

Capítulo 18

Integrais Impróprias

{improprias}

18.1 Integrais Impróprias de Primeira Espécie

18.1.1 Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$. Se a integral $\int_a^b f$ existe para todo $b \geq a$, então define-se a **integral imprópria de primeira espécie** como:

$$\int_a^\infty f := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f.$$

Quando o limite acima existe se diz que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, se diz que a integral imprópria **não-converge** ou que **diverge**. ♣

18.1.2 Exemplo: Seja $s \in \mathbb{R}$. Então, a integral $\int_1^\infty x^{-s} dx$ é convergente, com valor $\frac{1}{s-1}$, se e somente se $s > 1$.

Com efeito, no caso $s \neq 1$ tem-se:

$$\int_1^R x^{-s} dx = \left. \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right|_1^R = \frac{R^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} = \frac{1}{s-1} - \frac{R^{-s+1}}{s-1} = \frac{1}{s-1} \left(1 - e^{(1-s) \log R} \right).$$

Portanto:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^{-s} dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1}, & \text{se } 1-s < 0; \\ \infty, & \text{se } 1-s > 0. \end{cases}$$

No caso $s = 1$ tem-se:

$$\int_1^R x^{-s} dx = \log x \Big|_1^R = \log R - \log 1 = \log R.$$

Portanto, a integral é claramente divergente neste caso. ♣

{primeira:examp1

18.1.3 Definição: Analogamente, dado $a \in \mathbb{R}$, se a integral $\int_b^a f$ existe para todo $b \leq a$, então define-se:

$$\int_{-\infty}^a f := \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^a f. \quad \clubsuit$$

18.1.4 Definição: Se as integrais $\int_a^\infty f$ e $\int_{-\infty}^a f$ existem ambas para algum $a \in \mathbb{R}$, então define-se:

$$\int_{-\infty}^\infty f := \int_{-\infty}^a f + \int_a^\infty f. \quad \clubsuit$$

18.1.5 Exemplo: Seja $a \in \mathbb{R}$. Então, a integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-a|x|} dx$ é convergente, com valor $2/a$, se $a > 0$.

Com efeito, se $a > 0$ tem-se:

$$\int_0^R e^{-a|x|} dx = \int_0^R e^{-ax} dx = \left. \frac{e^{-ax}}{-a} \right|_0^R = \frac{e^{-aR}}{-a} - \frac{1}{-a} = \frac{1}{a} (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{a}.$$

Analogamente prova-se que $\int_{-\infty}^0 e^{-a|x|} dx = \frac{1}{a}$, de onde segue o afirmado. \clubsuit

ra:example-2}

18.1.6 Exemplo: A integral $\int_{-\infty}^\infty x dx$ não existe, mas $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx$ existe (com valor igual a zero, neste caso). \clubsuit

ra:example-3}

18.2 Alguns Critérios de Convergência

18.2.1 Lema: Suponha-se que:

1. $\int_a^b f$ existe para todo $b \geq a$.
2. $0 \leq f(x)$, para todo $x \geq a$.

Então, a integral imprópria $\int_a^\infty f$ converge se e somente se existe $M > 0$ tal que $\int_a^b f \leq M$, para todo $b \geq a$. \square

rios:lemma-1}

Demonstração: (\Rightarrow) Se $\int_a^\infty f$ converge, então a sequência $a_n := \int_a^{a+n} f$ é limitada. Ou seja, existe $M > 0$ tal que $\int_a^{a+n} f \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $b \geq a$, então $a \leq b < a + n_0$, para algum

$n_0 \in \mathbb{N}$. Portanto:

$$\int_a^b f \leq \int_a^{a+n_0} f \leq M,$$

onde a primeira desigualdade segue do fato que $f \geq 0$.

(\Leftarrow) A sequência $a_n := \int_a^{a+n} f$ é não-decrescente, pois $f \geq 0$, e limitada superiormente, por M . Portanto, converge. ■

18.2.2 Lema (Convergência Dominada): *Suponha-se que:*

1. $\int_a^b f$ existe para todo $b \geq a$.
2. $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \geq a$.
3. $\int_a^\infty g$ converge.

