ACH2012 - Cálculo II

Sistema de Informação - EACH

Lista 2: Seqüencias infinitas e séries

1. (a) O que é uma seqüencia?
   (b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
   (c) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) O que é uma seqüencia convergente? De dois exemplos.
   (b) O que é uma seqüencia divergente? De dois exemplos.

3. Liste os cinco primeiros termos da seqüencia.
   $(a)\ a_n = 1 - (0,2)^n$ $\quad (b)\ a_n = \frac{3(-1)^n}{n!}$
   $(c)\ a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - 1$

4. Encontre uma formula para o termo geral a_n da seqüencia, assumindo que o padrão dos primeiros termos continua.
   $(a)\ \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right\}$ $\quad (b)\ \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, ...\right\}$
   $(c)\ \{2, 7, 12, 17, ...\}$ $\quad (d)\ \left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, ...\right\}$

5. Determine se a seqüencia converge ou diverge. Se ela convergir, encontre o limite.
   $(a)\ a_n = n(n-1)$ $\quad (b)\ a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$
   $(c)\ a_n = \frac{n}{1+\sqrt{n}}$ $\quad (d)\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$
   $(e)\ a_n = \cos(n/2)$ $\quad (f)\ a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{1/n}$
   $(g)\ a_n = \frac{n!}{2^n}$ $\quad (h)\ a_n = \frac{(-3)^n}{n!}$

6. Se \$1000 forem investidos a uma taxa de juros de 6%, compostos anualmente, depois de n anos o investimento valerá $a_n = 1000(1,06)^n$ dólares.
   (a) Encontre os cinco primeiros termos da seqüencia $\{a_n\}$.
   (b) A seqüencia é convergente ou divergente. Explique.

7. Suponha que você saiba que a $\{a_n\}$ é uma seqüencia decrescente e todos os termos estão entre os números 5 e 8. Explique por que a seqüencia tem um limite. O que você pode dizer sobre o valor do limite?

8. Determine se a seqüencia dada é crescente, decrescente ou não monotônica. A seqüencia é limitada?
   $(a)\ a_n = \frac{1}{5^n}$ $\quad (b)\ a_n = \frac{1}{2n+3}$
   $(c)\ a_n = \frac{2n-3}{3n+4}$ $\quad (d)\ a_n = 3 + (-1)^n/n$
   $(e)\ a_n = \cos(n\pi/2)$ $\quad (f)\ a_n = \frac{n}{n^2+1}$

9. Uma seqüencia $\{a_n\}$ é dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
   (a) Mostre que $\{a_n\}$ é crescente e limitada superiormente por 3. Aplique o Teorema da Seqüencia monótona para indicar que o $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.
   (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

10. (a) Qual é a diferença entre uma seqüencia e uma série?
    (b) O que é uma série convergente? O que é uma série divergente?

11. Explique o significado de se dizer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

12. Seja $a_n = \frac{2n}{3n+1}$.
    (a) Determine se $\{a_n\}$ é convergente.
    (b) Determine se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

13. (a) Explique a diferença entre
    $$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad e \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$
    (b) Explique a diferença entre
    $$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

14. Determine se a série é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.
(a) $3+2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+...$ (b) $-2+\frac{5}{2}-\frac{25}{8}+\frac{125}{32}-...$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{5^{n-1}}$
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$
(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos 1)^n$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n}+\frac{2}{n}\right)$

15. Encontre os valores de x para os quais a série converge. Calcule a soma da série para aqueles valores x.
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{2^n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$

16. Se a n-ésima soma parcial e uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for
$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$
encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

17. Se a n-ésima soma parcial e uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for
$$s_n = 3 - n2^{-n}$$
encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

18. Qual é o valor de c se $\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2$?

19. O que esta errado no seguinte cálculo?
$$\begin{aligned} 0 =& 0+0+0+... \\ =&(1-1)+(1-1)+(1-1)+... \\ =&1-1+1-1+1-1+... \\ =&1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+... \\ =&1+0+0+0...=1 \end{aligned}$$

20. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \neq 0)$ seja conhecida como uma série convergente. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ é uma série divergente.

21. Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente para $x \geq 1$ e $a_n = f(n)$. Desenhando uma figura, coloque em ordem crescente as três quantidades
$$\int_1^6 f(x)\, dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

22. Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$
(e) $\sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$

23. Estude o exemplo 2 pagina 723 do livro.

24. Encontre os valores de p para os quais a série é convergente.
(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ (b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n[\ln(\ln n)]^p}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

25. (a) Encontre a soma parcial s_{10} da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Estime o erro usando s_{10} como aproximação para a soma da série.
(b) Utilize a desigualdade (*) com n=10 para dar uma estimativa melhorada da soma.
(c) Encontre um valor de n tal que s_n represente a soma com precisão de $0,00001$.

26. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ com precisão de três casas decimais.

27. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ com precisão de $0,01$.

28. Quantos termos da série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ você precisaria adicionar para encontrar sua soma com precisão de $0,01$?

29. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja sabidamente convergente.
(a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por que?

(b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por que?

30. Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos e $\sum b_n$ seja sabidamente divergente.

    (a) Se $a_n > b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por que?

    (b) Se $a_n < b_n$ para todo n, o que você pode dizer sobre $\sum a_n$? Por que?

31. Determine se a série converge ou diverge.
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3+4}$
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2+3^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$
    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

32. Use a soma dos dez primeiros termos para aproximar a soma da série. Estime o erro.
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+n^2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^5}$
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$

33. Para quais valores de p a série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ converge?

34. Prove que, se $a_n \geq 0$ e $\sum a_n$ convergir então $\sum a_n^2$ também converge.

35. (a) O que é uma série alternada?

    (b) Sob que condições uma série alternada converge?

    (c) Se essas condições forem satisfeitas, o que você pode dizer sobre o resto depois de n termos?

36. Teste a série para convergência ou divergência.
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$
    (c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$
    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$

37. Aproxime a soma da série com a precisão de quatro casas decimais.
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{8^n}$
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{10^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$

38. Para quais valores de p cada série é convergente?
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

39. Mostre que a série $\sum (-1)^{n-1} b_n$ onde $b_n = 1/n$ se n for ímpar e $b_n = 1/n^2$ se n for par, é divergente. Por que o Teste da Série Alternada não se aplica?

40. O que você pode dizer sobre a série $\sum a_n$ em cada um dos seguintes casos?
    (a) $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 8$ (b) $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0,8$
    (c) $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 1$

41. Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.
    (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5+n}$
    (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$
    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

42. Os termos da série são definidos recursivamente pelas equações
    $$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$$
    Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

43. Os termos da série são definidos recursivamente pelas equações
    $$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} a_n$$
    Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

44. Para quais das séries o teste da razão não é conclusivo (isto é, ele não dá uma resposta definida)?
    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

45. Prove que se $\sum a_n$ for absolutamente convergente, então
    $$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$