Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2053 – Introdução à Estatística – 1º sem. 2013
Professor: Dr. José Ricardo G. Mendonça

2ª Lista de Exercícios — Data: 12 abr. 2013

We are an impossibility in an impossible universe.
Ray Bradbury (1920–2012)

I. Variáveis Aleatórias

1. Uma fonte produz aleatoriamente símbolos a partir do alfabeto $\{a,b,c,d\}$ com probabilidades $P(a) = \frac{1}{2}$, $P(b) = \frac{1}{4}$, $P(c) = P(d) = \frac{1}{8}$. Um esquema de codificação binária desses símbolos estabelece as relações $a \leftrightarrow 0$, $b \leftrightarrow 10$, $c \leftrightarrow 110$ e $d \leftrightarrow 111$. Seja X a variável aleatória que representa o número de bits do código transmitido. (a) Qual é o domínio de X? (b) Assumindo que a geração dos símbolos seja independente, encontre as probabilidades $P(X = x)$ para cada valor possível de x no domínio de X.

   Um dos esquemas mais importantes de codificação de símbolos baseado em suas probabilidades relativas de ocorrência é a *codificação de Huffman*, que está na base de quase todos os algoritmos de compressão de dados sem perda, tais como o algoritmo de Ziv-Lempel (usado pelos compactadores do tipo `.zip`) e os codecs multimídia JPEG e MP3.

2. Considere o lançamento de um dardo em um alvo circular de raio unitário e seja X a variável aleatória que representa a distância entre o ponto em que o dardo atinge o alvo e seu centro. Assumindo que o dardo pode acertar o alvo em qualquer lugar igualmente, (a) determine o domínio de X e (b) encontre $P(X < a)$ e $P(a < X \leq b)$, com $a < b \leq 1$.

II. Funções de Distribuição Cumulativa

1. Verifique as seguintes propriedades da função de distribuição cumulativa $F_X(x) = P(X \leq x)$: (a) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, ($b$) $P(X > a) = 1 - F_X(a)$, e (c) $P(X < b) = F_X(b^-)$, onde $b^- = \lim_{0<\varepsilon\to 0}(b-\varepsilon)$.

2. Encontre os valores de a e b tais que $F(x \geq 0) = 1 - ae^{-x/b}$ e $F(x < 0) = 0$ seja uma função de distribuição cumulativa válida e discuta quando ela se refere a uma variável aleatória discreta, contínua ou mista em função dos possíveis valores de a e b. Procure entender o que é uma variável aleatória mista.

III. Variáveis Aleatórias Discretas

1. Calcule o valor esperado $\mu = E(X)$ e a variância $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ de uma variável aleatória $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. *Observação*: a notação "$X \sim f(x)$" significa que a variável aleatória X está distribuída de acordo com a função de distribuição de probabilidades $f(x)$, que nos casos mais comuns são conhecidas pelos seus nomes.

2. Repita o exercício anterior para uma variável aleatória $X \sim \mathrm{Binomial}(n, p)$. Para calcular a variância, calcule primeiro $E[X(X-1)]$; obviamente, $E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X)$.

3. Uma moeda honesta é lançada 10 vezes. Encontre a probabilidade de se obter 5 ou 6 caras nesses lançamentos.

4. Mostre que a distribuição de probabilidades de Poisson pode ser usada como uma aproximação da distribuição binomial para valores grandes de n e pequenos de p, isto é, que

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \lambda = np.$$

   Dica: lembre-se do limite fundamental $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$.

5. Um canal de comunicação digital com ruído possui probabilidade $p = 0{,}01$ de transmitir um bit incorretamente. (a) Calcule a probabilidade de se observar mais de um erro a cada 10 bits recebidos; (b) calcule novamente essa mesma probabilidade usando a aproximação de Poisson obtida no exercício anterior.

IV. Variáveis Aleatórias Contínuas

1. (a) Mostre que a distribuição normal é uma densidade de probabilidades, isto é, que

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{implica} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

   Esse cálculo foi primeiramente executado por Pierre Simon, Marquês de Laplace (1749–1827) em seu *Théorie Analytique des Probabilités*, Livro I, "Des méthodes analytiques du calcul des probabilités", publicado em 1815. (b) Calcule o valor esperado e a variância de uma variável aleatória distribuída normalmente com parâmetros μ e σ^2, $X \sim N(\mu; \sigma^2)$.

2. Seja

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

   Mostre que (a) $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ e (b) a função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ é dada por $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. A função $\Phi(z)$ corresponde portanto à função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória $X \sim N(0; 1)$, dita variável normal "padrão".

3. Uma linha de produção fabrica resistores de $1000\,\Omega$ (ohms) que possuem uma tolerância de $\pm 10\%$. Supondo que o valor da resistência dos resistores seja uma variável aleatória normal de média $1000\,\Omega$ e variância $2500\,\Omega^2$, encontre a probabilidade de que um resistor escolhido ao acaso seja rejeitado.

4. Seja uma variável aleatória $X \sim f_X(x)$. (a) Se $f_X(x) = 0$ para $x < 0$, mostre que, para qualquer valor de $a > 0$ vale $P(x \geq a) \leq \mu_X/a$, onde $\mu_X = E(X)$ é o valor esperado de X. Esse resultado é conhecido como *desigualdade de Markov*. (b) Mostre que, para qualquer $f_X(x)$, dado $a > 0$ vale $P(|X - \mu_X| \geq a) \leq \sigma_X^2/a^2$, onde $\sigma_X = \mathrm{Var}(X)$. Esse resultado é conhecido como *desigualdade de Chebyshev*. Essas desigualdades são genéricas e, embora um pouco cruas, fornecem valores aproximados que podem ser úteis na prática.

IV. Distribuições Condicionais

1. Seja X uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ. Encontre a função densidade de probabilidade condicional de X dado o evento $B = (X$ é par).