Escolhas envolvendo tempo.

Já sabemos como os agentes econômicos fazem escolhas sem ou com incerteza em um dado tempo, mas e escolhas envolvendo diferentes tempos?

Em economia, coisas iguais em tempos diferentes são coisas diferentes. Uma laranja ontem é diferente de uma laranja hoje e é diferente de uma laranja amanhã. $100 ontem é diferente de $100 hoje e é diferente de $100 amanhã.

Para somar, subtrair, dividir, multiplicar ou simplesmente comparar valores em tempos diferentes é preciso antes levá-los para um mesmo tempo usando uma taxa de desconto intertemporal. A taxa de juros é uma taxa de desconto intertemporal e o juros calculado a partir da taxa de juros pode ser interpretado como o preço ou custo do tempo.

A taxa de juros é informada em relação a um determinado período de tempo: há taxa de juros ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao ano (a.a.) etc.

A taxa de juros também pode se referir a juros simples ou juros compostos.

Dada uma taxa de juros i ao período qualquer (a.p.), o valor de V_0 em V_t será…

De acordo com juros simples:

$$V_t = V_0(1 + it)$$

$$J = V_t - V_0 = V_0 it$$

De acordo com juros compostos:

$$V_t = V_0(1 + i)^t$$

$$J = V_t - V_0 = V_0[(1 + i)^t - 1]$$

Você empresta $100 por 2 anos com taxa de juros de 10% ao ano. Ao final de 2 anos, você terá $120 com juros simples ou $121 com juros compostos.

Quando juros simples é melhor que juros compostos? Quando…

$$V_0 it > V_0[(1 + i)^t - 1]$$

$$1 + it > (1 + i)^t$$

$$t < 1$$

O juros compostos é o mais comum e é o que será considerado daqui por diante.

Dá para transformar uma taxa de juros ao ano em ao mês, em ao dia... e vice-versa.
Seja i_{AA} a taxa de juros ao ano, i_{AM} a taxa ao mês e i_{AD} a taxa ao dia:

$$V_0(1+i_{AA}) = V_0(1+i_{AM})^{12} = V_0(1+i_{AD})^{365}$$

$$1+i_{AA} = (1+i_{AM})^{12} = (1+i_{AD})^{365}$$

A taxa real de juros é a taxa nominal de juros descontada a taxa de inflação.
Seja i a taxa nominal de juros, r a taxa real de juros e φ a taxa de inflação:

$$V_0(1+i) = V_0(1+r)(1+\varphi)$$

$$r = \frac{1+i}{1+\varphi} - 1$$

$$r \approx i - \varphi$$

Com a taxa de juros, pode-se levar um valor presente para o futuro ou passado e vice-versa:

$$V_2 = V_0(1+i)^2 \qquad V_{-2} = V_0(1+i)^{-2} \qquad V_2 = V_{-2}(1+i)^4$$

$$V_0 = V_2(1+i)^{-2} \qquad V_0 = V_{-2}(1+i)^2 \qquad V_{-2} = V_2(1+i)^{-4}$$

Seja i = 10% a.p., transforme cada um dos valores abaixo em valores presentes:

$V_{-2} = 100$	$V_{-1} = 200$	$V_0 = 300$	$V_1 = 400$	$V_2 = -1000$
$V_0 = 100(1{,}1)^2$ $V_0 = 121$	$V_0 = 200(1{,}1)^1$ $V_0 = 220$	$V_0 = 300(1{,}1)^0$ $V_0 = 300$	$V_0 = 400(1{,}1)^{-1}$ $V_0 \approx 364$	$V_0 = -1000(1{,}1)^{-2}$ $V_0 \approx -826$

Agora, qual o valor presente que representa a somatória do fluxo de valores acima?

$$\Sigma V_0 = \sum_{t=-2}^{2} V_t (1+i)^{-t} = 121 + 220 + 300 + 364 - 826 \approx 178$$

Notem que a mesma coisa poderia ser feita para qualquer outro tempo...

$V_{-2} = 100$	$V_{-1} = 200$	$V_0 = 300$	$V_1 = 400$	$V_2 = -1000$
$V_1 = 100(1{,}1)^3$ $V_1 \approx 133$	$V_1 = 200(1{,}1)^2$ $V_1 = 242$	$V_1 = 300(1{,}1)^1$ $V_1 = 330$	$V_1 = 400(1{,}1)^0$ $V_1 = 400$	$V_1 = -1000(1{,}1)^{-1}$ $V_1 \approx -909$

$$\Sigma V_1 = \sum_{t=-2}^{2} V_t (1+i)^{1-t} = 133 + 242 + 330 + 400 - 909 \approx 196 \approx 178(1{,}1)^1$$

Qual o valor de uma firma? Quanto você pagaria por uma firma num leilão?

É a soma de todos os seus bens e equipamentos? Só se você estiver pensando em fechar a firma e vender os seus bens e equipamentos como sucata...

O valor de uma firma é o valor presente da somatória do fluxo esperado de ganhos!

