ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2018.2)

Prova Substitutiva – Novembro/2018

Nome: ____ Nº USP: ____________

Turma/Horário: ______________________ Curso: ______________________

Nota 1: Duração da prova: **90** minutos.
Nota 2: Perguntas durante a prova são **proibidas**.
Nota 3: É proibido o uso de calculadoras/computadores.
Nota 4: A prova pode ser feita inteiramente a lápis/lapiseira.
Nota 5: Os versos das folhas podem ser utilizados para a resolução.
Nota 6: Havendo **indicação adequada**, pode-se continuar a resolução de uma questão em uma página de outra questão.

Validação desta prova? (SIM/NÃO): ______

Assinatura: ____

Formulário

Diagonalização	**Produto vetorial**	**Produto escalar**	**Retas**	**Planos**
$Mv = \lambda v$	"Regra da mão direita"	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$	$X = A + \lambda \vec{u}$	$X = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
$\det(M - \lambda I) = 0$	$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}$	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$
$S^{-1} M S = \Lambda$	$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$	$\overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{w}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}$		$ax + by + cz + d = 0$

1) Considere o sistema

$$\begin{cases} \xi + \eta + \mu + \lambda & = & 20 \\ 10\xi + 10\eta + 10\mu + 10\lambda & = & 200 \end{cases},$$

que pode ser representado através de uma equação matricial $Ax = b$, com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu & \lambda \end{pmatrix}^T \in \mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$. Assumir, também, que $A \in \mathbb{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$. Determinar:
a) [1.0 ponto] A imagem de A, $\mathrm{Im}(A)$.
b) [1.0 ponto] O *kernel* de A, $\ker(A)$.
c) [1.0 ponto] A solução completa do problema.

---

1) O sistema linear

$$\begin{cases} \xi + \eta + \mu + \lambda & = & 20 \\ 10\xi + 10\eta + 10\mu + 10\lambda & = & 200 \end{cases},$$

pode ser representado por uma equação matricial $Ax = b$, onde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \qquad x := \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad b := \begin{pmatrix} 20 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

1a) Sendo $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) : y = Ax\,, x \in \mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})\}$, e com $x = \begin{pmatrix} \xi & \eta & \mu & \lambda \end{pmatrix}^T$, tem-se

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Os quatro vetores $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ formam uma sequência de vetores linearmente dependente. Com efeito,

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 10 \\ 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde se nota que a imagem é gerada pelo conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}\right\}$ (as passagens no escalonamento acima foram omitidas por serem evidentes). Finalmente, tem-se

$$\mathrm{Im}(A) = \left[\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}\right] = \left\{\xi\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) : \xi \in \mathbb{R}\right\} .$$

1b) Sendo $\ker(A) = \{x \in \mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) : Ax = 0\}$, com $x = \begin{pmatrix}\xi & \eta & \mu & \lambda\end{pmatrix}^T$, tem-se

$$0 = Ax = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\10 & 10 & 10 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\mu\\\lambda\end{pmatrix} .$$

Com o escalonamento (detalhes omitidos por serem evidentes)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\10 & 10 & 10 & 10\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} ,$$

o sistema $Ax = 0$ é equivalente a resolver

$$0 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\mu\\\lambda\end{pmatrix} \left\{\begin{array}{rcl}\xi+\eta+\mu+\lambda & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\lambda & = & -\xi-\eta-\mu\end{array}\right. .$$

Logo, como $\begin{pmatrix}\xi & \eta & \mu & \lambda\end{pmatrix}^T = \xi\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}^T + \eta\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T + \mu\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}^T$, tem-se

$$\ker(A) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right] = \left\{\xi\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) : \xi, \eta, \mu \in \mathbb{R}\right\} .$$

1c) Do sistema $Ax = b$, tem-se (detalhes omitidos por serem evidentes)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 20\\10 & 10 & 10 & 10 & 200\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 20\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) ,$$

id est, após um escalonamento simples, o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\mu\\\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix} \left\{\begin{array}{rcl}\xi+\eta+\mu+\lambda & = & 20\end{array}\right. .$$

Uma solução particular x_p do problema pode ser obtida impondo $\eta = 0$, $\mu = 0$ e $\lambda = 0$, implicando $x_p = \begin{pmatrix}20 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$.

