

Capítulo 12

Problema 01

(a)

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{dizer que são de B} \mid \text{na verdade são de A}) = P(\bar{X} > 176 \mid \bar{X} \sim N(175;1)) = \\ P\left(Z > \frac{176-175}{1}\right) = P(Z > 1) = 15,87\%$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{dizer que são de A} \mid \text{na verdade são de B}) = P(\bar{X} \leq 176 \mid \bar{X} \sim N(177;1)) = \\ P\left(Z \leq \frac{176-177}{1}\right) = P(Z \leq -1) = 15,87\%$$

(b)

$$P(\text{Erro I}) = 5\% \Leftrightarrow P(\bar{X} > \bar{X}_c \mid \bar{X} \sim N(175;1)) = 5\% \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\bar{X}_c - 175}{1}\right) = 5\% \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_c - 175}{1} = 1,645 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 176,645$$

Regra de decisão: Se $\bar{X} > 176,645$, dizer que habitantes da ilha são descendentes de B; caso contrário, dizer que são descendentes de A.

$$P(\text{Erro II}) = P(\bar{X} \leq 176,645 \mid \bar{X} \sim N(177;1)) = P\left(Z \leq \frac{176,645 - 177}{1}\right) = \\ = P(Z \leq -0,355) = 36,13\%$$

(c)

$$P(\text{Erro I}) = 5\% \Leftrightarrow P(\bar{X} > \bar{X}_c \mid \bar{X} \sim N(175;0,5^2)) = 5\% \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\bar{X}_c - 175}{0,5}\right) = 5\% \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_c - 175}{0,5} = 1,645 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 175,823$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\bar{X} \leq 176,645 \mid \bar{X} \sim N(177;1)) = P\left(Z \leq \frac{175,823 - 177}{1}\right) = \\ = P(Z \leq -1,177) = 11,96\%$$

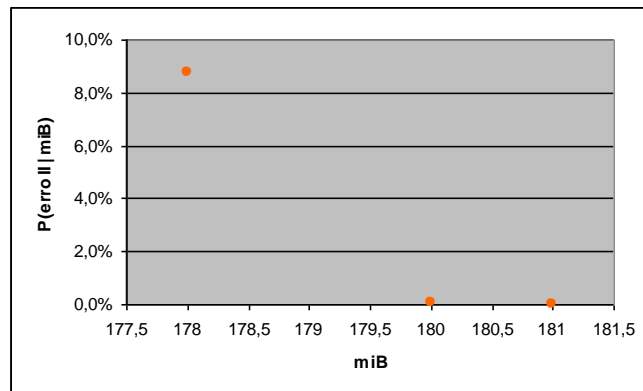
$$\mu_B$$

$$P(\text{Erro II} \mid \mu_B)$$

178
8,771%

180
0,040%

181
0,001%



(d)

Problema 02

(a)

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) = P(\bar{X} > 1170 \mid \bar{X} \sim N(1150; 15^2)) =$$

$$= P\left(Z > \frac{1170 - 1150}{15}\right) = P(Z > 1,333) = 9,12\%$$

(b)

$$\beta = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_1 \text{ é verdadeira}) = P(\bar{X} < 1170 \mid \bar{X} \sim N(1200; 20^2)) =$$

$$= P\left(Z < \frac{1170 - 1200}{20}\right) = P(Z < -1,5) = 6,68\%$$

(c)

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow P(\bar{X} > \bar{X}_c \mid \bar{X} \sim N(1150; 15^2)) = P(\bar{X} < \bar{X}_c \mid \bar{X} \sim N(1200; 20^2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\bar{X}_c - 1150}{15}\right) = P\left(Z < \frac{\bar{X}_c - 1200}{20}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_c - 1150}{15} = -\frac{\bar{X}_c - 1200}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}_c = 1171,429$$

$$RC =]1171,429; +\infty[.$$

Problema 03

(a) H_0 : Está começando um ataque.

H_1 : Está acontecendo uma leve interferência.

Erro I: Dizer que está acontecendo uma leve interferência, quando na verdade está começando um ataque;

Erro II: Dizer que está começando um ataque, quando na verdade está acontecendo uma leve interferência.

(b) H_0 : O acusado é inocente.

H_1 : O acusado é culpado.

Erro I: Dizer que o acusado é culpado, quando na verdade é inocente.

Erro II: Dizer que o acusado é inocente, quando na verdade é culpado.

(c) H_0 : A vacina não é eficaz.

H_1 : A vacina é eficaz.

Erro I: Dizer que a vacina é eficaz, quando na verdade não é eficaz.

Erro II: Dizer que a vacina não é eficaz, quando na verdade é eficaz.

Problema 04

X : número de coroas em 3 lançamentos.

$X \sim \text{Binomial}(3;p)$.

$H_0 : p = 0,5$ versus $H_1 : p \neq 0,5$.