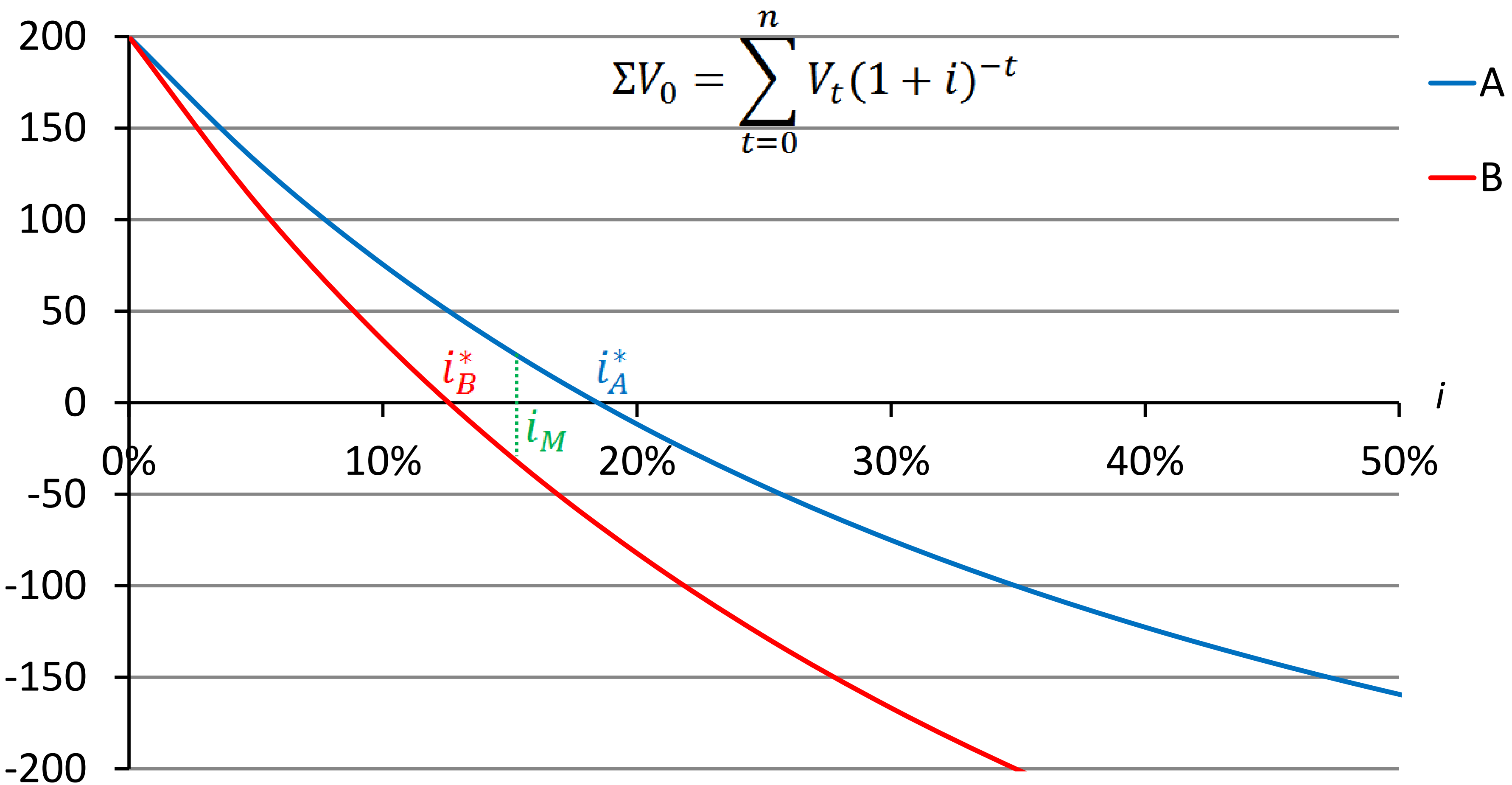
$$\Sigma V_0 = \sum_{t=0}^{n} V_t (1+i)^{-t}$$

Para se calcular o valor de uma firma, o passado é morto, olha-se de hoje, t = 0, em diante. É preciso ter um horizonte de tempo (ou seja, um valor para n) e estimativas de ganhos (ou perdas) durante esse horizonte de tempo (ou seja, valores de V_t). A taxa de juros i a ser usada deve ser a taxa de juros que melhor represente o seu <u>custo de oportunidade</u>: se você não fosse comprar a firma e colocasse o dinheiro num outro investimento, quanto esse investimento lhe daria de taxa de juros?

O valor de qualquer investimento é o valor presente da somatória do fluxo esperado de ganhos. Como decidir entre dois investimentos?

Sejam dois possíveis investimentos, A e B. Qual o melhor?

A	$V_0 = -400$	$V_1 = 150$	$V_2 = 150$	$V_3 = 150$	$V_4 = 150$
B	$V_0 = -600$	$V_1 = 200$	$V_2 = 200$	$V_3 = 200$	$V_4 = 200$



A taxa de juros i_M representa no gráfico a taxa de juros de mercado. É a taxa de juros que o mercado normalmente pagaria para investimentos do porte de A e B. Essa taxa de juros está no gráfico para ilustrar o custo de oportunidade. Na falta de idéia do que seria i_M, pode-se considerá-la como no mínimo a taxa de juros SELIC.

As taxas de juros i_A^* e i_B^* são chamadas taxas internas de retorno (TIR) dos investimentos A e B respectivamente. Elas são as taxas de juros que fazem o valor presente da somatória do fluxo esperado de ganhos igual a zero:

$$\Sigma V_0 = \sum_{t=0}^{n} V_t (1+i)^{-t} = 0$$

As TIR podem ser comparadas entre si e em relação à taxa de juros de mercado. Pelo gráfico, sabe-se que o investimento A é o melhor (e B o pior) pois...

$$i_A^* > i_M > i_B^*$$

Obs: as TIR oferecem uma visão de retorno relativo, não absoluto: alguém pode preferir um retorno de 5% sobre 100.000 do que 10% sobre 1.000...

Pergunta: se i_M for considerada como a taxa de juros SELIC, como aumentos da SELIC afetam investimentos no Brasil?

À vista ou em prestações?

Uma TV custa \$1500 à vista ou três parcelas sem entrada de \$500. Melhor pagar à vista ou em prestações? Dependerá da taxa de juros. Se i = 1% a.m., tem-se que o valor presente da somatória das prestações é…

$$\Sigma V_0 = \sum_{t=0}^{3} V_t(1+i)^{-t} = 0 + 500(1{,}01)^{-1} + 500(1{,}01)^{-2} + 500(1{,}01)^{-3} \approx 1470$$

Logo, se i = 1% a.m., melhor pagar em prestações.

Escolha intertemporal.

Em um dado tempo, o consumidor faz $\underset{Q,X}{\text{Max}}\, U(Q,X) + \lambda(W - PQ - ZX)$, mas para dois tempos…

$$\underset{\substack{Q_0,X_0\\Q_1,X_1}}{\text{Max}}\, U(Q_0,X_0)(1+j)^0 + U(Q_1,X_1)(1+j)^{-1} + \lambda\begin{bmatrix}(W_0 - PQ_0 - ZX_0)(1+i)^0 + \\ (W_1 - PQ_1 - ZX_1)(1+i)^{-1}\end{bmatrix}$$

Em que a taxa de desconto intertemporal j para a utilidade do indivíduo não necessariamente precisa ser igual à taxa de juros i valida para a restrição orçamentária. A taxa j pode ser vista como a taxa de impaciência do consumidor.

