ACH2012 - Cálculo II

Sistema de Informação - EACH

Lista 1: Integração

1. Encontre a antiderivada mais geral da função. (Verifique sua resposta diferenciando.)

   (a) $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$

   (b) $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}$

   (c) $f(u) = \frac{u^2+3\sqrt{u}}{u^2}$

   (d) $f(\theta) = \cos\theta - 5sen\theta$

2. Encontre f.

   (a) $f'(x) = 1 - 6x$, $f(0) = 8$

   (b) $f'(x) = 2x - 3/x^4$, $x > 0$, $f(1) = 3$

   (c) $f''(\theta) = \cos\theta + sen\theta$, $f(0) = 3$, $f'(0) = 4$

3. Uma partícula move-se de acordo com os dados que se seguem. Encontre a posição da partícula.

   (a) $v(t) = 1.5\sqrt{t}$, $s(4) = 10$

   (b) $a(t) = t - 2$, $s(0) = 1$, $v(0) = 3$

   (c) $a(t) = \cos t + sent$, $s(0) = 0$, $v(0) = 5$

4. Calcule a soma de Riemann para $f(x) = 2 - x^2$, $0 \leq x \leq 2$, com 4 subintervalos, tomando os pontos amostrais como os extremos direitos. Explique, com a ajuda de um diagrama, o que representa a soma de Riemann.

5. Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$,, calcule a soma de Riemann com $n = 5$ correta até a sexta casa decimal, tomando como pontos mostrais os pontos médios. O que representa a soma de Riemann? Ilustre com um diagrama.

6. Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \; senx_i \; \Delta x$, $[0, \pi]$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5]\Delta x$, $[0, 2]$

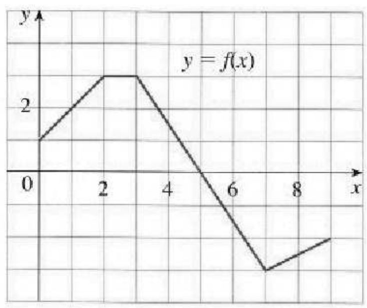
7. Use a forma da definição de integral para calcular a integral.

   (a) $\int_{-1}^{5} (1 + 3x)dx$

   (b) Prove que $\int_a^b x \; dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$

   (c) Prove que $\int_a^b x^2 \; dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$

8. O gráfico de f está mostrado. Calcule casa integral interpretando-a em termos das áreas.



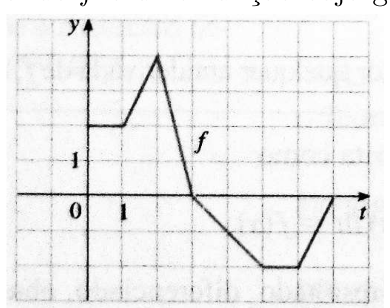
   (a) $\int_0^2 f(x)dx$

   (b) $\int_0^5 f(x)dx$

   (c) $\int_5^7 f(x)dx$

   (d) $\int_0^9 f(x)dx$

9. Seja $g(x) = \int_0^x f(t) \; dt$, onde f é uma função cujo gráfico é mostrado.



(a) Avalie $g(x)$ para $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ e 6.

(b) Em que intervalos g esta crescendo?

(c) Onde g tem um valor máximo?

(d) Faça um esboço do gráfico de g.

10. Use a Parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo para achar a derivada da função.

    (a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+2t}\ dt$

    (b) $g(x) = \int_1^x \ln t\ dt$

    (c) $g(u) = \int_3^u \frac{1}{x+x^2}\ dx$

    (d) $g(x) = \int_x^2 \cos t^2\ dt$

11. Use a Parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a integral, ou explique porque ela não existe.

    (a) $\int_{-1}^3 x^5\ dx$

    (b) $\int_0^1 x^{4/5}\ dx$

    (c) $\int_{-5}^5 \frac{2}{x^3}\ dx$

    (d) $\int_0^2 x(2+x^5)\ dx$

    (e) $\int_\pi^{2/\pi} cossec^2\theta\ d\theta$

    (f) $\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3}\ du$

12. Ache a derivada da função

    (a) $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}\ du$ (Sugestão: $\int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}\ du = \int_{2x}^{0} \frac{u^2-1}{u^2+1}\ du + \int_0^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}\ du$)