$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) = P(X = 3 \mid p = 0,5) = 12,50\%$.

$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P(X < 3 \mid p = 0,667) = 70,37\%$.

Problema 05

(a) $H_0 : \mu = 200$ versus $H_1 : \mu = 210$.

(b) Por exemplo: Se $\bar{X} < 205$, dizer que $\mu = 200$. Caso contrário, dizer que $\mu = 210$.

$$\begin{aligned} P(\text{Erro I}) &= P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) = P(\bar{X} > 205 \mid \bar{X} \sim N(200;4^2)) = \\ &= P\left(Z > \frac{205 - 200}{4}\right) = P(Z > 1,25) = 10,56\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Erro II}) &= P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} < 205 \mid \bar{X} \sim N(210;4^2)) = \\ &= P\left(Z < \frac{205 - 210}{4}\right) = P(Z < -1,25) = 10,56\% \end{aligned}$$

Problema 06**(a)**Passo 1: $H_0 : \mu \geq 8$ versus $H_1 : \mu < 8$.Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 0,4^2)$.

Passo 3:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\bar{X} < \bar{X}_c \mid \bar{X} \sim N(8; 0,4^2)) = \\ &= P\left(Z < \frac{\bar{X}_c - 8}{0,4}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_c - 8}{0,4} = -1,645 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 7,342\end{aligned}$$

$$RC =]-\infty; 7,342[$$

Passo 4: $\bar{X} = 7,2$.

Passo 5: O valor observado pertence à RC. Logo, rejeita-se H_0 , ou seja, com base na amostra colhida, a diretoria deve decidir por retirar o produto da linha de produção.

(b)

$$\begin{aligned}\beta &= P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P(\bar{X} \geq 7,342 \mid \bar{X} \sim N(7,8; 0,4^2)) = \\ &= P\left(Z \geq \frac{7,342 - 7,8}{0,4}\right) = P(Z > -1,145) = 87,4\%\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\bar{X} < \bar{X}_c \mid \bar{X} \sim N(8; 0,4^2)) = \\ &= P\left(Z < \frac{\bar{X}_c - 8}{0,4}\right) = 1\% \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_c - 8}{0,4} = -2,326 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 7,07\end{aligned}$$

$$RC =]-\infty; 7,07[$$

O valor observado não pertenceria à RC. Logo, a decisão seria diferente, isto é, H_0 não seria rejeitada.

(d)

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\bar{X} < \bar{X}_c \mid \bar{X} \sim N(8; 0,8^2)) = \\ &= P\left(Z < \frac{\bar{X}_c - 8}{0,8}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_c - 8}{0,8} = -1,645 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 6,684\end{aligned}$$

$$RC =]-\infty; 6,684[$$

Novamente, o valor observado não pertenceria à RC, e portanto, H_0 não seria rejeitada.

Problema 07Passo 1: $H_0 : \mu = 60$ versus $H_1 : \mu < 60$.Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 6,667^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$ $\frac{\bar{X}_c - 60}{6,667} = -1,645 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 49,03$. $RC =]-\infty; 49,03[$

Passo 4: $\bar{X} = 50$.

Passo 5: O valor observado não pertence à RC. Logo, não se rejeita H_0 . Não há evidências de melhoria.

Problema 08

Passo 1: $H_0 : \mu = 2,5$ versus $H_1 : \mu < 2,5$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 0,0714^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$ $\frac{\bar{X}_c - 2,5}{0,0714} = -1,645 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 2,38$. $RC =]-\infty; 2,38[$

Passo 4: $\bar{X} = 2,3$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0 , ou seja, há evidências de que esta indústria paga salários inferiores, em média.

Problema 09

Passo 1: $H_0 : \mu \leq 23$ versus $H_1 : \mu > 23$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 0,9^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0,10$ $\frac{\bar{X}_c - 23}{0,9} = 1,282 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 24,15$. $RC =]24,15; +\infty[$

Passo 4: $\bar{X} = 24,17$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0 , ou seja, há evidências de que a informação do fabricante é falsa, ao nível significância de 10%.

Problema 10

Passo 1: $H_0 : p = 0,5$ versus $H_1 : p > 0,5$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \frac{p(1-p)}{6}\right)$.

Passo 3:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\hat{p} > \hat{p}_c \mid \hat{p} \sim N(0,5; 0,25/6)) = \\ &= P\left(Z > \frac{\hat{p}_c - 0,5}{\sqrt{0,25/6}}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\hat{p}_c - 0,5}{\sqrt{0,25/6}} = 1,645 \Leftrightarrow \hat{p}_c = 0,836 \end{aligned}$$

$$RC = \{p : p > 0,836\}$$

Passo 4: $\hat{p} = 0,833$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, não se rejeita H_0 , ou seja, não há evidências de que a pessoa acerta mais que metade das vezes.