O ciclo de vida.

W_0 quando jovem	W_1 quando adulto	W_2 quando velho
$W_0 = W_0(1 + i)^0$	$W_0 = W_1(1 + i)^{-1}$	$W_0 = W_2(1 + i)^{-2}$

Qual o valor presente que representa a somatória do fluxo de valores acima?

$$\Sigma W_0 = \sum_{t=0}^{2} W_t(1+i)^{-t}$$

Qual fluxo de constantes é equivalente ao fluxo de valores acima?

$$\Sigma W_0 = \sum_{t=0}^{2} W_t(1+i)^{-t} = \sum_{t=0}^{2} W(1+i)^{-t}$$

$$W = \frac{\Sigma W_0}{\sum_{t=0}^{2}(1+i)^{-t}}$$

	W_0 = 24.000	W_1 = 96.000	W_2 = 36.000
	...é equivalente a...		
i = 0%	W = 52.000	W = 52.000	W = 52.000
i = 5%	W = 51.787	W = 51.787	W = 51.787
i = 10%	W = 51.553	W = 51.553	W = 51.553

Breve introdução ao mercado financeiro ou de capitais.

Compra e venda de ativos (*i.e.*, contratos financeiros ou simplesmente promessas).

O preço P_X de um ativo X qualquer:

$$P_X = \Sigma V_0 = \sum_{t=0}^{n} V_t (1+i)^{-t}$$

É preciso de um horizonte de tempo n, estimativas para o fluxo de ganhos ou perdas V_t e uma taxa de juros i que represente adequadamente o custo de oportunidade.

Se V_t são uma constante, então o ativo é de renda fixa, caso contrário, o ativo é de renda variável. Se n e V_t são conhecidos, pode-se caracterizar um ativo X pela sua taxa interna de retorno, a qual chamaremos r_X:

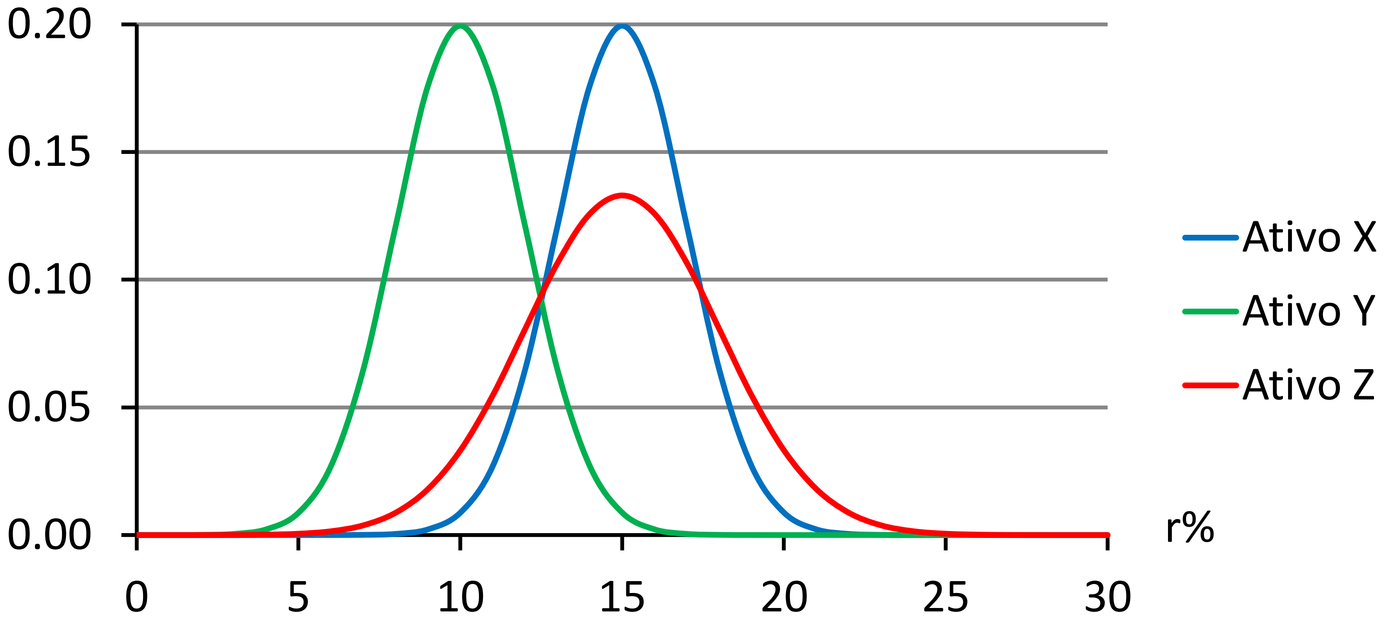
$$r_X = i \text{ tal que } \Sigma V_0 = \sum_{t=0}^{n} V_t (1+i)^{-t} = 0$$

