Algoritmos de Ordenação

Ordenação em tempo linear

Professora:

Fátima L. S. Nunes

Algoritmos de Ordenação

- Algoritmos de ordenação que já conhecemos e suas complexidades:
  - *Insertion Sort* (Ordenação por Inserção) $O(n^2)$
  - *Selection Sort* (Ordenação por Seleção) $O(n^2)$
  - *Bubble Sort* (Ordenação pelo método da Bolha) $O(n^2)$
  - *MergeSort* (Ordenação por intercalação) $O(n \lg n)$
  - *QuickSort* (Ordenação rápida) $O(n \lg n)$ ***no caso médio***
  - *HeapSort* (Ordenação por monte) $O(n \lg n)$

Algoritmos de Ordenação

- Algoritmos de ordenação que já conhecemos e suas complexidades:
  - *Insertion Sort* (Ordenação por Inserção) $O(n^2)$
  - *Selection Sort* (Ordenação por Seleção) $O(n^2)$
  - *Bubble Sort* (Ordenação pelo método da Bolha) $O(n^2)$
  - *MergeSort* (Ordenação por intercalação) O(n lg n)
  - *QuickSort* (Ordenação rápida) O(n lg n) ***no caso médio***
  - *HeapSort* (Ordenação por monte) O(n lg n)

- Todos são algoritmos por .....

Algoritmos de Ordenação

- Algoritmos de ordenação que já conhecemos e suas complexidades:
  - *Insertion Sort* (Ordenação por Inserção) $O(n^2)$
  - *Selection Sort* (Ordenação por Seleção) $O(n^2)$
  - *Bubble Sort* (Ordenação pelo método da Bolha) $O(n^2)$
  - *MergeSort* (Ordenação por intercalação) O(n lg n)
  - *QuickSort* (Ordenação rápida) O(n lg n) ***no caso médio***
  - *HeapSort* (Ordenação por monte) O(n lg n)

- Todos são algoritmos por COMPARAÇÃO

Algoritmos de Ordenação

- Será que teria outra forma de ordenar conjuntos de valores?

Algoritmos de Ordenação

- Ordenação por contagem (*Counting Sort*):
  - pressupõe que cada um dos *n* elementos de entrada é um inteiro no intervalo de *1* a *k*, para algum inteiro *k*.
  - ideia básica:
    - para cada elemento de entrada *x*, determinar o número de elementos menores que *x;*
    - a informação pode ser usada para inserir o elemento *x* diretamente em sua posição no arranjo de saída.
    - Exemplo: se há 5 elementos menores que *x*, então *x* será inserido na 6ª posição.

CountingSort

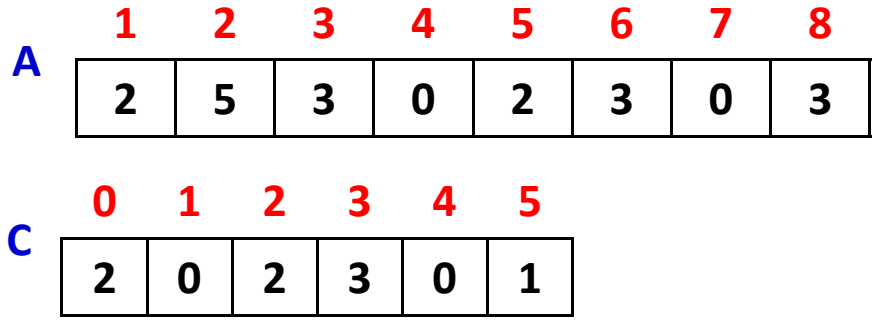
- Algoritmo:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
     C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
     C[A[j]] ← C[A[j]] + 1   // c[i]contém número de elementos iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
     C[i] ← C[i] + C[i-1]
     // c[i]contém número de elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
     B[C[A[j]]] ← A[j]
     C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

CountingSort

- Algoritmo:

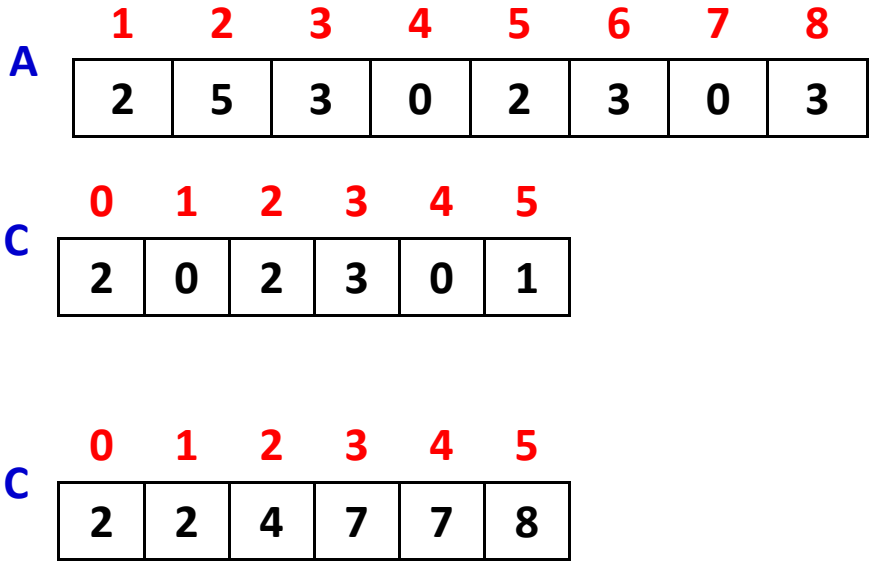
```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```



CountingSort

- Algoritmo:

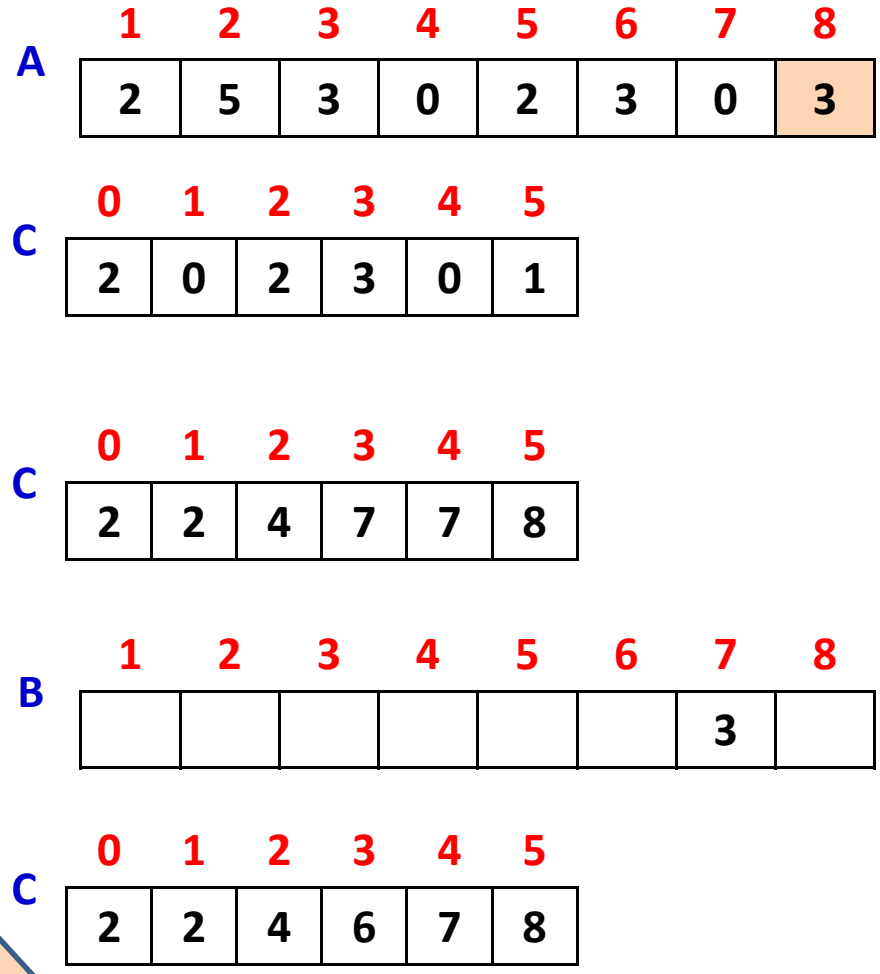
```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```