Problema 11

Passo 1: $H_0 : p \leq 0,2$ versus $H_1 : p > 0,2$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \frac{p(1-p)}{50}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0,10$. $\frac{\hat{p}_c - 0,2}{\sqrt{0,2 \times 0,8/50}} = 1,282 \Leftrightarrow \hat{p}_c = 0,273$ $RC = \{p : p > 0,273\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0,270$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0 , ou seja, não há evidências de que a proporção de peças defeituosas seja maior que 20%.

Problema 12

i. $\alpha = 0,05$

Passo 1: $H_0 : p = 0,90$ versus $H_1 : p < 0,90$.

Passo 2: $\hat{p} \sim N\left(p; \frac{p(1-p)}{200}\right)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$. $\frac{\hat{p}_c - 0,9}{\sqrt{0,9 \times 0,1/200}} = -1,645 \Leftrightarrow \hat{p}_c = 0,865$. $RC = \{p : p < 0,865\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0,875$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0 , ou seja, não há evidências de que a proporção de peças de acordo com as especificação seja menor que 90%.

ii. $\alpha = 0,01$

Passo 3: $\alpha = 0,01$. $\frac{\hat{p}_c - 0,9}{\sqrt{0,9 \times 0,1/200}} = -2,326 \Leftrightarrow \hat{p}_c = 0,851$. $RC = \{p : p < 0,851\}$

Passo 4: $\hat{p} = 0,875$.

Passo 5: A conclusão é a mesma obtida com $\alpha = 0,05$.

Problema 13

Passo 1: $H_0 : p \geq 0,25$ versus $H_1 : p < 0,25$.

$$\text{Passo 2: } \hat{p} \sim N\left(p; \frac{p(1-p)}{400}\right).$$

$$\text{Passo 3: } \alpha = 0,05. \quad \frac{\hat{p}_c - 0,25}{\sqrt{0,25 \times 0,75 / 400}} = -1,645 \Leftrightarrow \hat{p}_c = 0,214. \quad RC = \{p : p < 0,214\}$$

$$\text{Passo 4: } \hat{p} = 0,200.$$

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0 , ou seja, há evidências de que a proporção de possuidores de TV que assistem ao programa é menor que 25%. Logo, a decisão dos produtores deve ser modificar o programa.

Problema 14

(a) X : número de sucessos em 10 tentativas. $\Rightarrow X \sim \text{Binomial}(10; p)$

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(X \in RC \mid p = 0,5) = 0,109.$$

(b) $\pi(p) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid p) = P(X \in RC \mid p)$

p

0,2

0,4

0,5

0,6

0,8

$\pi(p)$

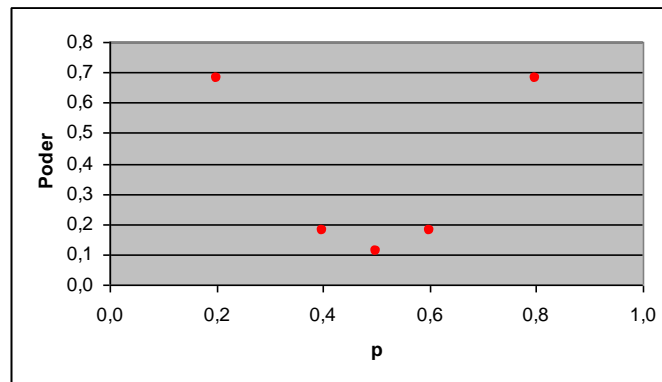
0,678

0,180

0,109

0,180

0,678



(c) $\pi(0,5) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid p = 0,5) = \alpha = 0,109$.

Problema 15

(a) Passo 1: $H_0 : \mu = 200$ versus $H_1 : \mu > 200$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 4^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$ $\frac{\bar{X}_c - 200}{4} = 1,645 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 206,58$. $RC =]206,58; +\infty[$

(b) $\pi(\mu) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid \mu) = P(\bar{X} > 206,58 \mid \bar{X} \sim N(\mu; 4^2)) = P\left(Z > \frac{206,58 - \mu}{4}\right)$

μ

195

200

205

210

215

220

225

$\pi(\mu)$

0,002

0,050

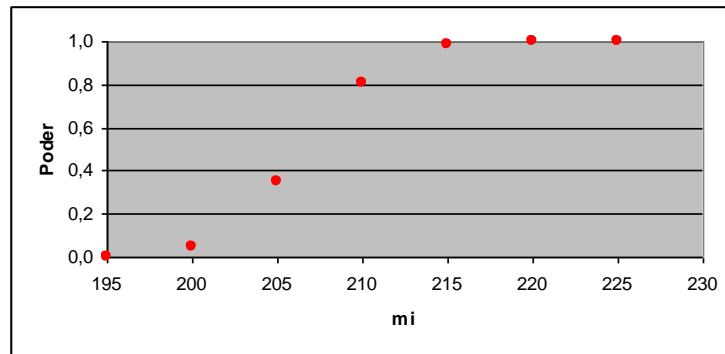
0,346

0,804

0,982

1,000

1,000



(c) $\pi(\mu) = P\left(Z > \frac{206,58 - \mu}{4}\right) = 50\% \Leftrightarrow \frac{206,58 - \mu}{4} = 0 \Leftrightarrow \mu = \bar{X}_c = 206,58$. Logo, para $\mu > 206,58$, o poder do teste será maior que 50%.