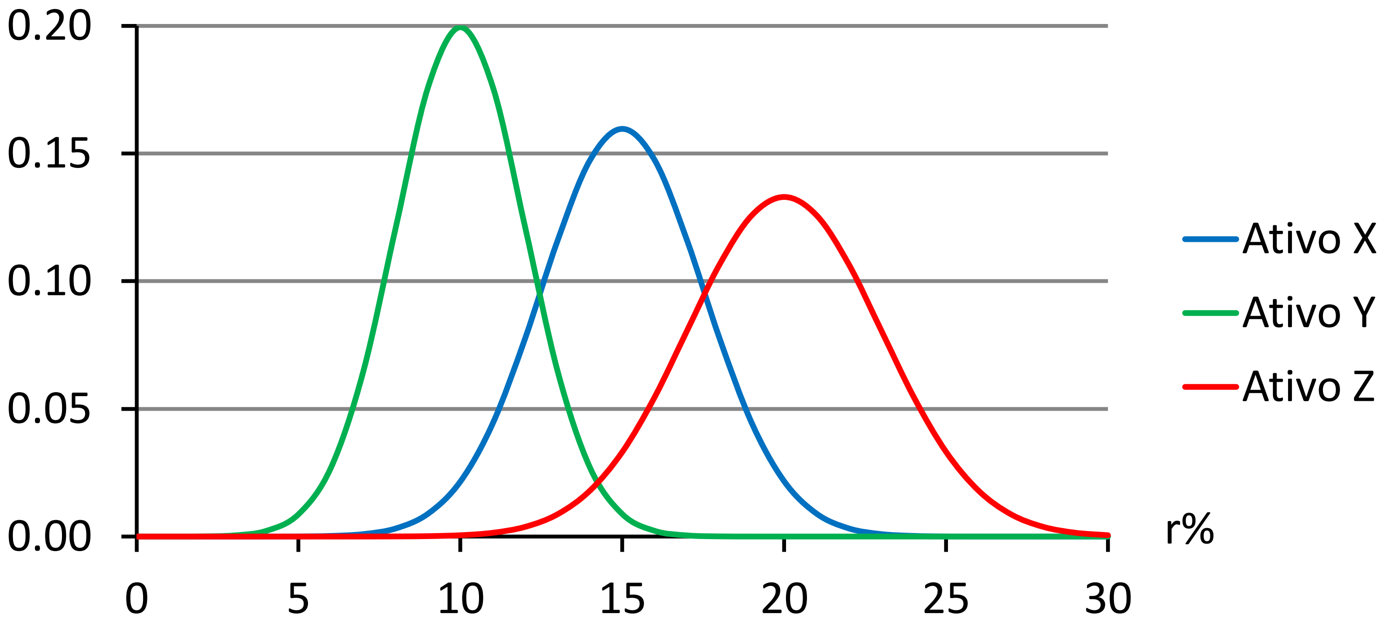
O principal problema é a incerteza sobre o fluxo V_t, o que torna r_X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 (ou desvio padrão σ).

$$r_X = r_X(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$X\colon\ r_X(\mu_X, \sigma_X^2)$$

O retorno de um ativo como uma variável aleatória: qual o melhor ativo?



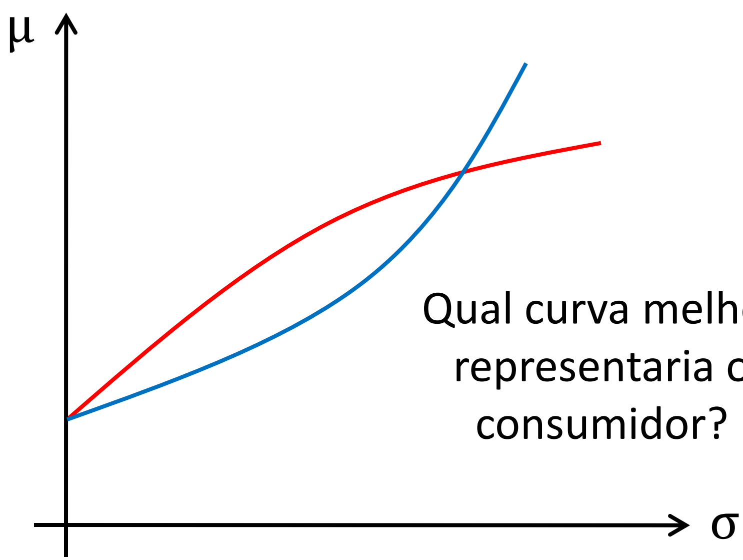


O comportamento do consumidor de ativos.

$$U = U(\mu, \sigma) \qquad \frac{\partial U}{\partial \mu} = U'(\mu) > 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \sigma} = U'(\sigma) < 0$$

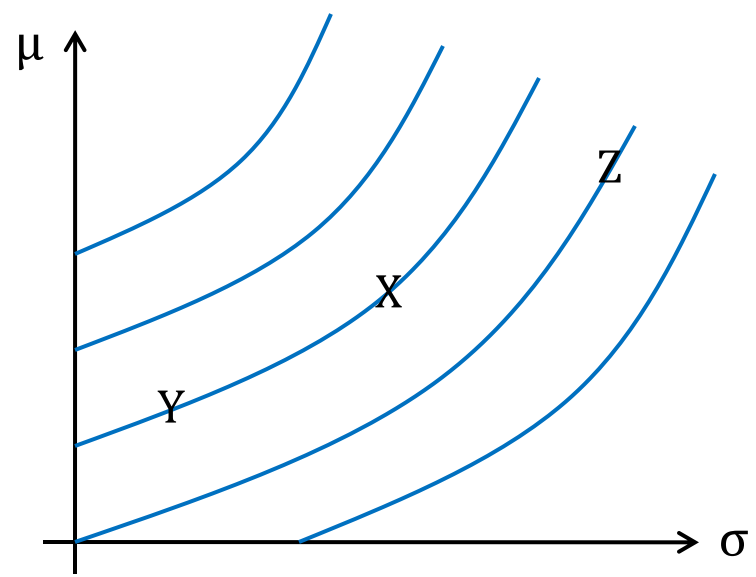
$$dU = U'(\mu)d\mu + U'(\sigma)d\sigma$$

$$dU = 0 \qquad \frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{U'(\sigma)}{U'(\mu)} > 0$$



Qual curva melhor representaria o consumidor?

Curvas de indiferença com aversão ao risco



A carteira de ativos (ou o ativo composto).