    (b) $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sqrt{t}\ sen\ t\ dt$

13. Se $F(x) = \int_1^x f(t)\ dt$, onde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\ du$, determine $F''(2)$.

14. Verifique por diferenciação que a formula está correta.

    (a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx = \sqrt{x^2+1} + C$

    (b) $\int x\cos x\ dx = x\ sen\ x + \cos x + C$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\ dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$

15. Ache a integral indefinida geral.

    (a) $\int x^{-3/4}\ dx$
    (b) $\int (1-t)(2+t^2)\ dt$
    (c) $\int (2-\sqrt{x})^2\ dx$
    (d) $\int (3e^u + sec^2 u)\ du$

16. Calcule a integral.

    (a) $\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\ dx$
    (b) $\int_{-1}^0 (2x - e^x)\ dx$
    (c) $\int_{-2}^2 (3u+1)^2\ du$
    (d) $\int_0^4 (2v+5)(3v-1)\ dv$
    (e) $\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)\ dt$
    (f) $\int_1^2 \frac{y+5y^7}{y^3}\ dy$
    (g) $\int_0^\pi (4sen\theta - 3\cos\theta)\ d\theta$

17. A função velocidade (em metros por segundo) é dada por uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Ache (i) o deslocamento e (ii) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

    (a) $v(t) = 3t - 5,\ 0 \leq t \leq 3$
    (b) $v(t) = t^2 - 2t - 8,\ 1 \leq t \leq 6$

18. A função aceleração (em m/s^2) e a velocidade inicial são dadas por uma partícula movendo-se ao longo de uma reta. Ache (i) a velocidade no instante t e (ii) a distância percorrida pela partícula durante o intervalo de tempo dado.

    (a) $a(t) = t + 4,\ v(0) = 5,\ 0 \leq t \leq 10$
    (b) $a(t) = 2t + 3,\ v(0) = -4,\ 0 \leq t \leq 3$

19. Calcule a integral fazendo a substituição dada.

(a) $\int \cos 3x \; dx$, $u = 3x$

(b) $\int x(4+x^2)^{10} \; dx$, $u = 4 + x^2$

(c) $\int x^2\sqrt{x^9+1} \; dx$, $u = x^3 + 1$

(d) $\int \frac{4}{(1+2x)^3} \; dx$, $u = 1 + 2x$

(e) $\int e^{sen\theta} \cos\theta \; d\theta$, $u = sen\theta$

20. Calcule a integral indefinida.

(a) $\int 2x(x^2+3)^4 \; dx$

(b) $\int x^2(x^3+5)^2 \; dx$

(c) $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}} \; dx$

(d) $\int \frac{x}{(x^2+1)^2} \; dx$

(e) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \; dx$

(f) $\int \sqrt{x} \; sen(1 + x^{3/2}) \; dx$

(g) $\int \frac{d \;\, x}{x \ln x}$

21. Calcule a integral definida, se ela existir.

(a) $\int_0^2 (x-1)^{25} \; dx$

(b) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2) \; dx$

(c) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} \; dx$

(d) $\int_0^{\pi/3} \frac{sen\theta}{\cos^2\theta} \; d\theta$

(e) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} \; dx$

(f) $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

22. Se f for contínua e $\int_0^4 f(x) \; dx = 10$, ache $\int_0^2 f(2x) \; dx$.

23. Se f for contínua e $\int_0^9 f(x) \; dx = 4$, encontre $\int_0^3 xf(x^2) \; dx$.

24. Suponha f contínua em R, prove que

$$\int_a^b f(-x) \; dx = \int_{-b}^{-a} f(x) \; dx.$$

25. Se a e b forem números positivos, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\ dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\ dx.$$

26. Avalie a integral.

   (a) $\int x \cos 5x\ dx$
   (b) $\int xe^{-x}\ dx$
   (c) $\int re^{r/2}\ dx$
   (d) $\int \ln(2x+1)\ dx$
   (e) $\int (\ln x)^2\ dx$
   (f) $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\ dy$