A solução geral do problema é dada por $x = x_p + x_k$, onde $\{x_k\}$ gera o kernel de A ($Ax_k = 0$). Logo, do item anterior (e fazendo as devidas mudanças), chega-se à solução geral do sistema $Ax = b$, que é dada por

$$x = x_p + x_k = \begin{pmatrix}20\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} , \quad \xi, \eta, \mu \in \mathbb{R} .$$

---

2) Considere a reta $s : X = Q + \lambda\vec{u}$, com $Q(1, 2, 3)$, $\vec{u} = (1, -1, 0)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, e o ponto $P(1, 1, 3)$. Seja r uma outra reta, com $P \in r$ (condição válida para os dois itens abaixo).

a) [2.0 pontos] Determinar a distância entre r e s caso r seja paralela à reta s.
b) [2.0 pontos] Assuma, agora, que r seja ortogonal à reta s. Determinar a equação para a reta r se a distância entre as duas retas for $1/\sqrt{3}$.

2a) Sendo $r \parallel s$, o vetor diretor $\vec{u}$ de s pode ser usado para caracterizar a reta r. Desta forma, como $P \in r$, tem-se

$$r : X = P + \lambda\vec{u} = (1, 1, 3) + \lambda(1, -1, 0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Considere o vetor $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 2, 3) - (1, 1, 3) = (0, 1, 0)$, que pode unir dois pontos das duas retas. Nestas condições, o vetor $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{u}}\overrightarrow{PQ}$ pode unir dois de ambas retas no menor comprimento possível, *id est*, a norma desse vetor é a distância entre r e s:

$$\left\|\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{u}}\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|(0, 1, 0) - \frac{(0, 1, 0)\cdot(1, -1, 0)}{\|(1, -1, 0)\|^2}(1, -1, 0)\right\| = \left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

A distância entre as retas é $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2b) Assim como no caso anterior, o vetor $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 0)$ pode unir as duas retas. Denote por $\vec{v} := (v_x, v_y, v_z)$ um vetor diretor da reta r, que pode ser então dada por $r : X = P + \lambda\vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\vec{v} \perp \vec{u}$, o produto escalar entre eles é nulo. Desta forma,

$$0 = \langle\vec{v}, \vec{u}\rangle = (v_x, v_y, v_z)\cdot(1, -1, 0) = v_x - v_y\,, \quad \text{de sorte que} \quad v_y = v_x\,.$$

Logo, tem-se $\vec{v} = (v_x, v_x, v_z)$. Como os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ não são paralelos, pode-se calcular $\vec{n} := \vec{v} \wedge \vec{u}$, que é um vetor paralelo à direção que une as duas retas na menor distância possível. De

$$\vec{n} = \det\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_x & v_x & v_z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (v_z, v_z, -2v_x)\,,$$

a norma do vetor $\overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}$ é a distância ($1/\sqrt{3}$) entre as retas. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}} &= \left\|\overrightarrow{\mathrm{proj}}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right\| = \left\|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| = \left\|\frac{(0, 1, 0)\cdot(v_z, v_z, -2v_x)}{\sqrt{v_z^2 + v_z^2 + (-2v_x)^2}}\right\| \\ &= \frac{|v_z|}{\sqrt{2v_z^2 + 4v_x^2}}\,,\end{aligned}$$

donde $v_z = 2v_x$ ou $v_z = -2v_x$. Logo, como $\vec{v} = (v_x, v_x, 2v_x)$ ou $\vec{v} = (v_x, v_x, -2v_x)$, os vetores diretores de r podem ser dados por $(1, 1, 2)$ ou $(1, 1, -2)$. Finalmente,

$$r : X = (1, 1, 3) + \lambda(1, 1, 2) \quad \text{ou} \quad r : X = (1, 1, 3) + \lambda(1, 1, -2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

---

3) [3.0 pontos] Determinar a fórmula geral para $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 1$, sendo que $a_0 = 0$ e $a_1 = 1/2$.