CountingSort

- Algoritmo:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

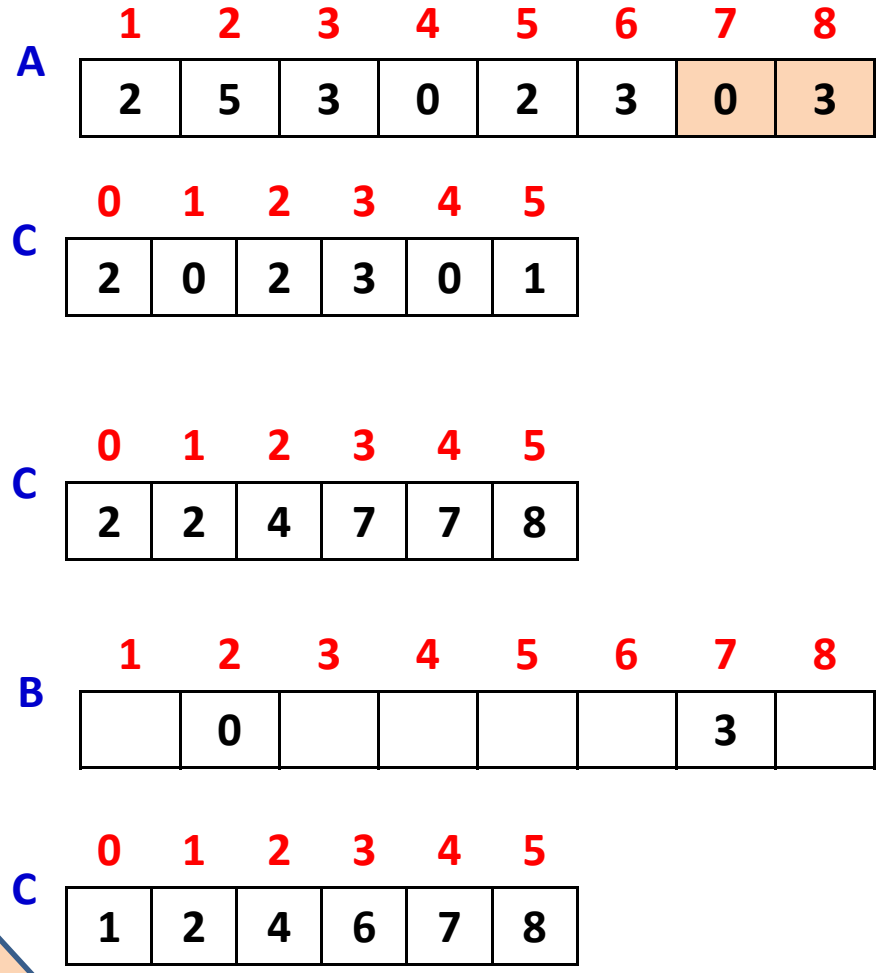


Iteração 1

CountingSort

- Algoritmo:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

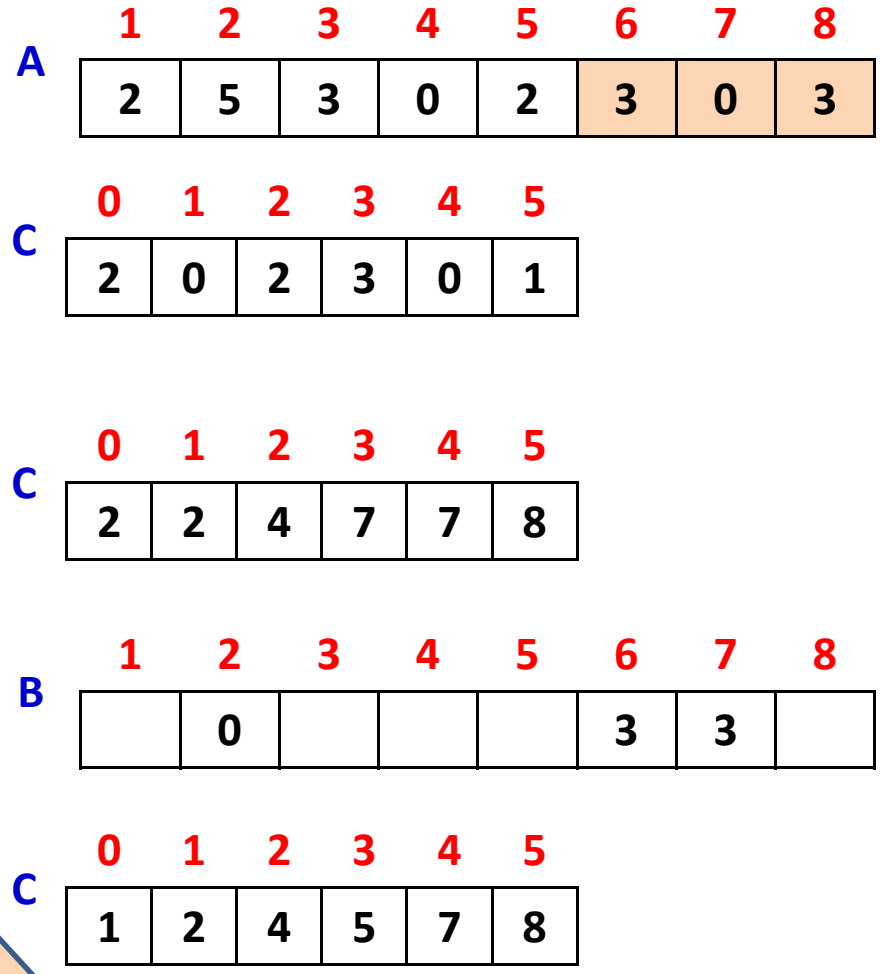


Iteração 2

CountingSort