Problema 16

$$\hat{\alpha} = P(\bar{X} > 52 | \bar{X} \sim N(50; 5^2)) = P\left(Z > \frac{52 - 50}{5}\right) = P(Z > 0,4) = 0,345.$$

Problema 17

Passo 1: $H_0: \mu = 25$ versus $H_1: \mu < 25$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 2,5^2)$.

Passo 3: $\bar{X} = 20,5$

$$\hat{\alpha} = P(\bar{X} < 20,5 | \bar{X} \sim N(25; 2,5^2)) = P\left(Z < \frac{20,5 - 25}{2,5}\right) = P(Z < -1,8) = 0,036.$$

Passo 4: Rejeitamos H_0 para qualquer nível de significância $\alpha > \hat{\alpha}$. Por exemplo, fixando $\alpha = 5\%$, rejeita-se H_0 , isto é, há evidências de que a nova técnica é melhor que a anterior.

Problema 18

$$n \frac{\hat{\sigma}_*^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n) \quad ; \quad (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

$$n = 10; \sigma^2 = 100.$$

$$(a) \quad P(\hat{\sigma}_*^2 > a) = P\left(\chi^2(n) > \frac{n}{\sigma^2} a\right) = 10\% \Leftrightarrow \frac{n}{\sigma^2} a = 15,987 \Leftrightarrow a = 15,987 \times \frac{100}{10} = 159,87$$

$$(b) \quad P(S^2 < a) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} a\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{n-1}{\sigma^2} a = 3,325 \Leftrightarrow a = 3,325 \times \frac{100}{9} = 36,95.$$

$$P(S^2 > b) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2} b\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{n-1}{\sigma^2} b = 16,919 \Leftrightarrow b = 16,919 \times \frac{100}{9} = 187,99$$

$$(c) \quad \alpha = P(S^2 < 163,16) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} \times 163,16\right) = P(\chi^2(9) < 14,684) = 0,90.$$

$$(d) \quad \alpha = P(S^2 > 100) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2} \times 100\right) = P(\chi^2(9) > 9) = 0,437.$$

$$(e) \quad \alpha = P(S^2 < 18) = P\left(\chi^2(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} \times 18\right) = P(\chi^2(9) < 1,62) = 0,004.$$

$$(f) \quad P(S^2 > 180) = P\left(\chi^2(n-1) > \frac{n-1}{\sigma^2} \times 180\right) = P(\chi^2(9) > 16,2) = 0,063.$$

Problema 19

Passo 1: $H_0: \sigma^2 = 300$ versus $H_1: \sigma^2 \neq 300$.

Passo 2: $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(23)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\chi^2 < \chi_1^2 \text{ ou } \chi^2 > \chi_2^2) = 20\%$

$\chi_1^2 = 14,848$ e $\chi_2^2 = 32,007 \Rightarrow RC = \{\chi^2: \chi^2 < 14,84 \text{ ou } \chi^2 > 32,007\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \frac{23}{300} \times 400 = 30,667$

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0 , ou seja, não há evidências de que a variância mudou, ao nível de 20%.

Problema 20

(a) A variância, já que a mesma é uma medida de dispersão em torno da média.

(b)

$$S^2 = 114,09 \Rightarrow$$

$$IC(\sigma^2; 95\%) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}; \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2} \right] = \left[\frac{10 \times 114,09}{20,483}; \frac{10 \times 114,09}{3,247} \right] = [55,7; 351,38]$$

Problema 21

(a) $P(\bar{X} - 50 < tS / \sqrt{10}) = P(|T_9| < t) = 10\% \Leftrightarrow P(T_9 < t) = 5\% \Leftrightarrow t = 0,129.$

$$(b) \quad t_o = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{48 - 50}{\sqrt{120/10}} = -0,577 \Rightarrow P(T_9 < -0,577) = 0,289.$$

$$(c) \quad P(|\bar{X} - 50| < 2) = P\left(|T_9| < \frac{2}{s/\sqrt{n}}\right) = P\left(|T_9| < \frac{2}{\sqrt{120/10}}\right) = P(|T_9| < 0,577) = 0,422.$$

Problema 22

Passo 1: $H_0 : \mu = 100$ versus $H_1 : \mu < 100$.

