Números reais

Um passeio pelos fundamentos da Análise

Fernando Auil

Version 1.0-beta
D:20170831112216-03'00'

São Paulo
2017

Números reais: Um passeio pelos fundamentos da Análise

CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO

Bibilioteca
Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo

Auil, Fernando

Números reais: Um passeio pelos fundamentos da Análise / Fernando Auil. – São Paulo: Escola de Artes, Ciências e Humanidades, 2017.
xix, 790 p.

Inclui referências bibliográficas e índice remissivo.
ISBN:

1. Números reais. 2. Análise. 3. Calculus. I. Título.

CDD 22.ed. – 530.143

Typeset by the author in LaTeX

Naturalmente, o Spivak

> O dever da pessoa de sabedoria, do sujeito realizado, consiste em ensinar para um estudante digno o que ele tem experimentado, e nada mais. [...] Não pode garantir que o seu seja o único caminho, pois o número de caminhos que levam do relativo ao absoluto é infinito.
>
> *Alain Daniélou* [1]

O *Calculus* de Michael Spivak [25] é sem dúvida nenhuma um dos melhores livros de Cálculo que já vi. E agora que apresto-me a transcrever nestas páginas o "testemunho dos eventos miríficos e formidáveis" a que na minha juventude de estudante me foi dado assistir, encontro-me, como Adso de Melk, "repetindo verbatim quanto vi e ouvi" daquele texto notável.

Constato também agora, como aquele cronista pode perceber, que "não raro os livros falam de livros, ou seja, é como se falassem entre si." Com uma notável diferença, certamente: a conversa intertextual fica reduzida aqui a uma vaga evocação de recordações memoravéis. Pois, se mergulhado naquele espetacular contexto, o presente opúsculo poderia, no máximo, constituir apenas mais uma ilustração do repetido aforismo relativo ao plágio como a mais sinceira forma de homenagem. Mas inclusive esse modesto anelo poderia ser considerado desde já uma pretensão descabida. Portanto, também como aquele escriba fiel que num Eco nos fala, não me aventuro "a tirar disso um desenho", deixando para a posteridade "signos de signos, para que sobre eles se exercite a prece da decifração". [2]

Foi na contemplação das infinitas nuances da imponente obra de Spivak, durante minhas frequentes peregrinações pelo seu *Calculus*, que surgiu a idéia do presente livro, nada mais do que um relatório de viagem através daquelas páginas maravilhosas, e que por mais longe que esteja da medida dos meus desejos, submeto finalmente à curiosidade e à imparcialidade do leitor.

[1] [6, Prólogo, p. 33].
[2] Cf. [8, p. 21] Prólogo. Vide [8, p. 330] Quarto dia, Terceira.

Sumário

Lista de Figuras

Prolegômenos

A causa primeira deve ser colocada além do número; caso contrário, o número seria a causa primeira.

Alain Daniélou [1]

A natureza da ilusão (*mâyâ*) é o número um.

Ekä Shabdâtmikâ Mâyâ [2]

[1] [6, Cap. I, p. 41].

[2] Mandgala *Purana* I. In: [6, Cap. I, p. 42].

Introdução

A.1 Números

Se Deus é um, então no princípio era o Número e o Número estava junto a Deus, e o Número era Deus. O Número estava no princípio junto a Deus e dever do matemático fiel seria repetir cada dia com salmodiante humildade o único evento imodificável do qual se pode confirmar a incontrovertível verdade.[1]

Se em Kronecker[2] devemos confiar, no princípio eram apenas os números naturais. Acreditando ou não na teogonia numerológica de Kronecker, encontra-se, com efeito, que a contagem é, do ponto de vista matemático, uma das mais antigas atividades humanas, e os números naturais

$$1, 2, 3, \ldots$$

são precisamente os "números de contar".

Segundo Rey Pastor *et al.* [17], embora as sociedades menos desenvolvidas – tribos isoladas da África e Austrália, possuam apenas uma noção muito vaga e embrionária do *conceito* de número, podem, contudo, realizar a contagem de determinados conjunto de objetos – cabeças de gado, filhos, ou esposas, das mais diversas maneiras. Os pigmeus sabem contar até cinco e, quando interrogados sobre a cardinalidade de conjuntos com mais objetos, a eles se referem dizendo que têm "muitos" elementos. Observe-se de passagem que, embora possa parecer elementar e primitiva, essa atitude na verdade está universalmente generalizada, diferindo *apenas em grau* entre as diferentes culturas. Qualquer indivíduo, digamos, ocidental, cristão e ariano, quando interrogado sobre a quantidade de estrelas que consegue enxergar no céu noturno, também responderá "muitas", embora a quantidade requisitada seja obviamente finita em número.

Um exemplo revelador da gênese do conceito do número na mente humana é fornecido por algumas tribos australianas nas que, quando os filhos vêm ao mundo, recebem, na ordem do seu nascimento, nomes com significado numérico, variando na terminação conforme o gênero do recém nascido. Tais nomes diferenciam desde o primeiro até o nono filho, e embora esses australianos não possuam número cardinal além do três, o pai australiano de nove filhos saberá muito bem dizer se a sua família está completa, quando pretende contá-la, sem ter a ideia abstrata de número, nem cardinal, nem ordinal. Não sabe contar até nove, mas é perfeitamente capaz de diferenciar qualitativamente os termos que a nossos olhos comporiam uma sequência ordenada abstrata. Ou

[1] Cf. Adso de Melk In: [8, p.21].

[2] Leopold Kronecker (7 de dezembro de 1823 – 29 de dezembro de 1891) foi um matemático e lógico alemão que susteve que a aritmética e a análise deveriam ser baseadas nos números inteiros, expressando que "Deus criou os números inteiros, todo o resto é obra do homem". In: [31], tradução livre do autor.

seja, a numeração é substituída pela *enumeração*, [17].

A correspondência biunívoca entre conjuntos também aparece naturalmente nas questões comerciais que envolvem, por exemplo, os indígenas do estreito de Torres, no norte da Austrália, e efetua-se recorrendo a equivalentes concretos da numeração ordinal. Podem contar até 31 tomando sucessivamente como referências o dedo mínimo da mão esquerda, os outros dedos, o pulso, cotovelo, axila, ombro, clavícula, tórax, e depois, na ordem inversa, ao longo do outro braço, finalizando no dedo mínimo da mão direita. Resulta uma extensão do conceituado e útil método de contar com os dedos. Na primeira infância se começa também pelo aprendizado da contagem. Apenas mais tarde coordenam-se conjuntos prescindindo da ordem. Isso parece justificar, como mais intuitivo e direto, e mais adaptado à natureza da mente humana, a introdução do número natural através da formulação axiomática que evidencie os fundamentos da operação de contagem, como no sistema axiomático de Peano, por exemplo.

O uso do zero como número aceitou-se na Europa apenas a partir do século XIII, por Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, quem parece ter se inspirado na escola arábica espanhola, cujo representante mais proeminente foi Juan de Sevilla. A palavra zero foi introduzida posteriormente, no século XV, e também provem do árabe *sifr*, vazio. Os indianos, no seu sistema de numeração decimal, representavam o zero com um símbolo oco, o que significa o notável avanço de representar a ausência de unidades, o nada, através de um símbolo concreto. Resulta oportuno destacar que os maias fizeram coisa parecida, valendo-se do seu notável sistema de numeração vigesimal.

Os números negativos não foram aceitos sem polêmicas até o século XVII. Os gregos nunca consideraram como solução de um problema uma quantidade negativa ou irracional. Até as próprias "frações" não eram números para os matemáticos gregos, mas "quocientes de números", o que não impedia que o *logístico*, calculador experiente, entre os gregos, ou o *escreva*, entre os egípcios, operasse profissionalmente com elas como se fossem números, sem preocupação nenhuma em justificar rigorosamente suas regras de cálculo, indiferente às críticas irônicas de Platão.

A comprovação da insuficiência dos "pontos" racionais para representar a totalidade das magnitudes e relações que aparecem ainda na geometria elementar, muito cara aos gregos, marca uma época na história da Matemática antiga, e data de aproximadamente vinte e cinco séculos, quando o renome do filósofo Pitágoras de Samos e da sua seita de seguidores percorria as ilhas do mar Egeu. Ao santo e herói desta seita atribui-se o famoso resultado conhecido como Teorema de Pitágoras, que paradoxalmente teve consequências bem anti-pitagóricas. Resulta oportuno salientar que esse resultado já era conhecido muito antes, por exemplo, pelos antigos egípcios, que o usavam de maneira muito engenhosa para construir ângulos retos com cordas na demarcação de terrenos após as enchentes sazonais do rio Nilo. A descoberta dos números irracionais é atribuída, mais especificamente, ao pitagórico Hippasus de Metapontum, nascido aproximadamente em 500 A.C. na Magna Græcia, quem parece ter desenvolvido uma prova, com argumentos principalmente geométricos, da irracionalidade da raiz quadrada de 2, na sua tentativa de representá-la como uma fração. Observe-se de passagem que esse tipo de acontecimento constitui uma caraterística típica e notável da Matemática, onde fracassos são revertidos em "Teoremas de Impossibilidade" e onde regras transgredidas originam novas regras, melhores e mais abrangentes que as anteriores. Contudo, Pitágoras acreditava no caráter absoluto dos números inteiros e não poderia aceitar facilmente a existência de números que fugissem do mundo perfeito e ordenado que criara para si mesmo e sua seita de seguidores. Mais ainda, nenhuma viagem para outra galáxia era necessária para subverter a harmonia do seu esquema de números inteiros, mas pelo contrário, o defeito podia ser encontrado na diagonal de um singelo quadrado qualquer. Para cúmulo de males, o seu próprio resultado, o Teorema de Pitágoras, era usado para tal efeito. Ele não podia negar a existência de números irracionais pela via da lógica formal, mas na sua ilusória crença não poderia nunca aceitar a sua existência. Diante de tão abrumadoras circunstâncias, ele não teve melhor ideia que condenar Hippasus à morte por afogamento. Assim, após este ter revelado a irracionalidade daquele número, os demais membros da seita pitagórica deram-lhe morte. Alega-se também que Hippasus foi um notável pioneiro da pesquisa experimental em acústica e o fenômeno da ressonância, mas pouquíssimos dos seus trabalhos originais chegaram até os dias de hoje.

A criação dos números reais representa a abstração suprema da mente humana. Embora eles possam ser representados graficamente de maneira simples e notável por meio de uma linha reta estendendo-se *ad infinitum*, a ideia, e a efetividade, dessa representação recai não na linearidade, nem na infinitude, mas na noção de *continuidade* subjacente à reta. Mesmo os gregos, sendo brilhantes pensadores e intelectuais, tiveram grande dificuldade em formalizar rigorosamente a ideia de continuidade. Talvez eles nem se sentissem na necessidade de fazê-lo, mas provavelmente resultaria difícil atingi-la com um esquema de pensamento atrelado a formas "estáticas", viciado em geometria. Ideias embrionárias do Cálculo podem ser encontradas no método de Arquimedes de Siracusa para a determinação da área de certas figuras curvas, mas com a destruição da cultura helenística por parte do Império Romano, quase mil e quinhentos anos deveriam passar até o Renascimento europeu testemunhar o surgimento do Cálculo propriamente dito. Mesmo assim, os filósofos ocidentais que séculos depois acenaram em direção da análise da noção de continuidade nem chegaram perto de arranhá-la, pois dizer que constitui um "a priori" da mente humana não constitui mas do que uma variante da "dúvida erudita" socrática, somente que menos modesta e, por motivos óbvios, totalmente desprovida de qualquer originalidade.

Apesar da sua irreversível influência no informatizado mundo de hoje, computadores não podem usufruir dos números reais. Os números reais não podem ser introduzidos em computadores, nem a noção de continuidade. Computadores não podem representar os números reais irracionais. Por menor que seja o espaço de armazenamento na memória de um simples *bit*, a representação de infinitos decimais requer infinito espaço. Portanto, nenhum computador nunca poderá trabalhar com números reais. Embora a sua incrível velocidade e outros truques "mecânicos" e estatísticos, os computadores nunca poderão superar a mente humana, a menos que se considere o próprio cérebro humano como uma espécie de computador biológico, aliás, de altíssima eficiência, ou que se considere, alternativamente, o próprio computador como uma extensão das faculdades mentais humanas.

Os números podem ser usados como patamares na edificação de estruturas abstratas que fagocitam qualquer vestígio da sua individualidade, assim sacrificada pela primazia da forma, que impera nos domínios da abstração da mesma forma que imponentes catedrais o fazem no mundo dos homens: construções austeras, sólidas e frias, resultam em lugar de culto onde supostamente as limitações terrenas são sublimadas em prol do inatingível. Isso é a Álgebra. Os números podem, alternativamente, ser dissecados, radiografados, entrevistados seus vizinhos, amigos e parentes... Em outras palavras, podem ser abordados biograficamente. O estudo da forma fica então subordinado à contextualização das suas diferentes manifestações e matizes, prevalecendo a individualidade. Essa é a abordagem da presente obra e na Matemática recebe genericamente o nome de Análise: do grego $'\alpha\nu\grave{\alpha}$ (*ana*), separação, através, e $\lambda\upsilon\sigma\iota\varsigma$ (*lysis*), dissolução, destruição, ou seja, "separação pela dissolução" ou "através da destruição", denotando a ideia da decomposição de uma coisa em seus princípios ou componentes fundamentais.[3] A escolha desse nome para denominar

[3]Compare-se com anatomia (ana = separação; tomé = cortadura): disseção do corpo humano; anagrama (ana

o estudo dos números reais, principalmente os irracionais, provavelmente também seja de origem (anti-)pitagórica. Com efeito, os pitagóricos representavam os números como pontos que, além de ter uma posição determinada, consideravam como sendo *extensos*. Ou seja, um segmento de reta estaria assim constituído por uma quantidade *finita* de pontos. Pelo fato da raiz quadrada de 2 ser irracional, como provara Hippasus, decorre do próprio Teorema de Pitágoras, que em um triângulo retângulo de catetos iguais a 1, para poder posicionar exatamente a hipotenusa de modo tal a formar o triângulo de maneira correta, seria necessário "quebrar" – destruir, separar, esses pontos extensos, por menores que sejam.

A.2 Funções

As origens da noção de função e da sua influência significativa na evolução da ciência podem ser fixadas no século XVII. O conceito de função aparece explicitamente em Leibniz em 1692, sendo utilizado pelos irmãos Bernoulli desde 1694. Leonhard Euler (1707-1783) introduz em 1734 o símbolo $f(x)$, e Clairaut fx. O conceito geral de função algébrica, inclusive não expressável por radicais, foi claramente definido por Euler, que denominava trascendentes às funções definidas por algorítmos indefinidos, o que não é atualmente correto, mas deve ser sobrentendendido que se refere às funções definidas por séries de potências e que não são algébricas.

O conceito bernouilliano e euleriano de variável y *dependente* de x, ou *função* de x, coincidia com o de *expressão aritmética* formada com a variável x e certos números fixos, ou *constantes*. A palavra *contínua* significa para Euler função definida por apenas uma expressão.

O problema da corda vibrante, resolvido por D'Alembert em 1747, induz Euler a admitir funções arbitrárias definidas graficamente, dado que a forma inicial da corda pode ser arbitrária, sem necessidade de uma expressão aritmética explícita. Por outro lado, Bernoulli forneceu uma expressão trigonométrica para a forma da corda, definida para todo tempo, e em face disso foi evidenciada a necesidade de suprimir a diferença entre função matemática, definida explicitamente por uma expressão aritmética, e função arbitrária, dado que estas últimas também são suscetíveis de serem expressas através de operações aritméticas.

Tudo isso levou a prescindir da maneira de explicitar a correspondência entre os valores de x e os de y, para atender apenas à correspondência em si mesma, ficando assim estabelecido por Dirichlet em 1854 o conceito geral de função como correspondência arbitrária entre duas variáveis.

A.3 Continuidade

O teorema sobre a existência de valores extremos, máximos e/ou mínimos, de funções limitadas, geralmente atribuido a Weierstrass, assim como também o critério geral de convergência que costuma denominar-se "de Cauchy", são de Bolzano (1817). Bernard Bolzano (1781-1848) foi um dos

= separadamente): formação de uma palavra tomando ou separando as letras de uma outra; aneurisma (ana = através; euro = dilatar): ruptura de una artéria pela sua dilatação transversal; anátema (ana = separação; tithemi = colocar): colocar uma pessoa fora de algum lugar, por suas ideias ou crenças, excomungar. Com maior precisão, além de separação, através, o prefixo *ana* também é usado para denotar a ideia de repetição (anabaptista), entre (analogia), elevação (anagogia), no meio, fora (anacronismo), a parte (anacoreta).

primeiros a introduzir o conceito moderno de rigor nas demonstrações da Análise. No seu trabalho *Paradoxien des Unendlichen*, publicado em 1850, é reconhecido pela primeira vez que muitos enunciados aparentemente óbvios sobre funções contínuas podem e devem ser *demonstrados*. Um exemplo característico é seu teorema sobre a existência de zeros. Ainda em épocas mais recentes, diversos autores adotaram como condição equivalente à continuidade, ou bem como a definição da mesma, que uma função não passe de um valor a outro sem tomar todos os valores intermediários, o que resulta falso, a partir de exemplos bem simples e elementares.

A idéia de fundamentar a Análise sobre uma base aritmética desenvolve-se em começo do século XIX, principalmente pelo trabalho de Agustin Louis Cauchy (1789-1857), dotando de rigor lógico a extraordinária obra do século XVIII, em que os conceitos da Análise operavam-se sobre uma base intuitiva do resultado correto, que não estava completamente livre de associações místicas, particularmente a dos "infinitamente pequenos". A notação $f(a+0)$ para o limite pela direita deriva da notação de Dirichlet $f(a+o)$, originada pela sua vez na notação de Newton para os infinitésimos, que designava como o.

Segundo Dini-Lüroth (1840), Heine clasificou a continuidade de uma função em um intervalo em uniforme e não-uniforme, e Cantor conseguiu demostrar a equivalência de ambos conceitos (em intervalos *fechados e limitados*, ou seja, compactos).

Notações

> Todo lenguaje es un alfabeto de símbolos cuyo ejercicio presupone un pasado que los interlocutores comparten.
>
> *Jorge Luis Borges* [1]

B.1 Lógica Proposicional

$\forall$	quantificador universal ("para todo")
$\exists$	quantificador existencial ("existe")
$\nexists$	negação do quantificador existencial ("não existe")
$\diagup$	tal que
$:$	notação alternativa para "tal que"
$\in$	pertence a
$\notin$	não pertence a
$\wedge$	e
$\vee$	ou inclusivo
$\Longrightarrow$	implica
$\Longleftrightarrow$	se e somente se (condição necessária e suficiente)
$\therefore$	portanto

B.2 Teoria de Conjuntos

Os termos **conjunto** e **família** serão tidos como sinônimos, usados ambos para designar coleções "restritas" de objetos (por oposicão a **classe** que designa coleções "mais amplas" das quais os conjuntos são casos particulares).

Se A e B denotam dois conjuntos quaisquer, subconjuntos de um conjunto "universal" fixo X,

[1] El Aleph. In: [4].

serão utilizadas as seguintes notações:

$P(A)$	família de subconjuntos, ou **partes**, de A
$PF(A)$	família de subconjuntos *finitos* de A
$\|A\|$	cardinal de A
A^{c}	complemento de A (relativo a X)
$A \setminus B$	$A \cap B^{\mathsf{c}}$
$A - B$	notação alternativa para $A \setminus B$
$A \triangle B$	**diferença simétrica** de A com B, ou seja, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos

Observe que o conjunto dos números naturais *não inclui o zero*. Além disso, $\mathbb{N}$ é um conjunto *indutivo* e *bem-ordenado*, duas propriedades que serão utilizadas sob a forma de demonstrações por indução. Por outro lado, $\mathbb{Z}$ é um anel de integridade, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado e completo, entanto que $\mathbb{C}$ é um corpo completo e algébricamente fechado.

B.3 Álgebra

Se f é uma função, se denotará:

$\operatorname{Dom} f$	domínio de f
$\operatorname{Img} f$	imagem de f

Se A é um subconjunto de um espaço vetorial, se denotará:

$\operatorname{span} A$	espaço vetorial gerado por A
$\overline{\operatorname{span}} A$	espaço vetorial *fechado* gerado por A

B.4 Topologia

Se X e Y são espaços topológicos, se denotará:

$C(X, Y)$	conjunto de funções contínuas de X em Y
$C(X)$	$C(X, \mathbb{C})$
X'	conjunto de funcionais *lineares* e contínuas, ou **espaço dual**, de X

considerando em $C(X)$ a estrutura métrica induzida pela seguinte norma:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

quando X é compacto.

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	espaço de Schwarz de funções rapidamente decrescentes

considerando em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a transformada e anti-transformada de Fourier respectivamente como:

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda x} f(x)\, dx$$
$$\mathcal{F}^{-1}[f](\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda x} f(x)\, dx.$$

O produto escalar num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ se denotará $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle_{\mathcal{H}}$ convencionando-se que é *anti-linear* no *primeiro* argumento e linear no segundo. O subíndice fazendo menção ao espaço será dispensado quando não houver risco de confusão. Se denotará também:

$L(\mathcal{H})$	conjunto de operadores *lineares* em $\mathcal{H}$
$B(\mathcal{H})$	conjunto de operadores lineares e *limitados* em $\mathcal{H}$

considerando neste último a estrutura de espaço de Banach induzida pela norma:

$$\|T\|_{B(\mathcal{H})} = \sup\{\|Tx\| \,:\, x \in \mathcal{H} \wedge \|x\| = 1\}$$

Porém, no caso particular de dimensão finita, se denotará:

$M_n(\mathbb{F})$	conjunto de matrizes $n \times n$ com coeficientes no anel $\mathbb{F}$
$D_n(\mathbb{F})$	subálgebra das matrizes diagonais

sendo que usualmente, o anel (comutativo com unidade) considerado será o corpo real ou complexo. Neste último caso, as matrizes diagonais serão expressadas na forma:

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \;\; \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

B.5 Outros Alfabetos

Grego			
Nome	Maiúsculas	Minúsculas	Grafia Alternativa
alfa	A	α	
beta	B	β	
gama	Γ	γ	
delta	Δ	δ	
epsilon	E	ϵ	ε
zeta	Z	ζ	
eta	H	η	
theta	Θ	θ	ϑ
iota	I	ι	
kappa	K	κ	$\varkappa$
lambda	Λ	λ	
mu	M	μ	
nu	N	ν	
xi	Ξ	ξ	
omicron	0	o	
pi	Π	π	ϖ
rho	P	ρ	ϱ
sigma	Σ	σ	ς
tau	T	τ	
upsilon	Υ	υ	
phi	Φ	ϕ	φ
chi	X	χ	
psi	Ψ	ψ	
omega	Ω	ω	

Hebraico (incompleto)	
Nome	Letra
aleph	$\aleph$
beth	$\beth$
gimel	$\gimel$
daleth	$\daleth$

B.6 Metanotações

No cálculo de predicados, se P e Q denotam duas proposições quaisquer, convencionaremos em que:

$$P := Q$$

significa "P é *por definição* igual a Q". Em certas ocasiões convém manter a ordem invertendo o significado, assim:

$$P =: Q$$

significará "Q é *por definição* igual a P". Também, com menor freqüência, revela-se útil denotar:

$$P :=: Q := R,$$

ou alternativamente:

$$P := R =: Q,$$

significando em ambos casos "P e/ou Q são *por definição* iguais a R, do qual constituem notações alternativas".

$\clubsuit$	final de uma definição, observação, ou exercício
$\Box$	final do enunciado de um lema, proposição ou teorema
$\triangledown$	final do enunciado de uma afirmação intermediária dentro de uma demonstração
$\blacktriangledown$	final da prova de uma afirmação intermediária dentro de uma demonstração
$\blacksquare$	final de uma demonstração

Finalmente, estas e todas as outras definições, símbolos e notações usadas no presente trabalho constam no índice remissivo, ao final.

Métodos e Técnicas

> *Proofs are to mathematics what spelling (or even calligraphy) is to poetry.* Mathematical works do consist of proof, just as poems do consist of characters.
>
> *V. I. Arnold* [1]

C.1 Reductio ad Absurdum

O método de *reductio ad absurdum* é frequentemente utilizado para provar fórmulas do tipo $P \Rightarrow Q$. Este método é na verdade uma variante do *modus tollens*, a saber:

$$((P \Rightarrow Q) \ \wedge \ \neg Q) \ \Rightarrow \ \neg P.$$

Trocando P por $\neg P$ e Q por $\neg Q$ na fórmula anterior, tem-se:

$$((\neg P \Rightarrow \neg Q) \ \wedge \ Q) \ \Rightarrow \ P,$$

de onde, permutando P e Q resulta:

$$((\neg Q \Rightarrow \neg P) \ \wedge \ P) \ \Rightarrow \ Q.$$

A proposição P não precisa ser necessariamente a hipótese do teorema em questão, podendo ser substituída por qualquer outro teorema (verdadeiro) da teoria, digamos R, ou seja:

$$((\neg Q \Rightarrow \neg R) \ \wedge \ R) \ \Rightarrow \ Q.$$

Em outras palavras, se R é um teorema e a negação de Q implica a negação de R obtém-se uma contradição, logo a proposição Q deve ser verdadeira. A contradição obtida é um resultado "absurdo", dai o nome do método.

C.1.1 Exemplo: Se m^2 é par, então m é par.

Neste caso, P, Q são as proposições definidas respectivamente como:

$$P = \{m^2 \text{ par}\},$$
$$Q = \{m \text{ par}\}.$$

[1] [3, p. 6]. Itálico no original.

Desta maneira, tem-se:

$$\begin{aligned}\neg Q \;\Rightarrow\; m \text{ ímpar} \;\Rightarrow\; m = 2k+1 \\ \Rightarrow\; m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 \;+\; 4k \;+\; 1 = 2k(2k+2) \;+\; 1 \;\Rightarrow\; m^2 \text{ ímpar} \;\Rightarrow\; \neg P.\end{aligned}$$

Portanto, basta considerar $R = P$. ♣

C.1.2 Exemplo: Se $r^2 = 2$, então $r \notin \mathbb{Q}$.

Neste caso, P, Q são as proposições definidas respectivamente como:

$$P = \{r^2 = 2\},$$
$$Q = \{r \notin \mathbb{Q}\}.$$

Observe que $\neg Q$ equivale a $r = m/n$ com m, n inteiros. Sem perda de generalidade, se pode supor que esta fração é irredutível, simplificando os fatores comuns de m, n se for o caso. Isto é equivalente a dizer que m, n são coprimos, ou que m, n carecem de divisores comuns exceto 1. Em outras palavras, deve ser $(m, n) = 1$, ou seja, o máximo divisor comum de m, n é igual a 1. Seja então R a proposição definida como:

$$R = \{(m, n) = 1\}.$$

Agora, sob a hipótese P tem-se:

$$\neg Q \;\Rightarrow\; r = \frac{m}{n} \;\Rightarrow\; 2 = r^2 = \frac{m^2}{n^2} \;\Rightarrow\; 2n^2 = m^2.$$

Desta maneira, m^2 é par de onde segue, pelo resultado do exemplo anterior, que m deve ser par, digamos $m = 2k$. Portanto:

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \;\Rightarrow\; n^2 = 2k^2.$$

Desta maneira, agora n^2 resulta par de onde segue, pelo resultado do exemplo anterior, que n deve ser par, digamos $n = 2l$. Portanto:

$$(m = 2k) \;\wedge\; (n = 2l) \;\Rightarrow\; (m, n) \geqslant 2 \;\Rightarrow\; \neg R.$$

Desta maneira, resulta $\neg Q \Rightarrow \neg R$. Logo, dado que R é verdadeiro, deve ser Q. ♣

Parte I

Álgebra

Dado que todos os termos são definidos através de outros, é claro que o conhecimento humano deve se conformar sempre com admitir alguns termos inteligíveis sem definição, para ter um ponto de partida nas suas definições.

Não é evidente que devam existir termos que *não possamos* definir: é possível que, por mais que adentremos pelo caminho da definição, sempre *possamos* fazê-lo ainda mais. Por outro lado, também é possível que, quando a análise tenha sido suficientemente aprofundada, possamos obter termos que sejam realmente simples e, portanto, que não exijam, logicamente, esse tipo de definição analítica.

Esse é um problema sobre o qual não é necessário nos pronunciar; para o nosso propósito é suficiente observar que, sendo o poder humano limitado, as definições conhecidas devem começar em algum lugar com termos *não definidos*, por enquanto, embora talvez não definitivamente.

B. Russell[1]

O matemático e o físico devem excluir, tanto no campo científico abstrato como no didático, o problema da origem psicológica das ideias primitivas.

J. Rey Pastor et al.[2]

[1] [23, p. 2]; [22, Cap. I, p. 13].
[2] [17, Vol. I, p. 14].

Capítulo 1

Corpos

> There was a most ingenious architect, who had contrived a new method for building houses, by beginning at the roof, and working downward to the foundation.
>
> *Jonathan Swift* [1]

1.1 Definições Básicas

1.1.1 Definição: Um **corpo** é um conjunto F com duas operações binárias definidas em F:

$$(a,b) \longrightarrow a+b,$$
$$(a,b) \longrightarrow ab.$$

Tais operações, denominadas respectivamente **soma** e **produto**, satisfazem as seguintes propriedades:

1. **Associatividade da soma:**

$$(a+b)+c = a+(b+c),\ \forall\, a,b,c \in F.$$

2. **Elemento neutro para a soma:** Existe um elemento $0 \in F$ tal que

$$a+0 = a,\ \forall\, a \in F.$$

3. **Inverso aditivo:** Para todo $a \in F$ existe algum elemento $b \in F$ tal que $a+b=0$.

4. **Comutatividade da soma:**

$$a+b = b+a,\ \forall\, a,b \in F.$$

5. **Associatividade do produto:**

$$(ab)c = a(bc),\ \forall\, a,b,c \in F.$$

[1] [27, Part III, Chap. V].

6. **Elemento neutro para o produto:** Existe um elemento $1 \in F$, com $1 \neq 0$, tal que

$$a1 = a, \forall a \in F.$$

7. **Inverso multiplicativo:** Para todo $a \in F$ com $a \neq 0$ existe algum elemento $b \in F$ tal que $ab = 1$.

8. **Comutatividade do produto:**

$$ab = ba, \forall a, b \in F.$$

9. **Propriedade distributiva:**

$$a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in F.$$ ♣

1.1.2 Exemplo: **(a)** Os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com a soma e produto usuais são corpos.

(b) Tráta-se de um corpo um conjunto F com apenas dois elementos, $F = \{0, 1\}$, e as operações definidas pelas seguintes tabelas:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

(c) Uma maneira um tanto trivial de um obter um corpo a partir de um outro dado F, consiste em defini-lo como o conjunto $\{(a, a) : a \in F\}$ com as operações:

$$(a, a) + (b, b) = (a + b, a + b);$$
$$(a, a)(b, b) = (ab, ab).$$ ♣

1.1.3 Lema: *Seja F um corpo. Então:*

(a) *O inverso aditivo é único. Ou seja:*

$$\forall a \in F \, (a + b = 0 \ \wedge \ a + c = 0 \Rightarrow b = c).$$

Observe-se que este mesmo resultado pode ser parafraseado dizendo que todo elemento de F pode ser inverso de apenas um outro elemento de F.

(b) $-(-a) = a, \ \forall a \in F.$

(c) $a0 = 0, \ \forall a \in F.$

(d) $(-a)b = -(ab), \ \forall a, b \in F.$

(e) $(-a)(-b) = ab, \ \forall a, b \in F.$

(f) $-a = -b \iff a = b, \ \forall a, b \in F.$

(g) $aa = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1, \ \forall a \in F.$ □

Demonstração: **(a)** Sejam $a, b, c \in F$ tais que $a + b = 0$ e $a + c = 0$. Então:

1.	$b = b + 0$	1.1.1(2)
2.	$= b + (a + c)$	Hipótese $a + c = 0$
3.	$= (b + a) + c$	1.1.1(1)
4.	$= (a + b) + c$	1.1.1(4)
5.	$= 0 + c$	Hipótese $a + b = 0$
6.	$= c + 0$	1.1.1(4)
7.	$= c$	1.1.1(2)

(b) Se $a \in F$, então:

1.	$0 = a + (-a)$	1.1.1(3)
2.	$= (-a) + a$	1.1.1(4)

Desta última identidade segue que a é um inverso aditivo para $(-a)$ e, pela unicidade provada no item (a) anterior, segue que $a = -(-a)$.

(c) Se $a \in F$, então:

1.	$a0 = a0 + 0$	1.1.1(2)
2.	$= a0 + (a0 + -(a0))$	1.1.1(3)
3.	$= (a0 + a0) + -(a0)$	1.1.1(1)
4.	$= a(0 + 0) + -(a0)$	1.1.1(9)
5.	$= a0 + -(a0)$	1.1.1(2)
6.	$= 0$	1.1.1(3)

(d) Se $a, b \in F$, então:

1.	$ab + (-a)b = (a + (-a))b$	1.1.1(9)
2.	$= 0b$	1.1.1(3)
3.	$= b0$	1.1.1(8)
4.	$= 0$	Item (c)

Desta última identidade segue que $(-a)b$ é um inverso aditivo para ab e, pela unicidade provada no item (a) anterior, segue que $(-a)b = -(ab)$.

(e) Se $a, b \in F$, então:

1.	$-(ab) + (-a)(-b) = (-a)b + (-a)(-b)$	Item (d)
2.	$= (-a)(b + (-b))$	1.1.1(9)
3.	$= (-a)0$	1.1.1(3)
4.	$= 0$	Item (c)

Desta última identidade segue que $(-a)(-b)$ é um inverso aditivo para $-(ab)$ e, pela unicidade provada no item (a) anterior, segue que $(-a)(-b) = -(-(ab)) = ab$, onde a última igualdade segue do item (b) já provado acima.

(f) Sejam $a, b \in F$. Para provar a parte $(\Rightarrow)$, suponha-se que $-a = -b$. Então:

1.	$a = a + 0$	1.1.1(2)
2.	$= a + (b + (-b))$	1.1.1(3)
3.	$= a + (b + (-a))$	Hipótese
4.	$= a + ((-a) + b)$	1.1.1(4)
5.	$= (a + (-a)) + b$	1.1.1(1)
6.	$= 0 + b$	1.1.1(3)
7.	$= b + 0$	1.1.1(4)
8.	$= b$	1.1.1(2)

Reciprocamente, para provar a parte $(\Leftarrow)$, suponha-se que $a = b$. Então:

1.	$b + (-a) = a + (-a)$	Hipótese
2.	$= 0$	1.1.1(3)

Desta última identidade segue que $-a$ é um inverso aditivo para b e, pela unicidade provada no item (a) anterior, segue que $-a = -b$. Observe-se que a equivalência que se acabou provar, estabelece, de fato, que a aplicação $a \to -a$ é um *isomorfismo*.

(g) Seja $a \in F$ tal que $aa = a$. Se fosse $a = 0$ não existe nada a provar, pelo item (c) anterior. Suponha-se portanto que $a \neq 0$. Em tal caso, a propriedade 1.1.1(7) implica que a possui inverso multiplicativo a^{-1}. Portanto:

1.	$a = a1$	1.1.1(6)
2.	$= a(aa^{-1})$	1.1.1(7)
3.	$= (aa)a^{-1}$	1.1.1(5)
4.	$= aa^{-1}$	Hipótese
5.	$= 1$	1.1.1(6)

Ou seja, sob a hipótese $aa = a$, tem-se $a = 0$, ou $a = 1$. ∎

Exercícios para o Capítulo 1

1.2 Diferenças de Potências

Seja F um corpo.

1.2.1 Exercício: Prove as seguintes identidades em F:

(a) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

(b) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

(c) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Sugestão: Por que este é um caso particular do item anterior? ♣

Os casos particulares acima diferem do caso geral apenas pela complexidade notacional:

1.2.2 Exercício: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} b^{n-k-1}a^k \end{aligned}$$

♣

1.2.3 Exercício: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ *impar*. Então:

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \cdots \pm ab^{n-2} \pm b^{n-1}) \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} b^{n-k-1}a^k \end{aligned}$$

♣

1.3 Relax

1.3.1 Exercício: Simplifique as seguintes expressões no corpo F. Em alguns casos será conveniente lembrar a regra dos sinais.

(a) $-(a-b)$. R: $b-a$.

(b) $(-a)(-b+c)$. R: $ab-ac$.

(c) $1-(1-(1-(1+1)))$. R: -1.

(d) $(-a)(-a+a(1-a))$. R: a^3.

(e) $-(a-(-a+1))$. R: $1-2a$.

(f) $(-a+1)(-a)(a+1)$. R: a^3-a. ♣

1.3.2 Exercício: Produtos de Binômios

Idem que o exercício anterior.

(a) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)$. R: $a^2+2ab+b^2$.

(b) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)$. R: $a^2-2ab+b^2$.

(c) $(b+a)(b-a)$. R: b^2-a^2.

(d) $(a-b)(b-a)$. R: $-(b-a)^2=-b^2+2ab-a^2$.

(e) $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$. R: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

(f) $(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)$. R: $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

(g) $(a+b)(a+b)(a-b)$. R: $a^3+a^2b-ab^2-b^3$.

(h) $(a+b)(a-b)(a-b)$. R: $a^3-a^2b-ab^2+b^3$. ♣

1.3.3 Exercício: Qual é o erro na seguinte "demonstração"? Seja $a\in F$. Então:

$$\begin{aligned}
a^2 &= a^2\\
a^2-a^2 &= a^2-a^2\\
(a-a)(a+a) &= a(a-a)\\
(a+a) &= a\\
a &= 0.
\end{aligned}$$

♣

1.3.4 Exercício: Qual é o erro na seguinte "demonstração"? Sejam $x,y\in F$ com $x=y$. Então:

$$\begin{aligned}
x^2 &= xy\\
x^2-y^2 &= xy-y^2\\
(x-y)(x+y) &= y(x-y)\\
x+y &= y\\
y+y &= y\\
2y &= y\\
2 &= 1.
\end{aligned}$$

♣

1.3.5 Exercício: O Paradoxo do Estudante à Beira do Abismo

Prove que se $4,99$ fosse igual a $5,00$ então $10,00$ seria igual a zero.

Sugestão: Com efeito, observe-se que:

$$4,99 = 5,00 \Rightarrow 0,01 = 5,00 - 4,99 = 0 \Rightarrow 10,00 = (1000).(0,01) = (1000).0 = 0.$$

Após entendida a demonstração, tire alguma conclusão filosófica, se possível. ♣

1.3.6 Exercício: Determinar o conjunto solução para as seguintes equações. Ou seja, determine em cada caso o conjunto dos $x \in F$ que satisfazem cada uma das seguintes relações:

(a) $2 + 3x = 5 - x$. R: $\{3/4\}$.

(b) $(x - 1)(x + \lambda) = 0$. R: $\{1, -\lambda\}$.

(c) $x^2 - 4 = 0$. R: $\{-2, 2\}$. ♣

Capítulo 2

Corpos Ordenados

2.1 Corpos Ordenados

2.1.1 Definição: Um corpo é dito **ordenado** se existir um subconjunto $P \subset F$ tal que:

10. **Tricotomia:** Para cada $a \in F$ é satisfeita uma e apenas uma das seguintes condições:

- **(a)** $a = 0$;
- **(b)** $a \in P$;
- **(c)** $-a \in P$.

11. $a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$.

12. $a, b \in P \Rightarrow ab \in P$. ♣

2.1.2 Lema: *Seja F um corpo ordenado. Então:*

(a) $aa \in P, \ \forall\, 0 \neq a \in F$.

(b) $1 = 1 \cdot 1 \in P$.

(c) $1 + 1 \in P$. *Em particular,* $1 + 1 \neq 0$ *em um corpo ordenado.*

(d) $\forall\, a, b \in F\,(ab \in P \ \wedge \ a \in P \Rightarrow b \in P)$.

(e) $a \in P \Rightarrow a^{-1} \in P, \ \forall\, a \in F$.

(f) $0 < a < b \Rightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}, \ \forall\, a, b \in F$. □

Demonstração: **(a)** Se $a \neq 0$, então, pela propriedade 2.1.1(10), deve ser $a \in P$ ou $-a \in P$. No primeiro caso, $aa \in P$ é consequência direta da propriedade 2.1.1(12). No segundo caso, utilizando mais uma vez a propriedade 2.1.1(12), tem-se:

$$-a \in P \Rightarrow aa = (-a)(-a) \in P.$$

Observe que a igualdade no membro direito acima decorre do resultado do Lema 1.1.3(e).

(b) Como 1 é o neutro do produto, tem-se que $1 = 1 \cdot 1 \in P$, pelo item (a) provado acima.

(c) Como $1 \in P$ pelo item (b) provado acima, pela propriedade 2.1.1(11) tem-se que $1 + 1 \in P$. Em particular, deve ser $1 + 1 \neq 0$, pela propriedade 2.1.1(10).

(d) Por *reductio ad absurdum*, se $b \notin P$, então deve ser $b = 0$, ou $-b \in P$. No primeiro caso, ou seja, se $b = 0$, pelo Lema 1.1.3(c), tem-se que $ab = a0 = 0$, que conjuntamente com a propriedade 2.1.1(10) contradiz a hipótese $ab \in P$. No segundo caso, ou seja, se $-b \in P$, pelo Lema 1.1.3(d) tem-se que $-(ab) = -(ba) = (-b)a \in P$, pela hipótese $a \in P$ e a propriedade 2.1.1(12), que conjuntamente com a propriedade 2.1.1(10) contradiz a hipótese que $ab \in P$.

(e) Observe-se que $aa^{-1} = 1 \in P$, pelo item (b) provado acima, e que $a \in P$ por hipótese. Portanto, o resultado segue diretamente do item (d) anterior.

(f) Observe-se que $0 < a < b \Rightarrow a, b, b - a \in P$. Em particular, pelo item (e) provado acima, tem-se que $a^{-1}, b^{-1} \in P$ e, pela propriedade 2.1.1(12), $a^{-1}b^{-1} \in P$. Portanto:

$$\begin{aligned}
a^{-1} - b^{-1} &= a^{-1}1 - b^{-1}1 \\
&= a^{-1}(bb^{-1}) - b^{-1}(aa^{-1}) \\
&= a^{-1}(b^{-1}b) - b^{-1}(a^{-1}a) \\
&= (a^{-1}b^{-1})b - (b^{-1}a^{-1})a \\
&= (a^{-1}b^{-1})b - (a^{-1}b^{-1})a \\
&= (a^{-1}b^{-1})(b - a) > 0;
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da propriedade 2.1.1(12). Assim, $a^{-1} - b^{-1} > 0 \Rightarrow a^{-1} > b^{-1} > 0$. ∎

2.1.3 Exemplo: **(a)** Os corpos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ com a ordenação usual são ordenados.

(b) O corpo $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado. Com efeito, se fosse ordenado, pelo Lema 2.1.2(b) teria-se que $1 \in P$. Por outro lado, $-1 = i^2 = i \cdot i \in P$, pelo Lema 2.1.2(a), pois $i = (0, 1) \neq (0, 0) = 0 \in \mathbb{C}$. Ou seja, $\pm 1 \in P$, o que contradiz propriedade 2.1.1(10).

(c) O corpo do Exemplo 1.1.2(b) também não pode ser ordenado. Com efeito, em tal caso, pela tabela da soma, tem-se $1 + 1 = 0$, o que contradiz o Lema 2.1.2(c).

(d) O corpo do Exemplo 1.1.2(c) é ordenado, com a ordem definida por: $(a, a) < (b, b) \iff a < b$. ♣

2.2 Módulo ou Valor Absoluto

2.2.1 Definição: Seja F um corpo ordenado. Para cada $a \in F$ define-se o **módulo** ou **valor absoluto** $|a|$ de a por:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{se } a \geqslant 0, \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$ ♣

2.2.2 Lema: *Seja F corpo ordenado. Então:*

(a) $|a| = |-a|\,,\ \forall\, a \in F.$

(b) $a \leqslant |a|\,,\ \forall\, a \in F.$

(c) $-a \leqslant |a|\,,\ \forall\, a \in F.$

(d) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|\,,\ \forall\, a \in F.$ □

Demonstração: **(a)** Os três casos da propriedade 2.1.1(10) serão considerados por separado.

Caso $a > 0$: $|a| = a = -(-a) = |-a|$, onde a última igualdade segue do fato que $-a < 0$ neste caso.

Caso $a = 0$: Observe-se em primeiro lugar que, pelo fato de ser 0 neutro para a soma, tem-se que $0 + 0 = 0$. Assim, 0 é um inverso aditivo de 0 e, pela unicidade de tal inverso provada no Lema 1.1.3(a), deve ser $0 = -0$. Portanto: $|a| = a = 0 = -0 = |-0| = |-a|$.

Caso $a < 0$: $|a| = -a = |-a|$, onde a última igualdade segue do fato que $-a > 0$ neste caso.

(b) Se $a \geqslant 0$ então $a = |a|$. Caso contrário, $a < 0 < -a = |a|$.

(c) $-a \leqslant |-a| = |a|$, onde a primeira e segunda relações provêm dos itens (b) e (a) anteriores, respectivamente.

(d) A primeira e segunda desigualdades provêm diretamente dos itens (c) e (b) anteriores, respectivamente. ■

2.2.3 Lema: *Seja F corpo ordenado. Então:*

$$|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b,\ \ \forall\, a, b \in F.$$ □

Demonstração: ($\Rightarrow$) Observe-se que $|a| \leqslant b \Rightarrow -|a| \geqslant -b \Rightarrow -b \leqslant -|a|$. Portanto, usando o Lema 2.2.2(c), tem-se $-b \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant |a| \leqslant b$.

($\Leftarrow$) Se $a \geqslant 0$, então $|a| = a \leqslant b$. Caso contrário, tem-se $-b \leqslant a \Rightarrow b \geqslant -a = |a|$. ■

2.2.4 Lema (Desigualdade Triangular): *Seja F corpo ordenado. Então:*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|\,,\ \ \forall\, a, b \in F.$$ □

Demonstração: Pelo Lema 2.2.2(b) tem-se que $a \leqslant |a|$ e $b \leqslant |b|$, ou seja, equivalentemente, $|a| - a \geqslant 0$ e $|b| - b \geqslant 0$. Portanto:

$$|a| + |b| - (a + b) = (|a| - a) + (|b| - b) \geqslant 0 \Rightarrow |a| + |b| \geqslant a + b.$$

Ou seja:

$$a + b \leqslant |a| + |b|\,. \tag{2.2.1}$$

Por outro lado, pelo Lema 2.2.2(c) tem-se que $-a \leqslant |a|$ e $-b \leqslant |b|$, ou seja, equivalentemente, $|a| + a \geqslant 0$ e $|b| + b \geqslant 0$. Portanto:

$$|a| + |b| + (a + b) = (|a| + a) + (|b| + b) \geqslant 0 \Rightarrow |a| + |b| \geqslant -(a + b) \Rightarrow a + b \geqslant -(|a| + |b|).$$

Ou seja:

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b. \tag{2.2.2}$$

Desta maneira, para obter a Desigualdade Triangular basta combinar as relações (2.2.1) e (2.2.2) com o Lema 2.2.3. ∎

Exercícios para o Capítulo 2

2.3 Definição Alternativa de Corpo Ordenado

2.3.1 Exercício: Um corpo ordenado pode ser definido alternativamente como um corpo F com uma relação $<$ tal que:

10'. Para cada $a, b \in F$ é satisfeita uma e apenas uma das seguintes condições:

- **(a)** $a = b$,
- **(b)** $a < b$,
- **(c)** $b < a$.

11'. $a < b \ \wedge \ b < c \ \Rightarrow \ a < c, \ \forall\, a, b, c \in F$. Ou seja, a relação $<$ é transitiva.

12'. $a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c, \ \forall\, a, b, c \in F$.

13'. $a < b \ \wedge \ 0 < c \ \Rightarrow \ ac < bc, \ \forall\, a, b, c \in F$.

Com efeito, pode ser provado que:

(a) Partindo das propriedades (1)-(12) e definindo $<$ por:

$$a < b \iff b - a \in P,$$

então as propriedades (10')-(13') podem ser deduzidas como teoremas.

(b) Reciprocamente, partindo das propriedades (1)-(9) e (10')-(13') e definindo P como:

$$P := \{a \in F : a > 0\},$$

então as propriedades (10)-(12) podem ser deduzidas como teoremas. ♣

2.4 Desigualdades

2.4.1 Exercício: Provar o seguinte:

(a) Se $a < b$, então $a + c < b + c$, para todo $c \in F$.

(b) Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.

(c) Se $a < b$, então $-b < -a$.

(d) Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.

(e) Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.

(f) Se $bc > 0$, então $b > 0$ e $c > 0$, ou $b < 0$ e $c < 0$.

(g) Se $bc < 0$, então $b > 0$ e $c < 0$, ou $b < 0$ e $c > 0$. ♣

2.4.2 Exercício: Provar o seguinte:

(a) $a^2 \geqslant 0$, para todo $a \in F$.

(b) Se $a^2 = 0$, então $a = 0$, para todo $a \in F$.

(c) $a^2 + b^2 = 0$ se e somente se $a = b = 0$, para todo $a, b \in F$. ♣

2.4.3 Exercício: Provar o seguinte:

(a) Se $0 \leqslant a < b$, então $a^2 < b^2$.

Sugestão: Use o Exercício 2.4.1(d).

(b) Se $a^2 < b^2$, então $b > a$ ou $b < -a$.

Sugestão: Observe-se que $a^2 < b^2 \Rightarrow 0 < b^2 - a^2$ e use os resultados dos Exercícios 1.2.1(a) e 2.4.1(f).

(c) Se no item (b) acima acrescenta-se a condição $b \geqslant 0$, então $a < b$.

Sugestão: Use redução ao absurdo. Quando considerar $a > b(\geqslant 0)$ use o item (a) acima.

(d) O que acontece no item (b) acima se $a \geqslant 0$ sem nenhuma condição sobre b?

Sugestão: Considerar, por exemplo, os casos $a = 5$ e $b = \pm 10$. ♣

2.4.4 Exercício: Sejam $a, b \in F$ com $a < b$. Prove que:

$$\{x \in F \,:\, a < x < b\} = \{\lambda a + (1 - \lambda) b \,:\, 0 < \lambda < 1\}.$$ ♣

2.5 Módulo ou Valor Absoluto

2.5.1 Exercício: Provar o seguinte:

(a) $|a| = 0$ se e somente se $a = 0$.

(b) $|a - b| = |b - a|$.

Sugestão: Use o Lema 2.2.2(a).

(c) $\left|a^2\right| = a^2$.

Sugestão: Use o Exercício 2.4.2(a).

(d) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

Sugestão: Quando é positivo ou negativo o produto de dois números? Considere cada caso separadamente, usando o Exercício 2.4.1 itens (f) e (g), respectivamente.

(e) $|a|^2 = a^2$.

Sugestão: Use os itens (d) e (c) acima.

(f) Se $a \neq 0$, então $\left|\dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{1}{|a|}$.

Sugestão: Observe-se que $\dfrac{1}{a}\,a = 1$ e use os itens (a) e (d) acima.

(g) Se $b \neq 0$, então $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

Sugestão: Isso é consequência direta de (d) e (f). ♣

2.5.2 Exercício: Prove que $a^2 < b^2 \iff |a| < |b|$.

Este exercício é uma espécie de continuação do Exercício 2.4.3. Para a parte ($\Rightarrow$) use o critério do Lema 2.2.3. Esse critério envolve provar duas desigualdades; para tanto, use os itens (a) e (b) do Exercício 2.4.3 apropriadamente. A parte ($\Leftarrow$) é consequência direta do Exercício 2.4.3(a). ♣

2.5.3 Exercício: Decida se a seguinte fórmula bem formada:

$$|a| < |b| \iff a < b \ \vee \ b < -a$$

é um teorema ou não.

Sugestão: Para provar que *não* é um teorema basta exibir um contra-exemplo. Por outro lado, provar que a fórmula é um teorema consiste em fornecer uma demostração da mesma e, para tanto, devem ser provadas as implicações nos dois sentidos. Tanto em um caso como no outro, é oportuno observar que a parte ($\Rightarrow$) é verdadeira. Com efeito, se $b \geqslant 0$, então $b = |b| > |a| \geqslant a$. Por outro lado, se $b < 0$, tem-se $|a| < |b| = -b \Rightarrow -(-b) < a < -b \Rightarrow a < -b \Rightarrow b < -a$. ♣

2.5.4 Exercício: Expressão para o máximo e o mínimo

O máximo de dois números x e y denota-se por $\max(x, y)$. Assim, por exemplo:

$$\max(-1, 3) = \max(3, 3) = 3;$$
$$\max(-1, -4) = \max(-4, -1) = -1.$$

O mínimo de x e y denota-se por $\min(x, y)$.

(a) Prove que:

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2}$$
$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}$$

(b) Derive uma fórmula para $\max(x, y, z)$ e $\min(x, y, z)$, usando, por exemplo, $\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z))$. ♣

2.6 A Desigualdade Triangular

2.6.1 Exercício: Usando a desigualdade triangular provar:

(a) $|a - b| \leqslant |a| + |b|$.

Sugestão: Lembre-se do Lema 2.2.2(a).

(b) $|a| - |b| \leqslant |a - b|$.

Sugestão: Observe-se que $|a| = |(a - b) + b|$ e use a desigualdade triangular.

(c) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

Sugestão: Pelo Lema 2.2.3 isso é equivalente a provar que:

$$-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b|\,.$$

Agora, a segunda desigualdade é o item (b) acima. A primeira desigualdade é equivalente a $|b| - |a| \leqslant |a - b|$, mas isso também é o item (b) acima com a e b intercambiados, o que pode ser feito pelo Exercício 2.5.1(b).

(d) $|a + b + c| \leqslant |a| + |b| + |c|$.

Sugestão: Escreva $a + b + c = (a + b) + c$ e use a desigualdade triangular duas vezes seguidas de maneira apropriada. ♣

2.7 Desigualdades com Formas Quadráticas

Seja F um corpo ordenado.

2.7.1 Exercício: Sejam $x, y \in F$. Prove que:

(a) Se n é ímpar e $x^n = y^n$, então $x = y$.

Sugestão: Reduza tudo ao caso $x, y > 0$. Prove depois que tanto $x < y$ como $x < y$ conduzem a uma contradição.

(b) Se n é par e $x^n = y^n$, então $x = y$ ou $x = -y$. ♣

2.7.2 Exercício: Sejam $x, y \in F$ *não simultaneamente nulos.*

(a) Usando o Exercício 1.2.1(b) e o Exercício 2.7.1(a) anterior, prove que deve ser $x^2+xy+y^2 \neq 0$.

(b) De fato, prove que deve ser $x^2 + xy + y^2 > 0$.

Sugestão: A suposição $x^2 + xy + y^2 \leqslant 0$ conduz a uma contradição. Com efeito, em primeiro lugar observe-se que se fosse $x = 0$ ou $y = 0$, digamos $x = 0$, para fixar idéias, se teria $y^2 = x^2 + xy + y^2 \leqslant 0$ o que é possível apenas se fosse também $y = 0$, contradizendo o fato de serem x e y não simultaneamente nulos. Portanto, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Isso tem duas consequências. Em primeiro lugar, segue que:

$$x^2 + y^2 > 0. \tag{2.7.1}$$

Em segundo lugar, tem-se que $xy \neq 0$. Mais especificamente, observando que:

$$0 \leqslant (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + xy + y^2 + xy \leqslant xy,$$

segue que $xy \geqslant 0$ e como $xy \neq 0$ deve ser:

$$xy > 0. \tag{2.7.2}$$

Agora, combinando as relações (2.7.1) e (2.7.2) segue que $x^2 + xy + y^2 > 0$ o que contradiz a suposiçao original. ♣

2.7.3 Exercício: Sejam $x, y \in F$ *não simultaneamente nulos.* Prove que:

(a) $4x^2 + 6xy + 4y^2 > 0$.

Sugestão: Por *reductio ad absurdum* suponha que $4x^2 + 6xy + 4y^2 \leqslant 0$, ou, equivalentemente $2x^2 + 3xy + 2y^2 \leqslant 0$, e reproduza *mutatis mutandi* a prova do item (b) do exercício anterior. Em algum ponto, será conveniente observar que:

$$0 \leqslant 2(x + y)^2 = 2x^2 + 4xy + 2y^2 = 2x^2 + 3xy + 2y^2 + xy \leqslant xy.$$

(b) $3x^2+5xy+3y^2 > 0$. Incidentalmente, observe-se que a combinação desta desigualdade com a do item (b) do exercício anterior fornece uma outra prova da relação do item (a) do presente exercício, pois a soma de dois números positivos deve ser positiva.

Sugestão: Por *reductio ad absurdum* suponha que $3x^2+5xy+3y^2 \leqslant 0$ e repita *mutatis mutandi* a prova do item (b) do exercício anterior. Em algum ponto, será conveniente observar que:

$$0 \leqslant 3(x+y)^2 = 3x^2+6xy+3y^2 = 3x^2+5xy+3y^2+xy \leqslant xy. \qquad \clubsuit$$

2.7.4 Exercício: Sejam $x, y \in F$ *não simultaneamente nulos.*

(a) Usando o Exercício 1.2.2 com $n = 5$ e o Exercício 2.7.1(a) prove que deve ser $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \neq 0$.

(b) De fato, prove que deve ser $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > 0$.

Sugestão: A suposição $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \leqslant 0$ conduz a uma contradição. Com efeito, em primeiro lugar observe-se que se fosse $x = 0$ ou $y = 0$, digamos $x = 0$, para fixar idéias, teria-se $y^4 = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \leqslant 0$ o que é possível apenas se fosse também $y = 0$, contradizendo o fato de serem x e y não simultaneamente nulos. Portanto, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Isso tem duas consequências. Em primeiro lugar, segue que:

$$x^4 + y^4 > 0. \tag{2.7.3}$$

Em segundo lugar, tem-se que $xy \neq 0$. Mais especificamente, observando que:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ &= x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + (3x^3y + 5x^2y^2 + 3xy^3) \leqslant 3x^3y + 5x^2y^2 + 3xy^3 \\ &\qquad = xy(3x^2 + 5xy + 3y^2), \end{aligned}$$

e que, pelo Exercício 2.7.3(b), sabe-se que $(3x^2 + 5xy + 3y^2) > 0$, segue que $xy \geqslant 0$ e como $xy \neq 0$ deve ser:

$$xy > 0. \tag{2.7.4}$$

Da relação (2.7.4) e o Exercício 2.7.2(b) segue que:

$$xy(x^2 + xy + y^2) > 0. \tag{2.7.5}$$

Finalmente, combinando as relações (2.7.3) e (2.7.5) obtem-se a contradição desejada:

$$0 < x^4 + xy(x^2 + xy + y^2) + y^4 = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4. \qquad \clubsuit$$

2.8 Quando $(x + y)^n = x^n + y^n$?

2.8.1 Exercício: Prove as seguintes identidades em F:

(a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

(b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Sugestão: Este é um caso particular do item anterior.

(c) Prove que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ somente quando $a = 0$ ou $b = 0$. ♣

2.8.2 Exercício: Prove as seguintes identidades em F:

(a) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

(b) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Sugestão: Este é um caso particular do item anterior.

(c) Prove que $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ somente quando $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = -b$. ♣

2.8.3 Exercício: Prove as seguintes identidades em F:

(a) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

(b) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Sugestão: Este é um caso particular do item anterior.

(c) Determine quando $(a+b)^4 = a^4 + b^4$.

Sugestão: Observe-se que:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = a^4 + ab(4a^2 + 6ab + 4b^2) + b^4,$$

e use o resultado do Exercício 2.7.3(a). ♣

2.8.4 Exercício: Prove as seguintes identidades em F:

(a) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

(b) $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

Sugestão: Este é um caso particular do item anterior.

(c) Determine quando $(a+b)^5 = a^5 + b^5$.

Sugestão: Em tal caso, não resulta nem um pouco difícil provar que:

$$a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 = 0,$$

quando $ab \neq 0$. Esto implica que $(a+b)^3 = a^2b + ab^2 = ab(a+b)$. Portanto, se fosse $(a+b) \neq 0$ se teria $(a+b)^2 = ab$, ou seja, $a^2 + ab + b^2 = 0$, contradizendo o resultado do Exercício 2.7.2(b). ♣

Agora há condições de fazer uma boa conjetura de quando $(x+y)^n = x^n + y^n$. Uma prova será fornecida no Capítulo 23.

2.9 A Função Quadrática $ax^2 + bx + c$

2.9.1 Exercício: Sejam $a, b, c \in F$, com $a \neq 0$.

(a) Prove "completando quadrados" que:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2 - \left(b^2 - 4ac\right)\right]$$

(b) Em particular, se $b^2 - 4ac < 0$ então $ax^2 + bx + c > 0$ para todo $x \in F$, quando $a > 0$.

(c) Use o item anterior para fornecer uma outra prova de que se x e y não são simultaneamente nulos tem-se $x^2 + xy + y^2 > 0$.

Sugestão: Se $y = 0$ então a relação é óbvia, pois em tal caso deve ser $x \neq 0$, resultando $x^2 > 0$. Se $y \neq 0$, então com $a = 1 > 0$, $b = y$ e $c = y^2$, tem-se $y^2 - 4y^2 = -3y^2 < 0$.

(d) Determine o valor mínimo de $ax^2 + bx + c$ quando $a > 0$.

(e) Seja $a > 0$. Prove que $ax^2 + bx + c > 0$ para todo $x \in F$ se e somente se $b^2 - 4ac < 0$.

Sugestão: Para a parte ($\Leftarrow$) use o item (b) anterior. Para a parte ($\Rightarrow$), observe-se que se fosse $b^2 - 4ac \geqslant 0$ então o valor mínimo do item (d) anterior é negativo ou nulo e portanto a identidade do enunciado deixa de ser válida para o x onde tal mínimo é atingido.

(f) Determine os valores de α tais que $x^2 + \alpha xy + y^2 > 0$ quando x e y não são simultaneamente nulos.

Sugestão: Use o item (e) anterior. ♣

2.10 A Desigualdade de Schwarz

Segundo Spivak [25], o fato que $a^2 \geqslant 0$ para todo $a \in F$, por mais elementar que possa parecer, é contudo a idéia fundamental na que se baseiam em última instância a maior parte das desigualdades. Uma das primeiras desigualdades famosas, com nome e sobrenome, é a **desigualdade de Schwarz**:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

As duas provas da desigualdade de Schwarz que se indicam nos seguintes exercícios têm apenas uma coisa em comum: ser baseadas no fato de que $a^2 \geqslant 0$, para todo $a \in F$.