- Algoritmo:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

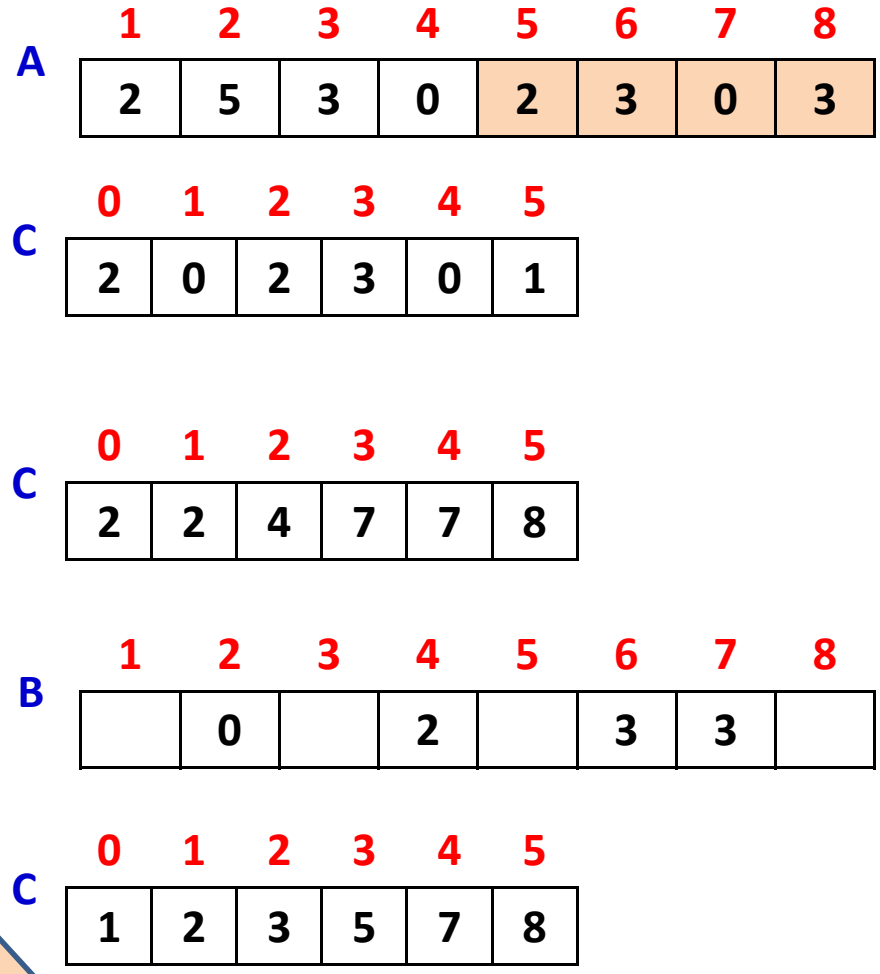


Iteração 3

CountingSort

- Algoritmo:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

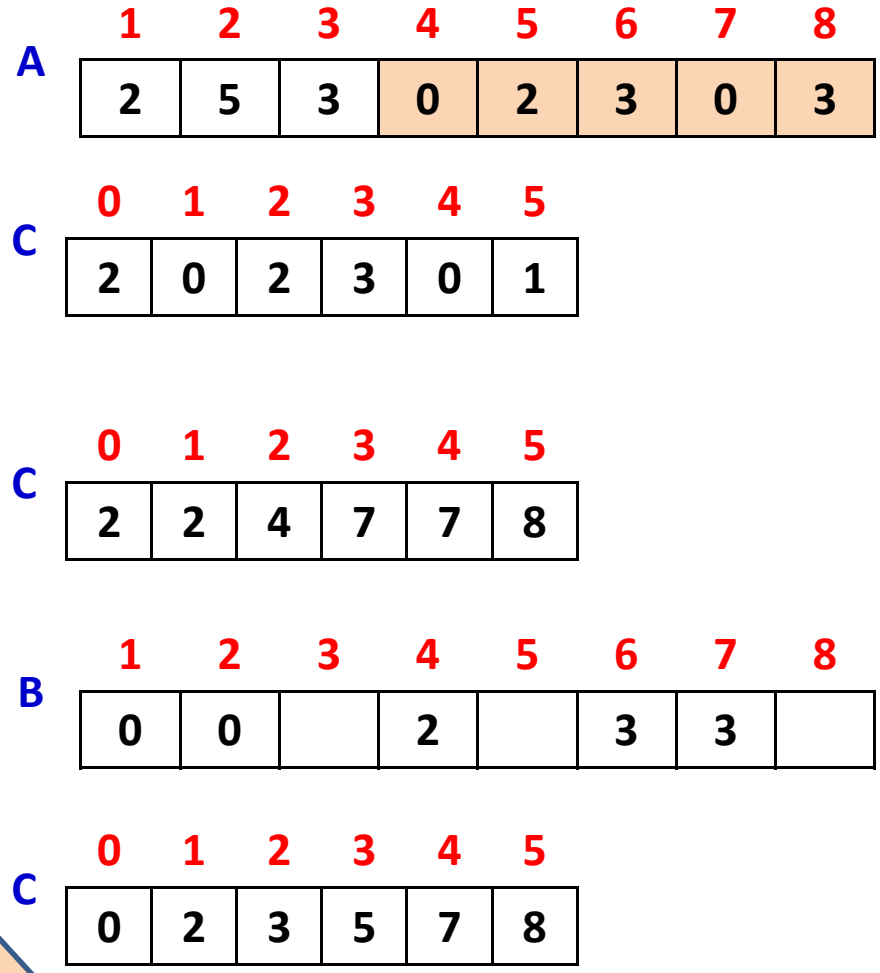


Iteração 4

CountingSort