Então, a integral imprópria $\int_a^\infty f$ também converge e tem-se que $\int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g$. □

{criterios:lema

Demonstração: Observe-se que, pela segunda condição, tem-se:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \leq \int_a^\infty g.$$

Portanto, basta tomar $M \geq \int_a^\infty g$ no lema anterior. ■

18.2.3 Lema (Critério de Comparação): *Suponha-se que:*

1. $\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ existem para todo $b \geq a$.
2. $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, para todo $x \geq a$.
3. Existe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} =: c$.

Então:

(a) Se $c \neq 0$, então as integrais impróprias $\int_a^\infty f$ e $\int_a^\infty g$, ou bem convergem ambas, ou bem divergem ambas.

(b) Se $c = 0$, então somente pode-se concluir que a convergência de $\int_a^\infty g$ implica a convergência de $\int_a^\infty f$. □

{criterios:lemma-3}

Demonstração: (a) Se $c \neq 0$, então deve ser $c > 0$, pela condição 2 acima. Pela condição 3 tem-se que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x \geq N(\epsilon) \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \epsilon \iff -\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - c < \epsilon \iff c - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + \epsilon.$$

Portanto, tomando, por exemplo, $\epsilon = c/2 > 0$ tem-se:

$$x \geq N(c/2) \Rightarrow c - c/2 < \frac{f(x)}{g(x)} < c + c/2 \Rightarrow 0 < \frac{c}{2} g(x) < f(x) < \frac{3c}{2} g(x).$$

Observe-se que na última relação acima foi usado o fato que $g(x) > 0$ como também $c > 0$. Desta maneira, o afirmado segue da última relação acima, usando o resultado de convergência dominada, ou seja, o Lema 18.2.2.

(b) Analogamente ao caso anterior, mas tomando agora $\epsilon = 1$, tem-se que:

$$x \geq N(1) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) < g(x).$$

Desta maneira, o afirmado segue da última relação acima, usando convergência dominada, ou seja, o Lema 18.2.2. ■

18.2.4 Exemplo: Seja $s \in \mathbb{R}$. Então, a integral $\int_1^\infty e^{-x} x^s dx$ é convergente, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Com efeito, tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} x^s}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{s+2}}{e^x} = 0.$$

Observe-se que a integral $\int_1^\infty x^{-2} dx$ é convergente, segundo o Exemplo 18.1.2. Portanto, o afirmado segue usando a segunda parte do critério de comparação, Lema 18.2.3(b). ♣

{s:example-1}

18.3 Integrais Impróprias de Segunda Espécie

18.3.1 Definição: Seja f definida em $(a, b]$. Se a integral $\int_x^b f$ existe para todo $a < x \leq b$, então define-se a **integral imprópria de segunda espécie** como:

$$\int_{a^+}^b f := \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f.$$

Quando o limite acima existe se diz que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, se diz que a integral imprópria **não-converge** ou que **diverge**. ♣

18.3.2 Exemplo: Seja $b > 0$. Então, a integral $\int_{0^+}^b x^{-s} dx$ é convergente, com valor $\frac{b^{1-s}}{1-s}$, se e somente se $s < 1$.

Com efeito, observe-se que a função $f(x) = x^{-s} = e^{-s \log x}$, está definida para $x > 0$ e tem-se:

$$\int_x^b f = \int_x^b u^{-s} du = \begin{cases} \frac{b^{1-s} - x^{1-s}}{1-s}, & \text{se } s \neq 1; \\ \log b - \log x, & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

Observe-se que $x^{1-s} = e^{(1-s) \log x}$ converge com limite finito (igual a zero, neste caso) quando $x \rightarrow 0^+$, se e somente se $1-s > 0 \iff s < 1$.

