ACH2011 - Cálculo I

Lista 3: Limite e Derivadas

1. Uma bola é atirada no ar com velocidade de $10m/s$. Sua altura em metros após t segundos é dada por $y = 10t - 4,9t^2$.

   (a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1,5$ e dura

      i. $0,5s$.

      ii. $0,1s$.

      iii. $0,05s$.

      iv. $0,01s$.

   (b) Estime a velocidade instantánea quando $t = 1,5$.

2. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \quad e \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 7$$

   Nesta situação, é possível que $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista. Explique.

3. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

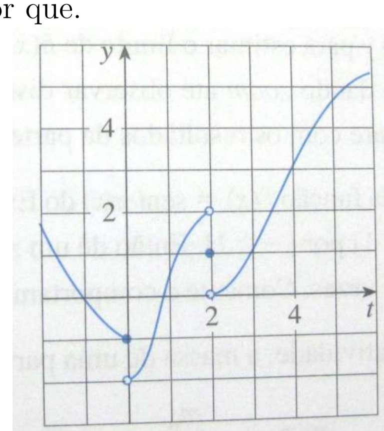
   é possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$?
   explique.

4. Explique o significado de cada uma das equações a seguir.

   (a) $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$.

   (b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$.

5. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da equação quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por que.



(a) $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (g) $g(2)$
(b) $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ (e) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (h) $\lim_{x\to 4} g(x)$
(c) $\lim_{x\to 0} g(x)$ (f) $\lim_{x\to 2} g(x)$

6. Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfação todas as condições dadas.

   (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$.

   (b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 0$, $f(0)$ não esta definida.

7. Determine o limite infinito.

   (a) $\lim_{x\to 5+} \frac{6}{x-5}$.

   (b) $\lim_{x\to 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$.

8. Dado que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$ e $\lim_{x\to 2} h(x) = 0$. Encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quão.

   (a) $\lim_{x\to 2}[f(x) + 5g(x)]$.

   (b) $\lim_{x\to 2}(g(x))^3$.

   (c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$.

   (d) $\lim_{x\to 2} \frac{3f(x)}{g(x)}$.

   (e) $\lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{h(x)}$.

   (f) $\lim_{x\to 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$.

9. Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

   (a) $\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$.

   (b) $\lim_{x\to 8}(1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$.

   (c) $\lim_{x\to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$.

   (d) $\lim_{x\to 1}(\frac{1-3x}{1+4x^2+3x^4})^3$.

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

   (b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x + 3$$

   está correta.

11. Calcule o limite, se existir.

    (a) $\lim_{x\to -4} \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$.
    (b) $\lim_{x\to 9} \frac{9-x}{3-\sqrt{x}}$.
    (c) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$.
    (d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{x}$.

12. Se $4 - x \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, encontre $lim_{x\to 4} f(x)$.

13. Seja $g(x) = \begin{cases} x & se \quad x < 1 \\ 3 & se \quad x = 1 \\ 2 - x^2 & se \quad 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & se \quad x > 2 \end{cases}$

    (a) Calcule, se existirem, os limites.
        i. $\lim_{x\to 1^-} g(x)$.
        ii. $\lim_{x\to 1} g(x)$.
        iii. $\lim_{x\to 2^-} g(x)$.
        iv. $\lim_{x\to 2^+} g(x)$.
        v. $\lim_{x\to 2} g(x)$.
        vi. $g(1)$.
    (b) Esboce o gráfico de g.

14. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

15. Se $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

    (a) $\lim_{x\to 1} f(x)$.
    (b) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x}$.

16. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

17. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x\to a} f(x)$ nem $\lim_{x\to a} g(x)$ existam.

18. Escreva uma equação que expresse o fato de uma função f é contínua no número 4.

19. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

20. Se f e g forem funçoes contínuas, com $f(3) = 5$ e $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$. Encontre $g(3)$.

21. Use a continuidade para calcular o limite.

    (a) $\lim_{x\to 4} \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$.

(b) $\lim_{x\to\pi} sen(x + sen\ x)$.

22. Use o Teorema do Valor Intermediario para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

    (a) $x^4 + x - 3 = 0$, $(1, 2)$.

    (b) $f(x) = \sqrt[3]{x} = 1 - x$, $(0, 1)$.

    (c) $f(x) = \cos x = x$, $(0, 1)$.

23. Demostre que f é contínua em a se e somente se

$$\lim_{h\to 0} f(a + h) = f(a)$$

.

24. (a) Mostre que a função valor absoluto $F(x) = |x|$ é contínua em toda parte.

    (b) Demostre que se f for uma função contínua em um intervalo, então $|f|$ também o é.

    (c) A reciproca da afirmação (b) também é verdadera? Em outras palavras, se $|f|$ for contínua, segue f também é? Se for assim, demostre isso. Caso contrário, encontre um contraexemplo.

25. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens a seguir:

    (a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$.

    (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

26. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.

    (b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com gráficos as possibilidades.

27. Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

    (a) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, f é ímpar.

    (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

28. Encontre o limite.

    (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x+3}$.

    (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+5x}{2x^3-x^2+4}$.

    (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$.

    (d) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}$.

29. Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

   (a) $\frac{x}{x+4}$.

   (b) $\frac{2e^x}{e^x-5}$.

30. Sejam P e Q polinômios. Encontre $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que o grau de Q.

31. Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

   (a) $y = \frac{x-1}{x-2}$, $(3, 2)$.

   (b) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$, $(1, 2)$.

32. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com uma velocidade de $10m/s$, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1,86t^2$.

   (a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.

   (b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.

   (c) Quando a pedra atinge a superfície?

   (d) Com que velocidade da pedra atinge a superfície?

33. Se $f(x) = 3x^2 - 5x$, encontre $f'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à parábola $y = 3x^2 - 5x$ no ponto $(2, 2)$.

34. Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$.

   (b) $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

   (c) $f(x) = x + \sqrt{x}$.

   (d) $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$.

   (e) $f(x) = \frac{3+x}{1-3x}$.

   (f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

35. Lembre-se de que a função f é chamada par se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para cada um destes x. Demonstre cada uma das afirmativas a seguir:

   (a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.

   (b) A derivada de uma função impar é uma função par.