- Algoritmo:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

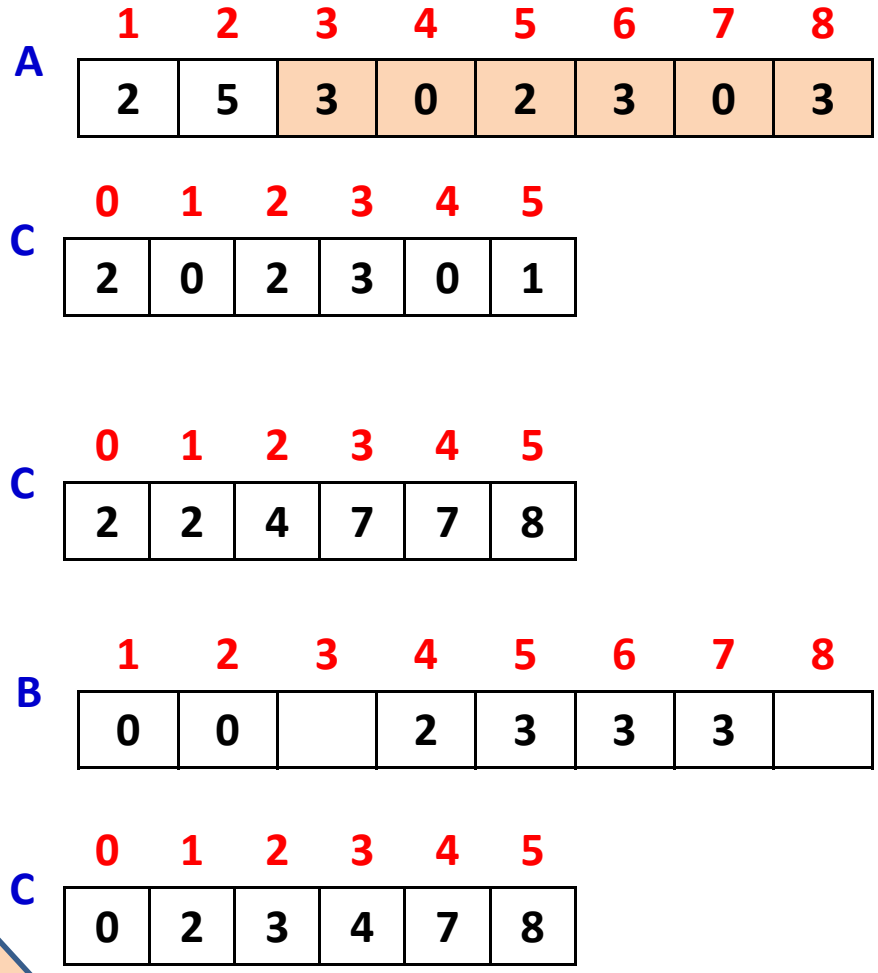


Iteração 5

CountingSort

- Algoritmo:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

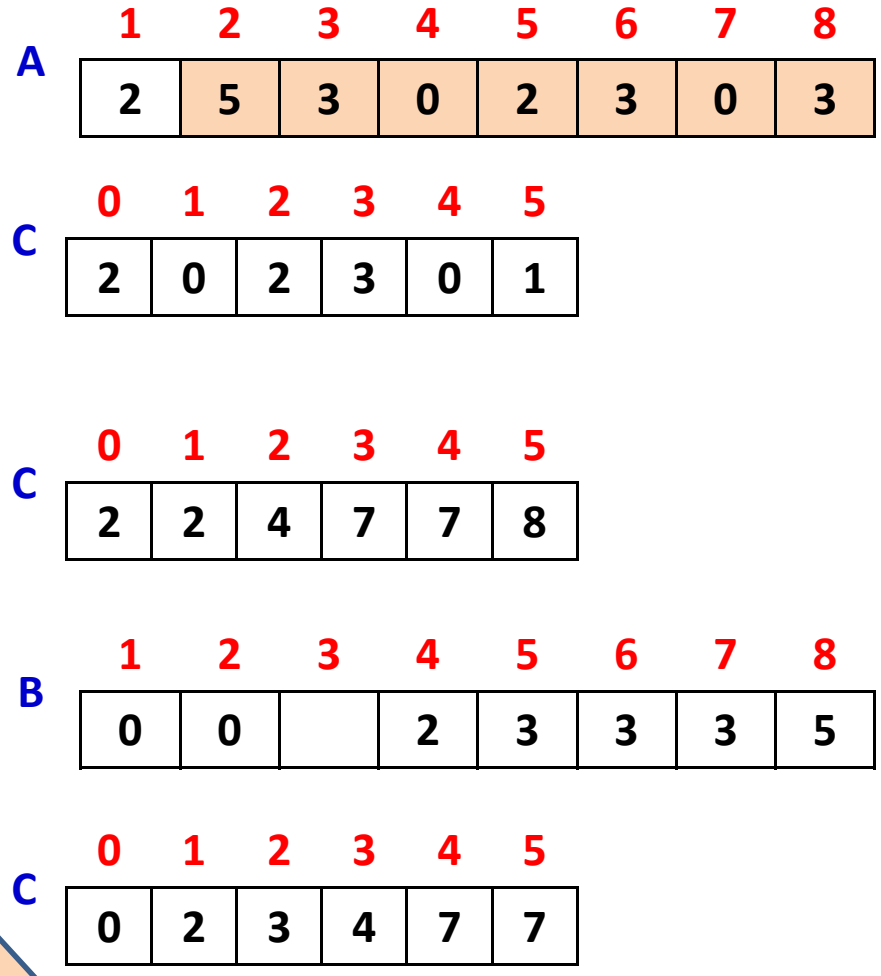


Iteração 6

CountingSort

- Algoritmo:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

