uma memória finita—digamos, uma única folha de papel—que tem uma capacidade de armazenamento limitada. Felizmente, para muitas linguagens você não precisa se lembrar de toda a entrada. Você precisa se lembrar de somente uma certa informação crucial. Exatamente que informação é crucial depende da linguagem específica considerada.

Por exemplo, suponha que o alfabeto seja $\{0,1\}$ e que a linguagem consista de todas as cadeias com um número ímpar de 1s. Você deseja construir um autômato finito E_1 para reconhecer essa linguagem. Fazendo de conta ser o autômato, você começa obtendo uma cadeia de entrada de 0s e 1s símbolo a símbolo. Você precisa lembrar a cadeia inteira vista até então para determinar se o número de 1s é ímpar? É claro que não. Simplesmente lembrar se o número de 1s visto até então é par ou ímpar e manter essa informação à medida lê novos símbolos. Se você ler um 1, inverta a resposta, mas se você ler um 0, deixe a resposta como está.

Mas como isso ajuda a você projetar E_1? Uma vez que você tenha determinado a informação necessária para lembrar sobre a cadeia à medida que ela está sendo lida, você representa essa informação como uma lista finita de possibilidades. Nessa instância, as possibilidades seriam

1. par até agora, e
2. ímpar até agora.

Aí então você atribui um estado a cada uma das possibilidades. Esses são os estados de E_1, como mostrado aqui.

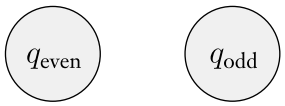


FIGURA 1.18
Os dois estados q_{par} e q_{impar}

A seguir, você atribui as transições vendo como ir de uma possibilidade para outra ao ler um símbolo. Portanto, se o estado q_{par} representa a possibilidade par e o estado q_{impar} representa a possibilidade ímpar, você faria as transições trocar de estado com um `1` e permanecer como está com um `0`, como mostrado aqui.

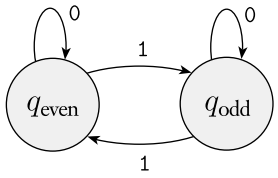


FIGURA 1.19
Transições dizendo como as possibilidades se rearranjam

A seguir, você coloca como estado inicial o estado correspondendo à possibilidade associada com ter visto 0 símbolos até então (a cadeia vazia ε). Nesse caso o estado inicial corresponde ao estado q_{par} porque 0 é um número par. Por último, ponha como estados de aceitação aqueles correspondendo a possibilidades nas quais você deseja aceitar a cadeia de entrada. Faça com que q_{impar} seja um estado de aceitação porque você deseja aceitar quando você tiver visto um número ímpar de `1`s. Essas adições são mostradas na figura abaixo.

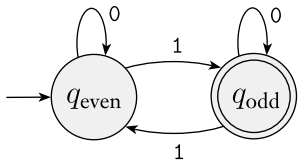


FIGURA 1.20
Adicionando os estados inicial e de aceitação

EXEMPLO 1.21

Este exemplo mostra como projetar um autômato finito E_2 para reconhecer a linguagem regular de todas as cadeias que contêm a cadeia `001` como uma subcadeia. Por exemplo, `0010`, `1001`, `001` e `11111110011111` estão todas na linguagem, mas `11` e `0000` não estão. Como você reconheceria essa linguagem se você estivesse fazendo de conta ser E_2? À medida que os símbolos chegam, você inicialmente saltaria sobre todos os `1`s. Se você chegar num `0`, então você nota que você pode ter acabado de ver o primeiro dos três símbolos no padrão `001` que você está buscando. Se nesse ponto você vê um `1`, houve muito poucos `0`s, portanto você volta a saltar sobre `1`s. Mas, se você vê um `0` nesse ponto, você deve lembrar que você acabou de ver dois símbolos do padrão. Agora você simplesmente precisa continuar fazendo uma varredura até que você veja um `1`. Se você o encontrar, lembre-se de que você conseguiu achar o padrão e continue lendo a cadeia de entrada até que você chegue no final.

Portanto, existem quatro possibilidades: Você

1. não tem visto quaisquer símbolos do padrão,
2. acaba de ver um `0`,
3. acaba de ver `00`, ou
4. acaba de ver o padrão inteiro `001`.

Atribua os estados q, $q_{\texttt{0}}$, $q_{\texttt{00}}$ e $q_{\texttt{001}}$ a essas possibilidades. Você pode atribuir as transições observando que de q lendo um `1` você permanece em q, mas lendo um `0` você move para $q_{\texttt{0}}$. Em $q_{\texttt{0}}$ lendo um `1` você retorna a q, mas lendo um `0` você move para $q_{\texttt{00}}$. Em $q_{\texttt{00}}$, lendo um `1` você move para $q_{\texttt{001}}$, mas lendo um `0` deixa você em $q_{\texttt{00}}$. Finalmente, em $q_{\texttt{001}}$ lendo um `0` ou um `1` deixa você em $q_{\texttt{001}}$. O estado inicial é q, e o único estado de aceitação é $q_{\texttt{001}}$, como mostrado na Figura 1.22.

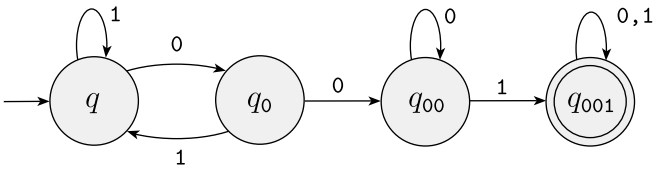


FIGURA 1.22
Aceita cadeias contendo 001

AS OPERAÇÕES REGULARES

Nas duas seções precedentes introduzimos e definimos autômatos finitos e linguagens regulares. Agora começamos a investigar suas propriedades. Isso vai ajudar a desenvolver uma caixa de ferramentas de técnicas para utilizar quando você projeta autômatos para reconhecer linguagens específicas. A caixa de ferramentas também incluirá formas de provar que certas outras linguagens são não-regulares (i.e., além da capacidade de autômatos finitos).

Em aritmética, os objetos básicos são números e as ferramentas são operações para manipulá-los, tais como $+$ e $\times$. Na teoria da computação os objetos são linguagens e as ferramentas incluem operações especificamente projetadas para manipulá-las. Definimos três operações sobre linguagens, chamadas ***operações regulares***, e as usamos para estudar propriedades de linguagens regulares.

DEFINIÇÃO 1.23

Sejam A e B linguagens. Definimos as operações regulares ***união***, ***concatenação***, e ***estrela*** da seguinte forma.

- **União**: $A \cup B = \{x | \, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- **Concatenação**: $A \circ B = \{xy | \, x \in A \text{ e } y \in B\}$.
- **Estrela**: $A^* = \{x_1 x_2 \ldots x_k | \, k \geq 0 \text{ e cada } x_i \in A\}$.

Você já está familiarizado com a operação de união. Ela simplesmente toma todas as cadeias em ambas A e B e as junta em uma linguagem.

A operação de concatenação é um pouco mais complicada. Ela acrescenta uma cadeia de A na frente de uma cadeia de B de todas as maneiras possíveis para obter as cadeias na nova linguagem.

A operação estrela é um pouco diferente das outras duas porque ela se aplica a uma única linguagem ao invés de duas linguagens diferentes. Ou seja, a operação estrela é uma ***operação unária*** ao invés de uma ***operação binária***. Ela funciona justapondo qualquer número de cadeias em A para obter uma cadeia na nova

linguagem. Em razão do fato de "qualquer número" incluir 0 como uma possibilidade, a cadeia vazia ε é sempre um membro de A^*, independentemente do que A seja.

EXEMPLO 1.24

Suponha que o alfabeto Σ seja o alfabeto padrão de 26 letras $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \ldots, \mathtt{z}\}$. Se $A = \{\mathtt{legal}, \mathtt{ruim}\}$ e $B = \{\mathtt{garoto}, \mathtt{garota}\}$, então

$A \cup B = \{\mathtt{legal}, \mathtt{ruim}, \mathtt{garoto}, \mathtt{garota}\}$,

$A \circ B = \{\mathtt{legalgaroto}, \mathtt{legalgarota}, \mathtt{ruimgaroto}, \mathtt{ruimgarota}\}$, e

$A^* = \{\varepsilon, \mathtt{legal}, \mathtt{ruim}, \mathtt{legallegal}, \mathtt{legalruim}, \mathtt{ruimlegal}, \mathtt{ruimruim}, \mathtt{legallegallegal}, \mathtt{legallegalruim}, \mathtt{legalruimlegal}, \mathtt{legalruimruim}, \ldots\}$.

Seja $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais. Quando dizemos que $\mathcal{N}$ é *fechado sob multiplicação* queremos dizer que, para quaisquer x e y em $\mathcal{N}$, o produto $x \times y$ também está em $\mathcal{N}$. Diferentemente, $\mathcal{N}$ não é fechado sob divisão, pois 1 e 2 estão em $\mathcal{N}$ mas $1/2$ não está. Em geral, uma coleção de objetos é ***fechada*** sob alguma operação se, aplicando-se essa operação a membros da coleção, recebe-se um objeto ainda na coleção. Mostramos que a coleção de linguagens regulares é fechada sob todas as três das operações regulares. Na Seção 1.3 mostramos que essas são ferramentas úteis para se manipular linguagens regulares e entender o poder de autômatos finitos. Começamos com a operação de união.

TEOREMA 1.25

A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.

Em outras palavras, se A_1 e A_2 são linguagens regulares, o mesmo acontece com $A_1 \cup A_2$.

IDÉIA DA PROVA Temos as linguagens regulares A_1 e A_2 e desejamos mostrar que $A_1 \cup A_2$ também é regular. Em razão do fato de que A_1 e A_2 são regulares, sabemos que algum autômato finito M_1 reconhece A_1 e algum autômato finito M_2 reconhece A_2. Para provar que $A_1 \cup A_2$ é regular exibimos um autômato finito, chame-o M, que reconhece $A_1 \cup A_2$.

Esta é uma prova por construção. Construimos M a partir de M_1 e M_2. A máquina M tem que aceitar sua entrada exatamente quando M_1 ou M_2 a aceitaria de modo a reconhecer a linguagem da união. Ela funciona *simulando* ambas M_1 e M_2 e aceitando se uma das simulações aceita.

Como podemos fazer com que a máquina M simule M_1 e M_2? Talvez ela

primeiro simule M_1 sobre a entrada e então simule M_2 sobre a entrada. Mas temos que ser cuidadosos aqui! Uma vez que os símbolos da entrada tenham sido lidos e usados para simular M_1, não podemos "re-enrolar a fita de entrada" para tentar a simulação em M_2. Precisamos de uma outra abordagem.

Faça de conta que você é M. À medida que os símbolos de entrada chegam um por um, você simula ambas M_1 e M_2 simultaneamente. Dessa maneira somente uma passagem sobre a entrada é necessária. Mas você pode controlar ambas as simulações com memória finita? Tudo do que você precisa guardar é o estado em que cada máquina estaria se ela tivesse lido até esse ponto na entrada. Conseqüentemente, você precisa guardar um par de estados. Quantos pares possíveis existem? Se M_1 tem k_1 estados e M_2 tem k_2 estados, o número de pares de estados, um de M_1 e o outro de M_2, é o produto $k_1 \times k_2$. Esse produto será o número de estados em M, um para cada par. As transições de M vão de um par para um par, atualizando o estado atual para ambas M_1 e M_2. Os estados de aceitação de M são aqueles pares nos quais ou M_1 ou M_2 está em um estado de aceitação.

PROVA

Suponha que M_1 reconheça A_1, onde $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, e que
M_2 reconheça A_2, onde $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$.

Construa M para reconhecer $A_1 \cup A_2$, onde $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

1. $Q = \{(r_1, r_2) | \, r_1 \in Q_1 \text{ and } r_2 \in Q_2\}$.
   Esse conjunto é o ***produto cartesiano*** dos conjuntos Q_1 e Q_2 e é escrito $Q_1 \times Q_2$. Trata-se do conjunto de todos os pares de estados, o primeiro de Q_1 e o segundo de Q_2.
2. Σ, o alfabeto, é o mesmo em M_1 e M_2. Neste teorema e em todos os teoremas similares subseqüentes, assumimos por simplicidade que ambas M_1 e M_2 têm o mesmo alfabeto de entrada Σ. O teorema permanece verdadeiro se elas tiverem alfabetos diferentes, Σ_1 e Σ_2. Aí então modificaríamos a prova para tornar $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.
3. δ, a função de transição, é definida da seguinte maneira. Para cada $(r_1, r_2) \in Q$ e cada $a \in \Sigma$, faça

   $$\delta\big((r_1, r_2), a\big) = \big(\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a)\big).$$

   Logo, δ obtém um estado de M (que na realidade é um par de estados de M_1 e M_2), juntamente com um símbolo de entrada, e retorna o próximo estado de M.
4. q_0 é o par (q_1, q_2).
5. F é o conjunto de pares nos quais um dos membros é um estado de aceitação de M_1 ou M_2. Podemos escrevê-lo como

   $$F = \{(r_1, r_2) | \, r_1 \in F_1 \text{ or } r_2 \in F_2\}.$$

   Essa expressão é a mesma que $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$. (Note que ela

não é a mesma que $F = F_1 \times F_2$. O que isso daria ao invés da união?[3])

Isso conclui a construção do autômato finito M que reconhece a união de A_1 e A_2. Essa construção é bastante simples, e, portanto, sua corretude é evidente da estratégia descrita na idéia da prova. Construções mais complicadas requerem discussão adicional para provar corretude. Uma prova formal de corretude para uma construção desse tipo usualmente procede por indução. Para um exemplo de uma construção provada correta, veja a prova do Teorema 1.54. A maioria das construções que você vai encontrar neste curso são bastante simples e, portanto, não requerem uma prova formal de corretude.

Acabamos de mostrar que a união de duas linguagens regulares é regular, daí provando que a classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união. Agora nos voltamos para a operação de concatenação e tentamos mostrar que a classe de linguagens regulares é fechada sob essa operação também.

TEOREMA 1.26

A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de concatenação.

Em outras palavras, se A_1 e A_2 são linguagens regulares então o mesmo acontece com $A_1 \circ A_2$.

Para provar esse teorema vamos tentar algo na linha da prova do caso da união. Tal qual anteriormente, podemos começar com os autômatos finitos M_1 e M_2 que reconhecem as linguagens regulares A_1 e A_2. Mas agora, em vez de construir o autômato M para aceitar sua entrada se M_1 ou M_2 aceitam, ele tem que aceitar se sua entrada puder ser quebrada em duas partes, onde M_1 aceita a primeira parte e M_2 aceita a segunda parte. O problema é que M não sabe onde quebrar sua entrada (i.e., onde a primeira parte termina e a segunda parte começa). Para resolver esse problema introduzimos uma nova técnica chamada não-determinismo.

[3] Essa expressão definiria os estados de aceitação de M como sendo aqueles para os quais *ambos* os membros do par são estados de aceitação. Nesse caso M aceitaria uma cadeia somente se ambas M_1 *e* M_2 a aceitam, portanto a linguagem resultante seria a *interseção* e não a união. Na verdade, esse resultado prova que a classe de linguagens regulares é fechada sob interseção.

1.2

NÃO-DETERMINISMO

Não-determinismo é um conceito útil que tem tido grande impacto sobre a teoria da computação. Até agora em nossa discussão, todo passo de uma computação segue de uma maneira única do passo precedente. Quando a máquina está em um dado estado e lê o próximo símbolo de entrada, sabemos qual será o próximo estado—está determinado. Chamamos isso de computação ***determinística***. Em uma máquina ***não-determinística***, várias escolhas podem existir para próximo estado em qualquer ponto.

Não-determinismo é uma generalização de determinismo, portanto todo autômato finito determinístico é automaticamente um autômato finito não-determinístico. Como a Figura 1.27 mostra, autômatos finitos não-determinísticos podem ter características adicionais.

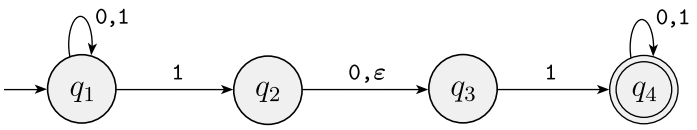


FIGURA 1.27
O autômato finito não-determinístico N_1

A diferença entre um autômato finito determinístico, abreviado AFD, e um autômato finito não-determinístico, abreviado AFN, é imediatamente aparente. Primeiro, todo estado de um AFD sempre tem exatamente uma seta de transição saindo para cada símbolo no alfabeto. O autômato não-determinístico mostrado na Figura 1.27 viola essa regra. O estado q_1 tem uma seta saindo para 0, mas tem duas para 1; q_2 tem uma seta para 0, mas nenhuma para 1. Em um AFN um estado pode ter zero, uma ou muitas setas saindo para cada símbolo do alfhabeto.

Segundo, em um AFD, rótulos sobre as setas de transição são símbolos do alfabeto. Esse AFN tem uma seta com o rótulo ε. Em geral, um AFN pode ter setas pode ter setas rotuladas com membros do alfabeto ou com ε. Zero, uma ou muitas setas podem sair de cada estado com o rótulo ε.

Como um AFN computa? Suponha que você esteja rodando um AFN sobre uma cadeia de entrada e venha para um estado com múltiplas maneiras de prosseguir. Por exemplo, digamos que estamos no estado q_1 no AFN N_1 e que o próximo símbolo de entrada seja um 1. Após ler esse símbolo, a máquina divide-se em múltiplas cópias de si mesma e segue *todas* as possibilidades em paralelo. Cada cópia da máquina toma uma das maneiras possíveis de proceder e continua como antes. Se existirem escolhas subseqüentes, a máquina divide-se novamente. Se o próximo símbolo de entrada não aparece sobre qualquer das setas saindo do

estado ocupado por uma cópia da máquina, aquela cópia da máquina morre, juntamente com o ramo da computação associado a ela. Finalmente, se *qualquer uma* dessas cópias da máquina está em um estado de aceitação no final da entrada, o AFN aceita a cadeia de entrada.

Se um estado com um símbolo um ε sobre uma seta saindo for encontrado, algo semelhante acontece. Sem ler qualquer entrada, a máquina divide-se em múltiplas cópias, uma seguindo cada uma das setas saindo rotuladas com ε e uma permancendo no estado corrente. Então a máquina prossegue não-deterministicamente como antes.

Não-determinismo pode sr visto como uma espécie de computação paralela na qual múltiplos e independentes "processos" ou "*threads*" podem estar rodando concorrentemente. Quando o AFN se divide para seguir as diversas escolhas, isso corresponde a um processo "bifurcar" em vários filhos, cada um procedendo separadamente. Se pelo menos um desses processos aceita, então a computação inteira aceita.

Uma outra maneira de pensar em uma computação não-determinística é como uma árvore de de possibilidades. A raiz da árvore corresponde ao início da computação. Todo ponto de ramificação na árvore corresponde a um ponto na computação no qual a máquina tem múltiplas escolhas. A máquina aceita se pelo menos um dos ramos da computação termina em um estado de aceitação, como mostrado na Figura 1.28.

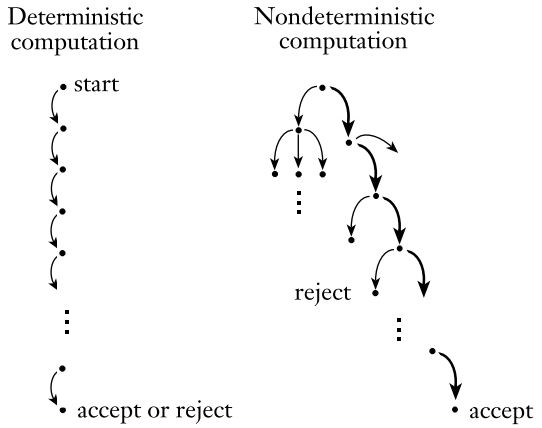


FIGURA 1.28
Computações determinísticas e não-determinísticas com um ramo de aceitação

Vamos considerar execuções de amostra do AFN N_1 mostrado na Figura 1.27. A computação de N_1 sobre a entrada 010110 é ilustrada na Figura 1.29.

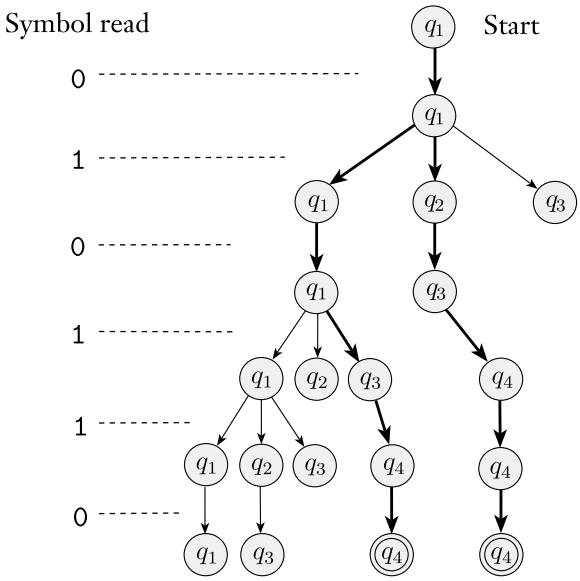


FIGURA 1.29
A computação de N_1 sobre a entrada `010110`

Sobre a entrada `010110` comece no estado inicial q_1 e leia o primeiro símbolo `0`. A partir de q_1 existe apenas um lugar para ir sobre um `0`—a saber, de volta a q_1, portanto permaneça aí. A seguir leia o segundo símbolo `1`. Em q_1 sobre um `1` existem duas escolhas: ou permaneça em q_1 ou mova para q_2. Não-deterministicamente, a máquina se divide em duas para seguir cada uma das escolhas. Mantenha registro das possibilidades colocando um dedo sobre cada estado onde a máquina poderia estar. Portanto você agora tem dedos sobre os estados q_1 e q_2. Uma seta ε sai do estado q_2 de modo que a máquina se divide novamente; mantenha um dedo sobre q_2, e mova o outro para q_3. Você agora tem dedos sobre q_1, q_2 e q_3.

Quando o terceiro símbolo `0` for lido, cuide de cada um dos dedos separadamente. Mantenha o dedo sobre q_1 no lugar, mova o dedo sobre q_2 para q_3 e remova o dedo que tinha estado sobre q_3. Esse último dedo não tinha seta `0` para seguir e corresponde a um processo que simplesmente "morre." Nesse ponto você tem dedos sobre os estados q_1 e q_3.

Quando o quarto símbolo `1` for lido, substitua o dedo sobre q_1 por dedos sobre os estados q_1 e q_2, e aí então substitua novamente o dedo sobre q_2 para seguir a seta ε para q_3, e mova o dedo que estava sobre q_3 para q_4. Você agora tem um dedo sobre cada um dos quatro estados.

Quando o quinto símbolo `1` for lido, os dedos sobre q_1 e q_3 resultam em dedos sobre os estados q_1, q_2, q_3 e q_4, como você viu com o quarto símbolo. O dedo sobre o estado q_2 é removido. O dedo que estava sobre q_4 permanece sobre q_4.

Agora você tem dois dedos sobre q_4, portanto remova um, porque você só precisa de lembrar que q_4 é um estado possível nesse ponto, não que ele é possível por múltiplas razões.

Quando o sexto e último símbolo 0 é lido, mantenha o dedo sobre q_1 no lugar, mova o que está sobre q_2 para q_3, remova o que estava sobre q_3, e deixe o que está sobre q_4 no seu lugar. Você está agora no final da cadeia, e você aceita se algum dedo estiver sobre um estado de aceitação. Você tem dedos sobre os estados q_1, q_3 e q_4, e como q_4 é um estado de aceitação, N_1 aceita essa cadeia.

O que é que N_1 faz sobre a entrada 010? Comece com um dedo sobre q_1. Depois de ler o 0 você ainda tem um dedo somente sobre q_1, mas depois do 1 existem dedos sobre q_1, q_2 e q_3 (não esqueça da seta ε). Depois do terceiro símbolo 0, remova o dedo sobre q_3, mova o dedo sobre q_2 para q_3, e deixe o dedo sobre q_1 onde ele está. Nesse ponto você está no final da entrada, e como nenhum dedo está sobre um estado de aceitação, N_1 rejeita essa entrada.

Continuando a experimentar dessa maneira, você verá que N_1 aceita todas as cadeias que contêm 101 ou 11 como uma subcadeia.

Autômatos finitos não-determinísticos são úteis em vários sentidos. Como mostraremos, todo AFN pode ser convertido num AFD equivalente, e construir AFNs é às vezes mais fácil que construir diretamente AFDs. Um AFN pode ser muito menor que sua contrapartida determinística, ou seu funcionamento pode ser mais fácil de entender. Não-determinismo em autômatos finitos é também uma boa introdução a não-determinismo em modelos computacionais mais poderosos porque autômatos finitos automata são especialmente fáceis de entender. Agora nos voltamos para diversos exemplos de AFNs.

EXEMPLO 1.30

Seja A a linguagem consistindo de todas as cadeias sobre {0,1} contendo um 1 na terceira posição a partir do final (e.g., 000100 está em A mas 0011 não). O seguinte AFN de quatro estados N_2 reconhece A.

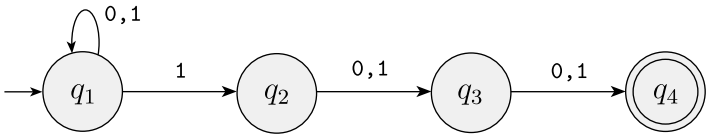


FIGURA 1.31
O AFN N_2 que reconhece A

Uma boa maneira de ver a computação desse AFN é dizer que ele permanece no estado inicial q_1 até que ele "adivinhe" que ele está a três posições do final. Nesse ponto, se o símbolo de entrada for um 1, ele ramifica para o estado q_2 e usa q_3 e q_4 para "checar" se sua adivinhação estava correta.

Conforme mencionado, todo AFN pode ser convertido num AFD equivalente, mas às vezes esse AFD pode ter muito mais estados. O menor AFD para A contém oito estados. Além disso, entender o funcionamento do AFN é muito mais fácil, como você pode ver examinando a Figura 1.32 para o AFD.

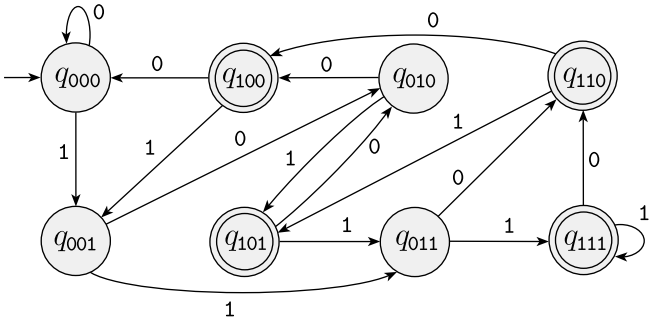


FIGURA 1.32
Um AFD que reconhece A

Suponha que adicionássemos ε aos rótulos sobre as setas indo de q_2 para q_3 e de q_3 para q_4 na máquina N_2 da Figura 1.31. Assim, ambas as setas então teriam o rótulo $0, 1, \varepsilon$ ao invés de somente $0, 1$. Que linguagem N_2 reconheceria com essa modificação? Tente modificar o AFD da Figura 1.32 para reconhecer essa linguagem. ■

EXEMPLO 1.33

Considere o seguinte AFN N_3 que tem um alfabeto de entrada $\{0\}$ consistindo de um único símbolo. Um alfabeto contendo somente um símbolo é chamado ***alfabeto unário***.

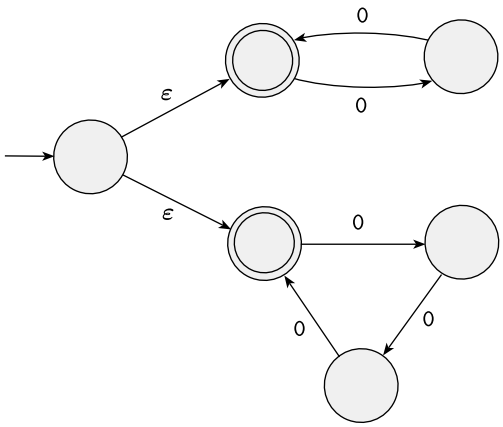


FIGURA 1.34
O AFN N_3

Essa máquina demonstra a conveniência de se ter setas ε. Ele aceita todas as cadeias da forma 0^k onde k é um múltiplo de 2 ou 3. (Lembre-se de que o expoente denota repetição, e não exponenciação numérica.) Por exemplo, N_3 aceita as cadeias ε, 00, 000, 0000 e 000000, mas não 0 ou 00000.

Pense na máquina operando inicialmente adivinhando se teste por um múltiplo de 2 ou um múltiplo de 3 ramificando ou no laço superior ou no laço inferior e aí então verificando se sua adivinhação foi correta. É claro que poderíamos substituir essa máquina por uma que não tem setas ε ou mesmo nenhum não-determinismo, mas a máquina mostrada é a mais fácil de entender para essa linguagem. ■

EXEMPLO 1.35

Damos um outro exemplo de um AFN na Figura 1.36. Pratique com ele para se convencer de que ele aceita as cadeias ε, a, baba e baa, mas que ele não aceita as cadeias b, bb e babba. Mais adiante usamos essa máquina para ilustrar o procedimento para converter AFNs para AFDs.

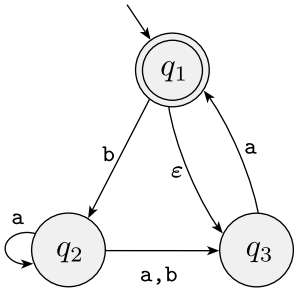


FIGURA 1.36
O AFN N_4

DEFINIÇÃO FORMAL DE UM AUTÔMATO FINITO NÃO-DETERMINÍSTICO

A definição formal de um autômato finito não-determinístico é similar àquela de um autômato finito determinístico. Ambos têm estados, um alfabeto de entrada, uma função de transição, um estado inicial e uma coleção de estados de aceitação. Entretanto, eles diferem de uma maneira essencial: no tipo de função de transição. Em um AFD a função de transição toma um estado e um símbolo de entrada e produz o próximo estado. Em um AFN a função de transição toma um estado e um símbolo de entrada *ou a cadeia vazia* e produz *o conjunto de próximos estados possíveis*. Para escrever a definição formal, precisamos fixar alguma notação adicional. Para qualquer conjunto Q escrevemos $\mathcal{P}(Q)$ como sendo a coleção de todos os subconjuntos de Q. Aqui $\mathcal{P}(Q)$ é chamado ***conjunto das partes*** de Q. Para qualquer alfabeto Σ escrevemos Σ_ε como sendo $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$. Agora podemos escrever a definição formal do tipo da função de transição em um AFN como $\delta\colon Q \times \Sigma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$.

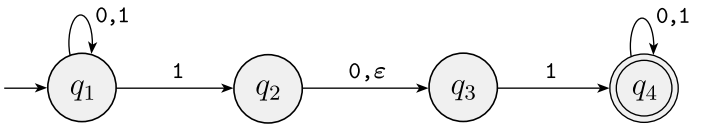
DEFINIÇÃO 1.37

Um ***autômato finito não-determinístico*** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde

1. Q é um conjunto finito de estados,
2. Σ é um alfabeto finito,
3. $\delta\colon Q \times \Sigma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ é a função de transição,
4. $q_0 \in Q$ é o estado inicial, e
5. $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados de aceitação.

EXEMPLO 1.38

Retomemos o AFN N_1:



A descrição formal de N_1 é $(Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, onde

1. $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$,
2. $\Sigma = \{0,1\}$,
3. δ é dado como

	0	1	ε
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$

4. q_1 é o estado inicial, e
5. $F = \{q_4\}$.

A definição formal de computação para um AFN é similar àquela para um AFD. Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um AFN e w uma cadeia sobre o alfabeto Σ. Então dizemos que N ***aceita*** w se podemos escrever w como $w = y_1 y_2 \cdots y_m$, onde cada y_i é um membro de Σ_ε e uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_m$ existe em Q com três condições:

1. $r_0 = q_0$,
2. $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1})$, para $i = 0, \ldots, m-1$, e
3. $r_m \in F$.

A condição 1 diz que a máquina começa no estado inicial. A condição 2 diz que o estado r_{i+1} é um dos próximos estados permissíveis quando N está no estado r_i e lendo y_{i+1}. Observe que $\delta(r_i, y_{i+1})$ é o *conjunto* de próximos estados permissíveis e portanto dizemos que r_{i+1} é um membro desse conjunto. Finalmente, a condição 3 diz que a máquina aceita sua entrada se o último estado é um estado de aceitação.

EQUIVALÊNCIA DE AFNS E AFDS

Autômatos finitos determinísticos e não-determinísticos reconhecem a mesma classe de linguagens. Tal equivalência é, ao mesmo tempo, surpreendente e útil. É surpreendente porque AFNs parecem ter mais poder que AFDs, portanto poderíamos esperar que AFNs reconhecessem mais linguagens. É útil porque descrever um AFN para uma dada linguagem às vezes é muito mais fácil que descrever um AFD para essa linguagem.

Digamos que duas máquinas são ***equivalentes*** se elas reconhecem a mesma linguagem.

TEOREMA 1.39

Todo autômato finito não-determinístico tem um autômato finito determinístico equivalente.

IDÉIA DA PROVA Se uma linguagem é reconhecida por um AFN, então temos que mostrar a existência de um AFD que também a reconhece. A idéia é converter o AFN num AFD equivalente que simule o AFN.

Lembre-se da estratégia "leitor como autômato" para projetar autômatos finitos. Como você simularia o AFN se você estivesse fazendo de conta ser um AFD? O que você precisaria memorizar à medida que a cadeia de entrada é processada? Nos exemplos de AFNs você memorizou os vários ramos da computação colocando um dedo sobre cada estado que poderia estar ativo em dados pontos na entrada. Você atualizava a simulação movendo, adicionando e removendo dedos conforme a maneira pela qual o AFN opera. Tudo o que você precisava memorizar era o conjunto de estados tendo dedos sobre eles.

Se k é o número de estados do AFN, ele tem 2^k subconjuntos de estados. Cada subconjunto corresponde a uma das possibilidades de que o AFD tem que se lembrar, portanto o AFD que simula o AFN terá 2^k estados. Agora precisamos descobrir qual será o estado inicial e os estados de aceitação do AFD, e qual será sua função de transição. Podemos discutir isso mais facilmente depois de fixar uma notação formal.

PROVA Seja $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ o AFN que reconhece alguma linguagem A. Construimos um AFD $M = (Q', \Sigma, \delta', {q_0}', F')$ que reconhece A. Antes de realizar a construção completa, vamos primeiro considerar o caso mais fácil no qual N não tem setas ε. Mais adiante levamos as setas ε em consideração.

1. $Q' = \mathcal{P}(Q)$.
   Todo estado de M é um conjunto de estados de N. Lembre-se de que $\mathcal{P}(Q)$ é o conjunto de subconjuntos de Q.
2. Para $R \in Q'$ e $a \in \Sigma$ let $\delta'(R, a) = \{q \in Q |\ q \in \delta(r, a)$ para algum $r \in R\}$.
   Se R é um estado de M, ele também é um conjunto de estados de N. Quando M lê um símbolo a no estado R, ele mostra para onde a leva cada estado em R. Dado que cada estado pode ir para um conjunto de estados, tomamos a união de todos esses conjuntos. Uma outra maneira de escrever essa expressão é
   $$\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a).$$ [4]

[4] A notação $\bigcup_{r \in R} \delta(r, a)$ significa: a união dos conjuntos $\delta(r, a)$ para cada possível r em R.

3. $q_0' = \{q_0\}$.
   M começa no estado correspondente à coleção contendo somente o estado inicial de N.
4. $F' = \{R \in Q' | \ R$ contém um estado de aceitação de $N\}$.
   A máquina M aceita se um dos possíveis estados no quais N poderia estar nesse ponto é um estado de aceitação.

Agora precisamos considerar as setas ε. Para fazer isso fixamos um pouco mais de notação. Para qualquer estado R de M definimos $E(R)$ como sendo a coleção de estados que podem ser atingidos a partir de R indo somente ao longo de setas ε, incluindo os próprios membros de R. Formalmente, para $R \subseteq Q$ seja

$E(R) = \{q | q$ pode ser atingido a partir de R viajando-se ao longo de 0 ou mais setas $\varepsilon\}$.

Então modificamos a função de transição de M para colocar dedos adicionais sobre todos os estados que podem ser atingidos indo ao longo de setas εapós cada passo. Substituindo $\delta(r, a)$ por $E(\delta(r, a))$ dá esse efeito. Conseqüentemente,

$$\delta'(R, a) = \{q \in Q | \ q \in E(\delta(r, a)) \text{ para algum } r \in R\}.$$

Adicionalmente precisamos de modificar o estado inicial de M para mover os dedos inicialmente para todos os estados possíveis que podem ser atingidos a partir do estado inicial de N ao longo das setas ε. Mudando q_0' para $E(\{q_0\})$ dá esse efeito. Agora completamos a construção do AFD M que simula o AFN N.

A construção de M obviamente funciona corretamente. Em todo passo na computação de M sobre uma entrada, ela claramente entra num estado que corresponde ao subconjunto de estados nos quais N poderia estar nesse ponto. Por conseguinte, nossa prova está completa.

Se a construção usada na prova precedente fosse mais complexa precisaríamos provar que ela funciona como reivindicado. Usualmente tais provas procedem por indução sobre o número de passos da computação. A maioria das construções que usamos neste livro são imediatas e portanto não requerem tal prova de corretude. Um exemplo de uma construção mais complexa que de fato provamos correta aparece na prova do Teorema 1.54.

O Teorema 1.39 afirma que todo AFN pode ser convertido num AFD equivalente. Portanto, autômatos finitos não-determinísticos dão uma maneira alternativa de caracterizar as linguagens regulares. Enunciamos esse fato como um corolário do Teorema 1.39.

COROLÁRIO 1.40

Uma linguagem é regular se e somente se algum autômato finito não-determinístico a reconhece.

Uma direção da condição "se e somente se" afirma que uma linguagem é regular se algum AFN a reconhece. O Teorema 1.39 mostra que qualquer AFN pode

ser convertido num AFD equivalente. Conseqüentemente, se um AFN reconhece uma dada linguagem, o mesmo acontece com algum AFD, e portanto a linguagem é regular. A outra direção da condição "se e somente se" afirma que uma linguagem é regular somente se algum AFN a reconhece. Ou seja, se uma linguagem é regular, algum AFN tem que reconhecê-la. Obviamente, essa condição é verdadeira porque uma linguagem regular tem um AFD reconhecendo-a e qualquer AFD é também um AFN.

EXEMPLO 1.41

Vamos ilustrar o procedimento que demos na prova do Teorema 1.39 para converter um AFN para um AFD usando a máquina N_4 que aparece no Exemplo 1.35. Em nome da clareza, renomeamos os estados de N_4 para $\{1, 2, 3\}$. Portanto, na descrição formal de $N_4 = (Q, \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}, \delta, 1, \{1\})$, o conjunto de estados Q é $\{1, 2, 3\}$ como mostrado na Figura 1.42.

Para construir um AFD D que seja equivalente a N_4, primeiro determinamos os estados de D. N_4 tem três estados, $\{1, 2, 3\}$, assim construimos D com oito estados, um para cada subconjunto de estados de N_4. Rotulamos cada um dos estados de D com o subconjunto correspondente. Portanto, o conjunto de estados de D é

$$\big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}.$$

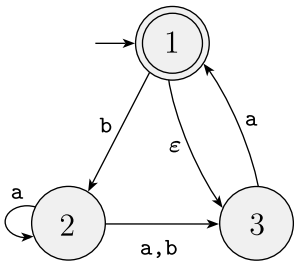


FIGURA 1.42
O AFN N_4

A seguir, determinamos os estados inicial e de aceitação de D. O estado inicial é $E(\{1\})$, o conjunto de estados que são atingíveis a partir de 1 viajando ao longo de setas ε, mais o próprio 1. Uma seta ε vai de 1 para 3, portanto $E(\{1\}) = \{1, 3\}$. Os novos estados de aceitação são aqueles contendo o estado de aceitação de N_4; assim, $\big\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\big\}$.

Finalmente, determinamos a função de transição de D. Cada um dos estados de D vai para um lugar dada a entrada `a` e um lugar quando a entrada é `b`. Ilustramos o processo de se determinar a colocação das setas de transição de D com

uns poucos exemplos.

Em D, o estado $\{2\}$ vai para $\{2,3\}$ na entrada a, porque em N_4, o estado 2 vai para ambos 2 e 3 na entrada a e não podemos ir mais longe a partir de 2 ou 3 ao longo de setas ε. O estado $\{2\}$ vai para o estado $\{3\}$ na entrada b, porque em N_4, o estado 2 vai apenas para o estado 3 na entrada b e não podemos ir mais longe a partir de 3 ao longo de setas ε.

O estado $\{1\}$ vai para $\emptyset$ na entrada a, porque nenhuma seta a sai dele. Ele vai para $\{2\}$ na entrada b. Note que o procedimento no Teorema 1.39 especifica que seguimos as setas ε*depois* que cada símbolo de entrada é lido. Um procedimento alternativo baseado em seguir as setas εantes de ler cada entrada funciona igualmente bem, mas esse método não é ilustrado neste exemplo.

O estado $\{3\}$ vai para $\{1,3\}$ na entrada a, porque em N_4, o estado 3 vai para 1 na entrada a e 1 por sua vez vai para 3 com uma seta ε. O estado $\{3\}$ na entrada b vai para $\emptyset$.

O estado $\{1,2\}$ na entrada a vai para $\{2,3\}$ porque 1 não aponta para nenhum estado com seta a e 2 aponta para ambos 2 e 3 com seta a e nenhum aponta para lugar algum com seta ε. O estado $\{1,2\}$ na entrada b vai para $\{2,3\}$. Continuando dessa maneira obtemos o seguinte diagrama para D.

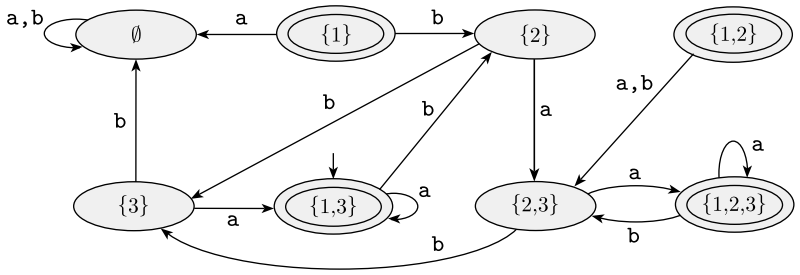


FIGURA 1.43
Um AFD D que é equivalente ao AFN N_4

Podemos simplificar essa máquina observando que nenhuma seta aponta para os estados $\{1\}$ e $\{1,2\}$, portanto eles podem ser removidos sem afetar o desempenho da máquina. Fazendo isso chegamos à Figura 1.44.

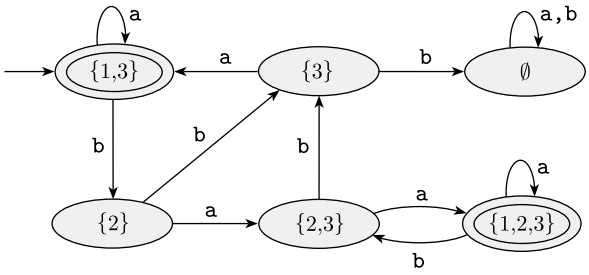


FIGURA 1.44
O AFD D após remover estados desnecessários

FECHO SOB AS OPERAÇÕES REGULARES

Agora retornamos ao fecho da classe de linguagens regulares sob as operações regulares que começamos na Seção 1.1. Nosso objetivo é provar que a união, a concatenação e a estrela de linguagens regulares são ainda regulares. Abandonamos a tentativa original para fazer isso quando vimos que lidar com a operação de concatenação era complicado demais. O uso de não-determinismo torna as provas muito mais fáceis.

Primeiro, vamos considerar novamente o fecho sob união. Antes, provamos o fecho sob união simulando deterministicamente ambas as máquinas simultaneamente via uma construção do produto cartesiano. Agora damos uma nova demonstração para ilustrar a técnica do não-determinismo. Revisar a primeira prova, que aparece na página 48, pode valer a pena para ver o quão mais fácil e mais intuitiva é a nova prova.

TEOREMA 1.45

A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de união.

IDÉIA DA PROVA Temos as linguagens regulares A_1 e A_2 e desejamos provar que $A_1 \cup A_2$ é regular. A idéia é tomar os dois AFNs, N_1 e N_2 para A_1 e A_2, e combiná-los em um novo AFN, N.

A máquina N tem que aceitar sua entrada se N_1 ou N_2 aceita essa entrada. A nova máquina tem um novo estado inicial que ramifica para os estados iniciais das máquinas anteriores com setas ε. Dessa maneira a nova máquina não-deterministicamente adivinha qual das duas máquinas aceita a entrada. Se uma delas aceita a entrada, N também a aceitará.

Representamos essa construção na Figura 1.46. À esquerda, indicamos o es-

tado inicial e os estados de aceitação das máquinas N_1 e N_2 com cículos grandes e alguns estados adicionais com círculos pequenos. À direita, mostramos como combinar N_1 e N_2 resultando em N adicionando setas de transição.

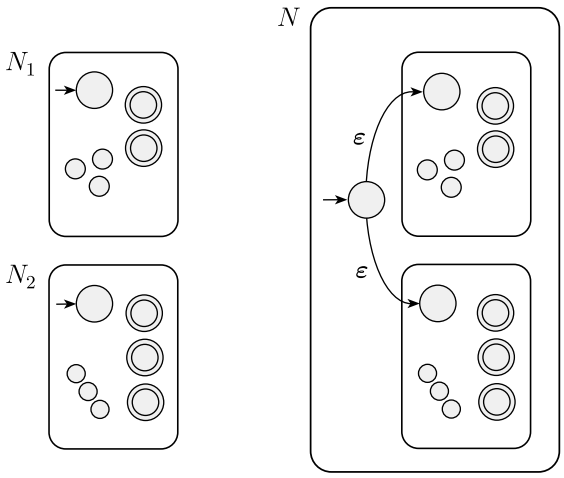


FIGURA 1.46
Construção de um AFN N para reconhecer $A_1 \cup A_2$

PROVA

Suponha que $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconheça A_1, e
$N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconheça A_2.

Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ para reconhecer $A_1 \cup A_2$.

1. $Q = \{q_0\} \cup Q_1 \cup Q_2$.
   Os estados de N são todos os estados de N_1 e N_2, com a adição de um novo estado inicial q_0.
2. O estado q_0 é o estado inicial de N.
3. Os estados de aceitação $F = F_1 \cup F_2$.
   Os estados de aceitação de N são todos os estados de aceitação de N_1 e N_2. Dessa forma N aceita se N_1 aceita ou N_2 aceita.
4. Defina δ de modo que para qualquer $q \in Q$ e qualquer $a \in \Sigma_\varepsilon$,

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon. \end{cases}$$

Agora podemos provar o fecho sob concatenação. Lembre-se que anteriormente, sem não-determinismo, completar a prova teria sido difícil.

TEOREMA 1.47

A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação de concatenação.

IDÉIA DA PROVA Temos as linguagens regulares A_1 e A_2 e desejamos provar que $A_1 \circ A_2$ é regular. A idéia é tomar dois AFNs, N_1 e N_2 para A_1 e A_2, e combiná-los em um novo AFN N como fizemos para o caso da união, mas dessa vez de uma maneira diferente, como mostrado na Figura 1.48.

Atribua ao estado inicial de N o estado inicial de N_1. Os estados de aceitação de N_1 têm setas ε adicionais que não-deterministicamente permitem ramificar para N_2 sempre que N_1 está num estado de aceitação, significando que ele encontrou uma parte inicial da entrada que constitui uma cadeia em A_1. Os estados de aceitação de N são somente os estados de aceitação de N_2. Por conseguinte, ele aceita quando a entrada pode ser dividida em duas partes, a primeira aceita por N_1 e a segunda por N_2. Podemos pensar em N como não-deterministicamente adivinhando onde fazer a divisão.

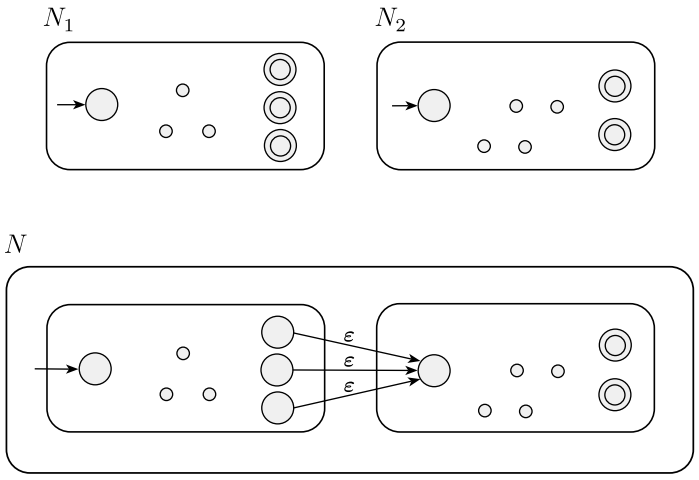


FIGURA 1.48
Construção de N para reconhecer $A_1 \circ A_2$

PROVA

Suponha que $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconheça A_1, e
$N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ reconheça A_2.

Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$ para reconhecer $A_1 \circ A_2$.

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$.
   Os estados de N são todos os estados de N_1 e N_2.
2. O estado q_1 é o mesmo que o estado inicial de N_1.
3. Os estados de aceitação F_2 são os mesmos que os estados de aceitação de N_2.
4. Defina δ de modo que para qualquer $q \in Q$ e qualquer $a \in \Sigma_\varepsilon$,

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & q \in Q_2. \end{cases}$$

TEOREMA 1.49

A classe de linguagens regulares é fechada sob a operação estrela.

IDÉIA DA PROVA Temos uma linguagem regular A_1 e desejamos provar que A_1^* também é regular. Tomamos um AFN N_1 para A_1 e modificamo-lo para reconhecer A_1^*, como mostrado na Figura 1.50. O AFN resultante N aceitará sua entrada sempre que ela puder ser quebrada em várias partes e N_1 aceite cada uma das partes.

Podemos construir N como N_1 com setas ε adicionais retornando ao estado inicial a partir dos estados de aceitação. Dessa maneira, quando o processamento chega ao final de uma parte que N_1 aceita, a máquina N tem a opção de pular de volta para o estado inicial para tentar ler uma outra parte que N_1 aceite. Adicionalmente, temos que modificar N de tal forma que ele aceite ε, que é sempre um membro de A_1^*. Uma idéia (levemente má) é simplesmente adicionar o estado inicial ao conjunto de estados de aceitação. Essa abordagem certamente adiciona ε à linguagem reconhecida, mas ela também pode adicionar outras cadeias indesejadas. O Exercício 1.15 pede um exemplo da falha dessa idéia. A maneira de consertar a construção é adicionar um novo estado inicial, que também seja um estado de aceitação, e que tenha uma seta ε para o antigo estado inicial. Essa solução tem o efeito desejado de adicionar ε à linguagem sem adicionar nada mais.

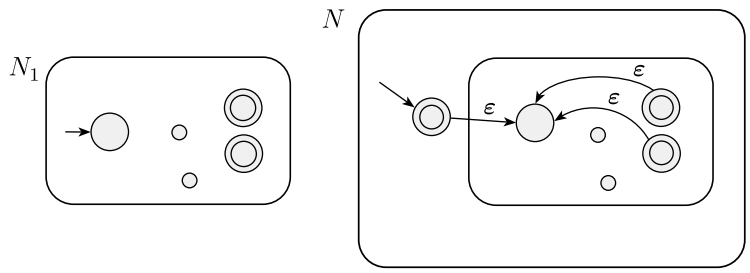


FIGURA 1.50
Construçã de N para reconhecer A^*

PROVA Suponha que $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ reconheça A_1.
Construa $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ para reconhecer A_1^*.

1. $Q = \{q_0\} \cup Q_1$.
   Os estados de N são os estados de N_1 mais um novo estado inicial.
2. O estado q_0 é o novo estado inicial.
3. $F = \{q_0\} \cup F_1$.
   Os estados de aceitação são os antigos estados de aceitação mais o novo estado inicial.
4. Defina δ de modo que para qualquer $q \in Q$ e qualquer $a \in \Sigma_\varepsilon$,

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \in Q_1 \text{ e } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & q \in F_1 \text{ e } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & q \in F_1 \text{ e } a = \varepsilon \\ \{q_1\} & q = q_0 \text{ e } a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \text{ e } a \neq \varepsilon. \end{cases}$$

1.3 EXPRESSÕES REGULARES

Na aritmética, podemos usar as operações $+$ e $\times$ para montar expressões tais como

$$(5 + 3) \times 4\,.$$

Similarmente, podemos usar as operações regulares para montar expressões descrevendo linguagens, que são chamadas ***expressões regulares***. Um exemplo é:

$$(\mathtt{0} \cup \mathtt{1})\mathtt{0}^*.$$

O valor da expressão aritmética é o número 32. O valor de uma expressão regular é uma linguagem. Nesse caso o valor é a linguagem consistindo de todas as cadeias começando com 0 ou 1 seguido por um número qualquer de 0s. Obtemos esse resultado dissecando a expressão em suas partes. Primeiro, os símbolos 0 e 1 são abreviações para os conjuntos $\{\mathtt{0}\}$ e $\{\mathtt{1}\}$. Dessa forma, $(\mathtt{0} \cup \mathtt{1})$ significa $(\{\mathtt{0}\} \cup \{\mathtt{1}\})$. O valor dessa parte é a linguagem $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$. A parte $\mathtt{0}^*$ significa $\{\mathtt{0}\}^*$, e seu valor é a linguagem consistindo de todas as cadeias contendo qualquer número de 0s. Segundo, como o símbolo $\times$ em álgebra, o símbolo da concatenação $\circ$ freqüentemente está ímplicito nas expressões regulares. Por conseguinte, $(\mathtt{0} \cup \mathtt{1})\mathtt{0}^*$ é, na realidade, uma abreviação de $(\mathtt{0} \cup \mathtt{1}) \circ \mathtt{0}^*$. A concatenação junta as cadeias das duas partes para obter o valor da expressão inteira.

As expressões regulares têm um papel importante em aplicações da ciência da computação. Em aplicações envolvendo texto, usuários podem querer fazer busca por cadeias que satisfazem certos padrões. Expressões regulares provêem um método poderoso para descrever tais padrões. Utilitários tais como AWK e GREP no UNIX, linguagens de programação modernas tais como PERL, e editores de texto, todos eles provêem mecanismos para a descrição de padrões usando expressões regulares.

EXEMPLO 1.51

Um outro exemplo de uma expressão regular é

$$(\mathtt{0} \cup \mathtt{1})^*$$

Ela começa com a linguagem $(\mathtt{0} \cup \mathtt{1})$ e aplica a operação $*$. O valor dessa expressão é a linguagem consistindo de todas as possíveis cadeias de 0s e 1s. Se $\Sigma = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$, podemos escrever Σ como abreviação para a expressão regular $(\mathtt{0} \cup \mathtt{1})$. Mais genericamente, se Σ for um alfabeto qualquer, a expressão regular Σ descreve a linguagem consistindo de todas as cadeias de comprimento 1 sobre esse alfabeto, e Σ^* descreve a linguagem consistindo de todas as cadeias sobre esse alfabeto. Similarmente $\Sigma^*\mathtt{1}$ é a linguagem que contém todas as cadeias que terminam em 1. A linguagem $(\mathtt{0}\Sigma^*) \cup (\Sigma^*\mathtt{1})$ consiste de todas as cadeias que começam com 0 ou terminam com 1. ■

Na aritmética, dizemos que $\times$ tem precedência sobre $+$ querendo dizer que, quando existe uma escolha, fazemos a operação $\times$ primeiro. Assim, em $2 + 3 \times 4$ a operação 3×4 é feita antes da adição. Para fazer com que a adição seja feita primeiro temos que acrescentar parênteses para obter $(2 + 3) \times 4$. Em expressões regulares, a operação estrela é feita primeiro, seguida por concatenação, e finalmente união, a menos que parênteses sejam usados para mudar a ordem usual.

DEFINIÇÃO FORMAL DE UMA EXPRESSÃO REGULAR

DEFINIÇÃO 1.52

Digamos que R é uma ***expressão regular*** se R for

1. a para algum a no alfabeto Σ,
2. ε,
3. $\emptyset$,
4. $(R_1 \cup R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares,
5. $(R_1 \circ R_2)$, onde R_1 e R_2 são expressões regulares, ou
6. (R_1^*), onde R_1 é uma expressão regular.

Nos itens 1 e 2, as expressões regulares a e ε representam as linguagens $\{a\}$ e $\{\varepsilon\}$, respectivamente. No item 3, a expressão regular $\emptyset$ representa a linguagem vazia. Nos itens 4, 5 e 6, as expressões representam as linguagens obtidas tomando-se a união ou concatenação das linguagens R_1 e R_2, ou a estrela da linguagem R_1, respectivamente.

Não confunda as expressões regulares ε e $\emptyset$. A expressão ε representa a linguagem contendo uma única cadeia—a saber, a cadeia vazia—enquanto que $\emptyset$ representa a linguagem não contém nenhuma cadeia.

Aparentemente, estamos correndo o risco de definir a noção de expressão regular em termos de si própria. Se verdadeiro, teríamos uma ***definição circular***, o que seria inválido. Entretanto, R_1 e R_2 sempre são menores que R. Por conseguinte, estamos, na verdade, definindo expressões regulares em termos de expressões regulares menores e dessa forma evitando circularidade. Uma definição desse tipo é chamada ***definição indutiva***.

Os parênteses em uma expressão podem ser omitidos. Se isso acontecer, o cálculo é feito na ordem de precedência: estrela, e aí então concatenação, e depois união.

Por conveniência, tomamos R^+ como abreviação para RR^*. Em outras palavras, enquanto que R^* tem todas as cadeias que são 0 ou mais concatenações de cadeias de R, a linguagem R^+ tem todas as cadeias que resultam de 1 ou mais concatenações de cadeias de R. Portanto, $R^+ \cup \varepsilon = R^*$. Adicionalmente, tomamos R^k como abreviação para a concatenação de k R's umas com as outras.

Quando queremos distinguir entre uma expressão regular R e a linguagem que ela descreve, escrevemos $L(R)$ como sendo a linguagem de R.

EXEMPLO 1.53

Nas instâncias abaixo assumimos que o alfabeto Σ é $\{0,1\}$.

1. $0^*10^* = \{w | \ w \text{ contém um único } 1\}$.
2. $\Sigma^*1\Sigma^* = \{w | \ w \text{ tem pelo menos um símbolo } 1\}$.
3. $\Sigma^*001\Sigma^* = \{w | \ w \text{ contém a cadeia } 001 \text{ como uma subcadeia}\}$.
4. $1^*(01^+)^* = \{w | \ \text{todo } 0 \text{ em } w \text{ é seguido por pelo menos um } 1\}$.
5. $(\Sigma\Sigma)^* = \{w | \ w \text{ é uma cadeia de comprimento par}\}$.[5]
6. $(\Sigma\Sigma\Sigma)^* = \{w | \ \text{o comprimento de } w \text{ é um múltiplo de três}\}$.
7. $01 \cup 10 = \{01, 10\}$.
8. $0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 = \{w | \ w \text{ começa e termina com o mesmo símbolo}\}$.
9. $(0 \cup \varepsilon)1^* = 01^* \cup 1^*$.
   A expressão $0 \cup \varepsilon$ descreve a linguagem $\{0, \varepsilon\}$, portanto a operação de concatenação adiciona 0 ou ε antes de toda cadeia em 1^*.
10. $(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon) = \{\varepsilon, 0, 1, 01\}$.
11. $1^*\emptyset = \emptyset$.
    Concatenar o conjunto vazio a qualquer conjunto produz o conjunto vazio.
12. $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$.
    A operação estrela junta qualquer número de cadeias da linguagem para obter uma cadeia no resultado. Se a linguagem for vazia, a operação estrela pode juntar 0 cadeias, dando apenas a cadeia vazia.

Se tomarmos R como uma expressão regular qualquer, temos as identidades abaixo. Elas são um bom teste para ver ser você entendeu a definição.

$R \cup \emptyset = R$.
Adicionar a linguagem vazia a qualquer outra linguagem não a modificará.

$R \circ \varepsilon = R$.
Juntar a cadeia vazia a qualquer outra cadeia não a modificará.

Entretanto, intercambiando $\emptyset$ e ε nas identidades precedentes pode fazer com que as igualdades falhem.

$R \cup \varepsilon$ pode não ser igual a R.
Por exemplo, se $R = 0$, então $L(R) = \{0\}$ mas $L(R \cup \varepsilon) = \{0, \varepsilon\}$.

$R \circ \emptyset$ pode não ser igual a R.
Por exemplo, se $R = 0$, então $L(R) = \{0\}$ mas $L(R \circ \emptyset) = \emptyset$.

Expressões regulares são ferramentas úteis no desenho de compiladores para linguagens de programação. Objetos elementares em uma linguagem de programação, chamados ***tokens***, tais como os nomes de variáveis e constantes,

[5] O ***comprimento*** de uma cadeia é o número de símbolos que ela contém.

podem ser descritos com expressões regulares. Por exemplo, uma constante numérica que pode incluir uma parte fracionária e/ou um sinal pode ser descrita como um membro da linguagem

$$\left(+ \cup - \cup \varepsilon\right)\left(D^+ \cup D^+ . D^* \cup D^* . D^+\right)$$

onde $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é o alfabeto de dígitos decimais. Exemplos de cadeias geradas são: 72, 3.14159, +7. e -.01 .

Uma vez que a sintaxe dos *tokens* da linguagem de programação tenha sido descrita com expressões regulares, sistemas automáticos podem gerar o ***analisador léxico***, a parte de um compilador que inicialmente processa o programa de entrada.

EQUIVALÊNCIA COM AUTÔMATOS FINITOS

Expressões regulares e autômatos finitos são equivalentes em seu poder descritivo. Esse fato é surpreendente porque autômatos finitos e expressões regulares aparentam superficialmente ser bastante diferentes. Entretanto, qualquer expressão regular pode ser convertida num autômato finito que reconhece a linguagem que ela descreve, e vice versa. Lembre-se de que uma linguagem regular é uma que é reconhecida por algum autômato finito.

TEOREMA 1.54

Uma linguagem é regular se e somente se alguma expressão regular a descreve.

Esse teorema tem duas direções. Enunciamos e provamos cada uma das direções como um lema separado.

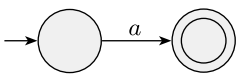
LEMA 1.55

Se uma linguagem é descrita por uma expressão regular, então ela é regular.

IDÉIA DA PROVA Vamos supor que tenhamos uma expressão regular R descrevendo alguma linguagem A. Mostramos como converter R num AFN que reconhece A. Pelo Corolário 1.40, se um AFN reconhece A então A é regular.

PROVA Vamos converter R num AFN N. Consideramos os seis casos na descrição formal de expressões regulares.

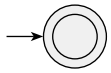
1. $R = a$ para algum a em Σ. Então $L(R) = \{a\}$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.



Note que essa máquina se encaixa na definição de um AFN mas não na de um AFD porque ela tem alguns estados sem nenhuma seta saindo para cada símbolo de entrada possível. É claro que poderíamos ter apresentado um AFD equivalente aqui mas um AFN é tudo de que precisamos no momento, e ele é mais fácil de descrever.

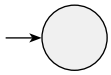
Formalmente, $N = \big(\{q_1, q_2\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_2\}\big)$, onde descrevemos δ dizendo que $\delta(q_1, a) = \{q_2\}$ e que $\delta(r, b) = \emptyset$ para $r \neq q_1$ ou $b \neq a$.

2. $R = \varepsilon$. Então $L(R) = \{\varepsilon\}$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.



Formalmente, $N = \big(\{q_1\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_1\}\big)$, onde $\delta(r, b) = \emptyset$ para quaisquer r e b.

3. $R = \emptyset$. Então $L(R) = \emptyset$, e o seguinte AFN reconhece $L(R)$.



Formalmente, $N = \big(\{q\}, \Sigma, \delta, q, \emptyset\big)$, onde $\delta(r, b) = \emptyset$ para quaisquer r e b.

4. $R = R_1 \cup R_2$.

5. $R = R_1 \circ R_2$.

6. $R = R_1^*$.

Para os três últimos casos usamos as construções dadas nas provas de que a classe de linguagens regulares é fechada sob as operações regulares. Em outras palavras, construimos o AFN para R a partir dos AFNs para R_1 e R_2 (ou somente R_1 no caso 6) e a construção de fecho apropriada.

Isso conclui a primeira parte da prova do Teorema 1.54, dando a direção mais fácil da condição de se e somente se. Antes de seguir adiante para a outra direção, vamos considerar alguns exemplos nos quais usamos esse procedimento para converter uma expressão regular para um AFN.

EXEMPLO 1.56

Convertemos a expressão regular $(\mathtt{ab} \cup \mathtt{a})^*$ para um AFN numa seqüência de estágios. Construimos a partir das subexpressões menores até as subexpressões maiores até que tenhamos um AFN para a expressão original, como mostrado no

diagrama da Figura 1.57. Note que esse procedimento geralmente não dá o AFN com o menor número de estados. Neste exemplo, o procedimento dá um AFN com oito estados, mas o menor AFN equivalente tem somente dois estados. Você pode encontrá-lo?

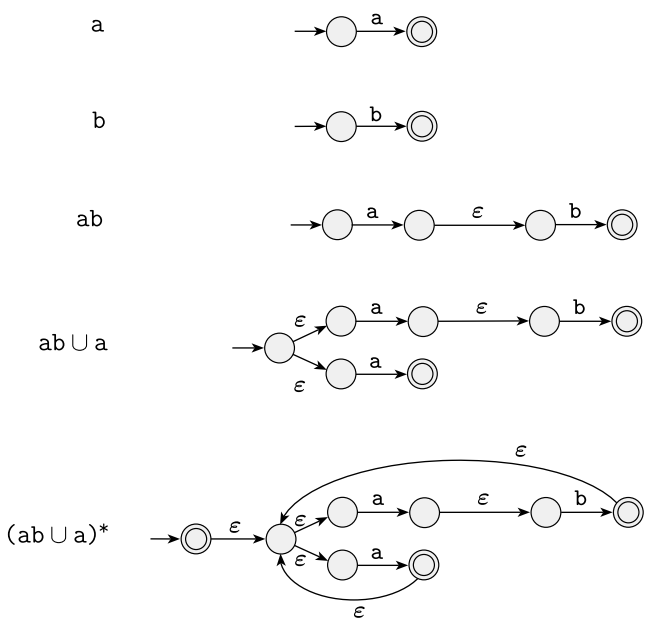


FIGURA 1.57
Construindo um AFN a partir da expressã regular $(\mathtt{ab} \cup \mathtt{a})^*$

EXEMPLO 1.58

Na Figura 1.59, we convert the regular expression $(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*\mathtt{aba}$ to an AFN. A few of the minor steps are not shown.

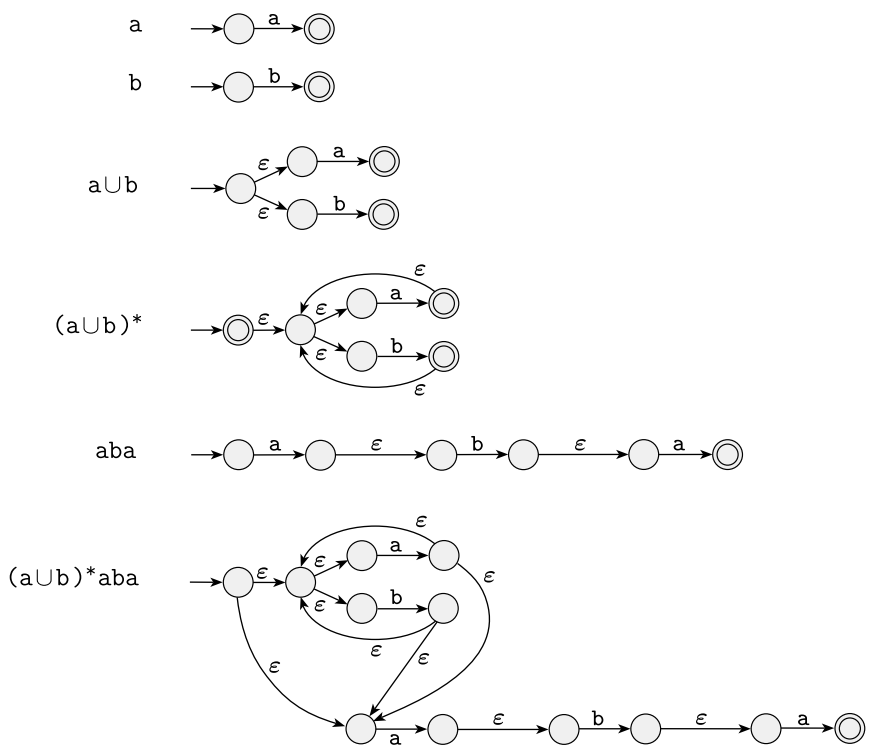


FIGURA 1.59
Building an AFN from the regular expression $(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*\mathtt{aba}$

Now let's turn to the other direction of the proof of Theorem 1.54.

LEMA 1.60

If a language is regular, then it is described by a regular expression.

IDÉIA DA PROVA We need to show that, if a language A is regular, a regular expression describes it. Because A is regular, it is accepted by a AFD. We describe a procedure for converting AFDs into equivalent regular expressions.

We break this procedure into two parts, using a new type of finite automaton called a ***generalized nondeterministic finite automaton***, AFNG. First we show how to convert AFDs into AFNGs, and then AFNGs into regular expressions.

Generalized nondeterministic finite automata are simply nondeterministic finite automata wherein the transition arrows may have any regular expressions as

labels, instead of only members of the alphabet or ε. The AFNG reads blocks of symbols from the input, not necessarily just one symbol at a time as in an ordinary AFN. The AFNG moves along a transition arrow connecting two states by reading a block of symbols from the input, which themselves constitute a string described by the regular expression on that arrow. A AFNG is nondeterministic and so may have several different ways to process the same input string. It accepts its input if its processing can cause the AFNG to be in an accept state at the end of the input. The following figure presents an example of a AFNG.

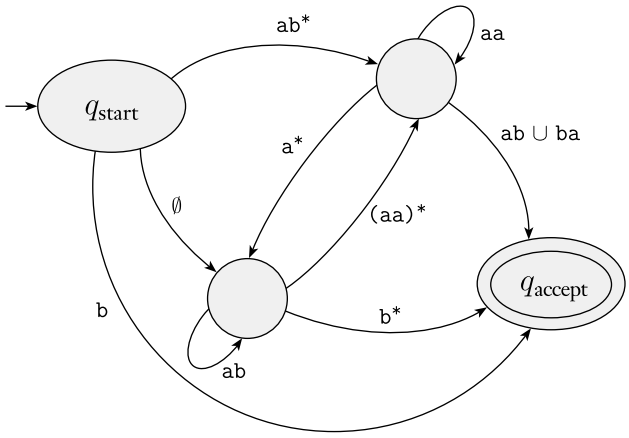


FIGURA 1.61
A generalized nondeterministic finite automaton

For convenience we require that AFNGs always have a special form that meets the following conditions.

- The start state has transition arrows going to every other state but no arrows coming in from any other state.
- There is only a single accept state, and it has arrows coming in from every other state but no arrows going to any other state. Furthermore, the accept state is not the same as the start state.
- Except for the start and accept states, one arrow goes from every state to every other state and also from each state to itself.

We can easily convert a AFD into a AFNG in the special form. We simply add a new start state with an ε arrow to the old start state and a new accept state with ε arrows from the old accept states. If any arrows have multiple labels (or if there are multiple arrows going between the same two states in the same direction), we replace each with a single arrow whose label is the union of the previous labels.

Finally, we add arrows labeled $\emptyset$ between states that had no arrows. This last step won't change the language recognized because a transition labeled with $\emptyset$ can never be used. From here on we assume that all AFNGs are in the special form.

Now we show how to convert a AFNG into a regular expression. Say that the AFNG has k states. Then, because a AFNG must have a start and an accept state and they must be different from each other, we know that $k \geq 2$. If $k > 2$, we construct an equivalent AFNG with $k - 1$ states. This step can be repeated on the new AFNG until it is reduced to two states. If $k = 2$, the AFNG has a single arrow that goes from the start state to the accept state. The label of this arrow is the equivalent regular expression. For example, the stages in converting a AFD with three states to an equivalent regular expression are shown in the following figure.

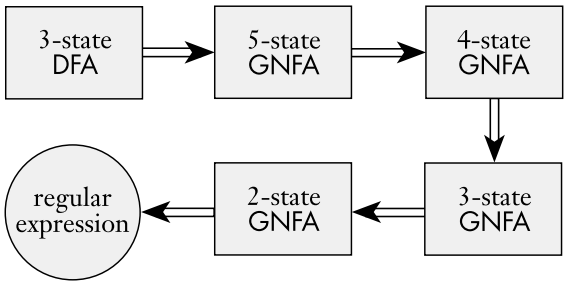


FIGURA 1.62
Typical stages in converting a AFD to a regular expression

The crucial step is in constructing an equivalent AFNG with one fewer state when $k > 2$. We do so by selecting a state, ripping it out of the machine, and repairing the remainder so that the same language is still recognized. Any state will do, provided that it is not the start or accept state. We are guaranteed that such a state will exist because $k > 2$. Let's call the removed state q_{rip}.

After removing q_{rip} we repair the machine by altering the regular expressions that label each of the remaining arrows. The new labels compensate for the absence of q_{rip} by adding back the lost computations. The new label going from a state q_i to a state q_j is a regular expression that describes all strings that would take the machine from q_i to q_j either directly or via q_{rip}. We illustrate this approach in Figure 1.63.

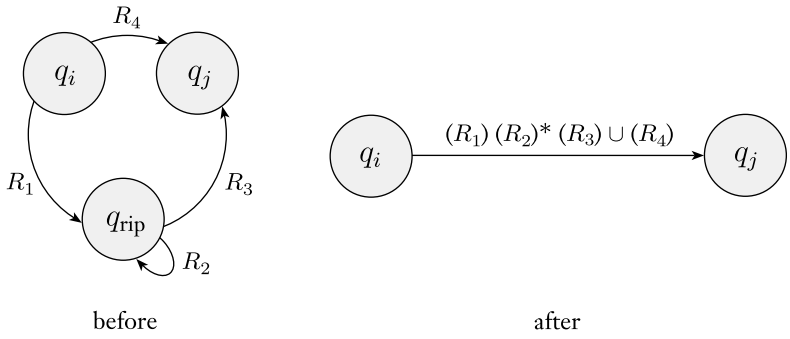


FIGURA 1.63
Constructing an equivalent AFNG with one fewer state

In the old machine if q_i goes to q_{rip} with an arrow labeled R_1, q_{rip} goes to itself with an arrow labeled R_2, q_{rip} goes to q_j with an arrow labeled R_3, and q_i goes to q_j with an arrow labeled R_4, then in the new machine the arrow from q_i to q_j gets the label

$$(R_1)(R_2)^*(R_3) \cup (R_4).$$

We make this change for each arrow going from any state q_i to any state q_j, including the case where $q_i = q_j$. The new machine recognizes the original language.

PROVA Let's now carry out this idea formally. First, to facilitate the proof, we formally define the new type of automaton introduced. A AFNG is similar to a nondeterministic finite automaton except for the transition function, which has the form

$$\delta\colon \big(Q - \{q_{\text{aceita}}\}\big) \times \big(Q - \{q_{\text{inicio}}\}\big) \longrightarrow \mathcal{R}.$$

The symbol $\mathcal{R}$ is the collection of all regular expressions over the alphabet Σ, and q_{inicio} and q_{aceita} are the start and accept states. If $\delta(q_i, q_j) = R$, the arrow from state q_i to state q_j has the regular expression R as its label. The domain of the transition function is $\big(Q - \{q_{\text{aceita}}\}\big) \times \big(Q - \{q_{\text{inicio}}\}\big)$ because an arrow connects every state to every other state, except that no arrows are coming from q_{aceita} or going to q_{inicio}.

DEFINIÇÃO 1.64

A ***generalized nondeterministic finite automaton*** is a 5-tuple, $(Q, \Sigma, \delta, q_{\text{inicio}}, q_{\text{aceita}})$, where

1. Q is the finite set of states,
2. Σ is the input alphabet,
3. $\delta\colon \big(Q - \{q_{\text{aceita}}\}\big) \times \big(Q - \{q_{\text{inicio}}\}\big) \longrightarrow \mathcal{R}$ is the transition function,
4. q_{inicio} is the start state, and
5. q_{aceita} is the accept state.

A AFNG accepts a string w in Σ^* if $w = w_1 w_2 \cdots w_k$, where each w_i is in Σ^* and a sequence of states $q_0, q_1, \ldots, q_k$ exists such that

1. $q_0 = q_{\text{inicio}}$ is the start state,
2. $q_k = q_{\text{aceita}}$ is the accept state, and
3. for each i, we have $w_i \in L(R_i)$, where $R_i = \delta(q_{i-1}, q_i)$; in other words, R_i is the expression on the arrow from q_{i-1} to q_i.

Returning to the proof of Lemma 1.60, we let M be the AFD for language A. Then we convert M to a AFNG G by adding a new start state and a new accept state and additional transition arrows as necessary. We use the procedure CONVERT(G), which takes a AFNG and returns an equivalent regular expression. This procedure uses ***recursion***, which means that it calls itself. An infinite loop is avoided because the procedure calls itself only to process a AFNG that has one fewer state. The case where the AFNG has two states is handled without recursion.

CONVERT(G):

1. Let k be the number of states of G.
2. If $k = 2$, then G must consist of a start state, an accept state, and a single arrow connecting them and labeled with a regular expression R.
   Return the expression R.
3. If $k > 2$, we select any state $q_{\text{rip}} \in Q$ different from q_{inicio} and q_{aceita} and let G' be the AFNG $(Q', \Sigma, \delta', q_{\text{inicio}}, q_{\text{aceita}})$, where
   $$Q' = Q - \{q_{\text{rip}}\},$$
   and for any $q_i \in Q' - \{q_{\text{aceita}}\}$ and any $q_j \in Q' - \{q_{\text{inicio}}\}$ let
   $$\delta'(q_i, q_j) = (R_1)(R_2)^*(R_3) \cup (R_4),$$
   for $R_1 = \delta(q_i, q_{\text{rip}})$, $R_2 = \delta(q_{\text{rip}}, q_{\text{rip}})$, $R_3 = \delta(q_{\text{rip}}, q_j)$, and $R_4 = \delta(q_i, q_j)$.
4. Compute CONVERT(G') and return this value.

Next we prove that CONVERT returns a correct value.

AFIRMAÇÃO 1.65

For any AFNG G, CONVERT(G) is equivalent to G.

We prove this claim by induction on k, the number of states of the AFNG.

Base: Prove the claim true for $k = 2$ states. If G has only two states, it can have only a single arrow, which goes from the start state to the accept state. The regular expression label on this arrow describes all the strings that allow G to get to the accept state. Hence this expression is equivalent to G.

Passo da Indução: Assume that the claim is true for $k - 1$ states and use this assumption to prove that the claim is true for k states. First we show that G and G' recognize the same language. Suppose that G accepts an input w. Then in an accepting branch of the computation G enters a sequence of states:

$$q_{\text{inicio}}, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{\text{aceita}}.$$

If none of them is the removed state q_{rip}, clearly G' also accepts w. The reason is that each of the new regular expressions labeling the arrows of G' contains the old regular expression as part of a union.

If q_{rip} does appear, removing each run of consecutive q_{rip} states forms an accepting computation for G'. The states q_i and q_j bracketing a run have a new regular expression on the arrow between them that describes all strings taking q_i to q_j via q_{rip} on G. So G' accepts w.

Conversely, suppose that G' accepts an input w. As each arrow between any two states q_i and q_j in G' describes the collection of strings taking q_i to q_j in G, either directly or via q_{rip}, G must also accept w. Thus G and G' are equivalent.

The induction hypothesis states that when the algorithm calls itself recursively on input G', the result is a regular expression that is equivalent to G' because G' has $k - 1$ states. Hence this regular expression also is equivalent to G, and the algorithm is proved correct.

This concludes the proof of Claim 1.65, Lemma 1.60, and Theorem 1.54.

EXEMPLO 1.66

In this example we use the preceding algorithm to convert a AFD into a regular expression. We begin with the two-state AFD in Figure 1.67(a).

In Figure 1.67(b) we make a four-state AFNG by adding a new start state and a new accept state, called s and a instead of q_{inicio} and q_{aceita} so that we can draw them conveniently. To avoid cluttering up the figure, we do not draw the arrows

labeled $\emptyset$, even though they are present. Note that we replace the label $\mathtt{a}, \mathtt{b}$ on the self-loop at state 2 on the AFD with the label $\mathtt{a} \cup \mathtt{b}$ at the corresponding point on the AFNG. We do so because the AFD's label represents two transitions, one for a and the other for b, whereas the AFNG may have only a single transition going from 2 to itself.

In Figure 1.67(c) we remove state 2, and update the remaining arrow labels. In this case the only label that changes is the one from 1 to a. In part (b) it was $\emptyset$, but in part (c) it is $\mathtt{b}(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*$. We obtain this result by following step 3 of the CONVERT procedure. State q_i is state 1, state q_j is a, and q_{rip} is 2, so $R_1 = \mathtt{b}$, $R_2 = \mathtt{a} \cup \mathtt{b}$, $R_3 = \varepsilon$, and $R_4 = \emptyset$. Therefore the new label on the arrow from 1 to a is $(\mathtt{b})(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*(\varepsilon) \cup \emptyset$. We simplify this regular expression to $\mathtt{b}(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*$.

In Figure 1.67(d) we remove state 1 from part (c) and follow the same procedure. Because only the start and accept states remain, the label on the arrow joining them is the regular expression that is equivalent to the original AFD.

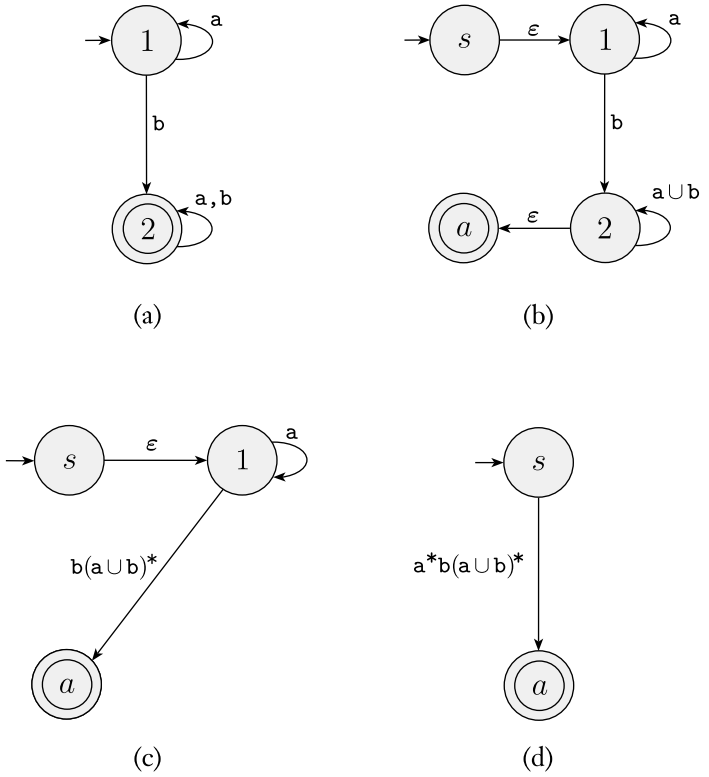


FIGURA 1.67
Converting a two-state AFD to an equivalent regular expression

EXEMPLO 1.68

In this example we begin with a three-state AFD. The steps in the conversion are shown in the following figure.

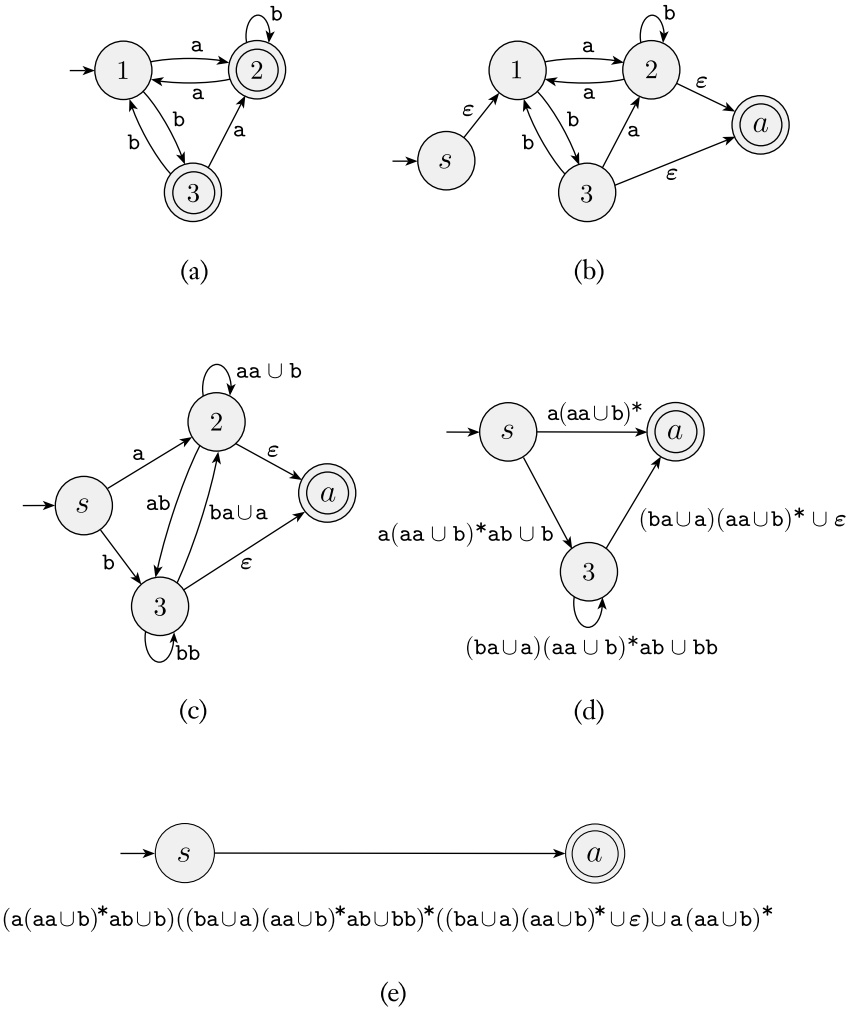


FIGURA 1.69
Converting a three-state AFD to an equivalent regular expression

1.4 LINGUAGENS NÃO-REGULARES

To understand the power of finite automata you must also understand their limitations. In this section we show how to prove that certain languages cannot be recognized by any finite automaton.

Let's take the language $B = \{0^n1^n | \ n \geq 0\}$. If we attempt to find a AFD that recognizes B, we discover that the machine seems to need to remember how many 0s have been seen so far as it reads the input. Because the number of 0s isn't limited, the machine will have to keep track of an unlimited number of possibilities. But it cannot do so with any finite number of states.

Next, we present a method for proving that languages such as B are not regular. Doesn't the argument already given prove nonregularity because the number of 0s is unlimited? It does not. Just because the language appears to require unbounded memory doesn't mean that it is necessarily so. It does happen to be true for the language B, but other languages seem to require an unlimited number of possibilities, yet actually they are regular. For example, consider two languages over the alphabet $\Sigma = \{0,1\}$:

$C = \{w | \ w$ has an equal number of 0s and 1s$\}$, and

$D = \{w | \ w$ has an equal number of occurrences of 01 and 10 as substrings$\}$.

At first glance a recognizing machine appears to need to count in each case, and therefore neither language appears to be regular. As expected, C is not regular, but surprisingly D is regular![6] Thus our intuition can sometimes lead us astray, which is why we need mathematical proofs for certainty. In this section we show how to prove that certain languages are not regular.

O LEMA DO BOMBEAMENTO PARA LINGUAGENS REGULARES

Our technique for proving nonregularity stems from a theorem about regular languages, traditionally called the ***pumping lemma***. This theorem states that all regular languages have a special property. If we can show that a language does not have this property, we are guaranteed that it is not regular. The property states that all strings in the language can be "pumped" if they are at least as long as a certain special value, called the ***pumping length***. That means each such string contains a section that can be repeated any number of times with the resulting string remaining in the language.

[6] See Problem 1.48.

TEOREMA 1.70

Pumping lemma If A is a regular language, then there is a number p (the pumping length) where, if s is any string in A of length at least p, then s may be divided into three pieces, $s = xyz$, satisfying the following conditions:

1. for each $i \geq 0$, $xy^iz \in A$,
2. $|y| > 0$, and
3. $|xy| \leq p$.

Recall the notation where $|s|$ represents the length of string s, y^i means that i copies of y are concatenated together, and y^0 equals ε.

When s is divided into xyz, either x or z may be ε, but condition 2 says that $y \neq \varepsilon$. Observe that without condition 2 the theorem would be trivially true. Condition 3 states that the pieces x and y together have length at most p. It is an extra technical condition that we occasionally find useful when proving certain languages to be nonregular. See Example 1.74 for an application of condition 3.

IDÉIA DA PROVA Let $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ be a AFD that recognizes A. We assign the pumping length p to be the number of states of M. We show that any string s in A of length at least p may be broken into the three pieces xyz satisfying our three conditions. What if no strings in A are of length at least p? Then our task is even easier because the theorem becomes *vacuously* true: Obviously the three conditions hold for all strings of length at least p if there aren't any such strings.

If s in A has length at least p, consider the sequence of states that M goes through when computing with input s. It starts with q_1 the start state, then goes to, say, q_3, then, say, q_{20}, then q_9, and so on, until it reaches the end of s in state q_{13}. With s in A, we know that M accepts s, so q_{13} is an accept state.

If we let n be the length of s, the sequence of states $q_1, q_3, q_{20}, q_9, \ldots, q_{13}$ has length $n + 1$. Because n is at least p, we know that $n + 1$ is greater than p, the number of states of M. Therefore the sequence must contain a repeated state. This result is an example of the ***pigeonhole principle***, a fancy name for the rather obvious fact that if p pigeons are placed into fewer than p holes, some hole has to have more than one pigeon in it.

The following figure shows the string s and the sequence of states that M goes through when processing s. State q_9 is the one that repeats.

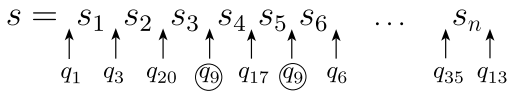


FIGURA 1.71
Example showing state q_9 repeating when M reads s

We now divide s into the three pieces x, y, and z. Piece x is the part of s appearing before q_9, piece y is the part between the two appearances of q_9, and piece z is the remaining part of s, coming after the second occurrence of q_9. So x takes M from the state q_1 to q_9, y takes M from q_9 back to q_9 and z takes M from q_9 to the accept state q_{13}, as shown in the following figure.

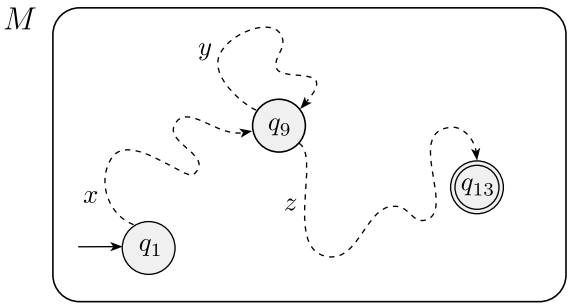


FIGURA 1.72
Example showing how the strings x, y, and z affect M

Let's see why this division of s satisfies the three conditions. Suppose that we run M on input $xyyz$. We know that x takes M from q_1 to q_9, and then the first y takes it from q_9 back to q_9, as does the second y, and then z takes it to q_{13}. With q_{13} being an accept state, M accepts input $xyyz$. Similarly, it will accept xy^iz for any $i > 0$. For the case $i = 0$, $xy^iz = xz$, which is accepted for similar reasons. That establishes condition 1.

Checking condition 2, we see that $|y| > 0$, as it was the part of s that occurred between two different occurrences of state q_9.

In order to get condition 3, we make sure that q_9 is the first repetition in the sequence. By the pigeonhole principle, the first $p+1$ states in the sequence must contain a repetition. Therefore $|xy| \leq p$.

PROVA Let $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ be a AFD recognizing A and p be the number of states of M.

Let $s = s_1 s_2 \cdots s_n$ be a string in A of length n, where $n \geq p$. Let $r_1, \ldots, r_{n+1}$ be the sequence of states that M enters while processing s, so $r_{i+1} = \delta(r_i, s_i)$ for $1 \leq i \leq n$. This sequence has length $n + 1$, which is at least $p + 1$. Among the first $p + 1$ elements in the sequence, two must be the same state, by the pigeonhole principle. We call the first of these r_j and the second r_l. Because r_l occurs among the first $p+1$ places in a sequence starting at r_1, we have $l \leq p+1$. Now let $x = s_1 \cdots s_{j-1}$, $y = s_j \cdots s_{l-1}$, and $z = s_l \cdots s_n$.

As x takes M from r_1 to r_j, y takes M from r_j to r_j, and z takes M from r_j to r_{n+1}, which is an accept state, M must accept xy^iz for $i \geq 0$. We know that $j \neq l$, so $|y| > 0$; and $l \leq p+1$, so $|xy| \leq p$. Thus we have satisfied all conditions of the pumping lemma.

To use the pumping lemma to prove that a language B is not regular, first assume that B is regular in order to obtain a contradiction. Then use the pumping lemma to guarantee the existence of a pumping length p such that all strings of length p or greater in B can be pumped. Next, find a string s in B that has length p or greater but that cannot be pumped. Finally, demonstrate that s cannot be pumped by considering all ways of dividing s into x, y, and z (taking condition 3 of the pumping lemma into account if convenient) and, for each such division, finding a value i where $xy^iz \notin B$. This final step often involves grouping the various ways of dividing s into several cases and analyzing them individually. The existence of s contradicts the pumping lemma if B were regular. Hence B cannot be regular.

Finding s sometimes takes a bit of creative thinking. You may need to hunt through several candidates for s before you discover one that works. Try members of B that seem to exhibit the "essence" of B's nonregularity. We further discuss the task of finding s in some of the following examples.

EXEMPLO 1.73

Let B be the language $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n | \, n \geq 0\}$. We use the pumping lemma to prove that B is not regular. The proof is by contradiction.

Assume to the contrary that B is regular. Let p be the pumping length given by the pumping lemma. Choose s to be the string $\mathtt{0}^p\mathtt{1}^p$. Because s is a member of B and s has length more than p, the pumping lemma guarantees that s can be split into three pieces, $s = xyz$, where for any $i \geq 0$ the string xy^iz is in B. We consider three cases to show that this result is impossible.

1. The string y consists only of 0s. In this case the string $xyyz$ has more 0s than 1s and so is not a member of B, violating condition 1 of the pumping lemma. This case is a contradiction.
2. The string y consists only of 1s. This case also gives a contradiction.
3. The string y consists of both 0s and 1s. In this case the string $xyyz$ may have the same number of 0s and 1s, but they will be out of order with some 1s before 0s. Hence it is not a member of B, which is a contradiction.

Thus a contradiction is unavoidable if we make the assumption that B is regular, so B is not regular. Note that we can simplify this argument by applying condition 3 of the pumping lemma to eliminate cases 2 and 3.

In this example, finding the string s was easy, because any string in B of length p or more would work. In the next two examples some choices for s do not work, so additional care is required. ∎

EXEMPLO 1.74

Let $C = \{w | \, w$ has an equal number of 0s and 1s$\}$. We use the pumping lemma to prove that C is not regular. The proof is by contradiction.

Assume to the contrary that C is regular. Let p be the pumping length given by the pumping lemma. As in Example 1.73, let s be the string $\mathtt{0}^p\mathtt{1}^p$. With s being a member of C and having length more than p, the pumping lemma guarantees that s can be split into three pieces, $s = xyz$, where for any $i \geq 0$ the string xy^iz is in C. We would like to show that this outcome is impossible. But wait, it *is* possible! If we let x and z be the empty string and y be the string $\mathtt{0}^p\mathtt{1}^p$, then xy^iz always has an equal number of 0s and 1s and hence is in C. So it *seems* that s can be pumped.

Here condition 3 in the pumping lemma is useful. It stipulates that when pumping s it must be divided so that $|xy| \leq p$. That restriction on the way that s may be divided makes it easier to show that the string $s = \mathtt{0}^p\mathtt{1}^p$ we selected cannot be pumped. If $|xy| \leq p$, then y must consist only of 0s, so $xyyz \notin C$. Therefore s cannot be pumped. That gives us the desired contradiction.[7]

Selecting the string s in this example required more care than in Example 1.73. If we had chosen $s = (\mathtt{01})^p$ instead, we would have run into trouble because we need a string that *cannot* be pumped and that string *can* be pumped, even taking condition 3 into account. Can you see how to pump it? One way to do so sets $x = \varepsilon$, $y = \mathtt{01}$, and $z = (\mathtt{01})^{p-1}$. Then $xy^iz \in C$ for every value of i. If you fail on your first attempt to find a string that cannot be pumped, don't despair. Try another one!

An alternative method of proving that C is nonregular follows from our knowledge that B is nonregular. If C were regular, $C \cap \mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$ also would be regular. The reasons are that the language $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$ is regular and that the class of regular languages is closed under intersection, which we proved in footnote 3 (page 50). But $C \cap \mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$ equals B, and we know that B is nonregular from Example 1.73.

EXEMPLO 1.75

Let $F = \{ww \mid w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*\}$. We show that F is nonregular, using the pumping lemma.

Assume to the contrary that F is regular. Let p be the pumping length given by the pumping lemma. Let s be the string $\mathtt{0}^p\mathtt{1}\mathtt{0}^p\mathtt{1}$. Because s is a member of F and s has length more than p, the pumping lemma guarantees that s can be split into three pieces, $s = xyz$, satisfying the three conditions of the lemma. We show that this outcome is impossible.

Condition 3 is once again crucial, because without it we could pump s if we let x and z be the empty string. With condition 3 the proof follows because y must consist only of 0s, so $xyyz \notin F$.

Observe that we chose $s = \mathtt{0}^p\mathtt{1}\mathtt{0}^p\mathtt{1}$ to be a string that exhibits the "essence" of the nonregularity of F, as opposed to, say, the string $\mathtt{0}^p\mathtt{0}^p$. Even though $\mathtt{0}^p\mathtt{0}^p$ is a member of F, it fails to demonstrate a contradiction because it can be pumped.

[7] We could have used condition 3 in Example 1.73, as well, to simplify its proof.

EXEMPLO 1.76

Here we demonstrate a nonregular unary language. Let $D = \{1^{n^2} \mid n \geq 0\}$. In other words, D contains all strings of 1s whose length is a perfect square. We use the pumping lemma to prove that D is not regular. The proof is by contradiction.

Assume to the contrary that D is regular. Let p be the pumping length given by the pumping lemma. Let s be the string 1^{p^2}. Because s is a member of D and s has length at least p, the pumping lemma guarantees that s can be split into three pieces, $s = xyz$, where for any $i \geq 0$ the string xy^iz is in D. As in the preceding examples, we show that this outcome is impossible. Doing so in this case requires a little thought about the sequence of perfect squares:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

Note the growing gap between successive members of this sequence. Large members of this sequence cannot be near each other.

Now consider the two strings xyz and xy^2z. These strings differ from each other by a single repetition of y, and consequently their lengths differ by the length of y. By condition 3 of the pumping lemma, $|xy| \leq p$ and thus $|y| \leq p$. We have $|xyz| = p^2$ and so $|xy^2z| \leq p^2 + p$. But $p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$. Moreover, condition 2 implies that y is not the empty string and so $|xy^2z| > p^2$. Therefore the length of xy^2z lies strictly between the consecutive perfect squares p^2 and $(p+1)^2$. Hence this length cannot be a perfect square itself. So we arrive at the contradiction $xy^2z \notin D$ and conclude that D is not regular. ∎

EXEMPLO 1.77

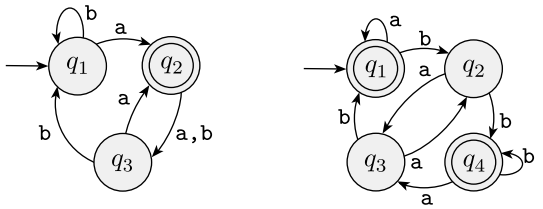
Sometimes "pumping down" is useful when we apply the pumping lemma. We use the pumping lemma to show that $E = \{0^i1^j \mid i > j\}$ is not regular. The proof is by contradiction.

Assume that E is regular. Let p be the pumping length for E given by the pumping lemma. Let $s = 0^{p+1}1^p$. Then s can be split into xyz, satisfying the conditions of the pumping lemma. By condition 3, y consists only of 0s. Let's examine the string $xyyz$ to see whether it can be in E. Adding an extra copy of y increases the number of 0s. But, E contains all strings in 0^*1^* that have more 0s than 1s, so increasing the number of 0s will still give a string in E. No contradiction occurs. We need to try something else.

The pumping lemma states that $xy^iz \in E$ even when $i = 0$, so let's consider the string $xy^0z = xz$. Removing string y decreases the number of 0s in s. Recall that s has just one more 0 than 1. Therefore xz cannot have more 0s than 1s, so it cannot be a member of E. Thus we obtain a contradiction. ∎

EXERCÍCIOS

[R]**1.1** The following are the state diagrams of two AFDs, M_1 and M_2. Answer the following questions about each of these machines.



M_1 M_2

a. What is the start state?
b. What is the set of accept states?
c. What sequence of states does the machine go through on input `aabb`?
d. Does the machine accept the string `aabb`?
e. Does the machine accept the string ε?

[R]**1.2** Give the formal description of the machines M_1 and M_2 pictured in Exercise 1.1.

1.3 The formal description of a AFD M is $\big(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{\mathtt{u}, \mathtt{d}\}, \delta, q_3, \{q_3\}\big)$, where δ is given by the following table. Give the state diagram of this machine.

	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

1.4 Each of the following languages is the intersection of two simpler languages. In each part, construct AFDs for the simpler languages, then combine them using the construction discussed in footnote 3 (page 50) to give the state diagram of a AFD for the language given. In all parts $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a. $\{w \mid w$ has at least three `a`'s and at least two `b`'s$\}$
[R]**b.** $\{w \mid w$ has at exactly two `a`'s and at least two `b`'s$\}$
c. $\{w \mid w$ has an even number of `a`'s and one or two `b`'s$\}$
[R]**d.** $\{w \mid w$ has an even number of `a`'s and each `a` is followed by at least one `b`$\}$
e. $\{w \mid w$ starts with an `a` and has at most one `b`$\}$
f. $\{w \mid w$ has an odd number of `a`'s and ends with a `b`$\}$
g. $\{w \mid w$ has even length and an odd number of `a`'s$\}$

1.5 Each of the following languages is the complement of a simpler language. In each part, construct a AFD for the simpler language, then use it to give the state diagram of a AFD for the language given. In all parts $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

- [R] **a.** $\{w \mid w$ does not contain the substring $\mathtt{ab}\}$
- [R] **b.** $\{w \mid w$ does not contain the substring $\mathtt{baba}\}$
- **c.** $\{w \mid w$ contains neither the substrings $\mathtt{ab}$ nor $\mathtt{ba}\}$
- **d.** $\{w \mid w$ is any string not in $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\}$
- **e.** $\{w \mid w$ is any string not in $(\mathtt{ab}^+)^*\}$
- **f.** $\{w \mid w$ is any string not in $\mathtt{a}^* \cup \mathtt{b}^*\}$
- **g.** $\{w \mid w$ is any string that doesn't contain exactly two $\mathtt{a}$'s$\}$
- **h.** $\{w \mid w$ is any string except $\mathtt{a}$ and $\mathtt{b}\}$

1.6 Give state diagrams of AFDs recognizing the following languages. In all parts the alphabet is $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$

- **a.** $\{w \mid w$ begins with a $\mathtt{1}$ and ends with a $\mathtt{0}\}$
- **b.** $\{w \mid w$ contains at least three $\mathtt{1}$s$\}$
- **c.** $\{w \mid w$ contains the substring $\mathtt{0101}$, i.e., $w = x\mathtt{0101}y$ for some x and $y\}$
- **d.** $\{w \mid w$ has length at least 3 and its third symbol is a $\mathtt{0}\}$
- **e.** $\{w \mid w$ starts with $\mathtt{0}$ and has odd length, or starts with $\mathtt{1}$ and has even length$\}$
- **f.** $\{w \mid w$ doesn't contain the substring $\mathtt{110}\}$
- **g.** $\{w \mid$ the length of w is at most $5\}$
- **h.** $\{w \mid w$ is any string except $\mathtt{11}$ and $\mathtt{111}\}$
- **i.** $\{w \mid$ every odd position of w is a $\mathtt{1}\}$
- **j.** $\{w \mid w$ contains at least two $\mathtt{0}$s and at most one $\mathtt{1}\}$
- **k.** $\{\varepsilon, \mathtt{0}\}$
- **l.** $\{w \mid w$ contains an even number of $\mathtt{0}$s, or contains exactly two $\mathtt{1}$s$\}$
- **m.** The empty set
- **n.** All strings except the empty string

1.7 Give state diagrams of AFNs with the specified number of states recognizing each of the following languages. In all parts the alphabet is $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$.

- [R] **a.** The language $\{w \mid w$ ends with $\mathtt{00}\}$ with three states
- **b.** The language of Exercise 1.6c with five states
- **c.** The language of Exercise 1.6l with six states
- **d.** The language $\{\mathtt{0}\}$ with two states
- **e.** The language $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*\mathtt{0}^+$ with three states
- [R] **f.** The language $\mathtt{1}^*(\mathtt{001}^+)^*$ with three states
- **g.** The language $\{\varepsilon\}$ with one state
- **h.** The language $\mathtt{0}^*$ with one state

1.8 Use the construction given in the proof of Theorem 1.45 to give the state diagrams of AFNs recognizing the union of the languages described in

- **a.** Exercises 1.6a and 1.6b.
- **b.** Exercises 1.6c and 1.6f.

1.9 Use the construction given in the proof of Theorem 1.47 to give the state diagrams of AFNs recognizing the concatenation of the languages described in

- **a.** Exercises 1.6g and 1.6i.
- **b.** Exercises 1.6b and 1.6m.

1.10 Use the construction given in the proof of Theorem 1.49 to give the state diagrams of AFNs recognizing the star of the language described in

- **a.** Exercise 1.6b.
- **b.** Exercise 1.6j.
- **c.** Exercise 1.6m.

R**1.11** Prove that every AFN can be converted to an equivalent one that has a single accept state.

1.12 Let $D = \{w | \ w$ contains an even number of a's and an odd number of b's and does not contain the substring ab$\}$. Give a AFD with five states that recognizes D and a regular expression that generates D. (Suggestion: Describe D more simply.)

1.13 Let F be the language of all strings over $\{0,1\}$ that do not contain a pair of 1s that are separated by an odd number of symbols. Give the state diagram of a AFD with 5 states that recognizes F. (You may find it helpful first to find a 4-state AFN for the complement of F.)

1.14

- **a.** Show that, if M is a AFD that recognizes language B, swapping the accept and nonaccept states in M yields a new AFD that recognizes the complement of B. Conclude that the class of regular languages is closed under complement.
- **b.** Show by giving an example that, if M is an AFN that recognizes language C, swapping the accept and nonaccept states in M doesn't necessarily yield a new AFN that recognizes the complement of C. Is the class of languages recognized by AFNs closed under complement? Explain your answer.

1.15 Give a counterexample to show that the following construction fails to prove Theorem 1.49, the closure of the class of regular languages under the star operation.[8] Let $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ recognize A_1. Construct $N = (Q_1, \Sigma, \delta, q_1, F)$ as follows. N is supposed to recognize A_1^*.

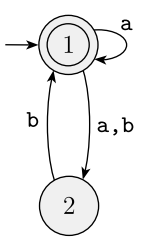
- **a.** The states of N are the states of N_1.
- **b.** The start state of N is the same as the start state of N_1.
- **c.** $F = \{q_1\} \cup F_1$.
  The accept states F are the old accept states plus its start state.
- **d.** Define δ so that for any $q \in Q$ and any $a \in \Sigma_\varepsilon$,

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & q \notin F_1 \text{ or } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & q \in F_1 \text{ and } a = \varepsilon. \end{cases}$$

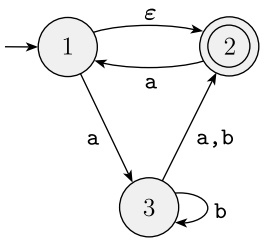
(Suggestion: Show this construction graphically, as in Figure 1.50.)

[8] In other words, you must present a finite automaton, N_1, for which the constructed automaton N does not recognize the star of N_1's language.

1.16 Use the construction given in Theorem 1.39 to convert the following two nondeterministic finite automata to equivalent deterministic finite automata.



(a)



(b)

1.17
a. Give an AFN recognizing the language $(\mathtt{01} \cup \mathtt{001} \cup \mathtt{010})^*$.
b. Convert this AFN to an equivalent AFD. Give only the portion of the AFD that is reachable from the start state.

1.18 Give regular expressions generating the languages of Exercise 1.6.

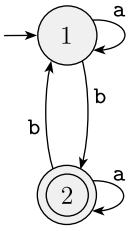
1.19 Use the procedure described in Lemma 1.55 to convert the following regular expressions to nondeterministic finite automata.

a. $(\mathtt{0} \cup \mathtt{1})^*\mathtt{000}(\mathtt{0} \cup \mathtt{1})^*$
b. $(((\mathtt{00})^*(\mathtt{11})) \cup \mathtt{01})^*$
c. $\emptyset^*$

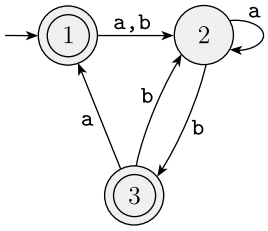
1.20 For each of the following languages, give two strings that are members and two strings that are *not* members—a total of four strings for each part. Assume the alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ in all parts.

a. $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*$
b. $\mathtt{a}(\mathtt{ba})^*\mathtt{b}$
c. $\mathtt{a}^* \cup \mathtt{b}^*$
d. $(\mathtt{aaa})^*$
e. $\Sigma^*\mathtt{a}\Sigma^*\mathtt{b}\Sigma^*\mathtt{a}\Sigma^*$
f. $\mathtt{aba} \cup \mathtt{bab}$
g. $(\varepsilon \cup \mathtt{a})\mathtt{b}$
h. $(\mathtt{a} \cup \mathtt{ba} \cup \mathtt{bb})\Sigma^*$

1.21 Use the procedure described in Lemma 1.60 to convert the following finite automata to regular expressions.



(a)



(b)

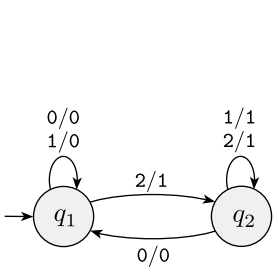
1.22 In certain programming languages, comments appear between delimiters such as `/#` and `#/`. Let C be the language of all valid delimited comment strings. A member of C must begin with `/#` and end with `#/` but have no intervening `#/`. For simplicity, we'll say that the comments themselves are written with only the symbols `a` and `b`; hence the alphabet of C is $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{/}, \texttt{\#}\}$.

a. Give a AFD that recognizes C.

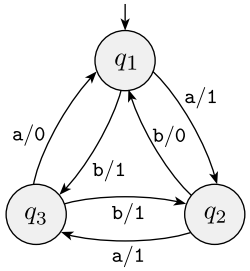
b. Give a regular expression that generates C.

R**1.23** Let B be any language over the alphabet Σ. Prove that $B = B^+$ iff $BB \subseteq B$.

1.24 A ***finite state transducer*** (TEF) is a type of deterministic finite automaton whose output is a string and not just *aceite* or *rejeite*. The following are state diagrams of finite state transducers T_1 and T_2.



T_1



T_2

Each transition of an TEF is labeled with two symbols, one designating the input symbol for that transition and the other designating the output symbol. The two symbols are written with a slash, /, separating them. In T_1, the transition from q_1 to q_2 has input symbol `2` and output symbol `1`. Some transitions may have multiple input–output pairs, such as the transition in T_1 from q_1 to itself. When an TEF computes on an input string w, it takes the input symbols $w_1 \cdots w_n$ one by one and, starting at the start state, follows the transitions by matching the input labels with the sequence of symbols $w_1 \cdots w_n = w$. Every time it goes along a transition, it outputs the corresponding output symbol. For example, on input `2212011`, machine T_1 enters the sequence of states q_1, q_2, q_2, q_2, q_2, q_1, q_1, q_1 and produces output `1111000`. On input `abbb`, T_2 outputs `1011`. Give the sequence of states entered and the output produced in each of the following parts.

a. T_1 on input `011`

b. T_1 on input `211`

c. T_1 on input `121`

d. T_1 on input `0202`

e. T_2 on input `b`

f. T_2 on input `bbab`

g. T_2 on input `bbbbbb`

h. T_2 on input ε

1.25 Read the informal definition of the finite state transducer given in Exercise 1.24. Give a formal definition of this model, following the pattern in Definition 1.5 (page 38). Assume that an TEF has an input alphabet Σ and an output alphabet Γ but not a set of accept states. Include a formal definition of the computation of an TEF. (Hint: An TEF is a 5-tuple. Its transition function is of the form $\delta\colon Q \times \Sigma \longrightarrow Q \times \Gamma$.)

1.26 Using the solution you gave to Exercise 1.25, give a formal description of the machines T_1 and T_2 depicted in Exercise 1.24.

1.27 Read the informal definition of the finite state transducer given in Exercise 1.24. Give the state diagram of an TEF with the following behavior. Its input and output alphabets are {0,1}. Its output string is identical to the input string on the even positions but inverted on the odd positions. For example, on input 0000111 it should output 1010010.

1.28 Convert the following regular expressions to AFNs using the procedure given in Theorem 1.54. In all parts $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

a. $\mathtt{a}(\mathtt{abb})^* \cup \mathtt{b}$

b. $\mathtt{a}^+ \cup (\mathtt{ab})^+$

c. $(\mathtt{a} \cup \mathtt{b}^+)\mathtt{a}^+\mathtt{b}^+$

1.29 Use the pumping lemma to show that the following languages are not regular.

R**a.** $A_1 = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n\mathtt{2}^n \mid n \geq 0\}$

b. $A_2 = \{www \mid w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$

R**c.** $A_3 = \{\mathtt{a}^{2^n} \mid n \geq 0\}$ (Here, $\mathtt{a}^{2^n}$ means a string of 2^n a's.)

1.30 Describe the error in the following "proof" that $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$ is not a regular language. (An error must exist because $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$ *is* regular.) The proof is by contradiction. Assume that $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$ is regular. Let p be the pumping length for $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$ given by the pumping lemma. Choose s to be the string $\mathtt{0}^p\mathtt{1}^p$. You know that s is a member of $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$, but Example 1.73 shows that s cannot be pumped. Thus you have a contradiction. So $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$ is not regular.

PROBLEMAS

1.31 For any string $w = w_1w_2 \cdots w_n$, the ***reverse*** of w, written $w^{\mathcal{R}}$, is the string w in reverse order, $w_n \cdots w_2w_1$. For any language A, let $A^{\mathcal{R}} = \{w^{\mathcal{R}} \mid w \in A\}$. Show that if A is regular, so is $A^{\mathcal{R}}$.

1.32 Let

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Σ_3 contains all size 3 columns of 0s and 1s. A string of symbols in Σ_3 gives three rows of 0s and 1s. Consider each row to be a binary number and let

$$B = \{w \in \Sigma_3^* \mid \text{the bottom row of } w \text{ is the sum of the top two rows}\}.$$

For example,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in B, \qquad \text{but} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin B.$$

Show that B is regular. (Hint: Working with $B^{\mathcal{R}}$ is easier. You may assume the result claimed in Problem 1.31.)

1.33 Let

$$\Sigma_2 = \left\{ \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right] \right\}.$$

Here, Σ_2 contains all columns of 0s and 1s of height two. A string of symbols in Σ_2 gives two rows of 0s and 1s. Consider each row to be a binary number and let

$$C = \{w \in \Sigma_2^* | \text{ the bottom row of } w \text{ is three times the top row}\}.$$

For example, $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right] \in C$, but $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] \notin C$. Show that C is regular. (You may assume the result claimed in Problem 1.31.)

1.34 Let Σ_2 be the same as in Problem 1.33. Consider each row to be a binary number and let

$$D = \{w \in \Sigma_2^* | \text{ the top row of } w \text{ is a larger number than is the bottom row}\}.$$

For example, $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right] \in D$, but $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right] \notin D$. Show that D is regular.

1.35 Let Σ_2 be the same as in Problem 1.33. Consider the top and bottom rows to be strings of 0s and 1s and let

$$E = \{w \in \Sigma_2^* | \text{ the bottom row of } w \text{ is the reverse of the top row of } w\}.$$

Show that E is not regular.

1.36 Let $B_n = \{\mathtt{a}^k | \text{ where } k \text{ is a multiple of } n\}$. Show that for each $n \geq 1$, the language B_n is regular.

1.37 Let $C_n = \{x | \ x \text{ is a binary number that is a multiple of } n\}$. Show that for each $n \geq 1$, the language C_n is regular.

1.38 An ***all-***AFN M is a 5-tuple $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ that accepts $x \in \Sigma^*$ if *every* possible state that M could be in after reading input x is a state from F. Note, in contrast, that an ordinary AFN accepts a string if *some* state among these possible states is an accept state. Prove that all-AFNs recognize the class of regular languages.

1.39 The construction in Theorem 1.54 shows that every AFNG is equivalent to a AFNG with only two states. We can show that an opposite phenomenon occurs for AFDs. Prove that for every $k > 1$ a language $A_k \subseteq \{0,1\}^*$ exists that is recognized by a AFD with k states but not by one with only $k - 1$ states.

1.40 Say that string x is a ***prefix*** of string y if a string z exists where $xz = y$ and that x is a ***proper prefix*** of y if in addition $x \neq y$. In each of the following parts we define an operation on a language A. Show that the class of regular languages is closed under that operation.

R **a.** $NOPREFIX(A) = \{w \in A | \text{ no proper prefix of } w \text{ is a member of } A\}$.

b. $NOEXTEND(A) = \{w \in A | \ w \text{ is not the proper prefix of any string in } A\}$.

1.41 For languages A and B, let the ***perfect shuffle*** of A and B be the language

$$\{w | \ w = a_1 b_1 \cdots a_k b_k, \text{ where } a_1 \cdots a_k \in A \text{ and } b_1 \cdots b_k \in B, \text{ each } a_i, b_i \in \Sigma\}.$$

Show that the class of regular languages is closed under perfect shuffle.

1.42 For languages A and B, let the ***shuffle*** of A and B be the language

$$\{w | \ w = a_1 b_1 \cdots a_k b_k, \text{ where } a_1 \cdots a_k \in A \text{ and } b_1 \cdots b_k \in B, \text{ each } a_i, b_i \in \Sigma^*\}.$$

Show that the class of regular languages is closed under shuffle.

1.43 Let A be any language. Define *DROP-OUT*(A) to be the language containing all strings that can be obtained by removing one symbol from a string in A. Thus, *DROP-OUT*$(A) = \{xz |\ xyz \in A \text{ where } x, z \in \Sigma^*, y \in \Sigma\}$. Show that the class of regular languages is closed under the DROP-OUT operation. Give both a proof by picture and a more formal proof by construction as in Theorem 1.47.

R**1.44** Let B and C be languages over $\Sigma = \{0, 1\}$. Define

$$B \stackrel{1}{\leftarrow} C = \{w \in B |\ \text{for some } y \in C, \text{ strings } w \text{ and } y \text{ contain equal numbers of } 1\text{s}\}.$$

Show that the class of regular languages is closed under the $\stackrel{1}{\leftarrow}$ operation.

***1.45** Let $A/B = \{w |\ wx \in A \text{ for some } x \in B\}$. Show that if A is regular and B is any language then A/B is regular.

1.46 Prove that the following languages are not regular. You may use the pumping lemma and the closure of the class of regular languages under union, intersection, and complement.

a. $\{0^n 1^m 0^n |\ m, n \geq 0\}$

R**b.** $\{0^m 1^n |\ m \neq n\}$

c. $\{w |\ w \in \{0,1\}^* \text{ is not a palindrome}\}$[9]

d. $\{wtw |\ w, t \in \{0,1\}^+\}$

1.47 Let $\Sigma = \{1, \#\}$ and let

$$Y = \{w |\ w = x_1 \# x_2 \# \cdots \# x_k \text{ for } k \geq 0, \text{ each } x_i \in 1^*, \text{ and } x_i \neq x_j \text{ for } i \neq j\}.$$

Prove that Y is not regular.

1.48 Let $\Sigma = \{0,1\}$ and let

$$D = \{w | w \text{ contains an equal number of occurrences of the substrings } 01 \text{ and } 10\}.$$

Thus $101 \in D$ because 101 contains a single 01 and a single 10, but $1010 \notin D$ because 1010 contains two 10s and one 01. Show that D is a regular language.

1.49 **a.** Let $B = \{1^k y |\ y \in \{0,1\}^* \text{ and } y \text{ contains at least } k \text{ 1s, for } k \geq 1\}$. Show that B is a regular language.

b. Let $C = \{1^k y |\ y \in \{0,1\}^* \text{ and } y \text{ contains at most } k \text{ 1s, for } k \geq 1\}$. Show that C isn't a regular language.

R**1.50** Read the informal definition of the finite state transducer given in Exercise 1.24. Prove that no TEF can output $w^{\mathcal{R}}$ for every input w if the input and output alphabets are $\{0,1\}$.

1.51 Sejam x e y cadeias e seja L uma linguagem qualquer. Dizemos que x e y são ***distingüíveis por L*** se alguma cadeia z existe tal que exatamente uma das cadeias xz e yz é um membro de L; caso contrário, para toda cadeia z, temos $xz \in L$ sempre que $yz \in L$ e dizemos que x e y são ***indistingüíveis por L***. Se x e y são indistingüíveis por L escrevemos $x \equiv_L y$. Mostre que $\equiv_L$ é uma relação de equivalência.

---

[9] A ***palindrome*** is a string that reads the same forward and backward.

R* **1.52** **Teorema de Myhill–Nerode.** Olhe para o Problema 1.51. Seja L uma linguagem e suponha que X seja um conjunto de cadeias. Digamos que X é ***distingüível duas-a-duas por L*** se cada duas cadeias distintas em X são distingüíveis por L. Defina o ***índice de L*** como sendo o número máximo de elementos em qualquer conjunto que é distingüível duas-a-duas por L. O índice de L pode ser finito ou infinito.

- **a.** Mostre que, se L é reconhecida por um AFD com k estados, L tem índice no máximo k.
- **b.** Mostre que, se o índice de L é um número finito k, ela é reconhecida por um AFD com k estados.
- **c.** Conclua que L é regular sse ela tem um índice finito. Além disso, seu índice é o tamanho do menor AFD que a reconhece.

1.53 Let $\Sigma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \mathtt{=}\}$ and

$$ADD = \{x\mathtt{=}y\mathtt{+}z \mid x, y, z \text{ are binary integers, and } x \text{ is the sum of } y \text{ and } z\}.$$

Show that ADD is not regular.

1.54 Consider the language $F = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ and if } i = 1 \text{ then } j = k\}$.

- **a.** Show that F is not regular.
- **b.** Show that F acts like a regular language in the pumping lemma. In other words, give a pumping length p and demonstrate that F satisfies the three conditions of the pumping lemma for this value of p.
- **c.** Explain why parts (a) and (b) do not contradict the pumping lemma.

1.55 The pumping lemma says that every regular language has a pumping length p, such that every string in the language can be pumped if it has length p or more. If p is a pumping length for language A, so is any length $p' \geq p$. The ***minimum pumping length*** for A is the smallest p that is a pumping length for A. For example, if $A = \mathtt{01}^*$, the minimum pumping length is 2. The reason is that the string $s = \mathtt{0}$ is in A and has length 1 yet s cannot be pumped, but any string in A of length 2 or more contains a $\mathtt{1}$ and hence can be pumped by dividing it so that $x = \mathtt{0}$, $y = \mathtt{1}$, and z is the rest. For each of the following languages, give the minimum pumping length and justify your answer.

- R **a.** $\mathtt{0001}^*$
- R **b.** $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$
- **c.** $\mathtt{001} \cup \mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$
- R **d.** $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^+\mathtt{0}^+\mathtt{1}^* \cup \mathtt{10}^*\mathtt{1}$
- **e.** $(\mathtt{01})^*$
- **f.** ε
- **g.** $\mathtt{1}^*\mathtt{01}^*\mathtt{01}^*$
- **h.** $\mathtt{10}(\mathtt{11}^*\mathtt{0})^*\mathtt{0}$
- **i.** $\mathtt{1011}$
- **j.** Σ^*

* **1.56** If A is a set of natural numbers and k is a natural number greater than 1, let

$$B_k(A) = \{w \mid w \text{ is the representation in base } k \text{ of some number in } A\}.$$

Here, we do not allow leading 0s in the representation of a number. For example, $B_2(\{3, 5\}) = \{\mathtt{11}, \mathtt{101}\}$ and $B_3(\{3, 5\}) = \{\mathtt{10}, \mathtt{12}\}$. Give an example of a set A for which $B_2(A)$ is regular but $B_3(A)$ is not regular. Prove that your example works.