2.10.1 Exercício: **(a)** Verifique primeiramente a seguinte identidade:

$$\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) = (a_1b_1 + a_2b_2)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2.$$

(b) Usando a identidade do item (a) anterior, prove a desigualdade de Schwarz.

(c) Como corolário da demonstração conclua que na desigualdade de Schwarz vale a igualdade se e somente se $b_1 = b_2 = 0$ ou existe $\lambda \in F$ tal que $a_1 = \lambda b_1$ e $a_2 = \lambda b_2$. ♣

2.10.2 Exercício: **(a)** Prove que se $a_1 = \lambda b_1$ e $a_2 = \lambda b_2$ para algum $\lambda \in F$, então vale a *igualdade* na desigualdade de Schwarz.

(b) Prove que se $b_1 = b_2 = 0$, então também vale a *igualdade* na desigualdade de Schwarz.

(c) Suponha agora que b_1 e b_2 não são simultaneamente nulos e que não existe nenhum $\lambda \in F$ tal que $a_1 = \lambda b_1$ e $a_2 = \lambda b_2$. Em tal caso tem-se:

$$0 < (\lambda b_1 - a_1)^2 + (\lambda b_2 - a_2)^2 = \lambda^2 \left(b_1^2 + b_2^2\right) - 2\lambda (a_1 b_1 + a_2 b_2) + \left(a_1^2 + a_2^2\right),$$

para todo $\lambda \in F$.

(d) Use agora o resultado do Exercício 2.9.1(e) para completar a prova da desigualdade de Schwarz.

(e) Como corolário da demonstração conclua que na desigualdade de Schwarz vale a igualdade se e somente se $b_1 = b_2 = 0$ ou existe $\lambda \in F$ tal que $a_1 = \lambda b_1$ e $a_2 = \lambda b_2$. ♣

A generalização da segunda prova para o caso de n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ é desenvolvida no Exercício 3.12.2. Se o leitor aceita sem demonstração a existência de *raízes quadradas*, fato que não será provado rigorosamente até o Capítulo 11, então poderá consultar ainda uma terceira demonstração da desigualdade de Schwarz pulando até o Exercício 11.5.2.

2.11 A Continuidade das Operações de Corpo

A presente seção foi tomada de Spivak [25]. Com relação às desigualdades haverá três fatos que terão crucial importância. Embora as demonstrações estarão no lugar apropriado do texto, uma tentativa pessoal de abordagem a esses problemas terá mais valor ilustrativo que o estudo detalhado de uma prova completamente elaborada. Os enunciados das proposições encerram alguns números estranhos, mas a sua mensagem básica é bem simples: se x está suficientemente próximo de x_0 e y está suficientemente próximo de y_0, então $x + y$ estará próximo de $x_0 + y_0$, como também xy estará próximo de $x_0 y_0$ e $1/y$ próximo de $1/y_0$.

2.11.1 Exercício: Prove que o seguinte par de desigualdades:

$$|x - x_0| < \epsilon/2,$$
$$|y - y_0| < \epsilon/2,$$

implica o seguinte novo par de desigualdades:

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \epsilon,$$
$$|(x - y) - (x_0 - y_0)| < \epsilon.$$

♣

2.11.2 Exercício: Prove que se:

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\epsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right) \qquad \text{e} \qquad |y - y_0| < \frac{\epsilon}{2(|x_0|+1)},$$

então $|xy - x_0y_0| < \epsilon$. ♣

2.11.3 Exercício: Prove que se $y_0 \neq 0$ e:

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\epsilon\,|y_0|^2}{2}\right),$$

então $y \neq 0$ e:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \epsilon.$$ ♣

2.11.4 Exercício: Substituir os sinais de interrogação do seguinte enunciado por expressões encerrando ϵ, x_0 e y_0 de maneira tal que a conclusão seja válida:

Se $y_0 \neq 0$ e $|x - x_0| < ?$ e $|y - y_0| < ?$, então $y \neq 0$ e:

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| < \epsilon.$$

Sugestão: O problema segue trivialmente dos Exercícios 2.11.2 e 2.11.3. Observe que $x/y = x(1/y)$. O ponto aquí consiste em não se confundir: decida qual dos resultados haverá de se aplicar primeiro e não fique com medo se a solução parecer improvável. ♣

2.12 Relax

2.12.1 Exercício: Determinar o conjunto solução para as seguintes equações. Ou seja, determine em cada caso o conjunto dos $x \in F$ que satisfazem cada uma das seguintes relações. Observe-se que os primeiros dois casos já foram considerados no Exercício 1.3.6(b,c) respectivamente, e o problema na presente seção consiste em determinar porque *não* podem existir *outras* soluções além das indicadas nas respectivas respostas.

(a) $(x-1)(x+\lambda) = 0$. R: $\{1, -\lambda\}$.

(b) $x^2 - 4 = 0$. R: $\{-2, 2\}$.

(c) $3(x^2 + x) = -5 + 2x^2 - x$. R: $\emptyset$. ♣

2.12.2 Exercício: Determine o conjunto dos elementos $x \in F$ que satisfazem as seguintes (in)equações e represente-o graficamente.

(a) $10 + 2(3 - 4x) < 2x - 6$.

(b) $3 - 2x \leqslant 5x + 9 < 16$.

(c) $(x + \sqrt{2})(x - 5) < 0$.

(d) $x^2 + 3x > -2$. ♣

2.12.3 Exercício: Determine em cada caso, o conjunto de pontos em F que se encontram a distância menor que 6 com relação a:

(a) 0. R: $\{x \in F : |x| < 6\} = \{x \in F : -6 < x < 6\}$.

(b) -1. R: $\{x \in F : |x + 1| < 6\} = \{x \in F : -7 < x < 5\}$.

(c) 5. R: $\{x \in F : |x - 5| < 6\} = \{x \in F : -1 < x < 11\}$. ♣

2.12.4 Exercício: **(a)** Está -4 mais próximo de 1 ou de -10?
R: De 1, pois $|-4 - 1| = 5 < 6 = |-4 - (-10)|$.

(b) Está -78 mais próximo de 68 do que -14 está de -100?
R: Não, pois $|-78 - 68| = 146 > 86 = |-14 - (-100)|$. ♣

2.12.5 Exercício: Determinar o conjunto solução das seguintes relações:

(a) $|2x + 5| = 3$. R: $\{-1, -4\}$.

(b) $|2x - 3| < 5/3$. R: $\{2/3 < x < 7/3\}$.

(c) $|1 - 2x| > 2$. R: $\{-1/2 \leqslant x \leqslant 3/2\}^{\mathsf{C}} = \{x < -1/2\} \cup \{3/2 < x\}$.

(d) $|-x + 4| = |3 + 2x|$. R: $\{-7, 1/3\}$. ♣

Capítulo 3

Princípio de Indução

O Tao gera o Um.
O Um gera o Dois.
O Dois gera o Três.
O Três gera todas as coisas.

Lao Tzu [1]

3.1 Conjuntos Indutivos

3.1.1 Definição: Um conjunto $A \subseteq F$ é dito **indutivo** se:

1. $1 \in A$;

2. $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$. ♣

3.1.2 Exemplo: **(a)** O corpo F é indutivo.

(b) O conjunto P de elementos "positivos" no corpo F, é indutivo.

(c) Seja $r \in F$ tal que $0 < r < 1$. Então o conjunto $A_r := \{x \in F \,:\, x > 0 \wedge x \neq r\}$ é indutivo. Observe-se que $r \notin A_r$. De fato, A_r difere de P do item (b) precisamente na exclusão de um único ponto, a saber, o r.

(d) Se A e B são indutivos, então $A \cap B$ também é.

(e) A interseção de todos os sub-conjuntos indutivos de F,

$$\bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ A \text{ indutivo}}} A,$$

é um conjunto indutivo. De fato, é o menor conjunto, com relação à inclusão, contido em F com essa propridade. ♣

[1] [30, XLII].

3.2 Números Naturais

3.2.1 Definição: O conjunto de **números naturais** é definido como a interseção de todos os sub-conjuntos indutivos de F, sendo denotado por:

$$\mathbb{N}_F := \bigcap_{\substack{A \subseteq F \\ A \,\text{indutivo}}} A,$$

ou simplesmente $\mathbb{N}$ quando não houver lugar a equívoco. ♣

3.2.2 Observação: **(a)** $\mathbb{N}_F$ é indutivo. De fato, é o menor conjunto, com relação à inclusão, com tal propriedade. Vide Exemplo 3.1.2(e).

(b) Em particular, $\mathbb{N}_F$ não possui sub-conjuntos indutivos *próprios*. Com efeito se existir A indutivo com $A \subseteq \mathbb{N}_F$, então $\mathbb{N}_F \subseteq A$ pela definição de $\mathbb{N}_F$ e o fato de A ser indutivo. Portanto, $A \subseteq \mathbb{N}_F \subseteq A$, de onde $A = \mathbb{N}_F$.

(c) $\mathbb{N}_F \geqslant 1$, pois se $1 > r \in \mathbb{N}_F$, então r pertenceria a todo conjunto indutivo mas $r \notin A_r$ do Exemplo 3.1.2(c). ♣

3.2.3 Lema: *$\forall\, k \in \mathbb{N}_F\, \{x \in F \,:\, k < x < k+1\} \cap \mathbb{N}_F = \emptyset$. Ou seja, não existem naturais entre os naturais k e $k+1$.* □

Demonstração: Se $k \in \mathbb{N}_F$ então $k+1 \in \mathbb{N}_F$, pela Observação 3.2.2(a). Seja agora $s \in F$ tal que $k < s < k+1$. O conjunto $A_{k,s}$ definido por:

$$A_{k,s} := \{x \in F \,:\, x > 0 \wedge x \notin \{s-k, s-k+1, \ldots, s-1, s\}\},$$

é inductivo e $s \notin A_{k,s}$. Portanto, s não pode pertencer à interseção de todos os tais conjuntos, ou seja, $\mathbb{N}_F$. ∎

3.3 O Princípio de Indução e Equivalentes

Seja F corpo ordenado. Considere as seguintes condições sobre um sub-conjunto $B \subseteq F$:

3.3.1 Princípio da Boa Ordenação (PBO): *Todo sub-conjunto não vazio de B possui um elemento mínimo. Ou seja:*

$$\emptyset \neq A \subseteq B \;\Rightarrow\; \exists\, m \in A \,:\, m \leqslant n, \;\; \forall n \in A.$$ □

3.3.2 Princípio de Indução Completa (PIC): *Se $A \subseteq B$ satisfaz:*

1. $1 \in A$;

2. $\{1, 2, \ldots, n\} \subset A \Rightarrow n + 1 \in A$;

então $A = B$. ☐

3.3.3 Princípio de Indução (PI): *O conjunto* B *não possui sub-conjuntos indutivos próprios. Ou seja, se* $A \subseteq B$ *satisfaz:*

1. $1 \in A$,

2. $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$;

então $A = B$. ☐

3.3.4 Proposição: *Considere* $B = \mathbb{N}_F$. *Então:*

(a) *As três condições acima, PBO, PIC e PI, respectivamente, são todas equivalentes.*

(b) $\mathbb{N}_F$ *satisfaz PI e portanto também PBO e PIC.* ☐

Demonstração: O item (b) do enunciado é simples consequência da Observação 3.2.2 e do item (a). Portanto, a prova do resultado será focalizada no item (a).

(PBO $\Rightarrow$ PIC). Seja $A \subseteq B$ satisfazendo 3.3.2(1,2). Por *reductio ad absurdum*, suponha que $A \neq B$. Em tal caso, o conjunto C definido como:

$$C := B - A :=: B \setminus A := B \cap A^c,$$

é não vazio e está contido em B, ou seja, $\emptyset \neq C \subseteq B$. Portanto, o PBO implica que existe m menor elemento de C. Agora, deve ser $m > 1$, pois $1 \in A$. Também, como m é o menor elemento em B que não pertence a A, deve ser $\{1, 2, 3, 4, \ldots, m - 1\} \subset A$. Mas então, por 3.3.1(2), teria-se que $m \in A$, obtendo-se uma contradição. Observe que este é o único ponto na prova da parte 1 onde é utilizada a hipótese $B = \mathbb{N}_F$.

(PIC $\Rightarrow$ PI). Seja $A \subseteq B$ satisfazendo 3.3.3(1,2). Observe que 3.3.3(1) implica 3.3.2(1). Também 3.3.3(2) implica 3.3.2(2), pois $\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq A \Rightarrow n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$. Ou seja, 3.3.3(1,2) implica 3.3.2(1,2) e, pelo PIC tem-se $A = B$.

(PI $\Rightarrow$ PBO). Seja $\emptyset \neq A \subseteq B$. Por *reductio ad absurdum*, suponha-se que A não possua elemento mínimo. Considere o conjunto C definido como:

$$C := \{k \in B \,:\, 1, 2, \ldots, k \notin A\}.$$

Observe que $C \subseteq B$.

<u>Afirmação 1</u>: $1 \in C$. $\triangledown$

Com efeito, pois, caso contrário, $1 \in A$ e então A teria elemento mínimo, a saber: 1. $\blacktriangledown$

<u>Afirmação 2</u>: $k \in C \Rightarrow k + 1 \in C$. $\triangledown$

Com efeito, por *reductio ad absurdum*, suponha que $k \in C$, mas $k+1 \notin C$. Observe que $k \in C \Rightarrow 1, 2, \ldots, k \notin A$ e portanto $k+1 \notin C \Rightarrow k+1 \in A$. Portanto, A teria elemento mínimo, a saber: $k+1$. ▼

Portanto, pelas Afirmações 1 e 2 e o PI, tem-se que $C = B \Rightarrow 1, 2, \ldots, n \notin A$, $\forall n \in B \Rightarrow A = \emptyset$, absurdo. ∎

Exercícios para o Capítulo 3

3.4 Paridade

Um número natural $n \in \mathbb{N}$ é denominado **par** se $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ ou **ímpar** se $n = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.4.1 Exercício: Prove que todo número natural n é ou par ou ímpar.

Sugestão: use indução em n. ♣

3.4.2 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$. Então:

(a) n par $\Rightarrow$ n^2 par.

(b) n ímpar $\Rightarrow$ n^2 ímpar.

(c) n^2 par $\Rightarrow$ n par.

(d) n^2 ímpar $\Rightarrow$ n ímpar. ♣

3.4.3 Exercício: Prove que n é ímpar se e somente se $n = 2k - 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. ♣

3.5 Números Naturais e o Princípio de Indução

3.5.1 Exercício: **Soma Geométrica de Razão r**

(a) Demostrar por indução que:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

se $r \neq 1$. Observe-se que no caso $r = 1$, o cáclulo da soma certamente não representa problema nenhum.

(b) Deduzir este resultado escrevendo $S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$, multiplicando esta equação por r e eliminando S_n entre as duas equações. ♣

3.5.2 Exercício: A **seqüência de Fibonacci** $a_1, a_2, a_3, \ldots$ define-se como segue:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1,\\
a_2 &= 1,\\
a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{para } n \geqslant 3.
\end{aligned}
$$

Esta seqüência, cujos primeiros termos são $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, foi considerada no ocidente primeiramente por Leonardo de Pisa, ou Leonardo Pisano, também conhecido como Fibonacci, *fillius* de Bonacci, (c. 1175-1250). Conta a lenda, que Fibonacci houve de considerar um suposto problema de coelhos. Fibonacci supôs que um casal de coelhos procriava um novo casal a cada mês e que após dois meses cada novo casal comportava-se da mesma maneira. O número a_n de casais nascidos no n-ésimo mês é $a_{n-1} + a_{n-2}$, dado que nasce um casal por cada casal nascido no mês anterior e, além disso, cada casal nascido dois meses atrás produz agora um novo casal. Resulta verdadeiramente surprendente o número de resultados interessantes relacionados com esta seqüência, até o ponto de existir uma Associação Fibonacci que publica uma revista, *The Fibonacci Quaterly*. Prove que:

$$
a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.
$$

♣

3.5.3 Exercício: Explique qual é o *erro* na seguinte "demonstração" por indução:

Proposição: *Dado um conjunto de n pessoas quaisquer, se pelo menos uma delas for loira, então todas elas são loiras.* $\square$

Demonstração: A proposição é evidentemente certa para $n = 1$. Para ilustrar a validade do paso indutivo, considere a passagem do caso $n = 3$ para o caso $n = 4$. Para tanto, suponha que a proposição é verdadeira para $n = 3$ e sejam P_1, P_2, P_3, P_4 quatro pessoas tais que pelo menos uma delas é loira, digamos, P_1. Considerando P_1, P_2, P_3 conjuntamente e fazendo uso do fato que a proposição é verdadeira para $n = 3$, resulta que também P_2 e P_3 são loiras. Repetindo esse mesmo processo mas agora com P_1, P_2, P_4, encontra-se analogamente que P_4 é loira. Portanto, as quatro são loiras. Um raciocínio análogo permite a passagem de k para $k+1$ no caso geral. $\blacksquare$

Corolário: *Toda pessoa é loira.* $\square$

Demonstração: Dado que existe pelo menos uma pessoa loira, pode-se aplicar o resultado precedente ao conjunto formado por todas as pessoas. $\blacksquare$

Este exemplo foi adaptado de um outro devido a G. Polya [19], quem sugere ao leitor a verificação experimental da proposição, cf. [2, p. 45]. ♣

3.6 Somas de Potências de Números Naturais

3.6.1 Exercício: Demostrar por indução as seguintes fórmulas:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. ♣

3.6.2 Exercício: Encontrar uma fórmula para:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$. ♣

A fórmula para $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ pode ser deduzida como segue. Começa-se com a identidade:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Escrevendo esta fórmula para $k = 1, 2, \ldots, n$ e somando obtem-se:

$$\begin{array}{rl}
2^3 - 1^3 &= 3.1^2 + 3.1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3.2^2 + 3.2 + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3.3^2 + 3.3 + 1 \\
&\vdots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + \cdots + n) + n.$$

Assim, é possível encontrar $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ se já se conhece $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, que, pela sua vez, poderia se deduzir de maneira parecida.

3.6.3 Exercício: Utilizar o método acima descrito para encontrar:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$. ♣

3.7 Provas por Indução um Tanto Não-Ortodoxas

3.7.1 Exercício: Sejam $a, b \geqslant 0$. Prove que:

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 .$$

Sugestão: Observe que $0 \leqslant (a-b)^2$ e desenvolva o quadrado. ♣

3.7.2 Exercício: Sejam agora n números não-negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$. Considere a relação $\mathrm{P}(n)$ definida como:

$$a_1\, a_2 \ldots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n .$$

Observe-se que o resultado do exercício anterior constitui na verdade uma prova de $\mathrm{P}(2)$.

(a) Prove que $\mathrm{P}(2) \wedge \mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(2n)$. Ou seja, se as relações $\mathrm{P}(2)$ e $\mathrm{P}(n)$ são simultaneamente válidas, então a relação $\mathrm{P}(2n)$ também é válida.

(b) Prove que $\mathrm{P}(n)$ implica $\mathrm{P}(n-1)$.

Sugestão: aplique $\mathrm{P}(n)$ aos n números $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, A_{n-1}$, onde:

$$A_{n-1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}.$$

(c) Prove que $\mathrm{P}(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: O caso $n = 1$ é trivialmente válido e o caso $n = 2$ é o exercício anterior. Para $n > 2$ use indução em n, mas observe que quase tudo o trabalho já foi feito nos itens (a) e (b). Agora é só organizar isso da maneira apropriada. Considere os casos n par e n ímpar separadamente. ♣

3.7.3 Exercício: Este exercício fornece uma prova alternativa da relação $\mathrm{P}(n)$ do Exercício anterior.

(a) Prove que $\mathrm{P}(2^k)$ vale para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sugestão: O caso $k = 1$ corresponde ao Exercício 3.7.1. Para $k > 1$ use indução em k, mas não se confunda: do caso 2^k deve-se passar para $2^{k+1} = 2.2^k$.

(b) Prove que $\mathrm{P}(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: dado $n \in \mathbb{N}$, seja k tal que $2^k > n$. Aplique agora o resultado do item (a) acima aos 2^k números:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \underbrace{A_n, A_n, \ldots, A_n}_{2^k - n \text{ vezes}};$$

onde $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$. ♣

Um importante corolário deste exercício será fornecido no Exercício 11.2.2.

3.8 Coeficientes Binomiais

Se $0 \leqslant k \leqslant n$, define-se o **coeficiente binomial** $\binom{n}{k}$ como:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad \text{se } k \neq 0 \text{ e } k \neq n;$$
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} := 1.$$

Observe-se que a segunda definição vira caso particular da primeira definindo $0! := 1$.

3.8.1 Exercício: O Triângulo de Pascal

(a) Demonstre que:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Sugestão: A prova segue diretamente da definição e não requer nenhum argumento de indução.

(b) Use o item (a) anterior para provar por indução (em n) que $\binom{n}{k}$ é sempre um número natural.

(c) Uma outra demostração de que $\binom{n}{k}$ é um número natural pode ser obtida observando que $\binom{n}{k}$ é o número de sub-conjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que têm exatamente k elementos cada um.

3.8.2 Exercício: O Teorema do Binômio

Demonstre o "teorema do binômio": se a e b são dois números quaisquer, então:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

3.8.3 Exercício: Use o Teorema do Binômio do exercício anterior para provar as seguintes identidades:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0.$

(c) $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ ímpar}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$ ♣

3.9 Para uma Estimativa do Número e

3.9.1 Exercício: Prove que $2^n < n!$ se e somente se $n \geqslant 4$.

Sugestão: Para a parte ($\Leftarrow$) use indução. Para a parte ($\Rightarrow$) verifique a relação entre os valores de 2^k e $k!$ para $k = 0, 1, 2, 3$. ♣

3.9.2 Exercício: Usando o Teorema do Binômio, prove que:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\prod_{r=1}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right)\right].\end{aligned}$$

♣

3.9.3 Exercício: Verfique que para $\mathbb{N} \ni n \geqslant 4$ tem-se:

$$2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 - \frac{5}{24} - \frac{1}{2^n}.$$

Sugestão: Usando os dois exercícios anteriores, observe-se que:

$$\begin{aligned}&2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = 1 + 1 + \frac{n-1}{2n} < 1 + 1 + \frac{n-1}{2n} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\prod_{r=1}^{k-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right)\right] \\ &\qquad < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k}.\end{aligned}$$

A utilização da relação deste exercício para obter uma estimativa do número e será explorada em capítulos posteriores. ♣

3.10 Para uma Prova da Irracionalidade de e^r com $0 \neq r \in \mathbb{Q}$

3.10.1 Exercício: Prove por indução que:

(a) $2^n \geqslant n^2$, para todo $n > 3$.

(b) $2^n > n^2$, para todo $n > 4$.

A prova dos dois itens é basicamente a mesma, com exceção de um "pequeno detalhe". ♣

3.10.2 Exercício: Prove que dado qualquer número real $a \in \mathbb{R}$ sempre existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > a$.

Sugestão: como $\mathbb{R}$ é arquimediano, dado $a \in \mathbb{R}$ sempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > a$. Seja então $k = \max\{4, n\}$. Então, pelo item (a) do exercício anterior tem-se: $2^k \geqslant k^2 > k \geqslant n > a$. Observe-se que também poderia ter sido usado o item (b) do exercício anterior, escolhendo neste caso $k = \max\{5, n\}$. ♣

3.10.3 Exercício: Seja $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 2a$. Prove que:

$$\frac{a^{n+k}}{(n+k)!} < \frac{1}{2^k}\frac{a^n}{n!}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Sugestão: use indução em k. ♣

3.10.4 Exercício: Seja $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. Prove que para todo $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a^m}{m!} < \epsilon.$$

Sugestão: pela arquimedianeidade de $\mathbb{R}$ sempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 2a$. Pelo Exercício 3.10.2, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^k > \dfrac{a^n}{n!\,\epsilon}$ e pelo exercício anterior tem-se:

$$\frac{a^{n+k}}{(n+k)!} < \frac{1}{2^k}\frac{a^n}{n!} < \epsilon.$$

Assim, basta escolher $m \geqslant n + k$. ♣

3.11 Algumas Relações Importantes

3.11.1 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$. Então:

(a) Para cada $p \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}{p+1} < (n+1)^p.$$

(b) Para cada $p \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$(n+1)^{p+1} - 1 > n^{p+1}.$$

(c) Para cada $p \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} (k+1)^p.$$

Se em lugar de $p \in \mathbb{N}$ for permitido $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então a segunda desigualdade $<$ deve ser subtituída por $\leqslant$. ♣

3.12 A Desigualdade de Schwarz em $\mathbb{R}^n$

3.12.1 Exercício: Considere-se um conjunto de n números reais quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Prove que se $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ então deve ser $a_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Esta é a única prova por indução da presente seção. Observe-se de passagem que os casos $n = 1$ e $n = 2$ já foram considerados no Exercício 2.4.2, nos itens (b) e (c), respectivamente. De fato, o presente exercício fornece uma prova alternativa do Exercício 2.4.2(c), mas naquela altura as provas por indução eram desconhecidas. ♣

3.12.2 Exercício: A Desigualdade de Schwarz

Sejam agora $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ dois conjuntos de n números reais quaisquer. Então, vale a seguinte relação:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$ ♣

3.12.3 Exercício: Neste exercício será verificada uma condição necessária e suficiente para ter igualdade na Desigualdade de Schwarz.

(a) Suponha-se que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $b_i - \lambda a_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, ou tal que $a_i - \lambda b_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Então na Desigualdade de Schwarz vale, de fato, a *igualdade*.

(b) Reciprocamente, se na Desigualdade de Schwarz vale a igualdade, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $b_i - \lambda a_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, ou tal que $a_i - \lambda b_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Neste ponto será usado mais uma vez o resultado do exercício que abre a presente seção. ♣

Capítulo 4

Teorema Fundamental da Aritmética

Deus criou os números inteiros, todo o resto é obra do homem.
L. Kronecker[1]

4.1 Divisibilidade

O objetivo do presente capítulo consiste em provar o assim denominado *Teorema Fundamental da Aritmética*, que estabelece que todo número inteiro pode ser completamente fatorizado como produto de primos e de maneira esencialmente única.

Salvo menção explícita em contrário, todos os números deste capítulo são inteiros.

4.1.1 Definição: Seja $\mathbb{Z} \ni a \neq 0$. Se diz que a **divide** a um número inteiro $b \in \mathbb{Z}$ se existe algum $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ka$, o que se denota por $a \mid b$.

Se $a \mid b$, costuma-se dizer que a é um **divisor** de b, ou, igualmente, que b é um **múltiplo** de a. ♣

4.1.2 Lema: *Seja $\mathbb{Z} \ni a \neq 0$. Então:*

(a) $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$.

(b) $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$.

(c) $ac \mid bc \Rightarrow a \mid b$.

(d) *Se $a \mid b$ com $b \neq 0$, então $|a| \leqslant |b|$. Em particular, todo número inteiro* não nulo *possui uma quantidade* finita *de divisores.*

(e) $a \mid b \Rightarrow a \mid -b$.

(f) $a \mid b \iff a \mid |b|$.

[1] Vide nota 2 na p. 5.

(g) $a \mid b \Rightarrow -a \mid b.$

(h) $a \mid b \iff |a| \mid b.$ ◻

Demonstração: **(a)** Se $a \mid b$, então $b = ka$ e se $a \mid c$, então $c = la$. Portanto $b + c = ka + la = (k + l)a \Rightarrow a \mid (b + c)$.

(b) $a \mid b \Rightarrow b = ka \Rightarrow bc = kac = kca \Rightarrow a \mid bc$.

(c) Por hipótese, $ac \neq 0$. Portanto $c \neq 0$. Assim:

$$ac \mid bc \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : bc = kac \Rightarrow b = ka \Rightarrow a \mid b.$$

Observe-se que se fosse $b \neq ka$, então $b < ka$ ou $b > ka$. No primeiro caso, ou seja, $b < ka$, tem-se que $c \neq 0 \Rightarrow bc < kac$ ou $bc > kac$, o que contradiz $bc = kac$. Analogamente, $b > ka$ conduz a uma contradição. Portanto deve ser $b = ka$.

(d) Por hipótese, $a \neq 0$. Portanto $|a| > 0$. Se $a \mid b$, então $b = ka$. Assim:

$$b \neq 0 \Rightarrow k \neq 0 \Rightarrow |k| > 0 \Rightarrow |k| \geqslant 1 \text{ (pois } k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow |b| = |ak| = |a|\,|k| \geqslant |a| \Rightarrow |b| \geqslant |a|\,.$$

(e) $a \mid b \Rightarrow b = ka \Rightarrow -b = -ka = (-k)a \Rightarrow a \mid -b$.

(f) Para a parte ($\Rightarrow$) observe-se que $|b| = \pm b$. Portanto o resultado segue trivialmente do item (e) provado acima. Para a parte ($\Leftarrow$) observe-se que $|b| = \pm b$. Se $|b| = b$, então $a \mid |b| = b$. Se $|b| = -b$, então pelo item (e) anterior tem-se $a \mid |b| = -b \Rightarrow a \mid -(-b) = b$.

(g) $a \mid b \Rightarrow b = ka = (-k)(-a) \Rightarrow -a \mid b$.

(h) Para a parte ($\Rightarrow$) observe-se que $|a| = \pm a$. Portanto o resultado segue trivialmente do item (g) provado acima. Para a parte ($\Leftarrow$) observe-se que $|a| = \pm a$. Se $|a| = a$, então $a = |a| \mid b$. Se $|a| = -a$, então pelo item (g) anterior tem-se $-a = |a| \mid b \Rightarrow a = -(-a) \mid b$. ∎

4.2 O Algoritmo da Divisão

4.2.1 Proposição: *Seja $\mathbb{Z} \ni a > 0$ e $b \in \mathbb{Z}$. Então, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que:*

$$b = qa + r; \quad 0 \leqslant r < a.$$

Mais ainda, q e r estão unívocamente determinados por essa condição. ◻

Demonstração: Seja $A := \{n \in \mathbb{N} : na > b\}$. Observe-se que $A \subseteq \mathbb{N}$ e $A \neq \emptyset$. Com efeito:

<u>Caso $b = 0$:</u> Como $a > 0$ por hipótese, tem-se $1.a = a > 0 = b$. Portanto, $1 \in A$.

<u>Caso $b \neq 0$:</u> Como neste caso deve ser $|b| > 0$, tem-se $a > 0 \Rightarrow a \geqslant 1 \Rightarrow a\,|b| \geqslant |b| \geqslant b$. Portanto, $|b| \in A$.

Desta maneira, existe $\min A$. Seja então:

$$q := \min A - 1.$$

Observe-se que deve ser $qa \leqslant b$, pois caso contrário teria-se que $q \in A$, contradizendo o fato que $q < \min A$. Define-se:

$$r := b - qa \geqslant 0.$$

Com esta definição, obviamente $b = qa + r$. Além disso:

$$r - a = b - qa - a = b - (q+1)a = b - (\min A)a < 0 \Rightarrow r < a.$$

Isso prova a existência. Para provar a unicidade, suponha-se que existam $q_i, r_i \in \mathbb{Z}$ com $i = 1, 2$ satisfazendo:

$$b = q_i a + r_i,\ 0 \leqslant r_i < a;\ \forall i = 1, 2.$$

Em tal caso, teria-se que:

$$q_1 < q_2 \Rightarrow q_1 \leqslant q_2 - 1 \Rightarrow r_1 = b - q_1 a \geqslant b - (q_2 - 1)a = (b - q_2 a) + a = r_2 + a \geqslant a$$

o que contradiz o fato que $r_1 < a$. Analogamente, $q_2 < q_1$ conduz a uma contradição. Portanto, deve ser $q_1 = q_2 =: q$. Desta maneira, tem-se:

$$r_1 = b - q_1 a = b - qa = b - q_2 a = r_2. \qquad \blacksquare$$

4.3 Mínimo Múltiplo Comum

Sejam a e b inteiros *positivos*, $\mathbb{Z} \ni a > 0$ e $\mathbb{Z} \ni b > 0$. Observe-se que o conjunto definido por:

$$M(a,b) := \{n \in \mathbb{N} \,:\, a \mid n \wedge b \mid n\}$$

é um conjunto não-vazio de números naturais, pois $ab \in M(a,b)$. Com efeito, obviamente $a \mid ab$ e $b \mid ab$ e como $a > 0$ e $b > 0$, segue que $ab > 0$ e assim $ab \in \mathbb{N}$. Portanto, pela Proposição 3.3.4 segue que $M(a,b)$ possui um elemento mínimo. Isso motiva a definição a seguir.

4.3.1 Definição: Define-se o **mínimo múltiplo comum** de dois inteiros *positivos* a e b como o número natural $[a,b]$ dado pelo mínimo do conjunto $M(a,b)$. ♣

4.3.2 Lema: *Se $m \in M(a,b)$. Então, $[a,b] \mid m$. Ou seja, o mínimo múltiplo comum divide a todo múltiplo comum de a e b.* $\square$

Demonstração: Para simplificar a notação, seja $\alpha := [a,b]$. Observe-se que $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha > 0$. Portanto, a Proposição 4.2.1 implica na existência de $q, r \in \mathbb{Z}$, tais que $m = q\alpha + r$ com $0 \leqslant r < \alpha$. Observe-se que:

$$\alpha \in M \Rightarrow a \mid \alpha \Rightarrow a \mid \alpha q \Rightarrow a \mid -\alpha q.$$

Por outro lado, $m \in M \Rightarrow a \mid m$. Portanto, $a \mid m - \alpha q = r$. Analogamente, prova-se que $b \mid r$. Agora, se fosse $0 < r$, teria-se que $r \in M$, o que contradiz o fato que $r < \alpha = \min M$. Portanto, deve ser $r = 0$, ou seja $m = q\alpha$, o que significa que $\alpha \mid m$. $\blacksquare$

4.4 Máximo Divisor Comum

Para qualquer $a \in \mathbb{Z}$ define-se o conjunto $D(a)$ como:

$$D(a) := \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \mid a\}.$$

4.4.1 Lema: *Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então:*

(a) *$D(a)$ é sempre um conjunto não-vazio de números naturais.*

(b) *$D(0) = \mathbb{N}$.*

(c) *$D(a) = D(|a|)$.*

(d) *Se o inteiro a for não nulo, $\mathbb{Z} \ni a \neq 0$, então $\max\{n \in \mathbb{N} \,:\, n \in D(a)\} = |a|$.* □

Demonstração: **(a)** Observe-se que $1 \in D(a)$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

(b) Observe-se que $n \mid 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Segue trivialmente do Lema 4.1.2(f).

(d) Se $\mathbb{Z} \ni a \neq 0$, então, pelo Lema 4.1.2(d), $D(a)$ é um conjunto *finito*. Em tal caso, usando o item (c) anterior, tem-se:

$$\max\{n \in \mathbb{N} \,:\, n \in D(a)\} = \max\{n \in \mathbb{N} \,:\, n \in D(|a|)\} = |a|\,. \qquad \blacksquare$$

Observe-se que se a e b são inteiros *não simultaneamente nulos*, pelo Lema 4.1.2(d), segue que algum dos conjuntos $D(a)$ e/ou $D(b)$ deve ser finito. Portanto, o conjunto $D(a) \cap D(b)$ é finito. Isso motiva a definição a seguir.

4.4.2 Definição: Define-se o **máximo divisor comum** de dois inteiros não simultaneamente nulos a e b como o número natural (a, b) dado pelo máximo do conjunto $D(a) \cap D(b)$. ♣

4.4.3 Lema: *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos. Então:*

(a) *$d \in D(a) \cap D(b) \Rightarrow d \mid (a, b)$. Ou seja, todo divisor comum de a e b divide o máximo divisor comum.*

(b) *Se adicionalmente fossem $a > 0$ e $b > 0$, então $[a, b]\,(a, b) = ab$.* □

Demonstração: Para simplificar a notação, seja $\alpha := [a, b]$.

Caso $a > 0$, $b > 0$: Como obviamente $ab \in M(a, b)$, pelo Lema 4.3.2 tem-se que:

$$\alpha \mid ab \Rightarrow \frac{ab}{\alpha} =: k \in \mathbb{Z}.$$

Agora, se $d \in D(a) \cap D(b)$ tem-se:

$$d \in D(a) \Rightarrow d \mid a \Rightarrow \frac{a}{d} \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente:

$$d \in D(b) \Rightarrow d \mid b \Rightarrow \frac{b}{d} \in \mathbb{Z}.$$

Observe-se também que:

$$a \mid a \Rightarrow a \mid a\frac{b}{d} = \frac{ab}{d}, \qquad b \mid b \Rightarrow b \mid b\frac{a}{d} = \frac{ab}{d},$$

ou seja, $\frac{ab}{d} \in M(a,b)$. Portanto, usando o Lema 4.3.2 tem-se:

$$\alpha = [a,b] \mid \frac{ab}{d} \Rightarrow \mathbb{Z} \ni \frac{ab/d}{\alpha} = \frac{ab}{d\alpha} = \frac{ab/\alpha}{d} = \frac{k}{d} \Rightarrow d \mid k. \tag{4.4.1}$$

Por outro lado, tem-se:

$$b \mid \alpha \Rightarrow \frac{a}{k} = \frac{\alpha}{b} \in \mathbb{Z}, \qquad a \mid \alpha \Rightarrow \frac{b}{k} = \frac{\alpha}{a} \in \mathbb{Z},$$

ou seja, $k \mid a$ e $k \mid b$. Observe-se que $k > 0$ neste caso. Portanto, $k \in D(a) \cap D(b)$. Da relação (4.4.1) anterior tem-se:

$$d \in D(a) \cap D(b) \Rightarrow d \mid k \Rightarrow d = |d| \leqslant |k| = k \Rightarrow d \leqslant k.$$

Portanto $k = \max D(a) \cap D(b) = (a,b)$. Ou seja, $ab = \alpha k = [a,b](a,b)$. Isso prova o enunciado (b) do presente lema, como também (a) neste caso.

Caso $a \neq 0$, $b \neq 0$: Por um resultado anterior sabe-se que $D(a) = D(|a|)$ e $D(b) = D(|b|)$. Portanto:

$$(a,b) = (|a|, |b|).$$

Agora, $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| > 0 \wedge |b| > 0$. Portanto, usando o caso anterior já provado tem-se:

$$d \in D(a) \cap D(b) = D(|a|) \cap D(|b|) \Rightarrow d \mid (|a|, |b|) = (a,b).$$

Isso prova (a) nesse caso.

Caso $a \neq 0$ ou $b \neq 0$: Para fixar idéias, suponha-se que $a = 0$ e $b \neq 0$. Em tal caso, tem-se $D(a) = D(0) = \mathbb{N}$, e assim:

$$D(a) \cap D(b) = \mathbb{N} \cap D(b) = D(b) = D(|b|).$$

A relação acima tem as seguintes consequências. Em primeiro lugar:

$$(a,b) = \max D(a) \cap D(b) = \max D(|b|) = |b|,$$

pois $b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0$. Por outro lado:

$$d \in D(a) \cap D(b) = D(|b|) \Rightarrow d \mid |b| = (a,b) \Rightarrow d \mid (a,b),$$

o que prova (a) neste caso. ∎

4.4.4 Lema: *Se $a \mid bc$ e $(a,b)=1$, então $a \mid c$.* □

Demonstração: Observe-se que por hipótese, $a \neq 0$.

Caso $b=0$: Neste caso deve ser $a=\pm 1$ e, dessa maneira, $a \mid c$, trivialmente. Com efeito, tem-se:

$$\begin{aligned} D(b) = D(0) = \mathbb{N} \Rightarrow\ & D(a) \cap D(b) = D(a) \\ & \Rightarrow\ 1 = (a,b) = \max D(a) \cap D(b) = \max D(a) = |a| \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a \mid c. \end{aligned}$$

Caso $b \neq 0$: Seja $\alpha := [|a|, |b|]$. Observe-se que α está bem definido, pois $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow |a| > 0 \wedge |b| > 0$. Assim, utilizando o Lema 4.4.3, tem-se:

$$\alpha = \alpha 1 = \alpha(a,b) = [|a|, |b|]\,(a,b) = [|a|, |b|]\,(|a|, |b|) = |a| \cdot |b|\,.$$

Por outro lado, tem-se:

$$a \mid bc \Rightarrow |a| \mid bc \Rightarrow bc = k\,|a|\,,$$

ou seja, bc é múltiplo de $|a|$. Também, obviamente

$$b \mid b \Rightarrow b \mid bc \Rightarrow |b| \mid bc,$$

ou seja, bc também é múltiplo de $|b|$. Como bc é então um múltiplo comum de $|a|$ e $|b|$, pelo Lema 4.3.2, tem-se:

$$|ab| = |a| \cdot |b| = \alpha = [|a|, |b|] \mid bc \Rightarrow ab \mid bc \Rightarrow a \mid c.$$ ∎

4.4.5 Lema: *Seja $\mathbb{N} \ni n \geqslant 2$. Se $a \mid a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$ com $(a, a_i) = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$, então $a \mid a_n$.* □

Demonstração: Por indução no número de fatores n. O caso $n=2$ é o Lema 4.4.4. Se o resultado vale para $n-1$ fatores, então:

$$a \mid a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \ \wedge\ (a, a_i) = 1,\ \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n-1 \Rightarrow a \mid (a_1)(a_2 \cdots a_n) \ \wedge\ (a, a_1) = 1.$$

Assim, do Lema 4.4.4 decorre que:

$$a \mid \underbrace{a_2 \cdots a_n}_{n-1 \text{ fatores}} \wedge\ (a, a_i) = 1,\ \ \forall\, i = 2, \ldots, n-1.$$

Portanto, pela hipótese indutiva, tem-se que $a \mid a_n$. ∎

4.5 Números Primos

4.5.1 Definição: $\mathbb{Z} \ni a > 1$ é denominado **primo** se $D(a) = \{1, a\}$. Ou seja, um inteiro maior que 1 é primo se tiver apenas dois divisores positivos, a saber, 1 e a. ♣

Os primeiros números primos são $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

4.5.2 Lema: *Se $\mathbb{Z} \ni a > 1$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ primos tais que:*

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Ou seja, todo inteiro $a > 1$ pode ser escrito como um produto (finito) de números primos. □

Demonstração: Por indução em a. Se $a = 2$, o resultado é trivialmente válido, pois 2 já é primo. Seja $a > 2$ e suponha-se que o resultado é válido para $2, 3, \ldots, a-1$. Se a for primo, então o resultado é obviamente válido para a. Se a não for primo, então deve ser $a = a_1.a_2$, com $1 < a_1 < a$ e $1 < a_2 < a$. Portanto, $a_1, a_2 \in \{2, 3, \ldots, a-1\}$ e o resultado é válido para a_1 e a_2, em virtude da hipótese indutiva:

$$a_1 = p_1 \cdots p_n,$$
$$a_2 = q_1 \cdots q_m.$$

Portanto, $a = a_1.a_2 = p_1 \cdots p_n.q_1 \cdots q_m$ e o resultado vale para a. ∎

4.5.3 Lema: *Seja p primo. Se $p \nmid a$, então $(p, a) = 1$.* □

Demonstração: Se p é primo, então $D(p) = \{1, p\}$. Se p não divide a, então $p \notin D(a)$. Portanto, $D(p) \cap D(a) = \{1\}$ e obviamente $(p, a) = \max D(p) \cap D(a) = \max\{1\} = 1$. ∎

4.5.4 Lema: *Seja p primo. Se $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, então existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $p \mid a_{i_0}$.* □

Demonstração: Se p não divide a_i para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, então pelo Lema 4.5.3 teria-se que $(p, a_i) = 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$, e pelo Lema 4.4.5, teria-se que $p \mid a_n$. Portanto, bastaria tomar $i_0 = n$. ∎

4.5.5 Lema: *Sejam p e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ primos. Se $p \mid p_1 p_2 \cdots p_n$, então existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $p = p_{i_0}$.* □

Demonstração: Pelo Lema 4.5.4 existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $p \mid p_{i_0}$. Agora, como p_{i_0} é primo, deve ser $p = 1$ ou $p = p_{i_0}$. Mas se p é primo, deve ser $p > 1$. Portanto, $p = p_{i_0}$. ∎

4.5.6 Teorema (Fundamental da Aritmética): *Seja $\mathbb{Z} \ni a > 1$. Se*

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m,$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e $q_1, q_2, \ldots, q_m$ são todos primos com $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$ e $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_n$, então $m = n$ e $p_i = q_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots n$. Ou seja, a fatorização em primos do Lema 4.5.2 é única, salvo a ordem dos fatores. □

Demonstração: <u>Afirmação:</u> Se p é primo, a fatorização é única e dada pelo próprio p. Ou seja, $n = 1$ e $p_1 = p$. ▽

Com efeito, se $p = p_1 p_2 \cdots p_n$, então obviamente $p \mid p = p_1 p_2 \cdots p_n$. Portanto, do Lema 4.5.5 segue que $p = p_{i_0}$ para algum $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, que podemos supor, sem perda de generalidade, como $i_0 = 1$, trocando a ordem dos p_i's se for necessário. Ou seja, $p = p_1$. Portanto deve ser $n = 1$ e $p = p_1$. ▼

Seja agora $a > 1$. A prova da unicidade é por indução em a. Como $a = 2$ é primo, a unicidade segue da Afirmação anterior, e portanto o resultado é válido para $a = 2$. (Observe-se que $p_i > 1 \Rightarrow p_i \geqslant 2 \Rightarrow a = p_1 p_2 \cdots p_n \geqslant 2^n > 2$, onde a última desigualdade vale no caso $n > 1$. Portanto, deve ser $n = 1$.) Seja $a > 2$ e suponha-se que o resultado é válido para $2, 3, \ldots, a-1$. Se a for primo, então o resultado é válido para a pela Afirmação anterior. Seja então a não-primo e suponha-se que:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_n$$

com $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$ e $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots \leqslant q_n$. Pelo Lema 4.5.5 tem-se que:

$$q_1 \mid a = p_1 p_2 \cdots p_n \Rightarrow q_1 = p_{i_0}$$

para algum $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Analogamente:

$$p_1 \mid a = q_1 q_2 \cdots q_m \Rightarrow p_1 = q_{j_0}$$

para algum $j_0 \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Portanto, $p_1 \leqslant p_{i_0} = q_1 \leqslant q_{j_0} = p_1$, ou seja:

$$p_1 = q_1. \tag{4.5.1}$$

Agora, como $1 < p_1 < a$ e $p_1 \mid a$ tem-se:[2]

$$\frac{a}{p_1} = p_2 p_3 \cdots p_n = q_2 q_3 \cdots q_n = \frac{a}{q_1} < a,$$

pois $1 < q_1 \wedge a > 0 \Rightarrow a < a q_1 \Rightarrow \dfrac{a}{q_1} < a$. Portanto, a hipótese indutiva pode ser aplicada ao número $\dfrac{a}{p_1}$ (ou $\dfrac{a}{q_1}$, pois são iguais). Assim, dado que $\dfrac{a}{p_1} = p_2 \cdots p_n = q_2 \cdots q_n$, deve ser $n - 1 = m - 1$, ou seja, $n = m$ e $p_i = q_i$ para todo $i = 2, \ldots, n$, o seja, $p_i = q_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, por (4.5.1). ∎

[2]Observe-se que em geral seria $p_1 \leqslant a$, mas é $p_1 < a$, pois a não é primo, segundo suposição *ad hoc*.

Exercícios para o Capítulo 4

4.6 Existem Infinitos Primos

4.6.1 Exercício: Prove que existem infinitos números primos.

Sugestão: Por redução ao absurdo, começe supondo que existe um conjunto finito de primos, digamos $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ e considere-se o número $a := 1 + p_1 p_2 \cdots p_n$. Obviamente, $a > 1$. Por outro lado, a não pode ser um daqueles primos, pois segue da definição que $a > p_i$ para todo i. Finalmente, se a fosse um número composto, pelo Lema 4.5.2 deveria ser divisível por algum dos p_i's, digamos p_{i_0}. Mas então, como $p_{i_0} \mid a$ e obviamente $p_{i_0} \mid p_1 p_2 \cdots p_n$, pelo Lema 4.1.2(a,e), segue que p_{i_0} divide a $a - p_1 p_2 \cdots p_n = 1$. Então pelo Lema 4.1.2(d) deveria ser $p_{i_0} \leqslant 1$, o que contradiz o fato de ser $p_{i_0} > 1$, pois p_{i_0} é primo. Este argumento chegou até nós através de Euclides. In: *Elementos*, IX, 20, apud [25]. ♣

4.7 Números de Fermat

Os números da forma:

$$F_n = 2^{2^n} + 1,$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$, são denominados **números de Fermat**.

4.7.1 Exercício: **(a)** Calcule os primeiros cinco números de Fermat $F_0, F_1, \ldots, F_4$.

(b) Prove que, para $n \geqslant 1$, tais números satisfazem a seguinte relação de recorrência:

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2.$$

(c) Deduça da relação anterior que $(F_n, F_m) = 1$ se $n \neq m$. Ou seja, dois quaisquer números de Fermat diferentes não possuem divisores comuns (exceto o número 1). Essa propriedade também costuma ser expressada dizendo que tais números são **primos entre si** ou **co-primos**.

Sugestão: Por redução ao absurdo, suponha a existência de um divisor comum d. Usando a relação de recorrência do item anterior verifique que deve ser $d = 2$ ou $d = 1$, observando que o primeiro caso é impossível pela definição de Número de Fermat.

(d) Use o resultado do item (c) anterior para dar uma outra prova de que existem infinitos números primos. ♣

Capítulo 5

Incompleteza dos Racionais

5.1 Uma Prova de Irracionalidade

A insuficiência dos racionais para representar relações que aparecem ainda na geometria elementar marca uma época na história da Matemática antiga e data de aproximadamente vinte e cinco séculos, quando o renome do filósofo Pitágoras de Samos e da sua seita de seguidores percorria as ilhas do mar Egeu. A descoberta dos números irracionais atribui-se, mais especificamente, ao pitagórico Hippasus de Metapontum, nascido aproximadamente em 500 A.C. na Magna Græcia, quem parece ter desenvolvido uma prova, com argumentos principalmente geométricos, da irracionalidade da raiz quadrada de 2, na sua tentativa de representá-la como uma fração. Pitágoras acreditava no carater absoluto dos números inteiros. Ele não podia negar a existência de números irracionais pela via da lógica formal, mas a sua ilusória crença não poderia nunca aceitar a sua existência. Ante tão abrumadoras circunstâncias, ele não teve melhor idéia que condenar Hippasus à morte por afogamento. Assim, após este ter revelado a irracionalidade daquele número, os demais membros da seita pitagórica deram-lhe morte. Alega-se também que Hippasus foi um notável pioneiro da pesquisa experimental em acústica e o fenômeno da ressonância, mas pouquísimos dos seus trabalhos originais o sobreviveram.

5.1.1 Lema: *Não existe nenhum $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$.* $\square$

Demonstração: Por *reductio ad absurdum*, suponha-se que existe $\mathbb{Q} \ni p = \dfrac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, tal que $p^2 = 2$. Sem perda de generalidade pode-se supor que os inteiros m e n são *co-primos*, ou seja $(m, n) = 1$, cancelando os fatores primos comuns se for o caso, o que não altera o quociente. Observe-se que:

$$2 = p^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2,$$

ou seja, m^2 é par e, pelo Exercício 3.4.2(c), tem-se que m é par, digamos, $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Portanto:

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2,$$

ou seja, n^2 também deve ser par, e pelo Exercício 3.4.2(c), tem-se que n é par, digamos, $n = 2l$, para algum $l \in \mathbb{Z}$. Mas isso diz que 2 é um fator comum de m e n, o que contradiz a suposição original de que eram co-primos. ∎

5.1.2 Lema: *Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{Q}$ definidos respectivamente por:*

$$A := \{r \in \mathbb{Q} \,:\, 0 < r \ \wedge\ r^2 < 2\};$$
$$B := \{r \in \mathbb{Q} \,:\, 0 < r \ \wedge\ 2 < r^2\}.$$

Então:

(a) *Dado qualquer $p \in A$ existe $q \in A$ com $p < q$.*

(b) *Dado qualquer $p \in B$ existe $q \in B$ com $q < p$.* □

Demonstração: **(a)** Dado $p \in \mathbb{Q}$, seja h definido como:

$$h := \frac{2 - p^2}{2(2p+1)(p+1)^2}$$

Observe-se que $h \in \mathbb{Q}$ se $p \in \mathbb{Q}$.

Afirmação 1: Se $p \in A$, então $0 < h < 1$. ▽

Com efeito, observe-se que:

$$p \in A \Rightarrow p^2 < 2 \Rightarrow 2 - p^2 > 0.$$

Também:

$$p \in A \Rightarrow p > 0 \Rightarrow p + 1 > 1 > 0 \Rightarrow (p+1)^2 > (p+1) > 1 > 0. \tag{5.1.1}$$

Por outro lado:

$$p > 0 \Rightarrow 2p + 1 = p + p + 1 > p + 1 > 1 > 0.$$

Das três últimas relações decorre que $h > 0$. Agora, utilizando a segunda e terceira relações, além do fato que $p^2 > 0$, pois $p > 0 \Rightarrow p \neq 0$, tem-se:

$$\begin{aligned}(p+1)^2 > 1 &\Rightarrow (2p+1)(p+1)^2 > (2p+1) > 1 \\ &\Rightarrow p^2 + 2(2p+1)(p+1)^2 > 2(2p+1)(p+1)^2 > 2 \\ &\Rightarrow 2 - p^2 < 2(2p+1)(p+1)^2 \Rightarrow h < 1.\end{aligned}$$ ▼

Afirmação 2: Se $p \in A$, então $(2p+1)h < 2 - p^2$. ▽

Com efeito, da relação (5.1.1), além do fato que $2 - p^2 > 0$ se $p \in A$, tem-se:

$$\begin{aligned}(p+1)^2 > 1 &\Rightarrow 2(p+1)^2 > 2 > 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2(p+1)^2} < 1 \\ &\Rightarrow \frac{2-p^2}{2(p+1)^2} < 2 - p^2 \\ &\Rightarrow (2p+1)h = \frac{2-p^2}{2(p+1)^2} < 2 - p^2.\end{aligned}$$ ▼

Agora, seja $q := p + h \in \mathbb{Q}$. Observe-se que, pela primeira desigualdade na Afirmação 1, tem-se que $q - p = h > 0$, ou seja $p < q$. Tem-se também que:

$$\begin{aligned} q^2 &= (p+h)^2 \\ &= p^2 + 2ph + h^2 \\ &= p^2 + (2p+h)h \\ &< p^2 + (2p+1)h \\ &< p^2 + 2 - p^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ou seja, $q^2 < 2$. Finalmente, $p > 0 \ \wedge \ h > 0 \Rightarrow q = p + h > 0$. Portanto, $q \in A$.

(b) Seja, q definido como:

$$q := p - \frac{p^2 - 2}{2p} = \frac{2p^2 - p^2 + 2}{2p} = \frac{p^2 + 2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}.$$

Observe-se que $q > 0$, pois $p > 0 \Rightarrow 1/p > 0$ e $2 = 1 + 1 > 0 \Rightarrow 1/2 > 0 \Rightarrow p/2 > 0$, portanto $p/2 + 1/p > 0$. Observe-se igualmente que $q < p$, pois $p - q = (p^2 - 2)/2p > 0$, dado que $p \in B \Rightarrow p^2 > 2 \Rightarrow p^2 - 2 > 0$ e $p > 0 \wedge 2 > 0 \Rightarrow 2p > 0 \Rightarrow 1/2p > 0$. Ou seja:

$$0 < q < p.$$

Tem-se também:

$$q^2 = \left(p - \frac{p^2 - 2}{2p}\right)^2 = p^2 - 2p\,\frac{p^2 - 2}{2p} + \left(\frac{p^2 - 2}{2p}\right)^2 > p^2 - p^2 + 2 = 2.$$

Das duas últimas relações segue que $q \in B$ e $q < p$. ∎

Exercícios para o Capítulo 5

5.2 Números Racionais

5.2.1 Exercício: Densidade dos Racionais

(a) Prove que dado um número racional positivo $r > 0$, sempre existe um número racional t tal que $0 < t < r$.

Sugestão: Se $r = m/n$ com m e n inteiros positivos, então $t = m/(n+1)$ faz o serviço. De fato, $m/(n+k)$ também funciona, para todo $k \geqslant 1$.

(b) Prove que dados dois números racionais a e b com $a < b$ sempre existe um número racional c tal que $a < c < b$.

Sugestão: Em tal caso, $r = b - a$ é um número racional *positivo* e pode ser aplicado o item anterior. ♣

5.2.2 Exercício: Prova Alternativa do Lema 5.1.2

(a) Suponha-se que $m^2/n^2 < 2$. Prove que:

$$2 < \frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2}.$$

Além disso, em tal caso tem-se:

$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}.$$

(b) Prove as relações do item (a) anterior com todos os sinais de desigualdade virados ao contrário. Ou seja, suponha-se agora que $2 < m^2/n^2$ e prove que:

$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} < 2;$$

como assim também que:

$$2 - \frac{m^2}{n^2} < \frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2.$$

(c) Combinando os itens (a) e (b) acima, forneça uma outra prova do Lema 5.1.2. ♣

5.2.3 Exercício: Prove que para qualquer $a \in \mathbb{N}$, não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = a$, a menos que a já seja da forma $a = k^2$ para algum k inteiro.

Sugestão: Por redução ao absurdo, suponha $a = m^2/n^2$, sem perda de generalidade, com m, n co-primos, ou seja $(m, n) = 1$. Em tal caso, teria-se que $m^2 = an^2 = (an)n$, ou seja, $n \mid m^2$, de onde segue que $n \mid m$, pelo Lema 4.4.4. Como obviamente $n \mid n$, tem-se que n é um divisor comum de m e n, e portanto $n \mid (m, n) = 1$. Disso segue que $n = 1$, ou obteria-se uma contradição. ♣

5.3 Uma abordagem algorítmica

A raiz quadrada de 2, ou seja, $\sqrt{2}$ também costuma ser denominada **constante de Pitágoras**.

5.3.1 Exercício: Analisando a demonstração original do Lema 5.1.2(a), implemente um algoritmo para aproximar *por defeito* a constante de Pitágoras.

Sugestão: Partindo de algum racional $p < \sqrt{2}$, por exemplo $p = 1$, cada iteração do algoritmo deveria substituir:

$$p \;\to\; p + h \;=\; p + \frac{2 - p^2}{2(2p+1)(p+1)^2}.$$ ♣

5.3.2 Exercício: Analisando agora a demonstração original do Lema 5.1.2(b), implemente um algoritmo para aproximar *por excesso* a constante de Pitágoras.

Sugestão: Partindo agora de algum racional $p > \sqrt{2}$, por exemplo $p = 2$ ou $p = 3/2$, cada iteração do algoritmo deveria substituir:

$$p \;\to\; \frac{p}{2} + \frac{1}{p} \;=\; \frac{p^2 + 2}{2p}.$$ ♣

5.3.3 Exercício: Combine os dois algoritmos anteriores para fornecer também uma estimativa do erro na aproximação. Tal erro define-se como a diferença entre o valor aproximado e o valor exato. Para tanto, suponha que o valor exato é desconhecido. Por tal motivo trata-se apenas de uma *estimativa* do erro. Observe que se fosse possível determinar o erro de maneira exata, então o valor exato também poderia ser conhecido. ♣

5.3.4 Exercício: Para cada um dos algoritmos anteriores, compare a quantidade de iterações necessárias para atingir uma dada precisão arbitrária, ou seja, para fazer que o erro seja menor que algum valor arbitrário predeterminado. ♣

Incidentalmente, o resultado do exercício anterior não deveria constituir nenhuma supressa. Com efeito, a iteração do segundo algoritmo, baseado na prova do Lema 5.1.2(b), pode ser expressada alternativamente como:

$$p \to \frac{p}{2} + \frac{1}{p} = \frac{p^2+2}{2p} = p - \frac{p^2-2}{2p}.$$

O último termo na identidade acima evidencia a relação deste algoritmo com o *método de Newton* para aproximação de raízes de funções. Observe que a raiz da função $f(x) = x^2 - 2$ é precisamente a constante de Pitágoras.

5.3.5 Exercício: Usando as bibliotecas `BigInteger` e `BigDecimal` da linguagem de programação Java, modifique a implementação dos algoritmos anteriores para calcular a constante de Pitágoras com precisão arbitrária, incluindo a estimativa do erro. ♣

5.4 Raízes quadradas inteiras no Linux

No *kernel* Linux existe uma biblioteca de funções para calcular raízes inteiras aproximadas de números inteiros. Para obter uma cópia do código-fonte, em sistemas GNU/Linux ou de tipo UNIX em geral, poderia ser utilizado o seguinte comando:

```
wget -c https://cdn.kernel.org/pub/linux/kernel/v4.x/linux-4.4.4.tar.xz -O - | \
tar -xJvf - linux-4.4.4/lib/int_sqrt.c -O > int_sqrt.c
```

com as modificações do caso.

5.4.1 Exercício: Obtenha uma cópia do código-fonte como descrito acima.

(a) Estudando o código-fonte, determine qual é o algoritmo utilizado pelo programa para determinar a raiz quadrada.

(b) Justifique matematicamente a convergência do algoritmo.

(c) Que subsistemas do Linux utilizam essa biblioteca? Com que finalidade? ♣

5.4.2 Exercício: Com relação ao programa `int_sqrt.c` obtido no exercício anterior:

(a) Modifique tal programa para ser executado *stand-alone* no *userspace*, ou seja, de maneira independente fora do *kernel*.

(b) Compile e utilize o programa modificado para calcular a raiz quadrada de diversos números.

(c) Compare os resultados obtidos com o valor exato das raízes quadradas. ♣

5.4.3 Exercício: Com relação ao programa modificado no exercício anterior:

(a) Observe que para qualquer número $n > 2147395600$ a raiz quadrada calculada usando tal programa resulta sempre igual a 46341. Por quê?