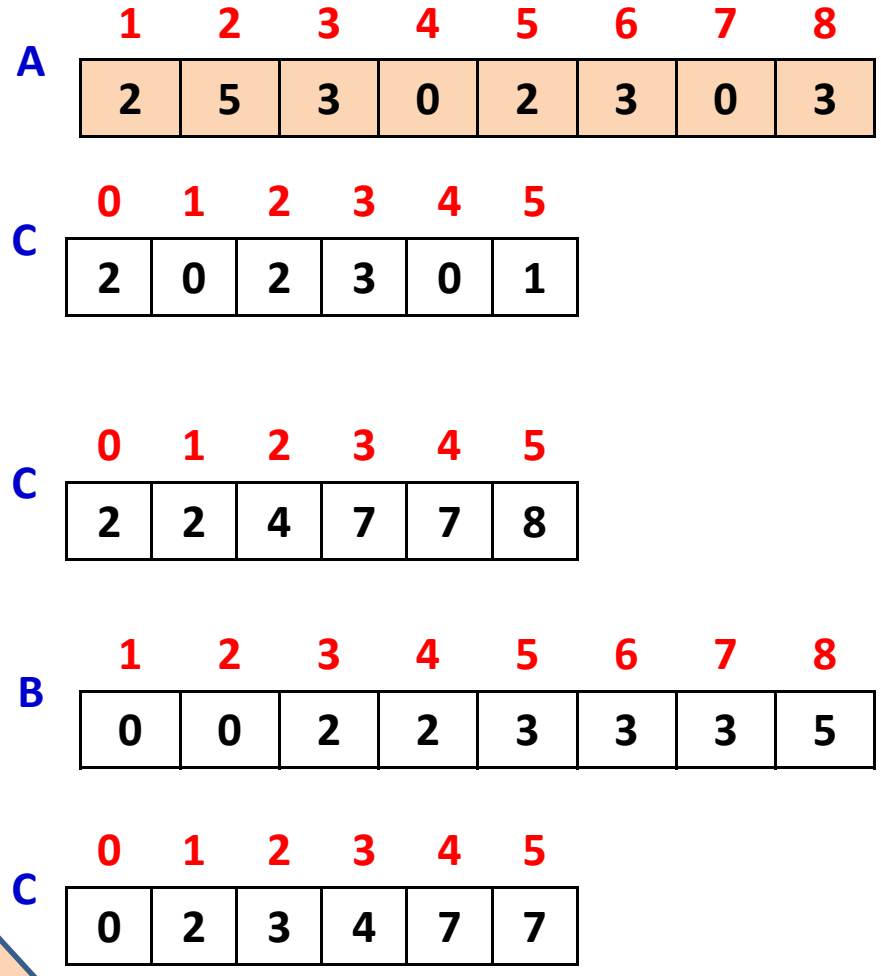


Iteração 7

CountingSort

- Algoritmo:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```



Iteração 8

CountingSort

- Analisando a complexidade:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

O (k)

???

???