---

3) A relação de recorrência acima para a_n e a_{n-1} pode ser representada por

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_n & = & 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 1 \\ a_{n-1} & = & 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + 1 \end{array}\right. . \tag{1}$$

Subtraindo-se a segunda da primeira, elimina-se o termo independente (de n), chegando-se a

$$a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3}\,, \tag{2}$$

que será considerada para a solução abaixo. Representa-se, inicialmente, a relação de recorrência em sua forma matricial

$$u_n := \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{pmatrix} = M u_{n-1} \,, \quad n \subset \mathbb{Z} \,, \ \text{ com } \ u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \,,$$

visto que $a_0 = 0$, $a_1 = 1/2$ e $a_2 = 2a_1 + 3a_0 + 1 = 2$.

Como $u_n = M u_{n-1} = M^2 u_{n-2} = \cdots = M^{n-2} u_2$, deve-se obter M^{n-2}, sendo conveniente encontrar a forma diagonal de M. Os autovalores de M são determinados pela imposição de soluções não-triviais (autovetores) da equação $Mv = \lambda v$, onde v é um autovetor. Tal condição conduz a

$$0 = \det\left(M - \lambda I\right) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda + 1\right)\left(3 - \lambda\right) \,,$$

donde se tem os autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$.

O autovetor $v_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \mu_1 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_1 I\right) v_1 = \begin{pmatrix} 3-(1) & 1 & -3 \\ 1 & 0-(1) & 0 \\ 0 & 1 & 0-(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_1 & = & \eta_1 \\ \eta_1 & = & \mu_1 \end{array} \right. \,,$$

donde se tem $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\mu_1 = 1$.

O autovetor $v_2 = \begin{pmatrix} \xi_2 & \eta_2 & \mu_2 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_2 I\right) v_2 = \begin{pmatrix} 3-(-1) & 1 & -3 \\ 1 & 0-(-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_2 & = & -\eta_2 \\ \eta_2 & = & -\mu_2 \end{array} \right. \,,$$

donde se tem $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\mu_2 = 1$.

O autovetor $v_3 = \begin{pmatrix} \xi_3 & \eta_3 & \mu_3 \end{pmatrix}^T$ associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ satisfaz

$$0 = \left(M - \lambda_3 I\right) v_3 = \begin{pmatrix} 3-(3) & 1 & -3 \\ 1 & 0-(3) & 0 \\ 0 & 1 & 0-(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_3 & = & 3\eta_3 \\ \eta_3 & = & 3\mu_3 \end{array} \right. \,,$$

donde se tem $v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ com a escolha $\mu_3 = 1$.

Os autovetores permitem identificar a matriz de diagonalização

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e sua inversa } S^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \,,$$

que é obtida com a prescrição abaixo (o detalhamento das passagens – que são evidentes – será omitida):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 0 & -1/8 \end{array} \right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 6 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 0 & -1/8 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & -1/2 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 0 & -1/8 \end{array} \right) \,.$$

Seja $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a matriz diagonal dos autovalores. Como $\Lambda = S^{-1}MS$, tem-se $M = S\Lambda S^{-1}$, donde

$$M^{n-2} = \overbrace{\big(S\Lambda S^{-1}\big)\big(S\Lambda S^{-1}\big)\cdots\big(S\Lambda S^{-1}\big)}^{n-2 \text{ termos}} = S\Lambda^{n-2}S^{-1}\,,$$

que leva a

$$\begin{aligned} u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = S\Lambda^{n-2}S^{-1}u_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{n-2} \left[\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \\ 3^n - 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Logo,

$$a_n = \frac{1}{4}\left(3^n - 1\right)\,, \qquad n \in \{0, 1, 2, \cdots\} \subset \mathbb{Z}\,.$$