$X\colon\ r_X(\mu_X, \sigma_X^2)$

$Y\colon\ r_Y(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$Z\colon\ r_Z(\mu_Z, \sigma_Z^2)$

$C = 0.5X + 0.3Y + 0.2Z$

$C = 0.6X + 0.5Y - 0.1Z$

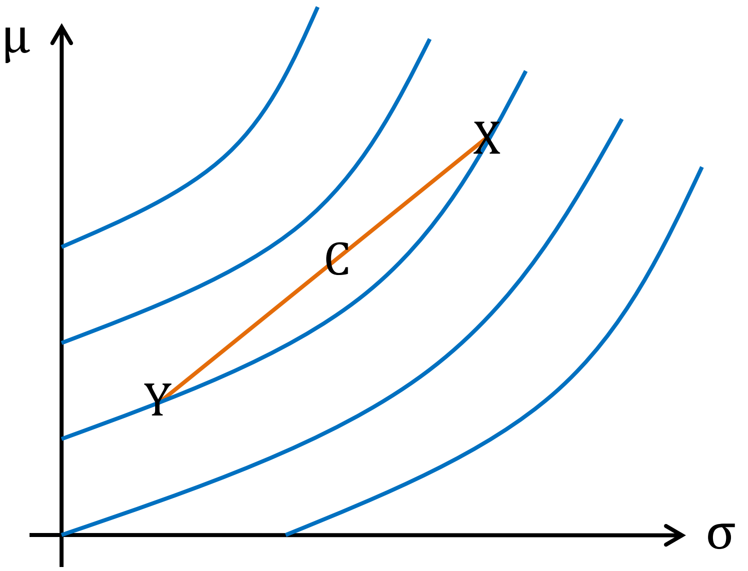
$C\colon\ r_C(\mu_C, \sigma_C^2)$

$\mu_C = ?$

$\sigma_C^2 = ?$

Notem: se ativo é um contrato financeiro, carteira é uma coleção de contratos financeiros.

$$\left.\begin{array}{l} X\colon\ r_X(\mu_X, \sigma_X^2) \\ Y\colon\ r_Y(\mu_Y, \sigma_Y^2) \end{array}\right\} \quad C = \alpha X + (1-\alpha)Y$$



$C\colon\ r_C(\mu_C, \sigma_C^2)$

$\mu_C = ?$

$\sigma_C^2 = ?$

$$\mu_C = E(r_C)$$

$$\mu_C = E(\alpha r_X + (1-\alpha) r_Y) = \alpha E(r_X) + (1-\alpha) E(r_Y)$$

$$\mu_C = \alpha \mu_X + (1-\alpha)\mu_Y$$

$$\sigma_C^2 = E((r_C - \mu_C)^2)$$

$$\sigma_C^2 = E((\alpha(r_X - \mu_X) + (1-\alpha)(r_Y - \mu_Y))^2)$$

$$\sigma_C^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{XY}$$

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\sigma_{XY} = \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY}$$

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

$$\sigma_C^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY}$$

$\rho_{XY} = 1$ $\qquad \sigma_C^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_X\sigma_Y$

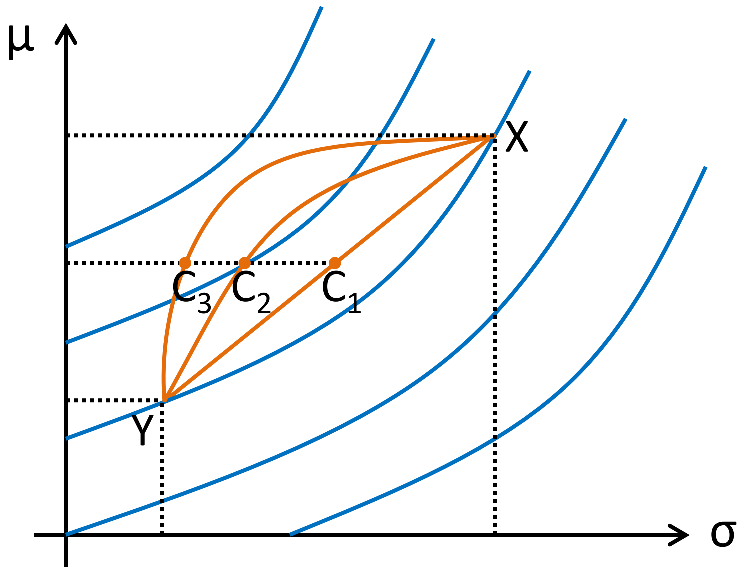
$\rho_{XY} = 0$ $\qquad \sigma_C^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2$

$\rho_{XY} = -1$ $\qquad \sigma_C^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + (1-\alpha)^2\sigma_Y^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_X\sigma_Y$

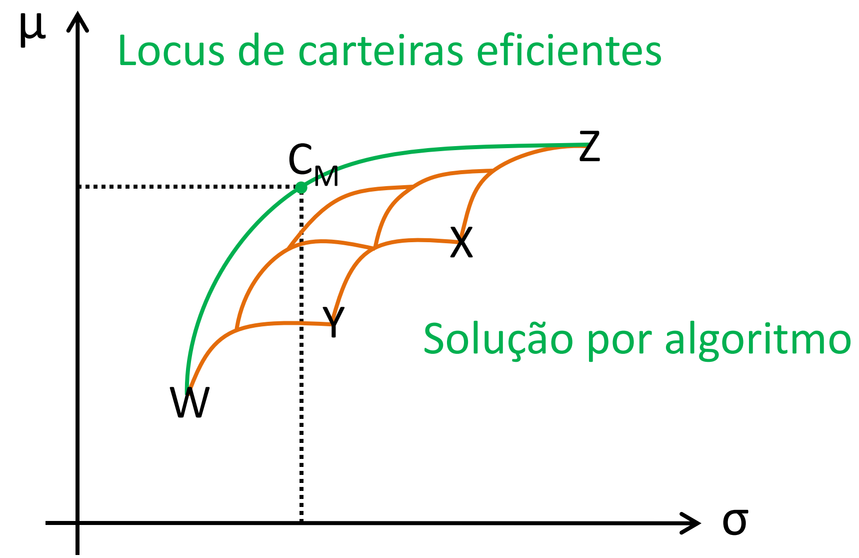
Risco decrescente

Nota: numa crise sistêmica é como se tudo de repente tivesse correlação próxima de 1.

