Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2011 – Cálculo I – 1º sem. 2015
Professor: Dr. José Ricardo G. Mendonça

7ª Lista de Exercícios — Logaritmos e exponenciais — 23 jun. 2015

Age is a function of mind over matter – if you don't mind, it doesn't matter.
Leroy Robert "Satchel" Paige (1849–1925)

I. Logaritmos e exponenciais

1. Encontre a equação da reta tangente às seguintes curvas nos pontos indicados:

   (a) $y = \ln x$ nos pontos $x = \frac{1}{2}$ e $x = 2$;

   (b) $y = \ln x^3$ no ponto $x = e$;

   (c) $y = xe^x$ no ponto $x = 5$;

   (d) $y = x^2 e^{-x^2}$ no ponto $x = 1$;

2. Encontre a primeira e a segunda derivada das seguintes funções:

   (a) $\ln \sin x$;

   (b) $\sin \ln(2x+1)$;

   (c) $\ln(x^2+1)$;

   (d) $\dfrac{\ln 2x}{\sin x}$;

   (e) $e^{\sin 3x}$;

   (f) $\ln(e^x + \sin x)$;

   (g) $\arcsin(e^x + x^2)$;

   (h) e^{x^2+1};

   (i) $\dfrac{1}{\sin e^{2x}}$;

   (j) $e^{-\arctan^2 x^2}$.

3. Encontre a primeira e a segunda derivada das seguintes funções:

   (a) 10^x;

   (b) 3^{-x};

   (c) $x^{\sqrt{x}}$;

   (d) $(x^2+x+1)^{(x+1)}$;

   (d) $\log_a \sqrt{x}$, $a > 0$.

4. Dados os números reais $x > 0$ e $a > 1$, mostre que $x^a - 1 \geqslant a(x-1)$.

5. Encontre o mínimo e o máximo da função $f(x) = x^2 a^{-x}$, $a > 0$.

6. Normalmente indica-se a n-ésima derivada de $f(x)$ por $f^{(n)}(x)$; assim, $f(x) = f^{(0)}(x)$, $f'(x) = f^{(1)}(x)$, $f''(x) = f^{(2)}(x)$ e assim por diante. Mostre que a n-ésima derivada de $f(x) = xe^x$ é dada por $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ e que a n-ésima derivada de $g(x) = xe^{-x}$ é dada por $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$. *Observação*: às vezes usam-se numerais romanos para os sobrescritos, como em $f^{(\mathrm{ii})}(x)$, $f^{(\mathrm{iii})}(x)$, $f^{(\mathrm{iv})}(x)$ etc.

7. Esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $y = \ln(x^2+1)$;

   (b) $y = x + \ln x$;

   (c) $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ para $-1 < x < 1$.

8. Mostre que $\ln x < x$ para todo $x > 1$. *Dica*: mostre que $f(x) = \ln x - x$ é estritamente decrescente para todo $x > 1$.

9. Mostre que
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$
Dica: compare a área sob a curva $1/x$ entre os pontos $x = 1$ e $x = 1+h$ e mostre que
$$\frac{h}{1+h} < \ln(1+h) < h.$$
Desse resultado podemos concluir que para valores pequenos de $|x|$ vale a aproximação $\ln(1 \pm x) \simeq \pm x$. Verifique essa aproximação calculando, por exemplo, $\ln 0{,}95$ e $\ln 1{,}05$ em uma calculadora. *Obervação*: uma aproximação mais precisa é dada por $\ln(1+x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2$ (verifique essa aproximação também).

10. Sabendo-se que $\ln 2 \simeq 0{,}693$, $\ln 3 \simeq 1{,}099$ e $\ln 10 \simeq 2{,}303$, calcule exatamente $\ln 5$ e aproximadamente $\ln 7$ (use o resultado do exercício anterior).

11. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale
$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

12. Sejam as funções $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ e $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

    (a) Mostre que $(\sinh x)' = \cosh x$ e que $(\cosh x)' = \sinh x$;

    (b) Mostre que para todo x vale $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

    (c) Para valores adequados de x, determine as funções inversas de $\cosh x$ e $\sinh x$ e calcule suas derivadas.

    Essas funções são conhecidas como cosseno hiperbólico e seno hiperbólico e ocorrem bastante frequentemente em todas as áreas da matemática pura e aplicada.

13. Seja $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$ e $b_n = a_n - \dfrac{1}{n}$ para todo inteiro $n \geqslant 2$.

   (a) Usando o resultado do exercício I.11, mostre que $a_{n+1} < a_n$ e que $b_{n+1} > b_n$;

   (b) Como a sequência de números positivos a_n é decrescente, a sequência de números positivos b_n é crescente e $b_n - a_n = -\frac{1}{n}$ se torna arbitrariamente pequeno quando n se torna arbitrariamente grande, deve existir uma constante $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $b_n < \gamma < a_n$ para todo inteiro positivo n. Essa constante é conhecida como constante de Euler (ou de Euler-Mascheroni) e vale $\gamma \simeq 0.577\,215\,664\cdots$. Atualmente γ é conhecida com mais de 100 bilhões de casas decimais, embora ainda não se saiba se γ é um número irracional ou não!

⋆ — ⋆ — ⋆