* **1.57** If A is any language, let $A_{\frac{1}{2}\_}$ be the set of all first halves of strings in A so that

$$A_{\frac{1}{2}\_} = \{x \mid \text{ for some } y,\ |x| = |y| \text{ and } xy \in A\}.$$

Show that, if A is regular, then so is $A_{\frac{1}{2}\_}$.

***1.58** If A is any language, let $A_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ be the set of all strings in A with their middle thirds removed so that

$$A_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = \{xz \mid \text{ for some } y,\ |x| = |y| = |z| \text{ and } xyz \in A\}.$$

Show that, if A is regular, then $A_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ is not necessarily regular.

1.59** Let $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ be a AFD and let h be a state of M called its "home". A ***synchronizing sequence for M and h is a string $s \in \Sigma^*$ where $\delta(q, s) = h$ for every $q \in Q$. (Here we have extended δ to strings, so that $\delta(q, s)$ equals the state where M ends up when M starts at state q and reads input s.) Say that M is ***synchronizable*** if it has a synchronizing sequence for some state h. Prove that, if M is a k-state synchronizable AFD, then it has a synchronizing sequence of length at most k^3. Can you improve upon this bound?

1.60 Let $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. For each $k \geq 1$, let C_k be the language consisting of all strings that contain an `a` exactly k places from the right-hand end. Thus $C_k = \Sigma^*\mathtt{a}\Sigma^{k-1}$. Describe an AFN with $k + 1$ states that recognizes C_k, both in terms of a state diagram and a formal description.

1.61 Consider the languages C_k defined in Problem 1.60. Prove that for each k, no AFD can recognize C_k with fewer than 2^k states.

1.62 Let $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$. For each $k \geq 1$, let D_k be the language consisting of all strings that have at least one `a` among the last k symbols. Thus $D_k = \Sigma^*\mathtt{a}(\Sigma \cup \varepsilon)^{k-1}$. Describe an AFD with at most $k + 1$ states that recognizes D_k, both in terms of a state diagram and a formal description.

1.63

a. Let A be an infinite regular language. Prove that A can be split into two infinite disjoint regular subsets.

b. Let B and D be two languages. Write $B \Subset D$ if $B \subseteq D$ and D contains infinitely many strings that are not in B. Show that, if B and D are two regular languages where $B \Subset D$, then we can find a regular language C where $B \Subset C \Subset D$.

1.64 Let N be an AFN with k states that recognizes some language A.

a. Show that, if A is nonempty, A contains some string of length at most k.

b. Show that, by giving an example, that part (a) is not necessarily true if you replace both A's by $\overline{A}$.

c. Show that, if $\overline{A}$ is nonempty, $\overline{A}$ contains some string of length at most 2^k.

d. Show that the bound given in part (c) is nearly tight; that is, for each k, demonstrate an AFN recognizing a language A_k where $\overline{A_k}$ is nonempty and where $\overline{A_k}$'s shortest member strings are of length exponential in k. Come as close to the bound in (c) as you can.

***1.65** Prove that, for each $n > 0$, a language B_n exists where

a. B_n is recognizable by a AFN that has n states, and

b. if $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_k$, for regular languages A_i, then at least one of the A_i requires a AFD with exponentially many states.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

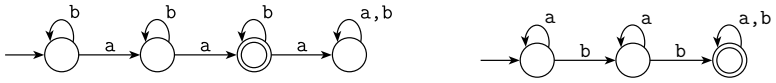
1.1 For M_1: **(a)** q_1; **(b)** $\{q_2\}$; **(c)** q_1, q_2, q_3, q_1, q_1; **(d)** No; **(e)** No
For M_2: **(a)** q_1; **(b)** $\{q_1, q_4\}$; **(c)** q_1, q_1, q_1, q_2, q_4; **(d)** Yes; **(e)** Yes

1.2 $M_2 = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \delta_1, q_1, \{q_2\})$.
$M_3 = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \delta_2, q_1, \{q_1, q_4\})$.
The transition functions are

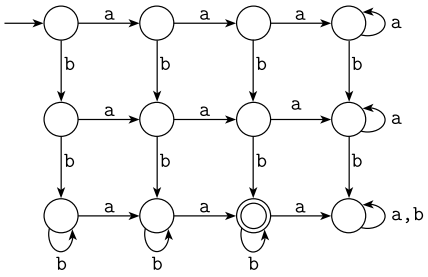
δ_1	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_3	q_3
q_3	q_2	q_1

δ_2	a	b
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_4
q_3	q_2	q_1
q_4	q_3	q_4

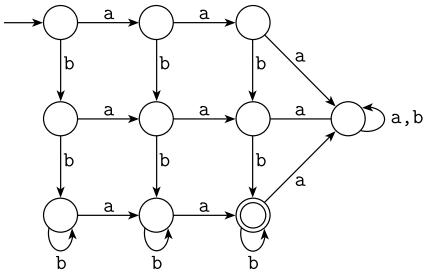
1.4 **(b)** The following are AFDs for the two languages $\{w|\ w$ has exactly two a's$\}$ and $\{w|\ w$ has at least two b's$\}$:



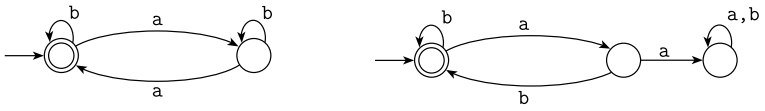
Combining them using the intersection construction gives the AFD:



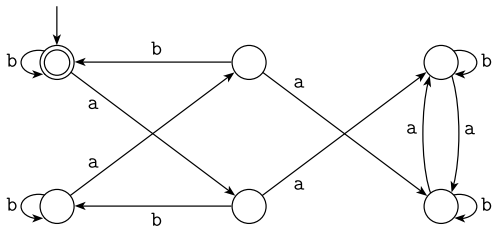
Though the problem doesn't request you to simplify the AFD, certain states can be combined to give



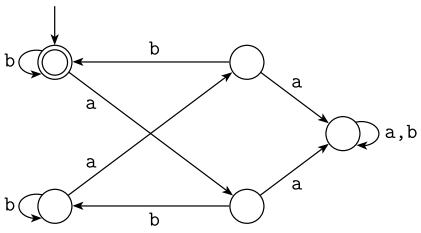
(d) These are AFDs for the two languages $\{w|\ w$ has an even number of a's$\}$ and $\{w|$ each a is followed by at least one b$\}$:



Combining them using the intersection construction gives the AFD:

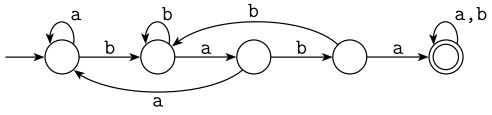


Though the problem doesn't request you to simplify the AFD, certain states can be combined to give

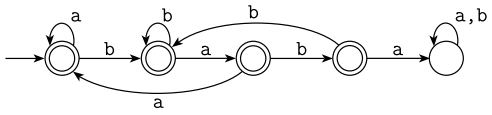


1.5 **(a)** The left-hand AFD recognizes $\{w|\ w$ contains `ab`$\}$. The right-hand AFD recognizes its complement, $\{w|\ w$ doesn't contain `ab`$\}$.

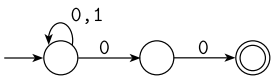
(b) This AFD recognizes $\{w|\ w$ contains `baba`$\}$.



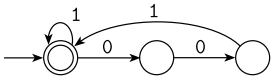
This AFD recognizes $\{w|\ w$ does not contain `baba`$\}$.



1.7 **(a)**



(f)



1.11 Let $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ be any AFN. Construct an AFN N' with a single accept state that accepts the same language as N. Informally, N' is exactly like N except it has ε-transitions from the states corresponding to the accept states of N, to a new accept state, q_{aceita}. State q_{aceita} has no emerging transitions. More formally, $N' = (Q \cup \{q_{\text{aceita}}\}, \Sigma, \delta', q_0, \{q_{\text{aceita}}\})$, where for each $q \in Q$ and $a \in \Sigma$

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{if } a \neq \varepsilon \text{ or } q \notin F \\ \delta(q,a) \cup \{q_{\text{aceita}}\} & \text{if } a = \varepsilon \text{ and } q \in F \end{cases}$$

and $\delta'(q_{\text{aceita}}, a) = \emptyset$ for each $a \in \Sigma_\varepsilon$.

1.23 We prove both directions of the "iff."
($\rightarrow$) Assume that $B = B^+$ and show that $BB \subseteq B$.
For every language $BB \subseteq B^+$ holds, so if $B = B^+$, then $BB \subseteq B$.
($\leftarrow$) Assume that $BB \subseteq B$ and show that $B = B^+$.
For every language $B \subseteq B^+$, so we need to show only $B^+ \subseteq B$. If $w \in B^+$, then $w = x_1 x_2 \cdots x_k$ where each $x_i \in B$ and $k \geq 1$. Because $x_1, x_2 \in B$ and $BB \subseteq B$, we have $x_1 x_2 \in B$. Similarly, because $x_1 x_2$ is in B and x_3 is in B, we have $x_1 x_2 x_3 \in B$. Continuing in this way, $x_1 \cdots x_k \in B$. Hence $w \in B$, and so we may conclude that $B^+ \subseteq B$.

The latter argument may be written formally as the following proof by induction.
Assume that $BB \subseteq B$.
Claim: For each $k \geq 1$, if $x_1, \ldots, x_k \in B$, then $x_1 \cdots x_k \in B$.
Basis: Prove for $k = 1$. This statement is obviously true.
Induction step: For each $k \geq 1$, assume that the claim is true for k and prove it to be true for $k + 1$.
If $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} \in B$, then by the induction assumption, $x_1 \cdots x_k \in B$. Therefore $x_1 \cdots x_k x_{k+1} \in BB$, but $BB \subseteq B$, so $x_1 \cdots x_{k+1} \in B$. That proves the induction step and the claim. The claim implies that, if $BB \subseteq B$, then $B^+ \subseteq B$.

1.29 **(a)** Assume that $A_1 = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 0\}$ is regular. Let p be the pumping length given by the pumping lemma. Choose s to be the string $0^p 1^p 2^p$. Because s is a member of A_1 and s is longer than p, the pumping lemma guarantees that s can be split into three pieces, $s = xyz$, where for any $i \geq 0$ the string xy^iz is in A_1. Consider two possibilities:

1. The string y consists only of 0s, only of 1s, or only of 2s. In these cases the string $xyyz$ will not have equal numbers of 0s, 1s, and 2s. Hence $xyyz$ is not a member of A_1, a contradiction.
2. The string y consists of more than one kind of symbol. In this case $xyyz$ will have the 0s, 1s, or 2s out of order. Hence $xyyz$ is not a member of A_1, a contradiction.

Either way we arrive at a contradiction. Therefore, A_1 is not regular.

(c) Assuma que $A_3 = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$ seja regular. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Escolha s como sendo a cadeia a^{2^p}. Em razão do fato de que s é um membro de A_1 e s é maior que p, o lema do bombeamento garante que s pode ser dividida em três partes, $s = xyz$, satisfazendo as três condições do lema do bombeamento.

A terceira condição nos diz que $|xy| \leq p$. Além disso, $p < 2^p$ e, portanto, $|y| < 2^p$. Conseqüentemente, $|xyyz| = |xyz| + |y| < 2^p + 2^p = 2^{p+1}$. A segunda condição requer que $|y| > 1$ portanto $2^p < |xyyz| < 2^{p+1}$. O comprimento de $xyyz$ não pode ser uma potência de 2. Logo, $xyyz$ não é um membro de A_3, uma contradição. Conseqüentemente, A_3 não é regular.

1.40 Let $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ be an AFN recognizing A, where A is some regular language. Construct $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ recognizing $NOPREFIX(A)$ as follows:

1. $Q' = Q$.
2. For $r \in Q'$ and $a \in \Sigma$ define $\delta'(r, a) = \begin{cases} \delta(r, a) & \text{if } r \notin F \\ \emptyset & \text{if } r \in F. \end{cases}$
3. $q_0' = q_0$.
4. $F' = F$.

1.44 Let $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$ and $M_C = (Q_C, \Sigma, \delta_C, q_C, F_C)$ be AFDs recognizing B and C respectively. Construct AFN $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ that recognizes $B \overset{1}{\leftarrow} C$ as follows. To decide whether its input w is in $B \overset{1}{\leftarrow} C$, the machine M checks that $w \in B$, and in parallel, nondeterministically guesses a string y that contains the same number of 1s as contained in w and checks that $y \in C$.

1. $Q = Q_B \times Q_C$.

2. For $(q, r) \in Q$ and $a \in \Sigma$ define

$$\delta((q,r),a) = \begin{cases} \{(\delta_B(q,\mathtt{0}),r)\} & \text{if } a = \mathtt{0} \\ \{(\delta_B(q,\mathtt{1}),\delta_C(r,\mathtt{1}))\} & \text{if } a = \mathtt{1} \\ \{(q,\delta_C(r,\mathtt{0}))\} & \text{if } a = \varepsilon. \end{cases}$$

3. $q_0 = (q_B, q_C)$.

4. $F = F_B \times F_C$.

1.46 **(b)** Let $B = \{\mathtt{0}^m\mathtt{1}^n \mid m \neq n\}$. Observe that $\overline{B} \cap \mathtt{0}^*\mathtt{1}^* = \{\mathtt{0}^k\mathtt{1}^k \mid k \geq 0\}$. If B were regular, then $\overline{B}$ would be regular and so would $\overline{B} \cap \mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$. But we already know that $\{\mathtt{0}^k\mathtt{1}^k \mid k \geq 0\}$ isn't regular, so B cannot be regular.

Alternatively, we can prove B to be nonregular by using the pumping lemma directly, though doing so is trickier. Assume that $B = \{\mathtt{0}^m\mathtt{1}^n \mid m \neq n\}$ is regular. Let p be the pumping length given by the pumping lemma. Observe that $p!$ is divisible by all integers from 1 to p, where $p! = p(p-1)(p-2)\cdots 1$. The string $s = \mathtt{0}^p\mathtt{1}^{p+p!} \in B$, and $|s| \geq p$. Thus the pumping lemma implies that s can be divided as xyz with $x = \mathtt{0}^a$, $y = \mathtt{0}^b$, and $z = \mathtt{0}^c\mathtt{1}^{p+p!}$, where $b \geq 1$ and $a+b+c = p$. Let s' be the string $xy^{i+1}z$, where $i = p!/b$. Then $y^i = \mathtt{0}^{p!}$ so $y^{i+1} = \mathtt{0}^{b+p!}$, and so $xyz = \mathtt{0}^{a+b+c+p!}\mathtt{1}^{p+p!}$. That gives $xyz = \mathtt{0}^{p+p!}\mathtt{1}^{p+p!} \notin B$, a contradiction.

1.50 Assume to the contrary that some TEF T outputs $w^{\mathcal{R}}$ on input w. Consider the input strings 00 and 01. On input 00, T must output 00, and on input 01, T must output 10. In both cases the first input bit is a 0 but the first output bits differ. Operating in this way is impossible for an TEF because it produces its first output bit before it reads its second input. Hence no such TEF can exist.

1.52 **(a)** Provamos essa asserção por contradição. Seja M um AFD de k-estados que reconhece L. Suponha, para efeito de uma contradição, que L tem índice maior que k. Isso significa que algum conjunto X com mais que k elementos é distingüível duas-a-duas por L. Em razão de M ter k estados, o princípio da casa-de-pombos implica que X contém duas cadeias distintas x e y, onde $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$. Aqui $\delta(q_0, x)$ é o estado no qual M está após iniciar no estado q_0 e ler a cadeia de entrada x. Então, para qualquer cadeia $z \in \Sigma^*$, $\delta(q_0, xz) = \delta(q_0, yz)$. Conseqüentemente, ou ambas xz e yz estão em L ou nenhuma delas está em L. Mas então x e y não são distingüíveis por L, contradizendo nossa suposição de que X é distingüível duas-a-duas por L.

(b) Suponha que $X = \{s_1, \ldots, s_k\}$ seja distingüível duas-a-duas por L. Construimos AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ com k estados reconhecendo L. Seja $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$, e defina $\delta(q_i, a)$ como sendo q_j, onde $s_j \equiv_L s_i a$ (a relação $\equiv_L$ é definida no Problema 1.51). Note que $s_j \equiv_L s_i a$ para alguma $s_j \in X$; caso contrário, $X \cup s_i a$ teria $k+1$ elementos e seria distingüível duas-a-duas por L, o que contradiria a suposição de que L tem índice k. Seja $F = \{q_i \mid s_i \in L\}$. Suponha que o estado inicial q_0 seja o q_i tal que $s_i \equiv_L \varepsilon$. M é construído de modo que, para qualquer estado q_i, $\{s \mid \delta(q_0, s) = q_i\} = \{s \mid s \equiv_L s_i\}$. Logo, M reconhece L.

(c) Suponha que L seja regular e suponha que k seja o número de estados em um AFD que reconhece L. Então do item (a) L tem índice no máximo k. Reciprocamente, se L tem índice k, então pelo item (b) ela é reconhecida por um AFD com k estados e portanto é regular. Para mostrar que o índice de L é o tamanho do menor AFD que a aceita, suponha que o índice de L é *exatamente* k. Então, pelo item (b), existe um AFD com k-estados que aceita L. Esse é o tal menor AFD porque se fosse

algo menor, então poderíamos mostrar pelo item (a) que o índice de L é menor que k.

1.55 **(a)** The minimum pumping length is 4. The string `000` is in the language but cannot be pumped, so 3 is not a pumping length for this language. If s has length 4 or more, it contains `1`s. By dividing s onto xyz, where x is `000` and y is the first `1` and z is everything afterward, we satisfy the pumping lemma's three conditions.

(b) The minimum pumping length is 1. The pumping length cannot be 0 because the string ε is in the language and it cannot be pumped. Every nonempty string in the language can be divided into xyz, where $x = \varepsilon$ and y is the first character and z is the remainder. This division satisfies the three conditions.

(d) The minimum pumping length is 3. The pumping length cannot be 2 because the string `11` is in the language and it cannot be pumped. Let s be a string in the language of length at least 3. If s is generated by $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^+\mathtt{0}^+\mathtt{1}^*$, we can write it as xyz, where x is the empty string, y is the first symbol of s, and z is the remainder of s. Breaking s up in this way shows that it can be pumped. If s is generated by $\mathtt{1}\mathtt{0}^*\mathtt{1}$, we can write it as xyz, where $x = \mathtt{1}$ and $y = \mathtt{0}$ and z is the remainder of s. This division gives a way to pump s.

2

LINGUAGENS LIVRES-DO-CONTEXTO

No Capítulo 1 introduzimos dois métodos diferentes, embora equivalentes, de descrever linguagens: *autômatos finitos* e *expressões regulares*. Mostramos que muitas linguagens podem ser descritas dessa maneira mas que algumas linguagens simples, tal como $\{0^n1^n | \, n \geq 0\}$, não podem.

Neste capítulo, apresentamos ***gramáticas livres-do-contexto***, um método mais poderoso de descrever linguagens. Tais gramáticas podem descrever certas características que têm uma estrutura recursiva, o que as torna makes úteis em uma variedade de aplicações.

Gramáticas livres-do-contexto foram primeiramente utilizadas no estudo de linguagens humanas. Uma maneira de entender o relacionamento de termos tais como *nome*, *verbo* e *preposição* e suas respectivas frases leva a uma recursão natural, porque frases nominais podem aparecer dentro de frases verbais e vice versa. Gramáticas livres-do-contexto podem capturar aspectos importantes desses relacionamentos.

Uma aplicação importante de gramáticas livres-do-contexto ocorre na especificação e compilação de linguagens de programação. Uma gramática para uma linguagem de programação frequentemente aparece como uma referência para pessoas tentando aprender a sintaxe da linguagem. Projetistas de compiladores e interpretadores para linguagens de programação frequentemente começam obtendo uma gramática para a linguagem. A maioria dos compiladores e interpretadores contêm uma componente chamada ***analisador*** que extrai o significado de um programa antes de gerar o código compilado ou realizar a execução interpretada. Um número de metodologias facilitam a

construção de um analisador uma vez que uma gramática livre-do-contexto esteja disponível. Algumas ferramentas até geram automaticamente o analisador a partir da gramática.

A coleção de linguagens associadas com gramáticas livres-do-contexto são denominadas ***linguagens livres-do-contexto***. Elas incluem todas as linguagens regulares e muitas linguagens adicionais. Neste capítulo, damos uma definição formal de gramáticas livres-do-contexto e estudamos as propriedades de linguagens livres-do-contexto. Também introduzimos ***autômatos com pilha***, uma classe de máquinas que reconhecem as linguagens livres-do-contexto. Autômatos com pilha são úteis porque eles nos permitem ganhar melhor percepção sobre o poder de linguagens livres-do-contexto.

2.1 GRAMÁTICAS LIVRES-DO-CONTEXTO

Segue um exemplo de uma gramática livre-do-contexto, que chamamos G_1.

$$A \to \texttt{0}A\texttt{1}$$
$$A \to B$$
$$B \to \texttt{\#}$$

Uma gramática consiste de uma coleção de ***regras de substituição***, também chamadas ***produções***. Cada regra aparece como uma linha na gramática, compreendendo um símbolo e uma cadeia separados por uma seta. O símbolo é chamado de uma ***variável***. A cadeia consiste de variáveis e outros símbolos chamados de ***terminais***. Os símbolos de variáveis frequentemente são representados por letras maiúsculas. Os terminais são análogos ao alfabeto de entrada e frequentemente são representados por letras minúsculas, números, ou símbolos especiais. Uma variável é designada como a ***variável inicial***. Ela usualmente ocorre no lado esquerdo da primeira regra. Por exemplo, a gramática G_1 contém três regras. As variáveis de G_1 são A e B, onde A é a variável inicial. Seus terminais são `0`, `1`, e `#`.

Você usa uma gramática para descrever uma linguagem gerando cada cadeia dessa linguagem da seguinte maneira.

1. Escreva a variável inicial. Ela é a variável no lado esquerdo da primeira regra, a menos que especificado em contrário.
2. Encontre uma variável que está escrita e uma regra que começa com essa variável. Substitua a variável escrita pelo lado direito dessa regra.
3. Repita o passo 2 até que não reste nenhuma variável.

Por exemplo, a gramática G_1 gera a cadeia `000#111`. A seqüência de substituições para obter uma cadeia é denominada uma ***derivação***. Uma

derivação da cadeia 000#111 na gramática G_1 é

$$A \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 000A111 \Rightarrow 000B111 \Rightarrow 000\#111$$

Você também pode representar a mesma informação pictorialmente com uma ***árvore sintática***. Um exemplo de uma árvore sintática é mostrado na Figura 2.1.

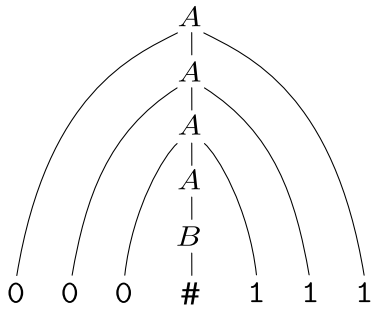


FIGURA 2.1
Árvore sintática para 000#111 na gramática G_1

Todas as cadeias geradas dessa maneira constituem a ***linguagem de uma gramática***. Escrevemos $L(G_1)$ para a linguagem da gramática G_1. Alguma experimentação com a gramática G_1 nos mostra que $L(G_1)$ é $\{0^n\#1^n \mid n \geq 0\}$. Qualquer linguagem que pode ser gerada por alguma gramática livre-do-contexto é chamada de uma ***linguagem livre-do-contexto*** (LLC). Por conveniência quando apresentamos uma gramática livre-do-contexto, abreviamos várias regras com a mesma variável no lado esquerdo, tais como $A \rightarrow 0A1$ e $A \rightarrow B$, numa única linha $A \rightarrow 0A1 \mid B$, usando o símbolo " | " como um "ou."

O que vem a seguir é um segundo exemplo de uma gramática livre-do-contexto, chamada G_2, que descreve um fragmento da língua inglesa.

⟨SENTENCE⟩ → ⟨NOUN-PHRASE⟩⟨VERB-PHRASE⟩
⟨NOUN-PHRASE⟩ → ⟨CMPLX-NOUN⟩ | ⟨CMPLX-NOUN⟩⟨PREP-PHRASE⟩
⟨VERB-PHRASE⟩ → ⟨CMPLX-VERB⟩ | ⟨CMPLX-VERB⟩⟨PREP-PHRASE⟩
⟨PREP-PHRASE⟩ → ⟨PREP⟩⟨CMPLX-NOUN⟩
⟨CMPLX-NOUN⟩ → ⟨ARTICLE⟩⟨NOUN⟩
⟨CMPLX-VERB⟩ → ⟨VERB⟩ | ⟨VERB⟩⟨NOUN-PHRASE⟩
⟨ARTICLE⟩ → a | the
⟨NOUN⟩ → boy | girl | flower
⟨VERB⟩ → touches | likes | sees
⟨PREP⟩ → with

A gramática G_2 tem 10 variáveis (os termos gramaticais em maiúsculas escritos dentro de colchetes); 27 terminais (o alfabeto inglês padrão mais um caracter de espaço em branco); e 18 regras. As cadeias em $L(G_2)$ incluem

```
a boy sees
the boy sees a flower
a girl with a flower likes the boy
```

Cada uma dessas cadeias tem uma derivação na gramática G_2. Abaixo está uma derivação da primeira cadeia nessa lista.

$$\begin{aligned}
\langle \text{SENTENCE} \rangle &\Rightarrow \langle \text{NOUN-PHRASE} \rangle \langle \text{VERB-PHRASE} \rangle \\
&\Rightarrow \langle \text{CMPLX-NOUN} \rangle \langle \text{VERB-PHRASE} \rangle \\
&\Rightarrow \langle \text{ARTICLE} \rangle \langle \text{NOUN} \rangle \langle \text{VERB-PHRASE} \rangle \\
&\Rightarrow \texttt{a } \langle \text{NOUN} \rangle \langle \text{VERB-PHRASE} \rangle \\
&\Rightarrow \texttt{a boy } \langle \text{VERB-PHRASE} \rangle \\
&\Rightarrow \texttt{a boy } \langle \text{CMPLX-VERB} \rangle \\
&\Rightarrow \texttt{a boy } \langle \text{VERB} \rangle \\
&\Rightarrow \texttt{a boy sees}
\end{aligned}$$

DEFINIÇÃO FORMAL DE UMA GRAMÁTICA LIVRE-DO-CONTEXTO

Vamos formalizar nossa noção de uma gramática livre-do-contexto (GLC).

DEFINIÇÃO 2.2

Uma ***gramática livre-do-contexto*** é uma 4-upla (V, Σ, R, S), onde

1. V é um conjunto finito denonimado de as ***variáveis***,
2. Σ é um conjunto finito, disjunto de V, denonimado de os ***terminais***,
3. R é um conjunto finito de ***regras***, com cada regra sendo uma variável e uma cadeia de variáveis e terminais, e
4. $S \in V$ é a variável inicial.

Se u, v, e w são cadeias de variáveis e terminais, e $A \rightarrow w$ é uma regra da gramática, dizemos que uAv ***origina*** uwv, escrito $uAv \Rightarrow uwv$. Digamos que u ***deriva*** v, escrito $u \stackrel{*}{\Rightarrow} v$, se $u = v$ ou se uma seqüência $u_1, u_2, \ldots, u_k$ existe para $k \geq 0$ e

$$u \Rightarrow u_1 \Rightarrow u_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_k \Rightarrow v.$$

A ***linguagem da gramática*** é $\{w \in \Sigma^* \mid S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\}$.

Na gramática G_1, $V = \{A, B\}$, $\Sigma = \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{\#}\}$, $S = A$, e R é a coleção das três regras que aparecem na página 106. Na gramática G_2,

$$V = \{\langle\text{SENTENCE}\rangle, \langle\text{NOUN-PHRASE}\rangle, \langle\text{VERB-PHRASE}\rangle, \langle\text{PREP-PHRASE}\rangle, \langle\text{CMPLX-NOUN}\rangle, \langle\text{CMPLX-VERB}\rangle, \langle\text{ARTICLE}\rangle, \langle\text{NOUN}\rangle, \langle\text{VERB}\rangle, \langle\text{PREP}\rangle\},$$

e $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{z}, \text{“ ”}\}$. O símbolo “ ” é o símbolo para o espaço em branco, colocado invisivelmente após cada palavra (`a`, `boy`, etc.), de modo que as palavras não vão se juntar.

Frequentemente especificamos uma gramática escrevendo somente suas regras. Podemos identificar as variáveis como os símbolos que aparecem no lado esquerdo das regras e os terminais como os símbolos remanescentes. Por convenção, a variável inicial é a variável no lado esquerdo da primeira regra.

EXEMPLOS DE GRAMÁTICAS LIVRES-DO-CONTEXTO

EXEMPLO 2.3

Considere a gramática $G_3 = (\{S\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, R, S)$. O conjunto de regras, R, é

$$S \rightarrow \texttt{a}S\texttt{b} \mid SS \mid \varepsilon.$$

Essa gramática gera cadeias tais como `abab`, `aaabbb`, e `aababb`. Você pode ver mais facilmente o que essa linguagem é se você pensar em `a` como um parênteses à esquerda “`(`” e `b` como um parênteses à direita “`)`”. Vista dessa forma, $L(G_3)$ é a linguagem de todas as cadeias de parênteses apropriadamente aninhados. ■

EXEMPLO 2.4

Considere a gramática $G_4 = (V, \Sigma, R, \langle\text{EXPR}\rangle)$.

V é $\{\langle\text{EXPR}\rangle, \langle\text{TERMO}\rangle, \langle\text{FATOR}\rangle\}$ e Σ é $\{\texttt{a}, \texttt{+}, \texttt{x}, \texttt{(}, \texttt{)}\}$. As regras são

$$\begin{aligned}
\langle\text{EXPR}\rangle &\rightarrow \langle\text{EXPR}\rangle\texttt{+}\langle\text{TERMO}\rangle \mid \langle\text{TERMO}\rangle \\
\langle\text{TERMO}\rangle &\rightarrow \langle\text{TERMO}\rangle\texttt{x}\langle\text{FATOR}\rangle \mid \langle\text{FATOR}\rangle \\
\langle\text{FATOR}\rangle &\rightarrow \texttt{(}\langle\text{EXPR}\rangle\texttt{)} \mid \texttt{a}
\end{aligned}$$

As duas cadeias `a+axa` e `(a+a)xa` podem ser geradas com a gramática G_4. As árvores sintáticas são mostradas na figura abaixo.

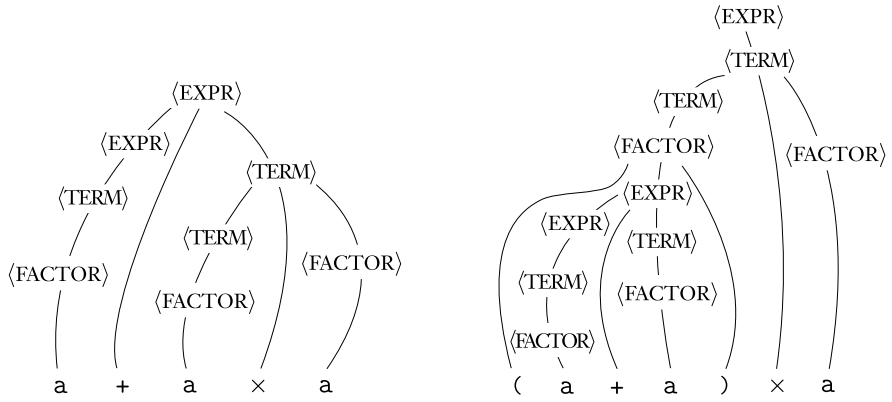


FIGURA 2.5
Árvores sintáticas para as cadeias `a+axa` e `(a+a)xa`

Um compilador traduz código escrito em uma linguagem de programação para uma outra forma, usualmente mais adequada para execução. Para fazer isso, o compilador extrai o significado do código a ser compilado em um processo chamado de ***análise léxica***. Uma representação desse significado é a árvore sintática para o código, na gramática livre-do-contexto para a linguagem de programação. Discutimos um algoritmo que analisa linguagens livres-do-contexto mais adiante no Teorema 7.16 e no Problema 7.43.

A gramática G_4 descreve um fragmento de uma linguagem de programação que lida com expressões aritméticas. Observe como as árvores sintáticas na Figura 2.5 "agrupam" as operações. A árvore para `a+axa` agrupa o operador `x` e seus operandos (os dois segundos `a`'s) como um operando do operador `+`. Na árvore para `(a+a)xa`, o agrupamento é revertido. Esses agrupamentos estão de acordo com a precedência padrão da multiplicação antes da adição e com o uso de parênteses para sobrepor a precedência padrão. A gramática G_4 é projetada para capturar essas relações de precedência. ■

PROJETANDO GRAMÁTICAS LIVRES-DO-CONTEXTO

Tal qual com o projeto de autômatos finitos, discutido na Seção 1.1 (página 44), o projeto de gramáticas livres-do-contexto requer criatividade. De fato, gramáticas livres-do-contexto são ainda mais complicadas de construir que autômatos finitos porque estamos mais acostumados a programar uma máquina para tarefas específicas que a descrever linguagens com gramáticas. As técnicas seguintes são úteis, isoladamente ou em combinação, quando você se confronta com o problema de construir uma GLC.

Primeiro, muitas LLCs são a união de LLCs mais simples. Se você tem que construir uma GLC para uma LLC que você pode quebrar em partes mais sim-

ples, faça isso e aí então construa gramáticas individuais para cada parte. Essas gramáticas individuais podem ser facilmente reunidas em uma gramática para a linguagem original combinando suas regras e então adicionando a nova regra $S \rightarrow S_1 \mid S_2 \mid \cdots \mid S_k$, onde as variáveis S_i são as variáveis iniciais para as gramáticas individuais. Resolver vários problemas mais simples é frequentemente mais fácil que resolver um problema complicado.

Por exemplo, para obter uma gramática para a linguagem $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \mid n \geq 0\} \cup \{\mathtt{1}^n\mathtt{0}^n \mid n \geq 0\}$, primeiro construa a gramática

$$S_1 \rightarrow \mathtt{0}S_1\mathtt{1} \mid \varepsilon$$

para a linguagem $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \mid n \geq 0\}$ e a gramática

$$S_2 \rightarrow \mathtt{1}S_2\mathtt{0} \mid \varepsilon$$

para a linguagem $\{\mathtt{1}^n\mathtt{0}^n \mid n \geq 0\}$ e então adicione a regra $S \rightarrow S_1 \mid S_2$ para dar a gramática

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S_1 \mid S_2 \\ S_1 &\rightarrow \mathtt{0}S_1\mathtt{1} \mid \varepsilon \\ S_2 &\rightarrow \mathtt{1}S_2\mathtt{0} \mid \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Segundo, construir uma GLC para uma linguagem que acontece de ser regular é fácil se você puder primeiro construir um AFD para essa linguagem. Você pode converter qualquer AFD numa GLC equivalente da seguinte maneira. Pegue uma variável R_i para cada estado q_i do AFD. Adicione a regra $R_i \rightarrow aR_j$ à GLC se $\delta(q_i, a) = q_j$ for uma transição no AFD. Adicione a regra $R_i \rightarrow \varepsilon$ se q_i for um estado de aceitação do AFD. Faça R_0 a variável inicial da gramática, onde q_0 é o estado inicial da máquina. Verifique se a GLC resultante gera a mesma linguagem que o AFD reconhece.

Terceiro, certas linguagens livres-do-contexto contêm cadeias com duas subcadeias que são "ligadas" no sentido de que uma máquina para uma linguagem como essa precisaria memorizar uma quantidade ilimitada de informação sobre uma das subcadeias para verificar que ela corresponde apropriadamente à outra subcadeia. Essa situação ocorre na linguagem $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \mid n \geq 0\}$ porque uma máquina precisaria memorizar o número de 0s de modo a verificar que ele é igual ao número de 1s. Você pode construir uma GLC para lidar com essa situação usando uma regra da forma $R \rightarrow uRv$, que gera cadeias nas quais a parte contendo os u's corresponde à parte contendo os v's.

Finalmente, em linguagens mais complexas, as cadeias podem conter certas estruturas que aparecem recursivamente como parte de outras (ou da mesma) estruturas. Essa situação ocurre na gramática que gera expressões aritméticas no Exemplo 2.4. Sempre que o símbolo a aparece, ao invés dele uma expressão parentizada inteira pode aparecer recursivamente. Para atingir esse efeito, coloque o símbolo da variável que gera a estrutura na posição das regras correspondente a onde aquela estrutura pode aparecer recursivamente.

AMBIGÜIDADE

Às vezes uma gramática pode gerar a mesma cadeia de várias maneiras diferentes. Tal cadeia terá várias árvores sintáticas diferentes e portanto vários significados diferentes. Esse resultado pode ser indesejável para certas aplicações, tais como linguagens de programação, onde um dado programa deve ter uma única interpretação.

Se uma gramática gera a mesma cadeia de várias maneiras diferentes, dizemos que a cadeia é derivada *ambiguamente* nessa gramática. Se uma gramática gera alguma cadeia ambiguamente dizemos que a gramática é *ambígua*.

Por exemplo, considere a gramática G_5:

$$\langle \text{EXPR} \rangle \rightarrow \langle \text{EXPR} \rangle \texttt{+} \langle \text{EXPR} \rangle \mid \langle \text{EXPR} \rangle \texttt{x} \langle \text{EXPR} \rangle \mid \texttt{(} \langle \text{EXPR} \rangle \texttt{)} \mid \texttt{a}$$

Essa gramática gera a cadeia `a+axa` ambiguamente. A figura abaixo mostra as duas árvores sintáticas diferentes.

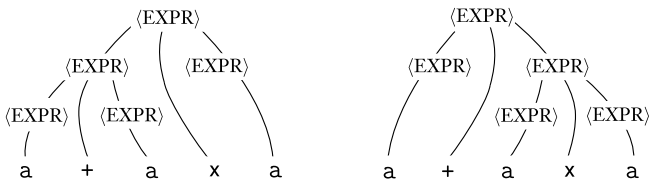


FIGURA 2.6
As duas árvores sintáticas para a cadeia `a+axa` na gramática G_5

Essa gramática não captura as relações de precedência usuais e portanto podem agrupar o $+$ antes do $\times$ ou vice versa. Por outro lado, a gramática G_4 gera exatamente a mesma linguagem, mas toda cadeia gerada tem uma árvore sintática única. Logo, G_4 é não-ambígua, enquanto que G_5 é ambígua.

A gramática G_2 (página 107) é um outro exemplo de uma gramática ambígua. A sentença `the girl touches the boy with the flower` tem duas derivações diferentes. No Exercício 2.8 pede-se que você dê as duas árvores sintáticas e observe sua correspondência com as duas maneiras diferentes de ler essa sentença.

Agora formalizamos a noção de ambigüidade. Quando dizemos que uma gramática gera uma cadeia ambiguamente, queremos dizer que a cadeia tem duas árvores sintáticas diferentes, e não duas derivações diferentes. Duas derivações podem diferir meramente pela ordem na qual elas substituem variáveis e ainda assim não na sua estrutura geral. Para nos concentrarmos na estrutura definimos

um tipo de derivação que substitui variáveis numa ordem fixa. Uma derivação de uma cadeia w em uma gramática G é uma ***derivação mais à esquerda*** se a cada passo a variável remanescente mais à esquerda é aquela que é substituída. A derivação que precede a Definição 2.2 (página 108) é uma derivação mais à esquerda.

DEFINIÇÃO 2.7

Uma cadeia w é derivada ***ambiguamente*** na gramática livre-do-contexto G se ela tem duas ou mais derivações mais à esquerda diferentes. A gramática G é ***ambígua*** se ela gera alguma cadeia ambiguamente.

Às vezes quando temos uma gramática ambígua podemos encontrar uma gramática não-ambígua que gera a mesma linguagem. Algumas linguagens livres-do-contexto, entretanto, podem ser geradas apenas por gramáticas ambíguas. Tais linguagens são chamadas ***inerentemente ambíguas***. O Problema 2.29 pede que você prove que a linguagem $\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i = j \text{ ou } j = k\}$ é inerentemente ambígua.

FORMA NORMAL DE CHOMSKY

Quando se trabalha com linguagens livres-do-contexto, é freqüentemente conveniente tê-las em forma simplificada. Uma das formas mais simples e mais úteis é chamada forma normal de Chomsky. A forma normal de Chomsky é útil quando se quer dar algoritmos para trabalhar com gramáticas livres-do-contexto, como fazemos nos Capítulos 4 e 7.

DEFINIÇÃO 2.8

Uma gramática livre-do-contexto está na ***forma normal de Chomsky*** se toda regra é da forma

$$A \to BC$$
$$A \to a$$

onde a é qualquer terminal e A, B e C são quaisquer varíveis—exceto que B e C pode não ser a variável inicial. Adicionalmente, permitimos a regra $S \to \varepsilon$, onde S é a variável inicial.

TEOREMA 2.9

Qualquer linguagem livre-do-contexto é gerada por uma gramática livre-do-contexto na forma normal de Chomsky.

IDÉIA DA PROVA Podemos converter qualquer gramática G na forma normal de Chomsky. A conversão tem vários estágios nos quais as regras que violam as condições são substituídas por regras equivalentes que são satisfactórias. Primeiro, adicionamos uma nova variável inicial. Então, eliminamos todas as ***regras*** ε da forma $A \to \varepsilon$. Também eliminamos todas as ***regras unitárias*** da forma $A \to B$. Em ambos os casos, corrigimos a gramática para garantir que ela ainda geere a mesma linguagem. Finalmente, convertemos as regras remanescentes na forma apropriada.

PROVA Primeiro, adicionamos uma nova variável inicial S_0 e a regra $S_0 \to S$, na qual S era a variável inicial original. Essa mudança garante que a variável inicial não ocorre no lado direito de uma regra.

Segundo, cuidamos de todas as regras ε. Removemos uma ε-regra $A \to \varepsilon$, em que A não é a variável inicial. Então para cada ocorrência de um A no lado direito de uma regra, adicionamos uma nova regra com essa ocorrência apagada. Em outras palavras, se $R \to uAv$ é uma regra na qual u e v são cadeias de variáveis e terminais, adicionamos a regra $R \to uv$. Fazemos isso para cada *ocorrência* de A, de modo que a regra $R \to uAvAw$ nos leva a adicionar $R \to uvAw$, $R \to uAvw$, e $R \to uvw$. Se tivermos a regra $R \to A$, adicionamos $R \to \varepsilon$ a menos que tivéssemos previamente removido a regra $R \to \varepsilon$. Repetimos esses passos até que eliminemos todas as regras ε que não envolvem a variável inicial.

Terceiro, lidamos com todas as regras unitárias. Removemos uma regra unitária $A \to B$. Então, sempre que uma regra $B \to u$ aparece, adicionamos a regra $A \to u$ a menos que isso tenha sido uma regra unitária previamente removida. Como antes, u é uma cadeia de variáveis e terminais. Repetimos esses passos até que eliminemos todas as regras unitárias.

Finalmente, convertemos todas as regras remanescentes para a forma apropriadas. Substituimos cada regra $A \to u_1u_2 \cdots u_k$, onde $k \geq 3$ e cada u_i é uma variável ou símbolo terminal, com as regras $A \to u_1A_1$, $A_1 \to u_2A_2$, $A_2 \to u_3A_3$, ..., e $A_{k-2} \to u_{k-1}u_k$. Os A_i's são novas variáveis. Se $k = 2$, substituimos qualquer terminal u_i na(s) regra(s) precedente(s) com a nova variável U_i e adicionamos a regra $U_i \to u_i$.

EXEMPLO 2.10

Suponha que G_6 seja a GLC abaixo e converta-a para a forma normal de Chomsky usando o procedimento de conversão que acaba de ser dado. A série de gramáticas apresentadas ilustra os passos na conversão. As regras mostradas em negrito acabaram de ser adicionadas. As regras mostradas em cinza acabaram de ser removidas.

1. A GLC original G_6 é mostrada à esquerda. O resultado de se aplicar o primeiro passo para introduzir uma nova variável inicial aparece à direita.

$$
\begin{aligned}
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \\
A &\to B \mid S \\
B &\to \mathtt{b} \mid \varepsilon
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{S_0} &\boldsymbol{\to S} \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \\
A &\to B \mid S \\
B &\to \mathtt{b} \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

2. Remova as regras ε $B \to \varepsilon$, mostradas à esquerda, e $A \to \varepsilon$, mostrada à direita.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathbf{a} \\
A &\to B \mid S \mid \boldsymbol{\varepsilon} \\
B &\to \mathtt{b} \mid \boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid \boldsymbol{SA} \mid \boldsymbol{AS} \mid \boldsymbol{S} \\
A &\to B \mid S \mid \boldsymbol{\varepsilon} \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

3a. Remova regras unitárias $S \to S$, mostradas à esquerda, e $S_0 \to S$, mostrada à direita.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \mid \boldsymbol{S} \\
A &\to B \mid S \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
S_0 &\to \boldsymbol{S} \mid \boldsymbol{ASA} \mid \mathbf{a}\boldsymbol{B} \mid \mathbf{a} \mid \boldsymbol{SA} \mid \boldsymbol{AS} \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to B \mid S \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

3b. Remova as regras unitárias $A \to B$ e $A \to S$.

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to \boldsymbol{B} \mid S \mid \mathbf{b} \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
S_0 &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\to ASA \mid \mathtt{a}B \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to \boldsymbol{S} \mid \mathtt{b} \mid \boldsymbol{ASA} \mid \mathbf{a}\boldsymbol{B} \mid \mathbf{a} \mid \boldsymbol{SA} \mid \boldsymbol{AS} \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

4. Converta as regras remanescentes para a forma apropriada acrescentando variáveis e regras adicionais. A gramática final em forma normal de Chomsky é equivalente a G_6, que segue. (Na realidade, o procedimento dado no Teorema 2.9 produz diversas variáveis U_i juntamente com várias regras $U_i \to \mathtt{a}$. Simplificamos a gramática resultante usando uma única variável U e a regra $U \to \mathtt{a}$.)

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to AA_1 \mid UB \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
S &\to AA_1 \mid UB \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A &\to \mathtt{b} \mid AA_1 \mid UB \mid \mathtt{a} \mid SA \mid AS \\
A_1 &\to SA \\
U &\to \mathtt{a} \\
B &\to \mathtt{b}
\end{aligned}
$$

2.2 AUTÔMATO COM PILHA

Nesta seção introduzimos um novo tipo de modelo computacional denominado ***autômato com pilha***. Esses autômatos são como autômatos finitos não-determinísticos mas têm uma componente extra chamada ***pilha***. A pilha provê memória adicional além da quantidade finita disponível no controle. A pilha permite que o autômato com pilha reconheça algumas linguagens não-regulares.

Autômatos com pilha são equivalentes em poder a gramáticas livres-do contexto. Essa equivalência é útil porque ela nos dá duas opções para provar que uma linguagem é livre-do-contexto. Podemos dar ou uma gramática livre-do-contexto que a gera ou um autômato com pilha que a reconhece. Certas linguagens são mais facilmente descritas em termos de geradores, enquanto que outras são mais facilmente descritas em termos de reconhecedores.

A figura abaixo é uma representação esquemática de um autômato com pilha. O controle representa os estados e a função de transição, a fita contém a cadeia de entrada, e a seta representa a cabeça de entrada, apontando para o próximo símbolo de entrada a ser lido.

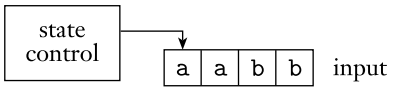


FIGURA 2.11
Esquemática de um autômato com pilha

Com a adição de um componente de pilha obtemos uma representação esquemática de um autômato com pilha, como mostrado na figura abaixo.

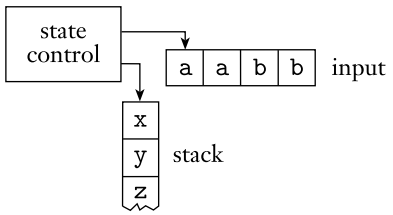


FIGURA 2.12
Esquemática de um autômato com pilha

Um autômato com pilha (AP) pode escrever símbolos sobre a fita e lê-los de

volta mais tarde. Escrever um símbolo "empilha" todos os outros símbolos sobre a pilha. Em qualquer tempo o símbolo no topo da pilha pode ser lido e removido. Os símbolos remanescentes então voltam a subir. Escrever um símbolo na pilha é frequentemente referenciado como ***empilhar*** o símbolo, e remover um símbolo é referenciado como ***desempilhá-***lo. Note que todo acesso à pilha, tanto para ler como para escrever, pode ser feito somente no topo. Em outras palavras, uma pilha é um dispositivo de memória do tipo "o último que entra, é o primeiro que sai". Se uma certa informação for escrita na pilha e uma informação adicional for escrita posteriormente, a informação anterior se torna inacessível até que a última informação é removida.

Os pratos num balcão de serviço de uma cafeteria ilustram uma pilha. A pilha de pratos baseia-se numa fonte tal que quando um novo prato é colocado no topo da pilha, os pratos abaixo dele descem. A pilha em um autômato com pilha é como uma pilha de pratos, com cada prato tendo um símbolo escrito nela.

Uma pilha é de muita utilidade porque ela pode guardar uma quantidade ilimitada de informação. Lembremo-nos de que um autômato finito é incapaz de reconhecer a linguagem $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n | \, n \geq 0\}$ porque ela não pode armazenar números muito grandes em sua memória finita. Um AP é capaz de reconhecer essa linguagem porque ele pode usar sua pilha para armazenar o número de 0s que ele já viu. Portanto, a natureza ilimitada de uma pilha permite que ao AP armazenar números de tamanho ilimitado. A descrição informal que se segue mostra como o autômato para essa linguagem funciona.

> Leia os símbolos da entrada. À medida que cada 0 é lido, empilhe-o. Assim que os 1s forem vistos, desempilhe um 0 para cada 1 lido. Se a leitura da entrada for terminada exatamente quando a pilha fica vazia de 0s, aceite a entrada. Se a pilha fica vazia enquanto 1s permanecem ou se os 1s se acabam enquanto a pilha ainda contém 0s ou se quaisquer 0s aparecem na entrada após os 1s, rejeite a entrada.

Como mencionado anteriormente, os autômatos com pilha podem ser não-determinísticos. Autômatos com pilha determinísticos e não-determinísticos *não* são equivalentes em poder. Autômatos com pilha não-determinísticos reconhecem certas linguagens que nenhum autômato com pilha determinístico pode reconhecer, embora não provaremos esse fato. Damos linguagens que requerem não-determinismo nos Exemplos 2.16 e 2.18. Lembremo-nos de que autômatos finitos determinísticos e não-determinísticos de fato reconhecem a mesma classe de linguagens, portanto a situação dos autômatos com pilha é diferente. Focamos nos autômatos com pilha não-determinísticos porque esses autômatos são equivalentes em poder a gramáticas livres-do-contexto.

DEFINIÇÃO FORMAL DE UM AUTÔMATO COM PILHA

A definição formal de um autômato com pilha é similar àquela de um autômato finito, exceto pela pilha. A pilha é um dispositivo contendo símbolos provenientes de algum alfabeto. A máquina pode usar alfabetos diferentes para sua entrada

e sua pilha, portanto agora especificamos tanto um alfabeto de entrada Σ e um alfabeto de pilha Γ.

No coração de qualquer definição formal de um autômato está a função de transição, que descreve seu comportamento. Lembremo-nos de que $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ e $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \{\varepsilon\}$. O domínio da função de transição é $Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon$. Portanto, o estado atual, o próximo símbolo lido, e o símbolo no topo da pilha determinam o próximo movimento de um autômato com pilha. Qualquer dos símbolos pode ser ε, causando a máquina a se mover sem ler um símbolo da entrada ou sem ler um símbolo da pilha.

Para o contradomínio da função de transição precisamos considerar o que permitir o autômato fazer quando ele está numa situação específica. Ele pode entrar em algum novo estade e possivelmente escrever um símbolo no topo da pilha. A função δ pode indicar essa ação retornando um membro de Q juntamente com um membro de Γ_ε, ou seja, um membro de $Q \times \Gamma_\varepsilon$. Em razão de termos permitido não-determinismo nesse modelo, uma situação pode ter vários próximos movimentos legítimos. A função de transição incorpora não-determinismo da maneira usual, retornando um conjunto de membros de $Q \times \Gamma_\varepsilon$, ou seja, um membro de $\mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$. Colocando tudo junto, nossa função de transição δ toma a forma $\delta\colon Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$.

DEFINIÇÃO 2.13

Um ***autômato com pilha*** é uma 6-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, onde Q, Σ, Γ, e F são todos conjuntos finitos, e

1. Q é o conjunto de estados,
2. Σ é o alfabeto de entrada,
3. Γ é o alfabeto de pilha,
4. $\delta\colon Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma_\varepsilon)$ é a função de transição,
5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial, e
6. $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados de aceitação.

Um autômato com pilha $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ computa da seguinte maneira. Ele aceita a entrada w se w pode ser escrita como $w = w_1 w_2 \cdots w_m$, onde cada $w_i \in \Sigma_\varepsilon$ e seqüências de estados $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ e cadeias $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ existem que satisfazem as três seguintes condições. As cadeias s_i representam a seqüência de conteúdo da pilha que M tem no ramo de aceitação da computação.

1. $r_0 = q_0$ e $s_0 = \varepsilon$. Essa condição significa que M inicia apropriadamente, no estado inicial e com uma pilha vazia.
2. Para $i = 0, \ldots, m-1$, temos $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, onde $s_i = at$ e $s_{i+1} = bt$ para algum $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ e $t \in \Gamma^*$. Essa condição afirma que M se

move apropriadamente conforme o estado, a pilha, e o próximo símbolo de entrada.

3. $r_m \in F$. Essa condição afirma que um estado de aceitação ocorre ao final da entrada.

EXEMPLOS DE AUTÔMATOS COM PILHA

EXEMPLO 2.14

O que se segue é a descrição formal do AP (página 117) que reconhece a linguagem $\{0^n1^n | \, n \geq 0\}$. Suponha que M_1 seja $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$, onde

$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$,

$\Sigma = \{0,1\}$,

$\Gamma = \{0, \$\}$,

$F = \{q_1, q_4\}$, e

δ é dada pela tabela abaixo, na qual entradas em branco significam $\emptyset$.

Input:	0			1			ε		
Pilha:	0	$	ε	0	$	ε	0	$	ε
q_1									$\{(q_2, \$)\}$
q_2			$\{(q_2, 0)\}$	$\{(q_3, \varepsilon)\}$					
q_3				$\{(q_3, \varepsilon)\}$				$\{(q_4, \varepsilon)\}$	
q_4									

Podemos também usar um diagrama de estados para descrever um AP, como mostrado nas Figuras 2.15, 2.17 e 2.19. Tais diagramas são semelhantes aos diagramas de estados usados para descrever autômatos finitos, modificados para mostrar como o AP usa sua pilha quando vai de estado para estado. Escrevemos "a,$b \rightarrow c$" para significar que quando a máquina está lendo um a da entrada ela pode substituir o símbolo b no topo da pilha por um c. Quaisquer de a, b e c podem ser ε. Se a é ε, a máquina pode fazer essa transição sem ler qualquer símbolo da entrada. Se b é ε, a máquina pode fazer essa transição sem ler nem desempilhar qualquer símbolo da pilha. Se c é ε, a máquina não escreve nenhum símbolo na pilha ao fazer essa transição.

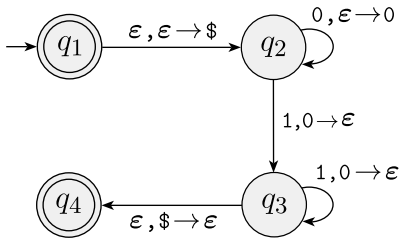


FIGURA 2.15
Diagrama de estados para o AP M_1 que reconhece $\{0^n1^n | \, n \geq 0\}$

A descrição formal de um AP não contém nenhum mecanismo explícito para permitir ao AP testar por pilha vazia. Esse AP é capaz de obter o mesmo efeito inicialmente colocando um símbolo especial $ na pilha. Então, se ele em algum momento futuro vê o $ novamente, ele sabe que a pilha efetivamente está vazia. Subsequentemente, quando nos referimos a testar por pilha vazia em uma descrição informal de um AP, implementamos o procedimento da mesma maneira.

Similarmente, APs não podem testar explicitamente por ter atingido o final da cadeia de entrada. Esse AP é capaz de atingir esse efeito porque o estado de aceitação faz efeito somente quando a máquina está no final da entrada. Portanto, de agora em diante, assumimos que APs podem testar pelo final da entrada, e sabemos podemos implementá-lo da mesma maneira.

EXEMPLO 2.16

Este exemplo ilustra um autômato com pilha que reconhece a linguagem

$$\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k | \, i, j, k \geq 0 \text{ and } i = j \text{ ou } i = k\}.$$

Informalmente o AP para essa linguagem funciona primeiro lendo e empilhando os a's. Quando os a's terminam, a máquina tem todos eles na pilha de modo que ela possa casá-los ou com os b's ou os c's. Essa manobra é um pouco complicada porque a máquina não sabe antecipadamente se casa os a's com os b's ou com os c's. Não-determinismo vem na hora certa aqui.

Usando seu não-determinismo, o AP pode adivinhar se casa os a's com os b's ou com os c's, como mostrado na figura abaixo. Pense na máquina como tendo dois ramos de seu não-determinismo, um para cada adivinhação possível. Se um deles casa, aquele ramo aceita e a máquina toda aceita. Na verdade, poderíamos mostrar, embora não façamos isso, não-determinismo é *essential* para se reconhecer essa linguagem com um AP.

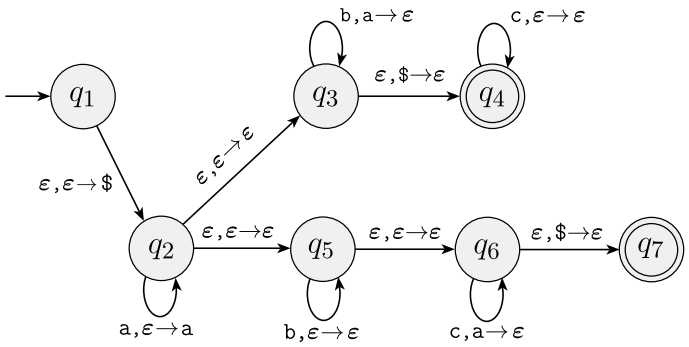


FIGURA 2.17
Diagrama de estados para o AP M_2 que reconhece $\{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k | \ i, j, k \geq 0 \text{ e } i = j \text{ ou } i = k\}$

EXEMPLO 2.18

Nesse exemplo damos um AP M_3 que reconhece a linguagem $\{ww^{\mathcal{R}} | \ w \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*\}$. Lembremo-nos de que $w^{\mathcal{R}}$ significa w escrita de trás para a frente. A descrição informal do AP segue.

> Comece empilhando os símbolos que são lidos. A cada ponto não-deterministicamente estipule que o meio da cadeia tenha sido atingido e então passe a desempilhar para cada símbolo lido, checando para ver que eles são os mesmos. Se eles fossem os mesmos e a pilha esvaziar ao mesmo tempo que a entrada termina, aceite; caso contrário, rejeite.

O seguinte é o diagrama dessa máquina.

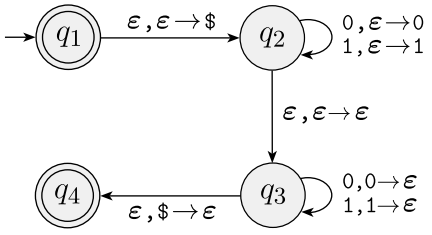


FIGURA 2.19
Diagrama de estados para o AP M_3 que reconhece $\{ww^{\mathcal{R}} | \ w \in \{0,1\}^*\}$

EQUIVALÊNCIA COM GRAMÁTICAS LIVRES-DO-CONTEXTO

Nesta seção mostramos que gramáticas livres-do-contexto e autômatos com pilha são equivalentes em poder. Ambos são capazes de descrever a classe de

linguagens livres-do-contexto. Mostramos como converter qualquer gramática livre-do-contexto num autômato com pilha que reconhece a mesma linguagem e vice versa. Lembrando que definimos uma linguagem linguagem livre-do-contexto como sendo qualquer linguagem que possa ser descrita com uma gramática livre-do-contexto, nosso objetivo é o seguinte teorema.

TEOREMA 2.20

Uma linguagem é livre do contexto se e somente se algum autômato com pilha a reconhece.

Como de costume para teoremas "se e somente se", temos duas direções para provar. Nesse teorema, ambas as direções são interessantes. Primeiro, fazemos a direção da ida, que é mais fácil.

LEMA 2.21

Se uma linguagem é livre do contexto, então algum autômato com pilha a reconhece.

IDÉIA DA PROVA Seja A uma LLC. Da definição sabemos que A tem uma GLC, G, que a gera. Mostramos como converter G em um AP equivalente, que chamamos P.

O AP P que agora descrevemos funcionará aceitando sua entrada w, se G gera essa entrada, determinando se existe uma derivação para w. Lembre-se de que uma derivação é simplesmente a seqüência de substituições feitas como uma gramática gera uma cadeia. Cada passo da derivação origina uma ***cadeia intermediária*** de variáveis e terminais. Projetamos P para determinar se alguma série de substituições usando as regras de G pode levar da variável inicial para w.

Uma das dificuldades em se testar se existe uma derivação para w está em descobrir quais substituições fazer. O não-determinismo do AP lhe permite adivinhar a seqüência de substituições corretas. A cada passo da derivação uma das regras para uma variável particular é selecionada não-deterministicamente e usada para substituir aquela variável.

O AP P começa escrevendo a variável inicial na sua pilha. Ela passa por uma série de cadeias intermediárias, fazendo uma substituição após a outra. Em algum momento ela pode chegar numa cadeia que contém somente símbolos terminais, o que significa que ela usou a gramática para derivar uma cadeia. Então P aceita se essa cadeia for idêntica à cadeia que ela recebeu como entrada.

Implementar essa estratégia em um AP requer uma idéia adicional. Precisamos ver como o AP armazena as cadeias intermediárias à medida que ela passa de uma para a outra. Simplesmente usar a pilha para armazenar cada cadeia intermediária é tentador. Entretanto, isso na verdade não funciona porque o AP precisa encontrar as variáveis na cadeia intermedíaria e fazer substituições. O AP pode acessar somente o símbolo no topo da pilha e esse pode ser um símbolo

terminal ao invés de uma variável. A forma de contornar esse problema é manter somente *parte* da cadeia intermediária na pilha: os símbolos começando com a primeira variável na cadeia intermedíaria. Quaisquer símbolos terminais aparecendo antes da primeira variável são emparelhadas imediatamente com símbolos na cadeia de entrada. A figura a seguir mostra o AP P.

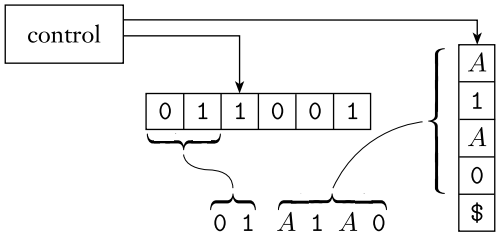


FIGURA 2.22
P representando a cadeia intermediária string 01A1A0

A seguir está uma descrição informal de P.

1. Coloque o símbolo marcador $ e a variável inicial na pilha.
2. Repita os seguintes passos para sempre.
   a. Se o topo da pilha é um símbolo de variável A, não-deterministicamente selecione uma das regras para A e substitua A pela cadeia no lado direito da regra.
   b. Se o topo da pilha é um símbolo terminal a, leia o próximo símbolo da entrada e compare-o com a. Se eles casam, repita. Se eles não casam, rejeite nesse ramo do não-determinismo.
   c. Se o topo da pilha é o símbolo $, entre no estado de aceitação. Fazendo isso aceita a entrada se ela tiver sido toda lida.

PROVA Agora damos os detalhes formais da construção do autômato com pilha $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, F)$. Para tornar a construção mais clara usamos a notação abreviada para a função de transição. Essa notação provê uma maneira de escrever uma cadeia inteira na pilha em um passo da máquina. Podemos simular essa ação introduzindo estados adicionais para escrever a cadeia um símbolo a cada vez, como implementado na seguinte construção formal.

Sejam q e r estados do AP e suponha que a esteja em Σ_ε e s em Γ_ε. Digamos que queiramos que o AP vá de q para r quando ele lê a e desempilha s. Além do mais, queremos empilhar a cadeia inteira $u = u_1 \cdots u_l$ ao mesmo tempo. Podemos implementar essa ação introduzindo novos estados $q_1, \ldots, q_{l-1}$ e montando

a tabela de transição da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
&\delta(q, a, s) \text{ to contain } (q_1, u_l),\\
&\delta(q_1, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_2, u_{l-1})\},\\
&\delta(q_2, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_3, u_{l-2})\},\\
&\qquad\vdots\\
&\delta(q_{l-1}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(r, u_1)\}.
\end{aligned}$$

Usamos a notação $(r, u) \in \delta(q, a, s)$ para dizer que quando q é o estado do autômato, a é o próximo símbolo de entrada, e s é o símbolo no topo da pilha, o AP pode ler o a e desempilhar o s, então empilhar a cadeia u e seguir para o estado r. A figura abaixo mostra essa implementação.

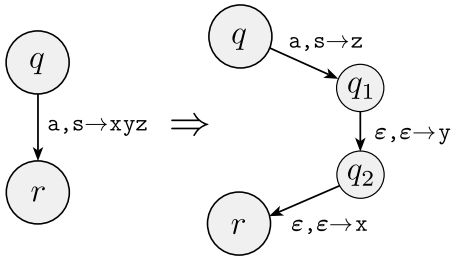


FIGURA 2.23
Implementando a abreviação $(r, xyz) \in \delta(q, a, s)$

Os estados de P são $Q = \{q_{\text{inicio}}, q_{\text{laco}}, q_{\text{aceita}}\} \cup E$, onde E é o conjunto de estados precisamos para implementar a abreviação que acaba de ser descrita. O estado inicial é q_{inicio}. O único estado de aceitação é q_{aceita}.

A função de transição é definida da seguinte forma. Começamos inicializando a pilha para conter os símbolos $ e S, implementando o passo 1 na descrição informal: $\delta(q_{\text{inicio}}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_{\text{laco}}, S\$)\}$. Então introduzimos as transições para o principal laço do passo 2.

Primeiro, tratamos o caso (a) no qual o topo da pilha contém uma variável. Seja $\delta(q_{\text{laco}}, \varepsilon, A) = \{(q_{\text{laco}}, w) |$ onde $A \to w$ é uma regra em $R\}$.

Segundo, tratamos o caso (b) no qual o topo da pilha contém um terminal. Seja $\delta(q_{\text{laco}}, a, a) = \{(q_{\text{laco}}, \varepsilon)\}$.

Finalmente, lidamos com o caso (c) no qual o marcador de pilha vazia $ está no topo da pilha. Seja $\delta(q_{\text{laco}}, \varepsilon, \$) = \{(q_{\text{aceita}}, \varepsilon)\}$.

O diagrama de estados é mostrado na na Figura 2.24

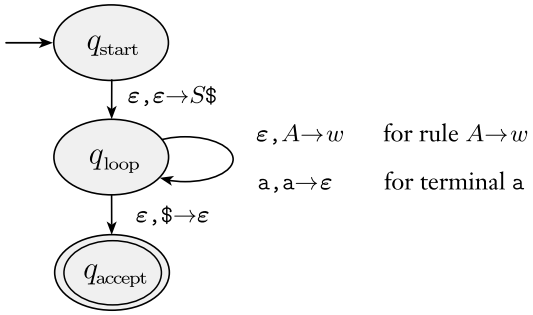


FIGURA 2.24
Diagrama de estados de P

Isso completa a prova do Lema 2.21.

EXEMPLO 2.25

Usamos o procedimento desenvolvido no Lema 2.21 para construir um AP P_1 a partir da seguinte GLC G.

$$S \to \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b}$$
$$T \to T\mathtt{a} \mid \varepsilon$$

A frunção de transição é mostrada no diagrama abaixo.

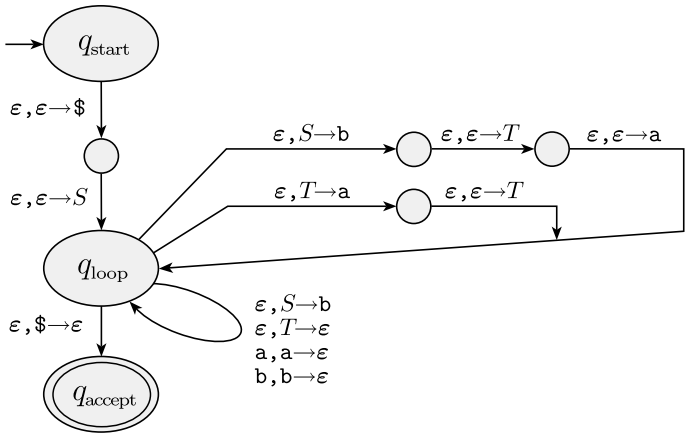


FIGURA 2.26
Diagrama de estados de P_1

Agora provamos a direção reversa do Teorema 2.20. Para a direção de ida demos um procedimento para converter uma GLC num AP. A idéia principal era projetar o autômato de modo que ele simule a gramática. Agora desejamos dar

um procedimento para ir na outra direção: converter um AP numa GLC. Projetamos a gramática para simular o autômato. Essa tarefa é um pouco complicada porque "programar" um autômato é mais fácil que "programar" uma gramática.

LEMA 2.27

Se um autômato com pilha reconhece alguma linguagem, então ela é livre-do-contexto.

IDÉIA DA PROVA Temos um AP P, e desejamos montar uma GLC G que gere todas as cadeias que P aceita. Em outras palavras, G deve gerar uma cadeia se essa cadeia faz o AP ir do estado inicial para um estado de aceitação.

Para alcançar esse resultado projetamos uma gramática que faz um pouco mais. Para cada par de estados p e q em P a gramárica terá uma variável A_{pq}. Essa variável gera todas as cadeias que podem levar P de p com uma pilha vazia a q com uma pilha vazia. Observe que tais cadeias podem também levar P de p a q, independente do conteúdo da pilha em p, deixando a pilha em q nas mesmas condições em que ela se encontrava em p.

Primeiro, simplificamos nossa tarefa modificando P levemente para lhe dar as três características abaixo.

1. Ele tem um único estado de aceitação, q_{aceita}.
2. Ele esvazia sua pilha antes de aceitar.
3. Cada transição ou empilha um símbolo (um movimento de *empilha*) ou desempilha um símbolo (um movimento de *empilha*), mas ela não faz ambos ao mesmo tempo.

Dar a P as características 1 e 2 é fácil. Para a característica 3, substituimos cada transição que simultaneamente desempilha e empilha por uma seqüência de duas transições que passa por um novo estado, e substituimos cada transição que nem desempilha nem empilha por uma seqüência de duas transições que empilha e depois desempilha um símbolo de pilha arbitrário.

Para projetar G de modo que A_{pq} gere todas as cadeias que levam P de p a q, iniciando e terminando com uma pilha vazia, temos que entender como P opera sobre essas cadeias. Para quaisquer dessas cadeias x, o primeiro movimento de P sobre x tem que ser um movimento de empilhar, porque todo movimento é ou um empilha ou um desempilha e P não pode desempilhar uma pilha vazia. Similarmente, o último movimento sobre x tem que ser um movimento de desempilhar, porque a pilha termina vazia.

Duas possibilidades ocorrem occur durante a computação de P sobre x. Ou o símbolo desempilhado no final é o símbolo que foi empilhado no início, ou não. Se for, a pilha está vazia somente no início e no final da computação de P sobre x. Se não for, o símbolo inicialmente empilhado tem que ser desempilhado em algum ponto antes do final de x e portanto a pilha fica vazia nesse ponto. Simulamos a primeira possibilidade com a regra $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$, onde a é a entrada lida no primeiro movimento, b é a entrada lida no último movimento, r é o estado

seguinte a p, e s é o estado anterior a q. Simulamos a segunda possibilidade com a regra $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$, onde r é o estado no qual a pilha fica vazia.

PROVA Digamos que $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_{\text{aceita}}\})$ e vamos construir G. As variáveis de G são $\{A_{pq} | \, p, q \in Q\}$. A variável inicial é $A_{q_0, q_{\text{aceita}}}$. Agora descrevemos as regras de G.

- Para cada $p, q, r, s \in Q$, $t \in \Gamma$, e $a, b \in \Sigma_\varepsilon$, se $\delta(p, a, \varepsilon)$ contém (r, t) e $\delta(s, b, t)$ contém (q, ε), ponha a regra $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$ em G.

- Para cada $p, q, r \in Q$, ponha a regra $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$ em G.

- Finalmente, para cada $p \in Q$, ponha a regra $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$ em G.

Você pode adquirir uma maior percepção sobre essa construção a partir das figuras abaixo.

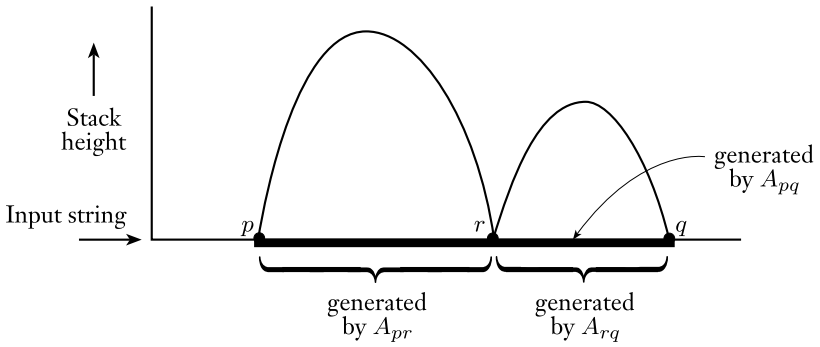


FIGURA 2.28
A computação do AP correspondendo à regra $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$

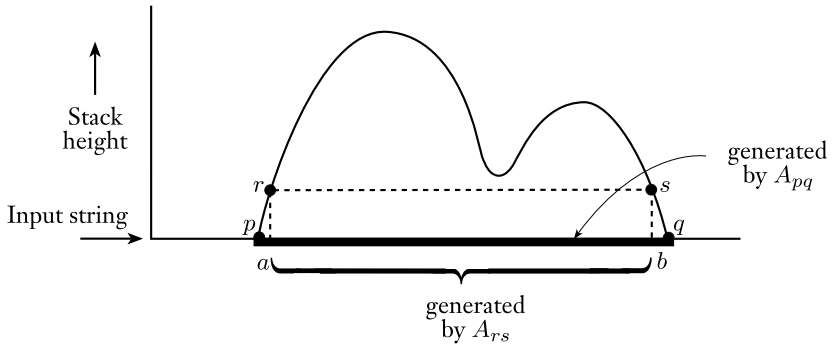


FIGURA 2.29
A computaçã do AP correspondendo à regra $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$

Agora provamos que essa construção funciona demonstrando que A_{pq} gera x se e somente se (sse) x pode levar P de p com pilha vazia a q com pilha vazia. Consideramos cada direção dos sse como uma afirmação seaparada.

AFIRMAÇÃO 2.30

Se A_{pq} gera x, então x pode levar P de p com pilha vazia a q com pilha vazia.

Provamos essa afirmação por indução sobre o número de passos na derivação de x a partir de A_{pq}.

Base: A derivação tem 1 passo.
Uma derivação com um único passo tem que usar uma regra cujo lado direito não contém variáveis. As únicas regras em G onde nenhuma variável ocorre no lado direito são $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$. Claramente, a entrada ε leva P de p com pilha vazia a p com pilha vazia portanto a base está provada.

Passo da Indução: Assuma verdadeiro para derivações de comprimento no máximo k, onde $k \geq 1$, e prove verdadeiro para derivações de comprimento $k+1$.
Suponha que $A_{pq} \stackrel{*}{\Rightarrow} x$ com $k+1$ passos. O primeiro passo nessa derivação é ou $A_{pq} \Rightarrow aA_{rs}b$ ou $A_{pq} \Rightarrow A_{pr}A_{rq}$. Lidamos com esses dois casos separadamente.

No primeiro caso, considere a parte y de x que A_{rs} gera, assim $x = ayb$. Em razão do fato de que $A_{rs} \stackrel{*}{\Rightarrow} y$ com k passos, a hipótese da indução nos diz que P pode ir de r com pilha vazia para s com pilha vazia. Em razão do fato de que $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$ é uma regra de G, $\delta(p, a, \varepsilon)$ contém (r, t) e $\delta(s, b, t)$ contém (q, ε), para algum símbolo de pilha t. Logo, se P começa em p com uma pilha vazia, após ler a ele pode ir para o estado r e empilhar t. Então, ler a cadeia y pode levá-lo a s e deixar t na pilha. Então após ler b ele pode ir para o estado q e desempilhar pop t. Consequentemente, x pode levá-lo de p com pilha vazia para

q com pilha vazia.

No segundo caso, considere as partes y e z de x que A_{pr} e A_{rq}, respectivamente, geram, assim $x = yz$. Em razão do fato de que $A_{pr} \stackrel{*}{\Rightarrow} y$ em no máximo k passos e $A_{rq} \stackrel{*}{\Rightarrow} z$ em no máximo k passos, a hipótese da indução nos diz que y pode levar P de p para r, e z pode levar P de r para q, com pilha vazia no início e no final. Logo, x pode levá-lo de p com pilha vazia para q com pilha vazia. Isso completa o passo da indução.

AFIRMAÇÃO 2.31

Se x pode levar P de p com pilha vazia para q com pilha vazia, A_{pq} gera x.

Provamos essa afirmação por indução sobre o número de passos na computação de P que vai de p para q com pilhas vazias sobre a entrada x.

Base: A computação tem 0 passos.
Se uma computação tem 0 passos, ela começa e termina no mesmo estado—digamos, p. Portanto, temos que mostrar que $A_{pp} \stackrel{*}{\Rightarrow} x$. Em 0 passos, P só tem tempo de ler a cadeia vazia, portanto $x = \varepsilon$. Por construção, G tem a regra $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$, portanto a base está provada.

Passo da Indução: Assuma verdadeiro para computações de comprimento no máximo k, onde $k \geq 0$, e prove verdadeiro para computações de comprimento $k + 1$.
Suponha que P tenha uma computação na qual x leva de p para q com pilhas vazias em $k + 1$ passos. Ou a pilha está vazia apenas no início e no final dessa computação, ou ela se torna vazia em algum outro ponto também.

No primeiro caso, o símbolo que é empilhado no primeiro movimento tem que ser o mesmo que o símbolo que é desempilhado no último movimento. Chame esse símbolo t. Seja a a entrada lida no primeiro movimento, b a entrada lida no último movimento, r o estado após o primeiro movimento, e s o estado antes do último movimento. Então $\delta(p, a, \varepsilon)$ contém (r, t) e $\delta(s, b, t)$ contém (q, ε), e portanto a regra $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$ está em G.

Seja y a parte de x sem a e b, assim $x = ayb$. A entrada y pode trazer P de r para s sem tocar o símbolo t que está na pilha e portanto P pode ir de r com uma pilha vazia para s com uma pilha vazia sobre a entrada y. Removemos o primeiro e o último passos dos $k + 1$ passos na computação original sobre x portanto a computação sobre y tem $(k + 1) - 2 = k - 1$ passos. Consequentemente, a hipótese da indução nos diz que $A_{rs} \stackrel{*}{\Rightarrow} y$. Logo, $A_{pq} \stackrel{*}{\Rightarrow} x$.

No segundo caso, seja r um estado onde a pilha se torna vazia que não seja no início ou no final da computação sobre x. Então as partes da computação de p para r e de r para q cada uma contém no máximo k passos. Digamos que y seja a entrada lida durante a primeira parte e z seja a entrada lida durante a segunda parte. A hipótese da indução nos diz que $A_{pr} \stackrel{*}{\Rightarrow} y$ e $A_{rq} \stackrel{*}{\Rightarrow} z$. Em razão do fato de que a regra $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$ pertence a G, $A_{pq} \stackrel{*}{\Rightarrow} x$, e a prova está completa.

Isso completa a prova do Lema 2.27 e do Teorema 2.20.

Acabamos de provar que autômatos com pilha reconhecem a classe de linguagens livres-do-contexto. Essa prova nos permite estabelecer um relacionamento entre as linguagens regulares e as linguagens livres-do-contexto. Em razão do fato de que toda linguagem regular é reconhecida por um autômato finito e todo autômato finito é automaticamente um autômato com pilha que simplesmente ignora sua pilha, agora sabemos que toda linguagem regular é também uma linguagem livre-do-contexto.

COROLÁRIO 2.32

Toda linguagem regular é livre do contexto.

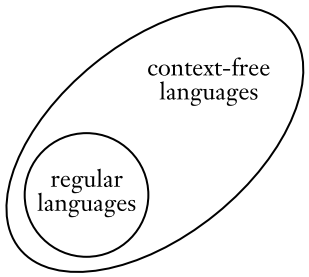


FIGURA 2.33
Relacionamento entre as linguagens regulares e livres-do-contexto

2.3 LINGUAGENS NÃO-LIVRES-DO-CONTEXTO

Nesta seção apresentamos uma técnica para provar que certas linguagens não são livres do contexto. Lembre-se de que na Seção 1.4 introduzimos o lema do bombeamento para mostrar que certas linguagens não são regulares. Aqui apresentamos um lema do bombeamento similar para linguagens livres-do-contexto. Ele afirma que toda linguagem livre-do-contexto tem um valor especial chamado de ***comprimento de bombeamento*** tal que toda as cadeias mais longas que estão na linguagem pode ser "bombeada." Dessa vez o significado de *bombeada* é um pouco mais complexo. Significa que a cadeia pode ser dividida em cinco partes

de modo que a segunda e a quarta partes podem ser repetidas juntas qualquer número de vezes e a cadeia resultante ainda permanece na linguagem.

O LEMA DO BOMBEAMENTO PARA LINGUAGENS LIVRES-DO-CONTEXTO

TEOREMA 2.34

Lema do bombeamento para linguagens livres-do-contexto Se A é uma linguagem livre-do-contexto, então existe um número p (o comprimento de bombeamento) onde, se s é uma cadeia qualquer em A de comprimento pelo menos p, então s pode ser dividida em cinco partes $s = uvxyz$ satisfazendo as condições

1. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, e
3. $|vxy| \leq p$.

Quando s está sendo dividido em $uvxyz$, a condição 2 diz que ou v ou y não é a cadeia vazia. Caso contrário, o teorema seria trivialmente verdadeiro. A condição 3 afirma que as partes v, x e y juntas têm comprimento no máximo p. Essa condição técnica às vezes é útil na prova de que certas linguagens não são livres do contexto.

IDÉIA DA PROVA Seja A uma LLC e suponha que G seja uma GLC que a gera. Temos que mostrar que qualquer cadeia suficientemente longa s em A pode ser bombeada e permanecer em A. A idéia por trás dessa abordagem é simples.

Seja s uma cadeia muito longa em A. (Tornamos claro mais adiante o que queremos dizer por "muito longa.") Em razão de s estar em A, ela é derivável de G e portanto tem uma árvore sintática. A árvore sintática para s tem que ser muito alta porque s é muito longa. Ou seja, a árvore sintática tem que conter algum caminho longo da variável inicial na raiz da árvore para um dos símbolos terminais numa folha. Nesse caminho longo algum símbolo de variável R tem que se repetir devido ao princípio da casa-de-pombos. Como a Figura 2.35 mostra, essa repetição nos permite substituir a subárvore sob a segunda ocorrência de R pela subárvore sob a primeira ocorrência de R e ainga obter uma árvore sintática legítima. Por conseguinte, podemos cortar s em cinco partes $uvxyz$ como a figura indica, e podemos repetir a segunda e a quarta partes e obter uma cadeia ainda na linguagem. Em outras palavras, uv^ixy^iz está em A para qualquer $i \geq 0$.

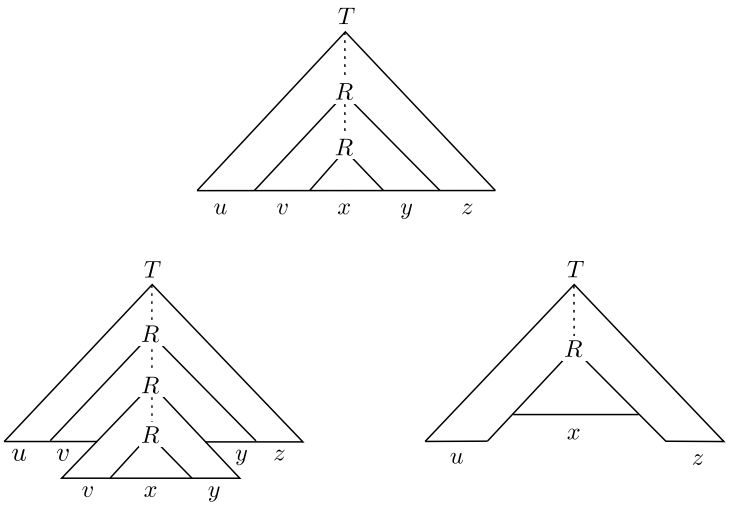


FIGURA 2.35
Cirurgia em árvore sintática

Vamos nos voltar agora para os detalhes para obter todas as três condições do lema do bombeamento. Podemos também mostrar como calcular o comprimento de bombeamento p.

PROVA Seja G uma GLC para a LLC A. Seja b o número máximo de símbolos no lado direito de uma regra. Em qualquer árvore sintática usando essa gramática sabemos que um nó pode ter não mais que b filhos. Em outras palavras, no máximo b folhas estão a 1 passo da variável inicial; no máximo b^2 folhas estão a 2 passos da variável inicial; e no máximo b^h folhas estão a h passos da variável inicial. Portanto, se a altura da árvore sintática é no máximo h, o comprimento de bombeamento da cadeia gerada é no máximo b^h. Reciprocamente, se uma cadeia gerada tem comprimento no mínimo $b^h + 1$, cada uma de suas árvores sintáticas tem que ter altura no mínimo $h + 1$.

Digamos que $|V|$ seja o número de variáveis em G. Fazemos p, o comprimento de bombeamento, ser $b^{|V|+1} > b^{|V|} + 1$. Agora se s é uma cadeia em A e seu comprimento é p ou mais, sua árvore sintática tem que ter altura no mínimo $|V| + 1$.

Para ver como bombear qualquer dessas cadeias s, seja τ uma de suas árvores sintáticas. Se s tem diversas árvores sintáticas, escolha τ como sendo uma árvore sintática que tem o menor número de nós. Sabemos que τ tem que ter altura no mínimo $|V|+1$, portanto ela tem que contar um caminho da raiz para uma folha de comprimento no mínimo $|V|+1$. Esse caminho tem pelo menos $|V|+2$ nós; um em um terminal, os outros em variáveis. Daí, esse caminho tem pelo menos $|V|+1$ variáveis. Com G tendo somente $|V|$ variáveis, alguma variável R aparece

mais de uma vez naquele caminho. Por conveniência mais adiante, selecionamos R como sendo uma variável que se repete entre as $|V| + 1$ variáveis mais baixas nesse caminho.

Dividimos s em $uvxyz$ conforme a Figura 2.35. Cada ocorrência de R tem uma subárvore sob ela, gerando uma parte da cadeia s. A ocorrência mais alta de R tem uma subárvore maior e gera vxy, enquanto que a ocorrência mais baixa gera somente x com uma subárvore menor. Ambas essas subárvores são geradas pela mesma variável, portanto podemos substituir uma pela outra e ainda obter uma árvore sintátiva válida. Substituindo a menor pela maior repetidamente leva a árvores sintátivas para as cadeias uv^ixy^iz em cada $i > 1$. Substituindo a maior pela menor gera a cadeia uxz. Isso estabelece a condição 1 do lema. Agora nos voltamos para as condições 2 e 3.

Para obter a condição 2 temos que assegurar que tanto v quanto y não é ε. Se eles o fossem, a árvore sintática obtida substituindo-se a maior subárvore pela menor teria menos nós que τ tem e ainda geraria s. Esse resultado não é possível porque já tínhamos escolhido τ como sendo uma árvore sintática para s com o menor número de nós. Essa é a razão para selecionar τ dessa maneira.

De modo a obter a condição 3 precisamos ter certeza de que vxy tem comprimento no máximo p. Na árvore sintática para s a ocorrência superior de R gera vxy. Escolhemos R de modo que ambas as ocorrências estejam dentre as $|V| + 1$ variáveis inferiores no caminho, e escolhemos o caminho mais longo na árvore sintática, de modo que a subárvore onde R gera vxy tem altura no máximo $|V| + 1$. Uma árvore dessa altura pode gerar uma cadeia de comprimento no máximo $b^{|V|+1} = p$.

Para algumas dicas sobre usar o lema do bombeamento para provar que linguagens não são livres do contexto, reveja o texto que precede o Exemplo 1.73 (page 85) onde discutimos o problema relacionado de provar não-regularidade com o lema do bombeamento para linguagens regulares.

EXEMPLO 2.36

Use o lema do bombeamento para mostrar que a linguagem $B = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$ não é livre do contexto.

Assumimos que B é uma LLC e obtemos uma contradição. Seja p o comprimento de bombeamento para B que é garantido existir pelo lema do bombeamento. Selecione a cadeia $s = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^p\mathtt{c}^p$. Claramente s é um membro de B e de comprimento no mínimo p. O lema do bombeamento afirma que s pode ser bombeada, mas mostramos que ela não pode. Em outras palavras, mostramos que independentemente de como dividimos s em $uvxyz$, uma das três condições do lema é violada.

Primeiro, a condição 2 estipula que v ou y é não-vazia. Então consideramos um dos dois casos, dependendo se as subcadeias v e y contêm mais que um tipo de símbolo de alfabeto.

1. Quando ambas v e y contêm apenas um tipo de símbolo de alfabeto, v não contém ambos a's e b's ou ambos b's e c's, e o mesmo se verifica para y. Nesse caso a cadeia uv^2xy^2z não contém o mesmo número de a's, b's, e c's. Consequentemente ela não pode ser um membro de B. Isso viola a condição 1 do lema e é portanto uma contradição.
2. Quando v ou y contém mais que um tipo de símbolo uv^2xy^2z pode conter quantidades iguais dos três símbolos de alfabeto mas não na ordem correta. Logo, ela não pode ser um membro de B e uma contradição ocorre.

Um desses casos tem que ocorre. Em razão do fato de que ambos os casos resultam em uma contradição, uma contradição é inevitável. Portanto, a suposição de que B é uma LLC tem que ser falsa. Consequentemente, provamos que B não é uma LLC. ■

EXEMPLO 2.37

Seja $C = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$. Usamos o lema do bombeamento para mostrar que C não é uma LLC. Essa linguagem é similar à linguagem B no Exemplo 2.36, mas provar que ela não é livre do contexto é um pouco mais complicado.

Assuma que C seja uma LLC e obtenha uma contradição. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Usamos a cadeia $s = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^p\mathtt{c}^p$ que usamos anteriormente, mas dessa vez temos que "bombear para baixo" assim como "bombear para cima." Seja $s = uvxyz$ e novamente considere os dois casos que ocorreram no Exemplo 2.36.

1. Quando ambas v e y contêm somente um tipo de símbolo de alfabeto, v não contém tanto a's quanto b's ou ambos b's e c's, e o mesmo se verifica para y. Note que o raciocínio usado previamente no caso 1 não mais se aplica. A razão é que C contém cadeias com quantidades desiguais de a's, b's e c's desde que as quantidades não sejam decrescentes. Temos que analisar a situação mais cuidadosamente para mostrar que s não pode ser bombeada. Observe que em razão de v e y conterem somente um tipo de símbolo de alfabeto, um dos símbolos a, b, ou c não apareça em v ou y. Subdividimos ainda mais esse caso em três subcasos de acordo com qual símbolo não aparece.
   a. *Os a's não aparecem.* Então tentamos bombear para baixo para obter a cadeia $uv^0xy^0z = uxz$. Essa contém o mesmo número de a's que s, mas contém menos b's ou menos c's. Conseqüentemente, ela não é um membro de C, e uma contradição ocorre.
   b. *Os b's não aparecem.* Então ou a's ou c's têm que aparecer em v ou y porque não pode acontecer de ambas serem a cadeia vazia. Se a's aparecem, a cadeia uv^2xy^2z contém mais a's que b's, portanto ela não está em C. Se c's aparecem, a cadeia uv^0xy^0z contém mais b's que c's, portanto ela não está em C. De qualquer forma uma contradição ocorre.
   c. *Os c's não aparecem.* Então a cadeia uv^2xy^2z contém mais a's ou mais

b's que c's, portanto ela não está em C, e uma contradição ocorre.

2. Quando v ou y contém mais que um tipo de símbolo, uv^2xy^2z não conterá os símbolos na ordem correta. Logo, ela não pode ser um membro de C, e uma contradição ocorre.

Por conseguinte, mostramos que s não pode ser bombeada em violação do lema do bombeamento e que C não é livre do contexto. ∎

EXEMPLO 2.38

Seja $D = \{ww | \ w \in \{0,1\}^*\}$. Use o lema do bombeamento para mostrar que D não é uma LLC. Assuma que D seja uma LLC e obtenha uma contradição. Seja p o lema do bombeamento dado pelo lema do bombeamento.

Dessa vez escolher a cadeia s é menos óbvio. Uma possibilidade é a cadeia 0^p10^p1. Ela é um membro de D e tem comprimento maior que p, portanto ela parece ser uma boa candidata. Mas essa cadeia *pode* ser bombeada dividindo-a da forma a seguir, portanto ela não é adequada para nossos propósitos.

$$\overbrace{\underbrace{000\cdots000}_{u}\ \underbrace{0}_{v}\ \underbrace{1}_{x}}^{0^p1}\ \overbrace{\underbrace{0}_{y}\ \underbrace{000\cdots0001}_{z}}^{0^p1}$$

Vamos tentar uma outra candidata para s. Intuitivamente, a cadeia $0^p1^p0^p1^p$ parece capturar mais da "essência" da linguagem D que tinham as candidatas anteriores. Na verdade, podemos mostrar que essa cadeia não funciona, como segue.

Mostramos que a cadeia $s = 0^p1^p0^p1^p$ não pode ser bombeada. Dessa vez usamos a condição 3 do lema do bombeamento para restringir a forma pela qual s pode ser dividida. Ela diz que podemos bombear s dividindo $s = uvxyz$, onde $|vxy| \leq p$.

Primeiro, mostramos que a subcadeia vxy deve passar da metade de s. Caso contrário, se a subcadeia ocorre somente na primeira metade de s, bombeando s para cima até uv^2xy^2z desloca um 1 para a primeira posição da segunda metade, e portanto ela não pode ser da forma ww. Similarmente, se vxy ocorre na segunda metade de s, bombeando s para cima até uv^2xy^2z desloca um 0 na última posição da primeira metade, e portanto ela não pode ser da forma ww.

Mas se a subcadeia vxy passa da metade de s, quando tentamos bombear s para baixo até uxz ela tem a forma $0^p1^i0^j1^p$, onde i e j não pode ser p. Essa cadeia não é da forma ww. Por conseguinte, s não pode ser bombeada, e D não é uma LLC. ∎

EXERCÍCIOS

2.1 Retomemos a GLC G_4 que demos no Exemplo 2.4. Por conveniência, vamos renomear suas variáveis com apenas uma letra da seguinte forma.

$$\begin{aligned} E &\to E + T \mid T \\ T &\to T \times F \mid F \\ F &\to (E) \mid \mathtt{a} \end{aligned}$$

Dê árvores sintáticas e derivações para cada cadeia abaixo.

a. a
b. a+a
c. a+a+a
d. ((a))

2.2 **a.** Use as linguagens $A = \{\mathtt{a}^m\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid m, n \geq 0\}$ e $B = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^m \mid m, n \geq 0\}$ juntamente com o Exemplo 2.36 para mostrar que a classe das linguagens livres-do-contexto não é fechada sob interseção.

b. Use a parte (a) e a lei de DeMorgan (Teorema 0.20) para mostrar que a classe de linguagens livres-do-contexto não é fechada sob complementação.

R**2.3** Responda a cada item para a seguinte gramática livre-do-contexto G.

$$\begin{aligned} R &\to XRX \mid S \\ S &\to \mathtt{a}T\mathtt{b} \mid \mathtt{b}T\mathtt{a} \\ T &\to XTX \mid X \mid \varepsilon \\ X &\to \mathtt{a} \mid \mathtt{b} \end{aligned}$$

a. Quais são as variáveis de G?
b. Quais são os terminais de G?
c. Qual é a variável inicial de G?
d. Dê três cadeias em $L(G)$.
e. Dê três cadeias que *não* estão em $L(G)$.
f. Verdadeiro ou Falso: $T \Rightarrow \mathtt{aba}$.
g. Verdadeiro ou Falso: $T \stackrel{*}{\Rightarrow} \mathtt{aba}$.
h. Verdadeiro ou Falso: $T \Rightarrow T$.
i. Verdadeiro ou Falso: $T \stackrel{*}{\Rightarrow} T$.
j. Verdadeiro ou Falso: $XXX \stackrel{*}{\Rightarrow} \mathtt{aba}$.
k. Verdadeiro ou Falso: $X \stackrel{*}{\Rightarrow} \mathtt{aba}$.
l. Verdadeiro ou Falso: $T \stackrel{*}{\Rightarrow} XX$.
m. Verdadeiro ou Falso: $T \stackrel{*}{\Rightarrow} XXX$.
n. Verdadeiro ou Falso: $S \stackrel{*}{\Rightarrow} \varepsilon$.
o. Dê uma descrição em português de $L(G)$.

2.4 Dê gramáticas livres-do-contexto que gerem as seguintes linguagens. Em todos os itens o alfabeto Σ é $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$.

R**a.** $\{w \mid w$ contém pelo menos três 1s$\}$
b. $\{w \mid w$ começa e termina com o mesmo símbolo$\}$
c. $\{w \mid$ o comprimento de w é ímpar$\}$
R**d.** $\{w \mid$ o comprimento de w é ímpar e o símbolo do meio é um 0$\}$
e. $\{w \mid w = w^{\mathcal{R}}$, ou seja, w é uma palíndrome$\}$
f. O conjunto vazio

2.5 Dê descrições informais e diagramas de estado de autômatos com pilha para as linguagens no Exercício 2.4.

2.6 Dê gramáticas livres-do-contexto gerando as seguintes linguagens.

[R]a. O conjunto de cadeias sobre o alfabeto {a,b} com mais a's que b's

b. O complemento da linguagem $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n \mid n \geq 0\}$

[R]c. $\{w\#x \mid w^{\mathcal{R}}$ é uma subcadeia de x para $w, x \in \{0,1\}^*\}$

d. $\{x_1\#x_2\#\cdots\#x_k \mid k \geq 1$, cada $x_i \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$, e para algum i e j, $x_i = x_j^{\mathcal{R}}\}$

[R]2.7 Dê descrições informais em português de APs para as linguagens no Exercício 2.6.

[R]2.8 Mostre que a cadeia `the girl touches the boy with the flower` tem duas derivações mais à esquerda diferentes na gramática G_2 da página 107. Descreva em português os dois significados diferentes dessa sentença.

2.9 Dê uma gramática livre-do-contexto que gere a linguagem

$$A = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i = j \text{ ou } j = k \text{ onde } i, j, k \geq 0\}.$$

Sua gramática é ambígua? Por que ou por que não?

2.10 Dê uma descrição informal de um autômato com pilha que reconheça a linguagem A do Exercício 2.9.

2.11 Converta a GLC G_4 dada no Exercício 2.1 para um AP equivalente, usando o procedimento dado no Teorema 2.20.

2.12 Converta a GLC G dada no Exercício 2.3 para um AP equivalente, usando o procedimento dado no Teorema 2.20.

2.13 Seja $G = (V, \Sigma, R, S)$ a seguinte gramática. $V = \{S, T, U\}$; $\Sigma = \{0, \#\}$; e R é o conjunto de regras:

$$\begin{aligned} S &\to TT \mid U \\ T &\to 0T \mid T0 \mid \# \\ U &\to 0U00 \mid \# \end{aligned}$$

a. Descreva $L(G)$ em português.

b. Prove que $L(G)$ não é regular.

2.14 Converta a seguinte GLC numa GLC equivalente na forma normal de Chomsky, usando o procedimento dado no Teorema 2.9.

$$\begin{aligned} A &\to BAB \mid B \mid \varepsilon \\ B &\to 00 \mid \varepsilon \end{aligned}$$

2.15 Dê um contraexemplo para mostrar que a seguinte construção falha em provar que a classe das linguagens livres-do-contexto é fechada sob estrela. Seja A uma LLC que é gerada pela GLC $G = (V, \Sigma, R, S)$. Adicione a nova regra $S \to SS$ e chame a gramática resultante G'. Essa gramática é suposta gerar A^*.

2.16 Mostre que a classe de linguagens livres-do-contexto é fechada sob as operações regulares, união, concatenação e estrela.

2.17 Use os resultados do Problema 2.16 para dar uma outra prova de que toda linguagem regular é livre do contexto, mostramos como converter uma expressão regular diretamente para uma gramática livre-do-contexto.

PROBLEMAS

[R]**2.18** **a.** Seja C uma lingugagem livre-do-contexto e R uma linguagem regular. Prove que a linguagem $C \cap R$ é livre do contexto.

b. Use a parte (a) para mostrar que a linguagem $A = \{w \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b},\mathtt{c}\}^*$ e contém o mesmo número de a's, b's e c's$\}$ não é uma LLC.

[*]**2.19** Suponha que a GLC G seja

$$S \to \mathtt{a}S\mathtt{b} \mid \mathtt{b}Y \mid Y\mathtt{a}$$
$$Y \to \mathtt{b}Y \mid \mathtt{a}Y \mid \varepsilon$$

Dê uma descriç ao simples de $L(G)$ em português. Use essa descrição para dar uma GLC para $\overline{L(G)}$, o complemento de $L(G)$.

2.20 Seja $A/B = \{w \mid wx \in A$ para algum $x \in B\}$. Mostre que, se A é livre do contexto e B é regular, então A/B é livre do contexto.

[*]**2.21** Seja $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$. Dê uma GLC que gera a linguagem das cadeias com duas vezes mais a's que b's. Prove que sua gramática é correta.

[*]**2.22** Seja $C = \{x\mathtt{\#}y \mid x, y \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ e $x \neq y\}$. Mostre que C é uma linguagem livre-do-contexto.

[*]**2.23** Seja $D = \{xy \mid x, y \in \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ e $|x| = |y|$ mas $x \neq y\}$. Mostre que D é uma linguagem livre-do-contexto.

[*]**2.24** Seja $E = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i \neq j$ and $2i \neq j\}$. Mostre que E é uma linguagem livre-do-contexto.

2.25 Para qualquer linguagem A, seja $SUFFIX(A) = \{v \mid uv \in A$ para alguma cadeia $u\}$. Mostre que a classe de linguagens livres-do-contexto é fechada sob a operação *SUFFIX*.

2.26 Mostre que, se G for uma GLC na forma normal de Chomsky, então para qualquer cadeia $w \in L(G)$ de comprimento $n \geq 1$, exatamente $2n - 1$ passos são necessários para qualquer derivação de w.

[*]**2.27** Seja $G = (V, \Sigma, R, \langle \text{STMT} \rangle)$ a seguinte gramática.

$$\begin{aligned}
\langle \text{STMT} \rangle &\to \langle \text{ASSIGN} \rangle \mid \langle \text{IF-THEN} \rangle \mid \langle \text{IF-THEN-ELSE} \rangle \\
\langle \text{IF-THEN} \rangle &\to \texttt{if condition then } \langle \text{STMT} \rangle \\
\langle \text{IF-THEN-ELSE} \rangle &\to \texttt{if condition then } \langle \text{STMT} \rangle \texttt{ else } \langle \text{STMT} \rangle \\
\langle \text{ASSIGN} \rangle &\to \texttt{a:=1}
\end{aligned}$$

$$\Sigma = \{\texttt{if}, \texttt{condition}, \texttt{then}, \texttt{else}, \texttt{a:=1}\}.$$
$$V = \{\langle \text{STMT} \rangle, \langle \text{IF-THEN} \rangle, \langle \text{IF-THEN-ELSE} \rangle, \langle \text{ASSIGN} \rangle\}$$

G é uma gramática aparentemente natural para um fragmento de uma linguagem de programação, mas G é ambígua.

a. Mostre que G é ambígua.

b. Dê uma nova gramática não-ambígua para a mesma linguagem.

[*]**2.28** Dê GLCs não-ambíguas para as linguagens abaixo.

a. $\{w \mid$ em todo prefixo de w o número de a's é pelo menos igual ao número de b's$\}$

b. $\{w|$ o número de a's e b's em w são iguais$\}$

c. $\{w|$ o número de a's é pelo menos igual ao número de b's$\}$

***2.29** Mostre que a linguagem A do Exercício 2.9 é inerentemente ambígua.

2.30 Use o lema do bombeamento para mostrar que as seguintes linguagens não são livres do contexto.

a. $\{0^n1^n0^n1^n \mid n \geq 0\}$

R b. $\{0^n\#0^{2n}\#0^{3n} \mid n \geq 0\}$

R c. $\{w\#t \mid w$ é uma subcadeia de t, onde $w, t \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*\}$

d. $\{t_1\#t_2\#\cdots\#t_k \mid k \geq 2$, cada $t_i \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^*$, and $t_i = t_j$ para algum $i \neq j\}$

2.31 Seja B a linguagem de todas as palíndromes sobre $\{0,1\}$ contendo o mesmo número de 0s e 1s. Mostre que B não é livre do contexto.

2.32 Seja $\Sigma = \{1,2,3,4\}$ e $C = \{w \in \Sigma^* \mid$ em w, o número de 1s é igual ao número de 2s, e o número de 3s é igual ao número de 4s$\}$. Mostre que C não é livre do contexto.

***2.33** Mostre que $F = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j \mid i = kj$ para algum inteiro positivo $k\}$ não é livre do contexto.

2.34 Considere a linguagem $B = L(G)$, onde G é a gramática dada no Exercício 2.13. O lema do bombeamento para linguagens livres-do-contexto, Teorema 2.34, enuncia a existência de um comprimento de bombeamento p para B. Qual é o valor mínimo de p que funciona no lema do bombeamento? Justifique sua resposta.

2.35 Seja G uma GLC na forma normal de Chomsky que contém b variáveis. Mostre que, se G gera alguma cadeia com uma derivação tendo no mínimo 2^b passos, $L(G)$ é infinita.

2.36 Dê um exemplo de uma linguagem que não é livre do contexto mas que age como uma LLC no lema do bombeamento. Prove que seu exemplo funciona. (Veja o exemplo análogo para linguagens regulares no Problema 1.54.)

***2.37** Prove a seguinte forma mais forte do lema do bombeamento, na qual *ambas* as partes v e y deve ser não-vazias quando a cadeia s é dividida.

Se A for uma linguagem livre-do-contexto, então existe um número k onde, se s é uma cadeia qualquer em A de comprimento no mínimo k, então s pode ser dividida em cinco partes, $s = uvxyz$, satisfazendo as condições:

a. para cada $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,

b. $v \neq \varepsilon$ e $y \neq \varepsilon$, e

c. $|vxy| \leq k$.

R 2.38 Remeta-se ao Problema 1.41 para a definição da operação de embaralhamento perfeito. Mostre que a classe de linguagens livres-do-contexto não é fechada sob embaralhamento perfeito.

2.39 Remeta-se ao Problema 1.42 para a definição da operação de embaralhamento. Mostre que a classe de linguagens livres-do-contexto não é fechada sob embaralhamento.

2.40** Digamos que uma linguagem é ***prefixo-fechada se o prefixo de qualquer cadeia na linguagem também está na linguagem. Seja C uma linguagem livre-do-contexto, infinita e prefixo-fechada. Mostre que C conté um subconjunto regular infinito.

*2.41 Leia as definições de $NOPREFIX(A)$ e $NOEXTEND(A)$ no Problema 1.40.

a. Mostre que a classe de LLCs não é fechada sob a operação $NOPREFIX$.

b. Mostre que a classe de LLCs não é fechada sob a operação $NOEXTEND$.

*2.42 Seja $\Sigma = \{1, \#\}$ e $Y = \{w \mid w = t_1\#t_2\#\cdots\#t_k$ para $k \geq 0$, cada $t_i \in 1^*$, e $t_i \neq t_j$ sempre que $i \neq j\}$. Prove que Y não é livre do contexto.

2.43 Para cadeias w e t, escreva $w \triangleq t$ se os símbolos de w são uma permutação dos símbolos de t. Em outras palavras, $w \triangleq t$ se t e w têm os mesmos símbolos nas mesmas quantidades, mas possivelmente em uma ordem diferente.

Para qualquer cadeia w, defina $SCRAMBLE(w) = \{t \mid t \triangleq w\}$. Para qualquer linguagem A, seja $SCRAMBLE(A) = \{t \mid t \in SCRAMBLE(w)$ para alguma $w \in A\}$.

a. Mostre que, se $\Sigma = \{0, 1\}$, então a *SCRAMBLE* de uma linguagem regular é livre do contexto.

b. O que acontece na parte (a) se Σ contém 3 ou more símbolos? Prove sua resposta.

2.44 Se A e B são linguagens, defina $A \diamond B = \{xy \mid x \in A$ e $y \in B$ e $|x| = |y|\}$. Mostre que se A e B forem linguagens regulares, então $A \diamond B$ é uma LLC.

*2.45 Seja $A = \{wtw^{\mathcal{R}} \mid w, t \in \{0,1\}^*$ e $|w| = |t|\}$. Prove que A não é uma linguagem livre-do-contexto.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

2.3 **(a)** R, X, S, T; **(b)** a, b; **(c)** R; **(d)** Três cadeias em G são ab, ba e aab; **(e)** Três cadeias que não estão em G são a, b e ε; **(f)** Falso; **(g)** Verdadeiro; **(h)** Falso; **(i)** Verdadeiro; **(j)** Verdadeiro; **(k)** Falso; **(l)** Verdadeiro; **(m)** Verdadeiro; **(n)** Falso; **(o)** $L(G)$ consiste de todas as cadeias sobre a e b que não são palíndromes.

2.4 **(a)** $S \rightarrow R1R1R1R$
$R \rightarrow 0R \mid 1R \mid \varepsilon$

(d) $S \rightarrow 0 \mid 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1$

2.6 **(a)** $S \rightarrow TaT$
$T \rightarrow TT \mid aTb \mid bTa \mid a \mid \varepsilon$

T gera todas as cadeias com pelo menos a mesma quantidade de a's que b's, e S força um a extra.

(c) $S \rightarrow TX$
$T \rightarrow 0T0 \mid 1T1 \mid \#X$
$X \rightarrow 0X \mid 1X \mid \varepsilon$

2.7 **(a)** O AP usa sua pilha para contar o número de a's menos o número de b's. Ele entra num estado de aceitação sempre que esse contador é positivo. Em mais detalhes, ele opera da seguinte maneira. O AP lê a entrada. Se ele vê um b e seu símbolo no topo da pilha é um a, ele desempilha. Similarmente, se ele lê um a e seu símbolo de topo de pilha é um b, ele desempilha. Em todos os outros casos, ele empilha o símbolo de entrada. Depois que o AP lê a entrada, se a estiver no topo da pilha, ele aceita. Caso contrário, ele rejeita.

(c) O AP faz uma varredura na cadeia de entrada e empilha todo símbolo que lê até que leia um #. Se # nunca for encontrado, ele rejeita. Então, o AP pula a parte da

entrada, não-deterministicamente decidindo quando para de pular. Nesse ponto, ele compara os próximos símbolos de entrada com os símbolos que ele desempilha. Em caso de qualquer desacordo, ou se a entrada terminar enquanto a pilha é não-vazia, esse ramo da computação rejeita. Se a pilha se torna vazia, a máquina lê o resto da entrada e aceita.

2.8 Aqui está uma derivação:
⟨SENTENCE⟩ ⇒ ⟨NOUN-PHRASE⟩⟨VERB-PHRASE⟩ ⇒
⟨CMPLX-NOUN⟩⟨VERB-PHRASE⟩ ⇒
⟨CMPLX-NOUN⟩⟨CMPLX-VERB⟩⟨PREP-PHRASE⟩ ⇒
⟨ARTICLE⟩⟨NOUN⟩⟨CMPLX-VERB⟩⟨PREP-PHRASE⟩ ⇒
`The boy` ⟨VERB⟩⟨NOUN-PHRASE⟩⟨PREP-PHRASE⟩ ⇒
`The boy` ⟨VERB⟩⟨NOUN-PHRASE⟩⟨PREP⟩⟨CMPLX-NOUN⟩ ⇒
`The boy touches` ⟨NOUN-PHRASE⟩⟨PREP⟩⟨CMPLX-NOUN⟩ ⇒
`The boy touches` ⟨CMPLX-NOUN⟩⟨PREP⟩⟨CMPLX-NOUN⟩ ⇒
`The boy touches` ⟨ARTICLE⟩⟨NOUN⟩⟨PREP⟩⟨CMPLX-NOUN⟩ ⇒
`The boy touches the girl with` ⟨CMPLX-NOUN⟩ ⇒
`The boy touches the girl with` ⟨ARTICLE⟩⟨NOUN⟩ ⇒
`The boy touches the girl with the flower`

Aqui está uma outra derivação:
⟨SENTENCE⟩ ⇒ ⟨NOUN-PHRASE⟩⟨VERB-PHRASE⟩ ⇒
⟨CMPLX-NOUN⟩⟨VERB-PHRASE⟩ ⇒ ⟨ARTICLE⟩⟨NOUN⟩⟨VERB-PHRASE⟩ ⇒
`The boy` ⟨VERB-PHRASE⟩ ⇒ `The boy` ⟨CMPLX-VERB⟩ ⇒
`The boy` ⟨VERB⟩⟨NOUN-PHRASE⟩ ⇒
`The boy touches` ⟨NOUN-PHRASE⟩ ⇒
`The boy touches` ⟨CMPLX-NOUN⟩⟨PREP-PHRASE⟩ ⇒
`The boy touches` ⟨ARTICLE⟩⟨NOUN⟩⟨PREP-PHRASE⟩ ⇒
`The boy touches the girl` ⟨PREP-PHRASE⟩ ⇒
`The boy touches the girl` ⟨PREP⟩⟨CMPLX-NOUN⟩ ⇒
`The boy touches the girl with` ⟨CMPLX-NOUN⟩ ⇒
`The boy touches the girl with` ⟨ARTICLE⟩⟨NOUN⟩ ⇒
`The boy touches the girl with the flower`

Cada uma dessas derivações corresponde a um significado diferente em inglês. Na primeira derivação, a sentença quer dizer que o garoto usou a flor para tocar a garota. Na segunda derivação, a garota está segurando a flor quando o garoto a toca.

2.18 **(a)** Seja C uma linguagem livre-do-contexto e R uma linguagem regular. Seja P o AP que reconhece C, e D o AFD que reconhece R. Se Q é o conjunto de estados de P e Q' é o conjunto de estados de D, construimos um AP P' que reconhece $C \cap R$ com o conjunto de estados $Q \times Q'$. P' fará o que P faz e também mantém registro dos estados de D. Ele aceita uma cadeia w se e somente se ele pára em um estado $q \in F_P \times F_D$, onde F_P é o conjunto de estados de aceitação de P e F_D é o conjunto de estados de aceitação de D. Como $C \cap R$ é reconhecida por P', ela é livre do contexto.

(b) Seja R a linguagem regular $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\mathtt{c}^*$. Se A fosse uma LLC então $A \cap R$ seria um LLC pela parte (a). No entanto, $A \cap R = \{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$, e o Exemplo 2.36 prova que $A \cap R$ não é livre do contexto. Por conseguinte, A não é uma LLC.

2.30 **(b)** Seja $B = \{\mathtt{0}^n\mathtt{\#}\mathtt{0}^{2n}\mathtt{\#}\mathtt{0}^{3n} \mid n \geq 0\}$. Seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Seja $s = \mathtt{0}^p\mathtt{\#}\mathtt{0}^{2p}\mathtt{\#}\mathtt{0}^{3p}$. Mostramos que $s = uvxyz$ não pode ser bombeada.

Nem v nem y pode conter #, caso contrário xv^2wy^2z contém mais que dois #s. Consequentemente, se dividirmos s em três segmentos por #'s: $\mathtt{0}^p, \mathtt{0}^{2p}$, e $\mathtt{0}^{3p}$, pelo menos um dos segmentos não está contido em v ou y. Logo, xv^2wy^2z não está em B porque a proporção $1 : 2 : 3$ entre os comprimentos dos segmentos não é mantida.

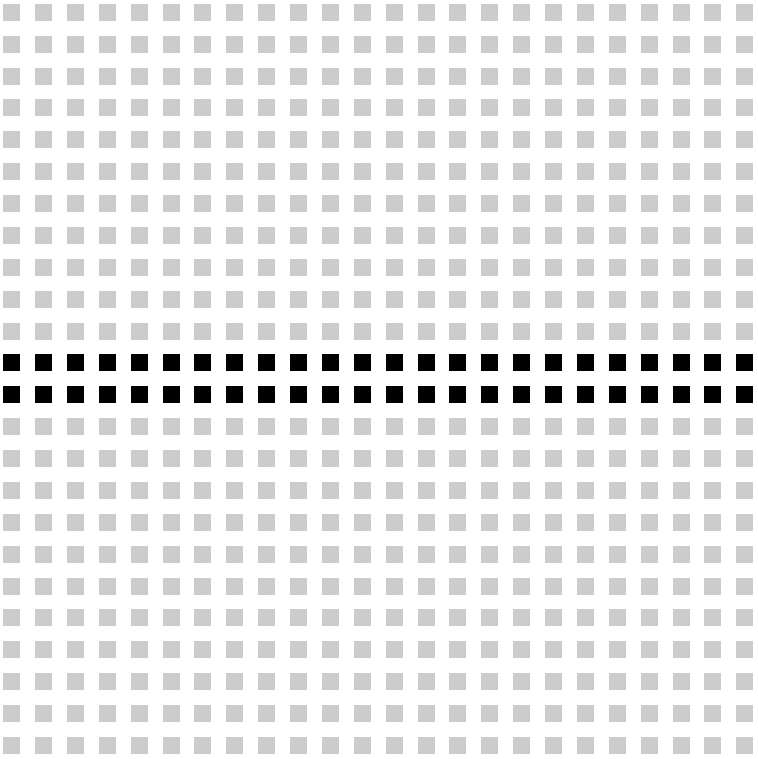
(c) Seja $C = \{w\#t | \ w$ é uma subcadeia de t, onde $w, t \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*\}$. Seja p o lema do bombeamento dado pelo lema do bombeamento. Seja $s = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^p\#\mathtt{a}^p\mathtt{b}^p$. Mostramos que a cadeia $s = uvxyz$ não pode ser bombeada.

Nem v nem y pode conter #, caso contrário uv^0xy^0z não contém # e, por conseguinte, não está em C. Se ambas v e y são não-vazias e ocorrem no lado esquerdo do #, a cadeia uv^2xy^2z não pode estar em C porque ela é mais longa no lado esquerdo do #. Similarmente, se ambas as cadeias ocorrem no lado direito do #, a cadeia uv^0xy^0z não pode estar em C porque ela é novamente mais longa no lado esquerdo do #. Se apenas uma das duas v e y é não-vazia (ambas não podem ser não-vazias), trate-as como se ambas ocorressem no mesmo lado do # como acima.

O único caso remanescente é aquele no qual ambas v e y são não-vazias e vão além do #. Mas, então v consiste de b's e y consiste de a's devido à terceira condição do lema do bombeamento $|vxy| \leq p$. Logo, uv^2xy^2z contém mais b's no lado esquerdo do #, portanto ela não pode ser um membro de C.

2.38 Seja A a linguagem $\{\mathtt{0}^k\mathtt{1}^k | \ k \geq 0\}$ e suponha que B seja a linguagem $\{\mathtt{a}^k\mathtt{b}^{3k} | \ k \geq 0\}$. O embaralhamento perfeito de A e B é a linguagem $C = \{(\mathtt{0a})^k(\mathtt{0b})^k(\mathtt{1b})^{2k} | \ k \geq 0\}$. As linguagens A e B são facilmente vistas como sendo LLCs, mas C não é uma LLC, conforme o que segue. Se C fosse uma LLC, seja p o comprimento de bombeamento dado pelo lema do bombeamento, e suponha que s seja a cadeia $(\mathtt{0a})^p(\mathtt{0b})^p(\mathtt{1b})^{2p}$. Em razão de s ser mais longa que p e $s \in C$, podemos dividir $s = uvxyz$ satisfazendo as três condições do lema do bombeamento. As cadeias em C contêm duas vezes mais 1s que a's. Para que uv^2xy^2z tenha essa propriedade, a cadeia vxy tem que conter tanto 1s quanto a's. Mas isso é impossível, porque elas são separadas por $2p$ símbolos e mesmo assim a terceira condição diz que $|vxy| \leq p$. Logo, C não é livre-do-contexto.

PARTE DOIS



TEORIA DA COMPUTABILIDADE

3

A TESE DE CHURCH–TURING

Até agora, no nosso desenvolvimento da teoria da computação, apresentamos diversos modelos de dispositivos de computação. Autômatos finitos são bons modelos para dispositivos que têm uma quantidade pequena de memória. Autômatos com pilha são bons modelos para dispositivos que possuem uma memória ilimitada que é utilizável apenas da maneira o-último-que-entra-é-o-primeiro-que-sai, de uma pilha. Mostramos que algumas tarefas muito simples estão além das capacidades desses modelos. Portanto, eles são demasiado restritos para servir como modelos de computadores de propósito geral.

3.1

MÁQUINAS DE TURING

Agora nos voltamos para um modelo muito mais poderoso, primeiro proposto por Alan Turing em 1936, chamado ***máquina de Turing***. Semelhante a um autômato finito, mas com uma memória ilimitada e irrestrita, uma máquina de Turing é um modelo muito mais acurado de um computador de propósito geral. Uma máquina de Turing pode fazer tudo que um computador real pode fazer. Entretanto, mesmo uma máquina de Turing não pode resolver certos problemas. Em um sentido muito real, esses problemas estão além dos limites teóricos da computação.

O modelo da máquina de Turing usa uma fita infinita como sua memória ilimitada. Ela tem uma cabeça de fita que pode ler e escrever símbolos e mover-se sobre a fita. Inicialmente, a fita contém apenas a cadeia de entrada e está em branco em todo o restante. Se a máquina precisa armazenar informação, ela pode escrevê-la sobre a fita. Para ler a informação que ela escreveu, a máquina pode mover sua cabeça de volta para a posição onde a informação foi escrita. A máquina continua a computar até que ela decida produzir uma saída. As saídas *aceite* e *rejeite* são obtidas entrando em estados designados de aceitação e de rejeição. Se não entrar num estado de aceitação ou de rejeição, ela continuará para sempre, nunca parando.

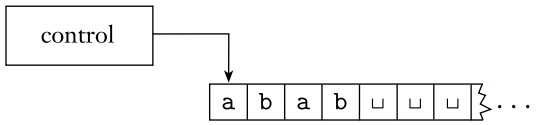


FIGURA 3.1
Esquema de uma máquina de Turing

A seguinte lista resume as diferenças entre autômatos finitos e máquinas de Turing.

1. Uma máquina de Turing pode tanto escrever sobre a fita quanto ler a partir dela.
2. A cabeça de leitura–escrita pode mover-se tanto para a esquerda quanto pa ra a direita.
3. A fita é infinita.
4. Os estados especiais para rejeitar e aceitar fazem efeito imediatamente.

Vamos introduzir uma máquina de Turing M_1 para testar pertinência na linguagem $B = \{w\#w | \ w \in \{0,1\}^*\}$. Queremos que M_1 aceite se sua entrada é um membro de B e rejeite caso contrário. Para entender M_1 melhor, ponha-se no seu lugar imaginando que você está sobre uma entrada de 1km de comprimento consistindo em milhões de caracteres. Seu objetivo é determinar se é um membro de B—ou seja, se a entrada compreende duas cadeias idênticas separadas por um símbolo #. A entrada é demasiado longa para você memorizá-la toda, mas lhe é permitido mover de-frente-para-trás e de-trás-para-frente sobre a entrada e deixar marcas sobre ela. A estratégia óbvia é ziguezaguear para as posições correspondentes nos dois lados do # e determinar se eles casam. Coloque marcas para manter o registro de quais posições se correspondem.

Projetamos M_1 para funcionar daquela maneira. Ela realiza múltiplas varreduras sobre a cadeia de entrada com a cabeça de leitura–escrita. A cada passagem, ela emparelha um dos caracteres em cada lado do símbolo #. Para manter o registro de quais símbolos já foram verificados, M_1 deixa uma marca sobre cada

símbolo à medida que ele é examinado. Se ela marca todos os símbolos, isso significa que tudo emparelhou de forma bem-sucedida, e M_1 vai para um estado de aceitação. Se descobre um descasamento, ela entra em um estado de rejeição. Em resumo, o algoritmo de M_1 é o seguinte. follows.

