Prova 2

1. Uma partícula de massa $m > 0$ movimenta-se sob a ação de uma força $F(x) = -kx$, onde $k < 0$. Com relação à função $x = x(t)$ pode ser afirmado que:

(a) Trata-se de uma função constante.

(b) Trata-se de uma função oscilatória.

(c) $v(t) = x'(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, portanto x é uma função crescente.

(d) $v(t) = x'(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, portanto x é uma função decrescente.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

2. Define-se o trabalho W como:

$$W = \int F(x)\,dx = \int F(x(t))\,x'(t)\,dt.$$

Considere válida a relação $F = (m\,v)'$. Supondo que $m = m_0\,\gamma^{-1/2}$, onde $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)$, na aula foi demonstrado que $W = m\,c^2$. Supondo agora que $W = mc^2$, se m for apenas uma função de v, pode ser afirmado que:

(a) $m = A\,\gamma^{1/2}$, onde A é uma constante.

(b) $m = \gamma^{1/2} + A$, onde A é uma constante.

(c) $m = A\,\gamma^{-1/2}$, onde A é uma constante.

(d) $m = \gamma^{-1/2} + A$, onde A é uma constante.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

3. Considere válida a relação $F = (m\,v)'$, onde $m = m_0\,\gamma^{-1/2}$, com $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)$. Suponha que $F = mg$, com g constante. Em tal caso, se a velocidade inicial for nula, ou seja, se $v(0) = 0$, pode ser afirmado que:

(a) v é estritamente crescente e $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = +\infty$.

(b) v é uma função oscilatória, mas $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ não existe.

(c) v é estritamente decrescente e $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = -\infty$.

(d) v é uma função oscilatória e $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ existe.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

4. Com relação à função $f(x) = \Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\,\mathrm{sen}\,\pi x$ pode ser afirmado que:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe e seu valor é racional.

(c) $f(x) = f(x+k)$, para algum k inteiro.

(d) Trata-se de uma função constante.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

5. Definindo, para cada $n \in \mathbb{N}$, a integral imprópria $f(n) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{e^t - 1}\,dt$, com relação a $f(2k+1)$ pode ser afirmado que:

(a) Se a integral converge, então o quadrado de $f(2k+1)$ é racional.

(b) Diverge para todo $k \in \mathbb{N}$.

(c) Se a integral converge, então $f(2k+1)$ é limitado com relação a k.

(d) Se a integral converge, então $f(2k+1)$ é racional.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida como:

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0)$$

e $f(x,y) = 0$, no caso $(x,y) = (0,0)$. Com relação a tal função f pode ser afirmado que:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe e vale $1/2$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe e vale 0.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1/2$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 2$.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

7. Com relação à função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt.$$

pode ser afirmado que:

(a) $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ é racional mas não inteiro.

(b) $f(1,0)$ é racional.

(c) $f(1,1)$ é irracional.

(d) $f\left(1,\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

8. Dados n números $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, sejam a, b definidos como:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \\ b &= \sum_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}$$

Com relação à matriz A definida como:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & n \end{pmatrix}$$

pode ser afirmado que:

(a) A não é uma matriz definida positiva.

(b) A é uma matriz definida negativa.

(c) A não é uma matriz definida negativa.

(d) A é uma matriz definida positiva.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

9. Considere a curva no plano determinada pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como:

$$f(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t).$$

Observe que quando t toma valores de $-\infty$ até 0, tal curva descreve uma espiral a partir da origem de coordenadas até atingir o ponto $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Com relação ao comprimento de arco desta curva para $-\infty < t < 0$ pode ser afirmado que:

(a) Tal comprimento de arco é infinito.

(b) Tal comprimento de arco é finito e seu valor é racional.

(c) Tal comprimento de arco é finito e seu valor é irracional.

(d) Tal comprimento de arco é finito e seu valor pertence ao conjunto $\{0, 1/2, 1, 2\sqrt{\pi}\}$.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

10. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ matriz $n \times n$ simétrica, ou seja, $A_{ij} = A_{ji}$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Considere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \langle x, Ax \rangle.$$

Com relação aos pontos extremos de f na bola unitária, ou seja, $\|x\| = 1$, pode ser afirmado que:

(a) Os pontos críticos de f não podem ser pontos de máximo.

(b) Os pontos críticos de f não podem ser pontos de mínimo.

(c) Os pontos críticos de f são autovetores da matriz A.

(d) Os pontos críticos de f são todos pontos de sela.

(e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.