Passo 2: Sob H_0 , $\frac{\bar{X} - 100}{S/4} \sim t(15)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$

$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(T_{15} < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = -1,753 \Rightarrow$

$$RC = \{t : t < -1,753\}$$

Passo 4: $t_o = -5$.

Passo 5: Como t_o pertence à RC, rejeita-se H_0 . Logo, há evidências de melhora no tempo médio de execução da tarefa.

Problema 23

(a) Passo 1: $H_0 : \mu = 1229$ versus $H_1 : \mu > 1229$.

Passo 2: Sob H_0 , $\frac{\bar{X} - 1229}{S/\sqrt{10}} \sim t(9)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(T_9 < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1,833 \Rightarrow RC = \{t : t > 1,833\}$

Passo 4: $t_o = \frac{1350 - 1229}{675,82/\sqrt{10}} = 0,566$.

Passo 5: Como t_o não pertence à RC, aceita-se H_0 . Logo, não há evidências de que a média das cidades pequenas seja diferente da média do estado.

(b) Isso ocorre devido à grande variância da renda dos municípios.

Problema 24

$$(a) \quad IC(\mu; 95\%) = \bar{x} \pm t_{15} \frac{s}{\sqrt{n}} = 41,563 \pm 2,131 \times \frac{10,35}{4} = 41,563 \pm 5,514 = [36,05; 47,08].$$

(b) Suposições: a porcentagem da receita gasta com alimentação pelos moradores dessa vila tem distribuição normal; foi feita uma amostragem aleatória simples.

Problema 25

(a) Passo 1: $H_0 : \mu \leq 30$ versus $H_1 : \mu > 30$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 1,033^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\frac{\bar{X}_c - 30}{1,033} = 1,645 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 31,70 \Rightarrow RC =]31,70; +\infty[$

Passo 4: $\bar{X} = 30,044$.

Passo 5: Como \bar{X} não pertence à RC, aceita-se H_0 , ou seja, não há evidências de que a média de precipitação pluviométrica anual é maior que 30,0.

(b) Passo 2: Sob H_0 , $\frac{\bar{X} - 30}{S/3} \sim t(8)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(T_8 < t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1,860 \Rightarrow RC = \{t : t > 1,860\}$

Passo 4: $t_o = \frac{30,004 - 30}{3,153/3} = 0,042$.

Passo 5: A conclusão é a mesma do item (a).

(c)

$$\begin{aligned} \beta &= P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}) = P(\bar{X} < 31,70 \mid \bar{X} \sim N(33; 1,033^2)) = \\ &= P\left(Z < \frac{31,70 - 33}{1,033}\right) = P(Z < -1,258) = 0,1042. \end{aligned}$$

Problema 26

$$\bar{X} = 50,4; S^2 = \sigma^2 = 175,84; n=50$$

Passo 1: $H_0 : \mu = 30$ versus $H_1 : \mu \neq 30$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 1,875^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\bar{X}_{c1} - 30}{1,875} = -1,96 \Leftrightarrow \bar{X}_{c1} = 26,33; \frac{\bar{X}_{c2} - 30}{1,875} = 1,96 \Leftrightarrow \bar{X}_{c2} = 33,68$.

$$RC = \{\bar{x} : \bar{x} < 26,33 \text{ ou } \bar{x} > 33,68\}$$

Passo 4: $\bar{X} = 50,4$.

Passo 5: Como \bar{X} pertence à RC, rejeita-se H_0 , ou seja, há evidências de que o número médio de funcionários é diferente de 30.

$$IC(\mu; 95\%) = \bar{x} \pm z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50,4 \pm 1,96 \times \frac{13,260}{\sqrt{50}} = 50,4 \pm 3,675 = [46,72; 54,08].$$

Problema 27

Passo 1: $H_0 : \mu = 11$ versus $H_1 : \mu > 11$.

Passo 2: $\bar{X} \sim N(\mu; 0,135^2)$.

Passo 3: $\alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\bar{X}_c - 11}{0,135} = 1,282 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 11,17 \Rightarrow RC = \{\bar{x} : \bar{x} > 11,17\}$

Passo 4: $\bar{X} = 11,3$.

Passo 5: O valor observado pertence à RC. Logo, há evidências de que o consumo é maior que o anunciado pela fábrica.

Problema 28

(a) $H_0 : \mu = 50$ versus $H_1 : \mu \in \{45; 58\}$

(b) Erro I: Rejeitar H_0 sendo que H_0 é verdadeira, isto é, dizer que o valor real é diferente do declarado, quando na verdade o valor declarado está correto.

Erro II: Aceitar H_0 sendo que H_0 é falsa, isto é, dizer que o valor declarado está correto, quando na verdade não está.

