Prova 1

Test: 2
User ID:
Timestamp:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ define-se o **intervalo aberto** (a, b) como o subconjunto:

$$(a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b \,\}$$

Um subconjunto de $\mathbb{R}$ denomina-se **aberto** se for união enumerável de intervalos abertos *disjuntos*, entanto que se diz **fechado** se o seu complementar for aberto.

1. Com relação ao subconjunto de números reais *irracionais* pode ser afirmado que:
 (a) Não é aberto nem fechado.
 (b) É um subconjunto aberto e fechado simultaneamente.
 (c) É um subconjunto fechado.
 (d) É um subconjunto aberto.
 (e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.
 (f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

Uma função $f\colon X \to Y$ se diz **injetora** se:

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y, \;\forall\, x, y \in X.$$

Por outro lado, f se diz **sobrejetora** quando a sua imagem consiste no conjunto Y completo. Uma função simultaneamente injetora e sobrejetora denomina-se **bijetora**.

2. Todo número natural n pode ser expressado na forma

$$n \;=\; \frac{(k-1)k}{2} \;+\; r$$

com $1 \leqslant r \leqslant k$ e $k \in \mathbb{N}$. Em tal caso, define-se f como:

$$f(n) \;=\; \frac{r}{k+1-r}.$$

Considerando tal f como uma função do conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais no conjunto $\mathbb{Q}_+$ dos racionais *positivos*, pode ser afirmado que:
 (a) f é uma função bijetora.
 (b) f não é uma função injetora nem sobrejetora.
 (c) f é uma função injetora mas não é sobrejetora.
 (d) f é uma função sobrejetora mas não é injetora.
 (e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.
 (f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Com relação ao limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$$

pode ser afirmado que:

(a) Se $a = 0$ o valor do limite também é zero, independentemente de b.

(b) Se $b = 0$ o valor do limite existe independentemente de a.

(c) Não existe para nenhum valor de $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) Existe somente se $a = 0$ para todo b.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $b > 0$. Sabendo que

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{ax}$$

pode ser afirmado que:

(a) $\log a = b^2$.

(b) $\log b = a^2$.

(c) $\log b = 2a$.

(d) $\log a = 2b$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

5. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, não necessariamente contínua. Com relação ao conjunto A definido como

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \ : \ f \text{ é continua em } x \,\}$$

pode ser afirmado que:

(a) Existe f tal que o complementar de A coincide com o conjunto dos racionais.

(b) Se f não é limitada então o conjunto A não pode ser finito.

(c) Se o domínio de f é igual a $\mathbb{R}$ então o conjunto A não pode ser vazio.

(d) Se $A = \mathbb{R}$ então a função f deve ser limitada.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

6. Com relação à função f definida como

$$f(x) \;=\; \frac{1}{1-\exp(-x)}$$

pode ser afirmado que:

(a) $f' = f^2 - f$.

(b) $f'' = 2f^3 - 3f^2 + f$.

(c) $f' = f(f+1)$.

(d) $f' = f - 2f^2$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

7. Com relação à função f definida como

$$f(x) \;=\; \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

pode ser afirmado que:

(a) $2f'' = f^3 + f$.

(b) $f' = f^2 + 1$.

(c) $f'' = 2f^3 - f^2$.

(d) $f' = 1 - f^2$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

8. Com relação à função f definida como:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

pode ser afirmado que:

(a) É diferenciável em $x = 0$, mas não é duas vezes diferenciável em tal ponto.

(b) É continua em $x = 0$, mas não é diferenciável em tal ponto.

(c) Não é contínua no ponto $x = 0$.

(d) É diferenciável em $x = 0$, mas a derivada não é contínua em tal ponto.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

9. Com relação à função f definida como:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \leqslant -1 \\ \dfrac{x^2-3}{2} & \text{se } -1 \leqslant x \end{cases}$$

pode ser afirmado que:

(a) f é derivável no ponto $a = -1$, e f'' é contínua em tal ponto.

(b) f não é derivável no ponto $a = -1$, mas é contínua em tal ponto.

(c) f é derivável no ponto $a = -1$, mas não é contínua em tal ponto.

(d) f é derivável no ponto $a = -1$, mas f' não é contínua em tal ponto.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

10. Com relação às funções f, g definidas respectivamente como

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1-\cos x} \\ g(x) &= \sqrt{1+\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

pode ser afirmado que:

(a) $ff' = gg'$.

(b) $gf'' = fg''$.

(c) $g^2 = ff' - 1$ ou $f^2 = gg' + 1$.

(d) $f'' = -f$ e $g'' = g$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.