(b) Modifique o programa para calcular raízes quadradas de números arbitrariamente grandes com a precisão esperada. ♣

Capítulo 6

Corpos Ordenados Arquimedianos

6.1 Corpos Ordenados Arquimedianos

6.1.1 Definição: Um corpo ordenado é dito **arquimediano** se para todo $b \in P$ e para todo $a \in F$ existe um inteiro positivo n tal que $nb > a$. ♣

6.1.2 Lema: *Seja F corpo ordenado arquimediano. Então, para todo $a, b \in F$ com $a < b$ existem inteiros m, n tais que $a < m/n < b$. Ou seja, em um corpo ordenado arquimediano os elementos racionais são densos.* □

Demonstração: Observe-se que:

$$a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow (b-a)^{-1} > 0.$$

Por outro lado, como F é arquimediano, dado $1 > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n = n1 > (b-a)^{-1} > 0$. Portanto:

$$0 < n^{-1} < b - a.$$

Considere-se o conjunto S definido como:

$$S := \{k \in \mathbb{Z} : kn^{-1} > a\}.$$

Observe-se que, como F é arquimediano, dado $n^{-1} > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $kn^{-1} > a$. Ou seja, $S \neq \emptyset$. Pelo mesmo argumento, existe também $p \in \mathbb{N}$ tal que $pn^{-1} > -a$. Em particular:

$$a > -(pn^{-1}) = (-p)n^{-1} \Rightarrow -p \notin S.$$

Também:

$$\begin{aligned} 0 < n^{-1} = 1.n^{-1} = (0+1).n^{-1} = (-p+p+1).n^{-1} = (-p)n^{-1} + (p+1)n^{-1} \\ \Rightarrow -(p+1)n^{-1} < (-p)n^{-1} < a \Rightarrow -(p+1) \notin S. \end{aligned}$$

Analogamente, prova-se que $-(p+r) \notin S$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Portanto, S é um conjunto não vazio de inteiros limitado inferiormente, no mínimo por $-p$. Desta maneira, o conjunto S deve ter um menor elemento, digamos m. Observe-se que:

$$m \in S \Rightarrow mn^{-1} > a.$$

Por outro lado, $m-1 \notin S \Rightarrow (m-1)n^{-1} \leqslant a$. Portanto:

$$mn^{-1} = (m-1)n^{-1} + n^{-1} \leqslant a + n^{-1} < a + (b-a) = b.$$

Combinando as duas últimas relações, segue que $a < mn^{-1} < b$. ∎

Exercícios para o Capítulo 6

6.2 O Sub-Corpo dos Racionais

6.2.1 Exercício: Seja F corpo ordenado. Então o sub-corpo dos elementos racionais $\mathbb{Q}_F$ é arquimediano. Com efeito, se $a/b \in \mathbb{Q}_F \ni m/n > 0$, pode-se supor, sem perda de generalidade, que $m > 0$, $n > 0$ e $b > 0$. Assim, de $bm \geqslant 1$ segue que $bm(|a|\,n+1) \geqslant |a|\,n+1$, pois $|a|\,n+1 > 0$. Portanto:

$$\mathbb{N} \ni k := |a|\,n + 1 \geqslant \frac{|a|\,n+1}{bm} > \frac{|a|\,n}{bm} \geqslant \frac{an}{bm}.$$

Ou seja, $k(m/n) > a/b$. ♣

6.3 Um Corpo Ordenado Não-Arquimediano

Seja H definido como o conjunto de funções racionais. Ou seja, H é formado por funções reais que são quocientes de polinômios.

6.3.1 Exercício: Considere em H as operações de soma e produto usuais de funções:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (fg)(x) &= f(x)\,g(x).\end{aligned}$$

Prove que com tais operações o conjunto H é um corpo. ♣

6.3.2 Exercício: Seja P o subconjunto de H definido como o conjunto de funções racionais f/g não-nulas, tais que os coeficiêntes das potências de maior ordem de f e g têm o mesmo sinal. Prove que com o conjunto P assim definido, o corpo H é ordenado. ♣

6.3.3 Exercício: Prove que o corpo ordenado H não pode ser arquimediano.

Sugestão: Observe que $\mathbb{N}_H$ é constituído pelas funções racionais cujo numerador é um polinômio de grau zero com valor natural e cujo denominador é o polinômio de grau zero igual a 1, ou seja:

$$\mathbb{N}_H = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots\right\}.$$

Seja $P \ni b = \dfrac{m}{1}$, com $m \in \mathbb{N}$ qualquer e considere a função racional $a = \dfrac{x}{1} \in H$. Observe que para todo $n = \dfrac{n}{1} \in \mathbb{N}_H$ tem-se:

$$nb - a = \frac{n}{1}\frac{m}{1} - \frac{x}{1} = \frac{-x + nm}{1} \notin P.$$

Ou seja, $nb - a < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_H$. Portanto, H não é arquimediano. ♣

Capítulo 7

Sequências

7.1 Definições e Resultados Básicos

Seja F um corpo ordenado.

7.1.1 Definição: Uma **sequência** em F é uma função $a : \mathbb{N} \longmapsto F$ cujo domínio é igual ao conjunto dos números naturais, ou seja, $\operatorname{Dom} a = \mathbb{N}$.

Para sequências, denota-se $a(n)$ por a_n. Por abuso de notação e linguagem, costuma-se expressar a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ querendo significar a sequência definida por $a(n) = x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. ♣

7.1.2 Observação: Não confundir a *sequência* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com o *conjunto* $\{x_1, x_2, \dots\}$, pois trata-se de conceitos diferentes. Por exemplo, os conjuntos:

$$\{1, 2, 3, \dots\},$$
$$\{2, 1, 3, \dots\},$$

são iguais, mas as sequências não são. ♣

7.1.3 Definição: Seja $l \in F$. Se diz que a sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge para** l **quando** n **tende para infinito** se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant N(\epsilon) \ \Rightarrow \ |a_n - l| < \epsilon.$$

Em tal caso, denota-se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, ou alternativamente $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$. ♣

7.1.4 Definição: Uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **crescente** ou **estritamente crescente** se $a_n < a_{n+1}$, $\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e **não-decrescente** se $a_n \leqslant a_{n+1}$, $\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Analogamente define-se **decrescente** e **não-crescente**. ♣

7.1.5 Definição: Uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **limitada superiormente** se existe $M \in F$ tal que $a_n \leqslant M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Analogamente define-se **limitada inferiormente**. ♣

7.1.6 Definição: Uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **limitada** se existe $M \in F$ tal que $|a_n| \leqslant M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, será limitada se for simultaneamente limitada superior e inferiormente.

O conjunto de todas as sequências em F limitadas será denotado por $\mathcal{B}(F)$. ♣

7.1.7 Definição: Uma **subsequência** de uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência da forma $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, onde os n_k são números naturais tais que $n_k < n_{k+1}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. ♣

7.1.8 Lema: *Toda sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contem uma subsequência que é ou bem não-decrescente ou bem não-crescente.* □

Demonstração: Seja $C := \{n \in \mathbb{N} : a_m < a_n, \forall m > n\}$.

Caso $|C| = \aleph_0$: Se $C = \{n_1, n_2, \dots\}$ com $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, então $a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \cdots$ e $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não-crescente.

Caso $|C| < \aleph_0$: Observe-se que C pode ser de fato vazio, $|C| = 0$, neste caso. Como C possui uma quantidade finita de números naturais, seja n_1 *maior* que todo elemento de C. Observe-se que $n_1 \notin C \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : n_2 > n_1$ e $a_{n_2} \geqslant a_{n_1}$. Como $n_2 \notin C$, pois $n_2 > n_1$ maior que todo elemento de C, tem-se que existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $n_3 > n_2$ e $a_{n_3} \geqslant a_{n_2}$. Dessa maneira, é possível construir uma sequência $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que é não-decrescente. ∎

7.2 Sequências de Cauchy

7.2.1 Definição: Uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **de Cauchy** se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \ \exists\ N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n, m \geqslant N(\epsilon) \ \Rightarrow \ |a_n - a_m| < \epsilon.$$

O conjunto de sequências de Cauchy em F será denotado por $\mathcal{C}(F)$. ♣

Os resultados mais relevantes, por enquanto, sobre sequências de Cauchy podem ser conferidos no seguinte par de lemas:

7.2.2 Lema: *Toda sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy é limitada.* □

Demonstração: Dado $\epsilon = 1 > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$. Portanto:

$$n \geqslant N \Rightarrow |a_n| - |a_N| \leqslant |a_n - a_N| < 1 \Rightarrow |a_n| < 1 + |a_N|, \forall n \geqslant N.$$

Desta maneira, tem-se que $|a_n| \leqslant \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, 1 + |a_N|\}, \forall n \in \mathbb{N}$. ∎

7.2.3 Lema: *Se uma subsequência de uma sequência de Cauchy é convergente, então a sequência original é convergente (a ao mesmo limite).* □

Demonstração: Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy e suponha-se que $\{a_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência tal que:

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} =: a.$$

Seja $\epsilon > 0$. Como a subsequência é convergente, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que:

$$j \geqslant J \Rightarrow \left|a_{n_j} - a\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como a sequência é de Cauchy, também existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j_0 \geqslant J \wedge n_{j_0} \geqslant N$. Observe-se que um tal j_0 sempre deve existir. Com efeito, basta tomar $j \geqslant J$ e se por ventura fosse $n_j < N$, então definindo $k := N - n_J$, tem-se $n_{J+k} > n_{J+k-1} > \cdots > n_J$, e assim $n_{J+k} \geqslant n_J + k = n_J + (N - n_J) = N$. Portanto, basta tomar $j_0 = \max\{j, J + k\}$. Com um tal j_0 tem-se:

$$n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| \leqslant \left|a_n - a_{n_{j_0}}\right| + \left|a_{n_{j_0}} - a\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$ ∎

Exercícios para o Capítulo 7

7.3 Resultados Gerais sobre Sequências

7.3.1 Exercício: Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência *convergente*. Então:

(a) O seu limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ é único.

(b) Toda sequência convergente é de Cauchy.

(c) Toda sequência convergente é limitada. ♣

7.3.2 Exercício: Sejam $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências convergentes. Ou seja, tais que existem os limites $\lim\limits_{n\to\infty} s_n =: s$ e $\lim\limits_{n\to\infty} t_n =: t$. Então:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n + t_n) = s + t$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n = st$.

(c) Se $t \neq 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{t_n} = \dfrac{1}{t}$.

(d) Se $t \neq 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_n}{t_n} = \dfrac{s}{t}$. ♣

7.3.3 Exercício: Sejam $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências convergentes. Ou seja, tais que existem os limites $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$.

(a) Se $s_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \geqslant 0$.

(b) Se $r_n \leqslant s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Sugestão: Em tal caso $s_n - r_n \geqslant 0$ e pode ser aplicado o resultado do item (a) precedente. ♣

7.3.4 Exercício: Convergênce à trois

Sejam $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências tais que $r_n \leqslant s_n \leqslant t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ou para todo $n \geqslant N$, para algum $N \in \mathbb{N}$). Suponha-se que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = l = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$. Então $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente com $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = l$. ♣

7.4 Sub-Sequências

Seja $a \in \mathbb{R}$.

7.4.1 Exercício: Considere-se uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

1. $s_n > a, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$.

Então, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contém uma sub-sequência $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ estritamente decrescente. Ou seja, tal que $s_{n_{k+1}} < s_{n_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. ♣

7.4.2 Exercício: Sejam agora $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ duas seqüências tais que a primeira mantém-se maior que a e a segunda converge para a. Ou seja, tais que:

1. $s_n > a, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = a$.

Então, $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contém uma sub-sequência $\{r_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $r_{n_k} < s_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ♣

7.5 Convergência de algumas Sequências

7.5.1 Exercício: Seja F corpo arquimediano. Então:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$. ♣

Capítulo 8

Corpos Ordenados Completos

8.1 Limites Superiores Mínimos

Seja F um corpo ordenado

8.1.1 Definição: Um conjunto $A \subseteq F$ é dito **limitado superiormente** se existe $x \in F$ tal que $a \leqslant x, \ \forall\, a \in A$. Um tal x recebe o nome de **limite superior** de A. ♣

8.1.2 Definição: Um elemento $x \in F$ é chamado de **limite superior mínimo**, ou **supremo**, de A se:

1. x é um limite superior de A,
2. $x \leqslant y$ para todo y que seja limite superior de A. ♣

8.1.3 Observação: O supremo de um conjunto, se existir, é unico, o que justifica de denominá-lo *o* supremo.

Com efeito, suponha-se que a e b são supremos de um conjunto A. Se fosse $a < b$, então, para não contradizer o fato que b é um limite superior mínimo, deve existir algum elemento $x \in A$ tal que $a < x$, pois, caso contrário a seria um limite superior de A menor que b. Mas $a < x \in A$ contradiz o fato que a é um limite superior para A. Portanto, deve ser $a \geqslant b$. Se fosse $a > b$, através de um raciocínio análogo obtém-se uma contradição. Portanto, deve ser $a = b$. ♣

8.2 Completeza

8.2.1 Lema: *Seja F um corpo ordenado tal que todo conjunto não-vazio e limitado superiormente possui supremo em F. Então, toda sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em F não-decrescente (respectivamente, não-crescente) e limitada superiormente (respectivamente, inferiormente) é convergente.* □

Demonstração: Observe-se que o conjunto A, definido como:

$$A := \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

é um conjunto limitado superiormente, pois a sequência é limitada superiormente. Portanto, por hipótese, deve existir $\alpha := \sup A \in F$. Seja $\epsilon > 0$.

Afirmação: Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - a_N < \epsilon$. $\triangledown$

Com efeito, por *reductio ad absurdum*, se fosse $\alpha - a_n \geqslant \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a_n \leqslant \alpha - \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\alpha - \epsilon$ é limite superior para A, obviamente menor que α, o que contradiz o fato que α é o menor de tais limites superiores, por definição de supremo. $\blacktriangledown$

Portanto, usando a hipótese que a sequência é não-decrescente, o fato que $a_n \leqslant \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e a afirmação anterior, tem-se:

$$n \geqslant N \;\Rightarrow\; a_n \geqslant a_N \;\Rightarrow\; |\alpha - a_n| = \alpha - a_n \leqslant \alpha - a_N < \epsilon. \qquad \blacksquare$$

8.2.2 Teorema: *Seja F um corpo ordenado. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Todo conjunto não vazio limitado superiormente possui supremo em F.*
2. *F é arquimediano e toda sequência de Cauchy é convergente.* $\square$

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Esta é a parte facil do Teorema e será quebrada em duas afirmações.

Afirmação 1: F é arquimediano. $\triangledown$

Com efeito, sejam $b \in P$ e $a \in F$. Suponha-se em primeiro lugar que $a \leqslant 0$. Em tal caso, tem-se que $1 \in P \;\wedge\; b \in P \;\Rightarrow\; 1.b \in P \;\Rightarrow\; 1.b > 0 \geqslant a$. Portanto, basta tomar $n = 1$ neste caso. Suponha-se agora que $a > 0$, ou seja $a \in P$. Observe-se que como $b \in P \;\Rightarrow\; b^{-1} \in P$, tem-se que $a \in P \;\wedge\; b^{-1} \in P \;\Rightarrow\; ab^{-1} \in P$. Por *reductio ad absurdum*, se fosse $n \leqslant ab^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}_F$, então o conjunto:

$$\mathbb{N}_F := \{n \,:\, n \text{ é inteiro positivo em } F\}$$

seria um conjunto limitado superiormente, pelo número ab^{-1}. Portanto, por hipótese, existe $\alpha := \sup \mathbb{N}_F$, significando isto que $n \leqslant \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}_F$. Mas então $n+1 \leqslant \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}_F$, pois $\mathbb{N}_F$ é indutivo. Portanto, $n \leqslant \alpha - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}_F \Rightarrow \alpha - 1$ é limite superior de $\mathbb{N}_F$ e $\alpha - 1 < \alpha$, o que contradiz o fato que α era o menor de tais limites superiores. Portanto, deve existir algum $n_0 \in \mathbb{N}_F$ tal que $n_0 > a.b^{-1}$, ou seja, $n_0 b > a$. $\blacktriangledown$

Afirmação 2: Toda sequência de Cauchy é convergente. $\triangledown$

Com efeito, pelo Lema 7.1.8, toda sequência contém uma subsequência que é ou bem não-decrescente ou bem não-crescente. Por outro lado, pelo Lema 7.2.2, toda sequência de Cauchy é limitada. Portanto, toda sequência de Cauchy contém uma subsequência, ou bem não-decrescente, ou bem não-crescente, e que também é limitada. Pelo Lema 8.2.1 uma tal (sub)sequência é convergente num corpo que satisfaz a propriedade 1 do enunciado. Finalmente, pelo Lema 7.2.3, a sequência de Cauchy original é convergente. $\blacktriangledown$

(2) $\Rightarrow$ (1). Respire fundo e se prepare para uma viagem e tanto. Seja $F \supseteq A \neq \emptyset$ limitado superiormente. Seja b um limite superior de A, e seja $a \in A$. Como F é arquimediano por hipótese, dado $1 > 0$ devem existir $M, -m \in \mathbb{N}$ tais que $M = M.1 > b$ e $-m = (-m).1 > (-a)$, respectivamente. Ou seja:

$$m < a \leqslant b < M.$$

Para cada $p \in \mathbb{N}$, seja S_p o conjunto definido como:

$$S_p := \{k \,:\, k \text{ é inteiro e } \frac{k}{2^p} \text{ é um limite superior de } A\}.$$

Observe-se que $S_p \neq \emptyset$, pois $M2^p \in S_p$. Além disso, S_p é limitado inferiormente, pois se $k \leqslant 2^p m$ então $k \notin S_p$. Pelo Princípio de Boa Ordenação 3.3.1, S_p tem um elemento mínimo, digamos, k_p. Para cada $p \in \mathbb{N}$ define-se a_p como:

$$a_p := \frac{k_p}{2^p}, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Pela definicão de k_p, tem-se que:

$$\frac{2k_p}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p}$$

é um limite superior de A, mas

$$\frac{2k_p - 2}{2^{p+1}} = \frac{k_p - 1}{2^p}$$

não é. Assim, deve ser $k_{p+1} = 2k_p$ ou $k_{p+1} = 2k_p - 1$, e portanto deve ser:

$$a_{p+1} = \frac{k_{p+1}}{2^{p+1}} = \frac{2k_p}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p} = a_p$$

ou:

$$a_{p+1} = \frac{k_{p+1}}{2^{p+1}} = \frac{2k_p - 1}{2^{p+1}} = \frac{2k_p}{2^{p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{k_p}{2^p} - \frac{1}{2^{p+1}} = a_p - \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Portanto, qualquer que seja o caso, para todo $p \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\begin{aligned} a_{p+1} &\leqslant a_p \\ a_p - a_{p+1} &\leqslant \frac{1}{2^{p+1}}. \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

Afirmação 1: A sequência $\{a_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. $\triangledown$

Com efeito, se $q > p \geqslant 1$, então

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant a_p - a_q = (a_p - a_{p+1}) + (a_{p+1} - a_{p+2}) + \cdots + (a_{q-1} - a_q) \\ &\leqslant \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+2}} + \cdots + \frac{1}{2^q} = \frac{1}{2^{p+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{q-p-1}}\right) = \frac{1}{2^{p+1}}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{q-p}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{p+1}}\left(2 - \frac{1}{2^{q-p-1}}\right) < \frac{2}{2^{p+1}} = \frac{1}{2^p}. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$q > p \geqslant 1 \Rightarrow |a_p - a_q| = a_p - a_q < \frac{1}{2^p}.$$

Portanto, como $\lim_{p\to\infty} 2^{-p} = 0$, tem-se que $\{a_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. ▼

Pela Afirmação 1 anterior, junto com a hipótese, deve existir $\lim_{p\to\infty} a_p =: c$.

Afirmação 2: c é um limite superior de A. ▽

Com efeito, caso contrário, existiria $x \in A$ com $x > c$. Portanto, dado $\epsilon = x - c > 0$, existe p inteiro positivo tal que $a_p - c = |a_p - c| < x - c \Rightarrow a_p < x$, o que contradiz o fato de ser a_p um limite superior para A, pela definição de a_p. ▼

Afirmação 3: c é o menor de tais limites superiores. ▽

Com efeito, por ***reductio ad absurdum***, suponha-se a existência de um outro limite superior de A, digamos c', com $c' < c$. Seja p inteiro positivo tal que $\frac{1}{2^p} < c - c'$. Então:

$$a_p - \frac{1}{2^p} \geqslant c - \frac{1}{2^p} > c - (c - c') = c'.$$

Portanto, $a_p - \frac{1}{2^p}$ é um limite superior de A, pois é maior que c' que já é um tal limite. Mas isso contradiz o fato que

$$a_p - \frac{1}{2^p} = \frac{k_p}{2^p} - \frac{1}{2^p} = \frac{k_p - 1}{2^p}$$

não é limite superior de A pela definição de k_p. ▼

A prova desta última afirmação conclui a prova do Teorema. ∎

8.2.3 Definição: Um corpo ordenado é dito **completo** se é satisfeita alguma, logo as duas, condições do Teorema 8.2.2 acima. ♣

Exercícios para o Capítulo 8

8.3 Caracterização das Sequências Convergentes

8.3.1 Exercício: Em um corpo ordenado com a propriedade 1 do Teorema 8.2.2, uma sequência é convergente se e somente se é de Cauchy.

Sugestão: A parte ($\Rightarrow$) vale em general e consta no Exercício 7.3.1(b). A parte ($\Leftarrow$) segue diretamente do Teorema 8.2.2. ♣

8.4 O Corpo Racional não é Completo...

8.4.1 Exercício: Prove que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ não pode ser completo. Para tanto, use os resultados do Capítulo 5 para exibir um conjunto não-vazio limitado superiormente que não possui supremo em $\mathbb{Q}$. ♣

8.5 ...M$e$smo

Na presente seção prova-se de maneira alternativa que o corpo racional $\mathbb{Q}$ não é completo, exibindo uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não possui limite *em* $\mathbb{Q}$. Com efeito, define-se a seguinte sequência s_n como:

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Observe-se que $s_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8.5.1 Exercício: Considere-se a sequência s_n acima definida.

(a) Se $m > n$, prove que:

$$s_m - s_n < \frac{2}{(n+1)!}.$$

Em particular, a sequência s_n é de Cauchy.

(b) Suponha-se agora a existência do limite $\lim_{n\to\infty} s_n =: e$. Use o fato de ser s_n estritamente crescente e a desigualdade do item (a) anterior para provar que:

$$s_n < e \leqslant s_n + \frac{2}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $n = 2$ obtém-se a estimativa $5/2 < e < 3$.

(c) Suponha-se agora que fosse $e = p/q \in \mathbb{Q}$. Use a relação do item (b) acima com $n = q$ para obter uma contradição. Ou seja, $e \notin \mathbb{Q}$. ♣

Em particular, $\mathbb{Q}$ não pode ser completo, pois s_n é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ cujo limite e não é racional.

8.6 Forma de Cauchy do Número e

Seja F um corpo com a propriedade 1 do Teorema 8.2.2, ou seja, completo.

8.6.1 Exercício: Prove que a sequência t_n dada por:

$$t_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é *estritamente crescente*.

Sugestão: Use o Exercício 3.9.2. ♣

8.6.2 Exercício: Prove que a sequência t_n do exercício anterior é limitada e forneça limites inferiores e superiores para ela.

Sugestão: Considere $n \geqslant 4$ e use o Exercício 3.9.3. R: Por exemplo, $2 < t_n < 67/24$. ♣

8.6.3 Exercício: Usando os dois exercícios anteriores e o Lema 8.2.1 prove que a sequência t_n resulta *convergente*. Ou seja, existe $\lim_{n\to\infty} t_n$. ♣

O limite da sequência $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é um numerozinho que, não por escassez de letras no alfabeto latino, denota-se e. Ou seja:

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

8.6.4 Exercício: Combine o resultado do Exercício 3.9.3 junto com os dos Exercícios 7.3.2(a,b), 7.5.1(a,b) e 7.3.3(b) para verificar a seguinte $e$stimativa:

$$\frac{5}{2} \leqslant e \leqslant \frac{67}{24}. \qquad \clubsuit$$

No exercício 38.19.4 prova-se rigorosamente que o número e da presente seção e o da seção anterior são exatamente o mesmo número. Isso não resulta nem um pouco difícil e poderia ter sido feito na presente altura ou mesmo até antes. Portanto, o leitor curioso que queira dar um pulo até lá não vai encontrar obstáculo metodológico algum que o impeça de satisfazer sua natural curiosidade ao mesmo tempo que o rigor formal.

O número e resulta de considerável importância na Matemática em geral. Uma definição alternativa será fornecida no Capítulo 32, onde também serão estudadas algumas das suas propriedades elementares. A partir daí ele vai se tornar um companheiro de viagem inseparável ao longo da presente obra.

Capítulo 9

Corpos e Morfismos

9.1 Morfismos de Corpos

Sejam F_1 e F_2 dois corpos.

9.1.1 Definição: Considere uma aplicação $f : F_1 \longmapsto F_2$, entre dois conjuntos quaisquer, não necessariamente corpos.

(a) A aplicação f denomina-se **injetora**, ou **1-1** (léia-se "um a um"), se:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(b).$$

Observe que, de maneira equivalente, uma aplicação f é injetora se e somente se:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

(b) A aplicação f denomina-se **sobrejetora**, ou **sobre**, se a sua imagem corresponde ao conjunto de chegada, ou seja:

$$\operatorname{Img} f = F_2.$$

Em tal caso, se diz que f aplica F_1 *sobre* F_2.

(c) A aplicação f denomina-se **bijetora** se for injetora e sobrejetora simultaneamente.

(d) Se para todo $x \in F_1$, tem-se $f(x) = 0$, então a aplicação se diz **identicamente nula**, em cujo caso denota-se:

$$f \equiv 0.$$

Naturalmente, caso contrário, denota-se $f \not\equiv 0$. ♣

9.1.2 Definição: Sejam F_1, F_2 corpos. Um **morfismo de F_1 em F_2** consiste numa aplicação $f : F_1 \longmapsto F_2$, tal que:

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall\, x, y \in F_1$,

(b) $f(x\,y) = f(x)\,f(y), \forall\, x, y \in F_1$. ♣

9.1.3 Definição: Sejam F_1, F_2, F corpos.

(a) Um **isomorfismo de** F_1 **em** F_2 é um morfismo de F_1 em F_2 que é bijetor.

(b) Um **endomorfismo em** F é um morfismo de F em F.

(c) Um **automorfismo em** F é um isomorfismo de F em F. ♣

9.1.4 Lema: *Sejam F_1 e F_2 corpos e seja $f : F_1 \longmapsto F_2$ tal que:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall\, x, y \in F_1.$$

Então:

(a) $f(n) = f(1_1)\,n1_2, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

(b) $f\left(\dfrac{1}{m}1_1\right) = f(1_1)\,\dfrac{1}{m}1_2, \forall\, m \in \mathbb{N}$.

(c) $f(r1_1) = f(1_1)\,r1_2$ *para todo $r \in F$ racional positivo $\mathbb{Q} \ni r > 0$.* □

Demonstração: **(a)** Basta observar que:

$$f(n) = f(\underbrace{1_1 + 1_1 + \cdots + 1_1}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(1_1) + f(1_1) + \cdots + f(1_1)}_{n \text{ vezes}} = nf(1_1) = f(1_1)\,n1_2.$$

(b) Analogamente, tem-se:

$$m\,f\left(\frac{1}{m}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{m}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{m}\right)}_{m \text{ vezes}} = f\underbrace{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}\right)}_{m \text{ vezes}}$$
$$= f\left(m\,\frac{1}{m}\right) = f(1).$$

Portanto, $f\left(\dfrac{1}{m}\right) = \dfrac{f(1)}{m}$.

(c) Se $m, n \in \mathbb{N}$, então usando o item anterior tem-se:

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = f\underbrace{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}\right)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{f\left(\frac{1}{m}\right) + f\left(\frac{1}{m}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{m}\right)}_{n \text{ vezes}}$$
$$= n\,f\left(\frac{1}{m}\right) = n\,\frac{f(1)}{m} = \frac{n}{m}\,f(1).$$ ■

9.1.5 Lema: *Sejam F_1 e F_2 corpos e seja $f : F_1 \longmapsto F_2$ morfismo. Então:*

(a) $[f(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \neq 0]$ *ou* $f \equiv 0$.

(b) $f(0_1) = 0_2$.

(c) $f(-x) = -f(x), \forall\, x \in F_1$. □

Demonstração: **(a)** Suponha-se que $f \not\equiv 0$. Em tal caso, existe $x_0 \in F$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Por *reductio ad absurdum*, se fosse $x_0 = 0$, teria-se:

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0)\, f(x) = f(x_0\, x) = f(0.x) = f(0).$$

Como $f(x_0) \neq 0$, a identidade acima implica que $f(x) = \dfrac{f(0)}{f(x_0)} =: \alpha$ *é constante para todo* $x \in F$. Agora:

$$\begin{aligned} &\alpha = f(x+y) = f(x) + f(y) = \alpha + \alpha \\ &\Rightarrow \alpha = \alpha + 0 = \alpha + (\alpha + (-\alpha)) = (\alpha + \alpha) + (-\alpha) = \alpha + (-\alpha) = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow f(x) = \alpha = 0, \forall x \in F \Rightarrow f \equiv 0. \end{aligned}$$

Mas isso contradiz a suposição inicial. Portanto, deve ser $x_0 \neq 0$.

(b) Se $f \equiv 0$, então o enunciado é obviamente válido. Suponha portanto que $f \not\equiv 0$. Se fosse $f(0_1) \neq 0_2$, então pelo item anterior teria-se que $0_1 \neq 0_1$, cuja evidente falsidade implica que deve ser $f(0_1) = 0_2$, neste caso também.

(c) Usando o item anterior, observe-se que $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, de onde segue que $f(-x) = -f(x)$, pela unicidade do inverso aditivo em F_2. ∎

9.1.6 Lema: *Sejam F_1 e F_2 corpos e seja $f : F_1 \longmapsto F_2$ morfismo* não nulo. *Portanto, existe $x_0 \in F_1$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Pelo Lema 9.1.5(a), tem-se que $x_0 \neq 0$ e portanto existe x_0^{-1}. Então tem-se:*

(a) $f(x_0^{-1}) \neq 0_2$.

(b) $f(1_1) \neq 0_2$.

(c) *Mais especificamente,* $f(1_1) = 1_2$.

(d) *Mais ainda,* $f(r1_1) = r1_2$ *para todo* $r \in F$ *racional* $r \in \mathbb{Q}$. □

Demonstração: **(a)** Basta observar que:

$$0 \neq f(x_0) = f\left(x_0^2\, \frac{1}{x_0}\right) = f(x_0^2)\, f\left(\frac{1}{x_0}\right) = f(x_0)\, f(x_0)\, f\left(\frac{1}{x_0}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x_0}\right) \neq 0.$$

(b) Tem-se:

$$f(1) = f\left(x_0\, \frac{1}{x_0}\right) = f(x_0)\, f\left(\frac{1}{x_0}\right) \neq 0.$$

Na última relação usou-se o fato que $f(x_0) \neq 0$ por hipótese e $f(x_0^{-1}) \neq 0$ pelo item anterior. De passagem, observe-se que se o corpo F_2 também fosse ordenado, de fato teria-se que $f(1) = f(1.1) = f(1).f(1) > 0$.

(c) Como $f(1) = f(1.1) = f(1)\, f(1)$, pelo Lema 1.1.3(g) deve ser $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$. Pelo item anterior sabe-se que $f(1) \neq 0$. Portanto deve ser $f(1) = 1$.

(d) Pelo Lema 9.1.4(a) sabe-se que:

$$f(n) = n\, f(1),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, se $-n \in \mathbb{N}$ então, pelo Lema 9.1.5(c) tem-se que $f(-n) = -f(n) = -(n\, f(1)) = (-n)\, f(1)$, de onde segue que:

$$f(n) = n\, f(1),\ \forall n \in -\mathbb{N}.$$

Portanto, combinando as últimas duas relações acima, decorre que:

$$f(n) = n\, f(1),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Utilizando agora esta última relação, tem-se:

$$\begin{aligned} n\, f(1) = f(n) = f\left(m\, \frac{n}{m}\right) &= f\underbrace{\left(\frac{n}{m} + \frac{n}{m} + \cdots + \frac{n}{m}\right)}_{m \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{f\left(\frac{n}{m}\right) + f\left(\frac{n}{m}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{m}\right)}_{m \text{ vezes}} = m\, f\left(\frac{n}{m}\right),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}\, f(1) = \frac{n}{m},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Observe-se que na última igualdade foi usado o resultado do item (c) anterior. ∎

9.2 Morfismos em Corpos Ordenados

9.2.1 Definição: Se F_1 e F_2 são corpos *ordenados*, se diz que uma aplicação $f : F_1 \longmapsto F_2$ **preserva a ordem** se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y),\ \forall\, x, y \in F_1$. ♣

9.2.2 Lema: *Sejam F_1 e F_2 corpos* ordenados *e seja $f : F_1 \longmapsto F_2$ tal que preserva a ordem. Então:*

(a) $f \not\equiv 0$.

(b) *f é injetora.*

(c) *Se adicionalmente F_1 é completo, F_2 arquimediano, e $f(r1_1) = r1_2$ para todo racional $r \in \mathbb{Q}$, então f é sobrejetora.* □

Demonstração: **(a)** De fato, $0 < 1 \Rightarrow f(0) < f(1) \Rightarrow f(0) \neq f(1) \Rightarrow f \not\equiv 0$.

(b) Seja $x \neq y$. Então, pela propriedade de tricotomia, deve ser $x < y$ ou $x > y$. Portanto, $f(x) < f(y)$, ou $f(x) > f(y)$, respectivamente, pois f preserva a ordem. Assim, qualquer que seja o caso, tem-se $f(x) \neq f(y)$.

(c) Adicionalmente, suponha-se agora que F_1 é completo, F_2 é arquimediano e $f(r1_1) = r1_2$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Observe-se que se f fosse *morfismo*, então esta última propriedade segue automaticamente do item (a) anterior e do Lema 9.1.6(d). Porém, no presente resultado estamos supondo apenas que f preserva a ordem.

Seja $a \in F_2$ arbitrário mas fixo. Considere-se o conjunto $B \subseteq F_1$ definido como:

$$B := \{r \in F_1 \,:\, r \in \mathbb{Q} \wedge f(r) < a\}.$$

Afirmação 1: $B \neq \emptyset$. $\triangledown$

Com efeito, caso contrário teria-se que $\dfrac{m}{n}\,1_2 = f\left(\dfrac{m}{n}\,1_1\right) \geqslant a$, para todo m, n. Ou seja, o conjunto dos números racionais em F_2 seria limitado inferiormente (por a), o que é obviamente falso. $\blacktriangledown$

Afirmação 2: B é limitado superiormente. $\triangledown$

Com efeito, como $a \in F_2$ e $1_2 \in P_2$, pela arquimedianeidade de F_2 tem-se que existe $m \in \mathbb{N}_2$ tal que $m\,1_2 > a$. Portanto, definindo $F_1 \ni s := m\,1_1$ tem-se:

$$f(s) = f(m\,1_1) = m\,1_2 > a > f(r),\ \forall r \in B.$$

Portanto, deve ser $s \geqslant r$, para todo $r \in B$, pois caso contrário, como f preserva a ordem, $s < r \Rightarrow f(s) < f(r)$ para algum $r \in B$, o que contradiz a relação anterior. Dessa maneira, B é limitado superiormente, por exemplo, por s. $\blacktriangledown$

Como F_1 é completo, existe $F_1 \ni \sup B =: x$.

Afirmação 3: $f(x) = a$. $\triangledown$

Se fosse $f(x) < a$, existiria $\dfrac{m}{n}\,1_2$ racional em F_2 tal que $f(x) < \dfrac{m}{n}\,1_2 < a$, pelo fato dos racionais serem densos num corpo arquimediano. Portanto, definindo $\mu := \dfrac{m}{n}\,1_1$ teria-se que:

$$f(x) < \frac{m}{n}\,1_2 = f\left(\frac{m}{n}\,1_1\right) = f(\mu) < a,$$

de onde segue que $\mu \in B$, contradizendo que $\sup B = x < \mu$. Com efeito, se $x \geqslant \mu$, então $x > \mu \Rightarrow f(x) > f(\mu)$, ou $x = \mu \Rightarrow f(x) = f(\mu)$. Portanto, $f(x) \geqslant f(\mu)$, o que contradiz a primeira desigualdade acima.

Por outro lado, se fosse $a < f(x)$, existiria $\dfrac{m}{n}\,1_2$ racional em F_2 tal que $a < \dfrac{m}{n}\,1_2 < f(x)$, pelo fato dos racionais serem densos num corpo arquimediano. Portanto, definindo $\mu := \dfrac{m}{n}\,1_1$ teria-se que:

$$a < \frac{m}{n}\,1_2 = f\left(\frac{m}{n}\,1_1\right) = f(\mu) < f(x).$$

Pela primeira desigualdade acima, $r \in B \Rightarrow f(r) < a < f(\mu)$, de onde segue que $r < \mu$, para todo $r \in B$, pois f preserva a ordem. Isso significa que μ seria um limite superior de B, o que contradiz a segunda desigualdade acima, pois $f(\mu) < f(x) \Rightarrow \mu < x = \sup B$, pois x é o menor de tais limites. ▼

Observe-se que da última afirmação decorre que dado $a \in F_2$ arbitrário existe $x \in F_1$ tal que $f(x) = a$. Portanto, f é injetora. ∎

9.2.3 Definição: Se F_1 e F_2 são corpos *ordenados*, um **morfismo** (respectivamente, **isomorfismo**, **endomorfismo**, **automorfismo**) **de corpos ordenados de** F_1 **em** F_2 é um morfismo (respectivamente, isomorfismo, endomorfismo, automorfismo) de F_1 em F_2 que preserva a ordem. ♣

O resultado a seguir mostra que, para certo caso particular de corpo ordenado, a definição acima é um tanto redundante.

9.2.4 Lema: *Sejam F_1 e F_2 corpos* ordenados *e seja $f : F_1 \longmapsto F_2$ morfismo* não nulo. *Se F_1 é completo, então f preserva a ordem.* □

Demonstração: A prova será quebrada em várias afirmações.

Afirmação 1: $x > 0 \Rightarrow f(x) \geqslant 0$. ▽

Se $x > 0$, da completeza de F_1 decorre a existência de $x^{1/2} \in F_1$ tal que $x = x^{1/2}x^{1/2}$. Em particular, como f é morfismo de corpo, tem-se:

$$f(x) = f\left(x^{1/2}x^{1/2}\right) = f\left(x^{1/2}\right) f\left(x^{1/2}\right).$$

Observe que a expressão à direita acima é estritamente positiva se $f\left(x^{1/2}\right) \neq 0$, ou nula se $f\left(x^{1/2}\right) = 0$. Portanto, qualquer que seja o caso, tem-se que $f(x) \geqslant 0$. ▼

Afirmação 2: $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$. ▽

O enunciado segue trivialmente da afirmação anterior. Com efeito, basta observar que:

$$x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow 0 \leqslant f(y-x) = f(y) - f(x) \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$ ▼

Para finalizar, se F_1 é completo, então é arquimediano, de onde segue que os racionais são densos em F_1. Portanto, se $x < y$, existem r, s racionais em F_1 tais que $x < r < s < y$. Em tal caso, pela última afirmação, tem-se:

$$f(x) \leqslant f(r) = r < s = f(s) \leqslant f(y) \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Observe que nas duas igualdades acima foi usado o resultado do Lema 9.1.6(d). ∎

9.3 Unicidade de Isomorfismos

9.3.1 Proposição: *Seja F corpo ordenado* e completo *e seja f endomorfismo* não nulo *em F. Então:*

(a) $f(x) = x, \forall\, x \in F$.

Em particular, tem-se:

(b) *f é automorfismo.*

(c) *Se um tal endomorfismo existe, então é único.* □

Demonstração: **(a)** Pelo Lema 9.2.4 com $F_1 = F_2 = F$, tem-se que f preserva a ordem. Se fosse $f(x) \neq x$, por tricotomia teriam-se os seguintes dois casos:

Caso $f(x) < x$: Como F é completo, logo arquimediano, existe $r \in F$ racional tal que $f(x) < r < x$. Portanto:

$$f(x) < r = f(r) \;\Rightarrow\; f(x) < f(r) \;\Rightarrow\; x \leqslant r,$$

o que contradiz o fato de ser $r < x$ pela escolha de r. Na primeira igualdade acima foi usado o Lema 9.1.6(d). Para justificar o último condicional acima, observe-se que, como f preserva a ordem, $x > r \;\Rightarrow\; f(x) > f(r)$, o que contradiz a segunda relação acima.

Caso $f(x) > x$: Como F é completo, logo arquimediano, existe $r \in F$ racional tal que $x < r < f(x)$. Portanto:

$$f(r) = r < f(x) \;\Rightarrow\; f(r) < f(x) \;\Rightarrow\; r \leqslant x,$$

o que contradiz o fato de ser $x < r$ pela escolha de r. Na primeira igualdade acima foi usado o Lema 9.1.6(d). Para justificar o último condicional acima, observe-se que, como f preserva a ordem, $r > x \;\Rightarrow\; f(r) > f(x)$, o que contradiz a segunda relação acima.

Como os dois casos acima conduzem a contradições, pela propriedade de tricotomia, deve ser $f(x) = x$, para todo $x \in F$.

(b) Em primeiro lugar, observe-se que f é sobrejetora. Com efeito, basta utilizar o resultado do Lema 9.1.6(d) combinado com o do Lema 9.2.2(c). Alternativamente, o item (a) provado acima, fornece uma prova autocontida. Com efeito, basta observar que:

$$x \neq y \;\Rightarrow\; f(x) = x \neq y = f(y) \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(y),\; \forall\, x, y \in F.$$

Por outro lado, dado $x \in F$, tem-se que $f(x) = x$, de onde segue que f é sobrejetora. Portanto, f é *iso*morfismo de F em F, ou seja, automorfismo em F.

(c) Se existisse um outro endomorfismo não nulo g, pelo item (a) teria-se que $g(x) = x$, para todo $x \in F$. Portanto, $f(x) = x = g(x)$, para todo $x \in F$, e assim $f \equiv g$. ∎

9.3.2 Corolário: *Sejam F_1 e F_2 corpos ordenados e completos e $f : F_1 \longmapsto F_2$* isomorfismo. *Então f é único. Ou seja, existe* no máximo *apenas um isomorfismo entre corpos ordenados e completos.* □

Demonstração: Se g é um outro isomorfismo, então a composição $g^{-1} \circ f$ é endomorfismo em F_1:

$$F_1 \xrightarrow{f} F_2 \xleftarrow{g} F_1.$$

<u>Afirmação:</u> $g^{-1} \circ f \not\equiv 0$. $\triangledown$

Com efeito, em primeiro lugar observe-se que $f \not\equiv 0$. De fato, como num corpo $0 \neq 1$, deve ser $f(0) \neq f(1)$ pois f, sendo isomorfismo, é injetora. Assim, como $f \neq 0$, existe $x_0 \in F_1$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Se fosse $g^{-1}(f(x_0)) = 0$, então pelo Lema 9.1.5(b) teria-se que $0 = g(0) = g(g^{-1}(f(x_0))) = f(x_0)$, o que contradiz a escolha de x_0. Portanto, $(g^{-1} \circ f)(x_0) \neq 0$, e assim $g^{-1} \circ f \not\equiv 0$. $\blacktriangledown$

Pela afirmação acima e a proposição anterior, tem-se que $(g^{-1} \circ f)(x) = x$, para todo $x \in F_1$. Ou seja, $g^{-1} \circ f = id$. Portanto:

$$g^{-1} \circ f = id \Rightarrow f = g \circ id \Rightarrow f(x) = (g \circ id)(x) = g(id(x)) = g(x), \forall x \in F_1.$$

Ou seja, $f \equiv g$. $\blacksquare$

9.4 Existência de Isomorfismos

Sejam F_1 e F_2 dois corpos ordenados e completos.

9.4.1 Definição: Define-se a aplicação f do conjunto dos racionais em F_1 no conjunto dos racionais em F_2 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(1_1) &= 1_2; \\ f(0_1) &= 0_2; \\ f(m1_1) &= m1_2, \ \forall\, m \text{ inteiro}; \\ f\left(\frac{m}{n}1_1\right) &= \frac{m}{n}1_2. \end{aligned}$$ $\clubsuit$

9.4.2 Observação: A aplicação f está *bem definida* no conjunto de elementos *racionais* de F_1, pois:

$$\frac{m}{n} = \frac{k}{l} \Rightarrow ml = nk \Rightarrow ml1_2 = nk1_2 \Rightarrow \frac{m}{n}1_2 = \frac{k}{l}1_2.$$ $\clubsuit$

9.4.3 Lema: *A aplicação f acima definida nos racionais de F_1* sobre *os racionais de F_2 é um isomorfo que preserva a ordem.* $\square$

Demonstração: A demonstração é imediata da definição e fica como exercício para o leitor. $\blacksquare$

9.4.4 Definição: Por outro lado, se $F_1 \ni x \neq \dfrac{m}{n}1_1$, define-se:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sup\left\{\frac{m}{n}1_2 \,:\, \frac{m}{n}1_1 < x\right\} \\ &= \sup\{f(r) \,:\, r \text{ é racional em } F_1 \text{ e } r < x\}. \end{aligned}$$ ♣

9.4.5 Definição: Para simplificar a notação, para cada $x \in F_1$ seja $A_x \subseteq F_2$ o conjunto definido como:

$$A_x := \left\{\frac{m}{n}1_2 \,:\, \frac{m}{n}1_1 < x\right\}.$$ ♣

9.4.6 Lema: *Se x é racional, então as duas definições coincidem. Ou seja, a aplicação f está bem definida em F_1.* □

Demonstração: Se $F_1 \ni x$ é racional, então:

$$y \in A_x \;\Rightarrow\; y = \frac{m}{n}1_2 \quad \text{e} \quad \frac{m}{n}1_1 < x \;\Rightarrow\; y = \frac{m}{n}1_2 = f\left(\frac{m}{n}1_1\right) < f(x).$$

Na última relação acima, a segunda igualdade segue diretamente da definição de f para racionais, no entanto que a última desigualdade segue do fato que tal definição preserva a ordem nos racionais e x é racional por hipótese. Desta maneira, tem-se que $y \in A_x \;\Rightarrow\; y < f(x)$, e portanto $\sup A_x \leqslant f(x)$. Agora, se fosse $\sup A_x < f(x)$, pela densidade dos racionais num corpo arquimediano, existe $F_2 \ni r_2 = \dfrac{m}{n}1_2$ racional tal que:

$$\sup A_x < r_2 < f(x).$$

Portanto, existe $F_1 \ni r_1 = \dfrac{m}{n}1_1$ racional tal que:

$$\sup A_x < r_2 = \frac{m}{n}1_2 = f\left(\frac{m}{n}1_1\right) = f(r_1) < f(x).$$

Da última desigualdade acima segue que $r_1 < x$, pois f preserva a ordem entre racionais, e portanto $r_2 \in A_x$, em cujo caso deveria ser $r_2 \leqslant \sup A_x$, mas isso contradiz a primeira desigualdade acima. Portanto, no caso em que x é racional deve ser $\sup A_x = f(x)$. ∎

9.4.7 Lema: *A aplicação f preserva a ordem em F_1.* □

Demonstração: Se $x, y \in F_1$ com $x < y$, então para todo r racional em F_1 tem-se que $r < x < y \;\Rightarrow\; r < y$, e portanto $A_x \subseteq A_y$, de onde segue que:

$$f(x) = \sup A_x \leqslant \sup A_y = f(y).$$

Agora, pela densidade dos racionais no corpo arquimediano F_1, existem r, s racionais em F_1 tais que $x < r < s < y$. Portanto:

$$f(x) \leqslant f(r) < f(s) \leqslant f(y),$$

onde a primeira e última desigualdades acima seguem da relação anterior, no entanto que a desigualdade central segue do fato que f preserva a ordem nos racionais. Ou seja, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, e assim f preserva a ordem no caso geral. ∎

9.4.8 Lema: *$f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in F_1$.* □

Demonstração: Sejam $x, y \in F_1$ e suponha-se que $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$. Em tal caso, pela propriedade de tricotomia, deve ser $f(x+y) < f(x) + f(y)$ ou $f(x+y) > f(x) + f(y)$.

Caso $f(x+y) < f(x) + f(y)$: Pela densidade dos racionais no corpo arquimediano F_2, existe $\frac{m}{n} 1_2 \in F_2$ racional tal que:

$$f(x+y) < \frac{m}{n} 1_2 < f(x) + f(y).$$

Portanto, existe $r := \frac{m}{n} 1_1 \in F_1$ tal que:

$$f(x+y) < \frac{m}{n} 1_2 = f\left(\frac{m}{n} 1_1\right) = f(r) < f(x) + f(y).$$

Da primeira desigualdade acima segue que $x + y < r$, pois f preserva a ordem entre racionais.

Afirmação 1: Existem r_1, r_2 racionais em F_1 tais que $r = r_1 + r_2$ com $r_1 > x$ e $r_2 > y$. ▽

Com efeito, $x + y < r \Rightarrow x < r - y$ e portanto existe r_1 racional em F_1 tal que $x < r_1 < r - y$. Definindo $r_2 := r - r_1$ tem-se que $r = r_1 + r_2$, com $x < r_1$ e $r_1 < r - y \Rightarrow y < r - r_1 = r_2$. ▼

Voltando agora à prova do Lema, utilizando o resultado da Afirmação acima tem-se:

$$f(r) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) > f(x) + f(y),$$

onde a segunda igualdade segue do fato que f é morfismo para racionais, no entanto que a última desigualdade segue do fato que f preserva a ordem em geral, segundo estabelece o Lema 9.4.7 provado acima, com $r_1 > x$ e $r_2 > y$. Mas a relação acima contradiz a relação imediatamente anterior.

Caso $f(x+y) > f(x) + f(y)$: A prova é totalmente análoga. Ou seja, pela densidade dos racionais no corpo arquimediano F_2, existe $\frac{m}{n} 1_2 \in F_2$ racional tal que:

$$f(x) + f(y) < \frac{m}{n} 1_2 < f(x+y).$$

Portanto, existe $r := \frac{m}{n} 1_1 \in F_1$ tal que:

$$f(x) + f(y) < \frac{m}{n} 1_2 = f\left(\frac{m}{n} 1_1\right) = f(r) < f(x+y).$$

Da última desigualdade acima segue que $r < x + y$, pois f preserva a ordem entre racionais.

Afirmação 2: Existem r_1, r_2 racionais em F_1 tais que $r = r_1 + r_2$ com $r_1 < x$ e $r_2 < y$. ▽

Com efeito, $r < x + y \Rightarrow r - y < x$ e portanto existe r_1 racional em F_1 tal que $r - y < r_1 < x$. Definindo $r_2 := r - r_1$ tem-se que $r = r_1 + r_2$, com $r_1 < x$ e $r - y < r_1 \Rightarrow r_2 = r - r_1 < y$. ▼

Voltando agora à prova do Lema, utilizando o resultado da Afirmação acima tem-se:

$$f(r) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) < f(x) + f(y),$$

onde a segunda igualdade segue do fato que f é morfismo para racionais, no entanto que a última desigualdade segue do fato que f preserva a ordem em geral, segundo estabelece o Lema 9.4.7 provado acima, com $r_1 < x$ e $r_2 < y$. Mas a relação acima contradiz a relação imediatamente anterior.

Como os dois casos analisados acima conduzem a contradições, deve ser $f(x+y) = f(x) + f(y)$. ∎

9.4.9 Corolário (do Lema 9.4.8): *$f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in F_1$.* □

Demonstração: Observe-se que $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_1) = 0_2$, onde a primeira igualdade segue do Lema 9.4.8, no entanto que a última igualdade segue da definição de f. Portanto, pela unicidade do inverso aditivo, deve ser $f(-x) = -f(x)$. ∎

9.4.10 Lema: *Se $x, y \in F_1$, com $x > 0$ e $y > 0$, então $f(xy) = f(x)f(y)$.* □

Demonstração: A estratégia da prova é totalmente análoga à da Afirmação 4. Ou seja, dados $x, y \in F_1$ com $x > 0$ e $y > 0$, suponha-se que $f(xy) \neq f(x)f(y)$. Em tal caso, pela propriedade de tricotomia, deve ser $f(xy) < f(x)f(y)$ ou $f(xy) > f(x)f(y)$.

<u>Caso $f(xy) < f(x)f(y)$:</u> Pela densidade dos racionais no corpo arquimediano F_2, existe $\frac{m}{n}1_2 \in F_2$ racional tal que:

$$f(xy) < \frac{m}{n}1_2 < f(x)f(y).$$

Portanto, existe $r := \frac{m}{n}1_1 \in F_1$ tal que:

$$f(xy) < \frac{m}{n}1_2 = f\left(\frac{m}{n}1_1\right) = f(r) < f(x)f(y).$$

Da primeira desigualdade acima segue que $xy < r$, pois f preserva a ordem entre racionais.

<u>Afirmação 1:</u> Existem r_1, r_2 racionais em F_1 tais que $r = r_1 r_2$ com $r_1 > x$ e $r_2 > y$. ▽

Com efeito, observe-se que $0 < y \Rightarrow 0 < y^{-1}$, de onde segue que $xy < r \Rightarrow x < ry^{-1}$ e portanto existe r_1 racional em F_1 tal que $x < r_1 < ry^{-1}$. Como $r_1 > x > 0$, existe $r_1^{-1} > 0$. Definindo $r_2 := r_1^{-1} r > 0$ tem-se que $r = r_1 r_2$, com $x < r_1$. Mais ainda, como $y > 0$ tem-se que $r_1 < ry^{-1} \Rightarrow r_1 y < r \Rightarrow y < r_1^{-1} r = r_2$. ▼

Voltando agora à prova do Lema, utilizando o resultado da Afirmação acima tem-se:

$$f(r) = f(r_1 r_2) = f(r_1)f(r_2) > f(x)f(y),$$

onde a segunda igualdade segue do fato que f é morfismo para os racionais, no entanto que a última desigualdade segue do fato que f preserva a ordem em geral, segundo estabelece o Lema 9.4.7 provado acima, com $r_1 > x$ e $r_2 > y$. Mas a relação acima contradiz a relação imediatamente anterior.

Caso $f(xy) > f(x)f(y)$: A prova é totalmente análoga. Ou seja, pela densidade dos racionais no corpo arquimediano F_2, existe $\frac{m}{n}1_2 \in F_2$ racional tal que:

$$f(x)f(y) < \frac{m}{n}1_2 < f(xy).$$

Portanto, existe $r := \frac{m}{n}1_1 \in F_1$ tal que:

$$f(x)f(y) < \frac{m}{n}1_2 = f\left(\frac{m}{n}1_1\right) = f(r) < f(xy). \tag{9.4.1}$$

Da última desigualdade acima segue que $r < xy$, pois f preserva a ordem entre racionais.

Afirmação 2: Existem r_1, r_2 racionais em F_1 tais que $r = r_1 r_2$ com $r_1 < x$ e $r_2 < y$. $\triangledown$

Com efeito, observe-se que $0 < y \Rightarrow 0 < y^{-1}$, de onde segue que $r < xy \Rightarrow ry^{-1} < x$ e portanto existe r_1 racional em F_1 tal que $ry^{-1} < r_1 < x$. Neste ponto, resulta oportuno observar que:

$$\begin{aligned} x > 0, y > 0 \Rightarrow f(x) > 0, f(y) > 0 \Rightarrow f(x)f(y) > 0 \Rightarrow f(r) > f(x)f(y) > 0 \Rightarrow r > 0 \\ \Rightarrow ry^{-1} > 0 \Rightarrow r_1 > ry^{-1} > 0, \end{aligned}$$

onde o primeiro e quarto condicionais seguem do fato que f preserva a ordem, no entanto que o terceiro condicional segue da primeira desigualdade na relação (9.4.1). Portanto, existe $r_1^{-1} > 0$. Definindo $r_2 := r_1^{-1}r > 0$ tem-se que $r = r_1 r_2$, com $r_1 < x$. Mais ainda, como $y > 0$ tem-se que $ry^{-1} < r_1 \Rightarrow r < r_1 y \Rightarrow r_2 = r_1^{-1} r < y$. $\blacktriangledown$

Voltando agora à prova do Lema, utilizando o resultado da Afirmação acima tem-se:

$$f(r) = f(r_1 r_2) = f(r_1)f(r_2) < f(x)f(r_2) < f(x)f(y).$$

Aqui, a segunda igualdade segue do fato que f é morfismo para os racionais. A primeira desigualdade segue do fato que f preserva a ordem em geral, segundo estabelece o Lema 9.4.7 provado acima, com $r_1 < x$ e $r_2 > 0 \Rightarrow f(r_2) > 0$. A última desigualdade segue do fato que f preserva a ordem com $r_2 < y$ e $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$. Mas a relação acima contradiz a primeira desigualdade na relação (9.4.1).

Como os dois casos analisados acima conduzem a contradições, deve ser $f(xy) = f(x)f(y)$. $\blacksquare$

9.4.11 Lema: *Se $x = 0$, ou $y = 0$, então $f(xy) = f(x)f(y)$.* $\square$

Demonstração: Para fixar ideias, suponha que $x = 0$. Em tal caso, tem-se:

$$f(xy) = f(0_1 y) = f(y 0_1) = f(0_1) = 0_2 = f(y)0_2 = 0_2 f(y) = f(0_1)f(y) = f(x)f(y),$$

onde a quarta e sétima igualdades acima seguem da definição de f. Se $y = 0$, a prova é completamente análoga *mutatis mutandi.* $\blacksquare$

9.4.12 Lema: *Se $x < 0$ e $y > 0$, ou se $x > 0$ e $y < 0$, então $f(xy) = f(x)f(y)$.* $\square$

Demonstração: Para fixar ideias, suponha que $x < 0$ e $y > 0$. Em tal caso tem-se:

$$-f(xy) = f(-(xy)) = f((-x)y) = f(-x)f(y) = (-f(x))f(y) = -(f(x)f(y)) \Rightarrow f(xy) = f(x)f(y).$$

A primeira e quarta igualdades seguem do Corolário 9.4.9, no entanto que a terceira segue do Lema 9.4.10 anterior com $-x > 0$, pois $x < 0$ e $y > 0$. Se $x > 0$ e $y < 0$, a prova é completamente análoga *mutatis mutandi.* ∎

9.4.13 Lema: *Se $x < 0$ e $y < 0$, então: $f(xy) = f(x)f(y)$.* $\square$

Demonstração: Observe-se que $x < 0, y < 0 \Rightarrow -x > 0, -y > 0$. Portanto:

$$f(xy) = f((-x)(-y)) = f(-x)f(-y) = (-f(x))(-f(y)) = f(x)f(y).$$

A segunda igualdade segue do Lema 9.4.10 anterior com $-x > 0$ e $-y > 0$, no entanto que a terceira segue do Corolário 9.4.9. Se $x > 0$ e $y < 0$, a prova é completamente análoga *mutatis mutandi.* ∎

Todos os resultados da presente seção podem ser resumidos no seguinte teorema.

9.4.14 Teorema: *Dois corpos ordenados e completos quaisquer são isomorfos. Em particular, essencialmente existe* no máximo *apenas um corpo ordenado e completo. Em outras palavras, se um tal corpo existe, então é único, salvo isomorfismos.* $\square$

Demonstração: Se F_1 e F_2 são tais corpos, basta exibir um isomorfismo $f : F_1 \longmapsto F_2$ entre ambos. Tal isomorfismo pode ser definido como nas Definições 9.4.1 e 9.4.4. O Lema 9.4.3 garante que tal definição é consistente.

O Lema 9.4.7 estabelece que f preserva a ordem. Portanto, o Lema 9.2.2(b,c) garante que f é injetora e sobrejetora.

Com relação à estrutura algébrica, o Lema 9.4.8 estabelece que f preserva a soma. O conjunto dos Lemas 9.4.10, 9.4.11, 9.4.12 e 9.4.13 garante que f também preserva o produto.

Portanto, f é o isomorfismo procurado. ∎

Capítulo 10

Completando Corpos Ordenados

10.1 Sequências Nulas e de Cauchy

10.1.1 Definição: Uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **nula** se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\; N(\epsilon) \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant N(\epsilon) \;\Rightarrow\; |a_n| < \epsilon.$$

O conjunto de sequências nulas em F será denotado por $\mathcal{N}(F)$. ♣

Em outras palavras, uma sequência é nula se converge para 0. O Exercício 7.5.1 fornece exemplos de sequências nulas.

10.1.2 Lema: *Seja F corpo ordenado. Então:*

(a) $\mathcal{N}(F) \subset \mathcal{C}(F) \subset \mathcal{B}(F)$. *Ou seja, toda sequência nula é de Cauchy e toda sequência de Cauchy é limitada.*

(b) $\mathcal{N}(F) \subsetneqq \mathcal{C}(F)$.

(c) *Seja $\{a_n\} \in \mathcal{C}(F)\backslash\mathcal{N}(F)$. Então existe $F \ni \epsilon_0 > 0$ e $S(\epsilon_0) \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$n \geqslant S(\epsilon_0) \;\Rightarrow\; |a_n| > \epsilon_0/2.$$ □

Demonstração: **(a)** Toda sequência nula é convergente, e portanto de Cauchy, pelo Exercício 7.3.1(b). Toda sequência de Cauchy é limitada, pelo Lema 7.2.2.

(b) Ou seja, existem sequências de Cauchy que convergem não necessariamente para zero, como, por exemplo, qualquer sequência constante não-nula. Um outro exemplo não-trivial de tal sequência é exibido no Exercício 8.5.1.

(c) Se $\{a_n\} \notin \mathcal{N}(F)$, então existe $F \ni \epsilon_0 > 0$ tal que:

$$\forall\, N \in \mathbb{N}\, \exists\; p(N) \geqslant N \,:\, \left|a_{p(N)}\right| \geqslant \epsilon_0.$$

Por outro lado, se $\{a_n\} \in \mathcal{C}(F)$, então para todo $F \ni \epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Portanto, se $n \geqslant N(\epsilon_0/2)$, tem-se:

$$\epsilon_0 \leqslant \left|a_{p(N(\epsilon_0/2))}\right| = \left|a_{p(N(\epsilon_0/2))} - a_n + a_n\right| \leqslant \left|a_{p(N(\epsilon_0/2))} - a_n\right| + |a_n| < \frac{\epsilon_0}{2} + |a_n|,$$

onde a última desigualdadade segue do fato da sequência ser de Cauchy com $p(N(\epsilon_0/2)) \geqslant N(\epsilon_0/2)$ e $n \geqslant N(\epsilon_0/2)$. Da relação acima tem-se que $n \geqslant N(\epsilon_0/2) \Rightarrow |a_n| > \epsilon_0/2$, portanto basta tomar $S(\epsilon_0) \geqslant N(\epsilon_0/2)$. ∎

10.1.3 Lema: *Seja F corpo ordenado. Então:*

(a) *Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências de Cauchy em F, as operações dadas por:*

$$\{a_n\} + \{b_n\} := \{a_n + b_n\},$$
$$\{a_n\}\{b_n\} := \{a_n b_n\};$$

estão bem definidas em $\mathcal{C}(F)$.