M_1 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça um zigue-zague ao longo da fita para posições correspondentes sobre qualquer dos lados do símbolo # para verificar se elas contêm o mesmo símbolo. Se eles não contêm, ou se nenhum # for encontrado, *rejeite*. Marque os símbolos à medida que eles são verificados para manter registro de quais símbolos têm correspondência.
2. Quando todos os símbolos à esquerda do # tiverem sido marcados, verifique a existência de algum símbolo remanescente à direita do #. Se resta algum símbolo, *rejeite*; caso contrário, *aceite*."

A Figura 3.2 contém várias fotografias instantâneas da fita de M_1 enquanto ela está computando nos estágios 2 e 3 quando iniciada sobre a entrada 011000#011000.

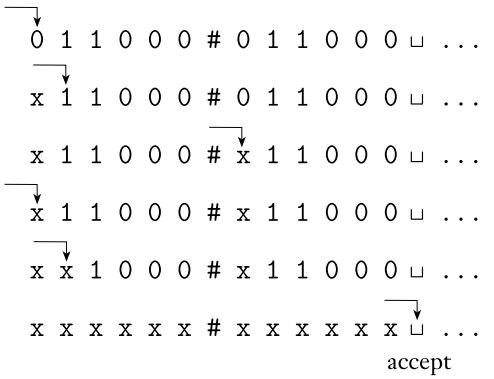


FIGURA 3.2
Fotografias instantâneas da máquina de Turing M_1 computando sobre a entrada 011000#011000

Essa descrição da máquina de Turing M_1 esboça a maneira como ela funciona, mas não dá todos os seus detalhes. Podemos descrever máquinas de Turing em todos os detalhes, dando descrições formais análogas àquelas introduzidas para autômatos finitos e autômatos com pilha. As descrições formais especificam cada uma das partes da definição forma do modelo da máquina de Turing a ser

apresentado em breve. Na realidade, quase nunca damos descrições formais de máquinas de Turing porque elas tendem a ser muito grandes.

DEFINIÇÃO FORMAL DE UMA MÁQUINA DE TURING

O coração da definição de uma máquina de Turing é a função de transição δ, pois ela nos diz como a máquina vai de um passo para o próximo. Para uma máquina de Turing, δ toma a forma: $Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{E}, \mathrm{D}\}$. Ou seja, quando a máquina está em um certo estado q e a cabeça está sobre uma célula da fita contendo um símbolo a e se $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{E})$, a máquina escreve o símbolo b substituindo o a e vai para o estado r. O terceiro componente é E ou D e indica se a cabeça move para a esquerda ou direita após escrever. Nesse caso o E indica um movimento para a esquerda.

DEFINIÇÃO 3.3

Uma ***máquina de Turing*** é uma 7-upla, $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}})$, onde Q, Σ, Γ são todos conjuntos finitos e

1. Q é o conjunto de estados,
2. Σ é o alfabeto de entrada não contendo o ***símbolo em branco*** $\sqcup$,
3. Γ é o alfabeto de fita, onde $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$,
4. $\delta\colon Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{E}, \mathrm{D}\}$ é a função de transição,
5. $q_0 \in Q$ é o estado inicial,
6. $q_{\text{aceita}} \in Q$ é o estado de aceitação, e
7. $q_{\text{rejeita}} \in Q$ é o estado de rejeição, onde $q_{\text{rejeita}} \neq q_{\text{aceita}}$.

Uma máquina de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}})$ computa da seguinte maneira. Inicialmente M recebe sua entrada $w = w_1 w_2 \ldots w_n \in \Sigma^*$ sobre as n células mais à esquerda da fita, e o restante da fita está em branco (i.e., preenchido com símbolos em branco). A cabeça começa sobre a célula mais à esquerda da fita. Note que Σ não contém o símbolo em branco, portanto o primeiro branco aparecendo sobre a fita marca o fim da entrada. Uma vez que M tenha iniciado, a computação procede conforme as regras descritas pela função de transição. Se M em algum momento tentar mover sua cabeça para a esquerda além da extremidade esquerda da fita, a cabeça permanece no mesmo lugar para aquele movimento, muito embora a fucção de transição indique E. A computação continua até que ela entra ou no estado de aceitação ou de rejeição em cujo ponto ela pára. Se nenhum desses ocorre, M continua para sempre.

À medida que uma máquina de Turing computa, mudanças ocorrem no estado atual, no conteúdo atual da fita e a posição atual da cabeça. Um possível

valor desses três itens é denominado ***configuração*** da máquina de Turing. Configurações são freqüentemente representadas de uma maneira especial. Para um estado q e duas cadeias u e v sobre o alfabeto de fita Γ, escrevemos $u\,q\,v$ para a configuração na qual o estado atual é q, o conteúdo atual da fita é uv e a posição atual da cabeça é sobre o primeiro símbolo de v. A fita contém apenas brancos após o último símbolo de v. Por exemplo, $\texttt{1011}q_7\texttt{01111}$ representa a configuração quando a fita é `101101111`, o estado atual é q_7, e a cabeça está atualmente sobre o segundo `0`. A Figura 3.4 mostra uma máquina de Turing com essa configuração.

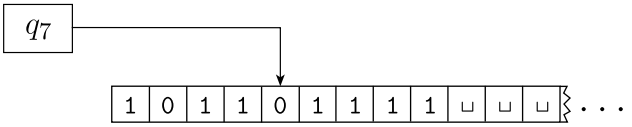


FIGURA 3.4
Uma máquina de Turing com configuração $\texttt{1011}q_7\texttt{01111}$

Aqui formalizamos nosso entendimento intuitivo da maneira pela qual uma máquina de Turing computa. Digamos que a configuração C_1 ***origina*** a configuração C_2, se a máquina de Turing puder legitimamente ir de C_1 para C_2 em um único passo. Definimos essa noção formalmente da seguinte maneira.

Suponha que tenhamos a, b e c em Γ, assim como u e v em Γ^* e os estados q_i e q_j. Nesse caso $ua\,q_i\,bv$ e $u\,q_j\,acv$ são duas configurações. Digamos que

$$ua\,q_i\,bv \quad \text{origina} \quad u\,q_j\,acv$$

se a função de transição $\delta(q_i, b) = (q_j, c, \mathrm{E})$. Isso cobre o caso em que a máquina de Turing move para a esquerda. Para um movimento para a direita, digamos que

$$ua\,q_i\,bv \quad \text{origina} \quad uac\,q_j\,v$$

se $\delta(q_i, b) = (q_j, c, \mathrm{D})$.

Casos especiais ocorrem quando a cabeça estiver em uma das extremidades da configuração. Para a extremidade esquerda, a configuração $q_i\,bv$ origina $q_j\,cv$ se a transição envolver um movimento para a esquerda (porque cuidamos para que a máquina não passe da extremidade esquerda da fita), e ela origina $c\,q_j v$ para a transição que envolve um movimento para a direita. Para a extremidade direita, a configuração $ua\,q_i$ é equivalente a $ua\,q_i\,\sqcup$ porque assumimos que brancos vêm após a parte da fita representada na configuração. Por conseguinte, podemos lidar com esse caso tal qual anteriormente, com a cabeça não mais na extremidade direita.

A ***configuração inicial*** de M sobre a entrada w é $q_0\,w$, que indica que a máquina está no estado inicial q_0 com sua cabeça na posição mais à esquerda

sobre a fita. Em uma ***configuração de aceitação***, o estado da configuração é q_{aceita}. Em uma ***configuração de rejeição***, o estado da configuração é q_{rejeita}. Configurações de aceitação e de rejeição são ***configurações de parada*** e portanto não originam configurações adicionais. Dado que a máquina é definida para parar quando está nos estados q_{aceita} e q_{rejeita}, poderíamos equivalentemente ter definido a função de transição como tendo a forma mais complicada $\delta\colon Q' \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\text{E}, \text{D}\}$, onde Q' é Q sem q_{aceita} e q_{rejeita}. Uma máquina de Turing M ***aceita*** a entrada w se uma seqüência de configurações $C_1, C_2, \ldots, C_k$ existe, onde

1. C_1 é a configuração inicial de M sobre a entrada w,
2. cada C_i origina C_{i+1} e
3. C_k é uma configuração de aceitação.

A coleção de cadeias que M aceita é ***a linguagem de M***, ou ***a linguagem reconhecida por M***, denotada $L(M)$.

DEFINIÇÃO 3.5

Chame uma linguagem de ***Turing-reconhecível*** se alguma máquina de Turing a reconhece.[1]

Quando iniciamos uma máquina de Turing sobre uma entrada, três resultados são possíveis. A máquina pode *aceitar*, *rejeitar*, ou *entrar em loop*. Por ***entrar em loop*** queremos dizer que a máquina simplesmente não pára. Entrar em loop pode acarretar qualquer comportamenteo simples ou complexo que nunca leva a um estado de parada.

Uma máquina de Turing M pode falhar em aceitar uma entrada, passando para o estado q_{rejeita} e rejeitando ou entrando em loop. Às vezes, distinguir uma máquina que está em loop de uma que está meramente levando um tempo longo é difícil. Por essa razão preferimos máquinas de Turing que param sobre todas as entradas; tais máquinas nunca entram em loop. Essas máquinas são chamadas ***decisores***, porque elas sempre tomam uma decisão de aceitar ou rejeitar. Um decisor que reconhece alguma linguagem também é dito ***decidir*** essa linguagem.

DEFINIÇÃO 3.6

Chame uma linguagem de ***Turing-decidível*** ou simplesmente ***decidível*** se alguma máquina de Turing a decide.[2]

[1] Ela é chamada ***linguagem recursivamente enumerável*** em alguns outros livros-texto.

A seguir, damos exemplos de linguagens decidíveis. Toda linguagem decidível é Turing-reconhecível. Apresentamos exemplos de linguagens que são Turing-reconhecíveis, porém não decidíveis após desenvolvermos uma técnica para provar indecidibilidade no Capítulo 4.

EXEMPLOS DE MÁQUINAS DE TURING

Como fizemos para autômatos finitos e autômatos com pilha, podemos descrever formalmente uma determinada máquina de Turing especificando cada uma de suas sete partes. Entretanto, ir para esse nível de detalhe pode ser enfadonho para toda máquina de Turing, exceto para as minúsculas. Dessa forma, não gastaremos muito tempo dando tais descrições. Na maior parte das vezes damos apenas descrições de alto nível, pois elas são suficientemente precisas para nossos propósitos e são muito mais fáceis de entender. No entanto, é importante lembrar que toda descrição de alto nível é, na realidade, somente uma abreviação para sua contrapartida formal. Com paciência e cuidado poderíamos descrever qualquer das máquinas de Turing neste livro em completo detalhe formal.

Para ajudá-lo a fazer a conexão entre a descrição formal e as de alto nível, daremos diagramas de estado nos próximos dois exemplos. Você pode pulá-los se já se sente confortável com essa conexão.

EXEMPLO 3.7

Aqui descrevemos uma máquina de Turing (MT) M_2 que decide $A = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$, a linguagem consistindo em todas as cadeias de 0s cujo comprimento é uma potência de 2.

M_2 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura da esquerda para a direita na fita, marcando um 0 não e outro sim.
2. Se no estágio 1, a fita continha um único 0, *aceite*.
3. Se no estágio 1, a fita continha mais que um único 0 e o número de 0s era ímpar, *rejeite*.
4. Retorne a cabeça para a extremidade esquerda da fita.
5. Vá para o estágio 1."

Cada iteração do estágio 1 corta o número de 0s pela metade. Como a máquina faz uma varredura na fita no estágio 1, ela mantém registro de se o número de 0s vistos é par ou ímpar. Se esse número for ímpar e maior que 1, o número original de 0s na entrada não poderia ter sido uma potência de 2. Por-

[2]Ela é chamada de ***linguagem recursiva*** em alguns outros livros-texto.

tanto, a máquina rejeita nessa instância. Porém, se o número de 0s visto for 1, o número original deve ter sido uma potência de 2. Assim, nesse caso, a máquina aceita.

Agora, damos a descrição formal de $M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}})$:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}}\}$,
- $\Sigma = \{0\}$, and
- $\Gamma = \{0, x, \sqcup\}$.
- Descrevemos δ com um diagrama de estados (veja a Figura 3.8).
- Os estados inicial, de aceitação e de rejeição são q_1, q_{aceita} e q_{rejeita}.

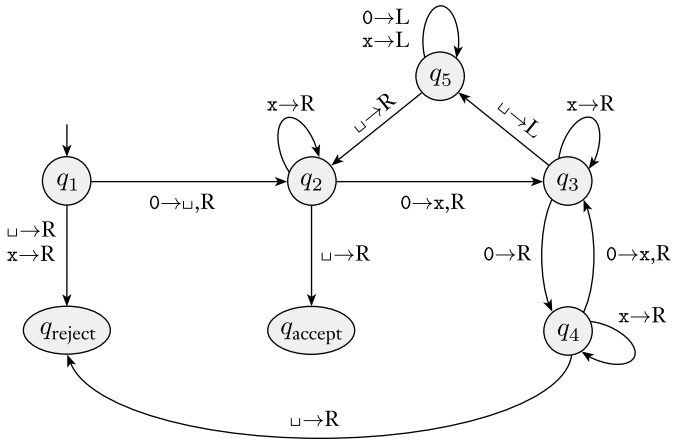


FIGURA 3.8
Diagrama de estados para a máquina de Turing M_2

Nesse diagrama de estados, o rótulo 0→⊔,D aparece na transição de q_1 para q_2. Esse rótulo significa que, quando no estado q_1 com a cabeça lendo 0, a máquina vai para o estado q_2, escreve ⊔, e move a cabeça para a direita. Em outras palavras, $\delta(q_1,0) = (q_2,\sqcup,\text{D})$. Para maior clareza, usamos a abreviação 0→D na transição de q_3 para q_4, para indicar que a máquina move para a direita ao ler 0 no estado q_3, mas não altera a fita, portanto $\delta(q_3,0) = (q_4,0,\text{D})$.

Essa máquina começa escrevendo um símbolo em branco sobre o 0 mais à esquerda na fita, de modo que ela possa encontrar a extremidade esquerda da fita no estágio 4. Enquanto normalmente usaríamos um símbolo mais sugestivo tal como # para o delimitador da extremidade esquerda, utilizamos um branco aqui para manter o alfabeto de fita pequeno, e, assim, o diagrama de estados também pequeno. O Exemplo 3.11 dá outro método de se encontrar a extremidade es-

querda da fita.

A seguir fornecemos uma amostra de execução de amostra dessa máquina sobre a entrada 0000. A configuração inicial é $q_1$0000. A seqüência de configurações nas quais a máquina entra aparece da seguinte forma; leia de cima para baixo nas colunas e da esquerda para a direita.

$q_1$0000	␣q_5x0x␣	␣x$q_5$xx␣
␣$q_2$000	q_5␣x0x␣	␣$q_5$xxx␣
␣x$q_3$00	␣q_2x0x␣	q_5␣xxx␣
␣x0$q_4$0	␣x$q_2$0x␣	␣$q_2$xxx␣
␣x0xq_3␣	␣xxq_3x␣	␣x$q_2$xx␣
␣x0q_5x␣	␣xxxq_3␣	␣xxq_2x␣
␣x$q_5$0x␣	␣xxq_5x␣	␣xxxq_2␣
		␣xxx␣q_{aceita}

EXEMPLO 3.9

O que segue é uma descrição formal de $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}})$, a máquina de Turing que descrevemos informalmente (página 147) para decidir a linguagem $B = \{w\#w | \ w \in \{0,1\}^*\}$.

- $Q = \{q_1, \ldots, q_{14}, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}}\}$,
- $\Sigma = \{0,1,\#\}$, e $\Gamma = \{0,1,\#,x,␣\}$.
- Descrevemos δ com um diagrama de estados (veja a figura seguinte).
- Os estados inicial, de aceitação e de rejeição são q_1, q_{aceita}e q_{rejeita}.

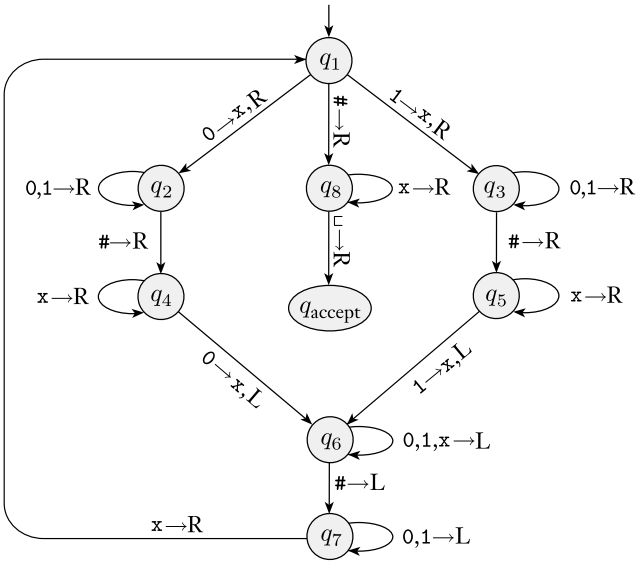


FIGURA 3.10
Diagrama de estados para a máquina de Turing M_1

Na Figura 3.10, que mostra o diagrama de estados da MT M_1, você vai encontrar o rótulo 0,1→D na transição indo de q_3 para si próprio. Esse rótulo significa que a máquina permanece em q_3 e move para a direita quando ela lê um 0 ou um 1 no estado q_3. Ela não muda o símbolo sobre a fita.

O Estágio 1 é implementado pelos estados q_1 a q_6, e o estágio 2 pelos estados remanescentes. Para simplificar a figura, não mostramos o estado de rejeição ou as transições indo para o estado de rejeição. Aquelas transições ocorrem implicitamente sempre que um estado não tem uma transição motivada por um símbolo específico. Portanto, em razão do fato de que no estado q_5 nenhuma seta de saída com um # está presente, se um # ocorre sob a cabeça quando a máquina está no estado q_5, ela vai para o estado q_{rejeita}. Em nome da completude, dizemos que a cabeça move para a direita em cada uma dessas transições para o estado de rejeição. ■

EXEMPLO 3.11

Aqui, uma MT M_3 está realizando algo de aritmética elementar. Ela decide a linguagem $C = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i \times j = k \text{ and } i, j, k \geq 1\}$.

M_3 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura na entrada da esquerda para a direita para determinar se ela é um membro de $\mathtt{a}^+\mathtt{b}^+\mathtt{c}^+$ e *rejeite* se ela não o é.

2. Retorne a cabeça para a extremidade esquerda da fita.
3. Marque um a e faça uma varredura para a direita até que um b ocorra. Vá e volte entre os b's e os c's, marcando um de cada até que todos os b's tenham terminado. Se todos os c's tiverem sido marcados e alguns b's permanecem, *rejeite*.
4. Restaure os b's marcados e repita o estágio 3 se existe um outro a para marcar. Se todos os a's tiverem sido marcados, determine se todos os c's também foram marcados. Se sim, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Vamos examinar os quatro estágios de M_3 mais detalhadamente. No estágio 1 a máquina opera como um autômato finito. Nenhuma operação de escrever é necessária quando a cabeça se move da esquerda para a direita, mantendo registro através do uso de seus estados para determinar se a entrada está na forma apropriada.

O estágio 2 parece igualmente simples mas contém uma sutileza. Como pode a MT encontrar a extremidade esquerda da fita de entrada? Encontrar a extremidade direita da entrada é fácil porque ela termina com um símbolo em branco. Mas a extremidade esquerda não tem nenhum terminador inicialmente. Uma técnica que permite que a máquina encontre a extremidade esquerda da fita é ela marcar o símbolo mais à esquerda de alguma maneira quando a máquina inicia com sua cabeça sobre esse símbolo. Então a máquina pode fazer uma varredura para a esquerda até que ela encontre a marca quando ela deseja reinicializar sua cabeça para a extremidade esquerda. O Exemplo 3.7 ilustrou essa técnica; um símbolo em branco marca a extremidade esquerda.

Um método mais elaborado de se encontrar a extremidade esquerda da fita se aproveita da maneira pela qual definimos o modelo da máquina de Turing. Lembremo-nos de que, se a máquina tenta mover sua cabeça além da extremidade esquerda da fita, ela permanece no mesmo lugar. Podemos usar essa característica para fazer um detector de extremidade esquerda. Para detectar se a cabeça está em cima da extremidade esquerda a máquina pode escrever um símbolo especial na posição corrente, enquanto guarda no controle o símbolo que foi substituido. Então ela pode tentar mover a cabeça the para a esquerda. Se ela ainda está sobre o símbolo especial, o movimento para a esquerda não foi bem sucedido, e portanto a cabeça tem que ter estado na extremidade esquerda. Se, ao invés disso, a cabeça está sobre um símbolo diferente, alguns símbolos permaneceram à esquerda daquela posição na fita. Antes de ir mais adiante, a máquina tem que garantir que restaura o símbolo modificado de volta ao original.

Os estágios 3 e 4 têm implementações imediatas e usam vários estados cada.

EXEMPLO 3.12

Aqui, uma MT M_4 está resolvendo o que é chamado de *problema da distinção de elementos*. É dada uma lista de cadeias sobre $\{0,1\}$ separadas por #s e sua tarefa é aceitar se todas as cadeias são diferentes. A linguagem é

$$E = \{\#x_1\#x_2\#\cdots\#x_l \mid \text{cada } x_i \in \{0,1\}^* \text{ e } x_i \neq x_j \text{ para cada } i \neq j\}.$$

A máquina M_4 funciona comparando x_1 com x_2 a x_l, aí então comparando x_2 com x_3 a x_l, e assim por diante. Uma descrição informal da MT M_4 que decide essa linguagem segue.

M_4 = "Sobre a entrada w:

1. Coloque uma marca em cima do símbolo de fita mais à esquerda. Se esse símbolo era um branco, *aceite*. Se esse símbolo era um #, continue com o próximo estágio. Caso contrário, *rejeite*.
2. Faça uma varredura procurando o próximo # e coloque uma segunda marca em cima dele. Se nenhum # for encontrado antes de um símbolo em branco, somente x_1 estava presente, portanto *aceite*.
3. Fazendo um zigue-zague, compare as duas cadeias à direita dos #s marcados. Se elas forem iguais, *rejeite*.
4. Mova a marca mais à direita das duas para o próximo símbolo # à direita. Se nenhum símbolo # for encontrado antes de um símbolo em branco, mova a marca mais à esquerda para o próximo # à sua direita e a marca mais à direita para o # depois desse. Dessa vez, se nenum # estiver disponível para a marca mais à direita, todas as cadeias foram comparadas, portanto *aceite*.
5. Vá para o estágio 3."

Essa máquina ilustra a técnica de marcar símbolos de fita. No estágio 2, a máquina coloca uma marca sobre um símbolo, # nesse caso. Na real implementação, a máquina tem dois símbolos diferentes, # e $\dot{\#}$, no seu alfabeto de fita. Dizer que a máquina coloca uma marca sobre um # significa que a máquina escreve o símbolo $\dot{\#}$ nessa posição. Remover a marca significa que a máquina escreve o símbolo sem o ponto. Em geral podemos querer colocar marcas sobre vários símbolos na fita. Para fazer isso simplesmente incluimos versões de todos esses símbolos de fita com pontos no alfabeto de fita. ■

Concluimos dos exemplos precedentes que as linguagems descritas A, B, C e E são decidíveis. Todas as linguagens decidíveis são Turing-reconhecíveis, portanto essas linguagens são também Turing-reconhecíveis. Exibir uma linguagem que seja Turing-reconhecível mas não decidível é mais difícil, o que fazemos no Capítulo 4.

3.2 VARIANTES DE MÁQUINAS DE TURING

Definições alternativas de máquinas de Turing abundam, incluindo versões com múltiplas fitas ou com não-determinismo. Elas são chamadas ***variantes*** do modelo da máquina de Turing. O modelo original e suas variantes razoáveis todos têm o mesmo poder—eles reconhecem a mesma classe de linguagens. Nesta seção descrevemos algumas dessas variantes e as provas de equivalência em poder. Chamamos essa invariância a certas mudanças na definição ***robustez***. Tanto autômatos finitos quando autômatos com pilha são modelos um tanto robustos, mas máquinas de Turing têm um grau surpreendente de robustez.

Para ilustrar a robustez do modelo da máquina de Turing vamos variar o tipo de função de transição permitida. Em nossa definição, a função de transição força a cabeça a mover para a esquerda ou direita após cada passo; a cabeça pode não simplesmente permanecer parada. Suponha que tivéssemos permitido à máquina de Turing machine a capacidade de permanecer parada. A função de transição teria então a forma $\delta\colon Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{E}, \mathrm{D}, \mathrm{P}\}$. Essa característica poderia permitir a máquinas de Turing reconhecer linguagens adicionais, portanto incrementando o poder do modelo? É claro que não, porque podemos converter qualquer MT com a característica "permaneça parada" para uma que não a tem. Fazemos isso substituindo cada transição com "permaneça parada" por duas transições, uma que move para a direita e a segunda move de volta para a esquerda.

Esse pequeno exemplo contém a chave para mostrar a equivalência de variantes de MT. Para mostrar que dois modelos são equivalentes simplesmente precisamos mostrar que podemos simular um pelo outro.

MÁQUINAS DE TURING MULTIFITAS

Uma ***máquina de Turing multifita*** é como uma máquina de Turing comum com várias fitas. Cada fita tem sua própria cabeça para leitura e escrita. Inicialmente a entrada aparece sobre a fita 1, e as outras iniciam em branco. A função de transição é modificada para permitir ler, escrever, e mover as cabeças em algumas ou todas as fitas simultaneamente. Formalmente, ela é

$$\delta\colon Q \times \Gamma^k \longrightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\mathrm{E}, \mathrm{D}, \mathrm{P}\}^k,$$

onde k é o número de fitas. A expressão

$$\delta(q_i, a_1, \ldots, a_k) = (q_j, b_1, \ldots, b_k, \mathrm{E}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{E})$$

significa que, se a máquina está no estado q_i e as cabeças 1 a k estão lendo símbolos a_1 a a_k, a máquina vai para o estado q_j, escreve os símbols b_1 a b_k, e direciona cada cabeça para mover para a esquerda ou direita, ou permanecer parada, conforme especificado.

Máquinas de Turing multifita parecem ser mais poderosas que máquinas de Turing comuns, mas podemos mostrar que elas são equivalentes em poder.

Lembremo-nos de que duas máquinas são equivalentes se elas reconhecem a mesma linguagem.

TEOREMA 3.13

Toda máquina de Turing tem uma máquina de Turing de uma única fita que lhe é equivalente.

PROVA Mostramos como converter uma MT multifita M para uma MT equivalente S de uma única fita. A idéia chave é mostrar como simular M com S.

Digamos que M tem k fitas. Então S simula o efeito de k fitas armazenando sua informação na sua única fita. Ela usa o novo símbolo # como um delimitador para separar o conteúdo das diferentes fitas. Além do conteúdo dessas fitas, S tem que manter registro das posições das cabeças. Ela faz isso escrevendo um símbolo de fita com um ponto acima dele para marcar o local onde a cabeça naquela fita estaria. Pense nisso tudo como fitas e cabeças "virtuais". Tal qual antes, os símbolos de fita "marcados com um ponto" são simplesmente novos símbolos que foram adicionados ao alfabeto de fita. A seguinte figura ilustra como uma fita pode ser usada representar três fitas.

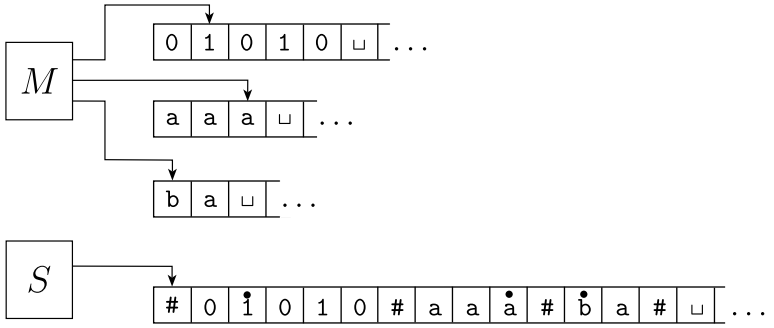


FIGURA 3.14
Representando três fitas com apenas uma

S = "Sobre a entrada $w = w_1 \cdots w_n$:

1. Primeiro S ponha sua fita no formato que representa todas as k fitas de M. A fita formatada contém

$$\#\dot{w}_1 w_2 \cdots w_n \#\dot{\sqcup}\#\dot{\sqcup}\# \cdots \#$$

2. Para simular um único movimento, S faz uma varredura na sua fita desde o primeiro #, que marca a extremidade esquerda, até o $(k+1)$-ésimo #, que marca a extremidade direita, de modo a determinar os símbolos sob as cabeças virtuais. Então S faz uma segunda passagem para atualizar as fitas conforme a maneira pela qual a função de transição de M estabelece.

3. Se em algum ponto S move uma das cabeças virtuais sobre um #, essa ação significa que M moveu a cabeça correspondente para a parte previamente não-lida em branco daquela fita. Portanto, S escreve um símbolo em branco nessa célula da fita e desloca o conteúdo da fita, a partir dessa célula até o # mais à direita, uma posição para a direita. Então ela continua a simulação tal qual anteriormente."

COROLÁRIO 3.15

Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se alguma máquina de Turing multifita a reconhece.

PROVA Uma linguagem Turing-reconhecível é reconhecida por uma máquina de Turing comum (com uma única fita), o que é um caso especial de uma máquina de Turing multifita. Isso prova uma direção desse corolário. A outra direção segue do Teorema 3.13.

MÁQUINAS DE TURING NÃO-DETERMINÍSTICAS

Uma máquina de Turing não-determinística é definida da maneira esperada. Em qualquer ponto em uma computação a máquina pode proceder de acordo com várias possibilidades. A função de transição para uma máquina de Turing não-determinística tem a forma

$$\delta\colon Q \times \Gamma \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{\mathrm{E}, \mathrm{D}\}).$$

A computação de uma máquina de Turing não-determinística é uma árvore cujos ramos correspondem a diferentes possibilidades para a máquina. Se algum ramo da computação leva ao estado de aceitação, a máquine aceita sua entrada. Se você sente que há necessidade de revisar não-determinismo, volte para a Seção 1.2 (página 51). Agora mostramos que não-determinismo não afeta o poder do modelo da máquina de Turing.

TEOREMA 3.16

Toda máquina de Turing não-determinística tem uma máquina de Turing determinística que lhe é equivalente.

IDÉIA DA PROVA Podemos simular qualquer MT não-determinística N com uma MT determinística D. A idéia por trás da simulação é fazer D tentar todos os possíveis ramos da computação não-determinística de N. Se D em algum momento encontra o estado de aceitação em algum desses ramos, D aceita. Caso contrário, a simulação de D não terminará.

Vemos a computação de N sobre uma entrada w como uma árvore. Cada ramo da árvore representa um dos ramos do não-determinismo. Cada nó da árvore é uma configuração de N. A raiz da árvore é a configuração inicial. A MT D busca nessa árvore uma configuração de aceitação. Conduzir essa busca cuidadosamente é crucial para que D não falhe em visitar toda a árvore. Uma idéia tentadora, porém ruim, é fazer D explorar a árvore usando busca em profundidade. A estratégia de busca em profundidade desce ao longo de todo um ramo antes de voltar a explorar outros ramos. Se D fosse explorar a árvore dessa maneira, D poderia descer para sempre num ramo infinito e perder uma configuração de aceitação em algum outro ramo. Daí, projetamos D para explorar a árvore usando busca em largura, ao invés de busca em profundidade. Essa estratégia explora todos os ramos na mesma profundidade antes de continuar a explorar qualquer ramo na próxima profundidade. Esse método garante que D visitará todo nó na árvore até que ela encontre uma configuração de aceitação.

PROVA A MT deterministic simuladora D tem três fitas. Pelo Teorema 3.13 esse arranjo é equivalente a se ter uma única fita. A máquina D usa suas três fitas de uma maneira específica, como ilustrado na figura abaixo. A fita 1 sempre contém a cadeia de entrada e nunca é alterada. A fita 2 mantém uma cópia da fita de N em algum ramo de sua computação não-determinística. A fita 3 mantém registro da posição de D na árvore de computação não-determinística de N.

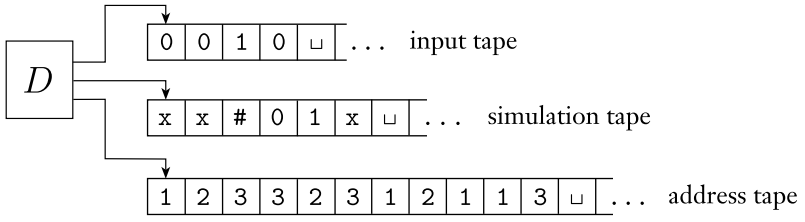


FIGURA 3.17
A MT determinística D simulando a MT não-determinística N

Vamos primeiro considerar a representação de dados na fita 3. Todo nó na árvore pode ter no máximo b filhos, onde b é o tamanho do maior conjunto de possíveis escolhas dado pela função de transição de N. A cada nó na árvore associamos um endereço que é uma cadeia sobre o alfabeto $\Sigma_b = \{1, 2, \ldots, b\}$. Associamos o endereço 231 ao nó ao qual chegamos iniciando na raiz, indo para seu 2º filho, indo para o 3º filho desse nó, e finalmente indo para o 1º filho desse nó. Cada símbolo na cadeia nos diz que escolha fazer a seguir quando simulamos um passo em um ramo da computação não-determinística de N. Às vezes um símbolo pode não corresponder a nenhuma escolha se muito poucas escolhas estão disponíveis para uma configuração. Nesse caso o endereço é inválido e não corresponde a nenhum nó. A fita 3 contém uma cadeia sobre Σ_b. Ela representa o ramo da computação de N da raiz para o nó endereçado por essa cadeia, a

menos que o endereço seja inválido. A cadeia vazia é o endereço da raiz da árvore. Agora estamos prontos para descrever D.

1. Inicialmente a fita 1 contém a entrada w, e as fitas 2 e 3 estão vazias.
2. Copie a fita 1 para a fita 2.
3. Use a fita 2 para simular N com a entrada w sobre um ramo de sua computação não-determinística. Antes de cada passo de N consulte o próximo símbolo na fita 3 para determinar qual escolha fazer entre aquelas permitidas pela função de transição de N. Se não restam mais símbolos na fita 3 ou se essa escolha não-determinística for inválida, aborte esse ramo indo para o estágio 4. Também vá para o estágio 4 se uma configuração de rejeição for encontrada. Se uma configuração de aceitação for encontrada, *aceite* a entrada.
4. Substitua a cadeia na fita 3 pela próxima cadeia na ordem lexicográfica. Simule o próximo ramo da computação de N indo para o estágio 2.

COROLÁRIO 3.18

Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se alguma máquina de Turing não-determinística a reconhece.

PROVA Qualquer MT determinística é automaticamente uma MT não-determinística, e portanto uma direção desse teorema segue imediatamente. A outra direção segue do Teorema 3.16.

Podemos modificar a prova do Teorema 3.16 de modo que se N sempre pára em todos os ramos de sua computação, D vai sempre parar. Chamamos uma máquina de Turing não-determinística de ***decisor*** se todos os ramos param sobre todas as entradas. O Exercício 3.3 pede que você modifique a prova dessa maneira para obter o seguinte corolário do Teorema 3.16.

COROLÁRIO 3.19

Uma linguagem é decidível se e somente se alguma máquina de Turing não-determinística a decide.

ENUMERADORES

Como mencionamos anteriormente, algumas pessoas usam o termo *linguagem recursivamente enumerável* para linguagem Turing-reconhecível. Esse termo se origina a partir de um tipo de variante de máquina de Turing denominada ***enumerador***. Frouxamente definido, um enumerador é uma máquina de Turing

com uma impressora em anexo. A máquina de Turing pode usar essa impressora como um dispositivo de saída para imprimir cadeias. Toda vez que a máquina de Turing quer adicionar uma cadeia à lista, ela envia a cadeia para a impressora. O Exercício 3.4 pede que você dê uma definição formal de um enumerador. A figura abaixo mostra uma esquemática desse modelo.

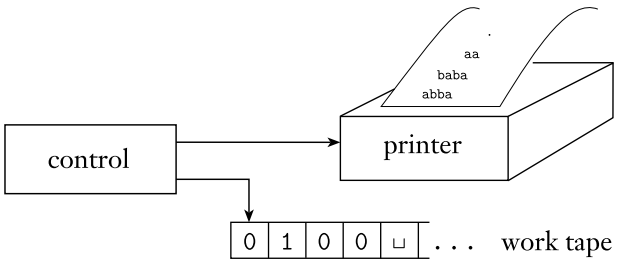


FIGURA 3.20
Esquemática de um enumerador

Um enumerador E inicia com uma fita de entrada em branco. Se o enumerador não pára, ele pode imprimir uma lista infinita de cadeias. A linguagem enumerada por E é a coleção de todas as cadeias que ela em algum momento imprime. Além disso, E pode gerar as cadeias da linguagem em qualquer ordem, possivelmente com repetições. Agora estamos prontos para desenvolver a conexão entre enumeradores e linguagens Turing-reconhecíveis.

TEOREMA 3.21

Uma linguagem é Turing-reconhecível se e somente se algum enumerador a enumera.

PROVA Primeiro mostramos que se tivermos um enumerador E que enumera uma linguagem A, uma MT M reconhece A. A MT M funciona da seguinte maneira.

M = "Sobre a entrada w:

1. Rode E. Toda vez que E dá como saída uma cadeia, compare-a com w.
2. Se w em algum momento aparece na saída de E, *aceite*."

Claramente, M aceita aquelas cadeias que aparecem na lista de E.

Agora fazemos a outra direção. Se a MT M reconhece uma linguagem A, podemos construir o seguinte enumerador E para A. Digamos que $s_1, s_2, s_3, \ldots$ é uma lista de todas as possíveis cadeias em Σ^*.

E = "Ignore a entrada.

1. Repita o seguinte para $i = 1, 2, 3, \ldots$
2. Rode M por i passos sobre cada entrada, $s_1, s_2, \ldots, s_i$.
3. Se quaisquer computações aceitam, imprima a s_j correspondente."

Se M aceita uma cadeia específica s, em algum momento ela vai aparecer na lista gerada por E. Na verdade, ela vai aparecer na lista uma quantidade infinita de vezes porque M roda do início sobre cada cadeia para cada repetição do passo 1. Esse procedimento dá o efeito de se rodar M em paralelo sobre todas as possíveis cadeias de entrada.

EQUIVALÊNCIA COM OUTROS MODELOS

Até agora apresentamos diversas variantes do modelo da máquina de Turing e demonstramos que eles são equivalentes em poder. Muitos outros modelos de computação de propósito geral têm sido propostos. Alguns desses modelos são muito semelhantes a máquinas de Turing, mas outros são bastante diferentes. Todos compartilham a característica essencial de máquinas de Turing—a saber, acesso irrestrito a memória ilimitada—distingüindo-os de modelos mais fracos tais como autômatos finitos e autômatos com pilha. Notavelmente, *todos* os modelos com essa características vêm a ser equivalentes em poder, desde que eles satisfaçam requisitos razoáveis.[3]

Para entender esse fenômeno considere a situação análoga para linguagens de programação. Muitas, tais como Pascal e LISP, parecem bem diferentes umas das outras em estilo e estrutura. Será que algum algoritmo pode ser programado em uma delas e não nas outras? É claro que não—podemos compilar LISP para Pascal e Pascal para LISP, o que significa que as duas linguagens descrevem *exatamente* a mesma classe de algoritmos. O mesmo acontece com outras linguagens de programação razoáveis. A larga equivalência de modelos computacionais se verifica precisamente pela mesma razão. Quaisquer dois modelos compucationais que satisfaçam certos requisitos razoáveis podem simular um ao outro e, portanto, são equivalentes em poder.

Esse fenômeno da equivalência tem um corolário filosófico importante. Muito embora possamos imaginar muitos modelos computacionals diferentes, a classe de algoritmos que eles descrevem permanece a mesma. Enquanto que cada modelo computacional espeífico tem uma certa arbitrariedade na sua definição, a classe subjacente de algoritmos que ela descreve é natural, porque os outros modelos chegam à mesma, e única, classe. Esse fenômeno tem tido implicações profundas para a matemática, como mostramos na próxima seção.

[3]Por exemplo, um requisito é a capacidade de realizar somente uma quantidade finita de trabalho em um único passo.

3.3 A DEFINIÇÃO DE ALGORITMO

Informalmente falando, um *algoritmo* é uma coleção de instruções simples para realizar alguma tarefa. Lugar-comum na vida cotidiana, algoritmos às vezes são chamados de *procedimentos* ou *receitas*. Algoritmos também desempenham um importante papel em matemática. A literatura matemática antiga contém descrições de algoritmos para uma variedade de tarefas, tais como encontrar números primos e máximos divisores comuns. Na matemática contemporânea algoritmos abundam.

Muito embora algoritmos tenham tido uma longa história na matemática, a noção em si de algoritmo não foi definida precisamente até o século XX. Antes disso, os matemáticos tinham uma noção intuitiva do que eram algoritmos, e se baseavam naquela noção quando os usavam e descreviam. Mas aquela noção intuitiva era insuficiente para se chegar a um entendimento mais profundo de algoritmos. A estória a seguir relata como a definição precisa de algoritmo foi crucial para um importante problema matemático.

OS PROBLEMAS DE HILBERT

Em 1900, o matemático David Hilbert proferiu uma agora-famosa palestra no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris. Na sua apresentação, ele identificou vinte e três problemas matemáticos e colocou-os como um desafio para o século vindouro. O décimo problema na sua lista dizia respeito a algoritmos.

Antes de descrever esse problema, vamos discutir brevemente sobre polinômios. Um ***polinômio*** é uma soma de termos, onde cada ***termo*** é um produto de certas variáveis e uma constante chamada de ***coeficiente***. Por exemplo,

$$6 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z = 6x^3yz^2$$

é um termo com coeficiente 6, e

$$6x^3yz^2 + 3xy^2 - x^3 - 10$$

é um polinômio com quatro termos sobre as variáveis x, y e z. Para essa discussão, consideramos somente coeficientes que sejam inteiros. Uma ***raiz*** de um polinômio é uma atribuição de valores a suas variáveis de modo que o valor do polinômio seja 0. Esse polinômio tem uma raiz em $x = 5$, $y = 3$ e $z = 0$. Essa raiz é uma ***raiz inteira*** porque todas as variáveis são substituídas por valores inteiros. Alguns polinômios têm uma raiz inteira e alguns não têm.

O décimo problema de Hilbert era conceber um algoritmo que testasse se um polinômio tinha uma raiz inteira. Ele não usou o termo *algoritmo* mas sim "um processo de acordo com o qual pode ser determinado por um número finito de operações."[4] Interessantemente, da forma como ele fraseou esse problema,

[4]Traduzido do original em alemão.

Hilbert explicitamente pedia que um algoritmo fosse "concebido." Conseqüentemente, ele aparentemente assumiu que um tal algoritmo tinha que existir—alguém só precisava encontrá-lo.

Como agora sabemos, nenhum algoritmo existe para tal tarefa; ela é algoritmicamente insolúvel. Para os matemáticos daquela época chegarem a essa conclusão com seu conceito intuitivo de algoritmo teria sido virtualmente impossível. O conceito intuitivo pode ter sido adequado para se prover algoritmos para certas tarefas, mas era inútil para mostrar que nenhum algoritmo existe para uma tarefa específica. Provar que um algoritmo não existe requer a posse de uma definição clara de algoritmo. Progresso no décimo problema teve que esperar por essa definição.

A definição veio nos artigos de 1936 de Alonzo Church e Alan Turing. Church usou um sistema notacional denominado de λ-cálculo para definir algoritmos. Turing o fez com suas "máquinas." Essas duas definições foram demonstradas equivalentes. Essa conexão entre a noção informal de algoritmo e a definição precisa veio ser a chamada de ***tese de Church–Turing***.

A tese de Church–Turing provê a definição de algoritmo necessária para resolver o décimo problema de Hilbert. Em 1970, Yuri Matijasevič, baseado no trabalho de Martin Davis, Hilary Putnam e Julia Robinson, mostrou que nenhum algoritmo existe para se testar se um polinômio tem raízes inteiras. No Capítulo 4 desenvolvemos as técnicas que formam a base para se provar que esse e outros problemas são algoritmicamente insolúveis.

Noção intuitiva de algoritmos	é igual a	*algoritmos de máquina de Turing*

FIGURA 3.22
A Tese de Church–Turing

Vamos frasear o décimo problema de Hilbert em nossa terminologia. Fazer isso ajuda a introduzir alguns temas que exploramos nos Capítulos 4 e 5. Seja

$$D = \{p \mid p \text{ é um polinômio com uma raiz inteira}\}.$$

O décimo problema de Hilbert pergunta essencialmente se o conjunto D é decidível. A resposta é negativa. Em contraste, podemos mostrar que D é Turing-reconhecível. Antes de fazê-lo, vamos consider um problema mais simples. É um análogo ao décimo problema de Hilbert para polinômios que têm apenas uma única variável, tal como $4x^3 - 2x^2 + x - 7$. Seja

$$D_1 = \{p \mid p \text{ é um polinômio sobre } x \text{ com uma raiz inteira}\}.$$

Aqui está uma MT M_1 que reconhece D_1:

M_1 = "A entrada é um polinômio p sobre a variável x.

1. Calcule o valor de p com x substituída sucessivamente pelos va-

lores 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, ... Se em algum ponto o valor do polinômio resulta em 0, *aceite*."

Se p tem uma raiz inteira, M_1 em algum momento vai encontrá-la e aceitar. Se p não tem uma raiz inteira, M_1 vai rodar para sempre. Para o caso multivariado, podemos apresentr uma MT similar M que reconhece D. Aqui, M passa por todas as possíveis valorações de suas variáveis a valores inteiros.

Tanto M_1 quanto M são reconhecedores mas não decisores. Podemos converter M_1 para ser um decisor para D_1 porque podemos calcular limitantes dentro dos quais as raízes de um polinômio de uma única variável tê que residir, e restringir a busca a esses limitantes. No Problema 3.21 é pedido que você mostre que as raízes de um polinômio desses têm que residier entre os valores

$$\pm k \frac{c_{\max}}{c_1},$$

onde k é o número de termos no polinômio, $c_{\max}$ é o coeficiente com o maior valor absoluto, e c_1 é o coeficiente do termo de mais alta ordem. Se uma raiz não for encontrada dentro desses limitantes, a máquina *rejeita*. O teorema de Matijasevič mostra que calcular tais limitantes para polinômios multivariados é impossível.

TERMINOLOGIA PARA DESCREVER MÁQUINAS DE TURING

Chegamos a um momento decisivo no estudo da teoria da computação. Continuamos a falar de máquinas de Turing, mas nosso verdadeiro foco a partir de agora é em algoritmos. Ou seja, a máquina de Turing simplesmente serve como um modelo preciso para a definição de algoritmo. Omitimos a teoria extensiva de máquinas de Turing propriamente ditas e não desperdiçamos muito tempo na programação de baixo-nível de máquinas de Turing. Precisamos somente estarmos suficientemente confortáveis com máquinas de Turing para acreditar que elas capturam todos os algoritmos.

Com isso em mente, vamos padronizar a forma pela qual descrevemos algoritmos de máquinas de Turing. Inicialmente, perguntamos: Qual é o nível de detalhes correto para se dar ao descrever tais algoritmos? Estudantes comumente fazem essa pergunta, especialmente quando preparam soluções a exercícios e problemas. Vamos levar em conta três possibilidades. A primeira é a *descrição formal* que esmiúça em todos os detalhes os estados da máquina de Turing, a função de transição, e assim por diante. É o mais baixo, e o mais detalhado, nível de descrição. O segundo é um nível mais alto de descrição, denominado *descrição de implementação*, no qual usamos a língua natural escrita para descrever a maneira pela qual a máquina de Turing move sua cabeça e a forma como ela armazena os dados sobre a fita. Nesse nível não damos detalhes de estados ou função de transição. Terceiro é a *descrição de alto-nível*, na qual usamos a língua natural para descrever um algoritmo, ignorando os detalhes de implementação. Nesse nível não precisamos mencionar como a máquina administra sua fita ou sua cabeça de leitura-escrita.

Neste capítulo demos descrições formais e de nível de implementação de vários exemplos de máquinas de Turing. A prática com descrições de máquinas de Turing de mais baixo nível ajuda a você entender máquinas de Turing e ganhar confiança no uso delas. Uma vez que você se sente confiante, as descrições de alto-nível são suficientes.

Agora fixamos um formato e uma notação para descrever máquinas de Turing. A entrada para uma máquina de Turing é sempre uma cadeia. Se desejamos fornecer como entrada um objeto que não uma cadeia, primeiro temos que representar esse objeto como uma cadeia. Cadeias podem facilmente representar polinômios, grafos, gramáticas, autômatos, e qualquer combinação desses objetos. Uma máquina de Turing pode ser programada para decodificar a representação de modo que ela possa ser interpretada da forma que pretendemos. Nossa notação para a codificação de um objeto O na sua representação como uma cadeia é $\langle O \rangle$. Se tivermos vários objetos $O_1, O_2, \ldots, O_k$, denotamos sua codificação em uma única cadeia $\langle O_1, O_2, \ldots, O_k \rangle$. A codificação propriamente dita pode ser feita de muitas formas razoáveis. Não importa qual delas escolhemos porque uma máquina de Turing pode sempre traduzir uma dessas codificações para a outra.

Em nosso formato, descrevemos algoritmos de máquinas de Turing com um segmento indentado de texto dentro de aspas. Quebramos o algoritmo em estágios, cada um usualmente envolvendo muitos passos individuais da computação da máquina de Turing. Indicamos a estrutura em bloco do algoritmo com mais indentação. A primeira linha do algoritmo descreve a entrada para a máquina. Se a descrição da entrada é simplesmente w, a entrada é tomada como sendo uma cadeia. Se a descrição da é a codificação de um objeto como em $\langle A \rangle$, a máquina de Turing primeiro implicitamente testa se a entrada codifica apropriadamente um objeto da forma desejada e a rejeita se ela não o faz.

EXEMPLO 3.23

Seja A a linguagem consistindo em todas as cadeias representando grafos não-direcionados que são conexos. Lembre-se de que um grafo é ***conexo*** se todo nó pode ser atingido a partir de cada um dos outros nós passando pelas arestas do grafo. Escrevemos

$$A = \{\langle G \rangle \mid G \text{ é um grafo não-direcionado conexo}\}.$$

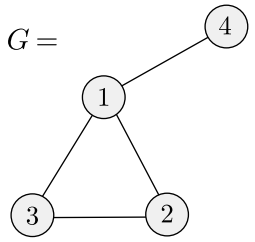
O que se segue é uma descrição de alto-nível de uma MT M que decide A.

$M =$ "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, a codificação de um grafo G:

1. Selecione o primeiro nó de G e marque-o.
2. Repita o seguinte estágio até que nenhum novo nó seja marcado:
3. Para cada nó em G, marque-o se ele está ligado por uma aresta a um nó que já está marcado.
4. Faça uma varredura em todos os nós de G para determinar se eles estão todos marcados. Se eles estão, *aceite*; caso contrário,

rejeite."

Para prática adicional, vamos examinar alguns detalhes de nível de implementação da máquina de Turing M. Usualmente não daremos esse nível de detalhe no futuro e você também não precisará, a menos que seja especificamente requisitado a fazê-lo em um exercício. Primeiro, temos que entender como $\langle G \rangle$ codifica o grafo G como uma cadeia. Considere uma codificação que é uma lista dos nós de G seguida de uma lista das arestas de G. Cada nó é um número decimal, e cada aresta é o par de números decimais que representam os nós nas duas extremidades da aresta. A figura abaixo mostra esse grafo e sua codificação.



$\langle G \rangle =$

`(1,2,3,4)((1,2),(2,3),(3,1),(1,4))`

FIGURA 3.24
Um grafo G e sua codificação $\langle G \rangle$

Quando M recebe a entrada $\langle G \rangle$, ela primeiro faz um teste para determinar se a entrada é a codificação apropriada de algum grafo. Para fazer isso, M faz uma varredura na fita para ter certeza de que existem duas listas e que elas estão na forma apropriada. A primeira lista deve ser uma lista de números decimais distintos, e a segunda deve ser uma lista de pares de números decimais. Aí então M verifica diversas coisas. Primeiro, a lista de nós não deve conter repetições, e segundo, todo nó aparecendo na lista de arestas deve também aparecer na lista de nós. Para o primeiro caso, podemos usar o procedimento dado no Exemplo 3.12 para a MT M_4 que verifica a distinção de elementos. Um método similar funciona para a segunda verificação. Se a entrada passa nesses testes, ela é a codificação de algum grafo G. Essa verificação completa a verificação da entrada, e M continua para o estágio 1.

Para o estágio 1, M marca o primeiro nó com um ponto no dígito mais à esquerda.

Para o estágio 2, M faz uma varredura na lista de nós para encontrar um nó não-marcado n_1 e marca-o colocando um sinal diferente—digamos, sublinhando o primeiro símbolo. Aí então M faz uma varredura na lista novamente para encontrar um nó marcado com um ponto n_2 e o sublinha também.

Agora M varre a lista de arestas. Para cada aresta, M testa se os dois nós sem marcação com ponto n_1 e n_2 são aqueles aparecendo nessa aresta. Se eles o são, M marca n_1 com um ponto, remove a marca de sublinhar, e continua a partir

do início do estágio 2. Se eles não o são, M faz a verificação para a próxima aresta na lista. Se não existe mais arestas, $\{n_1, n_2\}$ não é uma aresta de G. Então M move o sinal de sublinhar de n_2 para o póximo nó marcado com um ponto e agora chama esse nó n_2. Ela repete os passos neste parágrafo para verificar, como anteriormente, se o novo par $\{n_1, n_2\}$ é uma aresta. Se não existe mais nós marcados com um ponto, n_1 não está ligado a nenhum nó marcado com um ponto. Então M põe a marca de sublinhar de modo que n_1 é o próximo nó sem a marca de um ponto e n_2 é o primeiro nó marcado com um ponto e repete os passos neste parágrafo. Se não existe mais nós sem a marca de um ponto, M não foi capaz de encontrar nenhum novo nó para marcar com um ponto, portanto ela passa para o estágio 4.

Para o estágio 4, M varre a lista de nós para determinar se todos estão marcados com um ponto. Se eles estão, ela entra no estado de aceitação; caso contrário, ela entra no estado de rejeição. Isso completa a descrição de MT M. ■

EXERCÍCIOS

3.1 Este exercício concerne a MT M_2 cuja descrição e diagrama de estados aparecem no Exemplo 3.7. Em cada um dos itens abaixo, dê a seqüência de configurações nas quais M_2 entra quando iniciada sobre a cadeia de entrada indicada:

- **a.** `0`.
- [R] **b.** `00`.
- **c.** `000`.
- **d.** `000000`.

3.2 Este exercício concerne a MT M_1 cuja descrição e diagrama de estados aparecem no Exemplo 3.9. Em cada um dos itens abaixo, dê a seqüência de configurações nas quais M_1 entra quando iniciada sobre a cadeia de entrada indicada:

- [R] **a.** `11`.
- **b.** `1#1`.
- **c.** `1##1`.
- **d.** `10#11`.
- **e.** `10#10`.

[R] **3.3** Modifique a prova do Teorema 3.16 para obter o Corolário 3.19, mostrando que uma linguagem é decidível sse alguma máquina de Turing não-determinística a decide. (Você pode assumir o teorema seguinte sobre árvores. Se todo nó em uma árvore tem uma quantidade finita de filhos e todo ramo da árvore tem uma quantidade finita de nós, a árvore propriamente dita tem uma quantidade finita de nós.)

3.4 Dê uma definição formal de um enumerador. Considere-o como sendo um tipo de máquina de Turing de duas-fitas que usa sua segunda fita como a impressora. Inclua uma definição da linguagem enumerada.

[R]**3.5** Examine a definição formal de uma máquina de Turing para responder às seguintes perguntas, e explique seu raciocínio.

- **a.** Uma máquina de Turing pode alguma vez escrever o símbolo em branco $\sqcup$ na sua fita?
- **b.** O alfabeto de fita Γ pode ser o mesmo que o alfabeto de entrada Σ?
- **c.** A cabeça de uma máquina de Turing pode *alguma vez* estar na mesma localização em dois passos sucessivos?
- **d.** Uma máquina de Turing pode conter apenas um único estado?

3.6 No Teorema 3.21 mostramos que uma linguagem é Turing-reconhecível sse algum enumerador a enumera. Por que não usamos o seguinte algoritmo mais simples para a direção de ida da prova? Tal qual anteriormente, $s_1, s_2, \ldots$ é uma lista de todas as cadeias em Σ^*.

$E =$ "Ignore a entrada.

1. Repita o que se segue para $i = 1, 2, 3, \ldots$
2. Rode M sobre s_i.
3. Se ela aceita, imprima s_i."

3.7 Explique por que a descrição abaixo não é uma descrição de uma máquina de Turing legítima.

$M_{\text{ruim}} =$ "A entrada é um polinômio p sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_k$.

1. Tente todas as possíveis valorações de $x_1, \ldots, x_k$ para valores inteiros.
2. Calcule o valor de p sobre todas essas valorações.
3. Se alguma dessas valorações torna o valor de p igual a 0, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

3.8 Dê descrições a nível de implementação de máquinas de Turing que decidem as linguagens abaixo sobre o alfabeto {0,1}.

- [R]**a.** $\{w \mid w$ contém o mesmo número de 0s e 1s$\}$
- **b.** $\{w \mid w$ contém duas vezes mais 0s que 1s$\}$
- **c.** $\{w \mid w$ não contém duas vezes mais 0s que 1s$\}$

PROBLEMAS

3.9 Seja um k-AP um autômato com pilha que tem k pilhas. Portanto, um 0-AP é um AFN e um 1-AP é um AP convencional. Você já sabe que 1-APs são mais poderosos (reconhecem uma classe maior de linguagens) que 0-APs.

- **a.** Mostre que 2-APs são mais poderosos que 1-APs.
- **b.** Mostre que 3-APs não são mais poderosos que 2-APs. (Hint: Simule uma fita de máquina de Turing com duas pilhas.)

[R]**3.10** Digamos que uma ***máquina de Turing de escrita-única*** é uma MT de uma única-fita que pode alterar cada célula de fita no máximo uma vez (incluindo a parte

da entrada da fita). Mostre que essa variante do modelo da máquina de Turing é equivalente ao modelo comum da máquina de Turing. (Dica: Como um primeiro passo considere o caso no qual a máquina de Turing pode alterar cada célula de fita no máximo duas vezes. Use bastante fita.)

3.11 Uma ***máquina de Turing com fita duplamente infinita*** é semelhante a uma máquina de Turing comum, mas sua fita é infinita para a esquerda assim como para a direita. A fita é inicialmente preenchida com brancos exceto a parte que contém a entrada. A computação é definida como de costume exceto que a cabeça nunca encontra um final da fita à medida que ela move para a esquerda. Mostre que esse tipo de máquina de Turing reconhece a classe de linguagens Turing-reconhecíveis.

3.12 Uma ***máquina de Turing com reinicialização à esquerda*** é semelhante a uma máquina de Turing comum, mas a função de transição tem a forma

$$\delta\colon Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{D}, \mathrm{REINICIA}\}.$$

If $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{REINICIA})$, quando a máquina está no estado q lendo um a, a cabeça da máquina salta para a extremidade esquerda da fita depois que ela escreve b na fita e entra no estado r. Note que essas máquinas não têm a capacidade usual de mover a cabeça um símbolo para a esquerda. Mostre que máquinas de Turing com reinicialização à esquerda reconhecem a classe de linguagens Turing-reconhecíveis.

3.13 Uma ***máquina de Turing com movimento nulo ao invés de à esquerda*** é semelhante a uma máquina de Turing comum, mas a função de transição tem a forma

$$\delta\colon Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{\mathrm{D}, \mathrm{P}\}.$$

A cada ponto a máquina pode mover sua cabeça para a direita ou deixá-la parada na mesma posição. Mostre que essa variante da máquina de Turing *não* é equivalente à versão usual. Que classe de linguagens essas máquinas reconhecem?

3.14 Um ***autômato com fila*** é como um um autômato com pilha exceto que a pilha é substituída por uma fila. Uma ***fila*** é uma fita que permite que símbolos sejam escritos somente na extremidade esquerda e lidos somente da extremidade direita. Cada operação de escrita (denominá-la-emos *empurrar*) adiciona um símbolo na extremidade esquerda da fila e cada operação de leitura (denominá-la-emos *puxar*) lê e remove um símbolo na extremidade direita. Como com um AP, a entrada é colocada numa fita de entrada de somente-leitura separada, e a cabeça sobre a fita de entrada pode mover somente da esquerda para a direita. A fita de entrada contém uma célula com um símbolo em branco após a entrada, de modo que essa extremidade da entrada possa ser detectada. Um autômato com fila aceita sua entrada entrando num estado especial de aceitação em qualquer momento. Mostre que uma linguagem pode ser reconhecida por um autômato com fila determinístico sse a linguagem é Turing-reconhecível.

3.15 Mostre que a coleção de linguagens decidíveis é fechada sob a operação de

- **[R]a.** união.
- **b.** concatenação.
- **c.** estrela.
- **d.** complementação.
- **e.** interseção.

3.16 Mostre que a coleção de linguagens Turing-reconhecíveis é fechada sob a operação de

[R]**a.** união.
b. concatenação.
c. estrela.
d. interseção.

*3.17 Seja $B = \{\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle, \dots\}$ uma linguagem Turing-reconhecível consistindo de descrições de MTs. Mostre que existe uma linguagem decidível C consistindo de descrições de MTs tal que toda máquina descrita em B tem uma máquina equivalente em C e vice versa.

*3.18 Mostre que uma linguagem é decidível sse algum enumerador enumera a linguagem em ordem lexicográfica.

*3.19 Mostre que toda linguagem Turing-reconhecível infinita tem um subconjunto infinito decidível.

*3.20 Mostre que MTs de uma única-fita que não podem escrever na parte da fita contendo a cadeia de entrada reconhecem somente linguagens regulares.

3.21 Seja $c_1x^n + c_2x^{n-1} + \cdots + c_nx + c_{n+1}$ um polinômio com uma raiz em $x = x_0$. Suponha que $c_{\max}$ seja o maior valor absoluto de um c_i. Mostre que

$$|x_0| < (n+1)\frac{c_{\max}}{|c_1|}.$$

[R]3.22 Seja A a linguagem contendo somente a única cadeia s, onde

$$s = \begin{cases} \texttt{0} & \text{se vida nunca será encontrada em Marte.} \\ \texttt{1} & \text{se vida será encontrada em Marte algum dia.} \end{cases}$$

A é decidível? Por que ou por que não? Para os propósitos deste problema, assuma que a questão de se vida será encontrada em Marte tem uma resposta não-ambígua SIM ou NÃO.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

3.1 **(b)** $q_1\texttt{00}$, $\sqcup q_2\texttt{0}$, $\sqcup\texttt{x}q_3\sqcup$, $\sqcup q_5\texttt{x}\sqcup$, $q_5\sqcup\texttt{x}\sqcup$, $\sqcup q_2\texttt{x}\sqcup$, $\sqcup\texttt{x}q_2\sqcup$, $\sqcup\texttt{x}\sqcup q_{\text{aceita}}$

3.2 **(a)** $q_1\texttt{11}$, $\texttt{x}q_3\texttt{1}$, $\texttt{x1}q_3\sqcup$, $\texttt{x1}\sqcup q_{\text{rejeita}}$.

3.3 Provamos ambas as direções do "sse." Primeiro, se uma linguagem L for decidível, ela pode ser decidida por uma máquina de Turing determinística, e essa é automaticamente uma máquina de Turing não-determinística.

Segundo, se uma linguagem L for decidida por uma MT nondeterminística N, construimos uma MT determinística D_2 que decide L. A máquina D_2 roda o mesmo algoritmo que aparece na MT D descrita na prova do Teorema 3.16, com um Estágio 5 adicional: *Rejeite* se todos os ramos do não-determinismo de N estão esgotados.

Argumentamos que D_2 é um decisor para L. Se N aceita sua entrada, D_2 em algum momento no futuro encontrará um ramo de aceitação e aceitará também. Se N rejeita sua entrada, todos os seus ramos param e rejeitam porque ela é um decisor. Logo, cada um dos ramos tem uma quantidade finita de nós, onde cada nó

representa um passo da computação de N ao longo daquele ramo. Conseqüentemente, árvore inteira de computação de N sobre essa entrada é finita, em virtude do teorema sobre árvores dado no enunciado do exercício. Conseqüentemente, D vai parar e rejeitar quando essa árvore inteira tiver sido explorada.

3.5 **(a)** Sim. O alfabeto de fita Γ contém $\sqcup$. Uma máquina de Turing pode escrever quaisquer caracteres em Γ na sua fita.

(b) Não. Σ nunca contém $\sqcup$, mas Γ sempre contém $\sqcup$. Portanto eles nunca podem ser iguais.

(c) Sim. Se a máquina de Turing tenta mover sua cabeça para a esquerda da extremidade esquerda, ela permanece na mesma célula da fita.

(d) Não. Qualquer máquina de Turing tem que conter dois estados distintos q_{aceita} e q_{rejeita}. Portanto, uma máquina de Turing contém pelo menos dois estados.

3.8 **(a)** "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura na fita e marque o primeiro `0` que não foi marcado. Se nenhum `0` não-marcado for encontrado, vá para o estágio 4. Caso contrário, mova a cabeça de volta para a frente da fita.
2. Faça uma varredura na fita e marque o primeiro `1` que não tiver sido marcado. Se nenhum `1` não-marcado for encontrado, *rejeite*.
3. Mova a cabeça de volta para a frente da fita e vá para o estágio 1.
4. Mova a cabeça de volta para a frente da fita. Faça uma varredura na fita para ver se algum `1` não-marcado ainda resta. Se nenhum for encontrado, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

3.10 Primeiro simulamos uma máquina de Turing comum por uma máquina de Turing escreve-duas-vezes. A máquina de Turing escreve-duas-vezes simula um único passo da máquina original copiando a fita inteira para uma parte nova da fita do lado direito da parte correntemente utilizada. O procedimento de cópia opera caracter a caracter, marcando um caracter à medida que ele é copiado. Esse procedimento altera cada célula de fita duaz vezes, uma vez para escrever o caracter pela primeira vez e novamente para marcar que ele foi copiado. A posição da cabeça da máquin de Turing original é marcada na fita. Durante a cópia das células, na posição marcada ou em posições adjacentes, o conteúdo da fita é atualizado conforme as regras da máquina de Turing original.

Para realizar a simulação com uma máquina de escrita-única, opere como antes, exceto que cada célula da fita anterior é agora representada por duas células. A primeira delas contém o símbolo de fita da máquina original e a segunda é para a marca usada no procedimento de cópia. A entrada não é apresentada à máquina no formato com duas células por símbolo, portanto na primeira vez que a fita é copiada, as marcas de cópia são colocadas diretamente sobre os símbolos de entrada.

3.15 **(a)** Para quaisquer duas linguagens decidíveis L_1 e L_2, sejam M_1 e M_2 as MTs que as decidem. Construimos uma MT M' que decide a união de L_1 e L_2:

"Sobre a entrada w:

1. Rode M_1 sobre w. Se ela aceita, *aceite*.
2. Rode M_2 sobre w. Se ela aceita, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*."

M' aceita w se M_1 ou M_2 a aceita. Se ambas rejeitam, M' rejeita.

3.16

(a) Para quaisquer duas linguagens Turing-reconhecíveis L_1 e L_2, sejam M_1 e M_2 as MTs que as reconhecem. Construimos uma MT M' que reconhece a união de L_1 e L_2:

"Sobre a entrada w:

1. Rode M_1 e M_2 alternadamente sobre w passo a passo. Se alguma aceita, *aceite*. Se ambas param e rejeitam, *rejeite*."

Se M_1 ou M_2 aceitam w, M' aceita w porque a MT que aceita chega a seu estado de aceitação após um número finito de passos. Note que se ambas M_1 e M_2 rejeitam e uma delas faz isso entrando em loop, então M' vai entrar em loop.

3.22 A linguagem A é uma das duas linguagens, $\{0\}$ ou $\{1\}$. Em qualquer dos casos a linguagem é finita, e portanto decidível. Se você não é capaz de determinar qual dessas duas linguagens é A, você não será capaz de descrever o decisor para A, mas você pode dar duas máquinas de Turing, uma das quais é o decisor de A.

4

DECIDIBILIDADE

No Capítulo 3 introduzimos a máquina de Turing como um modelo de um computador de propósito geral e definimos a noção de algoritmo em termos de máquinas de Turing por meio da tese de Church–Turing.

Neste capítulo começamos a investigar o poder de algoritmos para resolver problemas. Exibimos certos problemas que podem ser resolvidos algoritmicamente e outros que não podem. Nosso objetivo é explorar os limites da solubilidade algorítmica. Você está provavelmente familiarizado com solubilidade por algoritmos porque muito da ciência da computação é dedicado a resolver problemas. A insolubilidade de certos problemas pode vir como uma surpresa.

Por que você deveria estudar insolubilidade? Afinal de contas, mostrar que um problema é insolúvel não parece ser de nenhuma utilidade se você tem que resolvê-lo. Você precisa estudar esse fenômeno por duas razões. Primeiro, saber quando um problema é algoritmicamente insolúvel *é* útil porque então você se dá conta de que o problema tem que ser simplificado ou alterado antes que você possa encontrar uma solução algorítmica. Como qualquer ferramenta, computadores têm capacidades e limitações que têm que ser apreciadas se elas são para serem bem usadas. A segunda razão é cultural. Mesmo se você lida com problemas que claramente são solúveis, um relance do insolúvel pode estimular sua imaginação e ajudá-lo a ganhar uma perspectiva importante sobre computação.

4.1 LINGUAGENS DECIDÍVEIS

Nesta seção damos alguns exemplos de linguagens que são decidíveis por algoritmos. Focamos em linguagens concernentes a autômatos e gramáticas. Por exemplo, apresentamos um algoritmo que testa se uma cadeia é um membro de uma linguagem livre-do-contexto (LLC). Essas linguagens são interessantes por várias razões. Primeiro, certos problemas desse tipo estão relacionados a aplicações. Esse problema de se testar se uma LLC gera uma cadeia está relacionado ao problema de se reconhecer e compilar programas em uma linguagem de programação. Segundo, certos outros problemas concernentes a autômatos e gramáticas não são decidíveis por algoritmos. Começar com exemplos onde decidibilidade é possível ajuda a você apreciar os exemplos indecidíveis.

PROBLEMAS DECIDÍVEIS CONCERNENTES A LINGUAGENS REGULARES

Começamos com certos problemas computacionais concernentes a autômatos finitos. Damos algoritmos para testar se um autômato finito aceita uma cadeia, se a linguagem de um autômato finito é vazia, e se dois autômatos finitos são equivalentes.

Note que escolhemos representar vários problemas computacionais por meio de linguagens. Fazer isso é conveniente porque temos já estabelecida uma terminologia para lidar com linguagens. Por exemplo, o ***problema da aceitação*** para AFDs de testar se um autômato finito determiístico específico aceita uma dada cadeia pode ser expresso como uma linguagem, A_{AFD}. Essa linguagem contém as codificações de todos os AFDs juntamente com cadeias que os AFDs aceitam. Seja

$$A_{\mathsf{AFD}} = \{\langle B, w\rangle \mid B \text{ é um AFD que aceita a cadeia de entrada } w\}.$$

O problema de se testar se um AFD B aceita uma entrada w é o mesmo que o problema de se testar se $\langle B, w\rangle$ é um membro da linguagem A_{AFD}. Similarmente, podemos formular outros problemas computacionais em termos de testar pertinência em uma linguagem. Mostrar que a linguagem é decidível é o mesmo que mostrar que o problema computacional é decidível.

No teorema a seguir mostramos que A_{AFD} é decidível. Portanto, esse teorema mostra que o problema de se testar se um dado autômato finito aceita uma dada cadeia é decidível.

TEOREMA 4.1

A_{AFD} é uma linguagem decidível.

IDÉIA DA PROVA Simplesmente precisamos apresentar uma MT M que decide A_{AFD}.

M = "Sobre a entrada $\langle B, w\rangle$, onde B é um AFD e w é uma cadeia:

1. Simule B sobre a entrada w.
2. Se a simulação termina em um estado de aceitação, *aceite*. Se ela termina em um estado de não-aceitação, *rejeite*."

PROVA Mencionamos apenas alguns poucos detalhes de implementação dessa prova. Para aqueles de vocês familiarizados com escrever programas em alguma linguagem de programação padrão, imagine como você escreveria um programa para realizar a simulação.

Primeiro, vamos examinar a entrada $\langle B, w\rangle$. Ela é uma representação de um AFD B juntamente com uma cadeia w. Uma representação razoável de B é simplesmente uma lista de seus cinco componentes, Q, Σ, δ, q_0 e F. Quando M recebe sua entrada, M primeiro determina se ela representa apropriadamente um AFD B e uma cadeia w. Se não, M rejeita.

Então M realiza a simulação diretamente. Ela mantém registro do estado atual de B e da posição atual de B na entrada w escrevendo essa informação na sua fita. Inicialmente, o estado atual de B é q_0 e a posição atual de B sobre a entrada é o símbolo mais à esquerda de w. Os estados e a posição são atualizados conforme a função de transição especificada δ. Quando M termina de processar o último símbolo de w, M aceita a entrada se B está em um estado de aceitação; M rejeita a entrada se B está em um estado de não-aceitação.

Podemos provar um teorema similar para autômatos finitos não-determinísticos. Seja

$$A_{\mathsf{AFN}} = \{\langle B, w\rangle \mid B \text{ é um AFN que aceita a cadeia de entrada } w\}.$$

TEOREMA 4.2

A_{AFN} é uma linguagem decidível.

PROVA Apresentamos uma MT N que decide A_{AFN}. Poderíamos projetar N para operar como M, simulando um AFN ao invés de um AFD. Ao invés disso, faremos diferentemente para ilustrar uma nova idéia: fazemos N usar M como uma subroutina. Em razão do fato de M ser projetada para funcionar com AFDs, N primeiro converte o AFN que ela recebe como entrada para um AFD antes de passá-lo para M.

N = "Sobre a entrada $\langle B, w\rangle$ onde B é um AFN, e w é uma cadeia:

1. Converta AFN B para um AFD equivalente C, usando o procedimento para essa conversão dado no Teorema 1.39.

2. Rode a MT M do Teorema 4.1 sobre a entrada $\langle C, w\rangle$.
3. Se M aceita, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Rodar a MT M no estágio 2 significa incorporar M no projeto de N como um subprocedimento.

Similarmente, podemos determinar se uma expressão regular gera uma dada cadeia. Seja $A_{\mathsf{EXR}} = \{\langle R, w\rangle |\ R \text{ é uma expressão regular que gera a cadeia } w\}$.

TEOREMA 4.3

A_{EXR} é uma linguagem decidível.

PROVA A seguinte MT P decide A_{EXR}.

P = "Sobre a entrada $\langle R, w\rangle$ onde R é uma expressão regular e w é uma cadeia:

1. Converta a expressão regular R para um AFN equivalente A usando o procedimento para essa conversão dado no Teorema 1.54.
2. Rode a MT N sobre a entrada $\langle A, w\rangle$.
3. Se N aceita, *aceite*; se N rejeita, *rejeite*."

Os Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3 ilustram que, para os propósitos de decidibilidade, entregar à máquina de Turing um AFD, AFN ou expressão regular é tudo equivalente porque a máquina é capaz de converter uma forma de codificação em uma outra.

Agora nos voltamos para um tipo diferente de problema concernente a autômatos finitos: *testar vacuidade* para a linguagem de um autômato finito. Nos três teoremas precedentes tivemos que determinar se um autômato finito aceita uma cadeia específica. Na próxima prova temos que determinar se um autômato finito de alguma maneira aceita alguma cadeia. Seja

$$V_{\mathsf{AFD}} = \{\langle A\rangle |\ A \text{ é um AFD e } L(A) = \emptyset\}.$$

TEOREMA 4.4

V_{AFD} é uma linguagem decidível.

PROVA Um AFD aceita alguma cadeia sse atingir um estado de aceitação a partir do estado inicial passando pelas setas do AFD é possível. Para testar essa

condição podemos projetar uma MT T que usa um algoritmo de marcação similar àquele usado no Exemplo 3.23.

T = "Sobre a entrada $\langle A \rangle$ onde A é um AFD:

1. Marque o estado inicial de A.
2. Repita até que nenhum estado novo venha a ser marcado:
3. Marque qualquer estado que tenha uma transição chegando nele a partir de qualquer estado que já está marcado.
4. Se nenhum estado de aceitação estiver marcado, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

O próximo teorema afirma que determinar se dois AFDs reconhecem a mesma linguagem é decidível. Seja

$$EQ_{\mathsf{AFD}} = \{\langle A, B \rangle | \ A \text{ e } B \text{ são AFDs e } L(A) = L(B)\}.$$

TEOREMA 4.5

EQ_{AFD} é uma linguagem decidível.

PROVA Para provar esse teorema usamos o Teorema 4.4. Construimos um novo AFD C a partir de A e B, onde C aceita somente aquelas cadeias que são aceitas ou por A ou por B mas não por ambos. Conseqüentemente, se A e B reconhecem a mesma linguagem, C não aceitará nada. A linguagem de C é

$$L(C) = \Big(L(A) \cap \overline{L(B)}\Big) \cup \Big(\overline{L(A)} \cap L(B)\Big).$$

Essa expressão é às vezes chamada de ***diferença simétrica*** de $L(A)$ e $L(B)$ e é ilustrada na Figura 4.6. Aqui $\overline{L(A)}$ é complemento de $L(A)$. A diferencça simétrica é útil aqui porque $L(C) = \emptyset$ sse $L(A) = L(B)$. Podemos construir C a partir de A e B com as construções para provar que a classe das linguagens regulares é fechada sob complementação, união e interseção. Essas construções são algoritmos que podem ser realizados por máquinas de Turing. Uma vez tendo construído C podemos usar o Teorema 4.4 para testar se $L(C)$ é vazia. Se ela for vazia, $L(A)$ e $L(B)$ têm que ser iguais.

F = "Sobre a entrada $\langle A, B \rangle$, onde A e B são AFDs:

1. Construa o AFD C conforme descrito.
2. Rode a MT T do Teorema 4.4 sobre a entrada $\langle C \rangle$.
3. Se T aceita, *aceite*. Se T rejeita, *rejeite*."

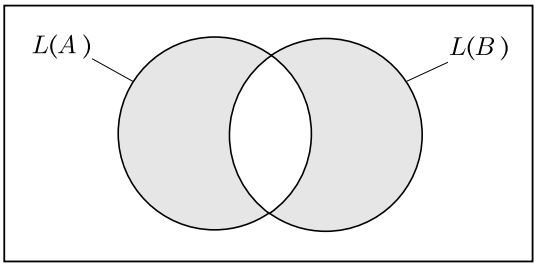


FIGURA 4.6
A diferença simétrica de $L(A)$ e $L(B)$

PROBLEMAS DECIDÍVEIS CONCERNENTES A LINGUAGENS LIVRES-DO-CONTEXTO

Aqui, descrevemos algoritmos para determinar se uma GLC gera uma cadeia específica e determinar se a linguagem de um GLC é vazia. Seja

$$A_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G, w\rangle \mid G \text{ é uma GLC que gera a cadeia } w\}.$$

TEOREMA 4.7

A_{GLC} é uma linguagem decidível.

IDÉIA DA PROVA Para a GLC G e a cadeia w queremos determinar se G gera w. Uma idéia é usar G para passar por todas as derivações para determinar se alguma delas é uma derivação de w. Essa idéia não funciona, pois uma quantidade infinita de derivações pode ter que ser testada. Se G não gera w, esse algoritmo nunca pararia. Essa idéia dá uma máquina de Turing que é um reconhecedor, mas não um decisor, para A_{GLC}.

Para tornar essa máquina de Turing um decisor precisamos garantir que o algoritmo tenta somente uma quantidade finita de derivações. No Problema 2.26 (página 138) mostramos que, se G estivesse na forma normal de Chomsky, qualquer derivação de w tem $2n - 1$ passos, onde n é o comprimento de w. Nesse caso verificar apenas derivações com $2n - 1$ passos para determinar se G gera w seria suficiente. Somente uma quantidade finita de tais derivações existem. Podemos converter G para a forma normal de Chomsky usando o procedimento dado na Seção 2.1.

PROVA A MT S para A_{GLC} segue.

S = "Sobre a entrada $\langle G, w\rangle$, onde G é uma GLC e w é uma cadeia:

1. Converta G para uma gramática equivalente na forma normal de Chomsky.
2. Liste todas as derivações com $2n - 1$ passos, onde n é o comprimento de w, exceto se $n = 0$, então nesse caso liste todas as derivações com 1 passo.
3. Se alguma dessas derivações gera w, *aceite*; se não, *rejeite*."

O problema de se determinar se uma GLC gera uma cadeia específica está relacionado ao problema de compilar linguagens de programação. O algoritmo em na MT S é muito ineficiente e nunca seria utilizado na prática, mas é fácil descrever e não estamos preocupados com eficiência aqui. Na Parte Três deste livro abordamos questões concernentes ao tempo de execução e ao uso de memória de algoritmos. Na prova do Teorema 7.16, descrevemos um algoritmo mais eficiente para reconhecer linguagens livres-do-contexto.

Lembre-se de que demos procedimentos para converter ida e volta entre GLCs e APs no Teorema 2.20. Logo, tudo que dizemos sobre a decidibilidade de problemas concernentes a GLCs se aplica igualmente bem a APs.

Vamos nos voltar agora para o problema de se testar vacuidade para a linguagem de uma GLC. Como fizemos para AFDs, podemos mostrar que o problema de se determinar se uma GLC gera de alguma maneira alguma cadeia é decidível. Seja

$$V_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G\rangle \mid G \text{ é uma GLC e } L(G) = \emptyset\}.$$

TEOREMA 4.8

V_{GLC} é uma linguagem decidível.

IDÉIA DA PROVA Para encontrar um algoritmo para esse problema poderíamos tentar usar a MT S do Teorema 4.7. Ele afirma que podemos testar se uma GLC gera alguma cadeia específica w. Para determinar se $L(G) = \emptyset$ o algoritmo poderia tentar passar por todas as possíveis w's, uma por uma. Mas existe uma quantidade infinita de w's para se tentar, portanto esse método poderia terminar rodando para sempre. Precisamos tomar uma abordagem diferente.

De modo a determinar se a linguagem de uma gramática é vazia, precisamos testar se a variável inicial pode gerar uma cadeia de terminais. O algoritmo faz isso resolvendo um problema mais geral. Ele determina *para cada variável* se essa variável é capaz de gerar uma cadeia de terminais. Quando o algoritmo tiver determinado que uma variável pode gerar alguma cadeia de terminais, o

algoritmo mantém registro dessa informação colocando uma marca sobre essa variável.

Primeiro, o algoritmo marca todos os símbolos terminais na gramática. Então, ele faz uma varredura em todas as regras da gramática. Se ele por acaso encontrar uma regra que permite alguma variável ser substituída por alguma cadeia de símbolos dos quais todos já estejam marcados, o algoritmo sabe que essa variável pode ser marcada, também. O algoritmo continua dessa forma até que ele não possa marcar mais nenhuma variável. A MT R implementa esse algoritmo.

PROVA

$R =$ "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, onde G é uma GLC:

1. Marque todos os símbolos terminais em G.
2. Repita até que nenhuma variável venha a ser marcada:
3. Marque qualquer variável A onde G tem uma regra $A \rightarrow U_1U_2 \cdots U_k$ e cada símbolo $U_1, \ldots, U_k$ já tenha sido marcado.
4. Se a variável inicial não está marcada, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

A seguir consideramos o problema de se determinar se duas gramáticas livres-do-contexto geram a mesma linguagem. Seja

$$EQ_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G, H \rangle \mid G \text{ e } H \text{ são GLCs e } L(G) = L(H)\}.$$

O Teorema 4.5 deu um algoritmo que decide a linguagem análoga EQ_{AFD} para autômatos finitos. Usamos o procedimento de decisão para V_{AFD} para provar que EQ_{AFD} é decidível. Em razão do fato de que V_{GLC} também é decidível, você poderia pensar que podemos usar uma estratégia similar para provar que EQ_{GLC} é decidível. Mas algo está errado com essa idéia! A classe de linguagens livres-do-contexto *não* é fechada sob complementação ou interseção, como você provou no Exercício 2.2. Na verdade, EQ_{GLC} não é decidível. A técnica para provar isso é apresentada no Capítulo 5.

Agora mostramos que toda linguagem livre-do-contexto é decidível por uma máquina de Turing.

TEOREMA 4.9

Toda linguagem livre-do-contexto é decidível.

IDÉIA DA PROVA Seja A uma LLC. Nosso objetivo é mostrar que A é decidível. Uma (má) idéia é converter um AP para A diretamente numa MT. Isso

não é difícil de fazer porque simular uma pilha com a fita mais versátil das MTs é fácil. O AP para A pode ser não-determinístico, mas isso parece bom porque podemos convertê-lo numa MT não-determinística e sabemos que qualquer MT não-determinística pode ser convertida numa MT determinística equivalente. Ainda assim, existe uma dificuldade. Alguns ramos da computação do AP podem rodar para sempre, lendo e escrevendo na pilha sem nunca parar. A MT simuladora então também teria ramos não-terminantes em sua computação, e, portanto, a MT não seria um decisor. Uma idéia diferente é necessária. Ao invés, provamos esse teorema com a MT S que projetamos no Teorema 4.7 para decidir A_{GLC}.

PROVA Seja G uma GLC para A e projetemos uma MT M_G que decide A. Construimos uma cópia de G dentro de M_G. Ela funciona da seguinte maneira.

$M_G =$ "Sobre a entrada w:

1. Rode a MT S sobre a entrada $\langle G, w\rangle$
2. Se essa máquina aceita, *aceite*; se ela rejeita, *rejeite*."

O Teorema 4.9 provê a ligação final no relacionamento entre as quatro principais classes de linguagens que descrevemos até agora: regulares, livres-do-contexto, decidíveis e Turing-reconhecíveis. A Figura 4.10 mostra esse relacionamento.

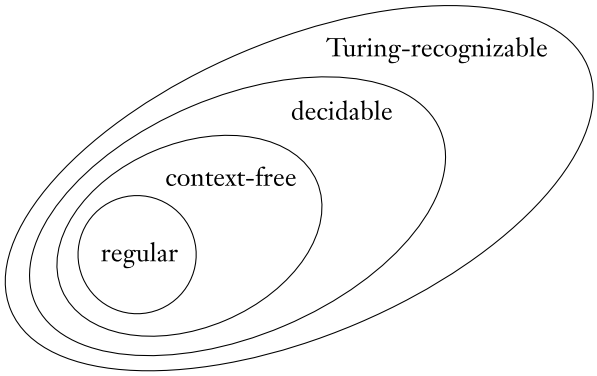


FIGURA 4.10
O relacionamento entre classes de linguagens

4.2 O PROBLEMA DA PARADA

Nesta seção provamos um dos teoremas mais filosoficamente importantes da teoria da computação: Existe um problema específico que é algoritmicamente insolúvel. Os computadores parecem ser tão poderosos que você acredita que todos os problemas em algum momento cederão a eles. O teorema apresentado aqui demonstra que computadores são limitados de uma maneira fundamental.

Que tipo de problemas são insolúveis por computador? São problemas esótericos, residindo somente nas mentes dos teóricos? Não! Mesmo alguns problemas comuns que as pessoas desejam resolver acontecem de ser computacionalmente insolúveis.

Em um tipo de problema insolúvel, você recebe um programa de computador e uma especificação precisa do que aquele programa é suposto fazer (e.g., ordenar uma lista de números). Você precisa verificar que o programa desempenha conforme o especificado (i.e., que ele é correto). Em razão do fato de que tanto o programa quanto a especificação são objetos matematicamente precisos, você espera automatizar o processo de verificação alimentando esses objetos um computador apropriadamente programado. Entretanto, você ficará desapontado. O problema geral de verificação de software não é solúvel por computador.

Nesta seção e no Capítulo 5 você encontrará diversos problemas computacionalmente insolúveis. Nossos objetivos são ajudar você a desenvolver um sentimento dos tipos de problemas que são insolúveis e aprender técnicas para provar insolubilidade.

Agora nos voltamos para nosso primeiro teorema que estabelece a indecidibidade de uma linguagem específica: o problema de se determinar se uma máquina de Turing aceita uma dada cadeia de entrada. Chamamo-lo A_{MT} por analogia com A_{AFD} e A_{GLC}. Mas, enquanto que A_{AFD} e A_{GLC} eram decidíveis, A_{MT} não o é. Seja

$$A_{\mathsf{MT}} = \{\langle M, w\rangle | \ M \text{ é uma } \mathsf{MT} \text{ e } M \text{ aceita } w\}.$$

TEOREMA 4.11

A_{MT} é indecidível.

Antes de chegar na prova, vamos primeiro observar que A_{MT} é Turing-reconhecível. Portanto, esse teorema afirma que reconhecedores *são* mais poderosos que decisores. Requerer que uma MT páre sobre todas as entradas restringe os tipos de linguagens que ela pode reconhecer. A máquina de Turing U a seguir reconhece A_{MT}.

$U =$ "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, onde M é uma MT e w é uma cadeia:

1. Simule M sobre a entrada w.
2. Se M em algum momento entra no seu estado de aceitação,

aceite; se M em algum momento entra em seu estado de rejeição, *rejeite*."

Note que essa máquina entra em loop sobre a entrada $\langle M, w\rangle$ se M entra em loop sobre w, e é por isso que essa máquina não decide A_{MT}. Se o algoritmo tivesse alguma forma de determinar que M não estava parando sobre w, ele poderia dizer *rejeite*. Logo, A_{MT} é às vezes denominado de ***problema da parada***. Como demonstramos, um algoritmo não tem como fazer essa determinação.

A máquina de Turing U é interessante em si mesma. Ela é um exemplo da *máquina de Turing universal* primeiro proposta por Turing. Essa máquina é chamada de universal porque ela é capaz de simular qualquer outra máquina de Turing a partir da descrição daquela máquina. A máquina de Turing universal desempenhou um importante papel inicial no estímulo ao desenvolvimento de computadores de programa-armazenado.

O MÉTODO DA DIAGONALIZAÇÃO

A prova da indecidibilidade do problema da parada usa uma técnica chamada *diagonalização*, descoberta pelo matemático Georg Cantor em 1873. Cantor estava preocupado com o problema de se medir os tamanhos de conjuntos infinitos. Se tivermos dois conjuntos infinitos, como podemos dizer se um é maior que o outro ou se eles têm o mesmo tamanho? Para conjuntos finitos, é claro, responder essas questões é fácil. Simplesmente contamos os elementos em um conjunto finito, e o número resultante é seu tamanho. Mas, se tentarmos contar os elementos de um conjunto infinito, nunca terminaremos! Portanto, não podemos usar o método de contagem para determinar os tamanhos relativos de conjuntos infinitos.

Por exemplo, tome o conjunto dos inteiros pares e o conjunto de todas as cadeias sobre $\{0,1\}$. Ambos os conjuntos são infinitos e portanto maiores que qualquer conjunto finito, mas um dos dois é maior que o outro? Como podemos comparar seu tamanho relativo?

Cantor propôs uma solução um tanto bela para esse problema. Ele observou que dois conjuntos finitos têm o mesmo tamanho se os elementos de um conjunto podem ser emparelhados com os elementos do outro conjunto. Esse método compara os tamanhos sem recorrer a contagem. Podemos estender essa idéia para conjuntos infinitos. Vamos ver o que isso significa mais precisamente.

DEFINIÇÃO 4.12

Assuma que temos os conjuntos A e B e uma função f de A para B. Digamos que f é ***um-para-um*** se ela nunca mapeia dois elementos diferentes para um mesmo lugar—ou seja, se $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$. Digamos que f é ***sobre*** se ela atinge todo elemento de B—ou seja, se para todo $b \in B$ existe um $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Digamos que A e B são de ***mesmo tamanho*** se existe uma função um-para-um e sobre $f\colon A \longrightarrow B$. Uma função que é tanto um-para-um quanto sobre é denominada uma ***correspondência***. Em uma correspondência todo elemento de A mapeia para um único elemento de B e cada elemento de B tem um único elemento de A mapeando para ele. Uma correspondência é simplesmente uma maneira de emparelhar os elementos de A com os elementos de B.

EXEMPLO 4.13

Seja $\mathcal{N}$ o conjunto de números naturais $\{1, 2, 3, \dots\}$ e suponha que $\mathcal{E}$ seja o conjunto dos números naturais pares $\{2, 4, 6, \dots\}$. Usando a definição de Cantor de tamanho podemos ver que $\mathcal{N}$ e $\mathcal{E}$ têm o mesmo tamanho. A correspondência f mapeando $\mathcal{N}$ para $\mathcal{E}$ é simplesmente $f(n) = 2n$. Podemo visualizar f mais facilmente com a ajuda de uma tabela.

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6
$\vdots$	$\vdots$

É claro que esse exemplo parece bizarro. Intuitivamente, $\mathcal{E}$ parece menor que $\mathcal{N}$ porque $\mathcal{E}$ é um subconjunto própio de $\mathcal{N}$. Mas emparelhar cada membro de $\mathcal{N}$ com seu próprio membro de $\mathcal{E}$ é possível, portanto declaramos esses dois conjuntos como sendo de mesmo tamanho. ■

DEFINIÇÃO 4.14

Um conjunto A é ***contável*** se é finito ou tem o mesmo tamanho que $\mathcal{N}$.

EXEMPLO 4.15

Agora nos voltamos para um exemplo ainda mais estranho. Se $\mathcal{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathcal{N}\}$ for o conjunto de números racionais positivos, $\mathcal{Q}$ parece ser muito maior que $\mathcal{N}$. Ainda assim, esses dois conjuntos são do mesmo tamanho conforme

nossa definição. Damos uma correspondência com $\mathcal{N}$ para mostrar que $\mathcal{Q}$ é contável. Uma maneira fácil de fazer isso é listar todos os elementos de $\mathcal{Q}$. Então emparelhamos o primeiro elemento na lista com o número 1 de $\mathcal{N}$, o segundo elemento na lista com o número 2 de $\mathcal{N}$, e assim por diante. Temos que garantir que todo membro de $\mathcal{Q}$ aparece somente uma vez na lista.

Para obter essa lista fazemos uma matriz infinita contendo todos os números racionais positivos, como mostrado na Figura 4.16. A i-ésima linha contém todos os números com numerador i e a j-ésima coluna tem todos os números com denominador j. Portanto, o número $\frac{i}{j}$ ocorre na i-ésima linha e j-ésima coluna.

Agora transformamos essa matriz numa lista. Uma forma (ruim) de se tentar isso seria começar a lista com todos os elementos na primeira linha. Essa não é uma boa abordagem porque a primeira linha é infinita, portanto a lista nunca chegaria à segunda linha. Ao invés, listamos os elementos nas diagonais, começando do canto, que estão superimpostas no diagrama. A primeira diagonal contém o único elemento $\frac{1}{1}$, e a segunda diagonal contém os dois elementos $\frac{2}{1}$ e $\frac{1}{2}$. Portanto, os primeiros três elementos na lista são $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$ e $\frac{1}{2}$. Na terceira diagonal uma complicação aparece. Ela contém $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Se simplesmente adicionarmos esses à lista, repetiríamos $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$. Evitamos fazer isso saltando um elemento quando ele causaria uma repetição. Portanto, adicionamos apenas os dois novos elementos $\frac{3}{1}$ e $\frac{1}{3}$. Continuando dessa maneira obtemos uma lista de todos os elementos de $\mathcal{Q}$.

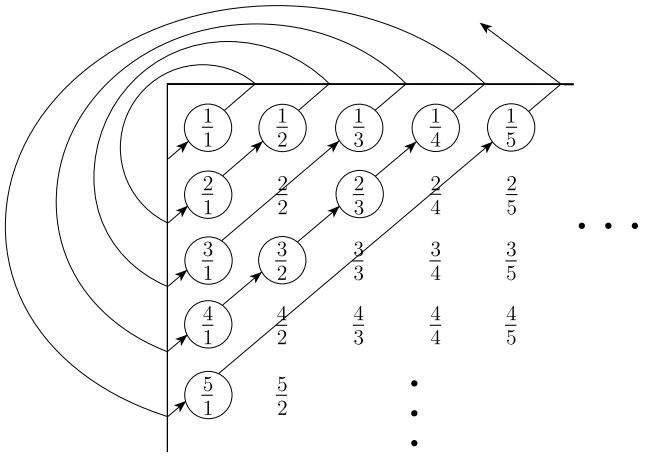


FIGURA 4.16
Uma correspondência de $\mathcal{N}$ e $\mathcal{Q}$

Depois de ver a correspondência de $\mathcal{N}$ e $\mathcal{Q}$, você pode achar que quaisquer dois conjuntos infinitos podem ser mostrados como tendo o mesmo tamanho. Afinal de contas, você só precisa exibir uma correspondência, e esse exemplo mostra que correspondências surpreendentes realmente existem. Entretanto,

para alguns conjuntos infinitos nenhuma correspondência com $\mathcal{N}$ existe. Esses conjuntos são simplesmente grandes demais. Tais conjuntos são chamados ***incontáveis***.

O conjunto dos números reais é um exemplo de um conjunto incountável. Um ***número real*** é aquele que tem uma representação decimal. Os números $\pi = 3{,}1415926\ldots$ e $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ são exemplos de números reais. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto dos números reais. Cantor provou que $\mathcal{R}$ é incontável. Ao fazer isso ele introduziu o método da diagonalização.

TEOREMA 4.17

$\mathcal{R}$ é incontável.

PROVA De forma a mostrar que $\mathcal{R}$ é incontável, mostramos que nenhuma correspondência existe entre $\mathcal{N}$ e $\mathcal{R}$. A prova é por contradição. Suponha que uma correspondência f existisse entre $\mathcal{N}$ e $\mathcal{R}$. Nossa tarefa é mostrar que f não funciona como deveria. Para ela ser uma correspondência, f tem que emparelhar todos os membros de $\mathcal{N}$ com todos os membros de $\mathcal{R}$. Mas encontraremos um x em $\mathcal{R}$ que não é emparelhado com nada em $\mathcal{N}$, o que será nossa contradição.

A maneira pela qual encontramos esse x é verdadeiramente construindo-o. Escolhemos cada dígito de x para tornar x diferente de um dos números reais que está emparelhado com um elemento de $\mathcal{N}$. No final asseguramos que x seja diferente de qualquer número real que está emparelhado.

Podemos ilustrar essa idéia dando um exemplo. Suponha que a correspondência f exista. Seja $f(1) = 3{,}14159\ldots$, $f(2) = 55{,}55555\ldots$, $f(3) = \ldots$, e assim por diante, só para dar alguns valores para f. Então f emparelha o número 1 com $3{,}14159\ldots$, o número 2 com $55{,}55555\ldots$, e assim por diante. A tabela abaixo mostra uns poucos valores de uma correspondência hipotética f entre $\mathcal{N}$ e $\mathcal{R}$.

n	$f(n)$
1	3,14159...
2	55,55555...
3	0,12345...
4	0,50000...
⋮	⋮

Construimos o x desejado dando sua representação decimal. Trata-se de um número entre 0 e 1, portanto todos os seus dígitos significativos são dígitos fracionais posteriores à vírgula decimal. Nosso objetivo é assegurar que $x \neq f(n)$ para qualquer n. Para assegurar que $x \neq f(1)$ fazemos com que o primeiro dígito de x seja qualquer um diferente do primeiro dígito fracional 1 de $f(1) = 3{,}\underline{1}4159\ldots$. Arbitrariamente, fazemos com que ele seja 4. Para assegurar que $x \neq f(2)$ fazemos com que o segundo dígito de x seja qualquer coisa diferente do segundo dígito fracional 5 de $f(2) = 55{,}5\underline{5}5555\ldots$. Arbitrariamente, faze-

mos com que ele seja 6. O terceiro dígito fracional de $f(3) = 0,12345\ldots$ é 3, portanto fazemos com que x seja qualquer coisa diferente—digamos, 4. Continuando dessa maneira ao longo da diagonal da tabela para f, obtemos todos os dígitos de x, como mostrado na seguinte tabela. Sabemos que x não é $f(n)$ para nenhum n porque ele difere de $f(n)$ no n-ésimo dígito fracional. (Um pequeno problema surge devido ao fato de que certos números, tais como $0,1999\ldots$ e $0,2000\ldots$, são iguais muito embora suas representações decimais sejam diferentes. Evitamos esse problema nunca selecionando os dígitos 0 ou 9 quando construimos x.)

n	$f(n)$
1	$3,\underline{1}4159\ldots$
2	$55,5\underline{5}555\ldots$
3	$0,12\underline{3}45\ldots$
4	$0,500\underline{0}0\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

$x = 0,4641\ldots$

O teorema precedente tem uma aplicação importante para a teoria da computação. Ele mostra que algumas linguagens não são decidíveis ou mesmo Turing-reconhecíveis, pela razão de que existe uma quantidade incontável de linguagens e mesmo assim somente uma quantidade contável de máquinas de Turing. Em razão do fato de que cada máquina de Turing pode reconhecer uma única linguagem e que existem mais linguagens que máquinas de Turing, algumas linguagens não são reconhecidas por nenhuma máquina de Turing. Tais linguagens não são Turing-reconhecíveis, como enunciamos no corolário seguinte.

COROLÁRIO 4.18

Algumas linguagens não são Turing-reconhecíveis.

PROVA Para mostrar que o conjunto de todas as máquinas de Turing é contável primeiro observamos que o conjunto de todas as cadeias Σ^* é contável, para qualquer alfabeto Σ. Com apenas uma quantidade finita de cadeias de cada comprimento, podemos formar uma lista de Σ^* listando todas as cadeias comprimento 0, comprimento 1, comprimento 2, e assim por diante.

O conjunto de todas as máquinas de Turing é contável porque cada máquina de Turing M tem uma codificação em uma cadeia $\langle M \rangle$. Se simplesmente omitirmos aquelas cadeias que não são codificações legítimas de máquinas de Turing, podemos obter uma lista de todas as máquinas de Turing.

Para mostrar que o conjunto de todas as linguagens é incontável primeiro observamos que o conjunto de todas as seqüências binárias infinitas é incontável. Uma *seqüência binária infinita* é uma seqüência interminável de 0s e 1s. Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as seqüências binárias infinitas. Podemos mostrar que $\mathcal{B}$ é

incontável usando uma prova por diagonalização similar àquela que usamos no Teorema 4.17 para mostrar que $\mathcal{R}$ é incontável.

Seja $\mathcal{L}$ o conjunto de todas as linguagens sobre o alfabeto Σ. Mostramos que $\mathcal{L}$ é incontável dando uma correspondência com $\mathcal{B}$, conseqüentemente mostrando que os dois conjuntos são do mesmo tamanho. Seja $\Sigma^* = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$. Cada linguagem $A \in \mathcal{L}$ tem uma seqüência única em $\mathcal{B}$. O i-ésimo bit dessa seqüência é um 1 se $s_i \in A$ e é um 0 se $s_i \notin A$, o que é chamado de ***seqüência característica*** de A. Por exemplo, se A fosse a linguagem de todas as cadeias começando com um 0 sobre o alfabeto {0,1}, sua seqüência característica χ_A seria

$$\begin{array}{rccccccccccc}
\Sigma^* = \{ & \varepsilon & , & \mathtt{0} & , & \mathtt{1} & , & \mathtt{00} & , & \mathtt{01} & , & \mathtt{10} & , & \mathtt{11} & , & \mathtt{000} & , & \mathtt{001} & , & \cdots & \} ; \\
A = \{ & & & \mathtt{0} & , & & & \mathtt{00} & , & \mathtt{01} & , & & & & & \mathtt{000} & , & \mathtt{001} & , & \cdots & \} ; \\
\chi_A = & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & \cdots & .
\end{array}$$

A função $f\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{B}$, onde $f(A)$ é igual à seqüência característica de A, é um-para-um e sobre e, portanto, uma correspondência. Conseqüentemente, como $\mathcal{B}$ é incontável, $\mathcal{L}$ também é incontável.

Portanto, mostramos que o conjunto de todas as linguagens não pode ser posto em correspondência com o conjunto o conjunto de todas as máquinas de Turing. Concluimos que algumas linguagens não são reconhecidas por nenhuma máquina de Turing.

O PROBLEMA DA PARADA É INDECIDÍVEL

Agora estamos prontos para provar o Teorema 4.11, a indecidibilidade da linguagem

$$A_{\mathsf{MT}} = \{\langle M, w\rangle |\ M \text{ é uma } \mathsf{MT} \text{ e } M \text{ aceita } w\}.$$

PROVA Assumimos que A_{MT} seja decidível e obtemos uma contradição. Suponha que H seja um decisor para A_{MT}. Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, onde M é uma MT e w é uma cadeia, H pára e aceita se M aceita w. Além disso, H pára e rejeita se M falha em aceitar w. Em outras palavras, assumimos que H seja uma MT, onde

$$H\big(\langle M, w\rangle\big) = \begin{cases} \mathit{aceite} & \text{se } M \text{ aceita } w \\ \mathit{rejeite} & \text{se } M \text{ não aceita } w. \end{cases}$$

Agora construimos uma nova máquina de Turing D com H como uma subrotina. Essa nova MT chama H para determinar o que M faz quando a entrada para M é sua própria descrição $\langle M\rangle$. Uma vez que D tenha determinado essa informação, ela faz o oposto. Ou seja, ela rejeita se M aceita e aceita se M não aceita. O que segue é uma descrição de D.

$D =$ "Sobre a entrada $\langle M\rangle$, onde M é uma MT:

1. Rode H sobre a entrada $\langle M, \langle M\rangle\rangle$.
2. Dê como saída o oposto do que H dá como saída; ou seja, se H aceita, *rejeite* e se H rejeita, *aceite*."

Não se atrapalhe com a idéia de rodar uma máquina sobre sua própria descrição! Trata-se de rodar um programa consigo próprio como entrada, algo que de fato ocorre ocasionalmente na prática. Por exemplo, um compilador é um programa que traduz outros programas. Um compilador para a linguagem Pascal pode, ele próprio, ser escrito em Pascal, portanto rodar esse programa sobre si próprio faria sentido. Em resumo,

$$D(\langle M \rangle) = \begin{cases} \textit{aceite} & \text{se } M \text{ não aceita } \langle M \rangle \\ \textit{rejeite} & \text{se } M \text{ aceita } \langle M \rangle. \end{cases}$$

O que acontece quando rodamos D com sua própria descrição $\langle D \rangle$ como entrada? Nesse caso obtemos

$$D(\langle D \rangle) = \begin{cases} \textit{aceite} & \text{se } D \text{ não aceita } \langle D \rangle \\ \textit{rejeite} & \text{se } D \text{ aceita } \langle D \rangle. \end{cases}$$

Independentemente do que D faz, ela é forçada a fazer o oposto, o que é obviamente uma contradição. Conseqüentemente, nem a MT D nem a MT H podem existir.

Vamos revisar os passos dessa prova. Assuma que uma MT H decide A_{MT}. Então use H para construir uma MT D que, quando recebe uma dada entrada $\langle M \rangle$ aceita exatamente quando M não aceita a entrada $\langle M \rangle$. Finalmente, rode D sobre si própria. As máquinas tomam as seguintes ações, com a última linha sendo a contradição.

- H aceita $\langle M, w \rangle$ exatamente quando M aceita w.
- D rejeita $\langle M \rangle$ exatamente quando M aceita $\langle M \rangle$.
- D rejeita $\langle D \rangle$ exatamente quando D aceita $\langle D \rangle$.

Onde está a diagonalização na prova do Teorema 4.11? Ela se torna aparente quando você examina as tabelas de comportamento para as MTs H e D. Nessas tabelas listamos todas as MTs nas linhas, M_1, M_2, ... e todas as suas descrições nas colunas, $\langle M_1 \rangle$, $\langle M_2 \rangle$, ... As entradas dizem se a máquina em uma dada linha aceita a entrada em uma dada coluna. A entrada é *aceite* se a máquina aceita a entrada mas é branco se ela rejeita ou entra em loop sobre aquela entrada. Montamos as entradas na figura abaixo para ilustrar a idéia.

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$
M_1	*aceite*		*aceite*		
M_2	*aceite*	*aceite*	*aceite*	*aceite*	
M_3					$\cdots$
M_4	*aceite*	*aceite*			
$\vdots$			$\vdots$		

FIGURA 4.19
A entrada i, j é *aceite* se M_i aceita $\langle M_j \rangle$

Na figura abaixo as entradas são os resultados de se rodar H sobre as entradas correspondendo à Figura 4.18. Portanto, se M_3 não aceita a entrada $\langle M_2 \rangle$, a entrada para a linha M_3 e a coluna $\langle M_2 \rangle$ é *rejeite* porque H rejeita a entrada $\langle M_3, \langle M_2 \rangle \rangle$.

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$
M_1	*aceite*	*rejeite*	*aceite*	*rejeite*	
M_2	*aceite*	*aceite*	*aceite*	*aceite*	$\cdots$
M_3	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*	
M_4	*aceite*	*aceite*	*rejeite*	*rejeite*	
$\vdots$			$\vdots$		

FIGURA 4.20
A entrada i, j é o valor de H sobre a entrada $\langle M_i, \langle M_j \rangle \rangle$

Na figura a seguir, adicionamos D à Figura 4.19. Por nossa hipótese, H é uma MT e o mesmo acontece com D. Conseqüentemente, essa última tem que ocorrer na lista M_1, M_2, ... de todas as MTs. Note que D computa o oposto das entradas na diagonal. A contradição ocorre no ponto de interrogação onde a entrada tem que ser o oposto de si mesma.

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	$\cdots$	$\langle D \rangle$	$\cdots$
M_1	*aceite*	*rejeite*	*aceite*	*rejeite*		*aceite*	
M_2	*aceite*	*aceite*	*aceite*	*aceite*	$\cdots$	*aceite*	$\cdots$
M_3	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*	*rejeite*		*rejeite*	
M_4	*aceite*	*aceite*	*rejeite*	*rejeite*		*aceite*	
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		
D	*rejeite*	*rejeite*	*aceite*	*aceite*		?	
$\vdots$			$\vdots$				$\ddots$

FIGURA 4.21
Se D estiver na figura, uma contradição ocorre em "?"

UMA LINGUAGEM TURING-IRRECONHECÍVEL

Na seção precedente exibimos uma linguagem—a saber, A_{MT}—que é indecidível. Agora exibimos uma linguagem que não é sequer Turing-reconhecível. Note que A_{MT} não bastará para esse propósito porque mostramos que A_{MT} é Turing-reconhecível (página 184). O teorema a seguir mostra que, se uma linguagem e seu complemento forem ambas Turing-reconhecíveis, a linguagem é decidível. Logo, para qualquer linguagem indecidível, ou ela ou seu complemento não é Turing-reconhecível. Lembre-se de que o complemento de uma linguagem é a linguagem consistindo de todas as cadeias que não estão na linguagem. Dizemos que uma linguagem é ***co-Turing-reconhecível*** se ela é o complemento de uma lingugem Turing-reconhecível.

TEOREMA 4.22

Uma linguagem é decidível sse ela é Turing-reconhecível e co-Turing-reconhecível.

Em outras palavras, uma linguagem é decidível exatamente quando ela e seu complemento são ambas Turing-reconhecíveis.

PROVA Temos duas direções para provar. Primeiro, se A for decidível, podemos facilmente ver que tanto A quanto seu complemento $\overline{A}$ são Turing-reconhecíveis. Qualquer linguagem decidível é Turing-reconhecível, e o complemento de uma linguagem decidível também é decidível.

Para a outra direção, se tanto A quanto $\overline{A}$ são Turing-reconhecíveis, fazemos M_1 ser o reconhecedor para A e M_2 o reconhecedor para $\overline{A}$. A máquina de Turing M abaixo é um decisor para A.

$M =$ "Sobre a entrada w:

1. Rode ambas M_1 e M_2 sobre a entrada w em paralelo.
2. Se M_1 aceita, *aceite*; se M_2 aceita, *rejeite*."

Rodar as duas máquinas em paralelo significa que M tem duas fitas, uma para

simular M_1 e a outra para simular M_2. Nesse caso M alternativamente simula um passo de cada máquina, que continua até que uma delas aceita.

Agora mostramos que M decide A. Toda cadeia w ou está em A ou em $\overline{A}$. Conseqüentemente, ou M_1 ou M_2 tem que aceitar w. Em razão do fato de que M pára sempre que M_1 ou M_2 aceita, M sempre pára e portanto ela é um decisor. Além disso, ela aceita todas as cadeias em A e rejeita todas as cadeias que não estão em A. Portanto, M é um decisor para A, e, conseqüentemente, A é decidível.

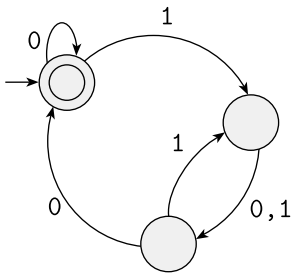
COROLÁRIO 4.23

$\overline{A_{\mathsf{MT}}}$ não é Turing-reconhecível.

PROVA Sabemos que A_{MT} é Turing-reconheível. Se $\overline{A_{\mathsf{MT}}}$ também fosse Turing-reconhecível, A_{MT} seria decidível. O Teorema 4.11 nos diz que A_{MT} não é decidível, portanto, $\overline{A_{\mathsf{MT}}}$ não pode ser Turing-reconhecível.

EXERCÍCIOS

[R]**4.1** Responda a cada um dos itens abaixo para o AFD M e dê razões para suas respostas.



a. $\langle M, 0100\rangle \in A_{\mathsf{AFD}}$?
b. $\langle M, 011\rangle \in A_{\mathsf{AFD}}$?
c. $\langle M\rangle \in A_{\mathsf{AFD}}$?
d. $\langle M, 0100\rangle \in A_{\mathsf{EXR}}$?
e. $\langle M\rangle \in V_{\mathsf{AFD}}$?
f. $\langle M, M\rangle \in EQ_{\mathsf{AFD}}$?

4.2 Considere o problema de se determinar se um AFD e uma expressão regular são equivalentes. Expresse esse problema como uma linguagem e mostre que ele é decidível.

4.3 Seja $TOD_{\mathsf{AFD}} = \{\langle A\rangle \mid A \text{ é um } \mathsf{AFD} \text{ e } L(A) = \Sigma^*\}$. Mostre que TOD_{AFD} é decidível.

4.4 Seja $A\varepsilon_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G\rangle \mid G \text{ é uma } \mathsf{GLC} \text{ que gera } \varepsilon\}$. Mostre que $A\varepsilon_{\mathsf{GLC}}$ é decidível.

4.5 Seja X o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e Y o conjunto $\{6, 7, 8, 9, 10\}$. Descrevemos as funções $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon X \longrightarrow Y$ nas tabelas abaixo. Responda a cada item e dê uma razão para cada resposta negativa.

n	$f(n)$
1	6
2	7
3	6
4	7
5	6

n	$g(n)$
1	10
2	9
3	8
4	7
5	6

R**a.** f é um-para-um?
b. f é sobre?
c. f é uma correspondência?
R**d.** g é um-para-um?
e. g é sobre?
f. g é uma correspondência?

4.6 Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as seqüências infinitas sobre $\{0,1\}$. Mostre que $\mathcal{B}$ é incontável, usando uma prova por diagonalização.

4.7 Seja $T = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathcal{N}\}$. Mostre que T é contável.

4.8 Revise a maneira pela qual definimos conjuntos como sendo do mesmo tamanho na Definição 4.12 (página 186). Mostre que "é do mesmo tamanho" é uma relação de equivalência.

PROBLEMAS

R**4.9** Seja $\mathit{INFINITA}_{\mathsf{AFD}} = \{\langle A\rangle \mid A \text{ é um } \mathsf{AFD} \text{ e } L(A) \text{ é uma linguagem an infinita}\}$. Mostre que $\mathit{INFINITA}_{\mathsf{AFD}}$ é decidível.

4.10 Seja $\mathit{INFINITA}_{\mathsf{AP}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ é um } \mathsf{AP} \text{ e } L(M) \text{ é uma linguagem infinita}\}$. Mostre que $\mathit{INFINITA}_{\mathsf{AP}}$ é decidível.

R**4.11** Seja $A = \{\langle M\rangle \mid M \text{ é um } \mathsf{AFD} \text{ que não aceita nenhuma cadeia contendo um número ímpar de } 1\text{s}\}$. Mostre que A é decidível.

4.12 Seja $A = \{\langle R, S\rangle \mid R \text{ e } S \text{ são expressões regulares e } L(R) \subseteq L(S)\}$. Mostre que A é decidível.

R**4.13** Seja $\Sigma = \{0,1\}$. Mostre que o problema de se determinar se uma GLC gera alguma cadeia em 1^* é decidível. Em outras palavras, mostre que

$$\{\langle G\rangle \mid G \text{ é uma } \mathsf{GLC} \text{ sobre } \{0,1\} \text{ e } 1^* \cap L(G) \neq \emptyset\}$$

é uma linguagem decidível.

⋆**4.14** Mostre que o problema de se determinar se uma GLC gera todas as cadeias em 1^* é decidível. Em outras palavras, mostre que $\{\langle G\rangle \mid G \text{ é uma } \mathsf{GLC} \text{ sobre } \{0,1\} \text{ e } 1^* \subseteq L(G)\}$ é uma linguagem decidível.

4.15 Seja $A = \{\langle R \rangle | \ R$ é uma expressão regular que descreve uma linguagem contendo pelo menos uma cadeia w que tem `111` como uma subcadeia (i.e., $w = x\texttt{111}y$ para alguma x alguma e y)$\}$. Mostre que A é decidível.

4.16 Prove que EQ_{AFD} é decidível testando os dois AFDs sobre todas as cadeias até um certo tamanho. Calcule um tamanho que funcione.

*4.17 Seja C uma linguagem. Prove que C é Turing-reconhecível sse uma linguagem decidível D existe tal que $C = \{x | \ \exists y \ (\langle x, y \rangle \in D)\}$.

4.18 Sejam A e B duas linguagens disjuntas. Digamos que a linguagem C ***separa*** A e B se $A \subseteq C$ e $B \subseteq \overline{C}$. Mostre que quaisquer duas linguagens co-Turing-reconhecíveis disjuntas são separáveis por alguma linguagem decidível.

4.19 Seja $S = \{\langle M \rangle | \ M$ é um AFD que aceita $w^{\mathcal{R}}$ sempre que ele aceita $w\}$. Mostre que S é decidível.

4.20 Uma linguagem é ***livre-de-prefixo*** se nenhum membro é um prefixo próprio de um outro membro. Seja $\mathit{LIVRE\text{-}DE\text{-}PREFIXO}_{\mathsf{EXR}} = \{R | \ R$ é uma expressão regular onde $L(R)$ é livre-de-prefixo$\}$. Mostre que $\mathit{LIVRE\text{-}DE\text{-}PREFIXO}_{\mathsf{EXR}}$ é decidível. Por que uma abordagem similar falha em mostrar que $\mathit{LIVRE\text{-}DE\text{-}PREFIXO}_{\mathsf{GLC}}$ é decidível?

R* **4.21** Digamos que um AFN é ***ambíguo*** se ele aceita alguma cadeia ao longo de dois ramos diferentes da computação. Seja $\mathit{AMBIG}_{\mathsf{AFN}} = \{\langle N \rangle | \ N$ é um AFN ambíguo$\}$. Mostre que $\mathit{AMBIG}_{\mathsf{AFN}}$ é decidível. (Sugestão: Uma maneira elegante de resolver esse problema é construir um AFD apropriado e aí então rodar E_{AFD} sobre ele.)

4.22 Um ***estado inútil*** em um autômato com pilha nunca é atingido sobre qualquer cadeia de entrada. Considere o problema de se determinar se um autômato com pilha tem quaisquer estados inúteis. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ele é decidível.

R* **4.23** Seja $\mathit{BAL}_{\mathsf{AFD}} = \{\langle M \rangle | \ M$ é um AFD que aceita alguma cadeia contendo igual número de `0`s e `1`s$\}$. Mostre que $\mathit{BAL}_{\mathsf{AFD}}$ é decidível. (Dica: Os Teoremas sobre LLCs são úteis aqui.)

*4.24 Seja $\mathit{PAL}_{\mathsf{AFD}} = \{\langle M \rangle | \ M$ é um AFD que aceita alguma palíndrome$\}$. Mostre que $\mathit{PAL}_{\mathsf{AFD}}$ é decidível. (Dica: Os Teoremas sobre LLCs são úteis aqui.)

*4.25 Seja $E = \{\langle M \rangle | \ M$ é um AFD que aceita alguma cadeia com mais 1s que 0s$\}$. Mostre que E é decidível. (Dica: Os Teoremas sobre LLCs são útesi aqui.)

4.26 Seja $C = \{\langle G, x \rangle | \ G$ é uma GLC que gera alguma cadeia w, onde x é uma subcadeia de $w\}$. Mostre que C é decidível. (Sugestão: Uma solução elegante para esse problema usa o decisor para V_{GLC}.)

4.27 Seja $C_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G, k \rangle | \ L(G)$ contém exatamente k cadeias onde $k \geq 0$ ou $k = \infty\}$. Mostre que C_{GLC} é decidível.

4.28 Seja A uma linguagem Turing-reconhecível consistindo de descrições de máquinas de Turing, $\{\langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle, \ldots\}$, onde toda M_i é um decisor. Prove que alguma linguagem decidível D não é decidida por nenhum decisor M_i cuja descrição aparece em A. (Dica: Você pode achar útil considerar um enumerador para A.)

SOLUÇÕES SELECIONADAS

4.1 **(a)** Sim. O AFD M aceita 0100.

(b) Não. M não aceita 011.

(c) Não. Essa entrada tem apenas um único componente e portanto não é da forma correta.

(d) Não. O primeiro componente não é uma expressão regular e por isso a entrada não é da forma correta.

(e) Não. A linguagem de M não é vazia.

(f) Sim. M aceita a mesma linguagem que si própria.

4.5 **(a)** Não, f não é um-para-um porque $f(1) = f(3)$.

(d) Sim, g é um-para-um.

4.9 A seguinte MT I decide $INFINITA_{\mathsf{AFD}}$.

I = "Sobre a entrada $\langle A \rangle$ onde A é um AFD:

1. Seja k o número de estados de A.
2. Construa um AFD D que aceite todas as cadeias de comprimento k ou mais.
3. Construa um AFD M tal que $L(M) = L(A) \cap L(D)$.
4. Teste $L(M) = \emptyset$, usando o decisor de V_{AFD} T do Teorema 4.4.
5. Se T aceita, *rejeite*; se T rejeita, *aceite*."

Esse algoritmo funciona porque um AFD que aceita uma quantidade infinita de cadeias tem que aceitar cadeias arbitrariamente longas. Por conseguinte, esse algoritmo aceita tais AFDs. Reciprocamente, se o algoritmo aceita um AFD, o AFD aceita alguma cadeia de comprimento k ou mais, onde k é o número de estados do AFD. Essa cadeia pode ser bombeada da maneira prescrita pelo lema do bombeamento para linguagens regulares para se obter uma quantidade infinita de cadeias aceitas.

4.11 A seguinte MT decide A.

"Sobre a entrada $\langle M \rangle$:

1. Construa um AFD O que aceite toda cadeia contendo um número ímpar de 1s.
2. Construa o AFD B tal que $L(B) = L(M) \cap L(O)$.
3. Teste se $L(B) = \emptyset$, usando o decisor de V_{AFD} T do Teorema 4.4.
4. Se T aceita, *aceite*; se T rejeita, *rejeite*."

4.13 Você mostrou no Problema 2.18 que, se C for uma linguagem livre-do-contexto e R uma linguagem regular, então $C \cap R$ é livre do contexto. Conseqüentemente, $1^* \cap L(G)$ é livre do contexto. A seguinte MT decide A.

"Sobre a entrada $\langle G \rangle$:

1. Construa a GLC H tal que $L(H) = 1^* \cap L(G)$.
2. Teste se $L(H) = \emptyset$, usando o decisor de V_{GLC} R do Teorema 4.8.
3. Se R aceita, *rejeite*; se R rejeita, *aceite*."

4.21 O seguinte procedimento decide $AMBIG_{\mathsf{AFN}}$. Dado um AFN N, projetamos um AFD D que simula N e aceita uma cadeia sse ele for aceito por N ao longo de

dois ramos de computação diferentes. Aí então usamos um decisor para V_{AFD} para determinar se D aceita quaisquer cadeias.

Nossa estratégia para construir D é similar para a conversão de AFN para AFD na prova do Teorema 1.39. Simulamos N mantendo uma pedra sobre cada estado ativo. Começamos colocando uma pedra vermelha sobre o estado inicial e sobre cada estado atingível a partir do inicial ao longo de transições ε. Movemos, adicionamos e removemos pedras de acordo com as transições de N, preservando a cor das pedras. Sempre que duas ou mais pedras são movidas para o mesmo estado, substituímos suas pedras por uma pedra azul. Após ler a entrada, aceitamos se uma pedra azul estiver sobre um estado de aceitação de N.

O AFD D tem um estado correspondente a cada posição possível de pedras. Para cada estado de N, três possibilidades ocorrem: ele pode conter uma pedra vermelha, uma pedra azul ou nenhuma pedra. Por conseguinte, se N tiver n estados, D terár 3^n estados. Seu estado inicial, seus estados de aceitação e sua função de transição são definidas de modo a realizar a simulação.