Retorno		$\mu_C = \alpha\mu_X + (1-\alpha)\mu_Y$	
Risco	$\rho_{XY} = 1$	$\sigma_C^2 = [\alpha\sigma_X + (1-\alpha)\sigma_Y]^2$	$\sigma_C = \alpha\sigma_X + (1-\alpha)\sigma_Y$
	$\rho_{XY} = -1$	$\sigma_C^2 = [\alpha\sigma_X - (1-\alpha)\sigma_Y]^2$	$\sigma_C = \lvert\alpha\sigma_X - (1-\alpha)\sigma_Y\rvert$

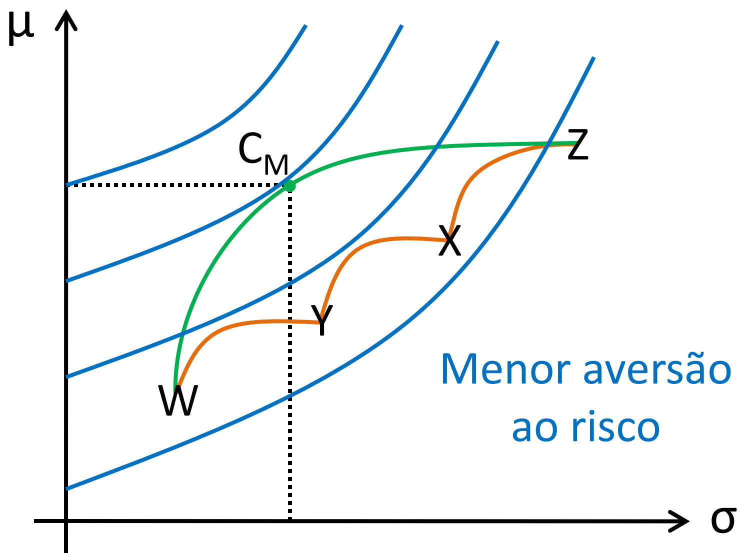


Carteiras C_1, C_2 e C_3 têm o mesmo retorno esperado μ_C (e, logo, a mesma composição), mas risco σ_C decrescente devido à decrescente correlação assumida entre Y e X.



Dados os ativos W, Y, X e Z com retorno e risco crescentes e com correlação menor que 1, é possível montar uma carteira C_M com esses ativos que maximiza o retorno para um dado risco.

Vimos que é possível construir uma carteira C_M composta por n diferentes ativos com correlação menor que 1 que maximiza o retorno para um dado risco, mas que risco escolher? Isso dependerá das preferências do investidor...

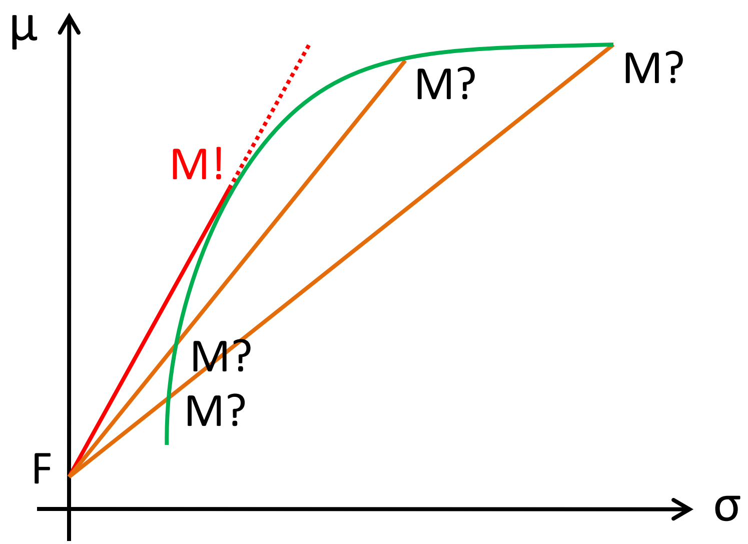


A fronteira verde representa o locus de carteiras eficientes. Porém, essa fronteira pode ser expandida caso haja um ativo sem risco. Seja F esse ativo sem risco e M um ativo na fronteira verde. Uma carteira C composta de F e M resultaria em...

Retorno	$\mu_C = \alpha\mu_M + (1-\alpha)\mu_F$
Risco	$\sigma_C^2 = \alpha^2\sigma_M^2 + (1-\alpha)^2\sigma_F^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_M\sigma_F\rho_{MF} = \alpha^2\sigma_M^2$

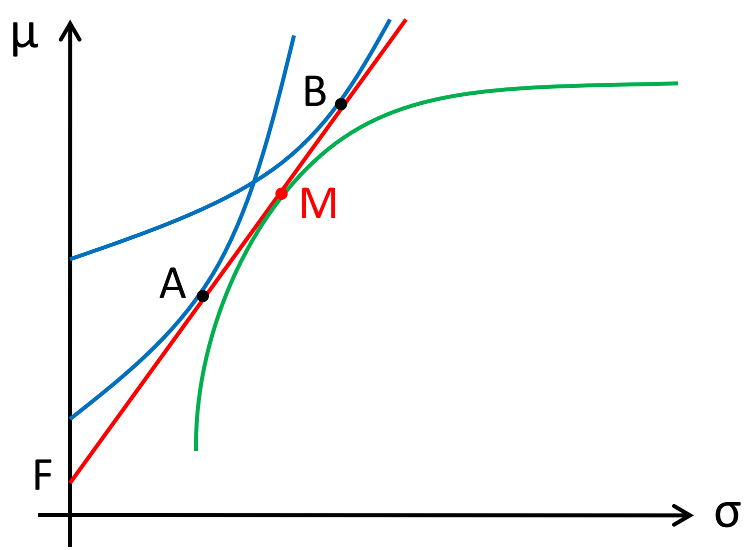
Porém, qual o melhor M para se montar uma carteira com F?

Há apenas um M que expande a fronteira de carteiras eficientes!



Teoria do portfólio: a fronteira eficiente de Markowitz (com alavancagem).