(b) *Com as operações de soma e produto acima definidas, o conjunto $\mathcal{C}(F)$ é um anel comutativo com identidade. Os elementos neutros para a soma e produto estão dados respectivamente por:*

$$\{0\} := 0, 0, 0, \dots ;$$
$$\{1\} := 1, 1, 1, \dots .$$

(c) *$\mathcal{N}(F)$ é subgrupo abeliano aditivo de $\mathcal{C}(F)$, ou seja, subgrupo comutativo com relação à adição.*

(d) *$\mathcal{N}(F)$ é um ideal multiplicativo próprio de $\mathcal{C}(F)$.*

(e) *A relação $\sim$ em $\mathcal{C}(F)$ definida por:*

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \{a_n\} - \{b_n\} \in \mathcal{N}(F)$$

é uma relação de equivalência. □

Demonstração: **(a)** Se $\{a_n\} \in \mathcal{C}(F)$ então:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ N_1(\epsilon) \in \mathbb{N} : m, n \geqslant N_1(\epsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Analogamente, se $\{b_n\} \in \mathcal{C}(F)$ então:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ N_2(\epsilon) \in \mathbb{N} : m, n \geqslant N_2(\epsilon) \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\mathbb{N} \ni M := \max\{N_1(\epsilon/2), N_2(\epsilon/2)\}$. Então:

$$m, n \geqslant M \Rightarrow |a_n + b_n - (a_m + b_n)| \leqslant |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\} \in \mathcal{C}(F)$. Por outro lado, pelo Lema 10.1.2(a), $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{C}(F) \subset \mathcal{B}(F)$. Portanto, existem $A, B > 0$ tais que:

$$|a_n| \leqslant A, \forall\, n \in \mathbb{N};$$
$$|a_n| \leqslant B, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Com efeito, se fosse $A = 0$, então $0 \leqslant |a_n| \leqslant A = 0, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$, portanto bastaria substituir A por $A+1$. Idênticas considerações aplicam-se *mutatis mutandi* no caso $B = 0$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\mathbb{N} \ni M := \max\{N_1(\epsilon/2A), N_2(\epsilon/2B)\}$. Então:

$$\begin{aligned} m, n \geqslant M \Rightarrow |a_nb_n - a_mb_m| &= |a_nb_n - a_nb_m + a_nb_m - a_mb_m| \\ &\leqslant |a_n|\,|b_n - b_m| + |b_m|\,|a_n - a_m| < A\,\frac{\epsilon}{2A} + B\,\frac{\epsilon}{2B} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\{a_n\}\{b_n\} = \{a_nb_n\} \in \mathcal{C}(F)$.

(b) Segue trivialmente do item anterior e das propriedades das operações no corpo F.

(c) Em primeiro lugar, observe que se $\{a_n\} \in \mathcal{N}(F)$, então:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n > N(\epsilon) \Rightarrow \epsilon > |a_n| = |-a_n|\,,$$

e portanto $-\{a_n\} = \{-a_n\} \in \mathcal{N}(F)$ também. Agora, se $\{a_n\} \in \mathcal{N}(F)$ então:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N_1(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geqslant N_1(\epsilon) \Rightarrow |a_n| < \epsilon.$$

Analogamente, se $\{b_n\} \in \mathcal{N}(F)$ então:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N_2(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geqslant N_2(\epsilon) \Rightarrow |b_n| < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$, seja $\mathbb{N} \ni M := \max\{N_1(\epsilon/2), N_2(\epsilon/2)\}$. Então:

$$n \geqslant M \Rightarrow |a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \in \mathcal{N}(F)$. Obviamente, $\{0\} = \{0, 0, 0, \dots\} \in \mathcal{N}(F)$, pois em tal caso, dado $\epsilon > 0$, basta tomar qualquer $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$.

(d) Se $\{a_n\} \in \mathcal{C}(F) \subset \mathcal{B}(F)$, então existe $A > 0$ tal que:

$$|a_n| \leqslant A, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se $\{b_n\} \in \mathcal{N}(F)$, então:

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N} : n \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow |b_n| < \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$, tem-se:

$$n \geqslant N(\epsilon/A) \Rightarrow |a_nb_n| = |a_n|\,|b_n| \leqslant A\,|b_n| < A\,\frac{\epsilon}{A} = \epsilon.$$

Portanto, $\{a_n\}\{b_n\} = \{a_nb_n\} \in \mathcal{N}(F)$, provando que $\mathcal{N}(F)$, é um ideal em $\mathcal{C}(F)$. Observe-se que $\{1\} = \{1, 1, 1, \dots\} \in \mathcal{C}(F) \backslash \mathcal{N}(F)$, e portanto $\mathcal{N}(F) \subsetneqq \mathcal{C}(F)$. Ou seja, é um ideal próprio.

(e) Segue do fato de ser $\mathcal{N}(F)$ subgrupo abeliano de $\mathcal{C}(F)$, segundo o item (c) anterior. ∎

10.1.4 Definição: Seja $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ o conjunto de classes de equivalência de $\mathcal{C}(F)$ sob a relação acima definida.

A classe de equivalência de um elemento $\{a_n\}$ será denotada por $[a_n]$. Observe-se que $[a_n] = \{a_n\} + \mathcal{N}(F)$. ♣

10.1.5 Lema: *Seja F corpo ordenado. Então:*

(a) *Se $[a_n]$ e $[b_n]$ pertencem a $\mathcal{C}/\mathcal{N}$, então as operações de soma e multiplicação definidas respectivamente por:*

$$\begin{aligned} [a_n] + [b_n] &:= [a_n + b_n], \\ [a_n][b_n] &:= [a_n b_n]; \end{aligned}$$

estão bem definidas em $\mathcal{C}/\mathcal{N}$.

(b) *Com as operações acima definidas, $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ é um corpo. Os elementos neutros para a soma e produto estão dados por $[0] = \{0\} + \mathcal{N}(F) = \mathcal{N}(F)$ e $[1]$, respectivamente.* □

Demonstração: **(a)** Observe-se que, como $\mathcal{N}$ é abeliano, tem-se que $[a_n] = \mathcal{N} + \{a_n\} = \{a_n\} + \mathcal{N}$. Agora, se $x \in [a_n]$, então $x = \{a_n\} + \{c_n\}$, com $\{c_n\} \in \mathcal{N}$. Analogamente, se $y \in [b_n]$, então $y = \{b_n\} + \{d_n\}$, com $\{d_n\} \in \mathcal{N}$. Portanto:

$$\begin{aligned} x + y = (\{a_n\} + \{c_n\}) + (\{b_n\} + \{d_n\}) &= \{a_n\} + \{b_n\} + \{c_n\} + \{d_n\} \\ &= \{a_n + b_n\} + \{c_n\} + \{d_n\}. \end{aligned}$$

Portanto, $x + y \in [a_n + b_n]$, dado que $\{c_n\} + \{d_n\} \in \mathcal{N}$, pois $\mathcal{N}$ é subgrupo aditivo. Analogamente, tem-se:

$$\begin{aligned} xy = (\{a_n\} + \{c_n\})\,(\{b_n\} + \{d_n\}) &= \{a_n\}\{b_n\} + \{a_n\}\{d_n\} + \{c_n\}\{b_n\} + \{c_n\}\{d_n\} \\ &= \{a_n b_n\} + \{a_n\}\{d_n\} + \{c_n\}\{b_n\} + \{c_n\}\{d_n\}. \end{aligned}$$

Portanto, $xy \in [a_n b_n]$, dado que $\{a_n\}\{d_n\} + \{c_n\}\{b_n\} + \{c_n\}\{d_n\} \in \mathcal{N}$, pois $\mathcal{N}$ é ideal em $\mathcal{C}$.

(b) Basta provar que todo elemento não-nulo $[a_n]$ em $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ tem inverso multiplicativo. Em primeiro lugar, observe-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}/\mathcal{N} \ni [a_n] = \{a_n\} + \mathcal{N} \neq \mathcal{N} = [0] &\iff \mathcal{C} \ni \{a_n\} \not\sim \{0\} \\ &\iff \mathcal{C} \ni \{a_n\} - \{0\} = \{a_n\} \notin \mathcal{N} \iff \{a_n\} \in \mathcal{C} \backslash \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Portanto, basta provar que para cada $\{a_n\} \in \mathcal{C}\backslash\mathcal{N}$ existe $\{x_n\} \in \mathcal{C}$ tal que:

$$[a_n][x_n] = [a_n x_n] = \{a_n x_n\} + \mathcal{N} = \{1\} + \mathcal{N} = [1].$$

Ou seja, que $\{a_n x_n - 1\} \in \mathcal{N}$. Para tanto, pelo Lema 10.1.2(c), existem $\epsilon_0 > 0$ e $S(\epsilon_0) \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n \geqslant S(\epsilon_0) \;\Rightarrow\; |a_n| > \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Seja $s := S(\epsilon_0)$. Define-se x_n da seguinte maneira:

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, 2, \ldots, s-1; \\ \dfrac{1}{a_n}, & \text{se } n \geqslant s. \end{cases}$$

Ou seja:

$$\{a_n x_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, 1, 1, 1, \ldots.$$

Portanto:

$$\{a_n x_n - 1\} = a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_{s-1} - 1, 0, 0, 0, \ldots;$$

de onde segue obviamente que $\{a_n x_n - 1\} \in \mathcal{N}$. No entanto, resta ainda provar que $\{x_n\} \in \mathcal{C}$. Ou seja, provar que a sequência $\{x_n\}$ definida acima é de Cauchy. Para tanto, observe que:

$$m, n \geqslant s = S(\epsilon_0) \;\Rightarrow\; |x_n - x_m| = \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m} \right| = \frac{1}{|a_n|} \frac{1}{|a_m|} \; |a_n - a_m| \leqslant \frac{2}{\epsilon_0} \frac{2}{\epsilon_0} \; |a_n - a_m| \, .$$

De onde tem-se:

$$m, n \geqslant \max \left\{ S(\epsilon_0), N\left(\frac{\epsilon_0^2}{4}\, \epsilon \right) \right\} \;\Rightarrow\; |x_n - x_m| < \epsilon. \qquad \blacksquare$$

10.2 Propriedades do Corpo $\mathcal{C}/\mathcal{N}$

10.2.1 Definição: O corpo $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ será denotado por $\overline{F}$ e seus elementos serão denotados por letras gregas minúsculas $\overline{F} \ni \alpha, \beta, \ldots$. ♣

10.2.2 Lema: *Seja F corpo ordenado. Considere o subconjunto $\overline{P} \subset \overline{F}$ definido por:*

$$\overline{P} := \{\alpha \in \overline{F} \quad \textit{tal que} \quad \alpha \neq 0 \quad \wedge \quad \exists \{a_n\} \in \alpha \,:\, a_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Então:

(a) *Com o conjunto $\overline{P}$, o corpo $\overline{F}$ resulta ordenado.*

(b) *A aplicação $F \ni a \longmapsto \overline{a} \in \overline{F}$, definida por:*

$$\overline{a} := [a, a, a, \ldots]$$

é um morfismo injetor que preserva a ordem. □

Demonstração: **(a)** Seja $\alpha \in \overline{F}$ e suponha-se que $\alpha \neq 0 = \mathcal{N}$. Em tal caso, existe $\{a_n\} \in \alpha \backslash \mathcal{N}$ e, pelo Lema 10.1.2(c) existem $\epsilon_0 > 0$ e $S(\epsilon_0) \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n \geqslant S(\epsilon_0) \;\Rightarrow\; |a_n| > \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Por outro lado, como $\{a_n\} \in \mathcal{C}$, sabe-se que para $\epsilon_0 > 0$ existe $N(\epsilon_0) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geqslant N(\epsilon_0) \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon_0. \tag{10.2.1}$$

Seja $M := \max\{N(\epsilon_0), S(\epsilon_0)\}$. Como $M \geqslant S(\epsilon_0)$, tem-se que $|a_M| > \epsilon_0/2$, e portanto deve ser $a_M > \epsilon_0/2$, ou $a_M < -\epsilon_0/2$.

Afirmação 1: Suponha-se que $a_M > \epsilon_0/2$. Então, $n \geqslant M \Rightarrow a_n > \dfrac{\epsilon_0}{2} > 0$. $\triangledown$

Com efeito, $n \geqslant M \geqslant S(\epsilon_0) \Rightarrow |a_n| > \epsilon_0/2$. Portanto, deve ser $a_n > \epsilon_0/2$, ou $a_n < -\epsilon_0/2$. Neste último caso, ou seja, se fosse $a_n < -\epsilon_0/2$, teria-se que $a_M > \epsilon_0/2 > -\epsilon_0/2 > a_n$. Portanto:

$$|a_M - a_n| - \epsilon_0 = a_M - a_n - \epsilon_0 = \left(a_M - \frac{\epsilon_0}{2}\right) + \left(-\frac{\epsilon_0}{2} - a_n\right) > 0 \Rightarrow |a_M - a_n| > \epsilon_0.$$

Mas esta última relação contradiz 10.2.1, pois $n \geqslant M \geqslant N(\epsilon_0)$. Portanto, deve ser $a_n > \epsilon_0/2$ para todo $n \geqslant M$. $\blacktriangledown$

Voltando agora à prova do Lema, suponha-se que $a_M > \epsilon_0/2$. Considere-se a sequência $\{b_n\}$ definida como:

$$b_n = \begin{cases} a_M, & \text{se } n < M; \\ a_n, & \text{se } n \geqslant M. \end{cases}$$

Ou seja:

$$\{b_n\} = \underbrace{a_M, \ldots, a_M}_{M-1 \text{ vezes}}, a_M, a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots.$$

Obviamente, $\{b_n\} \in \mathcal{C}$ e:

$$\{a_n - b_n\} = a_1 - a_M, \ldots, a_{M-1} - a_M, 0, 0, 0, \ldots;$$

de onde segue que $\{a_n - b_n\} \in \mathcal{N}$, e portanto $\{b_n\} \sim \{a_n\}$, ou seja $\{b_n\} \in \alpha$. Além disso, $b_n > \epsilon_0/2 > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, pela Afirmação 1. Ou seja, $\alpha \in \overline{P}$ neste caso.

Afirmação 2: Suponha-se que $a_M < -\epsilon_0/2$. Então, $n \geqslant M \Rightarrow a_n < -\dfrac{\epsilon_0}{2} < 0$. $\triangledown$

Com efeito, $n \geqslant M \geqslant S(\epsilon_0) \Rightarrow |a_n| > \epsilon_0/2$. Portanto, deve ser $a_n > \epsilon_0/2$, ou $a_n < -\epsilon_0/2$. No primeiro caso, ou seja, se fosse $a_n > \epsilon_0/2$, teria-se que $a_n > \epsilon_0/2 > -\epsilon_0/2 > a_M$. Portanto:

$$|a_n - a_M| - \epsilon_0 = a_n - a_M - \epsilon_0 = \left(a_n - \frac{\epsilon_0}{2}\right) + \left(-\frac{\epsilon_0}{2} - a_M\right) > 0 \Rightarrow |a_n - a_M| > \epsilon_0.$$

Mas esta última relação contradiz (10.2.1), pois $n \geqslant M \geqslant N(\epsilon_0)$. Portanto, deve ser $a_n < -\epsilon_0/2$ para todo $n \geqslant M$. $\blacktriangledown$

Voltando agora à prova do Lema, suponha-se que $a_M < -\epsilon_0/2$. A sequência $\{b_n\}$ definida anteriormente possui as mesmas propriedades que antes, com a diferença que agora $b_n < -\epsilon_0/2 < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, pela Afirmação 2. Ou seja, $-\alpha \in \overline{P}$ neste caso.

(b) Observe-se que:

$$\overline{a+b} = [a+b] = [a] + [b] = \overline{a} + \overline{b};$$
$$\overline{ab} = [ab] = [a][b] = \overline{a}\,\overline{b}.$$

Portanto, a aplicação é um morfismo.

<u>Afirmação:</u> $\overline{a} = 0 \Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{N} \Leftrightarrow a = 0.$ $\triangledown$

Com efeito, a primeira equivalência é consequência imediata das definições. Para provar a segunda, se $\{a\} \in \mathcal{N}$ e fosse $a \neq 0$ teria-se que $|a| > 0$. Tomando então $\epsilon = |a| > 0$ teria-se que $|a| < \epsilon = |a|$, o que é uma contradição. Reciprocamente, se $a = 0$ então obviamente $\{a\} = \{0\} \in \mathcal{N}$. $\blacktriangledown$

Agora, $\overline{a} = \overline{b} \Rightarrow 0 = \overline{b} - \overline{a} = \overline{b-a}$, pois a aplicação é morfismo. Pela afirmação anterior deve ser $b - a = 0$. Ou seja, $a = b$, o que prova que o morfismo é injetor. Por outro lado, $a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow \overline{b-a} \neq 0$, pela Afirmação anterior. Portanto, $\overline{b-a} \in \overline{P}$. Ou seja, $\overline{b-a} > 0 \Rightarrow \overline{b} > \overline{a}$, o que prova que o morfismo preserva a ordem. Observe-se que este fato fornece uma outra prova da injetividade, pois pelo Lema 9.2.2(b), todo morfismo que preserva a ordem é automaticamente injetor. $\blacksquare$

10.2.3 Lema: *Seja F corpo ordenado. Se $\overline{F} \ni \alpha > 0$, então existe $b \in F$ tal que $0 < \overline{b} < \alpha$.* $\square$

Demonstração: Se $\overline{F} \ni \alpha > 0$, então existe $\{a_n\} \in \alpha \,:\, a_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Observe-se também que $\{a_n\} \in \mathcal{C} \backslash \mathcal{N}$ pelo fato de pertencer à classe α que é não-nula (vide o começo da prova do Lema 10.1.5(b)). Pelo Lema 10.1.2(c), existem $\epsilon_0 > 0$ e $S(\epsilon_0) \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n \geqslant S(\epsilon_0) \Rightarrow a_n = |a_n| > \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Se $b_n := \epsilon_0/2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, então:

$$\alpha - [b_n] = [a_n] - [b_n] = [a_n - b_n] \geqslant 0,$$

onde a última desigualdade segue do fato que $a_n - b_n > 0$ pela escolha dos b_n. Observe-se também que:

$$2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\epsilon_0}{3} < \frac{\epsilon_0}{2},$$

onde o último condicional segue do fato que $\epsilon_0 > 0$. Como a inclusão canônica preserva a ordem, tem-se:

$$\overline{\left(\frac{\epsilon_0}{3}\right)} < \overline{\left(\frac{\epsilon_0}{2}\right)} \Rightarrow -\overline{\left(\frac{\epsilon_0}{2}\right)} < -\overline{\left(\frac{\epsilon_0}{3}\right)} \Rightarrow \alpha - \overline{\left(\frac{\epsilon_0}{3}\right)} > \alpha - \overline{\left(\frac{\epsilon_0}{2}\right)} = \alpha - [b_n] \geqslant 0 \Rightarrow \alpha > \overline{\left(\frac{\epsilon_0}{3}\right)} > 0.$$

Na última relação, a segunda desigualdade decorre do fato que $\epsilon_0 > 0$ e a inclusão canônica preserva a ordem. Portanto basta tomar $b = \dfrac{\epsilon_0}{3}$. $\blacksquare$

10.2.4 Lema: *Se F é ordenado arquimediano, então $\overline{F}$ também é.* $\square$

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta \in \overline{F}$ tais que $0 < \alpha \leqslant \beta$. Pelo Lema anterior, existe $b > 0$ tal que $0 < \overline{b} < \alpha$.

Afirmação: Existe $d \in F$ tal que $\beta < \overline{d}$. $\triangledown$

Com efeito, $\beta \geqslant \alpha > 0 \Rightarrow \beta > 0$, portanto existe $\mathcal{C} \backslash \mathcal{N} \ni \{b_n\} \in \beta$ com $b_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Como toda sequencia de Cauchy é limitada, existe $M > 0$ tal que:

$$b_n = |b_n| \leqslant M < M + 1 =: d.$$

Observe-se que $d - b_n > 0$ e $\{d - b_n\} \notin \mathcal{N}$ pois:

$$(d - b_n) - 1 = (d - 1) - b_n = M - b_n > 0 \Rightarrow d - b_n > 1, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

de onde segue que $0 \neq [d - b_n] = [d] - [b_n] = \overline{d} - \beta$. Portanto, $0 < \overline{d} - \beta$, ou seja, $\beta < \overline{d}$. $\blacktriangledown$

Agora, como F é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}_F$ tal que $nb > d$. Portanto, $n\alpha > n\overline{b} > \overline{nb} > \overline{d} > \beta$. Ou seja, $n\alpha > \beta$, o que prova que $\overline{F}$ é arquimediano. $\blacksquare$

10.2.5 Lema: *Seja F corpo ordenado. Considere-se $\alpha \in \overline{F}$. Então, para toda $\{a_n\} \in \alpha$, tem-se:*

$$\lim_{n \to \infty} \overline{a_n} = \alpha.$$ $\square$

Demonstração: Seja $\{a_n\} \in \alpha \in \overline{F}$. Suponha-se dado $\overline{F} \ni \varepsilon > 0$. Pelo Lema 10.2.3 existe $e \in F$ tal que $0 < \overline{e} < \varepsilon$. Também existe $N(e) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n, m \geqslant N(e) \Rightarrow |a_n - a_m| < e.$$

Seja $p_0 \geqslant N(e)$ arbitrário, mas fixo. Se $n \geqslant N(e)$, tem-se:

$$a_{p_0} - a_n \leqslant |a_{p_0} - a_n| < e;$$
$$a_n - a_{p_0} \leqslant |a_{p_0} - a_n| < e.$$

De onde segue que:

$$\overline{a_{p_0}} - \alpha < \overline{e} < \varepsilon;$$
$$\alpha - \overline{a_{p_0}} < \overline{e} < \varepsilon.$$

Portanto, $-\varepsilon < \overline{a_{p_o}} - \alpha < \varepsilon$. Ou seja, $|\overline{a_{p_o}} - \alpha| < \varepsilon$. Como isso vale para todo $p_0 \geqslant N(e)$, segue que $\lim\limits_{p_0 \to \infty} \overline{a_{p_0}} = \alpha$. $\blacksquare$

10.2.6 Lema: *Seja F corpo ordenado. Então o corpo $\overline{F}$ é completo.* $\square$

Demonstração: Seja $\{\alpha_n\}$ sequência de Cauchy em $\overline{F}$. Se $\{\alpha_n\}$ fosse constante a partir de algum n em diante, a sua convergência é imediata. Caso contrário, seria possível construir uma sub-sequência $\{\alpha_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\alpha_{n_k} \neq \alpha_{n_{k+1}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e em tal caso, pelo Lema 7.2.3, bastaria provar a convergência apenas para essa sub-sequência. Em resumo, se pode supor, sem perda de generalidade, que a sequência de Cauchy original $\{\alpha_n\}$ satisfaz $\alpha_n \neq \alpha_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Em tal caso, resulta possível definir:

$$\mu_n := |\alpha_n - \alpha_{n+1}| > 0$$

Por hipótese, para todo $\overline{F} \ni \varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geqslant N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |\alpha_m - \alpha_n| < \varepsilon.$$

Em particular, tem-se:

$$n \geqslant N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \mu_n = |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \varepsilon.$$

Pelo Lema 10.2.5, para cada $n \in \mathbb{N}$ é possível escolher $a_n \in F$ tal que $|\overline{a_n} - \alpha_n| < \mu_n$.

<u>Afirmação 1:</u> A sequência $\{a_n\}$ assim construída resulta de Cauchy em F. $\triangledown$

Com efeito, seja $F \ni e > 0$ dado. Se $n, m \geqslant N(\overline{e}/3)$, então tem-se:

$$\begin{aligned}|\overline{a_m} - \overline{a_n}| \leqslant |\overline{a_m} - \alpha_m| + |\alpha_m - \alpha_n| + |\alpha_n - \overline{a_n}| &< \mu_m + \frac{1}{3}\,\overline{e} + \mu_n \\ &< \frac{1}{3}\,\overline{e} + \frac{1}{3}\,\overline{e} + \frac{1}{3}\,\overline{e} = \overline{e}.\end{aligned}$$

Ou seja, equivalentemente:

$$-\overline{e} < \overline{a_m} - \overline{a_n} < \overline{e}.$$

Portanto, como a inclusão canônica é um isomorfismo que preserva a ordem, deve ser:

$$-e < a_m - a_n < e.$$

Ou seja, equivalentemente $|a_m - a_n| < e$, o que prova o afirmado. $\blacktriangledown$

Pelo resultado da Afirmação anterior, pode-se definir $\mathcal{C}/\mathcal{N} \ni \beta := [a_n] = \{a_n\} + \mathcal{N}$.

<u>Afirmação 2:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \beta$. $\triangledown$

Com efeito, seja $\overline{F} \ni \varepsilon > 0$ dado. Pela escolha dos a_n, tem-se que:

$$|\overline{a_n} - \alpha_n| < \mu_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

onde a última desigualdade vale para $n \geqslant N(\varepsilon/2)$. Por outro lado, pelo Lema 10.2.5, existe $M(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant M(\varepsilon/2) \;\Rightarrow\; |\overline{a_n} - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, se $n \geqslant \max\{N(\varepsilon/2),\; M(\varepsilon/2)\}$, tem-se:

$$|\alpha_n - \beta| \leqslant |\alpha_n - \overline{a_n}| + |\overline{a_n} - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \blacktriangledown$$

Através do resultado desta última afirmação, foi verificado que qualquer sequência de Cauchy no corpo $\overline{F}$ é convergente, demonstrando *ipso facto* a completeza de tal corpo. $\blacksquare$

10.2.7 Lema: *Seja F corpo ordenado. Então:*

(a) *Toda sequência de Cauchy em $\overline{F}$ difere de uma sequência constante por uma sequência nula. Ou seja, para toda $\{\alpha_n\} \in \mathcal{C}(\overline{F})$ existe $\beta \in \overline{F}$ tal que $\{\alpha_n - \beta\} \in \mathcal{N}(\overline{F})$.*

(b) *O corpo $\overline{\overline{F}}$ é isomorfo a corpo $\overline{F}$.* $\square$

Demonstração: **(a)** Se $\{\alpha_n\} \in \mathcal{C}(\overline{F})$, então, como $\overline{F}$ é completo, existe $\beta \in \overline{F}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \beta.$$

Portanto, definindo $\mu_n := \beta$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a sequência $\{\mu_n\}$ assim definida é constante em $\overline{F}$, e tem-se:

$$\{\alpha_n\} - \{\mu_n\} = \{\alpha_n - \mu_n\} = \{\alpha_n - \beta\} \in \mathcal{N}(\overline{F}).$$

(b) Pelo Lema 10.2.2(b), sabe-se que a inclusão canônica $\overline{F} \ni \alpha \longmapsto \overline{\alpha} \in \overline{\overline{F}}$ é um morfismo injetor que preserva a ordem. Pelo item (a) anterior, também é sobrejetor. Com efeito, dada $[\alpha_n] \in \overline{\overline{F}}$ existe $\beta \in \overline{F}$ tal que $[\alpha_n] = [\beta]$. Ou seja, $\overline{\beta} = [\alpha_n]$. Portanto, $\overline{F}$ e $\overline{\overline{F}}$ são isomorfos via a inclusão canônica. $\blacksquare$

Exercícios para o Capítulo 10

10.3 Relações de Equivalência

Sejam X, Y conjuntos.

10.3.1 Definição: Uma **relação binária**, ou simplesmente **relação**, R **entre** X **e** Y é um subconjunto de $X \times Y$.

Se R é uma relação e $(x, y) \in R$, então denota-se $x \sim y$. Em tal caso, por abuso de notação e linguagem, costuma-se dizer "a relação $\sim$" para referir-se à relação R.

No caso em que $X = Y$, uma relação entre X e X é denominada **relação em** X. ♣

10.3.2 Definição: Sejam X um conjunto e $\sim$ uma relação em X. A relação é dita:

(a) **Reflexiva**: se $x \sim x$ para todo $x \in X$.

(b) **Simétrica**: se $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ para todo $x, y \in X$.

Observe-se que em uma relação simétrica tem-se que $x \sim y \iff y \sim x$ para todo $x, y \in X$. Com efeito, basta aplicar a propriedade de simetria duas vezes consecutivas, na segunda vez intercambiando x e y.

(c) **Transitiva**: se $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$ para todo $x, y, z \in X$. ♣

10.3.3 Definição: Uma relação é dita **relação de equivalência** ou simplesmente **equivalência** se é reflexiva, simétrica e transitiva. ♣

10.3.4 Definição: Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X. Se $x \in X$, então a **classe de equivalência** de x é o subconjunto $[x]$ de X definido por:

$$[x] := \{y \in X \, : \, y \sim x\}.$$ ♣

10.3.5 Observação: Dado $x \in X$, observe-se que $[x]$ nunca é vazia, pois da reflexividade da relação segue que $x \sim x$ e portanto $x \in [x]$. ♣

10.3.6 Lema: *Sejam $x, y \in X$. Então, $[x] = [y]$ ou $[x] \cap [y] = \emptyset$. Em particular, duas classes de equivalência diferentes são necessariamente disjuntas.* □

Desta maneira, resulta possível expressar que uma relação de equivalência $\sim$ quebra X em subconjuntos não vazios disjuntos entre si, a saber, as diferentes classes de equivalência.

10.3.7 Definição: Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X. O **quociente** de X pela relação $\sim$ é o conjunto das classes de equivalência de X sob $\sim$, denotado por $X/_{\sim}$. Ou seja:

$$X/_{\sim} := \{[x] \,:\, x \in X\}.$$ ♣

10.3.8 Lema: *Seja agora G um* grupo *e N um subconjunto de G. Então:*

(a) *A relação $\sim$ em G definida por:*

$$a \sim b \iff ab^{-1} \in N$$

é uma equivalência se e somente se N é um subgrupo de G.

(b) *Em tal caso, $[a] = Na := \{na \,:\, n \in N\}$.* □

10.3.9 Lema: *Sejam G grupo, N subconjunto de G e $\sim$ a relação definida no Lema anterior. Prove que a operação em $G/_{\sim}$ definida por $[a][b] := [ab]$ está bem definida se N for um* ideal à direita *em G. Ou seja, se $n \in N \wedge g \in G \Rightarrow ng \in N$.* □

10.4 O Ideal de Sequências Nulas

10.4.1 Exercício: Prove que o conjunto de sequências nulas $\mathcal{N}(F)$ também é um ideal multiplicativo no conjunto $\mathcal{B}(F)$ de sequências limitadas. Ou seja, $\{a_n\} \in \mathcal{N}(F)$ e $\{b_n\} \in \mathcal{B}(F)$ implica que $\{a_n\, b_n\} \in \mathcal{N}(F)$. Em outras palabras, o produto de uma sequência que converge para zero vezes uma sequência limitada também converge para zero. ♣

10.4.2 Exercício: Prove que a sequência do Lema 10.2.5 é de Cauchy. Ou seja, se F é um corpo ordenado e $\alpha \in \overline{F}$, então para cada $\{a_n\} \in \alpha$, a sequência $\{\overline{a_n}\}$ é de Cauchy em $\overline{F}$. ♣

Capítulo 11

Raízes n-ésimas

11.1 Existência e Unicidade

Seja F corpo ordenado e completo.

11.1.1 Teorema: *Para cada $F \ni x > 0$ e cada $n \in \mathbb{N}_F$ inteiro* positivo *existe um* único *$F \ni y > 0$ tal que $y^n = x$.* □

Demonstração: Dados $F \ni x > 0$ e $n \in \mathbb{N}_F$, seja $A \subset F$ o conjunto definido como:

$$A := \{t \in F \,:\, t > 0 \wedge t^n < x\}.$$

Afirmação 1: $A \neq \emptyset$. ▽

Com efeito, tem-se:

$$0 < 1 \Rightarrow 0 < x < x + 1 \Rightarrow 0 < \frac{x}{x+1} < 1.$$

Também:

$$0 < x \Rightarrow 1 < 1 + x \Rightarrow \frac{1}{1+x} < 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} < x.$$

Portanto, se $a := \dfrac{x}{1+x}$, tem-se que $a > 0$ e $a^n < a < x$. Ou seja, $a \in A$, provando que $A \neq \emptyset$. ▼

Afirmação 2: A é limitado superiormente. ▽

Com efeito, como $x > 0$, se $t_0 := 1 + x > 1$, tem-se:

$$t > t_0 > 1 \Rightarrow t^n > t > t_0 > x \Rightarrow t \notin A$$

Portanto, A é limitado superiormente, pois t_0 é um limite superior de A. ▼

Pelas duas afirmações anteriores e a completeza de F, existe $\sup A =: y > 0$, pois A é um conjunto não vazio de números positivos. Mais ainda, pela Afirmação 1, sabe-se que $y \geqslant a > 0$.

Afirmação 3: A hipótese $y^n < x$ conduz a contradição. $\triangledown$

Com efeito, suponha-se que $y^n < x$. Observe-se que:

$$y > 0 \Rightarrow 1 + y > 0 \Rightarrow (1+y)^n > 0,$$

e como F é arquimediano, existe k inteiro *positivo* tal que:

$$k(1+y)^n > x.$$

Seja h definido como:

$$h := \frac{x - y^n}{k(1+y)^n - y^n}.$$

Como $k(1+y)^n > x > y^n$, tem-se que $k(1+y)^n - y^n > 0$ e $x - y^n > 0$. Ou seja, $h > 0$. Por outro lado, $x < k(1+y)^n \Rightarrow x - y^n < k(1+y)^n - y^n \Rightarrow h < 1$. Portanto $0 < h < 1$. Observe-se também que:

$$k \geqslant 1 \Rightarrow k(1+y)^n \geqslant (1+y)^n \Rightarrow k(1+y)^n - y^n \geqslant (1+y)^n - y^n \Rightarrow h \leqslant \frac{x - y^n}{(1+y)^n - y^n}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
(y+h)^n &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} y^{n-m} h^m \\
&= y^n + h \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} y^{n-m} h^{m-1} \\
&< y^n + h \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} y^{n-m} \\
&= y^n + h((1+y)^n - y^n) \\
&\leqslant y^n + (x - y^n) \\
&= x,
\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade acima segue do fato que $h^{m-1} < 1$, pois $h < 1$. Da relação acima, tem-se que $(y+h)^n < x \Rightarrow y + h \in A$, pois $h > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow y + h > 0$. Mas isso contradiz o fato que $y = \sup A$, pois $A \ni y + h \leqslant \sup A = y \Rightarrow h \leqslant 0$, mas sabe-se que $h > 0$. $\blacktriangledown$

Afirmação 4: A hipótese $y^n > x$ conduz a contradição. $\triangledown$

Com efeito, suponha-se agora que $y^n > x$. Como antes, observe-se que:

$$y > 0 \Rightarrow y + 1 > 1 \Rightarrow (y+1)^n > 1 > 0,$$

e como F é arquimediano, existe k inteiro *positivo* tal que:

$$k(1+y)^n > 2y^n - x.$$

Seja h definido como:

$$h := \frac{y^n - x}{k(1+y)^n - y^n}.$$

Observe-se que:

$$k(1+y)^n > 2y^n - x \Rightarrow k(1+y)^n - y^n > y^n - x > 0 \Rightarrow 1 > h > 0.$$

Na segunda relação acima, a segunda desigualdade decorre do fato que $y^n > x \Rightarrow y^n - x > 0$. Observe-se também que, como $y^n - x > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} k \geqslant 1 \Rightarrow k(1+y)^n \geqslant (1+y)^n \Rightarrow k(1+y)^n - y^n \geqslant (1+y)^n - y^n \\ \Rightarrow h = \frac{y^n - x}{k(1+y)^n - y^n} \leqslant \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}. \end{aligned}$$

Se fosse $y \geqslant 1$, então $0 < h < 1 \leqslant y \Rightarrow h < y$. Portanto, em tal caso existe $l := h$ com $0 < l < 1$ e $l < y$ tal que:

$$l \leqslant \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}.$$

Reciprocamente, se fosse $1 > y > 0$, então definindo $l := hy$, teria-se que $0 < l$, pois $h > 0$ e $y > 0$, e também $l < 1$ e $l < y$, pois como $y > 0$, teria-se que $h < 1 \Rightarrow l = hy < y < 1$. Além disso, como $h > 0$, teria-se também que:

$$y < 1 \Rightarrow l = hy < h \leqslant \frac{y^n - x}{(1+y)^n - y^n}.$$

Portanto, qualquer seja o caso, sempre existe l com $0 < l < 1$ e $l < y$ tal que:

$$l \leqslant \frac{y^n - x}{(y+1)^n - y^n}.$$

Portanto, para qualquer $t \geqslant y - l > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} t^n \geqslant (y-l)^n &= \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} y^{n-m} (-1)^m l^m \\ &= y^n + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} y^{n-m} (-1)^m l^m \\ &= y^n - l \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} y^{n-m} (-1)^{m-1} l^{m-1} \\ &\geqslant y^n - l \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} y^{n-m} l^{m-1} \\ &> y^n - l \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} y^{n-m} \\ &= y^n - l\left((1+y)^n - y^n\right) \\ &\geqslant y^n - (y^n - x) \\ &= x, \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade acima segue do fato que $l^{m-1} < 1$, pois $l < 1$. Por outro lado, a última desigualdade é consequência da propriedade de l. Da relação acima, tem-se que $y - l$ é um limite superior para A obviamente menor que y, contradizendo o fato que $y = \sup A$ era o menor de todos os limites superiores. ▼

Pelas duas afirmações anteriores, deve ser $y^n = x$, o que prova a existência.

Para provar a unicidade, suponha-se a existência de y_1 e y_2, tais que $y_i > 0$ e $y_i^n = x$, para $i = 1, 2$. Por ***reductio ad absurdum***, suponha-se que $y_1 \neq y_2$. Em tal caso, pode-se supor, sem perda de generalidade, que $y_1 < y_2$, permutando y_1 e y_2 se for necessário. Sob tal hipótese, tem-se:

$$0 < y_1 < y_2 \Rightarrow y_1^n < y_1^{n-1} y_2 < y_1^{n-2} y_2^2 < \cdots < y_2^n.$$

Ou seja, $y_1^n < y_2^n$, o que contradiz $y_1^n = x = y_2^n$. ∎

11.1.2 Definição: Seja $F \ni a > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}_F$, o único número positivo $F \ni y > 0$ tal que $y^n = a$, cuja existência asegura o Teorema 11.1.1 acima, denota-se por $a^{1/n}$ e denomina-se **raiz n-ésima (positiva)** de a.

Alternativamente, com certa freqüência a raiz n-ésima $a^{1/n}$ denota-se $\sqrt[n]{a}$. Mais especificamente, no caso $n = 2$ denota-se $a^{1/2}$ simplesmente por $\sqrt{a}$, denominando-se **raiz quadrada** de a. No caso $n = 3$, $a^{1/3}$ ou $\sqrt[3]{a}$ denomina-se **raiz cúbica** de a. ♣

11.1.3 Observação: **(a)** Se $n \in \mathbb{N}_F$ é par então existe mais de uma raiz n-ésima, mas *apenas uma* raiz n-ésima *positiva*, de acordo com o Teorema 11.1.1.

(b) $1^{1/n} = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_F$.

(c) $a > 1 \Rightarrow a^{1/n} > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_F$.

Com efeito, se fosse $a^{1/n} \leqslant 1$, teria-se que $a^{1/n} a^{1/n} \leqslant a^{1/n} \leqslant 1$, o que pela sua vez conduz a $a^{1/n} a^{1/n} a^{1/n} \leqslant a^{1/n} \leqslant 1$. Repetindo esse procedimento n vezes, teria-se finalmente que $a = \underbrace{a^{1/n} \cdots a^{1/n}}_{n \text{ vezes}} \leqslant 1$, contradizendo a hipótese que $a > 1$. ♣

Exercícios para o Capítulo 11

11.2 Médias de Potências p-ésimas

Sejam $\mathbb{R} \ni a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$ um conjunto de n números reais não negativos. Se p é um inteiro não-nulo $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, define-se a **média de potências p-ésimas** M_p como:

$$M_p := \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

O número M_1 denomina-se a **média aritmética**, M_2 a **média quadrática** e M_{-1} a **média harmônica**.

11.2.1 Exercício: Se $p > 0$, demonstre que $M_p < M_{2p}$, desde que os $a_1, a_2, \ldots, a_n$ não sejam todos iguais.

Sugestão: Aplique a desigualdade de Schwarz com $x_i = a_i^p$ e $y_i = 1$. ♣

11.2.2 Exercício: Este exercício é um corolário da relação $P(n)$ provada no Exercício 3.7.2 ou, alternativamente, no Exercício 3.7.3.

(a) Se $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$ são n números não negativos, então:

$$\sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Sugestão: a relação acima é uma consequência direta de $\mathrm{P}(n)$.

(b) Se agora $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ são n números *positivos*, então:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots a_n}.$$

Sugestão: o que acontece na relação do item (a) se trocar cada a_i por $1/a_i$? ♣

A **media geométrica** G de n números reais não-negativos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ define-se como:

$$G := \sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots a_n}.$$

Desta maneira, observe que, combinando os dois itens do exercício anterior, prova-se que $M_{-1} \leqslant G \leqslant M_1$. Os exercícios a seguir fornecem: uma prova alternativa da segunda desigualdade (os dois primeiros), uma generalização da dupla desigualdade (o terceiro) e algumas aplicações (o quarto e último).

11.2.3 Exercício: Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ um conjunto de n números reais *positivos* com produto igual à unidade $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$. Prove que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$, com igualdade apenas quando $a_k = 1$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Sugestão: Considere por separados os seguintes dois casos:

- $a_k = 1$ para todo $k = 1, \ldots, n$;
- Não todo $a_k = 1$.

No segundo caso, use indução, observando que se $a_1 a_2 \cdots a_{n+1} = 1$, então deve existir algum fator, digamos a_1, maior que 1 e também deve existir algum fator, digamos a_{n+1}, menor que 1. Considere $b_1 := a_1\, a_{n+1}$ e aplique a hipótese indutiva ao produto $b_1 a_2 \cdots a_n$, levando em consideração que $(a_1 - 1)(a_{n+1} - 1) < 0$. ♣

11.2.4 Exercício: Usando o exercício anterior, produza uma prova alternativa da relação $G \leqslant M_1$ e verifique que a igualdade vale apenas quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Sugestão: Se algum dos fatores é nulo, então a desigualdade é obviamente válida, com igualdade se todos os fatores são igualmente nulos. Basta então considerar o caso em que todos os fatores são positivos. Em tal caso $G \neq 0$, e pode-se supor sem perda de generalidade que $G = 1$, substituindo, se for necessário caso, cada a_k por a_k/G. Nesse ponto, entra o resultado do exercício anterior. ♣

11.2.5 Exercício: Usando o exercício anterior prove que se p e q são inteiros tal que $p < 0 < q$, então $M_p < G < M_q$ se os $a_1, a_2, \ldots, a_n$ não são todos iguais.

Sugestão: Aplique o resultado exercício anterior aos n números $a_1^q, a_2^q, \ldots, a_n^q$ para obter a segunda desigualdade e aos n números $1/a_1^{|p|}, 1/a_2^{|p|}, \ldots, 1/a_n^{|p|}$ para a primeira. ♣

11.2.6 Exercício: **Algumas Aplicações**

(a) Se a, b, c são reais *positivos* tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 8$, então $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant \frac{64}{3}$.

Sugestão: Use o Exercício 11.2.1.

(b) Se a, b, c são reais positivos tais que $abc = 8$, então $a + b + c \geqslant 6$ e $ab + ac + bc \geqslant 12$.

Sugestão: Use o Exercício 11.2.4.

(c) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são reais positivos e $b_k = 1/a_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$, então:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \geqslant n^2.$$

Sugestão: Use o Exercício 11.2.4.

(d) Se a, b, c são reais positivos tais que $a + b + c = 1$, então $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geqslant 8abc$.

Sugestão: Use a desigualdade $M_{-1} \leqslant M_1$ sugerida pelo Exercício 11.2.5 com a, b e c. ♣

11.3 A Sequência $a^{1/n}$

11.3.1 Exercício: Seja F corpo arquimediano. Seja $\mathbb{R} \ni a > 0$. Então, $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.

Sugestão: Use a relação $M_{-1} \leqslant G \leqslant M_1$ do Exercício 11.2.2, ou 11.2.5, com os n números:

$$\begin{aligned} &a_1 = a, \\ &a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1; \end{aligned}$$

e depois o resultado dos Exercícios 7.3.4 e 7.5.1(a). ♣

11.4 Raízes de Equações Quadráticas

11.4.1 Exercício: Sejam $a, b, c \in F$, com $a \neq 0$.

(a) Se $b^2 - 4ac \geqslant 0$, então os dois números r_1 e r_2 dados por:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ r_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \end{aligned}$$

são ambos raizes da equação quadrática $ax^2 + bx + c$. Ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$ quando $x = r_1$ ou $x = r_2$.

Sugestão: Utilize a técnica de "completar quadrados", ou use diretamente o Exercício 2.9.1(a). Incidentalmente, observe que tal método de demonstração prova também que r_1 e r_2 são as *únicas* raízes da equação quadrática. Ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$ quando, e apenas quando, $x = r_1$ ou $x = r_2$.

(b) Se $b^2 - 4ac < 0$, então a equação quadrática $ax^2 + bx + c$ não admite nenhuma raiz real. De fato, em tal caso $ax^2 + bx + c > 0$ para todo $x \in F$ quando $a > 0$, ou $ax^2 + bx + c < 0$ para todo $x \in F$, quando $a < 0$.

Sugestão: Idem.

(c) Observe que $r_1 + r_2 = -b/a$ e $r_1 r_2 = c/a$. Portanto, a equação quadrática em termos dos parâmetros a, b, c pode ser rescrita alternativamente em função das raízes como:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2) = a(x - r_1)(x - r_2).$$ ♣

11.5 A Desigualdade de Schwarz Revisitada

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ dois conjuntos de n números reais quaisquer. Para abreviar, denota-se:

$$\|a\| := \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2},$$

$$\|b\| := \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Com essa notação, a desigualdade de Schwarz assume a forma:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \|a\| \; \|b\| \, .$$

Incidentalmente, observe-se que $\|.\| = n^{1/2} M_2$, e que a desigualdade de Schwarz pode ser expressada em termos de médias como:

$$|M_1(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)| \leqslant M_2(a_1, \ldots, a_n)\, M_2(b_1, \ldots, b_n),$$

mas isso não terá relevância alguma no presente contexto.

11.5.1 Exercício: **(a)** Prove que, em caso de existir algum $\lambda \in F$, tal que $a_i - \lambda b_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, então na desigualdade de Schwarz vale a igualdade.

(b) Prove que se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, então também vale a igualdade. ♣

11.5.2 Exercício: **(a)** Verifique primeiramente a seguinte identidade:

$$2xy \leqslant x^2 + y^2; \quad \text{para todo } x, y \in F,$$

com *desigualdade estrita se $x \neq y$.*

Sugestão: Observe que $0 \leqslant (x - y)^2$, com desigualdade estrita se $x \neq y$.

(b) Suponha agora que os b_i's não são simultaneamente nulos e que não existe nenhum $\lambda \in F$ tal que $a_i - \lambda b_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Prove que:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| < \|a\| \; \|b\| \, .$$

Sugestão: Como os b_i's não são simultaneamente nulos, tem-se que $\|b\| \neq 0$. Por outro lado, se fosse $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, então se poderia tomar $\lambda = 0$. Portanto, também os a_i's devem não ser simultaneamente nulos, de onde tem-se que $\|a\| \neq 0$. Desta maneira, para $i = 1, 2, \ldots, n$, a relação do item (a) anterior pode ser empregada com $x = a_i / \|a\|$ e $y = b_i / \|b\|$. Some depois as n desigualdades assim obtidas, observando que pelo menos uma delas é estrita. Com efeito, observe que deve existir algum i_0 tal que $a_{i_0} / \|a\| \neq b_{i_0} / \|b\|$, pois se todos esses números fossem iguais, teria-se que $a_i - \|a\| \, b_i / \|b\| = 0$, para todo i, em cujo caso pode-se tomar $\lambda = \|a\| / \|b\|$. ♣

11.5.3 Exercício: **(a)** Como corolário da demonstração, conclua que na desigualdade de Schwarz vale a igualdade se e somente se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ ou existe $\lambda \in F$ tal que $a_i - \lambda b_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Prove que a condição do item (a) anterior é equivalente à seguinte:

> Existem $\alpha, \beta \in F$ não simultaneamente nulos, tais que $\alpha\, a_i + \beta\, b_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sugestão: Para a parte $(\Rightarrow)$, no primeiro caso basta tomar $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ e no segundo, $\alpha = 1$ e $\beta = -\lambda$. Para a parte $(\Leftarrow)$, se fosse $\alpha \neq 0$, bastaria tomar $\lambda = -\beta/\alpha$. No caso $\alpha = 0$, deve ser $\beta \neq 0$, de onde tem-se que $b_i = 0$, para todo i. ♣

Capítulo 12

Exponenciais

12.1 Base Arbitrária e Exponente Natural

Seja F corpo ordenado e completo.

12.1.1 Definição: Seja $a \in F$. Para cada $m \in \mathbb{N}_F$ define-se:

$$a^m := \underbrace{a\,a \cdots a}_{m \text{ vezes}}. \qquad \clubsuit$$

12.1.2 Lema: *Seja $a \in F$. Então, para todo $m, n \in \mathbb{N}_F$ tem-se:*

(a) $a^{m+n} = a^m a^n$.

(b) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(c) *Se $a > 0$, então $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$.* □

Demonstração: **(a)** Observe-se que:

$$a^m a^n = \underbrace{a\,a \cdots a}_{m \text{ vezes}}\,\underbrace{a\,a \cdots a}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a\,a \cdots a}_{m+n \text{ vezes}} = a^{m+n}.$$

(b) Analogamente:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdots a^m}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{\underbrace{a\,a \cdots a}_{m \text{ vezes}} \cdots \underbrace{a\,a \cdots a}_{m \text{ vezes}}}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a\,a \cdots a}_{mn \text{ vezes}} = a^{mn}.$$

(c) Finalmente, se $a > 0$, tem-se:

$$a^m (a^{-1})^m = \underbrace{a\,a \cdots a}_{m \text{ vezes}}\,\underbrace{a^{-1} a^{-1} \cdots a^{-1}}_{m \text{ vezes}} = \cdots = 1.$$

Portanto, $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$, pela unicidade do inverso multiplicativo. ■

12.2 Base Positiva e Exponente Inteiro

Procura-se agora uma definição de a^m para m inteiro qualquer, não necessariamente positivo. Um inteiro negativo é da forma $-m$ com $m \in \mathbb{N}_F$. Se as propriedades (b) e (c) do Lema 12.1.2 fossem válidas nesse caso também, teria-se:

$$a^{-m} = a^{(-1)m} = (a^{-1})^m = (a^m)^{-1},$$

desde que $a > 0$. Por outro lado, se a propriedade (a) do Lema 12.1.2 também fosse válida, teria-se:

$$a^0 = a^{m-m} = a^m a^{-m} = a^m (a^m)^{-1} = 1.$$

Tais observações motivam a definição a seguir.

12.2.1 Definição: Seja agora $F \ni a > 0$. Para cada $m \in \mathbb{Z}_F \backslash \mathbb{N}_F$ define-se:

$$a^m := \begin{cases} (a^{-m})^{-1} & \text{se } m < 0, \\ 1 & \text{se } m = 0. \end{cases}$$ ♣

12.2.2 Lema: *Seja $F \ni a > 0$. Então, $a^{m+n} = a^m a^n$, para todo m, n inteiros em F.* □

Demonstração: Se $m > 0$ e $n > 0$ basta aplicar a propriedade (a) do Lema anterior. Se $m = 0$ ou $n = 0$, supondo que $m = 0$ para fixar idéias, tem-se:

$$a^{m+n} = a^{0+n} = a^n = 1a^n = a^0 a^n = a^m a^n.$$

Se $m > 0$ e $n < 0$, em cujo caso $n = -|n|$, serão considerados por separado os seguintes três sub-casos:

- Se $m = |n|$, então:

$$a^m a^n = a^m a^{-|n|} = a^m (a^{|n|})^{-1} = a^m (a^m)^{-1} = 1 = a^0 = a^{m-m} = a^{m-|n|} = a^{m+n}.$$

- Se $m > |n|$, definindo $k := m - |n| > 0$, tem-se:

$$a^m a^n = a^m a^{-|n|} = a^m (a^{|n|})^{-1} = a^{k+|n|} (a^{|n|})^{-1} = a^k a^{|n|} (a^{|n|})^{-1} = a^k = a^{m-|n|} = a^{m+n}.$$

  Na terceira igualdade acima foi utilizada a propriedade (a) do Lema anterior.

- Se $m < |n|$, definindo $k := |n| - m > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^m a^{-|n|} = a^m (a^{|n|})^{-1} = a^m (a^{k+m})^{-1} = a^m (a^{-1})^{k+m} = a^m (a^{-1})^m (a^{-1})^k \\ &= a^m (a^m)^{-1} (a^{-1})^k = (a^{-1})^k = (a^k)^{-1} = (a^{|n|-m})^{-1} = (a^{-(m-|n|)})^{-1} \\ &= a^{m-|n|} = a^{m+n}. \end{aligned}$$

  A segunda igualdade acima segue da definição. Na quarta igualdade foi utilizada a propriedade (c) do Lema anterior, pois $k + m = |n| > 0$. Na quinta, a propriedade (a) do mesmo Lema, pois $m > 0$ e $k > 0$. Na sexta, a propriedade (c), pois $m > 0$ e $k > 0$. Na oitava, também a propriedade (c), pois $k > 0$. A décima-primeira é consequência da definição, pois $m - |n| < 0$.

O caso $m < 0$ e $n > 0$ é análogo ao caso anterior. Finalmente, se $m < 0$ e $n < 0$, tem-se:

$$a^m a^n = (a^{-m})^{-1}(a^{-n})^{-1} = (a^{-1})^{-m}(a^{-1})^{-n} = (a^{-1})^{-m-n} = (a^{-1})^{-(m+n)} = a^{m+n}.$$

A primeira igualdade acima segue da definição, pois $-m > 0$ e $-n > 0$. Na segunda igualdade foi utilizada a propriedade (c) do Lema anterior, pelo mesmo motivo. Na terceira, a propriedade (a) do mesmo resultado e por idêntica razão. Finalmente, a última igualdade é consequência da definição, pois $m + n < 0$. ∎

12.3 Base Positiva e Exponente Racional

12.3.1 Definição: Seja agora $F \ni a > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}_F$ define-se $a^{1/n}$ como o único $F \ni y > 0$ tal que $y^n = a$, cuja existência asegura o Teorema 11.1.1. ♣

12.3.2 Lema: *Sejam $F \ni a > 0$ e $n \in \mathbb{N}_F$. Então:*

(a) $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$, *para cada $F \ni b > 0$.*

(b) $(a^{-1})^{1/n} = (a^{1/n})^{-1}$.

(c) $(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$, *para cada m inteiro em F.* □

Demonstração: **(a)** Utilizando a comutatividade do produto, tem-se:

$$(a^{1/n}b^{1/n})^n = \underbrace{(a^{1/n}b^{1/n})\cdots(a^{1/n}b^{1/n})}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a^{1/n}\cdots a^{1/n}}_{n \text{ vezes}}\,\underbrace{b^{1/n}\cdots b^{1/n}}_{n \text{ vezes}} = ab.$$

Portanto, $a^{1/n}b^{1/n} = (ab)^{1/n}$ pela unicidade da raiz n-ésima.

(b) Utilizando o item (a) anterior, tem-se:

$$a^{1/n}(a^{-1})^{1/n} = (aa^{-1})^{1/n} = 1^{1/n} = 1.$$

Portanto, $(a^{1/n})^{-1} = (a^{-1})^{1/n}$ pela unicidade do inverso multiplicativo.

(c) Considere em primeiro lugar o caso $m > 0$. Se $z := (a^{1/n})^m$, então basta provar que $z^n = a^m$. Para tanto, basta observar que:

$$z^n = \underbrace{\underbrace{a^{1/n}\cdots a^{1/n}}_{m \text{ vezes}}\cdots\underbrace{a^{1/n}\cdots a^{1/n}}_{m \text{ vezes}}}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{a^{1/n}\cdots a^{1/n}}_{mn \text{ vezes}}$$

$$= \underbrace{\underbrace{a^{1/n}\cdots a^{1/n}}_{n \text{ vezes}}\cdots\underbrace{a^{1/n}\cdots a^{1/n}}_{n \text{ vezes}}}_{m \text{ vezes}} = \underbrace{a\cdots a}_{m \text{ vezes}} = a^m.$$

No caso $m = 0$, tem-se que $(a^m)^{1/n} = (a^0)^{1/n} = 1^{1/n} = 1 = (a^{1/n})^0 = (a^{1/n})^m$.

Finalmente, no caso $m < 0$, tem-se:

$$(a^m)^{1/n} = ((a^{-m})^{-1})^{1/n} = ((a^{-m})^{1/n})^{-1} = ((a^{1/n})^{-m})^{-1} = (a^{1/n})^m.$$

Aqui, a primeira igualdade segue da definição. A segunda, segue do item (b) anterior. A terceira, segue do primeiro caso, pois $-m > 0$. A última, segue da definição. ∎

12.3.3 Definição: Seja $F \ni a > 0$. Para cada $r \in \mathbb{Q}_F$ racional, sem perda de generalidade $r = m/n$ com m inteiro e $n \in \mathbb{N}_F$, define-se:

$$a^{m/n} := (a^{1/n})^m.$$ ♣

12.3.4 Lema: *Sejam $F \ni a > 0$ e $p, q \in \mathbb{Q}_F$. Então:*

(a) $a^{p+q} = a^p a^q$.

(b) *Se $a > 1$, então $p < q \Rightarrow a^p < a^q$.*

(c) *Se $0 < a < 1$, então $p < q \Rightarrow a^q < a^p$.* □

Demonstração: **(a)** Sejam $p = m/n$ e $q = r/s$, sem perda de generalidade com $n > 0$ e m inteiro, e com $s > 0$ e r inteiro, respectivamente. Como $ns > 0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
(a^{m/n}a^{r/s})^{ns} &= \underbrace{(a^{m/n}a^{r/s})\cdots(a^{m/n}a^{r/s})}_{ns \text{ vezes}} \\
&= \underbrace{a^{m/n}\cdots a^{m/n}}_{ns \text{ vezes}}\ \underbrace{a^{r/s}\cdots a^{r/s}}_{ns \text{ vezes}} \\
&= \underbrace{\underbrace{a^{m/n}\cdots a^{m/n}}_{n \text{ vezes}}\cdots\underbrace{a^{m/n}\cdots a^{m/n}}_{n \text{ vezes}}}_{s \text{ vezes}}\ \underbrace{\underbrace{a^{r/s}\cdots a^{r/s}}_{s \text{ vezes}}\cdots\underbrace{a^{r/s}\cdots a^{r/s}}_{s \text{ vezes}}}_{n \text{ vezes}} \\
&= \underbrace{a^m\cdots a^m}_{s \text{ vezes}}\ \underbrace{a^r\cdots a^r}_{n \text{ vezes}} \\
&= a^{ms}a^{rn} \\
&= a^{ms+rn}.
\end{aligned}$$

A última igualdade acima segue do Lema 12.2.2. Portanto, pela unicidade da raiz tem-se que $a^{m/n}a^{r/s} = (a^{ms+rn})^{1/ns}$. Ou seja:

$$a^p a^q = a^{m/n}a^{r/s} = (a^{ms+rn})^{1/ns} = a^{(ms+rn)/ns} = a^{m/n+r/s} = a^{p+q}.$$

A terceira igualdade acima segue da Definição 12.3.3.

(b) Em primeiro lugar, observe que:

$$a > 1 \Rightarrow a^{1/n} > 1 \Rightarrow (a^{1/n})^m > 1 \Rightarrow a^{m/n} = (a^{1/n})^m > 1 \Rightarrow a^r > 1, \forall \mathbb{Q} \ni r > 0.$$

Agora, se $p < q$, então $q - p =: r > 0$ e tem-se:

$$a^q - a^p = a^{r+p} - a^p = a^r a^p - a^p = a^p(a^r - 1) > 0.$$

A segunda igualdade acima segue do item (a) anterior. A última desigualdade segue do fato que $a^p > 0$, pela definição, e $a^r - 1 > 0$, pela observação inicial. Ou seja, $a^p < a^q$.