4.23 A linguagem de todas as cadeias com igual número de `0`s e `1`s é uma linguagem livre-do-contexto, gerada pela gramática $S \rightarrow \texttt{1}S\texttt{0}S \mid \texttt{0}S\texttt{1}S \mid \varepsilon$. Seja P o AP que reconhece essa linguagem. Construa uma MT M para BAL_{AFD}, que opera da seguinte forma. Sobre a entrada $\langle B \rangle$, onde B é um AFD, use B e P para construir um novo AP R que reconheça a interseção das linguagens de B e P. Aí então teste se a linguagem de R é vazia. Se sua linguagem for vazia, *rejeite*; caso contrário, *aceite*.

5

REDUTIBILIDADE

No Capítulo 4 estabelecemos a máquina de Turing como nosso modelo de um computador de propósito geral. Apresentamos diversos exemplos de problemas que são solúveis numa máquina de Turing e demos um exemplo de um problema, A_{MT}, que é computacionalmente insolúvel. Neste capítulo examinamos vários problemas problemas insolúveis adicionais. Ao fazer isso introduzimos o método principal de provar que problemas são computacionalmente insolúveis. Ele é chamado ***redutibilidade***.

Uma ***redução*** é uma maneira de converter um problema para um outro problema de uma forma tal que uma solução para o segundo problema possa ser usada para resolver o primeiro problema. Tais redutibilidades aparecem freqüentemente no dia a dia, mesmo se usualmente não nos refiramos a elas desssa forma.

Por exemplo, suponha que você deseja se orientar numa nova cidade. Você sabe que fazer isso seria fácil se você tivesse um mapa. Conseqüentemente, você pode reduzir o problema de se orientar na cidade ao problema de obter um mapa da cidade.

Redutibilidade sempre envolve dois problemas, que chamamos A e B. Se A se reduz a B, podemos usar uma solução para B para resolver A. Assim, em nosso exemplo, A é o problema de se orientar na cidade e B é o problema de se obter um mapa. Note que redutibilidade não diz nada sobre resolver A ou B sozinhos, mas somente sobre a solubilidade de A na presença de uma solução para B.

O que se segue são exemplos adicionais de redutibilidades. O problema de se viajar de Boston a Paris se reduz ao problema de se comprar uma passagem

aérea entre as duas cidades. Esse problema por sua vez se reduz ao problema de se ganhar o dinheiro para a passagem. E esse problema se reduz ao problema de se encontrar um emprego.

Redutibilidade também ocorre em problemas matemáticos. Por exemplo, o problema de se medir a área de um retângulo se reduz ao problema de se medir seu comprimento e largura. O problema de se resolver um sistema de equações lineares se reduz ao problema de se inverter uma matriz.

Redutibilidade desempenha um importante papel na classificação de problemas por decidibilidade e mais adiante em teoria da complexidade também. Quando A é redutível a B, resolver A não pode ser mais difícil que resolver B porque uma solução para B dá uma solução para A. Em termos de teoria da computabilidade, se A é redutível a B e B é decidível, A também é decidível. Equivalentemente, se A é indecidível e redutível a B, B é indecidível. Essa última versão é chave para se provar que vários problemas são indecidíveis.

Em resumo, nosso método para provar que um problema é indecidível será mostrar que algum outro problema já conhecido como sendo indecidível se reduz a ele.

5.1

PROBLEMAS INDECIDÍVEIS DA TEORIA DE LINGUAGENS

Já estabelecemos a indecidibilidade de A_{MT}, o problema de se determinar se uma máquina de Turing aceita uma dada entrada. Vamos considerar um problema relacionado, $PARA_{\mathsf{MT}}$, o problema de se determinar se uma máquina de Turing pára (aceitando ou rejeitando) sobre uma dada entrada.[1] Usamos a indecidibilidade de A_{MT} para provar a indecidibilidade de $PARA_{\mathsf{MT}}$ reduzindo A_{MT} a $PARA_{\mathsf{MT}}$. Seja

$$PARA_{\mathsf{MT}} = \{\langle M, w\rangle |\ M \text{ é uma MT e } M \text{ pára sobre a entrada } w\}.$$

TEOREMA 5.1

$PARA_{\mathsf{MT}}$ é indecidível.

[1]Na Seção 4.2, usamos o terme *problema da parada* para a linguagem A_{MT} muito embora $PARA_{\mathsf{MT}}$ seja o real problema da parada. Daqui em diante distingüiremos entre os dois chamando A_{MT} de *problema da aceitação*.

IDÉIA DA PROVA Esta prova é por contradição. Assumimos que $PARA_{\mathsf{MT}}$ é decidível e usamos essa suposição para mostrar que A_{MT} é decidível, contradizendo o Teorema 4.11. A idéia chave é mostrar que A_{MT} é redutível a $PARA_{\mathsf{MT}}$.

Vamos assumir que temos uma MT R que decide $PARA_{\mathsf{MT}}$. Então usamos R para construir S, uma MT que decide A_{MT}. Para ter uma idéia da forma de construir S, faça de conta que você é S. Sua tarefa é decidir A_{MT}. Você recebe uma entrada da forma $\langle M, w\rangle$. Você tem que dar como resposta *aceite* se M aceita w, e você tem que responder *rejeite* se M entra em loop ou rejeita sobre w. Tente simular M sobre w. Se ela aceita ou rejeita, faça o mesmo. Mas você pode não ser capaz de determinar se M está em loop, e nesse caso sua simulação não terminará. Isso é ruim, porque você é um decisor e portanto nunca permitido entrar em loop. Assim, essa idéia, por si só, não funciona.

Ao invés, use a suposição de que você tem a MT R que decide $PARA_{\mathsf{MT}}$. Com R, você pode testar se M pára sobre w. Se R indica que M não pára sobre w, rejeite porque $\langle M, w\rangle$ não está em A_{MT}. Entretanto, se R indica que M pára sobre w, você pode fazer a simulação sem qualquer perigo de entrar em loop.

Conseqüentemente, se MT R existe, podemos decidir A_{MT}, mas sabemos que A_{MT} é indecidível. Em virtude dessa contradição podemos concluir que R não existe. Por conseguinte, $PARA_{\mathsf{MT}}$ é indecidível.

PROVA Vamos assumir, para os propósitos de obter uma contradição, que a MT R decide $PARA_{\mathsf{MT}}$. Construimos a MT S para decidir A_{MT}, com S operando da seguinte forma.

$S =$ "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, uma codificação de uma MT M e uma cadeia w:

1. Rode MT R sobre a entrada $\langle M, w\rangle$.
2. Se R rejeita, *rejeite*.
3. Se R aceita, simule M sobre w até que ela pare.
4. Se M aceitou, *aceite*; se M rejeitou, *rejeite*."

Claramente, se R decide $PARA_{\mathsf{MT}}$, então S decide A_{MT}. Como A_{MT} é indecidível, $PARA_{\mathsf{MT}}$ também deve ser indecidível.

O Teorema 5.1 ilustra nossa estratégia para provar que um problema é indecidível. Essa estratégia é comum à maioria das provas de indecidibilidade, exceto no caso da indecidibilida da própria A_{MT}, que é provada diretamente através do método da diagonalização.

Agora apresentamos vários outros teoremas e suas provas como exemplos adicionais do método da redutibilidade para provar indecidibilidade. Seja

$$V_{\mathsf{MT}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ é uma MT e } L(M) = \emptyset\}.$$

TEOREMA 5.2

V_{MT} é indecidível.

IDÉIA DA PROVA Seguimos o padrão adotado no Teorema 5.1. Assumimos, para os propósitos de obter uma contradição, que V_{MT} é decidível e aí então mostramos que A_{MT} é decidível—uma contradição. Seja R uma MT que decide V_{MT}. Usamos R para construir a MT S que decide A_{MT}. Como S funcionará quando ela receber a entrada $\langle M, w\rangle$?

Uma idéia é S rodar R sobre a entrada $\langle M\rangle$ e ver se ela aceita. Se aceita, sabemos que $L(M)$ é vazia e, por conseguinte, que M não aceita w. Mas, se R rejeita $\langle M\rangle$, tudo o que sabemos é que $L(M)$ não é vazia e, conseqüentemente, que M aceita alguma cadeia, mas ainda não sabemos se M aceita a cadeia w específica. Dessa forma, precisamos usar uma idéia diferente.

Ao invés de rodar R sobre $\langle M\rangle$ rodamos R sobre uma modificação de $\langle M\rangle$. Modificamos $\langle M\rangle$ para garantir que M rejeita todas as cadeias exceto w, mas sobre a entrada w ela funciona normalmente. Então usamos R para determinar se a máquina modificada reconhece a linguagem vazia. A única cadeia que a máquina agora aceita é w, portanto sua linguagem será não vazia sse ela aceita w. Se R aceita quando ela é alimentada com uma descrição da máquina modificada, sabemos que a máquina modificada não aceita nada e que M não aceita w.

PROVA Vamos escrever a máquina modificada descrita na idéia da prova usando nossa notação padrão. Chamamo-la M_1.

M_1 = "Sobre a entrada x:

1. Se $x \neq w$, *rejeite*.
2. Se $x = w$, rode M sobre a entrada w e *aceite* se M aceita."

Essa máquina tem a cadeia w como parte de sua descrição. Ela conduz o teste de se $x = w$ da maneira óbvia, fazendo uma varredura na entrada e comparando-a caracter por caracter com w para determinar se elas são iguais.

Juntando tudo, assumimos que a MT R decide V_{MT} e construimos a MT S que decide A_{MT} da seguinte forma.

S = "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, uma codificação de uma MT M e uma cadeia w:

1. Use a descrição de M e w para construir a MT M_1 descrita acima.
2. Rode R sobre a entrada $\langle M_1\rangle$.
3. Se R aceita, *rejeite*; se R rejeita, *aceite*."

Note que S, na realidade, tem que ser capaz computar uma descrição de M_1 a partir de uma descrição de M e w. Ela é capaz de fazê-lo porque ela só precisa adicionar novos estados a M que realizem o teste se $x = w$.

Se R fosse um decisor para V_{MT}, S seria um decisor para A_{MT}. Um decisor para A_{MT} não pode existir, portanto sabemos que V_{MT} tem que ser indecidível.

Um outro problema computacional interessante concernente a máquinas de Turing diz respeito a determinar se uma dada máquina de Turing reconhece uma linguagem que também pode ser reconhecida por um modelo computacional mais simples. Por exemplo, supomos que $REGULAR_{\mathsf{MT}}$ seja o problema de se determinar se uma dada máquina de Turing tem uma máquina tem um autômato finito equivalente. Esse problema é o mesmo que determinar se a máquina de Turing reconhece uma linguagem regular. Seja

$$REGULAR_{\mathsf{MT}} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ é uma } \mathsf{MT} \text{ e } L(M) \text{ é uma linguagem regular}\}.$$

TEOREMA 5.3

$REGULAR_{\mathsf{MT}}$ é indecidível.

IDÉIA DA PROVA Como de costume para teoremas de indecidibilidade, esta prova é por redução a partir de A_{MT}. Assumimos que $REGULAR_{\mathsf{MT}}$ é decidível por uma MT R e usamos essa suposição para construir uma MT S que decide A_{MT}. Menos óbvio agora é como usar a capacidade de R de assistir S na sua tarefa. Não obstante, podemos fazê-lo.

A idéia é S tomar sua entrada $\langle M, w\rangle$ e modificar M de modo que a MT resultante reconheça uma linguagem regular se e somente se M aceita w. Chamamos a máquina modificada M_2. Projetamos M_2 para reconhecer a linguagem não-regular $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \mid n \geq 0\}$ se M não aceita w, e para reconhecer a linguagem regular Σ^* se M aceita w. Temos que especificar como S pode construir tal M_2 a partir de M e w. Aqui, M_2 funciona aceitando automaticamente todas as cadeias em $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n \mid n \geq 0\}$. Adicionalmente, se M aceita w, M_2 aceita todas as outras cadeias.

PROVA Supomos que R seja uma MT que decide $REGULAR_{\mathsf{MT}}$ e construímos a MT S para decidir A_{MT}. Então S funciona da seguinte maneira.

S = "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, onde M é uma MT e w é uma cadeia:

1. Construa a seguinte MT M_2.
   M_2 = "Sobre a entrada x:
   1. Se x tem a forma $\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n$, *aceite*.
   2. Se x não tem essa forma, rode M sobre a entrada w e *aceite* se M aceita w."
2. Rode R sobre a entrada $\langle M_2\rangle$.
3. Se R aceita, *aceite*; se R rejeita, *rejeite*."

Similarmente, os problemas de se testar se a linguagem de uma máquina é uma linguagem livre-do-contexto, uma linguagem decidível, ou mesmo uma linguagem finita, pode ser mostrado ser indecidível com provas similares. Na verdade, um resultado geral, chamado teorema de Rice, afirma que testar *qualquer propriedade* das linguagens reconhecidas por máquinas de Turing é indecidível. Damos o teorema de Rice no Problema 5.28.

Até agora, nossa estratégia para provar a indecibilidade de linguagens envolve uma redução a partir de A_{MT}. Às vezes reduzir a partir de alguma outra linguagem indecidível, tal como V_{MT}, é mais conveniente quando estamos mostrando que certas linguagens são indecidíveis. O teorema a seguir mostra que testar a equivalência de duas máquinas de Turing é um problema indecidível. Poderíamos prová-lo por uma redução a partir de A_{MT}, mas usamos essa oportunidade para dar um exemplo de uma prova de indecidibilidade por redução a partir de V_{MT}. Seja

$$EQ_{\mathsf{MT}} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1 \text{ e } M_2 \text{ são MTs e } L(M_1) = L(M_2)\}.$$

TEOREMA 5.4

EQ_{MT} é indecidível.

IDÉIA DA PROVA Mostre que, se EQ_{MT} fosse decidível, V_{MT} também seria decidível, dando uma redução de V_{MT} para EQ_{MT}. A idéia é simples. V_{MT} é o problema de se determinar se a linguagem de uma MT é vazia. EQ_{MT} é o problema de se determinar se as linguagens de duas MTs são iguais. Se uma dessas linguagens acontece de ser $\emptyset$, terminamos com o problema de se determinar se a linguagem da outra máquina é vazia—ou seja, o problema V_{MT}. Dessa forma, em um certo sentido, o problema V_{MT} é um caso especial do problema EQ_{MT} no qual uma das máquinas é fixada para reconhecer a linguagem vazia. Essa idéia faz com que a redução seja fácil de dar.

PROVA Supomos que a MT R decide EQ_{MT} e construimos a MT S para decidir V_{MT} da seguinte forma.

S = "Sobre a entrada $\langle M\rangle$, onde M é uma MT:

1. Rode R sobre a entrada $\langle M, M_1\rangle$, onde M_1 é uma MT que rejeita todas as entradas.
2. Se R aceita, *aceite*; se R rejeita, *rejeite*."

Se R decide EQ_{MT}, S decide V_{MT}. Mas V_{MT} é indecidível pelo Teorema 5.2, portanto EQ_{MT} também tem que ser indecidível.

REDUÇÕES VIA HISTÓRIAS DE COMPUTAÇÃO

O método da história de computação é uma técnica importante para provar que A_{MT} é redutível a certas linguagens. Esse método é freqüentemente útil quando o problema a ser mostrado como indecidível envolve testar a existência de algo. Por exemplo, esse método é usado para mostrar a indecidibilidade do décimo problema de Hilbert, testar a existência de raízes inteiras em um polinômio.

A história de computação para uma máquina de Turing sobre uma entrada é simplesmente a seqüência de configurações pelas quais a máquina passa à medida que ela processa a entrada. É um registro completo da computação dessa máquina.

DEFINIÇÃO 5.5

Seja M uma máquina de Turing e w uma cadeia de entrada. Uma ***história de computação de aceitação*** para M sobre w é uma seqüência de configurações, $C_1, C_2, \ldots, C_l$, onde C_1 é a configuração inicial de M sobre w, C_l é uma configuração de aceitação de M, e cada C_i segue legitimamente de C_{i-1} conforme as regras de M. Uma ***história de computação de rejeição*** para M sobre w é definida similarmente, exceto que C_l é uma configuração de rejeição.

Histórias de computação são seqüências finitas. Se M não pára sobre w, nenhuma história de computação de aceitação ou de rejeição existe para M sobre w. Máquinas determinísticas têm no máximo uma história de computação sobre qualquer dada entrada. Máquinas não-determinísticas podem ter muitas histórias de computação sobre uma única entrada, correspondendo aos vários ramos de computação. Por ora, continuamos a focar em máquinas determinísticas. Nossa primeira prova de indecidibilidade usando o método de história de computação concerne um tipo de máquina chamado autômato linearmente limitado.

DEFINIÇÃO 5.6

Um ***autômato linearmente limitado*** é um tipo restrito de máquina de Turing na qual a cabeça de leitura-escrita não é permitida mover para fora da parte da fita contendo a entrada. Se a máquina tentar mover sua cabeça para além de qualquer das extremidades da entrada, a cabeça permanece onde está, da mesma maneira que a cabeça não se movimentará para além da extremidade esquerda da fita de uma máquina de Turing ordinária.

Um autômato linearmente limitado é uma máquina de Turing com uma quantidade limitada de memória, como mostrado esquematicamente na figura abaixo. Ele só pode resolver problemas que requerem memória que possa caber dentro da fita usada para a entrada. Usando um alfabeto de fita maior que o alfabeto de entrada permite que a memória disponível seja incrementada de no máximo um fator constante. Logo, dizemos que para uma entrada de comprimento n, a quantidade de memória disponível é linear em n—daí o nome desse modelo.

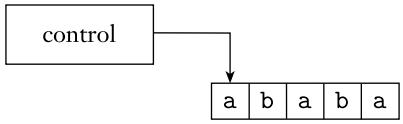


FIGURA 5.7
Esquemática de um autômato linearmente limitado

A despeito de sua restrição de memória, autômatos linearmente limitados (ALLs) são bastante poderosos. Por exemplo, os decisores para A_{AFD}, A_{GLC}, V_{AFD}, e V_{GLC} são todos ALLs. Toda LLC pode ser decidida por um ALL. Na verdade, chegar numa linguagem decidível que não possa ser decidida por um ALL dá algum trabalho. Desenvolvemos as técnicas para fazê-lo no Capítulo 9.

Aqui, A_{ALL} é o problema de se determinar se um ALL aceita sua entrada. Muito embora A_{ALL} seja o mesmo que o problema indecidível A_{MT} onde a máquina de Turing é restrita a ser um ALL, podemos mostrar que A_{ALL} é decidível. Seja

$$A_{\mathsf{ALL}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ é um ALL que aceita a cadeia } w\}.$$

Antes de provar a decidibilidade de A_{ALL}, achamos que o lema a seguir é útil. Ele diz que um ALL pode ter somente um número limitado de configuraçẽos quando uma cadeia de comprimento n é a entrada.

LEMA 5.8

Seja M um ALL com q estados e g símbolos no alfabeto de fita. Existem exatamente qng^n configurações distintas de M para uma fita de comprimento n.

PROVA Lembre-se de que uma configuração de M é como uma fotografia instantânea no meio de sua computação. Uma configuração consiste do estado do controle, posição da cabeça, e conteúdo da fita. Aqui, M tem q estados. O comprimento de sua fita é n, portanto a cabeça pode estar em uma das n posições, e g^n cadeias possíveis de símbolos de fita aparecem sobre a fita. O produto dessas três quantidades é o número total de configurações diferentes de M com uma fita de comprimento n.

TEOREMA 5.9

A_{ALL} é decidível.

IDÉIA DA PROVA De forma a decidir se ALL M aceita a entrada w, simulamos M sobre w. Durante o curso da simulação, se M pára e aceita ou rejeita, aceitamos ou rejeitamos conformemente. A dificuldade ocorre se M entra em loop sobre w. Precisamos ser capazes de detectar a entrada em loop de modo que possamos parar e rejeitar.

A idéia de detectar quando M está em loop é que, à medida que M computa sobre w, ela vai de configuração a configuração. Se M em algum momento repete uma configuração ela continuaria a repetir essa configuração novamente e, conseqüentemente estaria em loop. Em razão de M ser um ALL, a quantidade de fita disponível para ela é limitada. Pelo Lema 5.8, M pode estar em apenas um número limitado de configurações sobre essa quantidade de fita. Conseqüentemente, apenas uma quantidade limitada de tempo está disponível para M antes que ela vá entrar em alguma configuração que ela tenha previamente entrado. Detectar que M está em loop é possível simulando M pelo número de passos dado pelo Lema 5.8. Se M não parou até então, ela tem que estar em loop.

PROVA O algoritmo que decide A_{ALL} é como segue.

$L =$ "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, onde M é um ALL e w é uma cadeia:

1. Simule M sobre w por qng^n passos ou até que ela pare.
2. Se M parou, *aceite* se ela aceitou e *rejeite* se ela rejeitou. Se ela não parou, *rejeite*."

Se M sobre w não parou dentro de qng^n passos, ela tem que estar repetindo uma configuração conforme o Lema 5.8 e, conseqüentemente, estar em loop. É por isso que nosso algoritmo rejeita nessa instância.

O Teorema 5.9 mostra que ALLs e MTs diferem de uma maneira essencial: Para ALLs o problema da aceitação é decidível, mas para MTs ele não o é. Entretanto, certos outros problemas envolvendo ALLs permanecem indecidíveis. Um deles é o problema da vacuidade $V_{\mathsf{ALL}} = \{\langle M\rangle |\ M \text{ é um ALL onde } L(M) = \emptyset\}$. Para provar que V_{ALL} é indecidível, damos uma redução que usa o método da história de computação.

TEOREMA 5.10

V_{ALL} é indecidível.

IDÉIA DA PROVA Essa prova é por redução a partir de A_{MT}. Mostramos que, se V_{ALL} fosse decidível, A_{MT} também seria. Suponha que V_{ALL} seja decidível.

Como podemos usar essa suposição para decidir A_{MT}?

Para uma MT M e uma entrada w podemos determinar se M aceita w construindo um certo ALL B e então testar se $L(B)$ é vazia. A linguagem que B reconhece compreende todas as histórias de computação de aceitação para M sobre w. Se M aceita w, essa linguagem contém uma cadeia e portanto é não-vazia. Se M não aceita w, essa linguagem é vazia. Se pudermos determinar se a linguagem de B é vazia, claramente podemos determinar se M aceita w.

Agora descrevemos como construir B a partir de M e w. Note que precisamos mostrar mais que a mera existência de B. Temos que mostrar como uma máquina de Turing pode obter uma descrição de B, dadas descrições de M e w.

Construimos B para aceitar sua entrada x se x é uma história de computação de aceitação para M sobre w. Lembre-se de que uma história de computação de aceitação é a seqüência de configurações, C_1, $C_2, \ldots, C_l$ pela qual M passa quando ela aceita alguma cadeia w. Para os propósitos dessa prova assumimos que a história de computação de aceitação é apresentada como uma única cadeia, com as configurações separadas umas das outras pelo símbolo #, como mostrado na Figura 5.11.

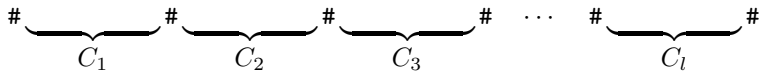


FIGURA 5.11
Uma possível entrada para B

O ALL B funciona da seguinte maneira. Quando ele recebe uma entrada x, espera-se que B aceite se x for uma computação de aceitação para M sobre w. Primeiro, B quebra x, conforme os delimitadores, em cadeias $C_1, C_2, \ldots, C_l$. Aí então B determina se C_i satisfaz as três condições de uma história de computação de aceitação.

1. C_1 é a configuração inicial para M sobre w.
2. Cada C_{i+1} legitimamente segue de C_i.
3. C_l é uma configuração de aceitação para M.

A configuração inicial C_1 para M sobre w é a cadeia $q_0 w_1 w_2 \cdots w_n$, onde q_0 é o estado inicial para M sobre w. Aqui, B tem essa cadeia diretamente embutida, de modo que ela é capaz de verificar a primeira condição. Uma configuração de aceitação é aquela que contém o estado de aceitação q_{aceita}, portanto B pode verificar a terceira condição procurando por q_{aceita} em C_l. A segunda condição é a mais difícil de verificar. Para cada par de configurações adjacentes, B verifica se C_{i+1} legitimamente segue de C_i. Esse passo envolve verificar que C_i e C_{i+1} são idênticas exceto pelas posições sob e adjacentes à cabeça em C_i. Essas posições têm que ser atualizadas conforme a função de transição de M. Então B verifica se a atualização foi feita apropriadamente zigue-zagueando entre posições corres-

pondentes de C_i e C_{i+1}. Para manter o registro das posições correntes durante o zigue-zague, B marca a posição corrente com pontos sobre a fita. Finalmente, se as condições 1, 2 e 3 são satisfeitas, B aceita sua entrada.

Note que o ALL B *não* é construído para os propósitos de realmente rodá-lo sobre alguma entrada—uma confusão comum. Construimos B apenas para os propósitos de alimentar uma descrição de B no decisor para V_{ALL} que assumimos existir. Uma vez que esse decisor retorne sua resposta podemos invertˆla para obter a resposta a se M aceita w. Por conseguinte, podemos decidir A_{MT}, uma contradição.

PROVA Agora estamos prontos para enunciar a redução de A_{MT} para V_{ALL}. Suponha que MT R decide V_{ALL}. Construa MT S que decide A_{MT} da seguinte forma.

$S =$ "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$, onde M é uma MT e w é uma cadeia:

1. Construa o ALL B a partir de M e w conforme descrito na idéia da prova.
2. Rode R sobre a entrada $\langle B\rangle$.
3. Se R rejeita, *aceite*; se R aceita, *rejeite*."

Se R aceita $\langle B\rangle$, então $L(B) = \emptyset$. Por conseguinte, M não tem nenhuma história de computação de aceitação sobre w e M não aceita w. Conseqüentemente, S rejeita $\langle M, w\rangle$. Similarmente, se R rejeita $\langle B\rangle$, a linguagem de B é não-vazia. A única cadeia que B pode aceitar é uma história de computação de aceitação para M sobre w. Por conseguinte, M deve aceitar w. Conseqüentemente, S aceita $\langle M, w\rangle$. A Figura 5.12 ilustra o ALL B.

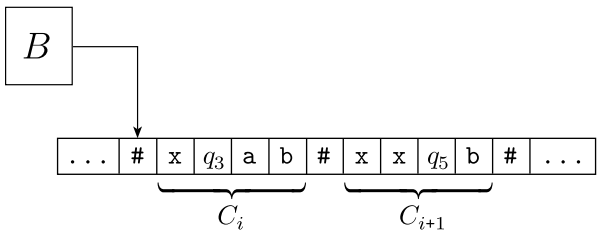


FIGURA 5.12
O ALL B verificando uma história de computação de uma MT

Podemos também usar a técnica de redução via histórias de computação para estabelecer a indecidibilidade de certos problemas relacionados a gramáticas livres-do-contexto e autômatos com pilha. Lembre-se de que no Teorema 4.8 apresentamos um algoritmo para decidir se uma gramática livre-do-contexto gera alguma cadeia—ou seja, se $L(G) = \emptyset$. Agora, mostramos que um problema relacionado é indecidível. É o problema de se determinar se uma gramática

livre-do-contexto gera todas as cadeias possíveis. Provar que esse problema é indecidível é o principal passo na demonstração de que o problema da equivalência para gramáticas livres-do-contexto é indecidível. Seja

$$TOD_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G\rangle |\ G \text{ é uma GLC e } L(G) = \Sigma^*\}.$$

TEOREMA 5.13

TOD_{GLC} é indecidível.

PROVA Essa prova é por contradição. Para obter a contradição assumimos que TOD_{GLC} seja decidível e usamos essa suposição para mostrar que A_{MT} é decidível. Essa prova é similar àquela do Teorema 5.10 mas com uma pequeno truque adicional: Ela é uma redução a partir de A_{MT} via histórias de computação, mas temos que modificar um pouco a representação das histórias de computação por uma razão técnica que explicaremos mais adiante.

Agora, descrevemos como usar um procedimento de decisão para TOD_{GLC} para decidir A_{MT}. Para uma MT M e uma entrada w construimos uma GLC G que gera todas as cadeias se e somente se M não aceita w. Portanto, se M de fato aceita w, G *não* gera alguma cadeia específica. Essa cadeia é—adivinhe—a história de computação de aceitação para M sobre w. Ou seja, G é projetada para gerar todas as cadeias que *não* são histórias de computação de aceitação para M sobre w.

Para fazer a GLC G gerar todas as cadeias que falham em ser uma história de computação de aceitação para M sobre w, utilizamos a seguinte estratégia. Uma cadeia pode falhar em ser uma história de computação de aceitação por várias razões. Uma história de computação de aceitação para M sobre w aparece como $\#C_1\#C_2\#\cdots\#C_l\#$, onde C_i é a configuração de M sobre o i-ésimo passo da computação sobre w. Então, G gera todas as cadeias que

1. *não* começam com C_1,
2. *não* terminam com uma configuração de aceitação, ou
3. onde alguma C_i *não* origina apropriadamente C_{i+1} sob as regras de M.

Se M não aceita w, nenhuma história de computação de aceitação existe, portanto, *todas* as cadeias falham de alguma maneira ou de outra. Conseqüentemente, G geraria todas as cadeias, como desejado.

Agora, vamos à real construção de G. Em vez de construir G, construimos um AP D. Sabemos que podemos usar a construção dada no Teorema 2.20 (página 122) para converter D em uma GLC. Fazemos isso porque, para nossos propósitos, projetar um AP é mais fácil que projetar uma GLC. Nessa instância, D iniciará não-deterministicamente ramificando para adivinhar qual das três condições precedentes verificar. Um ramo verifica se o início da cadeia de entrada é C_1 e aceita se não o é. Um outro ramo verifica se a cadeia de entrada termina com uma configuração contendo o estado de aceitação, q_{aceita}, e aceita se não é o caso.

O terceiro ramo deve aceitar se alguma C_i não origina apropriadamente C_{i+1}.

Ele funciona varrendo a entrada até que não-deterministicamente decide que chegou em C_i. A seguir, empilha C_i até quando ela chega ao fim conforme marcado pelo símbolo #. Aí então D desempilha para comparar com C_{i+1}. Elas devem casar exceto com relação à posição da cabeça onde a diferença é ditada pela função de transição de M. Finalmente, D aceita se trata-se de um descasamento ou uma atualização inapropriada.

O problema com essa idéia é que, quando D desempilha C_i, ela está na ordem reversa e não adequada para comparação com C_{i+1}. Nesse ponto o truque na prova aparece: Escrevemos a história de computação de aceitação diferentemente. Alternadamente, as configurações aparecerão em ordem reversa. As posições ímpares permanecem escritas na ordem normal, mas as posições pares são escritas de trás para frente. Por conseguinte, uma história de computação de aceitação apareceria como mostrado na figura abaixo.

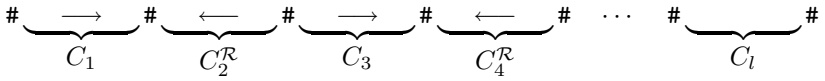


FIGURA 5.14
Alternadamente, as configurações escritas em ordem reversa

Nessa forma modificada, o AP é capaz de empilha uma configuração de modo que quando ela for desempilhada, a ordem é adequada para comparação com a próxima. Projetamos D para aceitar qualquer cadeia que não seja uma história de computação de aceitação na forma modificada.

No Exercício 5.1 você pode usar o Teorema 5.13 para mostrar que EQ_{GLC} é indecidível.

5.2 UM PROBLEMA INDECIDÍVEL SIMPLES

Nesta seção mostramos que o fenômeno da indecidibilidade não está confinado a problemas concernentes a autômatos. Damos um exemplo de um problema indecidível concernente a manipulações simples de cadeias. É chamado ***problema da correspondência de Post***, ou ***PCP***.

Podemos descrever esse problema facilmente como um tipo de charada. Começamos com uma coleção de dominós, cada um contendo duas cadeias, uma

em cada lado. Um dominó individual tem a seguinte aparência

$$\left[\frac{\texttt{a}}{\texttt{ab}}\right]$$

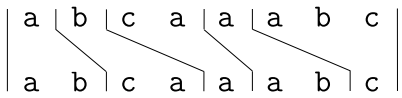
e uma coleção de dominós se assemelha a

$$\left\{\left[\frac{\texttt{b}}{\texttt{ca}}\right], \left[\frac{\texttt{a}}{\texttt{ab}}\right], \left[\frac{\texttt{ca}}{\texttt{a}}\right], \left[\frac{\texttt{abc}}{\texttt{c}}\right]\right\}$$

A tarefa é fazer uma lista desses dominós (repetições permitidas) de modo que a cadeia que obtemos ao ler os símbolos em cima é a mesma que a cadeia de símbolos em baixo. Essa lista é chamada ***emparelhamento***. Por exemplo, a seguinte lista é um emparelhamento para essa charada.

$$\left[\frac{\texttt{a}}{\texttt{ab}}\right]\left[\frac{\texttt{b}}{\texttt{ca}}\right]\left[\frac{\texttt{ca}}{\texttt{a}}\right]\left[\frac{\texttt{a}}{\texttt{ab}}\right]\left[\frac{\texttt{abc}}{\texttt{c}}\right].$$

Lendo a cadeia de cima obtemos `abcaaabc`, que é a mesma que se lê em baixo. Podemos também ilustrar esse emparelhamento deformando os dominós de modo que os símbolos correspondentes de cima e de baixo se alinhem.



Para algumas coleções de dominós encontrar um emparelhamento pode não ser possível. Por exemplo, a coleção

$$\left\{\left[\frac{\texttt{abc}}{\texttt{ab}}\right], \left[\frac{\texttt{ca}}{\texttt{a}}\right], \left[\frac{\texttt{acc}}{\texttt{ba}}\right]\right\}$$

não pode conter um emparelhamento porque toda cadeia de cima é maior que a cadeia correspondente de baixo.

O problema da correspondência de Post é determinar se uma coleção de dominós tem um emparelhamento. Esse problema é insolúvel por algoritmos.

Antes de chegar ao enunciado formal desse teorema e sua prova, vamos enunciar o problema precisamente e aí então expressá-lo como uma linguagem. Uma instância do PCP é uma colção P de dominós:

$$P = \left\{\left[\frac{t_1}{b_1}\right], \left[\frac{t_2}{b_2}\right], \cdots, \left[\frac{t_k}{b_k}\right]\right\},$$

e um emparelhamento é uma seqüência $i_1, i_2, \ldots, i_l$, onde $t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_l} = b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_l}$. O problema é determinar se P tem um emparelhamento. Seja

$$PCP = \{\langle P\rangle \mid P \text{ é uma instância do problema da correspondência de Post com um emparelhamento}\}.$$

TEOREMA 5.15

PCP é indecidível.

IDÉIA DA PROVA Conceitualmente essa prova é simples, embora ela envolva muitos detalhes técnicos. A técnica principal é a redução a partir de A_{MT} via histórias de computação de aceitação. Mostramos que de qualquer MT M e entrada w podemos construir uma instância P onde um emparelhamento é uma história de computação de aceitação para M sobre w. Se pudéssemos determinar se a instância tem um emparelhamento, seríamos capazes de determinar se M aceita w.

Como podemos construir P de modo que um emparelhamento seja uma história de computação de aceitação para M sobre w? Escolhemos os dominós em P de modo que fazer um emparelhamento força uma simulação de M a ocorrer. No emparelhamento, cada dominó conecta uma posição ou posições em uma configuração a uma(s) correspondente(s) na próxima configuração.

Antes de chegar na construção lidamos com três pequenos pontos técnicos. (Não se preocupe demais com eles na sua leitura inicial sobre essa construção.) Primeiro, por conveniência ao construir P, assumimos que M sobre w nunca tenta mover sua cabeça para além da extremidade esquerda da fita. Isso requer primeiro alterar M para evitar esse comportamento. Segundo, se $w = \varepsilon$, usamos a cadeia $\sqcup$ no lugar de w na construção. Terceiro, modificamos o PCP para exigir que um emparelhamento comece com o primeiro dominó,

$$\left[\frac{t_1}{b_1}\right].$$

Mais adiante mostramos como eliminar esse requisito. Denominamos esse problema de problema da correspondência de Post modificado (PCPM). Let

$$PCPM = \{\langle P\rangle \mid P \text{ é uma instância do problema da correspondência de Post com um emparelhamento que começa com o primeiro dominó}\}.$$

Agora vamos passar para os detalhes da prova e projetar P para simular M sobre w.

PROVA Supomos que a MT R decide o PCP e construimos S que decide A_{MT}. Seja

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}}),$$

onde Q, Σ, Γe δ, são o conjunto de estados, alfabeto de entrada, alfabeto de fita e a função de transição de M, respectivamente.

Nesse caso S constrói uma instância do PCP P que tem um emparelhamento sse M aceita w. Para fazer isso S primeiro constrói uma instância P' do PCPM. Descrevemos a construção em sete partes, cada uma das quais cuida de um aspecto específico da simulação de M sobre w. Para explicar o que estamos fazendo intercalamos a construção com um exemplo da construção em ação.

Part 1. A construção começa da seguinte maneira.

$$\text{Ponha } \left[\frac{\#}{\#q_0w_1w_2\cdots w_n\#}\right] \text{ em } P' \text{ como primeiro dominó } \left[\frac{t_1}{b_1}\right].$$

Em virtude de P' ser uma instância do PCPM, o emparelhamento tem que começar com esse dominó. Portanto, a cadeia de baixo começa corretamente com $C_1 = q_0w_1w_2\cdots w_n$, a primeira configuração na história de computação de aceitação para M sobre w, como mostrado na figura abaixo.

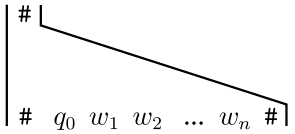


FIGURA 5.16
Início do emparelhamento do PCPM

Nesse desenho do emparelhamento parcial atingido até então, a cadeia inferior consiste de $\#q_0w_1w_2\cdots w_n\#$ e a cadeia superior consiste apenas de #. Para obter um emparelhamento precisamos estender a cadeia superior para casar com a cadeia inferior. Fornecemos dominós adicionais para permitir essa extensão. Os dominós adicionais fazem com que a próxima configuração de M apareça na extensão da cadeia inferior forçando uma simulação de um único passo de M.

Nas partes 2, 3 e 4, adicionamos a P' dominós que realizam a parte principal da simulação. A parte 2 lida com os movimentos da cabeça para a direita, a parte 3 lida com os movimentos da cabeça para a esquerda, e a parte 4 lida com as células da fita que não são adjacentes à cabeça.

Parte 2. Para todo $a, b \in \Gamma$ e todo $q, r \in Q$ onde $q \neq q_{\text{rejeita}}$,

$$\text{se } \delta(q, a) = (r, b, \text{D}), \text{ ponha } \left[\frac{qa}{br}\right] \text{ em } P'.$$

Parte 3. Para todo $a, b, c \in \Gamma$ e todo $q, r \in Q$ onde $q \neq q_{\text{rejeita}}$,

$$\text{se } \delta(q, a) = (r, b, \text{E}), \text{ ponha } \left[\frac{cqa}{rcb}\right] \text{ em } P'.$$

Parte 4. Para todo $a \in \Gamma$,

$$\text{ponha } \left[\frac{a}{a}\right] \text{ em } P'.$$

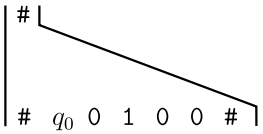
Agora montamos um exemplo hipotético para ilustrar o que construímos até agora. Seja $\Gamma = \{\texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \sqcup\}$. Digamos que w é a cadeia 0100 e que o estado inicial de M é q_0. No estado q_0, ao ler um 0, vamos dizer que a função de transição diz

que M entra no estado q_7, escreve um 2 na fita, e move sua cabeça para a direita. Em outras palavras, $\delta(q_0, 0) = (q_7, 2, \mathrm{D})$.

A parte 1 coloca o dominó

$$\left[\frac{\#}{\#q_0 0100\#}\right] = \left[\frac{t_1}{b_1}\right]$$

em P', e o emparelhamento começa:



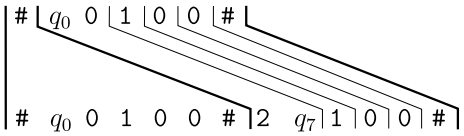
Adicionalmente, a parte 2 coloca o dominó

$$\left[\frac{q_0 0}{2 q_7}\right]$$

pois $\delta(q_0, 0) = (q_7, 2, \mathrm{D})$ e a parte 4 coloca os dominós

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{1}{1}\right], \left[\frac{2}{2}\right], \text{ e } \left[\frac{\sqcup}{\sqcup}\right]$$

em P', pois 0, 1, 2 e $\sqcup$ são os membros de Γ. Isso, junto com a parte 5, nos permite estender o emparelhamento para



Portanto, os dominós das partes 2, 3 e 4 nos deixam estender o emparelhamento adicionando a segunda configuração após a primeira. Queremos que esse processo continue, adicionando a terceira configuração, e aí a quarta, e assim por diante. Para que isso aconteça precisamos adicionar um dominó a mais para copiar o símbolo #.

Parte 5.

$$\text{Ponha } \left[\frac{\#}{\#}\right] \text{ e } \left[\frac{\#}{\sqcup\#}\right] \text{ em } P'.$$

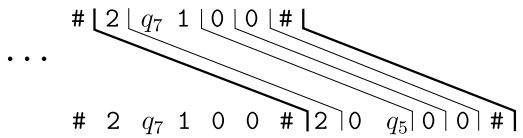
O primeiro desses dominós nos permite copiar o símbolo # que marca a separação das configurações. Além disso, o segundo dominó nos permite adicionar um símbolo em branco $\sqcup$ no final da configuração para simular a quan-

tidade infinita de brancos à direita que são suprimidos quando escrevemos a configuração.

Continuando com o exemplo, vamos dizer que no estado q_7, ao ler um 1, M vai para o estado q_5, escreve um 0, e move a cabeça para a direita. Ou seja, $\delta(q_7, 1) = (q_5, 0, \mathrm{D})$. Então temos dominó

$$\left[\frac{q_7 1}{0 q_5}\right] \text{ em } P'.$$

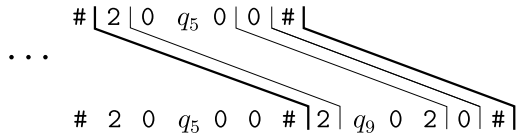
Portanto o último emparelhamento parcial se estende para



Então, suponha que no estado q_5, ao ler um 0, M vai para o estado q_9, escreve um 2, e move sua cabeça para a esquerda. Portanto, $\delta(q_5, 0) = (q_9, 2, \mathrm{E})$. Então temos os dominós

$$\left[\frac{0 q_5 0}{q_9 0 2}\right], \left[\frac{1 q_5 0}{q_9 1 2}\right], \left[\frac{2 q_5 0}{q_9 2 2}\right], \text{ e } \left[\frac{\sqcup q_5 0}{q_9 \sqcup 2}\right].$$

O primeiro é relevante porque o símbolo à esquerda da cabeça é um 0. O emparelhamento parcial precedente se estende para

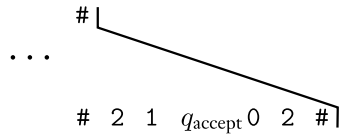


Note que, à medida que construimos um emparelhamento, somos forçados a simular M sobre a entrada w. Esse processo continua até que M atinge um estado de parada. Se um estado de aceitação ocorre, queremos fazer com a parte superior do emparelhamento parcial "acompanhe" a parte inferior de modo que o emparelhamento seja completo. Podemos arranjar para que isso aconteça adicionando mais dominós.

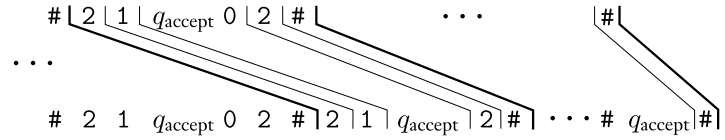
Parte 6. Para todo $a \in \Gamma$,

$$\text{ponha } \left[\frac{a\, q_{\text{aceita}}}{q_{\text{aceita}}}\right] \text{ e } \left[\frac{q_{\text{aceita}}\, a}{q_{\text{aceita}}}\right] \text{ em } P'.$$

Esse passo tem o efeito de adicionar "pseudo-passos" da máquina de Turing depois que ela parou, onde a cabeça "come" os símbolos adjacentes até que não reste mais nenhum. Continuando com o exemplo, se o emparelhamento parcial casa até o ponto no qual a máquina pára em um estado de aceitação é



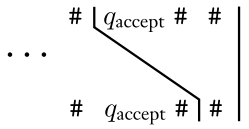
Os dominós que acabamos de adicionar permitem que o emparelhamento continue:



Parte 7. Finalmente adicionamos o dominó

$$\left[\frac{q_{\text{aceita}}\#\#}{\#}\right]$$

e completamos o emparelhamento:



Isso conclui a construção de P'. Lembre-se de que P' é uma instância do PCPM na qual o emparelhamento simula a computação de M sobre w. Para concluir a prova, lembramos que o PCPM difere do PCP no sentido de que o emparelhamento tem que começar com o primeiro dominó na lista. Se vemos P' como uma instância do PCP ao invés do PCPM, ele obviamente tem um emparelhamento, independente de se M pára sobre w. Você pode encontrá-lo? (Dica: É muito curto.)

Agora mostramos como converter P' em P, uma instância do PCP que ainda simula M sobre w. Fazemos isso com um truque um tanto técnico. A idéia é

construir o requisito de começar com o primeiro dominó diretamente dentro do problema de modo que enunciar o requisito explícito se torna desnecessário. Precisamos introduzir alguma notação para esse propósito.

Seja $u = u_1u_2 \cdots u_n$ uma cadeia qualquer de comprimento n. Defina $\star u$, $u\star$ e $\star u\star$ como sendo as três cadeias

$$\begin{aligned} \star u &= *\,u_1 * u_2 * u_3 * \cdots * u_n \\ u\star &= u_1 * u_2 * u_3 * \cdots * u_n * \\ \star u\star &= *\,u_1 * u_2 * u_3 * \cdots * u_n *\,. \end{aligned}$$

Aqui, $\star u$ adiciona o símbolo $*$ antes de todo caracter em u, $u\star$ adiciona um após cada caracter em u, e $\star u\star$ adiciona um tanto antes como depois de cada caracter em u.

Para converter P' para P, uma instância do PCP, fazemos o seguinte. Se P' fosse a coleção

$$\left\{\left[\frac{t_1}{b_1}\right], \left[\frac{t_2}{b_2}\right], \left[\frac{t_3}{b_3}\right], \cdots, \left[\frac{t_k}{b_k}\right]\right\},$$

fazemos com que P seja a coleção

$$\left\{\left[\frac{\star t_1}{\star b_1\star}\right], \left[\frac{\star t_1}{b_1\star}\right], \left[\frac{\star t_2}{b_2\star}\right], \left[\frac{\star t_3}{b_3\star}\right], \cdots, \left[\frac{\star t_k}{b_k\star}\right], \left[\frac{*\diamond}{\diamond}\right]\right\}.$$

Considerando P como uma instância do PCP, vemos que o único dominó que possivelmente poderia começar um emparelhamento é o primeiro,

$$\left[\frac{\star t_1}{\star b_1\star}\right],$$

porque ele é o único que começa tanto na parte superior quanto na parte inferior com o mesmo símbolo—a saber, $*$. Além de forçar o emparelhamento a começar com o primeiro dominó, a presença dos $*$s não afeta possíveis emparelhamentos porque eles simplesmente intercalam com os símbolos originais. Os símbolos originais agora ocorrem nas posições pares do emparelhamento. O dominó

$$\left[\frac{*\diamond}{\diamond}\right]$$

está aí para permitir que a parte superior adicione o $*$ extra no final do emparelhamento.

5.3 REDUTIBILIDADE POR MAPEAMENTO

Mostramos como usar a técnica da redutibilidade para provar que vários problemas são indecidíveis. Nesta seção formalizamos a noção de redutibilidade. Fazer isso nos permite usar redutibilidade de maneiras mais refinadas, tais como para

provar que certas linguagens não são Turing-reconhecíveis e para aplicações em teoria da complexidade.

A noção de reduzir um problema a outro pode ser definida formalmente de uma dentre várias maneiras. A escolha de qual delas usar depende da aplicação. Nossa escolha é um tipo simples de redutibilidade chamado ***redutibilidade por mapeamento***.[2]

Grosso modo, ser capaz de reduzir o problema A ao problema B usando uma redução por mapeamento significa que uma função computável existe que converte instâncias do problema A para instâncias do problema B. Se tivermos tal função de conversão, denominada *redução*, podemos resolver A com um solucionador para B. A razão é que qualquer instância de A pode ser resolvida primeiro usando a redução para convertê-la para uma instância de B e aí então aplicando o solucionador para B. Uma definição precisa de redutibilidade por mapeamento segue logo mais.

FUNÇÕES COMPUTÁVEIS

Uma máquina de Turing computa uma função iniciando com a entrada para a função sobre a fita e parando com a saída da função sobre a fita.

DEFINIÇÃO 5.17

Uma função $f\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é uma ***função computável*** se alguma máquina de Turing M, sobre toda entrada w, pára com exatamente $f(w)$ sobre sua fita.

EXEMPLO 5.18

Todas as operações aritméticas usuais sobre inteiros são funções computáveis. Por exemplo, podemos construir uma máquina que toma a entrada $\langle m, n\rangle$ e retorna $m + n$, a soma de m e n. Não damos quaisquer detalhes aqui, deixando-os como exercícios. ∎

EXEMPLO 5.19

Funções computáeis podem ser transformações de descrições de máquinas. Por exemplo, uma função computável f toma como entrada w e retorna a descrição de uma máquina de Turing $\langle M'\rangle$ se $w = \langle M\rangle$ é uma codificação de uma máquina de Turing M. A máquina M' é uma máquina que reconhece a mesma linguagem que M, mas nunca tenta mover sua cabeçã para além da extremidade esquerda de sua fita. A função f realiza essa tarefa adicionando vários estados à descrição

[2] É chamado ***redutibilidade muitos–para–um*** em alguns outros livros-texto.

de M. A função retorna ε se w não for uma codificação legítima de uma máquina de Turing. ■

DEFINIÇÃO FORMAL DE REDUTIBILIDADE POR MAPEAMENTO

Agora definimos redutibilidade por mapeamento. Como de costume, representamos problemas computacionais por meio de linguagens.

DEFINIÇÃO 5.20

A linguagem A é ***redutível por mapeamento*** à linguagem B, escrito $A \leq_{\mathrm{m}} B$, se existe uma função computável $f\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, onde para toda w,

$$w \in A \iff f(w) \in B.$$

A função f é denominada a ***redução*** de A para B.

A Figura 5.21 ilustra a redutibilidade por mapeamento.

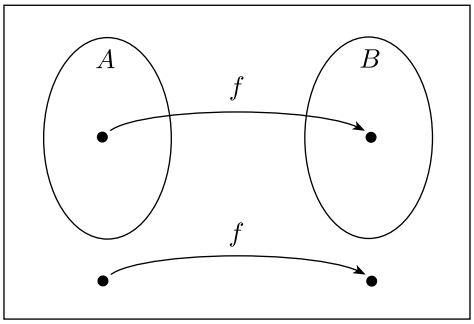


FIGURA 5.21
A função f reduzindo A para B

Uma redução por mapeamento de A para B provê uma maneira de converter questões sobre pertinência em A para teste de pertinência em B. Para testar se $w \in A$, usamos a redução f para mapear w para $f(w)$ e testar se $f(w) \in B$. O termo *redução por mapeamento* vem da função ou mapeamento que provê os meios de se fazer a redução.

Se um problema é redutível por mapeamento a um segundo problema, previamente resolvido, podemos então obter uma solução para o problema original. Capturamos essa idéia no teorema a seguir.

TEOREMA 5.22

Se $A \leq_{\mathrm{m}} B$ e B for decidível, então A é decidível.

PROVA Fazemos M ser o decisor para B e f a redução de A para B. Descrevemos um decisor N para A da seguinte forma.

$N =$ "Sobre a entrada w:

1. Compute $f(w)$.
2. Rode M sobre a entrada $f(w)$ e dê como saída o que quer que M dá como saída."

Claramente, se $w \in A$, então $f(w) \in B$ porque f é uma redução dde A para B. Portanto, M aceita $f(w)$ sempre que $w \in A$. Conseqüentemente, N funciona como desejado.

O corolário seguinte do Teorema 5.22 tem sido nossa principal ferramente para provar indecidibilidade.

COROLÁRIO 5.23

Se $A \leq_{\mathrm{m}} B$ e A for indecidível, então B é indecidível.

Agora revisitamos algumas de nossas provas anteriores que usaram o método da redutibilidade para obter exemplos de redutibilidades por mapeamento.

EXEMPLO 5.24

No Teorema 5.1 usamos uma redução de A_{MT} para provar que $PARA_{\mathsf{MT}}$ é indecidível. Essa redução mostrou como um decisor para $PARA_{\mathsf{MT}}$ poderia ser usado para dar um decisor para A_{MT}. Podemos exibir uma redução por mapeamento de A_{MT} para $PARA_{\mathsf{MT}}$ da seguinte forma. Para fazer isso temos que apresentar uma função computável f que toma a entrada da forma $\langle M, w\rangle$ e retorna a saída da forma $\langle M', w'\rangle$, onde

$$\langle M, w\rangle \in A_{\mathsf{MT}} \text{ if and only if } \langle M', w'\rangle \in PARA_{\mathsf{MT}}.$$

A seguinte máquina F computa uma redução f.

$F =$ "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$:

1. Construa a seguinte máquina M'.
   $M' =$ "Sobre a entrada x:
   1. Rode M sobre x.
   2. Se M aceita, *aceite*.
   3. Se M rejeita, entre em loop."
2. Dê como saída $\langle M', w\rangle$."

Uma questão menor surge aqui concernente a cadeias de entrada formadas inapropriadamente. Se a MT F determina que sua entrada não está na forma correta como especificado na linha de entrada "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$:" e, portanto, que a entrada não está em A_{MT}, a MT dá como saída uma cadeia que não está em $PARA_{\mathsf{MT}}$. Qualquer cadeia que não esteja em $PARA_{\mathsf{MT}}$ resolve. Em geral, quando descrevemos uma máquina de Turing que computa uma redução de A para B, entradas inapropriadamente formadas são assumidas mapearem para cadeias fora de B. ■

EXEMPLO 5.25

A prova da indecidibilidade do problema da correspondência de Post no Teorema 5.15 contém duas reduções por mapeamento. Primeiro, ela mostra que $A_{\mathsf{MT}} \leq_{\mathrm{m}} PCPM$ e aí então ela mostra que $PCPM \leq_{\mathrm{m}} PCP$. Em ambos os casos podemos facilmente obter a verdadeira função de redução e mostrar que ela é uma redução por mapeamento. Como o Exercício 5.6 mostra, redutibilidade por mapeamento é transitiva, portanto essas duas reduções juntas implicam que $A_{\mathsf{MT}} \leq_{\mathrm{m}} PCP$. ■

EXEMPLO 5.26

Uma redução por mapeamento de V_{MT} para EQ_{MT} está por trás da prova do Teorema 5.4. Nesse caso a redução f mapeia a entrada $\langle M\rangle$ para a saída $\langle M, M_1\rangle$, onde M_1 é a máquina que rejeita todas as cadeias. ■

EXEMPLO 5.27

A prova do Teorema 5.2 mostrando que V_{MT} é indecidível ilustra a diferença entre a noção formal de redutibilidade por mapeamento que definimos nesta seção e a noção informal de redutibilidade que usamos anteriormente neste capítulo. A prova mostra que V_{MT} é indecidível reduzindo A_{MT} a ele. Vamos ver se podemos converter essa redução numa redução por mapeamento.

Da redução original podemos facilmente construir uma função f que toma como entrada $\langle M, w\rangle$ e produz como saída $\langle M_1\rangle$, onde M_1 é a máquina de Turing descrita naquela prova. Mas M aceita w sse $L(M_1)$ *não* for vazia portanto f é uma redução por mapeamento de A_{MT} para $\overline{V_{\mathsf{MT}}}$. Ela ainda mostra que V_{MT} é indecidível porque a decidibilidade não é afetada por complementação, mas ela não dá uma redução por mapeamento de A_{MT} para V_{MT}. Na verdade, nenhuma redução dessas existe, como lhe é pedido para mostrar no Exercício 5.5. ■

A sensibilidade da redutibilidade por mapeamento à complementação é importante no sentido do uso da redutibilidade para provar não-reconhecibilidade de certas linguagens. Podemos também usar a redutibilidade por mapeamento para mostrar que problemas não são Turing-reconhecíveis. O teorema seguinte é análogo ao Teorema 5.22.

TEOREMA 5.28

Se $A \leq_{\mathrm{m}} B$ e B é Turing-reconhecível, então A é Turing-reconhecível.

A prova é a mesma que aquela do Teorema 5.22, exceto que M e N são reconhecedores ao invés decisores.

COROLÁRIO 5.29

Se $A \leq_{\mathrm{m}} B$ e A não é Turing-reconhecível, então B não é Turing-reconhecível.

Em uma aplicação típica desse corolário, fazemos A ser $\overline{A_{\mathsf{MT}}}$, o complemento de A_{MT}. Sabemos que $\overline{A_{\mathsf{MT}}}$ não é Turing-reconhecível do Corolário 4.23. A definição de redutibilidade por mapeamento implica que $A \leq_{\mathrm{m}} B$ significa o mesmo que $\overline{A} \leq_{\mathrm{m}} \overline{B}$. Para provar que B não é reconhecível podemos mostrar que $A_{\mathsf{MT}} \leq_{\mathrm{m}} \overline{B}$. Podemos também usar a redutibilidade por mapeamento para mostrar que certos problemas não são nem Turing-reconhecíveis nem co-Turing-reconhecíveis, como no teorema seguinte.

TEOREMA 5.30

EQ_{MT} não é nem Turing-reconhecível nem co-Turing-reconhecível.

PROVA Primeiro mostramos que EQ_{MT} não é Turing-reconhecível. Fazemos isso mostrando que A_{MT} é redutível a $\overline{EQ_{\mathsf{MT}}}$. A função redutora f funciona da seguinte forma.

$F =$ "Sobre a entrada $\langle M, w\rangle$ onde M é uma MT e w uma cadeia:

1. Construa as seguintes máquinas M_1 e M_2.
   $M_1 =$ "Sobre qualquer entrada:
   1. *Rejeite*."
   $M_2 =$ "Sobre qualquer entrada:
   1. Rode M sobre w. Se ela aceita, *aceite*."
2. Dê como saída $\langle M_1, M_2\rangle$."

Aqui, M_1 não aceita nada. Se M aceita w, M_2 aceita tudo, e portanto as duas máquinas não são equivalentes. Reciprocamente, se M não aceita w, M_2 não aceita nada, e elas são equivalentes. Por conseguinte, f reduz A_{MT} a $\overline{EQ_{\mathsf{MT}}}$, como desejado.

Para mostrar que $\overline{EQ_{\mathsf{MT}}}$ não é Turing-reconhecível damos uma redução de A_{MT} para o complemento de $\overline{EQ_{\mathsf{MT}}}$—a saber, EQ_{MT}. Logo, mostramos que $A_{\mathsf{MT}} \leq_{\mathrm{m}} EQ_{\mathsf{MT}}$. A seguinte MT G computa a função redutora g.

$G =$ "A entrada é $\langle M, w\rangle$ onde M é uma MT e w uma cadeia:

1. Construa as duas máquinas seguintes M_1 e M_2.
   $M_1 =$ "Sobre qualquer entrada:
   1. *Aceite*."
   $M_2 =$ "Sobre qualquer entrada:

1. Rode M sobre w.
2. Se ela aceita, *aceite*."

2. Dê como saída $\langle M_1, M_2 \rangle$."

A única diferença diferença entre f e g está na máquina M_1. Em f, a máquina M_1 sempre rejeita, enquanto que em g ela sempre aceita. Em ambas f e g, M aceita w sse M_2 sempre aceita. Em g, M aceita w sse M_1 e M_2 são equivalentes. Essa é a razão pela qual g é uma redução de A_{MT} para EQ_{MT}.

EXERCÍCIOS

5.1 Mostre que EQ_{GLC} é indecidível.

5.2 Mostre que EQ_{GLC} é co-Turing-reconhecível.

5.3 Encontre um emparelhamento na seguinte instância do Problema da Correspondência de Post.

$$\left\{ \left[\frac{\texttt{ab}}{\texttt{abab}}\right], \left[\frac{\texttt{b}}{\texttt{a}}\right], \left[\frac{\texttt{aba}}{\texttt{b}}\right], \left[\frac{\texttt{aa}}{\texttt{a}}\right] \right\}$$

5.4 Se $A \leq_{\mathrm{m}} B$ e B é uma linguagem regular, isso implica que A seja uma linguagem regular? Por que ou por que não?

[R]**5.5** Mostre que A_{MT} não é redutível por mapeamento a V_{MT}. Em outras palavras, mostre que nenhuma função computável reduz A_{MT} a V_{MT}. (Dica: Use uma prova por contradição, e fatos que você já conhece sobre A_{MT} e V_{MT}.)

[R]**5.6** Mostre que $\leq_{\mathrm{m}}$ é uma relação transitiva.

[R]**5.7** Mostre que se A é Turing-reconhecível e $A \leq_{\mathrm{m}} \overline{A}$, então A é decidível.

[R]**5.8** Na prova do Teorema 5.15 modificamos a máquina de Turing M de modo que ela nunca tente mover sua cabeça além da extremidade esquerda da fita. Suponha que fizéssemos essa modificação a M. Modifique a construção do PCP para lidar com esse caso.

PROBLEMAS

5.9 Seja $T = \{\langle M \rangle | \ M \text{ é uma } \mathsf{MT} \text{ que aceita } w^{\mathcal{R}} \text{ sempre que ela aceita } w\}$. Mostre que T é indecidível.

[R]**5.10** Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing de duas-fitas em algum momento escreve um símbolo não-branco sobre sua segunda fita quando ela é executada sobre a entrada w. Formule esse problema como uma linguagem, e mostre que ela é indecidível.

[R]**5.11** Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing de duas-fitas em algum momento escreve um símbolo não-branco sobre sua segunda fita durante o curso de sua computação sobre qualquer cadeia de entrada. Formule esse problema como uma linguagem, e mostre que ela é indecidível.

5.12 Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing de uma única-fita em algum momento escreve um símbolo um símbolo branco sobre um símbolo não-branco durante o curso de sua computação sobre qualquer cadeia. Formule esse problema como uma linguagem, e mostre que ela é indecidível.

5.13 Um ***estado inútil*** em uma máquina de Turing é um estado no qual a máquina nunca entra sobre qualquer que seja a entrada. Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing tem algum estado inútil. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ela é indecidível.

5.14 Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing M sobre uma entrada w em algum momento tenta mover sua cabeça para a esquerda quando sua cabeça está sobre a célula de fita mais à esquerda. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ela é indecidível.

5.15 Considere o problema de se determinar se uma máquina de Turing M sobre uma entrada w em algum momento tenta mover sua cabeça para a esquerda em algum ponto durante sua computação sobre w. Formule esse problema como uma linguagem e mostre que ela *é* decidível.

5.16 Seja $\Gamma = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \sqcup\}$ o alfabeto de fita para todas as MTs neste problema. Defina a ***busy beaver function*** $BB\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ as follows. For each value of k, consider all k-state MTs that halt when started with a blank tape. Let $BB(k)$ be the maximum number of 1s that remain on the tape among all of these machines. Show that BB is not a computable function.

5.17 Show that the Post Correspondence Problem is decidable over the unary alphabet $\Sigma = \{\mathtt{1}\}$.

5.18 Show that the Post Correspondence Problem is undecidable over the binary alphabet $\Sigma = \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$.

5.19 In the *silly Post Correspondence Problem*, *SPCP*, in each pair the top string has the same length as the bottom string. Show that the *SPCP* is decidable.

5.20 Prove that there exists an undecidable subset of $\{\mathtt{1}\}^*$.

5.21 Let $AMBIG_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is an ambiguous GLC}\}$. Show that $AMBIG_{\mathsf{GLC}}$ is undecidable. (Hint: Use a reduction from *PCP*. Given an instance

$$P = \left\{ \left[\frac{t_1}{b_1}\right], \left[\frac{t_2}{b_2}\right], \ \cdots\ , \left[\frac{t_k}{b_k}\right] \right\},$$

of the Post Correspondence Problem, construct a GLC G with the rules

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T \mid B \\ T &\rightarrow t_1 T \mathtt{a}_1 \mid \cdots \mid t_k T \mathtt{a}_k \mid t_1 \mathtt{a}_1 \mid \cdots \mid t_k \mathtt{a}_k \\ B &\rightarrow b_1 B \mathtt{a}_1 \mid \cdots \mid b_k B \mathtt{a}_k \mid b_1 \mathtt{a}_1 \mid \cdots \mid b_k \mathtt{a}_k \ , \end{aligned}$$

where $\mathtt{a}_1, \ldots, \mathtt{a}_k$ are new terminal symbols. Prove that this reduction works.)

5.22 Show that A is Turing-recognizable iff $A \leq_{\mathrm{m}} A_{\mathsf{MT}}$.

5.23 Show that A is decidable iff $A \leq_{\mathrm{m}} \mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$.

5.24 Let $J = \{w |$ either $w = \mathtt{0}x$ for some $x \in A_{\mathsf{MT}}$, or $w = \mathtt{1}y$ for some $y \in \overline{A_{\mathsf{MT}}}\ \}$. Show that neither J nor $\overline{J}$ is Turing-recognizable.

5.25 Give an example of an undecidable language B, where $B \leq_{\mathrm{m}} \overline{B}$.

5.26 Define a ***two-headed finite automaton*** (2AFD) to be a deterministic finite automaton that has two read-only, bidirectional heads that start at the left-hand end of the input tape and can be independently controlled to move in either direction. The tape of a 2AFD is finite and is just large enough to contain the input plus two additional blank tape cells, one on the left-hand end and one on the right-hand end, that serve as delimiters. A 2AFD accepts its input by entering a special accept state. For example, a 2AFD can recognize the language $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$.

- **a.** Let $A_{\mathsf{2AFD}} = \{\langle M, x\rangle \mid M$ is a 2AFD and M accepts $x\}$. Show that A_{2AFD} is decidable.
- **b.** Let $V_{\mathsf{2AFD}} = \{\langle M\rangle \mid M$ is a 2AFD and $L(M) = \emptyset\}$. Show that V_{2AFD} is not decidable.

5.27 A ***two-dimensional finite automaton*** (AFD-2DIM) is defined as follows. The input is an $m \times n$ rectangle, for any $m, n \geq 2$. The squares along the boundary of the rectangle contain the symbol # and the internal squares contain symbols over the input alphabet Σ. The transition function is a mapping $Q \times \Sigma \to Q \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}, \mathrm{U}, \mathrm{D}\}$ to indicate the next state and the new head position (Left, Right, Up, Down). The machine accepts when it enters one of the designated accept states. It rejects if it tries to move off the input rectangle or if it never halts. Two such machines are equivalent if they accept the same rectangles. Consider the problem of determining whether two of these machines are equivalent. Formulate this problem as a language, and show that it is undecidable.

R* **5.28** **Rice's theorem**. Let P be any nontrivial property of the language of a Turing machine. Prove that the problem of determining whether a given Turing machine's language has property P is undecidable.

In more formal terms, let P be a language consisting of Turing machine descriptions where P fulfills two conditions. First, P is nontrivial—it contains some, but not all, MT descriptions. Second, P is a property of the MT's language—whenever $L(M_1) = L(M_2)$, we have $\langle M_1\rangle \in P$ iff $\langle M_2\rangle \in P$. Here, M_1 and M_2 are any MTs. Prove that P is an undecidable language.

5.29 Show that both conditions in Problem 5.28 are necessary for proving that P is undecidable.

5.30 Use Rice's theorem, which appears in Problem 5.28, to prove the undecidability of each of the following languages.

- R **a.** $\mathit{INFINITA}_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid M$ is a MT and $L(M)$ is an infinite language$\}$.
- **b.** $\{\langle M\rangle \mid M$ is a MT and $\mathtt{1011} \in L(M)\}$.
- **c.** $\mathit{ALL}_{\mathsf{TM}} = \{\langle M\rangle \mid M$ is a MT and $L(M) = \Sigma^*\}$.

5.31 Let

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{for odd } x \\ x/2 & \text{for even } x \end{cases}$$

for any natural number x. If you start with an integer x and iterate f, you obtain a sequence, $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ Stop if you ever hit 1. For example, if $x = 17$, you get the sequence 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Extensive computer

tests have shown that every starting point between 1 and a large positive integer gives a sequence that ends in 1. But, the question of whether all positive starting points end up at 1 is unsolved; it is called the $3x + 1$ problem.

Suppose that A_{MT} were decidable by a MT H. Use H to describe a MT that is guaranteed to state the answer to the $3x + 1$ problem.

5.32 Prove that the following two languages are undecidable.

a. $\mathit{OVERLAP}_{\mathsf{GLC}} = \{\langle G, H\rangle |\ G \text{ and } H \text{ are GLCs where } L(G) \cap L(H) \neq \emptyset\}$. (Hint: Adapt the hint in Problem 5.21.)

b. $\mathit{PREFIX\text{-}FREE}_{\mathsf{GLC}} = \{G |\ G \text{ is a GLC where } L(G) \text{ is prefix-free}\}$.

5.33 Let $S = \{\langle M\rangle |\ M \text{ is a MT and } L(M) = \{\langle M\rangle\}\}$. Show that neither S nor $\overline{S}$ is Turing-recognizable.

5.34 Consider the problem of determining whether a AP accepts some string of the form $\{ww |\ w \in \{0,1\}^*\}$. Use the computation history method to show that this problem is undecidable.

5.35 Let $X = \{\langle M, w\rangle |\ M \text{ is a single-tape MT that never modifies the portion of the tape that contains the input } w\}$. Is X decidable? Prove your answer.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

5.5 Suppose for a contradiction that $A_{\mathsf{MT}} \leq_{\mathrm{m}} V_{\mathsf{MT}}$ via reduction f. It follows from the definition of mapping reducibility that $\overline{A_{\mathsf{MT}}} \leq_{\mathrm{m}} \overline{V_{\mathsf{MT}}}$ via the same reduction function f. However $\overline{V_{\mathsf{MT}}}$ is Turing-recognizable and $\overline{A_{\mathsf{MT}}}$ is not Turing-recognizable, contradicting Theorem 5.28.

5.6 Suppose $A \leq_{\mathrm{m}} B$ and $B \leq_{\mathrm{m}} C$. Then there are computable functions f and g such that $x \in A \iff f(x) \in B$ and $y \in B \iff g(y) \in C$. Consider the composition function $h(x) = g(f(x))$. We can build a MT that computes h as follows: First, simulate a MT for f (such a MT exists because we assumed that f is computable) on input x and call the output y. Then simulate a MT for g on y. The output is $h(x) = g(f(x))$. Therefore h is a computable function. Moreover, $x \in A \iff h(x) \in C$. Hence $A \leq_{\mathrm{m}} C$ via the reduction function h.

5.7 Suppose that $A \leq_{\mathrm{m}} \overline{A}$. Then $\overline{A} \leq_{\mathrm{m}} A$ via the same mapping reduction. Because A is Turing-recognizable, Theorem 5.28 implies that $\overline{A}$ is Turing-recognizable, and then Theorem 4.22 implies that A is decidable.

5.8 You need to handle the case where the head is at the leftmost tape cell and attempts to move left. To do so add dominos

$$\left[\frac{\#qa}{\#rb}\right]$$

for every $q, r \in Q$ and $a, b \in \Gamma$, where $\delta(q, a) = (r, b, \mathrm{E})$.

5.10 Let $B = \{\langle M, w\rangle | \ M$ is a two-tape MT which writes a nonblank symbol on its second tape when it is run on $w\}$. Show that A_{MT} reduces to B. Assume for the sake of contradiction that MT R decides B. Then construct MT S that uses R to decide A_{MT}.

$S =$ "On input $\langle M, w\rangle$:

1. Use M to construct the following two-tape MT T.
   $T =$ "On input x:
   1. Simulate M on x using the first tape.
   2. If the simulation shows that M accepts, write a nonblank symbol on the second tape."
2. Run R on $\langle T, w\rangle$ to determine whether T on input w writes a nonblank symbol on its second tape.
3. If R accepts, M accepts w, therefore *aceite*. Otherwise *rejeite*."

5.11 Let $C = \{\langle M\rangle | \ M$ is a two-tape MT which writes a nonblank symbol on its second tape when it is run on some input$\}$. Show that A_{MT} reduces to C. Assume for the sake of contradiction that MT R decides C. Construct MT S that uses R to decide A_{MT}.

$S =$ "On input $\langle M, w\rangle$:

1. Use M and w to construct the following two-tape MT T_w.
   $T_w =$ "On any input:
   1. Simulate M on w using the first tape.
   2. If the simulation shows that M accepts, write a nonblank symbol on the second tape."
2. Run R on $\langle T_w\rangle$ to determine whether T_w ever writes a nonblank symbol on its second tape.
3. If R accepts, M accepts w, therefore *aceite*. Otherwise *rejeite*."

5.28 Assume for the sake of contradiction that P is a decidable language satisfying the properties and let R_P be a MT that decides P. We show how to decide A_{MT} using R_P by constructing MT S. First let $T_\emptyset$ be a MT that always rejects, so $L(T_\emptyset) = \emptyset$. You may assume that $\langle T_\emptyset\rangle \notin P$ without loss of generality, because you could proceed with $\overline{P}$ instead of P if $\langle T_\emptyset\rangle \in P$. Because P is not trivial, there exists a MT T with $\langle T\rangle \in P$. Design S to decide A_{MT} using R_P's ability to distinguish between $T_\emptyset$ and T.

$S =$ "On input $\langle M, w\rangle$:

1. Use M and w to construct the following MT M_w.
   $M_w =$ "On input x:
   1. Simulate M on w. If it halts and rejects, *rejeite*.
      If it accepts, proceed to stage 2.
   2. Simulate T on x. If it accepts, *aceite*."
2. Use MT R_P to determine whether $\langle M_w\rangle \in P$. If YES, *aceite*.
   If NO, *rejeite*."

MT M_w simulates T if M accepts w. Hence $L(M_w)$ equals $L(T)$ if M accepts w and $\emptyset$ otherwise. Therefore $\langle M, w\rangle \in P$ iff M accepts w.

5.30 **(a)** *INFINITA*$_{\text{TM}}$ is a language of MT descriptions. It satisfies the two conditions of Rice's theorem. First, it is nontrivial because some MTs have infinite languages and others do not. Second, it depends only on the language. If two MTs recognize

the same language, either both have descriptions in $INFINITA_{TM}$ or neither do. Consequently, Rice's theorem implies that $INFINITA_{TM}$ is undecidable.

6

TÓPICOS AVANÇADOS EM TEORIA DA COMPUTABILIDADE

Neste capítulo mergulhamos em quatro aspectos mais profundos da teoria da computabilidade: (1) o teorema da recursão, (2) teorias lógicas, (3) Turing-redutibilidade, e (4) complexidade descritiva. O tópico coberto em cada seção é sobretudo independente dos outros, exceto uma aplicação do teorema da recursão no final da seção sobre teorias lógicas. A Parte Três deste livro não depende de nenhum material deste capítulo.

6.1 O TEOREMA DA RECURSÃO

O teorema da recursão é um resultado matemático que desempenha um importante papel em trabalhos avançados na teoria da computabilidade. Ele tem conexões com lógica matemática, com a teoria de sistemas auto-reprodutivos, e até com vírus de computador.

Para introduzir o teorema da recursão, consideramos um paradoxo que surge no estudo da vida. Concerne a possibilidade de se fazer máquinas que podem construir réplicas de si próprias. O paradoxo pode ser resumido da seguinte maneira.

1. Coisas vivas são máquinas.

2. Coisas vivas podem se auto-reproduzir.

3. Máquinas não podem se auto-reproduzir.

A afirmação 1 é um dogma da biologia moderna. Acreditamos que organismos operam de uma maneira mecanicista. A afirmação 2 é óbvia. A capacidade de se auto-reproduzir é uma característica essencial de toda espécie biológica.

Para a afirmação 3, fazemos a seguinte argumentação de que máquinas não podem se auto-reproduzir. Considere uma máquina que constrói outras máquinas, tais como uma fábrica automatizada que produz carros. Matéria-prima entra por um lado, os robôs-manufaturadores seguem um conjunto de instruções, e aí veículos prontos saem do outro lado.

Afirmamos que a fábrica tem que ser mais complexa que os carros produzidos, no sentido de que projetar a fábrica seria mais difícil que projetar um carro. Essa afirmação tem que ser verdadeira porque a própria fábrica tem o projeto do carro dentro dela, além do projeto de todos os robôs-manufaturadores. O mesmo raciocínio se aplica a qualquer máquina A que constrói uma máquina B: A tem que ser *more* complexa que B. But uma máquina não pode ser mais complexa que si própria. Conseqüentemente, nenhuma máquina pode construir a si mesma, e portanto auto-reprodução é impossível.

Como podemos resolver esse paradoxo? A resposta é simples: Afirmação 3 está incorreta. Fazer máquinas que se reproduzem a si próprias *é* possível. O teorema da recursão demonstra como.

AUTO-REFERÊNCIA

Vamos começar construindo uma máquina de Turing que ignora sua entrada e imprime uma cópia de sua própria descrição. Chamamos essa máquina $AUTO$. Para ajudar a descrever $AUTO$, precisamos do seguinte lema.

LEMA 6.1

Existe uma função computável $q\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, onde se w é uma cadeia qualquer, $q(w)$ é a descrição de uma máquina de Turing P_w que imprime w e aí pára.

PROVA Uma vez que entendemos o enunciado desse lema, a prova é fácil. Obviamente que podemos tomar qualquer cadeia w e construir a partir dela uma máquina de Turing que tem w construída numa tabela de modo que a máquina pode simplesmente dar como saída w quando iniciada. A seguinte MT Q computa $q(w)$.

Q = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Construa a seguinte máquina de Turing P_w.
   P_w = "Sobre qualquer entrada:
   1. Apague a entrada.
   2. Escreva w na fita.
   3. Pare."

2. Dê como saída $\langle P_w \rangle$."

A máquina de Turing $AUTO$ é em duas partes, A e B. Pensamos em A e B como sendo dois procedimentos separados que andam juntos para montar $AUTO$. Desejamos que $AUTO$ imprima $\langle AUTO\rangle = \langle AB\rangle$.

A parte A roda primeiro e após seu término passa o controle para B. A tarefa de A é imprimir uma descrição de B, e reciprocamente a tarefa de B é imprimir uma descrição de A. O resultado é a descrição desejada de $AUTO$. As tarefas são semelhantes, mas elas são desempenhadas diferentemente. Mostramos como obter a parte A primeiro.

Para A usamos a máquina $P_{\langle B\rangle}$, descrita por $q\big(\langle B\rangle\big)$, que é o resultado de se aplicar a função q a $\langle B\rangle$. Por conseguinte, a parte A é uma máquina de Turing que imprime $\langle B\rangle$. Nossa descrição de A depende de se ter uma descrição de B. Portanto não podemos completar a descrição de A até que construamos B.

Agora a parte B. Poderíamos ser tentados a definir B com $q\big(\langle A\rangle\big)$, mas isso não faz sentido! Fazendo isso definir-se-ia B em termos de A, que por sua vez é definida em termos de B. Isso seria uma definição *circular* de um objeto em termos de si próprio, uma transgressão lógica. Ao invés disso, definimos B de modo que ela imprime A usando uma estratégia diferente: B *computa* A a partir da saída que A produz.

Definimos $\langle A\rangle$ como sendo $q\big(\langle B\rangle\big)$. Agora vem a parte complicada: Se B pode obter $\langle B\rangle$, ela pode aplicar q a essa última e obter $\langle A\rangle$. Mas como é que B obtém $\langle B\rangle$? Foi deixado na fita quando A terminou! Portanto B somente precisa de olhar para a fita para obter $\langle B\rangle$. Aí então depois que B computa $q\big(\langle B\rangle\big) = \langle A\rangle$, ela combina A e B em uma única máquina e escreve sua descrição $\langle AB\rangle = \langle AUTO\rangle$ na fita. Em resumo, temos:

$A = P_{\langle B\rangle}$, e

$B =$ "Sobre a entrada $\langle M\rangle$, onde M é uma porção de uma MT:

1. Compute $q\big(\langle M\rangle\big)$.
2. Combine o resultado com $\langle M\rangle$ para montar uma MT completa.
3. Imprima a descrição dessa MT e pare."

Isso completa a construção de $AUTO$, para a qual um diagrama esquemático é apresentado na figura seguinte.

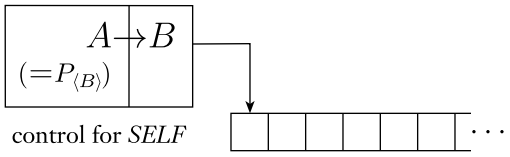


FIGURA 6.2
Diagrama esquemático de $AUTO$, uma MT que imprime sua própria descrição

Se agora rodarmos $AUTO$ observamos o seguinte comportamento.

1. Primeiro A roda. Ela imprime $\langle B \rangle$ na fita.
2. B começa. Ela olha para a fita e encontra sua entrada, $\langle B \rangle$.
3. B calcula $q(\langle B \rangle) = \langle A \rangle$ e combina isso com $\langle B \rangle$ na descrição de uma MT, $\langle AUTO \rangle$.
4. B imprime essa descrição e pára.

Podemos facilmente implementar essa construção em qualquer linguagem de programação para obter um programa que dá como saída uma cópia de si mesmo. Podemos até fazer isso em português pleno. Suponha que desejemos dar uma sentença em português que manda o leitor imprimir uma cópia da mesma sentença. Uma maneira de fazer isso é dizer:

Imprima esta sentença.

Essa sentença tem o significado desejado porque ela direciona o leitor para imprimir uma cópia da própria sentença. Entretanto, ela não tem uma tradução óbvia em uma linguagem de programação porque a palavra auto-referencial "esta" na sentença usualmente não tem countrapartida. Mas nenhuma auto-referência é necessária para fazer tal sentença. Considere a seguinte alternativa.

Imprima duas cópias do seguinte, a segunda entre aspas:
"Imprima duas cópias do seguinte, a segunda entre aspas:"

Nessa sentença, a auto-referência é substituída pela mesma construção usada para fazer a MT $AUTO$. Parte B da construção é a cláusula:

Imprima duas cópias do seguinte, a segunda entre aspas:

Parte A é a mesma coisa, com aspas em torno dela. A provê uma cópia de B para B de modo que B pode processar aquela cópia como a MT o faz.

O teorema da recursão provê a capacidade de implementar o auto-referencial *esse* em qualquer linguagem de programação. Com ele, qualquer programa tem a capacidade de se referir a sua própria descrição, que tem certas aplicações, como você verá. Antes de chegar a isso enunciamos o próprio teorema da recursão. O teorema da recursão estende a técnica que usamos ao construir $AUTO$ de modo que um programa possa obter sua própria descrição e então prossegue

para computar com ela, ao invés de simplesmente imprimí-la.

TEOREMA 6.3

Teorema da recursão Seja T uma máquina de Turing que computa uma função $t\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$. Existe uma máquina de Turing R que computa uma função $r\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, onde para toda w,

$$r(w) = t\big(\langle R\rangle, w\big).$$

O enunciado desse teorema parece um pouco técnico, mas ele na verdade representa algo bastante simples. Para montar uma máquina de Turing que pode obter sua própria descrição e então computa com ela, precisamos apenas de montar uma máquina, chamada T no enunciado, que recebe a descrição da máquina como uma entrada extra. Então o teorema da recursão produz uma nova máquina R, que opera exatamente como T o faz mas com a descrição de R preenchida automaticamente.

PROVA A prova é semelhante à construção de $AUTO$. Construímos uma MT R nas três partes, A, B, e T, onde T é dada pelo enunciado do teorema; um diagrama esquemático é apresentado na figura seguinte.

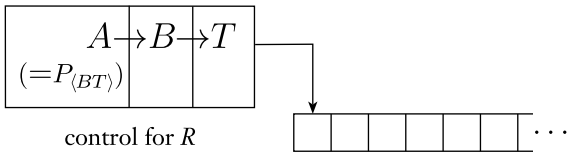


FIGURA 6.4
Esquema de R

Aqui, A é a máquina de Turing $P_{\langle BT\rangle}$ descrita por $q\big(\langle BT\rangle\big)$. Para preservar a entrada w, redesenhamos q de modo que $P_{\langle BT\rangle}$ escreve sua saída seguindo qualquer cadeia pré-existente na fita. Depois que A roda, a fita contém $w\langle BT\rangle$.

Novamente, B é um procedimento que examina sua fita e aplica q a seu conteúdo. O resultado é $\langle A\rangle$. Aí então B combina A, B, e T em uma única máquina e obtém sua descrição $\langle ABT\rangle = \langle R\rangle$. Finalmente, ele codifica essa descrição juntamente com w, coloca a cadeia resultante $\langle R, w\rangle$ na fita, e passa o controle para T.

TERMINOLOGIA PARA O TEOREMA DA RECURSÃO

O teorema da recursão afirma que máquinas de Turing podem obter sua própria descrição e aí então prosseguir para computar com ela. À primeira vista essa capacidade pode parecer útil somente para tarefas frívolas tais como montar uma máquina que imprime uma cópia de si mesma. Mas, como demonstramos, o teorema da recursão é uma ferramenta útil para resolver certos problemas relativos à teoria de algoritmos.

Você pode usar o teorema da recursão da seguinte maneira quando está projetando algoritmos para máquinas de Turing. Se você está projetando uma máquina M, você pode incluir a frase "obtenha a própria descrição $\langle M \rangle$" na descrição informal do algoritmo de M. Tendo obtido sua própria descrição, M pode então prosseguir para usá-la como ela usaria qualquer outro valor computado. Por exemplo, M poderia simplesmente imprimir $\langle M \rangle$ como acontece na MT $AUTO$, ou ela poderia contar o número de estados em $\langle M \rangle$, ou possivelmente até simular $\langle M \rangle$. Para ilustrar esse método usamos o teorema da recursão para descrever a máquina $AUTO$.

$AUTO =$ "Sobre qualquer entrada:

1. Obtenha, através do teorema da recursão, a própria descrição $\langle AUTO \rangle$.
2. Imprima $\langle AUTO \rangle$."

O teorema da recursão mostra como implementar a construção "obtenha a própria descrição". Para produzir a máquina $AUTO$, primeiro escrevemos a seguinte máquina T.

$T =$ "Sobre a entrada $\langle M, w \rangle$:

1. Imprima $\langle M \rangle$ e pare."

A MT T recebe uma descrição de uma MT M e uma cadeia w como entrada, e ela imprime a descrição de M. Então o teorema da recursão mostra como obter uma MT R, que sobre a entrada w, opera como T sobre a entrada $\langle R, w \rangle$. Por conseguinte, R imprime a descrição de R, exatamente o que é requerido da máquina $AUTO$.

APLICAÇÕES

Um ***vírus de computador*** é um programa de computador que é projetado para se espalhar entre computadores. Habilmente denominado, ele tem muito em comum com um vírus biológico. Vírus de computador estão inativos quando se encontram sozinhos como uma peça de código, mas quando colocados apropriadamente em um computador hospedeiro, dessa forma "infectando-o", eles se tornam ativos e transmitem cópias de si próprios para outras máquinas acessíveis. Vários meios podem transmitir vírus, incluindo a Internet e discos transferíveis. De modo a realizar sua tarefa principal de auto-replicação, um vírus pode conter a construção descrita na prova do teorema da recursão.

Vamos agora considerar três teoremas cujas provas usam o teorema da re-

cursão. Uma aplicação adicional aparece na prova do Teorema 6.17 na Seção 6.2.

Primeiro retornamos à prova da indecidibilidade de A_{MT}. Relembremos que antes o provamos no Teorema 4.11, usando o método da diagonal de Cantor. O teorema da recursão nos dá uma prova nova e mais simples.

TEOREMA 6.5

A_{MT} é indecidível.

PROVA Assumimos que a máquina de Turing H decide A_{MT}, para os propósitos de se obter uma contradição. Construímos a seguinte máquina B.

$B =$ "Sobre a entrada w:

1. Obtenha, através do teorema da recursão, sua própria descrição $\langle B \rangle$.
2. Rode H sobre a entrada $\langle B, w \rangle$.
3. Faça o oposto do que H diz. Ou seja, *aceite* se H rejeita e *rejeite* se H aceita."

Rodar B sobre a entrada w faz o oposto do que H declara que faz. Por conseguinte, H não pode estar decidindo A_{MT}. Feito!

O teorema seguinte relativo a máquinas de Turing mínimas é uma outra aplicação do teorema da recursão.

DEFINIÇÃO 6.6

Se M é uma máquina de Turing, então dizemos que o *comprimento* da descrição $\langle M \rangle$ de M é o número de símbolos na cadeia descrevendo M. Digamos que M é ***mínima*** se não existe máquina de Turing equivalente a M que tenha uma descrição mais curta. Seja

$$MIN_{\mathsf{MT}} = \{\langle M \rangle | \ M \text{ é uma } \mathsf{MT} \text{ mínima}\}.$$

TEOREMA 6.7

MIN_{MT} não é Turing-reconhecível.

PROVA Assuma que alguma MT E enumera MIN_{MT} e obtenha uma contradição. Construímos a seguinte MT C.

$C =$ "Sobre a entrada w:

1. Obtnha, através do teorema da recursão, sua própria descrição $\langle C \rangle$.

2. Rode o enumerador E até que uma máquina D apareça com uma descrição mais longa do que aquela de C.
3. Simule D sobre a entrada w."

Devido ao fato de que MIN_{MT} é infinita, a lista de E tem que conter uma MT com uma descrição mais longa que a descrição de C. Por conseguinte, o passo 2 de C em algum momento termina com alguma MT D que mais longa que C. Aí então C simula D e portanto é equivalente a ela. Devido ao fato de que C é mais curta que D e é equivalente a ela, D não pode ser mínima. Mas D aparece na lista que E produz. Por conseguinte, temos uma contradição.

Nossa última aplicação do teorema da recursão é um tipo de teorema do ponto-fixo. Um ***ponto fixo*** de uma função é um valor que não é modificado pela aplicação da função. Nesse caso consideramos funções que são transformações computáveis de descrições de máquinas de Turing. Mostramos que para qualquer transformação dessa alguma máquina de Turing exist cujo comportamento não é modificado pela transformação. Esse teorema é às vezes chamado a versão do ponto-fixo do teorema da recursão.

TEOREMA 6.8

Seja $t\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ uma função computável. Então existe uma máquina de Turing F para a qual $t\big(\langle F\rangle\big)$ descreve uma máquina de Turing equivalente a F. Aqui assumiremos que se a cadeia não for uma codificação legítima de uma máquina de Turing, ela descreve uma máquina de Turing que sempre rejeita imediatamente.

Nesse teorema, t desempenha o papel da transformação, e F é o ponto fixo.

PROVA Seja F a seguinte máquina de Turing.

$F =$ "Sobre a entrada w:
1. Obtenha, através do teorema da recursão, sua própria descrição $\langle F\rangle$.
2. Compute $t\big(\langle F\rangle\big)$ para obter a descrição de uma MT G.
3. Simule G sobre w."

Claramente, $\langle F\rangle$ e $t\big(\langle F\rangle\big) = \langle G\rangle$ descrevem máquinas de Turing equivalentes porque F simula G.

6.2 DECIDIBILIDADE DE TEORIAS LÓGICAS

Lógica matemática é o ramo da matemática que investiga a própria matemática. Ela lida com questões tais como: O que é um teorema? O que é uma prova? O que é verdade? Um algoritmo pode decidir quais enunciados são verdadeiros? Todos os enunciados verdadeiros são demonstráveis? Tocaremos em uns poucos desses tópicos em nossa breve introdução a esse rico e fascinante assunto.

Enfocaremos o problema de se determinar se enunciados matemáticos são verdadeiros ou falsos e investigaremos a decidibilidade desse problema. A resposta depende do domínio da matemática a partir dos quais os enunciados são obtidos. Examinamos dois domínios: um para o qual podemos dar um algoritmo para decidir a verdade e um outro para o qual esse problema é indecidível.

Primeiro precisamos fixar uma linguagem precisa para formular esses problemas. Nossa intenção é ser capaz de considerar enunciados matemáticos tais como

1. $\forall q\, \exists p \forall x,y\, \left[\, p{>}q \wedge (x,y{>}1 \rightarrow xy{\neq}p) \,\right]$,
2. $\forall a,b,c,n\, \left[(a,b,c{>}0 \wedge n{>}2) \rightarrow a^n{+}b^n{\neq}c^n \,\right]$, and
3. $\forall q\, \exists p \forall x,y\, \left[p{>}q \wedge (x,y{>}1 \rightarrow (xy{\neq}p \wedge xy{\neq}p{+}2)) \,\right]$.

Enunciado 1 diz que that uma quantidade infinita de números primos existe, o que sabe-se que é verdadeiro desde o tempo de Euclides, cerca de 2.300 nos atrás. Enunciado 2 é o *último teorema de Fermat*, que sabe-se ser verdadeiro somente desde que Andrew Wiles o provou alguns anos atrás. Finalmente, enunciado 3 diz que uma quantidade infinita de pares primos[1] existe. Conhecida como a *conjectura dos pares gêmeos*, ela permanece sem solução.

Para considerar se poderíamos automatizar o processo de se determinar quais desses enunciados são verdadeiros, tratamos tais enunciados meramente como cadeias e definimos uma linguagem consistindo daqueles enunciados que são verdadeiros. Aí então perguntamos se essa linguagem é decidível.

Para tornar isso um pouco mais preciso, vamos descrever a forma do alfabeto dessa linguagem:

$$\{\wedge, \vee, \neg, (,), \forall, x, \exists, R_1, \ldots, R_k\}.$$

Os símbolos $\wedge$, $\vee$, e $\neg$, são chamados ***operações booleanas***; "(" e ")" são os ***parênteses***; os símbolos $\forall$ e $\exists$ são chamados ***quantificadores***; o símbolo x é usado para denotar ***variáveis***;[2] e os símbolos $R_1, \ldots, R_l$ são chamados ***relações***.

---

[1] ***Pares primos*** são primos cuja diferença é 2.

[2] Se precisarmos escrever diversas variáveis em uma fórmula, usamos os símbolos w, y, z, ou x_1, x_2, x_3, e assim por diante. Não listamos todas as variáveis possíveis, em número infinito, no alfabeto para manter o alfabeto finito. Ao invés, listamos somente o símbolo de variável x, e usamos cadeias de x's para indicar outras variáveis, como em xx para x_2, xxx para x_3, e assim por diante.

Uma ***fórmula*** é uma cadeia bem-formada sobre esse alfabeto. Para completude, esboçaremos a definição técnica porém óbvia de uma ***fórmula bem-formada*** aqui, mas sinta-se livre para pular esta parte e prosseguir para o próximo parágrafo. Uma cadeia da forma $R_i(x_1, \ldots, x_j)$ é uma ***órmula atômica***. O valor j é a ***aridade*** do símbolo de relação R_i. Todas as ocorrências do mesmo símbolo de relação em uma fórmula bem-formada tem a mesma aridade. Sujeito a esse requisito uma cadeia ϕ é uma fórmula se ela

1. é uma fórmula atômica,
2. tem a forma $\phi_1 \wedge \phi_2$ ou $\phi_1 \vee \phi_2$ ou $\neg\phi_1$, onde ϕ_1 e ϕ_2 são fórmulas menores, ou
3. tem a forma $\exists x_i\, [\, \phi_1 \,]$ ou $\forall x_i\, [\, \phi_1 \,]$, onde ϕ_1 é uma fórmula menor.

Um quantificador pode aparecer em qualquer lugar em um enunciado matemático. Seu ***escopo*** é o fragmento do enunciado que aparece dentro do par de parênteses ou colchetes emparelhados após a variável quantificada. Assumimos que todas as fórmulas estão na ***forma normal prenex***, onde todos os quantificadores aparecem na frente da fórmula. Uma variável que não está ligada dentro do escopo de um quantificador é chamada uma ***variável livre***. Uma fórmula sem variáveis livres é chamada uma ***sentença*** ou ***enunciado***.

EXEMPLO 6.9

Entre os seguintes exemplos de fórmulas, somente a última é uma sentença.

1. $R_1(x_1) \wedge R_2(x_1, x_2, x_3)$
2. $\forall x_1 \left[R_1(x_1) \wedge R_2(x_1, x_2, x_3) \right]$
3. $\forall x_1\, \exists x_2\, \exists x_3 \left[R_1(x_1) \wedge R_2(x_1, x_2, x_3) \right]$.

Tendo estabelecido a sintaxe de fórmulas, vamos discutir seus significados. As operações booleanas e os quantificadores têm seus significados usuais, mas determinar o significado das variáveis e símbolos de relação precisamos especificar dois itens. Um é o ***universo*** sobre o qual os variáveis pode tomar valores. O outro é uma atribuição de relações específicas aos símbolos de relação. Conforme descrevemos na Seção 0.2 (página 9), uma relação é uma função de k-uplas sobre o universo para $\{\text{VERDADEIRO}, \text{FALSO}\}$. A aridade de um símbolo de relação tem que casar com aquela de sua relação atribuída.

Um universo juntamente com uma atribuição de relações a símbolos de relação é chamado um ***modelo***.[3] Formalmente dizemos que um modelo $\mathcal{M}$ é uma upla $(U, P_1, \ldots, P_k)$, onde U é o universo e P_1 até P_k são as relações atribuídas a símbolos R_1 até R_k. Às vezes nos referimos à ***linguagem de um modelo*** como sendo a coleção de fórmulas que usam somente os símbolos de relação que o modelo atribui e que usam cada símbolo de relação com a aridade correta. Se ϕ é uma sentença na linguagem de um modelo, ϕ é ou verdadeira ou

[3] Um modelo é também variavelmente chamado uma ***interpretação*** ou uma ***estrutura***.

falsa naquele modelo. Se ϕ é verdadeira em um modelo $\mathcal{M}$, dizemos que $\mathcal{M}$ é um modelo de ϕ.

Se você se sente inundado por essas definições, concentre-se em nosso objetivo em enunciá-los. Desejamos fixar uma linguagem precisa de enunciados matemáticos de modo que possamos perguntar se um algoritmo pode determinar quais são verdadeiros e quais são falsos. Os dois seguintes exemplos devem ajudar.

EXEMPLO 6.10

Seja ϕ a sentença $\forall x \forall y \left[R_1(x, y) \vee R_1(y, x) \right]$. Suponha que $\mathcal{M}_1 = (\mathcal{N}, \leq)$ seja o modelo cujo universo é o conjunto dos números naturais e que atribui a relação "menor ou igual" ao símbolo R_1. Obviamente, ϕ é verdadeiro no modelo $\mathcal{M}_1$ porque ou $a \leq b$ ou $b \leq a$ para quaisquer dois números naturais a e b. Entretanto, se $\mathcal{M}_1$ atribuiu "menor que" ao invés de "menor our igual" a R_1, então ϕ não seria verdadeiro porque falha quando x e y são iguais.

Se sabemos de antemão qual relação será atribuída a R_i, podemos usar o símbolo costumeiro para aquela relação no lugar de de R_i com notação infixa ao invés da notação prefixa se for o usual para aquele símbolo. Portanto com o modelo $\mathcal{M}_1$ em mente, poderíamos escrever ϕ como $\forall x \forall y \left[x \leq y \vee y \leq x \right]$. ∎

EXEMPLO 6.11

Agora suponha que $\mathcal{M}_2$ seja o modelo cujo universo é o conjunto dos números reais $\mathcal{R}$ e que atribui a relação *MAIS* a R_1, onde $\mathit{MAIS}(a, b, c) = \text{VERDADEIRO}$ sempre que $a + b = c$. Então $\mathcal{M}_2$ é um modelo de $\psi = \forall y \exists x \left[R_1(x, x, y) \right]$. Entretanto, se $\mathcal{N}$ fosse usado para o universo ao invés de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{M}_2$, a sentença seria falsa.

Como no Exemplo 6.10, podemos escrever ψ como $\forall y \exists x \left[x + x = y \right]$ no lugar de $\forall y \exists x \left[R_1(x, x, y) \right]$ quando sabemos de antemão que estaremos atribuindo a relação de adição a R_1. ∎

Como o Exemplo 6.11 ilustra, podemos representar funções tais como a função adição por relações. Igualmente, podemos representar constantes tais como 0 e 1 por relações.

Agora damos uma definição final em preparação para a próxima seção. Se $\mathcal{M}$ é um modelo, fazemos com que a ***teoria de*** $\mathcal{M}$, escrita $\text{Th}(\mathcal{M})$, seja a coleção de sentenças verdadeiras na linguagem daquele modelo.

UMA TEORIA DECIDÍVEL

Teoria dos números é uma dos ramos mais antigos da matemática e também um dos mais difíceis. Muitos enunciados aparentemente inocentes sobre os números naturais com as operações de mais e vezes têm confundido matemáticos durante séculos, tais como a conjectura dos primos gêmeos mencionada anteriormente.

Em um dos desenvolvimentos célebres em lógica matemática, Alonzo Church, tomando por base o trabalho de de Kurt Gödel, mostrou que nenhum

algorithm pode decidir em geral se enunciados em teoria dos números são verdadeiros ou falsos. Formalmente, escrevemos $(\mathcal{N}, +, \times)$ como sendo o modelo cujo universo é o conjunto dos números naturais[4] com as relações usuais $+$ e $\times$. Church mostrou que $\text{Th}(\mathcal{N}, +, \times)$, a teoria desse modelo, é indecidível.

Antes de olhar para essa teoria indecidível, vamos examinar uma que é decidível. Seja $(\mathcal{N}, +)$ o mesmo modelo, sem a relação $\times$. Sua teoria é $\text{Th}(\mathcal{N}, +)$. Por exemplo, a fórmula $\forall x \, \exists y \, [\, x + x = y \,]$ é verdadeira e é portanto um membro de $\text{Th}(\mathcal{N}, +)$, mas a fórmula $\exists y \forall x \, [\, x + x = y \,]$ é falsa e portanto não é um membro.

TEOREMA 6.12

$\text{Th}(\mathcal{N}, +)$ é decidível.

IDÉIA DA PROVA Esta prova é uma aplicação interessante e não-trivial da teoria dos autômatos finitos que apresentamos no Capítulo 1. Um fato sobre autômatos finitos que usamos aparece no Problema 1.32 (página 93) onde lhe foi pedido para mostrar que eles são capazes de fazer adição se a entrada for apresentada numa forma especial. A entrada descreve três números em paralelo, representando um bit de cada número em um único símbolo de um alfabeto de oito símbolos. Aqui usamos uma generalização desse método para apresentar i-uplas de números em paralelo usando um alfabeto com 2^i símbolos.

Damos um algoritmo que pode determinar se sua entrada, uma sentença ϕ na linguagem de $(\mathcal{N}, +)$, é verdadeira naquele modelo. Seja

$$\phi = \mathsf{Q}_1 x_1 \, \mathsf{Q}_2 x_2 \cdots \mathsf{Q}_l x_l \, [\, \psi \,],$$

onde $\mathsf{Q}_1, \ldots, \mathsf{Q}_l$ cada um representa $\exists$ ou $\forall$ e ψ é uma fórmula sem quantificadores que tem variáveis $x_1, \ldots, x_l$. Para cada i de 0 a l, defina a fórmula ϕ_i como sendo

$$\phi_i = \mathsf{Q}_{i+1} x_{i+1} \, \mathsf{Q}_{i+2} x_{i+2} \cdots \mathsf{Q}_l x_l \, [\, \psi \,].$$

Portanto $\phi_0 = \phi$ e $\phi_l = \psi$.

A fórmula ϕ_i tem i variáveis livres. Para $a_1, \ldots, a_i \in \mathcal{N}$ escreva $\phi_i(a_1, \ldots, a_i)$ como sendo a sentença obtida após substituir as variáveis $x_1, \ldots, x_i$ pelas constantes $a_1, \ldots, a_i$ em ϕ_i.

Para cada i de 0 a l, o algoritmo constrói um autômato finito A_i que reconhece a coleção de cadeias representando i-uplas de números que tornam ϕ_i verdadeira. O algoritmo começa construindo A_l diretamente, usando uma generalização do método na solução para o Problema 1.32. Aí então, para cada i de l para 1, ele usa A_i para construir A_{i-1}. Finalmente, uma vez que o algoritmo tem A_0, ele testa se A_0 aceita a cadeia vazia. Se aceita, ϕ é verdadeira e o algoritmo aceita.

[4]Por conveniência neste capítulo, mudamos nossa definição usual de $\mathcal{N}$ para $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

PROVA Para $i > 0$ defina o alfabeto

$$\Sigma_i = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Donde Σ_i contém todas as colunas de tamanho i de 0s e 1s. Uma cadeia sobre Σ_i representa i inteiros binários (lendo pelas linhas). Também definimos $\Sigma_0 = \{[\,]\}$, onde $[\,]$ is a symbol.

Agora apresentamos um algoritmo que decide $\mathrm{Th}(\mathcal{N}, +)$. Sobre a entrada ϕ onde ϕ é uma sentença, o algoritmo opera da seguinte maneira. Escreva ϕ e defina ϕ_i para cada i de 0 para l, como na idéia da prova. Para cada i desses construa um autômato finito A_i a partir de ϕ_i que aceita cadeias sobre Σ_i^* correspondentes a i-uplas $a_1, \ldots, a_i$ sempre que $\phi_i(a_1, \ldots, a_i)$ é verdadeira, como se segue.

Para construir a primeira máquina A_l, observe que $\phi_l = \psi$ é uma combinação booleana de fórmulas atômicas. Uma fórmula atômica na linguagem de $\mathrm{Th}(\mathcal{N}, +)$ é uma única adição. Autômatos finitos podem ser construídos para computar quaisquer dessas relações específicas correspondendo a uma única relação e aí combinadas para dar o autômato A_l. Fazer isso envolve o uso das construções de fecho de linguagem regular para união, interseção, e complementação para computar combinações da fórmula atômica.

A seguir, mostramos como construir A_i a partir de A_{i+1}. Se $\phi_i = \exists x_{i+1}\ \phi_{i+1}$, construímos A_i para operar como A_{i+1} opera, exceto que ele não-deterministicamente adivinha o valor de a_{i+1} ao invés de receb-lo como parte da entrada.

Mais precisamente, A_i contém um estado para cada estado de A_{i+1} e um novo estado inicial. Toda vez que A_i lê um símbolo

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ b_i \end{bmatrix},$$

onde todo $b_i \in \{0,1\}$ é um bit do número a_i, ele não-deterministicamente adivinha $z \in \{0,1\}$ e simula A_{i+1} sobre o símbolo de entrada

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \\ b_i \\ z \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, A_i não-deterministicamente adivinha os bits à esquerda de z correspondentes aos 0s à esquerda suprimidos em b_1 até b_i ramificando não-deterministicamente de seu novo estado inicial para todos os estados que A_{i+1} poderia atingir a partir do seu estado inicial com cadeias de entrada dos símbolos

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

em Σ_{i+1}. Claramente, A_i aceita sua entrada $(a_1, \ldots, a_i)$ se algum a_{i+1} existe

onde A_{i+1} aceita $(a_1, \ldots, a_{i+1})$.

Se $\phi_i = \forall x_{i+1}\ \phi_{i+1}$, ela é is equivalente a $\neg\exists x_{i+1}\neg\ \phi_{i+1}$. Por conseguitne podemos construir o autômato finito que reconhece o complemento da linguagem de A_{i+1}, e aí então aplicar a construção precedente para o quantificador existencial $\exists$, e finalmente aplicar a complementação uma vez mais para obter A_i.

O autômato finito A_0 aceita qualquer entrada sse ϕ_0 é verdadeiro. Portanto o passo final do algoritmo testa se A_0 aceita ε. Se aceita, ϕ é verdadeiro e o algoritmo aceita; caso contrário, rejeita.

UMA TEORIA INDECIDÍVEL

Conforme mencionamos anteriormente, $\text{Th}(\mathcal{N}, +, \times)$ é uma teoria indecidível. Nenhum algoritmo existe para decidir a veracidade ou falsidade de enunciados matemáticos, mesmo quando restrito à linguagem de $(\mathcal{N}, +, \times)$. Esse teorema tem grande importância filosoficamente porque ele demonstra que a matemática não pode ser mecanizada. Enunciamos esse teorema, mas damos somente um breve esboço de sua prova.

TEOREMA 6.13

$\text{Th}(\mathcal{N}, +, \times)$ é indecidível.

Embora contenha muitos detalhes, a prova desse teorema não é difícil conceitualmente. Ela segue o padrão das outras provas de uidecidibilidade apresentadas no Capítulo 4. Mostramos que $\text{Th}(\mathcal{N}, +, \times)$ é indecidível reduzindo A_{MT} para ele, usando o método da história de computação como descrito previamente (página 205). A existência da redução depende do seguinte lema.

LEMA 6.14

Seja M uma máquina de Turing e w uma cadeia. Podemos construir a partir de M e w uma fórmula $\phi_{M,w}$ na linguagem de $\text{Th}(\mathcal{N}, +, \times)$ que contém uma única variável livre x, através da qual a sentença $\exists x\ \phi_{M,w}$ é verdadeira sse M aceita w.

IDÉIA DA PROVA A fórmula $\phi_{M,w}$ "diz" que x é uma história de computação de aceitação (apropriadamente codificada) de M sobre w. Obviamente, x na verdade é apenas um inteiro bastante grande, mas ele representa uma história de computação em uma forma que pode ser verificada usando as operações $+$ e $\times$.

A real construção de $\phi_{M,w}$ é demasiado complicada para apresentar aqui. Ela extrai símbolos individuais na história da computação com as operações $+$ e $\times$ para verificar: a configuração inicial para M sobre w; que cada configuração legitimamente segue daquela que a precede; e finalmente que a última configuração é de aceitação.

PROOF OF THEOREM 6.13 Damos uma redução por mapeamento a partir de A_{MT} para $\text{Th}(\mathcal{N}, +, \times)$. A redução constrói a fórmula $\phi_{M,w}$ a partir da entrada $\langle M, w \rangle$, usando o Lema 6.14. Aí então ela dá como saída a sentença $\exists x\ \phi_{M,w}$.

A seguir, esboçamos a prova do celebrado *incompleteness theorem* de Kurt Gödel. Informalmente, esse teorema diz que, em qualquer sistema razoável de formalização da noção de demonstrabilidade em teoria dos números, alguns enunciados verdadeiros são indemonstráveis.

Frouxamente falando, a ***prova formal*** π de um enunciado ϕ é uma seqüência de enunciados, $S_1, S_2, \ldots, S_l$, onde $S_l = \phi$. Cada S_i segue dos enunciados precedentes e certos axiomas básicos sobre números, usando regras simples e precisas de implicação. Não temos espaço para definir o conceito de prova, mas para nossos propósitos assumir que as duas propriedades razoáveis seguintes será suficiente.

1. A corretude de uma prova de um enunciado pode ser verificada por uma máquina. Formalmente, $\{\langle \phi, \pi \rangle \mid \pi \text{ é uma prova de que } \phi\}$ é decidível.
2. O sistema de provas é *seguro*. Ou seja, se um enunciado é demonstrável (i.e., tem uma prova), ele é verdadeiro.

Se um sistema de demonstrabilidade satisfaz essas duas condições, os três seguintes teoremas se verificam.

TEOREMA 6.15

A coleção de enunciados demonstráveis em $\text{Th}(\mathcal{N}, +, \times)$ é Turing-reconhecível.

PROVA O seguinte algoritmo P aceita sua entrada ϕ se ϕ é demonstrável. O algoritmo P testa cada cadeia como um candidato a uma prova π de ϕ, usando o verificador de provas suposto existir na propriedade de demonstrabilidade 1. Se ele encontra que quaisquer desses candidatos é um prova, ele aceita.

Agora podemos usar o teorema precedente para provar nossa versão do teorema da incompletude.

TEOREMA 6.16

Algum enunciado verdadeiro em $\text{Th}(\mathcal{N}, +, \times)$ não é demonstrável.

PROVA Damos uma prova por contradição. Assumimos ao contrário que todos os enunciados verdadeiros são demonstráveis. Usando essa suposição, descrevemos um algoritmo D que decide se enunciados são verdadeiros, contradizendo o Teorema 6.13.

Sobre a entrada ϕ o algoritmo D opera rodando o algorithm P dado na prova do Teorema 6.15 em paralelo sobre as entradas ϕ e $\neg\phi$. Um desses dois enunciados é verdadeiro e portanto devido a nossa suposição é demonstrável. Por conseguinte, P tem que parar quando roda sobre uma das duas entradas. Pela propriedade da demonstrabilidade 2, se ϕ é demonstrável, então ϕ é verdadeiro, e se $\neg\phi$ é demonstrável, então ϕ é falso. Portanto o algoritmo D pode decidir a veracidade ou falsidade de ϕ.

No teorema final desta seção usamos o teorema da recursão para dar uma sentença explícita na linguagem de $(\mathcal{N}, +, \times)$ que é verdadeira mas não demonstrável. No Teorema 6.16 demonstramos a existência de tal sentença mas não descrevemos verdadeiramente uma, como o fazemos agora.

TEOREMA 6.17

A sentença $\psi_{\text{indemonstravel}}$, conforme descrita na prova deste teorema, é indemonstrável.

IDÉIA DA PROVA Construa uma sentença que diz: "Esta sentença não é demonstrável," usando o teorema da recursão para obter a auto-referência.

PROVA Seja S uma MT que opera da seguinte forma.

$S =$ "Sobre qualquer entrada:

1. Obtenha a própria descrição $\langle S \rangle$ através do teorema da recursão.
2. Construa a sentença $\psi = \neg\exists c \left[\phi_{S,0} \right]$, usando o Lema 6.14.
3. Rode o algoritmo P a partir da prova do Teorema 6.15 sobre a entrada ψ.
4. Se o estágio 3 aceita, *aceite*. Se ele pára e rejeita, *rejeite*."

Seja $\psi_{\text{indemonstravel}}$ a sentença ψ descrita no estágio 2 do algoritmo S. Aquela sentença é verdadeira sse S não aceita `0` (a cadeia `0` foi selecionada arbitrariamente).

Se S encontra uma prova de $\psi_{\text{indemonstravel}}$, S aceita `0`, e a sentença seria portanto falsa. Uma senteça falsa não pode ser demonstrável, portanto essa situação não pode ocorrer. A única possibilidade remanescente é que S falha em encontrar uma prova de $\psi_{\text{indemonstravel}}$ e portanto S não aceita `0`. Mas então $\psi_{\text{indemonstravel}}$ é verdadeira, como afirmamos.

6.3 TURING-REDUTIBILIDADE

Introduzimos o conceito de redutibilidade no Capítulo 5 como uma maneira de usar uma solução para um problema para resolver outros problemas. Por conseguinte, se A é redutível a B, e encontramos uma solução para B, podemos obter uma solução para A. Subseqüentemente, descrevemos *redutibilidade por mapeamento*, uma forma específica de redutibilidade. Mas será que redutibilidade por mapeamento captura nosso conceito intuitivo de redutibilidade da maneira mais geral? Não, não captura.

Por exemplo, considere as duas linguagens A_{MT} e $\overline{A_{\mathsf{MT}}}$. Intuitivamente, elas são redutíveis uma a outra porque uma solução para qualquer uma delas poderia ser usada para resolver a outra simplesmente invertendo a resposta. Entretanto, sabemos que $\overline{A_{\mathsf{MT}}}$ *not* é redutível por mapeamento a A_{MT} porque A_{MT} é Turing-reconhecível mas $\overline{A_{\mathsf{MT}}}$ não o é. Aqui apresentamos uma forma muito geral de redutibilidade, chamada ***Turing-redutibilidade***, que captura nosso conceito intuitivo de redutibilidade mais precisamente.

DEFINIÇÃO 6.18

Um ***oráculo*** para uma linguagem B é um dispositivo externo que é capaz de reportar se qualquer cadeia w é um membro de B. Uma ***máquina de Turing oráculo*** é uma máquina de Turing modificada que tem a capacidade adicional de consultar um oráculo. Escrevemos M^B para descrever uma máquina de Turing oráculo que tem um oráculo para a linguagem B.

Não estamos preocupados com a forma pela qual o oráculo determina suas respostas. Usamos o termo oráculo para conotar uma habilidade mágica e considerar oráculos para linguagens que não são decidíveis por algoritmos ordinários, como o exemplo a seguir mostra.

EXEMPLO 6.19

Considere um oráculo para A_{MT}. Uma máquina de Turing oráculo com um oráculo para A_{MT} pode decidir mais linguagens do que pode uma máquina de Turing ordinária. Tal máquina pode (obviamente) decidir o próprio A_{MT}, consultando o oráculo sobre a entrada. Ele pode também decidir V_{MT}, o problema de se testar vacuidade para MTs com o seguinte procedimento chamado $T^{A_{\mathsf{MT}}}$.

$T^{A_{\mathsf{MT}}}$ = "Sobre a entrada $\langle M \rangle$, onde M é uma MT:

1. Construa a seguinte MT N.
   N = "Sobre qualquer entrada:
   1. Rode M em paralelo sobre todas as cadeias em Σ^*.

2. Se M aceita quaisquer dessas cadeias, *aceite*."

2. Consulte o oráculo para determinar se $\langle N, \mathtt{0}\rangle \in A_{\mathsf{MT}}$.

3. Se o oráculo responde NÃO, *aceite*; se SIM, *rejeite*."

Se a linguagem de M não é vazia, N aceitará toda entrada e, em particular, a entrada $\mathtt{0}$. Daí, o oráculo responderá SIM, e $T^{A_{\mathsf{MT}}}$ rejeitará. Reciprocamente, se a linguagem de M é vazia, $T^{A_{\mathsf{MT}}}$ aceitará. Por conseguinte, $T^{A_{\mathsf{MT}}}$ decide V_{MT}. Dizemos que V_{MT} é ***decidível relativo a*** A_{MT}. Isso nos leva à definição de Turing-redutibilidade. ∎

DEFINIÇÃO 6.20

A linguagem A é ***Turing-redutível*** à linguagem B, escrito $A \leq_{\mathrm{T}} B$, se A é decidível relativo a B.

O Exemplo 6.19 mostra que V_{MT} é Turing-reduível a A_{MT}. Turing-redutibilidade satisfaz nosso conceito intuitivo de redutibilidade como mostrado pelo teorema seguinte.

TEOREMA 6.21

Se $A \leq_{\mathrm{T}} B$ e B é decidível, então A é decidível.

PROVA Se B é decidível, então podemos substitui o oráculo para B por um procedimento real que decide B. Por conseguinte, podemos substituir a máquina de Turing oráculo que decide A por uma máquina de Turing ordinária que decide A.

Turing-redutibilidade é uma generalização da redutibilidade por mapeamento. Se $A \leq_{\mathrm{m}} B$ então $A \leq_{\mathrm{T}} B$, porque a redução por mapeamento pode ser usada para dar uma máquina de Turing oráculo que decide A relativo a B.

Uma máquina de Turing oráculo com um oráculo para A_{MT} é muito poderosa. Ela pode resolver muitos problemas que não são solúveis por máquinas de Turing ordinárias. Mas mesmo tal máquina poderosa não pode decidir todas as linguagens (veja o Problema 6.4).

6.4 UMA DEFINIÇÃO DE INFORMAÇÃO

Os conceitos *algoritmo* e *informação* são fundamentais em ciência da computação. Enquanto que a tese de Church–Turing dá uma definição universalmente aplicável de algoritmo, nenhuma definição igualmente compreensiva é conhecida. Ao invés de uma única e universal definição de informação diversas definições são usadas—dependendo da aplicação. Nesta seção apresentamos uma forma de definir informação, usando a teoria da computabilidade.

Começamos com um exemplo. Considere o conteúdo de informação das duas seqüências binárias a seguir:

$$A = 0101010101010101010101010101010101010101$$
$$B = 1110010110100011101010000111010011010111$$

Intuitivamente, a seqüência A contém pouca informação porque ela é meramente uma repetição do padrão 01 vinte vezes. Diferentemente, a seqüência B parece conter mais informação.

Podemos usar esse exemplo simples para ilustrar a idéia por trás da definição de informação que apresentamos. Definimos a quantidade de informação contida em um objeto como sendo o tamanho da menor representação ou descrição daquele objeto. Por uma descrição de um objeto queremos dizer uma caracterização precisa não-ambígüa do objeto de modo que podemos recriá-lo a partir somente da descrição. Por conseguinte, a seqüência A contém pouca informação porque ela tem uma descrição pequena, enquanto que a seqüência B aparentemente contém mais informação porque ela parece não quer qualquer descrição concisa.

Por que consideramos somente a descrição *mais curta* na determinação da quantidade de informação de um objeto? Podemos sempre descrever um objeto, tal como uma cadeia, colocando uma cópia do objeto diretamente na descrição. Por conseguinte, podemos obviamente descrever a cadeia precedente B com uma tabela que tem comprimento de 40 bits contendo uma cópia de B. Esse tipo de descrição nunca é mais curta que o próprio objeto e não nos diz nada sobre sua quantidade de informação. Entretanto, uma descrição que é significantemente mais curta que o objeto implica que a informação contida nele pode ser comprimida num pequeno volume, e portanto a quantidade de informação não pode ser muito grande. Logo, o tamanho da descrição mais curta determina a quantidade de informação.

Agora formalizamos essa idéia intuitiva. Fazer isso não é tão difícil, mas temos que fazer algum trabalho preliminar. Primeiro, restringimos nossa atenção a objetos que são cadeias binárias. Outros objetos podem ser representados como cadeias binárias, portanto essa restrição não limita o escopo da teoria. Segundo, consideramos somente descrições que são elas próprias cadeias binárias. Impondo esse requisito, podemos facilmente comparar o comprimento do objeto com o comprimento de sua descrição. Na próxima seção, consideramos o tipo

de descrição que permitimos.

DESCRIÇÕES DE COMPRIMENTO MíINIMO

Muitos tipos de linguagem de descrição podem ser usados na definição informação. Selecionar qual linguagem usar afeta as características da definição. Nossa linguagem de descrição é baseada em algoritmos.

Uma maneira de usar algoritmos para descrever cadeias é construir uma máquina de Turing que imprime a cadeia quando ela é inicializada sobre uma fita em branco e então representar aquela própria máquina de Turing como uma cadeia. Por conseguinte, a cadeia representando a máquina de Turing é uma descrição da cadeia original. Uma limitação dessa abordagem é que uma máquina de Turing não pode representar uma tabela de informação concisamente com sua função de transição. Representar uma cadeia de n bits pode usar n estados e n linhas na tabela da função de transição. Isso resultaria numa descrição que é excessivamente longa para nosso propósito. Ao invés disso, usamos a seguinte linguagem de descrição mais concisa.

Descrevemos uma cadeia binária x com uma máquina de Turing M e uma entrada binária w para M. O comprimento da descrição é o comprimento combinado de representar M e w. Escrevemos essa descrição com nossa notação usual para codificar diversos objetos em uma única cadeia binária $\langle M, w\rangle$. Mas aqui temos que prestar atenção adicional à operação de codificação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ porque precisamos produzir um resultado conciso. Definimos a cadeia string $\langle M, w\rangle$ como sendo $\langle M\rangle w$, onde simplesmente concatenamos a cadeia binária w no final da codificação binária de M. A codificação $\langle M\rangle$ de M pode ser feita de qualquer maneira padrão, a não ser pela sutileza que descrevemos no próximo parágrafo. (Não se preocupe com esse ponto sutil na sua primeira leitura deste material. Por enquanto, pule o próximo parágrafo e a figura a seguir.)

Concatenar w no final de $\langle M\rangle$ para produzir uma descrição de x pode esbarrar em problemas se o ponto no qual $\langle M\rangle$ termina e w começa não é discernível da própria descrição. Caso contrário, diversas maneiras de particionar a descrição $\langle M\rangle w$ em uma MT sintaticamente correta e uma entrada pode ocorrer, e então a descrição seria ambígüa e portanto inválida. Evitamos esse problema assegurando que podemos localizar a separação entre $\langle M\rangle$ e w em $\langle M\rangle w$. Uma maneira de fazê-lo é escrever cada bit de $\langle M\rangle$ duas vezes, escrevendo `0` como `00` e `1` como `11`, e então seguí-lo com `01` para marcar o ponto de separação. Ilustramos essa idéia na figura a seguir, mostrando a descrição $\langle M, w\rangle$ de alguma cadeia x.

$$\langle M, w\rangle = \underbrace{\texttt{11001111001100}\cdots\texttt{1100}\overbrace{\texttt{01}}^{\text{delimitador}}}_{\langle M\rangle}\underbrace{\texttt{01101011}\cdots\texttt{010}}_{w}$$

FIGURA 6.22
Exemplo do formato da descrição $\langle M, w\rangle$ de alguma cadeia x

Agora que fixamos nossa linguagem de descrição estamos prontos para definir nossa medida da quantidade de informação em uma cadeia.