(c)

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\bar{X} < \bar{X}_{c1} \text{ ou } \bar{X} > \bar{X}_{c2} \mid \bar{X} \sim N(50; 100)) = \\ = P\left(Z < \frac{\bar{X}_{c1} - 50}{10}\right) + P\left(Z > \frac{\bar{X}_{c2} - 50}{10}\right) = 10\% \Rightarrow$$

$$\frac{\bar{X}_{c1} - 50}{10} = -1,645 \Rightarrow \bar{X}_{c1} = 33,55$$

$$\frac{\bar{X}_{c2} - 50}{10} = 1,645 \Rightarrow \bar{X}_{c2} = 66,45$$

$$RC = \{\bar{x} : \bar{x} < 33,55 \text{ ou } \bar{x} > 66,45\}.$$

(d) Se $\mu = 45$:

$$\beta = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}) = P(33,55 < \bar{X} < 66,45 \mid \bar{X} \sim N(45; 100)) = \\ = P\left(\frac{33,55 - 45}{10} < Z < \frac{66,45 - 45}{10}\right) = P(-1,145 < Z < 2,145) = 0,858$$

Se $\mu = 58$:

$$\beta = P(\text{aceitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa}) = P(33,55 < \bar{X} < 66,45 \mid \bar{X} \sim N(58; 100)) = \\ = P\left(\frac{33,55 - 58}{10} < Z < \frac{66,45 - 58}{10}\right) = P(-2,445 < Z < 0,845) = 0,794$$

(e) α : probabilidade de erro tipo I, isto é, probabilidade de afirmar que o valor declarado está incorreto, quando na verdade está correto.

β : probabilidade de erro tipo II, isto é, probabilidade de afirmar que o valor declarado está correto, quando na verdade está incorreto (depende do verdadeiro valor de μ).

Problema 29

Passo 1: $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$ versus $H_1 : \mu_A - \mu_B \neq 0$.

Passo 2: $Var(\bar{X}_A - \bar{X}_B) = Var(\bar{X}_A) + Var(\bar{X}_B) = 100/25 + 100/16 = 10,25$

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim N(\mu_A - \mu_B; 10,25) \Leftrightarrow Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{10,25}} \sim N(0,1).$$

$$\text{Sob } H_0: Z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B)}{\sqrt{10,25}} \sim N(0,1)$$

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_c) = 5\% \Rightarrow z_c = 1,96$.

$$RC = \{z : |z| > 1,96\}$$

Passo 4: $z_o = 1,918$.

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, não rejeitamos H_0 , ou seja, não há evidências de que as médias são diferentes.

Problema 30

Passo 1: $H_0 : p_S = p_N = p_0$ versus $H_1 : p_S \neq p_N$.

Passo 2: $Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N) = Var(\hat{p}_S) + Var(\hat{p}_N) = \frac{p_S(1-p_S)}{n_S} + \frac{p_N(1-p_N)}{n_N}$

$$\hat{p}_S - \hat{p}_N \sim N(p_S - p_N; Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N)) \Leftrightarrow Z = \frac{(\hat{p}_S - \hat{p}_N) - (p_S - p_N)}{\sqrt{Var(\hat{p}_S - \hat{p}_N)}} \sim N(0,1).$$

$$\text{Sob } H_0: Z = \frac{\hat{p}_S - \hat{p}_N}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n_S} + \frac{p_0(1-p_0)}{n_N}}} \sim N(0,1).$$

É preciso estimar o denominador de Z sob H_0 . Sob H_0 , a estimativa

de $p_S = p_N = p_0$ é dada por: $\hat{p}_0 = \frac{n_S \hat{p}_S + n_N \hat{p}_N}{n_S + n_N} = 0,150$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_c) = 5\% \Rightarrow z_c = 1,96$.

$$RC = \{z : |z| > 1,96\}$$

$$\text{Passo 4: } z_o = \frac{\hat{p}_S - \hat{p}_N}{\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_S} + \frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_N}}} = \frac{0,150 - 0,178}{\sqrt{0,00089}} = -0,932.$$

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0 , ou seja, não há evidências de que as proporções nas duas regiões são diferentes.

Problema 31

Passo 1: $H_0 : p_1 = p_2 = p_0$ versus $H_1 : p_1 \neq p_2$.

$$\text{Passo 2: Sob } H_0: Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n_1} + \frac{p_0(1-p_0)}{n_2}}} \sim N(0,1). \Rightarrow \hat{p}_0 = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = 0,310.$$

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(|Z| > z_c) = 5\% \Rightarrow z_c = 1,96$.

$$RC = \{z : |z| > 1,96\}$$

$$\text{Passo 4: } z_o = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_1} + \frac{\hat{p}_0(1-\hat{p}_0)}{n_2}}} = \frac{0,330 - 0,290}{\sqrt{0,0107}} = 1,223.$$

Passo 5: Como o valor observado não pertence à RC, aceita-se H_0 , ou seja, não há evidências de que as preferências nos dois anos sejam diferentes.