Uma outra maneira de provar a convergência, consiste em calcular a integral valendo-se da substituição $y = 1/u$ da seguinte maneira:

$$\int_x^b u^{-s} du = \int_{1/x}^{1/b} \left(\frac{1}{y}\right)^{-s} (-y^{-2}) dy = - \int_{1/x}^{1/b} y^{s-2} dy = \int_{1/b}^{1/x} y^{s-2} dy.$$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{1/b}^{1/x} y^{s-2} dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1/b}^R y^{s-2} dy.$$

Pelo Exemplo 18.1.2, o limite acima existe se e somente se $s-2 < -1 \iff s < 1$. ♣ {segunda:example}

18.3.3 Exemplo: A função $f(x) = x^{-3/4}$, para $0 < x \leq 1$, tem área finita, mas o volume do sólido de revolução gerado é infinito.

Com efeito, pelo exemplo anterior, a integral $\int_{0^+}^1 x^{-3/4} dx$ converge, mas o volume do sólido de revolução, dado pela integral $\pi \int_{0^+}^1 (x^{-3/4})^2 dx = \pi \int_{0^+}^1 x^{-3/2} dx$, é divergente. ♣ {segunda:example}

18.4 A Função Gamma

18.4.1 Lema: A seguinte integral:

$$\int_{0^+}^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt := \int_{0^+}^1 e^{-t} t^{s-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt,$$

converge para todo $s > 0$. □

Demonstração: A segunda integral no lado direito acima é convergente para todo $s \in \mathbb{R}$, em virtude do Exemplo 18.2.4. Portanto, basta provar a convergência da primeira integral. Utilizando a substituição $t = 1/u$ tem-se:

$$\int_x^1 e^{-t} t^{s-1} dt = \int_{1/x}^1 e^{-1/u} u^{1-s} (-u^{-2}) du = - \int_{1/x}^1 e^{-1/u} u^{-s-1} du = \int_1^{1/x} e^{-1/u} u^{-s-1} du.$$

De onde segue que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^{1/x} e^{-1/u} u^{-s-1} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R e^{-1/u} u^{-s-1} du$$

Agora, observe-se que $0 \leq e^{-1/u} u^{-s-1} \leq u^{-s-1} = u^{-(s+1)}$. Portanto, utilizando a convergência dominada do Lema 18.2.2 com a função do Exemplo 18.1.2, tem-se que o último limite acima existe para todo $s+1 > 1 \iff s > 0$. ■

18.4.2 Definição: Define-se a **função gamma** $\Gamma(s)$ para $s > 0$ como a integral:

$$\Gamma(s) := \int_{0^+}^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \forall s > 0;$$

cuja convergência é garantida pelo resultado anterior. ♣

Exercícios Para o Capítulo 18

18.5 Integrais Impróprias de Primeira Espécie

18.5.1 Exercício: Determine se cada uma das seguintes integrais impróprias converge ou não. Em caso afirmativo, calcule o seu valor.

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx.$ R: $1/2.$

(b) $\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$ R: Diverge como $2(\sqrt{R} - 2).$

(c) $\int_0^{+\infty} \cos x dx.$ R: Diverge como $\sin(R).$

(d) $\int_1^{+\infty} x^{-3/2} dx.$ R: $2.$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx.$ R: Diverge como $2(\sqrt{R+1} - 1).$ ♣

18.5.2 Exercício: Suponha-se que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe. Então:

(a) A existência e o valor da integral independem do ponto a em questão.

(b) O limite $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f$ existe, com valor igual ao da integral. Observe-se que a recíproca deste resultado não é válida, como mostra o Exemplo 18.1.6. ♣

18.6 Integrais Impróprias de Segunda Espécie

18.6.1 Exercício: Verifique se cada uma das seguintes integrais impróprias existe, ou seja, se admite um valor finito e em tal caso calcule o valor da integral.