DEFINIÇÃO 6.23

Seja x uma cadeia binária. A ***descrição mínima*** de x, escrito $d(x)$, é a menor cadeia $\langle M, w\rangle$ onde MT M sobre a entrada w pára com x sobre sua fita. Se várias dessas cadeias existem, escolha a primeira lexicograficamente entre elas. A ***complexidade descritiva***[5] de x, escrito $\mathrm{K}(x)$, é

$$\mathrm{K}(x) = |d(x)|.$$

Em outras palavras, $\mathrm{K}(x)$ é o comprimento da descrição mínima de x. A definição de $\mathrm{K}(x)$ tem o objetivo de capturar nossa intuição para a quantidade de informação na cadeia x. A seguir estabelecemos alguns resultados simples sobre complexidade descritiva.

TEOREMA 6.24

$\exists c \forall x \left[\mathrm{K}(x) \leq |x| + c\right]$.

Esse teorema diz que a complexidade descritiva de uma cadeia é no máximo uma constante fixa mais que seu comprimento. A constante é uma constante universal, não dependente da cadeia.

PROVA Para provar um limitante superior sobre $\mathrm{K}(x)$ como esse teorema afirma, precisamos apenas demonstrar alguma descrição de x que não seja maior que o limitante enunciado. Então a descrição mínima de x pode ser mais curta que a descrição demonstrada, mas não mais longa.

[5] A ***complexidade descritiva*** é chamada ***complexidade de Kolmogorov*** ou ***complexidade de Kolmogorov–Chaitin*** em alguns tratamentos.

Considere a seguinte descrição da cadeia x. Seja M uma máquina de Turing que pára assim que é inicializada. Essa máquina computa a função identidade—sua saída é o mesmo que sua entrada. Uma descrição de x é simplesmente $\langle M \rangle x$. Fazer c ser o comprimento de $\langle M \rangle$ completa a prova.

O Teorema 6.24 ilustra como usamos a entrada para a máquina de Turing para representar a informação que demandaria uma descrição significativamente maior se, ao contrário, fosse armazenada, usando a função de transição da máquina. Ela está de acordo com nossa intuição que a quantidade de informação contida por uma cadeia não pode ser (substancialmente) mais que seu comprimento. Similarmente, a intuição diz que a informação contida pela cadeia xx não é significativamente mais que a informação contida por x. O teorema seguinte verifica esse fato.

TEOREMA 6.25

$\exists c \forall x \left[\mathrm{K}(xx) \leq \mathrm{K}(x) + c \right]$.

PROVA Considere a seguinte máquina de Turing M, que espera uma entrada da forma $\langle N, w \rangle$, onde N é uma máquina de Turing e w é uma entrada para ela.

$M =$ "Sobre a entrada $\langle N, w \rangle$ onde N é uma MT e w é uma cadeia:

1. Rode N sobre w até que ela pára e produz uma cadeia de saída s.
2. Dê como saída a cadeia ss."

Uma descrição de xx é $\langle M \rangle d(x)$. Lembre-se que $d(x)$ é uma descrição mínima de x. O comprimento de sua descrição é $|\langle M \rangle| + |d(x)|$, que é $c + \mathrm{K}(x)$ onde c é o comprimento de $\langle M \rangle$.

A seguir examinamos como a complexidade descritiva da concatenação xy de duas cadeias x e y é relacionada a suas complexidades individuais. O Teorema 6.24 pode nos levar a acreditar que a complexidade da concatenação é no máximo a soma das complexidades individuais (mais uma constante fixa), mas o custo de combinar duas descrições leva a um limitante maior, como descrito no teorema a seguir.

TEOREMA 6.26

$\exists c \forall x,y \left[\mathrm{K}(xy) \leq 2\mathrm{K}(x) + \mathrm{K}(y) + c \right]$.

PROVA Construímos uma MT M que quebra sua entrada w em duas descrições separadas. Os bits da primeira descrição $d(x)$ são todos duplicados e terminados com a cadeia 01 antes que a segunda descrição $d(y)$ aparece, como

descrito no texto que precede a Figura 6.22. Uma vez que ambas as descrições tenham sido obtidas, elas são executadas para obter as cadeias x e y e a saída xy é produzida.

O comprimento dessa descrição de xy é claramente duas vezes a complexidade de x mais a complexidade de y mais uma constante fixada para descrever M. Essa soma é

$$2\mathrm{K}(x) + \mathrm{K}(y) + c,$$

e a prova está completa.

Podemos melhorar esse teorema de alguma forma usando um método mais eficiente de indicar a separação entre as duas descrições. Uma maneira evita duplicar os bits de $d(x)$. Ao invés, acrescentamos o comprimento de $d(x)$ como um inteiro binário que foi duplicado para diferenciá-lo de $d(x)$. A descrição ainda contém suficiente informação para decodificá-lo em duas descrições de x e y, e ela agora tem comprimento no máximo

$$2\log_2(\mathrm{K}(x)) + \mathrm{K}(x) + \mathrm{K}(y) + c.$$

Pequenos melhoramentos adicionais são possíveis. Entretanto, como o Problema 6.25 pede que você mostre, não podemos atingir o limitante $\mathrm{K}(x)+\mathrm{K}(y)+c$.

OTIMALIDADE DA DEFINIÇÃO

Agora que estabelecemos algumas das propriedades elementares da complexidade descritiva e você teve a chance de desenvolver alguma intuição, discutimos algumas características das definição.

Nossa definição de $\mathrm{K}(x)$ tem uma propriedade de otimalidade entre todas as maneiras possíveis de se definir complexidade descritiva com algoritmos. Suponha que consideremos uma ***linguagem de descrição*** geral como sendo qualquer função computável $p\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ e defina a descrição mínima de x com respeito a p, escrito $d_p(x)$, como sendo a cadeia lexicographicamente mais curta s onde $p(s) = x$. Defina $\mathrm{K}_p(x) = |d_p(x)|$.

Por exemplo, considere uma linguagem de programação tal como LISP (codificada em binário) como a linguagem de descrição. Então $d_{\mathrm{LISP}}(x)$ seria o programa LISP mínimo que dá como saída x, e $\mathrm{K}_{\mathrm{LISP}}(x)$ seria o comprimento do programa mínimo.

O teorema a seguir mostra que qualquer linguagem de descrição desse tipo não é significativamente mais conciso que a linguagem de máquinas de Turing e as entradas que originalmente definimos.

TEOREMA 6.27

Para qualquer linguagem de descrição p, uma constante fixada c existe que de-

pende somente de p, onde

$$\forall x \left[\mathrm{K}(x) \leq \mathrm{K}_p(x) + c \right].$$

IDÉIA DA PROVA Ilustramos a idéia dessa prova usando o exemplo em LISP. Suponha que x tem uma descrição curta w em LISP. Seja M uma MT que pode interpretar LISP e usar o programa em LISP para x como a entrada w de M. Então $\langle M, w \rangle$ é uma descrição de x que é somente uma quantidade fixa maior que a descrição em LISP de x. O comprimento extra é para o interpretador LISP M.

PROVA Tome qualquer linguagem de descrição p e considere a seguinte máquina de Turing machine M.

$M =$ "Sobre a entrada w:

1. Dê como saída $p(w)$."

Então $\langle M \rangle d_p(x)$ é uma descrição de x cujo comprimento é no máximo uma constante fixada maior que $\mathrm{K}_p(x)$. A constante é o comprimento de $\langle M \rangle$.

CADEIAS INCOMPRESSÍVEIS E ALEATORIEDADE

O Teorema 6.24 mostra que a descrição mínima de uma cadeia nunca é muito maior que a própria cadeia. É claro que para algumas cadeias, a descrição mínima pode ser mais curta se a informação na cadeia aparece esparsamente ou redundantemente. Algumas cadeias carecem de descrições curtas? Em outras palavras, a descrição mínima de algumas cadeias é na verdade tão longa quanto a própria cadeia? Mostramos que tais cadeias existem. Essas cadeias não podem ser descritas de forma alguma mais concisamente que simplesmente escrevendo-as explicitamente.

DEFINIÇÃO 6.28

Seja x uma cadeia. Digamos que x é ***c-compressível*** se

$$\mathrm{K}(x) \leq |x| - c.$$

Se x não é c-compressível, dizemos que x é ***incompressível por c***.
Se x é incompressível por 1, dizemos que x é ***incompressível***.

Em outras palavras, se x tem uma descrição que é c bits mais curta que seu comprimento, x é c-compressível. Se não, x é incompressível por c. Finalmente, se x não tem qualquer descrição mais curta que si própria, x é incompressível. Primeiro mostramos que cadeias incompressíveis existem, e aí então discutimos

suas propriedades interessantes. Em particular, mostramos que cadeias incompressíveis pareçam com cadeias que são obtidas de arremessos aleatórios de moeda.

TEOREMA 6.29

Cadeias incompressíveis de todo comprimento existem.

IDÉIA DA PROVA O número de cadeias de comprimento n é maior que o número de descrições de comprimento menor que n. Cada descrição descreve no máximo uma cadeia. Por conseguinte, alguma cadeia de comprimento n não é descrita por qualquer que seja a descrição de comprimento menor que n. Aquela cadeia é incompressível.

PROVA O número de cadeias binárias de comprimento n é 2^n. Cada descrição é uma cadeia binária, portanto o número de descrições de comprimento menor que n é no máximo a soma do número de cadeias de cada comprimento até $n-1$, ou

$$\sum_{0 \le i \le n-1} 2^i = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

O número de descrições curtas é menor que o número de cadeias de comprimento n. Por conseguinte, no mínimo uma cadeia de comprimento n é incompressível.

COROLÁRIO 6.30

No mínimo $2^n - 2^{n-c+1} + 1$ cadeias de comprimento n são incompressíveis por c.

PROVA Como na prova do Teorema 6.29, no máximo $2^{n-c+1} - 1$ cadeias de comprimento n são c-compressíveis, porque no máximo aquela quantidade de descrições de comprimento no máximo $n - c$ existem. As $2^n - (2^{n-c+1} - 1)$ restantes são incompressíveis por c.

Cadeias incompressíveis têm muitas propriedades que esperaríamos encontrar em cadeias aleatoriamente escolhidas. Por exemplo, podemos mostrar que qualquer cadeia incompressível de comprimento n tem aproximadamente um número igual de 0s e 1s, e que o comprimento de sua seqüência máxima de 0s é aproximadamente $\log_2 n$, como esperaríamos encontrar em uma cadeia aleatória daquele comprimento. Provar tais enunciados nos levaria para muito longe em combinatória e probabilidade, mas provaremos um teorema que forma a base para esses enunciados.

Esse teorema mostra que qualquer propriedade computável que se verifica para "quase todas" as cadeias também se verifica para todas as cadeias incompressíveis suficientemente longas. Como mencionamos na Seção 0.2, uma ***propriedade*** de cadeias é simplesmente uma função f que mapeia cadeias para $\{\text{VERDADEIRO}, \text{FALSO}\}$. Dizemos que uma propriedade ***se verifica para quase todas as cadeias*** se a fração de cadeias de comprimento n sobre a qual ela é FALSO se aproxima de 0 à medida que n cresce. Uma cadeia longa aleatoriamente escolhida tende a satisfazer uma propriedade computável que se verifica holds para quase todas as cadeias. Por conseguinte, cadeias aleatórias e cadeias incompressíveis compartilham tais propriedades.

TEOREMA 6.31

Seja f uma propriedade computável que se verifica para quase todas as cadeias. Então, para qualquer $b > 0$, a propriedade f é FALSO sobre apenas uma quantidade finita de cadeias que são incompressíveis por b.

PROVA Seja M o seguinte algoritmo.

$M =$ "Sobre a entrada i, um inteiro binário:

1. Encontre a i-ésima cadeia s onde $f(s) =$ FALSO, considerando as cadeias ordenadas lexicograficamente.
2. Dê como saída a cadeia s."

Podemos usar M para obter descrições curtas de cadeias que falham em ter a propriedade f da seguinte maneira. Para qualquer dessa cadeia x, seja i_x a posção ou o ***índice*** de x sobre uma lista de todas as cadeias que falham em ter a propriedade f, ordenadas por comprimento e lexicograficamente dentro de cada comprimento. Então $\langle M, i_x \rangle$ é uma descrição de x. O comprimento dessa descrição é $|i_x| + c$, onde c é o comprimento de $\langle M \rangle$. Devido ao fato de que poucas cadeias falham em ter a propriedade f, o índice de x é pequeno e sua descrição é conformemente pequeno.

Fixe qualquer número $b > 0$. Selecione n tal que no máximo uma $1/2^{b+c+1}$ fração de cadeias de comprimento n ou menos falham em ter a propriedade f. Todo n suficientemente grande satisfaz essa condição porque f se verifica para quase todas as cadeias. Seja x uma cadeia de comprimento n que falha em ter a propriedade f. Temos $2^{n+1} - 1$ cadeias de comprimento n ou menos, portanto

$$i_x \leq \frac{2^{n+1} - 1}{2^{b+c+1}} \leq 2^{n-b-c}.$$

Por conseguinte, $|i_x| \leq n - b - c$, de modo que o comprimento de $\langle M, i_x \rangle$ é no máximo $(n - b - c) + c = n - b$, o que implica que

$$\mathrm{K}(x) \leq n - b.$$

Por conseguinte, toda x suficientemente longa que falha em ter a propriedade f é compressível por b. Daí somente uma quantidade finita de cadeias que falham

em ter propriedade f são incompressíveis por b, e o teorema está provado.

Nesse ponto exibir alguns exemplos de cadeias incompressíveis seria apropriado. Entretanto, como o Problema 6.22 pede a você para mostrar, a medida K de complexidade não é computável. Além do mais, nenhum algoritmo pode decidir em geral se cadeias são incompressíveis, pelo Problema 6.23. De fato, pelo Problema 6.24, nenhum subconjunto infinito delas é Turing-reconhecível. Portanto não temos maneiras de obter cadeias incompressíveis longas e não teríamos maneira de determinar se uma cadeia é incompressível mesmo se tivéssemos uma. O teorema a seguir descreve certas cadeias que são quase incompressíveis, embora ele não apresente uma maneira de exibí-las explicitamente.

TEOREMA 6.32

Para alguma constante b, para toda cadeia x, a descrição mínima $d(x)$ de x é incompressível por b.

PROVA Considere a seguinte MT M:

$M =$ "Sobre a entrada $\langle R, y\rangle$, onde R é uma MT e y é uma cadeia:

1. Rode R sobre y e *rejeite* se sua saída não é da forma $\langle S, z\rangle$.
2. Rode S sobre z e páre com sua saída sobre a fita."

Suponha que b seja $|\langle M\rangle| + 1$. Mostramos que b satisfaz a teorema. Suponha, ao contrário, que $d(x)$ é b-compressível para alguma cadeia x. Então

$$|d(d(x))| \leq |d(x)| - b.$$

Mas então $\langle M\rangle d(d(x))$ é uma descrição de x cujo comprimento é no máximo

$$|\langle M\rangle| + |d(d(x))| \leq (b-1) + (|d(x)| - b) = |d(x)| - 1.$$

Essa descrição de x é mais curta que $d(x)$, contradizendo a minimalidade desta última.

EXERCÍCIOS

6.1 Dê um exemplo no espírito do teorema da recursão de um programa em uma linguagem de programação real (ou uma aproximação a razoável disso) que imprime a si próprio.

6.2 Mostre que qualquer subconjunto infinito de MIN_{MT} não é Turing-reconhecível.

R**6.3** Mostre que se $A \leq_{\mathrm{T}} B$ e $B \leq_{\mathrm{T}} C$ então $A \leq_{\mathrm{T}} C$.

6.4 Seja $A_{\mathsf{MT}}{}' = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ é um oráculo } \mathsf{MT} \text{ e } M^{A_{\mathsf{MT}}} \text{ aceita } w\}$. Mostre que $A_{\mathsf{MT}}{}'$ é indecidível relativo a A_{MT}.

R**6.5** O enunciado $\exists x \forall y \left[x{+}y{=}y \right]$ é um membro de $\mathrm{Th}(\mathcal{N}, +)$? Por que ou por que não? Que tal o enunciado $\exists x \forall y \left[x{+}y{=}x \right]$?

PROBLEMAS

6.6 Descreva duas máquinas de Turing diferentes, M e N, que, quando iniciadas sobre qualquer entrada, M dá como saída $\langle N \rangle$ e N dá como saída $\langle M \rangle$.

6.7 Na versão de ponto-fixo do teorema da recursão (Teorema 6.8) suponha que a transformação t seja uma função que intercambia os estados q_{aceita} e q_{rejeita} em descrições de máquinas de Turing. Dê um exemplo de um ponto fixo para t.

*R**6.8** Mostre que $EQ_{\mathrm{TM}} \not\leq_{\mathrm{m}} \overline{EQ_{\mathrm{TM}}}$.

R**6.9** Use o teorema da recursão para dar uma prova alternativa do teorema de Rice no Problema 5.28.

R**6.10** Dê um modelo da sentença

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{eq}} = \quad & \forall x \left[R_1(x,x) \right] \\ & \wedge \forall x,y \left[R_1(x,y) \leftrightarrow R_1(y,x) \right] \\ & \wedge \forall x,y,z \left[(R_1(x,y) \wedge R_1(y,z)) \rightarrow R_1(x,z) \right].\end{aligned}$$

*R**6.11** Suponha que ϕ_{eq} seja definida como no Problema 6.10. Dê um modelo da sentença

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{lt}} = \quad & \phi_{\mathrm{eq}} \\ & \wedge \forall x,y \left[R_1(x,y) \rightarrow \neg R_2(x,y) \right] \\ & \wedge \forall x,y \left[\neg R_1(x,y) \rightarrow (R_2(x,y) \oplus R_2(y,x)) \right] \\ & \wedge \forall x,y,z \left[(R_2(x,y) \wedge R_2(y,z)) \rightarrow R_2(x,z) \right] \\ & \wedge \forall x \exists y \left[R_2(x,y) \right].\end{aligned}$$

R**6.12** Seja $(\mathcal{N}, <)$ o modelo com universo $\mathcal{N}$ e a relação "menor que". Mostre que $\mathrm{Th}(\mathcal{N}, <)$ é decidível.

6.13 Para cada $m > 1$ seja $\mathcal{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ e suponha que $\mathcal{F}_m = (\mathcal{Z}_m, +, \times)$ seja o modelo cujo universo é $\mathcal{Z}_m$ e que tenha relações correspondendo às relações $+$ e $\times$ computadas módulo m. Mostre que para cada m a teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{F}_m)$ é decidível.

6.14 Mostre que para quaisquer duas linguagens A e B uma linguagem J existe, onde $A \leq_{\mathrm{T}} J$ and $B \leq_{\mathrm{T}} J$.

6.15 Mostre que para qualquer linguagem A, uma linguagem B existe, onde $A \leq_{\mathrm{T}} B$ e $B \not\leq_{\mathrm{T}} A$.

*6.16 Prove que existem duas linguagens A e B que são Turing-incomparáveis—isto é, onde $A \not\leq_T B$ e $B \not\leq_T A$.

*6.17 Sejam A e B duas linguagens disjuntas. Digamos que a linguagem C *separa* A e B se $A \subseteq C$ e $B \subseteq \overline{C}$. Descreva duas linguagens Turing-reconhecíveis disjuntas que não são separáveis por nenhuma linguagem decidível.

6.18 No Corolário 4.18 mostramos que o conjunto de todas as linguagens é incontável. Use esse resultado para provar que linguagens existem que não são reconhecíveis por uma máquina de Turing oráculo com oráculo para A_{MT}.

6.19 Recorde o problema da correspondência de Post que definimos na Seção 5.2 e sua linguagem associada PCP. Mostre que PCP é decidível relativo a A_{MT}.

6.20 Mostre como computar a complexidade descritiva de cadeias $\mathrm{K}(x)$ com um oráculo para A_{MT}.

6.21 Use o resultado do Problema 6.20 para dar uma função f que é computável com um oráculo para A_{MT}, onde para cada n, $f(n)$ é uma cadeia incompressível de comprimento n.

6.22 Mostre que a função $\mathrm{K}(x)$ não é uma função computável.

6.23 Mostre que o conjunto de cadeias incompressíveis é indecidível.

6.24 Mostre que o conjunto de cadeias incompressíveis não contém nenhum subconjunto infinito que é Turing-reconhecível.

*6.25 Mostre que para qualquer c, algumas cadeias x e y existem, onde $\mathrm{K}(xy) > \mathrm{K}(x) + \mathrm{K}(y) + c$.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

6.3 Digamos que M_1^B decide A e M_2^C decide B. Use um oráculo MT M_3, onde M_3^C decide A. A máquina M_3 simula M_1. Toda vez que M_1 consulta seu oráculo sobre alguma cadeia x, a máquina M_3 testa se $x \in B$ e fornece a resposta a M_1. Devido ao fato de que a máquina M_3 não tem um oráculo para B e não pode realizar aquele teste diretamente, ela simula M_2 sobre a entrada x para obter aquela informação. A máquina M_3 pode obter a resposta para as consultas de M_2 diretamente porque essas duas máquinas usam o mesmo oráculo, C.

6.5 O enunciado $\exists x \forall y \left[x{+}y{=}y \right]$ é um membro de $\mathrm{Th}(\mathcal{N}, +)$ porque esse enunciado é verdadeiro para a interpretação padrão de $+$ sobre o universo $\mathcal{N}$. Lembre-se que usamos $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ neste capítulo e portanto podemos usar $x = 0$. O enunciado $\exists x \forall y \left[x{+}y{=}x \right]$ não é um membro de $\mathrm{Th}(\mathcal{N}, +)$ porque esse enunciado não é verdadeiro nesse modelo. Para qualquer valor de x, fazendo $y = 1$ faz com que $x{+}y{=}x$ falhe.

6.9 Assuma para os propósitos de se chegar a uma contradição que alguma MT X decide uma propriedade P, e P satisfaz as condições do teorema de Rice. Uma dessas condições diz que MTs A e B existem onde $\langle A \rangle \in P$ e $\langle B \rangle \notin P$. Use A e B para construir MT R:

R = "Sobre a entrada w:

1. Obtenha sua própria descrição $\langle R \rangle$ usando o teorema da recursão.
2. Rode X sobre $\langle R \rangle$.
3. Se X aceita $\langle R \rangle$, simule B sobre w.
   Se X rejeita $\langle R \rangle$, simule A sobre w."

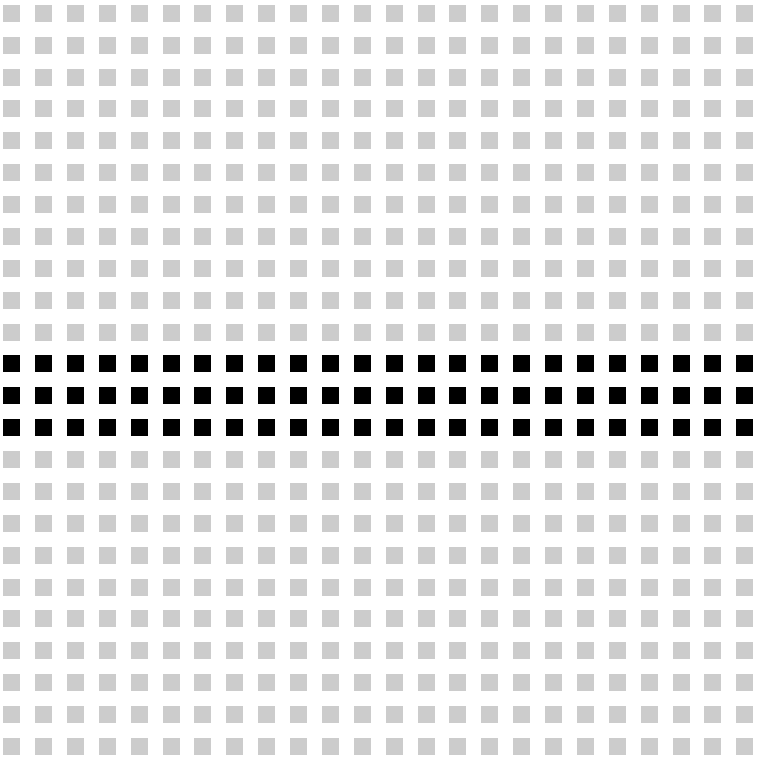
Se $\langle R \rangle \in P$, então X aceita $\langle R \rangle$ e $L(R) = L(B)$. Mas $\langle B \rangle \notin P$, contradizendo $\langle R \rangle \in P$, porque P concorda sobre MTs que têm a mesma linguagem. Chegamos a uma contradição semelhante se $\langle R \rangle \notin P$. Por conseguinte, nossa suposição original é falsa. Toda propriedade satisfazendo as condições do teorema de Rice é indecidível.

6.10 O enunciado ϕ_{eq} dá as três condições de uma relação de equivalência. Um modelo (A, R_1), onde A é um universo qualquer e R_1 é uma relação de equivalência qualquer sobre A, é um modelo de ϕ_{eq}. Por exemplo, suponha que A seja os inteiros $\mathcal{Z}$ e faça $R_1 = \{(i, i) | \ i \in \mathcal{Z}\}$.

6.12 Reduza $\text{Th}(\mathcal{N}, <)$ a $\text{Th}(\mathcal{N}, +)$, que já mostramos ser decidível. Para fazer isso, mostre como converter uma sentença ϕ_1 sobre a linguagem de $\text{Th}(\mathcal{N}, <)$, para uma sentença ϕ_2 sobre a linguagem de $\text{Th}(\mathcal{N}, +)$ enquanto preservando a veracidade ou a falsidade nos modelos respectivos. Substitua toda ocorrência de $i < j$ in ϕ_1 pela fórmula $\exists k \big[\, (i{+}k{=}j) \wedge (k{+}k{\neq}k) \, \big]$ em ϕ_2, onde k é uma nova variável diferente a cada vez.

A sentença ϕ_2 é equivalente a ϕ_1 porque "i é menor que j" significa que podemos adicionar um valor não-zero a i e obter j. Colocando ϕ_2 na forma normal-prenex, como requerido pelo algoritmo para decidir $\text{Th}(\mathcal{N}, +)$, requer um pouco de trabalho adicional. Os novos quantificadores existenciais são trazidos para a frente da sentença. Para fazer isso, esses quantificadores têm que passar por operações booleanas que aparecem na sentença. Quantificadores podem ser trazidos através das operações de $\wedge$ e $\vee$ sem modificação. Passar através de $\neg$ modifica $\exists$ para $\forall$ e vice-versa. Por conseguinte, $\neg \exists k \, \psi$ torna-se a expressão equivalente $\forall k \, \neg \psi$, e $\neg \forall k \, \psi$ torna-se $\exists k \, \neg \psi$.

PARTE TRÊS



TEORIA DA COMPLEXIDADE

7

COMPLEXIDADE DE TEMPO

Mesmo quando um problema é decidível e, portanto, computacionalmente solúvel em princípio, ele pode não ser solúvel na prática se a solução requer uma quantidade desordenada de tempo ou memória. Nesta parte final do livro introduzimos a teoria da complexidade computacional—uma investigação do tempo, memória ou outros recursos requeridos para resolver problemas computacionais. Começamos com tempo.

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar o básico da teoria da complexidade de tempo. Primeiro introduzimos uma maneira de medir o tempo usado para resolver um problema. Então mostramos como classificar problemas de acordo com a quantidade de tempo necessária. Depois disso discutimos a possibilidade de que certos problemas decidíveis requerem quantidades enormes de tempo e como determinar quando você está diante de um problema desses.

7.1 MEDINDO COMPLEXIDADE

Vamos começar com um exemplo. Tome a linguagem $A = \{0^k1^k | \ k \geq 0\}$. Obviamente A é uma linguagem decidível. Quanto tempo uma máquina de Turing de uma única fita precisa para decidir A? Examinamos a seguinte MT de uma

única-fita M_1 para A. Damos a descrição da máquina de Turing num nível baixo, incluindo a própria movimentação da cabeça sobre a fita de modo que possamos contar o número de passos que M_1 usa quando ela roda.

M_1 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura na fita e *rejeite* se um `0` for encontrado à direita de um `1`.
2. Repita se ambos `0`s e `1`s permanecem sobre a fita:
3. Faça uma varredura na fita, cortando um único `0` e um único `1`.
4. Se `0`s ainda permanecerem após todos os `1`s tiverem sido cortados, ou se `1`s ainda permanecerem após todos os `0`s tiverem sido cortados, *rejeite*. Caso contrário, se nem `0`s nem `1`s permanecererem sobre a fita, *aceite*."

Analisamos o algoritmo para a MT M_1 decidindo A para determinar quanto tempo ela usa.

O número de passos que um algoritmo usa sobre uma entrada específica pode depender de vários parâmetros. Por exemplo, se a entrada for um grafo, o número de passos pode depender do número de nós, o número de arestas, e o grau máximo do grafo, ou alguma combinação desses e/ou de outros fatores. Para simplicidade computamos o tempo de execução de um algoritmo puramente como uma função do comprimento da cadeia representando a entrada e não consideramos quaisquer outros parâmetros. Na ***análise do pior-caso***, a forma que consideramos aqui, levamos em conta o tempo de execução mais longo de todas as entradas de um comprimento específico. Na ***análise do caso-médio***, consideramos a média dos tempos de execução de entradas de um comprimento específico.

DEFINIÇÃO 7.1

Seja M uma máquina de Turing determinística que pára sobre todas as entradas. O ***tempo de execução*** ou ***complexidade de tempo*** de M é a função $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, onde $f(n)$ é o número máximo de passos que M usa sobre qualquer entrada de comprimento n. Se $f(n)$ for o tempo de execução de M, dizemos que M roda em tempo $f(n)$ e que M é uma máquina de Turing de tempo $f(n)$. Costumeiramente usamos n para representar o comprimento da entrada.

NOTAÇÃO O-GRANDE E O-PEQUENO

Em razão do fato de que o tempo exato de execução de um algoritmo freqüentemente é uma expressão complexa, usualmente apenas o estimamos. Em uma

forma mais conveniente de estimativa, chamada ***análise assintótica***, buscamos entender o tempo de execução do algoritmo quando ele é executado sobre entradas grandes. Fazemos isso considerando apenas o termo de mais alta ordem da expressão para o tempo de execução do algoritmo, desconsiderando tanto o coeficiente daquele termo quanto quaisquer termos de ordem mais baixa, porque o termo de mais alta ordem domina os outros termos sobre entradas grandes.

Por exemplo, a função $f(n) = 6n^3 + 2n^2 + 20n + 45$ tem quatro termos, e o termo de mais alta ordem é $6n^3$. Desconsiderando o coeficiente 6, dizemos que f é assintoticamente no máximo n^3. A ***notação assintótica*** ou ***notação O-grande*** para descrever esse relacionamento é $f(n) = O(n^3)$. Formalizamos essa noção na definição seguinte. Seja $\mathcal{R}^+$ o conjunto de números reais não-negativos.

DEFINIÇÃO 7.2

Sejam f e g be funções $f, g\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{R}^+$. Vamos dizer que $\boldsymbol{f(n) = O(g(n))}$ se inteiros positivos c e n_0 existem tais que para todo inteiro $n \geq n_0$

$$f(n) \leq c\, g(n).$$

Quando $f(n) = O(g(n))$ dizemos que $g(n)$ é um ***limitante superior*** para $f(n)$, ou mais precisamente, que $g(n)$ é um ***limitante superior assintótico*** para $f(n)$, para enfatizar que estamos suprimindo fatores constantes.

Intuitivamente, $f(n) = O(g(n))$ significa que f é menor ou igual a g se desconsiderarmos diferenças até um fator constante. Você pode pensar em O como representando uma constante suprimida. Na prática, a maioria das funções f que você tende a encontrar tem um termo óbvio de mais alta ordem h. Nesse caso escrevemos $f(n) = O(g(n))$, onde g é h sem seu coeficiente.

EXEMPLO 7.3

Seja $f_1(n)$ a função $5n^3 + 2n^2 + 22n + 6$. Então, selecionando o termo de mais alta ordem $5n^3$ e desconsiderando seu coeficiente 5 dá $f_1(n) = O(n^3)$.

Vamos verificar que esse resultado satisfaz a definição formal. Fazemos isso tornando c igual a 6 e n_0 igual a 10. Então, $5n^3 + 2n^2 + 22n + 6 \leq 6n^3$ para todo $n \geq 10$.

Adicionalmente, $f_1(n) = O(n^4)$ porque n^4 é maior que n^3 e portanto é ainda um limitante assintótico superior sobre f_1.

Entretanto, $f_1(n)$ não é $O(n^2)$. Independentemente dos valores que atribuímos a c e n_0, a definição permanece insatisfeita nesse caso. ■

EXEMPLO 7.4

O O-grande interage com logaritmos de uma maneira particular. Normalmente quando usamos logaritmos temos que especificar a base, como em $x = \log_2 n$. A base 2 aqui indica que essa igualdade é equivalente à igualdade $2^x = n$. Mudando o valor da base b muda o valor de $\log_b n$ por um fator constante, devido à identidade $\log_b n = \log_2 n / \log_2 b$. Por conseguinte, quando escrevemos $f(n) = O(\log n)$, especificando a base não é mais necessária porque estamos de qualquer forma suprimindo fatores constantes.

Seja $f_2(n)$ a função $3n \log_2 n + 5n \log_2 \log_2 n + 2$. Nesse caso temos $f_2(n) = O(n \log n)$ porque $\log n$ domina $\log \log n$. ∎

A notação O-grande também aparece nas expressões aritméticas tais como a expressão $f(n) = O(n^2) + O(n)$. Nesse caso cada ocorrência do símbolo O representa uma constante suprimida diferente. Em razão do termo $O(n^2)$ dominar o termo $O(n)$, essa expressão é equivalente a $f(n) = O(n^2)$. Quando o símbolo O ocorre num expoente, como na expressão $f(n) = 2^{O(n)}$, a mesma idéia se aplica. Essa expressão representa um limitante superior de 2^{cn} para alguma constante c.

A expressão $f(n) = 2^{O(\log n)}$ ocorre em algumas análises. Usando a identidade $n = 2^{\log_2 n}$ e portanto que $n^c = 2^{c \log_2 n}$, vemos que $2^{O(\log n)}$ representa um limitante superior de n^c para alguma c. A expressão $n^{O(1)}$ representa o mesmo limitante de uma maneira diferente, porque a expressão $O(1)$ representa um valor que nunca é mais que uma constante fixa.

Freqüentemente derivamos limitantes da forma n^c para c maior que 0. Tais limitantes são chamados ***limitantes polinomiais***. Limitantes da forma $2^{(n^\delta)}$ são chamados ***limitantes exponenciais*** quando δ é um número real maior que 0.

A notação O-grande tem uma companheira chamada ***notação o-pequeno***. A notação O-grande diz que uma função é assintoticamente *não mais que* uma outra. Para dizer que uma função é asintoticamente *menor que* uma outra usamos a notação o-pequeno. A diferença entre as notações O-grande e o-pequeno é análoga à diferença entre $\leq$ e $<$.

DEFINIÇÃO 7.5

Sejam f e g be funções $f, g\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{R}^+$. Vamos dizer que $\boldsymbol{f(n) = o(g(n))}$ se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Em outras palavras, $f(n) = o(g(n))$ significa que, para qualquer número real $c > 0$, um número n_0 existe, onde $f(n) < c\, g(n)$ para todo $n \geq n_0$.

EXEMPLO 7.6

O que segue é fácil de verificar.

1. $\sqrt{n} = o(n)$.
2. $n = o(n \log \log n)$.
3. $n \log \log n = o(n \log n)$.
4. $n \log n = o(n^2)$.
5. $n^2 = o(n^3)$.

Entretanto, $f(n)$ nunca é $o(f(n))$. ∎

ANALISANDO ALGORITMOS

Vamos analisar o algoritmo de MT que demos para a linguagem $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$. Repetimos o algoritmo aqui por conveniência.

M_1 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura na fita e *rejeite* se um 0 for encontrado à direita de um 1.
2. Repita se ambos 0s e 1s permanecem sobre a fita:
3. Faça uma varredura na fita, cortando um único 0 e um único 1.
4. Se 0s ainda permanecerem após todos os 1s tiverem sido cortados, ou se 1s ainda permanecerem após todos os 0s tiverem sido cortados, *rejeite*. Caso contrário, se nem 0s nem 1s permanecererem sobre a fita, *aceite*."

Para analisar M_1 consideramos cada um dos seus quatro estágios separadamente. No estágio 1, a máquina faz uma varredura na fita para verificar que a entrada é da forma 0^*1^*. Realizar essa varredura usa n passos. Como mencionamos anteriormente, tipicamente usamos n para representar o comprimento da entrada. Reposicionar a cabeça na extremidade esquerda da fita usa outros n passos. Assim, o total usado nesse estágio é $2n$ passos. Na notação O-grande dizemos que esse estágio usa $O(n)$ passos. Note que não mencionamos o reposicionamento da cabeça da fita na descrição da máquina. Usando uma notação assintótica nos permite omitir detalhes da descrição da máquina que afetam o tempo de execução por no máximo um fator constante.

Nos estágios 2 e 3, a máquina repetidamente faz uma varredura na fita e corta um 0 e um 1 em cada varredura. Cada varredura usa $O(n)$ passos. Em razão do fato de que cada varredura corta dois símbolos, no máximo $n/2$ varreduras podem ocorrer. Portanto, o tempo total tomado pelos estágios 2 e 3 é $(n/2)O(n) = O(n^2)$ passos.

No estágio 4 a máquina faz uma única varredura para decidir se aceita ou rejeita. O tempo tomado nesse estágio é no máximo $O(n)$.

Portanto o tempo total de M_1 sobre uma entrada de comprimento n é $O(n) + O(n^2) + O(n)$, ou $O(n^2)$. Em outras palavras, seu tempo de execução é $O(n^2)$, o que completa a análise de tempo dessa máquina.

Vamos fixar um pouco de notação para classificar linguagens conforme seus requisitos de tempo.

DEFINIÇÃO 7.7

Seja $t: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{R}^+$ uma função. Defina a ***classe de complexidade de tempo***, $\mathbf{TIME}(t(n))$, como sendo a coleção de todas as linguagens que são decidíveis por uma máquina de Turing de tempo $O(t(n))$.

Retomemos a linguagem $A = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$. A análise precedente mostra que $A \in \text{TIME}(n^2)$ because M_1 decide A em tempo $O(n^2)$ e $\text{TIME}(n^2)$ contém todas as linguagens que podem ser decididas em tempo $O(n^2)$.

Existe uma máquina que decide A assintoticamente mais rapidamente? Em outras palavras, A está em $\text{TIME}(t(n))$ para $t(n) = o(n^2)$? Podemos melhorar o tempo de execução cortando dois 0s e dois 1s em cada varredura ao invés de apenas um porque fazendo isso corta-se o número de varreduras pela metade. Mas isso melhora o tempo de execução apenas por um fator de 2 e não afeta o tempo de execução assintótico. A máquina seguinte, M_2, usa um método diferente para decidir A assintoticamente mais rápido. Ela mostra que $A \in \text{TIME}(n \log n)$.

M_2 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura na fita e *rejeite* se um 0 for encontrado à direita de um 1.
2. Repita enquanto alguns 0s e alguns 1s permanecerem sobre a fita:
3. Faça uma varredura na fita, verificando se o número total de 0s e 1s remanescentes é par ou ímpar. Se for ímpar, *rejeite*.
4. Faça uma varredura novamente na fita, cortando alternadamente um 0 não e outro sim começando com o primeiro 0, e então cortando alternadamente um 1 não e outro sim começando com o primeiro 1.
5. Se nenhum 0s e nenhum 1s permanecerem sobre a fita, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*."

Antes de analisar M_2, vamos verificar que ela realmente decide A. Em toda varredura realizada no estágio 4, o número total de 0s remanescentes é cortado pela metade e qualquer resto é descartado. Por conseguinte, se começarmos com 13 0s, após o estágio 4 ser executado uma única vez apenas 6 0s permanecem. Após

execuções subseqüentes desse estágio, 3, então 1, e depois 0 permanecem. Esse estágio tem o mesmo efeito sobre o número de 1s.

Agora examinamos a paridade par/ímpar do número de 0s e o número de 1s em cada execução do estágio 3. Considere novamente começar com 13 0s e 13 1s. A primeira execução do estágio 3 encontra um número ímpar de 0s (porque 13 é um número ímpar) e um número ímpar de 1s. Em execuções subseqüentes um número par (6) ocorre, então um número ímpar (3), e um número ímpar (1). Não executamos esse estágio sobre 0 0s ou 0 1s em razão da condição do laço de repetição especificada no estágio 2. Para a seqüência de paridades encontradas (ímpar, par, ímpar, ímpar) se substituirmos as pares por 0s e as ímpares por 1s e então revertermos a seqüência, obtemos 1101, a representação binária de 13, ou o número de 0s e 1s no início. A seqüência de paridades sempre dá o reverso da representação binária.

Quando o estágio 3 verifica para determinar que o número total de 0s e 1s remanescentes é par, ele na verdade está checando a concordância entre a paridade dos 0s com a paridade dos 1s. Se todas as paridades estão de acordo, as representações binárias dos números de 0s e de 1s concordam, e portanto os dois números são iguais.

Para analisar o tempo de execução de M_2, primeiro observamos que todo estágio leva um tempo $O(n)$. Então determinamos o número de vezes que cada um é executado. Os estágios 1 e 5 são executados uma vez, levando um total de tempo de $O(n)$. O estágio 4 corta pelo menos metade dos 0s e 1s cada vez que é executado, portanto no máximo $1 + \log_2 n$ iterações do laço de repetição ocorrem antes que todos sejam cortados. Por conseguinte, o tempo total dos estágios 2, 3 e 4 é $(1 + \log_2 n)O(n)$, ou $O(n \log n)$. O tempo de execução de M_2 é $O(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$.

Anteriormente mostramos que $A \in \text{TIME}(n^2)$, mas agora temos um limitante melhor—a saber, $A \in \text{TIME}(n \log n)$. Esse resultado não pode ser melhorado ainda mais em máquinas de Turing de uma única fita. Na realidade, qualquer linguagem que pode ser decidida em tempo $o(n \log n)$ em uma máquina de Turing de uma única fita é regular, como o Problema 7.47 pede para você mostrar.

Podemos decidir a linguagem A em tempo $O(n)$ (também chamado ***tempo linear***) se a máquina de Turing tiver uma segunda fita. A seguinte MT de duas fitas M_3 decide A em tempo linear. A máquina M_3 opera diferentemente das máquinas anteriores para A. Ela simplesmente copia os 0s para sua segunda fita e então os confronta com os 1s.

M_3 = "Sobre a cadeia de entrada w:

1. Faça uma varredura na fita e *rejeite* se um 0 for encontrado à direita de um 1.
2. Faça uma varredura nos 0s sobre a fita 1 até o primeiro 1. Ao mesmo tempo, copie os 0s para a fita 2.
3. Faça uma varredura nos 1s sobre a fita 1 até o final da entrada. Para cada 1 lido sobre a fita 1, corte um 0 sobre a fita 2. Se todos os 0s estiverem cortados antes que todos os 1s sejam lidos,

rejeite.

4. Se todos os 0s tiverem agora sido cortados, *aceite*. Se algum 0 permanecer, *rejeite*."

Essa máquina é simples de analisar. Cada um dos quatro estágios usa $O(n)$ passos, portanto o tempo tota de execução é $O(n)$ e portanto é linear. Note que esse tempo de execução é o melhor possível porque n passos são necessários somente para ler a entrada.

Vamos resumir o que mostramos sobre a complexidade de tempo de A, a quantidade de tempo requerido para se decidir A. Produzimos uma MT de uma única fita M_1 que decide A em tempo $O(n^2)$ e uma MT de uma única fita mais rápida M_2 que decide A em tempo $O(n \log n)$. A solução para o Problema 7.47 implica que nenhuma MT de uma única fita pode fazê-lo mais rapidamente. Então exibimos uma MT de duas fitas M_3 que decide A em tempo $O(n)$. Logo, a complexidade de tempo de A numa MT de uma única fita é $O(n \log n)$ e numa MT de duas fitas é $O(n)$. Note que a complexidade de A depende do modelo de computação escolhido.

Essa discussão destaca uma importante diferença entre a teoria da complexidade e a teoria da computabilidade. Na teoria da computabilidade, a tese de Church–Turing implica que todos os modelos razoáveis de computação são are equivalentes—ou seja, todos eles decidem a mesma classe de linguagens. Na teoria da complexidade, a escolha do modelo afeta a complexidade de tempo de linguagens. Linguagens que decidíveis em, digamos, tempo linear em um modelo não são necessariamente decidíveis em tempo linear em um outro.

Na teoria da complexidade, classificamos problemas computacionais conforme sua complexidade de tempo. Mas com qual modelo medimos tempo? A mesma linguagem pode ter requisitos de tempo diferentes em modelos diferentes.

Felizmente, requisitos de tempo não diferem enormemente para modelos determinísticos típicos. Assim, se nosso sistema de classificação não for muito sensível a diferenças relativamente pequenas em complexidade, a escolha do modelo determinístico não é crucial. Discutimos essa idéia ainda mais nas próximas seções.

RELACIONAMENTOS DE COMPLEXIDADE ENTRE MODELOS

Aqui examinamos como a escolha do modelo computacional pode afetar a complexidade de tempo de linguagens. Consideramos três modelos: a máquina de Turing de uma única fita; a máquina de Turing multifita; e a máquina de Turing não-determinística.

TEOREMA 7.8

Seja $t(n)$ uma função, onde $t(n) \geq n$. Então toda máquina de Turing multifita de

tempo $t(n)$ tem uma máquina de Turing de uma única fita equivalente de tempo $O(t^2(n))$.

IDÉIA DA PROVA A idéia por trás da prova desse teorema é bastante simples. Lembre-se de que no Teorema 3.13 mostramos como converter qualquer MT multifita numa MT de uma única fita que a simula. Agora analisamos aquela simulação para determinar quanto tempo adicional ela requer. Mostramos que simular cada passo da máquina multifita usa no máximo $O(t(n))$ passos na máquina de uma única fita. Logo, o tempo total usado é $O(t^2(n))$ passos.

PROVA Seja M uma MT de k-fitas que roda em tempo $t(n)$. Construímos uma MT de uma única fita S que roda em tempo $O(t^2(n))$.

A máquina S opera simulando M, como descrito no Teorema 3.13. Para revisar aquela simulação, lembramos que S usa sua única fita para representar o conteúdo sobre todas as k fitas de M. As fitas são armazenadas consecutivamente, com as posiçcões das cabeças de M marcadas sobre as células apropriadas.

Inicialmente, S coloca sua fita no formato que representa todas as fitas de M e aí então simula os passos de M. Para simular um passo, S faz uma varredura em toda a informação armazenada na sua fita para determinar os símbolos sob as cabeças das fitas de M. Então S faz uma outra passagem sobre sua fita para atualizar o conteúdo da fita e das posições das cabeças. Se uma das cabeças de M move para a direita sobre a porção anteriormente não lida de sua fita, S tem que aumentar a quantidade de espaço alocado para sua fita. Ela faz isso deslocando uma porção de sua própria fita uma célula para a direita.

Agora analisamos essa simulação. Para cada passo de M, a máquina S faz duas passagens sobre a porção ativa de sua fita. A primeira obtém a informação necessária para determinar o próximo movimento e a segunda o realiza. O comprimento da porção ativa da fita de S determina quanto tempo S leva para varrê-la, por isso temos que determinar um limitante superior para esse comprimento. Para fazer isso tomamos a soma dos comprimentos das porções ativas das k fitas de M. Cada uma dessas porções ativas tem comprimento no máximo $t(n)$ porque M usa $t(n)$ células de fita em $t(n)$ passos se a cabeça move para a direita em todo passo e muito menos se uma cabeça em algum momento move para a esquerda. Por conseguinte, uma varredura da porção ativa da fita de S usa $O(t(n))$ passos.

Para simular cada um dos passos de M, S realiza duas varreduras e possivelmente até k deslocamentos para a direita. Cada uma usa um tempo $O(t(n))$, portanto o tempo total para S simular um dos passos de M é $O(t(n))$.

Agora limitamos o tempo total usado pela simulação. O estágio inicial, onde S coloca sua fita no formato apropriado, usa $O(n)$ passos. Depois disso, S simula cada um dos $t(n)$ passos de M, usando $O(t(n))$ passos, portanto essa parte da simulação usa $t(n) \times O(t(n)) = O(t^2(n))$ passos. Conseqüentemente, a simulação inteira de M usa $O(n) + O(t^2(n))$ passos.

Assumimos que $t(n) \geq n$ (uma suposição razoável porque M não poderia nem mesmo ler a entrada toda em menos tempo). Por conseguinte, o tempo de

execução de S é $O(t^2(n))$ e a prova está completa.

A seguir, consideramos o teorema análogo para máquinas de Turing não-determinísticas de uma-única-fita. Mostramos que qualquer linguagem que é decidível sobre uma dessas máquinas é decidível sobre uma máquina de Turing determinística de uma-única-fita que requer significativamente mais tempo. Antes de fazê-lo, temos que definir o tempo de execução de uma máquina de Turing não-determinística. Lembre-se de que uma máquina de Turing não-determinística é um decisor se todos os ramos de sua computação param sobre todas as entradas.

DEFINIÇÃO 7.9

Seja N uma máquina de Turing não-determinística que é um decisor. O ***tempo de execução*** de N é a função $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, onde $f(n)$ é o número máximo de passos que N usa sobre qualquer ramo de sua computação sobre qualquer entrada de comprimento n, como mostrado na Figura 7.10.

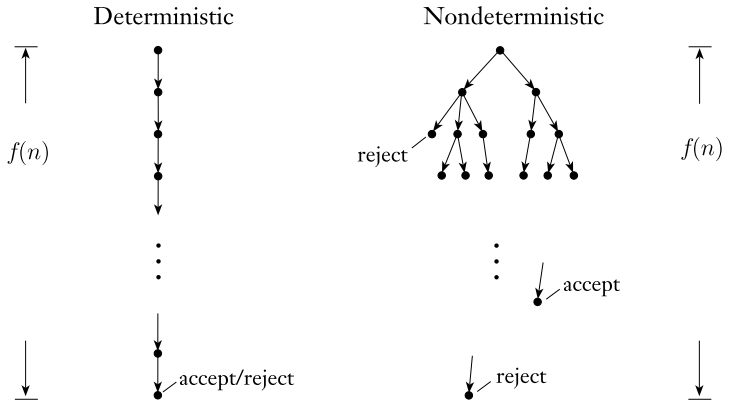


FIGURA 7.10
Medindo tempo determinístico e não-determinístico

A definição do tempo de execução de uma máquina de Turing não-determinística não tem o objetivo de corresponder a nenhum dispositivo de computação do mundo-real. Ao contrário, ela é uma definição matemática útil que assiste na caracterização da complexidade uma classe importante de problemas computacionais, como demonstramos em breve.

TEOREMA 7.11

Seja $t(n)$ uma função, onde $t(n) \geq n$. Então toda máquina de Turing não-determinística de uma-única-fita de tempo $t(n)$ tem uma máquina de Turing não-determinística de uma-única-fita de tempo $2^{O(t(n))}$.

PROVA Seja N uma MT não-determinística rodando em tempo $t(n)$. Construímos uma MT determinística D que simula N como na prova do Teorema 3.16 fazendo uma busca na árvore de computação não-determinísica de N. Agora analisamos essa simulação.

Sobre uma entrada de comprimento n, todo ramo da árvore de computação não-determinística de N tem um comprimento no máximo $t(n)$. Todo nó na árvore pode ter no máximo b filhos, onde b é o número máximo de escolhas legais dado pela funcção de transição de N. Portanto, o número total de folhas na árvore é no máximo $b^{t(n)}$.

A simulação procede explorando sua árvore na disciplina de busca por largura. Em outras palavras, ela visita todos os nós de profundidade d antes de continuar para quaisquer dos nós na profundidade $d + 1$. O algoritmo dado na prova do Teorema 3.16 ineficientemente começa na raiz e desce para um nó sempre que ele visita esse nó, mas eliminando essa ineficiência não altera o enunciado do teorema corrente, portanto deixamos como está. O número total de nós na árvore é menor que duas vezes o número máximo de folhas, portanto limitamo-lo por $O(b^{t(n)})$. O tempo para iniciar da raiz e descer a um nó é $O(t(n))$. Conseqüentemente, o tempo de execução de D é $O(t(n)b^{t(n)}) = 2^{O(t(n))}$.

Conforme descrito no Teorema 3.16, a MT D tem três fitas. Converter para uma MT de uma-única-fita no máximo eleva ao quadrado o tempo de execução, pelo Teorema 7.8. Por conseguinte, o tempo de execução do simulador de uma-única-fita é $\left(2^{O(t(n))}\right)^2 = 2^{O(2t(n))} = 2^{O(t(n))}$, e o teorema está provado.

7.2

A CLASSE P

Os Teoremas 7.8 e 7.11 ilustram uma importante distinção. Por um lado, demonstramos uma diferença de no máximo uma potência quadrática ou *polinomial* entre a complexidade de tempo de problemas medida em máquinas de Turing determinísticas de uma-única-fita e multifitas. Por outro lado, mostramos uma diferença no máximo *exponencial* entre a complexidade de tempo de problemas em máquinas de Turing determinístics e não-determinísticas.

TEMPO POLINOMIAL

Para nossos propósitos, diferenças polinomiais em tempo de execução são consideradas pequenas, enquanto que diferenças exponenciais são consideradas grandes. Vamos verpor que escolhemos fazer essa separação entre polinômios e exponenciais ao invés de entre algumas outras classes de funções.

Primeiro, note a dramática diferença entre a taxa de crescimento de polinômios que ocorrem tipicamente tais como n^3 e exponenciais típicas tais como 2^n. Por exemplo, suponha que n seja 1000, o tamanho de uma entrada razoável para um algoritmo. Nesse caso, n^3 é 1 bilhão, um número grande porém administrável, enquanto que 2^n é um número muito maior que o número de átomos no universo. Algoritmos de tempo polinomial são suficientemente rápidos para muitos propósitos, mas algoritmos de tempo exponencial raramente são úteis.

Algoritmos de tempo exponencial surgem tipicamente quando resolvemos problemas buscando exaustivamente dentro de um espaço de soluções, denominada ***busca pela força-bruta***. Por exemplo, uma maneira de fatorar um número em seus primos constituintes é buscar por todos os potenciais divisores. O tamanho do espaço de busca é exponencial, portanto essa busca usa tempo exponencial. Às vezes, a busca por força-bruta pode ser evitada através de um entendimento mais profundo de um problema, que pode revelar um algoritmo de tempo polinomial de utilidade maior.

Todos os modelos computacionais determinísticos razoáveis são ***polinomialmente equivalentes***. Ou seja, qualquer um deles pode simular um outro com apenas um aumento polinomial no tempo de execução. Quando dizemos que todos os modelos determinísticos razoáveis são polinomialmente equivalentes, não tentamos definir *razoável*. Entretanto, temos em mente uma noção suficientemente ampla para incluir modelos que aproximam de perto os tempos de execução em computadores reais. Por exemplo, o Teorema 7.8 mostra que os modelos de máquina de Turing determinística de uma-única-fita e multifita são polinomialmente equivalentes.

Daqui por diante focalizaremos em aspectos da teoria da complexidade de tempo que não são afetados por diferenças polinomiais em tempo de execução. Consideramos tais diferenças como sendo insignificantes e as ignoramos. Fazer isso nos permite desenvolver a teoria de uma maneira que não depende da escolha de um modelo específico de computação. Lembre-se de que nosso objetivo é apresentar as propriedades fundamentais da *computação*, ao invés das máquinas de Turing ou qualquer outro modelo especial.

Você pode achar que desconsiderar diferenças polinomiais em tempo de execução é absurdo. Programadores reais certamente se preocupam com tais diferenças e trabalham duro somente para fazer com que seus programas rodem duas vezes mais rápido. Entretanto, desconsideramos fatores constantes pouco tempo atrás quando introduzimos a notação assintótica. Agora propomos desconsiderar as diferenças muito maiores polinomiais, tais como aquela entre tempo n e tempo n^3.

Nossa decisão de desconsiderar diferenças polinomiais não implica que consideramos tais diferenças desimportantes. Ao contrário, certamente consideramos

a diferença entre tempo n e tempo n^3 como sendo uma importante diferença. Mas algumas questões, tais como a polinomialidade ou não-polinomialidade do problema da fatoração, não dependem das diferenças polinomiais e são importantes também. Meramente escolhemos focar nesse tipo de questão aqui. Ignorar as árvores para ver a floresta não significa que uma é mais importante que a outra—isso simplesmente dá uma perspectiva diferente.

Agora chegamos a uma importante definição em teoria da complexidade.

DEFINIÇÃO 7.12

P é a classe de linguagens que são decidíveis em tempo polinomial sobre uma máquina de Turing determinística de uma-única-fita. Em outras palavras,

$$\mathrm{P} = \bigcup_k \mathrm{TIME}(n^k).$$

A classe P tem um papel central em nossa teoria e é importante porque

1. P é invariante para todos os modelos de computação que são polinomialmente equivalentes à máquina de Turing determinística de uma-única-fita, e
2. P aproximadamente corresponde à classe de problemas que são realisticamente solúveis num computador.

O item 1 indica que P é uma classe matematicamente robusta. Ela não é't afetada pelos particulares do modelo de computação que estamos usando.

O item 2 indica que P é relevante de um ponto de vista prático. Quando um problema está em P, temos um método de resolvê-lo que roda em tempo n^k para alguma constante k. Se esse tempo de execução é prático depende de k e da aplicação. É claro que um tempo de execução de n^{100} é improvável de ser de qualquer uso prático. Não obstante, chamar de tempo polinomial o limiar de solubilidade prática tem provado ser útil. Uma vez que um algoritmo de tempo polinomial tenha sido encontrado para um problema que anteriormente parecia requerer tempo exponencial, alguma percepção chave sobre ele foi obtida, e reduções adicionais na sua complexidade usuamente seguem, freqüentemente a ponto de real utilidade prática.

EXEMPLOS DE PROBLEMAS EM P

Quando apresentamos um algoritmo de tempo polinomial, damos uma descrição de alto-nível sem referência a características de um modelo computacional específico. Fazendo-se isso evita-se detalhes tediosos de movimentos de fitas e de cabeças. Precisamos seguir certas convenções ao descrever um algoritmo de modo que possamos analisá-lo com vistas à polynomialidade.

Descrevemos algoritmos com estágios numerados. A noção de um estágio de um algoritmo é análoga a um passo de uma máquina de Turing, embora é claro que implementar um estágio de um algoritmo numa máquina de Turing, em geral, vai requerer muitos passos de máquina de Turing.

Quando analisamos um algoritmo para mostrar que ele roda em tempo polinomial, precisamos fazer duas coisas. Primeiro, temos que dar um limitante superior polinomial (usualmente em notação O-grande) para o número de estágios que o algoritmo usa quando ele roda sobre uma entrada de comprimento n. Então, temos que examinar os estágios individuais na descrição do algoritmo para assegurar que cada um possa ser implementado em tempo polinomial num modelo determinístico razoável. Escolhemos os estágios quando descrevemos o algoritmo para tornar essa segunda parte da análise fácil de fazer. Quando ambas as tarefas tiverem sido completadas, podemos concluir que o algoritmo roda em tempo polinomial porque demonstramos que ele roda por um número polinomial de estágios, cada um dos quais pode ser feito em tempo polinomial, e a composição de polinômios é um polinômio.

Um ponto que requer atenção é o método de codificação usado para os problemas. Continuamos a usar a notação entre-colchetes $\langle \cdot \rangle$ para indicar uma codificação razoável de um ou mais objetos em uma cadeia, sem especificar qualquer método de codificação específico. Agora, um método razoável é aquele que permite codificação e decodificação de objetos em tempo polinomial em representações internas naturais ou em outras codificações razoáveis. Métodos de codificação familiares para grafos, autômatos e coisas do gênero são razoáveis. Mas note que notação unária para codificar números (como no número 17 codificado pela cadeia unária `11111111111111111`) não é razoável porque é exponencialmente maior que codificações verdadeiramente razoáveis, tais como notação na base k para qualquer $k \geq 2$.

Muitos problemas computacionais que você encontra neste capítulo contêm codificações de grafos. Uma codificação razoável de um grafo é uma lista de seus nós e arestas. Uma outra é a ***matriz de adjacência***, onde a (i, j)-ésima entrada é 1 se existe uma aresta do nó i para o nó j e 0 caso contrário. Quando analisamos algoritmos sobre grafos, o tempo de execução pode ser calculado em termos do número de nós ao invés do tamanho da representação do grafo. Em representações razoáveis de grafos, o tamanho da representação é um polinômio no número de nós. Por conseguinte, se analisamos um algoritm e mostramos que seu tempo de execução é polinomial (ou exponencial) no número de nós, sabemos que ele é polinomial (ou exponencial) no tamanho da entrada.

O primeiro problema concerne grafos direcionados. Um grafo direcionado G contém os nós s e t, como mostrado na Figura 7.13. O problema *CAMINH* é determinar se um caminho direcionado existe de s para t. Seja

CAMINH $= \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ é um grafo direcionado que tem um caminho direcionado de s para $t\}$.

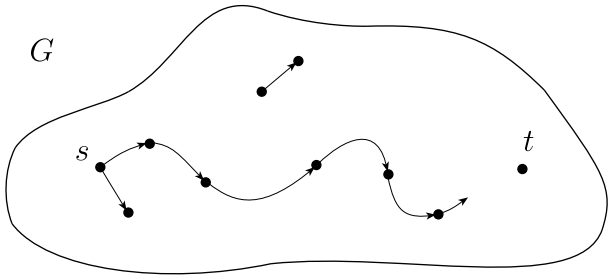


FIGURA 7.13
O problema *CAMINH*: Existe um caminho de s para t?

TEOREMA 7.14

CAMINH $\in$ P.

IDÉIA DA PROVA Provamos esse teorema apresentando um algoritmo de tempo polinomial que decide *CAMINH*. Antes de descrever esse algoritmo, vamos observar que um algoritmo de força-bruta para esse problema não é suficientemente rápido.

Um algoritmo de força-bruta para *CAMINH* procede examinando todos os caminhos potenciais em G e determinando se algum é um caminho direcionado de s para t. Um caminho potencial é uma seqüência de nós em G tendo um comprimento de no máximo m, onde m é o número de nós em G. (Se algum caminho direcionado existe de s para t, um tendo um comprimento de no máximo m existe porque repetir um nó nunca é necessário.) Mas o número de tais caminhos potenciais é aproximadamente m^m, o que é exponencial no número de nós em G. Por conseguinte, esse algoritmo de força-bruta usa tempo exponencial.

Para obter um algoritmo de tempo polinomial para *CAMINH* temos que fazer algo que evite a força bruta. Uma alternativa é usar um método de busca-em-grafo tal como busca-por-largura. Aqui, marcamos sucessivamente todos os nós em G que são atingíveis a partir de s por caminhos direcionados de comprimento 1, e então 2, e então 3, até m. Limitar o tempo de execução dessa estratégia por um polinômio é fácil.

PROVA Um algortimo de tempo polinomial M para *CAMINH* opera da seguinte forma.

$M =$ "Sobre a entrada $\langle G, s, t\rangle$ onde G é um grafo direcionado com nós s e t:

1. Ponha uma marca sobre o nó s.
2. Repita o seguinte até que nenhum nó adicional esteja marcado:
3. Faça uma varredura em todas as arestas de G. Se uma aresta (a, b) for encontrada indo de um nó marcado a para um nó

não marcado b, marque o nó b.

4. Se t estiver marcado, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*."

Agora analisamos esse algoritmo para mostrar que ele roda em tempo polinomial. Obviamente, os estágios 1 e 4 são executados apenas uma vez. O estágio 3 roda no máximo m vezes porque cada vez exceto a última ele marca um nó adicional em G. Por conseguinte, o número total de estágios usados é no máximo $1 + 1 + m$, dando um tempo polinomial no tamanho de G.

Os estágios 1 e 4 de M são facilmente implementados em tempo polinomial em qualquer modelo determinístico razoável. O estágio 3 envolve uma varredura da entrada e um teste para ver se certos nós estão marcados, o que também é facilmente implementado em tempo polinomial. Logo, M é um algoritmo de tempo polinomial para *CAMINH*.

Vamos nos voltar para um outro exemplo de um algoritmo de tempo polinomial. Vamos dizer que dois números são ***primos entre si*** se 1 é o maior inteiro que divide ambos. Por exemplo, 10 e 21 são primos entre si, muito embora nenhum deles seja um número primo por si só, enquanto que 10 e 22 não são primos entre si porque ambos são divisíveis por 2. Seja *RELPRIME* o problema de se testar se dois números são primos entre si. Portanto

$$\textit{RELPRIME} = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ e } y \text{ são primos entre si}\}.$$

TEOREMA 7.15

RELPRIME $\in$ P.

IDÉIA DA PROVA Um algoritmo que resolve esse problema busca entre todos os possíveis divisores de ambos os números e aceita se nenhum deles é maior que 1. Entretanto, a magnitude de um número representado em binário, ou em qualquer outra notação na base k para $k \geq 2$, é exponencial no comprimento de sua representação. Conseqüentemente esse algoritmo de força-bruta busca entre um número exponencial de divisores potenciais e tem um tempo de execução exponencial.

Ao invés disso, resolvemos esse problema com um procedimento numérico antigo, chamado ***algoritmo euclideano***, para computar o máximo divisor comum. O ***máximo divisor comum*** de números naturais x e y, escrito $\gcd(x, y)$, é o maior inteiro que divide ambos x e y. Por exemplo, $\gcd(18, 24) = 6$. Obviamente que x e y são primos entre si sse $\gcd(x, y) = 1$. Descrevemos o algoritmo euclideano como algoritmo E na prova. Ele usa a função mod, onde $x \bmod y$ é o resto da divisão inteira de x por y.

PROVA O algoritmo euclideano E é como segue.

E = "Sobre a entrada $\langle x, y \rangle$, onde x e y são números naturais em binário:

1. Repita até que $y = 0$:
2. Atribua $x \leftarrow x \bmod y$.
3. Intercambie x e y.
4. Dê como saída x."

O algoritmo R resolve *RELPRIME*, usando E como uma subrotina.

R = "Sobre a entrada $\langle x, y \rangle$, onde x e y são números naturais em binário:

1. Rode E sobre $\langle x, y \rangle$.
2. Se o resultado for 1, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*."

Claramente, se E roda corretamente em tempo polinomial, assim faz R e portanto somente precisamos analisar E com relação a tempo e corretude. A corretude desse algoritmo é bem conhecida portanto não mais a discutiremos aqui.

Para analisar a complexidade de tempo de E, primeiro mostramos que toda execução do estágio 2 (exceto possivelmente a primeira), corta o valor de x por no mínimo a metade. Após o estágio 2 ser executado, $x < y$ devido à natureza da função $\bmod$. Após o estágio 3, $x > y$ porque os dois números foram intercambiados. Daí, quando o estágio 2 for subseqüentemente executado, $x > y$. Se $x/2 \geq y$, então $x \bmod y < y \leq x/2$ e x cai no mínimo pela metade. Se $x/2 < y$, então $x \bmod y = x - y < x/2$ e x cai no mínimo pela metade.

Os valores de x e y são intercambiados toda vez que o estágio 3 é executado, portanto cada um dos valores originais de x e y são reduzidos no mínimo pela metade uma vez não e outra sim através do laço. Conseqüentemente o número máximo de vezes que os estágios 2 e 3 são executados é o menor entre $2 \log_2 x$ e $2 \log_2 y$. Esses logaritmos são proporcionais aos comprimentos das representações, dando o número de estágios executados como $O(n)$. Cada estágio de E usa somente tempo polinomial, portanto o tempo de execução total é polinomial.

O exemplo final de um algoritmo de tempo polinomial mostra que toda linguagem livre-do-contexto é decidível em tempo polinomial.

TEOREMA 7.16

Toda linguagem livre-do-contexto é um membro de P.

IDÉIA DA PROVA No Teorema 4.9 provamos que toda LLC é decidível. Para fazer isso demos um algoritmo para cada LLC que a decide. Se esse algoritmo roda em tempo polinomial, o teorema corrente segue como um corolário. Vamos relembrar aquele algoritmo e descobrir se ele roda suficientemente rápido.

Seja L uma LLC gerada por GLC G que está na forma normal de Chomsky. Do Problema 2.26, qualquer derivação de uma cadeia w tem $2n - 1$ passos, onde n é o comprimento de w porque G está na forma normal de Chomsky. O decisor

para L funciona tentando todas as derivações possíveis com $2n-1$ passos quando sua entrada é uma cadeia de comprimento n. Se alguma dessas for uma derivação de w, o decisor aceita; caso contrário, ele rejeita.

Uma análise rápida desse algoritmo mostra que ele não roda em tempo polinomial. O número de derivações com k passos pode ser exponencial em k, portanto esse algoritmo pode requerer tempo exponencial.

Para obter um algoritmo de tempo polinomial introduzimos uma técnica a poderosa chamada ***programação dinâmica***. Essa técnica usa a acumulação de informação sobre subproblemas menores para resolver problemas maiores. Guardamos a solução para qualquer subproblema de modo que precisamos resolvê-lo somente uma vez. Fazemos isso montando uma tabela de todos os subproblemas e entrando com suas soluções sistematicamente à medida que as encontramos.

Nesse caso, consideramos os subproblemas de se determinar se cada variável em G gera cada subcadeia de w. O algoritmo entra com a solução para subproblema numa tabela $n \times n$. Para $i \leq j$ a (i, j)-ésima entrada da tabela contém a coleção de variáveis que geram a subcadeia $w_i w_{i+1} \cdots w_j$. Para $i > j$ as entradas na tabela não são usadas.

O algoritmo preenche as entradas na tabela para cada subcadeia de w. Primeiro ele preenche as entradas para as subcadeias de comprimento 1, então aquelas de comprimento 2, e assim por diante. Ele usa as entradas para comprimentos mais curtos para assistir na determinação das entradas para comprimentos mais longos.

Por exemplo, suponha que o algoritmo já tenha determinado quais variáveis geram todas as subcadeias até o comprimento k. Para determinar se uma variável A gera uma subcadeia específica de comprimento $k+1$ o algoritmo divide aquela subcadeia em duas partes não vazias nas k maneiras possíveis. Para cada divisão, o algoritmo examina cada regra $A \rightarrow BC$ para determinar se B gera a primeira parte e C gera a segunda parte, usando entradas previamente computadas na tabela. Se ambas B e C geram as partes respectivas, A gera a subcadeia e portanto é adicionada à entrada associada na tabela. O algoritmo inicia o processo com as cadeias de comprimento 1 examinando a tabela para as regras $A \rightarrow \mathtt{b}$.

PROVA O seguinte algoritmo D implementa a idéia da prova. Seja G uma GLC na forma normal de Chomsky gerando a LLC L. Assuma que S seja a variável inicial. (Lembre-se de que a cadeia vazia é trabalhada de forma especial numa gramática na forma normal de Chomsky. O algoritmo lida com o caso especial no qual $w = \varepsilon$ no estágio 1.) Os comentários aparecem dentro de parênteses duplos.

$D =$ "Sobre a entrada $w = w_1 \cdots w_n$:

1. Se $w = \varepsilon$ e $S \rightarrow \varepsilon$ for uma regra, *aceite*. [[handle $w = \varepsilon$ case]]
2. Para $i = 1$ até n: [[examine each substring of length 1]]
3. Para cada variável A:

4. Teste se $A \rightarrow \mathtt{b}$ é uma regra, onde $\mathtt{b} = w_i$.
5. Se for, coloque A em $table(i, i)$.
6. Para $l = 2$ até n: ⟦l is the length of the substring⟧
7. Para $i = 1$ até $n - l + 1$: ⟦i is the start position of the substring⟧
8. Faça $j = i + l - 1$, ⟦j is the end position of the substring⟧
9. Para $k = i$ até $j - 1$: ⟦k is the split position⟧
10. Para cada regra $A \rightarrow BC$:
11. Se $table(i, k)$ contém B e $table(k + 1, j)$ contém C, ponha A em $table(i, j)$.
12. Se S estiver em $table(1, n)$, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*."

Agora analisamos D. Cada estágio é facilmente implementado para rodar em tempo polinomial. Os estágios 4 e 5 rodam no máximo nv vezes, onde v é o número de variáveis em G e é uma constante fixa independente de n; logo, esses estágios rodam $O(n)$ vezes. O estágio 6 roda no máximo n vezes. Cada vez que o estágio 6 roda, o estágio 7 roda no máximo n vezes. Cada vez que o estágio 7 roda, os estágios 8 e 9 rodam no máximo n vezes. Cada vez que o estágio 9 roda, o estágio 10 roda r vezes, onde r é o número de regras de G e é uma outra constante fixa. Portanto, o estágio 11, o laço mais interno do algoritmo, roda $O(n^3)$ vezes. Somando o total mostra que D executa $O(n^3)$ estágios.

7.3

A CLASSE NP

Como observamos na Seção 7.2, podemos evitar a busca de força-bruta em muitos problemas e obter soluções de tempo polinomial. Entretanto, tentativas de evitar a força bruta em alguns outros problemas, incluindo muitos interessantes e úteis, não têm sido bem sucedidas, e algoritmos de tempo polinomial que os resolvem não se sabe se existem.

Por que não temos tido sucesso em encontrar algoritmos de tempo polinomial para esses problemas? Não sabemos a resposta para essa importante questão. Talvez esses problemas tenham algoritmos de tempo polinomial que ainda não tenham sido descobertos, e que se baseiem em princípios desconhecidos. Ou possivelmente alguns desses problemas simplesmente *não podem* ser resolvidos em tempo polinomial. Eles podem ser intrinsecamente difíceis.

Uma descoberta notável concernente a essa questão mostra que as complexidades de muitos problemas estão interligadas. Um algoritmo de tempo polinomial para um desses problemas pode ser usado para resolver uma classe inteira de problemas. Para entender esse fenômeno, vamos começar com um exemplo.

Um ***caminho hamiltoniano*** em um grafo direcionado G é um caminho direci-

onado que passa por cada nó exatamente uma vez. Consideramos o problema de se testar se um grafo direcionado contém um caminho hamiltoniano conectando dois nós especificados, como mostrado na figura abaixo. Seja

$$\textit{HAMPATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ é um grafo direcionado com um caminho hamiltoniano de } s \text{ para } t\}.$$

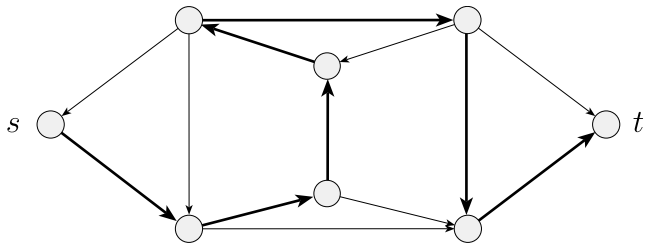


FIGURA 7.17
Um caminho hamiltoniano passa por todo nó exatamente uma vez

Podemos facilmente obter um algoritmo de tempo exponencial para o problema *HAMPATH* modificando o algoritmo de força-bruta para *CAMINH* dado no Teorema 7.14. Precisamos apenas adicionar um teste para verificar que o caminho potencial é hamiltoniano. Ninguém sabe se *HAMPATH* é solúvel em tempo polinomial.

O problema *HAMPATH* de fato tem uma característica chamada ***verificabilidade polinomial*** que é importante para entender sua complexidade. Muito embora não conheçamos uma forma rápida (i.e., de tempo polinomial) de determinar se um grafo contém um caminho hamiltoniano, se tal caminho fosse descoberto de alguma forma (talvez usando o algoritmo de tempo exponencial), poderímos facilmente convencer uma outra pessoa de sua existência, simplesmente apresentando-o. Em outras palavras, *verificar* a existência de um caminho hamiltoniano pode ser muito mais fácil que *determinar* sua existência.

Um outro problema polinomialmente verificável é compostura. Lembre-se de que um número natural é ***composto*** se ele é o produto de dois inteiros maiores que 1 (i.e., um número composto é aquele que não é um número primo). Seja

$$\textit{COMPOSITES} = \{x \mid x = pq, \text{ para inteiros } p, q > 1\}.$$

Podemos facilmente verificar que um número é composto—tudo o que é necessário é um divisor desse número. Recentemente, um algoritmo de tempo polinomial para testar se um númer é primo ou composto foi descoberto, mas ele é consideravelmente mais complicado que o método precedente para verificar compostura.

Alguns problemas podem não ser polinomialmente verificáveis. Por exem-

plo, tome $\overline{HAMPATH}$, o complemento do problema *HAMPATH*. Mesmo se pudéssemos determinar (de alguma forma) se um grafo realmente *não* tivesse um caminho hamiltoniano, não conhecemos uma maneira de permitir a uma outra pessoa verificar sua não existência sem usar o mesmo algoritmo de tempo exponencial para fazer a determinação primeiramente. Uma definição formal segue.

DEFINIÇÃO 7.18

Um ***verificador*** para uma linguagem A é um algoritmo V, onde

$$A = \{w | \ V \text{ aceita } \langle w, c\rangle \text{ para alguma cadeia } c\}.$$

Medimos o tempo de um verificador somente em termos do comprimento de w, portanto um ***verificador de tempo polinomial*** roda em tempo polinomial no comprimento de w. Uma linguagem A é ***polinomialmente verificável*** se ela tem um verificador de tempo polinomial.

Um verificador usa informaçã adicional, representada pelo símbolo c na Definição 7.18, para verificar que uma cadeia w é um membro de A. Essa informação é chamada ***certificado***, ou ***prova***, da pertinência a A. Observe que, para verificadores polinomiais, o certificado tem comprimento polinomial (no comprimento de w) porque isso é tudo que o verificador pode acessar no seu limitante de tempo. Vamoss aplicar essa definição às linguagens *HAMPATH* e *COMPOSITES*.

Para o problema *HAMPATH* problem, um certificado para uma cadeia $\langle G, s, t\rangle \in$ *HAMPATH* é simplesmente o caminho hamiltoniano de s a t. Para o problema *COMPOSITES* problem, um certificado para o número composto x é simplesmente um de seus divisores. Em ambos os casos o verificador pode checar em tempo polinomial que a entrada está na linguagem quando ela recebe o certificado.

DEFINIÇÃO 7.19

NP é a classe de linguagens que têm verificadores de tempo polinomial.

A classe NP é importante porque ela contém muitos problemas de interesse prático. Da discussão precedente, ambos *HAMPATH* e *COMPOSITES* são membros de NP. Como mencionamos, *COMPOSITES* é também um membro de P que é um subconjunto de NP, mas provar esse resultado mais forte é muito mais difícil. O termo NP vem de ***tempo polinomial não-determinístico*** e é derivado de uma caracterização alternativa usando máquinas de Turing não-determinísticas de tempo polinomial. Problemas em NP são às vezes chamados problemas NP.

A seguir está uma máquina de Turing não-determinística (MTN) que decide o problema *HAMPATH* problem em tempo polinomial não-determinístico. Lembre-se de que na Definição 7.9 especificamos o tempo de uma máquina não-determinística como sendo o tempo usado pelo ramo de computação mais longo.

N_1 = "Sobre a entrada $\langle G, s, t\rangle$, onde G é um grafo direcionado com nós s e t:

1. Escreva uma lista de m números, $p_1, \ldots, p_m$, onde m é o número de nós em G. Cada número na lista é selecionado não-deterministicamente sendo entre 1 e m.
2. Verifique se há repetições na lista. Se alguma for encontrada, *rejeite*.
3. Verifique se $s = p_1$ e $t = p_m$. Se algum falhar, *rejeite*.
4. Para cada i entre 1 e $m - 1$, verifique se (p_i, p_{i+1}) é uma aresta de G. Se alguma não for, *rejeite*. Caso contrário, todos os testes foram positivos, portanto *aceite*."

Para analisar esse algoritmo e verificar que ele roda em tempo polinomial não-determinístico, examinamos cada um de seus estágios. No estágio 1, a escolha não-determinística claramente roda em tempo polinomial. Nos estágios 2 e 3, cada parte é uma simples verificação, portanto juntos eles rodam em tempo polinomial. Finalmente, o estágio 4 também claramente roda em tempo polinomial. Por conseguinte, esse algoritmo roda em tempo polinomial não-determinístico.

TEOREMA 7.20

Uma linguagem está em NP sse ela é decidida por alguma máquina de Turing não-determinística de tempo polinomial.

IDÉIA DA PROVA Mostramos como converter um verificador de tempo polinomial para uma MTN de tempo polinomial equivalente e vice versa. A MTN simula o verificador adivinhando o certificado. O verificador simula a MTN usando o ramo de computação de aceitação como o certificado.

PROVA Para a direção para a frente desse teorema, suponha que $A \in$ NP e mostre que A é decidida por uma MTN de tempo polinomial N. Seja V o verificador de tempo polinomial para A que existe pela definição de NP. Assuma que V seja uma MT que roda em tempo n^k e construa N da seguinte maneira.

N = "Sobre a entrada w de comprimento n:

1. Não-deterministicamente selecione uma cadeia c de comprimento no máximo n^k.
2. Rode V sobre a entrada $\langle w, c\rangle$.
3. Se V aceita, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Para provar a outra direção do teorema, assuma que A seja decidida por uma MTN de tempo polinomial N e construa um verificador de tempo polinomial V da seguinte maneira.

V = "Sobre a entrada $\langle w, c \rangle$, onde w e c são cadeias:

1. Simule N sobre a entrada w, tratar cada símbolo de c como uma descrição da escolha não-determinística a fazer a cada passo (como na prova do Teorema 3.16).
2. Se esse ramo da computação de N aceita, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Definimos a classe de complexidade de tempo não-determinístico $\mathrm{NTIME}(t(n))$ como análoga à classe de complexidade de tempo determinístico $\mathrm{TIME}(t(n))$.

DEFINIÇÃO 7.21

NTIME*(t(n))* $= \{L \mid L$ é uma linguagem decidida por uma máquina de Turing não-determinística de tempo $O(t(n))\}$.

COROLÁRIO 7.22

$\mathrm{NP} = \bigcup_k \mathrm{NTIME}(n^k)$.

A classe NP é insensível à escolha do modelo computacional não-determinístico razoável porque todos esses modelos são polinomialmente equivalentes. Ao descrever e analisar algoritmos de tempo polinomial não-determinísticos, seguimos as convenções precedentes para algoritmos determinísticos de tempo polinomial. Cada estágio de um algoritmo não-determinístico de tempo polinomial deve ter uma implementação óbvia em tempo polinomial não-determinístico em um modelo computacional não-determinístico razoável. Analisamos o algoritmo para mostrar que todo ramo usa no máximo uma quantidade polinomial de estágios.

EXEMPLOS DE PROBLEMAS EM NP

Um ***clique*** em um grafo não-direcionado é um subgrafo, no qual todo par de nós está conectado por uma aresta. Um ***k-clique*** é um clique que contém k nós. A Figura 7.23 ilustra um grafo tendo um 5-clique.

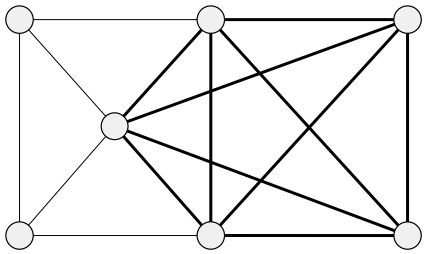


FIGURA 7.23
Um grafo com um 5-clique

O problema do clique é determinar se um grafo contém um clique de um tamanho especificado. Seja

$$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ é um grafo não-direcionado com um } k\text{-clique}\}.$$

TEOREMA 7.24

CLIQUE está em NP.

IDÉIA DA PROVA O clique é o certificado.

PROVA Aqui está um verificador V para *CLIQUE*.

V = "Sobre a entrada $\langle\langle G, k\rangle, c\rangle$:

1. Teste se c é um conjunto de k nós em G
2. Teste se G contém todas as arestas conectando nós em c.
3. Se ambos os testes retornam positivo, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

PROVA ALTERNATIVA Se você preferir pensar em NP em termos de máquinas de Turing não-determinísticas de tempo polinomial, você pode provar esse teorema fornecendo uma que decida *CLIQUE*. Observe a similaridade entre as duas provas.

N = "Sobre a entrada $\langle G, k\rangle$, onde G é um grafo:

1. Não-deterministicamente selecione um subconjunto c de k nós de G.
2. Teste se G contém todas as arestas conectando nós em c.
3. Se sim, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

A seguir consideramos o problema *SUBSET-SUM* concernente a aritmética

de inteiros. Nesse problema temos uma coleção de números $x_1, \ldots, x_k$ e um número alvo t. Desejamos determinar se a coleção contém uma subcoleção que soma t. Por conseguinte,

$$\textit{SUBSET-SUM} = \{\langle S, t\rangle \mid S = \{x_1, \ldots, x_k\} \text{ e para algum } \{y_1, \ldots, y_l\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}, \text{ temos } \Sigma y_i = t\}.$$

Por exemplo, $\langle\{4, 11, 16, 21, 27\}, 25\rangle \in$ *SUBSET-SUM* porque $4 + 21 = 25$. Note que $\{x_1, \ldots, x_k\}$ e $\{y_1, \ldots, y_l\}$ são considerados como ***multiconjuntos*** e portanto permitem repetição de elementos.

TEOREMA 7.25

SUBSET-SUM está em NP.

IDÉIA DA PROVA O subconjunto é o certificado.

PROVA O que segue é um verificador V para *SUBSET-SUM*.

$V =$ "Sobre a entrada $\langle\langle S, t\rangle, c\rangle$:

1. Teste se c é uma coleção de números que somam t.
2. Teste se S contém todos os números em c.
3. Se ambos os testes retornem positivo, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

PROVA ALTERNATIVA Podemos também provar esse teorema dando uma máquina de Turing não-determinística de tempo polinomial para *SUBSET-SUM* da seguinte forma.

$N =$ "Sobre a entrada $\langle S, t\rangle$:

1. Não-deterministicamente selecione um subconjunto c dos números em S.
2. Teste se c é uma coleção de números que somam t.
3. Se o teste der positivo, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Observe que os complementos desses conjntos, $\overline{\textit{CLIQUE}}$ e $\overline{\textit{SUBSET-SUM}}$, não são obviamente membros de NP. Verificar que algo *não* está presente parece ser mais difícil que verificar que *está* presente. Fazemos uma classe de complexidade separada, chamada coNP, que contém as linguagens que são complementos de linguagens em NP. Não sabemos se coNP é diferente de NP.

A QUESTÃ P VERSUS NP

Como temos insistido, NP é a classe de linguagens que são solúveis em tempo polinomial numa máquina de Turing não-determinística, ou, equivalentemente,

ela é a classe de linguagens nas quais pertinência na linguagem pode ser verificada em tempo polinomial. P é a classe de linguagens onde pertinência pode testada em tempo polinomial. Resuma essa informação da seguinte forma, onde nos referimos frouxamente a solúvel em tempo polinomial como solúvel "rapidamente."

P = a classe de linguagens para as quais pertinência pode ser *decidida* rapidamente.

NP = a classe de linguagens para as quais pertinência pode ser *verificada* rapidamente.

Apresentamos exemplos de linguagens, tais como *HAMPATH* e *CLIQUE*, que são membros de NP mas que não se sabe se estão em P. O poder de verificabilidade polinomial parece ser muito maior que aquele da decidibilidade polinomial. Mas, por mais difícil que seja de imaginar, P e NP poderiam ser iguais. Somos incapazes de *provar* a existência de uma única linguagem em NP que não esteja em P.

A questão de se P = NP é um dos maiores problemas não resolvidos em ciência da computação teórica e matemática contemporânea. Se essas classes fossem iguais, qualquer problema polinomiamente verificável ser polinomialmente decidível. A maioria dos pesquisadores acreditam que as duas classes não são iguais porque as pessoas investiram esforços enormes para encontrar algoritmos de tempo polinomial para certos problemas em NP, se sucesso. Pesquisadores também têm tentado provar que as classes são diferentes, mas isso acarretaria mostrar que nenhum algoritmo rápido existe para substituir a força-bruta. Fazer isso está atualmente além do alcance científico. A seguinte figura mostra as duas possibilidades.

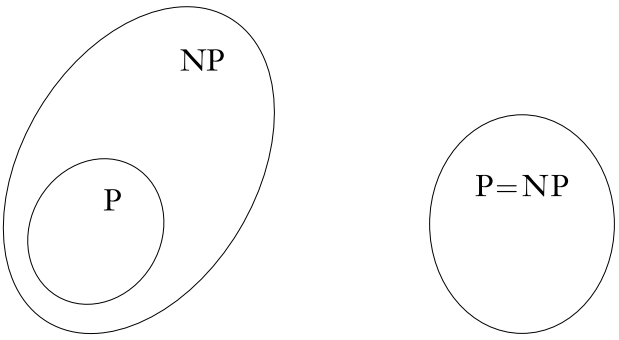


FIGURA 7.26
Uma dessas possibilidades é correta

O melhor método conhecido para resolver linguagens em NP deterministicamente usa tempo exponencial. Em outras palavras, podemos provar que

$$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{EXPTIME} = \bigcup_k \mathrm{TIME}(2^{n^k}),$$

mas não sabemos se NP está contida em uma classe de complexidade de tempo determinístico menor.

7.4 NP-COMPLETETUDE

Um avanço importante na questão P versus NP veio no início dos anos 1970s com o trabalho de Stephen Cook e Leonid Levin. Eles descobriram certos problemas em NP cuja complexidade individual está relacionada àquela da classe inteira. Se um algoritmo de tempo polinomial existe para quaisquer desses problemas, todos os problemas em NP seriam solúveis em tempo polinomial. Esses problemas são chamados ***NP-completos***. O fenômeno da NP-completude é importante por razões tanto teóricas quanto práticas.

No lado teóretico, um pesquisador tentando mostrar que P é diferente de NP pode focar sobre um problema NP-completo. Se algum problema em NP requer mais que tempo polinomial, um NP-completo também requer. Além disso, um pesquisador tentando provar que P é igual a NP somente precisa encontrar um algoritmo de tempo polinomial para um problema NP-completo para atingir seu objetivo.

No lado prático, o fenômeno da NP-completude pode evitar que se desperdice tempo buscando por um algoritmo de tempo polinomial não existente para resolver um problema específico. Muito embora possamos não ter a matemática necessária para provar que o problema é insolúvel em tempo polinomial, acreditamos que P é diferente de NP, portanto provar que um problema é NP-completo é forte evidência de sua não-polinomialidade.

O primeiro problema NP-completo que apresentamos é chamado ***problema da satisfatibilidade***. Lembre-se de que variáveis que podem tomar os valores VERDADEIRO FALSO são chamadas ***variáveis booleanas*** (veja a Seção 0.2). Usualmente, representamos VERDADEIRO por 1 e FALSO por 0. As ***operações booleanas*** E, OUe NÃO, representadas pelos símbolos $\wedge$, $\vee$e $\neg$, respectivamente, são descritos na lista seguinte. Usamos a barra superior como uma abreviação para o símbolo $\neg$, portanto $\overline{x}$ significa $\neg\, x$.

$$\begin{array}{lll} 0 \wedge 0 = 0 & 0 \vee 0 = 0 & \overline{0} = 1 \\ 0 \wedge 1 = 0 & 0 \vee 1 = 1 & \overline{1} = 0 \\ 1 \wedge 0 = 0 & 1 \vee 0 = 1 & \\ 1 \wedge 1 = 1 & 1 \vee 1 = 1 & \end{array}$$

Uma ***fórmula booleana*** é uma expressão envolvendo variáveis booleanas e operações. Por exemplo,

$$\phi = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{z})$$

é uma fórmula booleana. Uma fórmula booleana é ***satisfatível*** se alguma atribuição de 0s e 1s às variáveis faz a fórmula ter valor 1. A fórmula prece-

dente é satisfatível porque a atribuição $x = 0$, $y = 1$ e $z = 0$ faz ϕ ter valor 1. Dizemos que a atribuição *satisfaz* ϕ. O ***problema da satisfatibilidade*** é testar se uma fórmula booleana é satisfatível. Seja

$$SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ é uma fórmula booleana satisfatível}\}.$$

Agora enunciamos o teorema de Cook–Levin, que relaciona a complexidade do problema *SAT* às complexidades de todos os problemas em NP.

TEOREMA 7.27

Teorema de Cook–Levin $SAT \in \mathrm{P}$ sse $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

A seguir, desenvolvemos o método que é central para a prova do teorema de Cook–Levin.

REDUTIBILIDADE EM TEMPO POLINOMIAL

No Capítulo 5 definimos o conceito de reduzir um problema a um outro. Quando o problema A se reduz ao problema B, uma solução para B pode ser usada para resolver A. Agora definimos uma versão da redutibilidade que leva em consideração a eficiência da computação. Quando o problema A é *eficientemente* redutível ao problema B, uma solução eficiente para B pode ser usada para resolver A eficientemente.

DEFINIÇÃO 7.28

Uma função $f\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é uma ***função computável em tempo polinomial*** se alguma máquina de Turing de tempo polinomial M existe que pára com exatamente $f(w)$ na sua fita, quando iniciada sobre qualquer entrada w.

DEFINIÇÃO 7.29

A linguagem A é ***redutível por mapeamento em tempo polinomial***,[1] ou simplesmente ***redutível em tempo polinomial***, à linguagem B, em símbolos $A \leq_{\mathrm{P}} B$, se uma função computável em tempo polinomial $f\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ existe, onde para toda w,

$$w \in A \iff f(w) \in B.$$

A função f é chamada ***redução de tempo polinomial*** de A para B.

A redutibilidade de tempo polinomial é a análoga eficiente à redutibilidade por mapeamento como definida na Seção 5.3. Outras formas de redutibilidade eficiente estão disponíveis, mas redutibilidade de tempo polinomial é uma forma simples que é adequada para nossos propósitos portanto não discutiremos os outros aqui. A figura abaixo ilustra a redutibilidade de tempo polynomial.

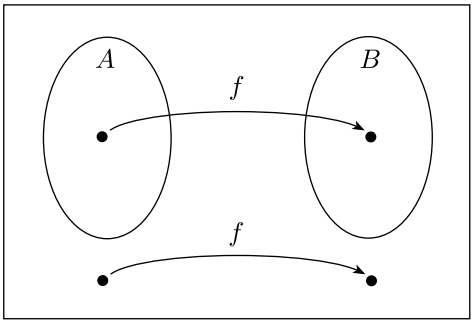


FIGURA 7.30
A função de tempo polinomial f reduzindo A a B

Da mesma forma que com uma redução por mapeamento comum, uma redução de tempo polinomial de A para B provê uma maneira converter o teste de pertinência em A para o teste de pertinência em B, mas agora a conversão é feita eficientemente. Para testar se $w \in A$, usamos a redução f para mapear w para $f(w)$ e testar se $f(w) \in B$.

Se uma linguagem for redutível em tempo polinomial a uma linguagem já sabidamente solúvel em tempo polinomial, obtemos uma solução polinomial para a linguagem original, como no teorema seguinte.

TEOREMA 7.31

Se $A \leq_{\mathrm{P}} B$ e $B \in \mathrm{P}$, então $A \in \mathrm{P}$.

PROVA Seja M o algoritmo de tempo polinomial que decide B e f a redução de tempo polinomial de A para B. Descrevemos um algoritmo de tempo polinomial N que decide A da seguinte forma.

$N =$ "Sobre a entrada w:

1. Compute $f(w)$.

[1]Ela é chamada ***redutibilidade de tempo polinomial muitos–para–um*** em alguns outros livros-texto.

2. Rode M sobre a entrada $f(w)$ e dê como saída o que quer que M dê como saída."

Temos $w \in A$ sempre que $f(w) \in B$ porque f é uma redução de A para B. Por conseguinte, M aceita $f(w)$ sempre que $w \in A$. Além do mais, N roda em tempo polinomial porque cada um de seus dois estágios roda em tempo polinomial. Note que o estágio 2 roda em tempo polinomial porque a composição de polinômios é um polinômio.

Antes de exibir uma redução de tempo polinomial introduzimos *3SAT*, um caso especial do problema da satisfatibilidade no qual todas as fórmulas estão numa forma especial. Um ***literal*** é uma variável booleana ou uma variável booleana negada, como em x ou $\overline{x}$. Uma ***cláusula*** é uma fórmula composta de vários literais conectados por $\vee$s, como em $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)$. Uma fórmula booleana está na ***forma normal conjuntiva***, chamada ***fnc-fórmula***, se ela compreende várias cláusulas conectadas por $\wedge$s, como em

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_6) \wedge (x_3 \vee \overline{x_6}).$$

Ela é uma ***3fnc-fórmula*** se todas as cláusulas tiverem três literais, como em

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_6) \wedge (x_3 \vee \overline{x_6} \vee x_4) \wedge (x_4 \vee x_5 \vee x_6).$$

Seja $\mathit{3SAT} = \{\langle\phi\rangle \mid \phi$ é uma 3fnc-fórmula satisfatível$\}$. Em uma fnc-fórmula satisfatível, cada cláusula deve conter pelo menos um literal que é atribuído o valor 1.

O teorema seguinte apresenta uma redução de tempo polinomial do problema *3SAT* para o problema *CLIQUE*.

TEOREMA 7.32

3SAT é redutível em tempo polinomial a *CLIQUE*.

IDÉIA DA PROVA A redução de tempo polinomial f que mostramos de *3SAT* para *CLIQUE* converte fórmulas para grafos. Nos grafos construídos, cliques de um dado tamanho correspondem a atribuições satisfeitoras da fórmula. Estruturas dentro do grafo são projetadas para imitar o comportamento das variáveis e cláusulas.

PROVA Seja ϕ uma fórmula com k cláusulas tal como

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \quad \cdots \quad \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k).$$

A redução f gera a cadeia $\langle G, k\rangle$, onde G é um grafo não-direcionado definido da seguinte forma.

Os nós em G são organizados em k grupos de três nós cada um chamado de ***tripla***, $t_1, \ldots, t_k$. Cada tripla corresponde a uma das cláusulas em ϕ, e cada nó em uma tripla corresponda a um literal na cláusula associada. Rotule cada nó de G com seu literal correspondente em ϕ.

As arestas de G conectam todos exceto dois tipos de pares de nós em G. Nenhuma aresta está presente entre nós na mesma tripla e nenhuma aresta está presente entre dois nós com rótulos contraditórios, como em x_2 e $\overline{x_2}$. A figura abaixo ilustra essa construção quando $\phi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_2)$.

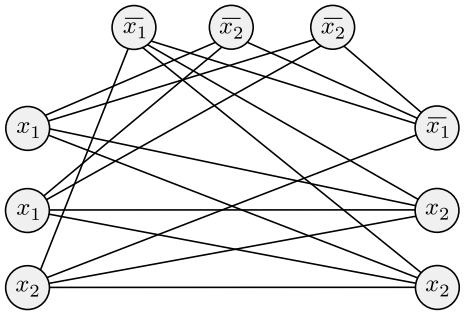


FIGURA 7.33
O grafo que a redução produz de
$\phi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_2)$

Agora demonstramos por que essa construção funciona. Mostramos que ϕ é satisfatível sse G tem um k-clique.

Suponha que ϕ tem uma atribuição satisfeitora. Nessa atribuição satisfeitora, pelo menos um literal é verdadeiro em toda cláusula. Em cada tripla de G, selecionamos um nó correspondendo a um literal verdadeiro na atribuição satisfeitora. Se mais que um literal for verdadeiro em uma cláusula específica, escolhemos um dos literais arbitrariamente. Os nós que acabam de ser selecionados formam um k-clique. O número de nós selecionado é k, porque escolhemos um para cada uma das k triplas. Cada par de nós selecionados é ligado por uma aresta porque nenhum par se encaixa em uma das exceções descritas anteriormente. Eles não poderiam ser da mesma tripla porque selecionamos somente um nó por tripla. Eles não poderiam ter rótulos contraditórios porque os literais associados eram ambos verdadeiros na atribuição satisfeitora. Por conseguinte, G contém um k-clique.

Suponha que G tenha um k-clique. Nenhum par de nós do clique ocorre na mesma tripla porque nós na mesma tripla não são conectados por arestas. Conseqüentemente, cada uma das k triplas contém exatamente um dos k nós do clique. Atribuímos valores-verdade às variáveis de ϕ de modo que cada literal

que rotula um nó do clique torna-se verdadeiro. Fazer isso é sempre possível porque dois nós rotulados de uma maneira contraditória não são conectados por uma aresta e portanto ambos não podem estar no clique. Essa atribuição às variáveis satisfaz ϕ porque cada tripla contém um nó do clique e portanto cada cláusula contém um literal ao qual é atribuído VERDADEIRO. Por conseguinte, ϕ é satisfatível.

Os Teoremas 7.31 e 7.32 nos dizem que, se *CLIQUE* for solúvel em tempo polinomial, o mesmo acontece com *3SAT*. À primeira vista, essa conexão entre esses dois problemas parece um tanto impressionante porque, superficialmente, eles são bastante diferentes. Mas a redutibilidade de tempo polinomial nos permite relacionar suas complexidades. Agora nos voltamos para uma definição que nos permitirá similarmente relacionar as complexidades de um classe inteira de problemas.

DEFINIÇÃO DE NP-COMPLETUDE

DEFINIÇÃO 7.34

Uma linguagem B é ***NP-completa*** se ela satisfaz duas condições:

1. B está em NP, e
2. toda A em NP é redutível em tempo polinomial a B.

TEOREMA 7.35

Se B for NP-completa e $B \in \mathrm{P}$, então $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

PROVA Esse teorema segue diretamente da definição de redutibilidade de tempo polinomial.

TEOREMA 7.36

Se B for NP-completa e $B \leq_{\mathrm{P}} C$ para C in NP, então C é NP-completa.

PROVA Já sabemos que C está em NP, portanto devemos mostrar que toda A em NP é redutível em tempo polinomial a C. Em razão de B ser NP-completa, toda linguagem em NP é redutível em tempo polinomial a B, e B por sua vez é redutível em tempo polinomial a C. Reduções em tempo polinomial se compõem; ou seja, se A for redutível em tempo polinomial a B e B for redutível

em tempo polinomial a C, então A é redutível em tempo polinomial a C. Logo toda linguagem em NP é redutível em tempo polinomial a C.

O TEOREMA DE COOK–LEVIN

Uma vez que temos um problema NP-completo, podemos obter outros por redução de tempo polinomial a partir dele. Entretanto, estabelecer o primeiro problema NP-completo é mais difícil. Agora fazemos isso provando que *SAT* é NP-completo.

TEOREMA 7.37

SAT é NP-completo.[2]

Esse teorema re-enuncia o Teorema 7.27, o teorema de Cook–Levin, em uma outra forma.

IDÉIA DA PROVA Mostrar que *SAT* está em NP é fácil, e fazemos isso em breve. A parte difícil da prova é mostrar que qualquer linguagem em NP é redutível em polinomial time a *SAT*.

Para fazer isso construimos uma redução de tempo polinomial para cada linguagem A em NP para *SAT*. A redução para A toma uma cadeia w e produz uma fórmula boolean ϕ que simula a máquina NP para A sobre a entrada w. Se a máquina aceita, ϕ tem uma atribuição satisfeitora que corresponde à computação de aceitação. Se a máquina não aceita, nenhuma atribuição satisfaz ϕ. Conseqüentemente, w está em A se e somente se ϕ é satisfatível.

Construir verdadeiramente a redução para funcionar dessa maneira é uma tarefa conceitualmente simples, embora devamos ser capazes de lidar com muitos detalhes. Uma fórmula booleana pode conter as operações booleanas E, OU e NÃO, e essas operações formam a base para a circuitaria usada em computadores eletrônicos. Logo, o fato de que podemos projetar uma fórmula booleana para simular uma máquina de Turing não é surpreendente. Os detalhes estão na implementação dessa idéia.

PROVA Primeiro, mostramos que *SAT* está em NP. Uma máquina de tempo polinomial não-determinístico pode adivinhar uma atribuição para uma dada fórmula ϕ e aceitar se a atribuição satisfaz ϕ.

A seguir, tomamos qualquer linguagem A em NP e mostramos que A é redutível em tempo polinomial a *SAT*. Seja N uma máquina de Turing não-determinística que decide A em tempo n^k para alguma constante k. (Por conveniência assumimos, na verdade, que N roda em tempo $n^k - 3$, mas apenas aque-

[2]Uma prova alternativa desse teorema aparece na Seção 9.3 na página 375.

les leitores interessados em detalhes deveriam se preocupar com essa questão menor.) A seguinte noção ajuda a descrever a redução.

Um ***tableau*** para N sobre w é uma tabela $n^k \times n^k$ cujas linhas são as configurações de um ramo da computação de N sobre a entrada w, como mostado na Figura 7.38.

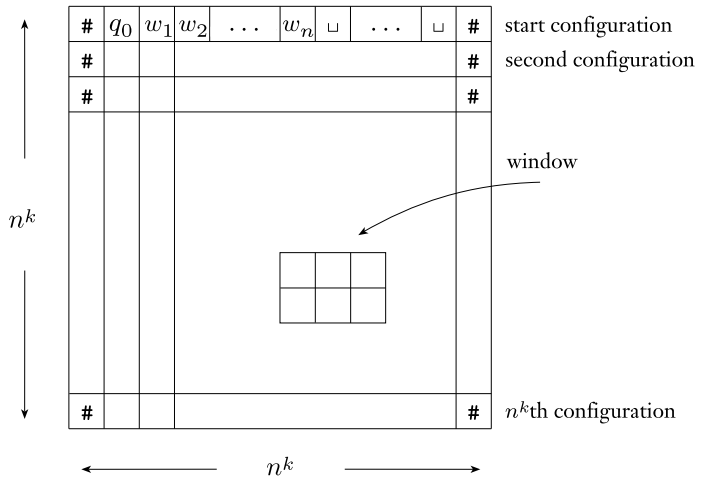


FIGURA 7.38
Um tableau é uma tabela $n^k \times n^k$ de configurações

Por conveniência mais adiante assumimos que cada configuração começa e termina com um símbolo #, de modo que a primeira e a última colunas de um tableau são todas de #s. A primeira linha do tableau é a configuração inicial de N sobre w, e cada linha segue da anterior conforme a função de transição de N. Um tableau é de ***aceitação*** se qualquer linha do tableau for uma configuração de aceitação.

Todo tableau de aceitação para N sobre w corresponde a um ramo de computação de aceitação de N sobre w. Portanto, o problema de se determinar se N aceita w é equivalente ao problema de se determinar se um tableau de aceitação para N sobre w existe.

Agora chegamos à descrição da redução em tempo polinomial f de A para *SAT*. Sobre a entrada w, a redução produz uma fórmula ϕ. Começamos descrevendo as variáveis de ϕ. Digamos que Q e Γ sejam o conjunto de estados e o alfabeto de fita de N. Seja $C = Q \cup \Gamma \cup \{\#\}$. Para cada i e j entre 1 e n^k e para cada s em C temos uma variável, $x_{i,j,s}$.

Cada uma das $(n^k)^2$ entradas de um tableau é chamada ***célula***. A célula na linha i e coluna j é chamada $cell[i, j]$ e contém um símbolo de C. Representamos o conteúdo das células com as variáveis de ϕ. Se $x_{i,j,s}$ toma o valor 1, isso significa que $cell[i, j]$ contém um s.

Agora projetamos ϕ de modo que uma atribuição satisfeitora às variáveis re-

almente corresponda a um tableau de aceitação para N sobre w. A fórmula ϕ é o E de quatro partes $\phi_{\text{celula}} \wedge \phi_{\text{inicio}} \wedge \phi_{\text{movemento}} \wedge \phi_{\text{aceita}}$. Descrevemos cada parte por vez.

Como mencionamos anteriormente, ligar a varivél $x_{i,j,s}$ corresponde a colocar o símbolo s na $cell[i,j]$. A primeira coisa que devemos garantir de modo a obter uma correspondência entre uma atribuição e um tableau é que a atribuição liga exatamente uma variável para cada célula. A fórmula ϕ_{celula} garante esse requisito expressando-o em termos de operações booleanas:

$$\phi_{\text{celula}} = \bigwedge_{1 \le i,j \le n^k} \left[\Big(\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s} \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{\substack{s,t \in C \\ s \neq t}} (\overline{x_{i,j,s}} \vee \overline{x_{i,j,t}}) \Big) \right].$$

Os símbolos $\bigwedge$ e $\bigvee$ significam E e OU iterados. Por exemplo, a expressão na fórmula precedente

$$\bigvee_{s \in C} x_{i,j,s}$$

é uma abreviação para

$$x_{i,j,s_1} \vee x_{i,j,s_2} \vee \cdots \vee x_{i,j,s_l}$$

onde $C = \{s_1, s_2, \ldots, s_l\}$. Logo, ϕ_{celula} é na realidade uma expressão grande que contém um fragmento para cada célula no tableau porque i e j variam de 1 a n^k. A primeira parte de cada fragmento diz que pelo menos uma variável é ligada na célula correspondente. A segunda parte de cada fragmento diz que não mais que uma variável é ligada (literalmente, ela diz que em cada par de variáveis, pelo menos uma é desligada) na célula correspondente. Esses fragmentos são conectados por operações $\wedge$.

A primeira parte de ϕ_{celula} dentro dos parênteses estipula que pelo menos uma variável que está associada a cada célula está ligada, enquanto que a segunda parte estipula que não mais que uma variável está ligada para cada célula. Qualquer atribuição às variáveis que satisfaz ϕ (e portanto ϕ_{celula}) deve ter exatamente uma variável ligada para toda célula. Por conseguinte, qualquer atribuição satisfeitora especifica um símbolo em cada célula da tabela. As partes ϕ_{inicio}, $\phi_{\text{movemento}}$ e ϕ_{aceita} garantem que esses símbolos realmente correspondam a um tableau de aceitação da seguinte forma.

A fórmula ϕ_{inicio} garante que a primeira linha da tabela é a configuração inicial de N sobre w estipulando explicitamente que as variáveis correspondentes estão ligadas:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{inicio}} = {} & x_{1,1,\#} \wedge x_{1,2,q_0} \wedge \\ & x_{1,3,w_1} \wedge x_{1,4,w_2} \wedge \ldots \wedge x_{1,n+2,w_n} \wedge \\ & x_{1,n+3,\sqcup} \wedge \ldots \wedge x_{1,n^k-1,\sqcup} \wedge x_{1,n^k,\#} \,. \end{aligned}$$

A fórmula ϕ_{aceita} garante que uma configuração de aceitação ocorre no tableau. Ela garante que q_{aceita}, o símbolo para o estado de aceitação, aparece em uma das células do tableau, estipulando que uma das variáveis correspondentes está

ligada:

$$\phi_{\text{aceita}} = \bigvee_{1 \le i,j \le n^k} x_{i,j,q_{\text{aceita}}} .$$

Finalmente, a fórmula $\phi_{\text{movemento}}$ garante que cada linha da tabela corresponde a uma configuração que segue legalmente da configuração da linha precedente conforme as regras de N. Ela faz isso assegurando que cada janela 2×3 de células seja legal. Dizemos que uma janela 2×3 é ***legal*** se essa janela não viola as ações especificadas pela função de transição de N. Em outras palavras, uma janela é legal se ela pode aparecer quando uma configuração corretamente segue uma outra.[3]

Por exemplo, digamos que a, b e c sejam membros do alfabeto de fita e que q_1 e q_2 sejam estados de N. Assuma que, quando no estado q_1 com a cabeça lendo um a, N escreva um b, permaneça no estado q_1 e mova para a direita, e que quando no estado q_1 com a cabeça lendo um b, N não-deterministicamente

1. escreva um c, entre em q_2 e mova para a esquerda, ou
2. escreva um a, entre em q_2 e mova para a direita.

Expresso formalmente, $\delta(q_1, \texttt{a}) = \{(q_1,\texttt{b},\text{D})\}$ e $\delta(q_1, \texttt{b}) = \{(q_2,\texttt{c},\text{E}), (q_2,\texttt{a},\text{D})\}$. Exemplos de janelas legais para essa máquina são mostradas na Figura 7.39.

(a)
a	q_1	b
q_2	a	c

(b)
a	q_1	b
a	a	q_2

(c)
a	a	q_1
a	a	b

(d)
#	b	a
#	b	a

(e)
a	b	a
a	b	q_2

(f)
b	b	b
c	b	b

FIGURA 7.39
Exemplos de janelas legais

Na Figura 7.39, as janelas (a) e (b) são legais porque a função de transição permite a N mover da maneira indicada. A janela (c) é porque, com q_1 aparecendo no lado direito da linha superior, não sabemos sobre que símbolo a cabeça está. Esse símbolo poderia ser um a, e q_1 pode modificá-lo para um b e mover para a direita. Essa possibilidade daria origem a essa janela, portanto ela não viola as regras de N. A janela (d) é obviamente legal porque as partes superior e inferior

[3]Poderíamos dar uma definição precisa de ***janela legal*** aqui, em termos da função de transição. Mas fazer isso também é bastante cansativo e nos desviaria da principal linha do argumento de prova. Qualquer um que deseje mais precisão deve se reportar à análise relacionada na prova do Teorema 5.15, a indecidibilidade do problema da Correspondência de Post.

são idênticas, o que ocorreria se a cabeça não estivesse adjacente à localização da janela. Note que # pode aparecer à esquerda ou à direita das linhas superior e inferior em uma janela legal. A janela (e) é legal porque o estado q_1 lendo um b poderia ter estado imediatamente à direita da linha superior, e teria então movido para a esquerda no estado q_2 para aparecer no lado direito da linha inferior. Finalmente, a janela (f) é legal porque o estado q_1 poderia ter estado imediatamente à esquerda da linha superior e poderia ter modificado o b para um c e movido para a esquerda.

As janelas mostradas na Figura 7.39 não são legais para a máquina N.

(a)

a	b	a
a	a	a

(b)

a	q_1	b
q_1	a	a

(c)

b	q_1	b
q_2	b	q_2

FIGURA 7.40
Exemplos de janelas ilegais

Na janela (a) o símbolo central na linha superior não pode mudar porque um estado não estava adjacente a ele. A janela (b) não é legal porque a função de transição especifica que o b é modificado para um c mas não para um a. A janela (c) não é legal porque dois estados aparecem na linha inferior.

AFIRMAÇÃO 7.41

Se a linha superior da tabela for a configuração inicial e toda janela na tabela for legal, cada linha da tabela é uma configuração que segue legalmente da precedente.

Provamos essa afirmação considerando quaisquer duas configurações adjacentes na tabela, chamadas configuração superior e configuração inferior. Na configuração superior, toda célula que não é adjacente a um símbolo de estado e que não contém o símbolo de fronteira #, é a célula central superior em uma janela cuja linha superior não contém nenhum estado. Por conseguinte, esse símbolo deve aparecer imutável na posição central inferior da janela. Logo, ele aparece na mesma posição na configuração inferior.

A janela contendo o símbolo de estado na célula centra superior garante que as três posições correspondentes sejam atualizadas consistentemente com a função de transição. Conseqüentemente, se a configuração superior for uma configuração legal, o mesmo acontece com a configuração inferior, e a inferior segue a superior conforme as regras de N. Note que essa prova, embora fácil, depende crucialmente de nossa escolha de um tamanho de janela de 2×3, como mostra o Exercício 7.39.

Agora voltamos à construção de $\phi_{\text{movemento}}$. Ela estipula que todas as janelas no tableau são legais. Cada janela contém seis células, que podem ser inicializadas de

um número fixo de maneiras para originar uma janela legal. A fórmula $\phi_{\text{movemento}}$ diz que as inicializações daquelas seis células devem ser uma dessas maneiras, ou

$$\phi_{\text{movemento}} = \bigwedge_{1<i\leq n^k,\ 1<j<n^k} (\text{the } (i,j) \text{ window is legal})$$

Substituimos o texto "a janela (i, j) é legal" nessa fórmula com a fórmula seguinte. Escrevemos o conteúdo de seis células de uma janela como $a_1, \ldots, a_6$.

$$\bigvee_{\substack{a_1,\ldots,a_6 \\ \text{é uma janela legal}}} (x_{i,j-1,a_1} \wedge x_{i,j,a_2} \wedge x_{i,j+1,a_3} \wedge x_{i+1,j-1,a_4} \wedge x_{i+1,j,a_5} \wedge x_{i+1,j+1,a_6})$$

A seguir analisamos a complexidade da redução para mostrar que ela opera em tempo polinomial. Para fazer isso examinamos o tamanho de ϕ. Primeiro, estimamos o número de variáveis que ela tem. Lembre-se de que o tableau é uma tabela $n^k \times n^k$, portanto ela contém n^{2k} células. Cada célula tem l variáveis associadas a ela, onde l é o número de símbolos em C. Em razão do fato de que l depende somente da MT N e não do comprimento da entrada n, o número total de variáveis é $O(n^{2k})$.

Estimamos o tamanho de cada uma das partes de ϕ. A fórmula ϕ_{celula} contém um fragmento de tamanho-fixo da fórmula para cada célula do tableau, portanto seu tamanho é $O(n^{2k})$. A fórmula ϕ_{inicio} tem um fragmento para cada célula na linha superior, portanto seu tamanho é $O(n^k)$. As fórmulas $\phi_{\text{movemento}}$ e ϕ_{aceita} cada uma contém um fragmento de tamanho-fixo da fórmula para cada célula do tableau, portanto seu tamanho é $O(n^{2k})$. Conseqüentemente, o tamanho total de ϕ é $O(n^{2k})$. Esse limitante é suficiente para nossos propósitos porque ele mostra que o tamanho de ϕ é polinomial em n. Se fosse mais que polinomial, a redução não teria nenhuma chance de gerá-la em tempo polinomial. (Na verdade, nossas estimativas são baixas por um fator de $O(\log n)$ porque cada variável tem índices que podem ir até n^k e portanto podem requerer $O(\log n)$ símbolos para escrever na fórmula, mas esse fator adicional não modifica a polinomialidade do resultado.)

Para ver que podemos gerar a fórmula em tempo polinomial, observe sua natureza altamente repetitiva. Cada componente da fórmula é composto de muitos fragmentos quase idênticos, que diferem apenas nos índices de uma maneira simples. Conseqüentemente, podemos facilmente construir uma redução que produz ϕ em tempo polinomial a partir da entrada w.

Por conseguinte, concluimos a prova do teorema de Cook–Levin, mostrando que *SAT* é NP-completa. Mostrar a NP-completude de outras linguagens geralmente não requer uma prova tão longa. Ao contrário, a NP-completude pode ser provada com uma redução de tempo polinomial a partir de uma linguagem que já se sabe que é NP-completa. Podemos usar *SAT* para esse propósito, mas usar *3SAT*, o caso especial de *SAT* que definimos na página 292, é usualmente mais fácil. Lembre-se de que as fórmulas em *3SAT* estão na forma normal conjuntiva

(fnc) com três literais por cláusula. Primeiro, temos que mostrar que *3SAT* propriamente dita é NP-completa. Provamos essa asserção como um corolário do Teorema 7.37.

COROLÁRIO 7.42

3SAT é NP-completa.

PROVA Obviamente *3SAT* está em NP, portanto somente precisamos provar que todas as linguagens em NP se reduzem a *3SAT* em tempo polinomial. Uma maneira de fazê-lo é mostrar que *SAT* reduz em tempo polinomial a *3SAT*. Ao invés disso, modificamos a prova do Teorema 7.37 de tal forma que ele produza diretamente uma fórmula na forma normal conjuntiva com três literais por cláusula.

O Teorema 7.37 produz uma fórmula que já está quase na forma normal conjuntiva. A fórmula ϕ_{celula} é um grand E de subfórmulas, cada uma das quais contém um grande OU e um grande E de OUs. Por conseguinte, ϕ_{celula} é um E de cláusulas e por isso já está na fnc. A fórmula ϕ_{inicio} é um grande E de variáveis. Tomando cada uma dessas variáveis como sendo uma cláusula de tamanho 1 vemos que ϕ_{inicio} está na fnc. A fórmula ϕ_{aceita} é um grande OU de variáveis e é portanto uma única cláusula. A fórmula $\phi_{\text{movemento}}$ é a única que ainda não está na fnc, mas podemos facilmente convertê-la numa fórmula está na fnc da seguinte forma.

Lembre-se de que $\phi_{\text{movemento}}$ é um grand E de subfórmulas, cada uma das quais é um OU de Es que descreve todas as janelas legais possíveis. As leis distributivas, como descritas no Capítulo 0, afirmam que podemos substituir um OU de Es por um E de OUs equivalente. Fazer isso pode aumentar significativamente o tamanho de cada subfórmula, mas pode aumentar o tamanho total de $\phi_{\text{movemento}}$ somente de um fator constante porque o tamanho de cada subfórmula depende apenas de N. O resultado é uma fórmula que está na forma normal conjuntiva.

Agora que escrevemos a fórmula na fnc, convertemo-la para uma fórmula com três literais por cláusula. Em cada cláusula que correntemente tem um ou dois literais, replicamos um dos literais até que o número total seja três. Em cada cláusula que tem mais de três literais, dividimo-la em várias cláusulas e acrescentamos variáveis extras para preservar a satisfiabilidade ou não-satisfiabilidade da original.

Por exemplo, substituimos a cláusula $(a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4)$, na qual cada a_i é um literal, pela expressão de duas-cláusulas $(a_1 \vee a_2 \vee z) \wedge (\overline{z} \vee a_3 \vee a_4)$, na qual z é uma nova variável. Se alguma valoração de a_i's satisfaz a cláusula original, podemos encontrar alguma valoração de z de modo que as duas novas cláusulas sejam satisfeitas. Em geral, se a cláusula contém l literais,

$$(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_l),$$

podemos substituí-la pelas $l - 2$ cláusulas

$$(a_1 \vee a_2 \vee z_1) \wedge (\overline{z_1} \vee a_3 \vee z_2) \wedge (\overline{z_2} \vee a_4 \vee z_3) \wedge \cdots \wedge (\overline{z_{l-3}} \vee a_{l-1} \vee a_l).$$

Podemos facilmente verificar que a nova fórmula é satisfatível sse a fórmula original o era, portanto a prova está completa.

7.5 PROBLEMAS NP-COMPLETOS ADICIONAIS

O fenômeno da NP-completude está espalhado. Problemas NP-completos aparecem em muitas áreas. Por razões que não são bem entendidas, a maioria dos problemas NP que ocorrem naturalmente sabe-se que estão em P ou que são NP-completos. Se você busca um algoritmo de tempo polinomial para um novo problema NP, gastar parte de seu esforço tentando provar que ele é NP-completo é sensato porque fazer isso pode lhe evitar de trabalhar para encontrar um algoritmo de tempo polinomial que não existe.

Nesta seção apresentamos teoremas adicionais mostrando que várias linguagens são NP-completas. Esses teoremas provêm exemplos das técnicas que são usadas em provas desse tipo. Nossa estratégia geral é exibir uma redução de tempo polinomial a partir de *3SAT* para a linguagem em questão, embora às vezes reduzimos a partir de outras linguagens NP-completas quando isso é mais conveniente.

Quando construimos uma redução de tempo polinomial a partir de *3SAT* para uma linguagem, procuramos por estruturas naquela linguagem que possam simular as variáveis e cláusulas nas fórmulas booleanas. Tais estruturas são às vezes chamadas ***engrenagem***. Por exemplo, na redução de *3SAT* para *CLIQUE* apresentada no Teorema 7.32, os nós individuais simulam variáveis e triplas de nós simulam cláusulas. Um nó individual pode ou não ser um membro do clique, o que corresponde a uma variável que pode ou não ser verdadeira em uma atribuição satisfeitora. Cada cláusula tem que conter um literal que é atribuído VERDADEIRO e que corresponde à forma pela qual cada tripla tem que conter um nó no clique se o tamanho alvo é para ser atingido. O seguinte corolário do Teorema 7.32 afirma que *CLIQUE* é NP-completa.

COROLÁRIO 7.43

CLIQUE is NP-completa.

O PROBLEMA DA COBERTURA DE VÉRTICES

Se G é um grafo não-direcionado, uma ***cobertura de vértices*** de G é um subconjunto dos nós onde toda aresta de G toca um daqueles nós. O problema da cobertura de vértices pergunta se um grafo contém uma cobertura de vértices de um tamanho especificado:

$$\textit{VERTEX-COVER} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ é um grafo não-direcionado que tem uma cobertura de vértices de } k\text{-nós}\}.$$

TEOREMA 7.44

VERTEX-COVER é NP-completo.

IDÉIA DA PROVA Para mostrar que *VERTEX-COVER* é NP-completo temos que mostrar que ele está em NP e que todos os problemas NP são redutíveis em tempo polinomial a ele. A primeira parte é fácil; um certificado é simplesmente uma cobertura de vértices de tamanho k. Para provar a segunda parte mostramos que *3SAT* é redutível em tempo polinomial a *VERTEX-COVER*. A redução converte uma 3fnc-fórmula ϕ num grafo G e um número k, de modo que ϕ é satisfatível sempre que G tem uma cobertura de vértices com k nós. A conversão é feita sem saber se ϕ é satisfatível. Com efeito, G simula ϕ. O grafo contém engrenagens que imitam as variáveis e cláusulas da fórmula. Projetar essas engrenagens requer um pouco de engenhosidade.

Para a engrenagem das variáveis, procuramos por uma estrutura em G que possa participar da cobertura de vértices em uma das duas maneiras possíveis, correspondendo às duas possíveis atribuições de verdade à variável. Dois nós conectados por uma aresta é uma estrutura que funciona, porque um desses nós tem que aparecer na cobertura de vértices. Arbitrariamente atribuimos VERDADEIRO e FALSO a esses dois nós.