(c) Em primeiro lugar, observe que $0 < a < 1 \Rightarrow a^{1/n} < 1$. Com efeito, utilizando *reductio ad absurdum*, tem-se:

$$a^{1/n} \geqslant 1 \Rightarrow a^{1/n}a^{1/n} \geqslant a^{1/n} \geqslant 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{a^{1/n} \cdots a^{1/n}}_{n \text{ vezes}} \geqslant 1 \Rightarrow a \geqslant 1.$$

Mas a última relação contradiz a hipótese inicial que $0 < a < 1$. Ou seja, deve ser $a^{1/n} < 1$. Portanto, tem-se:

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^{1/n} < 1 \Rightarrow a^{1/n}a^{1/n} < a^{1/n} < 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{a^{1/n} \cdots a^{1/n}}_{m \text{ vezes}} < 1$$
$$\Rightarrow a^{m/n} = (a^{1/n})^m < 1, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow a^r < 1, \forall \mathbb{Q} \ni r > 0.$$

Agora, se $p < q$, então $q - p =: r > 0$ e tem-se:

$$a^p - a^q = a^p - a^{p+r} = a^p - a^p a^r = a^p(1 - a^r) > 0.$$

A segunda igualdade acima segue do item (a) anterior. A última desigualdade segue do fato que $a^p > 0$, pela definição, e $1 - a^r > 0$, pela observação inicial. Ou seja, $a^q < a^p$. ∎

12.4 Base Positiva $a > 1$ e Exponente Real

12.4.1 Definição: Seja $F \ni a > 1$. Se $x \in F$, define-se:

$$\exp_a(x) := \sup\{a^r : \mathbb{Q}_F \ni r < x\}.$$

Observe que $\exp_a(x)$ está bem definido, pois para qualquer $\mathbb{Q}_F \ni s \geqslant x$ tem-se que $a^r < a^s$ para todo $r < x \leqslant s$, pelo Lema 12.3.4(b). Portanto o conjunto $\{a^r : \mathbb{Q}_F \ni r < x\}$ está limitado superiormente por a^s onde s é qualquer $\mathbb{Q}_F \ni s \geqslant x$. ♣

12.4.2 Lema: $\exp_a(x) > 0$ *para todo* $x \in F$. □

Demonstração: $a > 0$ implica que $a^m > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, e assim $1/a^m > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, ou seja, $a^m > 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, $(a^m)^{1/n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 11.1.1. Assim, $a^{m/n} > 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a^r > 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}_F$. Portanto:

$$0 < a^r \leqslant \sup\{a^r : \mathbb{Q}_F \ni r < x\} = \exp_a(x).$$ ∎

12.4.3 Lema: *Seja* $F \ni a > 1$. *Então:*

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x)\exp_a(y), \quad \text{para todo } x, y \in F.$$ □

Demonstração: Sejam $p, q \in \mathbb{Q}$ e $x, y \in \mathbb{R}$ com $p < x$ e $q < y$. Em tal caso, $p + q < x + y$ e, utilizando o Lema 12.3.4(a), tem-se:

$$\begin{aligned} a^p a^q = a^{p+q} \leqslant \exp_a(x+y) \ \Rightarrow\ a^p \leqslant \frac{\exp_a(x+y)}{a^q},\ \forall\, \mathbb{Q} \ni p < x \\ \Rightarrow\ \exp_a(x) \leqslant \frac{\exp_a(x+y)}{a^q} \ \Rightarrow\ a^q \leqslant \frac{\exp_a(x+y)}{\exp_a(x)},\ \forall\, \mathbb{Q} \ni q < y \\ \Rightarrow\ \exp_a(y) \leqslant \frac{\exp_a(x+y)}{\exp_a(x)}. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\exp_a(x)\exp_a(y) \leqslant \exp_a(x+y). \tag{12.4.1}$$

<u>Afirmação:</u> $\{t \in \mathbb{Q} : t < x + y\} = \{u + v : (u \in \mathbb{Q} \wedge u < x) \wedge (v \in \mathbb{Q} \wedge v < y)\}$. $\triangledown$

Com efeito, a relação $(\supseteq)$ é obviamente válida. Para provar a relação $(\subseteq)$, se $\mathbb{Q} \ni t < x + y$, então $t - y < x$. Pela densidade dos racionais, existe $s \in \mathbb{Q}$ tal que $t - y < s < x$. Em particular, $t - s < y$ e $s < x$. Portanto, $t = (t - s) + s < y + x$. Ou seja, basta tomar $u = t - s$ e $v = s$. $\blacktriangledown$

Utilizando a Afirmação anterior, e o fato que $t - s < y$ e $s < x$, tem-se:

$$a^t = a^{(t-s)+s} = a^{(t-s)}a^s \leqslant \exp_a(y)a^s \leqslant \exp_a(y)\exp_a(x),\ \forall\, \mathbb{Q} \ni t < x + y.$$

Ou seja:

$$\exp_a(x+y) \leqslant \exp_a(x)\exp_a(y). \tag{12.4.2}$$

Finalmente, para obter o resultado enunciado no presente lema, basta combinar as relações (12.4.1) e (12.4.2) acima. ∎

12.4.4 Lema: *Seja $F \ni a > 1$. Então:*

(a) $\exp_a(0) = 1$.

(b) $\exp_a(-1) = \dfrac{1}{\exp_a(1)}$.

(c) *Para todo $r \in \mathbb{Q}_F$, tem-se:*

$$\exp_a(r) = (\exp_a(1))^r.$$

□

Demonstração: **(a)** Usando o Lema 12.4.3, tem-se:

$$\exp_a(0) = \exp_a(0+0) = \exp_a(0)\exp_a(0) = (\exp_a(0))^2.$$

Portanto, $\exp_a(0)$ deve ser igual a 0 ou 1. Como $\exp_a(0) > 0$, pelo Lema 12.4.2, tem-se que $\exp_a(0) = 1$.

(b) Utilizando o item (a) anterior, tem-se:

$$1 = \exp_a(0) = \exp_a(1-1) = \exp_a(1)\exp_a(-1).$$

(c) Seja $n \in \mathbb{N}$. Em primeiro lugar, utilizando o Lema 12.4.3, tem-se:

$$\exp_a(n) = \exp_a \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{\exp_a(1)\exp_a(1)\cdots\exp_a(1)}_{n \text{ vezes}} = (\exp_a(1))^n.$$

Isso prova o resultado para n natural. Observe também:

$$1 = \exp_a(0) = \exp_a(n-n) = \exp_a(n)\exp_a(-n).$$

Portanto, utilizando a identidade anterior, tem-se:

$$\exp_a(-n) = \frac{1}{\exp_a(n)} = \frac{1}{(\exp_a(1))^n} = (\exp_a(1))^{-n}.$$

Ou seja, o resultado vale para n inteiro. Por outro lado, observe que:

$$(\exp_a(1/n))^n = \underbrace{\exp_a(1/n)\cdots\exp_a(1/n)}_{n \text{ vezes}} = \exp_a \underbrace{(1/n+\cdots+1/n)}_{n \text{ vezes}} = \exp_a(1).$$

Portanto, pela unicidade da raiz n-ésima tem-se:

$$\exp_a(1/n) = (\exp_a(1))^{1/n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, se $m \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\begin{aligned}(\exp_a(m/n))^n &= \underbrace{\exp_a(m/n)\cdots\exp_a(m/n)}_{n \text{ vezes}} = \exp_a \underbrace{(m/n+\cdots+m/n)}_{n \text{ vezes}} \\ &= \exp_a(n(m/n)) = \exp_a(m) = (\exp_a(1))^m.\end{aligned}$$

Portanto, pela unicidade da raiz n-ésima tem-se:

$$\exp_a(m/n) = (\exp_a(1))^{m/n}, \ \forall\, m \in \mathbb{Z}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, $\exp_a(r) = (\exp_a(1))^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. ∎

Pelo Lema 12.4.4 anterior, tem-se que todos os valores de $\exp_a(x)$ estão determinados por $\exp_a(1)$, pelo menos no caso de x racional. Portanto, surge naturalmente a questão de determinar o valor de $\exp_a(1)$. Observe que:

$$\exp_a(1) = \sup\{a^r : r < 1\} \leqslant a,$$

Pois, $r < 1 \Rightarrow a^r < a^1 = a$, pelo Lema 12.3.4(b). O valor exato de $\exp_a(1)$ será estabelecido no Lema 12.4.6, após um resultado auxiliar de caráter meramente técnico.

12.4.5 Lema: *Seja $F \ni a > 1$. Então:*

$$\sup\left\{a^{1-1/n} : n \in \mathbb{N}_F\right\} = \sup\{a^r : \mathbb{Q}_F \ni r < 1\}. \qquad \square$$

Demonstração: Para facilitar a notação, sejam A e B os conjuntos definidos respectivamente como:

$$A := \left\{a^{1-1/n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$B := \{a^r : r \in \mathbb{Q} \wedge r < 1\}.$$

Observe que $A \subseteq B$, trivialmente. Portanto, $\sup A \leqslant \sup B$. Por *reductio ad absurdum*, se $\sup A < \sup B$, então existe $\mathbb{Q} \ni r_0 < 1$ tal que $\sup A < a^{r_0}$. Como $1 - r_0 > 0$, tem-se que $(1-r_0)^{-1} > 0$. Portanto, pela arquimedianeidade, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > (1-r_0)^{-1}$. Agora, observe que:

$$n_0 > \frac{1}{1-r_0} \Longleftrightarrow 1 - r_0 > \frac{1}{n_0} \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{n_0} > r_0$$

Portanto, $\sup A < a^{r_0} < a^{1-1/n_0} \in A$, o que é uma contradição. ∎

12.4.6 Lema: *Seja $F \ni a > 1$. Então $\exp_a(1) = a$.* □

Demonstração: Com efeito, tem-se:

$$\begin{aligned}\exp_a(1) = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q} \wedge r < 1\} = \sup\left\{a^{1-1/n} : n \in \mathbb{N}\right\} &= \lim_{n\to\infty} a^{1-1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a^{1/n}} = \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = \frac{a}{1} = a.\end{aligned}$$

A primeira igualdade acima segue da definição. A segunda, segue do Lema anterior. A terceira é consequência do fato de $a^{1-1/n}$ ser uma sequência crescente limitada superiormente (por a, segundo a observação que precede o Lema 12.4.5. Finalmente, a última igualdade segue do resultado do Exercício 11.3.1. ∎

12.4.7 Teorema: *Seja $F \ni a > 1$. Então, $\exp_a(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_F$. Ou seja, quando $x \in \mathbb{Q}_F$ as definições 12.4.1 e 12.3.3 coincidem. Em particular, $\exp_a(x)$ é uma extensão de a^x de $\mathbb{Q}_F$ para F.* □

Demonstração: Basta combinar o resultado dos Lemas 12.4.4(c) e 12.4.6. ∎

12.5 Base Positiva $0 < a < 1$ e Expoente Real

12.5.1 Definição: Seja $a \in F$ com $0 < a < 1$. Se $x \in F$, define-se:

$$\exp_a(x) := \sup\{a^r : \mathbb{Q}_F \ni x < r\}.$$

Observe que $\exp_a(x)$ está bem definido, pois para qualquer $\mathbb{Q}_F \ni s \leqslant x$, tem-se que $a^r < a^s$ para todo $s \leqslant x < r$, pelo Lema 12.3.4(c). Portanto, o conjunto $\{a^r : \mathbb{Q}_F \ni x < r\}$ está limitado superiormente por a^s, onde s é qualquer $\mathbb{Q}_F \ni s \leqslant x$. ♣

12.5.2 Teorema: *Seja $a \in F$ com $0 < a < 1$. Então, $\exp_a(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_F$. Ou seja, quando $x \in \mathbb{Q}_F$ as definições 12.5.1 e 12.3.3 coincidem. Em particular, $\exp_a(x)$ é uma extensão de a^x de $\mathbb{Q}_F$ para F.* □

Demonstração: A prova deste resultado é análoga à do Teorema 12.4.7 desenvolvida na seção anterior, ficando como instrutivo exercício recomendado para o leitor. ■

Exercícios para o Capítulo 12

12.6 Definição Alternativa de $\exp_a(x)$

12.6.1 Exercício: **(a)** Prove que, no caso $a > 1$, poderia-se haver definido:

$$\exp_a(x) := \inf\{a^r : \mathbb{Q}_F \ni x < r\}.$$

(b) Idem para o caso $0 < a < 1$ com:

$$\exp_a(x) := \inf\{a^r : \mathbb{Q}_F \ni r < x\}.$$

♣

12.7 Morfismos de $(F, +)$ em $(P, .)$

Seja F corpo ordenado completo. Um morfismo do grupo aditivo $(F, +)$ no grupo multiplicativo $(P, .)$ dos elementos positivos do corpo F consiste em uma aplicação $f : F \longmapsto P$ satisfazendo:

$$f(x + y) = f(x)\, f(y),\ \forall\, x, y \in F.$$

Decorre dos Lemas 12.4.2 e 12.4.3 que a função $f = \exp_a$ é um exemplo de tal morfismo.

12.7.1 Exercício: Seja $f : F \longmapsto F$ uma aplicação tal que $f(x + y) = f(x)\, f(y)$ para todo $x, y \in F$. Suponha-se que f seja *não nula*. Então:

(a) $f(0) \neq 0$.

(b) De fato, $f(0) = 1$.

(c) $f(x) \neq 0$, para todo $x \in F$.

(d) De fato, $f(x) > 0$ para todo $x \in F$. Portanto, a aplicação f é automaticamente um morfismo de $(F, +)$ em $(P, .)$.

(e) Para cada $n \in \mathbb{N}_F$, tem-se que $f(nx) = f(x)^n$, $\forall\, x \in F$.

(f) Para cada $n \in \mathbb{N}_F$, tem-se que $f(-nx) = (f(x))^{-n}$, $\forall\, x \in F$.

(g) Portanto, para cada $m \in \mathbb{Z}_F$ *inteiro*, tem-se que $f(mx) = f(x)^m$, $\forall\, x \in F$.

(h) Para cada $n \in \mathbb{N}_F$, tem-se que $f(x/n) = f(x)^{1/n}$, $\forall\, x \in F$.

(i) Finalmente, para cada $r \in \mathbb{Q}_F$ *racional*, tem-se $f(rx) = f(x)^r$, $\forall\, x \in F$.

(j) Em particular, tomando $x = 1$, tem-se que todo morfismo *não nulo* de $(F, +)$ em $(P, .)$ satisfaz:

$$f(r) = f(1)^r,\ \forall\, r \in \mathbb{Q}_F.$$

♣

Capítulo 13

Endomorfismos em $(\mathbb{R}, +)$

> *Existem* funções *não contínuas* f que satisfazem $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo x e y, mas esse fato não pode ser demonstrado agora; esta questão tão simples encerra, de fato, idéias que pelo geral não são mencionadas nos cursos de graduação.
>
> *M. Spivak* [1]

13.1 Espaços Vetoriais

13.1.1 Definição: Um **espaço vetorial**, ou **linear**, consiste nos seguintes elementos:

1. Um conjunto X, cujos elementos são denominados **vetores**.

2. Uma operação binária $+$ em X, a **soma de vetores**, tal que $(X, +)$ é um grupo abeliano. O elemento neutro nesse grupo será denotado por 0.

3. Um corpo $(F, +, .)$, cujos elementos são denominados **escalares**. Por abuso de notação, a soma de escalares e o seu elemento neutro serão denotados $+$ e 0 respectivamente, como no caso dos vetores. A unidade multiplicativa de F será denotada por 1.

4. Uma aplicação de $F \times X$ em X, a **multiplicação por escalares**, denotada $(a, x) \longmapsto ax$ e satisfazendo as seguintes propriedades:

   (4.1) $a(bx) = (ab)x$, $\forall\, a, b \in F$, $\forall\, x \in X$.

   (4.2) $1x = x$, $\forall\, x \in X$.

   (4.3) $a(x+y) = ax + ay$, $\forall\, a \in F$, $\forall\, x, y \in X$.

   (4.4) $(a+b)x = ax + bx$, $\forall\, a, b \in F$, $\forall\, x \in X$.

Às vezes, costuma-se dizer **espaço vetorial sobre o corpo** F, ou F-**espaço vetorial**, quando se deseja colocar em evidência o corpo F e suas propriedades. Em muitas aplicações resulta ser $F = \mathbb{R}$, ou $F = \mathbb{C}$. ♣

[1] [25, p.174].

13.2 Bases de Hamel

Seja X um espaço vetorial sobre o corpo F.

13.2.1 Lema: *Seja $A \subseteq X$ um subconjunto. Então as seguintes duas condições são equivalentes:*

1. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementos* diferentes *em A, tem-se:*

$$c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots + c_n\,x_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0,$$

Ou seja, $0\,x_1 + 0\,x_2 + \cdots + 0\,x_n$ é a única combinação linear de elementos diferentes em A que é igual a zero.

2. *Nenhum elemento $x_1 \in A$ pode ser expressado na forma $x_1 = c_2\,x_2 + \cdots + c_n\,x_n$, onde $x_2, \ldots, x_n$ são elementos em A com $x_1 \neq x_i$ para $i > 2$.* □

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Se fosse $x_1 = c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, então teria-se que $0 = (-1)x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. Ou seja:

$$0 = (-1)x_1 + c_{j_2}x_{j_2} + \cdots + c_{j_r}x_{j_r},$$

com $x_{j_i} \in \{x_2, \ldots, x_n\}$ e $x_{j_i} \neq x_{j_k}$ se $i \neq k$. Portanto, $x_1 \bigcup \{x_{i_j}\}_{i=1}^{r}$ são todos diferentes. Mas então (1) $\Rightarrow -1 = 0$, o que é uma contradição.

(2) $\Rightarrow$ (1). Seja $0 = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$, com $x_i \in A$ diferentes. Se existir algum $c_{i_0} \neq 0$, com $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então:

$$x_{i_0} = \frac{c_1}{-c_{i_0}}\,x_1 + \cdots + \frac{c_{i_0-1}}{-c_{i_0}}\,x_{i_0-1} + \frac{c_{i_0+1}}{-c_{i_0}}\,x_{i_0+1} + \cdots + \frac{c_n}{-c_{i_0}}\,x_n,$$

com $x_{i_0} \neq x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n$, o que contradiz (2). ∎

13.2.2 Definição: Um subconjunto $A \subseteq X$ é denominado **linearmente independente (l.i.)** se é satisfeita alguma das condições no Lema 13.2.1 acima. ♣

13.2.3 Observação: **(a)** Se $X \ni x \neq 0$, então $\{x\}$ é um conjunto l.i.

(b) Un conjunto l.i. não pode conter dois elementos iguais, pois em tal caso teria-se que $0 = 1\,x + (-1)\,x$. Também não pode conter ao 0, pois em tal caso teria-se que $0 = c_1\,0$ para qualquer $c_1 \neq 0$.

(c) Se A é l.i., então $A \cup \{x\}$ é l.i. se e somente se $x \notin \operatorname{span} A$.

(d) Seja $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ um conjunto l.i. disjunto do conjunto B e tal que $A \cup B$ também é l.i. Então, $A \cup B$ contem estritamente a $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \cup B$, pois x_{k+1} é disjunto de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ e de B.

(e) Como consequência direta da condição 1 no Lema 13.2.1 anterior, tem-se que um conjunto B é l.i. se e somente se todo subconjunto *finito* $F \subseteq B$ é l.i. ♣

13.2.4 Lema: *Seja $B \subseteq X$. Então as seguintes condições sobre o conjunto B são equivalentes:*

1. *B é um conjunto l.i. maximal. Ou seja, B é l.i. e se B_1 é um outro conjunto l.i. tal que $B_1 \supseteq B$, então $B_1 = B$. Em outras palavras, B não está contido propriamente em nenhum outro conjunto l.i.*

2. *Qualquer elemento $x \in X$ pode ser expresso na forma:*

$$x = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n, \quad \text{com } y_1, y_2, \ldots, y_n \in B \text{ diferentes e } n \in \mathbb{N},$$

com os $\{c_i\}_{i=1}^n \subseteq F$ univocamente determinados.

3. *B é l.i. e todo $x \in X$ é uma combinação linear de elementos de B.* □

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Se $x \in B$, então $x = 1y_1$, com $y_1 := x \in B$. Se $x \notin B$, então $B \cup \{x\}$ não pode ser l.i., pois B é l.i maximal por hipótese. Como nenhum elemento de B pode ser combinação linear de outros elementos de B, então x deve ser combinação linear de tais elementos. Portanto, qualquer que seja o caso, tem-se:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i, \quad \text{com } \{y_i\}_{i=1}^n \subseteq B, \quad \forall\, x \in X.$$

Para provar a unicidade, se $x = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i$ fosse uma outra tal representação, pela hipótese (1) teria-se:

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i) y_i \;\Rightarrow\; c_i = d_i, \forall i = 1, \ldots, n.$$

Observe que se fosse $y_{i_1} = y_{i_2}$, então:

$$x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, i_2}}^{n} c_i y_i + (c_{i_1} + c_{i_2}) y_{i_1}.$$

Portanto, pode-se supor, sem nenhuma perda de generalidade, que os y_i são sempre todos diferentes.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se $0 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ com $y_i \in B$ diferentes, então $0 = \sum_{i=1}^{n} 0 y_i$ seria uma outra representação admissível. Portanto, pela unicidade, deve ser $c_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Ou seja, B é l.i..

(3) $\Rightarrow$ (1). Seja B_1 conjunto l.i. com $B_1 \supseteq B$. Por *reductio ad abusrdum*, se fosse $B_1 \supsetneq B$, então existe $x \in B_1$ tal que $x \notin B$. Pela hipótese (3), teria-se que $x = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, com $y_i \in B \subseteq B_1$ e também com $x \neq y_i$, pois $y_i \in B$ mas $x \notin B$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Isso contradiz a condição (2) do Lema 13.2.1, pois B_1 era l.i. segundo a suposição inicial. ∎

13.2.5 Definição: Um subconjunto $B \subseteq X$ é denominado de **base de Hamel do espaço vetorial X sobre o corpo F** se é satisfeita alguma das condições no Lema 13.2.4 acima. ♣

13.2.6 Observação: Se $X \ni x \neq 0$, então x pode ser representado na forma:

$$x = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n, \text{ com } y_1, y_2, \ldots, y_n \in B \text{ diferentes, } c_i \neq 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

com $n \in \mathbb{N}$, $\{y_i\}_{i=1}^n$ e $\{c_i\}_{i=1}^n$ univocamente determinados.

Com efeito, suponha-se que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i y_i$ e $x = \displaystyle\sum_{i=1}^m d_i z_i$ sejam duas tais representações. Seja A o conjunto definido como:

$$A := \{y_i\}_{i=1}^n \bigcap \{z_i\}_{i=1}^m =: \{x_i\}\,.$$

Observe-se que os vetores $x_i \in A$ são todos diferentes, pois $A \subseteq \{z_i\}$, por exemplo, e os vetores z_i são todos diferentes por hipótese. Desta maneira, tem-se:

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^n c_i y_i - \sum_{i=1}^m d_i z_i = \sum_{y_i \notin A} c_i y_i + \sum_{x_i \in A} (c_i - d_i)\, x_i + \sum_{z_i \notin A} (-d_i) z_i$$

Como os vetores do conjunto $\{y_i \notin A\} \bigcup \{x_i\} \bigcup \{z_i \notin A\}$ são todos diferentes, pela relação acima e a independência linear de B, deve ser $c_i = 0$ para todo i tal que $y_i \notin A$. Esse fato contradiz a hipótese que $c_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, a menos que $\{y_i \notin A\} = \emptyset$, o que pela sua vez implica que $|A| \geqslant n$. De fato, como $A \subseteq \{y_i\}_{i=1}^n$ deve ser exatamente $|A| = n$. Analogamente, pela relação anterior e pela independência linear de B, deve ser $d_i = 0$ para todo i tal que $z_i \notin A$. Esse fato contradiz a hipótese que $d_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, a menos que $\{z_i \notin A\} = \emptyset$, o que pela sua vez implica que $|A| \geqslant m$. De fato, como $A \subseteq \{z_i\}_{i=1}^m$ deve ser exatamente $|A| = m$. Portanto:

$$m = |A| = n \;\Rightarrow\; \{y_i\}_{i=1}^n = A = \{z_i\}_{i=1}^m\,.$$

Ou seja, $y_i = z_i$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ salvo uma questão de ordenamento. Portanto, a relação anterior se reduz a:

$$0 = \sum_{i=1}^n (c_i - d_i)\, x_i.$$

Como os vetores $x_i \in A$ são todos diferentes, pela independência linear de B, deve ser $c_i = d_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. ♣

13.2.7 Proposição: *Seja X espaço vetorial, $X \neq \{0\}$. Então:*

(a) *X possui uma base de Hamel.*

(b) *Mais ainda, se $A \subset X$ é um conjunto l.i. qualquer, então existe uma base de Hamel B de X tal que $A \subseteq B$. Ou seja, qualquer conjunto l.i. pode ser extendido para uma base de Hamel de todo o espaço.*

(c) *Mais ainda, dados $A \subset X$ um conjunto l.i. qualquer e $M \subseteq X$ tal que M gera X, ou seja, $X = \operatorname{span} M$, então existe uma base de Hamel B de X tal que $B = A \cup M'$ onde $M' \subset M$. Além disso, é sempre possível escolher M' disjunto de A.* □

Demonstração: Em primeiro lugar, observe-se que $(c) \Rightarrow (b)$. Com efeito, basta tomar $M = X$. Em segundo lugar, observe-se que $(b) \Rightarrow (a)$. Com efeito, se $X \neq \{0\}$, então existe $X \ni x \neq 0$, bastando tomar $A = \{x\}$, que é obviamente l.i.. Portanto, basta provar apenas a condição (c). Para tanto, sejam $A \subset X$ um conjunto l.i. qualquer e $M \subseteq X$ tal que M gera X. Define-se a família $\mathcal{B}$ como:

$$\mathcal{B} := \{B \subseteq X \,:\, B \text{ é l.i.}, B = A \cup M_\alpha \text{ com } M_\alpha \subset M \text{ e } M_\alpha \cap A = \emptyset\}\,.$$

Afirmação 1: $\mathcal{B} \neq \emptyset$. ▽

Com efeito, basta observar que $\emptyset \subset M$ com $\emptyset \cap A = \emptyset$, e $A \cup \emptyset = A$ é l.i.. Portanto, $A \cup \emptyset \in \mathcal{B}$. ▼

Considere-se a família não-vazia $\mathcal{B}$ ordenada pela inclusão ordinária de conjuntos.

Afirmação 2: $(\mathcal{B}, \supseteq)$ é uma família indutiva superiormente. ▽

Com efeito, seja $\mathcal{C} = \{A \cup M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma *corrente* em $\mathcal{B}$. Seja B o conjunto definido como:

$$B := \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (A \cup M_\alpha) = A \cup \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\right).$$

Como $M_\alpha \cap A = \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$, tem-se que:

$$\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\right) \cap A = \emptyset.$$

Por outro lado, também é óbvio que:

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \subseteq M,$$

pois $M_\alpha \subseteq M$ para todo $\alpha \in \Lambda$. Afirma-se agora que B é um conjunto l.i.. Com efeito, suponha-se que $0 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ com $y_i \in A \cup M_{\alpha_i}$. Como $\mathcal{C}$ é uma corrente, cada um dos conjuntos $A \cup M_{\alpha_1}$ e $A \cup M_{\alpha_2}$ são comparáveis na ordem $(\mathcal{B}, \supseteq)$. Ou seja, deve ser $A \cup M_{\alpha_1} \subseteq A \cup M_{\alpha_2}$, ou $A \cup M_{\alpha_1} \supseteq A \cup M_{\alpha_2}$. Digamos, para fixar as idéias, que:

$$A \cup M_{\alpha_1} \subseteq A \cup M_{\alpha_2}.$$

Em tal caso, $y_1, y_2 \in A \cup M_{\alpha_2}$. Um raciocínio análogo vale para $A \cup M_{\alpha_2}$ e $A \cup M_{\alpha_3}$, etc. Portanto, deve existir algum $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $y_i \in A \cup M_{\alpha_{i_0}}$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$. Como $A \cup M_{\alpha_{i_0}} \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, tem-se que $A \cup M_{\alpha_{i_0}}$ deve ser l.i.. Portanto, $c_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, o que prova a independência linear de B. Disso tudo segue que $B \in \mathcal{B}$ e B é obviamente maximal para $\mathcal{C}$ na ordem de $(\mathcal{B}, \supseteq)$. ▼

Pelas duas afirmações anteriores e o Lema de Zorn, deve existir um elemento maximal em $(\mathcal{B}, \supseteq)$ que será denotado por $A \cup M' \in \mathcal{B}$.

Afirmação 3: $A \cup M'$ é uma base para X. $\triangledown$

Como $A\cup M' \in \mathcal{B}$, tem-se que $A\cup M'$ é l.i., com $M' \subseteq M$ e $M'\cap A = \emptyset$. Portanto, basta provar que $X = \operatorname{span} A \cup M'$. De fato, como $X = \operatorname{span} M$ por hipótese, basta verificar que $M \subseteq \operatorname{span} A \cup M'$. Para tanto, seja $x \in M$. Se fosse $x \in A$, então obviamente $x \in \operatorname{span} A \cup M'$. Se $x \notin A$, então $A \cup M' \cup \{x\} = A \cup (M' \cup \{x\})$ não pode ser l.i. pela definição de $A \cup M'$ e pela sua maximalidade (observe-se que $(M' \cup \{x\}) \subseteq M$ e $(M' \cup \{x\}) \cap A = \emptyset$). Portanto, pela Observação 13.2.3(c), tem-se que $x \in \operatorname{span} A \cup M'$. Como $x \in M$ era arbitrário, tem-se que $M \subseteq \operatorname{span} A \cup M'$. $\blacktriangledown$

A prova da Afirmação 3 acima demonstra a validade da condição (c) como também das outras duas condições, segundo decorre das observações no início da presente prova. $\blacksquare$

13.2.8 Definição: Seja X espaço vetorial, sobre o corpo F, com base de Hamel B. Para cada $X \ni x = \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i$ com $c_i = c_i(x) \in F$ e $y_i = y_i(x) \in B$ diferentes, define-se a função $\phi_x : B \longmapsto F$ como:

$$\phi_x(y) := \begin{cases} c_i(x), & \text{se } y = y_i(x); \\ 0, & \text{se } y \neq y_i(x). \end{cases} \qquad \clubsuit$$

13.2.9 Observação: **(a)** Em particular, pode-se expressar: $x = \displaystyle\sum_{y\in B} \phi_x(y)\, y$.

(b) Dado que os y_i são todos diferentes, essa definição carece de ambiguidade. Mesmo no caso $x = 0$, qualquer representação para o $0 \in X$, necessariamente da forma $0 = \sum_{i=1}^{n} 0\, y_i$ pela independência linear de B, conduz a $\phi_0(y) = 0 \in F$, $\forall\, y \in B$. $\clubsuit$

13.2.10 Lema: ***(a)*** *A aplicação $x \longmapsto \phi_x$ é uma bijeção do espaço vetorial X no conjunto das funções de B em F que são nulas salvo um conjunto finito.*

(b) $\phi_{x+y} = \phi_x + \phi_y$, $\forall\, x, y \in X$.

(c) $\phi_{ax} = a\phi_x$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, a \in F$. $\square$

Demonstração: **(a)** Para provar que a aplicação é sobrejetora, seja $f : B \longmapsto F$ com $\operatorname{supp} f$ finito. Definindo o vetor $x \in X$ como:

$$x := \sum_{y\in B} f(y) y,$$

tem-se que ϕ_x é dada por:

$$\phi_x(y) = \begin{cases} f(y), & \text{se } y \in \operatorname{supp} f; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, $\phi_x = f$. Para provar que a aplicação é injetora, basta observar que:

$$\phi_x = \phi_y \;\Rightarrow\; x = \sum_{w\in B} \phi_x(w)\, w = \sum_{w\in B} \phi_y(w)\, w = y.$$

(b) Observe-se que:

$$\sum_{w\in B} \phi_{x+y}(w)\, w = x+y = \sum_{w\in B} \phi_x(w)\, w + \sum_{w\in B} \phi_y(w)\, w = \sum_{w\in B} (\phi_x+\phi_y)(w)\, w.$$

Ou seja:

$$0 = \sum_{w\in B} \left(\phi_{x+y} - (\phi_x+\phi_y)\right)(w)\, w.$$

Observe-se que a soma acima é finita, pois $\phi_{x+y} - (\phi_x+\phi_y)$ tem suporte finito. Da relação acima, segue pela independência linear de B que $\left(\phi_{x+y} - (\phi_x+\phi_y)\right)(w) = 0$ para todo $w \in B$. Portanto, $\phi_{x+y} = \phi_x + \phi_y$.

(c) Se $a = 0$ ou $x = 0$, então a relação do enunciado é óbvia. Caso contrário, observe-se que:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \;\Rightarrow\; ax = \sum_{i=1}^{n} (ac_i)\, y_i.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\phi_{ax}(y) &= \begin{cases} ac_i, & \text{se } y = y_i \text{ para algum } i \in \{1,\ldots,n\}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
&= a \begin{cases} c_i, & \text{se } y = y_i \text{ para algum } i \in \{1,\ldots,n\}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \\
&= a\phi_x(y),\ \forall\, y \in B.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\phi_{ax} = a\phi_x$. ∎

13.2.11 Observação: Decorre do Lema 13.2.10(a) que $|X| \leqslant |F|^{|B|}$ em geral. Com efeito, tem-se:

$$|X| = |\{f : B \longmapsto F \,:\, \operatorname{supp} f \text{ é finito}\}| \leqslant |\{f : B \longmapsto F\}| = |F|^{|B|}.$$

Uma expressão mais exata para $|X|$ é dada no resultado a seguir. ♣

13.2.12 Lema: *Seja X espaço vetorial sobre o corpo F e seja B base de Hamel de X sobre F.*

(a) *Se $|B|$ é finito, então $|X| = |F|^{|B|}$.*

(b) *Se $|B|$ é infinito, então $|X| = \max\{|B|, |F|\}$.* □

Demonstração: **(a)** Se $|B|$ é finito, então:

$$|X| = |\{f : B \longmapsto F \,:\, \operatorname{supp} f \text{ é finito}\}| = |\{f : B \longmapsto F\}| = |F|^{|B|}.$$

(b) Seja B infinito. Observe-se que existem $|B|$ subconjuntos de B com 1 elemento e para cada um deles existem $|F|$ funções de B em F suportadas nesse subconjunto. Analogamente, existem $|B|^2 = |B \times B|$ subconjuntos de B com 2 elementos e para cada um deles existem $|F|^2 = |F \times F|$ funções de B em F suportadas nesse subconjunto. Utilizando o mesmo raciocínio, no caso geral existem $|B|^n = \underbrace{|B \times \cdots \times B|}_{n \text{ vezes}}$ subconjuntos de B com n elementos e para cada um deles existem $|F|^n = \underbrace{|F \times \cdots \times F|}_{n \text{ vezes}}$ funções de B em F suportadas nesse sub-conjunto. Portanto:

$$\begin{aligned} |X| &= |\{f : B \longmapsto F \ : \ \text{supp}\, f \text{ é finito}\}| \\ &= |B|\,|F| + |B|^2\,|F|^2 + \cdots + |B|^n\,|F|^n + \cdots \end{aligned} \tag{13.2.1}$$

Agora, como $|B|$ é infinito, pelo resultado (4.31) em [10, p. 26], tem-se que:

$$|B|^n = |B|\,,\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, com relação a $|F|$, observe-se que como F é um corpo deve ser $|F| \geqslant 2 > 0$, pois num corpo $\{0,1\} \subseteq F$ com $0 \neq 1$. Considere os seguintes dois casos:

Caso 1: $|F|$ finito.

Neste caso $|F|^n$ também é finito (e positivo) para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $0 < |F|^n \leqslant |B|\,,\, \forall n \in \mathbb{N}$. Pelo resultado (4.32) em [10, p. 26], tem-se que:

$$|B|\,|F|^n = |B|\,,\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto:

$$|X| = |B| + |B| + \cdots + |B| + \cdots = |B| = \max\{|B|\,,|F|\}.$$

A primeira igualdade acima segue de (13.2.1). A segunda decorre de (4.29) em [10, p. 25] ou de (4.30) em [10, p. 26]. A terceira, do fato que $|F|$ é finito e $|B|$ infinito.

Caso 2: $|F|$ infinito.

Neste caso, pelo resultado (4.31) em [10, p. 26], tem-se:

$$|F|^n = |F|\,,\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, pelos resultados (4.32) em [10, p. 26] e (4.8) em [10, p. 20], tem-se que $|B|\,|F| = \max\{|B|\,,|F|\}$. Ou seja:

$$|B|\,|F|^n = |B|\,|F| = \max\{|B|\,,|F|\}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, utilizando a relação (13.2.1) tem-se que:

$$|X| = \max\{|B|\,,|F|\} + \max\{|B|\,,|F|\} + \cdots + \max\{|B|\,,|F|\} + \cdots = \max\{|B|\,,|F|\}\,.$$

A última igualdade acima decorre do resultado (4.29) em [10, p. 25], ou (4.30) em [10, p. 26], pelo fato que $\max\{|B|\,,|F|\}$ é infinito, pois tanto $|B|$ como $|F|$ são infinitos. ∎

Na prova do seguinte resultado, lembre-se que uma função $f : X \longmapsto X$ não é nada mais que um subconjunto de $X \times X$ tal que não existem dois pares diferentes com o mesmo primeiro elemento. Ou seja, $(x, y), (x, z) \in f \Rightarrow y = z$.

13.2.13 Proposição: *Seja X espaço vetorial sobre o corpo F e sejam A e B bases de Hamel de X sobre F. Então $|A| = |B|$. Ou seja, duas bases de Hamel de um espaço vetorial sobre o mesmo corpo possuem a mesma cardinalidade.* □

Demonstração: Sejam A e B duas bases de Hamel de X sobre F. Considere-se o conjunto $\mathcal{A}$ de funções $f : X \longmapsto X$ *injetoras* tais que:

1. $\operatorname{Dom} f \subseteq A$.
2. $\operatorname{Img} f \subseteq B$.
3. O conjunto $\operatorname{Img} f \bigcup \left(A \bigcap (\operatorname{Dom} f)^{\mathsf{c}}\right)$ é linearmente independente.

Afirmação 1: $\mathcal{A} \neq \emptyset$. ▽

Com efeito, observe-se que $f := \emptyset \subset X \times X$ é função, pois obviamente não existem em f dois pares diferentes com o mesmo primeiro elemento (de fato, não existe nenhum par em f). Neste caso, tem-se que $\operatorname{Dom} f = \emptyset \subset A$, como também $\operatorname{Img} f = \emptyset \subset B$. Portanto:

$$\operatorname{Img} f \bigcup \left(A \bigcap (\operatorname{Dom} f)^{\mathsf{c}}\right) = \emptyset \cup \left(A \cap (\emptyset)^{\mathsf{c}}\right) = A \cap X = A.$$

Como A é obviamente l.i. por ser base, tem-se que $f \in \mathcal{A}$. Ou seja, $\mathcal{A} \neq \emptyset$. ▼

Considere-se $\mathcal{A}$ ordenado pela inclusão usual de conjuntos. Se $\mathcal{C}$ é uma corrente em $(\mathcal{A}, \supseteq)$, define-se g como:

$$g := \bigcup_{f \in \mathcal{C}} f.$$

Afirmação 2: g é função. ▽

Com efeito, se $(x, y), (x, z) \in g$, então existem $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ tais que $(x, y) \in f_1$ e $(x, z) \in f_2$. Como $\mathcal{C}$ é uma corrente, f_1 e f_2 são comparáveis na ordem $\subseteq$. Ou seja, deve ser $f_1 \subseteq f_2$ ou $f_2 \subseteq f_1$. Para fixar idéias, suponha-se que $f_1 \subseteq f_2$, sendo que o outro caso é completamente análogo. Em tal caso, tem-se que $(x, y) \in f_1 \subseteq f_2 \ni (x, z)$ e, como f_2 é função, deve ser $y = z$. ▼

Afirmação 3: A função g é injetora e satisfaz as propriedades 1 e 2 acima. ▽

Com efeito, se $(x, z), (y, z) \in g$, então prova-se que $x = y$ como na demonstração da Afirmação anterior, pois as funções em $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ são injetoras por definição. Por outro lado, se $x \in \operatorname{Dom} g$ então existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in g$. Ou seja, existe $f \in \mathcal{C}$ tal que $(x, y) \in f$. Portanto $x \in \operatorname{Dom} f \subseteq A$. Como $x \in \operatorname{Dom} g$ era arbitrário, segue que $\operatorname{Dom} g \subseteq A$. Analogamente prova-se que $\operatorname{Img} g \subseteq B$. ▼

Afirmação 4: O conjunto $\bigcup_{f \in \mathcal{C}} \operatorname{Img} f$ é uma corrente sob a inclusão usual de conjuntos. ▽

Com efeito, dadas $\operatorname{Img} f_1$ e $\operatorname{Img} f_2$ com f_1, f_2 na corrente $\mathcal{C}$, devem ser comparáveis, digamos $f_1 \subseteq f_2$, para fixar idéias. Em tal caso, tem-se:

$$\operatorname{Img} f_1 = \{y \in X \ : \ \exists\, x \in X : (x,y) \in f_1\} \subseteq \{y \in X \ : \ \exists\, x \in X : (x,y) \in f_2\} = \operatorname{Img} f_2. \qquad \blacktriangledown$$

No seguinte, para simplificar a notação, define-se:

$$\Lambda(f) := \operatorname{Img} f \bigcup \left(A \bigcap (\operatorname{Dom} f)^{\mathsf{c}} \right).$$

Afirmação 5: A função g satisfaz a propriedade 3 acima. Ou seja, $\Lambda(g)$ é um conjunto linearmente independente. $\triangledown$

Observe-se que:

$$\Lambda(g) = \operatorname{Img} g \bigcup \left(A \bigcap (\operatorname{Dom} g)^{\mathsf{c}} \right) = \left(\bigcup_{f \in \mathcal{C}} \operatorname{Img} f \right) \bigcup \left(A \bigcap \left(\bigcup_{f \in \mathcal{C}} \operatorname{Dom} f \right)^{\mathsf{c}} \right).$$

Seja F um subconjunto *finito* de $\Lambda(g)$. Ou seja, $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Img} f_i$. Pela Afirmação 4 anterior, existe $f_0 \in \mathcal{C}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Img} f_i \subseteq \operatorname{Img} f_0$. Portanto:

$$F \subset \operatorname{Img} f_0 \bigcup \left(A \bigcap \left(\bigcup_{f \in \mathcal{C}} \operatorname{Dom} f \right)^{\mathsf{c}} \right) \subseteq \operatorname{Img} f_0 \bigcup \left(A \bigcap (\operatorname{Dom} f_0)^{\mathsf{c}} \right) = \Lambda(f_0).$$

Como $\Lambda(f_0)$ é l.i., tem-se que F é l.i. Como F era um conjunto finito arbitrário de $\Lambda(g)$, segue que $\Lambda(g)$ é l.i. $\blacktriangledown$

Decorre das afirmações 2, 3 e 5 anteriores que $g \in \mathcal{A}$. Além disso, a função g é obviamente um limite superior para $\mathcal{C}$, que era uma corrente arbitrária em $\mathcal{A}$. Portanto, o conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{A}, \supseteq)$ é não-vazio e indutivo superiormente, em cujo caso pode ser aplicado o Lema de Zorn. Desta maneira, existe em $(\mathcal{A}, \supseteq)$ um elemento maximal na ordem, digamos $h \in \mathcal{A}$. Em particular, $\operatorname{Dom} h \subseteq A$.

Afirmação 6: $\operatorname{Dom} h = A$. $\triangledown$

Por ***reductio ad absurdum***, suponha-se que exista $a_0 \in A \cap (\operatorname{Dom} h)^{\mathsf{c}}$. Observe-se que $a_0 \notin \operatorname{span} \operatorname{Img} h$, pois em tal caso $\Lambda(h)$ não seria l.i. Portanto, $\operatorname{Img} h \subsetneqq B$, pois, caso contrário, como B é base, teria-se que $a_0 \in \operatorname{span} B = \operatorname{span} \operatorname{Img} h$ contradizendo o fato que $a_0 \notin \operatorname{span} \operatorname{Img} h$. Portanto, existe $b_0 \in B \cap (\operatorname{Img} h)^{\mathsf{c}}$. A partir deste ponto, a prova divide-se em dois casos, segundo o conjunto $\{b_0\} \cup \Lambda(h)$ seja linearmente independente ou não. No primeiro caso, teria-se que $h \cup (a_0, b_0) \in \mathcal{A}$, contradizendo a maximalidade de h. (Observe-se que $\Lambda(h \cup (a_0, b_0)) = \{b_0\} \cup \Lambda(h) - \{a_0\}$ neste caso). No segundo caso, b_0 poderia ser expressado como combinação linear (finita) de elementos em $\Lambda(h)$, digamos $b_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, com $x_i \in \Lambda(h)$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$. Como B é l.i. por ser base, o elemento $b_0 \in B$ não pode ser combinação linear exclusiva dos elementos em $\operatorname{Img} h \subseteq B$. Portanto, existe

$k_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $x_{k_0} \in A \cap (\mathrm{Dom}\, h)^{\mathsf{c}}$ e $c_{k_0} \neq 0$. Desta maneira b_0 não pode ser combinação linear de elementos no conjunto:

$$\mathrm{Img}\, h \bigcup \left(A \bigcap \left(\{x_{k_0}\} \bigcup \mathrm{Dom}\, h \right)^{\mathsf{c}} \right).$$

(Pois em tal caso $x_{k_0} \in \Lambda(h)$ poderia ser escrito como combinação linear de elementos em $\Lambda(h) - \{x_{k_0}\}$). Ou seja, a união de $\{b_0\}$ com o conjunto acima seria l.i. Portanto, teria-se que $h \cup (x_{k_0}, b_0) \in \mathcal{A}$, contradizendo a maximalidade de h. ▼

Pela Afirmação 6 anterior e o fato que h é injetora, tem-se que $|A| \leqslant |B|$. Com um argumento totalmente análogo, prova-se que $|B| \leqslant |A|$. Finalmente, a igualdade $|A| = |B|$ entre números cardinais segue do Teorema de Schröder-Berstein. ∎

13.2.14 Definição: Seja X espaço vetorial sobre o corpo F. Define-se a **dimensão algébrica de X sobre F** como o número 0 se $X = \{0\}$ ou como o cardinal de alguma (logo, qualquer) base de Hamel de X sobre F se $X \neq \{0\}$.

A dimensão algébrica de X sobre F será denotada por $\text{a-dim}_F X$. ♣

13.2.15 Exemplo: Considere-se $X = \mathbb{R}$ como espaço vetorial sobre o corpo $F = \mathbb{Q}$ e seja B base de Hamel de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Então, $\text{a-dim}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = |\mathbb{R}|$.

Observe-se que $|B|$ *não* pode ser finito, pois em tal caso $\mathbb{R} \ni x = r_1 y_1 + \cdots + r_n y_n$, com $r_i \in \mathbb{Q}$ e $y_i \in B$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Ou seja, poderia ser estabelecida uma correspondência entre os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}^n$, o que é impossível por uma questão de numerabilidade. Formalmente, pelo Lema 13.2.12(a), teria-se:

$$|\mathbb{R}| = |X| = |F|^{|B|} = |\mathbb{Q}|^n = |\mathbb{Q}|,$$

contradizendo o fato que o conjunto $\mathbb{Q}$ é numerável, entanto que $\mathbb{R}$ não. Portanto, pelo Lema 13.2.12(b), deve ser:

$$|\mathbb{R}| = |X| = \max\{|B|, |F|\} = |B|.$$

A última igualdade acima decorre do fato que $|F| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, mas, por outro lado, como B é *infinito*, deve ser $|B| \geqslant \aleph_0$, pelo resultado (4.16) em [10, p. 22], ♣

13.3 Endomorfismos do Grupo Real Aditivo $(\mathbb{R},+)$

Nesta seção, o conjunto de números reais $\mathbb{R}$ será considerado como um espaço vetorial sobre o corpo racional $\mathbb{Q}$. Pela Proposição 13.2.7, $X = \mathbb{R}$ possui uma base de Hamel sobre o corpo $F = \mathbb{Q}$, que será denotada B.

13.3.1 Definição: Seja $\gamma : B \longmapsto \mathbb{R}$ uma aplicação arbitrária. Define-se a função $f_\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ como:

$$f_\gamma(x) := \sum_{y \in B} \phi_x(y)\, \gamma(y).$$

Em particular, $f_\gamma(y) = \gamma(y)$, $\forall\, y \in B$. ♣

13.3.2 Lema: *A função f_γ definida acima satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *f_γ é um endomorfismo do grupo real aditivo $(\mathbb{R},+)$. Ou seja, $f_\gamma(x+y) = f_\gamma(x)+f_\gamma(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.*

(b) *Em particular, existem $|\mathbb{R}|^{|B|} = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = 2^{|\mathbb{R}|}$ de tais endomorfismos.*

(c) *$f_\gamma(r\,x) = r\, f_\gamma(x)$, $\forall\, r \in \mathbb{Q}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.*

(d) *Em particular, $f_\gamma(r) = r\, f_\gamma(1)$, $\forall\, r \in \mathbb{Q}$.*

(e) *Se γ for escolhida com a propriedade de ser bijetora como aplicação de B em B, então f_γ é automorfismo, ou seja, endomorfismo bijetor.* □

Demonstração: **(a)** Segue diretamente do Lema 13.2.10(b).

(b) Utilizando o resultado do Exemplo 13.2.15, tem-se:

$$|\{\gamma : B \longmapsto \mathbb{R}\}| = |\mathbb{R}|^{|B|} = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|}.$$

Agora, para qualquer $A \subseteq \mathbb{R}$ existe a **a função característica de** A, $\chi_A : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ definida como:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto:

$$2^{|\mathbb{R}|} = |P(\mathbb{R})| = |\{A \,:\, A \subseteq \mathbb{R}\}| \leqslant |\{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}\}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|}.$$

Por outro lado, $\{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \subseteq P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Portanto:

$$|\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = |\{f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}\}| \leqslant |P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})| = 2^{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|} = 2^{|\mathbb{R}|^2} = 2^{|\mathbb{R}|}.$$

Combinando a duas últimas relações acima, tem-se que $2^{|\mathbb{R}|} \leqslant |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} \leqslant 2^{|\mathbb{R}|}$. Ou seja, $|\mathbb{R}|^{|B|} = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = 2^{|\mathbb{R}|}$.

(c) Observe-se que $r \in \mathbb{Q} = F$. Portanto, basta utilizar o resultado do Lema 13.2.10(c).

(d) Basta aplicar o item (c) anterior com $x = 1$. Incidentalmente, observe-se que este mesmo resultado poderia deduzir-se apelando às propriedades gerais de morfismos com relação à adição, tais como o resultado do Lema 9.1.4(c), ou do Lema 9.1.6(d).

(e) Se $x \in \mathbb{R}$, então $x = \sum_{y\in B} \phi_x(y)\, y$. Observe-se que se γ é sobrejetora, então $y = \gamma(z)$, para certos $z \in B$. Portanto:

$$x = \sum_{y\in B} \phi_x(y)\, y = \sum_{z\in B} \phi_x(\gamma(z))\, \gamma(z) = f(\tilde{x}),$$

onde $\tilde{x} \in X$ é definido como $\tilde{x} := \sum_{z \in B} \phi_x(\gamma(z))\, z$. Para justificar a última igualdade acima, observe-se que se γ é bijetora, então pelo Lema 13.2.10(a), a aplicação $\phi_x \circ \gamma$ também é bijetora e $\phi_{\tilde{x}}(z) = (\phi_x \circ \gamma)(z)$, pela unicidade da representação de um vetor qualquer numa dada base. Portanto, f_γ é sobrejetora. Por outro lado, se $f_\gamma(x) = f_\gamma(y)$, então tem-se:

$$\begin{aligned} 0 = f_\gamma(x) - f_\gamma(y) &= \sum_{\omega \in B} \phi_x(\omega)\, \gamma(\omega) - \sum_{\omega \in B} \phi_y(\omega)\, \gamma(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in B} \phi_x(\omega)\, \gamma(\omega) - \phi_y(\omega)\, \gamma(\omega) = \sum_{\omega \in B} (\phi_x - \phi_y)(\omega)\, \gamma(\omega). \end{aligned}$$

Observe-se que no membro à extrema direita acima, a aplicação $\phi_x - \phi_y$ tem suporte finito, como também que os vetores (isto é, números reais) $\gamma(\omega) \in X = \mathbb{R}$ são todos diferentes, pois γ é uma bijeção. Consequentemente, da última relação acima e da independência linear da base B, segue que $(\phi_x - \phi_y)(\omega) = 0$ para todo $\omega \in B$. Ou seja, $\phi_x = \phi_y$, de onde segue pelo Lema 13.2.10(a) que $x = y$. Portanto, f_γ é injetora. ∎

O resultado a seguir trata-se na verdade de uma digressão no mundo da *continuidade*, que na presente será abordado na Parte II.

13.3.3 Lema: *Suponha-se que f_γ seja contínua.*[2] *Então:*

(a) $f_\gamma(x) = x\, f_\gamma(1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(b) *Em particular, existem $|\mathbb{R}|$ endomorfismos contínuos em $(\mathbb{R}, +)$, pois existem $|\mathbb{R}|$ escolhas para $f_\gamma(1)$. Ou seja, existem "muitos mais" que são descontínuos.*

(c) *Se $f_\gamma(1) \neq 0$, a aplicação f_γ é um automorfismo.* □

Demonstração: **(a)** Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, dado $x \in \mathbb{R}$ existe uma sequência de números racionais $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} r_n$. Como f_γ é contínua por hipótese, utilizando o resultado do Lema 13.3.2(d), tem-se:

$$f_\gamma(x) = f_\gamma\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f_\gamma(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f_\gamma(1) = f_\gamma(1) \lim_{n\to\infty} r_n = f_\gamma(1)\, x.$$

A título complementar, vide Exercício 19.8.2.

(b) Pelo item (a) anterior, sabe-se que $f_\gamma(x) = f_\gamma(1)\, x$. Portanto, existem $|\mathbb{R}|$ endomorfismos contínuos em $(\mathbb{R}, +)$ da forma f_γ, pois existem $|\mathbb{R}|$ escolhas para $f_\gamma(1)$. Observe-se que pelo Lema 13.3.2(b) existem $2^{|\mathbb{R}|}$ de tais endomorfismos em geral. Pelo resultado (4.10) em [10, p. 21], tem-se que $|\mathbb{R}| < 2^{|\mathbb{R}|}$.

(c) Pelo item (a) anterior, sabe-se que $f_\gamma(x) = f_\gamma(1)\, x$, que é obviamente uma bijeção no caso $f_\gamma(1) \neq 0$. ∎

[2] Vide Capítulo 19.

13.3.4 Exemplo: Seja $\gamma(y)=1$, $\forall\, y\in B$. Neste caso, tem-se:

$$f_\gamma(x)=\sum_{y\in B}\phi_x(y).$$

Esta função é "selvagemente discontínua" no sentido enunciado no resultado a seguir.[3] ♣

13.3.5 Lema: *Seja $\gamma(y)=1$, $\forall\, y\in B$. Então, para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ tal que $a<b$, tem-se que $f_\gamma\left(\{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}\right)=\mathbb{Q}$.* □

Demonstração: Dado $r\in\mathbb{R}$ arbitrário, basta encontrar algum $u\in\mathbb{R}$ tal que $a<u<b$ com $f_\gamma(u)=r$. Sejam $y_1,y_2\in B$ tal que $y_1\neq y_2$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ existe $s\in\mathbb{Q}$ tal que:

$$\frac{a-r\,y_1}{y_1-y_2}<s<\frac{b-r\,y_1}{y_1-y_2}. \tag{13.3.1}$$

Basta então definir $u:=r\,y_1+s\,(y_1-y_2)=(r+s)\,y_1-s\,y_2$. Com efeito, $a<u<b$ é consequência direta da propriedade (13.3.1). Além disso, $f_\gamma(u)=(r+s)\,\gamma(y_1)-s\,\gamma(y_2)=(r+s)-s=r$, pois $\gamma(y_1)=\gamma(y_2)=1$, pela escolha de γ. ■

[3] Vide [10, p. 49].

Exercícios para o Capítulo 13

13.4 Espaços Vetoriais

13.4.1 Exercício: Prove que os seguintes conjuntos são espaços vetoriais sobre o corpo real ou complexo, segundo corresponda.

(a) $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \ \forall i = 1, \ldots, n\}$.

(b) $\mathbb{C}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{C}, \ \forall i = 1, \ldots, n\}$.

(c) $b(\mathbb{N}) := \Big\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leqslant M \Big\}$.

(d) $c(\mathbb{N}) := \Big\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n \text{ existe} \Big\}$.

(e) $c_0(\mathbb{N}) := \Big\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Big\}$. Incidentalmente, observe que $c_0(\mathbb{N}) \subset c(\mathbb{N})$. Mais precisamente, $c_0(\mathbb{N})$ é um sub-espaço vetorial de $c(\mathbb{N})$.

(f) $C(a,b) := \{f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}$.

(g) $C^n(a,b) := \big\{f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f^{(k)}, \ \forall k = 0, 1, \ldots, n \text{ e } f^{(n)} \text{ é contínua}\big\}$.

(h) $C^\infty(a,b) := \big\{f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f^{(k)}, \ \forall k \in \mathbb{N}\big\}$. ♣

13.5 (In)dependência Linear

13.5.1 Exercício: Seja X um espaço vetorial sobre o corpo F.

(a) Prove que um conjunto $A \subseteq X$ é linearmente dependente se e somente se existe um sub-conjunto *finito* de A que é linearmente dependente.

Sugestão: Se a prova se extender por mais de uma linha, então não entendeu a definição de independência linear.

(b) Usando o resultado do item anterior, conclua que um conjunto $A \subseteq X$ é linearmente independente se e somente se todo sub-conjunto finito de A é linearmente independente. ♣

Seja $P[\mathbb{R}]$ o conjunto de polinômios com coeficientes reais. Observe que $P[\mathbb{R}]$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja $P_n[\mathbb{R}]$ o sub-espaço de $P[\mathbb{R}]$ dos polinômios com grau menor ou igual a n.

13.5.2 Exercício: **(a)** Seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário mas fixo. Prove que o conjunto de funções:

$$\{x^k\}_{k=0}^n = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

é linearmente independente em $P[\mathbb{R}]$.

Sugestão: Basta usar o Teorema Fundamental da Aritmética, que afirma que todo polinômio de grau n possui no máximo n raízes reais.

(b) Usando o item (a) e o exercício anterior, conclua que o conjunto de funções:

$$\{x^k\}_{k=0}^\infty = \{1, x, x^2, \ldots\}$$

é linearmente independente em $P[\mathbb{R}]$.

(c) O conjunto do item (a) gera $P_n[\mathbb{R}]$, sendo portanto uma base do mesmo. Em particular, $\dim P_n[\mathbb{R}] = n + 1$.

(d) O conjunto do item (b) gera $P[\mathbb{R}]$, sendo portanto uma base do mesmo.

13.5.3 Exercício: O presente exercício constitui uma generalização do anterior. Seja $\mathcal{P}$ um conjunto de polinômios:

$$\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$$

com $\mathrm{gr}(p_n) = n$.

(a) Prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$, o sub-conjunto $\mathcal{P}_n := \{p_0, p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathcal{P}$ é linearmente independente em $P[\mathbb{R}]$.

Sugestão: Para cada $k = 0, 1, \ldots, n$, tem-se que $p_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_{ki} x^i$, com $a_{kk} \neq 0$, pois $\mathrm{gr}(p_k) = k$. Portanto, a condição $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k p_k = 0$ é equivalente a um sistema linear homogêneo com matriz triangular, sendo simples verificar que possui (uma única) solução, dada pelo vetor nulo $(c_0, \ldots, c_n) = 0$.

(b) Conclua que $\mathcal{P}$ é linearmente independente em $P[\mathbb{R}]$. ♣

13.6 Decomposição em Frações Simples

Seja $g \in P[\mathbb{R}]$ um polinômio dado por:

$$g(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{l} (x^2 + b_j x + c_j)^{m_j},$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ são todos diferentes e $(b_j, c_j) \in \mathbb{R}^2$ são todos diferentes com $b_j^2 - 4c_j < 0$, para todo $j = 1, \ldots, l$. Ou seja, g é irredutível no corpo real $\mathbb{R}$. Sejam p_{ij} os polinômios definidos por:

$$p_{ij}(x) := \frac{g(x)}{(x - a_i)^j},$$

para cada $j = 1, \ldots, n_i$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Analogamente, sejam q_{ij} os polinômios definidos por:

$$q_{ij}(x) := \frac{g(x)}{(x^2 + b_i x + c_i)^j},$$

para cada $j = 1, \ldots, m_i$, para cada $i = 1, \ldots, l$. Finalmente, para simplificar a notação, sejam P, Q, e R os conjuntos definidos respectivamente como:

$$\begin{aligned}
P &:= \{p_{ij} \,:\, j = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, k\},\\
Q &:= \{q_{ij} \,:\, j = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, l\},\\
R &:= \{x q_{ij} \,:\, j = 1, \ldots, m_i;\ i = 1, \ldots, l\}.
\end{aligned}$$

13.6.1 Exercício: **(a)** Prove que o conjunto $P \cup Q \cup R$ é linearmente independente em $P[\mathbb{R}]$.

(b) Mais ainda, o conjunto $P \cup Q \cup R$ é uma base de $P_{n-1}[\mathbb{R}]$, onde:

$$n := \operatorname{gr} g = \sum_{i=1}^{k} n_i \;+\; 2\sum_{j=1}^{l} m_j.$$

♣

13.6.2 Exercício: Seja f polinômio com $\operatorname{gr} f < \operatorname{gr} g$. Então, a função racional f/g pode ser decomposta na forma:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(x - a_i)^j} \;+\; \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\beta_{ij} + x\,\gamma_{ij}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j},$$

para certos coeficientes $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij} \in \mathbb{R}$. ♣

13.7 O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^n$

Observe que para n vetores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ a combinação linear:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = c_1 v_1 \;+\; \cdots \;+\; c_n v_n = 0$$

pode ser expressada matricialmente da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

13.7.1 Exercício: Os seguintes vetores:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= (1, 1/2, 0)\\
v_2 &= (0, 0, 1)\\
v_3 &= (2, 1, -1)
\end{aligned}
$$

são linearmente dependentes em $\mathbb{R}^3$. Com efeito, basta verificar que:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\\ 1/2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.
$$

Este determinante pode ser calculado trivialmente desenvolvendo pela segunda coluna. Alternativamente, observe que $2v_1 - v_2 = v_3$. ♣

Para cada $i = 1, \ldots, n$ define-se $e_i \in \mathbb{R}^n$ como:

$$
e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)
$$

onde todas as componentes são nulas exceto a i-ésima que vale 1. Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= (1, 0, 0),\\
e_2 &= (0, 1, 0),\\
e_3 &= (0, 0, 1).
\end{aligned}
$$

13.7.2 Exercício: Prove que o conjunto $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base para $\mathbb{R}^n$, denominada **base canônica**. ♣

13.8 Transformações Lineares em $\mathbb{R}^n$

Uma aplicação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita **linear** se para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e para todo $a \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$
T(x + ay) = Tx \; + \; a\,Ty.
$$

Expressando $v \in \mathbb{R}^n$ como combinação linear de vetores da base canônica:

$$
v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i
$$

observe que se T é linear, então:

$$
Tv = T\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(v_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, Te_i.
$$

13.8.1 Exercício: Se $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ denota uma rotação no plano de θ radianos no sentido anti-horário, então:

(a) $R_\theta e_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

(b) $R_\theta e_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.