Problema 32

(a)

$$P(\text{Erro I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(X \in \{0,1,2\} \mid X \sim \text{Binomial}(15;0,5)) = 0,0037$$

$$P(\text{Erro II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid X \sim \text{Binomial}(15;0,3)) = P(X > 2 \mid X \sim \text{Binomial}(15;0,3)) = 0,8732$$

(b)

$$\pi(\mu) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid p) = P(X > 2 \mid X \sim \text{Binomial}(15; p))$$

(c)

p
0,05
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5

0,6

0,8

 $\pi(p)$

0,964

0,816

0,398

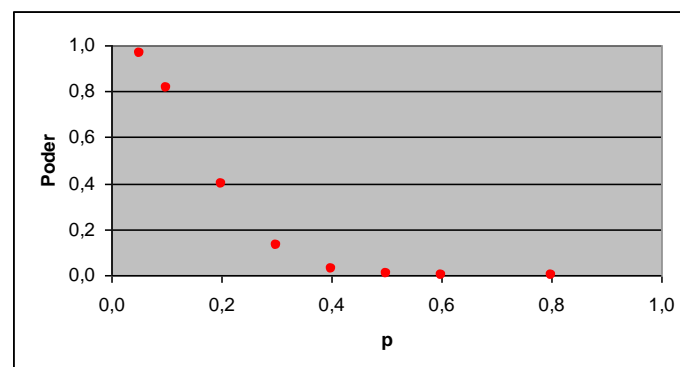
0,127

0,027

0,004

0,000

0,000



Problema 33

(a) $H_0 : \mu = 200$ versus $H_1 : \mu > 200$.

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\bar{X} > \bar{X}_c \mid \bar{X} \sim N(200; 400/n)) = \\ &= P\left(Z > \frac{\bar{X}_c - 200}{20/\sqrt{n}}\right) = 5\% \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_c - 200}{20/\sqrt{n}} = 1,645 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 200 + 32,9/\sqrt{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= P(\text{aceitar } H_0 \mid \bar{X} \sim N(210; /n)) = P(\bar{X} < \bar{X}_c \mid \bar{X} \sim N(210; 400/n)) = \\ &= P\left(Z < \frac{\bar{X}_c - 210}{20/\sqrt{n}}\right) = 10\% \Leftrightarrow \frac{\bar{X}_c - 210}{20/\sqrt{n}} = -1,282 \Leftrightarrow \bar{X}_c = 210 - 25,64/\sqrt{n}\end{aligned}$$

$$\text{Logo: } 200 + 32,9/\sqrt{n} = 210 - 25,64/\sqrt{n} \Leftrightarrow n = 34,27 \cong 35.$$

(b) $\bar{X}_c = 200 + 32,9/\sqrt{n} = 200 + 32,9/\sqrt{34,27} = 205,62$. Nesse caso, a RC é dada por:

$$RC =]205,62; +\infty[.$$

Problema 34*Teste para a variância*

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 80^2$ versus $H_1 : \sigma^2 \neq 80^2$.

Passo 2: $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(24)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\chi^2 < \chi_1^2 \text{ ou } \chi^2 > \chi_2^2) = 5\%$.

$\chi_1^2 = 12,401$ e $\chi_2^2 = 39,364 \Rightarrow RC = \{\chi^2 : \chi^2 < 12,401 \text{ ou } \chi^2 > 39,364\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \frac{24}{80^2} \times 2500 = 9,375$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, há evidências de que a variância tenha se alterado.

Teste para a média

Passo 1: $H_0 : \mu = 250$ versus $H_1 : \mu > 250$.

Passo 2: Sob H_0 , $\frac{\bar{X} - 250}{S/5} \sim t(24)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(T_{24} > t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1,711 \Rightarrow RC = \{t : t > 1,711\}$

Passo 4: $t_o = \frac{280 - 250}{50/5} = 3$.

Passo 5: Como t_o pertence à RC, rejeita-se H_0 . Logo, há evidências de que o número médio diário de clientes tenha aumentado.

Suposições: Amostragem aleatória simples; número diário de clientes do posto de gasolina tem distribuição normal.

Problema 35

Passo 1: $H_0 : \mu = 7$ versus $H_1 : \mu > 7$.

Passo 2: Sob H_0 , $\frac{\bar{X} - 7}{S/3} \sim t(8)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(T_8 > t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 1,860 \Rightarrow RC = \{t : t > 1,860\}$

Passo 4: $t_o = \frac{10,556 - 7}{2,555/3} = 4,175$.