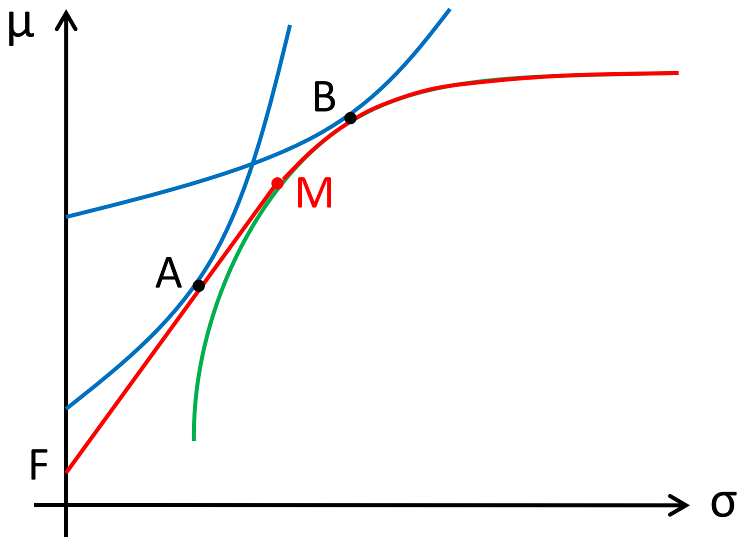
Uma carteira eficiente é uma composição entre o ativo F sem risco e o ativo M.



Carteira F: 100% em F.
Carteira A: 40% em F e 60% em M.
Carteira M: 100% em M.
Carteira B: -30% em F e 130% em M.*

* Alavancagem: pega emprestado 30% em F, vende e compra mais M.

Teoria do portfólio: a fronteira eficiente de Markowitz (sem alavancagem).



Carteira F: 100% em F.
Carteira A: 40% em F e 60% em M.
Carteira M: 100% em M.
Carteira B: 100% em B.

Em suma, para se montar uma carteira eficiente basta em tese identificar e combinar numa carteira os ativos F e M. O resultado seria uma carteira C com...

$$\left.\begin{array}{l} \mu_C = \alpha\mu_M + (1-\alpha)\mu_F \\ \sigma_C = \alpha\sigma_M \end{array}\right\} \mu_C = \mu_F + \frac{\sigma_C}{\sigma_M}(\mu_M - \mu_F) = \mu_F + \beta(\mu_M - \mu_F)$$

Em que $\mu_M - \mu_F$ é o prêmio pelo risco.

Problema: achar aquela fronteira verde...

Observações:

1-) Considere que M seja uma carteira representativa do mercado como a carteira do Ibovespa. Então, espera-se que o retorno μ_C de uma carteira C qualquer seja:

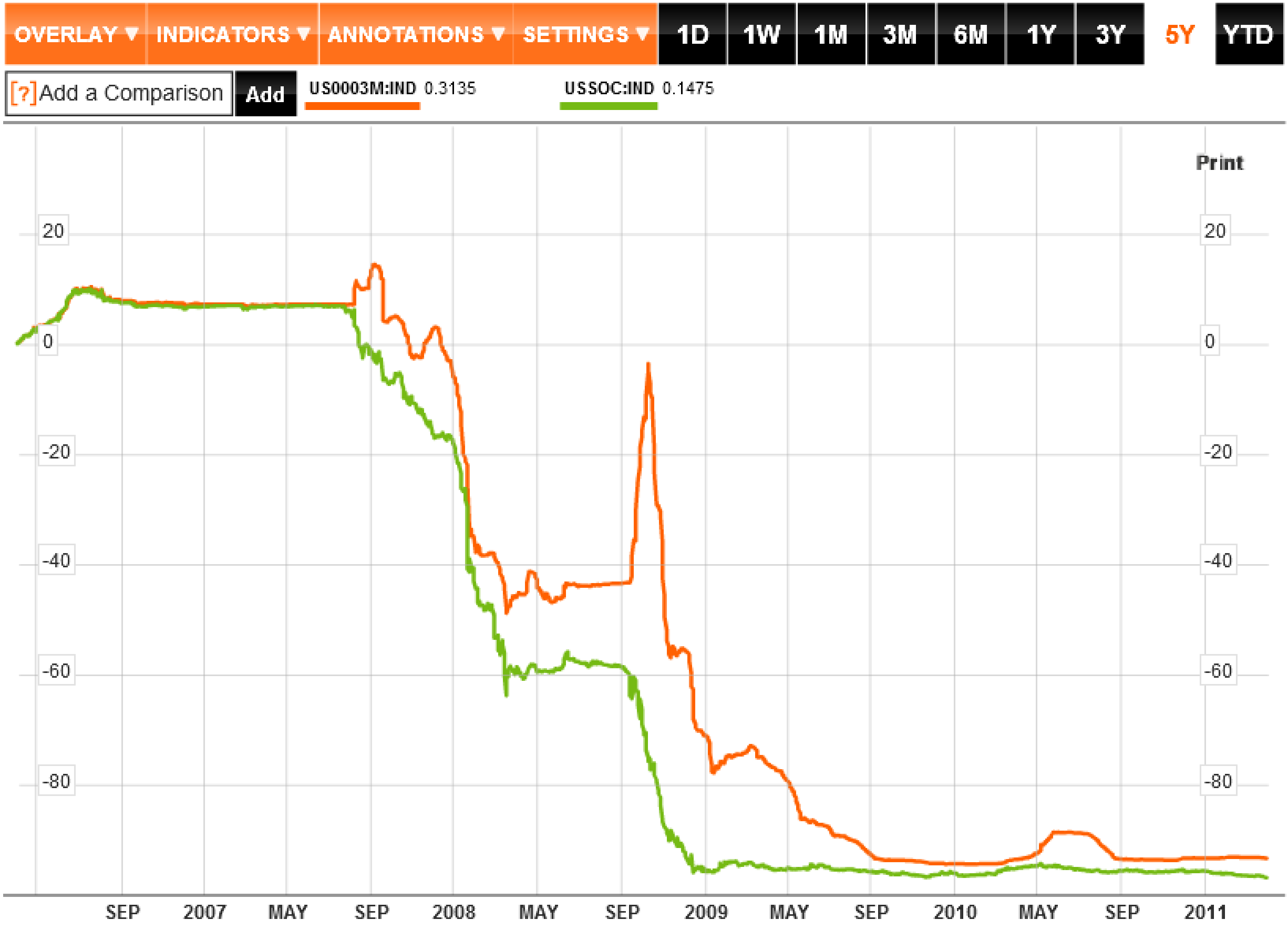
$$\mu_C = \mu_F + \frac{\sigma_C}{\sigma_M}(\mu_M - \mu_F) = \mu_F + \beta(\mu_M - \mu_F)$$