27. Primeiro faça substituição e então use a integração por partes para avaliar a integral.

   (a) $\int sen\sqrt{x}\ dx$
   (b) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\ dx$

28. Suponha que $f(1)=2$, $f(4)=7$, $f'(1)=5$, e $f'(4)=3$ e que f'' seja contínua. Determine o valor de $\int_1^4 xf''(x)\ dx$

29. Explique por que cada uma das seguintes integrais é imprópria

   (a) $\int_1^\infty x^4 e^{-x^4}\ dx$
   (b) $\int_0^2 \frac{x}{x^2-5x+6}\ dx$
   (c) $\int_0^{\pi/2} \sec x\ dx$

30. Quais das seguintes integrais é imprópria? Por quê?

   (a) $\int_1^2 \frac{1}{2x-1}\ dx$
   (b) $\int_0^1 \frac{1}{2x-1}\ dx$
   (c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen\ x}{1+x^2}\ dx$
   (d) $\int_1^2 \ln(x-1)\ dx$

31. Determine se cada integral é convergente ou divergente. Avalie aquelas que são convergentes.

    (a) $\int_1^\infty \frac{1}{(3x+1)^2}\ dx$
    (b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}}\ dw$
    (c) $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\ dx$
    (d) $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+2x}\ dx$
    (e) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\ dx$
    (f) $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x-1}\ dx$

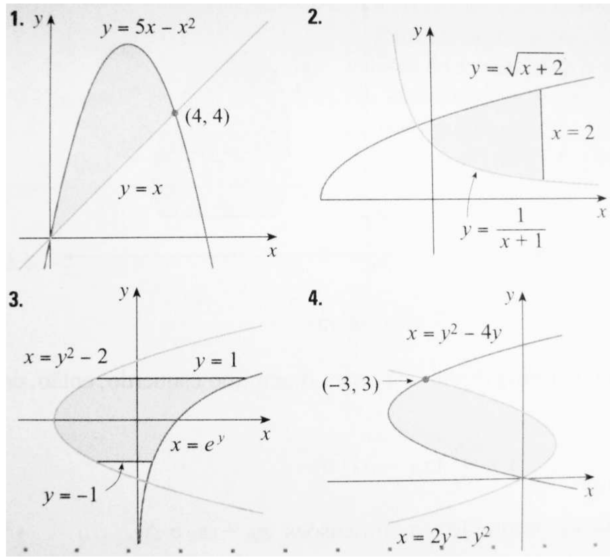
32. (a) Avalie a integral
    $$\int_0^\infty x^n e^{-x}\ dx$$
    para $n = 0,\ 1,\ 2$ e 3.

    (b) Estime o valor de
    $$\int_0^\infty x^n e^{-x}\ dx$$
    quando n é um inteiro positivo arbitrário.

33. (a) Mostre que
    $$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx$$
    é divergente.

    (b) Mostre que
    $$\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\ dx = 0$$
    Isso mostra que não podemos definir
    $$\int_{-\infty}^{\infty} x\ dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\ dx = 0$$

34. Encontre as áreas das regiões sombreadas.

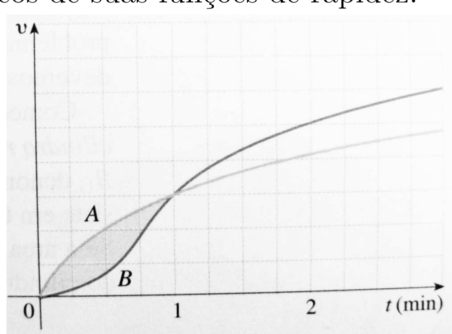


35. Avalie a integral e interprete-a como a área de uma região. Esboce a região.

    (a) $\int_{-1}^{1} |x^3 - x| \, dx$

    (b) $\int_{0}^{4} |\sqrt{x+2} - x| \, dx$

36. Dois carros, A e B, largam lado a lado a partir do repouso. A figura mostra os gráficos de suas funções de rapidez.



    (a) Qual carro estará na frente após 1 minuto? Explique.

    (b) Qual o significado da área da região sombreada?

    (c) Qual carro estará na frente após 2 minuto? Explique.

    (d) Estime quando os carros estarão novamente lado a lado.