Para a engrenagem das cláusulas, buscamos uma estrutura que induza a cobertura de vértices para incluir nós nas engrenagens de variáveis correspondendo a pelo menos um literal verdadeiro na cláusula. A engrenagem contém três nós e arestas adicionais de modo que que qualquer cobertura de vértices tem que incluir pelo menos dois dos nós, ou possivelmente todos os três. Somente dois nós seriam necessários se um dos nós da engrenagem de vértices ajuda cobrindo uma aresta, como aconteceria se o literal associado satisfaz essa cláusula. Caso contrário três nós seriam necessários. Finalmente, escolhemos k de modo que a cobertura de vértices procurada tem um nó por engrenagem de variáveis e dois nós por engrenagem de cláusulas.

PROVA Aqui estão os detalhes de uma redução de *3SAT* para *VERTEX-COVER* que opera em tempo polinomial. A redução mapeia uma fórmula booleana ϕ para um grafo G e um valor k. Para cada variável x em ϕ, produzimos uma aresta conectando dois nós. Rotulamos os dois nós nessa engrenagem x e $\overline{x}$. Fazer x VERDADEIRO corresponde a selecionar o nó esquerdo para a cobertura de vértices, enquanto que FALSO corresponde ao nó direito.

As engrenagens para as cláusulas são um pouco mais complexas. Cada engrenagem de cláusulas é uma tripla de três nós que são rotulados com três literais da

cláusula. Esses três nós são conectados um ao outro e aos nós nas engrenagens de variáveis que têm os rótulos idênticos. Por conseguinte, o número total de nós que aparecem em G é $2m+3l$, onde ϕ tem m variáveis e l cláusulas. Suponha que k seja $m + 2l$.

Por exemplo, se $\phi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_2)$, a redução produz $\langle G, k\rangle$ a partir de ϕ, onde $k = 8$ e G toma a forma mostrada na Figura 7.45.

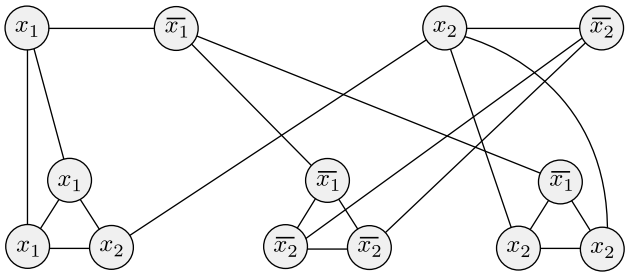


FIGURA 7.45
O grafo que a redução produz a partir de
$\phi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_2)$

Para provar que essa redução funciona, precisamos mostrar que ϕ é satisfatível se e somente se G tem uma cobertura de vértices com k nós. Começamos com uma atribuição satisfeitora. Primeiro colocamos os nós das engrenagens de variáveis que correspondem aos literais verdadeiros na atribuição na cobertura de vértices. Então, selecionamos um literal verdadeiro em toda cláusula e colocamos os dois nós remanescentes de toda engrenagem de cláusulas na cobertura de vértices. Agora, temos um total de k nós. Eles cobrem todas as arestas porque toda engrenagem de variáveis é claramente coberta, todas as três arestas dentro de toda engrenagem de cláusulas são cobertas, e todas as arestas entre as engrenagens de variáveis e de cláusulas são cobertas. Logo, G tem uma cobertura de vértices com k nós.

Segundo, se G tem uma cobertura de vértices com k nós, mostramos que ϕ é satisfatível construindo a atribuição satisfeitora. A cobertura de vértices tem que conter um nó em cada engrenagem de variáveis e dois em toda engrenagem de cláusulas de forma a cobrir as arestas das engrenagens de variáveis e as três arestas dentro das engrenagens de cláusulas. Isso dá conta de todos os nós, portanto nenhum resta. Tomamos os nós das engrenagens de variáveis que estão na cobertura de vértices e atribuimos VERDADEIRO aos literais correspondentes. Essa atribuição satisfaz ϕ porque cada uma das três arestas conectando as engrenagens de variáveis com cada engrenagem de cláusulas é coberta e somente dois nós da engrenagem de cláusulas estão na cobertura de vértices. Conseqüentemente, uma das arestas tem que ser coberta por um nó de uma engrenagem de

variáveis e portanto essa atribuição satisfaz a cláusula correspondente.

O PROBLEMA DO CAMINHO HAMILTONIANO

Lembre-se de que o problema do caminho hamiltoniano pergunta se o grafo de entrada contém um caminho de s para t que passa por todo nó exatamente uma vez.

TEOREMA 7.46

HAMPATH é NP-completo.

IDÉIA DA PROVA Mostramos que *HAMPATH* está em NP na Seção 7.3. Para mostrar que todo problema NP é redutível em tempo polinomial a *HAMPATH*, mostramos que *3SAT* é redutível em tempo polinomial a *HAMPATH*. Damos uma maneira de converter 3fnc-fórmulas para grafos na qual caminhos hamiltonianos correspondem a atribuições satisfeitoras da fórmula. Os grafos contêm engrenagens que imitam variáveis e cláusulas. A engrenagem de variáveis é uma estrutura em formato de diamante que pode ser percorrida em duas das seguintes maneiras, correspondendo a duas atribuições satisfeitoras. A engrenagem de cláusulas é um nó. Assegurar que o caminho passa por cada engrenagem de cláusulas corresponde a assegurar que cada cláusula seja satisfeita na atribuição satisfeitora.

PROVA Anteriormente demonstramos que *HAMPATH* está em NP, portanto tudo o que resta a ser feito é mostrar que *3SAT* $\leq_{\mathrm{P}}$ *HAMPATH*. Para cada 3fnc-fórmula ϕ mostramos como construir um grafo direcionado G com dois nós, s e t, onde um caminho hamiltoniano existe entre s e t sse ϕ é satisfatível.

Começamos a construção com uma 3fnc-fórmula ϕ contendo k cláusulas:

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \cdots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k),$$

onde cada a, b e c é um literal x_i ou $\overline{x_i}$. Sejam $x_1, \ldots, x_l$ as l variáveis de ϕ.

Agora mostramos como converter ϕ num grafo G. O grafo G que construimos tem várias partes para representar as variáveis e cláusulas que aparecem em ϕ.

Represente cada variável x_i com uma estrutura num formato de diamante que contém uma linha horizontal de nós, como mostrado na Figura 7.47. Mais adiante especificamos o número de nós que aparecem na linha horizontal.

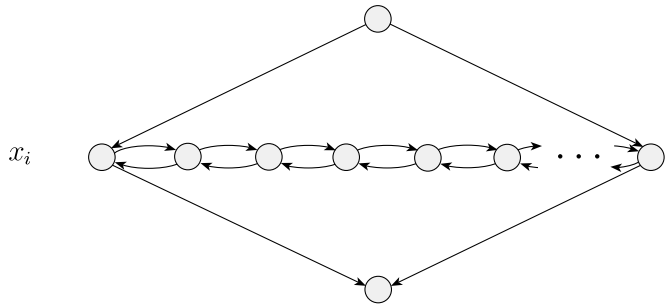


FIGURA 7.47
Representando a variável x_i como uma estrutura no formato de um diamante

Pepresentamos cada cláusula de ϕ como um único nó, da seguinte forma.

FIGURA 7.48
Representando a cláusula c_j como um nó

A Figura 7.49 exibe a estrutura global de G. Ela mostra todos os elementos de G e seus relacionamentos, exceto as arestas que representam o relacionamento das variáveis com as cláusulas que as contêm.

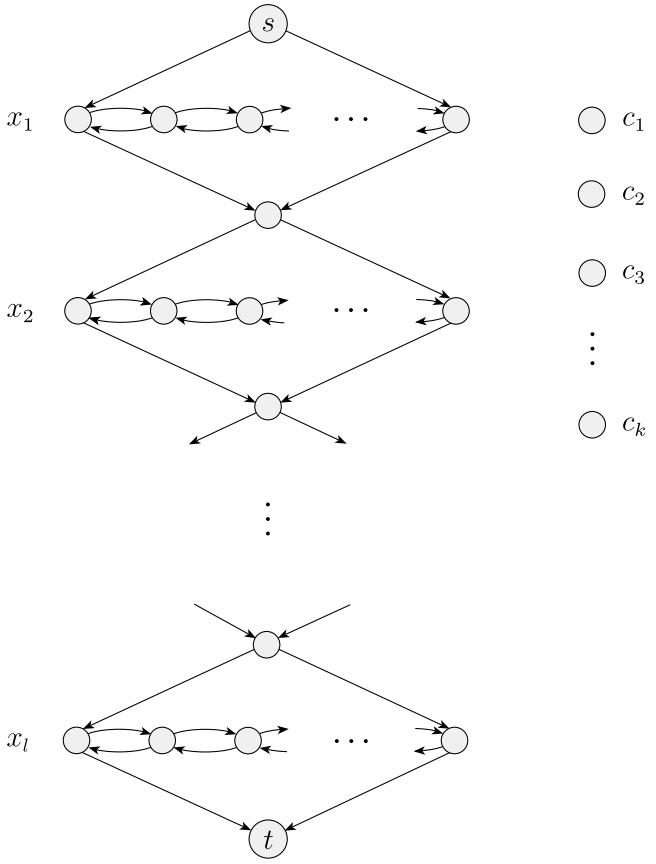


FIGURA 7.49
A estrutura de alto-nível de G

A seguir mostramos como conectar os diamantes representando as variáveis aos nós representando as cláusulas. Cada estrutura de diamante contém uma linha horizontal de nós conectados por arestas correndo em ambas as direções. A linha horizontal contém $3k + 1$ nós além dos dois nós nas extremidades pertencentes ao diamante. Esses nós são agrupados em pares adjacentes, um para cada cláusula, com nós separadores extras em seguida aos pares, como mostrado na Figura 7.50.

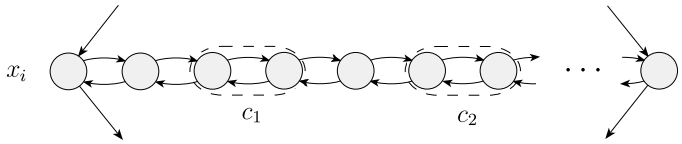


FIGURA 7.50
Os nós horizontais em uma estrutura em formato de diamante

Se a variável x_i aparece na cláusula c_j, adicionamos as duas arestas seguintes do j-ésimo par no i-ésimo diamante ao j-ésimo nó cláusula.

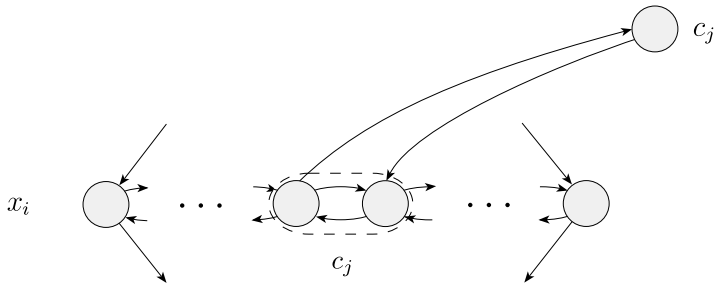


FIGURA 7.51
As arestas adicionais quando a cláusula c_j contém x_i

Se $\overline{x_i}$ aparece na cláusula c_j, adicionamos duas arestas do j-ésimo par no i-ésimo diamante ao j-ésimo nó cláusula, como mostrado na Figura 7.52.

Depois que adicionamos todas as arestas correspondentes a cada ocorrência de x_i ou $\overline{x_i}$ em cada cláusula, a construção de G está completa. Para mostrar que essa construção funciona, argumentamos que, se ϕ é satisfatível, um caminho hamiltoniano existe de s para t e, reciprocamente, se tal caminho existe, ϕ é satisfatível.

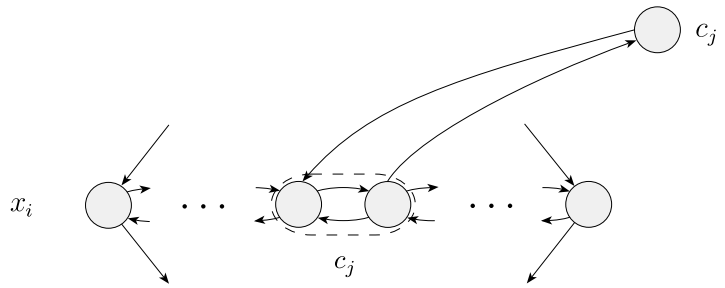


FIGURA 7.52
As arestas adicionais quando a cláusula c_j contém $\overline{x_i}$

Suponha que ϕ seja satisfatível. Para exibir um caminho hamiltoniano de s para t, primeiro ignoramos os nós cláusula. O caminho começa em s, passa por cada diamante por sua vez, e termina em t. Para atingir os nós horizontais em um diamante, o caminho ou zigue-zagueia da esquerda para a direita ou zague-zigueia da direita para a esquerda, a atribuição satisfeitora para ϕ determina qual. Se x_i for atribuída VERDADEIRO, o caminho zigue-zagueia através do diamante correspondente. Se x_i for atribuído FALSE, o caminho zague-zigueia. Mostramos ambas as possibilidades na Figura 7.53.

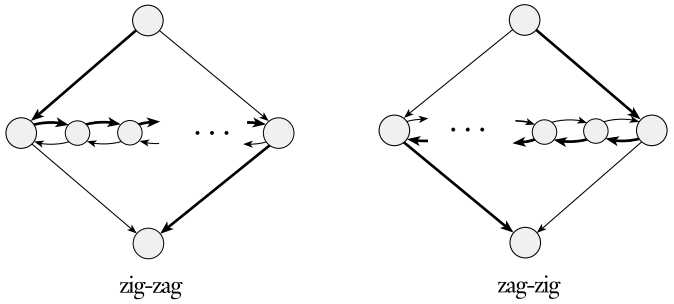


FIGURA 7.53
Zigue-zagueando e zague-zigueando através de um diamante, como determinado pela atribuição satisfeitora

Até agora esse caminho cobre todos os nós em G exceto os nós cláusula. Podemos facilmente incluí-los adicionando desvios nos nós horizontais. Em cada cláusula, selecionamos um dos literais atribuídos VERDADEIRO pela atribuição satisfeitora.

Se selecionássemos x_i na cláusula c_j, podemos desviar no j-ésimo par no i-ésimo diamante. Fazer isso é possível porque x_i tem que ser VERDADEIRO, portanto o caminho zigue-zagueia da esquerda para a direita pelo diamante correspondente. Logo, as arestas para o nó c_j estão na ordem correta para permitir um desvio e retorno.

Similarmente, se selecionássemos $\overline{x_i}$ na cláusula c_j, podemos desviar no j-ésimo par no i-ésimo diamante porque x_i tem que ser FALSO, portanto o caminho zague-zigueia da direita para a esquerda pelo diamante correspondente. Logo, as arestas para o nó c_j novamente estão na ordem correta para permitir um desvio e retorno. (Note que cada literal verdadeiro numa cláusula provê uma *opção* de um desvio para atingir o nó cláusula. Como um resultado, se vários literais numa cláusula são verdadeiros, somente um desvio é tomado.) Por conseguinte, construimos o caminho hamiltoniano desejado.

Para a direção reversa, se G tem um caminho hamiltoniano de s para t, exibimos uma atribuição satisfeitora para ϕ. Se o caminho hamiltoniano é *normal*—ele passa pelos diamantes na ordem do superior para o inferior, exceto pelos desvios para os nós cláusula—podemos facilmente obter a atribuição satisfeitora. Se o caminho zigue-zagueia pelo diamante, atribuimos à variável correspondente VERDADEIRO, e se ele zague-zigueia, atribuimos FALSE. Em razão do fato de que cada nó cláusula aparece no caminho, observando como o desvio para ele é tomado, podemos determinar qual dos literais na cláusula correspondente é VERDADEIRO.

Tudo o que resta para ser mostrado é que um caminho hamiltoniano tem que ser normal. Normalidade pode falhar somente se o caminho entra numa cláusula de um diamante mas retorna a um outro, como na Figura 7.54.

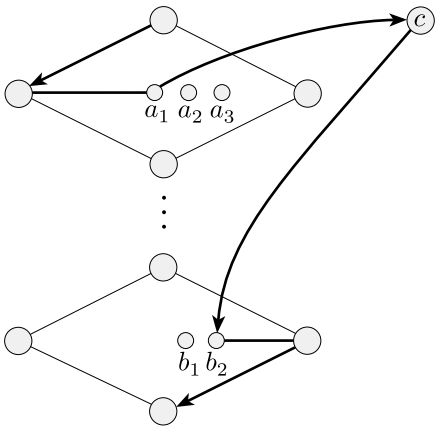


FIGURA 7.54
Essa situação não pode ocorrer

O caminho vai do nó a_1 para c, mas ao invés de retornar para a_2 no mesmo diamante, ele retorna para b_2 num diamante diferente. Se isso ocorre, ou a_2 ou a_3 tem que ser um nó separador. Se a_2 fosse um nó separador node, as únicas arestas entrando em a_2 seriam de a_1 e a_3. Se a_3 fosse um nó separador, a_1 e a_2 estaríamos no mesmo par de cláusulas, e portanto as únicas arestas entrando em

a_2 seriam de a_1, a_3 e c. Em qualquer dos casos, o caminho não poderia conter o nó a_2. O caminho não pode entrar em a_2 de c ou a_1 porque o caminho vai para outros lugares a partir desses nós. O caminho não pode entrar em a_2 a partir de a_3, porque a_3 é o único nó disponível para o qual a_2 aponta, portanto o caminho tem que deixar a_2 via a_3. Logo, um caminho hamiltoniano tem que ser normal. Essa redução obviamente opera em tempo polinomial e a prova está completa.

A seguir consideramos uma versão não-direcionada do problema do caminho hamiltoniano, chamado *UHAMPATH*. Para mostrar que *UHAMPATH* é NP-completo damos uma redução de tempo polinomial da versão direcionada do problema.

TEOREMA 7.55

UHAMPATH é NP-completo.

PROVA A redução toma um grafo direcionado G com nós s e t e constrói um grafo não-direcionado G' com nós s' e t'. O grafo G tem um caminho hamiltoniano de s para t sse G' tem um caminho hamiltoniano de s' para t'. Descrevemos G' da seguinte forma.

Cada nó u de G, exceto por s e t, é substituído por uma tripla de nós u^{in}, u^{mid} e u^{out} em G'. Os nós s e t em G são substituídos por nós s^{sai} e t^{entra} em G'. As arestas de dois tipos aparecem em G'. Primeiro, as arestas conectam u^{meio} com u^{entra} e u^{sai}. Segundo, uma aresta conecta u^{sai} com v^{entra} se uma aresta vai de u para v em G. Isso completa a construção de G'.

Podemos demonstrar que essa construção funciona mostrando que G tem um caminho hamiltoniano de s para t sse G' tem um caminho hamiltoniano de s^{sai} para t^{entra}. Para mostrar uma direção, observamos que um caminho hamiltoniano P em G,

$$s, u_1, u_2, \ldots, u_k, t,$$

tem um caminho hamiltoniano P' em G',

$$s^{\text{out}}, u_1^{\text{in}}, u_1^{\text{mid}}, u_1^{\text{out}}, u_2^{\text{in}}, u_2^{\text{mid}}, u_2^{\text{out}}, \ldots, t^{\text{in}}.$$

Para mostrar a outra direção, afirmamos que qualquer caminho hamiltoniano em G' de s^{sai} para t^{entra} em G' deve ir de uma tripla de nós para uma tripla de nós, exceto pelo início e o fim, como faz o caminho P' que acabamos de descrever. Isso completaria a prova porque qualquer desses caminhos tem um caminho hamiltoniano correspondente em G. Provamos a afirmação seguindo o caminho começando no nó s^{sai}. Observe que o nó seguinte no caminho deve ser u_i^{entra} para algum i porque somente aqueles nós são conectados a s^{sai}. O nó seguinte deve ser u_i^{meio}, porque nenhuma outra maneira está disponível para incluir u_i^{meio} no caminho hamiltoniano. Após u_i^{meio} vem u_i^{sai} porque esse é o único outro ao qual u_i^{meio} está conectado. O nó seguinte deve ser u_j^{entra} para algum j

porque nenhum outro nó disponível está conectado a u_i^{sai}. O argumento então se repete até que t^{entra} seja atingido.

O PROBLEMA DA SOMA DE SUBCONJUNTOS

Retomemos o problema *SUBSET-SUM* definido na página 287. Naquele problema, nos era dada uma coleção de números $x_1, \ldots, x_k$ juntamente com um número alvo t, e tínhamos que determinar se a coleção contém uma subcoleção cuja soma é t. Agora mostramos que esse problema é NP-completo.

TEOREMA 7.56

SUBSET-SUM é NP-completo.

IDÉIA DA PROVA Já mostramos que *SUBSET-SUM* está em NP no Teorema 7.25. Provamos que todas as linguagens em NP são redutíveis em tempo polinomial a *SUBSET-SUM* reduzindo a linguagem NP-completa *3SAT* a ela. Dada uma 3fnc-fórmula ϕ construimos uma instância do problema *SUBSET-SUM* que contém uma subcoleção cuja soma é o alvo t se e somente se ϕ é satisfatível. Chame essa subcoleção T.

Para conseguir essa redução encontramos estruturas do problema *SUBSET-SUM* que representem variáveis e cláusulas. A instância do problema *SUBSET-SUM* que construimos contém números de grande magnitude apresentados em notação decimal. Representamos variáveis por pares de números e cláusulas por certas posições nas representações decimais dos números.

Representamos a variável x_i por dois números, y_i e z_i. Provamos que ou y_i ou z_i deve estar em T para cada i, o que estabelece a codificação para o valor-verdade de x_i na atribuição satisfeitora.

Cada posição de cláusula contém um certo valor no alvo t, o que impõe um requisito no subconjunto T. Provamos que esse requisito é o mesmo que aquele na cláusula correspondente—a saber, que um dos literais nessa cláusula é atribuída VERDADEIRO.

PROVA Já sabemos que *SUBSET-SUM* $\in$ NP, portanto agora mostramos que *3SAT* $\leq_{\text{P}}$ *SUBSET-SUM*.

Seja ϕ uma fórmula booleana com as variáveis $x_1, \ldots, x_l$ e as cláusulas $c_1, \ldots, c_k$. A redução converte ϕ para uma instância do problema *SUBSET-SUM* $\langle S, t \rangle$, na qual os elementos de S e o número t são as linhas na tabela na Figura 7.57, expressos na notação decimal ordinária. As linhas acima da linha dupla são rotuladas

$$y_1, z_1,\ y_2, z_2,\ \ldots, y_l, z_l \quad \text{e} \quad g_1, h_1,\ g_2, h_2,\ \ldots, g_k, h_k$$

e compreende os elementos de S. A linha abaixo da linha dupla é t.

Por conseguinte, S contém um par de números, y_i, z_i, para cada variável x_i em ϕ. A representação decimal desses números está em duas partes, como indicados na tabela. A parte da esquerda compreende um 1 seguido de $l - i$ 0s. A parte direita contém um dígito para cada cláusula, onde o j-ésimo dígito de y_i é 1 se a cláusula c_j contém o literal x_i e o j-ésimo dígito de z_i é 1 se a cláusula c_j contém o literal $\overline{x_i}$. Os dígitos não especificados como sendo 1 são 0.

A tabela é parcialmente preenchida para ilustrar cláusulas de amostra, c_1, c_2 e c_k:

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \cdots) \wedge \cdots \wedge (\overline{x_3} \vee \cdots \vee \cdots).$$

Adicionalmente, S contém um par de números, g_j, h_j, para cada cláusula c_j. Esses dois números são iguais e consistem de um 1 seguido por $k - j$ 0s.

Finalmente, o número alvo t, a linha inferior da tabela, consiste de l 1s seguidos por k 3s.

	1	2	3	4	$\cdots$	l	c_1	c_2	$\cdots$	c_k
y_1	1	0	0	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0
z_1	1	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0
y_2		1	0	0	$\cdots$	0	0	1	$\cdots$	0
z_2		1	0	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0
y_3			1	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	0
z_3			1	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	1
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_l						1	0	0	$\cdots$	0
z_l						1	0	0	$\cdots$	0
g_1							1	0	$\cdots$	0
h_1							1	0	$\cdots$	0
g_2								1	$\cdots$	0
h_2								1	$\cdots$	0
$\vdots$									$\ddots$	$\vdots$
g_k										1
h_k										1
t	1	1	1	1	$\cdots$	1	3	3	$\cdots$	3

FIGURA 7.57
Reduzindo *3SAT* a *SUBSET-SUM*

Agora mostramos por que essa construção funciona. Demonstramos que ϕ é satisfatível sse algum subconjunto de S soma t.

Suponha que ϕ seja satisfatível. Construimos um subconjunto de S da se-

guinte forma. Selecionamos y_i se x_i é atribuída VERDADEIRO na atribuição satisfeitora e z_i se x_i é atribuída FALSO. Se somarmos o que selecionamos até então, obtemos um 1 em cada um dos primeiros l dígitos porque selecionamos ou y_i ou z_i para cada i. Além do mais, cada um dos últimos k dígitos é um número entre 1 e 3 porque cada cláusula é satisfeita e portanto contém entre 1 e 3 literais verdadeiros. Agora selecionamos ainda uma quantidade suficiente dos números g e h para trazer cada um dos últimos k dígitos para 3, portanto atingindo o alvo.

Suppose that a subset of S sums to t. We construct a satisfying assignment to ϕ after making several observations. First, all the digits in members of S are either 0 or 1. Furthermore, each column in the table describing S contains at most five 1s. Hence a "carry" into the next column never occurs when a subset of S is added. To get a 1 in each of the first l columns the subset must have either y_i or z_i for each i, but not both.

Now we make the satisfying assignment. If the subset contains y_i, we assign x_i VERDADEIRO; otherwise, we assign it FALSE. This assignment must satisfy ϕ because in each of the final k columns the sum is always 3. In column c_j, at most 2 can come from g_j and h_j, so at least 1 in this column must come from some y_i or z_i in the subset. If it is y_i, then x_i appears in c_j and is assigned VERDADEIRO, so c_j is satisfied. If it is z_i, then $\overline{x_i}$ appears in c_j and x_i is assigned FALSE, so c_j is satisfied. Therefore ϕ is satisfied.

Finally, we must be sure that the reduction can be carried out in polynomial time. The table has a size of roughly $(k + l)^2$, and each entry can be easily calculated for any ϕ. So the total time is $O(n^2)$ easy stages.

EXERCÍCIOS

7.1 Answer each part TRUE or FALSE.

a. $2n = O(n)$.
b. $n^2 = O(n)$.
R c. $n^2 = O(n \log^2 n)$.
R d. $n \log n = O(n^2)$.
e. $3^n = 2^{O(n)}$.
f. $2^{2^n} = O(2^{2^n})$.

7.2 Answer each part TRUE or FALSE.

a. $n = o(2n)$.
b. $2n = o(n^2)$.
R c. $2^n = o(3^n)$.
R d. $1 = o(n)$.
e. $n = o(\log n)$.
f. $1 = o(1/n)$.

7.3 Which of the following pairs of numbers are relatively prime? Show the calculations that led to your conclusions.

a. 1274 and 10505

b. 7289 and 8029

7.4 Fill out the table described in the polynomial time algorithm for context-free language recognition from Theorem 7.16 for string $w =$ baba and GLC G:

$$\begin{aligned} S &\to RT \\ R &\to TR \mid \mathtt{a} \\ T &\to TR \mid \mathtt{b} \end{aligned}$$

7.5 Is the following formula satisfiable?

$$(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$$

7.6 Show that P is closed under union, concatenation, and complement.

7.7 Show that NP is closed under union and concatenation.

7.8 Let $CONNECTED = \{\langle G \rangle \mid G \text{ is a connected undirected graph}\}$. Analyze the algorithm given on page 167 to show that this language is in P.

7.9 A ***triangle*** in an undirected graph is a 3-clique. Show that $TRIANGLE \in$ P, where $TRIANGLE = \{\langle G \rangle \mid G \text{ contains a triangle}\}$.

7.10 Show that TOD_{AFD} is in P.

7.11 Call graphs G and H ***isomorphic*** if the nodes of G may be reordered so that it is identical to H. Let $ISO = \{\langle G, H \rangle \mid G \text{ and } H \text{ are isomorphic graphs}\}$. Show that $ISO \in$ NP.

PROBLEMAS

7.12 Let

$$MODEXP = \{\langle a, b, c, p \rangle \mid a, b, c, \text{ and } p \text{ are binary integers such that } a^b \equiv c \pmod{p}\}.$$

Show that $MODEXP \in$ P. (Note that the most obvious algorithm doesn't run in polynomial time. Hint: Try it first where b is a power of 2.)

7.13 A ***permutation*** on the set $\{1, \ldots, k\}$ is a one-to-one, onto function on this set. When p is a permutation, p^t means the composition of p with itself t times. Let

$$PERM\text{-}POWER = \{\langle p, q, t \rangle \mid p = q^t \text{ where } p \text{ and } q \text{ are permutations on } \{1, \ldots, k\} \text{ and } t \text{ is a binary integer}\}.$$

Show that $PERM\text{-}POWER \in$ P. (Note that the most obvious algorithm doesn't run within polynomial time. Hint: First try it where t is a power of 2).

7.14 Show that P is closed under the star operation. (Hint: Use dynamic programming. On input $y = y_1 \cdots y_n$ for $y_i \in \Sigma$, build a table indicating for each $i \leq j$ whether the substring $y_i \cdots y_j \in A^*$ for any $A \in$ P.)

R7.15 Show that NP is closed under the star operation.

7.16 Let *UNARY-SSUM* be the subset sum problem in which all numbers are represented in unary. Why does the NP-completeness proof for *SUBSET-SUM* fail to show *UNARY-SSUM* is NP-complete? Show that *UNARY-SSUM* $\in$ P.

7.17 Show that, if P = NP, then every language $A \in$ P, except $A = \emptyset$ and $A = \Sigma^*$, is NP-complete.

*7.18 Show that *PRIMES* $= \{m | m$ is a prime number in binary$\} \in$ NP. (Hint: For $p > 1$ the multiplicative group $Z_p^* = \{x |\, x$ is relatively prime to p and $1 \leq x < p\}$ is both cyclic and of order $p - 1$ iff p is prime. You may use this fact without justifying it. The stronger statement *PRIMES* $\in$ P is now known to be true, but it is more difficult to prove.)

7.19 We generally believe that *PATH* is not NP-complete. Explain the reason behind this belief. Show that proving *PATH* is not NP-complete would prove P $\neq$ NP.

7.20 Let G represent an undirected graph. Also let

$$SPATH = \{\langle G, a, b, k\rangle |\, G \text{ contains a simple path of length at most } k \text{ from } a \text{ to } b\},$$

and

$$LPATH = \{\langle G, a, b, k\rangle |\, G \text{ contains a simple path of length at least } k \text{ from } a \text{ to } b\}.$$

a. Show that *SPATH* $\in$ P.

b. Show that *LPATH* is NP-complete. You may assume the NP-completeness of *UHAMPATH*, the Hamiltonian path problem for undirected graphs.

7.21 Let *DOUBLE-SAT* $= \{\langle\phi\rangle |\, \phi$ has at least two satisfying assignments$\}$. Show that *DOUBLE-SAT* is NP-complete.

R**7.22** Let *HALF-CLIQUE* $= \{\langle G\rangle |\, G$ is an undirected graph having a complete subgraph with at least $m/2$ nodes, where m is the number of nodes in $G\}$. Show that *HALF-CLIQUE* is NP-complete.

7.23 Let *CNF*$_k$ $= \{\langle\phi\rangle |\, \phi$ is a satisfiable cnf-formula where each variable appears in at most k places$\}$.

a. Show that *CNF*$_2 \in$ P.

b. Show that *CNF*$_3$ is NP-complete.

7.24 Let ϕ be a 3cnf-formula. An ***≠-assignment*** to the variables of ϕ is one where each clause contains two literals with unequal truth values. In other words, an $\neq$-assignment satisfies ϕ without assigning three true literals in any clause.

a. Show that the negation of any $\neq$-assignment to ϕ is also an $\neq$-assignment.

b. Let $\neq$*SAT* be the collection of 3cnf-formulas that have an $\neq$-assignment. Show that we obtain a polynomial time reduction from *3SAT* to $\neq$*SAT* by replacing each clause c_i

$$(y_1 \vee y_2 \vee y_3)$$

with the two clauses

$$(y_1 \vee y_2 \vee z_i) \quad \text{and} \quad (\overline{z_i} \vee y_3 \vee b),$$

where z_i is a new variable for each clause c_i and b is a single additional new variable.

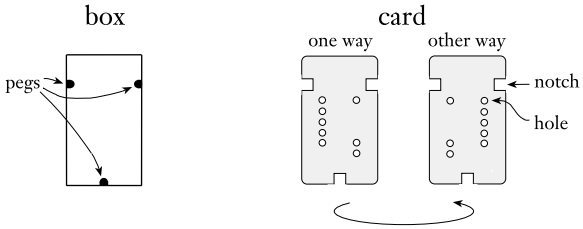
c. Conclude that $\neq SAT$ is NP-complete.

7.25 A ***cut*** in an undirected graph is a separation of the vertices V into two disjoint subsets S and T. The size of a cut is the number of edges that have one endpoint in S and the other in T. Let

$$\mathit{MAX\text{-}CUT} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ has a cut of size } k \text{ or more}\}.$$

Show that *MAX-CUT* is NP-complete. You may assume the result of Problem 7.24. (Hint: Show that $\neq SAT \leq_{\mathrm{P}} \mathit{MAX\text{-}CUT}$. The variable gadget for variable x is a collection of $3c$ nodes labeled with x and another $3c$ nodes labeled with $\overline{x}$, where c is the number of clauses. All nodes labeled x are connected with all nodes labeled $\overline{x}$. The clause gadget is a triangle of three edges connecting three nodes labeled with the literals appearing in the clause. Do not use the same node in more than one clause gadget. Prove that this reduction works.)

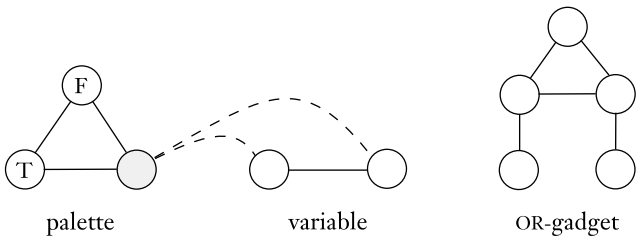
7.26 You are given a box and a collection of cards as indicated in the following figure. Because of the pegs in the box and the notches in the cards, each card will fit in the box in either of two ways. Each card contains two columns of holes, some of which may not be punched out. The puzzle is solved by placing all the cards in the box so as to completely cover the bottom of the box, (i.e., every hole position is blocked by at least one card that has no hole there.) Let $\mathit{CHARADA} = \{\langle c_1, \ldots, c_k\rangle \mid$ each c_i represents a card and this collection of cards has a solution$\}$. Show that *CHARADA* is NP-complete.



7.27 A ***coloring*** of a graph is an assignment of colors to its nodes so that no two adjacent nodes are assigned the same color. Let

$$\mathit{3COLOR} = \{\langle G\rangle \mid \text{the nodes of } G \text{ can be colored with three colors such that no two nodes joined by an edge have the same color}\}.$$

Show that *3COLOR* is NP-complete. (Hint: Use the following three subgraphs.)



7.28 Let *SET-SPLITTING* $= \{\langle S, C\rangle |$ S is a finite set and $C = \{C_1, \ldots, C_k\}$ is a collection of subsets of S, for some $k > 0$, such that elements of S can be colored *red* or *blue* so that no C_i has all its elements colored with the same color.$\}$ Show that *SET-SPLITTING* is NP-complete.

7.29 Consider the following scheduling problem. You are given a list of final exams $F_1, \ldots, F_k$ to be scheduled, and a list of students $S_1, \ldots, S_l$. Each student is taking some specified subset of these exams. You must schedule these exams into slots so that no student is required to take two exams in the same slot. The problem is to determine if such a schedule exists that uses only h slots. Formulate this problem as a language and show that this language is NP-complete.

7.30 This problem is inspired by the single-player game *Minesweeper*, generalized to an arbitrary graph. Let G be an undirected graph, where each node either contains a single, hidden *mine* or is empty. The player chooses nodes, one by one. If the player chooses a node containing a mine, the player loses. If the player chooses an empty node, the player learns the number of neighboring nodes containing mines. (A neighboring node is one connected to the chosen node by an edge.). The player wins if and when all empty nodes have been so chosen.

In the *mine consistency problem* you are given a graph G, along with numbers labeling some of G's nodes. You must determine whether a placement of mines on the remaining nodes is possible, so that any node v that is labeled m has exactly m neighboring nodes containing mines. Formulate this problem as a language and show that it is NP-complete.

R**7.31** In the following solitaire game, you are given an $m \times m$ board. On each of its n^2 positions lies either a blue stone, a red stone, or nothing at all. You play by removing stones from the board so that each column contains only stones of a single color and each row contains at least one stone. You win if you achieve this objective. Winning may or may not be possible, depending upon the initial configuration. Let *SOLITAIRE* $= \{\langle G\rangle |$ G is a winnable game configuration$\}$. Prove that *SOLITAIRE* is NP-complete.

7.32 Let $U = \{\langle M, x, \#^t\rangle |$ MT M accepts input x within t steps on at least one branch$\}$. Show that U is NP-complete.

7.33 Recall, in our discussion of the Church–Turing thesis, that we introduced the language $D = \{\langle p\rangle |$ p is a polynomial in several variables having an integral root$\}$. We stated, but didn't prove, that D is undecidable. In this problem you are to prove a different property of D—namely, that D is NP-hard. A problem is ***NP-hard*** if all problems in NP are polynomial time reducible to it, even though it may not be in NP itself. So, you must show that all problems in NP are polynomial time reducible to D.

7.34 A subset of the nodes of a graph G is a ***dominating set*** if every other node of G is adjacent to some node in the subset. Let

$$\textit{DOMINATING-SET} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ has a dominating set with } k \text{ nodes}\}.$$

Show that it is NP-complete by giving a reduction from *VERTEX-COVER*.

*7.35 Show that the following problem is NP-complete. You are given a set of states $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_l\}$ and a collection of pairs $\{(s_1, r_1), \ldots, (s_k, r_k)\}$ where the s_i are distinct strings over $\Sigma = \{0, 1\}$, and the r_i are (not necessarily distinct) members of Q. Determine whether a AFD $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ exists where $\delta(q_0, s_i) = r_i$ for each i. Here, $\delta(q, s)$ is the state that M enters after reading s, starting at state q. (Note that F is irrelevant here).

*7.36 Show that if P = NP, a polynomial time algorithm exists that produces a satisfying assignment when given a satisfiable Boolean formula. (Note: The algorithm you are asked to provide computes a function, but NP contains languages, not functions. The P = NP assumption implies that *SAT* is in P, so testing satisfiability is solvable in polynomial time. But the assumption doesn't say how this test is done, and the test may not reveal satisfying assignments. You must show that you can find them anyway. Hint: Use the satisfiability tester repeatedly to find the assignment bit-by-bit.)

*7.37 Show that if P = NP, you can factor integers in polynomial time. (See the note in Problem 7.36.)

R*7.38 Show that if P = NP, a polynomial time algorithm exists that takes an undirected graph as input and finds a largest clique contained in that graph. (See the note in Problem 7.36.)

7.39 In the proof of the Cook–Levin theorem, a window is a 2×3 rectangle of cells. Show why the proof would have failed if we had used 2×2 windows instead.

*7.40 Consider the algorithm *MINIMIZE*, which takes a AFD M as input and outputs AFD M'.

MINIMIZE = "On input $\langle M\rangle$, where $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, A)$ is a AFD:

1. Remove all states of M that are unreachable from the start state.
2. Construct the following undirected graph G whose nodes are the states of M.
3. Place an edge in G connecting every accept state with every nonaccept state. Add additional edges as follows.
4. Repeat until no new edges are added to G:
5. For every pair of distinct states q and r of M and every $a \in \Sigma$:
6. Add the edge (q, r) to G if $(\delta(q, a), \delta(r, a))$ is an edge of G.
7. For each state q, let $[q]$ be the collection of states $[q] = \{r \in Q \mid \text{ no edge joins } q \text{ and } r \text{ in } G\}$.
8. Form a new AFD $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', A')$ where $Q' = \{[q] \mid q \in Q\}$, (if $[q] = [r]$, only one of them is in Q'), $\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$, for every $q \in Q$ and $a \in \Sigma$, $q_0' = [q_0]$, and $A' = \{[q] \mid q \in A\}$.
9. Output $\langle M'\rangle$."

a. Show that M and M' are equivalent.

b. Show that M' is minimal—that is, no AFD with fewer states recognizes the same language. You may use the result of Problem 1.52 without proof.

c. Show that *MINIMIZE* operates in polynomial time.

7.41 For a cnf-formula ϕ with m variables and c clauses, show that you can construct in polynomial time an AFN with $O(cm)$ states that accepts all nonsatisfying assignments, represented as Boolean strings of length m. Conclude that AFNs cannot be minimized in polynomial time unless P = NP.

*__7.42__ A ***2cnf-formula*** is an E of clauses, where each clause is an OU of at most two literals. Let $2SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ is a satisfiable 2cnf-formula}\}$. Show that $2SAT \in$ P.

7.43 Modify the algorithm for context-free language recognition in the proof of Theorem 7.16 to give a polynomial time algorithm that produces a parse tree for a string, given the string and a GLC, if that grammar generates the string.

7.44 Say that two Boolean formulas are ***equivalent*** if they have the same set of variables and are true on the same set of assignments to those variables (i.e., they describe the same Boolean function). A Boolean formula is ***minimal*** if no shorter Boolean formula is equivalent to it. Let *MIN-FORMULA* be the collection of minimal Boolean formulas. Show that, if P = NP, then *MIN-FORMULA* $\in$ P.

7.45 The ***difference hierarchy*** $\mathrm{D}_i\mathrm{P}$ is defined recursively as

a. $\mathrm{D}_1\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ and

b. $\mathrm{D}_i\mathrm{P} = \{A \mid A = B \setminus C \text{ for } B \text{ in NP and } C \text{ in } \mathrm{D}_{i-1}\mathrm{P}\}$.
(Here $B \setminus C = B \cap \overline{C}$.)

For example, a language in $\mathrm{D}_2\mathrm{P}$ is the difference of two NP languages. Sometimes $\mathrm{D}_2\mathrm{P}$ is called DP (and may be written D^{P}). Let

$$Z = \{\langle G_1, k_1, G_2, k_2\rangle \mid G_1 \text{ has a } k_1\text{-clique and } G_2 \text{ doesn't have a } k_2\text{-clique}\}.$$

Show that Z is complete for DP. In other words, show that every language in DP is polynomial time reducible to Z.

*__7.46__ Let $MAX\text{-}CLIQUE = \{\langle G, k\rangle \mid$ the largest clique in G is of size exactly $k\}$. Use the result of Problem 7.45 to show that *MAX-CLIQUE* is DP-complete.

*__7.47__ Let $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ be any function where $f(n) = o(n \log n)$. Show that $\mathrm{TIME}(f(n))$ contains only the regular languages.

*__7.48__ Call a regular expression ***star-free*** if it does not contain any star operations. Let $EQ_{\mathsf{SF-REX}} = \{\langle R, S\rangle \mid R \text{ and } S \text{ are equivalent star-free regular expressions}\}$. Show that $EQ_{\mathsf{SF-REX}}$ is in coNP. Why does your argument fail for general regular expressions?

*__7.49__ This problem investigates ***resolution***, a method for proving the unsatisfiability of cnf-formulas. Let $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$ be a formula in cnf, where the C_i are its clauses. Let $\mathcal{C} = \{C_i \mid C_i \text{ is a clause of } \phi\}$. In a *resolution step* we take two clauses C_a and C_b in $\mathcal{C}$ which both have some variable x, occurring positively in one of the clauses and negatively in the other. Thus $C_a = (x \vee y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_k)$ and $C_b = (\overline{x} \vee z_1 \vee z_2 \vee \cdots \vee z_l)$, where the y_i and z_i are literals. We form the new clause $(y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_k \ \vee \ z_1 \vee z_2 \vee \cdots \vee z_l)$ and remove repeated literals. Add this new clause to $\mathcal{C}$. Repeat the resolution steps until no additional clauses can be obtained. If the empty clause ( ) is in $\mathcal{C}$ then declare ϕ unsatisfiable.

Say that resolution is ***sound*** if it never declares satisfiable formulas to be unsatisfiable. Say that resolution is ***complete*** if all unsatisfiable formulas are declared to be unsatisfiable.

a. Show that resolution is sound and complete.

b. Use part (a) to show that $2SAT \in$ P.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

7.1 **(c)** FALSE; **(d)** TRUE.

7.2 **(c)** TRUE; **(d)** TRUE.

7.15 Let $A \in$ NP. Construct MTN M to decide A in nondeterministic polynomial time.

$M =$ "On input w:

1. Nondeterministically divide w into pieces $w = x_1 x_2 \cdots x_k$.
2. For each x_i, nondeterministically guess the certificates that show $x_i \in A$.
3. Verify all certificates if possible, then *aceite*.
   Otherwise if verification fails, *rejeite*."

7.22 We give a polynomial time mapping reduction from *CLIQUE* to *HALF-CLIQUE*. The input to the reduction is a pair $\langle G, k\rangle$ and the reduction produces the graph $\langle H\rangle$ as output where H is as follows. If G has m nodes and $k = m/2$ then $H = G$. If $k < m/2$, then H is the graph obtained from G by adding j nodes, each connected to every one of the original nodes and to each other, where $j = m - 2k$. Thus H has $m + j = 2m - 2k$ nodes. Observe that G has a k-clique iff H has a clique of size $k + j = m - k$ and so $\langle G, k\rangle \in$ *CLIQUE* iff $\langle H\rangle \in$ *HALF-CLIQUE*. If $k > 2m$, then H is the graph obtained by adding j nodes to G without any additional edges, where $j = 2k - m$. Thus H has $m + j = 2k$ nodes, and so G has a k-clique iff H has a clique of size k. Therefore $\langle G, k_k\rangle \in$ *CLIQUE* iff $\langle H\rangle \in$ *HALF-CLIQUE*. We also need to show *HALF-CLIQUE* $\in$ NP. The certificate is simply the clique.

7.31 First, *SOLITAIRE* $\in$ NP because we can verify that a solution works, in polynomial time. Second, we show that *3SAT* $\leq_{\mathrm{P}}$ *SOLITAIRE*. Given ϕ with m variables $x_1, \ldots, x_m$ and k clauses $c_1, \ldots, c_k$, construct the following $k \times m$ game G. We assume that ϕ has no clauses that contain both x_i and $\overline{x_i}$ because such clauses may be removed without affecting satisfiability.

If x_i is in clause c_j put a blue stone in row c_j, column x_i. If $\overline{x_i}$ is in clause c_j put a red stone in row c_j, column x_i. We can make the board square by repeating a row or adding a blank column as necessary without affecting solvability. We show that ϕ is satisfiable iff G has a solution.

($\rightarrow$) Take a satisfying assignment. If x_i is true (false), remove the red (blue) stones from the corresponding column. So, stones corresponding to true literals remain. Because every clause has a true literal, every row has a stone.

($\leftarrow$) Take a game solution. If the red (blue) stones were removed from a column, set the corresponding variable true (false). Every row has a stone remaining, so every clause has a true literal. Therefore ϕ is satisfied.

7.38 If you assume that P = NP, then *CLIQUE* $\in$ P, and you can test whether G contains a clique of size k in polynomial time, for any value of k. By testing whether G contains a clique of each size, from 1 to the number of nodes in G, you can determine the size t of a maximum clique in G in polynomial time. Once you know t, you can find a clique with t nodes as follows. For each node x of G, remove x and calculate the resulting maximum clique size. If the resulting size decreases, replace x and continue with the next node. If the resulting size is still t, keep x permanently removed and continue with the next node. When you have considered all nodes in this way, the remaining nodes are a t-clique.

8

COMPLEXIDADE DE ESPAÇO

Neste capítulo consideramos a complexidade de problemas computacionais em termos da quantidade de espaço, ou memória, que eles requerem. Tempo e espaço são duas das mais importantes considerações quando buscamos soluções práticas para muitos problemas computacionais. Complexidade de espaço compartilha muitas das características da complexidade de tempo e serve como uma maneira adicional de se classificar problemas conforme sua dificuldade computacional.

Como fizemos com complexidade de tempo, precisamos selecionar um modelo para medir o espaço usado por um algoritmo. Continuamos com o modelo da máquina de Turing pela mesma razão que o utilizamos para medir tempo. Máquinas de Turing são matematicamente simples e suficientemente próximas a computadores reais para dar resultados com significado.

DEFINIÇÃO 8.1

Seja M uma máquina de Turing determinística que pára sobre todas as entradas. A ***complexidade de espaço*** de M é a função $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, onde $f(n)$ é o número máximo de células de fita que M visita sobre qualquer entrada de comprimento n. Se a complexidade de espaço de M é $f(n)$, também dizemos que M roda em espaço $f(n)$.

Se M é uma máquina de Turing não-determinística na qual todos os ramos param sobre todas as entradas, definimos sua complexidade de espaço $f(n)$ como sendo o número máximo de células de fita que M visita sobre qualquer ramo de sua computação para qualquer entrada de comprimento n.

Tipicamente estimamos a complexidade de espaço de máquinas de Turing usando notação assintótica.

DEFINIÇÃO 8.2

Seja $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{R}^+$ uma função. As ***classes de complexidade de espaço***, $\mathbf{SPACE}(f(n))$ e $\mathbf{NSPACE}(f(n))$, são definidas da seguinte forma.

$$\begin{aligned}\text{SPACE}(f(n)) = \{L \mid\ & L \text{ é uma linguagem decidida por uma} \\ & \text{máquina de Turing determinística} \\ & \text{de espaço } O(f(n))\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{NSPACE}(f(n)) = \{L \mid\ & L \text{ é uma linguagem decidida por uma} \\ & \text{máquina de Turing não-determinística} \\ & \text{de espaço } O(f(n))\}.\end{aligned}$$

EXEMPLO 8.3

No Capítulo 7 introduzimos o problema NP-completo *SAT*. Aqui, mostramos que *SAT* pode ser resolvido com um algoritmo de espaço linear. Acreditamos que *SAT* não pode ser resolvido com algoritmo de tempo polinomial, muito menos com um algoritmo de tempo linear, porque *SAT* é NP-completo. Espaço parece ser mais poderoso que tempo porque pode ser reusado, enquanto que o tempo não pode.

M_1 = "Sobre a entrada $\langle\phi\rangle$, onde ϕ é uma fórmula booleana:

1. Para cada atribuição de verdade às variáveis $x_1, \ldots, x_m$ de ϕ:
2. Calcule o valor de ϕ naquela atribuição de verdade.
3. Se ϕ alguma vez teve valor 1, *aceite*; se não, *rejeite*."

A máquina M_1 claramente roda em espaço linear porque cada iteração do laço pode reusar a mesma porção da fita. A máquina precisa armazenar somente a atribuição de verdade corrente e que pode ser feito com espaço $O(m)$. O número de variáveis m é no máximo n, o comprimento da entrada, portanto essa máquina roda em espaço $O(n)$. ∎

EXEMPLO 8.4

Aqui, ilustramos a complexidade de espaço não-determinístico de uma linguagm. Na próxima seção mostramos como se determinar a complexidade de espaço não-determinístico pode ser útil na determinação de sua complexidade espaço determinístico. Considere o problema de se testar se um autômato finito não-determinístico aceita todas as cadeias. Seja

$$TOD_{\mathsf{AFN}} = \{\langle A\rangle \mid A \text{ é um AFN e } L(A) = \Sigma^*\}.$$

Damos um algoritmo de espaço linear não-determinístico que decide o complemento dessa linguagem, $\overline{TOD_{\mathsf{AFN}}}$. A idéia por trás desse algoritmo úsar não-determinismo para adivinhar uma cadeia que é rejeitada pelo AFN e usar espaço linear para guardar quais estados em que o AFN poderia estar em um dado tempo. Note que não se sabe se essa linguagem está em NP ou em coNP.

N = "Sobre a entrada $\langle M\rangle$ onde M é um AFN:

1. Coloque um marcador sobre o estado inicial do AFN.
2. Repita 2^q vezes, onde q é o número de estados de M:
3. Escolha não-deterministicamente um símbolo de entrada e modifique as posições dos marcadores sobre os estados de M's para simular a leitura daquele símbolo.
4. *Aceite* se os Estágios 2 e 3 revelam alguma cadeia que M rejeita, ou seja, se em algum ponto nenhum dos marcadores estiverem sobre estados de aceitação de M. Caso contrário, *rejeite*."

Se M rejeita quaisquer cadeias, ele tem que rejeitar uma de comprimento no máximo 2^q porque em qualquer cadeia mais longa que é rejeitada as localizações dos marcadores descritas no algoritmo precedente se repetiriam. A parte da cadeia entre as repetições pode ser removida para obter uma cadeia rejeitada mais curta. Logo, N decide $\overline{TOD_{\mathsf{AFN}}}$. Note que N também *aceita* entradas inapropriadamente formadas.

O espaço requerido por esse algoritmo é somente aquele necessário para armazenar a localização dos marcadores e do contador de repetição do laço, e isso

pode ser feito com espaço linear. Portanto o algoritmo roda em espaço não-determinístico $O(n)$. A seguir, provamos um teorema que fornece informação sobre a complexidade de espaço determinístico de TOD_{AFN}. ■

8.1 TEOREMA DE SAVITCH

O teorema de Savitch é um dos resultados mais antigos a respeito da complexidade de espaço. Ele mostra que máquinas determinísticas podem simular máquinas não-determinísticas usando uma quantidade surpreendentemente de espaço. Para complexidade de tempo, tal simulação parece requere um acréscimo exponencial no tempo. Para complexidade de espaço, o teorema de Savitch's mostra que qualquer MT não-determinística que usa $f(n)$ espaço pode ser convertida numa MT determinística que usa somente $f^2(n)$ espaço.

TEOREMA 8.5

Teorema de Savitch Para qualquer[1] função $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{R}^+$, onde $f(n) \geq n$,

$$\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f^2(n)).$$

IDÉIA DA PROVA Precisamos simular uma MTN de espaço $f(n)$ deterministicamente. Uma abordagem ingênua é proceder tentar todos os ramos da computação da MTN, uma por uma. A simulação precisar guardar qual ramo que ela está atualmente tentando de modo que ela seja capaz de continuar para o próximo. Mas um ramo que usa espaço $f(n)$ pode rodar por $2^{O(f(n))}$ passos, e cada passo pode ser uma escolha não-determinística. Explorar os ramos sequencialmente demandaria registrar todas as escolhas usadas em um ramo específico de modo a ser capaz de encontrar o próximo ramo. Por conseguinte, essa abordagem pode usar espaço $2^{O(f(n))}$, excedendo nosso objetivo de espaço $O(f^2(n))$.

Ao invés disso, tomamos uma abordagem diferente considerando o seguinte problema mais geral. Recebemos duas configurações da MTN, c_1 e c_2, juntamente com um número t, e temos que testar se a MTN pode ir de c_1 a c_2 dentro de t passos. Chamamos esse problema o ***problema da originabilidade***. Resolvendo o problema da originabilidade, onde c_1 é a configuração inicial, c_2 é a configuração de aceitação, e t é o número máximo de passos que a máquina não-determinística pode usar, podemos determinar se a máquina aceita sua entrada.

[1] Na página 345, mostramos que o teorema de Savitch também se verifica sempre que $f(n) \geq \log n$.

Damos um algoritmo determinístico, recursivo, que resolve o problema da originabilidade. Ele opera buscando por uma configuração intermediária c_m, e testando recursivamente se (1) c_1 pode chegar a c_m dentro de $t/2$ passos, e (2) se c_m pode chegar a c_2 dentro de $t/2$ passos. Reusando o espaço para cada um dos dois testes recursivos permite uma economia significativa de espaço.

Esse algoritmo precisa de espaço para armazenar a pilha de recursão. Cada nível da recursão usa espaço $O(f(n))$ para armazenar uma configuração. A profundidade da recursão é $\log t$, onde t é o tempo máximo que a máquina não-determinística pode usar em qualquer ramo. Temos $t = 2^{O(f(n))}$, portanto $\log t = O(f(n))$. Logo, a simulação determinística usa espaço $O(f^2(n))$.

PROVA Seja N uma MTN que decide uma linguagem A em espaço $f(n)$. Construímos uma MT determinística M que decide A. A máquina M usa o procedimento PODEORIGINAR, que testa se uma das configurações de N's pode originar uma outra dentro de um número especificado de passos. Esse procedimento resolve o problema da originabilidade descrito na idéia da prova.

Seja w uma cadeia considerada como entrada para N. Para configurações c_1 e c_2 de N sobre w, e um inteiro t, PODEORIGINAR(c_1, c_2, t) dá como saída *aceite* se N pode ir da configuração c_1 para a configuração c_2 em t ou menos passos ao longo de algum caminho não-determinístico. Se não, PODEORIGINAR dá como saída *rejeite*. Por conveniência, assumimos que t é uma potência de 2.

PODEORIGINAR = "Sobre a entrada c_1, c_2, e t:

1. Se $t = 1$, então teste diretamente se $c_1 = c_2$ ou se c_1 origina c_2 em um passo conforme as regras de N. *Aceite* se um dos testes for bem sucedido; *rejeite* se ambos falham.
2. Se $t > 1$, então para cada configuração c_m de N sobre w usando espaço $f(n)$:
3. Rode PODEORIGINAR$(c_1, c_m, \frac{t}{2})$.
4. Rode PODEORIGINAR$(c_m, c_2, \frac{t}{2})$.
5. Se os passos 3 e 4 ambos aceitam, então *aceite*.
6. Se ainda não aceitaram, *rejeite*."

Agora definimos M para simular N da seguinte maneira. Primeiro modificamos N de modo que quando ela aceita ela limpa sua fita e move a cabeça para a célula mais à esquerda, dessa forma entrando numa configuração chamada c_{aceita}. Fazemos com que c_{inicio} seja a configuração inicial de N sobre w. Escolhemos uma constante d de modo que N não tenha mais que $2^{df(n)}$ configurações usando $f(n)$ de fita, onde n é o comprimento de w. Então sabemos que $2^{df(n)}$ fornece um limitante superior no tempo de execução de qualquer ramo de N sobre w.

M = "Sobre a entrada w:

1. Dê como saída o resultado de PODEORIGINAR$(c_{\text{inicio}}, c_{\text{aceita}}, 2^{df(n)})$."

O algoritmo PODEORIGINAR obviamente resolve o problema da originabilidade, e portanto M corretamente simula N. Precisamos analisá-lo para verificar que M funciona dentro de $O(f^2(n))$ de espaço.

Sempre que PODEORIGINAR invoca si próprio recursivamente, ele armazena o número do estágio corrente e os valores de c_1, c_2, e t numa pilha de modo que esses valores possam ser restaurados no retorno da invocação recursiva. Cada nível da recursão portanto usa $O(f(n))$ espaço adicional. Além disso, cada nível da recursão divide o tamanho de t pela metade. Inicialmente t começa igual a $2^{df(n)}$, de modo que a profundidade da recursão é $O(\log 2^{df(n)})$ ou $O(f(n))$. Por conseguinte, o espaço total usado é $O(f^2(n))$, como afirmado.

Uma dificuldade técnica surge nesse argumento porque o algoritmo M precisa conhecer o valor de $f(n)$ quando ele chama PODEORIGINAR. Podemos lidar com essa dificuldade modificando M de modo que ela tente $f(n) = 1, 2, 3, \ldots$ Para cada valor $f(n) = i$, o algoritmo modificado usa PODEORIGINAR para determinar se a configuração de aceitação é atingível. Adicionalmente, ele usa PODEORIGINAR para determinar se N usa pelo menos espaço $i + 1$ testando se N pode atingir qualquer das configurações de comprimento $i+1$ da configuração inicial. Se a configuração de aceitação é atingível, M aceita; se nenhuma configuração de comprimento $i + 1$ for atingível, M rejeita; e caso contrário M continua com $f(n) = i + 1$. (Poderíamos ter lidado com essa dificuldade de uma outra maneira assumindo que M pode computar $f(n)$ dentro de espaço $O(f(n))$, mas então precisaríamos adicionar essa suposição ao enunciado do teorema).

8.2 A CLASSE PSPACE

Por analogia com a classe P, definimos a classe PSPACE para complexidade de espaço.

DEFINIÇÃO 8.6

PSPACE é a classe de linguagens que são decidíveis em espaço polinomial em uma máquina de Turing determinística. Em outras palavras,

$$\text{PSPACE} = \bigcup_k \text{SPACE}(n^k).$$

Definimos NPSPACE, a contrapartida não-determinística de PSPACE, em termos das classes NSPACE. Entretanto, PSPACE = NPSPACE em virtude do teorema de Savitch, porque o quadrado de qualquer polinômio ainda é um polinômio.

Nos Exemplos 8.3 e 8.4 mostramos que *SAT* está em SPACE(n) e que TOD_{AFN} está em coNSPACE(n) e portanto, pelo teorema de Savitch, em SPACE(n^2), porque as classes de espaço determinístico são fechadas sob complemento. Por conseguinte, ambas as linguagens estão em PSPACE.

Vamos examinar o relacionamento de PSPACE com P e NP. Observamos que P $\subseteq$ PSPACE porque uma máquina que roda rapidamente não pode usar uma grande quantidade de espaço. Mais precisamente, para $t(n) \geq n$, qualquer máquina que opera em tempo $t(n)$ pode usar no máximo espaço $t(n)$ porque uma máquina pode explorar no máximo uma célula nova a cada passo de sua computação. Similarmente, NP $\subseteq$ NPSPACE, e portanto NP $\subseteq$ PSPACE.

Reciprocamente, podemos limitar a complexidade de tempo de uma máquina de Turing em termos de sua complexidade de espaço. Para $f(n) \geq n$, uma MT que usa espaço $f(n)$ pode ter no máximo $f(n)\,2^{O(f(n))}$ configurações diferentes, por uma generalização simples da prova do Lema 5.8 na página 206. Uma computação de MT que pára pode não repetir uma configuração. Por conseguinte, uma MT[2] que usa espaço $f(n)$ tem que rodar em tempo $f(n)\,2^{O(f(n))}$, portanto PSPACE $\subseteq$ EXPTIME $= \bigcup_k$ TIME(2^{n^k}).

Resumimos nosso conhecimento dos relacionamentos entre as classes de complexidade definidas até agora na série de inclusões

$$\text{P} \subseteq \text{NP} \subseteq \text{PSPACE} = \text{NPSPACE} \subseteq \text{EXPTIME}.$$

Não sabemos se quaisquer dessas inclusões é na realidade uma igualdade. Alguém pode ainda descobrir uma simulação como a do teorema de Savitch que junta algumas dessas classes na mesma classe. Entretanto, no Capítulo 9 provamos que P $\neq$ EXPTIME. Por conseguinte, pelo menos uma das inclusões precedentes é própria, mas somos incapazes de dizer quais! De fato, a maria dos pesquisadores acreditam que todas as inclusões são próprias. O seguinte diagrama mostra os relacionamentos entre essas classes, assumindo que todas são diferentes.

[2] O requisito aqui de que $f(n) \geq n$ é generalizado mais adiante para $f(n) \geq \log n$, quando introduzimos MTs que usam espaço sublinear na página 344.

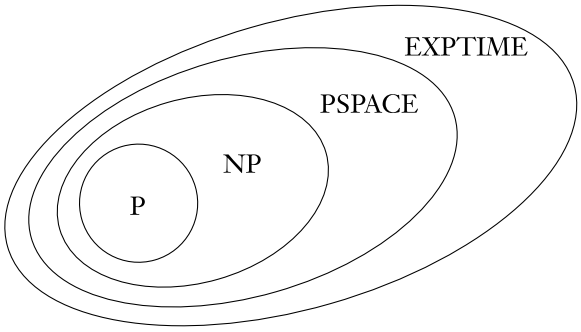


FIGURA 8.7
Relacionamentos conjecturados entre P, NP, PSPACE, e EXPTIME

8.3 PSPACE-COMPLETUDE

Na Seção 7.4 introduzimos a categoria de linguagens NP-completas como representando as linguagens mais difíceis em NP. Demonstrar que uma linguagem é NP-completa fornece forte evidência de que a linguagem não está em P. Se ela estivesse, P e NP seriam iguais. Nesta seção introduzimos a noção análoga, PSPACE-completude, para a classe PSPACE.

DEFINIÇÃO 8.8

Uma linguagem B é ***PSPACE-completa*** se ela satisfaz duas condições:

1. B está em PSPACE, e
2. toda A in PSPACE é redutível em tempo polinomial a B.

Se B meramente satisfaz a condição 2, dizemos que ela é ***PSPACE-difícil***.

Ao definir PSPACE-completude, usamos redutibilidade em tempo polinomial como dada na Definição 7.29. Por que não definimos uma noção de redutibilidade em *espaço* polinomial e usamos essa ao invés de redutibilidade em *tempo* polinomial? Para entender a resposta para essa importante questão, considere nossa motivação para definir problemas completos antes de mais nada.

Problemas completos são importantes porque eles são exemplos dos problemas mais difíceis em uma classe de complexidade. Um problema completo é

o mais difícil porque qualquer outro problema na classe é facilmente reduzido a ele, portanto se encontramos uma maneira simples de resolver o problema completo, podemos facilmente resolver todos os outros problemas na classe. A redução tem que ser *fácil*, relativa à complexidade dos problemas típicos na classe, para que esse raciocício se aplique. Se a própria redução fosse difícil de computar, uma solução fácil para o problema completo não necessariamente originaria uma solução fácil para os problemas que se reduzem para ele.

Por conseguinte, a regra é: Sempre que definimos problemas completos para uma classe de complexidade, o modelo de redução tem que ser mais limitado que o modelo usado para definir a classe propriamente dita.

O PROBLEMA TQBF

Nosso primeiro exemplo de um problema PSPACE-completo envolve uma generalização do problema da satisfatibilidade. Lembre-se que uma ***fórmula booleana*** é uma expressão que contém variáveis booleanas, as constantes 0 e 1, e as operações booleanas $\wedge$, $\vee$, e $\neg$. Agora introduzimos um tipo mais geral de fórmula booleana.

Os ***quantificadores*** $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe) aparecem freqüentemente em enunciados matemáticos. Escrever o enunciado $\forall x\ \phi$ significa que, para *todo* valor para a variável x, o enunciado ϕ é verdadeiro. Similarmente, escrever o enunciado $\exists x\ \phi$ significa que, para *algum* valor da variável x, o enunciado ϕ é verdadeiro. Às vezes, $\forall$ é referenciado como o ***quantificador universal*** e $\exists$ como o ***quantificador existencial***. Dizemos que a variável x imediatamente após o quantificador é ***ligada*** ao quantificador.

Por exemplo, considerando os números naturais, o enunciado $\forall x\ [x + 1 > x]$ significa que o sucessor $x + 1$ de todo número natural x é maior que o próprio número. Obviamente, esse enunciado é verdadeiro. Entretanto, o enunciado $\exists y\ [y + y = 3]$ obviamente é falso. Na interpretação do significado de enunciados envolvendo quantificadores, temos que considerar o ***universo*** do qual os valores são provenientes. Nos casos precedentes o universo compreendia os números naturais, mas se tomássemos, ao invés, os números reais, o enunciado exiscentialmente quantificado se tornaria verdadeiro.

Enunciados podem conter vários quantificadores, como em $\forall x\, \exists y\ [y > x]$. Para o universo dos números naturais, esse enunciado diz que todo número natural tem um outro número natural maior que ele. A ordem dos quantificadoress é importante. Invertendo a ordem, como no enunciado $\exists y\, \forall x\ [y > x]$, dá um significando inteiramente diferente—a saber, que algum número natural é maior que todos os outros. Obviamente, o primeiro enunciado é verdadeiro e o segundo enunciado é falso.

Um quantificador pode aparecer em qualquer lugar em um enunciado matemático. Ele se aplica ao fragmento do enunciado aparecendo dentro do par emparelhado de parênteses ou colchetes após as variáveis quantificadas. Esse fragmento é chamado o ***escopo*** do quantificador. Com freqüência é conveniente requerer que todos os quantificadores apareçam no início do enunciado e que o escopo de cada quantificador seja tudo que vem depois dele. Tais enunciados são

ditos estar na ***forma normal prenex***. Qualquer enunciado pode ser colocado na forma normal prenex facilmente. Consideramos enunciados nessa forma apenas, a menos que seja indicado ao contrário.

Fórmulas booleanas com quantificadores são chamadas ***fórmulas booleanas quantificadas***. Para tais fórmulas, o universo é $\{0, 1\}$. Por exemplo,

$$\phi = \forall x \, \exists y \, [\, (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y}) \,]$$

é uma fórmula booleana quantificada. Aqui, ϕ é verdadeiro, mas seria falso se os quantificadores $\forall x$ e $\exists y$ fossem trocados.

Quando cada variável de uma fórmula aparece dentro do escopo de algum quantificador, a fórmula é dita estar ***completamente quantificada***. Uma fórmula booleana completamente quantificada é às vezes chamada uma ***sentença*** e é sempre verdadeira ou falsa. Por exemplo, a fórmula precedente ϕ é completamente quantificada. Entretanto, se a parte inicial, $\forall x$, de ϕ fosse removida, a fórmula não mais seria completamente quantificada e não seria nem verdadeira nem falsa.

O problema *TQBF* é determinar se uma fórmula booleana completamente quantificada é verdadeira ou falsa. Definimos a linguagem

$TQBF = \{\langle \phi \rangle \mid \phi$ é uma fórmula booleana completamente quantificada verdadeira$\}$.

TEOREMA 8.9

TQBF é PSPACE-completo.

IDÉIA DA PROVA Para mostrar que *TQBF* está em PSPACE damos um algoritmo simples que atribui valores às variáveis e calcula recursivamente a veracidade da fórmula para aqueles valores. Dessa informação o algoritmo pode determinar a veracidade da fórmula quantificada original.

Para mostrar que toda linguagem A em PSPACE se reduz para *TQBF* em tempo polinomial, começamos com uma máquina de Turing limitada por espaço-polinomial para A. Aí então damos uma redução de tempo polinomial que mapeia uma cadeia para uma fórmula booleana quantificada ϕ que codifica uma simulação da máquina sobre aquela entrada. A fórmula é verdadeira sse a máquina aceita.

Como uma primeira tentativa nessa construção, vamos tentar imitar a prova do teorema de Cook–Levin, Teorema 7.37. Podemos construir uma fórmula ϕ que simula M sobre uma entrada w expressando os requisitos para um tableau de aceitação. Um tableau para M sobre w tem largura $O(n^k)$, o espaço usado por M, mas sua altura é exponencial em n^k porque M pode rodar por tempo exponencial. Por conseguinte, se fôssemos representar o tableau com uma fórmula diretamente, terminaríamos uma fórmula de tamanho exponencial. Entretanto, uma redução de tempo polinomial não pode produzir um resultado de tamanho-exponencial, portanto essa tentativa falha em mostrar que $A \leq_{\mathrm{P}} TQBF$.

Ao invés disso, usamos uma técnica relacionada à prova do teorema de Savitch

para construir a fórmula. A fórmula divide o tableau em metades e emprega o quantificador universal para representar cada metade com a mesma parte da fórmula. O resultado é uma fórmula muito mais curta.

PROVA Primeiro, damos um algoritmo de espaço polinomial que decide *TQBF*.

T = "Sobre a entrada $\langle \phi \rangle$, uma fórmula booleana completamente quantificada:

1. Se ϕ não contém quantificadores, então ela á uma expressão com apenas constantes, portanto calcule ϕ e *aceite* se é verdadeira; caso contrário, *rejeite*.
2. Se ϕ é igual a $\exists x\ \psi$, chame recursivamente T sobre ψ, primeiro com 0 substituindo x e então com 1 substituindo x. Se qualquer dos resultados é aceite, então *aceite*; caso contrário, *rejeite*.
3. Se ϕ é igual a $\forall x\ \psi$, chame recursivamente T sobre ψ, primeiro com 0 substituindo x e então com 1 substituindo x. Se ambos os resultados são aceite, então *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

O algoritmo T obviamente decide *TQBF*. Para analisar sua complexidade de espaço observamos que a profundidade da recursão é no máximo o número de variáveis. Em cada nível precisamos apenas de armazenar o valor de uma variável, de modo que o espaço total usado é $O(m)$, onde m é o número variáveis que aparecem em ϕ. Por conseguinte, T roda em espaço linear.

A seguir, mostramos que *TQBF* é PSPACE-difícil. Seja A uma linguagem decidida por uma MT M em espaço n^k para alguma constante k. Damos uma redução de tempo polinomial de A para *TQBF*.

A redução mapeia uma cadeia w para uma fórmula booleana quantificada ϕ que é verdadeira sse M aceita w. Para mostrar como construir ϕ resolvemos um problema mais geral. Usando duas coleções de variáveis denotadas c_1 e c_2 representando duas configurações e um número $t > 0$, construímos uma fórmula $\phi_{c_1,c_2,t}$. Se atribuimos c_1 e c_2 a configurações reais, a fórmula é verdadeira sse M pode ir de c_1 para c_2 em no máximo t passos. Então fazemos com que ϕ seja a fórmula $\phi_{c_{\text{inicio}},c_{\text{aceita}},h}$, onde $h = 2^{df(n)}$ para uma constante d, escolhida de tal modo que M não tenha mais que $2^{df(n)}$ configurações possíveis sobre uma entrada de comprimento n. Aqui, faça $f(n) = n^k$. Por conveniência, assumimos que t é uma potência de 2.

A fórmula codifica o conteúdo das células de fita como na prova do teorema de Cook–Levin. Cada célula tem diversas variáveis associadas a ela, uma para cada símbolo de fita e estado, correspondendo aos possíveis conteúdos daquela célula. Cada configuração tem n^k células e portanto é codificada por $O(n^k)$ variáveis.

Se $t = 1$, podemos facilmente construir $\phi_{c_1,c_2,t}$. Desenhamos a fórmula de modo que diga se c_1 é igual a c_2, ou c_2 segue de c_1 em um único passo de M. Expressamos a igualdade escrevendo uma expressão booleana dizendo que cada uma das variáveis representando c_1 contém o mesmo valor booleano que a variável correspondente representando c_2. Expressamos a segunda possibili-

dade usando a técnica apresentada na prova do teorema de Cook–Levin. Ou seja, podemos expressar que c_1 origina c_2 em um único passo de M escrevendo expressões booleanas enunciando que o conteúdo de cada tripla de células de c_1 corretamente origina o conteúdo da tripla correspondente das células de c_2.

Se $t > 1$, construímos $\phi_{c_1,c_2,t}$ recursivamente. Como um aquecimento vamos tentar uma idéia que não chega a funcionar e aí a consertamos. Seja

$$\phi_{c_1,c_2,t} = \exists m_1 \left[\phi_{c_1,m_1,\frac{t}{2}} \wedge \phi_{m_1,c_2,\frac{t}{2}}\right].$$

O símbolo m_1 representa uma configuração de M. Escrevendo $\exists m_1$ é uma abreviação de $\exists x_1, \ldots, x_l$, onde $l = O(n^k)$ e $x_1, \ldots, x_l$ são as variáveis que codificam m_1. Portanto essa construção de $\phi_{c_1,c_2,t}$ diz que M pode ir de c_1 a c_2 em no máximo t passos se alguma configuração intermediária m_1 existe, através da qual M pode ir de c_1 a m_1 em no máximo $\frac{t}{2}$ passos e então de m_1 a c_2 em no máximo $\frac{t}{2}$ passos. Então construímos as duas fórmulas $\phi_{c_1,m_1,\frac{t}{2}}$ e $\phi_{m_1,c_2,\frac{t}{2}}$ recursivamente.

A fórmula $\phi_{c_1,c_2,t}$ tem o valor correto; ou seja, ela é VERDADEIRO sempre M pode ir de c_1 a c_2 dentro de t passos. Entretanto, ela é grande demais. Todo nível da recursão envolvida na construção corta t pela metade mas aproximadamente duplica o tamanho da fórmula. Portanto terminamos com uma fórmula de tamanho aproximadamente t. Inicialmente $t = 2^{df(n)}$, portanto esse método dá uma fórmula exponencialmente grande.

Para reduzir o tamanho da fórmula usamos o quantificador $\forall$ além do quantificador $\exists$. Seja

$$\phi_{c_1,c_2,t} = \exists m_1 \, \forall (c_3,c_4) \in \{(c_1,m_1),(m_1,c_2)\} \left[\phi_{c_3,c_4,\frac{t}{2}}\right].$$

A introdução das novas variáveis representando as configurações c_3 e c_4 nos permite "dobrar" as duas subfórmulas recursivas em uma única subfórmula, ao mesmo tempo que preserva o significado original. Escrevendo $\forall (c_3,c_4) \in \{(c_1,m_1),(m_1,c_2)\}$, indicamos que as variáveis representando as configurações c_3 e c_4 podem tomar os valores das variáveis de c_1 e m_1 ou de m_1 e c_2, respectivamente, e que a fórmula resultante $\phi_{c_3,c_4,\frac{t}{2}}$ é verdadeira em qualquer caso. Podemos substituir a construção $\forall x \in \{y,z\} [\ldots]$ pela construção equivalente $\forall x \, [(x = y \vee x = z) \rightarrow \ldots]$ para obter uma fórmula booleana quantificada sintaticamente correta. Lembre-se que na Seção 0.2 mostramos que a implicação booleana ($\rightarrow$) e a igualdade booleana ($=$) podem ser expressas em termos de E e NÃO. Aqui, em nome da clareza, usamos o símbolo $=$ para igualdade booleana ao invés do símbolo equivalente $\leftrightarrow$ usado na Seção 0.2.

Para calcular o tamanho da fórmula $\phi_{c_{\text{início}},c_{\text{aceita}},h}$, onde $h = 2^{df(n)}$, notamos que cada nível da recursão adiciona uma parte da fórmula que é linear no tamanho das configurações e é, por conseguinte, de tamanho $O(f(n))$. O número de níveis da recursão é $\log(2^{df(n)})$, ou $O(f(n))$. Portanto o tamanho da fórmula resultante é $O(f^2(n))$.

ESTRATÉGIAS VENCEDORAS PARA JOGOS

Para os propósitos desta seção, um ***jogo*** é frouxamente definido como sendo uma competição na qual partes opostas tentam atingir algum objetivo conforme regras pré-especificadas. Jogos aparecem em muitas formas, de jogos de tabuleiro tais como xadrez a jogos econômicos e de guerra que modelam conflito corporativo ou de sociedades.

Jogos são intimamente relacionados a quantificadores. Um enunciado quantificado tem um jogo correspondente; reciprocamente, um jogo freqüentemente tem um enunciado quantificado correspondente. Essas correspondências são úteis de diversas maneiras. Em uma delas, expressar um enunciado matemático que usa muitos quantificadores em termos do jogo correspondente pode dar uma percepção sobre o significado do enunciado. Em uma outra, expressar um jogo em termos de um enunciado quantificado ajuda a entender a complexidade do jogo. Para ilustrar a correspondência entre jogos e quantificadores, voltamo-nos para um jogo artificial chamado o ***jogo da fórmula***.

Seja $\phi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots \mathsf{Q} x_k \, [\psi]$ uma fórmula booleana quantificada em forma normal prenex. Aqui Q representa ou um quantificador $\forall$ ou um quantificador $\exists$. Associamos um jogo com ϕ da seguinte maneira. Dois jogadores, chamados Jogador A e Jogador E, alternam-se escolhendo os valores das variáveis $x_1, \ldots, x_k$. O jogador A escolhe valores para as variáveis que estão ligadas a quantificadores $\forall$ e o jogador E escolhe valores para as variáveis que estão ligadas a quantificadores $\exists$. A ordem de jogada é a mesma que aquela dos quantificadores no início da fórmula. No final da jogada usamos os valores que os jogadores escolheram para as variáveis e declaramos que o Jogador E venceu o jogo se ψ, a parte fórmula com os quantifiadores removidos, é agora VERDADEIRO. O Jogador A venceu se ψ é agora FALSO.

EXEMPLO 8.10

Digamos que ϕ_1 é a fórmula

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \left[(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \right].$$

No jogo da fórmula para ϕ_1, o Jogador E pega o valor de x_1, e aí então o Jogador A pega o valor de x_2, e finalmente o Jogador E pega o valor de x_3.

Para ilustrar uma amostra de jogaada desse jogo, começamos representando o valor booleano VERDADEIRO com 1 e FALSO com 0, como de costume. Vamos dizer que o Jogador E pega $x_1 = 1$, então o Jogador A pega $x_2 = 0$, e finalmente o Jogador E pega $x_3 = 1$. Com esses valores para x_1, x_2, e x_3, a subfórmula

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

é 1, portanto o Jogador E venceu o jogo. Na realidade, o Jogador E pode sempre vencer esse jogo escolhendo $x_1 = 1$ e aí então escolhendo x_3 como sendo a negação do que quer que o Jogador A escolha para x_2. Dizemos que o Jogador E tem uma ***estratégia vencedora*** para esse jogo. Um jogador tem uma estratégia vencedora para um jogo se aquele jogador vence quanto ambos os lados jogam

de forma ótima.

Agora vamos mudar a fórmula levemente para obter um jogo no qual o Jogador A tem uma estratégia vencedora. Seja ϕ_2 a fórmula

$$\exists x_1 \, \forall x_2 \, \exists x_3 \, \big[(x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3})\big].$$

O Jogador A agora tem uma estratégia vencedora porque, independentemente do que o Jogador E escolha para x_1, o Jogador A pode escolher $x_2 = 0$, portanto falsificando a parte da fórmula aparecendo após os quantificadores, qualquer que possa ser o último movimento do Jogador E. ∎

Consideramos o problema de se determinar qual jogador tem uma estratégia vencedora no jogo da fórmula associado com uma fórmula específica. Seja

$$\textit{JOGO-DA-FORMULA} = \{\langle\phi\rangle \mid \text{o Jogador E tem uma estratégia vencedora no jogo da fórmula associado com } \phi\}.$$

TEOREMA 8.11

JOGO-DA-FORMULA é PSPACE-completo

IDÉIA DA PROVA *JOGO-DA-FORMULA* é PSPACE-completo por uma razão simples. Ele é o mesmo que *TQBF*. Para ver que *JOGO-DA-FORMULA* = *TQBF*, observe que uma fórmula é VERDADEIRA exatamente quando o Jogador E tem uma estratégia a vencedora no jogo de fórmula associado. Os dois enunciados são maneiras diferentes de se dizer a mesma coisa.

PROVA A fórmula $\phi = \exists x_1 \, \forall x_2 \, \exists x_3 \cdots [\,\psi\,]$ é VERDADEIRA quando alguma valoração para x_1 existe tal que, para qualquer valoração de x_2, uma valoração de x_3 existe tal que, e assim por diante ..., onde ψ é VERDADEIRO sob as valorações das variáveis. Similarmente, o Jogador E tem uma estratégia vencedora no jogo associado com ϕ quando o Jogador E pode fazer alguma atribuição a x_1 tal que, para qualquer valoração de x_2, o Jogador E pode fazer uma atribuição a x_3 tal que, e assim por diante ..., ψ é VERDADEIRA sob essas valorações das variáveis.

O mesmo raciocínio se aplica quando a fórmula não se alterna entre quantificadores existenciais e universais. Se ϕ tem a forma $\forall x_1, x_2, x_3 \, \exists x_4, x_5 \, \forall x_6 \, [\,\psi\,]$, o Jogador A faria os primeiros três movimentos no jogo da fórmula para atribuir valores a x_1, x_2, e x_3; aí então o Jogador E faria dois movimentos para atribuir x_4 e x_5; e finalmente o Jogador A atribuiria um valor a x_6.

Portanto $\phi \in$ *TQBF* exatamente quando $\phi \in$ *JOGO-DA-FORMULA*, e o teorema segue do Teorema 8.9. ∎

GEOGRAFIA GENERALIZADA

Agora que você sabe que o jogo da fórmula é PSPACE-completo, podemos estabelecer a PSPACE-completude ou PSPACE-dificuldade de alguns outros jogos mais facilmente. Começaremos com uma generalização do jogo Geography e mais tarde discutiremos jogos como xadrez, damas, e GO.

Geography é um jogo infantil no qual os jogadores se alternam nomeando cidades de qualquer parte do mundo. Cada cidade escolhida tem que começar com a mesma letra pela qual o nome da última cidade terminou. Repetição não é permitido. O jogo começa com alguma cidade designada como inicial e termina quando algum jogador perde porque ele ou ela é incapaz de continuar. Por exemplo, se o jogo começa com Peoria, então Amherst poderia legitimamente seguir (porque Peoria termina com a letra *a*, e Amherst começa com a letra *a*), aí então Tucson, então Nashua, e assim por diante até que um jogador se engancha e por isso perde.

Podemos modelar esse jogo com um grafo direcionado cujos nós são as cidades do mundo. Desenhamos uma seta de uma cidade para uma outra se a primeira pode levar à segunda conforme as regras do jogo. Em outras palavras, o grafo contém uma aresta de uma cidade X para uma cidade Y se a cidade X termina com a mesma letra com a qual a cidade Y começa. Ilustramos uma parte do grafo da geografia na Figura 8.12.

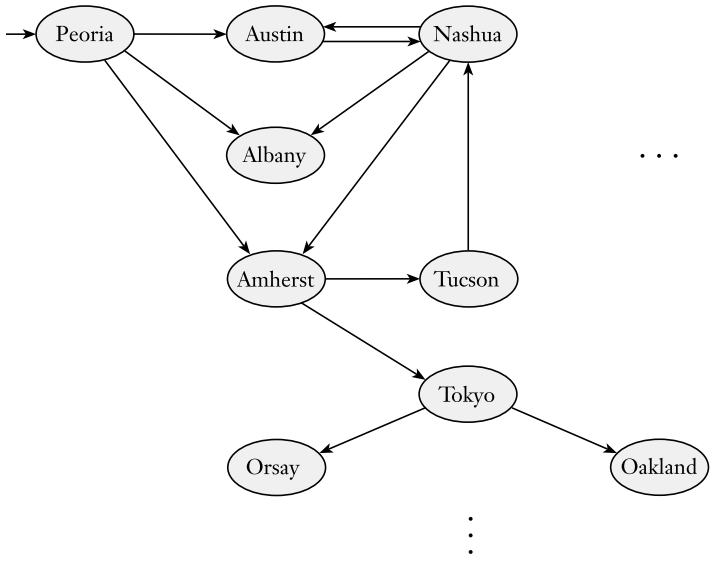


FIGURA 8.12
Parte do grafo representando o jogo da geografia

Quando as regras da geografia são interpretadas para essa representação

gráfica, um jogador começa selecionando o nó inicial designado e então os jogadores se alternam pegando nós que formam um caminho simples no grafo. O requisito de que o caminho seja simples (i.e., não usa nenhum nó mais que uma vez) corresponde ao requisito de que uma cidade não pode ser repetida. O primeiro jogador incapaz de estender o caminho perde o jogo.

Na ***geografia generalizada*** tomamos um grafo direcionado arbitrário com um nó inicial designado ao invés do grafo associado a cidades verdadeiras. Por exemplo, o grafo seguinte é um exemplo de um jogo de geografia generalizada.

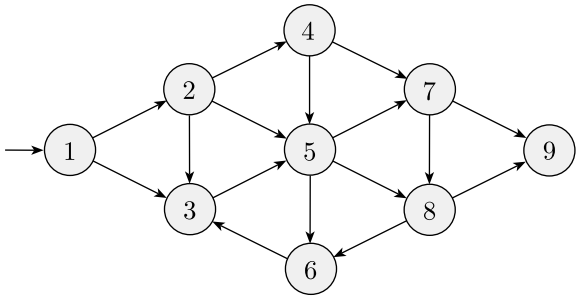


FIGURA 8.13
Uma amostra do jogo de geografia generalizada

Digamos que o Jogador I é aquele que joga primeiro e o Jogador II segundo. Nesse exemplo, o Jogador I tem uma estratégia vencedora da seguinte forma. O Jogador I começa no nó 1, o nó inicial designado. O nó 1 aponta somente para os nós 2 e 3, portanto a primeira jogada do Jogador I tem que ser uma dessas duas escolhas. Ele escolhe 3. Agora o Jogador II tem que jogar, mas o n´ 3 aponta somente para o nó 5, portanto ela é forçada a selecionar o nó 5. Aí então o Jogador I seleciona 6, das escolhas 6, 7, e 8. Agora o Jogador II tem que jogar do nó 6, mas ele aponta somente para o nó 3, e 3 foi previamente selecionado. O Jogador II fica enganchado, e portanto o Jogador I vence.

Se mudarmos o exemplo invertendo a direção da aresta entre os nós 3 e 6, o Jogador II tem uma estratégia vencedora. Você pode vê-la? Se o Jogador I começa com o nó 3 como antes, o Jogador II responde com 6 e vence imediatamente, portanto a única esperança para o Jogador I é começar com 2. Nesse caso, entretanto, o Jogador II responde com 4. Se o Jogador I agora toma 5, o Jogador II vence com 6. Se o Jogador I toma 7, o Jogador II vence com 9. Independentemente do que o Jogador I fizer, o Jogador II pode encontrar uma maneira de vencer, portanto o Jogador II tem uma estratégia vencedora.

O problema de se determinar qual jogador tem uma estratégia vencedora em um jogo de geografia generalizada é PSPACE-completo. Seja

$$GG = \{\langle G, b\rangle \mid \text{Jogador I tem uma estratégia vencedora para o jogo da geografia generalizada jogado sobre o grafo } G \text{ começando no nó } b\}.$$

TEOREMA 8.14

GG é PSPACE-completo.

IDÉIA DA PROVA Um algoritmo recursivo similar àquele usado para *TQBF* no Teorema 8.9 determina qual jogador tem uma estratégia vencedora. Esse algoritmo roda em espaço polinomial e portanto $GG \in$ PSPACE.

Para provar que *GG* é PSPACE-difícil, damos uma redução de tempo polinomial a partir de *JOGO-DA-FORMULA* para *GG*. Essa redução converte um jogo da fórmula para um grafo de geografia generalizada de modo que jogar sobre o grafo imita jogar no jogo da fórmula. Com efeito, os jogadores no jogo da geografia generalizada estão realmente jogando uma forma codificada do jogo da fórmula.

PROVA O seguinte algoritmo decide se o Jogador I tem uma estratégia vencedora em instâncias da geografia generalizada; em outras palavras, ele decide *GG*. Mostramos que ele roda em espaço polinomial.

$M =$ "Sobre a entrada $\langle G, b\rangle$, onde G é um grafo direcionado e b é um nó de G:

1. Se b tem grau-de-saída 0, *rejeite*, porque o Jogador I perde imediatamente.
2. Remova o nó b e todas as setas conectadas para obter um novo grafo G_1.
3. Para cada um dos nós $b_1, b_2, \ldots, b_k$ para os quais b originalmente apontava, chame recursivamente M sobre $\langle G_1, b_i\rangle$.
4. Se todos esses aceitam, o Jogador II tem uma estratégia vencedora no jogo original, portanto *rejeite*. Caso contrário, o Jogador II não tem uma estratégia vencedora, portanto o Jogador I tem que ter; por conseguinte, *aceite*."

O único espaço requerido por esse algoritmo é para armazenar a pilha de recursão. Cada nível da recursão adiciona um único nó à pilha, e no máximo m níveis ocorrem, onde m é o número de nós em G. Logo, o algoritmo roda em espaço linear.

Para estabelecer a PSPACE-dificuldade de *GG*, mostramos que *JOGO-DA-FORMULA* é redutível em tempo polinomial a *GG*. A redução mapeia a fórmula

$$\phi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots \mathsf{Q} x_k \, [\psi]$$

para uma instância $\langle G, b\rangle$ da geografia generalizada. Aqui assumimos por simplicidade que os quantificadores de ϕ começam e terminam com $\exists$ e que eles se alternam estritamente entre $\exists$ e $\forall$. Uma fórmula que não se coaduna com essa suposição pode ser convertida para uma um pouco maior que o faz adiciona quantificadores extra ligando variáveis não-usadas ou "nulas". Assumimos também que ψ está na forma normal conjuntiva (veja o Problema 8.12).

A redução constrói um jogo de geografia sobre um grafo G onde jogada ótima imita a ótima jogada do jogo da fórmula sobre ϕ. O Jogador I no jogo da geografia toma o papel do Jogador E no jogo da fórmula, e o Jogador II toma o papel

do Jogador A.

A estrutura do grafo G está parcialmente mostrada na figura seguinte. A jogada começa no nó b, que aparece no canto superior esquerdo de G. Embaixo de b, uma seqüência de estruturas tipo diamante aparece, uma para cada uma das variáveis de ϕ. Antes de chegar ao lado direito de G, vamos ver como a jogada prossegue no lado esquerdo.

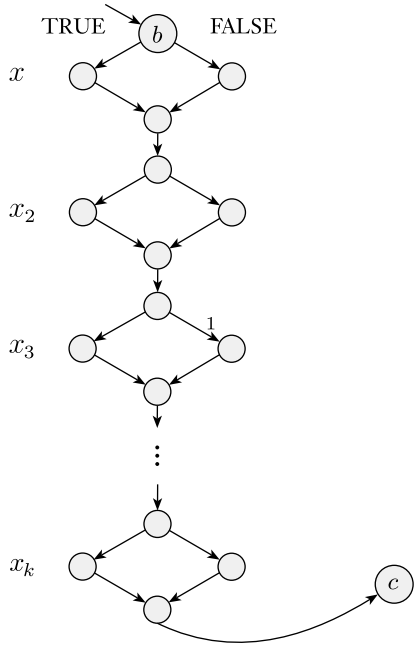


FIGURA 8.15
Estrutura parcial do jogo da geografia simulando o jogo da fórmula

A jogada começa em b. O Jogador I tem que selecionar uma das duas arestas saindo de b. Essas arestas correspondem às escolhas possíveis do Jogador E' no início do jogo da fórmula. A escolha esquerda para o Jogador I corresponde a VERDADEIRO para o Jogador E no jogo da fórmula e a escolha direita a FALSO. Após o Jogador I ter selecionado uma dessas arestas—digamos, aquela da esquerda—o Jogador II joga. Somente uma aresta saindo está presente, portanto essa jogada é forçada. Similarmente, a próxima jogada do Jogador I é forçada e o jogo continua do topo do segundo diamante. Agora duas arestas novamente estão presentes, mas o Jogador II tem a escolha. Essa escolha corresponde à primeira jogada do Jogador A no jogo da fórmula. À medida que o jogo continua dessa maneira, os Jogadores I e II escolhem um caminho para a direita ou para a esquerda através de cada um dos diamantes.

Depois que a partida passa através de todos os diamantes, a cabeça do caminho está no nó inferior no último diamante, e é a vez do Jogador I porque assumimos que o último quantificador é $\exists$. A próxima jogada do Jogador I é forçada. Aí então eles estão no nó c na Figura 8.15 e o Jogador II faz a próxima jogada.

Esse ponto no jogo da geografia corresponde ao final da partida no jogo da fórmula. O caminho escolhido através dos diamantes corresponde a uma atribuição às variáveis de ϕ. Nessa atribuição, se ψ é VERDADEIRO, o Jogador E vence o jogo da fórmula, e se ψ é FALSO, o Jogador A vence. A estrutura no lado direito da figura seguinte garante que o Jogador I pode vencer se o Jogador E venceu e que o Jogador II pode vencer se o Jogador A venceu.

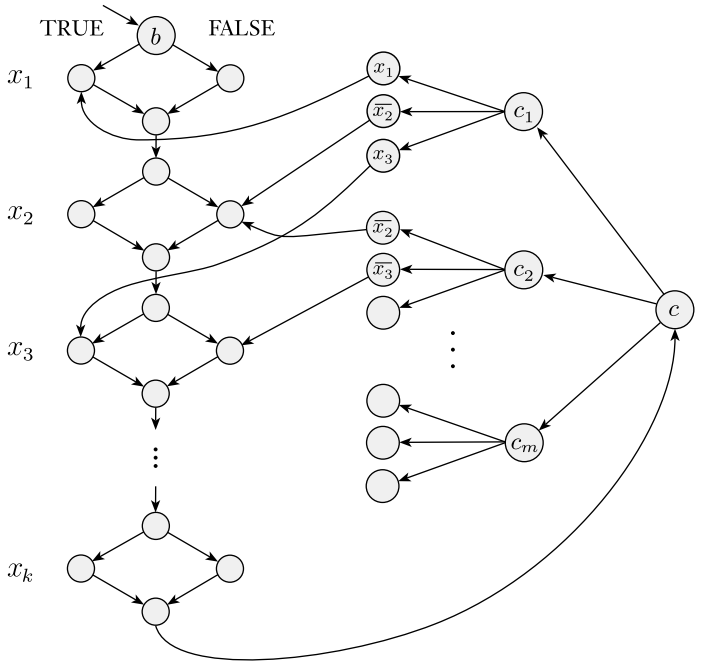


FIGURA 8.16
Estrutura completa do jogo da geografia simulando o jogo da fórmula, onde $\phi = \exists x_1 \, \forall x_2 \cdots \mathsf{Q} x_k \, [(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \cdots) \wedge \cdots \wedge (\quad)]$

No nó c, o Jogador II pode escolher um nó correspondendo a uma das cláusulas de ψ. Então o Jogador I pode escolher um nó correspondendo a um literal naquela cláusula. Os nós correspondentes a literais não-negados estão conectados aos lados esquerdos (VERDADEIRO) do diamante para as variáveis associadas, e similarmente para literais negados e os lados direitos (FALSO) como mostrado na Figura 8.16.

Se ϕ é FALSO, o Jogador II pode vencer selecionando a cláusula não-satisfeita. Qualquer literal que o Jogador I pode então pegar é FALSO e está conectado ao lado do diamante que ainda não foi jogado. Por conseguitne o Jogador II pode

jogar no nó no diamante, mas aí então o Jogador I é incapaz de jogar e perde. Se ϕ é VERDADEIRO, qualquer cláusula que o Jogador II pega contém um literal VERDADEIRO. O Jogador I seleciona aquele literal após a jogada do Jogador II. Devido ao fato de que o literal é VERDADEIRO, ele está conectado ao lado do diamante que já foi jogado, portanto o Jogador II é incapaz de jogar e perde.

No Teorema 8.14 mostramos que nenhum algoritmo de tempo polinomial existe para a jogada ótima em geografia generalizada a menos que P = PSPACE. Gostaríamos de provar um teorema similar com relação à dificuldade de se computar a ótima jogada em jogos de tabuleiro tais como xadrez, mas surge um obstáculo. Somente um número finito de posições de jogo diferentes podem ocorrer no tabuleiro padrão de xadrez 8×8. Em princípio, todas essas posições pode ser colocadas em uma tabela, juntamente com a melhor jogada em cada posição. A tabela seria demasiado grande para caber dentro de nossa galáxia mas, sendo finita, poderia ser armazenada no controle de uma máquina de Turing (ou mesmo no de um autômato finito!). Por conseguinte, a máquina seria capaz de jogar otimamente em tempo linear, usando busca na tabela. Talvez em algum momento no futuro, métodos que possam quantificar a complexidade de problemas finitos serão desenvolvidso, mas métodos atuais são assintóticos e poranto se aplicam apenas à taxa de crescimento da complexidade à medida que o tamanho do problema aumenta—e não para qualquer tamanho fixo. Entretanto, podemos dar alguma evidência para a dificuldade de se computar a jogada ótima para muitos jogos de tabuleiro generalizando-os para um tabuleiro $n \times n$. Tais generalizações de xadrez, damas, e GO têm sido demonstradas PSPACE-difícil ou difícil para classes de complexidade ainda maiores, dependendo dos detalhes da generalização.

8.4 AS CLASSES L E NL

Até agora, consideramos somente limitantes de complexidade de tempo e espaço que são pelo menos lineares—ou seja, limitantes onde $f(n)$ é no mínimo n. Agora examinamos limitantes de espaço menores, *sublineares*. Em complexidade de tempo, limitantes sublineares são insuficientes para se ler a entrada inteira, portanto não os consideramos aqui. Em complexidade de espaço sublinear a máquina é capaz de ler a entrada inteira mas ela não tem espaço suficiente para armazenar a entrada. Para considerar essa situação de forma significativa, temos que modificar nosso modelo computacional.

Introduzimos uma máquina de Turing com duas fitas: uma fita de entrada somente-leitura e uma fita de trabalho de leitura/escrita. Na fita de somente-leitura a cabeça de entrada pode detectar símbolos mas não modificá-los. For-

necemos uma maneira pela qual a máquina detecta quando a cabeça está nas extremidades esquerda e direita da entrada. A cabeça de entrada tem que permanecer na parte da fita contendo a entrada. A fita de trabalho pode ser lida e escrita da maneira usual. Somente as células visitadas na fita de trabalho contribuem para a complexidade de espaço desse tipo de máquina de Turing.

Pense numa fita de somente-leitura como um CD-ROM, um dispositivo usado para entrada em muitos computadores pessoais. Freqüentemente, o CD-ROM contém mais dados do que o computador pode armazenar em sua memória principal. Algoritmos de espaço sublinear permitem que o computador manipulem os dados sem armazená-los todos em sua memória principal.

Para limitantes de espaço que são no mínimo linear, o modelo de MT de duas-fitas é equivalente ao modelo padrão de uma-fita (veja o Exercício 8.1). Para limitantes de espaço sublinear, usamos apenas o modelo de duas-fitas.

DEFINIÇÃO 8.17

L é a classe de linguagens que são decidíveis em espaço logarítmico em uma máquina de Turing determinística. Em outras palavras,

$$\mathrm{L} = \mathrm{SPACE}(\log n).$$

NL é a classe de linguagens que são decidíveis em espaço logarítmico em uma máquina de Turing não-determinística. Em outras palavras,

$$\mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log n).$$

Concentramo-nos em espaço $\log n$ ao invés de, digamos, espaço $\sqrt{n}$ ou $\log^2 n$, por várias razões que são similares àquelas para nossa escolha de limitantes de tempo e espaço polinomial. Espaço logarítmico é exatamente grande o suficiente para resolver um número de problemas computacionais interessantes, e já atraiu propriedades matemáticas tais como robustez mesmo quando o modelo de máquina e o método de codificação da entrada mudam. Apontadores na entrada podem ser representados em espaço logarímico, portanto uma maneira de se pensar sobre o poder de algoritmos de espaço log é considerar o poder de um número fixo de apontadores de entrada.

EXEMPLO 8.18

A linguagem $A = \{\mathtt{0}^k\mathtt{1}^k | k \geq 0\}$ é um membro de L. Na Seção 7.1 na página 263 descrevemos uma máquina de Turing que decide A zigue-zagueando para a frente e para trás sobre a entrada, cortando os 0s e 1s à medida que eles emparelham. Aquele algoritmo usa espaço linear para registrar quais posições foram cortadas, mas ele pode ser modificado para usar somente espaço log.

A MT de espaço log para A não pode cortar os 0s e 1s que foram emparelhados sobre a fita de entrada porque essa fita é somente-leitura. Ao invés disso, a máquina conta o número de 0s e, separadamente, o número de 1s em binário sobre a fita de trabalho. O único espaço requerido é aquele usado para registrar os dois contadores. Em binário, cada contador usa somente espaço logarímico, e portanto o algoritmo roda em espaço $O(\log n)$. Por conseguinte, $A \in$ L. ■

EXEMPLO 8.19

Retomemos a linguagem

$$\textit{CAMINH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ é um grafo direcionado que tem um caminho direcionado de } s \text{ para } t\}$$

definido na Seção 7.2. O Teorema 7.14 mostra que *CAMINH* está em P mas que o algoritmo dado usa espaço linear. Não sabemos se *CAMINH* pode ser resolvido em espaço logarímico deterministicamente, mas de fato conhecemos um algoritmo de espaço log não-determinístico para *CAMINH*.

A máquina de Turing de espaço log não-determinístico que decide *CAMINH* opera começando no nó s e adivinhando não-deterministicamente os nós de um caminho de s para t. A máquina registra somente a posição do nó atual a cada passo na fita de trabalho, e não o caminho inteiro (que excederia o requisito de espaço logarítmico). A máquina seleciona não-deterministicamente o próximo nó dentre aqueles apontados pelo nó atual. Aí então ele repete essa ação até que ele atinja o nó t e *acceita*, ou até que ele rode por m passos e *rejeita*, onde m é o número de nós no grafo. Por conseguinte, *CAMINH* está em NL. ■

Nossa afirmação anterior de que qualquer máquina de Turing de espaço limitado por $f(n)$ também roda em tempo $2^{O(f(n))}$ não á mais verdadeira para limitantes de espaço muito pequenos. Por exemplo, uma máquina de Turing que usa espaço $O(1)$ (i.e., constante) pode rodar por n passos. Para obter um limitante no tempo de execução que se aplica para todo limitante de espaço $f(n)$ damos a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 8.20

Se M é uma máquina de Turing que tem uma fita de entrada somente-leitura separada e w é uma entrada, uma ***configuração de M sobre w*** é uma valoração do estado, a fita de trabalho, e as posições das duas cabeças de fita. A entrada w não faz parte da configuração de M sobre w.

Se M roda em espaço $f(n)$ e w é uma entrada de comprimento n, o número de configurações de M sobre w é $n2^{O(f(n))}$. Para explicar esse resultado, vamos

dizer que M tem c estados e g símbolos de fita. O número de cadeias que podem aparecer sobre a fita de trabalho é $g^{f(n)}$. A cabeça de leitura de entrada pode estar em uma das n posições e a cabeça da fita de trabalho pode estar em uma das $f(n)$ posições. Por conseguinte, o número total de configurações de M sobre w, que é um limitante superior sobre o tempo de execução de M sobre w, é $cnf(n)g^{f(n)}$, ou $n2^{O(f(n))}$.

Concentramo-nos quase que exclusivamente em limitantes de espaço $f(n)$ que são no mínimo $\log n$. Nossa afirmação anterior de que a complexidade de tempo de uma máquina eé no máximo exponencial em sua complexidade de espaço permanece verdadeira para tais limitantes porque $n2^{O(f(n))}$ é $2^{O(f(n))}$ quando $f(n) \geq \log n$.

Lembre-se que o teorema de Savitch mostra que podemos converter MTs não-determinísticas para MTs determinísticas e aumentar a complexidade de espaço $f(n)$ de apenas uma elevação quadrática, desde que $f(n) \geq n$. Podemos estender o teorema de Savitch para se verificar para limitantes de espaço sublineares até $f(n) \geq \log n$. A prova é idêntica à original que demos na página 326, exceto que usamos as máquinas de Turing com uma fita de entrada de somente-leitura e ao invés de se referir a configurações de N nos referimos a configurações de N sobre w. Armazenar uma configuração de N sobre w usa espaço $\log(n2^{O(f(n))}) = \log n + O(f(n))$. Se $f(n) \geq \log n$, a memória usada é $O(f(n))$ e o restante da prova continua o mesmo.

8.5 NL-COMPLETUDE

Como mentionamos no Exemplo 8.19, o problema *CAMINH* é sabido pertencer a NL mas não se sabe se ele está em L. Acreditamos que *CAMINH* não pertence a L, mas não sabemos como provar essa conjectura. Na verdade, não conhecemos nenhum problema em NL que possa ser provado estar fora de L. Análoga à questão de se P = NP temos a questão se se L = NL.

Como um passo em direção à solução da questão L versus NL, podemos exibir certas linguagens que são NL-completas. Como com linguagens completas para outras classes de complexidade, as linguagens NL-completas são exemplos de linguagens que são, num certo sentido, as linguagens mais difíceis em NL. Se L e NL forem diferentes, todas as linguagens NL-completas não pertencem a L.

Como com nossas definições anteriores de completude, definimos uma linguagem NL-completa como sendo aquela que está em NL e para a qual qualquer outra linguagem em NL é redutível. Entretanto, não usamos redutibilidade em tempo polinomial aqui porque, como você verá, todos os problemas em NL são solúveis em tempo polinomial. Por conseguinte, cada dois problemas em NL exceto $\emptyset$ e Σ^* são redutíveis em tempo polinomial uma ao outro (veja a discussão de redutibilidade em tempo polinomial na definição de PSPACE-completude

na página 330). Logo, redutibilidade em tempo polinomial é forte demais para diferenciar problemas em NL um do outro. Ao invés, usamos um novo tipo de redutibilidade chamado *redutibilidade em espaço log*.

DEFINIÇÃO 8.21

Um ***transdutor de espaço log*** é uma máquina de Turing com uma fita de entrada somente-leitura, uma fita de saída somente-escrita, e uma fita de trabalho de leitura/escrita. A fita de trabalho pode conter $O(\log n)$ símbolos. Um transdutor de espaço log M computa uma função $f\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, onde $f(w)$ é a cadeia remanescente na fita de saída após M parar quando ela é iniciada com w sobre sua fita de entrada. Chamamos f uma ***função computável em espaço log***. A linguagem A é ***redutível em espaço log*** à linguagem B, escrito $A \leq_{\mathrm{L}} B$, se A é redutível por mapeamento a B por meio de uma função computável em espaço log f.

Agora estamos prontos para definir NL-completude.

DEFINIÇÃO 8.22

Uma linguagem B é ***NL-completa*** se

1. $B \in$ NL, e
2. toda A em NL é redutível em espaço log a B.

Se uma linguagem é redutível em espaço log a uma outra linguagem já conhecida como pertencendo a L, a linguagem original está também em L, como o teorema seguinte demonstra.

TEOREMA 8.23

Se $A \leq_{\mathrm{L}} B$ e $B \in$ L, então $A \in$ L.

PROVA Uma abordagem tentadora à prova desse teorema é seguir o modelo apresentado no Teorema 7.31, o resultado análogo para redutibilidade em tempo polinomial. Naquela abordagem, um algoritmo de espaço log para A primeiro mapeia sua entrada w para $f(w)$, usando a redução de espaço log f, e aí então aplica o algoritmo de espaço log para B. Entretanto, a memória requerida para $f(w)$ pode ser grande demais para caber num limitante de espaço log, poranto precisamos modificar essa abordagem.

Ao invés disso, a máquina M_A de A computa símbolos individuais de $f(w)$ conforme requisitado pela máquina M_B de B. Na simulação, M_A mantém registro de onde a entrada de M_B estaria sobre $f(w)$. Toda vez que M_B se move, M_A reinicia a computação de f sobre w a partir do início e ignora toda a saída exceto a localização desejada de $f(w)$. Fazer isso pode requerer recomputação ocasional de partes de $f(w)$ e portanto é ineficiente em sua complexidade de tempo. A vantagem desse método é que somente um único modelo de $f(w)$ precisa ser armazenada em qualquer ponto, na realidade trocando tempo por espaço.

COROLÁRIO 8.24

Se qualquer linguagem NL-completa está em L, então L = NL.

BUSCA EM GRAFOS

TEOREMA 8.25

CAMINH é NL-completa.

IDÉIA DA PROVA O Exemplo 8.19 mostra que *CAMINH* está em NL, portanto precisamos somente de mostrar que *CAMINH* é NL-difícil. Em outras palavras, temos que mostrar que toda linguagem A em NL é redutível em espaço log a *CAMINH*.

A idéia por trás da redução em espaço log de A para *CAMINH* é construir um grafo que representa a computação da máquina de Turing não-determinística de espaço log para A. A redução mapeia uma cadeia w para um grafo cujos nós correspondem às configurações da MTN sobre a entrada w. Um nó aponta para um segundo nó se a primeira configuração correspondente pode produzir a segunda configuração em um único passo da MTN. Portanto a máquina aceita w sempre que algum caminho do nó correspondente para a configuração inicial leva ao nó correspondente na configuração de aceitação.

PROVA Mostramos como dar uma redução em espaço log de qualquer linguagem A em NL para *CAMINH*. Vamos dizer que a MTN M decide A em espaço $O(\log n)$. Dada uma entrada w, construímos $\langle G, s, t\rangle$ em espaço log, onde G é um grafo direcionado que contém um caminho de s para t se e somente se M aceita w.

Os nós de G são as configurações de M sobre w. Para as configurações c_1 e c_2 de M sobre w, o par (c_1, c_2) é uma aresta de G se c_2 é uma das possíveis próximas configurações de M começando de c_1. Mais precisamente, se a função de transição de M indica que o estado de c_1 juntamente com os símbolos de fita

sob suas cabeças das fitas de entrada e de trabalho podem produzir o próximo estado e as ações da cabeça para transformar c_1 em c_2, então (c_1, c_2) é uma aresta de G. O nó s é a configuração inicial de M sobre w. A máuina M é modificada para ter uma única configuração de aceitação, e designamos essa configuração como sendo o nó t.

Esse mapeamento reduz A para *CAMINH* porque, sempre que M aceita sua entrada, algum ramo de sua computação aceita, o que corresponde a um caminho da configuração inicial s para a configuração de aceitação t em G. Reciprocamente, se algum caminho existe de s para t em G, algum ramo da computação aceita quando M roda sobre a entrada w, e M aceita w.

Para mostrar que a redução opera em espaço log, damos um transdutor de espaço log que, sobre a entrada w, dá como saída uma descrição de G. Essa descrição compreende duas listas: os nós de G e as arestas de G. Listar os nós é fácil porque cada nó é uma configuração de M sobre w e pode ser representada em espaço $c \log n$ para alguma constante c. O transdutor passa seqüencialmente por todas as cadeias possíveis de comprimento $c \log n$, testa se cada uma é uma configuração legal de M sobre w, e dá como saída aquelas que passam no teste. O transdutor lista as arestas similarmente. Espaço log é suficiente para se verificar que uma configuração c_1 de M sobre w pode produzir a configuração c_2 porque o transdutor precisa apenas de examinar o conteúdo da fita sob as localizações de cabeças dadas em c_1 para determinar que that a função de transição de M daria a configuração c_2 como um resultado. O transdutor tenta todos os pares (c_1, c_2) a cada vez para encontrar quais se qualificam como arestas de G. Aquelas que se qualificam são adicionadas á fita de saída.

Um resultado imediato do Teorema 8.25 é o seguinte corolário que afirma que NL é um subconjunto de P.

COROLÁRIO 8.26

NL $\subseteq$ P.

PROVA O Teorema 8.25 mostra que qualquer linguagem em NL é redutível em espaço log a *CAMINH*. Lembre-se que uma máquina de Turing que usa espaço $f(n)$ roda em tempo $n\,2^{O(f(n))}$, portanto um redutor que roda em espaço log também roda em tempo polinomial. Por conseguinte, qualquer linguagem em NL é redutível em tempo polinomial a *CAMINH*, que por sua vez está em P, pelo Teorema 7.14. Sabemos que toda linguagem que é redutível em tempo polinomial a uma linguagem em P está também also em P, portanto a prova está completa.

Embora redutibilidade em espaço log pareça ser altamente restritiva, ela é adequada para a maioria das reduções em teoria da complexidade, porque es-

sas são usualmente computationalmente simples. Por exemplo, no Teorema 8.9 mostramos que todo problema PSPACE é redutível em tempo polinomial a *TQBF*. As fórmulas altamente repetitivas que essas reduções produzem podem ser computadas usando apenas espaço log, e por conseguinte, podemos concluir que *TQBF* é PSPACE-completa com respeito a redutibilidade em espaço log. Essa conclusão é importante porque o Corolário 9.6 mostra que NL $\subsetneq$ PSPACE. Essa separação e redutibilidade em espaço log implica que *TQBF* $\notin$ NL.

8.6 NL É IGUAL A CONL

Esta seção contém um dos resultados mais surpreendentes conhecido relativo aos relacionamentos entre classes de complexidade. De uma forma geral acredita-se que as classes NP e coNP são diferentes. À primeira vista, o mesmo parece se verificar para as classes NL e coNL. O fato de que NL é igual a coNL, como estamos em vias de provar, mostra que nossa intuição sobre computação ainda tem muitas lacunas.

TEOREMA 8.27

NL = coNL.

IDÉIA DA PROVA Mostramos que $\overline{CAMINH}$ está em NL, e portanto estabelecemos que todo problema em coNL está também em NL, porque *CAMINH* é NL-completa. O algoritmo NL M que apresentamos para $\overline{CAMINH}$ tem que ter uma computação de aceitação sempre que o grafo de entrada G *não* contém um caminho de s para t.

Primeiro, vamos atacar um problema mais fácil. Seja c o número de nós em G que são atingíveis a partir de s. Assumimos que c é fornecido como uma entrada para M e mostramos como usar c para resolver $\overline{CAMINH}$. Mais adiante mostramos como computar c.

Dados G, s, t, e c, a máquina M opera da seguinte forma. Um por um, M passa por todos os m nós de G e não-deterministicamente adivinha se cada um é atingível a partir de s. Sempre que um nó u é adivinhado como sendo atingível, M tenta verificar essa adivinhação escolhendo um caminho de comprimento m ou menos de s para u. Se um ramo da computação falha em verificar essa adivinhação, ela rejeita. Além do mais, se um ramo adivinha que t é atingível, ela rejeita. A máquina M conta o número de nós que foram verificados como sendo atingíveis. Quando um ramo passou por todos os nós de G, ela verifica que o número de nós que ela verificou como sendo atingível de s é igual a c, o número de nós que realmente são atingíveis, e rejeita se não. Caso contrário, esse ramo aceita.

Em outras palavras, se M não-deterministicamente seleciona exatamente c nós atingíveis de s, não incluindo t, e prova que cada um é atingível de s adivinhando o caminho, M sabe que os nós remanescentes, incluindo t, *não* são atingíveis, portanto ela pode aceitar.

A seguir, mostramos como calcular c, o número de nós atingíveis de s. Descrevemos um procedimento não determinístico de espaço log por meio do qual pelo menos um ramo da computação tem o valor correto para c e todos os outros ramos rejeitam.

Para cada i de 0 a m, definimos A_i como sendo a coleção de nós que estão a uma distância de i ou menos de s (i.e., que têm um caminho de comprimento no máximo i de s). Portanto $A_0 = \{s\}$, cada $A_i \subseteq A_{i+1}$, e A_m contém todos os nós que são atingíveis de s. Seja c_i o número de nós em A_i. A seguir descrevemos um procedimento que calcula c_{i+1} a partir de c_i. Repetidas aplicações desse procedimento produz o valor desejado de $c = c_m$.

Calculamos c_{i+1} a partir de c_i, usando uma idéia similar àquela apresentada anteriormente neste esboço de prova. O algoritmo passa por todos os nós de G, determine se cada um é um membro de A_{i+1}, e conta os membros.

Para determinar se um nó v está em A_{i+1}, usamos um laço interno para visitar todos os nós de G e adivinhar se cada nó está em A_i. Cada adivinhação positiva é verificada adivinhando-se o caminho de comprimento no máximo i a partir de s. Para cada nó u verificado como estando em A_i, o algoritmo testa se (u, v) é uma aresta de G. Se o par é uma aresta, v está em A_{i+1}. Adicionalmente, o número de nós verificados como estando em A_i é contado. Na completação do laço interno, se o número total de nós verificados como estando em A_i não está em c_i, todo A_i não foi encontrado, portanto esse ramo da computação rejeita. Se o contador é igual a c_i e v ainda não foi mostrada estar em A_{i+1}, concluímos que ele não está em A_{i+1}. Aí então continuamos para o próximo v no laço externo.

PROVA Aqui está um algoritmo para $\overline{CAMINH}$. Seja m o número de nós de G.

$M =$ "Sobre a entrada $\langle G, s, t\rangle$:

1. Faça $c_0 = 1$. ⟦$A_0 = \{s\}$ tem 1 nó⟧
2. Para $i = 0$ até $m - 1$: ⟦compute c_{i+1} a partir de c_i⟧
3. Faça $c_{i+1} = 1$. ⟦c_{i+1} conta nós em A_{i+1}⟧
4. Para cada nó $v \neq s$ em G: ⟦verifique se $v \in A_{i+1}$⟧
5. Faça $d = 0$. ⟦d re-conta A_i⟧
6. Para cada nó u em G: ⟦verifique se $u \in A_i$⟧
7. Não-deterministicamente ou realize ou pule esses passos:
8. Não-deterministicamente siga um caminho de comprimento no máximo i a partir de s e *rejeite* se ele não termina em u.
9. Incremente d. ⟦verificou que $u \in A_i$⟧
10. Se (u, v) é uma aresta de G, incremente c_{i+1} e vá para

o Estágio 5 com o próximo v. [verificou que $v \in A_{i+1}$]

11. Se $d \neq c_i$, então *rejeite*. [verifique se encontrou todo A_i]
12. Faça $d = 0$. [c_m agora conhecido; d re-conta A_m]
13. Para cada nó u em G: [verifique se $u \in A_m$]
14. Não-deterministicamente ou realize ou pule esses passos:
15. Não-deterministicamente siga um caminho de comprimento no máximo m a partir de s e *rejeite* se ele não termina em u.
16. Se $u = t$, então *rejeite*. [encontrou caminho de s para t]
17. Incremente d. [verificou que $u \in A_m$]
18. Se $d \neq c_m$, então *rejeite*. [verifica que encontrou todo A_m]
Caso contrário, *aceite*."

Esse algoritmo somente precisa de armazenar u, v, c_i, c_{i+1}, d, i, e um apontador para a cabeça de um caminho, em qualquer tempo dado. Logo, ele roda em espaço log. Note que M também *aceita* entradas inapropriadamente formadas.

Resumimos nosso conhecimento presente dos relacionamentos entre diversas classes de complexidade da seguinte forma:

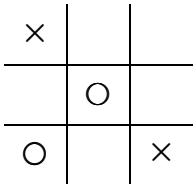
$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} = \mathrm{coNL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}.$$

Não sabemos se qualquer dessas inclusões são próprias, embora provemos $\mathrm{NL} \subsetneq \mathrm{PSPACE}$[3] no Corolário 9.6. Conseqüentemente, ou $\mathrm{coNL} \subsetneq \mathrm{P}$ ou $\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{PSPACE}$ tem que se verificar, mas não sabemos qual! A maioria dos pesquisadores conjectura que todas essas inclusões são próprias.

EXERCÍCIOS

8.1 Mostre que para qualquer função $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{R}^+$, onde $f(n) \geq n$, a complexidade de espaço $\mathrm{SPACE}(f(n))$ é a mesma se você define a classe usando o modelo de MT de fita-única ou o modelo de MT de duas-fitas somente-leitura.

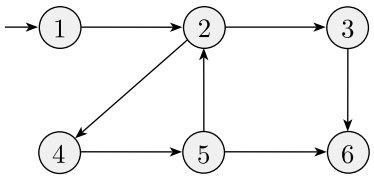
8.2 Considere a seguinte posição no jogo-da-velha padrão.



[3]Escrevemos $A \subsetneq B$ para dizer que A é um subconjunto próprio (i.e., não igual) de B.

Vamos dizer que é a vez do $\times$-jogador fazer sua jogada a seguir. Descreva a estratégia vencedora para esse jogador. (Lembre-se que uma estratégia vencedora não é meramente a melhor jogada a fazer na posição corrente. Ela também inclui todas as respostas que esse jogador tem que dar de modo a vencer, qualquer que seja a jogada do oponente.)

8.3 Considere o seguinte jogo da geografia generalizada no qual o nó inicial é aquele com a seta apontando para dentro a partir do nada. Esse Jogador I tem uma estratégia vencedora? E o Jogador II? Dê razões para suas respostas.



8.4 Mostre que PSPACE é fechada sob as operações de união, complementação, e estrela.

[R]**8.5** Mostre que NL é fechada sob as operações de união, interseção, e estrela.

8.6 Mostre que qualquer linguagem PSPACE-difícil é também NP-difícil.

[R]**8.7** Mostre que $A_{\mathsf{AFD}} \in$ L.

PROBLEMAS

8.8 Seja $EQ_{\mathsf{EXR}} = \{\langle R, S\rangle |\ R$ e S são expressões regulares equivalentes$\}$. Mostre que $EQ_{\mathsf{EXR}} \in$ PSPACE.

8.9 Uma *escada* é uma seqüência de cadeias $s_1, s_2, \ldots, s_k$, na qual toda cadeia difere da precedente em exatamente um caracter. Por exemplo a seguinte é uma escada de palavras em inglês, começando com "head" e terminando com "free":

head, hear, near, fear, bear, beer, deer, deed, feed, feet, fret, free.

Seja $ESCADA_{\mathsf{AFD}} = \{\langle M, s, t\rangle |\ M$ é um AFD e $L(M)$ contém uma escada de cadeias, começando com s e terminando com $t\}$. Mostre que $ESCADA_{\mathsf{AFD}}$ está em PSPACE.

8.10 O jogo japonês *go-moku* é jogado por dois jogadores, "X" e "O," sobre uma grade de 19×19. Os jogadores se alternam colocando marcadores, e o primeiro jogador a atingir 5 de seus marcadores consecutivamente em uma linha, coluna, ou diagonal, é o vencedor. Considere esse jogo generalizado para um tabuleiro de $n \times n$. Seja

$GM = \{\langle B\rangle |\ B$ é uma posição no go-moku generalizado, onde o jogador "X" tem uma estratégia vencedora$\}$.

Por uma *posição* queremos dizer um tabuleiro com marcadores colocados sobre ele, tal que pode ocorrer no meio de uma partida do jogo, juntamente com uma indicação de qual jogador tem a vez de jogar. Mostre que $GM \in$ PSPACE.