2-) Como discutido, o retorno r_X de um ativo X depende de estimativas para o fluxo de ganhos ou perdas V_t:

$$r_X = i \text{ tal que } \Sigma V_0 = \sum_{t=0}^{n} V_t (1+i)^{-t} = 0$$

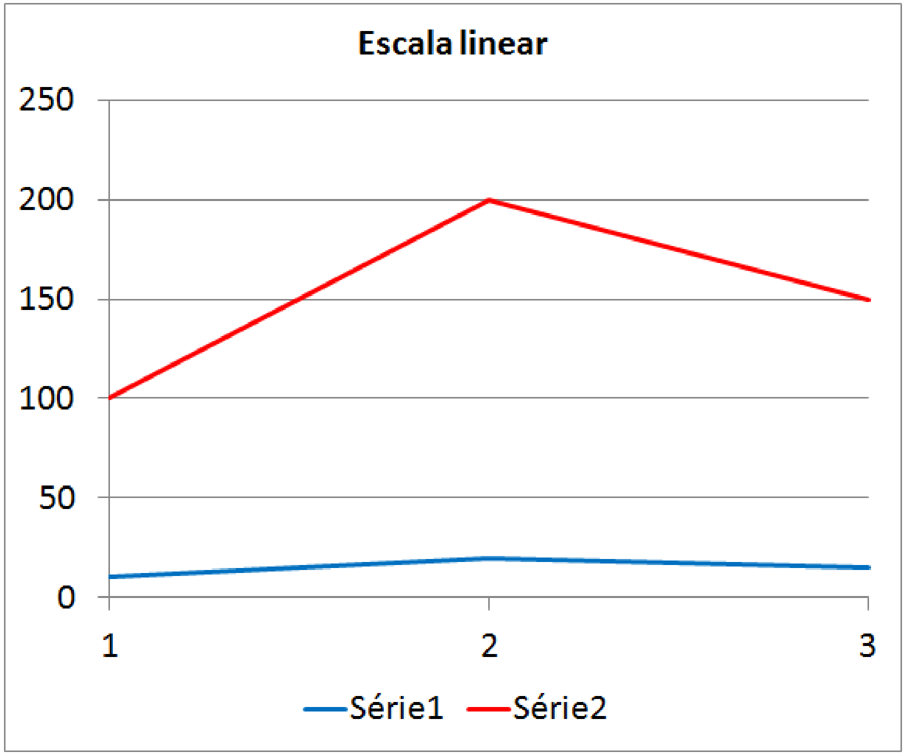
Ocorre que o mercado pode às vezes subestimar ou superestimar esse fluxo de ganhos ou perdas. Em outras palavras, em parte os retornos esperados dos ativos podem sofrer influência do "humor do mercado" via profecias auto-realizáveis... Logo, é importante monitorar esse humor. Como? Observando o <u>prêmio pelo risco exigido pelo mercado</u> na forma da diferença entre a taxa de juros de um contrato com risco e a taxa de juros de um contrato sem risco.

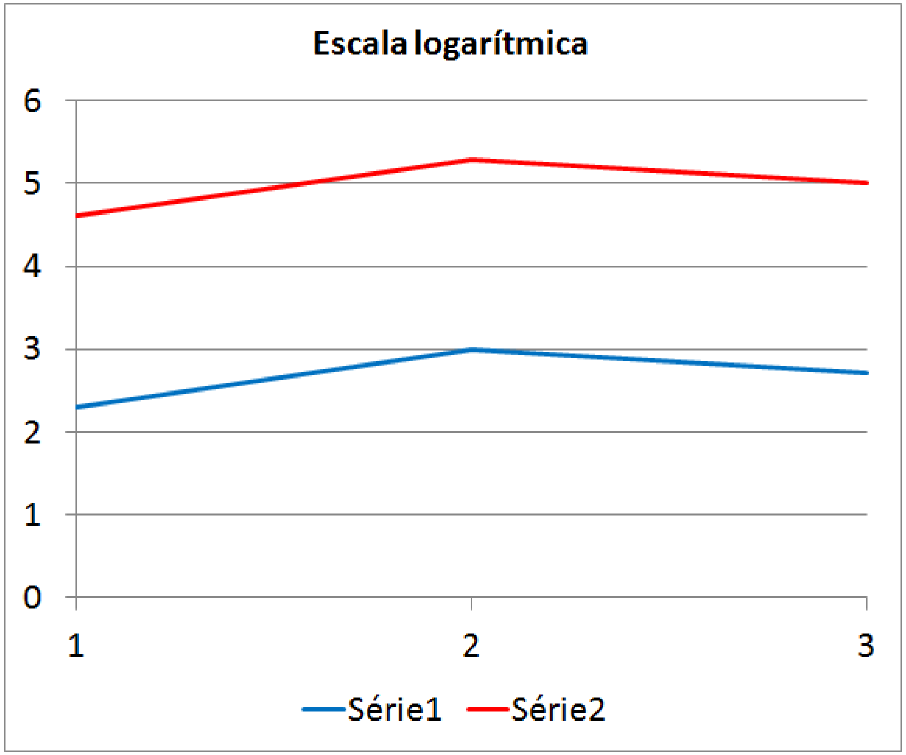
Monitorando o mercado: LIBOR USD 3M - OIS USD 3M = USD 3M LIBOR-OIS SPREAD



Monitorando o mercado: USD 3M LIBOR-OIS SPREAD versus TED SPREAD

Gráfico linear e logarítmico





Os dados de Série1 são 10, 20 e 15 enquanto que de Série2 são 100, 200 e 150. Ambas as séries apresentam a mesma variação relativa: +100% do primeiro para o segundo dado e -25% do segundo para o terceiro dado, mas essa percepção se perde na escala linear. A escala logarítmica é usada para recuperar essa percepção.

Monitorando o mercado: DOW JONES e IBOVESPA.