(c) A matriz da rotação R_θ é dada por:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Sugestão: Usando o resultado dos dois itens anteriores, pela observação que precede o presente exercício, sabe-se que:

$$\begin{aligned} R_\theta(x, y) &= R_\theta\,(xe_1 \;+\; ye_2) \\ &= xR_\theta e_1 \;+\; yR_\theta e_2 \\ &= x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \;+\; y(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\ &= (x\cos\theta, x\operatorname{sen}\theta) \;+\; (-y\operatorname{sen}\theta, y\cos\theta) \\ &= (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

♣

13.8.2 Exercício: Verifique as seguintes propriedades:

(a) $R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$, para todo $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Em particular:

$$R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta-\theta} = I = R_{-\theta+\theta} = R_{-\theta} R_\theta.$$

Portanto, a matriz inversa de R_θ é dada por $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

(c) Incidentalmente, observe que:

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta} = R_\theta^\intercal,$$

ou seja, R_θ é uma matriz **ortonormal**. ♣

13.9 Produto Interno e Norma em $\mathbb{R}^n$

No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ define-se o **produto interno** ou **escalar** $\langle x, y\rangle$ de dois vetores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ como:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 \;+\; \cdots \;+\; x_n y_n.$$

13.9.1 Exercício: Prove que para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ o produto escalar satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Linearidade:** $\langle ax + y, z \rangle = a\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \ \forall a \in \mathbb{R}$.
2. **Simetria:** $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
3. **Não-negativo:** $\langle x, x\rangle \geqslant 0$.
4. **Separável:** $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$. ♣

A propriedade de não-negatividade do produto escalar permite definir a **norma** de um vetor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, ou seja:

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}.$$

13.9.2 Exercício: Prove que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ a norma satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Homogeneidade:** $\|ax\| = |a|\,\|x\|, \ \forall a \in \mathbb{R}$.
2. **Não-negativa:** $\|x\| \geqslant 0$.
3. **Separável:** $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$. ♣

13.9.3 Exercício: Prove que se $\langle x, y\rangle = 0$, então:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$ ♣

13.9.4 Exercício: **Desigualdade de Schwarz**

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ tem-se:

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Mais ainda, na relação acima vale a igualdade se e somente se x e y são linearmente independentes. ♣

13.9.5 Exercício: **Desigualdade Triangular**

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ tem-se:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Sugestão: Em algum ponto será preciso usar a desigualdade de Schwarz do exercício precedente. ♣

13.9.6 Exercício: Identidade do Paralelogramo

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ tem-se:

$$\|x+y\|^2 \; + \; \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 \; + \; \|y\|^2\right). \qquad \clubsuit$$

13.9.7 Exercício: Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ tem-se:

$$|\|x\| \; - \; \|y\|| \leqslant \|x-y\|.$$

Em particular, a aplicação $x \to \|x\|$ é contínua. ♣

13.9.8 Exercício: Verifique que a rotação no plano R_θ considerada no exercício 13.8.1, preserva o produto interno e, consequentemente, a norma:

(a) $\langle R_\theta x, R_\theta y\rangle = \langle x, y\rangle$.

Sugestão: Usando o resultado do exercício 13.8.2(c), tem-se:

$$\langle R_\theta x, R_\theta x\rangle = \langle R_\theta^\top R_\theta x, x\rangle = \langle R_\theta^{-1} R_\theta x, x\rangle = \langle x, x\rangle.$$

(b) $\|R_\theta x\| = \|x\|$.

Sugestão: Segue trivialmente do item anterior. Com efeito:

$$\|R_\theta x\|^2 = \langle R_\theta x, R_\theta x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2. \qquad \clubsuit$$

13.9.9 Exercício: O objetivo do presente exercício consiste em verificar a relação:

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \; \|y\| \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Considere primeiramente o caso particular $\|x\| = \|y\| = 1$, com $x = e_1$.

(b) O caso geral $x, y \in \mathbb{R}^n$ pode ser reduzido ao caso particular do item anterior, normalizando os vetores e rotacionando-os adequadamente:

$$\cos\theta = \langle R_\phi \frac{x}{\|x\|}, R_\phi \frac{y}{\|y\|}\rangle = \frac{1}{\|x\| \; \|y\|} \langle R_\phi x, R_\phi y\rangle = \frac{1}{\|x\| \; \|y\|} \langle x, y\rangle.$$

Observe que a última igualdade acima segue do exercício 13.9.8(a) anterior. ♣

13.10 Produto vetorial em $\mathbb{R}^3$

No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ define-se o **produto vetorial** $x \wedge y \in \mathbb{R}^3$ de dois vetores $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_n)$ formalmente como:

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} x \wedge y = e_1(x_2x_3 - x_3y_2) \ - \ e_2(x_1y_3 - x_3y_1) \ + \ e_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\ = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

Por exemplo:

$$e_1 \wedge e_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_1 \cdot 0 \ - \ e_2 \cdot 0 \ + \ e_3 \cdot 1 = e_3.$$

Em particular, observe que o produto vetorial não é comutativo, mas **anti-simétrico**, ou seja:

$$x \wedge y = -(y \wedge x).$$

13.10.1 Exercício: Para vetores $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ arbitrários, verifique as seguintes identidades.

(a) Além de não ser comutativo, o produto vetorial também não é associativo, mas satisfaz:

$$a \wedge (b \wedge c) = b \langle a, c \rangle \ - \ c \langle a, b \rangle.$$

Esta relação para o triplo produto escalar pode ser facilmente lembrada pela frase mnemônica "**bac**a menos **cab**alo".

(b) A combinação de produto escalar e vetorial $\langle a, b \wedge c \rangle$ é invariante por permutações cíclicas dos argumentos, ou seja:

$$\langle a, b \wedge c \rangle = \langle b, c \wedge a \rangle = \langle c, a \wedge b \rangle.$$

(c) $\langle a \wedge b, c \wedge d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle \ - \ \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$.

Sugestão: Combinando a simetria do produto escalar junto com as identidades dos dois itens anteriores, tem-se:

$$\langle a \wedge b, c \wedge d \rangle = \langle c \wedge d, a \wedge b \rangle = \langle a, b \wedge (c \wedge d) \rangle = \langle a, c \langle b, d \rangle \ - \ d \langle b, c \rangle \rangle.$$

(d) Em particular, tomando $c = a$ e $d = b$ na relação do item anterior, tem-se:

$$\|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \ - \ \langle a, b \rangle^2.$$

Incidentalmente, observe que esta relação fornece uma prova alternativa da desigualdade de Schwarz do exercício 13.9.4. ♣

13.10.2 Exercício: O objetivo do presente exercício consiste em verificar que a norma do produto vetorial $\|x \wedge y\|$ é igual à área do paralelogramo determinado pelos vetores $x, y \in \mathbb{R}^3$.

(a) Primeiramente, verifique a relação:

$$\|x \wedge y\| = \|x\| \, \|y\| \, |\operatorname{sen} \theta|,$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Sugestão: Combinando a relação do item (d) exercício anterior junto com o resultado do exercício 13.9.9, tem-se:

$$\begin{aligned} \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2 \; - \; \langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \, \|y\|^2 \; - \; \|x\|^2 \, \|y\|^2 \cos^2 \theta \\ = \|x\|^2 \, \|y\|^2 \left(1 - \cos^2 \theta\right) = \|x\|^2 \, \|y\|^2 \, \operatorname{sen}^2 \theta. \end{aligned}$$

(b) Verifique agora que $\|x\| \, \|y\| \, |\operatorname{sen} \theta|$ representa à área do paralelogramo determinado pelos vetores $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Sugestão: Um gráfico dos vetores x, y no plano revela-se de inestimável ajuda. Observe também que $\operatorname{sen}(\theta + \pi) = -\operatorname{sen} \theta$. ♣

Capítulo 14

Números p-ádicos

14.1 Algumas Definições e Resultados Básicos

Todo número natural n pode ser escrito, de maneira essencialmente única, como um produto finito de primos (positivos), $n = \prod p_i^{k_i}$, com os p_i todos diferentes. Portanto, todo racional $r \in \mathbb{Q}$ pode ser escrito como:

$$r = \pm \prod p_i^{m_i}$$

onde $m_i \in \mathbb{Z}$ com os fatores primos todos diferentes.

14.1.1 Definição: Seja p um número primo (positivo) qualquer. Para cada racional $r \in \mathbb{Q}$ define-se $\phi_p(r)$ como o exponente de p na descomposição de r em fatores primos. Ou seja:

$$\phi_p(r) = m \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm \left(\prod_{p_i \neq p} p_i^{m_i} \right) p^m. \qquad \clubsuit$$

Observe que $\phi_p : \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Z}$. Além disso, em virtude da definição precedente, para todo racional $r \in \mathbb{Q}$, tem-se:

$$r = \pm \prod p_i^{\phi_{p_i}(r)}.$$

14.1.2 Lema: *Para cada primo p, tem-se:*

$$\phi_p(r+s) \geqslant \min\{\phi_p(r), \phi_p(s)\}, \quad \forall\, r, s \in \mathbb{Q}. \qquad \square$$

Demonstração: Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ dados por:

$$r = \pm \prod p_i^{\phi_{p_i}(r)};$$
$$s = \pm \prod p_i^{\phi_{p_i}(s)}.$$

Se $d_i := \min\{\phi_{p_i}(r), \phi_{p_i}(s)\}$, então tem-se:

$$r + s = \pm \prod p_i^{\phi_{p_i}(r)} \pm \prod p_i^{\phi_{p_i}(s)} = \prod p_i^{d_i} \left[\pm \prod p_i^{\phi_{p_i}(r)-d_i} \pm \prod p_i^{\phi_{p_i}(s)-d_i} \right].$$

Como obviamente $\phi_{p_i}(r) \geqslant d_i$ e $\phi_{p_i}(s) \geqslant d_i$, o termo entre colchetes no membro direito na relação acima deve ser um número *inteiro*, em $\mathbb{Z}$. Ou seja, um número da forma $\pm \prod p_i^{m_i}$ com $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dessa maneira:

$$r + s = \pm \prod p_i^{d_i + m_i}.$$

Portanto:

$$\phi_{p_i}(r + s) = d_i + m_i \geqslant d_i = \min\{\phi_{p_i}(r), \phi_{p_i}(s)\}.$$

A desigualdade acima decorre do fato que $m_i \geqslant 0$. ∎

14.2 Uma Norma Alternativa nos Racionais

Seja agora p um número primo arbitrário, mas fixo.

14.2.1 Definição: No corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais define-se a aplicação $|\,.\,|_p$ como:

$$|r|_p := \begin{cases} p^{-\phi_p(r)}, & \text{se } \mathbb{Q} \ni r \neq 0; \\ 0, & \text{se } r = 0. \end{cases}$$ ♣

14.2.2 Lema: *A aplicação $|\,.\,|_p$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $|r|_p \geqslant 0$, *para todo* $r \in \mathbb{Q}$.

(b) $|r|_p = 0$ *se e somente se* $r = 0$.

(c) $|rs|_p = |r|_p\, |s|_p$, *para todo* $r, s \in \mathbb{Q}$.

(d) $|r + s|_p \leqslant \max\{|r|_p, |s|_p\}$, *para todo* $r, s \in \mathbb{Q}$.

(e) *Em particular,* $|\,.\,|_p$ *satisfaz a seguinte* desigualdade triangular*:*

$$|r + s|_p \leqslant |r|_p + |s|_p\,, \quad \text{para todo } r, s \in \mathbb{Q}.$$ □

Demonstração: **(a)** Segue trivialmente da definição.

(b) Idem.

(c) Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$ dados por:

$$r = \pm \prod p_i^{\phi_{p_i}(r)};$$
$$s = \pm \prod p_i^{\phi_{p_i}(s)}.$$

Então tem-se:

$$|rs|_p = \left|\prod p_i^{\phi_{p_i}(r)+\phi_{p_i}(s)}\right|_p = p^{-(\phi_p(r)+\phi_p(s))} = p^{-\phi_p(r)}p^{-\phi_p(s)} = |r|_p\,|s|_p\,.$$

(d) Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$. Pelo Lema 14.1.2, sabe-se que:

$$\phi_p(r+s) \geqslant \min\{\phi_p(r), \phi_p(s)\}.$$

Para fixar idéias, suponha que $\min\{\phi_p(r), \phi_p(s)\} = \phi_p(r)$. Se tal mínimo fosse igual a $\phi_p(s)$, então o raciocíno seria completamente análogo. Em tal caso, tem-se:

$$|r+s|_p = p^{-\phi_p(r+s)} \leqslant p^{-\phi_p(r)} = |r|_p \leqslant \max\{|r|_p\,, |s|_p\}.$$

(e) Pelo item (d) anterior, tem-se que:

$$|r+s|_p \leqslant \max\{|r|_p\,, |s|_p\} \leqslant |r|_p + |s|_p\,.$$

A última desigualdade acima decorre do fato que $|r|_p \geqslant 0$ e $|s|_p \geqslant 0$, segundo o item (a) anterior. ∎

Toda a construção do Capítulo 10 pode ser reproduzida *verbatim* usando $|\,.\,|_p$. Por exemplo, uma sequência de Cauchy seria definida como uma sequência $\{a_n\}$ tal que:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N} \,:\, n, m \geqslant N(\epsilon) \;\Rightarrow\; |a_n - a_m|_p < \epsilon.$$

Analogamente para sequências nulas e limitadas, etc. Quando isso é feito, obtem-se um completamento de $\mathbb{Q}$ diferente de $\mathbb{R}$, que é denotado $\mathbb{Q}_p$ e cujos elementos são denominados **números p-ádicos**.

14.2.3 Exemplo: **(a)** A sequência $\{p^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{Q}_p$. De fato, é convergente, com limite igual a zero. Observe que isso não acontece em $\mathbb{R}$.

Com efeito, se $a_n := p^n$, então $\phi_p(a_n) = n$ e tem-se:

$$|a_n|_p = p^{-\phi_p(a_n)} = p^{-n} = \frac{1}{p^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) Pelo contrário, a sequência $\{p^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge em $\mathbb{Q}_p$. Mais uma vez, observe que em $\mathbb{R}$ acontece o contrário.

Com efeito, se $a_n := p^{-n}$, então $\phi_p(a_n) = -n$ e tem-se:

$$|a_n|_p = p^{-\phi_p(a_n)} = p^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

(c) A sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida como:

$$a_n = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k, \quad \forall\, n \in \mathbb{N};$$

converge para o número -1 em $\mathbb{Q}_3$. Ou seja, $|a_n+1|_3 \to 0$.

Com efeito, tem-se:

$$a_n = 2\sum_{k=0}^{n} 3^k = 2\,\frac{1-3^{n+1}}{1-3} = 2\,\frac{3^{n+1}-1}{3-1} = 2\,\frac{3^{n+1}-1}{2} = 3^{n+1}-1.$$

Ou seja, $a_n+1 = 3^{n+1}$. Portanto, $\phi_3(a_n+1) = n+1$ e tem-se:

$$|a_n+1|_3 = 3^{-\phi_3(a_n+1)} = 3^{-(n+1)} = \frac{1}{3^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ ♣

Capítulo 15

Funções

15.1 Definições Básicas e Exemplos

Segundo Spivak [25, p. 47], o conceito mais importante de toda a Matemática é, sem dúvida nenhuma, o de função, dado que, em quase todas as áreas da Matemática moderna, a pesquisa focaliza-se no estudo de funções. Muitos dos livros de textos começam apresentando definições "intuitivas" para ilustrar esse conceito. No fundo, tais definições informais acabam ilustrando menos o conceito do que as aplicações. Portanto, partindo do princípio que uma definição deve ser eficiênte mais do que prática, apresenta-se a seguir a definição rigorosa. Não deveria surpreender, considerando sua extensa utilização na Matemática, que o conceito de função seja de abrangente generalidade. A definição formal reflete exatamente isso.

15.1.1 Definição: Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer. O **produto cartesiano de** X **com** Y é o conjunto denotado $X \times Y$ definido como:

$$X \times Y := \{(x, y) \,:\, x \in X \wedge y \in Y\}\,. \qquad \clubsuit$$

15.1.2 Definição: Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer. Uma **função** do conjunto X no conjunto Y é um sub-conjunto $f \subset X \times Y$ tal que não possui dois elementos diferentes com o mesmo primeiro elemento. Ou seja, se $(x, y), (x, z) \in f$, então $y = z$. ♣

15.1.3 Definição: Seja f uma função de X em Y. O **domínio** de f é um sub-conjunto de X, denotado $\operatorname{Dom} f$, definido como:

$$\operatorname{Dom} f := \{x \in X \,:\, (x, y) \in f \text{ para algum } y \in Y\}\,.$$

Reciprocamente, a **imagem** de f é o sub-conjunto de Y, denotado $\operatorname{Img} f$, definido como:

$$\operatorname{Img} f := \{y \in Y \,:\, (x, y) \in f \text{ para algum } x \in X\}\,. \qquad \clubsuit$$

15.1.4 Exemplo: Considere a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida como:

$$f := \left\{(x, y) \,:\, x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\right\}.$$

Em tal caso, tem-se $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ e $\operatorname{Img} f = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geqslant 0\}$. ♣

Uma coisa que deveria ficar perfeitamente clara da definição de função é que o domínio faz parte dessa definição. Portanto, rigorosamente falando, a função do Exemplo 15.1.4 anterior será *diferente* da função g definida como:

$$g := \left\{(x, y) \,:\, x \geqslant 0 \wedge y = x^2\right\}.$$

Com efeito, $\operatorname{Dom} g \subsetneqq \operatorname{Dom} f$. Contudo, observe que $\operatorname{Img} g = \operatorname{Img} f$.

15.1.5 Exemplo: Considere a função h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida como:

$$h := \left\{(x, y) \,:\, \mathbb{R} \ni x \neq \pm 1 \wedge y = \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 1}\right\}.$$

Nesse caso, tem-se $\operatorname{Dom} h = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq -1 \wedge x \neq 1\}$. ♣

Uma segunda questão a ser observada, consiste no fato que se $x \in \operatorname{Dom} f$, então segue da definição de função que existe um *único* $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$. Este $y \in Y$ univocamente determinado pelo $x \in \operatorname{Dom} f$ será denotado $f(x)$. Portanto, uma vez determinado o domínio, a própria função pode ser definida em termos do domínio da seguinte maneira:

$$f := \{(x, f(x)) \,:\, x \in \operatorname{Dom} f\}.$$

Por exemplo, a função do Exemplo 15.1.4 anterior poderia ser definida como a função f tal que $\operatorname{Dom} f := \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$f := \left\{(x, x^2) \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Contudo, sob determinadas circunstâncias, resulta comum questionar sobre o domínio de alguma função como a exibida no Exemplo 15.1.5 anterior, sendo que a resposta esperada seria aquela que estipula $x \neq \pm 1$. Na verdade, o que se está querendo perguntar consiste no conjunto de valores de x tais que está bem definida a expressão:

$$\frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 1}.$$

Obviamente, a expressão acima é um objeto matemático *per se*, de maneira completamente independente de qualquer consideração sobre funções.

15.1.6 Exemplo: Considere a função ρ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida como:

$$\rho := \{(x, f(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}\},$$

onde $f(x)$ é dada por:

$$\rho(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$ ♣

A definição de função é suficientemente generosa como para permitir que uma função possa ser praticamente *qualquer coisa*, desde que seja possível estabelecer uma correspodência entre um certo elemento $x \in \operatorname{Dom} f$ com um *único* elemento $f(x) \in Y$, sem nenhuma ambiguidade. Não resulta necessário, de maneira alguma, que essa correspondência possa ser expressa mediante uma fórmula algébrica, nem sequer mediante uma condição uniforme aplicável a todo número. Com relação à função do Exemplo 15.1.6 acima, observe que existem números reais, por exemplo da forma $\zeta(2n+1)$, dos quais se ignora até hoje se são racionais ou não.[1]

15.1.7 Exemplo: Considere os conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ definidos como:

$$A := \{2, 17, \pi^2/17, 36/\pi\};$$
$$B := \{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Seja μ uma função tal que $\operatorname{Dom} \mu := A \cup B$, satisfazendo:

$$\mu(x) := \begin{cases} 5, & \text{se } x = 2; \\ 36/\pi, & \text{se } x = 17; \\ 28, & \text{se } x = \pi^2/17; \\ 28, & \text{se } x = 36/\pi; \\ 16, & \text{se } x \in B \backslash A. \end{cases}$$

♣

Como o exemplo acima permite suspeitar, a correspondência estabelecida por uma função não é necessariamente uma relação à que possa ser encontrada uma aplicação prática. Mais ainda, tal correspondência pode prescindir de alguns números e pode inclusive não ficar totalmente claro a que números é aplicável. Embora o domínio da função do Exemplo 15.1.7 esteja corretamente definido, não é trivial decidir se o número π pertence a tal conjunto ou não.

15.1.8 Exemplo: Seja $a \in \mathbb{R}$. Considere a função f_a de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida como:

$$f_a := \left\{(x, x^2 + a) \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}.$$

Esta função, obviamente depende do número a. Portanto, a definição acima descreve na verdade infinitas funções, uma para cada escolha do número $a \in \mathbb{R}$. ♣

[1] Aqui, ζ corresponde à famosa função zeta de Riemman.

Uma outra coisa que também deveria ficar clara, principalmente com esses últimos exemplos, consiste em que a descrição de uma função poderia ser abreviada mediante a introdução de alguma notação conveniente. Observe que a definição:

$$f := \{(x, f(x)) \,:\, x \in \operatorname{Dom} f\}\,,$$

exibe uma certa redundância e poderia ser escrita de maneira mais condensada, como por exemplo:

$$f(x) = \text{expressão envolvendo } x,\ \forall\, x \in \operatorname{Dom} f.$$

15.1.9 Exemplo: As funções dos exemplos anteriores podem ser expressas abreviadamente na forma:

(a) $f(x) = x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(b) $h(x) = \dfrac{x^3 + x + 5}{x^2 - 1}$, $\forall\, \mathbb{R} \ni x \neq \pm 1$.

(c) $\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(d) $\mu(x) = \begin{cases} 5, & x = 2; \\ 36/\pi, & x = 17; \\ 28, & x = \pi^2/17; \\ 28, & x = 36/\pi; \\ 16, & x \notin \{2, 17, \pi^2/17, 36/\pi, \} \wedge x = a + b\sqrt{2},\ \ a, b \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

(e) $f_a(x) = x^2 + a$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. ♣

Com as devidas convenções, a notação pode ser ainda mais concisa. Por exemplo a função f do Exemplo 15.1.9(a) poderia ser escrita simplesmente como:

$$f(x) = x^2,$$

sobrentendendo-se que tal expressão é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Obviamente, a única abreviação possível para a função g definida imediatamente após o Exemplo 15.1.4 resulta:

$$g(x) = x^2,\ \forall\, x \geqslant 0.$$

Mas em geral, aceita-se na prática que uma expressão como a da função h do Exemplo 15.1.9(b) pode ser abreviada escrevendo apenas:

$$h(x) = \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 1}.$$

Ou seja, se o domínio não se restringe explicitamente mais, sobrentende-se formado por todos aqueles números para os quais a expressão tem sentido.

15.1.10 Exemplo: Não resulta difícil verificar a seguintes relações com as funções do Exemplo 15.1.9:

(a) $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$.

(b) $h(x) = x$ se e somente se $x = -5/2$.

(c) $\rho(x+y) = \rho(x)$, se $y \in \mathbb{Q}$.

(d) $\mu\left(\dfrac{\pi^2}{17}\right) = \mu\left(\dfrac{36}{\pi}\right)$.

(e) $f_x(x) = f(x) + x = x f_x(1)$. ♣

Expressões mais complicadas podem ser avalidadas de maneira rotineira, com a devida quota de paciência:

$$f(\rho(\mu(f_3(h(0))))) = f(\rho(\mu(f_3(-5)))) = f(\rho(\mu(28))) = f(\rho(16)) = f(1) = 1.$$

Observe que f denota um sub-conjunto de $X \times Y$, enquanto $f(x)$ denota um elemento em Y. Existe a tendência bastante generalizada de considerar $f(x)$ como um "conjunto de instruções" ou "procedimento". Embora intuitivo, esse ponto de vista não carece de objeções. A mais substancial deficiência consiste no fato que expressões tais como:

$$f(x) = x^2$$
$$f(x) = x^2 - 3x + 3 + 3(x-1)$$

representam certamente *procedimentos* diferentes, se por procedimento entende-se o conjunto de instruções empregadas para determinar $f(x)$. Mas resulta óbvio que as duas expressões acima deveriam representar a mesma função.

O leitor pode ter a impressão que esta abordagem intuitiva foi substituída por uma definição tão abstrata, que a mente apenas pode captar. Contudo, a definição rigorosa adotada constitui uma boa ilustração dos métodos que têm permitido incorporar as idéias intuitivas à Matemática rigorosa. O que na verdade importa perguntar sobre uma função não é "O que é uma instrução?", ou "O que é um procedimento?", mas "O que é necessário saber sobre uma função para conhecer absolutamente tudo o referente a ela?" A resposta dessa última pergunta é fácil: Para todo número x é necessário conhecer o número $f(x)$ sem ambiguidade. Essa informação pode ser condensada como uma coleção de pares de números na forma $(x, f(x))$, o que no fundo não é nada mais do que uma tabela com duas entradas.

Finalmente, caso sirva como consolo, nem a definição rigorosa, nem a abordagem intuitiva, ou a utilização de tabelas, fornecem a melhor maneira de representar uma função. No caso de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a melhor maneira consiste em fazer desenhos, que será o tema do capítulo seguinte.

15.2 Operações com Funções

Se f e g são duas funções quaisquer, pode-se definir uma nova função, denotada $f + g$, mediante a expressão:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x).$$

Segundo a convenção adotada, o domínio de $f+g$ consistirá em todos aqueles x tais que a expressão $f(x)+g(x)$ está bem definida. Ou seja:

$$\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g).$$

Analogamente, define-se o produto fg e o quociente f/g de funções, respectivamente como:

$$\begin{aligned} (fg)(x) &:= f(x)g(x); \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Obviamente, $\mathrm{Dom}(fg) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$. Por outro lado, o domínio de f/g resulta ligeiramente mais complicado, podendo ser expresso como:

$$\mathrm{Dom}(f/g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \cap \{x \in \mathbb{R} \, : \, g(x) \neq 0\}.$$

Não resulta difícil provar que a soma e produto de funções são associativos, ou seja:

$$\begin{aligned} (f+g)+h &= f+(g+h), \\ (fg)\,h &= f(gh); \end{aligned}$$

como também comutativos:

$$\begin{aligned} f+g &= g+f, \\ fg &= gf. \end{aligned}$$

Para formalizar tal prova, resulta necessário adotar o procedimento típico empregado na demonstração de identidades envolvendo funções: deve-se verificar que as duas funções possuem o mesmo domínio e que tomam o mesmo valor para qualquer número em tal domínio.

Existe ainda uma outra maneira de combinar funções, de longe a mais importante, definida a seguir.

15.2.1 Definição: Se f e g são duas funções quaisquer, define-se uma nova função, denominada a **composição** da f com g e denotada por $f \circ g$, mediante a expressão:

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

O domínio de $f \circ g$ consiste em todos aqueles x no domínio de g, tais que $g(x)$ pertence ao domíno da f, ou seja:

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) \, : \, g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$ ♣

Esta operação de composição de funções é associativa:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Contudo, resulta altamente oportuno salientar que a função $f \circ g$ será em geral diferente de $g \circ f$, como quase qualquer exemplo tomado ao acaso pode ilustrar. Ou seja, a composição de funções está longe de ser uma operação comutativa.

15.3 Algumas Classes Particulares de Funções

Embora o conceito de função seja de abrangente generalidade, a atenção na presente será limitada por enquanto a funções de um tipo muito particular. Mas mesmo essa classe tão restrita de funções apresenta variedade tão grande, que monopolizará a atenção ainda por um tempo considerável. O objetivo da presente seção consiste na apresentação das funções que aparecem com maior frequência na prática.

Para começar, a função f do Exemplo 15.1.9(a) é um caso particular de uma classe importantíssima de funções, definida a seguir.

15.3.1 Definição: Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma função da forma $f(x) = x^n$ é denominada função **potencial** com exponente n. ♣

As funções potenciais são, por sua vez, os blocos básicos de uma classe mais geral ainda.

15.3.2 Definição: Uma função f é denominada **função polinomial** ou simplesmente **polinômio** se existe $n \in \mathbb{N}$ e números reais $a_0, a_1, \dots a_n$ com $a_n \neq 0$, tais que:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Em tal caso, o número n é denominado o **grau** do polinômio. ♣

As funções polinomiais possuem algumas propriedades parecidas com as dos números inteiros, particularmente, o algoritmo da divisão (vide Exercício 15.8.1). Não surpreende, portanto, que quocientes de polinômios possuam um destaque especial, como no caso dos quocientes de números inteiros.

15.3.3 Definição: Uma função da forma $f = p/q$, onde p e q são polinômios, com q não identicamente nulo, recebe o nome de **função racional**. ♣

Um primeiro contato com as propriedades da funções trigonométricas será fornecido ainda no presente capítulo, na seção 15.10. A definição formal será adiada até o Capítulo 31.

A função exponencial foi introduzida previamente, no Capítulo 12. As suas propriedades *funcionais* serão analisadas com detalhe no contexto mais apropriado do Capítulo 32, junto com as da sua fiel companheira, a função logarítmica.

As funções trigonométricas, logarítmica e exponencial, são exemplos das que se denominam **funções trascendentes elementares**. Essas funções, junto com as racionais, se podem combinar de diversas maneiras, dando origem à classe mais abrangente das **funções algébricas**, como nos seguintes exemplos:

$$f(x) = \frac{x + x^2 + x\ \mathrm{sen}^2\, x}{x\ \mathrm{sen}\, x + x\ \mathrm{sen}^2\, x};$$

$$f(x) = \mathrm{sen}(\mathrm{sen}(x^2)).$$

Exercícios para o Capítulo 15

15.4 Domínios e Imagens

15.4.1 Exercício: Determine o domínio *máximo* onde as seguintes funções podem ser definidas.

(a) $f(x) = \dfrac{2}{|x - 1/3|}$. R: $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 1/3\}$.

(b) $g(x) = 3 - \sqrt{2(x-1)}$. R: $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geqslant 1\}$.

(c) $h(x) = \dfrac{x+2}{2x^2 + 7x + 6}$. R: $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq -3/2\}$.

Sugestão: Lembre-se do Exercício 11.4.1(c).

(d) $k(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$. R: $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq 1 \wedge x \neq 2\}$.

(e) $l(x) = 2x^2 + 4x + 3$. R: $\mathbb{R}$.

(f) $m(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$. R: $\{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geqslant 1/\sqrt{3} \vee x \leqslant -1/\sqrt{3}\}$. ♣

15.4.2 Exercício: Determine agora a *imagem* de cada uma das funções do exercício anterior. Para tanto, estabeleça a condição $f(x) = y$ e tente colocar em evidência x em função de y. Isso será possível apenas para determinados valores de y, cuja coleção determina a imagem da função em questão.

(a) R: $\{y \in \mathbb{R} \,:\, y > 0\} = (0, +\infty)$.

(b) R: $\{y \in \mathbb{R} \,:\, y \leqslant 3\} = (-\infty, 3]$.

(c) R: $\{y \in \mathbb{R} \,:\, y \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(d) R: $\mathbb{R}$.

Sugestão: Considere por separado os casos $y = 0$ e $y \neq 0$.

(e) R: $\{y \in \mathbb{R} \,:\, y \geqslant 1\} = [1, +\infty)$.

Sugestão: Aqui será util determinar o vértice da parábola.

(f) R: $\{y \in \mathbb{R} \,:\, y \geqslant 0\} = [0, +\infty)$. ♣

15.4.3 Exercício: Com as funções do Exercício 15.4.1 calcule:

(a) $f(1)$. R: 3.

(b) $g(2)$. R: $3-\sqrt{2}$.

(c) $h(x+1)$. R: $\dfrac{x+3}{2x^2+11x+15} = \dfrac{1}{2x+5}$.

(d) $l(\sqrt{2})$. R: $4(1+\sqrt{2})+3$.

(e) $m(-1)$. R: $\sqrt{2}$.

(f) $\dfrac{l(1+x)-l(1)}{x}$. R: $2x+8$. ♣

15.4.4 Exercício: Determinar o domínio das funções definidas pelas seguintes fórmulas:

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. R: $\{x \in \mathbb{R} \,:\, -1 \leqslant x \leqslant 1\} = [-1,1]$.

(b) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$. R: $[-1,1] \cap \mathbb{R} = [-1,1]$.

(c) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$.
R: $\{x \in \mathbb{R} \,:\, -1 \leqslant x \leqslant 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geqslant 1 \vee x \leqslant -1\} = \{-1, 1\}$.

(d) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$. R: $\emptyset$. ♣

15.4.5 Exercício: Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Interpretar o seguinte:

(a) $f(f(x))$. Para quais x isso tem sentido? R: $\dfrac{1+x}{2+x}$. Para $x \neq -2$.

(b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. R: $\dfrac{x}{1+x}$.

(c) $f(cx)$. R: $\dfrac{1}{1+cx}$.

(d) $f(x+y)$. R: $\dfrac{1}{1+x+y}$.

(e) $f(x)+f(y)$. R: $\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1+y} = \dfrac{2+x+y}{(1+x)(1+y)}$.

(f) Para que números c existe algum número x tal que $f(cx) = f(x)$?

Sugestão: Existem muitos mais do que aparenta. R: Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, considere $x = 0$.

(g) Para que números c a relação $f(cx) = f(x)$ é satisfeita para pelo menos dois números x diferentes, ou seja, equivalentemente, para algum $x \neq 0$? R: Apenas no caso trivial $c = 1$. ♣

15.5 Composição

15.5.1 Exercício: Considere as funções l e m do Exercício 15.4.1(e,f). Calcule as seguintes composições e determine os seus respectivos domínios e imagens. Pode ser de alguma ajuda considerar os resultados dos Exercícios 15.4.1(e,f) e 15.4.1(e,f).

(a) $l \circ m$. R: $(l \circ m)(x) = 6x^2 + 1 + 4\sqrt{3x^2 - 1}$.
$\mathrm{Dom}(l \circ m) = \mathrm{Dom}(m) = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 1/\sqrt{3} \vee x \leqslant -1/\sqrt{3}\}$.
$\mathrm{Img}(l \circ m) = [l(0), +\infty) = [3, +\infty)$.

(b) $m \circ l$. R: $(m \circ l)(x) = \sqrt{3(2x^2 + 4x + 3)^2 - 1}$.
$\mathrm{Dom}(m \circ l) = \mathbb{R}$.
$\mathrm{Img}(m \circ l) = (m(1), +\infty) = (\sqrt{2}, +\infty)$. ♣

15.5.2 Exercício: Considere as seguintes funções:

$$S(x) = x^2,$$
$$P(x) = 2^x,$$
$$s(x) = \operatorname{sen} x.$$

Determine os valores indicados nos itens a seguir. Em cada caso, a solução deve ser um *número*.

(a) $(S \circ P)(y)$. R: $(2^y)^2 = 2^{2y}$.

(b) $(S \circ s)(y)$. R: $(\operatorname{sen}(y))^2 = \operatorname{sen}^2(y)$.

(c) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$. R: $2^{2\operatorname{sen}(t)} + \operatorname{sen}(2^t)$.

(d) $s(t^3)$. R: $\operatorname{sen}(t^3)$. ♣

15.5.3 Exercício: Expressar cada uma das seguintes funções em termos de S, P e s do exercício anterior usando apenas $+$, $.$ e $\circ$. Em cada caso a solução deve ser uma *função*. Por exemplo, a solução do item (a) abaixo seria $P \circ s$.

(a) $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$. R: $P \circ s$.

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(2^x)$. R: $s \circ P$.

(c) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. R: $s \circ S$.

(d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$. R: $S \circ s$.

Sugestão: Lembre-se que $\operatorname{sen}^2 x$ é uma abreviação de $(\operatorname{sen} x)^2$.

(e) $f(x) = 2^{2^x}$. R: $P \circ P$.

Sugestão: Observe que a^{b^s} significa sempre $a^{(b^s)}$. Tal convenção é adotada porque $(a^b)^s$ pode ser denotado mais simplemesmente por a^{bs}.

(f) $f(u) = \operatorname{sen}(2^u + 2^{u^2})$. R: $s \circ (P + (P \circ S))$.

(g) $f(y) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2^{2^{2^{\operatorname{sen} y}}})))$. R: $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$.

(h) $f(a) = 2^{\operatorname{sen}^2 a} + \operatorname{sen}(a^2) + 2^{\operatorname{sen}(a^2 + \operatorname{sen} a)}$. R: $P \circ S \circ s + s \circ S + P \circ (s \circ (S + s))$. ♣

15.5.4 Exercício: Seja f uma função e suponha que y é um número tal que $f(f(y)) = y$.

(a) Qual é valor de $\underbrace{f(f(f(\cdots f(f(y))\cdots)))}_{80 \text{ vezes}}$?

Sugestão: Calcule as primeiras sucessivas composições. O que descobre?

(b) Responda a mesma questão do item (a), mas trocando 80 por 81.

Sugestão: A resposta segue quase imediatamente de (a). Não é necessário repetir tudo.

(c) Responda a mesma questão do item (a) mas agora supondo que o número y satisfaz $f(f(y)) = f(y)$. ♣

15.6 Operações com Funções

15.6.1 Exercício: Sejam f, g e h funções. Forneça uma prova ou um contra-exemplo para as seguintes identidades:

(a) $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

(b) $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$.

(c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \left(\dfrac{1}{f}\right) \circ g$.

(d) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\dfrac{1}{g}\right)$. ♣

15.6.2 Exercício: Prove que não existem funções f e g tais que $f(x) + g(y) = xy$ para *todos* os valores de x e y.

Sugestão: Considerando $x = 0$ prove que g deve ser uma função constante. Feito isso, considere agora $y = 0$ e veja o que acontece com a f. ♣

15.6.3 Exercício: Prove que não existem funções f e g tais que $f(x)g(y) = x + y$ para *todos* os valores x e y.

Sugestão: Considerando $x = 0$ prove que $f(0) \neq 0$ e determine uma expressão para $g(y)$. Feito isso, considere então $y = 0$ e veja o que acontece agora com x. ♣

15.6.4 Exercício: **(a)** Seja $f(x) = x + 1$. Existem funções g tais que $f \circ g = g \circ f$? R: $g(x) = g(0) + x$.

(b) Suponha agora que f é uma função constante. Para que funções g, tem-se $f \circ g = g \circ f$? R: $g(x) = x$.

(c) Seja agora f tal que $f \circ g = g \circ f$ para *todas* as funções g. Prove que f deve ser a função identidade $f(x) = x$.

Sugestão: Se vale para todas, vale em particular para as g constantes. ♣

15.7 Polinômio Interpolador de Lagrange

15.7.1 Exercício: Sejam $x_1, x_2, \dots x_n$ um conjunto de n números *diferentes*.

(a) Determine uma função polinômica f_i de grau $n-1$ que tome o valor 1 em x_i e 0 em x_j para todo $j \neq i$.

Sugestão: O produto dos $(x - x_j)$ para $j \neq i$ resulta nulo em $x = x_j$.

R: $f_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \Big/ \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$.

(b) Sejam agora $a_1, a_2, \dots a_n$ um outro conjunto de n números (não necessariamente diferentes). Determine uma função polinômica f de grau $n-1$ tal que $f(x_i) = a_i$ para todo $i = 1, 2, \dots n$.

Sugestão: Use as funções f_i do item anterior. A expressão que obtiver denomina-se **Fórmula de Interpolação de Lagrange**. R: $f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$. ♣

15.8 Algoritmo da Divisão para Polinômios

15.8.1 Exercício: Seja f uma função polinomial qualquer:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

(a) Se $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, então existem g função polinomial e $b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x) = (x - a)\, g(x) + b,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Se $f(a) = 0$, então $f(x) = (x - a)\, g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. ♣

15.9 Funções Racionais

15.9.1 Exercício: Para que valores de a, b, c e d a função $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ satisfaz $f(f(x)) = x$ para *todo* x? R: $d = -a$; ou então $d = a \neq 0$, $b = c = 0$; ou ainda $d = a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. ♣

15.10 As funções trigonométricas "algébricas"

Seja $\mathbb{R} \ni \pi > 0$. Considere duas funções, denominadas **seno** e **cosseno**, denotadas respectivamente por sen e cos, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. **Domínio de definição:** As funções sen e cos estão definidas em todo $\mathbb{R}$.
2. **Valores especiais:**

$$\cos 0 = \operatorname{sen} \pi/2 = 1,$$
$$\cos \pi = -1.$$

3. **Cosseno de uma diferença:** Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\cos(y - x) \;=\; \cos y \cdot \cos x \;+\; \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} x.$$

4. **Desigualdades fundamentais:** Para $0 < x < \pi/2$ tem-se:

$$0 \;<\; \cos x \;<\; \frac{\operatorname{sen} x}{x} \;<\; \frac{1}{\cos x}.$$

Assumindo as propriedades 1, 2 e 3, verifique as relações adicionais estabelecidas nos exercícios a seguir.

15.10.1 Exercício: Identidade pitagórica

Verifique a seguinte relação:

$$\operatorname{sen}^2 x \;+\; \cos^2 x \;=\; 1,\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Sugestão: Considere $y = x$ na propriedade 3 e use o valor especial $\cos 0 = 1$ da propriedade 2. ♣

15.10.2 Exercício: Limitação

Prove que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1,$$
$$|\cos x| \leqslant 1.$$

Sugestão: Ambas relações seguem diretamente da identidade pitagórica do exercício 15.10.1 anterior e do exercício 2.5.2. ♣

15.10.3 Exercício: Mais valores especiais

Verifique os seguintes valores especiais:

$$\operatorname{sen} 0 \;=\; \cos \pi/2 \;=\; \operatorname{sen} \pi \;=\; 0.$$

Sugestão: Use a propriedade 2 e a identidade pitagórica do exercício 15.10.1 anterior com valores apropriados de x. ♣

15.10.4 Exercício: Considerando $y = \pi/2$ na propriedade 3, verifique a relação:

$$\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Esta identidade é incluída aqui apenas para ser usada nos próximos exercícios.

Sugestão: Será necessário usar também os valores especiais $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$ da propriedade 2 e $\cos \pi/2 = 0$ do exercício 15.10.3 anterior. ♣

15.10.5 Exercício: Paridade

(a) Prove que cos é uma função par, ou seja:

$$\cos(-x) = \cos x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(b) Prove que sen é uma função ímpar, ou seja:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Sugestão: Utilizando a identidade do exercício anterior, observe que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(-x) &= \cos(\pi/2 + x) = \cos(\pi - (\pi/2 - x)) \\ &= \cos \pi \cdot \cos(\pi/2 - x) \;-\; \operatorname{sen} \pi \cdot \operatorname{sen}(\pi/2 - x).\end{aligned}$$ ♣

15.10.6 Exercício: Co-relações

Prove que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\pi/2 + x) &= \cos x, \\ \cos(\pi/2 + x) &= -\operatorname{sen} x.\end{aligned}$$ ♣

15.10.7 Exercício: Periodicidade

Verifique que as funções sen e cos são periódicas com período 2π, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + 2\pi) &= \operatorname{sen} x, \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x.\end{aligned}$$ ♣

15.10.8 Exercício: Fórmulas de adição

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y \ - \ \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y,$$
$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y \ + \ \cos x \cdot \operatorname{sen} y.$$

♣

15.10.9 Exercício: Fórmulas de diferenças

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\operatorname{sen} a \ - \ \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right),$$
$$\cos a \ - \ \cos b = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

♣

Além das propriedades 1, 2 e 3, assuma agora adicionalmente a validade da propriedade 4.

15.10.10 Exercício: Motonicidade

(a) Prove que no intervalo $[0, \pi/2]$ a função sen é estritamente crescente, ou seja:

$$a < b \ \Rightarrow \ \operatorname{sen} a < \operatorname{sen} b, \ \forall\, a, b \in [0, \pi/2].$$

(b) Prove que no intervalo $[0, \pi/2]$ a função cos é estritamente decrescente, ou seja:

$$a < b \ \Rightarrow \ \cos b < \cos a, \ \forall\, a, b \in [0, \pi/2].$$

♣

As propriedades enunciadas nos seguintes dois exercícios são meros casos particulares, ou consequência direta, das fórmulas de adição, requerendo apenas apenas o concurso das propriedades 1, 2 e 3. Contudo, as relações a seguir são muito úteis na prática para manipular expressões que envolvem as funções trigonométricas.

15.10.11 Exercício: Fórmulas do ângulo duplo, ou fórmulas de duplicação

Para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x,$$
$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x.$$

♣

15.10.12 Exercício: Fórmulas de redução

Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

♣

A seguinte propriedade servirá para provar um notável limite no capítulo 18, vide exercício 18.12.3(d). Resulta necessária também aqui a propriedade 4, além das três primeiras.

15.10.13 Exercício: Sublinearidade do seno:

Prove que no intervalo aberto $(0, \pi/2)$ a função seno é estritamente sublinear, ou seja:

$$\operatorname{sen} x < x, \ \forall\, 0 < x < \pi/2.$$

Sugestão: Pelo exercício 15.10.11 tem-se:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x,$$

de onde segue que:

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cos x < \frac{1}{\cos x} \cos x = 1.$$

Observe que a desigualdade na relação acima é consequência da propriedade 4. ♣

15.11 Uma Identidade Trigonométrica Importante

Considere as funções sen e cos satisfazendo as propriedades 1 a 4 introduzidas na seção anterior.

15.11.1 Exercício: Verifique a seguinte relação:

$$\frac{1 - \cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta}.$$

Sugestão: Observe que:

$$\frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 n\theta}{2 \operatorname{sen} n\theta \cos n\theta} = \frac{1 - \cos 2n\theta}{\operatorname{sen} 2n\theta}.$$ ♣

15.11.2 Exercício: Verifique agora, mediante um cálculo direto usando a fórmula de adição para o coseno, a relação:

$$\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\cos n\theta} = \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}.$$ ♣

15.11.3 Exercício: Mediante um cálculo direto usando a fórmula de adição para o seno e os resultados dos dois exercícios anteriores, verifique a identidade:

$$\operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen} 2n\theta \frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta}.$$ ♣

15.11.4 Exercício: Usando a propriedade 4, verifique que, se $0 < 2n\theta \leqslant \pi/2$, então:

$$\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}. \qquad \clubsuit$$

15.11.5 Exercício: Utilizando os resultados dos dois exercícios anteriores conclua que:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\operatorname{sen}2n\theta < \operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta. \qquad \clubsuit$$

15.11.6 Exercício: Empregando mais uma vez a propriedade 4, verifique agora que, se $0 < 2n\theta \leqslant \pi/2$, então:

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta - \operatorname{sen}\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\operatorname{sen}2n\theta. \qquad \clubsuit$$

15.11.7 Exercício: Finalmente, utilizando os resultados dos dois exercícios anteriores conclua que:

$$\operatorname{sen}(2n+1)\theta - \operatorname{sen}\theta < \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\operatorname{sen}2n\theta < \operatorname{sen}(2n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta, \quad \text{se } 0 < 2n\theta \leqslant \pi/2. \qquad \clubsuit$$

15.11.8 Exercício: Considerando $2n\theta = a$, ou seja, $\theta = a/2n$, na relação do exercício anterior, prove que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\operatorname{sen}(n+1/2)\frac{a}{n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right) < \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{\left(\frac{a}{2n}\right)}\operatorname{sen}a < \operatorname{sen}(n-1/2)\frac{a}{n} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right), \quad \text{se } 0 < a \leqslant \pi/2.$$

Ou seja, se $0 < a \leqslant \pi/2$, então para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\frac{a}{n}\,\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{2n} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)} < \operatorname{sen}a < \frac{a}{n}\,\frac{\operatorname{sen}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{a}{2n} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2n}\right)}. \qquad \clubsuit$$

15.11.9 Exercício: Prove que:

$$2\operatorname{sen}x/2\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \operatorname{sen}(n+1/2)x - \operatorname{sen}x/2; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sugestão: Utilizando a fórmula de diferenças para o seno, observe que:

$$2 \operatorname{sen} x/2 \cos kx = \operatorname{sen}(k+1/2)x - \operatorname{sen}(k-1/2)x, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Depois, some essa identidade para k de 1 até n e use a propriedade telescópica das somas finitas para simplificar o membro resultante à direita. ♣

15.11.10 Exercício: Utilizando o exercício anterior, verifique que, para $x/2 \neq k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)x - \operatorname{sen} x/2}{2 \operatorname{sen} x/2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N};$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos kx = \frac{\operatorname{sen}(n-1/2)x + \operatorname{sen} x/2}{2 \operatorname{sen} x/2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

♣

15.11.11 Exercício: Prove que para qualquer $0 < a \leqslant \pi/2$, tem-se:

$$\frac{a}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{ka}{n}\right) < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{ka}{n}\right); \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sugestão: Use o exercício anterior e a segunda relação do Exercício 15.11.8 com $x = a/n$. ♣

Capítulo 16

Gráficos

> Pode-se adquirir um pouco de paz de espírito apenas contemplando aquele horizonte. É uma linha traçada por um geômetra... Completamente regular, firme e conhecida. Talvez seja a linha original que inspirou Euclides na compreensão do comportamento das retas; uma linha de referência, que originou os primeiros cálculos dos primeiros astrônomos que elaboraram mapas celestes.
>
> *Robert M. Pirsig*[1]

16.1 Representação Gráfica dos Números Reais

O método convencional de representar o conjunto dos números reais é através de uma linha reta. Para tanto, escolhe-se arbitrariamente um ponto que corresponde ao número 0, também denominado *origem*, e um outro ponto à direita que representa o 1. Os pontos à esquerda da origem correspondem aos números negativos.

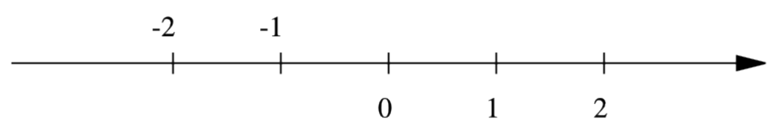

Figura 16.1: Representação gráfica do conjunto dos números reais.

Com essas convenções, se $a < b$, então o ponto que representa a fica à esquerda do ponto correspondente para b. O número $|a - b|$ tem uma representação simples em termos dessa imagem geométrica: consiste na *distância* entre a e b, ou seja, o comprimento do segmento retilíneo que une tais pontos.

Pode-se admitir como auto-evidente que todos os números reais, inclusive os irracionais, podem ser representados como pontos de uma reta, extendendo-se continuamente *ad infinitum* para ambos lados da origem. A base para tal suposição consiste em que tal método de "desenhar" números

[1] [18, p. 357].

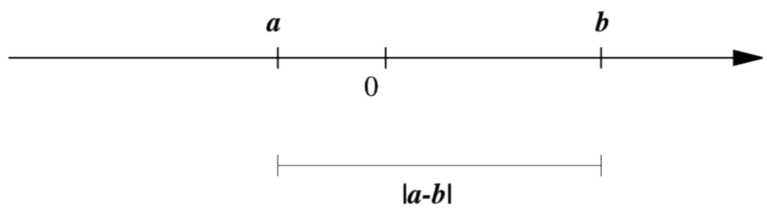

Figura 16.2: Representação gráfica do módulo $|a-b|$.

resulta apenas uma maneira de representar certas idéias abstratas, mas nunca uma forma de demonstrar teoremas (pelo menos na presente obra).

De maior interesse do que um método para representar números, consiste em determinar uma maneira de representar *pares de números*. Esse procedimento requer duas linhas retas que se cortam em ângulo reto. Para diferenciá-las, são denominadas de **eixo horizontal** ou **das abcissas**, e **vertical** ou **das ordenadas**, respectivamente. A interseção dos dois eixos corresponde ao par $(0,0)$, também denominado a **origem**. O todo recebe o nome de **sistema de coordenadas cartesiano ortogonal**.

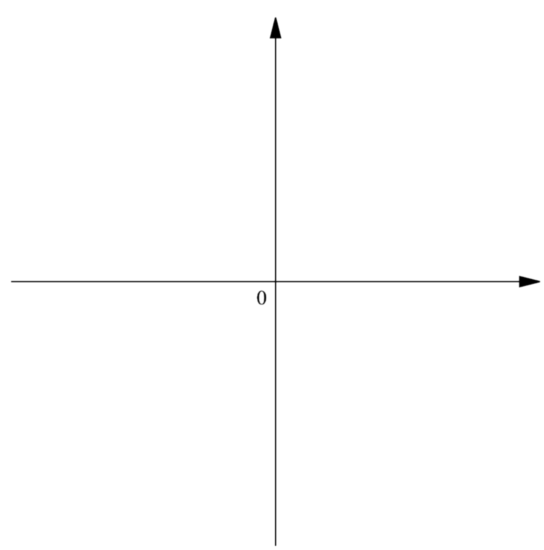

Figura 16.3: Sistema de coordenadas cartesiano ortogonal.

Lembre que o que realmente interessa é determinar um método para desenhar funções. Dado que uma função não é nada mais do que uma coleção de pares de números, o traçado de uma função se reduz ao traçado de cada um do seus pares. O desenho assim obtido recebe o nome de **gráfico** da função em questão.

Não surprende que as funções mais simples de todas, as funções constantes $f(x)=c$, possuam também os gráficos mais simples. Resulta fácil verificar que, para uma tal função, o seu gráfico consiste em uma linha reta paralela ao eixo horizontal a distância c do mesmo.

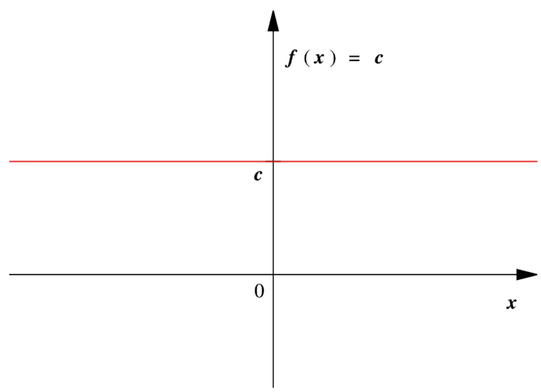

Figura 16.4: Gráfico da função constante $f(x) = c$.

16.2 Funções Lineares

Ascendendo na ordem de complexidade, as funções da forma $f(x) = ax + b$ também têm gráficos particularmente simples.

16.2.1 Definição: Uma função **linear** é uma função da forma $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Equivalentemente, uma função linear é uma função polinomial de grau 1. ♣

Os gráficos das funções lineares da forma $f(x) = ax$ consistem em retas que passam pela origem $(0, 0)$. A constante a recebe o nome de **coeficiente angular**, **pendente**, ou **inclinação**, da reta que representa à função linear.

Não resulta difícil verificar que o gráfico da função linear $f(x) = ax + b$ consiste em uma reta de coeficiente angular a que passa pelo ponto $(0, b)$. Ou seja, o ponto b determina o ponto de corte da reta com o eixo vertical, pelo que recebe o nome de **ordenada na origem** ou também **coeficiente linear**.

16.3 Funções Quadráticas

Após as funções lineares, talvez as funções mais simples sejam os polinômios de segundo grau, também denominados funções quadráticas.

16.3.1 Definição: Uma função **quadrática** é uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Equivalentemente, uma função quadrática é uma função polinômica de grau 2. ♣

Observe que, para qualquer função f em geral, o ponto de corte do seu gráfico com o eixo

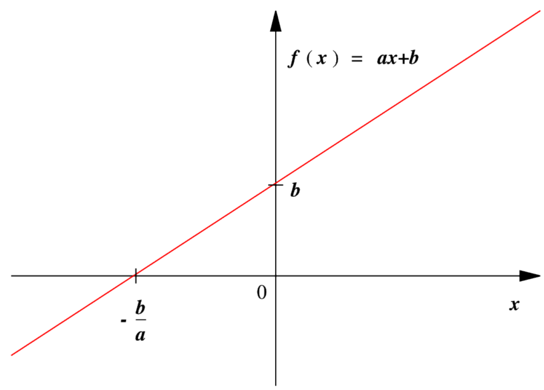

Figura 16.5: Gráfico da função linear $f(x) = ax + b$.

vertical é dado pelo ponto $(0, f(0))$. No caso da função quadrática, tem-se $f(0) = c$, ou seja, como no caso da função linear, tal ponto de interseção é dado pelo coeficiente constante.

Também, para qualquer função f em geral, os pontos de corte do seu gráfico com o eixo horizontal consistem nos pontos x determinados pela condição $f(x) = 0$, também denominados **raízes** da função em questão. Observe que uma função pode possuir uma, várias, ou nenhuma raiz, dependendo de cada caso em particular. Em raras oportunidades, as raízes podem ser calculadas explicitamente. Por exemplo, no caso da função quadrática, existem em geral duas raízes, determinadas pela condição $ax^2 + bx + c = 0$. Segundo o Exercício 11.4.1(a), tais raízes podem ser obtidas através das expressões:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Observe que no caso em que $b^2 = 4ac$ ambas raízes coincidem. Em tal caso, existe apenas uma raiz e o gráfico corta o eixo horizontal em apenas um ponto.

O gráfico de uma função quadrática denomina-se **parábola**. A forma de tal parábola pode ser deduzida a partir dos coeficiêntes a, b e c baseando-se nas seguintes considerações:

- O sinal de a determina se os ramos da parábola serão para baixo ou para cima. (Se $a = 0$ obviamente em lugar de uma parábola o que se tem é uma reta).

  Isso se deve ao fato que o termo quadrático ax^2 domina aos outros para x grande. Desta maneira, como x^2 resulta sempre positivo, as propriedades de crescimento ou decaimento ficam determinadas pelo sinal de a.

- Da expressão do Exercício 2.9.1, a saber:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[(2ax + b)^2 - \left(b^2 - 4ac\right)\right]$$

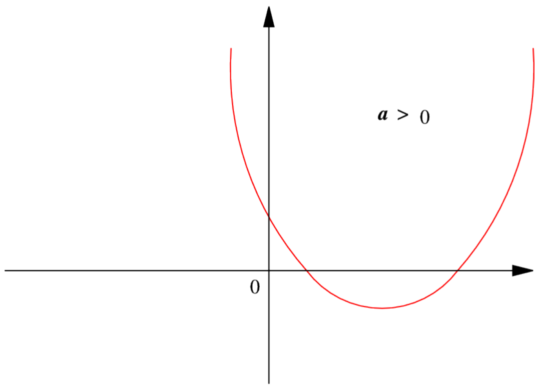

Figura 16.6: Se o sinal do coeficiente a for positivo, a parábola tem ramos ascendentes.

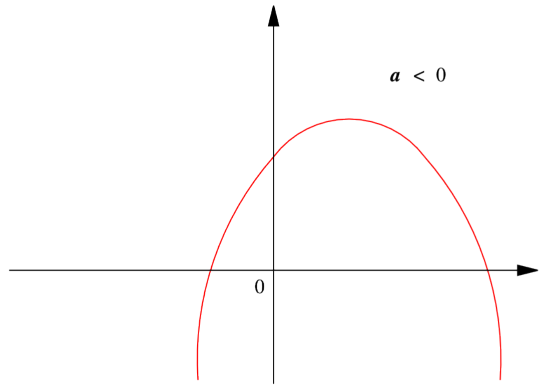

Figura 16.7: Se o sinal do coeficiente a for negativo, a parábola tem ramos descendentes.

sabe-se que o ponto x onde a parábola atinge seu valor extremo é dado por $x = -b/2a$. Tal valor extremo será um máximo no caso $a < 0$, ou mínimo se $a > 0$, e é dado por $f(-b/2a) = -(b^2 - 4ac)/4a$. Este ponto costuma ser denominado o **vértice** da parábola em questão.

- Observe também que, da expressão anterior, tem-se:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}\left[4a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(b^2 - 4ac\right)\right].$$

Portanto, a parábola é simétrica em torno do eixo vertical dado por $x = -b/2a$, o qual é o mesmo eixo onde se localiza o ponto de máximo, ou mínimo.

- De pasagem, observe que a partir do ponto de máximo ou mínimo, pode ser obtido também o ponto médio entre a raiz maior e a menor, dado por: $r_1 + (r_1 - r_2)/2 = (r_1 + r_2)/2 = -b/2a$.

- Como já fora apontado anteriormente, o coeficiente c determina *sempre* a **ordenada na origem**, ou seja, o ponto de corte da parábola com o eixo das ordenadas. ♣

16.4 Função Valor Absoluto

16.4.1 Definição: A função **módulo** ou **valor absoluto** é definida como $f(x) := |x|$. Ou seja:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$ ♣

16.4.2 Observação: **(a)** Na parte correspondente a $x \geqslant 0$, o gráfico de $f(x) = |x|$ coincide com o gráfico da reta $f(x) = x$.

(b) Por outro lado, na parte correspondente a $x < 0$, o gráfico de $f(x) = |x|$ coincide com o gráfico da reta $f(x) = -x$.

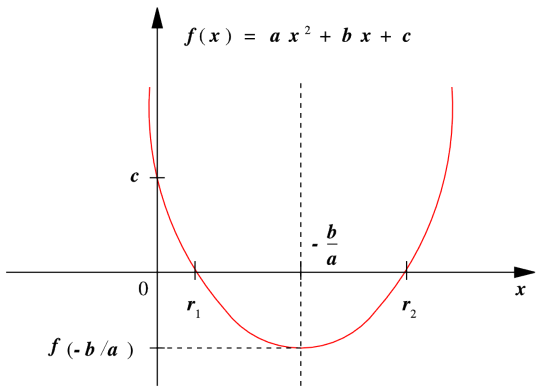

Figura 16.8: Gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(c) Finalmente, o gráfico de $f(x) = |x|$ pode ser obtido juntando os dois gráficos anteriores. ♣

16.4.3 Observação: Para obter o gráfico resultante da composição do módulo com outras funções, ou seja, de funções da forma $f(x) = |g(x)|$, resulta facultativo proceder da seguinte maneira:

(a) Desenha-se o gráfico de $g(x)$ normalmente, ou seja, como se não houvesse módulo.

(b) A parte do gráfico de $g(x)$ que fica acima do eixo das abcissas permanece inalterada.

(c) A parte do gráfico de $g(x)$ que fica abaixo do eixo das abcissas deve ser refletido simetricamente para cima com relação a tal eixo. ♣

16.4.4 Exemplo: Deseja-se esboçar o gráfico da função:

$$f(x) = |3x + 1| .$$

Em tal caso, primeiramente desenha-se o gráfico da função $f(x) = 3x + 1$ *sem módulo* (Figura 16.9). A parte desse gráfico que fica por cima do eixo horizontal permanece sem modificação alguma (Figura 16.10). Por outro lado, a parte do gráfico da função original sem módulo que fica por baixo do eixo horizontal deve ser refletida para cima ao longo desse eixo (Figura 16.11). Finalmente, o gráfico desejado é obtido justapondo esses dois últimos gráficos (Figura 16.12).