8.11 Mostre que, se toda linguagem NP-difícil é também PSPACE-difícil, então PSPACE = NP.

8.12 Mostre que *TQBF* restrita a fórmulas onde a parte seguinte aos quantificadores está na forma normal conjuntiva é ainda PSPACE-completa.

8.13 Defina $A_{\mathsf{LBA}} = \{\langle M, w\rangle | \ M$ é um ALL que aceita a entrada $w\}$. Mostre que A_{LBA} é PSPACE-completa.

8.14 Considere a seguinte versão para duas pessoas da linguagem *CHARADA* que foi descrita no Problema 7.26. Cada jogador começa com uma pilha ordenada de cartas de charada. Os jogadores se alternam colocando as cartas em ordem na caixa e podem escolher qual lado fica para cima. O Jogador I vence se, na pilha final, todas as posições de buraco estão bloqueadas, e o Jogador II vence se alguma posição de buraco permanece desbloqueada. Mostre que o problema de se determinar qual jogador tem uma estratégia vencedora para uma dada configuração inicial das cartas é PSPACE-completo.

***8.15** O jogo gato-e-rato é jogado por dois jogadores, "Gato" e "Rato," sobre um grafo não-direcionado arbitrário. Em um dado ponto cada jogador ocupa um nó do grafo. Os jogadores se alternam movendo para um nó adjacente àquele que eles ocupam atualmente. Um nó especial do grafo é chamado "Buraco." O Gato vence se os dois jogadores em algum momento ocupam o mesmo nó. O Rato vence se ele ating o Buraco antes do que acaba de ser descrito aconteça. O jogo é empate se uma situação se repete (i.e., os dois jogadores simultaneamente ocupam posições que eles simultaneamente ocuparam previamente e é o mesmo jogador a ter a vez de jogar).

$$\begin{aligned} \textit{GATO-FELIZ} = \{\langle G, c, m, h\rangle | \ & G, c, m, h, \text{ são respectivamente um grafo, e} \\ & \text{posições do Gato, Rato, e Buraco, tal que} \\ & \text{o Gato tem uma estratégia vencedora se} \\ & \text{o Gato joga primeiro}\}. \end{aligned}$$

Mostre que *GATO-FELIZ* está em P. (Dica: A solução não é complicada e não depende de detalhes sutis da forma que o jogo é definido. Considere a árvore do jogo inteira. Ela é exponencialmente grande, mas você pode buscá-la em tempo polinomial.)

8.16 Leia a definição de *FÓRMULA-MIN* no Problema 7.44.

a. Mostre que *FÓRMULA-MIN* $\in$ PSPACE.

b. Explique por que esse argumento falha em mostrar que *FÓRMULA-MIN* $\in$ coNP: Se $\phi \notin$ *FÓRMULA-MIN*, então ϕ tem uma fórmula menor equivalente. Uma MTN pode verificar que $\phi \in$ *FÓRMULA-MIN* adivinhando essa fórmula.

8.17 Seja A a linguagem de parênteses apropriadamente aninhados. Por exemplo, `(())` e `((()(()))())` estão em A, mas `)(` não está. Mostre que A está em L.

***8.18** Seja B a linguagem de parênteses e colchetes apropriadamente aninhados. Por exemplo, `([()()]()[])` está em B mas `([)]` não está. Mostre que B está em L.

*8.19 O jogo de ***Nim*** é jogado com uma coleção de pilhas de palitos. Em uma jogada um jogador pode remover qualquer número não-zero de palitos de uma única pilha. Os jogadores se alternam fazendo jogadas. O jogador que remove o último palito perde. Digamos que temos uma posição do jogo em Nim com k pilhas contendo $s_1, \ldots, s_k$ palitos. Chame a posição ***balanceada*** se, quando cada um dos números s_i é escrito em binário e os números binários são escritos como linhas de uma matriz alinhada nos bits de mais baixa ordem, cada coluna de bits contém um número par de 1s. Prove os dois fatos seguintes.

a. Começando em uma posição desbalanceada, uma única jogada existe que muda a posição para uma posição balanceada.

b. Começando em uma posição balanceada, toda jogada de um movimento muda a posição para uma posição desbalanceada.

Seja $NIM = \{\langle s_1, \ldots, s_k\rangle |$ cada s_i é um número binário e o Jogador I tem uma estratégia vencedora no jogo Nim começando nessa posição$\}$. Use os fatos precedentes sobre posições balanceadas para mostrar que $NIM \in$ L.

8.20 Seja $MULT = \{a\#b\#c |$ onde a, b, c são números naturais binários e $a \times b = c\}$. Mostre que $MULT \in$ L.

8.21 Para qualquer inteiro positivo x, seja $x^{\mathcal{R}}$ o inteiro cuja representação binária é o reverso da representação binária de x. (Assuma a inexistência de 0s à esquerda na representação binária de x.) Defina a função $\mathcal{R}^+ : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ onde $\mathcal{R}^+(x) = x + x^{\mathcal{R}}$.

a. Seja $A_2 = \{\langle x, y\rangle | \, \mathcal{R}^+(x) = y\}$. Mostre que $A_2 \in$ L.

b. Seja $A_3 = \{\langle x, y\rangle | \, \mathcal{R}^+(\mathcal{R}^+(x)) = y\}$. Mostre que $A_3 \in$ L.

8.22 **a.** Seja $SOMA = \{\langle x, y, z\rangle | \; x, y, z > 0$ são inteiros binários e $x + y = z\}$. Mostre que $SOMA \in$ L.

b. Seja $SOMA\text{-}PAL = \{\langle x, y\rangle | \; x, y > 0$ são inteiros binários onde $x + y$ é um inteiro cuja representação binária é uma palíndrome$\}$. (Note que a representação binária da soma é suposta não ter zeros à esquerda. Uma palíndrome é uma cadeia que é igual a seu reverso). Mostre que $SOMA\text{-}PAL \in$ L.

*8.23 Defina $CICLO\text{-}ND = \{\langle G\rangle | \; G$ é um grafo não-direcionado que contém um ciclo simples$\}$. Mostre que $CICLO\text{-}ND \in$ L. (Note: G pode ser um grafo que não é conexo.)

*8.24 Para cada n, exiba duas expressões regulares, R e S, de comprimento $poly(n)$, onde $L(R) \neq L(S)$, mas onde a primeira cadeia sobre a qual eles diferem é exponencialmente longa. Em outras palavras, $L(R)$ e $L(S)$ têm que ser diferentes, e ainda assim concordam em todas as cadeias de comprimento $2^{\epsilon n}$ para alguma constante $\epsilon > 0$.

8.25 Um grafo não-direcionado é ***bipartido*** se seus nós podem ser divididos em dois conjuntos de modo que todas as arestas vão de um nó em um conjunto para um nó no outro conjunto. Mostre que um grafo é bipartido se e somente se ele não contém um ciclo que tem um número ímpar de nós. Seja $BIPARTIDO = \{\langle G\rangle | \; G$ é um grafo bipartido$\}$. Mostre que $BIPARTIDO \in$ NL.

8.26 Defina *CAMIN-ND* como sendo a contrapartida de *CAMIN* para grafos não-direcionados. Mostre que $BIPARTIDO \leq_{\mathrm{L}} CAMIN\text{-}ND$. (Note: No momento em que esta edição ia ao prelo, O. Reingold [60] anunciou que $CAMIN\text{-}ND \in$ L. Conseqüentemente, $BIPARTIDO \in$ L, mas o algoritmo é um pouco complicado.)

8.27 Lembre-se que um grafo direcionado é ***fortemente conexo*** se cada dois nós são conectados por um caminho direcionado em cada direção. Seja

$$\textit{FORTEMENT-CONEXO} = \{\langle G\rangle \mid G \text{ é um grafo fortemente conexo}\}.$$

Mostre que *FORTEMENT-CONEXO* é NL-completa.

8.28 Seja $AMBOS_{\mathsf{AFN}} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1 \text{ e } M_2 \text{ são AFNs onde } L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}$. Mostre que $AMBOS_{\mathsf{AFN}}$ é NL-completa.

8.29 Mostre que A_{AFN} é NL-completo.

8.30 Mostre que V_{AFD} é NL-completo.

*__8.31__ Mostre que *2SAT* é NL-completo.

*__8.32__ Dê um exemplo de uma linguagem livre-do-contexto NL-completa.

R*__8.33__ Defina *CICLO* $= \{\langle G\rangle \mid G$ é um grafo direcionado que contém um ciclo direcionado$\}$. Mostre que *CICLO* é NL-completa.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

8.5 Sejam A_1 e A_2 linguagens que são decididas por NL-máquinas N_1 e N_2. Construa três máquinas de Turing : $N_\cup$ decidindo $A_1 \cup A_2$; $N_\circ$ decidindo $A_1 \circ A_2$; e N_* decidindo A_1^*. Cada uma dessas máquinas recebe a entrada w.

A máquina $N_\cup$ não-deterministicamente ramifica para simular N_1 ou para simular N_2. Em qualquer dos casos, $N_\cup$ aceita se a máquina simulada aceita.

A máquina $N_\circ$ não-deterministicamente seleciona uma posição sobre a entrada para dividí-la em duas subcadeias. Somente um apontador para aquela posição é armazenada sobre a fita de trabalho—espaço insuficiente é disponível para armazenar as próprias subcadeias. Então $N_\circ$ simula N_1 sobre a primeira subcadeia, ramificando não-deterministicamente para simular o não-determinismo de N_1. Sobre qualquer ramo que atinge o estado de aceitação de N_1, $N_\circ$ simula N_2 sobre a segunda subcadeia. Sobre qualquer ramo que atinge o estado de aceitação de N_2, $N_\circ$ aceita.

A máquina N_* tem um algoritmo mais complexo, portanto descrevemos seus estágios.

N_* = "Sobre a entrada w:

1. Inicialize dois apontadores de posição sobre a entrada p_1 e p_2 para 0, a posição imediatamente precedendo o primeiro símbolo de entrada.
2. *Aceite* se não há nenhum símbolo de entrada após p_2.
3. Mova p_2 para a frente para uma posição de entrada não-deterministicamente selecionada.
4. Simule N_1 sobre a subcadeia de w da posição seguinte a p_1 para a posição em p_2, ramificando não-deterministicamente simule o não-determinismo de N_1.
5. Se esse ramo da simulação atinge o estado de aceitação de N_1, copie p_2 para p_1 e vá para o estágio 2."

8.7 Construa uma MT M para decidir A_{AFD}. Quando M recebe a entrada $\langle A, w\rangle$, um AFD e uma cadeia, M simula A sobre w mantendo registro do estado corrente de A e a posição corrente de sua cabeça, e atualizando-os apropriadamente. O espaço requerido para realizar essa simulação é $O(\log n)$ porque M pode gravar cada um desses valores armazenando um apontador na sua entrada.

8.33 Reduza *CAMINH* a *CICLO*. A idéia por trás da redução é modificar a instância $\langle G, s, t\rangle$ do problema *CAMINH* adicionando uma aresta de t para s em G. Se um caminho existe de s para t em G, um ciclo direcionado existirá no G modificado. Entretanto, outros ciclos podem existir no G modificado porque eles podem já estar presentes em G. Para lidar com esse problema, primeiro modifique G de modo que ele não contenha ciclos. Um ***grafo direcionado nivelado*** é aquele onde os nós são divididos em grupos, $A_1, A_2, \ldots, A_k$, chamados *níveis*, e somente arestas de um nível para o próximo nível acima são permitidos. Observe que um grafo nivelado é acíclico. O problema *CAMINH* para grafos nivelados é ainda NL-completo, como a seguinte redução do problema *CAMINH* irrestrito mostra. Dado um grafo G com dois nós s e t, e m nós no total, produz o grafo nivelado G' cujos níveis são m cópias dos nós de G. Desenhe uma aresta do nó i a cada nível para o nó j no póximo nível se G contém uma aresta de i para j. Adicionalmente, desenhe uma aresta do nó i em cada nível i no próximo nível. Seja s' o nó s no primeiro nível e t' o nó t no último nível. O grafo G contém um caminho de s para t sse G' contém um caminho de s' para t'. Se você modificar G' adicionando uma aresta de t' para s', você obtém uma redução de *CAMINH* para *CICLO*. A redução é computacionalmente simples, e sua implementação espaço log é rotina. Além disso, um procedimento fácil mostra que *CICLO* $\in$ NL. Logo, *CICLO* é NL-completa.

9

INTRATABILIDADE

Certos problemas computacionais são solúveis em princípio, mas as soluções requerem tanto tempo ou espaço que eles não podem ser usados na prática. Tais problemas são chamados ***intratáveis***.

Nos Capítulos 7 e 8, introduzimos diversos problemas que se acreditavam serem intratáveis mas nenhum que tenha sido demonstrado ser intratável. Por exemplo, a maioria das pessoas acreditam que o problema *SAT* e todos os outros problemas NP-completos são intratáveis, embora não saibamos como provar que eles o são. Neste capítulo damos exemplos de problemas que podemos demonstrar serem intratáveis.

De modo a apresentar esses exemplos, desenvolvemos vários teoremas que relacionam o poder de máquinas de Turing à quantidade de tempo ou espaço disponível para computação. Concluímos o capítulo com uma discussão da possibilidade de se provar que aqueles problemas em NP são intratáveis e daí se resolver a questão P versus NP. Primeiro, introduzimos a técnica de relativização e a usamos para argumentar que certos métodos não nos permitirão atingir esse objetivo. Então, discutimos teoria da complexidade de circuitos, uma abordagem tomada por pesquisadores que tem mostrado alguma promessa.

9.1 TEOREMAS DE HIERARQUIA

O senso comum sugere que dar a uma máquina de Turing mais tempo ou mais espaço deve aumentar a classe de problemas que ela pode resolver. Por exemplo, máquinas de Turing deveriam ser capazes de decidir mais linguagens em tempo n^3 que eles podem fazer em tempo n^2. Os ***teoremas de hierarquia*** provam que essa intuição é correta, sujeita a certas condições descritas abaixo. Usamos o termo *teorema de hierarquia* porque esses teoremas provam que as classes de complexidade de tempo e de espaço não são todas iguais—elas formam uma hierarquia na qual as classes com limitantes maiores contêm mais linguagens do que as classes com limitantes menores.

O teorema da hierarquia para complexidade de espaço é um pouco mais simples que aquele para a complexidade de tempo, portanto apresentamo-lo primeiro. Começamos com a definição técnica seguinte.

DEFINIÇÃO 9.1

Uma função $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, onde $f(n)$ é pelo menos $O(\log n)$, é chamada ***espaço construtível*** se a função que mapeia a cadeia $\mathtt{1}^n$ para a representação binária de $f(n)$ é computável em espaço $O(f(n))$. [1]

Em outras palavras, f é espaço construtível se alguma MT M de espaço $O(f(n))$ existe que sempre pára com a representação binária de $f(n)$ sobre sua fita quando iniciada sobre a entrada $\mathtt{1}^n$. Funções fracionárias tais como $n \log_2 n$ e $\sqrt{n}$ são aproximadas para baixo para o menor inteiro para os propósitos de construtibilidade de tempo e de espaço.

EXEMPLO 9.2

Todas as funções ocorrendo comumente que são pelo menos $O(\log n)$ são espaço construtíveis, incluindo as funções $\log_2 n$, $n \log_2 n$, e n^2.

Por exemplo, n^2 é espaço construtível porque uma máquina pode tomar sua entrada $\mathtt{1}^n$, obter n em binário contando o número de 1s, e dar como saída n^2 usando qualquer método padrão para multiplicar n por si próprio. O espaço total usado é $O(n)$ que é certamente $O(n^2)$.

Quando mostramos que funções $f(n)$ que são $o(n)$ como sendo espaço constructíveis, usamos uma fita de entrada somente-leitura, como fizemos quando definimos complexidade de espaço sublinear na Seção 8.4. Por exemplo, tal máquina pode computar a função que mapeia $\mathtt{1}^n$ à representação binária de $\log_2 n$ da seguinte forma. Ela primeiro conta o número de 1s na sua entrada

[1] Lembre-se que $\mathtt{1}^n$ significa uma cadeia de n 1s.

em binário, usando sua fita de trabalho à medida que ela move sua cabeça ao longo da fita de entrada. Então, com n em binária sobre sua fita de trabalho, ela pode computar $\log_2 n$ contando o número de bits na representação binária de n. ■

O papel da espaço construtibilidade no teorema de hierarquia de espaço pode ser entendido a partir da seguinte situação. Se $f(n)$ e $g(n)$ são dois limitantes de espaço, onde $f(n)$ é assintoticamente maior que $g(n)$, esperaríamos que uma máquina fosse capaz de computar mais linguagens em espaço $f(n)$ do que em espaço $g(n)$. Entretanto, suponha que $f(n)$ exceda $g(n)$ de apenas uma quantidade muito pequena e difícil de computar. Então, a máquina pode não ser capaz de usar o espaço extra proveitosamente porque mesmo computar a quantidade de espaço extra pode requerer mais espaço do que é disponível. Nesse caso, uma máquina pode não ser capaz de computar mais linguagens em espaço $f(n)$ do que ela pode em espaço $g(n)$. Estipulando que $f(n)$ é espaço constructível evita essa situação e nos permite provar que uma máquina pode computar mais do que ela seria capaz em qualquer limitante assintoticamente menor, como o teorema seguinte mostra.

TEOREMA 9.3

Teorema da hierarquia de espaço Para qualquer função espaço construtível $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, uma linguagem A existe que é decidível em espaço $O(f(n))$ mas não em espaço $o(f(n))$.

IDÉIA DA PROVA Temos que mostrar uma linguagem A que tem duas propriedades. A primeira diz que A é decidível em espaço $O(f(n))$. A segunda diz que A não é decidível em espaço $o(f(n))$.

Descreva A dando um algoritmo D que a decide. O algoritmo D roda em espaço $O(f(n))$, daí assegurando a primeira propriedade. Além disso, D garante que A é diferente de qualquer linguagem que é decidível em espaço $o(f(n))$, daí assegurando a segunda propriedade. A linguagem A é diferente das linguagens que discutimos anteriormente no sentido de que lhe falta uma definição não-algorítmica. Por conseguinte, não podemos oferecer uma imagem mental simpes de A.

De modo a assegurar que A não é decidível em espaço $o(f(n))$, desenhamos D para implementar o método da diagonalização que usamos para provar insolubilidade do problema da parada A_{MT} no Teorema 4.11 na página 184. Se M é uma MT que decide uma linguagem em espaço $o(f(n))$, D garante que A difere da linguagem de M em pelo menos um lugar. Que lugar? O lugar correspondentes a uma descrição da própria M.

Vamos olhar para a maneira pela qual D opera. Grosso modo, D toma sua entrada como sendo a descrição de uma MT M. (Se a entrada não é a descrição de nenhuma MT, então a ação de D é inconseqüente sobre essa entrada, portanto fa-

zemos arbitrariamente D rejeitar.) Então, D roda M sobre a mesma entrada—a saber, $\langle M \rangle$—dentro do limitante de espaço $f(n)$. Se M pára dentro dessa quantidade limitada de espaço, D aceita sse M rejeita. Se M não pára, D simplesmente rejeita. Portanto se M roda dentro da limitação de espaço $f(n)$, D tem espaço suficiente para assegurar que sua linguagem é diferente da de M. Se não, D não tem espaço suficiente para descobrir o que M faz, mas felizmente D não tem nenhum requisito para agir diferentemente das máquinas que não rodam em espaço $o(f(n))$, portanto a ação de D sobre essa entrada é inconseqüente.

Essa descrição captura a essência da prova mas omite vários detalhes importantes. Se M roda em espaço $o(f(n))$, D tem que garantir que sua linguagem é diferente da linguagem de M. Mas mesmo quando M roda em espaço $o(f(n))$, ela pode usar mais que espaço $f(n)$ para n pequeno, quando o comportamento assintótico ainda não "disparou." Possivelmente, D poderia não ter espaço suficiente para rodar M para completação sobre a entrada $\langle M \rangle$, e portanto D vai perder sua única oportunidade de evitar a linguagem de M. Portanto, se não formos cuidadosos, D poderia terminar decidindo a mesma linguagem que M decide, e o teorema não seria provado.

Podemos fixar esse problema modificando D para lhe dar oportunidades adicionais de evitar a linguagem de M. Ao invés de rodar M somente quando D recebe a entrada $\langle M \rangle$, ele roda M sempre que ele recebe uma entrada da forma $\langle M \rangle \mathtt{10}^*$, ou seja, uma entrada da forma $\langle M \rangle$ seguida por `1` e algum número de `0`s. Então, se M realmente está rodando em espaço $o(f(n))$, D terá espaço suficiente para rodá-la até completar sobre a entrada $\langle M \rangle \mathtt{10}^k$ para algum valor grande de k porque o comportamento assintótico tem que em algum momento disparar.

Um último ponto técnico surge. Quando D roda M sobre alguma cadeia, M pode entrar num laço infinito ao mesmo tempo em que usa somente uma quantidade finita de espaço. Mas D supostamente é um decisor, portanto temos que assegurar que D não entra em loop enquanto simula M. Qualquer máquina que roda em espaço $o(f(n))$ usa somente $2^{o(f(n))}$ de tempo. Modificamos D de modo que ele conta o número de passos usados na simulação de M. Se essa contagem em algum momento excede $2^{f(n)}$, então D rejeita.

PROVA O seguinte algoritmo de espaço $O(f(n))$ D decide uma linguagem A que não é decidível em espaço $o(f(n))$.

$D =$ "Sobre a entrada w:

1. Seja n o comprimento de w.
2. Compute $f(n)$ usando espaço construtibilidade, e marque essa quantidade de fita. Se estágios posteriores sequer tentam usar mais, *rejeite*.
3. Se w não é da forma $\langle M \rangle \mathtt{10}^*$ para alguma MT M, *rejeite*.
4. Simule M sobre w ao mesmo tempo contando o número de passos usados na simulação. Se a contagem em algum momento excede $2^{f(n)}$, *rejeite*.
5. Se M aceita, *rejeite*. Se M rejeita, *aceite*."

No estágio 4, precisamos dar detalhes adicionais da simulação de modo a determinar a quantidade de espaço usada. A MT M simulada tem um alfabeto de fita e D tem um alfabeto fixed, portanto representamos cada célula da fita de M com várias células sobre a fita de D. Por conseguinte, a simulação introduz um fator constante de excesso no espaço usado. Em outras palavras, se M roda em espaço $g(n)$, então D usa $d\,g(n)$ de espaço para simular M para alguma constante d que depende de M.

A máquina D é um decisor porque cada um dos seus estágios pode rodar por um tempo limitado. Seja A a linguagem que D decide. Claramente, A é decidível em espaço $O(f(n))$ porque D assim o faz. A seguir, mostramos que A não é decidível em espaço $o(f(n))$.

Assuma, ao contrário, que alguma máquina de Turing M decide A em espaço $g(n)$, onde $g(n)$ é $o(f(n))$. Como mencionado anteriormente, D pode simular M, usando espaço $d\,g(n)$ para alguma constante d. Devido ao fato de que $g(n)$ é $o(f(n))$, alguma constante n_0 existe, onde $d\,g(n) < f(n)$ para todo $n \geq n_0$. Por conseguinte, a simulação de D de M rodará até o fim desde que a entrada tenha comprimento n_0 ou mais. Considere o que acontece quando D é rodado sobre a entrada $\langle M\rangle \mathtt{1}^{n_0}$. Essa entrada é mais longa que n_0, portanto a simulação no estágio 4 completará. Por conseguinte, D fará o oposto de M sobre a mesma entrada. Logo, M não decide A, o que contradiz nossa suposição. Por conseguinte, A não é decidível em espaço $o(f(n))$.

COROLÁRIO 9.4

Para quaisquer duas funções $f_1, f_2 : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, onde $f_1(n)$ é $o(f_2(n))$ e f_2 is espaço construtível, $\text{SPACE}(f_1(n)) \subsetneq \text{SPACE}(f_2(n))$.[2]

Esse corolário nos permite separar várias classes de complexidade de espaço. Por exemplo, podemos mostrar que a função n^c é espaço construtível para qualquer número natural c. Logo, para quaisquer dois números naturais $c_1 < c_2$ podemos provar que $\text{SPACE}(n^{c_1}) \subsetneq \text{SPACE}(n^{c_2})$. Com um pouco mais de trabalho podemos mostrar que n^c é espaço construtível para qualquer número racional $c > 0$ e dessa forma estender a inclusão precedente para se verificar para quaisquer números racionais $0 \leq c_1 < c_2$. Observando que dois números racionais c_1 e c_2 sempre existem entre quaisquer dois números reais $\epsilon_1 < \epsilon_2$ tais que $\epsilon_1 < c_1 < c_2 < \epsilon_2$ obtemos o seguinte corolário adicional demonstrando uma hierarquia fina dentro da classe PSPACE.

[2]A expressão $A \subsetneq B$ significa que A é um subconjunto próprio (i.e., não igual) de B.

COROLÁRIO 9.5

Para quaisquer dois números reais $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2$,

$$\text{SPACE}(n^{\epsilon_1}) \subsetneq \text{SPACE}(n^{\epsilon_2}).$$

Podemos também usar o teorema da hierarquia de espaço para separar duas classes de complexidade de espaço que encontramos anteriormente.

COROLÁRIO 9.6

NL $\subsetneq$ PSPACE.

PROVA O teorema de Savitch mostra que NL $\subseteq$ SPACE($\log^2 n$), e o teorema da hierarquia de espaço mostra que SPACE($\log^2 n$) $\subsetneq$ SPACE(n). Logo, o corolário segue. Como observamos na página 349, essa separação nos permite concluir que *TQBF* $\notin$ NL porque *TQBF* é PSPACE-completo com respeito a redutibilidade de espaço log.

Agora estabelecemos o principal objetivo deste capítulo: provar a existência de problemas que são decidíveis em princípio mas não na prática—ou seja, problemas que são decidíveis mas intratáveis. Cada uma das classes SPACE(n^k) está contida na classe SPACE($n^{\log n}$), que por sua vez está estritamente contida na classe SPACE(2^n). Por conseguinte, obtemos o seguinte corolário adicional separando PSPACE de EXPSPACE $= \bigcup_k \text{SPACE}(2^{n^k})$.

COROLÁRIO 9.7

PSPACE $\subsetneq$ EXPSPACE.

Esse corolário estabelece a existência de problemas decidíveis que são intratáveis, no sentido de que seus procedimentos de decisão têm que usar mais que espaço polinomial. As linguagens em si são um tanto artificiais—interessantes somente para o propósito de separar classes de complexidade. Usamos essas linguagens para provar a intratabilidade de uma outra linguagem mais natural, depois de discutirmos o teorema da hierarquia de tempo.

DEFINIÇÃO 9.8

Uma função $t\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, onde $t(n)$ é pelo menos $O(n \log n)$, é chamada ***tempo construtível*** se a função que mapeia a cadeia 1^n para a representação binária de $t(n)$ é computável em tempo $O(t(n))$.

Em outras palavras, t é tempo construtível se alguma MT M de tempo $O(t(n))$ existe que sempre pára com a representação binária de $t(n)$ sobre sua fita quando iniciada sobre a entrada 1^n.

EXEMPLO 9.9

Todas as funções comumente ocorrendo que são pelo menos $n \log n$ são tempo construtíveis, incluindo as funções $n \log n$, $n\sqrt{n}$, n^2, e 2^n.

Por exemplo, para mostrar que $n\sqrt{n}$ é tempo construtível, primeiro desenhamos uma MT para contar o número de 1s em binário. Para fazer isso a MT move um contador binário ao longo da fita, incrementando-o de 1 para toda posição da entrada, até que ele atinge o final da entrada. Essa parte usa $O(n \log n)$ passos porque $O(\log n)$ passos são usados para cada uma das n posições da entrada. Aí então, computamos $\lfloor n\sqrt{n} \rfloor$ em binário a partir da representação binária de n. Qualquer método razoável de fazer isso funcionará em tempo $O(n \log n)$ porque o comprimento dos números envolvidos é $O(\log n)$. ■

O teorema da hierarquia de tempo é um análogo para complexidade de tempo ao Teorema 9.3. Por razões técnicas que aparecerão na sua prova o teorema da hierarquia de tempo é um pouco mais fraco que o que provamos para espaço. Enquanto que *qualquer* acréscimo assintótico espaço construtível no limitante de espaço aumenta a classe de linguagens assim decidíveis, para tempo temos que ainda aumentar o limitante de tempo de um fator logarítmico de modo a garantir que podemos obter linguagens adicionais. Concebivelmente, um teorema mais justo da hierarquia de tempo é verdadeiro, mas no momento não sabemos como prová-lo. Esse aspecto do teorema da hierarquia de tempo surge porque medimos a complexidade de tempo com máquinas de Turing de uma única-fita. Podemos provar teoremas mais justos da hierarquia de tempo para outros modelos de computação.

TEOREMA 9.10

Teorema da hierarquia de tempo Para qualquer funcção tempo construtível $t\colon \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, uma linguagem A existe que é decidível em tempo $O(t(n))$ mas não decidível em tempo $o(t(n)/\log t(n))$.

IDÉIA DA PROVA Esta prova é similar à prova do Teorema 9.3. Construímos uma MT D que decide uma linguagem A em tempo $O(t(n))$, pela qual A não pode ser decidida em tempo $o(t(n)/\log t(n))$. Aqui, D toma uma entrada w da forma $\langle M \rangle 1^*$ e simula M sobre a entrada w, garantindo que não usa mais que tempo $t(n)$. Se M pára dentro dessa limitação de tempo, D dá a saída oposta.

A importante diferença na prova concerne o custo de se simular M enquanto que, ao mesmo tempo, de se contar o número de passos que a simulação está usando. A máquina D tem que realizar essa simulação temporizada eficientemente de modo que D rode em tempo $O(t(n))$ enquanto que atinge o objetivo

de evitar todas as linguagens decidíveis em tempo $o(t(n)/\log t(n))$. Para complexidade de espaço, a simulação introduz um fator constante de excesso, como observamos na prova do Teorema 9.3. Para complexidade de tempo, a simulação introduz um fator logarítmico de excesso. O excesso maior para tempo é a razão do aparecimento do fato $1/\log t(n)$ no enunciado desse teorema. Se tivéssemos uma maneira de simular uma MT de uma única-fita por uma outra MT de uma única-fita por um número pré-especificado de passos, usando somente um fator constante de excesso em tempo, seríamos capazes de fortalecer esse teorema mudando $o(t(n)/\log t(n))$ para $o(t(n))$. Nenuma tal simulação eficiente é conhecida.

PROVA O seguinte algoritmo D de tempo $O(t(n))$ decide uma linguagem A que não é decidível em tempo $o(t(n)/\log t(n))$.

$D =$ "Sobre a entrada w:

1. Seja n o comprimento de w.
2. Compute $t(n)$ usando tempo construtibilidade, e armazene o valor $\lceil t(n)/\log t(n) \rceil$ em um contador binário. Decremente esse contador antes de cada passo usado para realizar os estágios 3, 4, e 5. Se o contador em algum momento atinge 0, *rejeite*.
3. Se w não é da forma $\langle M \rangle \mathtt{1}0^*$ para alguma MT M, *rejeite*.
4. Simule M sobre w.
5. Se M aceita, então *rejeite*. Se M rejeita, então *aceite*."

Examine cada um dos estágios desse algoritmo para determinar o tempo de execução. Obviamente, estágios 1, 2 e 3 podem ser realizados dentro de tempo $O(t(n))$.

No estágio 4, toda vez que D simula um passo de M, ela toma o estado corrente de M juntamente com o símbolo de fita sob a cabeça da fita de M e busca a próxima ação de M na sua função de transição de modo que ele possa atualizar a fita de M apropriadamente. Todos esses três objetos (estado, símbolo de fita, e função de transição) são armazenados em algum lugar na fita de D. Se eles são armazenados distantes um do outro, D vai precisar de muitos passos para juntar essa informação a cada vez que ela simula um dos passos de M. Ao contrário, D sempre mantém essas informações juntas.

Podemos pensar na única fita de D como organizada em *trilhas*. Uma maneira de se obter duas trilhas é armazenar uma trilha nas posições ímpares e a outra nas posições pares. Alternativamente, o efeito duas-trilhas pode ser obtido aumentando-se o alfabeto de fita de D para incluir cada par de símbolos, um da trilha superior e o segundo da fita inferior. Podemos obter o efeito das trilhas adicionais de modo semelhante. Note que trilhas múltiplas introduzem somente um fator constante de excesso em tempo, desde que somente um número fixo de trilhas sejam usadas. Aqui, D tem três trilhas.

Uma das trilhas contém a informação sobre a fita de M, e uma segunda contém seu estado corrente e uma cópia da função de transição de M. Durante a simulação, D mantém a informação sobre a segunda trilha próxima à

posição corrente da cabeça de M sobre a primeira trilha. Toda vez que a posição da cabeça de M se move, D desloca toda a informação na segunda trilha para mantê-la próxima à cabeça. Devido ao fato de que o tamanho da informação sobre a segunda trilha depende somente de M e não do comprimento da entrada para M, o deslocamento adiciona somente um fator constante ao tempo de simulação. Além disso, dado que a informação requerida é mantida próxima, o custo de buscar a próxima ação de M na sua função de transição e atualizar sua fita é somente uma constante. Logo, se M roda em tempo $g(n)$, D pode simulá-la em tempo $O(g(n))$.

Em todo passo nos estágios 3 e 4, D tem que decrementar o contador de passos originalmente posto no estágio 2. Aqui, D pode fazer isso sem adicionar excessivamente ao tempo de simulação mantendo o contador em binário sobre uma terceira trilha e movendo-o para junto da posição corrente da cabeça. Esse contador tem uma magnitude de cerca de $t(n)/\log t(n)$, portanto seu comprimento é $\log(t(n)/\log t(n))$, que é $O(\log t(n))$. Logo, o custo de atualizá-lo e movê-lo a cada passo adiciona um fator de $\log t(n)$ ao tempo de simulação, portanto trazendo o tempo total de execução para $O(t(n))$. Por conseguinte, A é decidível em tempo $O(t(n))$.

Para mostrar que A não é decidível em tempo $o(t(n)/\log t(n))$ usamos um argumento similar ao usado na prova do Teorema 9.3. Assuma, ao contrário, que a MT M decide A em tempo $g(n)$, onde $g(n)$ é $o(t(n)/\log t(n))$. Aqui, D pode simular M, usando tempo $d\,g(n)$ para alguma constante d. Se o tempo total de simulação (não contando o tempo de atualizar o contador de passos) é no máximo $t(n)/\log t(n)$, a simulação rodará até o fim. Em razão de $g(n)$ ser $o(t(n)/\log t(n))$, alguma constante n_0 existe onde $d\,g(n) < t(n)/\log t(n)$ para todo $n \geq n_0$. Por conseguinte, a simulação de M realizada por D rodará até o fim desde que a entrada tenha comprimento n_0 ou mais. Considere o que acontece quando rodamo D sobre a entrada $\langle M\rangle 1^{n_0}$. Essa entrada é mais longa que n_0 portanto a simulação no estágio 4 vai se completar. Por conseguinte, D fará o oposto de M sobre a mesma entrada. Logo, M não decide A, o que contradiz nossa suposição. Portanto A não é decidível em tempo $o(t(n)/\log t(n))$.

Agora podemos estabelecemos análogos ao Corolários 9.4, 9.5, e 9.7 para complexidade de tempo.

COROLÁRIO 9.11

Para quaisquer duas funções $t_1, t_2 : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, onde $t_1(n)$ é $o(t_2(n)/\log t_2(n))$ e t_2 é tempo construtível, $\text{TIME}(t_1(n)) \subsetneq \text{TIME}(t_2(n))$.

COROLÁRIO 9.12

Para quaisquer dois números reais $1 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2$,

$$\text{TIME}(n^{\epsilon_1}) \subsetneq \text{TIME}(n^{\epsilon_2}).$$

COROLÁRIO 9.13

P $\subsetneq$ EXPTIME.

COMPLETUDE DE ESPAÇO EXPONENCIAL

Podemos usar os resultados precedentes para demonstrar que uma linguagem específica é realmente intratável. Fazemos isso em dois passos. Primeiro, os teoremas de hierarquia nos dizem que uma máquina de Turing pode decidir mais linguagens em EXPSPACE do que ela pode em PSPACE. Aí então, mostramos que uma linguagem particular concernente a expressões regulares generalizadas é completa para EXPSPACE e portanto não poder ser decidida em tempo polinomial ou mesmo em espaço polinomial.

Antes de chegar na sua generalização, vamos revisar brevemente a maneira pela qual introduzimos expressões regulares na Definição 1.52. Elas são construídas a partir de expressões atômicas $\emptyset$, ε, e os membros do alfabeto, usando as operações regulares união, concatenação, e estrela, denotadas $\cup$, $\circ$, e *, respectivamente. Do Problema 8.8 sabemos que podemos testar a equivalência de duas expressões regulares em espaço polinomial.

Mostramos que, permitindo expressões regulares com mais operações do que as operações regulares usuais, a complexidade de analisar as expressões pode crescer dramaticamente. Seja $\uparrow$ a ***operação de exponenciação***. Se R é uma expressão regular e k é um inteiro não-negativo, escrever $R \uparrow k$ é equivalente à concatenação de R com si mesma k vezes. Também escrevemos R^k como abreviação para $R \uparrow k$. Em outras palavras,

$$R^k = R \uparrow k = \overbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}^{k}.$$

Expressões regulares generalizadas permitem a operação de exponenciação em adição às operações regulares usuais. Obviamente, essas expressões regulares generalizadas ainda geram a mesma classe de linguagens regulares que as expressões regulares padrão geram porque podemos eliminar a operação de exponenciação repetindo a expressão base. Seja

$$EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow} = \{\langle Q, R\rangle \mid Q \text{ e } R \text{ são expressões regulares equivalentes com exponenciação}\}$$

Para mostrar que $EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow}$ é intratável demonstramos que ela é completa para a classe EXPSPACE. Nenhum problema EXPSPACE-completo pode estar em PSPACE, muito menos em P. Caso contrário EXPSPACE seria igual a PSPACE, contradizendo o Corolário 9.7.

DEFINIÇÃO 9.14

Uma linguagem B é ***EXPSPACE-completa*** se

1. $B \in$ EXPSPACE, e
2. toda A em EXPSPACE é redutível em tempo polinomial a B.

TEOREMA 9.15

$EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow}$ é EXPSPACE-completo.

IDÉIA DA PROVA Ao medir a complexidade de se decidir $EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow}$ assumimos que todos os expoentes são escritos como inteiros binários. O comprimento de uma expressão é o número total de símbolos que ela contém.

Esboçamos um algoritmo EXPSPACE para $EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow}$. Para testar se duas expressões com exponenciação são equivalentes, primeiro usamos repetição para eliminar a exponenciação, aí então convertemos as expressõe resultantes para AFNs. Finalmente, use um procedimento de teste de equivalência de AFN similar àquele usado para decidir o complemento de TOD_{AFN} no Exemplo 8.4.

Para mostrar que uma linguagem A em EXPSPACE é redutível em tempo polinomial a $EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow}$, utilizamos a técnica da redução via histórias de computação que introduzimos na Seção 5.1. A construção é similar à construção dada na prova do Teorema 5.13.

Dada uma MT M para A desenhamos uma redução em tempo polinomial mapeando uma entrada w a um par de expressões, R_1 e R_2, que são equivalentes exatamente quando M aceita w. As expressões R_1 e R_2 simulam a computação de M sobre w. A expressão R_1 simplesmente gera todas as cadeias sobre o alfabeto consistindo de símbolos que podem aparecer em histórias de computação. A expressão R_2 gera todas as cadeias que não são histórias de computação de rejeição. Portanto, se a MT aceita sua entrada, nenhuma história de computação de rejeição existe, e as expressões R_1 e R_2 geram a mesma linguagem. Lembre-se que uma história de computação de rejeição é a seqüência de configurações que a máquina entra em uma computação de rejeição sobre a entrada. Veja página 205 na Seção 5.1 para uma revisão de histórias de computação.

A dificuldade nesta prova é que o tamanho das expressões construídas tem que ser polinomial em n (de modo que a redução possa rodar em tempo polinomial), enquanto que a computação simulada pode ter comprimento exponencial. A operação de exponenciação é útil aqui para representar a computação longa com um expressão relativamente curta.

PROVA Primeiro apresentamos um algoritmo não-determinístico para testar se dois AFNs são inequivalentes.

$N =$ "Sobre a entrada $\langle N_1, N_2 \rangle$, onde N_1 e N_2 são AFNs:

1. Coloque um marcador sobre cada um dos estados iniciais de N_1 e N_2.
2. Repita $2^{q_1+q_2}$ vezes, onde q_1 e q_2 são os números de estados em N_1 e N_2:
3. Não-deterministicamente selecione um símbolo de entrada e mude as posições dos marcadores sobre os estados de N_1 e N_2 para simular a leitura daquele símbolo.
4. Se em algum ponto, um marcador foi colocado sobre um estado de aceitação de um dos autômatos finitos e não sobre qualquer estado de aceitação do outro autômato finito, *aceite*. Caso contrário, *rejeite*."

Se os autômatos N_1 e N_2 são equivalentes, N claramente rejeita porque ele somente aceita quando ele determina que uma máquina aceita uma cadeia que o outro não aceita. Se os autômatos não são equivalentes, alguma cadeia é aceita por uma máquina e não pela outra. Alguma cadeia dessas tem que ser de comprimento no máximo $2^{q_1+q_2}$. Caso contrário, considere usar a menor dessas cadeias como a seqüência de escolhas não-determinísticas. Somente $2^{q_1+q_2}$ maneiras diferentes existem de colocar marcadores sobre os estados de N_1 e N_2, portanto em uma cadeia mais longa as posições dos marcadores se repetiriam. Removendo a parte da cadeia entre as repetições, uma cadeia mais curta dessas seria obtida. Daí, o algoritmo N adivinharia essa cadeia entre suas escolhas não-determinísticas e aceitaria. Por conseguinte, N opera corretamente.

O algoritmo N roda em espaço linear não-determinístico e portanto, aplicando o teorema de Savitch, obtemos um algoritmo determinístico de espaço $O(n^2)$ para esse problema. A seguir usamos a forma determinística desse algoritmo para desenhar o seguinte algoritmo E que decide $EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow}$.

$E =$ "Sobre a entrada $\langle R_1, R_2 \rangle$ onde R_1 e R_2 são expressões regulares com exponenciação:

1. Converta R_1 e R_2 apara expressões regulares equivalentes B_1 e B_2 que usam repetição ao invés de exponenciação.
2. Converta B_1 e B_2 para AFNs equivalentes N_1 e N_2, usando o procedimento de conversão dado na prova do Lema 1.55.
3. Use a versão determinística do algoritmo N para determinar se N_1 se N_2 são equivalentes."

O algoritmo E obviamente está correto. Para analisar sua complexidade de espaço observamos que usar repetição para substituir exponenciação pode aumentar o comprimento de uma expressão de um fato de 2^l, onde l é a soma dos comprimentos dos expoentes. Por conseguinte, as expressões B_1 e B_2 têm um comprimento de no máximo $n2^n$, onde n é o comprimento da entrada. O procedimento de conversão do Lema 1.55 aumenta o comprimento linearmente e portanto os AFNs N_1 e N_2 têm no máximo $O(n2^n)$ estados. Por conseguinte, com tamanho da entrada $O(n2^n)$, a versão determinística do algoritmo N usa espaço $O((n2^n)^2) = O(n^2 2^{2n})$. Logo, $EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow}$ é decidível em espaço exponencial.

A seguir, mostramos que $EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow}$ é EXPSPACE-difícil. Seja A uma linguagem que é decidida por uma MT M rodando em espaço $2^{(n^k)}$ para alguma constante k. A redução mapeia uma entrada w para um par de expressões regulares, R_1 e R_2. A expressão R_1 é Δ^* onde, se Γ e Q são símbolos de fita e estados de M and states, $\Delta = \Gamma \cup Q \cup \{\#\}$ é o alfabeto consistindo de todos os símbolos que podem aparecer em uma história de computação. Construímos a expressão R_2 para gerar todas as cadeias que não são histórias de computação de rejeição de M sobre w. É claro que M aceita w sse M sobre w não tem nenhuma história de computação de rejeição. Conseqüentemente as duas expressões são equivalentes sse M aceita w. A construção é da seguinte forma.

Uma história de computação de rejeição para M sobre w é uma seqüência de configurações separadas por símbolos #. Usamos nossa codificação padrão de configurações na qual um símbolo correspondendo ao estado corrente é colocado à esquerda da posição corrente da cabeça. Assumimos que todas as configurações têm comprimento $2^{(n^k)}$ e são preenchidas à direita por símbolos em branco se eles caso contrário ficaríamos demasiado curtos. A primeira configuração em uma história de computação de rejeição é a configuração inicial de M sobre w. A última configuração é uma configuração de rejeição. Cada configuração tem que seguir da precedente conforme as regras especificadas na função de transição.

Uma cadeia pode falhar em ser uma computação de rejeição de várias maneiras: Ela pode falhar em iniciar ou terminar apropriadadmente, ou ela pode estar incorreta em algum lugar no meio. A expressão R_2 é igual a $R_{\text{inicio-ruim}} \cup R_{\text{janela-ruim}} \cup R_{\text{rejeicao-ruim}}$, onde cada subexpressão corresponde a uma das três maneiras pelas quais uma cadeia pode falhar.

Construímos a expressão $R_{\text{inicio-ruim}}$ para gerar todas as cadeias que falham em iniciar com a configuração inicial C_1 de M sobre w, da seguinte forma. A configuração C_1 é algo como $q_0 w_1 w_2 \cdots w_n \sqcup \sqcup \cdots \sqcup \#$. Escrevemos $R_{\text{inicio-ruim}}$ como a união de várias subexpressões para manusear cada parte de C_1:

$$R_{\text{inicio-ruim}} = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n \cup S_b \cup S_{\#}.$$

A expressão S_0 gera todas as cadeias que não começam com q_0. Fazemos S_0 ser a expressão $\Delta_{-q_0}\,\Delta^*$. A notação Δ_{-q_0} é uma abreviação para escrever a união de todos os símbolos em Δ exceto q_0.

A expressão S_1 gera todas as cadeias que não contêm w_1 na segunda posição. Fazemos S_1 ser $\Delta\,\Delta_{-w_1}\,\Delta^*$. Em geral, para $1 \leq i \leq n$ a expressão S_i é $\Delta^i\,\Delta_{-w_i}\,\Delta^*$. Conseqüentemente S_i gera todas as cadeias que contêm quaisquer símbolos nas primeiras i posições, qualquer símbolo exceto w_i na posição $i+1$ e qualquer cadeia de símbolos após a posição $i+1$. Note que usamos a operação de exponenção aqui. Na realidade, nesse ponto, a exponenciação é mais uma conveniência que uma necessidade porque, ao invés dela, poderíamos ter repetido o símbolo Δ i vezes se aumentar excessivamente o comprimento da expressão. Mas, na próxima subexpressão, a exponenciação é crucial para manter o tamanho polinomial.

A expressão S_b gera todas as cadeias que falham em conter um símbolo branco em alguma posição entre $n + 2$ e $2^{(n^k)}$. Poderíamos introduzir subexpressões S_{n+2} até $S_{2^{(n^k)}}$ para esse propósito, mas então a expressão $R_{\text{inicio-ruim}}$ teria comprimento exponencial. Ao invés, fazemos

$$S_b = \Delta^{n+1} (\Delta \cup \varepsilon)^{2^{(n^k)}-n-2} \Delta_{-\sqcup} \Delta^*.$$

Conseqüentemente S_b gera cadeias que contêm quaisquer símbolos nas primeiras $n+1$ posições, quaisquer símbolos nas próximas t posições, onde t pode variar de 0 a $2^{(n^k)} - n - 2$, e qualquer símbolo exceto branco na posição seguinte.

Finalmente $S_{\#}$ gera todas as cadeias que não têm um símbolo # na posição $2^{(n^k)} + 1$. Seja $S_{\#}\ \Delta^{(2^{(n^k)})} \Delta_{-\#} \Delta^*$.

Agora que completamos a construção de $R_{\text{inicio-ruim}}$, nos voltamos para a próxima parte, $R_{\text{rejeicao-ruim}}$. Ela gera todas as cadeias que não terminam apropriadamente—ou seja, cadeias que falham em conter uma configuração de rejeição. Qualquer configuração de rejeição contém o estado q_{rejeita}, portanto fazemos

$$R_{\text{rejeicao-ruim}} = \Delta^*_{-q_{\text{rejeita}}}.$$

Conseqüentemente $R_{\text{rejeicao-ruim}}$ gera todas as cadeias que não contêm q_{rejeita}.

Finalmente, construímos $R_{\text{janela-ruim}}$, a expressão que gera todas as cadeias nas quais uma configuração não leva legitimamente à próxima configuração. Lembre-se que na prova do teorema de Cook–Levin, determinamos que uma configuração legalmente origina uma outra sempre que todos os três símbolos consecutivos na primeira configuração originam corretamente os três símbolos correspondentes na segunda configuração conforme a função de transição. Logo, se uma configuração falha em originar uma outra, o erro ficará aparente a partir de um exame dos seis símbolos apropriados. Usamos essa idíea para construir $R_{\text{janela-ruim}}$:

$$R_{\text{janela-ruim}} = \bigcup_{\text{mau}(abc,def)} \Delta^* abc \Delta^{(2^{(n^k)}-2)} def \Delta^*,$$

onde $\text{mau}(abc, def)$ significa que abc não origina def conforme a função de transição. A união é tomada somente sobre tais símbolos a, b, c, d, e, e f em Δ. A figura seguinte ilustra a colocação desses símbolos em uma história de computação.

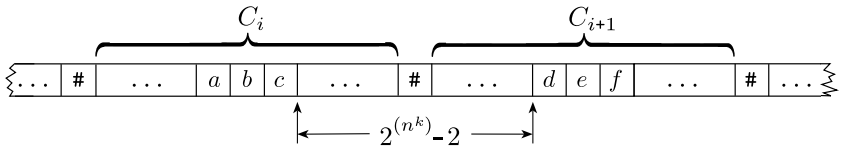


FIGURA 9.16
Lugares correspondentes em configurações adjacentes

Para calcular o comprimento de R, precisamos determinar o comprimento dos expoentes que aparecem nela. Vários expoentes de magnitude aproxima-

damente $2^{(n^k)}$ aparecem, e seu comprimento total em binária é $O(n^k)$. Conseqüentemente o comprimento de R é polinomial em n.

9.2 RELATIVIZAÇÃO

A prova de que $EQ_{\mathsf{EXR}\uparrow}$ é intratável baseia-se no método da diagonalização. Por que não mostramos que *SAT* é intratável da mesma maneira? Possivelmente poderíamos usar diagonalização para mostrar que uma MT não-determinística de tempo polinomial pode decidir uma linguagem que demonstravelmente não está em P. Nesta seção introduzimos o método da *relativização* para dar forte evidência contra a possibilidade de se revolver a questão P versus NP usando uma prova por diagonalização.

No método da relativização, modificamos nosso modelo de computação dando à máquina de Turing machine uma certa informação essencialmente para "livre." Dependendo de qual informação é realmente fornecida, a MT pode ser capaz de resolver alguns problemas mais facilmente que antes. Por exemplo, suponha que atribuímos à MT a capacidade de resolver o problema da satisfatibilidade em um único passo, para fórmulas booleanas de qualquer tamanho. Nem pense como esse feito é atingido—imagine uma "caixa preta" anexada que dá à máquina essa capacidade. Chamamos a caixa preta de um *oráculo* para enfatizar que ela não necessariamente corresponde a qualquer dispositivo físico. Obviamente, a máquina poderia utilizar o oráculo para resolver qualquer problema NP em tempo polinomial, independentemente de se P é igual a NP, porque todo problema NP é redutível em tempo polinomial ao problema da satisfatibilidade. Tal MT é dita estar computando *relativa ao* problema da satisfatibilidade; daí o termo *relativização*.

Em geral, um oraculo pode corresponder a qualquer linguagem específica, não apenas o problema da satisfatibilidade. O oráculo permite à MT testar pertinência na linguagem sem de fato ter que computar a resposta por si própria. Formalizamos essa noção em breve. Você pode lembrar que introduzimos oráculos na Seção 6.3. Lá, definimo-los para o propósito de classificar problemas de acordo com o grau insolubilidade. Aqui, usamos oráculos para entender melhor o poder do método da diagonalização.

DEFINIÇÃO 9.17

Um ***oráculo*** para uma linguagem A é um dispositivo que é capaz de reportar se qualquer cadeia w é um membro de A. Uma ***máquina de Turing oráculo*** M^A é uma máquina de Turing modificada que tem a capacidade adicional de fazer consultas a um oráculo. Sempre que M^A escreve uma cadeia sobre uma ***fita oráculo*** especial ela é informada se aquela cadeia é um membro de A, em um único passo de computação.

Seja P^A a classe de linguagens decidíveis com um máquina de Turing oráculo de tempo polinomial que usa o oráculo A. Defina NP^A similarmente.

EXEMPLO 9.18

Como mencionamos anteriormente, computação de tempo polinomial relativa ao problema da satisfatibilidade contém toda a classe NP. Em outras palavras, $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{P}^{SAT}$. Além disso, $\mathrm{coNP} \subseteq \mathrm{P}^{SAT}$ porque P^{SAT}, sendo uma classe de complexidade determinística, é fechada sob complementação. ■

EXEMPLO 9.19

Da mesma forma que P^{SAT} contém as linguagens que acreditamos que não estejam em P, a classe NP^{SAT} contém as linguagens que acreditamos que não estejam em NP. Por exemplo, vamos dizer que duas fórmulas booleanas ϕ e ψ sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_l$ são ***equivalentes*** se as fórmulas têm o mesmo valor sobre qualquer atribuição às variáveis. Vamos dizer ainda que uma fórmula é ***mínima*** se nenhuma fórmula menor lhe é equivalente. Seja

$$\textit{FORMULA-NAOMIN} = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ não é uma fórmula booleana mínima}\}.$$

FORMULA-NAOMIN não parece estar em NP (embora se ela realmente pertence a NP não se saiba). Entretanto, *FORMULA-NAOMIN* está em NP^{SAT} porque uma máquina de Turing oráculo não-determinística de tempo polinomial com um oráculo *SAT* pode testar se ϕ é um membro, da seguinte forma. Primeiro, o problema da inequivalência para duas fórmulas booleanas é solúvel em NP, e conseqüentemente o problema da equivalência está em coNP porque uma máquina não-determinística pode adivinhar a atribuição sobre a qual as duas fórmulas têm valores diferentes. Então, a máquina oráculo não-determinística para *FORMULA-NAOMIN* não-deterministicamente adivinha a menor fórmula equivalente, testa se ela realmente é equivalente, usando o oráculo *SAT*, e aceita se ela o é. ■

LIMITES DO MÉTODO DA DIAGONALIZAÇÃO

O próximo teorema exibe oráculos A e B para os quais P^A e NP^A são demonstravelmente diferentes e P^B e NP^B são demonstravelmente iguais. Esses dois oráculos são importantes porque sua existência indica que é improvável que resolvamos a questão P versus NP usando o método da diagonalização.

No seu núcleo, o método da diagonalização é uma simulação de uma máquina de Turing por outra. A simulação é feita de modo que a máquina que simula pode determinar o comportamento da outra máquina e então se comportar diferentemente. Suponha que a ambas essas máquinas de Turing fossem dados oráculos idênticos. Então, sempre que a máquina simulada consulta o oráculo, assim pode fazer o simulador, e portanto a simulação pode proceder como antes. Conseqüentemente, qualquer teorema provado sobre máquinas de Turing utilizando somente o método da diagonalização ainda se verificaria se a ambas as máquinas fossem dados o mesmo oráculo.

Em particular, se pudéssemos provar que P e NP fossem diferentes diagonalizando, poderíamos concluir que elas são diferentes relativo a qualquer oráculo também. Mas P^B e NP^B são iguais, portanto essa conclusão é falsa. Logo, diagonalização não é suficiente para separar essas duas classes. Similarmente, nenhuma prova que se baseia em uma simples simulação poderia mostrar que as duas classes são a mesma porque isso mostraria que elas são a mesma relativo a qualquer oráculo, mas na verdade P^A e NP^A são diferentes.

TEOREMA 9.20

1. Um oráculo A existe por meio do qual $\mathrm{P}^A \neq \mathrm{NP}^A$.
2. Um oráculo B existe por meio do qual $\mathrm{P}^B = \mathrm{NP}^B$.

IDÉIA DA PROVA Exibir um oráculo B é fácil. Seja B qualquer problema PSPACE-completo tal como *TQBF*.

Exibimos o oráculo A por construção. Desenhamos A de modo que uma certa linguagem L_A em NP^A demonstravelmente requer busca por força-bruta, e portanto L_A não pode estar P^A. Logo, podemos concluir que $\mathrm{P}^A \neq \mathrm{NP}^A$. A construção considera toda máquina oráculo de tempo polinomial por vez e garante que cada uma falha em decidir a linguagem L_A.

PROVA Seja B o *TQBF*. Temos a série de inclusões

$$\mathrm{NP}^{TQBF} \overset{1}{\subseteq} \mathrm{NPSPACE} \overset{2}{\subseteq} \mathrm{PSPACE} \overset{3}{\subseteq} \mathrm{P}^{TQBF}.$$

A inclusão 1 se verifica porque podemos convert a MT oráculo não-determinística de tempo polinomial para uma máquina não-determinística de espaço polinomial que computa as respostas a consultas a respeito de *TQBF* ao invés de usar o oráculo. A Inclusão 2 segue do teorema de Savitch. A Inclusão 3 se verifica porque *TQBF* é PSPACE-completa. Logo, concluímos que $\mathrm{P}^{TQBF} = \mathrm{NP}^{TQBF}$.

A seguir, mostramos como construir o oráculo A. Para qualquer oráculo A,

seja L_A a coleção de todas as cadeias para as quais uma cadeia de igual comprimento aparece em A. Conseqüentemente

$$L_A = \{w | \exists x \in A\ [\,|x| = |w|\,]\}.$$

Obviamente, para qualquer A, a linguagem L_A está em NP^A.

Para mostrar que L_A não está em P^A, desenhamos A da seguinte forma. Seja M_1, M_2, ... uma lista de todas as MTs oráculo de tempo polinomial. Podemos assumir por simplicidade que M_i roda em tempo n^i. A construção procede em estágios, onde o estágio i constrói uma parte de A, o que garante que M_i^A não decide L_A. Construímos A declarando que certas cadeias estão em A e outras não estão em A. Cada estágio determina o status de apenas um número finito de cadeias. Inicialmente, não temos nenhuma informação sobre A. Começamos com o estágio 1.

Estágio *i*. Até agora, um número finito de cadeias têm sido declaradas como estando dentro ou fora de A. Escolhemos n maior que o comprimento de qualquer dessas cadeias e suficientemente grande que 2^n é maior que n^i, o tempo de execução de M_i. Mostramos como estender nossa informação sobre A de modo que M_i^A aceita $\mathtt{1}^n$ sempre que essa cadeia não está em L_A.

Rodamos M_i sobre a entrada $\mathtt{1}^n$ e respondemos a suas consultas ao oráculo da seguinte forma. Se M_i consulta uma cadeia y cujo status já foi determinado, respondemos consistentemente. Se o status de y é indeterminado, respondemos NÃO à consulta e declaramos y como estando fora A. Continuamos a simulação de M_i até que ela pára.

Considere a situação da perspectiva de M_i. Se ela encontra uma cadeia de comprimento n em A, ela deve aceitar porque ela sabe que $\mathtt{1}^n$ está em L_A. Se M_i determina que todas as cadeias de comprimento n não estão em A, ela deve rejeitar porque ela sabe que $\mathtt{1}^n$ não está em L_A. Entretanto, ele não tem tempo suficiente para perguntar sobre todas as cadeias de comprimento n, e respondemos NÃO para cada uma das consultas que ela fez. Logo, quando M_i pára e tem que decidir se aceita ou rejeita, ela não tem informação suficiente para estar seguro de que sua decisão é correta.

Nosso objetivo é garantir que sua decisão *não* é correta. Fazemos isso observando sua decisão e então estendendo A de modo que o reverso é verdadeiro. Especificamente, se M_i aceita $\mathtt{1}^n$, declare todas as cadeias remanescentes de comprimento n como estando fora de A e dessa forma determine que $\mathtt{1}^n$ não está em L_A. Se M_i rejeita $\mathtt{1}^n$, encontramos uma cadeia de comprimento n que M_i não consultou e declaramos essa cadeia como estando em A para garantir que $\mathtt{1}^n$ está em L_A. Tal cadeia tem que existir porque M_i roda por n^i passos, que é menos que 2^n, o número total de cadeias de comprimento n. Em qualquer caso, asseguramos que M_i^A não decide L_A. O estágio i é completado e procedemos com o estágio $i + 1$.

Após concluir todos os estágios, completamos a construção de A arbitrariamente declarando que qualquer cadeia cujo status permanece indeterminado

por todos os estágios está fora de A. Nenhuma MT oráculo de tempo polinomial decide L_A com o oráculo A, provando o teorema.

Em resumo, o método da relativização nos diz que para resolver a questão P versus NP temos que *analisar* computações, não apenas simulá-las. Na Seção 9.3, introduzimos uma abordagem que pode levar a tal análise.

9.3 COMPLEXIDADE DE CIRCUITOS

Computadores são construídos de dispositivos eletrônicos interligados em um desenho denominado um *circuito digital*. Podemos também modelos teóreticos, tais como máquinas de Turing, com a contrapartida teóretica para circuitos digitais, chamados *circuitos booleanos*. Dois propósitos são servidos ao se estabelecer a conexão entre MTs e circuitos booleanos. Primeiro, pesquisadores acreditam que circuitos provêem um modelo computacional conveniente para se atacar a questão P versus NP e questões relacionadas. Segundo, circuitos provêem uma prova alternativa do teorema de Cook–Levin de que *SAT* é NP-completo. Cobrimos ambos os tópicos nesta seção.

DEFINIÇÃO 9.21

Um ***circuito booleano*** é uma coleção de ***portas*** e ***entradas*** conectadas por ***fios***. Ciclos não são permitidos. Portas tomam três formas: portas E, portas OU e portas NÃO, como mostrado esquematicamente na figura abaixo.

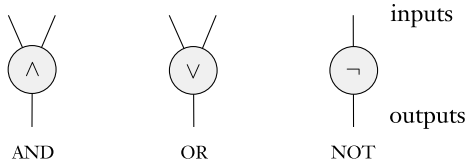


FIGURA 9.22
Uma porta E, uma porta OU e uma porta NÃO

Os fios em um circuito booleano carregam os valores booleanos 0 e 1. As portas são processadores simples que computam as funções booleanas E, OU e NÃO. A função E dá como saída 1 se ambas as suas entradas são 1 e dá como

saída 0 caso contrário. A função OU dá como saída 0 se ambas as suaas entradas são 0 e dá como saída 1 caso contrário. A função NÃO dá como saída o oposto de sua entrada; em outras palavras, ela dá como saída um 1 se sua entrada é 0 e um 0 se sua entrada é 1. As entradas são rotuladas $x_1, \ldots, x_n$. Uma das portas é designada a ***porta de saída***. A figura a seguir mostra um circuito booleano.

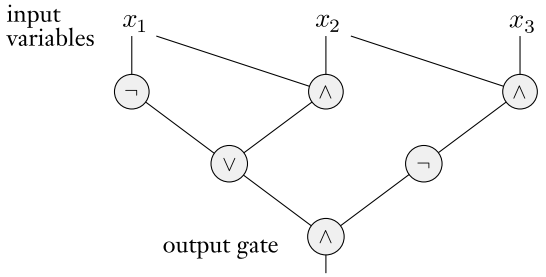


FIGURA 9.23
Um exemplo de um circuito booleano

Um circuito booleano computa um valor de saída de uma valoração das entradas propagando valores ao longo dos fios e computando a função associada com as respectivas portas até que a porta de saída é assinalada um valor. A figura a seguir mostra um circuito booleano que computa um valor de uma atribuição de valores a suas entradas.

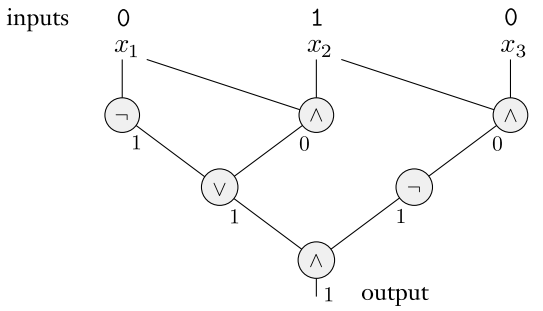


FIGURA 9.24
Um exemplo da computação de um circuito booleano

Usamos funções para descrever o comportamento de entrada/saída de circuitos booleanos. A um circuito booleano C com n variáveis de entrada, associamos uma função $f_C\colon \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$, onde se C dá como saída b quando suas entradas $x_1, \ldots, x_n$ são valoradas em $a_1, \ldots, a_n$, escrevemos $f_C(a_1, \ldots, a_n) = b$. Dizemos que C computa a função f_C. Às vezes consideramos circuitos booleanos que têm múltiplas portas de saída. Uma função com k bits de saída computa uma função cujo contradomínio é $\{0,1\}^k$.

EXEMPLO 9.25

A ***função paridade*** de n-entradas $paridade_n$: $\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ dá como saída 1 se um número ímpar de 1s aparecem nas variáveis de entrada. O circuito na Figura 9.26 computa $paridade_4$, a função paridade sobre 4 variáveis.

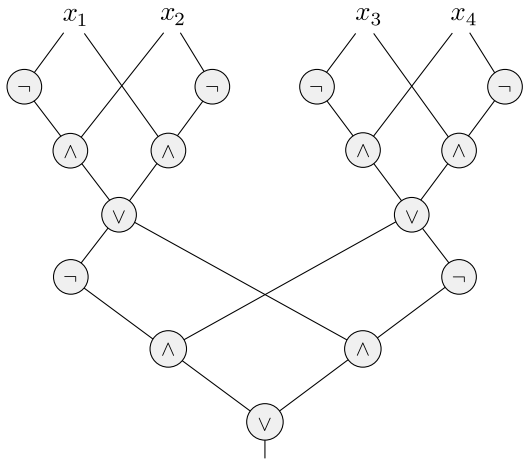


FIGURA 9.26
Um circuito booleano que computa a função paridade sobre quatro variáveis

Planejamos utilizar circuitos para testar pertinência em linguagens, uma vez que elas tenham sido adequadamente codificadas em $\{0,1\}$. Um problema que ocorre é que qualquer circuito específico pode lidar somente com entradas de algum comprimento fixo, enquanto que uma linguagem pode conter cadeias de comprimentos diferentes. Assim, ao invés de usar um único circuito para testar pertinência em uma linguagem, utilizamos uma ***família*** inteira de circuitos, um para cada comprimento da entrada, para realizar essa tarefa. Formalizamos essa noção na definição a seguir.

DEFINIÇÃO 9.27

Uma ***família de circuitos*** C é uma lista infinita de circuitos, $(C_0, C_1, C_2, \dots)$, onde C_n tem n variáveis de entrada. Dizemos que C decide uma linguagem A sobre $\{0,1\}$ se, para toda cadeia w,

$$w \in A \quad \text{sse} \quad C_n(w) = 1,$$

onde n é o comprimento de w.

O ***tamanho*** de um circuito é o número de portas que ele contém. Dois circuitos são equivalentes se eles têm as mesmas variáveis de entrada e dão como

saída o mesmo valor sobre toda atribuição de entrada. Um circuito é ***mínimo em tamanho*** se nenhum circuito menor lhe é equivalente. O problema de se minimizar circuitos tem aplicações óbvias em engenharia mas é muito difícil resolver em geral. Até mesmo testar se um circuito específico é mínimo não parece ser solúvel em P ou em NP. Uma família de circuitos para uma linguagem é mínima se todo C_i na lista é um circuito mínimo. A ***complexidade de tamanho*** de uma família de circuitos $(C_0, C_1, C_2, \dots)$ é a função $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$, onde $f(n)$ é o tamanho de C_n.

A ***profundidade*** de um circuito é o comprimento (número de fios) do maior caminho de uma variável de entrada para a porta de saída. Definimos circuitos e famílias de circuitos ***mínimos em profundidade***, e a ***complexidade de profundidade*** de famílias de circuitos, como o fizemos com tamanho de circuitos. Complexidade de profundidade de circuito é de particular interesse na Seção 10.5 concernente a computação paralela.

DEFINIÇÃO 9.28

A ***complexidade de tamanho de circuito*** de uma linguagem é a complexidade de tamanho de uma família de circuitos mínima para aquela linguagem. A ***complexidade de profundidade de circuito*** de uma linguagem é definida similarmente, usando profundidade ao invés de tamanho.

EXEMPLO 9.29

Podemos facilmente generalizar o Exemplo 9.25 para dar circuitos que computam a função paridade sobre n variáveis com $O(n)$ portas. Uma maneira de fazer isso é construir uma árvore binária de portas que compute a função XOR, onde a função XOR é a mesma que a função 2-*paridade*, e então implementar cada porta XOR com 2 NÃOs, 2 Es e 1 OU, como o fizemos naquele exemplo anterior.

Seja A a linguagem de cadeias que contêm um número ímpar de 1s. Então A tem complexidade de circuito $O(n)$. ∎

A complexidade de circuito de uma linguagem está relacionada a sua complexidade de tempo. Qualquer linguagem com pequena complexidade de tempo também tem pequena complexidade de circuito, como mostra o teorema a seguir.

TEOREMA 9.30

Seja $t: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ uma função, onde $t(n) \geq n$. Se $A \in \text{TIME}(t(n))$, então A tem complexidade de circuito $O(t^2(n))$.

Esse teorema dá uma abordagem para provar que P $\neq$ NP por meio da qual tentamos mostrar que alguma linguagem em NP tem complexidade de circuito mais que polinomial.

IDÉIA DA PROVA Seja M uma MT que decide A em tempo $t(n)$. (Por simplicidade, ignoramos o fator constante em $O(t(n))$, o real tempo de execução de M.) Para cada n construímos um circuito C_n que simula M sobre entradas de comprimento n. As portas de C_n são organizadas em linhas, uma para cada um dos $t(n)$ passos na computação de M sobre uma entrada de comprimento n. Cada linha de portas representa a configuração de M no passo correspondente. Cada linha é ligada à linha anterior de modo que ela possa calcular sua configuração a partir da configuração da linha anterior. Modificamos M de modo que a entrada seja codificada em $\{0,1\}$. Além disso, quando M está prestes a aceitar, ela move sua cabeça sobre a célula de fita mais à esquerda e escreve o símbolo $\sqcup$ sobre aquela célula antes de entrar no estado de aceitação. Dessa maneira podemos designar uma porta na linha final do circuito como sendo a porta de saída.

PROVA Suponha que $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{aceita}}, q_{\text{rejeita}})$ decide A em tempo $t(n)$ e assuma que w seja uma entrada de comprimento n para M. Defina um ***tableau*** para M sobre w como sendo uma tabela $t(n) \times t(n)$ cujas linhas são configurações de M. A primeira linha do tableau contém a configuração inicial de M sobre w. A i-ésima linha contém a configuração no i-ésimo passo da computação.

Por conveniência, modificamos o formato de representação para configurações nesta prova. Ao invés do formato antigo, descrito na página 149, onde o estado aparece à esquerda do símbolo que a cabeça está lendo, representamos ambos o estado e o símbolo de fita sob a cabeça da fita por um único caracter composto. Por exemplo, se M está no estado q e sua fita contém a cadeia 1011 com a cabeça lendo o segundo símbolo a partir da esquerda, o formato antigo seria $1q011$ e o formato novo seria $1\boxed{q0}11$, onde o caracter composto $\boxed{q0}$ representa tanto q quanto o state e 0, o símbolo sob a cabeça.

Cada entrada do tableau pode conter um símbolo de fita (membro de Γ) ou uma combinação de um estado e um símbolo de fita (membro de $Q \times \Gamma$). A entrada na i-ésima linha e j-ésima coluna do tableau é $cell[i,j]$. A primeira linha do tableau então é $cell[1,1], \ldots, cell[1,t(n)]$ e contém a configuração inicial.

Fazemos duas suposições sobre a MT M ao definir a noção de um tableau. Primeiro, como mencionamos na idéia da prova, M aceita somente quando sua cabeça está sobre a célula de fita mais à esquerda e essa célula contém o símbolo $\sqcup$. Segundo, uma vez que M tenha parado ela permanece na mesma configuração para todos os passos num tempo futuro. Assim, olhando para a célula mais à esquerda na linha final do tableau, $cell[t(n),1]$, podemos determinar se M aceitou. A figura a seguir mostra parte de um tableau para M sobre a entrada 0010.

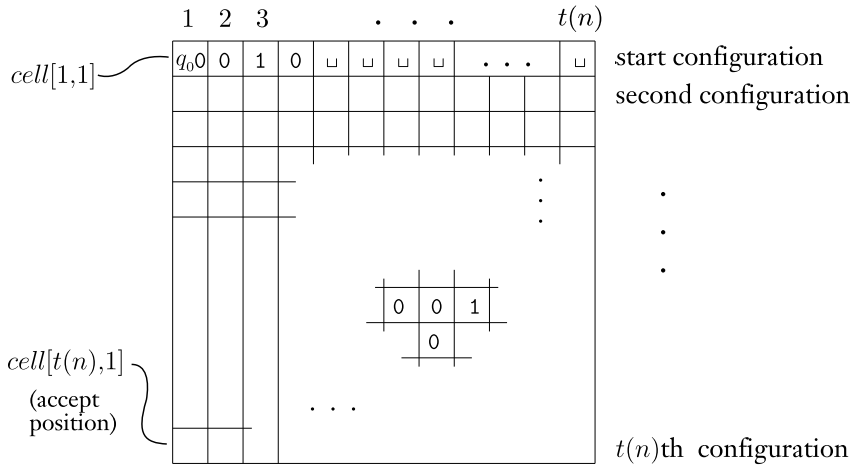
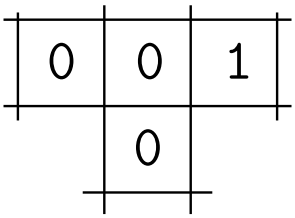


FIGURA 9.31
Um tableau para M sobre a entrada 0010

O conteúdo de cada célula é determinado por certas células na linha precedente. Se conhecemos os valores em $cell[i-1, j-1]$, $cell[i-1, j]$, e $cell[i-1, j+1]$, podemos obter o valor em $cell[i, j]$ com a função de transição de M. Por exemplo, a figura a seguir amplia uma porção do tableau na Figura 9.31. Os três símbolos no topo, 0, 0 e 1, são símbolos de fita sem estados, portanto o símbolo do meio tem que permanecer um 0 na linha seguinte, como mostrado.



Agora podemos começar a construir o circuito C_n. Ele tem várias portas para cada célula no tableau. Essas portas computam o valor em uma célula a partir dos valores das três células que a afetam.

Para tornar a construção mais fácil de descrever, adicionamos luzes que mostram a saída de algumas das portas no circuito. As luzes são para propósitos ilustrativos apenas e não afetam a operação do circuito.

Seja k o número de elementos em $\Gamma \cup (\Gamma \times Q)$. Criamos k luzes para cada célula no tableau, uma luz para cada membro de Γ e uma luz para cada membro de $(\Gamma \times Q)$, ou um total de $kt^2(n)$ luzes. Chamamos essas luzes $light[i, j, s]$, onde

$1 \leq i, j \leq t(n)$ e $s \in \Gamma \cup (\Gamma \times Q)$. A condição das luzes em uma célula indica o conteúdo daquela célula. Se $light[i, j, s]$ está acesa, a $cell[i, j]$ contém o símbolo s. É claro que se o circuito é construído apropriadamente, somente uma luz estaria acesa por célula.

Vamos pegar uma das luzes—digamos, $light[i, j, s]$ em $cell[i, j]$. Aquela luz deveria estar acesa se essa célula contém o símbolo s. Consideramos as três células que podem afetar $cell[i, j]$ e determinar quais de suas valorações fazem a $cell[i, j]$ conter s. Essa determinação pode ser feita examinando a função de transição δ.

Suponha que, se as células $cell[i-1, j-1]$, $cell[i-1, j]$, e $cell[i-1, j+1]$ contêm a, b, e c, respectivamente, $cell[i, j]$ contém s, de acordo com δ. Ligamos o circuito de modo que, se $light[i-1, j-1, a]$, $light[i-1, j, b]$, e $light[i-1, j+1, c]$ estão acessas, então $light[i, j, s]$ também está. Fazemos isso conectando as três luzes no nível $i-1$ a uma porta E cuja saída é conectada a $light[i, j, s]$.

Em geral, diversas valorações diferentes (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), ..., (a_l, b_l, c_l) of $cell[i-1, j-1]$, $cell[i-1, j]$, and $cell[i-1, j+1]$ podem fazer $cell[i, j]$ conter s. Nesse caso ligamos o circuito de modo que para cada valoração a_i, b_i, c_i as respectivas luzes são conectadas a uma porta E, e todas as portas E são conectadas com uma porta OU. Essa circuitaria é ilustrada na figura a seguir.

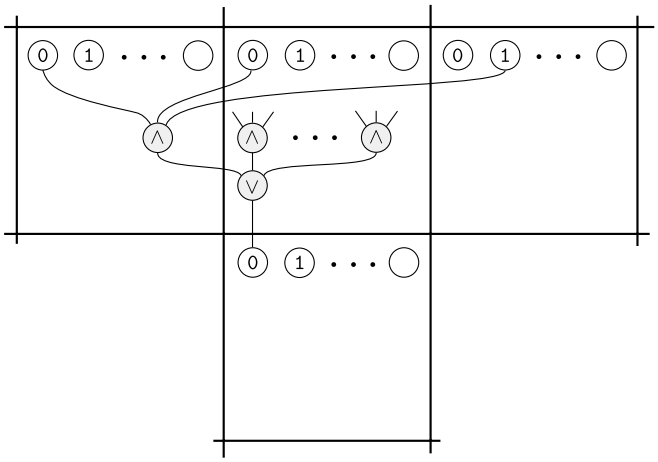


FIGURA 9.32
Circuitaria para uma luz

A circuitaria que acaba de ser descrita é repetida para cada luz, com umas poucas exceções nas fronteiras. Cada célula na fronteira esquerda do tableau, ou seja, $cell[i, 1]$ para $1 \leq i \leq t(n)$, tem somente duas células precedentes que afetam seu conteúdo. As células na fronteira direita são similares. In these cases, we modify the circuitry para simular o comportamento de MT M nessa situação.

As células na primeira linha não têm predecessores e são manuseadas de uma maneira especial. Essas células contêm a configuração inicial, e duas luzes são ligadas a variáveis de entrada. Conseqëntemente $light[1, 1, \boxed{q_0 1}]$ é conectada à entrada w_1 porque a configuração inicial começa com o símbolo de estado inicial q_0 e a cabeça começa sobre w_1. Similarmente, $light[1, 1, \boxed{q_0 0}]$ é conectada por meio de uma porta NÃO à entrada w_1. Além disso, $light[1, 2, 1], \ldots, light[1, n, 1]$ são conectadas às entradas $w_2, \ldots, w_n$, e $light[1, 2, 0], \ldots, light[1, n, 0]$ são conectadas por meio de portas NÃO às entradas $w_2, \ldots, w_n$ porque a cadeia de entrada w determine esses valores. Adicionalmente, $light[1, n+1, \sqcup], \ldots, light[1, t(n), \sqcup]$ estão acesas porque as células remanescentes na primeira linha correspondem a posições sobre a fita que inicialmente estão em branco ($\sqcup$). Finalmente, todas as outras luzes na primeira fnha são apagadas.

Até agora, construímos um circuito que simula M até seu $t(n)$-ésimo passo. Tudo o que resta a ser feito é assinalar uma das portas para ser a porta de saída do circuito. Sabemos que M aceita w se ela está em um estado de aceitação aq_{aceita} sobre uma célula contendo $\sqcup$ na extremidade esquerda da fita no passo $t(n)$. Portanto designamos a porta de saída como sendo aquela ligada a $light[t(n), 1, \boxed{q_{\text{aceita}} 0}]$. Isso completa a prova do teorema.

Além de ligar complexidade de circuito com complexidade de tempo, o Teorema 9.30 dá origem a uma prova alternativa do Teorema 7.27, o teorema de Cook–Levin, da seguinte forma. Dizemos que um circuito booleano é ***satisfatível*** se alguma valoração das entradas faz o circuito dar como saída 1. O problema da ***circuito-satisfatibilidade*** testa se um circuito é satisfatível. Seja

$$\textit{CIRCUIT-SAT} = \{\langle C \rangle | \ C \text{ é um circuito booleano}\}.$$

O Teorema 9.30 mostra que circuitos booleanos são capazes de simular máquinas de Turing. Usamos esse resultado para mostrar que *CIRCUIT-SAT* é NP-completo.

TEOREMA 9.33

CIRCUIT-SAT é NP-completo.

PROVA Para provar esse teorema, temos que mostrar que *CIRCUIT-SAT* está em NP e que qualquer linguagem A em NP é redutível a *CIRCUIT-SAT*. A primeira é óbvia. Para fazer a segunda temos que dar uma redução em tempo polinomial f que mapeia cadeias a circuitos, onde

$$f(w) = \langle C \rangle$$

implica que

$$w \in A \iff \text{O circuito booleano } C \text{ é satisfatível.}$$

Devido ao fato de que A está em NP, ela tem um verificador de tempo polinomial V cuja entrada tem a forma $\langle x, c \rangle$, onde c pode ser o certificado mostrando que x está em A. Para construir f, obtemos o circuito que simula V usando o método no Teorema 9.30. Alimentamos as entradas para o circuito que correspondem a x com os símbolos de w. As únicas entradas remanescentes para o circuito correspondem ao certificado c. Chamamos esse circuito C e o damos como saída.

Se C é satisfatível, um certificado existe, portanto w está em A. Reciprocamente, se w está em A, um certificado existe, portanto C é satisfatível.

Para mostrar que essa redução roda em tempo polinomial, observamos que na prova do Teorema 9.30, a construção do circuito pode ser feita em tempo que é polinomial em n. O tempo de execução do verificador é n^k para algum k, portanto o tamanho do circuito construído é $O(n^{2k})$. A estrutura do circuito é bastante simples (na verdade ela é altamente repetitiva), portanto o tempo de execução da redução é $O(n^{2k})$.

Agora mostramos que *3SAT* é NP-completo, completando a prova alternativa do teorema de Cook–Levin.

TEOREMA 9.34

3SAT é NP-completo.

IDÉIA DA PROVA *3SAT* está obviamente em NP. Mostramos que todas as linguagens em NP reduzem para *3SAT* em tempo polinomial. Fazemos isso reduzindo *CIRCUIT-SAT* para *3SAT* em tempo polinomial. A redução converte um circuito C para uma fórmula ϕ, na qual C é satisfatível sse ϕ é satisfatível. A fórmula contém uma variável para cada variável e cada porta no circuito.

Conceitualmente, a fórmula simula o circuito. Uma atribuição que satisfaz para ϕ contém uma atribuição que satisfaz para C. Ela também contém os valores em cada uma das portas de C na computação de C sobre sua atribuição que o satisfaz. Com efeito, a atribuição que satisfaz ϕ "adivinha" a computação de C inteira sobre sua atribuição que satisfaz, e as cláusulas de ϕ verificam a corretude dessa computação. Adicionalmente, ϕ contém uma cláusula estipulando que a saída de C é 1.

PROVA Damos uma redução em tempo polinomial f de *CIRCUIT-SAT* para *3SAT*. Seja C be um circuito contendo as entradas inputs $x_1, \ldots, x_l$ e as portas

$g_1, \ldots, g_m$. A redução constrói a partir de C uma fórmula ϕ com as variáveis $x_1, \ldots, x_l, g_1, \ldots, g_m$. Cada uma das variáveis de ϕ corresponde a um fio em C. As variáveis x_i correspondm aos fios de entrada e as variáveis g_i correspondem aos fios nas saídas das portas. Re-rotulamos as variáveis de ϕ como $w_1, \ldots, w_{l+m}$.

Agora descrevemos as cláusulas de ϕ. Escrevemos as cláusulas de ϕ mais intuitivamente usando implicações. Lembre-se que podemos converter a operação da implicação $(P \rightarrow Q)$ para a cláusula $(\overline{P} \vee Q)$. Cada porta NÃO em C com fio de entrada w_i e fio de saída w_j é equivalente à expressão

$$(\overline{w_i} \rightarrow w_j) \wedge (w_i \rightarrow \overline{w_j}),$$

que por sua vez dá origem às duas cláusulas

$$(w_i \vee w_j) \wedge (\overline{w_i} \vee \overline{w_j}).$$

Observe que ambas as cláusulas são satisfeitas sse uma atribuição é feita às variáveis w_i e w_j correspondendo ao funcionamento correto da porta NÃO.

Cada porta E em C com as entradas inputs w_i e w_j e saída w_k é equivalente a

$$((\overline{w_i} \wedge \overline{w_j}) \rightarrow \overline{w_k}) \wedge ((\overline{w_i} \wedge w_j) \rightarrow \overline{w_k}) \wedge ((w_i \wedge \overline{w_j}) \rightarrow \overline{w_k}) \wedge ((w_i \wedge w_j) \rightarrow w_k),$$

que por sua vez dá origem às quatro cláusulas

$$(w_i \vee w_j \vee \overline{w_k}) \wedge (w_i \vee \overline{w_j} \vee \overline{w_k}) \wedge (\overline{w_i} \vee w_j \vee \overline{w_k}) \wedge (\overline{w_i} \vee \overline{w_j} \vee w_k).$$

Similarmente, cada porta OU em C com as entradas w_i e w_j e a saída w_k equivalente a

$$((\overline{w_i} \wedge \overline{w_j}) \rightarrow \overline{w_k}) \wedge ((\overline{w_i} \wedge w_j) \rightarrow w_k) \wedge ((w_i \wedge \overline{w_j}) \rightarrow w_k) \wedge ((w_i \wedge w_j) \rightarrow w_k),$$

que por sua vez dá origem às quatro cláusulas

$$(w_i \vee w_j \vee \overline{w_k}) \wedge (w_i \vee \overline{w_j} \vee w_k) \wedge (\overline{w_i} \vee w_j \vee w_k) \wedge (\overline{w_i} \vee \overline{w_j} \vee w_k).$$

Em cada caso todas as quatro cláusulas são satisfeitas quando uma atribuição é feita às variáveis w_i, w_j, e w_k, correspondendo ao funcionamento correto da porta. Adicionalmente, acrescentamos a cláusula (w_m) a ϕ, onde w_m é a porta de saída de C.

Algumas das cláusulas descritas contêm menos que três literais. Podemos facilmente expandí-las para o tamanho desejado repetindo literais. Conseqüentemente a cláusula (w_m) é expandida para a cláusula equivalente $(w_m \vee w_m \vee w_m)$, o que completa a construção.

Argumentamos brevemente que a construção funciona. Se uma atribuição satisfazendo C existe, obtemos uma atribuição satisfazendo ϕ atribuindo valores às variáveis g_i conforme a computação de C nessa atribuição. Reciprocamente, se uma atribuição satisfazendo ϕ existe, ela dá uma atribuição para C porque ela descreve a computação de C inteira onde o valor de saída é 1. A redução pode ser feita em tempo polinomial porque ela é simples de computar e o tamanho da saída é polinomial (na verdade, linear) no tamanho da entrada.

EXERCÍCIOS

[R]**9.1** Prove que $\mathrm{TIME}(2^n) = \mathrm{TIME}(2^{n+1})$.

[R]**9.2** Prove que $\mathrm{TIME}(2^n) \subsetneq \mathrm{TIME}(2^{2n})$.

[R]**9.3** Prove que $\mathrm{NTIME}(n) \subsetneq \mathrm{PSPACE}$.

9.4 Mostre como o circuito exibido na Figura 9.26 computa sobre a entrada `0110` mostrando os valores computados por todas as portas, como o fizemos na Figura 9.24.

9.5 Dê um circuito que computa a função paridade sobre três variáveis de entrada e mostre como ela computa sobre a entrada `011`.

9.6 Prove que se $A \in \mathrm{P}$ então $\mathrm{P}^A = \mathrm{P}$.

9.7 Dê expressões regulares com exponenciação que geram as seguintes linguagens sobre o alfabeto $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$.

- [R]**a.** Todas as cadeias de comprimento 500
- [R]**b.** Todas as cadeias de compritmento 500 ou menos
- [R]**c.** Todas as cadeias de comprimento 500 ou mais
- [R]**d.** Todas as cadeias de comprimento diferente de 500
- **e.** Todas as cadeias que contêm exatamente 500 `1`s
- **f.** Todas as cadeias que contêm pelo menos 500 `1`s
- **g.** Todas as cadeias que contêm no máximo 500 `1`s
- **h.** Todas as cadeias de comprimento 500 ou mais que contêm um `0` na 500-ésima posição
- **i.** Todas as cadeias que contêm dois `0`s que têm pelo menos 500 símbolos entre eles

9.8 Se R é uma expressão regular, suponha que $R^{\{m,n\}}$ represente a expressão

$$R^m \cup R^{m+1} \cup \cdots \cup R^n.$$

Mostre como implementar o operador $R^{\{m,n\}}$, usando o operador de exponenciação ordinário, mas sem "$\cdots$".

9.9 Mostre que se $\mathrm{NP} = \mathrm{P}^{SAT}$, então $\mathrm{NP} = \mathrm{coNP}$.

9.10 O Problema 8.13 mostrou que A_{LBA} é PSPACE-complete.

- **a.** Sabemos se $A_{\mathsf{LBA}} \in \mathrm{NL}$? Explique sua resposta.
- **b.** Do we know whether $A_{\mathsf{LBA}} \in \mathrm{P}$? Explain your answer.

9.11 Mostre que a linguagem *MAX-CLIQUE* do Problema 7.46 está em P^{SAT}.

PROBLEMAS

9.12 Descreva o erro na seguinte "prova" falaciosa de que P≠NP. Assuma que P=NP e obtenha uma contradição. Se P=NP, então $SAT \in$ P e portanto para algum k, $SAT \in \text{TIME}(n^k)$. Devido ao fato de que toda linguagem em NP é redutível em tempo polinomial a *SAT*, você tem NP $\subseteq$ TIME(n^k). Por conseguinte, P $\subseteq$ TIME(n^k). Mas, pelo teorema da hiearquia de tempo, TIME(n^{k+1}) conté uma linguagem que não está em TIME(n^k), o que contradiz P $\subseteq$ TIME(n^k). Conseqüentemente P $\neq$ NP.

9.13 Considere a função $pad: \Sigma^* \times \mathcal{N} \longrightarrow \Sigma^*\#^*$ que é definida da seguinte forma. Seja $pad(s, l) = s\#^j$, onde $j = \max(0, l - m)$ e m é o comprimento de s. Portanto $pad(s, l)$ simplesmente adiciona um número suficiente de cópias do novo símbolo # ao final de s de modo que o comprimento do resultado é no mínimo l. Para qualquer linguagem A e função $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ defina a linguagem $pad(A, f(m))$ como

$$pad(A, f(m)) = \{pad(s, f(m)) | \text{ onde } s \in A \text{ e } m \text{ é o comprimento de } s\}.$$

Prove que, se $A \in \text{TIME}(n^6)$, então $pad(A, n^2) \in \text{TIME}(n^3)$.

9.14 Prove que, se NEXPTIME $\neq$ EXPTIME, então P $\neq$ NP. Você pode achar que a função pad, definida no Problema 9.13, é de utilidade.

R**9.15** Defina pad como no Problema 9.13.

a. Prove que, para toda A e todo número natural k, $A \in$ P sse $pad(A, n^k) \in$ P.

b. Prove que P $\neq$ SPACE(n).

9.16 Prove que $TQBF \notin \text{SPACE}(n^{1/3})$

*__9.17__ Leia a definição de um 2AFD (autômato finito de duas-cabeças) dada no Problema 5.26. Prove que P conté uma linguagem que não é reconhecível por um 2AFD.

9.18 Seja $E_{\text{REG}\uparrow} = \{\langle R \rangle | \ R \text{ é uma expressão regular com exponenciação e } L(R) = \emptyset\}$. Mostre que $E_{\text{REG}\uparrow} \in$ P.

9.19 Defina o problema ***unique-sat*** como sendo

$USAT = \{\langle \phi \rangle | \ \phi \text{ é uma fórmula booleana que tem uma única atribuição que satisfaz}\}$.

Mostre que $USAT \in \text{P}^{SAT}$.

9.20 Prove que um oráculo C existe para o qual $\text{NP}^C \neq \text{coNP}^C$.

9.21 Uma ***máquina de Turing oráculo de k-consultas*** é uma máquina de Turing oráculo que é permitida fazer no máximo k consultas sobre cada entrada. Uma MT de k-oráculos M com um oráculo para A é escrita $M^{A,k}$ e $\text{P}^{A,k}$ é a coleção de linguagens que são decidíveis por MTs de k-oráculos de tempo polinomial com um oráculo para A.

a. Mostre que NP $\cup$ coNP $\subseteq \text{P}^{SAT,1}$.

b. Assuma que NP $\neq$ coNP. Mostre que $P \cup \text{coNP} \subsetneq \text{P}^{SAT,1}$.

9.22 Suponha que A e B sejam dois oráculos. Um deles é um oráculo para *TQBF*, mas você não sabe qual. Dê um algoritmo que tem acesso a ambos A e B e que é garantido resolver *TQBF* em tempo polinomial.

9.23 Defina a função $paridade_n$ como no Examplo 9.25. Mostre que $paridade_n$ pode ser computada com circuitos de tamanho $O(n)$.

9.24 Lembre-se que você pode considerar circuitos que dão como saída cadeias sobre $\{0,1\}$ designando diversas portas de saída. Suponha que $add_n : \{0,1\}^{2n} \longrightarrow \{0,1\}^{n+1}$ tome a soma de dois inteiros binários de n bits e produz o resultado de $n+1$ bits. Mostre que você pode computar a função add_n com circuitos de tamanho $O(n)$.

9.25 Defina a função $majority_n : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ como

$$majority_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \sum x_i < n/2\,; \\ 1 & \sum x_i \geq n/2\,. \end{cases}$$

Conseqüentemente a função $maioria_n$ retorna o voto de maioria das entradas. Mostre que $maioria_n$ pode ser computada com

a. Circuitos de tamanho $O(n^2)$.

b. Circuitos de tamanho $O(n \log n)$. (Dica: Divida recursivamente o número de entradas pela metade e use o resultado do Problema 9.24.)

*__9.26__ Defina o problema $majority_n$ como no Problema 9.25. Mostre que ele pode ser computado com circuitos de tamanho $O(n)$.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

9.1 As classes de complexidade de tempo são definidas em termos da notação O-grande, portanto fatores constantes não têm efeito. A função 2^{n+1} é $O(2^n)$ e conseqüentemente $A \in \text{TIME}(2^n)$ sse $A \in \text{TIME}(2^{n+1})$.

9.2 A inclusão $\text{TIME}(2^n) \subseteq \text{TIME}(2^{2n})$ se verifica porque $2^n \leq 2^{2n}$. A inclusão é própria em virtude do teorema da hierarquia de tempo. A função 2^{2n} é tempo-construtível porque uma MT pode escrever o número 1 seguido por $2n$ 0s em tempo $O(2^{2n})$. Logo, o teorema garante que uma linguagem A existe que pode ser decidida em tempo $O(2^{2n})$ mas não em tempo $O(2^{2n}/\log 2^{2n}) = O(2^{2n}/2n)$. Conseqüentemente $A \in \text{TIME}(2^{2n})$ mas $A \notin \text{TIME}(2^n)$.

9.3 $\text{NTIME}(n) \subseteq \text{NSPACE}(n)$ porque qualquer máquina de Turing que opera em tempo $t(n)$ sobre todo ramo da computação pode usar no máximo $t(n)$ células de fita sobre todo ramo. Além disso, $\text{NSPACE}(n) \subseteq \text{SPACE}(n^2)$ devido ao teorema de Savitch. Entretanto, $\text{SPACE}(n^2) \subsetneq \text{SPACE}(n^3)$ devido ao teorema da hierarquia de espaço. O resultado segue porque $\text{SPACE}(n^3) \subseteq \text{PSPACE}$.

9.7 **(a)** Σ^{500}; **(b)** $(\Sigma \cup \varepsilon)^{500}$; **(c)** $\Sigma^{500}\Sigma^*$; **(d)** $(\Sigma \cup \varepsilon)^{499} \cup \Sigma^{501}\Sigma^*$.

9.15 **(a)** Seja A uma linguagem qualquer e $k \in \mathcal{N}$. Se $A \in \text{P}$, então $pad(A, n^k) \in \text{P}$ porque você pode determinar se $w \in pad(A, n^k)$ escrevendo w como $s\#^l$ onde s não contém o símbolo #, e aí então testando se $|w| = |s|^k$, e finalmente testando se $s \in A$. Implementar o primeiro teste em tempo polinomial é imediato. O segundo

teste roda em tempo $\text{poly}(|w|)$, e em razão de $|w|$ ser $\text{poly}(|s|)$, o teste roda em tempo $\text{poly}(|s|)$ e daí está em tempo polinomial. Se $pad(A, n^k) \in \text{P}$, então $A \in \text{P}$ porque você pode determinar se $w \in A$ preenchendo w com símbolos # até que ele tenha comprimento $|w|^k$ e aí então testando se o resultado está em $pad(A, n^k)$. Ambos esses testes requerem somente tempo polinomial.

(b) Assume that $\text{P} = \text{SPACE}(n)$. Seja A uma linguagem em $\text{SPACE}(n^2)$ mas não em $\text{SPACE}(n)$ como mostrado existir no teorema de hierarquia de espaço. A linguagem $pad(A, n^2) \in \text{SPACE}(n)$ porque você tem espaço suficiente para rodar o algoritmo de espaço $O(n^2)$ para A, usando espaço que é linear em a linguagem preenchida. Em razão da suposição, $pad(A, n^2) \in \text{P}$, logo, $A \in \text{P}$ pela parte (a), e portanto $A \in \text{SPACE}(n)$, devido à suposição uma vez mais. Mas isso é uma contradição.

10

TÓPICOS AVANÇADOS EM TEORIA DA COMPLEXIDADE

Neste capítulo, introduzimos brevemente alguns poucos tópicos adicionais em teoria da complexidade. Esse assunto é um campo ativo de pesquisa, e tem uma extensa literatura. Este capítulo é uma amostra de desenvolvimentos mais avançados, mas não é um apanhado compreensivo. Em particular, dois importantes tópicos, que estão além do escopo deste livro, são computação quântica e provas checáveis probabilisticamente. *The Handbook of Theoretical Computer Science* [74] apresenta um apanhado de trabalhos anteriores em teoria da complexidade.

Este capítulo contém seções em algoritmos de aproximação, algoritmos probabilísticos, sistemas de provas interativas, computação paralela e criptografia. Essas seções são independentes, exceto que algoritmos probabilísticos são utilizados nas seções sobre sistemas de provas interativas e criptografia.

10.1 ALGORITMOS DE APROXIMAÇÃO

Em certos problemas, chamados ***problemas de otimização***, buscamos a melhor solução entre uma coleção de possíveis soluções. Por exemplo, desejamos encontrar um clique de maior tamanho em um grafo, uma menor cobertura de

vértices, ou um menor caminho conectando dois nós. Quando um problema de otimização é NP-difícil, como é o caso dos primeiros dois desses tipos de problemas, nenhum algoritmo de tempo polinomial existe que encontre a melhor solução a menos que P = NP.

Na prática, podemos não precisar da solução absolutamente melhor ou ***ótima*** para um problema. Uma solução que é quase ótima pode ser suficientemente boa e pode ser mais fácil de encontrar. Como seu nome acarreta, um ***algoritmo de aproximação*** é desenhado para encontrar tais soluções aproximadamente ótimas.

Por exemplo, tome o problema da cobertura de vértices que introduzimos na Seção 7.5. Lá apresentamos o problema como a linguagem *VERTEX-COVER* representando um ***problema de decisão***—aquele que tem uma resposta sim/não. Na versão de otimização desse problema, chamada *MIN-VERTEX-COVER*, objetivamos produzir uma das menores coberturas de vértices entre todas as possíveis coberturas de vértices no grafo de entrada. O seguinte slgoritmo de tempo polinomial resolve aproximadamente esse problema de otimização. Ele produz uma cobertura de vértice que nunca é mais que duas vezes o tamanho de uma das menores coberturas de vértices.

A = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$, onde G é um grafo não-direcionado:

1. Repita o seguinte até que todas as arestas em G toquem uma aresta marcada:
2. Encontre uma aresta em G não tocada por nenhuma aresta marcada.
3. Marque essa aresta.
4. Dê como saída todos os nós que são extremidades de arestas marcadas."

TEOREMA 10.1

A é um algoritmo de tempo polinomial que produz uma cobertura de vértices de G que é não mais que duas vezes tão grande quanto uma menor cobertura de vértices.

PROVA A obviamente roda em tempo polinomial. Seja X o conjunto de nós que ele dá como saída. Seja H o conjunto de arestas que ele marca. Sabemos que X é uma cobertura de vértices porque H contém ou toca toda aresta em G, e portanto X toca todas as arestas em G.

Para provar que X é no máximo duas vezes tão grande quanto uma menor cobertura de vértices Y estabelecemos dois fatos: X é duas vezes tão grande quanto H; e H não é maior que Y. Primeiro, toda aresta em H contribui com dois nós para X, portanto X é duas vezes tão grande quanto H. Segundo, Y é uma cobertura de vértices, portanto toda aresta em H é tocada por algum nó em Y. Nenhum desses nós toca duas arestas em H porque as arestas em H não se

tocam. Conseqüentemente a cobertura de vértices Y é no mínimo tão grande quanto H porque Y contém um nó diferente que toca toda aresta em H. Logo, X não é mais que duas vezes tão grande que Y.

MIN-VERTEX-COVER é um exemplo de um ***problema de minimização*** porque objetivamos encontrar a *menor* entre a coleção de possíveis soluções. Em um ***problema de maximização*** buscamos a *maior* solução. Um algoritmo de aproximação para um problema de minimização é ***k-ótimo*** se ele sempre encontra uma solução que não é mais do que k vezes ótima. O algoritmo precedente é 2-ótima para o problema da cobertura de vértices. Para um problema de maximização um algoritmo de aproximação k-ótimo sempre encontra uma solução que é no mínimo $\frac{1}{k}$ vezes o tamanho da ótima.

O seguinte é um algoritmo de aproximação para um problema de maximização chamado *MAX-CUT*. Um ***corte*** em um grafo não-direcionado é uma separação dos vértices V em dois subconjuntos disjuntos S e T. Uma ***aresta de corte*** é uma aresta que está entre um nó em S em um nó em T. Uma ***aresta de não-corte*** é uma aresta que não é uma aresta de corte. O tamanho de um corte é o número de arestas de corte. O problema *MAX-CUT* pergunta por um corte máximo em um grafo G. Como mostramos no Problema 7.25, esse problema é NP-completo. O seguinte algoritmo aproxima *MAX-CUT* dentro de um fator de 2.

B = "Sobre a entrada $\langle G \rangle$ onde G é um grafo não-direcionado com nós V:

1. Faça $S = \emptyset$ e $T = V$.
2. Se, movendo um único nó, seja de S para T ou de T para S, aumenta o tamanho do corte, faça esse movimento e repita este estágio.
3. Se nenhum nó desses existe, dê como saída o corte corrente e páre."

Esse algoritmo começa com um corte (presumivelmente) ruim e faz melhorias locais até que nenhuma melhoria local a mais seja possível. Embora esse procedimento não vá dar um corte ótimo em geral, mostramos que ele realmente dá um que é pelo menos metade do tamanho do ótimo.

TEOREMA 10.2

B é um algoritmo de aproximação 2-ótimo para *MAX-CUT*.

PROVA B roda em tempo polinomial porque toda execução do estágio 2 aumenta o tamanho do corte para um máximo do número total de arestas em G.

Agora mostramos que o corte de B é no mínimo metade ótimo. Na verdade,

mostramos algo mais forte: o corte de B contém pelo menos metade de todas as arestas em G. Observe que, em todo nó de G, o número de arestas de corte é no mínimo tão grande quanto o número de arestas de não-corte, ou B teria deslocado aquele nó para o outro lado. Adicionamos os números de arestas de corte em todo nó. Essa soma é duas vezes o número total de arestas de corte porque toda aresta de corte é contada uma vez para cada uma das suas duas extremidades. Pela observação precedente, essa soma tem que ser no mínimo a soma correspondente dos números de arestas não-corte em todo nó. Conseqüentemente G tem pelo menos tantas arestas de corte quanto arestas de não-corte, e portanto o corte contém no mínimo metade de todas as arestas.

10.2 ALGORITMOS PROBABILÍSTICOS

Um ***algoritmo probabilístico*** é um algoritmo desenhado para usar o resultado de um processo aleatório. Tipicamente, tal algoritmo conteria uma instrução para "jogar uma moeda" e o resultado daquele arremesso de moeda influenciaria a execução subseqüente e a saída do algoritmo. Certos tipos de problemas parece ser mais facilmente solúveis por algoritmos probabilísticos que por algoritmos determinísticos.

Como pode a tomada de uma decisão por arremesso de uma moeda sequer ser melhor que realmente calcular, ou até estimar, a melhor escolha em uma situação particular? Às vezes, calcular a melhor escolha pode requerer tempo excessivo e estimá-la pode introduzir uma polarização que invalida o resultado. Por exemplo, estatísticos utilizam amostragem aleatória para determinar informação sobre os indivíduos em uma grande população, tais como seus gostos ou preferências políticas. Consultar todos os indivíduos poderia levar muito tempo, e consultar um subconjunto não-aleatoriamente selecionado poderia tender a dar resultados errôneos.

A CLASSE BPP

Começamos com nossa discussão formal de computação probabilística definindo um modelo de uma máquina de Turing probabilística. Então damos uma classe de complexidade associada com computação probabilística eficiente e uns poucos exemplos.

DEFINIÇÃO 10.3

Uma ***máquina de Turing probabilística*** M é um tipo de máquina de Turing não-determinística na qual cada passo não-determinístico é chamado um ***passo de arremesso-de-moeda*** e tem dois próximos movimentos legítimos. Atribuímos uma probabilidade a cada ramo b da computação de M sobre a entrada w da seguinte forma. Defina a probabilidade do ramo b como sendo

$$\Pr[b] = 2^{-k},$$

onde k é o número de passos de arremesso-de-moeda que ocorrem no ramo b. Defina a probabilidade de que M aceita w como sendo

$$\Pr[M \text{ aceita } w] = \sum_{\substack{b \text{ é um} \\ \text{ramo de aceitação}}} \Pr[b].$$

Em outras palavras, a probabilidade de que M aceita w é a probabilidade de que atingiríamos uma configuração de aceitação se simulássemos M sobre w jogando uma moeda para determinar qual movimento seguir a cada passo de arremesso-de-moeda. Fazemos

$$\Pr[M \text{ rejeita } w] = 1 - \Pr[M \text{ aceita } w].$$

Quando uma máquina de Turing probabilística reconhece uma linguagem, ela tem que aceitar todas as cadeias na linguagem e rejeitar todas as cadeias fora da linguagem como de costume, exceto que agora permitimos à máquina uma pequena probabilidade de erro. Para $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ dizemos que ***M reconhece a linguagem A com probabilidade de erro*** ϵ se

1. $w \in A$ implica que $\Pr[M \text{ aceita } w] \geq 1 - \epsilon$, e
2. $w \notin A$ implica que $\Pr[M \text{ rejeita } w] \geq 1 - \epsilon$.

Em outras palavras, a probabilidade de que obteríamos a resposta errada simulando M é no máximo ϵ. Também consideramos limitantes de probabilidade de erro que dependem do comprimento de entrada n. Por exemplo, a probabilidade de erro $\epsilon = 2^{-n}$ indica uma probabilidade de erro exponencialmente pequena.

Estamos interessados em algoritmos probabilísticos que rodam eficientemente em tempo e/ou espaço. Medimos a complexidade de tempo e de espaço de uma áquina de Turing probabilística da mesma maneira que fazemos para uma máquina de Turing não-determinística, usando o ramo de computação do pior caso sobre cada entrada.

DEFINIÇÃO 10.4

BPP é a classe de linguagens que são reconhecidas por máquinas de Turing probabilísticas de tempo polinomial com uma probabilidade de erro de $\frac{1}{3}$.

Definimos essa classe com uma probabilidade de erro de $\frac{1}{3}$, mas qualquer probabilidade de erro constante daria origem a uma definição equivalente desde que ela esteja estritamente entre 0 e $\frac{1}{2}$ em virtude da virtue do seguinte ***lema da amplificação***. Ele dá uma maneira simples de tornar a probabilidade de erro exponencialmente pequena. Note que um algoritmo probabilístico com uma probabilidade de erro de 2^{-100} tem muito mais chances de dar um resultado errôneo porque o computador no qual ele roda tem uma falha de hardware do que devido a um arremesso azarado de suas moedas.

LEMA 10.5

Seja ϵ uma constante fixa estritamente entre 0 e $\frac{1}{2}$. Então para qualquer polinômio $\mathrm{poly}(n)$ uma máquina de Turing probabilística de tempo polinomial M_1 que opera com probabilidade de erro ϵ tem uma máquina de Turing probabilística de tempo polinomial equivalente M_2 que opera com uma probabilidade de erro de $2^{-\mathrm{poly}(n)}$.

IDÉIA DA PROVA M_2 simula M_1 rodando-a em um número polinomial de vezes e tomando o voto de maioria dos resultados. A probabilidade de erro decresce exponencialmente com o número de execuções de M_1 realizadas.

Considere o caso onde $\epsilon = \frac{1}{3}$. Ele corresponde a uma caixa que contém muitas bolas vermelhas e azuis. Sabemos que $\frac{2}{3}$ das bolas são de uma cor e que o restante $\frac{1}{3}$ são da outra cor, mas não sabemos que cor é predominante. Podemos testar essa cor fazendo amostragem de várias—digamos, 100—bolas aleatoriamente para determinar que cor acontece mais freqüentemente. Quase certamente, a cor predominante na caixa será a mais freqüente na amostra.

As bolas correspondem a ramos da computação de M_1: vermelha para aceitar e azul para rejeitar. M_2 faz uma amostra da cor rodando M_1. Um cálculo mostra que M_2 erra com probabilidade exponencialmente pequena se ela roda M_1 um número polinomial de vezes e dá como saída o resultado que acontece mais freqüentemente.

PROVA Dada a MT M_1 que reconhece uma linguagem com uma probabilidade de erro de $\epsilon < \frac{1}{2}$ e um polinômio $\mathrm{poly}(n)$, construímos uma MT M_2 que reconhece a mesma linguagem com uma probabilidade de erro de $2^{-\mathrm{poly}(n)}$.

M_2 = "Sobre a entrada w:

1. Calcule k (veja a análise abaixo).
2. Rode $2k$ simulações independentes de M_1 sobre a entrada w.

3. Se a maioria das execuções de M_1 aceitam, então *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Limitamos [1] a probabilidade de que M_2 dá a resposta errada sobre uma entrada w. O estágio 2 dá origem a uma seqüência de $2k$ resultados da simulação de M_1, cada resulado é correto ou errado. Se a maioria desses resultados são corretos, M_2 dá a resposta correta. Limitamos a probabilidade de que pelo menos metade desses resultados são errados.

Seja S qualquer seqüência de resultados que M_2 poderia obter no estágio 2. Seja p_S a probabilidade de que M_2 obtém S. Digamos que S tem c resultados corretos e e resultados errados, portanto $c + e = 2k$. Se $c \leq e$ e M_2 obtém S, então M_2 dá saída incorretamente. Chamamos tal S uma *seqüência ruim*. Se S é uma seqüência ruim qualquer então $p_S \leq \epsilon^e(1-\epsilon)^c$, que por sua vez é no máximo $\epsilon^k(1-\epsilon)^k$ porque $k \leq e$ e $\epsilon < 1 - \epsilon$.

Somando p_S para todas as seqüências ruins S dá a probabilidade de que M_2 dá saída incorretamente. Temos no máximo 2^{2k} seqüências ruins porque 2^{2k} é o número de todas as seqüências. Logo,

$$\begin{aligned}&\Pr\big[\, M_2 \text{ dá saída incorretamente sobre a entrada } w \,\big] \\ &= \sum_{S \text{ ruim}} p_S \leq 2^{2k} \cdot \epsilon^k(1-\epsilon)^k = (4\epsilon(1-\epsilon))^k.\end{aligned}$$

Assumimos que $\epsilon < \frac{1}{2}$, portanto $4\epsilon(1-\epsilon) < 1$ e conseqüentemente a probabilidade acima decresce exponencialmente em k e o mesmo acontece com a probabilidade de erro de M_2. Para calcular um valor específico de k que nos permita limitar a probabilidade de erro de M_2 por 2^{-t} para qualquer $t \geq 1$, fazemos $\alpha = \log_2(4\epsilon(1-\epsilon))$ e escolhemos $k \geq t/\alpha$. Então obtemos uma probabilidade de erro de $2^{-\text{poly}(n)}$ dentro de tempo polinomial.

PRIMALIDADE

Um ***número primo*** é um inteiro maior que 1 que não é divisível por inteiros positivos diferentes de 1 e de si próprio. Um número não-primo maior que 1 é chamado ***composto***. O antigo problema de se testar se um inteiro é primo ou composto tem sido o assunto de intensa pesquisa. Um algoritmo de tempo polinomial para esse problema é agora conhecido [4], mas ele é demasiado difícil para incluir aqui. Ao invés disso, descrevemos um algoritmo probabilístico de tempo polinomial muito mais simples para testar primalidade.

Uma maneira de se determinar se um número é primo é tentar todos os inteiros possíveis menores que esse número e ver se quaisquer deles são divisores, também chamados ***fatores***. Esse algoritmo tem complexidade de tempo exponencial porque a magnitude de um número é exponencial no seu comprimento.

[1] A análise da probabilidade de erro segue do ***limitante de Chernoff***, um resultado padrão em teoria da probabilidade. Aqui damos um cálculo alternativo, auto-contido, que evita qualquer dependência desse resultado.

O algoritmo de teste probabilístico de primalidade que descrevemos opera de uma maneira inteiramente diferente. Ele não procura por fatores. De fato, nenhum algoritmo de tempo polinomial probabilístico para encontrar fatores é sabido existir.

Antes de discutir o algoritmo, mencionamos alguma notação da teoria dos números. Todos os números nesta seção são inteiros. Para qualquer p maior que 1, dizemos que dois números são ***equivalentes módulo p*** se eles diferem de um múltiplo de p. Se os números x e y são equivalentes módulo p, escrevemos $x \equiv y \pmod{p}$. Supomos que $x \bmod p$ é o menor y não-negativo onde $x \equiv y \pmod{p}$. Todo número é equivalente módulo p a algum membro do conjunto $\mathcal{Z}_p^+ = \{0, \ldots, p-1\}$. Por conveniência fazemos $\mathcal{Z}_p = \{1, \ldots, p-1\}$. Podemos nos referir aos elementos desses conjuntos por outros números que são equivalentes módulo p, como quando nos referimos a $p-1$ por -1.

A idéia principal por trás do algoritmo vem do seguinte resultado, chamado ***pequeno teorema de Fermat***.

TEOREMA 10.6

Se p é primo e $a \in \mathcal{Z}_p^+$ então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Por exemplo, se $p = 7$ e $a = 2$, o teorema diz que $2^{(7-1)} \bmod 7$ deve ser 1 porque 7 é primo. O cálculo simples

$$2^{(7-1)} = 2^6 = 64 \quad \text{e} \quad 64 \bmod 7 = 1$$

confirma esse resultado. Suponha que tentemos $p = 6$. Então

$$2^{(6-1)} = 2^5 = 32 \quad \text{e} \quad 32 \bmod 6 = 2$$

dá um resultado diferente de 1, implicando, pelo teorema, que 6 não é primo. É claro que já sabíamos isso. Entretanto, esse método demonstra que 6 é composto sem encontrar seus fatores. O Problema 10.15 pede que você dê uma prova desse teorema.

Pense no teorema precedente como dando um tipo de "teste" da primalidade, chamado a ***teste de Fermat***. Quando dizemos que p passa no teste de Fermat em a, queremos dizer que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. O teorema afirma que os primos passam em todos os testes de Fermat para $a \in \mathcal{Z}_p^+$. Observamos que 6 falha algum teste de Fermat, portanto 6 não é primo.

Podemos usar esses testes para dar um algoritmo para determinar primalidade? Quase. Chame um número de ***pseudoprimo*** se ele passa nos testes de Fermat para todo a menor que ele e primo em relação a ele. Com a exceção dos infreqüentes ***números de Carmichael***, que são compostos e mesmo assim passam em todos os testes de Fermat, os números pseudoprimos são idênticos aos números primos. Começamos dando um algoritmo probabilístico de tempo polinomial muito simples que distingue primos de compostos exceto os números de Carmichael. Em seguida, apresentamos e analisamos o algoritmo completo de teste de probabilidade probabilístico.

Um algoritmo de pseudoprimalidade que passa por todos os testes de Fermat demandaria tempo exponencial. A chave para o algoritmo de tempo polinomial probabilístico é que, se um número não é pseudoprimo, ele falha para pelo menos metade de todos os testes. (Simplesmente aceite essa afirmativa no momento. O Problema 10.16 pede que você a prove.) O algoritmo funciona tentando diversos testes escolhidos aleatoriamente. Se algum falha, o número tem que ser composto. O algoritmo contém um parâmetro k que determina a probabilidade de erro.

PSEUDOPRIMO = "Sobre a entrada p:

1. Selecione $a_1, \ldots, a_k$ aleatoriamente em $\mathcal{Z}_p^+$.
2. Compute $a_i^{p-1} \bmod p$ para cada i.
3. Se todos os valores computados são 1, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Se p é primo, ele passa em todos os testes e o algoritmo aceita com certeza. Se p não é pseudoprimo, ele passa em no máximo metade de todos os testes. Nesse caso ele passa cada teste selecionado aleatoriamente com probabilidade no máximo $\frac{1}{2}$. A probabilidade de que ele passa todos os k testes aleatoriamente selecionados é portanto no máximo 2^{-k}. O algoritmo opera em tempo polinomial porque exponenciação modular é computável em tempo polinomial (veja o Problema 7.12).

Para converter o algoritmo precedente para um algoritmo de primalidade introduzimos um teste mais sofisticado que evita o problema com os números de Carmichael. O princípio subjacente é que o número 1 tem exatamente duas raízes quadradas, 1 e -1, módulo qualquer primo p. Para muitos números compostos, incluindo todos os números de Carmichael, 1 tem quatro ou mais raízes quadradas. Por exemplo, ± 1 e ± 8 são as quatro raízes quadradas de 1, módulo 21. Se um número passa no teste de Fermat em a, o algoritmo encontra uma das suas raízes quadradas de 1 aleatoriamente e determina se aquela raiz quadrada é 1 ou -1. Se não é, sabemos que o número não é primo.

Podemos obter raízes quadradas de 1 se p passa no teste de Fermat em a porque $a^{p-1} \bmod p = 1$ e portanto $a^{(p-1)/2} \bmod p$ é uma raiz quadrada de 1. Se esse valor é ainda 1 podemos dividir repetidamente o expoente por dois, desde que o expoente resultante permaneça um inteiro, e veja se o primeiro número que é diferente de 1 é -1 ou algum outro número. Damos uma prova formal da corretude do algoritmo imediatamente depois de sua descrição. Selecione $k \geq 1$ como um parâmetro que determina a probabilidade de erro máxima como sendo 2^{-k}.

PRIMO = "Sobre a entrada p:

1. Se p é par, *aceite* se $p = 2$; caso contrário, *rejeite*.
2. Selecione $a_1, \ldots, a_k$ aleatoriamente em $\mathcal{Z}_p^+$.
3. Para cada i de 1 a k:
4. Compute $a_i^{p-1} \bmod p$ e *rejeite* se diferente de 1.
5. Faça $p - 1 = st$ onde s é ímpar e $t = 2^h$ é uma potência de 2.

6. Compute a seqüência $a_i^{s\cdot 2^0}, a_i^{s\cdot 2^1}, a_i^{s\cdot 2^2}, \ldots, a_i^{s\cdot 2^h}$ módulo p.
7. Se algum elemento dessa seqüência não é 1, encontre o último elemento que não é 1 e *rejeite* se esse elemento não é -1.
8. Todos os testes passaram nesse ponto, portanto *aceite*."

Os dois lemas seguintes mostram que o algoritmo *PRIMO* funciona corretamente. Obviamente o algoritmo é correto quando p é par, portanto somente consideramos o caso quando p é ímpar. Digamos que a_i é uma ***testemunha (de compostura)*** se o algoritmo rejeita ou no estágio 4 ou 7, usando a_i.

LEMA 10.7

Se p é um número primo ímpar, $\Pr[\,\textit{PRIMO}$ aceita $p\,] = 1$.

PROVA Primeiro mostramos que se p é primo, nenhuma testemunha existe e portanto nenhum ramo do algoritmo rejeita. Se a fosse uma testemunha de um estágio 4, $(a^{p-1} \bmod p) \neq 1$ e o pequeno teorema de Fermat implica que p é composto. Se a fosse uma testemunha do estágio 7, algum b existe em $\mathcal{Z}_p^+$, onde $b \not\equiv \pm 1 \pmod p$ e $b^2 \equiv 1 \pmod p$.
Conseqüentemente $b^2 - 1 \equiv 0 \pmod p$. Fatorando $b^2 - 1$ dá

$$(b-1)(b+1) \equiv 0 \pmod p,$$

o que implica que

$$(b-1)(b+1) = cp$$

para algum inteiro positivo c. Devido ao fato de que $b \not\equiv \pm 1 \pmod p$, ambos $b-1$ e $b+1$ estão estritamente entre 0 e p. Por conseguinte, p é composto porque um múltiplo de um número primo não pode ser expresso como um produto de números que são menores que ele.

O próximo lema mostra que o algoritmo identifica números compostos com alta probabilidade. Primeiro, apresentamos uma importante ferramenta elementar da teoria dos números. Dois números são primos entre si se eles não têm divisor comum diferente de 1. O ***teorema chinês do resto*** diz que uma correspondência um-para-um existe entre $\mathcal{Z}_{pq}$ e $\mathcal{Z}_p \times \mathcal{Z}_q$ se p e q são primos entre si. Cada número $r \in \mathcal{Z}_{pq}$ corresponde a um par (a, b), onde $a \in \mathcal{Z}_p$ e $b \in \mathcal{Z}_q$, tal que

$$r \equiv a \pmod p, \text{ e}$$
$$r \equiv b \pmod q.$$

LEMA 10.8

Se p é um número ímpar composto, $\Pr[\,\textit{PRIMO}$ aceita $p\,] \leq 2^{-k}$.

PROVA Mostramos que, se p é um número ímpar composto e a for selecionado aleatoriamente em $\mathcal{Z}_p^+$,

$$\Pr[\, a \text{ é uma testemunha} \,] \geq \tfrac{1}{2}$$

demonstrando que no mínimo a mesma quantidade de testemunhas que as de não-testemunhas existem em $\mathcal{Z}_p^+$. Fazemos isso encontrando uma única testemunha para cada não-testemunha.

Em toda não-testemunha, a seqüência computada no estágio 6 é ou toda de 1s ou contém -1 em alguma posição, seguido por 1s. Por exemplo, 1 ele próprio é uma não-testemunha do primeiro tipo, e -1 é uma não-testemunha do segundo tipo porque s é ímpar e $(-1)^{s \cdot 2^0} \equiv -1$ e $(-1)^{s \cdot 2^1} \equiv 1$. Entre todas as não-testemunhas do segundo tipo, encontre uma não-testemunha para a qual o -1 aparece na maior posição na seqüência. Seja h essa não-testemunha e seja j a posição de -1 na sua seqüência, onde as posições na seqüência são numeradas começando em 0. Logo, $h^{s \cdot 2^j} \equiv -1 \pmod{p}$.

Devido ao fato de que p é composto, ou p é a potência de um primo ou podemos escrever p como o produto de q e r, dois números que são primos entre si. Consideramos o último caso primeiro. O teorema chinês do resto implica que algum número t existe em $\mathcal{Z}_p$ no qual

$$\begin{aligned} t &\equiv h \pmod{q} \quad \text{e} \\ t &\equiv 1 \pmod{r}. \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} t^{s \cdot 2^j} &\equiv -1 \pmod{q} \quad \text{e} \\ t^{s \cdot 2^j} &\equiv 1 \pmod{r}. \end{aligned}$$

Logo, t é uma testemunha porque $t^{s \cdot 2^j} \not\equiv \pm 1 \pmod{p}$ mas $t^{s \cdot 2^{j+1}} \equiv 1 \pmod{p}$.

Agora que temos uma testemunha, podemos obter muitos mais. Provamos que $dt \bmod p$ é uma única testemunha para cada não-testemunha d fazendo duas observações. Primeiro, $d^{s \cdot 2^j} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ e $d^{s \cdot 2^{j+1}} \equiv 1 \pmod{p}$ devido à maneira que j foi escolhido. Conseqüentemente $dt \bmod p$ é uma testemunha porque $(dt)^{s \cdot 2^j} \not\equiv \pm 1$ e $(dt)^{s \cdot 2^{j+1}} \equiv 1 \pmod{p}$.