CountingSort

- Analisando a complexidade:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

O (k)

O (n)

O (k)

O (n)

CountingSort

- Analisando a complexidade:

```
CountingSort(A[], B[], k)
para i ← 0 até k
      C[i] ← 0
fim para
para j ← 1 até tamanho(A)
      C[A[j]] ← C[A[j]] + 1
// c[i]contém número de elementos
iguais a i
fim para
para i ← 2 até k
      C[i] ← C[i] + C[i-1]
      // c[i]contém número de
elementos menores ou iguais a i
fim para
para j ← tamanho(A) até 1
      B[C[A[j]]] ← A[j]
      C[A[j]] ← C[A[j]]- 1
fim para
```

O (k)

O (n)

O (k)

O (n)

$\Theta(k+n)$

Em geral aplicamos este método quando k=O(n).

Então: $\Theta(n)$

Algoritmos de Ordenação

- Ordenação por contagem (*Counting Sort*):
  - supera o limite inferior de $\Omega(n \lg n)$ da ordenação por comparação;
  - propriedade importante: ordenação é **estável** $\Rightarrow$ números com mesmo valor aparecem no arranjo de saída na mesma ordem em que estavam no arranjo de entrada.
  - Quando isso é importante?

Algoritmos de Ordenação

- Ordenação por contagem (*Counting Sort*):
  - supera o limite inferior de $\Omega(n \lg n)$ da ordenação por comparação.
  - propriedade importante: ordenação é **estável** $\Rightarrow$ números com mesmo valor aparecem no arranjo de saída na mesma ordem em que estavam no arranjo de entrada.
  - Quando isso é importante?
    - quando dados adicionais são transportados junto com os números. Exemplo: Bancos de Dados.

RadixSort

- Radix sort (ordenação da raiz):
  - considera um arranjo de *n* inteiros, onde cada inteiro é representado com no máximo *d* dígitos, onde *d* é constante.
  - Exemplo: CEP de localidades – máximo 8 dígitos

1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	3	1	8	0	0	1
1	7	1	0	0	0	0	0
1	9	1	1	0	3	3	1
0	1	0	2	0	2	6	5

  - Alguma sugestão para ordenar?

RadixSort

- Algoritmo:

```
RadixSort(A[], d)
para i ← 1 até d
    ordenar os elementos de A pelo i-ésimo dígito
    usando um método estável
fim para
```

RadixSort

- Algoritmo:

```
RadixSort(A[], d)
para i ← 1 até d
    ordenar os elementos de A pelo i-ésimo dígito
    usando um método estável
fim para
```

Por que tem que ser estável?

1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	3	1	8	0	0	1
1	7	1	0	0	0	0	0
1	9	1	1	0	3	3	1
0	1	0	2	0	2	6	5

RadixSort

- Algoritmo:

```
RadixSort(A[], d)
para i ← 1 até d
    ordenar os elementos de A pelo i-ésimo dígito
    usando um método estável
fim para
```

Por que tem que ser estável?
Importante manter a ordem após ordenar cada coluna.

1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	3	1	8	0	0	1
1	7	1	0	0	0	0	0
1	9	1	1	0	3	3	1
0	1	0	2	0	2	6	5

RadixSort

- Algoritmo:

```
RadixSort(A[], d)
para i ← 1 até d
    ordenar os elementos de A pelo i-ésimo dígito
    usando um método estável
fim para
```

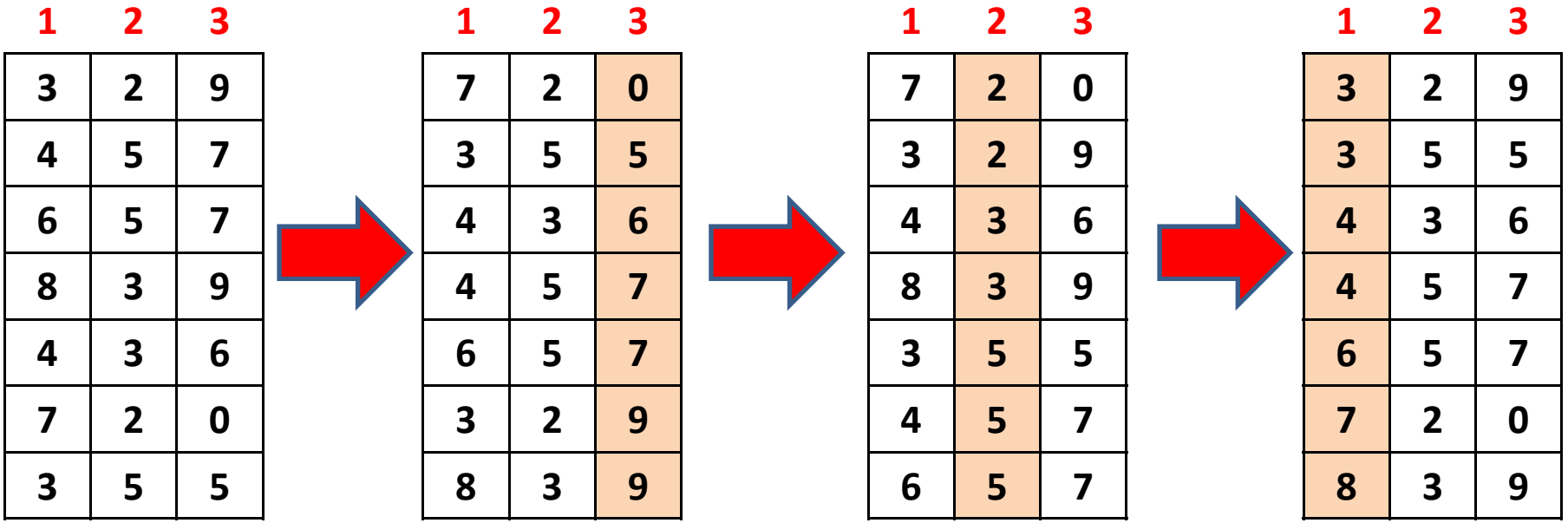
Por que tem que ser estável?
Importante manter a ordem após ordenar cada coluna.
ATENÇÃO: 1 é o elemento de mais baixa ordem e *d* é o elemento de mais alta ordem.