(a) $\int_0^1 x^{-1/3} dx.$ R: $3/2.$

- (b) $\int_{-1}^0 (x+1)^{5/4} dx.$ R: 4/9.
- (c) $\int_{-1}^0 x^{-4/3} dx.$ R: Diverge como $3 \left(\frac{1}{\epsilon^{1/3}} - 1 \right).$
- (d) $\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^{2/3}} dx.$ R: 6.
- (e) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx.$ R: 1/2. ♣

18.7 Algumas Fórmulas de Redução

18.7.1 Exercício: Fórmula de redução para $(1-x^2)^n$.

(a) Integrando por partes, prove a seguinte fórmula de redução (embora não pareça):

$$\int (1-x^2)^n dx = (1-x^2)^n x + 2n \int x^2 (1-x^2)^{n-1} dx.$$

(b) Usando a fórmula de redução do item anterior tantas vezes como necessário, prove que:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2n \frac{2(n-1)}{3} \frac{2(n-2)}{5} \cdots \frac{4}{2n-3} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$
 ♣

18.7.2 Exercício: Fórmula de redução para $(1+x^2)^{-n}$.

(a) Prove a seguinte fórmula de redução:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Sugestão: Observe-se que:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^n}.$$

(b) Usando a fórmula de redução do item anterior tantas vezes como necessário, prove que:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-3}{2n-2}.$$
 ♣

18.7.3 Exercício: Fórmula de redução para $\sin^n x$.

(a) Integrando por partes, prove a seguinte fórmula de redução:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

(b) Usando a fórmula de redução do item anterior tantas vezes como necessário, prove que:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

(c) Idem, mas agora para expoente ímpar:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n+1}.$$



18.7.4 Exercício: Uma fórmula para o cálculo de π .

(a) Utilizando os resultados do exercício anterior, prove que:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx} \left(\frac{2}{1} \frac{4}{3} \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \frac{1}{2n+1} \right)^2 2n+1.$$

(b) Prove que:

$$1 \leq \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx} \leq 1 + \frac{1}{2n}.$$

Sugestão: $0 < x < \pi/2 \Rightarrow 0 < \sin^{2n+1} x = \sin^{2n} x \sin x < \sin^{2n} x$.

(c) Conclua que:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \frac{4}{3} \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \frac{1}{2n+1} \right)^2 2n+1.$$

(d) Utilizando o resultado do item anterior, verifique adicionalmente que:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{1} \frac{4}{3} \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}.$$



18.8 Integrais Gaussianas

18.8.1 Exercício: (a) Prove que $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$, para todo $x > 0$. Em particular:

$$(1 - x^2)^n \leq e^{-nx^2} \leq \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

(b) Utilizando o resultado do item anterior, prove que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^2)^n dx &\leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \leq \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}. \end{aligned}$$

(c) Finalmente, combinando o resultado do item anterior com os resultados da seção anterior, conclua que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Além de importantes aplicações na Estatística, por exemplo, este resultado é particularmente notável, pois a função $f(x) = e^{-x^2}$ não pode ser integrada em termo de funções elementares, embora o valor da integral indefinida acima possa ser calculado exatamente. ♣

18.8.2 Exercício: Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $E(X^n)$ definido como:

$$E(X^n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/2} dx.$$

Resulta fácil deduzir que $E(X^{2n+1}) = 0$ apelando a argumentos de paridade. O caso de n par é abordado no presente exercício.

(a) Usando o exercício anterior verifique que no caso $n = 0$ tem-se $E(X^0) = 1$.

(b) Integrando por partes verifique a seguinte fórmula de redução:

$$\int x^{2n} e^{-x^2/2} dx = -x^{2n-1} e^{-x^2/2} + (2n-1) \int x^{2n-2} e^{-x^2/2} dx.$$

(c) Utilizando a fórmula de redução do item anterior verifique que $E(X^{2n}) = (2n-1) E(X^{2n-2})$.

(d) Prove por indução em n que $E(X^{2n}) = (2n-1)(2n-3)\cdots 1$.

(e) Finalmente, conclua que $E(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

18.9 Propriedades Elementares da Função Gamma

18.9.1 Exercício: A função Gamma possui a propriedade de interpolar os valores do fatorial, como mostra o presente exercício.

