DISCIPLINA: Matemática Discreta I

PROF^{a}.: Karla Lima

EACH-USP

September 12, 2018

Teoremas

- Resultados matemáticos geralmente são expressos como teoremas da forma "se P, então Q" ou $P \to Q$ onde P e Q podem representar sentenças compostas.

Teoremas

- Resultados matemáticos geralmente são expressos como teoremas da forma "se P, então Q" ou $P \rightarrow Q$ onde P e Q podem representar sentenças compostas.
- Em um teorema desta forma, tentamos deduzir Q de P, usando axiomas e regras de inferência lógica, uma sequência lógica de passos que começam em P e terminam em Q.

Teoremas

- Resultados matemáticos geralmente são expressos como teoremas da forma "se P, então Q" ou $P \to Q$ onde P e Q podem representar sentenças compostas.
- Em um teorema desta forma, tentamos deduzir Q de P, usando axiomas e regras de inferência lógica, uma sequência lógica de passos que começam em P e terminam em Q.
- Se for possível usar somente axiomas da lógica pura, então o teorema também é verdadeiro para todas as interpretações.

Teoremas

- Raciocínio indutivo - Constrói uma conclusão baseada em experiência.
- Raciocínio dedutivo - Constrói uma conclusão baseado em axiomas e regras de inferência.
- Contra-exemplo, $P \to Q$, P verdadeiro e Q falso.

Teoremas

Exemplo 1

Considere a sentença "Todo inteiro menor que 10 é maior que 5", ou, expresso em uma implicação "Se um inteiro é menor que 10, então ele é maior que 5". A sentença é verdadeira?

Métodos de Abordagem

Demonstração Direta

- Assume-se a hipótese P como verdadeira e deduz-se a tese Q.

Métodos de Abordagem

Demonstração Direta

- Assume-se a hipótese P como verdadeira e deduz-se a tese Q.

Exemplo 2

"Se um inteiro é divisível por 6, então ele também é divisível por 3."
(Como seria a prova direta?)

Métodos de Abordagem - Direta

Exercício

Forneça uma demonstração direta para o teorema "Se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes o inteiro é divisível por 4". Mostre cada passo para se ir da hipótese à tese.

Métodos de Abordagem - Direta

Exemplo 3

Prove que o produto de dois pares é par.

Métodos de Abordagem - Direta

Exemplo 3

Prove que o produto de dois pares é par.

- Seja $x = 2m$ e $y = 2n$, com m e n inteiros. Então $xy = (2m)(2n) = 2(2mn)$, onde $2mn$ é um inteiro. Então xy é da forma $2k$, onde k é um inteiro, logo xy é par.

Métodos de Abordagem

Contraposição

- Variante da técnica de prova direta.
- $Q' \to P' \longrightarrow P \to Q$
- $Q' \to P'$ é a contra positiva de $P \to Q$

Métodos de Abordagem - Contraposição

Exemplo 4

Qual é a contra positiva do teorema "Se um inteiro é divisível por 6, então ele também é divisível por 3"

Métodos de Abordagem - Contraposição

Exemplo 5

Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.

Métodos de Abordagem - Contraposição

Exemplo 6

A implicação "Se $a > 5$ então $a > 2$" é verdadeira. E sua recíproca?

Métodos de Abordagem - Contraposição

Exemplo 7

Demonstre que o produto xy é ímpar se, e somente se, x e y são inteiros ímpares.

Métodos de Abordagem

Contradição

- Demonstração indireta
- $(P \wedge Q' \rightarrow 0) \longrightarrow (P \rightarrow Q)$ é uma tautologia.

Métodos de Abordagem - Contradição

Exemplo 8

"Se um número somado a ele próprio resulta no próprio número, então o número é 0 (zero)"

Métodos de Abordagem - Contradição

Exemplo 9

Mostre que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Métodos de Abordagem

Erros comuns

- CONTRADIÇÃO :Assumir $P \wedge Q'$deduzir Q sem usar a hipótese Q'. Suposta contradição $Q \wedge Q'$ (Exemplo 8).
- CONTRADIÇÃO :Assumir $P \wedge Q'$deduzir F sem usar a hipótese P. Suposta contradição $P \wedge P'$.

Métodos de Abordagem - Contradição

Exercícios

1. Prove por contradição que o produto de dois inteiros pares é par.
2. Prove que o produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.
3. Sejam x e y números positivos, prove que $x < y$ se, e somente se, $x^2 < y^2$.