16.4.5 Exemplo: Deseja-se esboçar o gráfico da função:

$$f(x) = \left|2x^2 + 8x + 6\right| .$$

Em tal caso, primeiramente desenha-se o gráfico da função $f(x) = 2x^2+8x+6$ *sem módulo* (Figura 16.13). A parte desse gráfico que fica por cima do eixo horizontal permanece sem modicação alguma (Figura 16.14). Por outro lado, a parte do gráfico da função original sem módulo que fica por baixo do eixo horizontal deve ser refletida para cima ao longo desse eixo (Figura 16.15). Finalmente, o gráfico desejado é obtido justapondo esses dois últimos gráficos (Figura 16.16).

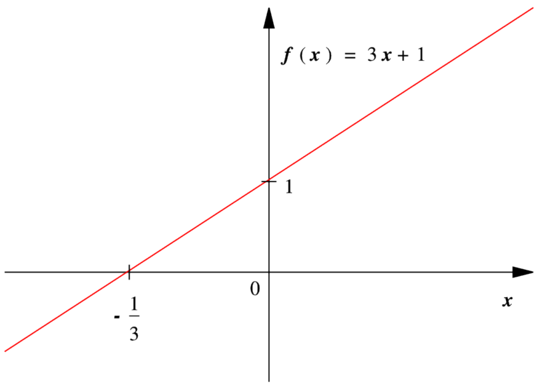

Figura 16.9: Gráfico da função original, sem o módulo.

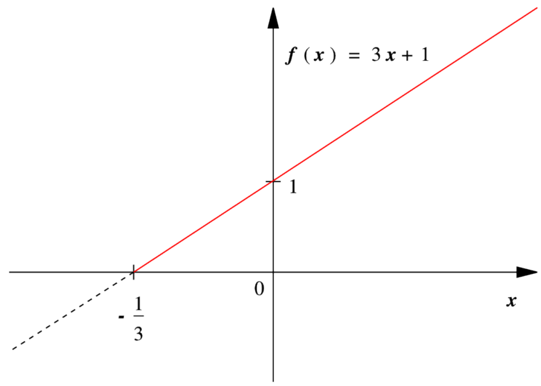

Figura 16.10: A parte do gráfico por cima do eixo horizontal permanece inalterada.

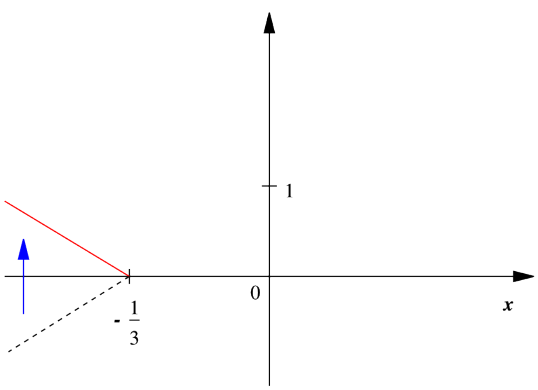

Figura 16.11: A parte do gráfico que fica por baixo do eixo horizontal é refletida especularmente para cima ao longo desse eixo.

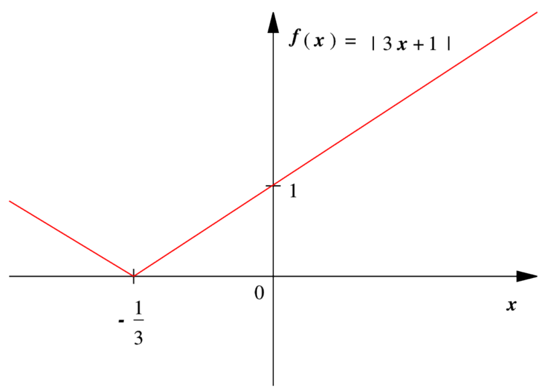

Figura 16.12: O gráfico da função considerada é obtido justapondo esses dois últimos gráficos.

16.5 As Famosas Seções Cônicas

As peculiaridades exibidas por algumas funções são tão sugestivas que resulta fácil esquecer alguns dos mais importantes e simples subconjuntos do plano, que não são gráficos de funções.

16.5.1 Definição: Dados dois pontos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) no plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, define-se a **distância euclidiana**, ou simplesmente a **distância**, entre eles como:

$$\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}. \qquad \clubsuit$$

Com a definição precedente, o Teorema de Pitágoras tem sido incorporado na representação geométrica de figuras no plano descrita no presente capítulo.

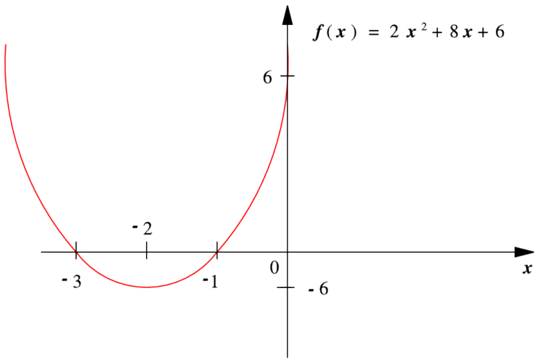

Figura 16.13: Gráfico da função original, sem o módulo.

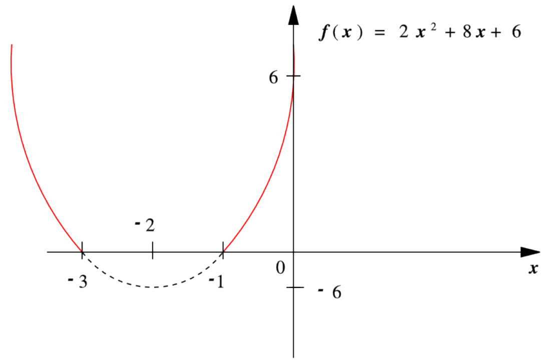

Figura 16.14: A parte do gráfico por cima do eixo horizontal permanece inalterada.

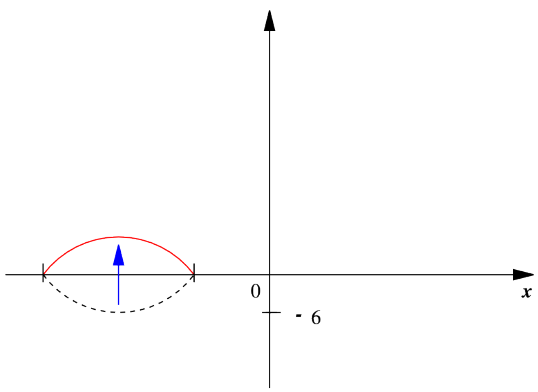

Figura 16.15: A parte do gráfico que fica por baixo do eixo horizontal é refletida especularmente para cima ao longo desse eixo.

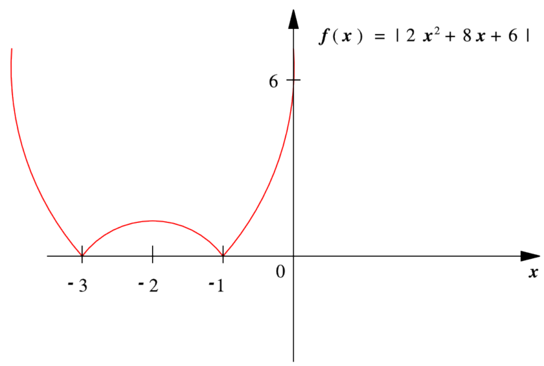

Figura 16.16: O gráfico da função considerada é obtido justapondo esses dois últimos gráficos.

16.5.2 Definição: O conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no plano que estão a uma distância constante, digamos r, de um outro ponto fixo, digamos (a, b), recebe o nome de **círculo de centro** (a, b) **e raio** r. ♣

Ou seja, o círculo é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tais que $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$, ou, equivalentemente, tais que:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Um parente próximo do círculo é a elipse, definida a seguir.

16.5.3 Definição: O conjunto de pontos (x, y) tal que a soma das suas distâncias a dois pontos fixos é constante recebe o nome de **elipse**. ♣

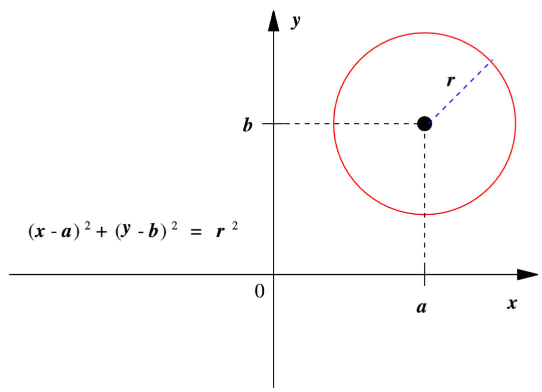

Figura 16.17: Círculo de centro (a, b) e raio r.

Se um dos pontos fixos é $(-c, 0)$ e o outro $(c, 0)$ e a soma das distâncias é $2a$, então um ponto $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pertence à elipse se:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-(-c))^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2-2.2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \\
x^2+2xc+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2 \\
4(xc-a^2) &= -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
(xc-a^2)^2 &= a^2[(x-c)^2+y^2] \\
x^2c^2-2xca^2+a^4 &= a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 \\
(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 &= a^2(c^2-a^2) \\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} &= 1.
\end{aligned}$$

A última relação acima costuma ser expressa alternativamente como:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

onde $b=\sqrt{a^2-c^2}$, pois obviamente deve ser escolhido $a > c$.

A hipérbole pode ser definida de maneira análoga, mas em tal caso se faz necessário que seja constante a *diferença* das distâncias.

16.5.4 Definição: O conjunto de pontos (x, y) tal que a diferença das suas distâncias a dois pontos fixos é constante recebe o nome de **hipérbole**. ♣

Escolhendo, como antes, um dos pontos fixos $(-c, 0)$ e o outro $(c, 0)$ e a diferência das distâncias

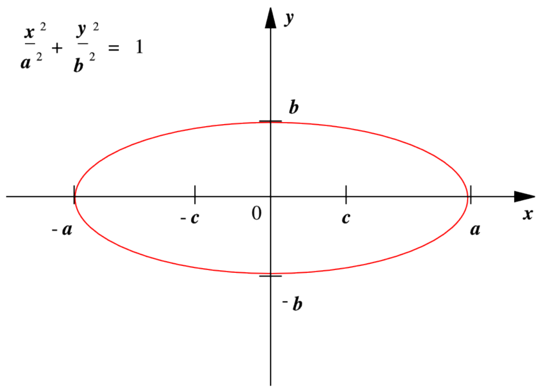

Figura 16.18: Elipse com focos em $(-c, 0)$ e $(c, 0)$.

como $2a$, então um ponto $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pertence à hipérbole se:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

que simplificando fica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Porém, neste caso deve ser considerado $c > a$. Portanto, $a^2 - c^2 < 0$. Definindo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, segue que um ponto (x, y) pertence à hipérbole se e somente se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

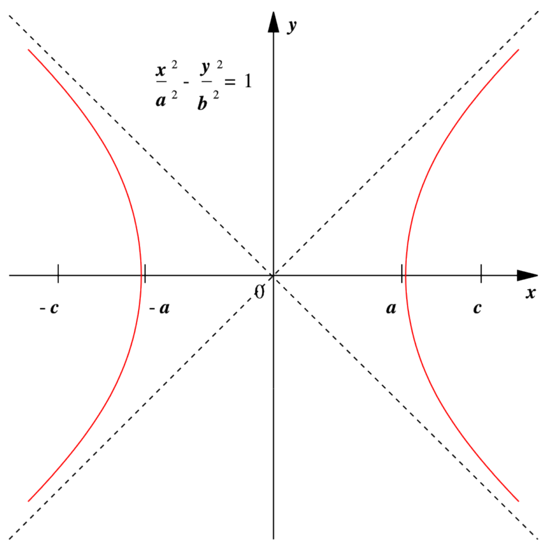

Figura 16.19: Hipérbole com focos em $(-c, 0)$ e $(c, 0)$.

Exercícios para o Capítulo 16

16.6 Conjuntos na Reta

16.6.1 Exercício: Representar graficamente sobre uma reta o conjunto dos pontos x que satisfazem cada uma das seguintes relações, respectivamente.

(a) $|x-3| < 1$.

(b) $|x-3| \leqslant 1$.

(c) $|x-a| < \epsilon$.

(d) $\left|x^2-1\right| < \frac{1}{2}$.

(e) $\dfrac{1}{1+x^2} \geqslant \dfrac{1}{5}$.

(f) $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant a$.

Sugestão: Considere os vários casos possíves para a.

(g) $x^2+1 \geqslant 2$.

(h) $(x+1)(x-1)(x-2) > 0$. ♣

16.7 Funções Lineares

16.7.1 Exercício: Sejam (a_1, b_1) e (a_2, b_2) dois pontos no plano com $a_1 \neq a_2$.

(a) Prove que a equação da reta que une tais pontos é dada por:

$$f(x) = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\, x + \left(b_1 - a_1\, \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\right).$$

(b) Prove que a expressão para f do item anterior pode ser expressa alternativamente como:

$$f(x) = \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}\,(x-a_1) + b_1.$$

que resulta mais fácil de lembrar.

(c) Prove que a expressão para f do item anterior pode ser expressa ainda como:

$$f(x) = b_2 \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} + b_1 \frac{x - a_2}{a_1 - a_2};$$

que não é outra coisa senão a expressão dada pela fórmula de interpolação de Lagrange do Exercício 15.7.1(b). ♣

16.7.2 Exercício: Representar graficamente os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

(a) $5x - \frac{1}{2}y + 1 = 0.$ ♣

16.8 Funções Quadráticas

16.8.1 Exercício: Sejam (a_1, b_1) e (a_2, b_2) dois pontos no plano com $a_1 \neq a_2$. Por dois de tais pontos passam em geral várias parábolas. Porém, se algum de tais pontos é um ponto de extremo, então a resposta é unica, como mostra o presente exercício.

(a) Suponha adicionalmente que $b_1 < b_2$ e que (a_2, b_2) é o ponto onde se encontra o vértice da parábola. Observe que tal ponto é necessariamente um ponto de *máximo*. Prove que a equação da párabola que passa pelos dois pontos dados, com a condição adicional do segundo ser de máximo, é dada por:

$$f(x) = \frac{b_1 - b_2}{(a_1 - a_2)^2} (x - a_2)^2 + b_2.$$

(b) Idem ao item anterior, mas agora suponha que (a_1, b_1) é o ponto onde se encontra o vértice da parábola. Observe que tal ponto é necessariamente um ponto de *mínimo*. Prove que a equação da párabola que passa pelos dois pontos dados, com a condição adicional do primeiro ser de mínimo, é dada por:

$$f(x) = \frac{b_2 - b_1}{(a_2 - a_1)^2} (x - a_1)^2 + b_1.$$ ♣

16.8.2 Exercício: Representar graficamente os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

(a) $x^2 + 3 = y.$

(b) $y^2 + 3 = x.$ ♣

16.9 Função Módulo

16.9.1 Exercício: Representar graficamente os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

(a) $y = -|x + 2|.$

(b) $y = |x - 5| + 1$.

(c) $y = -|x + 3| + 4$.

(d) $y = |-|x + 3| + 4|$.

Sugestão: Use o item anterior. ♣

16.10 Cônicas

16.10.1 Exercício: Descreva graficamente o conjunto solução das seguintes equações:

(a) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

(b) $3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$.

(c) $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. ♣

16.10.2 Exercício: **A Parábola como Seção Cônica**

Considere um ponto (a, b) no plano e uma reta horizontal que corta o eixo vertical no ponto, digamos, c, tais que $b \neq c$. Prove que o conjunto de pontos (x, y) no plano que estão à mesma distância de (a, b) e da reta dada por $g(x) = c$ constituem o gráfico de uma função quadrática f dada por:

$$f(x) = \frac{(x - a)^2 + (b^2 - c^2)}{2(b - c)}.$$ ♣

16.11 Conjuntos no Plano

16.11.1 Exercício: Representar graficamente os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem cada uma das seguintes condições. Na maioria dos casos, tais conjuntos constituem uma parte significativa do plano, não apenas uma reta ou uma curva.

(a) $x > y$.

(b) $x + a > y + b$.

(c) $y < x^2$.

(d) $y \leqslant x^2$.

(e) $|x - y| < 1$.

(f) $|x + y| < 1$.

(g) $x + y$ é um inteiro.

(h) $\dfrac{1}{x + y}$ é um inteiro.

(i) $(x-1)^2+(y-2)^2<1$.

(j) $x^2<y<x^4$. ♣

16.11.2 Exercício: Representar graficamente os pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ que satisfazem as cada uma das seguintes condições:

(a) $|x|+|y|=1$.

(b) $|x|-|y|=1$.

(c) $|x-1|=|y-1|$.

(d) $x^2+y^2=0$.

(e) $xy=0$.

(f) $x^2-2x+y^2=4$.

(g) $x^2=y^2$. ♣

16.11.3 Exercício: Representar graficamente cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x)=3$.

(b) $f(x)=5x-2$.

(c) $f(x)=x^2-1$.

(d) $f(x)=(x-1)^2$.

(e) $f(x)=x^2+2x+3$.

(f) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.

(g) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$. ♣

Parte II

Topologia

Afirma-se freqüentemente que o cálculo diferencial trata da magnitude contínua, embora nunca sejam prestados esclarecimentos sobre tal continuidade; nem siquer as explicações mais rigorosas do cálculo diferencial baseian as suas demonstrações na continuidade, mas, mais ou menos conscientemente, bem apelam a noções geométricas ou sugeridas pela geometria, bem baseiam-se em teoremas que nunca foram estabelecidos de maneira puramente aritmética. Entre esses está, por exemplo, o que temos citado antes, e uma pesquisa mais cuidadosa convenciou-me que esse teorema ou qualquer outro equivalente, pode ser considerado em certo modo suficiente para a análise infinitesimal. Restava apenas por descubrir a sua verdadeira origem nos elementos da aritmética e obter assim ao mesmo tempo uma verdadeira definição da essência da continuidade. Consegui-o em 24 de novembro de 1858 e poucos dias depois comuniquei o resultado das minhas meditações ao meu caro amigo Durège, com quem manteve uma longa e animada conversa.

Richard Dedekind[1]

[1]In: [25, p. 46].

Capítulo 17

A Topologia Usual em $\mathbb{R}$

17.1 Definição e Propriedades Básicas

Os resultados "fortes" da análise real não passam de corolários da topologia usual no conjunto dos números reais. Por outro lado, não poucos resultados topológicos "abstratos" aparecem como generalizações de propriedades da reta real.

Resulta um fato lamentável, senão evidência flagrante contra qualquer sistema de ensino da Matemática, que estas conexões, tão ricas e instrutivas, não resultem evidentes, nem nos cursos elementares de Cálculo, nem nos cursos avançados de Topologia Geral.

17.1.1 Lema: *O conjunto definido por:*

$$\mathcal{S} := \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R} \ \wedge \ a < b\} \cup \mathbb{R} \cup \emptyset,$$

é sub-base para uma topologia em $\mathbb{R}$. □

Demonstração: Sejam $A := (a,b), B := (c,d) \in \mathcal{S}$. Se $b \leqslant c$, então $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{S}$. Suponha agora $a \leqslant c < b$. Em tal caso, tem-se:

$$\begin{aligned} b \leqslant d &\Rightarrow A \cap B = (c,b) \in \mathcal{S}. \\ d < b &\Rightarrow A \cap B = (c,d) \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Por outro lado, no caso $c < a$ tem-se:

$$\begin{aligned} b \leqslant d &\Rightarrow A \cap B = (a,b) \in \mathcal{S}. \\ a < d < b &\Rightarrow A \cap B = (a,d) \in \mathcal{S}. \\ d \leqslant a &\Rightarrow A \cap B = \emptyset \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Desta maneira, basta aplicar o resultado B.1.1, ou seu corolário B.1.2, no apêndice B. ∎

17.1.2 Definição: A topologia **usual** em $\mathbb{R}$ é a topologia induzida pela sub-base $\mathcal{S}$ do Lema 17.1.1. ♣

17.1.3 Observação: **(a)** A aplicação $d(x,y) := |x-y|$ define uma métrica em $\mathbb{R}$.

(b) Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, então:

$$(a,b) = B_{\frac{|b-a|}{2}}\left(\frac{b+a}{2}\right).$$

Com efeito:

$$\begin{aligned} x \in B_{\frac{|b-a|}{2}}\left(\frac{b+a}{2}\right) &\Leftrightarrow \left|x - \frac{b+a}{2}\right| < \frac{|b-a|}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{|b-a|}{2} < x - \frac{b+a}{2} < \frac{|b-a|}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{b+a-|b-a|}{2} < x < \frac{b+a+|b-a|}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{b+a-b+a}{2} < x < \frac{b+a+b-a}{2} \\ &\Leftrightarrow a < x < b, \end{aligned}$$

onde na penúltima relação foi usado o fato que $a < b$. Reciprocamente, se $a \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, então:

$$B_r(a) = (a-r, a+r).$$

Com efeito:

$$x \in B_r(a) \;\Leftrightarrow\; |x-a| < r \;\Leftrightarrow\; -r < x-a < r \;\Leftrightarrow\; a-r < x < a+r.$$

(c) Pelo item anterior, tem-se que todo aberto da base na topologia usual é uma bola aberta, ou seja, um aberto da base na topologia métrica e vice-versa. Portanto, a topologia usual coincide com a topologia métrica, vide B.1.3.

(d) Em particular, $\mathbb{R}$ com a topologia usual resulta um espaço topológico T_2, ou de Hausdorff. Em outras palavras, dois pontos diferentes quaisquer podem ser separados por abertos disjuntos.

(e) Segundo 6.1.2, o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Em particular, $\mathbb{R}$ é separável, vide B.1.7.

(f) Desta maneira, $\mathbb{R}$ é métrico separável. Logo, é um espaço topológico N_2, ou seja, possui uma base enumerável para a topologia. Uma maneira alternativa de verificar esta condição, consiste em considerar o conjunto:

$$\{(x_k - 1/n, x_k + 1/n) : n \in \mathbb{N}, x_k \in \mathbb{Q}\}.$$ ♣

17.1.4 Proposição: *Seja $\mathbb{R} \supset A \neq \emptyset$ limitado superiormente e seja $a := \sup A$. Então, $a = \max \overline{A}$. Ou seja, $a \in \overline{A}$ e $x \leqslant a$, $\forall\, x \in \overline{A}$.* □

Demonstração: Seja $V \in \mathcal{V}_a$. Ou seja, existe U aberto tal que $a \in U \subseteq V$. Portanto, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $(a-\epsilon_0, a+\epsilon_0) \subseteq U$, pois $(a-\epsilon_0, a+\epsilon_0)$ é um aberto da base da topologia usual. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $y \in A$ tal que $a - \epsilon < y$, pois se fosse $y \leqslant a - \epsilon$ para todo $y \in A$, então obter-se-ia a contradição $a = \sup A \leqslant a - \epsilon$. Observe também que $A \ni y \leqslant \sup A = a$. Desta maneira,

$y \in (a-\epsilon_0, a+\epsilon_0) \subseteq U \subseteq V$. Em particular, $A \cap V \neq \emptyset$, ou seja, todo $V \in \mathcal{V}_a$ tem interseção não-vazia com A, o que é equivalente com $a \in \overline{A}$. Uma outra prova deste fato, consiste em observar que a rede do conjunto dirigido $(\mathcal{V}_a, \subseteq)$ em A definida por $V \to y$ converge para a. Portanto, a é ponto de acumulação de A, de onde segue que $a \in A \cup \{\text{pontos de acumulação de } A\} = \overline{A}$.

Seja agora $x \in \overline{A}$. Se fosse $x > a$, então $\epsilon := x - a > 0$, e assim $U :== (x-\epsilon, x+\epsilon) \in \mathcal{V}_x$. Por outro lado, $x \in \overline{A} \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$. Portanto, existe $y \in A \cap U$, de onde segue que $y > x - \epsilon = a = \sup A \geqslant y \in A$, o que constitui uma contradição. Portanto, deve ser $x \leqslant a$. ∎

17.1.5 Corolário: *Se A é limitado superiormente e fechado, então* $\sup A \in A$. □

Demonstração: Dado que A é limitado superiormente, pelo lema anterior tem-se que $\sup A = \max \overline{A} = \max A$, onde a última igualdade segue do fato de ser A também fechado. Logo, $\sup A \in A$. ∎

17.1.6 Proposição: *Em $\mathbb{R}$ todos os intervalos abertos não-vazios são homeomorfos.* □

Demonstração: Sejam $A := (a,b)$ e $B := (c,d)$. Se $f(x) = \alpha x + \beta$, então considere-se o seguinte sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} f(a) = \alpha a + \beta = c \\ f(b) = \alpha b + \beta = d \end{cases}.$$

Da primeira equação segue que $\beta = c - \alpha a$, e substituindo esse valor de β na segunda equação, tem-se:

$$\alpha b + c - \alpha a = d \Rightarrow \alpha = \frac{d-c}{b-a}.$$

Substituindo agora esse valor de α na primeira equação, tem-se:

$$\beta = c - \frac{d-c}{b-a}a = \frac{bc - ac - da + ca}{b-a} = \frac{bc-da}{b-a}.$$

Desta maneira, a função f dada por:

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-da}{b-a} = \frac{1}{b-a}((d-c)x + bc - da) = \frac{c(b-x) + d(x-a)}{b-a}$$

é um homeomorfismo e $f : A \longmapsto B$.

No caso $A = (a, +\infty)$ e $B = (b, +\infty)$, basta tomar $f(x) = (x-a) + b$. Se $A = (-\infty, a)$ e $B = (-\infty, b)$, então $f(x) = -x$ reduz ao caso anterior: $f(x) = -((-x+a) - b) = (x-a) + b$.

Finalmente, observe-se que a função $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ é um homeomorfismo de $(0,1)$ em $(0,+\infty)$, como também de $(-1,1)$ em $(-\infty,+\infty)$. ∎

17.2 Compacidade

17.2.1 Proposição: *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leqslant b$. Então, $[a, b]$ é compacto.* $\square$

Demonstração: Seja $\{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura de $[a, b]$ por abertos. Define-se o conjunto A como:

$$A := \{x \in [a, b] \,:\, [a, x] \text{ é coberto com uma quantidade finita de } U_i\text{'s}\}$$

Observe-se que $A \neq \emptyset$, pois $a \in A$. Mais ainda, A é limitado superiormente, pois b é um limite superior de A. Portanto, existe $m := \sup A$. Obviamente, $a \leqslant m \leqslant b$, onde a primeira desigualdade segue do fato que $a \in A$, no entanto que a segunda é consequência do fato que b é limite superior de A. Desta maneira, existe $i_0 \in I$ tal que $m \in U_{i_0}$. Agora, como $m \in U_{i_0}$ aberto, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $(m-\epsilon_0, m+\epsilon_0) \subseteq U_{i_0}$. Pela propridade de supremo, existe $x \in A$ tal que $m - \epsilon_0 < x \leqslant \sup A = m$. Portanto, $[a, x]$ cobre-se com uma quantidade finita de U_i's e, acresentando U_{i_0}, tem-se que:

$$\left[a, m + \frac{\epsilon_0}{2}\right] \quad \text{cobre-se com uma quantidade finita de } U_i\text{'s.} \tag{17.2.1}$$

Agora, suponha-se que $m < b$. Em tal caso, tomando $\epsilon := \min\{\epsilon_0, b - m\}$, tem-se que:

$$\left[a, m + \frac{\epsilon}{2}\right] \subseteq \left[a, m + \frac{\epsilon_0}{2}\right],$$

de onde segue, por (17.2.1), que:

$$\left[a, m + \frac{\epsilon}{2}\right] \quad \text{cobre-se com uma quantidade finita de } U_i\text{'s.} \tag{17.2.2}$$

Observe-se também que

$$m + \frac{\epsilon}{2} \in [a, b], \tag{17.2.3}$$

pois:

$$m + \frac{\epsilon}{2} \leqslant m + \frac{b-m}{2} < m + b - m = b,$$

onde a penúltima desigualdade segue em virtude de $\frac{1}{2} < 1$. Uma outra maneira de provar o mesmo fato, consiste em observar que:

$$m + \frac{\epsilon}{2} \leqslant m + \frac{b-m}{2} = \frac{2m + b - m}{2} = \frac{b+m}{2} < \frac{b+b}{2} = b,$$

onde a penúltima desigualdade segue do fato que $m < b$. Agora, combinando (17.2.2) e (17.2.3) tem-se:

$$m + \frac{\epsilon}{2} \in A \;\Rightarrow\; m + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \sup A = m.$$

Mas esta última relação constitui uma contradição, que proveio de considerar $m < b$. Portanto, deve ser $m = b$. Desta maneira, o intervalo:

$$[a, b] = [a, m] \subseteq \left[a, m + \frac{\epsilon_0}{2}\right]$$

cobre-se com uma quantidade finita de U_i's por (17.2.1). $\blacksquare$

17.2.2 Corolário: *$\mathbb{R}$ é σ-compacto. Ou seja, $\mathbb{R}$ é união enumerável de compactos.* □

Demonstração: Pelo resultado anterior, $[-n, n]$ é compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, basta observar que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n]$. ∎

17.2.3 Proposição: *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Então A é compacto se e somente se A é fechado e limitado.* □

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja A compacto. Como $\mathbb{R}$ com a topologia usual é um espaço T_2, segue que A é fechado. Além disso, se $U_n := (-n, n)$, então $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura do compacto A por abertos. Portanto:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{n_i}.$$

Seja $n_0 := \max_{i=1,\ldots,k}\{n_i\}$. Então, $A \subseteq [-n_0, n_0]$, de onde segue que A também é limitado.

$(\Leftarrow)$ Se A é limitado, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq [-N, N]$. Portanto, tem-se que $A = A \cap [-N, N]$. Em particular, como A é fechado em $\mathbb{R}$, tem-se que A também é fechado no compacto $[-N, N]$ com a topologia relativa da usual, e portanto A também é compacto em $[-N, N]$. Finalmente, como $A \subseteq [-N, N]$, segue que A é compacto em $\mathbb{R}$. ∎

17.3 Conexidade

17.3.1 Proposição: *$\mathbb{R}$ é conexo.* □

Demonstração: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ aberto e fechado. Para provar o resultado enunciado, deve-se provar que $A = \emptyset$ ou $A = \mathbb{R}$. Observe-se que:

$$\neg(A = \emptyset \vee A = \mathbb{R}) \iff A \neq \emptyset \wedge A \neq \mathbb{R} \iff A \neq \emptyset \wedge \mathbb{R}\backslash A \neq \emptyset.$$

Por *reductio ad absurdum*, suponha-se a existência de algum $x \in \mathbb{R}\backslash A$, com $A \neq \emptyset$. Em tal caso, teria-se:

$$\emptyset \neq A = A \cap \mathbb{R} = A \cap (-\infty, x] \bigcup A \cap (x, +\infty) = A \cap (-\infty, x] \bigcup A \cap [x, +\infty),$$

onde a última igualdade decorre do fato que $x \notin A$. Sejam A_1 e A_2 os conjuntos definidos como:

$$A_1 := A \cap (-\infty, x]$$
$$A_2 := A \cap [x, +\infty).$$

Desta maneira, para cada $i = 1, 2$ o conjunto A_i é fechado. Mais ainda, algum deles deve ser não-vazio, pois $A \neq \emptyset$. Para fixar idéias, suponha-se, por exemplo, que $A_1 \neq \emptyset$. Assim, observe-se que o conjunto A_1 é fechado e não-vazio, como também limitado superiormente, por x. Portanto, existe $b := \sup A_1 \in A_1$, pelo corolário do Lema 17.1.4. Observe-se também que A_1 é aberto, pois $A_1 = A \cap (-\infty, x] = A \cap (-\infty, x)$, onde a última igualdade decorre do fato que $x \notin A$. Assim, como $b \in A_1$ aberto, tem-se que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $(b - \epsilon_0, b + \epsilon_0) \subseteq A_1$. Mas isso contradiz que $b = \sup A_1$, pois:

$$b + \frac{\epsilon_0}{2} \in A_1 \;\Rightarrow\; b + \frac{\epsilon_0}{2} \leqslant \sup A_1 = b$$

Por outro lado, se fosse $A_2 \neq \emptyset$, para obter uma contradição procede-se analogamente, mas desta vez utilizando o ínfimo em lugar do supremo. ∎

17.3.2 Proposição: *Seja $\mathbb{R} \supseteq A$ aberto. Então, A é conexo se e somente se A é homeomorfo a (a, b), para alguns $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.* □

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Basta observar que, pelo Lema 17.1.6, $A = (a, b)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$ que é conexo, pelo Lema 17.3.2.

$(\Rightarrow)$ Utilizando o homeomorfismo dado pela função $f(x) = \operatorname{arctg} x$ pode-se supor, sem perda de generalidade, que A é limitado. Portanto, existem $a := \inf A$ e $b := \sup A$, e tem-se que $A \subseteq [a, b]$. Basta então provar que $A \supseteq (a, b)$. Com efeito, em tal caso, A deve ser algum dentre (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, dos quais apenas o primeiro conjunto é aberto e, como A é aberto por hipótese, deve ser então $A = (a, b)$. Por *reductio ad absurdum*, se existisse algum x_0 com $a < x_0 < b$ tal que $x_0 \notin A$, teria-se que:

$$A = A \cap (-\infty, x_0) \bigcup A \cap (x_0, +\infty).$$

Ou seja, A seria união disjunta dos conjuntos abertos A_1 e A_2 definidos como:

$$A_1 := A \cap (-\infty, x_0);$$
$$A_2 := A \cap (x_0, +\infty).$$

Agora, como A é conexo, deve ser $A_1 = \emptyset$ ou $A_2 = \emptyset$. Se fosse $A_2 = \emptyset$, então teria-se que $x < x_0,\ \forall x \in A \Rightarrow b = \sup A \leqslant x_0 < b$, o que constitui uma contradição. Analogamente, $A_1 = \emptyset \Rightarrow x_0 < x,\ \forall x \in A \Rightarrow a < x_0 \leqslant \inf A = a$, que também constitui uma contradição. ∎

17.3.3 Corolário: *$\mathbb{R}$ é localmente conexo.* □

Demonstração: Basta tomar abertos da base (a, b) que são conexos, pelo lema anterior. ∎

17.3.4 Corolário (do Corolário)**:** *Todo aberto em $\mathbb{R}$ é união enumerável de intervalos abertos disjuntos.* □

Demonstração: Seja A aberto. Então, tem-se:

A = união disjunta das suas componentes conexas.
= união disjunta de abertos conexos.
= união disjunta de *intervalos* abertos.
= união disjunta *enumerável* de intervalos abertos.

Observe-se que a segunda igualdade segue do corolário anterior, a terceira do lema anterior, e a última do fato de ser $\mathbb{R}$ um espaço topológico N_2. ∎

17.4 Estrutura dos Abertos e Outras Questões

O resultado em 17.3.4 é um tanto aprimorado na seguinte proposição.

17.4.1 Proposição: *Seja $\mathbb{R} \supseteq A$ aberto. Então existe uma única família $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ de intervalos abertos disjuntos tal que $A = \bigcup_{j\in J} U_j$. A família $\mathcal{U}$ é numerável e para cada $U \in \mathcal{U}$ os pontos extemos de U não pertencem a A.* □

Demonstração: Exceto a unicidade, o enunciado, até a numerabilidade de $\mathcal{U}$ inclusive, segue de 17.3.4. A afimação sobre os pontos extremos segue da definição de aberto e o fato da família ser disjunta. Basta então provar a unicidade. ∎

17.4.2 Observação: **(a)** Esta estructura simples dos abertos em $\mathbb{R}$ não tem análogo nos espaços $\mathbb{R}^n$ com $n > 1$. Com efeito, em $\mathbb{R}^2$, por exemplo, o quadrado unidade aberto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ não pode ser união de bolas abertas disjuntas, pois, se fosse, a diagonal $\{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$ seria união de (mais de um) intervalos disjuntos, contradizendo a unicidade em 17.4.1.

(b) Os conjuntos fechados, mesmo em $\mathbb{R}$, não tem uma estrutura tão simples como os abertos. ♣

17.4.3 Proposição: *$\mathbb{Q}$ não é um G_δ em $\mathbb{R}$, ou seja, interseção numerável de abertos.* □

Demonstração: Se fosse $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ com U_n aberto em $\mathbb{R}$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\mathbb{Q} \subseteq U_n \;\Rightarrow\; \mathbb{Q}^c \supseteq U_n^c$, de onde segue que $\overset{\circ}{U_n^c} = \emptyset$. Com efeito, como $\overset{\circ}{U_n^c} \subseteq U_n^c \subseteq \mathbb{Q}^c$, teria-se que $\overset{\circ}{U_n^c}$ seria um aberto que não contém racionais, o que contradiz o fato de $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$, a menos que $\overset{\circ}{U_n^c} = \emptyset$. Portanto, $\mathbb{Q}^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^c$, com $\overset{\circ}{U_n^c} = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, seja $\{r_1, r_2, \ldots\}$ uma enumeração de $\mathbb{Q}$. Em tal caso, tem-se:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\{r_n\} \cup U_n^c\right).$$

Observe que o conjunto $V_n := \{r_n\} \cup U_n^c$, é fechado, pelo fato se ser interseção de dois conjuntos fechados. Com efeito, $\{r_n\}$ é fechado, pois $\mathbb{R}$ é T_2, sendo em particular T_1, condição equivalente aos pontos serem conjuntos fechados. Por outro lado, como U_n é aberto, tem-se que U_n^c é fechado. Em particular, $\overline{V_n} = V_n$.

<u>Afirmação</u>: $\overset{\circ}{\overline{V_n}} = \emptyset$. ▽

Com efeito, se A é aberto e $A \subseteq V_n$, então $A \nsubseteq U_n^c$, pois $\overset{\circ}{U_n^c} = \emptyset$. Portanto, deve ser $r_n \in A$. Sem perda de generalidade, suponha-se A um aberto da base, ou seja, *intervalo aberto*. Se $A = (a, b)$ então tem-se: $a < r_n < b$, em cujo caso $\alpha_1 := (a, r_n)$ ou $\alpha_2 := (r_n, b)$ são intervalos abertos tais que $\alpha_i \subseteq A \subseteq V_n$, mas $\alpha_i \nsubseteq \{r_n\}$. Portanto, deve ser $\alpha_i \subseteq U_n^c$, mas isso contradiz mais uma vez o fato de ser $\overset{\circ}{U_n^c} = \emptyset$. Isso prova que $\overset{\circ}{V_n} = \emptyset$, mas pela observação precedente ao enunciado da Afirmação sabe-se que V_n é fechado, ou seja, $\overline{V_n} = V_n$, concluindo a prova da mesma. ▼

Portanto, pela afirmação precedente, tem-se $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, com $\overset{\circ}{\overline{V_n}} = \emptyset$, contradizendo o corolário B.3.5 do Teorema de Categoria de Baire, pois $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo. ∎

17.4.4 Corolário: *$\mathbb{Q}$ não é aberto nem fechado em $\mathbb{R}$.* □

Demonstração: Com efeito, $\mathbb{Q}$ não é aberto, pois em tal caso seria trivialmente um G_δ, contradizendo o resultado anterior. Também não pode ser fechado, pois em tal caso também seria G_δ pelo Teorema B.3.6. ∎

17.4.5 Teorema: *$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, o conjunto dos números irracionais é denso no conjunto dos números reais.* □

Demonstração: Seja A aberto da base, ou seja, intervalo aberto. Basta provar que $A \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Por *reductio ad absurdum*, se fosse $A \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \emptyset$, então $A \subseteq \mathbb{Q}$ e portanto $|A| \leqslant \aleph_0$. Por outro lado, como A é um intervalo aberto, A é isomorfo a $\mathbb{R}$, de onde segue que $|A| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, absurdo. ∎

Exercícios para o Capítulo 17

17.5 Conjuntos Compactos

17.5.1 Exercício: Considere o seguinte enunciado: Todo compacto em $\mathbb{R}$ é união *finita* de compactos disjuntos.

(a) Determine se o enunciado é verdadeiro ou falso.

(b) Caso o enunciado for falso, determine quais condições poderiam ser acrescidas de maneira tal que seja verdadeiro. ♣

17.6 Pontos de Acumulação de Conjuntos

17.6.1 Definição: Se diz que $x \in \mathbb{R}$ é um **ponto de acumulação** do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se:

$$\forall\, \epsilon > 0, \text{ existe algum } a = a(\epsilon) \in A \backslash \{x\} \text{ tal que } |a - x| < \epsilon. \quad ♣$$

O conjunto de pontos de acumulação de um conjunto A será denotado por A^*.

17.6.2 Exercício: Seja $\mathbb{R} \supseteq A$ um conjunto qualquer.

(a) Se A é fechado, então $A^* \subseteq A$. Ou seja, todo conjunto fechado contém todos seus pontos de acumulação.

(b) Reciprocamente, se $A^* \subseteq A$, então A é fechado. Ou seja, um conjunto é fechado se contém todos seus pontos de acumulação. ♣

17.7 Pontos de Acumulação de Sequências

17.7.1 Definição: Se diz que $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto de acumulação** da sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se:

$$\forall\, \epsilon > 0, \text{ para cada } m \in \mathbb{N}, \text{ existe algum } n = n(\epsilon, m) \in \mathbb{N} \text{ com } n \geqslant m \text{ tal que } |s_n - a| < \epsilon. \quad ♣$$

17.7.2 Exercício: Prove que as seguintes condições são equivalentes:

1. a é ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2. a é ponto de acumulação da sequência $\{s_{n+N}\}_{n\in\mathbb{N}}$, para todo $N \in \mathbb{N}$.

3. Existe uma sub-sequência $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = a$. ♣

17.7.3 Exercício: Considere a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$s_n := (-1)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(a) Verifique que 1 é um ponto de acumulação.

Sugestão: Considere a sub-sequência s_{2n} e use o Exercício 17.7.2(1 $\Leftrightarrow$ 3) anterior.

(b) Verifique que -1 também é um outro ponto de acumulação.

Sugestão: Considere a sub-sequência s_{2n-1} e use o Exercício 17.7.2(1 $\Leftrightarrow$ 3) anterior. ♣

17.7.4 Exercício: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então:

(a) Se a é ponto de acumulação de alguma sub-sequência $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, então a também é ponto de acumulação da sequência original $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) A recíproca do item anterior não é verdadeira.

Sugestão: Considere o exemplo do Exercício 17.7.3 anterior. ♣

17.7.5 Exercício: Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência.

(a) Se x é um ponto de acumulação do *conjunto* $A := \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$, então x é um ponto de acumulação da *sequência* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) A recíproca do item anterior não é verdadeira.

Sugestão: O exemplo do Exercício 17.7.3 anterior ainda serve. Observe-se que neste caso $A = \{-1, 1\}$ é um conjunto *sem* pontos de acumulação.

(c) O resultado do item (a) anterior *não* vale para redes. Uma rede é parecida com uma sequência, somente que indexada por conjuntos *dirigidos* mais gerais que o conjunto $\mathbb{N}$ dos naturais.

Sugestão: Considere-se a rede $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ indexada pelo conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros definida por:

$$s_n := \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, & \text{se } n < 0; \\ n+2, & \text{se } n \geqslant 0. \end{cases}$$ ♣

Então, esta rede assim definida não tem sub-sequências, nem siquer sub-redes, convergentes, pelo fato de não ser eventualmente limitada. Contudo, a origem 0 é um ponto de acumulação do *conjunto* $\{\ldots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots\}$. ♣

17.7.6 Definição: Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Define-se o conjunto Ξ como:

$$\Xi := \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \text{existe uma sub-sequência } \{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} s_{n_k} = x \right\}. \qquad \clubsuit$$

Observe-se que, pelo Exercício 17.7.2($1 \Leftrightarrow 3$), o conjunto Ξ não é nada mais do que o conjunto de pontos de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

17.7.7 Exercício: Prove que o conjunto Ξ é fechado. Ou seja, o conjunto de pontos de acumulação de qualquer sequência é fechado.

Sugestão: Pelo Exercício 17.6.2(b), basta provar que se x é um ponto de acumulação de Ξ então $x \in \Xi$, ou seja, x é um ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para tanto, pelo Exercício 17.7.5(a), basta provar que x é um ponto de acumulação do *conjunto* $\{s_1, s_2, \dots\}$. ♣

17.8 Sequências Têm Ponto em Compactos

17.8.1 Exercício: Prove que toda sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contida em um sub-conjunto $\mathbb{R} \supset A$ compacto, ou seja, $s_n \subseteq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com A compacto, possui (pelo menos) um ponto de acumulação. ♣

17.8.2 Exercício: Sob as hipóteses do exercício anterior, prove que se o ponto de acumulação for *único*, então a sequência é convergente a tal ponto. Ou seja, se a é o único ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $s_n \subseteq A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com A compacto, então $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. ♣

Capítulo 18

Limites

18.1 Definições Básicas

Embora a "teoria topológica da continuidade" dispense o uso de limites, serão considerados no presente capítulo pois o seu uso constituirá uma notação útil para futuros estudios ainda na presente obra.

18.1.1 Definição: Se diz que a função f **tende ao limite** l **quando** x **tende para** a se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon. \tag{18.1.1}$$

Se a função f tende ao limite l quando x tende para a, este fato denota-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Se a condição (18.1.1) não é satisfeita para nenhum $l \in \mathbb{R}$, então se diz que o limite da função f quando x tende para a **não existe**, ou, alternativamente, e dito que a função f **diverge** quando x tende para a. ♣

18.1.2 Observação: Observe-se que a condição adicional $0 < |x - a|$ na definição de limite equação (18.1.1) permite que a função nem siquer esteja definida em a. ♣

18.1.3 Exemplo: Se $f(x) = c$ é uma função constante, então para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$. Com efeito, observe que neste caso $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$. Portanto, basta tomar qualquer $\delta > 0$ arbitrário. ♣

18.1.4 Exemplo: Se $f(x) = x$, então para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Com efeito, neste caso, dado $\epsilon > 0$, se $\delta \leqslant \epsilon$, então tem-se $|f(x) - a| = |x - a| < \delta \leqslant \epsilon$. Portanto, basta tomar qualquer δ satisfazendo $0 < \delta \leqslant \epsilon$. ♣

18.1.5 Exemplo: Se $f(x) = x^2$, então para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Observe que:

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a).$$

A idéia intuitiva para manipular o segundo fator, consiste em observar que se $x \sim a$, então $x + a \sim 2a$. Formalmente, usando a desigualdade triangular, tem-se:

$$\begin{aligned} |x| \;=\; |x - a + a| \;\leqslant\; |x-a| \;+\; |a| \quad &\Rightarrow \\ |x+a| \;\leqslant\; |x| \;+\; |a| \;\leqslant\; |x-a| \;+\; |a| \;+\; |a| \;=\; |x-a| \;+\; 2\,|a|\,. \end{aligned}$$

Agora, observe que $\delta < 1 \;\Rightarrow\; \delta + 2\,|a| < 1 + 2\,|a|$. Portanto:

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|x^2 - a^2\right| \;=\; |x-a|\,|x+a| \;&\leqslant\; |x-a|\,(|x-a| + 2\,|a|) \\ &<\; \delta\,(\delta + 2\,|a|) \;<\; \delta\,(1 + 2\,|a|) \;\leqslant\; \epsilon, \end{aligned}$$

se $\delta \leqslant \dfrac{\epsilon}{1 + 2\,|a|}$. Desta maneira, basta tomar $0 < \delta \leqslant \min\left\{1,\ \dfrac{\epsilon}{1 + 2\,|a|}\right\}$. ♣

18.1.6 Exemplo: Se $f(x) = \sqrt{x}$, então para qualquer $a > 0$ tem-se $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Deve-se provar que existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\epsilon < \sqrt{x} - \sqrt{a} < \epsilon.$$

Para tanto, observe que:

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta \quad &\Leftrightarrow \quad -\delta < x - a < \delta \\ &\Leftrightarrow \quad a - \delta < x < a + \delta \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a-\delta} < \sqrt{x} < \sqrt{a+\delta} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a-\delta} - \sqrt{a} < \sqrt{x} - \sqrt{a} < \sqrt{a+\delta} - \sqrt{a}, \end{aligned}$$

se $\delta \leqslant a$, pois em tal caso $a - \delta \geqslant 0$ e a raiz $\sqrt{a-\delta}$ está bem definida. Portanto, basta escolher $\delta > 0$ de maneira tal que sejam satisfeitas *simultaneamente* as duas relações seguintes:

$$\begin{aligned} -\epsilon \leqslant \sqrt{a-\delta} - \sqrt{a} \\ \sqrt{a+\delta} - \sqrt{a} \leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

Com relação à primeira relação acima tem-se:

$$\begin{aligned} -\epsilon \leqslant \sqrt{a-\delta} - \sqrt{a} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a} - \epsilon \leqslant \sqrt{a-\delta} \\ &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{a} - \epsilon)^2 \leqslant a - \delta \\ &\Leftrightarrow \quad \delta \leqslant a - (\sqrt{a} - \epsilon)^2. \end{aligned}$$

Analogamente, para a segunda relação tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{a+\delta} - \sqrt{a} \leqslant \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{a+\delta} \leqslant \epsilon + \sqrt{a} \\ &\Leftrightarrow \quad a + \delta \leqslant (\epsilon + \sqrt{a})^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \delta \leqslant (\sqrt{a} + \epsilon)^2 - a. \end{aligned}$$

Portanto, basta tomar:

$$0 < \delta \leqslant \min\left\{(\sqrt{a}+\epsilon)^2 - a,\ a - (\sqrt{a}-\epsilon)^2\right\}.$$

Observe que em tal caso, automaticamente obtem-se a condição adicional $\delta \leqslant a$, pois:

$$(\sqrt{a}-\epsilon)^2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \leqslant a - (\sqrt{a}-\epsilon)^2 \leqslant a.$$

♣

18.1.7 Exemplo: Para uma prova alternativa do exemplo anterior, observe que:

$$\sqrt{x}-\sqrt{a} = \sqrt{x}-\sqrt{a} \quad \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

A idéia intuitiva para manipular o denominador na fração acima consiste em observar que:

$$x \sim a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} \sim \sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x}+\sqrt{a} \sim 2\sqrt{a}.$$

Formalmente, em primeiro lugar, tem-se:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a}+\sqrt{x} > \sqrt{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\begin{aligned}
|x-a| < \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{a}{2} < x-a < \frac{a}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad a - \frac{a}{2} < x-a+a < a+\frac{a}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{a}{2} < x < \frac{3}{2}\,a \quad \Rightarrow \quad x > \frac{a}{2} > 0,
\end{aligned}$$

pois $a > 0$. Portanto, se $0 < \delta \leqslant a/2$, então:

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}} \leqslant \epsilon,$$

se $\delta \leqslant \epsilon\sqrt{a}$. Portanto, basta tomar:

$$0 < \delta \leqslant \min\left\{\frac{a}{2},\ \epsilon\sqrt{a}\right\}.$$

♣

18.1.8 Exemplo: Se $f(x) = x^n$, então para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$.

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Deve-se provar que existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^n - a^n| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\epsilon < x^n - a^n < \epsilon.$$

Para tanto, observe que:

$$\begin{aligned}
|x-a| < \delta \quad &\Leftrightarrow \quad -\delta < x-a < \delta \\
&\Leftrightarrow \quad a-\delta < x < a+\delta \\
&\Leftrightarrow \quad (a-\delta)^n < x^n < (a+\delta)^n \\
&\Leftrightarrow \quad (a-\delta)^n - a^n < x^n - a^n < (a+\delta)^n - a^n.
\end{aligned}$$

Portanto, basta escolher $\delta > 0$ de maneira tal que sejam satisfeitas *simultaneamente* as duas relações seguintes:

$$\begin{aligned} -\epsilon &\leqslant (a-\delta)^n - a^n \\ (a+\delta)^n - a^n &\leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

Com relação à primeira relação acima tem-se:

$$\begin{aligned} -\epsilon \leqslant (a-\delta)^n - a^n \quad &\Leftrightarrow \quad a^n - \epsilon \leqslant (a-\delta)^n \\ &\Leftrightarrow \quad (a^n-\epsilon)^{1/n} \leqslant a - \delta \\ &\Leftrightarrow \quad \delta \leqslant a - (a^n-\epsilon)^{1/n}. \end{aligned}$$

Analogamente, para a segunda relação tem-se:

$$\begin{aligned} (a+\delta)^n - a^n \leqslant \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad (a+\delta)^n \leqslant a^n + \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \delta + a \leqslant (a^n+\epsilon)^{1/n} \\ &\Leftrightarrow \quad \delta \leqslant (a^n+\epsilon)^{1/n} - a. \end{aligned}$$

Observe que, para $\epsilon > 0$ arbitrário, deve ser:

$$a^n + \epsilon \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^n \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geqslant 0.$$

Analogamente:

$$a^n - \epsilon \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \epsilon < a^n.$$

Suponha-se $a > 0$. Observe que $a > 0 \Rightarrow a^n > 0$. Portanto, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $0 < \epsilon_0 < a^n$. Por exemplo, poderia ser escolhido $\epsilon_0 := a^n/2$. Desta maneira, tem-se:

$$0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon \leqslant \epsilon_0 < a^n \quad \Rightarrow \quad a^n - \epsilon > \epsilon_0 - \epsilon \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad a^n - \epsilon > 0.$$

Por outro lado, obviamente:

$$0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0 \quad \Rightarrow \quad a^n + \epsilon_0 \geqslant a^n + \epsilon > a^n > 0.$$

Portanto, no caso $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_0$, a expressão para $\delta = \delta(\epsilon)$ dado por:

$$0 < \delta(\epsilon) \leqslant \min\left\{(a^n+\epsilon)^{1/n} - a,\ a - (a^n-\epsilon)^{1/n}\right\}.$$

está bem definido e tem-se:

$$|x-a| < \delta(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |x^n - a^n| < \epsilon.$$

Analogamente, no caso $\epsilon > \epsilon_0$, a expressão para $\delta(\epsilon_0)$ está bem definida e também tem-se:

$$|x-a| < \delta(\epsilon_0) \quad \Rightarrow \quad |x^n - a^n| < \epsilon_0 < \epsilon. \qquad ♣$$

18.1.9 Exemplo: Para uma prova alternativa do exemplo anterior, observe que:

$$\begin{aligned}x^n - a^n &= (x-a)\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}a^{i-1} \\ &= (x-a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \cdots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}\right).\end{aligned}$$

Se $\delta < 1$, então:

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x| = |x-a+a| \leqslant |x-a| + |x-a| + |a| < \delta + |a| < 1 + |a|,$$

de onde segue que:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}a^{i-1}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x|^{n-i}|a|^{i-1} < \sum_{i=1}^{n}(1+|a|)^{n-i}|a|^{i-1} &= \frac{(1+|a|)^n - |a|^n}{(1+|a|)-|a|} \\ &= (1+|a|)^n - |a|^n.\end{aligned}$$

Portanto:

$$|x^n - a^n| = |x-a|\left|\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}a^{i-1}\right| < \delta\left((1+|a|)^n - |a|^n\right).$$

Desta maneira, basta escolher $0 < \delta \leqslant \min\left\{1,\ \dfrac{\epsilon}{(1+|a|)^n - |a|^n}\right\}$. ♣

Contrariamente ao que se poderia supor a partir da análise dos exemplos precedentes, na verdade não é de nenhuma maneira necesário fornecer uma fórmula explícita para δ em função do ϵ. A título de ilustração, o exemplo a seguir, embora um tanto complicado, pode ser considerado um caso típico. Uma generalização deste exemplo é considerada no exercício 18.7.1.

18.1.10 Exemplo: Considere-se a função f definida no intervalo $(0,1)$ como:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional, } 0 < x < 1; \\ 1/q, & \text{se } x = p/q \text{ fração irredutível, } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Lembre-se que p/q é irredutível se p e q são inteiros sem divisores comunes. Para qualquer a com $0 < a < 1$ tem-se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Seja $a \in (0,1)$ arbitrário mas fixo. Dado $\epsilon > 0$, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n \leqslant \epsilon$, cuja existência é garantida pela arquimedianidade do corpo real. Observe que se a condição $|f(x) - 0| = |f(x)| = f(x) < \epsilon$ for falsa, então x deve pertencer ao conjunto A definido como:

$$A := \left\{\frac{1}{2}\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\} \bigcup \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\} \bigcup \cdots \bigcup \left\{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Por exemplo, se a for racional, poderia pertencer ao mesmo. Resulta importante salientar que tal conjunto é *finito*. Seja δ definido como:

$$\delta := \begin{cases} \min\{|x-a| \,:\, x \in A\}, & \text{se } a \notin A; \\ \min\{|x-a| \,:\, x \in A \wedge x \neq a\}, & \text{se } a \in A. \end{cases}$$

Observe que δ está bem definido, pois A é finito, e $\delta > 0$. Agora, se $0 < |x - a| < \delta$, então x não pode pertencer ao conjunto A, e portanto a desigualdade $|f(x) - 0| < \epsilon$ não pode ser falsa. ♣

18.1.11 Exemplo: O limite da função $f(x) = 1/x$ quando x tende para 0 não existe.

Com efeito, por *reductio ad absurdum* suponha-se que existe $l \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad |x - 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - l\right| < \epsilon.$$

Considere-se primeiramente o caso $l = 0$. Dado $\epsilon = 1 > 0$, por hipótese, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|x| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|x|} < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 < |x|\,.$$

Se fosse $\delta_1 \leqslant 1$ teria-se que $|x| < \delta_1 \leqslant 1$, contradizendo a relação acima. Por outro lado, se fosse $\delta_1 > 1$, tomando $x = 1/2$ teria-se que $|x| = |1/2| = 1/2 < 1 < \delta_1$ e portanto $1 < |x| = |1/2| = 1/2$, o que também resulta em contradição.

Considere-se agora o caso $l \neq 0$. Dado $\epsilon = |l|/2$, por hipótese, existe $\delta_l > 0$ tal que:

$$|x| < \delta_l \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - l\right| < \frac{|l|}{2}.$$

Agora, observando que $|x| < \dfrac{2}{3\,|l|} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{|x|} > \dfrac{3}{2}|l|$, tem-se:

$$\left|\frac{1}{x} - l\right| \geqslant \left|\frac{1}{|x|} - |l|\right| \geqslant \frac{1}{|x|} - |l| > \frac{|l|}{2}.$$

Portanto, se fosse $\delta_l \leqslant \dfrac{2}{3|l|}$, teria-se que $|x| < \delta_l \leqslant \dfrac{2}{3|l|}$, obtendo-se uma contradição. Por outro lado, se fosse $\dfrac{2}{3|l|} < \delta_l$, bastaria tomar $x = \dfrac{2}{3|l|}$ para obter uma contradição. ♣

18.1.12 Teorema: *Se existe, então o limite de uma função é único. Ou seja, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = m$, então deve ser $l = m$.* □

Demonstração: Por *reductio ad absurdum*, suponha-se que $l \neq m$. Seja $\epsilon = |l - m|/2 > 0$. Por hipótese, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon, \\ |x - a| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - m| < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, definindo $\delta := \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$, se $|x - a| < \delta$, então tem-se:

$$|l - m| = |l - f(x) + f(x) - m| \leqslant |l - f(x)| + |f(x) - m| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |l - m|\,.$$

Mas a relação acima constitui uma contradição. ∎

18.1.13 Teorema: *Sejam f, g funções. Se $\lim_{x \to a} f(x) = l$ e $\lim_{x \to a} g(x) = m$, então:*

(a) $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = l + m.$

(b) $\lim_{x \to a} (f\,g)(x) = l\,m.$

(c) *Se adicionalmente for $m \neq 0$, então* $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{m}.$

(d) *Se adicionalmente for $m \neq 0$, então* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}.$

(e) *Se for $m = 0$ mas $l \neq 0$, então* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *não existe.* □

Demonstração: **(a)** Seja $\epsilon > 0$, arbitrário. Por hipótese, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon/2, \\ |x-a| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - m| < \epsilon/2. \end{aligned}$$

Portanto, se $|x - a| < \delta := \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$, então tem-se:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (l+m)| = |f(x) + g(x) - l - m| &= |f(x) - l + g(x) - m| \\ &\leqslant |f(x) - l| + |g(x) - m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

(b) Observando que $|f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l|$, tem-se:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - lm| \\ &= |f(x)\,(g(x) - m) + (f(x) - l)m| \\ &\leqslant |f(x)\,(g(x) - m)| + |(f(x) - l)m| \\ &= |f(x)|\;|g(x) - m| + |f(x) - l|\;|m| \\ &\leqslant (|f(x) - l| + |l|)\;|g(x) - m| + |f(x) - l|\;|m| \end{aligned}$$

Por hipótese, existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ positivos, tais que:

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2(1+|m|)}, \\ |x-a| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - l| < 1, \\ |x-a| < \delta_3 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2(1+|l|)}. \end{aligned}$$

Seja $0 < \delta \leqslant \min\{\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\}$. Então, se $|x - a| < \delta$ tem-se:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - lm| &\leqslant (1 + |l|)\;\frac{\epsilon}{2(1+|l|)} + \frac{\epsilon}{2(1+|m|)}\;|m| \\ &< (1 + |l|)\;\frac{\epsilon}{2(1+|l|)} + \frac{\epsilon}{2(1+|m|)}\;(|m| + 1) \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(c) Como $m \neq 0$, por hipótese, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < \frac{|m|}{2}.$$

Portanto, tem-se:

$$|m| - |g(x)| \leqslant ||m| - |g(x)|| \leqslant |g(x) - m| < \frac{|m|}{2} \quad \Rightarrow \quad |g(x)| > |m| - \frac{|m|}{2} = \frac{|m|}{2} > 0.$$

Em particular, $g(x)$ também é não-nula numa vizinhança de m, exceto possivelemente para $x = a$ (que pode aconter, por exemplo, se g não for contínua em a). Além disso, pelo mesmo fato, tem-se:

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|}.$$

Por outro lado, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < \frac{|m|^2\epsilon}{2}.$$

Seja $0 < \delta \leqslant \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$. Então, se $|x-a| < \delta$ tem-se:

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{g(x)-m}{m\,g(x)}\right| = \frac{|g(x)-m|}{|m|\ |g(x)|} < \frac{2}{|m|}\,\frac{|g(x)-m|}{|m|} = \frac{2}{|m|^2}\ |g(x)-m|$$
$$< \frac{2}{|m|^2}\,\frac{|m|^2\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(d) Basta combinar o resultado dos intens (b) e (c) anteriores.