(a) Integrando por partes, verifique que $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

(b) Através de um cálculo direto, verifique que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Prove que $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Use indução em n , observando que o caso $n = 1$ é o resultado do item anterior. A validade do passo indutivo segue trivialmente do item (a) acima. ♣

18.9.2 Exercício: (a) Verifique que:

$$\Gamma(x) = \int_{0+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-u^{1/x}} du.$$

Sugestão: Utilize a substituição $u = t^x$.

(b) Utilizando o valor da integral gaussiana calculado na seção anterior, conclua que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. ♣

Capítulo 19

Estatística

{estatística}

19.1 Experimentos Aleatórios

Um **experimento** consiste basicamente num procedimento executado sob certas condições, suscetível de ser repetido uma quantidade arbitrária de vezes sob as mesmas condições, e que uma vez completado certos resultados podem ser observados. Um experimento é **determinístico** se os seus resultados podem ser completamente inferidos a partir das condições iniciais. Um experimento cujos resultados não podem ser determinados a partir das condições iniciais, exceto pelo fato de pertencer a um dado conjunto de resultados possíveis, é dito **aleatório**.

O conjunto Ω de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório denomina-se **espaço amostral**. Certos conjuntos de Ω , mas não todos em geral, denominam-se **eventos**. Por exemplo, Ω e \emptyset são eventos, conhecidos como eventos **certo** e **impossível**, respectivamente. Eventos da forma $\{\omega\}$ são conhecidos como eventos **simples**, no entanto que um evento com dois ou mais pontos é dito **composto**.

Na formalização matemática da teoria dos experimentos aleatórios, assume-se a existência de uma função de conjunto P , denominada **probabilidade**, de maneira tal que $P(A)$ é a frequência relativa de cada evento $A \in \Omega$. Em outras palavras, $P(A)$ é a porcentagem do total de resultados em que o evento A é observado. A única diferença consiste no fato que P é normalizada de 0 a 1, em lugar de 0 a 100 como uma porcentagem comum.

19.1.1 Exemplo: Experimento Binomial

Considere-se experimento com dois resultados possíveis, a saber: 0 ou fracasso, e 1 ou sucesso. Em tal caso, $\Omega = \{0, 1\}$ e costuma-se denotar $p := P(1)$ e $q := 1 - p = P(0)$. Por exemplo, o resultado do lançamento de uma moeda é o exemplo paradigmático de experimento binomial, com $p = q = 1/2$, neste caso. ♣

19.1.2 Exemplo: Suponha-se que um experimento binomial é repetido n vezes. Em tal caso, denotando $S = \{0, 1\}$, tem-se:

$$\Omega = \underbrace{S \times \cdots \times S}_{n \text{ vezes}}.$$

Se as n repetições são independentes, ou seja, o resultado de qualquer delas não influencia o de nenhuma outra, qual é probabilidade de obter exatamente k sucessos? Para responder a questão, observe-se em primeiro lugar que todo evento A_k com exatamente k sucessos resulta da interseção de k eventos da forma:

$$S \times \cdots \times S \times \{1\} \times S \times \cdots \times S,$$

com a interseção de $n - k$ eventos da forma:

$$S \times \cdots \times S \times \{0\} \times S \times \cdots \times S.$$

Como todos esses eventos são independentes, tem-se $P(A_k) = p^k q^{n-k}$. Finalmente, observe-se que o evento com exatamente k sucessos resulta da união disjunta de todos eventos da forma A_k . Todos esses eventos tem a mesma probabilidade, calculada acima, e existem exatamente $\binom{n}{k}$ deles. Portanto, a probabilidade $P(X = k)$ de obter exatamente k sucessos em n repetições independentes de um experimento binomial é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k q^{n-k}. \quad \clubsuit$$

19.1.3 Exemplo: Aproximação Binomial para um Processo de Poisson

Deseja-se determinar qual é a probabilidade $P(X = k)$ de k ônibus passarem por um dado ponto no intervalo de tempo entre 0 a T . Para simplificar, suponha-se que $T = 1$ (uma hora, um dia, etc.). Esta experiência pode ser abordada como um experimento binomial, através do seguinte procedimento. O intervalo de tempo é dividido em n subintervalos iguais de comprimento $1/n$ cada. Ao final de cada um desses subintervalos de tempo, olhamos para o ponto. Se tiver um ônibus no ponto é sucesso, caso contrário, fracasso. Adicionalmente, considerem-se as seguintes hipóteses:

- A chegada de ônibus em diferentes subintervalos acontece de maneira independente.
- A ocorrência de dois ou mais ônibus chegarem num mesmo subintervalo tem probabilidade zero. Observe-se que esta suposição é verdadeira desde que o comprimento dos subintervalos for suficientemente pequenos, ou seja, n suficientemente grande.
- A probabilidade de um ônibus chegar num dado intervalo de tempo é proporcional ao comprimento t do intervalo, digamos, $p = \lambda t$, onde λ é a constante de proporcionalidade.

Portanto, tem-se:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

No limite em que n tende para infinito, a expressão acima pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
 &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
 &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
 &= \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
 &= 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
 &= 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}.
 \end{aligned}$$

Observe-se que se n tende para infinito, então todas as expressões entre parênteses acima convergem para 1, exceto o numerador da última fração que converge para $e^{-\lambda}$. Portanto:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

A mesma aproximação é válida para qualquer experimento binomial onde p_n tende para zero de maneira tal que np_n tende para uma constante. ♣

19.2 Variáveis Aleatórias

Uma **variável aleatória** é uma função $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. As variáveis aleatórias são abordadas indiretamente, através da sua **função de distribuição**, também denominada **função de distribuição acumulada**, definida como $F(x) := P(X \leq x)$. Observe-se que:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Em certos casos, por exemplo se F for continuamente diferenciável, condição que pode ser relaxada significativamente, tem-se que:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

para alguma função integrável f . Em tal caso, se diz que f é uma **função de densidade** de probabilidade (f.d.p) para a variável aleatória X .

Se $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ define-se $E(g(X))$ como:

$$E(g(X)) := \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx.$$

Alguns casos particulares recebem nomes especiais. Por exemplo, o **n -ésimo momento** de X é definido como:

$$E(X^n) := \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx.$$

O primeiro momento é relevante, e recebe o nome **media** da distribuição em questão:

$$EX := \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx =: \mu.$$

Com a media é possível calcular o **n -ésimo momento central**:

$$E(X - EX)^n := \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^n f(x) dx.$$

O segundo momento central também é importante, denominando-se **variança**:

$$E(X - EX)^2 := \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f(x) dx =: \sigma^2.$$

A sua raiz quadrada positiva σ recebe o nome de **desvio padrão**. Observe-se que:

$$\begin{aligned} E(X - EX)^2 &= E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - 2(EX)(EX) + (EX)^2 \\ &= E(X^2) - (EX)^2. \end{aligned}$$

Uma outra expressão útil para o cálculo da variança é a seguinte:

$$\begin{aligned} E(X - EX)^2 &= E(X^2) - (EX)^2 \\ &= E(X^2 - X + X) - (EX)^2 \\ &= E(X(X - 1) + X) - (EX)^2 \\ &= E(X(X - 1)) + EX - (EX)^2 \\ &= E(X(X - 1)) - EX(EX - 1). \end{aligned}$$

19.2.1 Exemplo: A Distribuição Normal ou Gaussiana

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Se diz que X possui distribuição normal de media μ e variança σ se a sua f.d.p é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Em tal caso denota-se $X \sim N(\mu, \sigma)$. ♣

19.2.2 Exemplo: A Distribuição Gamma

Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Se diz que X possui distribuição gamma de parâmetros α e β se a sua f.d.p é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Em tal caso denota-se $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. ♣

19.2.3 Exemplo: A Distribuição Chi-quadrado

Seja $r \in \mathbb{N}$. Se diz que X possui distribuição chi-quadrado com r graus de liberdade se $X \sim \Gamma(r/2, 2)$, ou seja, se a sua f.d.p é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r/2) 2^{r/2}} x^{(r/2)-1} e^{-x/2} & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Em tal caso denota-se $X \sim \chi_r^2$.