Segundo, se d_1 e d_2 são não-testemunhas distintas, $d_1 t \bmod p \neq d_2 t \bmod p$. A razão é que $t^{s \cdot 2^{j+1}} \bmod p = 1$. Logo, $t \cdot t^{s \cdot 2^{j+1}-1} \bmod p = 1$. Conseqüentemente, se $td_1 \bmod p = td_2 \bmod p$, então

$$d_1 \;=\; t \cdot t^{s \cdot 2^{j+1}-1} d_1 \bmod p \;=\; t \cdot t^{s \cdot 2^{j+1}-1} d_2 \bmod p \;=\; d_2.$$

Por conseguinte, o número de testemunhas tem que ser tão grande quanto o número de não-testemunhas, e completamos a análise para o caso onde p não é uma potência de primo.

Para o caso da potência de primo, temos $p = q^e$ onde q é primo e $e > 1$. Faça $t = 1 + q^{e-1}$. Expandindo t^p usando o teorema binomial, obtemos

$$t^p = (1 + q^{e-1})^p = 1 + p \cdot q^{e-1} + \text{múltiplos e potências mais altas de } q^{e-1},$$

que é equivalente a 1 mod p. Logo, t é uma testemunha do estágio 4 porque, se $t^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, então $t^p \equiv t \not\equiv 1 \pmod{p}$. Como no caso anterior, usamos essa testemunha para obter muitas outras. Se d é uma não-testemunha, temos $d^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, mas então $dt \bmod p$ é uma testemunha. Além disso, se d_1 e d_2 são não-testemunhas distintas, então $d_1 t \bmod p \neq d_2 t \bmod p$. Caso contrário

$$d_1 = d_1 \cdot t \cdot t^{p-1} \bmod p = d_2 \cdot t \cdot t^{p-1} \bmod p = d_2.$$

Portanto o número de testemunhas tem que ser tão grande quanto o número de não-testemunhas, e a prova está completa.

O algoritmo precedente e sua análise estabelece o teorema seguinte. Seja $PRIMOS = \{n \mid n \text{ é um número primo em binário}\}$.

TEOREMA 10.9

$PRIMOS \in$ BPP

Note que o algoritmo de primalidade probabilístico tem ***erro unilateral***. Quando o algoritmo dá como saída *rejeite*, sabemos que a entrada tem que ser composto. Quando a saída é *aceite*, sabemos somente que a entrada poderia ser primo ou composto. Portanto uma resposta incorreta pode somente ocorrer quando a entrada é um número composto. A característica de erro unilateral é comum a muitos algoritmos probabilísticos, portanto a classe de complexidade especial RP é designada para ela.

DEFINIÇÃO 10.10

RP é a classe de linguagens que são reconhecidas por máquinas de Turing probabilísticas de tempo polinomial onde entradas na linguagem são aceitas com uma probabilidade de no mínimo $\frac{1}{2}$ e entradas que não estão na linguagem são rejeitadas com uma probabilidade de 1.

Podemos fazer a probabilidade de erro exponencialmente pequena e manter um tempo de execução polinomial usando uma técnica de amplificação similar àquela (na verdade mais simples) que usamos no Lema 10.5. Nosso algoritmo anterior mostra que $COMPOSTOS \in$ RP.

PROGRAMAS RAMIFICANTES LÊ-UMA-VEZ

Um *programa ramificante* é um modelo de computação usado em teoria da complexidade e em certas áreas práticas tais como desenho assistido-por-computador. Esse modelo representa um processo de decisão que consulta os

valores de variáveis de entrada e baseia as decisões sobre a maneira de proceder nas respostas a aquelas consultas. Representamos esse processo de decisão como um grafo cujos nós correspondem à variável particular consultada naquele ponto no processo.

Nesta seção investigamos a complexidade de se testar se dois programas ramificantes são equivalentes. Em geral, esse problema é coNP-completo. Se colocarmos uma certa restrição natural sobre a classe de programas ramificantes, podemos dar um algoritmo probabilístico de tempo polinomial para testar a equivalência. Esse algoritmo é especialmente interessante por duas razões. Primeiro, nenhum algoritmo de tempo polinomial é conhecido para esse problema, portanto um outro exemplo de probabilismo aparentemente expandindo a classe de linguagens nas quais pertinência pode ser testada eficientemente. Segundo, esse algoritmo introduz a técnica de atribuir valores não-booleanos a variáveis normalmente booleanas de modo a analisar o comportamento de alguma função booleana daquelas variáveis. Essa técnica é usada com bons resultados em sistemas de provas interativas, como mostramos na Seção 10.4.

DEFINIÇÃO 10.11

Um ***programa ramificante*** é um grafo direcionado acíclico[2] onde todos os nós são rotulados por variáveis, exceto por dois ***nós de saída*** rotulados 0 ou 1. Os nós que são rotulados por variáveis são chamados ***nós de consulta***. Todo nó de consulta tem duas arestas de saída, uma rotulada `0` e a outra rotulada `1`. Ambos os nós de saída não têm arestas de saída. Um dos nós em um programa ramificante é designado o nó inicial.

Um programa ramificante determina uma função booleana da seguinte maneira. Tome qualquer atribuição às variáveis aparecendo nos seus nós de consulta e, começando no nó inicial, siga o caminho determinado tomando a aresta de saída de cada nó de consulta conforme o valor atribuído à variável indicada até que um dos nós de saída é atingido. A saída é o rótulo desse nó de saída. A Figura 10.12 dá dois exemplos de programas ramificantes.

Programas ramificantes estão relacionados à classe L de uma maneira que é análoga ao relacionamento entre circuitos booleanos e a classe P. O Problema 10.17 pede que você mostre que um programa ramificante com uma quantidade polinomial de nós pode testar pertinência em qualquer linguagem sobre $\{0,1\}$ que está em L.

[2] A directed graph is ***acyclic*** if it has no directed cycles.

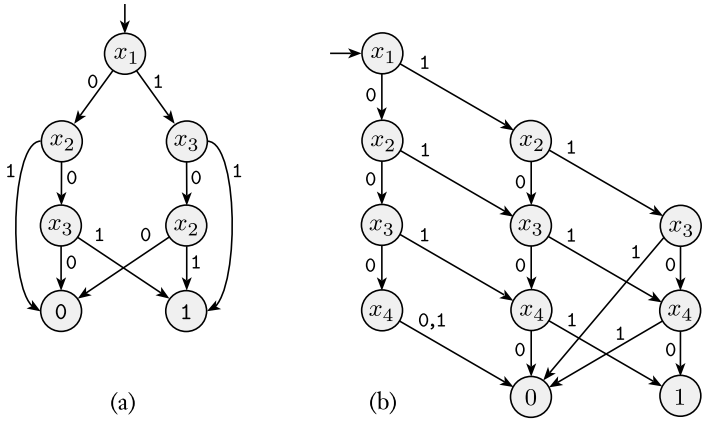


FIGURA 10.12
Programas ramificantes lê-uma-vez

Dois programas ramificantes são equivalentes se eles determinam funções iguais. O Problema 10.21 pede que você mostre que o problema de se testar equivalência para programas ramificantes é coNP-completo. Aqui consideramos uma forma restrita de programas ramificantes. Um ***programa ramificante lê-uma-vez*** é aquele que pode pode consultar cada variável em no máximo uma vez em todo caminho direcionado do nó inicial para um nó de saída. Ambos os programas ramificantes na Figura 10.12 têm a característica lê-uma-vez. Seja

$EQ_{\mathsf{PRLUV}} = \{\langle B_1, B_2\rangle | B_1 \text{ e } B_2 \text{ são programas ramificantes lê-uma-vez equivalentes}\}$.

TEOREMA 10.13

EQ_{PRLUV} está em BPP.

IDÉIA DA PROVA Primeiro vamos tentar atribuir valores aleatórios às variáveis x_1 a x_m que aparecem em B_1 e B_2, e avaliar esses programas ramificantes sobre aquela atribuição. Aceitamos se B_1 e B_2 concordam na atribuição e rejeitamos caso contrário. Entretanto, essa estratégia não funciona porque dois programas ramificantes lê-uma-vez inequivalentes podem discordar apenas numa única atribuição das 2^m possíveis atribuições booleanas às variáveis. A probabilidade de que selecionaríamos aquela atribuição é exponencialmente pequena. Logo, aceitaríamos com alta probabilidade mesmo quando B_1 e B_2 não são equivalentes, e isso não é satisfatório.

Ao invés disso, modificamos essa estratégia selecionando aleatoriamente uma atribuição não-booleana às variáveis e avaliamos B_1 e B_2 de uma maneira ade-

quadamente definida. Podemos então mostrar que, se B_1 e B_2 não são equivalentes, as avaliações aleatórias tenderão a ser desiguais.

PROVA Atribuímos polinômios sobre over $x_1, \ldots, x_m$ aos nós e às arestas de um programa ramificante lê-uma-vez B da seguinte forma. A função constante 1 é atribuída ao nó inicial. Se a um nó rotulado x foi atribuído o polinômio p, atribua o polinômio xp a sua 1-edge de saída, e atribua o polinômio $(1 - x)p$ a sua 0-aresta de saída. Se às arestas de entrada para algum nó foram atribuídos polinômios, atribua a soma daqueles polinômios àquele nó. Finalmente, o polinômio que foi atribuído ao nó de saída rotulado 1 é também atribuído ao próprio programa ramificante. Agora estamos prontos para apresentar o algoritmo probabilístico de tempo polinomial para EQ_{PRLUV}. Seja $\mathcal{F}$ um corpo finito com pelo menos $3m$ elementos.

$D =$ "Sobre a entrada $\langle B_1, B_2 \rangle$, dois programas ramificantes lê-uma-vez:

1. Selecione elementos a_1 a a_m aleatoriamente de $\mathcal{F}$.
2. Calcule o valor dos polinômios atribuídos p_1 e p_2 em a_1 a a_m.
3. Se $p_1(a_1, \ldots, a_m) = p_2(a_1, \ldots, a_m)$, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

Esse algoritmo roda em tempo polinomial porque podemos calcular o valor do polinômio correspondente a um programa ramificante sem na verdade construir o polinômio. Mostramos que o algoritmo decide EQ_{PRLUV} com uma probabilidade de erro de no máximo $\frac{1}{3}$.

Vamos examinar a relação entre um programa ramificante lê-uma-vez B e seu polinômio atribuído p. Observe que para qualquer atribuição booleana às variáveis de B, todos os polinômios atribuídos a seus nós resultam em 0 ou 1. Os polinômios que resultam em 1 são aqueles no caminho de computação para aquela atribuição. Logo, B e p concordam quando as variáveis recebem valores booleanos. Similarmente, devido ao fato de que B é lê-uma-vez, podemos escrever p como uma soma de termos produto $y_1 y_2 \cdots y_m$, onde cada y_i é x_i, $(1 - x_i)$, ou 1, e onde cada termo produto corresponde a um caminho em B do nó inicial para o nó de saída rotulado 1. O caso de $y_i = 1$ ocorre quando um caminho não contém uma variável x_i.

Tome cada um desses termos produto de p contendo um y_i que é 1 e divida-o na soma de dois termos produto, um onde $y_i = x_i$ e o outro onde $y_i = (1 - x_i)$. Fazer isso dá origem a um polinômio equivalente devido ao fato de que $1 = x_i + (1 - x_i)$. Continue dividindo os termos produto até que cada y_i seja ou x_i ou $(1 - x_i)$. O resultado final é um polinômio equivalente q que contém um termo produto para cada atribuição sobre a qual B resulta em 1. Agora estamos prontos para analisar o comportamento do algoritmo D.

Primeiro, mostramos que, se B_1 e B_2 são equivalentes, D sempre aceita. Se os programas ramificantes são equivalentes, eles resultam em 1 sobre exatamente as mesmas atribuições. Conseqüentemente, os polinômios q_1 e q_2 são iguais porque eles contêm idênticos termos produto. Por conseguinte, p_1 e p_2 são iguais sobre todas as atribuições.

Segundo mostramos que, se B_1 e B_2 não são equivalentes, D rejeita com uma probabilidade de no mínimo $\frac{2}{3}$. Essa conclusão segue imediatamente do Lema 10.15.

A prova precedente se apóia nos seguintes lemas relativos à probabilidade de aleatoriamente encontrar uma raiz de um polinômio como uma função do número de variáveis que ela tem, os graus de suas variáveis, e o tamanho do corpo subjacente.

LEMA 10.14

Para todo $d \geq 0$, um polinômio de grau-d p sobre uma única variável x ou ele tem no máximo d raízes, ou é sempre igual a 0.

PROVA We use induction on d.

Base: Prove for $d = 0$. Um polinômio de grau 0 é constante. Se essa constante não é 0, o polinômio claramente não tem raízes.

Passo da Indução: Assuma verdadeiro para $d - 1$ e prove verdadeiro para d. Se p é um polinômio não-zero de grau d com uma raiz em a, o polinômio $x - a$ divide p sem resto. Então $p/(x - a)$ é um polinômio não-zero de grau $d - 1$, e ele tem no máximo $d - 1$ raízes em virtude da hipótese da indução.

LEMA 10.15

Seja $\mathcal{F}$ de um corpo finito com f elementos e suponha que p seja um polinômio não-zero sobre as variáveis x_1 a x_m, onde cada variável tem grau no máximo d. Se a_1 a a_m são selecionados aleatoriamente em $\mathcal{F}$, então $\Pr\big[\, p(a_1, \ldots, a_m) = 0 \,\big] \leq md/f$.

PROVA Usamos indução sobre m.

Base: Prove para $m = 1$. Pelo Lema 10.14, p tem no máximo d raízes, portanto a probabilidade de que a_1 é uma delas é no máximo d/f.

Passo da Indução: Assuma verdadeiro para $m-1$ e prove verdadeiro para m. Seja x_1 uma das variáveis de p. Para cada $i \leq d$ seja p_i o polinômio compreendendo os termos de p contendo x_1^i, mas de onde x_1^i tenha sido fatorada. Então

$$p = p_0 + x_1 p_1 + x_1^2 p_2 + \cdots + x_1^d p_d.$$

Se $p(a_1, \ldots, a_m) = 0$, um dos dois casos aparece. Ou todos os p_i resultaem em 0 ou algum p_i não resultam em 0 e a_1 é uma raiz de um polinômio de uma única variável obtido calculando-se p_0 a p_d sobre a_2 a a_m.

Para limitar a probabilidade de que o primeiro caso ocorra, observe que um dos p_j tem que ser não-zero porque p é não-zero. Então a probabilidade de que todo p_i resulte em 0 é no máximo a probabilidade de que p_j resulte em 0. Pela hipótese da indução, isso é no máximo $(m-1)d/f$ porque p_j tem no máximo $m-1$ variáveis.

Para limitar a probabilidade de que o segundo caso ocorra, observe que se algum p_i não resulta em 0, então sobre a atribuição de a_2 a a_m, p reduz para um polinômio não-zero na única variável x_1. A base já mostra que a_1 é uma raiz de tal polinômio com uma probabilidade de no máximo d/f.

Consequentemte a probabilidade de que a_1 a a_m seja uma raiz do polinômio é no máximo $(m-1)d/f + d/f = md/f$.

Concluimos esta seção com um ponto importante relativo ao uso de aleatoriedade em algoritmos probabilísticos. Em nossa análise, assumimos que esses algoritmos são implementados usando aleatoriedade real. Aleatoriedade real pode ser difícil (ou impossível) de obter, portanto ela é usualmente simulada com ***geradores pseudoaleatórios***, que são algoritmos determinísticos cuja saída parece aleatória. Embora a saída de qualquer procedimento determinístico nunca possa ser verdadeiramente aleatória, alguns desses procedimentos geram resultados que têm certas características de resultados gerados aleatoriamente. Algoritmos que são desenhados para usar aleatoriedade podem funcionar igualmente bem com esses geradores pseudoaleatórios, mas provar que eles o fazem é geralmente mais difícil. De fato, às vezes algoritmos probabilísticos podem não funcionar bem com certos geradores pseudoaleatórios. Geradores pseudoaleatórios sofisticados têm sido concebidos que produzem resultados indistingüíveis de resultados verdadeiramente aleatórios por qualquer teste que opere em tempo polinomial, sob a suposição de uma função unidirecional exista. (Veja a Seção 10.6 para uma discussão de funções unidirecionais.)

10.3 ALTERNAÇÃO

Alternação é uma generalização de não-determinismo que tem provado ser útil para entender relacionamentos entre classes de complexidade e na classificação de problemas específicos conforme sua complexidade. Usando alternação, podemos simplificar várias provas em teoria da complexidade e exibem uma surpreendente conecção entre as medidas de complexidade de tempo e de espaço.

Um algoritmo alternante pode conter instruções para ramificar um processo em múltiplos processos filhotes, tal qual num algoritmo não-determinístico. A diferença entre os dois reside no modo de determinar aceitação. Uma computação não-determinística aceita se qualquer um dos processos iniciados

aceita. Quando uma computação alternante se divide em múltiplos processos, duas possibilidades surgem. O algoritmo pode designar que o processo corrente aceita se *qualquer* dos filhos aceita, ou ele pode designar que o processo corrente aceita se *todos* os filhos aceitam.

Ilustremos a diferença entre computação alternante e computação não-determinística com árvores que representam a estrutura ramificante dos processos produzidos. Cada nó representa uma configuração em um processo. Em uma computação não-determinística, cada nó computa a operação OU de seus filhos. Isso corresponde ao modo de aceitação não-determinística usual por meio do qual um processo é de aceitação se qualquer de seus filhos é de aceitação. Em uma computação alternaante, os nós podem computar as operações E ou OU como determinado pelo algoritmo. Isso corresponde ao modo de aceitação alternante por meio do qual um processo é de aceitação se todos ou algum de seus filhos aceitam. Definimos uma máquina de Turing alternante da seguinte forma.

DEFINIÇÃO 10.16

Uma ***máquina de Turing alternante*** é uma máquina de Turing não-determinística com uma característica adicional. Seus estados, exceto q_{aceita} e q_{rejeita}, são divididos em ***estados universais*** e ***estados existenciais***. Quando rodamos uma máquina de Turing alternante sobre uma cadeia de entrada, rotulamos cada nó de sua árvore de computação não-determinística com $\wedge$ ou $\vee$, dependendo de se a configuração correspondente contém um estado universal ou existencial. Determinamos aceitação designando um nó como sendo de aceitação se ele for rotulado com $\wedge$ e todos os seus filhos são de aceitação ou se ele for rotulado com $\vee$ e algum de seus filhos são de aceitação.

A figura abaixo mostra árvores de computação não-determinísticas e alternantes. Rotulamos os nós da árvore de computação alternante com $\wedge$ ou $\vee$ para indicar qual função de seus filhos eles computam.

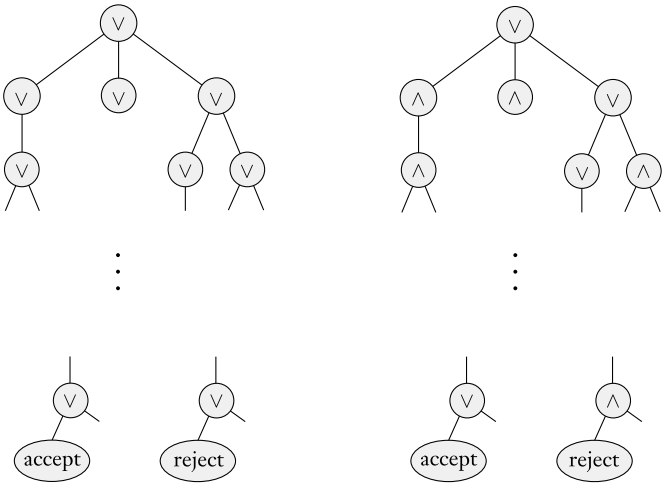


FIGURA 10.17
Árvores de computação não-determinísticas e alternantes

TEMPO E ESPAÇO ALTERNANTE

Definimos a complexidade de tempo e de espaço dessas máquinas da mesma maneira que o fizemos para máquinas de Turing não-determinísticas, tomando o tempo ou espaço máximo usado por qualquer ramo de computação. Definimos as classes de complexidade de tempo e de espaço alternante da seguinte forma.

DEFINIÇÃO 10.18

ATIME*(t(n))* $= \{L \mid L$ é decidida por uma máquina de Turing de tempo alternante $O(t(n))\}$.

ATIME*(f(n))* $= \{L \mid L$ é decidida por uma máquina de Turing de espaço alternante $O(f(n))\}$.

Definimos **AP**, **APSPACE**, e **AL** como sendo as classes de linguagens que são decididas por máquinas de Turing de tempo polinomial alternante, de espaço polinomial alternante, e espaço logarítmico alternante, respectivamente.

EXEMPLO 10.19

Uma ***tautologia*** é uma fórmula booleana que resulta em 1 sobre toda atribuição a suas variáveis. Seja $TAUT = \{\langle\phi\rangle | \ \phi$ é uma tautologia$\}$. O algoritmo alternante a seguir mostra que *TAUT* está em AP.

"Sobre a entrada $\langle\phi\rangle$:

1. Universalmente selecione todas as atribuições às variáveis de ϕ.
2. Para uma atribuição específica, calcule ϕ.
3. Se ϕ resulta em 1, *aceite*; caso contrário, *rejeite*."

O estágio 1 desse algoritmo seleciona não-deterministicamente toda atribuição às variáveis de ϕ com ramificação universal. Isso requer que todos ramos aceitem para a computação inteira aceitar. Os estágios 2 e 3 verificam deterministicamente se a atribuição que foi selecionada sobre um ramo de computação específico satisfaça a fórmula. Logo, esse algoritmo aceita sua entrada se ela determina que todas as atribuições satisfazem.

Observe que *TAUT* é um membro de coNP. Na verdade, qualquer problema em coNP pode ser facilmente mostrado estar em AP usando um algoritmo similar ao precedente. ■

EXEMPLO 10.20

Este exemplo traz uma linguagem em AP para a qual não se sabe se está em NP ou em coNP. Sejam ϕ e ψ duas fórmulas booleanas. Digamos que ϕ e ψ são equivalentes se elas resultam no mesmo valor sobre todas as atribuições a suas variáveis. Uma ***fórmula mínima*** é uma fórmula que não tem equivalente mais curta. (O comprimento de uma fórmula é o número de símbolos que ela contém.) Seja

$$\textit{FORMULA-MIN} = \{\langle\phi\rangle | \ \phi \text{ é uma fórmula booleana mínima}\}.$$

O algoritmo abaixo mostra que *FORMULA-MIN* está em AP.

"Sobre a entrada ϕ:

1. Universalmente selecione todas as fórmulas ψ que são mais curtas que ϕ.
2. Existencialmente selecione uma atribuição às variáveis de ϕ.
3. Calcule ambas ϕ e ψ sobre essa atribuição.
4. *Aceite* se as fórmulas resultam em valores diferentes. *Rejeite* se elas resultam no mesmo valor."

Esse algoritmo inicia inicia com ramificação universal para selecionar todas as fórmulas mais curtas no estágio 1 e então chaveia para ramificação existencial para selecionar uma atribuição no estágio 2. O termo *alternação* vem da capacidade de alternar, ou chavear, entre ramificação universal e existencial. ■

Alternação nos permite fazer uma notável conexão entre as medidas de complexidade de tempo e de espaço. Grosso modo, o teorema a seguir demonstra uma equivalência entre tempo alternante e espaço determinístico para limitantes polinomialmente relacionados, e uma outra equivalência entre espaço alternante e tempo determinístico quando o limitante de tempo é exponencialmente mais que o limitante de espaço.

TEOREMA 10.21

Para $f(n) \geq n$ temos $\text{ATIME}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f(n)) \subseteq \text{ATIME}(f^2(n))$.
Para $f(n) \geq \log n$ temos $\text{ASPACE}(f(n)) = \text{TIME}(2^{O(f(n))})$.

Conseqüentemente, AL = P, AP = PSPACE, e APSPACE = EXPTIME. A prova desse teorema está nos quatro lemas seguintes.

LEMA 10.22

Para $f(n) \geq n$ temos $\text{ATIME}(f(n)) \subseteq \text{SPACE}(f(n))$.

PROVA Convertemos uma máquina M de tempo alternante $O(f(n))$ para uma máquina S de espaço determinístico $O(f(n))$ que simula M da seguinte forma. Sobre a entrada w, o simulador S realiza uma busca em-profundidade na árvore de computação de M para determinar quais nós na árvore são de aceitação. Então S aceita se ela determina que a raiz da árvore, correspondente à configuração inicial de M, é de aceitação.

A máquina S requer espaço para armazenar a pilha de recursão que é usada na busca em-profundidade. Cada nível da recursão armazena uma configuração. A profundidade da recursão é a complexidade de tempo de M. Cada configuração usa espaço $O(f(n))$ e a complexidade de tempo de M é $O(f(n))$. Logo, S usa espaço $O(f^2(n))$.

Podemos melhorar a complexidade de espaço observando que S não precisa armazenar a configuração inteira a cada nível da recursão. Ao invés disso, ela registra apenas a escolha não-determinística que M fez para atingir aquela configuração a partir de seu nó pai. Aí então S pode recuperar essa configuração refazendo a computação a partir do início e seguindo os "sinais" registrados. Fazer isso reduz o uso de espaço para uma constante a cada nível da recursão. O total usado agora é portanto $O(f(n))$.

LEMA 10.23

Para $f(n) \geq n$ temos $\text{SPACE}(f(n)) \subseteq \text{ATIME}(f^2(n))$.

PROVA Começamos com uma máquina M de espaço determinístico $O(f(n))$ e construimos uma máquina alternante S que usa tempo $O(f^2(n))$ para simulá-

la. A abordagem é similar àquela utilizada na prova do teorema de Savitch (Teorema 8.5) onde construimos um procedimento geral para o problema da originabilidade.

No problema da originabilidade, nos são dadas configurações c_1 e c_2 de M e um número t. Temos que testar se M pode chegar de c_1 a c_2 dentro de t passos. Um procedimento alternante para esse problema primeiro ramifica existencialmente para adivinhar uma configuração c_m a meio caminho entre c_1 e c_2. Então ele ramifica universalmente em dois processos, um que testa recursivamente se c_1 pode chegar a c_m dentro de $t/2$ passos e o outro se c_m pode chegar a c_2 dentro de $t/2$ passos.

A máquina S usa esse procedimento alternante recursivo para testar se a configuração inicial pode atingir uma configuração de aceitação dentro de $2^{df(n)}$ passos. Aqui, d é selecionado de modo que M tenha não mais que $2^{df(n)}$ configurações dentro de seu limitante de espaço.

O tempo máximo usado em qualquer ramo desse procedimento alternante é $O(f(n))$ para escrever uma configuração em cada nível da recursão, vezes a profundidade da recursão, que é $\log 2^{df(n)} = O(f(n))$. Logo, esse algoritmo roda em tempo alternante $O(f^2(n))$.

LEMA 10.24

Para $f(n) \geq \log n$ temos $\text{ASPACE}(f(n)) \subseteq \text{TIME}(2^{O(f(n))})$.

PROVA Construimos uma máquina S de tempo determinístico $2^{O(f(n))}$ para simular uma máquina M de espaço alternante $O(f(n))$. Sobre a entrada w, o simulador S constrói o grafo abaixo da computação de M sobre w. Os nós são as configurações de M sobre w que usamo no máximo espaço $df(n)$, onde d é o fator constante apropriado para M. As arestas vão de uma configuração para aquelas configurações que ela pode originar em um único movimento de M. Após construir o grafo, S varre-o repeatidamente e marca certas configurações como de aceitação. Inicialmente, somente as configurações de aceitação de M são marcadas dessa forma. Uma configuração que realiza ramificação universal é marcada como de aceitação se todos os seus filhos estão marcados dessa forma, e uma configuração existencial é marcada se algum de seus filhos está marcado. A máquina S continua a varrer e marcar até que nenhum nó adicional seja marcado em uma varredura. Finalmente, S aceita se a configuração inicial de M sobre w está marcada.

O número de configurações de M sobre w é $2^{O(f(n))}$ porque $f(n) \geq \log n$. Conseqüentemente, o tamanho do grafo de configuração é $2^{O(f(n))}$ e construí-lo pode ser feito em tempo $2^{O(f(n))}$. Varrer o grafo uma vez leva aproximadamente o mesmo tempo. O número total de varreduras é no máximo o número de nós no grafo, porque cada varredura, exceto a última, marca no mínimo um nó adicional. Logo, o tempo total usado é $2^{O(f(n))}$.

LEMA 10.25

Para $f(n) \geq \log n$ temos $\text{ASPACE}(f(n)) \supseteq \text{TIME}(2^{O(f(n))})$.

PROVA Mostramos como simular uma máquina M de tempo determinístico $2^{O(f(n))}$ por uma máquina de Turing alternante S que usa espaço $O(f(n))$. Essa simulação é complicada porque o espaço disponível para S é tão menor que o tamanho da computação de M. Nesse caso S tem apenas espaço suficiente para armazenar apontadores num tableau para M sobre w, como ilustrado na figura abaixo.

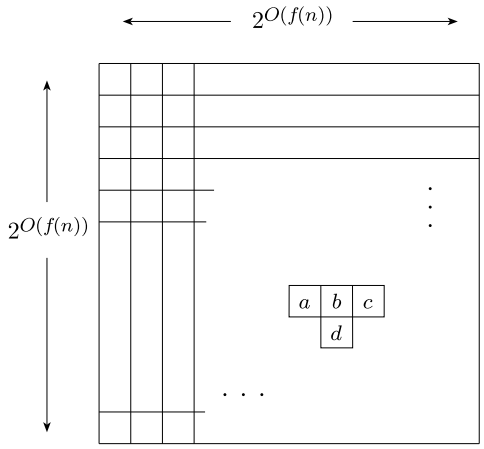


FIGURA 10.26
Um tableau para M sobre w

Usamos a representação para configurações como dada na prova do Teorema 9.30 por meio da qual um único símbolo pode representar tanto o estade da máquina quanto o conteúdo da célula de fita sob a cabeça. O conteúdo da célula d na Figura 10.26 é então determinado pelo conteúdo de seus pais a, b, e c. (Uma célula na fronteira esquerda ou direita tem somente dois pais.)

O simulador S opera recursivamente para adivinhar e então verificar o conteúdo das células individuais do tableau. Para verificar o conteúdo de uma célula d fora da primeira linha, o simulador S existencialmente adivinha o conteúdo dos pais, verifica se o conteúdo deles originaria o conteúdo de d conforme a função de transição de M, e então universalmente ramifica para verificar essas adivinhações recursivamente. Se d estivesse na primeira linha, S verifica a resposta diretamente porque ela conhece a configuração inicial de M. Assumimos que M move sua cabeça para a extremidade esquerda da fita na aceitação, portanto S pode determinar se M aceita w verificando o conteúdo da célula mais inferior à esquerda do tableau. Logo, S nunca precisa armazenar mais

que um único apontador para uma célula no tableau, portanto ela usa espaço $\log 2^{O(f(n))} = O(f(n))$.

A HIERARQUIA DE TEMPO POLINOMIAL

Máquinas alternantes provêm uma maneira de definir uma hierarquia natural de problemas dentro da classe PSPACE.

DEFINIÇÃO 10.27

Seja i um número natural. Uma ***máquina de Turing $\mathbf{\Sigma_i}$-alternante*** é uma máquina de Turing alternante que contém no máximo i execuções de passos universais ou existenciais, começando com passos existenciais. Uma ***máquina de Turing $\mathbf{\Pi_i}$-alternante*** é similar exceto que ela começa com passos universais.

Defina $\mathbf{\Sigma_i TIME}(f(n))$ como sendo a classe de linguagens que uma máquina de Turing Σ_i-alternante pode decidir em tempo $O(f(n))$. Similarmente defina a classe $\mathbf{\Pi_i TIME}(f(n))$ para máquinas de Turing Π_i-alternantes, e defina as classes $\mathbf{\Sigma_i SPACE}(f(n))$ e $\mathbf{\Pi_i SPACE}(f(n))$ para máquinas de Turing alternantes de espaço limitado. Defina a ***hierarquia de tempo polinomial*** como sendo a coleção de classes

$$\mathbf{\Sigma_i P} = \bigcup_k \Sigma_i \mathrm{TIME}(n^k) \quad \text{e}$$
$$\mathbf{\Pi_i P} = \bigcup_k \Pi_i \mathrm{TIME}(n^k).$$

Defina $\mathbf{PH} = \bigcup_i \Sigma_i \mathrm{P} = \bigcup_i \Pi_i \mathrm{P}$. Claramente, $\mathrm{NP} = \Sigma_1 \mathrm{P}$ e $\mathrm{coNP} = \Pi_1 \mathrm{P}$. Adicionalmente, *FORMULA-MIN* $\in \Pi_2 \mathrm{P}$.

10.4 SISTEMAS DE PROVA INTERATIVA

Sistemas de prova interativa provêm uma maneira de definir um análogo probabilístico da classe NP, tanto quanto os algoritmos de tempo polinomial probabilístico provêm um análogo probabilístico a P. O desenvolvimento de sistemas de prova interativa tem afetado profundamente a teoria da complexidade e tem levado a importantes avanços nos campos da criptografia e algoritmos de aproximação. Para ter uma idéia desse novo conceito, vamos revisitar nossa intuição sobre NP.

As linguagens em NP são aquelas cujos membros todos têm certificados curtos de pertinência que podem ser facilmente verificados. Se você precisar, volte para a página 283 e revise essa formulação de NP. Vamos refrasear essa formulação criando duas entidades: um Provador que encontra as provas de pertinência e um Verificador que as verifica. Pense no Provador como se ele fosse *convencer* o Verificador da pertinência de w a A. Requeremos que o Verificador seja uma máquina limitada por tempo polinomial; caso contrário ele poderia descobrir a própria resposta. Não impomos nenhum limitante computacional sobre o Provador porque encontrar a prova pode ser demorado.

Tome o problema *SAT* por exemplo. Um Provador pode convencer um Verificador de tempo polinomial que uma fórmula ϕ é satisfatível fornecendo a atribuição que satisfaz. Um Provador pode similarmente convencer um Verificador computacionalmente limitado que uma fórmula *não* é satisfatível? O complemento de *SAT* não se sabe se estém NP portanto não podemos depender da idéia do certificate. Não obstante, a reposta, surpreendentemente, é sim, desde que demos ao Provador e ao Verificador duas características adicionais. Primeiro, a eles é permitido engajar em um diálogo *bidirecional*. Segundo, o Verificador pode ser uma máquina de tempo polinomial *probabilístico* que atinge a resposta correta com um alto grau de, embora não absoluta, certeza. Tais Provador e Verifier constituem um sistema de prova interativa.

NÃO-ISOMORFISMO DE GRAFOS

Ilustramos o conceito de prova interativa através do elegante exemplo do problema do isomorfismo de grafos. Chame os grafos G e H ***isomorfos*** se os nós de G pode ser reordenados de modo que ele fique idêntico a H. Seja

$$ISO = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ e } H \text{ são grafos isomorfos}\}.$$

Embora *ISO* esteja obviamente em NP, pesquisa intensa tem até agora falhado em demonstrar ou um algoritmo de tempo polinomial para esse problema ou uma prova de que ele é NP-completo. Ele é um dentre o número relativamente pequeno de linguagens que naturalmente ocorrem em NP que não têm sido colocados em uma dessas duas categorias.

Aqui, consideramos a linguagem que é complementar a *ISO*, a saber, a linguagem $\overline{ISO} = \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ e } H \textit{ não} \text{ são grafos isomorfos}\}$. Não se sabe se $\overline{ISO}$ estar em NP porque não sabemos como prover certificados curtos de que grafos não são isomorfos. Não obstante, quando dois grafos não são isomorfos, um Provador pode convencer um Verificador desse fato, como mostraremos.

Suponha que temos dois grafos G_1 e G_2. Se eles são isomorfos, o Provador pode convencer o Verificador desse fato apresentando o isomorfism ou reordenação. Mas se eles não são isomorfos, como pode o Provador convencer o Verificador desse fato? Não esqueça: o Verificador não necessariamente confie no Provador, portanto não é suficiente para o Provador *declarar* que eles não são isomorfos. O Provador tem que *convencer* o Verificador. Considere o seguinte breve protocolo.

O Verificador aleatoriamente seleciona ou G_1 ou G_2 e então aleatoriamente reordena seus nós para obter um grafo H. O Verificador envia H ao Provador. O Provador tem que responder declarando se G_1 ou G_2 foi a fonte de H. Isso conclui o protocolo.

Se G_1 e G_2 fossem de fato não-isomorfos, o Provador poderia sempre executar o protocolo porque o Provador poderia identificar se H veio de G_1 ou G_2. Entretanto, se os grafos fossem isomorfos, H poderia ter vindo tanto de G_1 como de G_2, portanto mesmo com poder computacional ilimitado, o Provador não teria mais que uma chance de 50–50 de obter a resposta correta. Conseqüentemente, se o Provador é capaz de responder corretamente consistentemente (digamos em 100 repetições do protocolo) o Verificador tem evidência convincente de que os grafos são verdadeiramente não-isomorfos.

DEFINIÇÃO DO MODELO

Para definir o modelo de sistema de prova interativa formalmente, descrevemos o Verificador, Provador, e sua interação. Você vai achar útil manter o exemplo do não-isomorfismo de grafos em mente. Definimos o ***Verificador*** como sendo uma função V que computa sua próxima transmissão ao Provador da história de mensagens enviadas até então. A função V tem três entradas:

1. **Cadeia de entrada.** O objetivo é determinar se essa cadeia é um membro de alguma linguagem. No exemplo da *NÃO-ISO*, a cadeia de entrada codificava os dois grafos.
2. **Entrada aleatória.** Por conveniência na feitura da definição, damos ao Verificador uma cadeia de entrada aleatoriamente escolhida ao invés da equivalente capacidade de fazer movimentos probabilísticos durante sua computação.
3. **História parcial de mensagens.** Uma função não tem memória do diálogo que foi enviado até então, portanto provemos a memória externamente através de uma cadeia representando a troca de mensagens até o presente momento. Usamos a notação $m_1\#m_2\#\cdots\#m_i$ para representar a troca de mensagens m_1 a m_i.

A saída do Verificador é a próxima mensagem m_{i+1} na seqüência ou $aceite$ ou $rejeite$, designando a conclusão da interação. Conseqüentemente, V tem a forma funcional $V\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^* \cup \{aceite, rejeite\}$.

$V(w, r, m_1\#\cdots\#m_i) = m_{i+1}$ significa que a cadeia de entrada é w, a entrada aleatória é r, a história de mensagens corrente é m_1 a m_i, e a próxima mensagem do Verificador para o Provador é m_{i+1}.

O ***Provador*** é um participante com capacidade computacional ilimitada. Definimo-lo como sendo uma função P com duas entradas:

1. **Cadeia de entrada.**
2. **História parcial de mensagens.**

A saída do Provador é a próxima mensagem para o Verificador. Formalmente, P tem a forma $P\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$.

$P(w, m_1\#\cdots\#m_i) = m_{i+1}$ significa que o Provador envia m_{i+1} ao Verificador após ter trocado mensagens m_1 a m_i até então.

A seguir definimos a interação entre o Provador e o Verificador. Para cadeias específicas w e r, escrevemos $(V \leftrightarrow P)(w, r) = aceite$ se uma seqüência de mensagens m_1 a m_k existe para algum k na qual

1. para $0 \leq i < k$, onde i é um número par, $V(w, r, m_1\#\cdots\#m_i) = m_{i+1}$;
2. para $0 < i < k$, onde i é um número ímpar, $P(w, m_1\#\cdots\#m_i) = m_{i+1}$; e
3. a mensagem final m_k na história de mensagens é $aceite$.

Para simplificar a definição da classe IP assumimos que os comprimentos da entrada aleatória do Verificador e de cada uma das mensagens trocadas entre o Verificador e o Provador são $p(n)$ para algum polinômio p que depende somente do Verificador. Além disso, assumimos que o número total de mensagens trocadas é no máximo $p(n)$. A definição seguinte dá a probabilidade de que um sistema de prova interativa aceite uma cadeia de entrada w. Para qualquer cadeia w de comprimento length n, definimos

$$\Pr\big[\, V \leftrightarrow P \text{ aceita } w \,\big] = \Pr\big[\, (V \leftrightarrow P)(w, r) = aceite \,\big],$$

onde r é uma cadeia aleatoriamente selecionada de comprimento $p(n)$.

DEFINIÇÃO 10.28

Digamos que a linguagem A está em **IP** se alguma função de tempo polinomial V e uma função arbitrária P existem, onde para toda função $\widetilde{P}$ e cadeia w

1. $w \in A$ implica $\Pr\big[\, V \leftrightarrow P \text{ aceita } w \,\big] \geq \frac{2}{3}$, e
2. $w \notin A$ implica $\Pr\big[\, V \leftrightarrow \widetilde{P} \text{ aceita } w \,\big] \leq \frac{1}{3}$.

Podemos amplificar a probabilidade de sucesso de um sistema de prova interativa por meio de repetição, como o fizemos no Lema 10.5, para tornar a probabilidade de erro exponencialmente pequena. Obviamente, IP contém ambas as classes NP e BPP. Mostramos também que ela contém a linguagem *NÃO-ISO*, sobre a qual não se sabe se está em NP ou BPP. Como mostraremos a seguir, IP é uma classe surpreendentemente grande, igual à classe PSPACE.

IP = PSPACE

Nesta seção provaremos um dos teoremas mais impressionantes na teoria da complexidade: a igualdade das classes IP e PSPACE. Conseqüentemente, para qualquer linguagem em PSPACE, um Provador pode convencer um Verificador de tempo polinomial probabilístico sobre a pertinência de uma cadeia na

linguagem, muito embora uma prova convencional de pertinência possa ser exponencialmente longa.

TEOREMA 10.29

IP = PSPACE.

Dividimos a prova desse teorema em lemas que estabelecem inclusão em cada direção. O primeiro lema mostra que IP $\subseteq$ PSPACE. Embora um pouco técnica, a prova desse lema é uma simulação padrão de um sistema de prova interativa por uma máquina de espaço polinomial.

LEMA 10.30

IP $\subseteq$ PSPACE.

PROVA Seja A uma linguagem em IP. Assuma que o Verificador V de A troca exatamente $p = p(n)$ mensagens quando a entrada w tem comprimento n. Construimos uma máquina PSPACE que simula V. Primeiro, para qualquer cadeia w definimos

$$\Pr[\, V \text{ aceita } w \,] = \max_P \Pr[\, V \leftrightarrow P \text{ aceita } w \,].$$

Esse valor é no mínimo $\frac{2}{3}$ se w está em A e é no máximo $\frac{1}{3}$ caso contrário. Mostramos como calcular esse valor em espaço polinomial. Suponha que M_j denote uma história de mensagens $m_1\#\cdots\#m_j$. Generalizamos a definição da interação de V e P para começar com uma seqüencia arbitrária de mensagens M_j. Escrevemos $(V \leftrightarrow P)(w, r, M_j) = \mathit{aceite}$ se podemos estender M_j com mensagens m_{j+1} a m_p de modo que

1. para $0 \le i < p$, onde i é um número par, $V(w, r, m_1\#\cdots\#m_i) = m_{i+1}$;
2. para $j \le i < p$, onde i é um número ímpar, $P(w, m_1\#\cdots\#m_i) = m_{i+1}$; e
3. a mensagem final m_p na história de mensagens é aceite.

Observe que essas condições requerem que as mensagens de V sejam consistentes com as mensagens já presentes em M_j. Generalizando ainda mais nossas definições anteriores definimos

$$\Pr[\, V \leftrightarrow P \text{ aceita } w \text{ começando em } M_j \,] = \Pr_r[\, (V \leftrightarrow P)(w, r, M_j) = \mathit{aceite} \,].$$

Aqui, e para o restante desta prova, a notação $\Pr_r$ significa que a probabilidade é tomada sobre todas as cadeias r que são consistentes com M_j. Se nenhuma dessas r existe, então defina a probabilidade como sendo 0. Então definimos

$$\Pr[\, V \text{ aceita } w \text{ começando em } M_j \,] = \max_P \Pr[\, V \leftrightarrow P \text{ aceita } w \text{ começ em } M_j \,].$$

Para todo $0 \le j \le p$ e toda seqüência de mensagens M_j, suponha que N_{M_j} seja definida indutivamente para j decrescente, começando dos casos base em $j = p$. Para uma seqüência de mensagens M_p que contêm p mensagens, faça

$N_{M_p} = 1$ se M_p é consistente com as mensagens de V para alguma cadeia r e $m_p = aceite$. Caso contrário, faça $N_{M_p} = 0$.

Para $j < p$ e uma seqüência de mensagens M_j, defina N_{M_j} da seguinte maneira.

$$N_{M_j} = \begin{cases} \max_{m_{j+1}} N_{M_{j+1}} & \text{ímpar } j < p \\ \text{wt-avg}_{m_{j+1}} N_{M_{j+1}} & \text{par } j < p \end{cases}$$

Aqui, $\text{wt-avg}_{m_{j+1}} N_{M_{j+1}}$ significa $\sum_{m_{j+1}} \left(\Pr_r\left[V(w, r, M_j) = m_{j+1} \right] \cdot N_{M_{j+1}}\right)$ A expressão é a média de $N_{M_{j+1}}$, ponderada pela probabilidade de que o Verificador enviou a mensagem m_{j+1}.

Seja M_0 a seqüência vazia de mensagens. Fazemos duas afirmações sobre o valor N_{M_0}. Primeiro, podemos calcular N_{M_0} em espaço polinomial. Fazemos isso recursivamente calculando N_{M_j} para todo j e M_j. Calcular $\max_{m_{j+1}}$ é imediato. Para calcular $\text{wt-avg}_{m_{j+1}}$, passamos por todas as cadeias r de comprimento p, e eliminamos aquelas que causam o verificador produzir uma saída que é inconsistente com M_j. Se nenhuma cadeia r resta, então $\text{wt-avg}_{m_{j+1}}$ é 0. Se algumas cadeias restam, determinamos a fração das cadeias remanescentes r que causam o verificador dar saída w_{j+1}. Então ponderamos $N_{M_{j+1}}$ por essa fração para computar o valor médio. A profundidade da recursão é p, e, por conseguinte, apenas espaço polinomial é necessário.

Segundo, N_{M_0} é igual a $\Pr\left[V \text{ aceita } w \right]$, o valor necessário para determinar se w está em A. Provamos essa segunda afirmação por indução da seguinte forma.

AFIRMAÇÃO 10.31

Para todo $0 \leq j \leq p$ e todo M_j,

$$N_{M_j} = \Pr\left[V \text{ aceita } w \text{ começando em } M_j \right].$$

Provamos essa afirmação por indução sobre j, onde a base ocorre em $j = p$ e a indução procede de p para 0.

Base: Prove a afirmação para $j = p$. Sabemos que m_p é *aceite* ou *rejeite*. Se m_p é *aceite*, N_{M_p} é definida como sendo 1, e $\Pr\left[V \text{ aceita } w \text{ começando em } M_j \right] = 1$ porque a seqüência de mensagens já indica aceitação, portanto a afirmação é verdadeira. O caso para o qual m_p é *rejeite* é similar.

Passo da Indução: Assuma que a afirmação é verdadeira para algum $j + 1 \leq p$ e qualquer seqüência de mensagens M_{j+1}. Prove que ela é verdadeira para j e qualquer seqüência de mensagens M_j. Se j é par, m_{j+1} é uma mensagem de V

para P. Então temos a série de igualdades:

$$\begin{aligned} N_{M_j} &\stackrel{1}{=} \sum_{m_{j+1}} \big(\Pr_r\big[\, V(w, r, M_j) = m_{j+1} \,\big] \cdot N_{M_{j+1}}\big) \\ &\stackrel{2}{=} \sum_{m_{j+1}} \big(\Pr_r\big[\, V(w, r, M_j) = m_{j+1} \,\big] \cdot \Pr\big[\, V \text{ aceita } w \text{ começando em } M_{j+1} \,\big]\big) \\ &\stackrel{3}{=} \Pr\big[\, V \text{ aceita } w \text{ começando em } M_j \,\big]. \end{aligned}$$

Igualdade 1 é a definição de N_{M_j}. Igualdade 2 é baseada na hipótese da indução. Igualdade 3 segue da definição de $\Pr\big[\, V$ aceita w começando em $M_j \,\big]$. Conseqüentemente, a afirmação se verifica se j é par. Se j é ímpar, m_{j+1} é uma mensagem de P para V. Então temos a série de igualdades:

$$\begin{aligned} N_{M_j} &\stackrel{1}{=} \max_{m_{j+1}} N_{M_{j+1}}. \\ &\stackrel{2}{=} \max_{m_{j+1}} \Pr\big[\, V \text{ aceita } w \text{ começando em } M_{j+1} \,\big] \\ &\stackrel{3}{=} \Pr\big[\, V \text{ aceita } w \text{ começando em } M_j \,\big] \end{aligned}$$

Igualdade 1 é a definição de N_{M_j}. Igualdade 2 usa a hipótese da indução. Quebramos a igualdade 3 em duas desigualdades. Temos $\leq$ porque o Provador que maximiza a linha inferior poderia enviar a mensagem m_{j+1} que maximiza a linha superior. Temos $\geq$ porque esse mesmo Provador não pode fazer nada melhor que enviar aquela mesma mensagem. Enviar qualquer coisa diferente de uma mensagem que maximiza a linha superior rebaixaria o valor resultante. Isso prova a afirmação para j ímpar e completa uma direção da prova do Teorema 10.29.

Agora provamos a outra direção do teorema. A prova desse lema introduz um novo método algébrico de analisar computação.

LEMA 10.32

PSPACE $\subseteq$ IP.

Antes de chegar à prova desse lema, provamos um resultado mais fraco que ilustra a técnica. Defina o ***problema da contagem*** para satisfatibilidade como sendo a linguagem

#SAT $= \{\langle \phi, k \rangle \mid \phi$ é uma fnc-fórmula com exatamente k atribuições que satisfazem$\}$.

TEOREMA 10.33

#SAT $\in$ IP.

IDÉIA DA PROVA Esta prova apresenta um protocolo por meio do qual o Provador persuade o Verificador de que k é o verdadeiro número de atribuições que satisfazem de uma dada fnc-fórmula ϕ. Antes de chegar ao protocolo propriamente dito, vamos considerar um outro protocolo que tem algo do sabor do protocolo correto mas que não é satisfatório porque requer um Verificador de tempo exponencial. Digamos que ϕ tem as variáveis x_1 a x_m.

Seja f_i a função onde para $0 \leq i \leq m$ and $a_1, \ldots, a_i \in \{0,1\}$ fazemos $f_i(a_1, \ldots, a_i)$ ser igual ao número de atribuições satisfazendo ϕ tais que cada $x_j = a_j$ para $j \leq i$. A função constante $f_0()$ é o número de atribuições satisfazendo ϕ. A função $f_m(a_1, \ldots, a_m)$ é 1 se aqueles a_i's satisfazem ϕ; caso contrário, ela é 0. Uma identidade fácil se verifica para todo $i < m$ e $a_1, \ldots, a_i$:

$$f_i(a_1, \ldots, a_i) = f_{i+1}(a_1, \ldots, a_i, 0) + f_{i+1}(a_1, \ldots, a_i, 1).$$

O protocolo para *#SAT* começa com a fase 0 e termina com a fase $m + 1$. A entrada é o par $\langle \phi, k \rangle$.

Fase 0. P envia $f_0()$ a V.
V verifica que $k = f_0()$ e *rejeita* se não.

Fase 1. P envia $f_1(0)$ e $f_1(1)$ a V.
V verifica que $f_0() = f_1(0) + f_1(1)$ e *rejeita* se não.

Fase 2. P envia $f_2(0,0)$, $f_2(0,1)$, $f_2(1,0)$, e $f_2(1,1)$ a V.
V verifica que $f_1(0) = f_2(0,0) + f_2(0,1)$ e $f_1(1) = f_2(1,0) + f_2(1,1)$ e *rejeita* se não.
$\vdots$

Fase m. P envia $f_m(a_1, \ldots, a_m)$ para cada atribuição aos a_i's.
V verifica as 2^{m-1} equações ligando f_{m-1} a f_m e *rejeita* se qualquer delas falha.

Fase m+1. V verifica que os valores $f_m(a_1, \ldots, a_m)$ estão corretos para cada atribuição aos a_i's, calculando ϕ sobre cada atribuição. Se todas as atribuições estão corretas, V *acceita*; caso contrário, V *rejeita*. Isso completa a descrição do protocolo.

Esse protocolo não provê uma prova de que *#SAT* está em IP porque o Verificador tem que gastar tempo exponencial somente para ler as mensagens exponencialmente longas que o Provador envia. Vamos examiná-lo quanto à sua corretude assim mesmo, porque isso nos ajuda a entender o próximo, mais eficiente, protocolo.

Intuitivamente, um protocolo reconhece uma linguagem A se um Provador pode convencer o Verificador da pertinência de cadeias em A. Em outras palavras, se uma cadeia é um membro de A, algum Provador pode causar ao Verificador aceitar com alta probabilidade. Se a cadeia não é um membro de A, nenhum Provador—nem mesmo um torto ou desviado—pode causar ao Verificador aceitar com mais do que baixa probabilidade. Usamos o símbolo P para designar o Provador que corretamente segue o protocolo e que portanto faz V aceitar com alta probabilidade quanto a entrada está em A. Usamos o símbolo $\tilde{P}$ para designar qualquer Provador que interage com o Verificador quando a

entrada não está em A. Pense em $\widetilde{P}$ como um adversário—como se $\widetilde{P}$ estivesse tentando fazer V aceitar quando V deveria rejeitar. A notação $\widetilde{P}$ é sugestiva de um Provador "torto."

No protocolo *#SAT* que acabamos de descrever, o Verificador ignora sua entrada aleatória e opera deterministicamente uma vez que o Provador tenha sido selecionado. Para provar que o protocolo está correto, estabelecemos dois fatos. Primeiro, se k é o número correto de atribuições que satisfazem ϕ na entrada $\langle \phi, k \rangle$, algum Provador P causa V a aceitar. O Provador dá respostas corretas em toda fase cumpre a tarefa. Segundo, se k não está correta, todo Provador $\widetilde{P}$ causa V a rejeitar. Argumentamos isso da seguinte forma.

Se k não está correta e $\widetilde{P}$ dá respostas corretas, V rejeita de imediato na fase 0 porque $f_0()$ é o número de atribuições satisfazendo ϕ e conseqüentemente $f_0() \neq k$. Para evitar que V rejeite na fase 0, $\widetilde{P}$ tem que enviar um valor incorreto para $f_0()$, denotado $\widetilde{f}_0()$. Intuitivamente, $\widetilde{f}_0()$ é uma *mentira* sobre o valor de $f_0()$. Como na vida real, mentiras puxam mentiras, e $\widetilde{P}$ é forçado a continuar mentindo sobre outros valores de f_i de modo a evitar ser apanhado durante as fases posteriores. Em algum momento essas mentiras chegam com $\widetilde{P}$ na fase $m+1$ onde V verifica os valores de f_m diretamente.

Mais precisamente, pelo fato de que $\widetilde{f}_0() \neq f_0()$, pelo menos um dos valores $f_1(0)$ e $f_1(1)$ que $\widetilde{P}$ envia na fase 1 tem que estar incorreto; caso contrário, V rejeita quando ele verifica se $f_0() = f_1(0) + f_1(1)$. Vamos dizer que $f_1(0)$ está incorreto e chamemos o valor que é enviado $\widetilde{f}_1(0)$, ao invés de $f_1(0)$. Continuando dessa maneira vemos que em toda fase $\widetilde{P}$ tem que terminar enviando algum valor incorreto $\widetilde{f}_i(a_1, \ldots, a_i)$, ou V teria rejeitado até aquele ponto. Mas quando V verifica o valor incorreto $\widetilde{f}_m(a_1, \ldots, a_m)$ na fase $m+1$ ele rejeita de qualquer forma. Conseqüentemente mostramos que se k está incorreto, V rejeita independentemente do que $\widetilde{P}$ faz. Por conseguinte, o protocolo está correto.

O problema com esse protocolo é que o número de mensagens duplica a cada fase. Essa duplicação ocorre porque o Verificador requer que os dois valores $f_{i+1}(\ldots, 0)$ e $f_{i+1}(\ldots, 1)$ confirmem o valor $f_i(\ldots)$. Se pudéssemos achar uma maneira pela qual o Verificador confirme um valor de f_i com apenas um único valor de f_{i+1}, o número de mensagens não cresceria mesmo. Podemos fazer isso estendendo as funções f_i para entradas nã-booleanas e confirmando o único valor $f_{i+1}(\ldots, z)$ para algum z selecionado aleatoriamente a partir de um corpo finito.

PROVA Seja ϕ uma fnc-fórmula com variáveis x_1 a x_m. Em uma técnica chamada ***aritmetização***, associamos com ϕ um polinômio $p(x_1, \ldots, x_m)$ onde p imita ϕ simulando as operações booleanas $\wedge$, $\vee$, e $\neg$ com as operações aritméticas $+$ e $\times$ da seguinte forma. Se α e β são subfórmulas substituimos expressões

$$\begin{array}{lll} \alpha \wedge \beta & \text{por} & \alpha\beta, \\ \neg\alpha & \text{por} & 1-\alpha, \text{ e} \\ \alpha \vee \beta & \text{por} & \alpha * \beta = 1-(1-\alpha)(1-\beta). \end{array}$$

Uma observação a respeito de p que será importante para nós mais adiante

é que o grau de qualquer de suas variáveis não é grande. As operações $\alpha\beta$ e $\alpha * \beta$ cada uma produz um polinômio cujo grau é no máximo a soma dos graus dos polinômios para α e β. Por conseguinte, o grau de qualquer variável é no máximo n, o comprimento de ϕ.

Se às variáveis de p são atribuídos valores booleanos, ela concorda com ϕ sobre aquela atribuição. Calcular p quando às variáveis são atribuídos valores não-booleanos não tem qualquer interpretação óbvia em ϕ. Entretanto, a prova usa tais atribuições mesmo assim para analisar ϕ, tal como a prova do Teorema 10.13 usa atribuições não-booleanas para analisar programas ramificantes lê-uma-vez. As variáveis percorrem um corpo finito $\mathcal{F}$ com q elementos onde q é pelo menos 2^n.

Usamos p para redefinir as funções f_i que definimos na seção da idéia da prova. Para $0 \leq i \leq m$ e para $a_1, \ldots, a_i \in \mathcal{F}$ faça

$$f_i(a_1, \ldots, a_i) = \sum_{a_{i+1}, \ldots, a_m \in \{0,1\}} p(a_1, \ldots, a_m).$$

Observe que essa redefinição estende a definição original porque as duas concordam quando os a_i's tomam valores booleanos. Conseqüentemente, $f_0()$ ainda é o número de atribuições satisfazendo ϕ. Cada uma das funções $f_i(x_1, \ldots, x_i)$ pode ser expressa como um polinômio em x_1 a x_i. O grau de cada um desses polinômios é no máximo aquele de p.

A seguir apresentamos o protocolo para *#SAT*. Inicialmente V recebe a entrada $\langle \phi, k \rangle$ e aritmetiza ϕ para obter o polinômio p. Toda a aritmética é feita no corpo $\mathcal{F}$ com q elementos, onde q é um primo que é maior que 2^n. (Encontrar tal primo q requer um passo extra, mas ignoramos esse ponto aqui porque a prova que damos em breve do resultado mais forte IP = PSPACE não o requer.) Um comentário em duplos parênteses aparece no início da descrição de cada fase.

Fase 0. $[\![P \text{ envia } f_0().]\!]$
$P \rightarrow V$: P envia $f_0()$ para V.
V verifica que $k = f_0()$. V *rejeita* se algum falha.

Fase 1. $[\![P \text{ persuade } V \text{ de que } f_0() \text{ é correto se } f_1(r_1) \text{ for correto.}]\!]$
$P \rightarrow V$: P envia os coeficientes de $f_1(z)$ como um polinômio em z.
V usa esses coeficientes para calcular $f_1(0)$ e $f_1(1)$. Ele então verifica que o grau do polinômio é no máximo n e que $f_0() = f_1(0) + f_1(1)$. V *rejeita* se algum falha. (Lembre-se de que todos os cálculos são feitos sobre $\mathcal{F}$.)
$V \rightarrow P$: V seleciona r_1 aleatoriamente de $\mathcal{F}$ e o envia a P.

Fase 2. $[\![P \text{ persuade } V \text{ de que } f_1(r_1) \text{ é correto se } f_2(r_1, r_2) \text{ for correto.}]\!]$
$P \rightarrow V$: P envia os coeficientes de $f_2(r_1, z)$ como um polinômio em z.
V usa esses coeficientes para calcular $f_2(r_1, 0)$ e $f_2(r_1, 1)$. Ele então verifica que o grau do polinômio é no máximo n e que $f_1(r_1) = f_2(r_1, 0) + f_2(r_1, 1)$. V *rejeita* se algum falha.
$V \rightarrow P$: V seleciona r_2 aleatoriamente de $\mathcal{F}$ e o envia a P.
$\vdots$

Fase *i*. $[\![P \text{ persuade } V \text{ de que } f_{i-1}(r_1, \ldots, r_{i-1}) \text{ é correto se } f_i(r_1, \ldots, r_i) \text{ for}$

correto.⟧
$P \rightarrow V$: P envia os coeficientes de $f_i(r_1, \ldots, r_{i-1}, z)$ como um polinômio em z. V usa esses coeficientes para calcular $f_i(r_1, \ldots, r_{i-1}, 0)$ e $f_i(r_1, \ldots, r_{i-1}, 1)$. Ele então verifica que o grau do polinômio é no máximo n e também que $f_{i-1}(r_1, \ldots, r_{i-1}) = f_i(r_1, \ldots, r_{i-1}, 0) + f_i(r_1, \ldots, r_{i-1}, 1)$. V *rejeita* se algum falha.
$V \rightarrow P$: V seleciona r_i aleatoriamente de $\mathcal{F}$ e o envia a P.
⋮

Fase m+1. ⟦V verifica diretamente que $f_m(r_1, \ldots, r_m)$ está correto.⟧
V calcula $p(r_1, \ldots, r_m)$ para comparar com o valor que V tem para $f_m(r_1, \ldots, r_m)$. Se eles são iguais, V *aceita*; caso contrário, V *rejeita*. Isso completa a descrição do protocolo.

Agora mostramos que esse protocolo aceita #*SAT*. Primeiro, se ϕ tem k atribuições que a satisfazem, V obviamente aceita com certeza se o Provadr P segue o protocolo. Segundo, mostramos que se ϕ não tem k atribuições, nenhum Provador pode fazê-lo aceitar com mais que uma baixa probabilidade. Seja $\widetilde{P}$ qualquer Provador.

Para evitar que V rejeite de imediato, $\widetilde{P}$ tem que enviar um valor incorreto $\widetilde{f}_0()$ para $f_0()$ na fase 0. Conseqüentemente, na fase 1 um dos valores que V calcula para $f_1(0)$ e $f_1(1)$ tem que estar incorreto, e portanto os coeficientes que $\widetilde{P}$ enviou para $f_1(z)$ como um polinômio em z têm que estar errados. Seja $\widetilde{f}_1(z)$ a função que esses coeficientes representam. A seguir vem um passo chave da prova.

Quando V pega aleatoriamente r_1 em $\mathcal{F}$, afirmamos que $\widetilde{f}_1(r_1)$ tende a não ser igual a $f_1(r_1)$. Para $n \geq 10$ mostramos que

$$\Pr\big[\, \widetilde{f}_1(r_1) = f_1(r_1) \,\big] < n^{-2}.$$

Esse limitante na probabilidade segue do Lema 10.14: Um polinômio em uma única variável de grau no máximo d não pode ter mais que d raízes, a menos que ele sempre resulte em 0. Conseqüentemente, quaisquer dois polinômios em uma única variável de grau no máximo d pode concordar em no máximo d lugares, a menos que eles concordem em todos os lugares.

Recordemos que o grau do polinômio para f_1 é no máximo n e que V rejeita se o grau do polinômio que $\widetilde{P}$ envia para $\widetilde{f}_1$ é maior que n. Já determinamos que essas funções não concordam em todos os pontos, portanto o Lema 10.14 implica que elas podem concordar em no máximo n lugares. O tamanho de $\mathcal{F}$ é maior que 2^n. A chance de que r_1 venha a ser um dos lugares onde as funções concordam é no máximo $n/2^n$, que é menor que n^{-2} para $n \geq 10$.

Para recapitular o que mostramos até agora, se $\widetilde{f}_0()$ é errada, o polinômio de $\widetilde{f}_1$ tem que estar errado, e então $\widetilde{f}_1(r_1)$ seria provavelmente errado em virtude da afirmação precedente. No caso improvável em que $\widetilde{f}_1(r_1)$ concorda com $f_1(r_1)$, $\widetilde{P}$ foi "sortudo" nessa fase e será capaz de fazer V aceitar (muito embora V deveria rejeitar) seguindo as instruções para P no restante do protocolo.

Continuando adiante com o argumento, se $\widetilde{f}_1(r_1)$ estivesse errado, pelo me-

nos um dos valores que V computa para $f_2(r_1, 0)$ e $f_2(r_1, 1)$ na fase 2 tem que estar errado, portanto os coeficientes que $\widetilde{P}$ enviou para $f_2(r_1, z)$ como um polinômio em z têm que estar errados. Seja $\widetilde{f}_2(r_1, z)$ a função que esses coeficientes representam. Os polinômios para $f_2(r_1, z)$ e $\widetilde{f}_2(r_1, z)$ têm graus no máximo n, portanto tal qual antes, a probabilidade de que eles concordam em um r_2 aleatório em $\mathcal{F}$ é no máximo n^{-2}. Portanto, quando V pega r_2 aleatoriamente, $\widetilde{f}_2(r_1, r_2)$ provavelmente está errado.

O caso geral segue da mesma maneira para mostrar que para cada $1 \leq i \leq m$ se

$$\widetilde{f}_{i-1}(r_1, \ldots, r_{i-1}) \neq f_{i-1}(r_1, \ldots, r_{i-1}),$$

então para $n \geq 10$ e para r_i é escolhido aleatoriamente em $\mathcal{F}$

$$\Pr\big[\, \widetilde{f}_i(r_1, \ldots, r_i) = f_i(r_1, \ldots, r_i) \,\big] \leq n^{-2}.$$

Portanto, dando um valor incorreto para $f_0()$, $\widetilde{P}$ é provavelmente forçado a dar valores incorretos para $f_1(r_1)$, $f_2(r_1, r_2)$, e assim por diante para $f_m(r_1, \ldots, r_m)$. A probabilidade de que $\widetilde{P}$ tenha sorte porque V seleciona um r_i, onde $\widetilde{f}_i(r_1, \ldots, r_i) = f_i(r_1, \ldots, r_i)$ muito embora $\widetilde{f}_i$ e f_i sejam diferentes em alguma fase, é no máximo o número de fases m vezes n^{-2} ou no máximo $1/n$. Se $\widetilde{P}$ nunca tem sorte, ele em algum momento envia um valor incorreto para $f_m(r_1, \ldots, r_m)$. Mas V verifica esse valor de f_m diretamente na fase $m+1$ e vai apanhar qualquer erro naquele ponto. Portanto se k não é o número de atribuições que satisfazem ϕ, nenhum Provador pode fazer o Verificador aceitar com probabilidade maior que $1/n$.

Para completar a prova do teorema, precisamos apenas mostrar que o Verificador opera em tempo polinomial probabilístico, que é óbvio de sua descrição.

A seguir, retornamos à prova do Lema 10.32, de que PSPACE $\subseteq$ IP. A prova é similar àquela do Teorema 10.33 exceto por uma idéia adicional usada aqui para baixar os graus de polinômios que ocorrem no protocolo.

IDÉIA DA PROVA Vamos primeiro tentar a idéia que usamos na prova precedente e determinar onde a dificuldade ocorre. Para mostrar que toda linguagem em PSPACE está em IP, precisamos somente mostrar que a linguagem PSPACE-completa *TQBF* está em IP. Seja ψ uma fórmula booleana quantificada da forma

$$\psi = \mathsf{Q}_1 x_1 \, \mathsf{Q}_2 x_2 \cdots \mathsf{Q}_m x_m \, [\, \phi \,],$$

onde ϕ é uma fnc-fórmula e cada Q_i é $\exists$ ou $\forall$. Definimos funções f_i como antes, exceto que agora levamos os quantificadores em consideração. Para $0 \leq i \leq m$ e $a_1, \ldots, a_m \in \{0, 1\}$ faça

$$f_i(a_1, \ldots, a_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathsf{Q}_{i+1} x_{i+1} \cdots \mathsf{Q}_m x_m \, [\, \phi(a_1, \ldots, a_i) \,] \text{ é verdadeiro;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $\phi(a_1, \ldots, a_i)$ é ϕ com a_1 a a_i substitutuindo x_1 a x_i. Portanto $f_0()$ é o valor verdade de ψ. Temos então as identidades aritméticas

$$\mathsf{Q}_{i+1} = \forall\text{:} \quad f_i(a_1, \ldots, a_i) = f_{i+1}(a_1, \ldots, a_i, 0) \cdot f_{i+1}(a_1, \ldots, a_i, 1) \quad \text{e}$$
$$\mathsf{Q}_{i+1} = \exists\text{:} \quad f_i(a_1, \ldots, a_i) = f_{i+1}(a_1, \ldots, a_i, 0) * f_{i+1}(a_1, \ldots, a_i, 1).$$

Lembre-se de que definimos $x * y$ como sendo $1 - (1 - x)(1 - y)$.

Uma variação natural do protocolo para *#SAT* logo aparece onde estendemos as f_i's para um corpo finito e usamos as identidades para quantificadores ao invés das identidades para somatório. O problema com essa idéia é que, quando aritmetizado, todo quantificador pode duplicar o grau do polinômio resultante. Os graus dos polinômios poderiam então se tornar exponencialmente grandes, o que exigiria ao Verificador rodar por tempo exponencial para processar a quantidade exponencialmente grande de coeficientes que o Provador precisaria enviar para descrever os polinômios.

Para manter os graus dos polinômios pequenos, introduzimos uma operação de redução R que reduz os graus de polinômios sem mudar seu comportamento sobre entradas booleanas.

PROVA Seja $\psi = \mathsf{Q}x_1 \cdots \mathsf{Q}x_m\,[\,\phi\,]$ uma fórmula booleana quantificada, onde ϕ é uma fnc-fórmula. Para aritmetizar ψ introduzimos a expressão

$$\psi' = \mathsf{Q}x_1\ Rx_1\ \mathsf{Q}x_2\ Rx_1Rx_2\ \mathsf{Q}x_3\ Rx_1Rx_2Rx_3\ \cdots\ \mathsf{Q}x_m\ Rx_1 \cdots Rx_m\,[\,\phi\,].$$

Não se preocupe com o significado de Rx_i no momento. É útil somente para definir as funções f_i. Reescrevemos ψ' como

$$\psi' = \mathsf{S}_1 y_1\, \mathsf{S}_2 y_2 \cdots \mathsf{S}_k y_k\,[\,\phi\,],$$

onde cada $\mathsf{S}_i \in \{\forall, \exists, R\}$ e $y_i \in \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Para cada $i \leq k$ definimos a função f_i. Definimos $f_k(x_1, \ldots, x_m)$ como sendo o polinômio $p(x_1, \ldots, x_m)$ obtido aritmetizando ϕ. Para $i < k$ definimos f_i em termos de f_{i+1}:

$$\mathsf{S}_{i+1} = \forall\text{:} \quad f_i(\ldots) = f_{i+1}(\ldots, 0) \cdot f_{i+1}(\ldots, 1);$$
$$\mathsf{S}_{i+1} = \exists\text{:} \quad f_i(\ldots) = f_{i+1}(\ldots, 0) * f_{i+1}(\ldots, 1);$$
$$\mathsf{S}_{i+1} = R\text{:} \quad f_i(\ldots, a) = (1-a)f_{i+1}(\ldots, 0) + af_{i+1}(\ldots, 1).$$

Se S é $\forall$ ou $\exists$, f_i tem uma variável de entrada a menos que f_{i+1}. Se S é R, as duas funções têm o mesmo número de variáveis de entrada. Conseqüentemente, a função f_i, em geral, não dependerá das i variáveis. Para evitar incômodos índices usamos "..." no lugar de a_1 a a_j para os valores apropriados de j. Além disso, reordenamos as entradas para as funções de modo que a variável de entrada y_{i+1} é o último argumento.

Note que a operação Rx sobre polinômios não muda seus valores sobre entradas booleanas. Por conseguinte, $f_0()$ é ainda o valor-verdade de ψ. Entretanto, note que a operação Rx produz um resultado que é linear em x. Adicionamos $Rx_1 \cdots Rx_i$ após $\mathsf{Q}_i x_i$ em ψ' de modo a reduzir o grau de cada variável para 1 antes da elevação ao quadrado devido à aritmetização de Q_i.

Agora estamos prontos para descrever o protocolo. Todas as operações aritméticas nesse protocolo são sobre um corpo $\mathcal{F}$ de tamanho no mínimo n^4, onde n é o comprimento de ψ. V pode encontrar um primo desse tamanho por si só, portanto P não precisa lhe fornecer um.

Fase 0. $[\![P \text{ envia } f_0().]\!]$
$P \rightarrow V$: P envia $f_0()$ para V.
V verifica que $f_0() = 1$ e *rejeita* se não.
$\vdots$

Fase i. $[\![P \text{ persuade } V \text{ de que } f_{i-1}(r_1 \cdots) \text{ está correta se } f_i(r_1 \cdots, r) \text{ for correta.}]\!]$
$P \rightarrow V$: P envia os coeficientes de $f_i(r_1 \cdots, z)$ como um polinômio em z. (Aqui $r_1 \cdots$ denota uma valoração das variáveis com os valores aleatórios previamente selecionados $r_1, r_2, \ldots.$)
V usa esses coeficientes para calcular $f_i(r_1 \cdots, 0)$ e $f_i(r_1 \cdots, 1)$. Aí então ele verifica que o grau do polinômio é no máximo n e que essas identidades se verificam:

$$f_{i-1}(r_1 \cdots) = \begin{cases} f_i(r_1 \cdots, 0) \cdot f_i(r_1 \cdots, 1) & \mathsf{S} = \forall, \\ f_i(r_1 \cdots, 0) * f_i(r_1 \cdots, 1) & \mathsf{S} = \exists, \end{cases}$$

e

$$f_{i-1}(r_1 \cdots, r) = (1 - r) f_i(r_1 \cdots, 0) + r f_i(r_1 \cdots, 1) \quad \mathsf{S} = R.$$

Se qualquer deles falha, V *rejeita*.
$V \rightarrow P$: V pega um r aleatório em $\mathcal{F}$ e o envia para P. (Quando $\mathsf{S} = R$ esse r substitui o r anterior.)
Vá para a Fase $i+1$, onde P tem que persuadir V de que $f_i(r_1 \cdots, r)$ está correta.
$\vdots$

Fase $k+1$. $[\![V \text{ verifica diretamente que } f_k(r_1, \ldots, r_m) \text{ está correta.}]\!]$
V calcula $p(r_1, \ldots, r_m)$ para comparar com o valor que V tem para $f_k(r_1, \ldots, r_m)$. Se eles forem iguais, V *aceita*; caso contrário, V *rejeita*. Isso completa a descrição do protocolo.

Provar a corretude desse protocolo é similar a provar a corretude do protocolo *#SAT*. Claramente, se ψ é verdadeira, P pode seguir o protocolo e V aceitará. Se ψ é falsa $\widetilde{P}$ tem que mentir na fase 0 enviando um valor incorreto para $f_0()$. Na fase i, se V tem um valor incorreto para $f_{i-1}(r_1 \cdots)$, um dos valores $f_i(r_1 \cdots, 0)$ e $f_i(r_1 \cdots, 1)$ tem que estar incorreta e o polinômio para f_i tem que estar incorreta. Conseqüentemente, para um r aleatório a probabilidade de que $\widetilde{P}$ tenha sorte nessa fase porque $f_i(r_1 \cdots, r)$ está correta é no máximo o grau do polinômio dividido pelo tamanho do corpo ou n/n^4. O protocolo procede para $O(n^2)$ fases, portanto a probabilidade de que $\widetilde{P}$ tenha sorte em alguma fase é no máximo $1/n$. Se $\widetilde{P}$ nunca tiver sorte, V rejeitará na fase $k + 1$.

10.5 COMPUTAÇÃO PARALELA

Um ***computador paralelo*** é aquele que pode realizar múltiplas operações simultaneamente. Computadores paralelos podem resolver certos problemas muito mais rapidamente que ***computadores seqüenciais***, que podem somente fazer uma única operação a cada vez. Na prática, a distinção entre os dois é levemente embaçada porque a maioria dos computadores reais (incluindo os "seqüenciais") são projetados para usar algum paralelismo à medida que eles executam instruções individuais. Focamos aqui em paralelismo *massivo* através do qual um número enorme (pense em milhões ou mais) de elementos processadores estão ativamente participando em uma única computação.

Nesta seção introduzimos brevemente a teoria da computação paralela. Descrevemos um modelo de um computador paralelo e usamo-lo para dar exemplos de certos problemas que se prestam muito bem à paralelização. Também exploramos a possibilidade de que paralelismo pode não ser adequado para certos outros problemas.

CIRCUITOS BOOLEANOS UNIFORMES

Um dos modelos mais populares em trabalho teórico em algoritmos paralelos é chamado ***Máquina de Acesso Aleatório Paralelo*** ou ***MAAP***. No modelo MAAP, processadores idealizados com um conjunto de instruções simples baseado em computadores reais interagem através de uma memória compartilhada. Nesta breve seção não podemos descrever MAAP's em detalhe. Ao invés, usamos um modelo alternativo de computador paralelo que introduzimos para um outro propósito no Capítulo 9: circuitos booleanos.

Circuitos booleanos têm certas vantagens e desvantagens com um modelo de computação paralela. No lado positivo, o modelo é simples de descrever, o que torna as provas mais fáceis. Circuitos também têm uma óbvia semelhança com projetos atuais de hardware e nesse sentido o modelo é realista. No lado negativo, circuitos são difíceis de "programar" porque os processadores individuais são tão fracos. Além disso, proibimos ciclos em nossa definição de circuitos booleanos, em contraste com os circuitos que podemos realmente construir.

No modelo de circuitos booleanos de um computador paralelo, tomamos cada porta como sendo um processador individual, portanto definimos a ***complexidade do processador*** de um circuito booleano como sento seu *tamanho*. Consideramos que cada processador computa sua função em uma única unidade de tempo, portanto definimos a ***complexidade de tempo paralelo*** de um circuito booleano como sendo sua *profundidade*, ou a maior distância de uma variável de entrada para a porta de saída.

Qualquer circuito específico tem um número fixo de variáveis de entrada, portanto usamos famílias de circuitos como na Definição 9.27 para reconhecer linguagens. Precisamos impor um requisito técnico sobre famílias de circuitos

de modo que elas correspondam a modelos de computação paralela tais como PRAMs onde uma única máquina é capaz de lidar com todos os comprimentos de entrada. Esse requisito diz que podemos facilmente obter todos os membros em uma família de circuitos. Esse requisito de ***uniformidade*** é razoável porque saber que um pequeno circuito existe para reconhecer certos elementos de uma linguagem não é muito útil se o próprio circuito é difícil de encontrar. Isso nos leva à definição a seguir.

DEFINIÇÃO 10.34

Uma família de circuitos $(C_1, C_2, \ldots)$ é ***uniforme*** se algum transdutor de espaço logarítmico T dá como saída $\langle C_n \rangle$ quando a entrada de T é $\mathtt{1}^n$.

Lembre-se que a Definição 9.28 definia a complexidade de tamanho e de profundidade de linguagens em termos de famílias de circuitos de tamanho e profundidade mínimos. Aqui, consideramos o tamanho e a profundidade *simultâneos* de uma família de um único circuito de modo a identificar quantos processadores precisamos para atingir uma complexidade específica de tempo paralelo ou vice versa. Digamos que uma linguagem tenha complexidade de circuito ***de tamanho–profundidade simultâneos*** no máximo $(f(n), g(n))$ se uma família uniforme de circuitos existe para essa linguagem com complexidade de tamanho $f(n)$ e complexidade de profundidade $g(n)$.

EXEMPLO 10.35

Seja A a linguagem sobre $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$ consistindo de todas as cadeias com um número ímpar de 1s. Podemos testar pertinência em A computando a função paridade. Podemos implementar a porta de paridade de duas entradas $x \oplus y$ com as operações padrão E, OU, e NÃO como $(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$. Sejam as entradas para o circuito $x_1, \ldots, x_n$. Uma maneira de obter um circuito para a função de paridade é construir portas g_i em que $g_1 = x_1$ e $g_i = x_i \oplus g_{i-1}$ para $i \leq n$. Essa construção usa $O(n)$ de tamanho e profundidade.

O Exemplo 9.29 descreveu um outro circuito para a função de paridade com $O(n)$ de tamanho e $O(\log n)$ de profundidade construindo uma árvore binária de portas $\oplus$. Essa construção é uma melhoria significativa porque ela usa exponencialmente menos tempo paralelo que a construção precedente. Portanto a complexidade de tamanho–profundidade de A é $(O(n), O(\log n))$. ∎

EXEMPLO 10.36

Lembre-se que podemos usar circuitos para computar funções que dão como saída cadeias. Considere a função de ***multiplicação de matrizes booleanas***. A

entrada tem $2m^2 = n$ variáveis representando duas matrizes $m \times m$ $A = \{a_{ik}\}$ e $B = \{b_{ik}\}$. A saída é m^2 valores representando a matriz $m \times m$ $C = \{c_{ik}\}$, onde

$$c_{ik} = \bigvee_j (a_{ij} \wedge b_{jk}).$$

O circuito para essa função tem portas g_{ijk} que computam $a_{ij} \wedge b_{jk}$ para cada i, j, e k. Adicionalmente, para cada i e k o circuito contém uma árvore binária de portas $\vee$ gates para computar $\bigvee_j g_{ijk}$. Cada árvore dessa contém $m-1$ portas OU e tem profundidade $\log m$. Conseqüentemente esses circuitos para multiplicação de matrizes booleanas têm tamanho $O(m^3) = O(n^{3/2})$ e profundidade $O(\log n)$.

EXEMPLO 10.37

Se $A = \{a_{ij}\}$ é uma matriz $m \times m$ definimos o ***fecho transitivo*** de A como a matriz

$$A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^m,$$

onde A^i é a matriz produto de A com si própria i vezes e $\vee$ é o OU bit-a-bit dos elementos das matrizes. A operação de fecho transitivo é intimamente relacionada ao problema *CAMINH* e portanto à classe NL. Se A é a matriz de adjacência de um grafo direcionado G, A^i é a matriz de adjacência do grafo com os mesmos nós nos quais uma aresta indica a presença de um caminho de comprimento i em G. O fecho transitivo de A é a matriz de adjacência do grafo no qual uma aresta indica a presença de um caminho de qualquer comprimento em G.

Podemos representar a computação de A^i com uma árvore binária de tamanho i e profundidade $\log i$ na qual um nó computa o produto das duas matrizes abaixo dele. Cada nó é computado por um circuito de tamanho $O(n^{3/2})$ e profundidade logarítmica. Logo, o circuito que computa A^m tem tamanho $O(n^2)$ e profundidade $O(\log^2 n)$. Fazemos circuitos para cada A^i o que adiciona um outro fator de m ao tamanho e uma camada adicional de profundidade $O(\log n)$. Logo, a complexidade de tamanho–profundidade do fecho transitivo é $(O(n^{5/2}), O(\log^2 n))$.

A CLASSE NC

Muitos problemas interessantes têm complexidade de tamanho–profundidade $(O(n^k), O(\log^k n))$ para alguma constante k. Tais problemas podem ser considerados como altamente paralelizáveis com um número moderado de processadores. Isso desperta a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 10.38

Para $i \geq 1$ seja $\mathbf{NC}^i$ a classe de linguagens que podem ser decididas por uma família uniforme[3] de circuitos com tamanho polinomial e profundidade $O(\log^i n)$. Seja **NC** a classe de linguagens que estão em NC^i para algum i. Funções que são computadas por tais famílias de circuitos são chamadas $\mathbf{NC}^i$ ***computáveis*** ou **NC** ***computáveis***.[4]

Exploramos o relacionamento dessas classes de complexidade com outras classes de linguagens que encontramos. Primeiro, fazemos uma conexão entre espaço de máquinas de Turing e profundidade de circuitos. Problemas que são solúveis em profundidade logarítmica são também solúveis em espaço logarítmico. Reciprocamente, problemas que são solúveis em espaço logarítmico, mesmo não-deterministicamente, são solúveis em profundidade logarítmica elevada ao quadrado.

TEOREMA 10.39

$\mathrm{NC}^1 \subseteq \mathrm{L}$.

PROVA Esboçamos um algoritmo de espaço log para decidir uma linguagem A em NC^1. Sobre a entrada w de comprimento n, o algoritmo pode construir a descrição quando necessário do n-ésimo circuito na família uniforme de circuitos para A. Então o algoritmo pode calcular o valor do circuito usando uma busca em profundidade a partir da porta de saída. A única memória que é necessária para manter registro do progresso da busca é para guardar o caminho para a porta corrente que está sendo explorada e guardar quaisquer resultados parciais que tenham sido obtidos ao longo daquele caminho. O circuito tem profundidade logarítmica; logo, apenas espaço logarítmico é requerido para a simulação.

TEOREMA 10.40

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{NC}^2$.

IDÉIA DA PROVA Compute o fecho transitivo do grafo de configurações de uma NL-máquina. Dê como saída a posição correspondente à presença de um

[3]Definir uniformidade em termos de transdutores de espaço log é padrão para NC^i quando $i \geq 2$ mas dá um resultado não-padrão para NC^1 (que contém a classe padrão NC^1 como um subconjunto). Damos essa definição mesmo assim, porque ela é mais simples e adequada para nossos propósitos.

[4]Steven Cook inventou o nome NC para "a classe de Nick" porque Nick Pippenger for a primeira pessoa a reconhecer sua importância.

caminho da configuração inicial para a configuração de aceitação.

PROVA Seja A uma linguagem que é aceita por uma máquina NL M, onde A foi codificada no alfabeto $\{0,1\}$. Construímos uma família uniforme de circuitos $(C_0, C_1, \ldots)$ para A. Para obter C_i construímos um grafo G que é similar ao grafo de computação para M sobre uma entrada w de comprimento n. Não conhecemos a entrada w quando construímos o circuito—somente seu comprimento n. As entradas para o circuito são variáveis w_1 a w_n, cada uma correspondendo a uma posição na entrada.

Lembre-se de que uma configuração de M sobre w descreve o estado, o conteúdo da fita de trabalho, e as posições tanto da entrada quando das cabeças da fita de trabalho, mas não inclui a w propriamente dita. Daí a coleção de configurações de M sobre w na realidade não dependem de w—somente do comprimento n de w. Essas configurações em quantidade polinomial formam os nós de G.

As arestas de G são rotuladas com as variáveis de entrada w_i. Se c_1 e c_2 são dois nós de G e c_1 indica a posição da cabeça de entrada i, colocamos a aresta (c_1, c_2) em G com rótulo w_i (ou $\overline{w_i}$) se c_1 pode originar c_2 em um único passo quando a cabeça de entrada está lendo um 1 (ou 0), conforme a função de transição de M. Se c_1 pode originar c_2 em um único passo, o que quer que a cabeça de entrada esteja lendo, colocamos aquela aresta em G sem rótulo.

Se montarmos as arestas de G de acordo com uma cadeia w de comprimento n, um caminho existe da configuração inicial para a configuração de aceitação se e somente se M aceita w. Logo, um circuito que computa o fecho transitivo de G e dá como saída a posição indicando a presença de um tal caminho aceita exatamente aquelas cadeias em A de comprimento n. Esse circuito tem tamanho polinomial e profundidade $O(\log^2 n)$.

Um transdutor de espaço log é capaz de construir G e conseqüentemente C_n sobre a entrada 1^n. Veja o Teorema 8.25 para uma descrição mais detalhada de um transdutor de espaço log space similar.

A classe de problemas solúveis em tempo polinomial inclui todos os problemas solúveis em NC, como mostra o teorema seguinte.

TEOREMA 10.41

NC $\subseteq$ P.

PROVA Um algoritmo de tempo polinomial pode rodar o transdutor de espaço log para gerar o circuito C_n e simulá-lo sobre uma entrada de comprimento n.

P-COMPLETUDE

Agora consideramos a possibilidade de que todos os problemas em P estejam também em NC. Igualdade entre essas classes seria surpreendente porque implicaria que todos os problemas solúveis em tempo polinomial são altamente paralelizáveis. Introduzimos o fenômeno da P-completude para dar evidência teórica que alguns problemas em P são inerentemente seqüenciais.

DEFINIÇÃO 10.42

Uma linguagem B é **P-*completa*** se

1. $B \in \mathrm{P}$, e
2. toda A em P é redutível em espaço log a B.

O próximo teorema segue o espírito do Teorema 8.23 e tem uma prova similar porque máquinas NL e NC podem computar reduções em espaço log. Deixamos sua prova como o Exercício 10.3.

TEOREMA 10.43

Se $A \leq_{\mathrm{L}} B$ e B está em NC então A está em NC.

Mostramos que o problema de cálculo do valor de um circuito é P-completo. Para um circuito C e uma entrada com valor x escrevemos $C(x)$ como sendo o valor de C sobre x. Seja

$$\textit{VALOR-CIRCUITO} = \{\langle C, x\rangle \mid C \text{ é um circuito booleano e } C(x) = 1\}.$$

TEOREMA 10.44

VALOR-CIRCUITO é P-completo.

PROVA A construção dada no Teorema 9.30 mostra como reduzir qualquer linguagem A em P para *VALOR-CIRCUITO*. Sobre a entrada w a redução produz um circuito que simula a máquina de Turing de tempo polinomial para A. A entrada para o circuito é a própria w. A redução pode ser realizada em espaço log porque o circuito que ela produz tem um estrutura simples e repetitiva.

10.6 CRIPTOGRAFIA

A prática da encriptação, usando códigos secretos para comunicação privada, começa milhares de anos atrás. Durante os tempos romanos, Julius Caesar codificava mensagens para seus generais para proteger contra a possibilidade e interceptação. Mais recentemente, Alan Turing, o inventor da máquina de Turing, liderou um grupo de matemáticos britânicos que quebrou o código alemão usado na Segunda Guerra Mundial para enviar instruções a submarinos que patrulhavam o Oceano Atlântico. Governos ainda dependem de códigos secretos e investem uma uma grande quantidade de esforços na invenção de códigos que sejam difíceis de quebrar e em encontrar fraquezas em códigos que os outros usam. Nos dias de hoje, corporações e indivíduos usam encriptação para aumentar a segurança de sua informação. Em breve, quase toda a comunicação eletrônica será criptograficamente protegida.

Nos últimos anos a teoria da complexidade computacional tem levado a uma revolução no desenho de códigos secretos. O campo da criptografia, como essa área é conhecida, agora se estende para bem além de códigos secretos para comunicação privada e aborda uma larga faixa de questões relativas à segurança da informação. Por exemplo, agora temos a tecnologia para "assinar" digitalmente mensagens para autenticar a identidade do remetente; para viabilizar eleições eletrônicas nas quais os participantes possam votar sobre uma rede e os resultados possam ser publicamente contados sem revelar quaisquer votos individuais e evitar múltipla votação e outras violações; e construir novos tipos de códigos secretos que não requerem que os participantes concordem antecipadamente sobre os algoritmos de encriptação e de decriptação.

Criptografia é uma importante aplicação prática da teoria da complexidade.Telefones celulares digitais, transmissão direta por satélite de imagens de televisão, e comércio eletrônico sobre a Internet, tudo depende de medidas criptográficas para proteger a informação. Tais sistemas em breve desempenharão um papel em na vida da maioria das pessoas. De fato, criptografia tem estimulado muita pesquisa em teoria da complexidade e em outros campos da matemática.

CHAVES SECRETAS

Tradicionalmente, quando um emissor deseja encriptar uma mensagem de modo que somente um certo receptor poderia decriptá-la, o emissor e o receptor compartilham uma ***chave secreta***. A chave secreta é uma porção de informação que é usada pelos algoritmos de encriptação e de decriptação. Manter o sigilo da chave é crucial para a segurança do código porque qualquer pessoa com acesso à chave pode encriptar e decriptar mensagens.

Uma chave que é curta demais pode ser descoberta através de uma busca por força-bruta no espaço total de chaves possíveis. Mesmo uma chave um pouco

mais longa pode ser vulnerável a certos tipos de ataque—dizemos mais sobre isso em breve. A única maneira de se obter segurancça criptográfica perfeita é com chaves que são tão longas quanto o comprimento combinado de todas as mensagens enviadas.

Uma chave que é tão longa quanto o comprimento combinado das mensagens é denominada ***bloco de uso-único***. Essencialmente, todo bit de uma chave de bloco de uso-único é usada somente uma vez para encriptar um bit da mensagem, e então esse bit da chave é descartado. O principal problema com blocos de uso-único é que eles podem ser bastante grandes se uma quantidade significativa de comunicação for antecipada. Para a maioria dos propósitos, blocos de uso-único são trabalhosos demais para serem considerados práticos.

Um código criptográfico que permite uma quantidade ilimitada de comunicação segura com chaves de comprimento apenas moderado é preferível. É interessante que tais códigos não podem existir em princípio mas paradoxalmente são usados na prática. Esse tipo de código não pode existir em princípio porque uma chave que é significativamente mais curta do que o comprimento combinado das mensagens pode ser encontrada por uma busca por força-bruta através do espaço de chaves poss´íveis. Conseqüentemente um código que é baseado em tais chaves é quebrável em princípio. Mas lá dentro reside a solução para o paradoxo. Um código poderia prover segurança adequada na prática de qualquer forma porque a busca por força-bruta é extremamente lenta quando a chave é moderadamente longa, digamos na faixa dos 100 bits. É claro que se o código pudesse ser quebrado de alguma outra maneira, mais rápida, ele é inseguro e não deveria ser usado. A dificuldade reside em se estar certo de que o código não pode ser quebrado rapidamente.

Atualmente não temos nehuma maneira de assegurar que um código com chaves de comprimento moderado é realmente seguro. Para garantir que um código não pode ser quebrado rapidamente, precisaríamos de uma *prova matemática* de que, no mínimo encontrar a chave não pode ser feito rapidamente. Entretanto, tais provas parecem além das capacidades da matemática contemporânea! A razão é que, uma vez que uma chave é descoberta, verificar sua corretude é facilmente realizado inspecionando-se as mensagens que foram decriptadas com ela. Conseqüentemente o problema da verificação de chaves pode ser formulado de tal forma a estar em P. Se pudéssemos provar que as chaves não podem ser encontradas em tempo polinomial, atingiríamos um enorme avanço matemático provando que P é diferente de NP.

Devido ao fato de que somos incapazes de provar matematicamente que códigos são inquebráveis, nos baseamos, ao contrário, em evidência circunstancial. No passado, evidência para a qualidade de um código era obtida contratando-se especialistas que tentavam quebrá-lo. Se eles fossem incapazes de faz-lo, a confiança na sua segurança aumentava. Essa abordagem tem deficiências óbvias. Se alguém tem especialistas melhores que os nossos, ou se não pudermos confiar em nossos próprios especialistas, a integridade de nosso código pode estar comprometida. Entretanto, essa abordagem era a única disponível até recentemente e era usada para dar suporte à confiabilidade de códigos larga-

mente utilizados tais como o *Data Encryption Standard* (*DES*) que foi sancionado pelo *U.S. National Bureau of Standards*.

A teoria da complexidade provê uma outra maneira de se ganhar evidência para a segurança de um código. Podemos mostrar que a complexidade de se quebrar o código está ligada à complexidade de algum outro problema para o qual evidência ululante de intratabilidade já está disponível. Lembre-se de que usamos NP-completude para fornecer evidência de que certos problemas são intratáveis. Reduzir um problema NP-completo ao problema de se quebrar o código mostraria que o problema de se quebrar o código era em si próprio NP-completo. Entretanto, isso não fornece evidência suficiente de segurança porque NP-completude diz respeito a complexidade do pior-caso. Um problema pode ser NP-completo, e mesmo assim fácil de resolver a maior parte do tempo. Códigos têm quase que sempre ser difíceis de quebrar, portanto precisamos de medir complexidade no-caso-médio ao invés de complexidade no-pior-caso.

Um problema que geralmente se acredita ser difícil para o caso médio é o problema da fatoração inteira. Os melhores matemáticos têm estado interessados na fatoração por séculos, mas nenhum descobriu ainda um procedimento rápido para fazê-lo. Certos códigos modernos têm sido construídos em torno do problema da fatoração de modo que quebrar o código correspondo a fatorar um número. Isso constitui evidência convincente para a segurança desses códigos, porque uma maneira eficiente de se quebrar tal código levaria a um algoritmo de fatoração rápido, o que seria um desenvolvimento marcante em teoria computacional dos números.

CRIPTOSSISTEMAS DE CHAVE-PÚBLICA

Mesmo quando chaves criptográficas são moderadamente curtas, seu gerenciamento ainda apresenta um obstáculo ao seu uso amplo em criptografia convencional. Um problema é que todo par de participantes que deseja comunicação privada precisa estabelecer uma chave secreta conjunta para esse propósito. Um outro problema é que cada indivíduo precisa manter um banco de dados secreto de todas as chaves que assim foram estabelecidas.

O desenvolvimento recente da criptografia de chave-pública fornece uma elegante solução para ambos os problemas. Em um ***criptossistema de chave-privada***, ou convencional, a mesma chave é usada tanto para a encriptação quanto para a decriptação. Compare isso com o novo ***criptossistema de chave-pública*** para o qual a chave de decriptação é diferente da, e não facilmente computada a partir da, chave de encriptação.

Embora essa seja uma idéia decepcionantemente simples, separara as duas chaves tem profundas conseqüências. Agora cada indivíduo somente precisa estabelecer um único par de chaves: uma chave de encriptação E e uma chave de decriptação D. O indivíduo mantém D secreta mas publica E. Se um outro indivíduo deseja enviá-lo uma mensagem, ela busca E no diretório público, encripta a mensagem com ela, e a envia para ele. O primeiro indivíduo eó único que conhece D, portanto somente ele pode decriptar aquela mensagem.

Certos criptossistemas de chave-pública podem também ser usados para ***assi-***

naturas digitais. Se um indivíduo aplica seu algoritmo secreto de decriptação a uma mensagem antes de enviá-la, qualquer um pode verificar que ela realmente veio dele aplicando o algoritmo público de encriptação. Ele efetivamente "assinou" aquela mensagem. Essa applicação assume que as funções de encriptação e de decriptação podem ser aplicadas em qualquer uma das duas ordens, como é o caso com o criptossistema RSA.

FUNÇÕES UNIDIRECIONAIS

Agora brevemente investigamos alguns dos fundamentos teóricos da teoria moderna da criptografia, chamadas *funções unidirecionais* e *funções alçapão*. Uma das vantagens de usar teoria da complexidade como um fundamento para criptografia é que ela ajuda a esclarecer as hipóteses sendo feitas quando argumentamos sobre segurança. Assumindo a existência de uma função unidirecional podemos construir criptossistemas de chave-privada seguros. Assumindo a existência de funções alçapão nos permite construir criptossistemas de chave-pública. Ambas as hipóteses têm conseqüências adicionais tanto teóricas quanto práticas. Definimos esses tipos de funções após alguns preliminares.

Uma função $f\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ 'e ***comprimento-preservante*** se os comprimentos de w e $f(w)$ são iguais para todo w. Uma função comprimento-preservante é uma ***permutação*** se ela nunca mapeia duas cadeias para o mesmo lugar—ou seja, se $f(x) \neq f(y)$ sempre que $x \neq y$.

Lembre-se de que a definição de máquina de Turing probabilística dada na Seção 10.2. Vamos dizer que uma máquina de Turing probabilística M computa uma ***função probabilística*** $M\colon \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, onde, se w é uma entrada e x é uma saída, atribuímos

$$\Pr\big[\, M(w) = x \,\big]$$

como sendo a probabilidade de que M pare no estado de aceitação com x sobre sua fita quando ela é inicializada sobre a entrada w. Note que M pode às vezes falhar em aceitar sobre a entrada w, portanto

$$\sum_{x \in \Sigma^*} \Pr\big[\, M(w) = x \,\big] \leq 1.$$

A seguir chegamos à definição de uma função unidirecional. Grosso modo, uma função é unidirecional se ela é fácil de computar mas quase sempre difícil de inverter. Na definição seguinte, f denota função unidirecional facilmente computada e M denota o algoritmo de tempo polinomial probabilístico que podemos pensar como tentando inverter f. Definimos permutações unidirecionais primeiro porque esse caso é um pouco mais simples.

DEFINIÇÃO 10.45

Uma ***permutação unidirecional*** é uma permutação comprimento-preservante f com as duas seguintes propriedades.

1. Ela é computável em tempo polinomial.
2. Para toda MT de tempo polinomial probabilístico M, todo k, e n suficientemente grande, se pegarmos uma w aleatória de comprimento n e rodarmos M sobre a entrada w,

$$\Pr_{M,w}\big[\, M(f(w)) = w \,\big] \leq n^{-k}.$$

   Aqui, $\Pr_{M,w}$ significa que a probabilidade é tomada sobre as escolhas aleatórias feitas por M e a seleção aleatória de w.

Uma ***função unidirecional*** é uma função comprimento-preservante f com as duas seguitnes propriedades.

1. Ela é computável em tempo polinomial.
2. Para toda MT de tempo polinomial probabilístico M, todo k, e n suficientemente grande, se pegarmos uma w aleatória de comprimento n e rodarmos M sobre a entrada w,

$$\Pr\big[\, M(f(w)) = y \text{ onde } f(y) = f(w) \,\big] \leq n^{-k}.$$

Para permutações unidirecionais, qualquer algoritmo de tempo polinomial probabilístico tem apenas uma pequena probabilidade de inverter f; ou seja, é improvável que ele compute w a partir de $f(w)$. Para funções unidirecionais, para qualquer algoritmo de tempo polinomial probabilístico, é improvável que ele seja capaz de encontrar qualquer y que mapeia para $f(w)$.

EXEMPLO 10.46

A função de multiplicação *mult* é uma candidata a função unidirecional. Fazemos $\Sigma = \{0,1\}$ e para qualquer qualquer $w \in \Sigma^*$ suponha que $mult(w)$ seja a cadeia representando o produto da primeira e da segunda metades de w. Formalmente,

$$mult(w) = w_1 \cdot w_2,$$

onde $w = w_1 w_2$ tal que $|w_1| = |w_2|$, ou $|w_1| = |w_2| + 1$ se $|w|$ for ímpar. As cadeias w_1 e w_2 são tratadas como números binários. Preenchemos $mult(w)$ com 0s à esquerda de modo que ela tenha o mesmo comprimento que w. Apesar de uma grande quantidade de pesquisa sobre o problema da fatoração inteira, nenhum algoritmo de tempo polinomial probabilístico é conhecido que possa inverter *mult*, mesmo sobre uma fração polinomial das entradas. ■

Se assumirmos a existência de uma função unidirecional, podemos construir um criptossistema de chave-privada que é demonstravelmente seguro. Essa

construção é demasiado complicada para apresentar aqui. Ao invés, ilustramos como implementar uma aplicação criptográfica diferente com uma função unidirecional.

Uma aplicação simples de uma função unidirecional é um sistema de senhas demonstravelmente seguro. Em um sistema de senhas típico, um usuário tem que entrar com uma senha para ganhar acesso a algum recurso. O sistema mantém um banco de dados de senhas de usuários em uma forma encriptada. As senhas são encriptadas para proteg-las se o banco de dados for deixado desprotegido ou por acidente ou por projeto. Bancos de dados de senhas são freqüentemente deixados desprotegidos de modo que vários programas de aplicação possa lê-los e verificar senhas. Quando um usuário entra com uma senha, o sistema a verifica por validade encriptando-a para determinar se ela bate com a versão armazenada no banco de dados. Obviamente, um esquema de encriptação que é difícil de inverter é desejável porque ele torna a senha não-encriptada difícil de se obter da forma encriptada. Uma função unidirecional é uma escolha natural para uma função de encriptação de senhas.

FUNÇÕES ALÇAPÃO

Não sabemos se a existência de uma função unidirecional apenas é suficiente para permitir a construção de um criptossistema de chave-pública. Para obter tal construção usamos um objeto relacionado chamado *função alçapão*, que poder ser eficientemente invertida na presença de uma informação especial.

Primeiro, precisamos discutir a noção de uma função que indexa uma família de funções. Se tivermos uma família de funções $\{f_i\}$ para i em Σ^*, podemos representá-las pela única função $f\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, onde $f(i, w) = f_i(w)$ para qualquer i e w. Chamamos f de função indexadora. Digamos que f é comprimento-preservante se cada uma das funções indexadas f_i for comprimento-preservante.

DEFINIÇÃO 10.47

Uma ***função alçapão*** $f\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ é uma função indexadora comprimento-preservante que tem uma MT auxiliar de tempo polinomial probabilístico G e uma função auxiliar $h\colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$. O trio f, G, e h satisfaz as três seguintes condições.

1. Funções f e h são computáveis em tempo polinomial.
2. Para toda MT de tempo polinomial probabilístico E e todo k e n suficientemente grande, se tomarmos uma saída aleatória $\langle i, t\rangle$ de G sobre 1^n e uma $w \in \Sigma^n$ aleatória então
$$\Pr\big[\, E(i, f_i(w)) = y, \text{ onde } f_i(y) = f_i(w)\,\big] \leq n^{-k}.$$
3. Para todo n, toda w de comprimento n, e toda saída $\langle i, t\rangle$ de G que ocorre com probabilidade não-zero para alguma entrada para G
$$h(t, f_i(w)) = y, \text{ onde } f_i(y) = f_i(w).$$

A MT probabilística G gera um índice i de uma função no índice da família enquanto gerando simultaneamente um valor t que permite que f_i seja invertida rapidamente. Condição 2 diz que f_i é difícil de inverter na ausência de t. Condição 3 diz que f_i é fácil de inverter quando t é conhecido. A função h é a função inversora.

EXEMPLO 10.48

Aqui, descrevemos a função alçapão que está por trás do bem-conhecido criptossistema RSA. Damos seu trio associado f, G, e h. A máquina geradora G opera da seguinte forma. Ela seleciona dois números de aproximadamente mesmo tamanho aleatoriamente e os testa por primalidade usand um algoritmo de teste de primalidade de tempo polinomial probabilístico. Se eles não forem primos, ela repete a escolha até que ela consiga ou até que ela atinja um limite de tempo pré-especificado e reporta a falha. Após encontrar p e q, ela computa $N = pq$ e o valor $\phi(N) = (p-1)(q-1)$. Ela seleciona um número aleatório e entre 1 e N. Ela verifica se esse número é primo em relação a $\phi(N)$. Caso não seja, o algoritmo seleciona um outro número e repete a verificação. Finalmente, o algoritmo computa o inverso multiplicativo d de e módulo $\phi(N)$. Fazer isso é possível porque o conjunto de números em $\{1, \ldots, \phi(N)\}$ que são primos em relação a $\phi(N)$ formm um grupo sob a operação de multiplicação módulo $\phi(N)$. Finalmente G dá como saída $((N, e), d)$. O índice para a função f consiste dos dois números N e e. Let

$$f_{N,e}(w) = w^e \bmod N.$$

A função inversora h é

$$h(d, x) = x^d \bmod N.$$

A função h inverte apropriadamente porque $h(d, f_{N,e}(w)) = w^{ed} \bmod N = w$.

Podemos usar uma função alçapão tal como a função alçapão RSA, para construir um criptossistema de chave-pública da seguinte forma. A chave pública é o índice i gerado pela máquina probabilística G. A chave secreta é o valor correspondente t. O algoritmo de encriptação quebra a mensage m em blocos de tamanho no máximo $\log N$. Para cada bloco w o emissor computa f_i. A seqüência de cadeias resultante é a mensagem encriptada. O receptor usar a função h para obter a mensagem original a partir de sua encriptação.

EXERCÍCIOS

10.1 Mostre que uma família de circuitos com profundidade $O(\log n)$ é também uma família de circuitos de tamanho polinomial.

10.2 Mostre que 12 não é pseudoprimo porque ele não passa em algum teste de Fermat.

10.3 Prove que, se $A \leq_{\mathrm{L}} B$ e B estão em NC, então A está em NC.

10.4 Mostre que a função paridade com n entradas pode ser computada por um programa ramificante que tem $O(n)$ nós.

10.5 Mostre que a função maioria com n entradas pode ser computada por um programa ramificante que tem $O(n^2)$ nós.

10.6 Mostre que qualquer função com n entradas pode ser computada por um programa ramificante que tem $O(2^n)$ nós.

R **10.7** Mostre que BPP $\subseteq$ PSPACE.

PROBLEMAS

10.8 Seja A uma linguagem regular sobre {0,1}. Mostre que A tem complexidade de tamanho–profundidade $(O(n), O(\log n))$.

* **10.9** Uma ***fórmula booleana*** é um circuito booleano no qual toda porta tem apenas um fio de saída. A mesma variável de entrada aparece em múltiplos lugares de uma fórmula booleana. Prove que uma linguagem tem uma família de tamanho polinomial de fórmulas sse ele está em NC^1. Ignore considerações de uniformidade.

*10.10 Um ***autômato com pilha de k-cabeças*** (k-AP) é um autômato com pilha determinístico com k cabeças de entrada somente-leitura, bidirecionais, e uma a pilha de leitura/escrita. Defina a classe $\mathsf{AP}_k = \{A |\ A$ é reconhecida por um k-AP$\}$. Mostre que $\mathrm{P} = \bigcup_k \mathsf{AP}_k$. (Dica: Lembre-se de que P é igual a espaço logarítmico alternante.)

10.11 Seja M uma máquina de Turing de tempo polinomial probabilístico e suponha que C seja uma linguagem onde, para alguns $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$ fixo,

a. $w \notin C$ implica que $\Pr[M$ aceita $w] \leq \epsilon_1$, e

b. $w \in C$ implica que $\Pr[M$ aceita $w] \geq \epsilon_2$.

Mostre que $C \in$ BPP. (Dica: Use o resultado do Lema 10.5.)

10.12 Mostre que, se P = NP, then P = PH.

10.13 Mostre que, se PH = PSPACE, então a hierarquia de tempo polinomial tem somente uma quantidade finita de níveis distintos.

10.14 Lembre-se de que NP^{SAT} é a classe de linguagens que são decididas por máquinas de Turing de tempo polinomial não-determinísticas com um oráculo para o problema da satisfatibilidade. Mostre que $\mathrm{NP}^{SAT} = \Sigma_2\mathrm{P}$.

*10.15 Prove o pequeno teorema de Fermat, que é dado no Teorema 10.6. (Dica: Considere a seqüência $a^1, a^2, \ldots$. O que tem que acontecer, e como?)

R*10.16 Prove que, para qualquer inteiro $p > 1$, se p não for pseudoprimo, então p falha no teste de Fermat para pelo menos metade de todos os números em $\mathcal{Z}_p$.

10.17 Prove que, se A é uma linguagem em L, uma família de programas ramificantes $(B_1, B_2, \ldots)$ existe na qual cada B_n aceita exatamente as cadeias em A de comprimento n e é limitado em tamanho por um polinômio em n.

10.18 Prove que, se A é uma linguagem regular, uma família de programas ramificantes $(B_1, B_2, \ldots)$ existe na qual cada B_n aceita exatamente as cadeias em A de comprimento n e é limitado em tamanho por uma constante vezes n.

10.19 Mostre que, se NP $\subseteq$ BPP então NP = RP.

10.20 Defina uma ***ZPP-máquina*** como sendo uma máquina de Turing probabilística que é permitida três tipos de saída sobre cada um de seus ramos: *aceite*, *rejeite*, e *?*. Uma ZPP-máquina M decide uma linguagem A se M dá como saída a resposta correta sobre toda cadeia de entrada w (*aceite* se $w \in A$ e *rejeite* se $w \notin A$) com probabilidade pelo menos $\frac{2}{3}$, e M nunca dá como saída a resposta errada. sobre toda entrada, M pode dar como saída *?* com probabilidade no máximo $\frac{1}{3}$. Além disso, o tempo médio de execução sobre todos os ramos de M sobre w tem que ser limitado por um polinômio no comprimento de w. Mostre que RP$\cap$coRP = ZPP.

10.21 Seja $EQ_{\mathsf{BP}} = \{\langle B_1, B_2\rangle |\ B_1$ e B_2 são programas ramificantes equivalentes$\}$. Mostre que EQ_{BP} é coNP-completa

10.22 Seja BPL a coleção de linguagens que são decididas por máquinas de Turing de espaço logarítmico probabilístico com probabilidade de erro $\frac{1}{3}$. Prove que BPL $\subseteq$ P.

SOLUÇÕES SELECIONADAS

10.7 Se M é uma MT probabilística que roda em tempo polinomial, podemos modificar M de modo que ela faz exatamente n^r arremessos de moeda sobre cada ramo de sua computação, para alguma constante r. Portanto o problema de se determinar a probabilidade de que M aceita sua cadeia de entrada se reduz a contar quantos ramos são de aceitação e comparar esse número com $\frac{2}{3}2^{(n^r)}$. Essa contagem pode ser realizada usando espaço polinomial.

10.16 Chame a uma *testemunha* se ela falha no teste de Fermat para p, ou seja, se $a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p}$. Seja $\mathcal{Z}_p^*$ todos os números em $\{1, \ldots, p-1\}$ que são primos em relação a p. Se p não é pseudoprimo, ele tem uma testemunha a em $\mathcal{Z}_p^*$.

Use a para obter muitas outras testemunhas. Encontre uma testemunha única em $\mathcal{Z}_p^*$ para cada não-testemunha. Se $d \in \mathcal{Z}_p^*$ é uma não-testemunha, você tem $d^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Logo, $da \bmod p \not\equiv 1 \pmod{p}$ e portanto $da \bmod p$ é uma testemunha. Se d_1 e d_2 são não-testemunhas distintas em $\mathcal{Z}_p^*$ então $d_1 a \bmod p \neq d_2 a \bmod p$. Caso contrário $(d_1 - d_2)a \equiv 0 \pmod{p}$, e portanto $(d_1 - d_2)a = cp$ para algum inteiro c. Mas d_1 e d_2 estão em $\mathcal{Z}_p^*$, e portanto $(d_1 - d_2) < p$, daí $a = cp/(d_1 - d_2)$ e p têm um fator maior que 1 em comum, o que é impossível porque a e p são primos entre si. Conseqüentemente o número de testemunhas em $\mathcal{Z}_p^*$ têm que ser tão grandes quanto o número de não-testemunhas em $\mathcal{Z}_p^*$ e conseqüentemente no mínimo metade dos membros de $\mathcal{Z}_p^*$ são testemunhas.

A seguir mostramos que todo membro b de $\mathcal{Z}_p$ que não é primo em relação a p é uma testemunha. Se b e p compartilham um fator, então b^e e p compartilham esse fator para qualquer $e > 0$. Logo, $b^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p}$. Por conseguinte, você pode concluir que pelo menos metade dos membros de $\mathcal{Z}_p$ são testemunhas.

Bibliografia Selecionada

1. ADLEMAN, L. Two theorems on random polynomial time. In *Proceedings of the Nineteenth IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (1978), pp. 75–83.
2. ADLEMAN, L. M., AND HUANG, M. A. Recognizing primes in random polynomial time. In *Proceedings of the Nineteenth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* (1987), pp. 462–469.
3. ADLEMAN, L. M., POMERANCE, C., AND RUMELY, R. S. On distinguishing prime numbers from composite numbers. *Annals of Mathematics 117* (1983), 173–206.
4. AGRAWAL, M., KAYAL, N., AND SAXENA, N. PRIMES is in P. (2002), `http://www.cse.iitk.ac.in/news/primality.pdf`.
5. AHO, A. V., HOPCROFT, J. E., AND ULLMAN, J. D. *Data Structures and Algorithms*. Addison-Wesley, 1982.
6. AHO, A. V., SETHI, R., AND ULLMAN, J. D. *Compilers: Principles, Techniques, Tools*. Addison-Wesley, 1986.
7. AKL, S. G. *The Design and Analysis of Parallel Algorithms*. Prentice-Hall International, 1989.
8. ALON, N., ERDÖS, P., AND SPENCER, J. H. *The Probabilistic Method*. John Wiley & Sons, 1992.
9. ANGLUIN, D., AND VALIANT, L. G. Fast probabilistic algorithms for Hamiltonian circuits and matchings. *Journal of Computer and System Sciences 18* (1979), 155–193.
10. ARORA, S., LUND, C., MOTWANI, R., SUDAN, M., AND SZEGEDY, M. Proof verification and hardness of approximation problems. In *Proceedings of the Thirty-third IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (1992), pp. 14–23.
11. BAASE, S. *Computer Algorithms: Introduction to Design and Analysis*. Addison-Wesley, 1978.
12. BABAI, L. E-mail and the unexpected power of interaction. In *Proceedings of the Fifth Annual Conference on Structure in Complexity Theory* (1990), pp. 30–44.
13. BACH, E., AND SHALLIT, J. *Algorithmic Number Theory, Vol. 1*. MIT Press, 1996.

14. BALCÁZAR, J. L., DÍAZ, J., AND GABARRÓ, J. *Structural Complexity I, II*. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer Verlag, 1988 (I) and 1990 (II).
15. BEAME, P. W., COOK, S. A., AND HOOVER, H. J. Log depth circuits for division and related problems. *SIAM Journal on Computing 15*, 4 (1986), 994–1003.
16. BLUM, M., CHANDRA, A., AND WEGMAN, M. Equivalence of free boolean graphs can be decided probabilistically in polynomial time. *Information Processing Letters 10* (1980), 80–82.
17. BRASSARD, G., AND BRATLEY, P. *Algorithmics: Theory and Practice*. Prentice-Hall, 1988.
18. CARMICHAEL, R. D. On composite numbers p which satisfy the Fermat congruence $a^{p-1} \equiv p$. *American Mathematical Monthly 19* (1912), 22–27.
19. CHOMSKY, N. Three models for the description of language. *IRE Trans. on Information Theory 2* (1956), 113–124.
20. COBHAM, A. The intrinsic computational difficulty of functions. In *Proceedings of the International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science*, Y. Bar-Hillel, Ed. North-Holland, 1964, pp. 24–30.
21. COOK, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. In *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* (1971), pp. 151–158.
22. CORMEN, T., LEISERSON, C., AND RIVEST, R. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 1989.
23. EDMONDS, J. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics 17* (1965), 449–467.
24. ENDERTON, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, 1972.
25. EVEN, S. *Graph Algorithms*. Pitman, 1979.
26. FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1*. John Wiley & Sons, 1970.
27. FEYNMAN, R. P., HEY, A. J. G., AND ALLEN, R. W. *Feynman lectures on computation*. Addison-Wesley, 1996.
28. GAREY, M. R., AND JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability—A Guide to the Theory of NP-completeness*. W. H. Freeman, 1979.
29. GILL, J. T. Computational complexity of probabilistic Turing machines. *SIAM Journal on Computing 6*, 4 (1977), 675–695.
30. GÖDEL, K. On formally undecidable propositions in *Principia Mathematica* and related systems I. In *The Undecidable*, M. Davis, Ed. Raven Press, 1965, pp. 4–38.
31. GOEMANS, M. X., AND WILLIAMSON, D. P. .878-approximation algorithms for MAX CUT and MAX 2SAT. In *Proceedings of the Twenty-sixth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* (1994), pp. 422–431.
32. GOLDWASSER, S., AND MICALI, S. Probabilistic encryption. *Journal of Computer and System Sciences* (1984), 270–229.

33. GOLDWASSER, S., MICALI, S., AND RACKOFF, C. The knowledge complexity of interactive proof-systems. *SIAM Journal on Computing* (1989), 186–208.

34. GREENLAW, R., HOOVER, H. J., AND RUZZO, W. L. *Limits to Parallel Computation: P-completeness Theory*. Oxford University Press, 1995.

35. HARARY, F. *Graph Theory*, 2d ed. Addison-Wesley, 1971.

36. HARTMANIS, J., AND STEARNS, R. E. On the computational complexity of algorithms. *Transactions of the American Mathematical Society 117* (1965), 285–306.

37. HILBERT, D. Mathematical problems. Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900. In *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, vol. 28. American Mathematical Society, 1976, pp. 1–34.

38. HOFSTADTER, D. R. *Goedel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. Basic Books, 1979.

39. HOPCROFT, J. E., AND ULLMAN, J. D. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley, 1979.

40. JOHNSON, D. S. The NP-completeness column: Interactive proof systems for fun and profit. *Journal of Algorithms 9*, 3 (1988), 426–444.

41. KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations* (1972), R. E. Miller and J. W. Thatcher, Eds., Plenum Press, pp. 85–103.

42. KARP, R. M., AND LIPTON, R. J. Turing machines that take advice. *ENSEIGN: L'Enseignement Mathematique Revue Internationale 28* (1982).

43. LAWLER, E. L. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Holt, Rinehart and Winston, 1991.

44. LAWLER, E. L., LENSTRA, J. K., RINOOY KAN, A. H. G., AND SHMOYS, D. B. *The Traveling Salesman Problem*. John Wiley & Sons, 1985.

45. LEIGHTON, F. T. *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Array, Trees, Hypercubes*. Morgan Kaufmann, 1991.

46. LEVIN, L. Universal search problems (in Russian). *Problemy Peredachi Informatsii 9*, 3 (1973), 115–116.

47. LEWIS, H., AND PAPADIMITRIOU, C. *Elements of the Theory of Computation*. Prentice-Hall, 1981.

48. LI, M., AND VITANYI, P. *Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications.* Springer-Verlag, 1993.

49. LICHTENSTEIN, D., AND SIPSER, M. GO is PSPACE hard. *Journal of the ACM* (1980), 393–401.

50. LUBY, M. *Pseudorandomness and Cryptographic Applications*. Princeton University Press, 1996.

51. LUND, C., FORTNOW, L., KARLOFF, H., AND NISAN, N. Algebraic methods for interactive proof systems. *Journal of the ACM 39*, 4 (1992), 859–868.

52. MILLER, G. L. Riemann's hypothesis and tests for primality. *Journal of Computer and System Sciences 13* (1976), 300–317.

53. NIVEN, I., AND ZUCKERMAN, H. S. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. John Wiley & Sons, 1980.

54. PAPADIMITRIOU, C. H. *Computational Complexity.* Addison-Wesley, 1994.

55. PAPADIMITRIOU, C. H., AND STEIGLITZ, K. *Combinatorial Optimization (Algorithms and Complexity)*. Prentice-Hall, 1982.

56. PAPADIMITRIOU, C. H., AND YANNAKAKIS, M. Optimization, approximation, and complexity classes. *Journal of Computer and System Sciences 43*, 3 (1991), 425–440.

57. POMERANCE, C. On the distribution of pseudoprimes. *Mathematics of Computation 37*, 156 (1981), 587–593.

58. PRATT, V. R. Every prime has a succinct certificate. *SIAM Journal on Computing 4*, 3 (1975), 214–220.

59. RABIN, M. O. Probabilistic algorithms. In *Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results*, J. F. Traub, Ed. Academic Press, 1976, pp. 21–39.

60. REINGOLD, O. Undirected st-connectivity in log-space. (2004), `http://www.eccc.uni-trier.de/eccc-reports/2004/TR04-094`.

61. RIVEST, R. L., SHAMIR, A., AND ADLEMAN, L. A method for obtaining digital signatures and public key cryptosytems. *Communications of the ACM 21*, 2 (1978), 120–126.

62. ROCHE, E., AND SCHABES, Y. *Finite-State Language Processing*. MIT Press, 1997.

63. SCHAEFER, T. J. On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences 16*, 2 (1978), 185–225.

64. SEDGEWICK, R. *Algorithms*, 2d ed. Addison-Wesley, 1989.

65. SHAMIR, A. IP = PSPACE. *Journal of the ACM 39*, 4 (1992), 869–877.

66. SHEN, A. IP = PSPACE: Simplified proof. *Journal of the ACM 39*, 4 (1992), 878–880.

67. SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Journal on Computing 26*, (1997), 1484–1509.

68. SIPSER, M. Lower bounds on the size of sweeping automata. *Journal of Computer and System Sciences 21*, 2 (1980), 195–202.

69. SIPSER, M. The history and status of the P versus NP question. In *Proceedings of the Twenty-fourth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing* (1992), pp. 603–618.

70. STINSON, D. R. *Cryptography: Theory and Practice*. CRC Press, 1995.

71. TARJAN, R. E. *Data structures and network algorithms*, vol. 44 of *CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math.* SIAM, 1983.

72. TURING, A. M. On computable numbers, with an application to the

Entscheidungsproblem. In *Proceedings, London Mathematical Society*, (1936), pp. 230–265.

73. ULLMAN, J. D., AHO, A. V., AND HOPCROFT, J. E. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, 1974.
74. VAN LEEUWEN, J., Ed. *Handbook of Theoretical Computer Science A: Algorithms and Complexity*. Elsevier, 1990.

Índice Remissivo