1	2	3	4	5	6	7	8
0	3	3	1	8	0	0	1
1	7	1	0	0	0	0	0
1	9	1	1	0	3	3	1
0	1	0	2	0	2	6	5

RadixSort

- Algoritmo:

```
RadixSort(A[], d)
para i ← 1 até d
      ordenar os elementos de A pelo i-ésimo dígito
      usando um método estável
fim para
```



RadixSort

- Analisando a complexidade:

Lema:

Dados *n* números de *d* dígitos em cada dígito pode assumir até *k* valores possíveis, o algoritmo RadixSort ordena corretamente esses números no tempo $\Theta(d(n+k))$

Prova:

- indução sobre a coluna que está sendo ordenada;
- análise do tempo de execução depende da ordenação estável usada;
- quando cada dígito está no intervalo de 0 a *k-1,* e k não é muito grande, costuma-se usar *CountingSort;*
- cada passagem sobre *n* números de *d* dígitos leva tempo $\Theta(n+k)$. Há *d* passagens: tempo = $\Theta(d(n+k))$

RadixSort

- Analisando a complexidade:
  - complexidade do RadixSort depende da complexidade do método *estável* usado como intermediário;
  - se o método estável apresentar tempo de execução em **Θ(f(n))**, então complexidade do RadixSort estará em **Θ(d.f(n))**.
  - Supondo *d* constante, complexidade será **Θ(f(n))**
  - Como visto, se usar o CountingSort como método de ordenação intermediário, a complexidade será **Θ(n+k)**
  - Se **k** ∈ **O(n)**, então complexidade será linear em ***n***.

Algoritmos *in-place*

- O que significa a expressão *in-place?*

Algoritmos *in-place*

- O que significa a expressão *in-place?*
  - *"no local"*
- O que seria um algoritmo de ordenação *in-place?*

Algoritmos *in-place*

- O que significa a expressão *in-place?*
  - *"no local"*
- O que seria um algoritmo de ordenação *in-place?*
  - a memória adicional requerida é independente do tamanho do vetor que está sendo ordenado.
    - ✓ QuickSort e HeapSort são métodos *in-place*
    - ✓ MergeSort e CountingSort não são métodos *in-place*.

Algoritmos *in-place*

- Aprendemos mais dois conceitos: ***estável*** e ***in-place***
- Como escolher o melhor algoritmo de ordenação?

Algoritmos *in-place*

- Aprendemos mais dois conceitos: ***estável*** e ***in-place***?
- Como escolher o melhor algoritmo de ordenação?
  - tentar conhecer o problema!

Algoritmos *in-place*

- Aprendemos mais dois conceitos: ***estável*** e ***in-place***?
- Como escolher o melhor algoritmo de ordenação?
  - tentar conhecer o problema!
    - complexidade – tempo de execução;
    - há algum conhecimento prévio sobre a ordenação? Dados quase ordenados?
    - há limitação do uso de memória? algoritmo por comparação ($\Omega(n \lg n)$) *in-place* pode ser melhor que algoritmo que apresenta O(n);
    - há necessidade de manter ordem original dos dados? algoritmo estável...

Referências

- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest & Clifford Stein. Algoritmos - Tradução da 2a. Edição Americana. Editora Campus, 2002.
- Nota de aulas do professor Delano Beder (EACH-USP).

Algoritmos de Ordenação

Ordenação em tempo linear

Professora:

Fátima L. S. Nunes