Passo 5: Como t_o pertence à RC, rejeita-se H_0 . Logo, há evidências de melhoria.

$$IC(\mu; 95\%) = \bar{x} \pm t_8 \frac{s}{\sqrt{n}} = 10,556 \pm 2,306 \times \frac{2,555}{3} = 10,556 \pm 1,964 = [8,59; 12,52].$$

Problema 36

$$S^2 = 6,528. \Rightarrow IC(\sigma^2; 90\%) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}; \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2} \right] = \left[\frac{8 \times 6,528}{19,11}; \frac{8 \times 6,528}{3,37} \right] = [3,37; 19,11]$$

Problema 37

$$(a) \quad \frac{\text{erro}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = 1,645 \Leftrightarrow n = \left(\frac{1,645}{\text{erro}} \right)^2 p(1-p). \text{ Tomando } p=0,5 \text{ (para maximizar } p(1-p)):$$

$$n = 270,6 \cong 271.$$

$$(b) \quad IC(p; 0,95) = \hat{p} \pm z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,40 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{400}} = 0,40 \pm 0,048 = [0,352; 0,448]$$

Intervalo conservador:

$$IC(p; 0,95) = \hat{p} \pm z \sqrt{\frac{1}{4n}} = 0,40 \pm 1,96 \sqrt{\frac{1}{4 \times 400}} = 0,40 \pm 0,049 = [0,351; 0,449]$$

Problema 38

$$IC(p; 0,90) = \hat{p} \pm z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,40 \pm 1,645 \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{2000}} = 0,40 \pm 0,018 = [0,382; 0,418]$$

Intervalo conservador:

$$IC(p; 0,90) = \hat{p} \pm z \sqrt{\frac{1}{4n}} = 0,40 \pm 1,645 \sqrt{\frac{1}{4 \times 2000}} = 0,40 \pm 0,018 = [0,382; 0,418]$$

Problema 39

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 \leq 25$ versus $H_1 : \sigma^2 > 5$.

Passo 2: $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(10)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = 5\% \Rightarrow \chi_2^2 = 18,307$.

$$RC = \{\chi^2 : \chi^2 > 18,307\}.$$

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \frac{10}{25} \times 48 = 19,2$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, rejeita-se H_0 , ou seja, há evidências de que a variância seja maior que a anunciada pelo fabricante.

Problema 40

Teste para a variância

Passo 1: $H_0 : \sigma^2 = 25$ versus $H_1 : \sigma^2 < 25$.

Passo 2: $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(7)$.

Passo 3: $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = P(\chi^2 < \chi_1^2) = 5\% \Rightarrow \chi_1^2 = 2,167$

$RC = \{\chi^2 : \chi^2 < 2,167\}$.

Passo 4: $\chi_{obs}^2 = \frac{7}{25} \times 1,351 = 0,378$.

Passo 5: Como o valor observado pertence à RC, há evidências de que a variância tenha diminuído.

Teste para a média

Passo 1: $H_0 : \mu = 24$ versus $H_1 : \mu \neq 24$.

Passo 2: Sob H_0 , $\frac{\bar{X} - 24}{S/\sqrt{8}} \sim t(7)$.

Passo 3: $\alpha = 0,05$, $\alpha = P(|T_7| > t_c) = 5\% \Rightarrow t_c = 2,365 \Rightarrow RC = \{t : |t| > 2,365\}$

Passo 4: $t_o = \frac{24,6 - 24}{1,162/\sqrt{8}} = 1,369$.

Passo 5: Como t_o não pertence à RC, não rejeitamos H_0 . Ou seja, não há evidências de que o rendimento médio seja diferente de 24%.

Problema 41

(a) $X \sim \text{Binomial}(10; p) \Rightarrow H_0 : p = 0,6 \Rightarrow \hat{\alpha} = P(X \leq 3 \mid X \sim \text{Binomial}(10; 0,6)) = 0,055$.

(b) $\hat{\alpha} = 2 \times P(X \leq 3 \mid X \sim \text{Binomial}(10; 0,6)) = 0,110$.

Problema 42

$\hat{\alpha} = 2 \times P(X \leq 6 \mid X \sim \text{Binomial}(10; 0,6)) = 1,266$.

Problema 43*Exemplo 12.7*

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= P(\bar{X} > 314 \mid \bar{X} \sim N(300;90)) + P(\bar{X} < 300 - (314 - 300) \mid \bar{X} \sim N(300;90)) = \\ &= P\left(Z > \frac{314 - 300}{\sqrt{90}}\right) + P\left(Z < \frac{286 - 300}{\sqrt{90}}\right) = 2 \times P(Z > 1,476) = 0,14\end{aligned}$$

Problema 42

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= P(X \geq 6 \mid X \sim \text{Binomial}(10;0,6)) + P(X \leq 6 - (6 - 6) \mid X \sim \text{Binomial}(10;0,6)) = \\ &= 1 + P(X = 6 \mid X \sim \text{Binomial}(10;0,6)) = 1,251\end{aligned}$$