(e) Seja $M \in \mathbb{N}$ arbitrário. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \frac{|l|}{2}.$$

Portanto, tem-se:

$$|l| - |f(x)| \leqslant ||l| - |f(x)|| \leqslant |f(x) - l| < \frac{|l|}{2} \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \geqslant |l| - \frac{|l|}{2} = \frac{|l|}{2}.$$

Por hipótese, também existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$|x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x)| < \frac{|l|}{2M}.$$

Seja $0 < \delta \leqslant \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$. Então, se $|x-a| < \delta$, tem-se:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \geqslant \frac{|l|}{2}\,\frac{2M}{|l|} = M.$$ ∎

18.1.14 Observação: Se for $m = 0$ e $l = 0$, então o limite do quociente pode existir ou não, dependendo de cada caso particular e nada pode afirmar-se em geral sem dispor de informação adicional. Vide seção 23.3. ♣

18.1.15 Exemplo: Este exemplo ilustra a observação anterior. Um outro exemplo será acrescido como resultado do exercício 18.12.3(d). Seja $a = 0$.

(a) Se $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, então:

$$l = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0 \qquad \text{e} \qquad m = \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

e tem-se que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.$$

Ou seja, neste caso o limite do quociente não existe.

(b) Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$, então tem-se igualmente que:

$$l = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad m = \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

mas agora:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Portanto, neste caso o limite do quociente si existe, sendo igual a 0. ♣

18.1.16 Exemplo: Se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \cdots + b_k x^k$ são polinômios, então, pela aplicação direta do Teorema 18.1.13 tem-se:

(a) $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$ e $\lim_{x \to a} q(x) = q(a)$.

(b) Se a não é raiz de $q(x)$, ou seja, se $q(a) \neq 0$, então $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$.

(c) Se $q(a) = 0$ mas $p(a) \neq 0$, então $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ não existe. ♣

18.1.17 Teorema: *Sejam f, g funções tais que $\lim_{x \to a} g(x) = m$ e $\lim_{x \to m} f(x) = l$. Então:*

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = l.$$ □

Demonstração: Suponha-se que m pertence ao interior do domínio da f. Como tal interior é um conjunto aberto, existe δ_0 tal que se $|x - m| < \delta_0$ então x pertence ao (interior do) domínio da f. Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|x - m| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Uma vez determinado tal $\delta_1 > 0$, também por hipótese, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < \min\{\delta_0,\ \delta_1\}.$$

Portanto:

$$|x - a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(g(x)) - l| < \epsilon.$$ ∎

18.1.18 Exemplo: Suponha-se que $\lim_{x\to a} g(x) = m$, com $m > 0$. Então, $\lim_{x\to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{m}$. ♣

18.2 Limites Laterais

18.2.1 Definição: Se diz que a função f **tende ao limite** l **quando** x **tende para** a **por valores superiores**, ou **pela direita**, ou ainda **"desde acima"**, se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Em tal caso, denota-se $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$. ♣

18.2.2 Definição: Analogamente, se diz que a função f **tende ao limite** l **quando** x **tende para** a **por valores inferiores**, ou **pela esquerda** ou ainda **"desde abaixo"**, se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < a - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Em tal caso, denota-se $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$. ♣

18.2.3 Exemplo: $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Seja $\epsilon > 0$. Observe que se $x > 0$, então $\sqrt{x} > 0$, de onde segue que $|\sqrt{x}| = \sqrt{x}$. Desta maneira, pelo exercício 2.4.3(c), tem-se:

$$0 < x = (\sqrt{x})^2 < \epsilon^2 \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \epsilon.$$

Portanto, basta tomar $0 < \delta \leqslant \epsilon^2$. ♣

18.2.4 Proposição: *$\lim_{x\to a} f(x)$ existe (e vale l) se e somente se os limites laterais $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existem ambos e são iguais (com valor comun l).* □

Demonstração: Se o limite existe (com valor l), obviamente ambos limites laterais também existem e são iguais (com valor comum l). Para provar a recíproca, dado $\epsilon > 0$, por hipótese, existem δ_1, δ_2 positivos tais que:

$$\begin{aligned} 0 < x - a < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - m| < \epsilon, \\ 0 < a - x < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon. \end{aligned}$$

Seja $0 < \delta \leqslant \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$. Suponha-se que $0 < |x - a| < \delta$. No caso $x < a$, tem-se que $0 < a - x \leqslant |x - a| < \delta \leqslant \delta_2$. Portanto:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \left(\frac{l+m}{2}\right) \right| = \left| f(x) - \frac{l}{2} - \frac{m}{2} \right| = \left| f(x) - \frac{l}{2} - \frac{l}{2} + \frac{l}{2} - \frac{m}{2} \right| = \left| f(x) - l + \frac{l-m}{2} \right| \\ \leqslant |f(x) - l| + \frac{|l-m|}{2} < \epsilon + \frac{|l-m|}{2}. \end{aligned}$$

Agora, como os limites laterais são iguais, fazendo $l = m$ na relação acima, obtem-se o resultado desejado, a saber, $|f(x) - l| < \epsilon$. Analogamente, no caso $a < x$, tem-se que $0 < x - a \leqslant |x - a| < \delta \leqslant \delta_1$. Portanto:

$$\left|f(x) - \left(\frac{l+m}{2}\right)\right| = \left|f(x) - \frac{m}{2} - \frac{l}{2}\right| = \left|f(x) - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} + \frac{m}{2} - \frac{l}{2}\right| = \left|f(x) - m + \frac{m-l}{2}\right|$$
$$\leqslant |f(x) - m| + \frac{|l-m|}{2} < \epsilon + \frac{|l-m|}{2}.$$

Agora, como os limites laterais são iguais, fazendo $l = m$ na relação acima, obtem-se o resultado desejado, a saber, $|f(x) - l| < \epsilon$. ∎

18.3 Limites Impróprios

18.3.1 Definição: Se diz que a função f **diverge para** $+\infty$ quando x tende para a se:

$$\forall\, M \in \mathbb{N} \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

Se a função f diverge para $+\infty$ quando x tende para a, este fato denota-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. ♣

18.3.2 Definição: Se diz que a função f **diverge para** $-\infty$ quando x tende para a se a função $-f$ diverge para $+\infty$ quando x tende para a. ♣

18.3.3 Exemplo: Se $f(x) = 1/x^2$, então $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$. ♣

18.3.4 Definição: Se diz que a função f **tende para** l **quando** x **tende para** $+\infty$ se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, M \in \mathbb{N} \quad : \quad x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Em tal caso denota-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$. ♣

18.3.5 Definição: Analogamente, se diz que a função f **tende para** l **quando** x **tende para** $-\infty$ se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, M \in \mathbb{N} \quad : \quad x < -M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Em tal caso denota-se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$. ♣

18.3.6 Exemplo: **(a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. ♣

18.3.7 Observação: Todas as definições desta seção podem combinar-se entre si e ainda com as definições de limites laterais. ♣

18.3.8 Exemplo: O limite da função $f(x) = 1/x$ para $x \to 0$ não existe. Mais ainda, ela não diverge para $+\infty$ nem para $-\infty$. Porém, observe-se que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$. ♣

18.4 Limites Impróprios de Sequências

18.4.1 Definição: Se diz que a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge para $+\infty$**, o que se denota $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, se:

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\ N = N(M) \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow s_n > M.$$

Analogamente, se diz que a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge para $-\infty$**, o que se denota $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, se:

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\ N = N(M) \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow s_n < -M.$$ ♣

18.4.2 Observação: **(a)** Se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \neq +\infty$, então $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma sub-sequência limitada superiormente.

Com efeito, em tal caso existe $M_0 > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n = n(N) \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant N$ e $s_n \leqslant M_0$. Em particular, para $N = 1 \in \mathbb{N}$ existe $n(1) \in \mathbb{N}$ com $n(1) \geqslant 1$ e $s_{n(1)} \leqslant M_0$. Em geral, assumindo a existência de $n(k) \in \mathbb{N}$ com $n(k) \geqslant k$ e $s_{n(k)} \leqslant M_0$, dado $N = n(k) + 1 \in \mathbb{N}$, existe $n(k+1) \in \mathbb{N}$ com $n(k+1) \geqslant n(k) + 1 \geqslant k + 1$ e $s_{n(k+1)} \leqslant M_0$. Além disso, observe que $n(k+1) \geqslant n(k) + 1 > n(k)$. Portanto, $\{s_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é a sub-sequência procurada.

Observe que a recíproca deste resultado também é verdadeira.

(b) Analogamente, se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \neq -\infty$, então $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma sub-sequência limitada inferiormente. ♣

18.4.3 Definição: Se diz que **$+\infty$ é um ponto de acumulação** da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma subsequência $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = +\infty$.

Analogamente, se diz que **$-\infty$ é um ponto de acumulação** da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma subsequência $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = -\infty$. ♣

18.4.4 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada superiormente.*

2. *$+\infty$ é um ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.* □

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Se a sequência não é limitada superiormente, então para todo $M > 0$ existe $n = n(M) \in \mathbb{N}$ tal que $s_n > M$. Em particular, dado $1 > 0$ existe $n(1) \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n(1)} > 1$. Em geral, uma vez determinado $n(k)$ tal que $s_{n(k)} > k$, seja A_{k+1} o conjunto definido como:

$$A_{k+1} := \{n \in \mathbb{N} \,:\, s_n > k+1 \;\wedge\; n > n(k)\}\,.$$

Observe que A_{k+1} não pode ser vazio, pois em tal caso a sequência seria limitada pelo número:

$$\max\left\{s_1, s_2, \ldots, s_{n(k)}, k+1\right\}.$$

Portanto, define-se $n(k+1)$ como o menor elemento de A_{k+1}, cuja existência garante o Princípio de Boa Ordenação. Observe que $n(k+1) > n(k)$. Desta maneira, resulta possível construir inductivamente uma sub-sequência tal que $s_{n(k)} > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, observe que se $j \geqslant k$, então $s_{n(j)} > k$, pois $s_{n(j)} > j \geqslant k$. A partir dessas observações, resulta simples provar que a sub-sequência assim construida converge para $+\infty$, que resulta desta maneira ponto de acumulação da sequência original.

(2) $\Rightarrow$ (1). Por hipótese, existe uma sub-sequência $\{s_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para $+\infty$. Ou seja, para todo $M > 0$ existe $k = k(M) \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n(k)} > M$. Em particular, a sequência original não é limitada superiormente. ∎

18.4.5 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

2. $-\infty$ é o único *ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.* □

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Para provar que $-\infty$ é ponto de acumulação, basta exibir uma sub-sequência convergente a $-\infty$. Para tanto, a própria sequencia original serve, pela hipótese 1. Para provar a unicidade, se $+\infty$ fosse ponto de acumulação, então, pelo lema anterior, a sequência não poderia ser limitada superiormente, contradizendo a hipótese 1. Por outro lado, se existisse um ponto de acumulação finito, então, pelo resultado do exercício 17.7.2, existiria uma sub-sequência convergente a tal número finito. Mas, pela hipótese 1, tal sub-sequência deveria convergir para $-\infty$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Por *reductio ad absurdum*, se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \neq -\infty$, então pela observação 18.4.2(b), existe uma sub-sequência limitada inferiormente. Se tal sub-sequência não fosse limitada superiormente, pelo lema anterior, $+\infty$ seria ponto de acumulação da sub-sequencia e, pelo resultado do exercício 17.7.4(a), também da sequência original, contradizendo a unicidade estabelecida pela hipótese 2. Por outro lado, se a sub-sequencia fosse também limitada superiormente, estaria contida num compacto e, pelo resultado do exercício 17.8.1, teria um ponto de acumulação finito. Pelo mesmo argumento anterior, também seria ponto de acumulação da sequência original, contradizendo a unicidade. ∎

Os seguintes resultados são os análogos dos dois lemas anteriores, respectivamente.

18.4.6 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *A sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada inferiormente.*

2. *$-\infty$ é um ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.* □

Demonstração: Análoga à prova do lema 18.4.4. ∎

18.4.7 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

2. $+\infty$ é o único *ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.* □

Demonstração: Análoga à prova do lema 18.4.5. ∎

18.5 O Conjunto de Pontos de Acumulação Estendido

18.5.1 Definição: Define-se o conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ de **números reais estendidos** como $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Este novo conjunto é ordenado com a relação de ordem dada por $-\infty < a < +\infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$. ♣

18.5.2 Definição: Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais. Define-se o **conjunto de pontos de acumulação estendido** $\overline{\Xi}$ da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como:

$$\overline{\Xi} := \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \;:\; \text{existe uma sub-sequência } \{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ com } \lim_{k\to\infty} s_{n_k} = x \right\}. \qquad ♣$$

18.5.3 Observação: Com relação ao conjunto $\overline{\Xi}$ acima definido tem-se:

(a) $\overline{\Xi} \neq \emptyset$. Ou seja, o conjunto de pontos de acumulação estendido resulta *sempre* não-vazio. Com efeito, se a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é não-limitada superiormente, então $+\infty \in \overline{\Xi}$, pelo Lema 18.4.4. Suponha-se então que a sequência em questão é limitada superiormente. Se fosse não-limitada inferiormente, então $-\infty \in \overline{\Xi}$, pelo Lema 18.4.6. Caso contrário, deve ser limitada inferior e superiormente, ou seja, limitada. Portanto, deve estar contida em um sub-conjunto compacto, em cujo caso a sequência tem um ponto de acumulação (finito), pelo resultado do exercício 17.8.1, ou seja, $\emptyset \neq \Xi \subseteq \overline{\Xi}$.

(b) Verifica-se também a seguinte relação entre conjuntos:

$$\{\text{pontos de acumulação de } \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}\} \subseteq \overline{\Xi} \subseteq \{\text{pontos de acumulação de } \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}\cup\{\pm\infty\}. ♣$$

18.5.4 Lema: *Com as definições precedentes, tem-se:*

(a) *Suponha-se a existência de algum número real exendido $a \in \overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $a \in \overline{\Xi}$.
- $a < x \Rightarrow \exists\, N = N(x) \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow s_n < x$.

Então, tal a deve ser necessáriamente único.

(b) *O número real estendido* $\sup \overline{\Xi}$ *satisfaz as duas propriedades do item (a) anterior.* □

Demonstração: **(a)** Sejam $r, s \in \overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo as duas condições estabelecidas no item (a). Se fosse $r < s$, considere $x \in \mathbb{R}$ tal que $r < x < s$. Em tal caso, pela segunda propriedade aplicada a r, existiria $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_n < x < s.$$

Em tal caso, o número s não poderia satisfazer a primeira propriedade, ou seja s não poderia ser ponto de acumulação da sequência. De fato, para obter uma contradição bastaria tomar $\epsilon = s - x > 0$. Portanto, deve ser $r \geqslant s$. Se fosse $s < r$ então, aplicando o mesmo argumento, *mutatis mutandi* r por s, obteria-se que $s \geqslant r$. Desta maneira, deve ser $r = s$.

(b) Suponha-se em primeiro lugar que $\sup \overline{\Xi} = +\infty$. Em tal caso, $\overline{\Xi}$ não é limitado superiormente, ou seja:

$$\forall\, m > 0 \quad \exists\, x(m) \in \overline{\Xi} \quad : \quad x(m) > m.$$

Se para algum $m_0 > 0$ fosse $x(m_0) = +\infty$, então obviamente $\sup \overline{\Xi} = +\infty = x(m_0) \in \overline{\Xi}$. Portanto, se pode supor, sem perda de generalidade, que:

$$\forall\, m > 0 \quad \exists\, x(m) \in \Xi \quad : \quad x(m) > m.$$

Ou seja, $x(m) \in \mathbb{R}$, para todo $m > 0$. Seja $\epsilon := \dfrac{x(m) - m}{2} > 0$. Como $x(m) \in \Xi$, ou seja, $x(m)$ é ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe $n(m) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left| s_{n(m)} - x(m) \right| < \frac{x(m) - m}{2}.$$

Em particular, observe que dessa última relação tem-se:

$$\begin{aligned} -\frac{x(m) - m}{2} < s_{n(m)} - x(m) \quad &\Rightarrow \quad -\frac{x(m)}{2} + \frac{m}{2} < s_{n(m)} - x(m) \\ &\Rightarrow \quad \frac{x(m)}{2} + \frac{m}{2} < s_{n(m)} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{m}{2} + \frac{m}{2} < \frac{x(m)}{2} + \frac{m}{2} < s_{n(m)}. \end{aligned}$$

Seja agora m' tal que $m' > x(m) + \dfrac{x(m) - m}{2} > x(m) > m$.

<u>Afirmação:</u> Existe $n(m') > n(m)$ tal que $\left| s_{n(m')} - x(m') \right| < \dfrac{x(m') - m'}{2}$. ▽

Com efeito, pois caso contrário teria-se que $|s_n - x(m')| \geqslant \dfrac{x(m') - m'}{2}$, para todo $n > n(m)$, contradizendo que $x(m')$ é ponto de acumulação da sequência. ▼

Desta maneira, resulta possível construir uma sub-sequência $\left\{s_{n(m)}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $s_{n(m)} > m$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Em particular, tem-se que $\lim\limits_{m\to\infty} s_{n(m)} = +\infty$, de onde segue que $\sup\overline{\Xi} = +\infty \in \overline{\Xi}$.

Suponha agora que $\sup\overline{\Xi} \in \mathbb{R}$. Em tal caso, $\overline{\Xi}$ é limitado superiormente e, como $\overline{\Xi}$ é fechado, segue que $\sup\overline{\Xi} \in \overline{\Xi}$.

Finalmente, suponha que $\sup\overline{\Xi} = -\infty$. Em tal caso, $\overline{\Xi} = \{-\infty\}$, pois $\overline{\Xi}$ é não-vazio. Portanto, obviamente $\sup\overline{\Xi} = -\infty \in \overline{\Xi}$. Isso conclui a demonstração que $\sup\overline{\Xi} \in \overline{\Xi}$ qualquera seja o caso, provando que $\sup\overline{\Xi}$ satisfaz a primeira propriedade do enunciado do item (a).

Para a prova da segunda propriedade, em primeiro lugar observe que se fosse $\sup\overline{\Xi} = +\infty$, então tal propriedade deve ser verdadeira (vide observação ao final da presente demonstração). Considere-se então o caso $\sup\overline{\Xi} < +\infty$. Por *reductio ad absurdum*, suponha-se que existe $x_0 > \sup\overline{\Xi}$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n(N) \in \mathbb{N}$ com $n(N) \geqslant N$ e $s_{n(N)} \geqslant x_0$. Em particular, para $N = 1 \in \mathbb{N}$, existe $n(1) \in \mathbb{N}$ com $n(1) \geqslant 1$ e $s_{n(1)} \geqslant x_0$. Assumindo a existência de $n(k) \in \mathbb{N}$ com $n(k) \geqslant k$ e $s_{n(k)} \geqslant x_0$, dado $n(k)+1 \in \mathbb{N}$ existe $n(k+1) \geqslant n(k)+1$ e $s_{n(k+1)} \geqslant x_0$. Em particular, $n(k+1) \geqslant n(k)+1 > n(k)$, ou seja, $n(k+1) > n(k)$. Desta maneira, resulta possível construir inductivamente uma sub-sequência $\left\{s_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $s_{n(k)} \geqslant x_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não fosse limitada superiormente, então pelo Lema 18.4.4 teria-se que $+\infty$ seria ponto de acumulação. Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for limitada superiormente, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $s_n \leqslant M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, como $x_0 \leqslant s_{n(k)} \leqslant M$, para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $s_{n(k)} \subseteq [x_0, M]$, que é um intervalo *compacto*. Portanto, a sub-sequência $\left\{s_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ tem algum ponto de acumulação em $[x_0, M]$, de onde segue que a sequência original $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui algum ponto de acumulação em $[x_0, M]$. Desta maneira, qualquer que seja o caso, ou seja, sendo $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitada ou não-limitada superiormente, possui um ponto de acumulação y com $y \geqslant x_0 > \sup\Xi$. Isso constitui uma contradição, pois se y é ponto de acumulação, então $y \in \overline{\Xi}$, e portanto deveria ser $y \leqslant \sup\overline{\Xi}$. ∎

18.5.5 Observação: Sejam P, Q as proposições definidas respectivamente como:

$$P := a < x,$$
$$Q := (\,\exists\ N = N(x) \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant N \ \Rightarrow\ s_n < x\,)\,.$$

Considere a seguinte tabela de verdade:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Observe que se $a = +\infty$, então P é falsa. Portanto, segundo a tabela de verdade acima, $P \Rightarrow Q$ é verdadeira. ♣

O seguinte resultado é o análogo do anterior.

18.5.6 Lema: *Com as definições precedentes, tem-se:*

(a) *Suponha-se a existência de algum número real exendido $a \in \overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- $a \in \overline{\Xi}$.
- $x < a \Rightarrow \exists\, N = N(x) \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow x < s_n$.

Então, tal a deve ser necessáriamente único.

(b) *O número real estendido* $\inf \overline{\Xi}$ *satisfaz as duas propriedades do item (a) anterior.* □

Demonstração: Análoga à prova do resultado anterior. ∎

Exercícios para o Capítulo 18

18.6 Resultados Gerais sobre Limites

18.6.1 Exercício: Prove que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$. ♣

18.6.2 Exercício: Sejam f, g e h funções tais que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ e suponha-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l = \lim\limits_{x \to a} h(x)$. Então, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$. ♣

18.6.3 Exercício: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(|x|)$ existe se e somente se $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ existe. Em tal caso, os dois limites são iguais. ♣

18.7 Alguns Exemplos Estranhos

18.7.1 Exercício: Suponha-se que para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n é um conjunto *finito* de números em $[0,1]$ e que A_m e A_n carecem de elementos comuns se $m \neq n$, ou seja, $A_m \cap A_n = \emptyset$ se $m \neq n$. Defina-se a função f no intervalo $[0,1]$ como segue:

$$f(x) := \begin{cases} 1/n, & \text{se } x \text{ está em } A_n; \\ 0, & \text{se } x \text{ não está em } A_n \text{ para nenhum } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Prove que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ para todo $a \in [0,1]$. ♣

18.7.2 Exercício: Considere-se a função f definida no intervalo $(-1,1)$ como:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é irracional, } 0 < |x| < 1; \\ 1/q, & \text{se } x = p/q \text{ fração irredutível, } 0 < |x| < 1; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Prove que:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

(b) Para qualquer outro a com $0 < |a| < 1$ não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. ♣

18.7.3 Exercício: Considere-se a função f definida no intervalo $[0,1]$ como:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é racional;} \\ 1-x, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Prove que:

(a) $\lim\limits_{x\to 1/2} f(x) = 1/2$.

Sugestão: Observe-se que $|f(x) - 1/2| = |x - 1/2|$, para qualquer $x \in [0,1]$.

(b) Para qualquer outro $a \neq 1/2$ com $0 \leqslant a \leqslant 1$ não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Sugestão: Considere $\epsilon \leqslant |1 - 2a|$. ♣

18.8 Limites de Funções e Sequências

18.8.1 Exercício: **(a)** Se existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, então também existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)$, para toda sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$ e em tal caso os dois limites são iguais.

(b) Reciprocamente, se para toda sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$ o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)$ existe e o seu valor, digamos l, é sempre o mesmo, ou seja, independe da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, então também existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e vale l.

Sugestão: Use *reductio ad absurdum*, para gerar uma sequência convergendo para a mas...

(c) O resultado do item (b) anterior não se cumple se o valor não é o mesmo. ♣

Modificando trivialmente a mesma prova, os itens (a) e (b) do exercício anterior são sucetíveis de generalização para os limites laterais $x \to a^+$, ou $x \to a^-$, em cujo caso a sequência s_n deve satisfazer a condição adicional $a < s_n$, ou $a > s_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, respectivamente.

Com relação apenas ao item (b) desse mesmo exercício, existe um caso particular de considerável importância onde o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)$ sempre existe e o valor independe da sequência s_n, como indicado no Exercício 18.8.3 abaixo, após um resultado preparatório.

18.8.2 Exercício: Seja $a \in \mathbb{R}$. Seja f uma função **monótona não-decrescente** definida num aberto da forma (a,b), para algum $\mathbb{R} \ni b > a$. Ou seja, $x < y$ implica $f(x) \leqslant f(y)$, para todo $x, y \in (a,b)$. Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência com $s_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. Então:

(a) Sem hipóteses adicionais, a sequência $f(s_n)$ possui *no máximo* apenas um ponto de acumulação.

(b) Suponha-se adicionalmente que s_n é monotona não-crescente, ou seja $n > m$ implica $s_n \leqslant s_m$, e que f é limitada inferiormente, ou seja existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leqslant f(x)$, para todo $x \in (a,b)$. Prove que em tal caso existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)$.

Sugestão: Em tal caso, $f(s_n)$ resulta uma sequência não-crescente e limitada inferiormente.

(c) Se f é limitada inferiormente, então a sequência $f(s_n)$ possui pelo menos um ponto de acumulação.

Sugestão: Use a hipótese $s_n > a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$ para gerar uma subsequência monótona não-crescente e use o item anterior. ♣

O mesmo resultado do exercício 18.8.2 anterior vale se f estiver definida num aberto da forma (c,a), para algum $\mathbb{R} \ni c < a$ e a sequência satisfazer $s_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com todas as outras hipóteses mantidas inalteradas. No caso do item (b) deve-se considerar s_n monótona não-decrescente, ou seja $n > m$ implica $s_m \leqslant s_n$ e que f é limitada superiormente, ou seja existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant M$, para todo $x \in (c,a)$.

18.8.3 Exercício: Seja f uma função limitada inferiormente e monótona não-decrescente definida num aberto da forma (a,b), para algum $\mathbb{R} \ni b > a$. Ou seja, $x < y$ implica $f(x) \leqslant f(y)$, para todo $x, y \in (a,b)$ e existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leqslant f(x)$, para todo $x \in (a,b)$. Então:

(a) Para toda sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, com $s_n > a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$, também existe o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)$.

Sugestão: Pelo exercício 18.8.2(c), a sequência $f(s_n)$ possui um ponto de acumulação que resulta único, pelo mesmo exercício 18.8.2(a). Basta então lembrar o resultado do exercício 17.8.2.

(b) O limite do item anterior independe da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ considerada. ♣

O mesmo resultado do exercício 18.8.3 anterior vale se f for limitada superiormente estando definida num aberto da forma (c,a), para algum $\mathbb{R} \ni c < a$ e a sequência satisfazer $s_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ com todas as outras hipóteses mantidas inalteradas.

18.8.4 Exercício: Se f é uma função limitada inferiormente e monótona nao-decrescente definida num aberto da forma (a,b), para algum $\mathbb{R} \ni b > a$, então existe o limite lateral $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Sugestão: Segue diretamente do exercício 18.8.3(a,b) e 18.8.1(b). ♣

Um resultado análogo ao do Exercício 18.8.4 anterior vale se f for uma função limitada superiormente estando definida num aberto da forma (c, a), para algum $\mathbb{R} \ni c < a$ com todas as outras hipóteses mantidas inalteradas. Em tal caso, existe o limite lateral *pela esquerda* $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

Observe-se também que em *todos* os três resultados anteriores, se f estivesse definida em um intervalo da forma (c, b) contendo o ponto a, ou seja $a \in (c, b)$, então a hipótese de limitação inferior e/ou superior pode ser dispensada. Com efeito em tal caso teria-se $f(a) \leqslant f(x)$ para todo $x \in (a, b)$, como assim também $f(x) \leqslant f(a)$ para todo $x \in (c, a)$.

Portanto, se f é monótona não-decrescente os limites laterais pela direita $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e pela esquerda $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existem *sempre*.

Finalmente, observe-se que o mesmo resultado vale para funções monótonas não-crescentes. Com efeito, se f é uma tal função, então $-f$ resulta monótona não-decrescente e o resultado anterior pode ser aplicado a $-f$, de onde segue a existência dos limites laterais para f também.

Dado que na diversidade reside o gosto, uma outra prova da existência dos limites laterais para funções monótonas será fornecida no Capítulo 29, no Lema 29.1.1.

18.8.5 Exercício: Sejam f uma função e $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tais que $f(n) = s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Se existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, então também existe o limite $\lim_{n\to\infty} s_n$ e em tal caso os dois limites são iguais.

(b) A recíproca do resultado anterior *não* é válida em geral. Ou seja, a existência do limite da sequência $\lim_{n\to\infty} s_n$ não garante a existência do limite da função $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Sugestão: Considere a função $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ e a sequência $s_n := f(n) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ♣

18.9 A Função Exponencial $\exp_a(x)$

Considere-se a função exponencial $\exp_a(x)$ definida no Capítulo 12.

18.9.1 Exercício: Nos exercícios a seguir, considere sempre por separado os casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

(a) Prove que $\lim_{x\to 0} \exp_a(x) = 1$.

Sugestão: Como primera abordagem, uma maneira de fazer isso seria considerar por separado os limites laterais $\lim_{x\to 0^+} \exp_a(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0^-} \exp_a(x) = 1$. Alternativamente, esses dois casos podem ser abordados em simultâneo. Qualquer que seja o método adotado, o resultado do exercício 11.3.1 será de crucial importância.

(b) Prove que $\lim_{x \to b} \exp_a(x) = \exp_a(b)$, para todo $b \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Pelo Exercício 18.6.1 e o Lema 12.4.3 tem-se:

$$\lim_{x \to b} \exp_a(x) = \lim_{h \to 0} \exp_a(b+h) = \lim_{h \to 0} \exp_a(b) \exp_a(h) = \exp_a(b) \lim_{h \to 0} \exp_a(h).$$

Agora, o valor desse último limite é 1, segundo o item (a) anterior. ♣

18.10 Funções Racionais

18.10.1 Exercício: Calcular os seguintes limites. Em certos casos será bom lembrar que:

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{i=1}^{n} x^{n-i} y^{i-1}.$$

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. R: 2.

(b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$. R: 12.

(c) $\lim_{x \to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$. R: ny^{n-1}.

(d) $\lim_{y \to x} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$. R: nx^{n-1}. ♣

18.11 Limites com Raizes

18.11.1 Exercício: Calcular os seguintes limites. A dica providencial aqui consiste em observar que:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}\, \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$. R: 1/2.

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$. R: 0.

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$. R: 1/2.

(d) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{a + h} - \sqrt{a}}{h}$. R: $1/2\sqrt{a}$. ♣

18.12 O Limite Notável $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x/x$.

As funções trigonométricas sen e cos foram introduzidas na seção 15.10. Lembre-se também, do resultado do exercício 15.10.13, a propriedade de sub-linearidade, ou crescimento sub-linear, para o seno, a saber: $\operatorname{sen} x < x$, para $0 < x < \pi/2$.

18.12.1 Exercício: Asumindo agora as propriedades 1 a 5 prove que na verdade tem-se:

$$0 < \operatorname{sen} x < x, \quad \text{se } 0 < x < \pi/2.$$

Sugestão: Observe-se que no intervalo especificado a função sen é monótona estrictamente crescente e $\operatorname{sen} 0 = 0$, portanto $0 < \operatorname{sen} x$ em tal intervalo. ♣

18.12.2 Exercício: Prove que:

$$|\operatorname{sen} x| < |x|\,, \text{ para todo } 0 < |x| < \pi/2.$$

Sugestão: Use o exercício anterior e a paridade ímpar da função sen. ♣

18.12.3 Exercício: **(a)** Utilizando o exercício anterior, prove que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

(b) Utilizando a fórmula de duplicação $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$ e o item (a) anterior, prove que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

(c) Utilizando a propriedade 4 da seção 15.10 e o item (b) anterior, prove que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

(d) Utilizando o resultado do exercício 18.6.3 e o item (c) anterior prove que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. ♣

18.13 Funções Trigonométricas

18.13.1 Exercício: Calcular os seguintes limites, sabendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$. R: 2.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}$. R: 4.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{bx}$. R: a/b.

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$. R: 2.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$. R: 1/2.

Sugestão: Multiplique-se a expresão dada por $\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$. R: 0.

Sugestão: Idem.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$. R: 2.

Sugestão: Idem.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$. R: 3/4.

Sugestão: Tire x^2 como fator comun no denominador.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. R: 1.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2x}{x+x^2}$. R: 2.

Sugestão: Observe-se que $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 2x}{x+x^2} = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x + 2x}{x(1+x)} = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}\dfrac{x}{1+x} + \dfrac{2}{1+x}$ e use o item (i).

(k) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}$. R: $\cos x$.

Sugestão: Use a fórmula de soma para $\operatorname{sen}(x+h)$. Chegado em algum ponto será bom lembrar também o resultado do item (f) acima. ♣

18.14 Funções Racionais para $x \to \pm\infty$

18.14.1 Exercício: Calcular os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^5-11}{3x^5+10x^3-7}$. R: 2/3.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+1}{1-9x^3}$. R: $-1/9$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^5}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}$. R: 1.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{7x^2+5}{1-x-x^2}$. R: -7.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$. R: $+\infty$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$. R: $-\infty$. ♣

18.15 Limites Impróprios Vários

18.15.1 Exercício: Determine os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x.$ R: 1/2.

Sugestão: Parecido com o exercício 18.11.1.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}.$ R: 1.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2+5}.$ R: 0.

Sugestão: Tire x^2 como fator comun no denominador e depois observe que $0 \leqslant |\operatorname{sen} x/x| \leqslant |1/x|$.

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen}^3 x}{5x+6}.$ R: 1/5.

Sugestão: Tire x como fator comun no numerador e denominador e depois observe que $0 \leqslant \left|\operatorname{sen}^3 x/x\right| \leqslant |1/x|$.

(e) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1)^3 \operatorname{sen} \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3.$ R: 0.

Sugestão: Parecido, mas *não* igual, com os dois itens anteriores. Ou seja, tente levar a expresão dada a alguma coisa envolvendo $\operatorname{sen} y/y$, para algum y conveniente, e depois, sim, observe que $0 \leqslant |\operatorname{sen} y/y| \leqslant |1/y|$. ♣

Capítulo 19

Funções Contínuas

19.1 Definições Básicas

Topologicamente falando, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, na topologia usual de $\mathbb{R}$, num ponto a se e somente se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{19.1.1}$$

Por outro lado, nos livros de texto elementares de Cálculo costuma-se definir a continuidade de uma função f num ponto a pela condição:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \tag{19.1.2}$$

que, segundo a definição de limite, é equivalente a:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Como já fora expressado no Capítulo 18, a condição adicional $0 < |x - a|$ permite que a função não esteja definida em a, mas essa relativa generalidade no tratamento dos limites deixa de ser válida no contexto da continuidade, pois nesse último caso a função *deve* estar (bem) definida em a. Em outras palavras, as condições (19.1.1) e (19.1.2) são na verdade equivalentes.

19.1.1 Definição: Se diz que uma função f é **contínua em** a se é satisfeita alguma das condições equivalentes (19.1.1), ou (19.1.2). ♣

19.1.2 Observação: A definição de continuidade acima significa que devem se satisfazer na verdade três condições, a saber:

1. $f(a)$ existe. Ou seja, o valor de f em a deve estar bem definido.

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Quando são satisfeitas *absolutamente todas* estas condições, então se diz que a função f é contínua em a. ♣

19.1.3 Exemplo: **(a)** Pelo exemplo 18.1.16(a) tem-se que os polinômios são funções contínuas em a, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) Pelo exemplo 18.1.16(b), as funções racionais, ou seja, quocientes de polinômios, também são contínuas em todo a que não seja raiz do denominador.

(c) Pelo exemplo 18.1.6, a função $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em todo a positivo, $a > 0$. ♣

(d) Pelo exercício 18.12.3, itens (a) e (b) respectivamente, as funções sen e cos introduzidas na seção 15.10 são contínuas em $a = 0$.

(e) Pelo Exercício 18.9.1(b) a função $\exp_a$ introduzida no Capítulo 12 é contínua em b para todo $b \in \mathbb{R}$.

19.1.4 Teorema: *Sejam f, g funções contínuas em a. Então:*

(a) *$f + g$ é contínua em a.*

(b) *$f\,g$ é contínua em a.*

(c) *Se adicionalmente for $g(a) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a.* □

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 18.1.13 e da definição de continuidade. ■

19.1.5 Teorema: *Sejam f, g funções tais que g é contínua em a e f é contínua em $g(a)$. Então, $f \circ g$ é contínua em a.* □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|x - g(a)| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(g(a))| < \epsilon.$$

Uma vez determinado tal $\delta_1 > 0$, também por hipótese, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(a)| < \delta_1.$$

Portanto:

$$|x - a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(a)| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon.$$ ■

19.1.6 Exemplo: **(a)** A função $f(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, observando que $||x| - |a|| \leqslant |x - a|$, basta tomar $0 < \delta \leqslant \epsilon$.

(b) Pelos dois teoremas anteriores e o item (a) acima, segue que $|f - g|$ é contínua, para quaisquer funções f, g contínuas.

(c) Observando que:

$$\max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2},$$
$$\min\{f,g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2},$$

tem-se que as funções $\max\{f,g\}$ e $\max\{f,g\}$ são contínuas em $\mathbb{R}$, para quaisquer funções f, g contínuas. ♣

O seguinte resultado é uma propriedade das funções contínuas usada com certa frequência no cálculo de certos limites.

19.1.7 Teorema: *Sejam f, g funções satisfazendo*

$$\lim_{x\to a} g(x) = l$$

e f contínua em l. Então:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(l).$$

Equivalentemente, com notação ligeiramente diferente, tem-se:

$$\lim_{x\to a} (f\circ g)(x) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$ □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|x-l| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(l)| < \epsilon.$$

Uma vez determinado tal $\delta_1 > 0$, também por hipótese, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$|x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - l| < \delta_1.$$

Portanto:

$$|x-a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x)-l| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(g(x)) - f(l)| < \epsilon.$$ ■

19.2 Funções Reais Contínuas em Compactos

19.2.1 Lema: *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$.*

(a) *Se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $[a, a+\delta)$.*

(b) *Se $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, então existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $(b-\delta, b]$.*

(c) *Se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $(a-\delta, a+\delta)$. Ou seja, se uma função é contínua em algum ponto, então é limitada numa vizinhança do mesmo.* □

Demonstração: **(a)** Por hipótese, tem-se:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;:\; 0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = 1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} 0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < f(x) - f(a) < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad f(a) - 1 < f(x) < 1 + f(a). \end{aligned}$$

Portanto, f é limitada em $(a, a+\delta)$ e obviamente também em $[a, a+\delta)$ e com os mesmos limites, pois $f(a) - 1 < f(a) < f(a) + 1$.

(b) Por hipótese, tem-se:

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;:\; 0 < b - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(b)| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = 1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} 0 < b - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(b)| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < f(x) - f(b) < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad f(b) - 1 < f(x) < 1 + f(b). \end{aligned}$$

Observe ainda que:

$$0 < b - x < \delta \quad \Leftrightarrow \quad 0 > x - b > -\delta \quad \Leftrightarrow \quad b > x > b - \delta.$$

Portanto, f é limitada em $(b-\delta, b)$ e obviamente também em $(b-\delta, b]$ e com os mesmos limites, pois $f(b) - 1 < f(b) < f(b) + 1$.

(c) Pela Proposição 18.2.4, tem-se:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Portanto, pelos itens (a) e (b) anteriores, existem δ_1, δ_2 positivos tais que f é limitada em $[a, a+\delta_1)$ e $(a-\delta_2, a]$, respectivamente. Desta maneira, se $0 < \delta \leqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então f resulta limitada em $(a-\delta, a+\delta)$. ∎

19.2.2 Teorema: *Se f é contínua em $[a,b]$ então:*

(a) *f é limitada superiormente em $[a,b]$.*

(b) *f é limitada inferiormente em $[a,b]$.* □

Demonstração: **(a)** Seja A o conjunto definido como:

$$A := \{x \;:\; x \in [a,b] \wedge f \text{ é limitada superiormente em } [a,x]\}.$$

Observe que $A \neq \emptyset$, pois obviamente $a \in A$. Além disso, A é limitado superiormente, pois $x \in A \Rightarrow x \leqslant b$, por definição. Portanto, pela completitude do corpo real $\mathbb{R}$, deve existir $\sup A =: \alpha$.

Afirmação: $\alpha = b$. $\triangledown$

Com efeito, se $x \in A$ então $x \leqslant b$, portanto b é um limite superior de A. Agora, pela definição de supremo, α é o menor de todos esses limites superiores, de onde segue que $\alpha \leqslant b$. Além disso, deve ser $\alpha > a$, pois do Lema anterior asegura a existência de algum $\delta > 0$ tal que f é limitada no conjunto $\{x : a \leqslant x < a + \delta\}$. Portanto, tem-se que $\alpha \in [a, b]$. Por *reductio ad absurdum*, suponha-se que $\alpha < b$. Como $\alpha \in [a, b]$, por hipótese, f é contínua em α. Pelo item (c) do lema anterior, existe $\delta > 0$ tal que f é limitada em $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Por outro lado, pela definição de supremo, deve existir $x_0 \in A$ tal que $\alpha - \delta < x_0 \leqslant \alpha$. Agora, $x_0 \in A$ significa que f é limitada em $[a, x_0]$. Se x_1 satisfaz $\alpha < x_1 < \alpha + \delta$, então f é limitada em $[x_0, x_1] \subseteq (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Desta maneira, f resulta limitada em $[a, x_1]$, de onde segue que $x_1 \in A$, contradizendo que $x_1 > \alpha = \sup A$. $\blacktriangledown$

Afirmação: $b \in A$. Em particular, f é limitada em $[a, b]$. $\triangledown$

Com efeito, pelo item (b) do lema anterior, existe $\delta > 0$ tal que f é limitada no conjunto $\{x : b - \delta < x \leqslant b\}$. Observe que $b = \alpha$ pela afirmação anterior. Portanto, deve existir algum $x_0 \in A$ em tal conjunto, ou seja, tal que $b - \delta < x_0 \leqslant b = \alpha = \sup A$, pois caso contrário $b - \delta$ seria um limite superior para A menor que $\sup A$, contradizendo a definição de supremo. Agora, $x_0 \in A$ significa que f é limitada em $[a, x_0]$. Como além disso f é limitada em $[x_0, b] \subseteq (b - \delta, b]$, tem-se que f é limitada em $[a, b]$. $\blacktriangledown$

Desta maneira, a prova da última afirmação conclui a demonstração do item (a).

(b) Segue trivialmente do resultado do item (a) anterior, aplicado à função $-f$. $\blacksquare$

19.2.3 Teorema: *Se f é contínua em $[a, b]$ então:*

(a) *Existe algúm $y \in [a, b]$ tal que $f(x) \leqslant f(y)$, $\forall\, x \in [a, b]$.*

(b) *Existe algúm $y \in [a, b]$ tal que $f(y) \leqslant f(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.* $\square$

Demonstração: **(a)** Como, por hipótese, f é contínua $[a, b]$, do teorema anterior tem-se f é limitada em $[a, b]$. Em particular, o conjunto A definido como:

$$A := \{f(x) : x \in [a, b]\},$$

é limitado superiormente. Como A é obviamente não-vazio, deve existir $\alpha := \sup A$. Desta maneira, tem-se que $\alpha \geqslant f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, bastando provar existe $y \in [a, b]$ tal que $f(y) = \alpha$. Por *reductio ad absrudum*, suponha-se que $f(y) \neq \alpha$ para todo $y \in [a, b]$. Em tal caso, pode ser definida a função g em $[a, b]$ como:

$$g(x) := \frac{1}{\alpha - f(x)}, \ \forall x \in [a, b].$$

Como $\alpha = \sup A$, da definição de supremo segue que para todo $\epsilon > 0$ existe $x \in [a, b]$ tal que:

$$\alpha - \epsilon < f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - f(x) < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\epsilon} < \frac{1}{\alpha - f(x)} = g(x).$$

Desta maneira, g não seria limitada superiormente. Eis uma contradição, pois sendo g bem definida e contínua em $[a, b]$, pelo teorema anterior deveria ser limitada. Portanto, deve existir $y \in [a, b]$ tal que $f(y) = \alpha \geqslant f(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

(b) Segue trivialmente do resultado do item (a) anterior, aplicado à função $-f$. ∎

19.2.4 Observação: **(a)** Em outras palabras, este último resultado expressa que toda função contínua em um intervalo *fechado* e *limitado*, ou seja, compacto, atinge um **valor máximo** e um **valor mínimo** em tal intervalo.

(b) Este resultado *deixa de ser válido* se o intervalo não for fechado ou limitado, ou se a função não for contínua. ♣

19.3 Funções Reais Contínuas em Conexos

19.3.1 Lema: *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

(a) *Suponha-se que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Em tal caso, tem-se:*

> ***1.*** *Se $f(a) < c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < c$ para todo x em $[a, a+\delta)$.*
>
> ***2.*** *Se $f(a) > c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > c$ para todo x em $[a, a+\delta)$.*

(b) *Suponha-se que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. Em tal caso, tem-se:*

> ***1.*** *Se $f(b) < c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < c$ para todo x em $(b-\delta, b]$.*
>
> ***2.*** *Se $f(b) > c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > c$ para todo x em $(b-\delta, b]$.*

(c) *Suponha-se que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja, que f é contínua em a. Em tal caso, tem-se:*

> ***1.*** *Se $f(a) < c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < c$ para todo x em $(a-\delta, a+\delta)$.*
>
> ***2.*** *Se $f(a) > c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > c$ para todo x em $(a-\delta, a+\delta)$.* □

Demonstração: **(a)** Por hipótese, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} 0 < x - a < \delta \quad &\Leftrightarrow \quad a < x < \delta + a, \\ |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon. \end{aligned}$$

Considere-se em primeiro lugar o caso $f(a) < c$. Tomando $\epsilon := c - f(a) > 0$, tem-se:

$$f(x) < f(a) + \epsilon = f(a) + c - f(a) = c, \ \ \forall\, a < x < \delta + a.$$

Observe que a relação acima também vale para $x = a$, pois $f(a) < c$ pela hipótese do presente caso. Portanto $f(x) < c$, para todo $a \leqslant x < a + \delta$.

Por outro lado, no caso $f(a) > c$, tomando $\epsilon := f(a) - c > 0$, tem-se:

$$c = f(a) - (f(a) - c) = f(a) - \epsilon < f(x), \ \ \forall\, a < x < \delta + a.$$

Observe que a relação acima também vale para $x = a$, pois $c < f(a)$ pela hipótese do presente caso. Portanto $c < f(x)$, para todo $a \leqslant x < a + \delta$.

(b) Por hipótese, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < b - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(b)| < \epsilon.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} 0 < b - x < \delta \quad &\Leftrightarrow \quad 0 > x - b > -\delta \quad \Leftrightarrow \quad b > x > b - \delta, \\ |f(x) - f(b)| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad f(b) - \epsilon < f(x) < f(b) + \epsilon. \end{aligned}$$

Considere-se em primeiro lugar o caso $f(b) < c$. Tomando $\epsilon := c - f(b) > 0$, tem-se:

$$f(x) < f(b) + \epsilon = f(b) + c - f(b) = c, \ \ \forall\, b - \delta < x < b.$$

Observe que a relação acima também vale para $x = b$, pois $f(b) < c$ pela hipótese do presente caso. Portanto $f(x) < b$, para todo $b - \delta < x \leqslant b$.

Por outro lado, no caso $f(b) > c$, tomando $\epsilon := f(b) - c > 0$, tem-se:

$$c = f(b) - (f(b) - c) = f(b) - \epsilon < f(x), \ \ \forall\, b - \delta < x < b.$$

Observe que a relação acima também vale para $x = b$, pois $c < f(b)$ pela hipótese do presente caso. Portanto $c < f(x)$, para todo $b - \delta < x \leqslant b$.

(c) A primeira propriedade segue dos itens (a.1) e (b.1), no entanto que a segunda dos itens (a.2) e (b.2). ∎

19.3.2 Teorema: *Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a) < c < f(b)$ então existe algum $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.* □

Demonstração: Seja A o conjunto definido como:

$$A := \{x \, : \, x \in [a, b] \ \wedge \ f(y) < c \ \ \forall\, y \in [a, x]\}\,.$$

Observe que $A \neq \emptyset$, pois $a \in A$. Além disso, A é limitado superiormente, pois $x \in A \Rightarrow x \in [a, b] \Rightarrow x \leqslant b$, por definição. Portanto, deve existir $\sup A =: \alpha$.

<u>Afirmação:</u> $\alpha \in [a, b]$. $\triangledown$

Obviamente $\alpha \leqslant b$, pois b é limite superior de A, sendo α o menor de tais limites superiores. Por outro lado, deve ser $\alpha > a$. Com efeito, como f é contínua em a, pelo item (a.1) do lema anterior, existe $\delta > 0$ tal que $f(y) < c$, para todo $y \in [a, a + \delta)$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, dado $b - a > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n\,(b - a) > \delta \quad \Leftrightarrow \quad a + \frac{\delta}{n} < b.$$

Portanto, $a + \delta/n \in A$, pois $[a, a + \delta/n] \subseteq [a, a + \delta)$, se $n \geqslant 2$. Desta maneira, tem-se que $a < a + \delta/n \leqslant \alpha$, ou seja, $\alpha > a$.

Incidentalmente, observe que, de fato, deve ser $\alpha < b$. Com efeito, como f é contínua em b, pelo item (b.2) do lema anterior, existe $\delta > 0$ tal que $f(y) > c$ para todo $y \in (b - \delta, b]$. Portanto, $x \in A \Rightarrow x \leqslant b - \delta$, pois se fosse $x > b - \delta$ para algum $x \in A$, obteria-se a contradição $f(y) < c$ para todo $y \in [b - \delta, x] \subseteq [a, x]$. ▼

Afirmação: $f(\alpha) = c$. ▽

Pela afirmação anterior e a hipótese, f é contínua em α. Se fosse $f(\alpha) < c$, pelo item (c.1) do lema anterior existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(x) < c, \ \forall\, x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta).$$

Como $\alpha - \delta < \alpha$, deve existir $x_0 \in A$ tal que $\alpha - \delta < x_0$, pois se fosse $x \leqslant \alpha - \delta$ para todo $x \in A$, teria-se que $\alpha - \delta$ seria um limite superior de A menor que α, contradizendo o fato de ser α o menor de tais limites superiores, pela definição de supremo. Portanto, como $x_0 \in A$, deve ser $x_0 \leqslant \alpha$, e além disso tem-se:

$$f(y) < c, \ \forall\, y \in [a, x_0].$$

Seja agora x_1 tal que $\alpha < x_1 < \alpha + \delta$. Em tal caso, tem-se:

$$f(y) < c, \ \forall\, y \in [x_0, x_1] \subseteq (\alpha - \delta, \alpha + \delta).$$

Combinando as duas últimas relações, teria-se que $f(y) < c$ para todo $y \in [a, x_1]$, ou seja, $x_1 \in A$. Contudo, por construção, tem-se que $x_1 > \alpha = \sup A$, contradizendo o fato que se $x_1 \in A$ então deveria ser $x_1 \leqslant \sup A$.

Analogamente, se fosse $f(\alpha) > c$, pelo item (c.2) do lema anterior existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(x) > c, \ \forall\, x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta).$$

Pelo mesmo argumento empregado anteriormente, deve existir $x_0 \in A$, com $\alpha - \delta < x_0 \leqslant \sup A = \alpha$, em cujo caso tem-se:

$$f(y) < c, \ \forall\, y \in [a, x_0].$$

Desta maneira, teria-se que:

$$f(y) < c, \ \forall\, y \in (\alpha - \delta, x_0] \subseteq (\alpha - \delta, \alpha + \delta),$$

contradizendo a anteúltima relação acima. Desta maneira, deve ser $f(\alpha) = c$, pela propriedade de tricotomia do corpo ordenado $\mathbb{R}$. ▼

Finalmente, combinando as duas afirmações precedentes, segue a conclusão do enunciado do presente teorema. ∎

Exercícios para o Capítulo 19

19.4 Continuidade das Funções Trigonométricas

19.4.1 Exercício: As funções sen e cos introduzidas na Seção 15.10 são contínuas não apenas em $a = 0$ mas em *todo o seu domíno de definição*, ou seja, em todo $\mathbb{R}$. Existem pelo menos duas maneiras de provar isso:

(a) Usando os resultados do exercício 18.6.1 e do exercício 18.12.3(a,b) conjuntamente com as fórmulas de adição:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+h) &= \operatorname{sen}(a)\cos(h) + \cos(a)\operatorname{sen}(h), \\ \cos(a+h) &= \cos(a)\cos(h) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(h); \end{aligned}$$

introduzidas no exercício 15.10.8.

(b) Usando os resultados do Teorema 18.1.13 e do exercício 18.12.3(a) conjuntamente com as fórmulas de diferências:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right); \\ \cos(x) - \cos(a) &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right). \end{aligned}$$

introduzidas no exercício 15.10.9 e as propriedades de limitação do exercício 15.10.2. ♣

19.4.2 Exercício: Usando o exercício anterior conjuntamente com os itens (b) e/ou (c) do Teorema 19.1.4, segundo corresponda, resulta simples provar a continuidade de todas as outras funções trigonométricas *no seu domínio de definição.* ♣

19.5 Contínuidade e Sequências

19.5.1 Exercício: **(a)** Uma função f é contínua em a se e somente se $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(a)$ para toda sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = a$.

Sugestão: Segue diretamente do exercício 18.8.1.

(b) Uma função f é contínua se e somente se $\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} s_n\right)$ para toda sequência convergente $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sugestão: Segue do item anterior. ♣

19.6 Algumas Propriedades Gerais da Funções Contínuas

19.6.1 Exercício: **(a)** Seja f uma função contínua. Então os conjuntos:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) < 0\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) > 0\}$$

são abertos.

Sugestão: considere $c = 0$ no Lema 19.3.1(c).

(b) Sejam f e g funções contínuas. Então os conjuntos:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) < g(x)\}$$
$$B := \{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) > g(x)\}$$

são abertos.

Sugestão: Observe-se que $f(x) < g(x)$ se e somente se $g(x) - f(x) > 0$ e use o item (a) anterior.

(c) Sejam f e g funções contínuas. Então o conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) = g(x)\}$$

é fechado.

Sugestão: Observe-se que o complemento do conjunto dado e precisamente $A \cup B$ que é uma união de abertos, pelo item (b) anterior, e portanto aberto.

(d) Em particular, se o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) = g(x)\}$ for denso, então $f \equiv g$. Ou seja, se duas funções contínuas coincidem num conjunto denso, então são iguais. ♣

19.6.2 Exercício: Forneça uma outra prova do item (d) do exercício anterior, partindo diretamente das definições. Ou seja, dadas f e g contínuas, prove que se o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) = g(x)\}$ for denso, então $f \equiv g$. ♣

19.7 Oscilação e Continuidade

Seja $\mathbb{R} \supset I$ *intervalo limitado* e seja $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ uma função *limitada*. Considerem-se as seguintes definições:

$$M(f, I) := \sup\{f(x) \,:\, x \in I\},$$
$$m(f, I) := \inf\{f(x) \,:\, x \in I\},$$
$$\omega(f, I) := M(f, I) - m(f, I).$$

Se $a \in I$ define-se a **oscilação**, ou o **pulo**, **de** f **em** a como:

$$\omega(f,a) := \inf\{\omega(f, J\cap I) \,:\, J \text{ aberto } \wedge\ a \in J\}\,.$$

Observe que $\omega(f,a)$ está bem definido, pois, como $\omega(f, J\cap I) \geqslant 0$, o conjunto em questão está limitado inferiormente por 0. A aplicação $a \longmapsto \omega(f,a)$ recebe o nome de **função oscilação**, ou **função pulo**, de f.

19.7.1 Exercício: Prove que:

(a) f é contínua em a se e somente se $\omega(f,a) = 0$. Em particular, f não contínua em a implica $\omega(f,a) > 0$.

(b) Se $\omega(f,I) = 0$, então f é *constante* em I.

(c) Para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, \omega(f,x) < a\}$ é aberto.

(d) Seja $\mathbb{R} \supseteq A$ fechado. Para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in A \,:\, \omega(f,x) \geqslant a\}$ é fechado. ♣

19.7.2 Exercício: **(a)** Seja f uma função. Então o conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ é contínua em } x\}$$

é um G_δ, ou seja, interseção numerável de abertos.

Sugestão: Observe-se que:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ é contínua em } x\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \omega(f,x) = 0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \omega(f,x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

(b) Em particular, não existe nenhma função a valores reais f definida em $\mathbb{R}$ tal que:

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ é contínua em } x\} = \mathbb{Q}.$$

(c) Existe alguma função a valores reais f definida em $\mathbb{R}$ tal que o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ é descontínua em } x\}$$

seja igual a $\mathbb{Q}$?

Sugestão: Considere a função do exemplo 18.1.10.

(d) Existe alguma função a valores reais f definida em algum intervalo tal que o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} \,:\, f \text{ é contínua em } x\}$$

se reduz apenas a um ponto?

Sugestão: Considere as funções dos exercícios 18.7.2 e 18.7.3. ♣

19.8 Automorfismos Contínuos do Grupo $(\mathbb{R}, +)$

Considere-se uma função $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

19.8.1 Exercício: Considere os seguintes itens sequencialmente.

(a) Prove que $f(0) = 0$.

Sugestão: Considere $x = y = 0$.

(b) Prove que $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Prove que dado $m \in \mathbb{N}$ arbitrário, tem-se que $f(mx) = m\, f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Utilize os itens (c) e (b) anteriores para extender a relação $f(mx) = m\, f(x)$ com $x \in \mathbb{R}$ arbitrário, para todo inteiro $m \in \mathbb{Z}$.

(e) Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $f(1/n) = f(1)/n$.

(f) Finalmente, combine os dois itens (d) e (e) anteriores para provar que que $f(r) = r f(1)$ para todo racional $r \in \mathbb{Q}$. ♣

19.8.2 Exercício: Suponha agora que adicionalmente a função f é *contínua* em $\mathbb{R}$. Então $f(x) = x\, f(1)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Seja $x \in \mathbb{R}$ arbitrário. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, existe uma sequência de racionais r_n tal que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Como f é contínua, pelo exercício 19.5.1(a) ou (b) tem-se:

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n\, f(1) = \left(\lim_{n\to\infty} r_n\right)\, f(1) = x\, f(1).$$ ♣

Em outras palavras, todo automorfismo contínuo em $(\mathbb{R}, +)$ é da forma $f(x) = x f(1)$. Compare-se com o resultado do Lema 13.3.3. Historicamente, esse resultado é devido a Cauchy e a prova apresentada na presente seção é independiente do resultado do Lema 13.3.2.

19.9 Morfismos Contínuos de $(F, +)$ em $(P, .)$

Os morfismos do grupo aditivo $(F, +)$ no grupo multiplicativo $(P, \,.\,)$ dos elementos positivos do corpo F foram introduzidos no exercício 12.7.1 e consistem em aplicações $f : F \longmapsto P$ satisfazendo:

$$f(x + y) = f(x)\, f(y), \;\; \forall\, x, y \in F.$$

Decorre dos Lemas 12.4.2 e 12.4.3 que a função $\exp_a$ é um exemplo de tal morfismo.

19.9.1 Exercício: Um morfismo de $(F, +)$ em $(P, .)$ é contínuo se e somente se é contínuo na origem.

Sugestão: A parte $(\Rightarrow)$ é trivial. Para a parte $(\Leftarrow)$, se f é nulo o enunciado é evidentemente verdadeiro. Suponha-se então que f é não nulo. Em tal caso, pode inspirar-se no exercício 18.9.1(b), via o exercício 18.6.1, arrematando com o exercício 12.7.1(b). ♣

Observe-se que o resultado do referido exercício 18.9.1 no seu item (a) afirma que $\exp_a$ é contínua na origem, sendo portanto tal função um exemplo de morfismo *contínuo*. Que isso não é mero produto do acaso, é uma consequência do exercício a seguir, o que confere a tal exemplo um carater completamente paradigmático.

19.9.2 Exercício: Seja f morfismo *não nulo* de $(F, +)$ em $(P, .)$. Prove que se f é adicionalmente *contínuo*, então $f = \exp_{f(1)}$.

Sugestão: Pelo exercício 12.7.1(j), dois de tais morfismos devem coincidir em $\mathbb{Q}_F$, que é um conjunto denso em F. Pelo exercício 18.9.1(b), sabe-se que a função exponencial é contínua. Portanto, basta agora aplicar o resultado do exercício 19.6.1(d), ou do exercício 19.6.2. ♣

Usando técnicas análogas às introduzidas no Capítulo 13, resulta possível demonstrar a existência de tais morfismos *não contínuos*.

19.10 Funções Conexas

19.10.1 Definição: Uma função f será denominada **conexa** se $f(C)$ é conexo, para todo C conexo. Ou seja, uma função é conexa se a imagem por f de todo conjunto conexo contido no seu domínio resulta ser um conjunto conexo. ♣

19.10.2 Exercício: Prove que toda função contínua é conexa.

Sugestão: Isso segue quase trivialmente do Teorema 19.3.2. ♣

A recíproca do resultado do exercício anterior não é válida. Ou seja, o fato de uma função ser conexa não garante a sua continuidade, como mostram os exemplos a seguir.

19.10.3 Exercício: Considere a função f definida no intervalo $(-1, 1)$ como:

$$f(x) := \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right), & \text{se } 0 < |x| < 1; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Observe que a função f toma todos os valores entre -1 e 1, inclusive infinitas vezes, mas não é contínua em $x = 0$, pois $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nem siquer existe. ♣

O próximo exemplo mostra que o fato de ser f injetora, ou seja:

$$f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; a = b,$$

também não garante a continuidade para uma função conexa.

19.10.4 Exercício: Sejam $a, b \in [0,1]$ com $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Considere a função f definida no intervalo $[0,1]$ como:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{se } x \neq a \text{ e } x \neq b; \\ b, & \text{se } x = a; \\ a, & \text{se } x = b. \end{cases}$$

Observe que a função f é injetora e toma todos os valores entre 0 e 1, mas não é contínua em $x = a$, pois $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a \neq b = f(a)$, nem em $x = b$, pois $\lim\limits_{x \to b} f(x) = b \neq a = f(b)$. ♣

19.10.5 Exercício: Considere a função f definida no intervalo $[0,1]$ como:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0; \\ 1 - x, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Observe que a função f é injetora e toma todos os valores entre 0 e 1, mas não é contínua em $x = 0$, pois $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$, nem em $x = 1$, pois $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$. ♣

Para funções *monótonas* a conexidade resulta equivalente à continuidade. Vide Capítulo 29.

19.11 Continuidade Uniforme

Uma função f é contínua num domínio $A \subseteq \mathbb{R}$ se resulta contínua em x para todo $x \in A$. Ou seja, se para cada $x \in A$, tem-se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\epsilon, x) > 0 \quad : \quad |y - x| < \delta(\epsilon, x) \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Contudo, em certos casos, como na função linear $f(x) = ax + b$, onde tem-se:

$$|f(y) - f(x)| = |a|\; |x - y|\,,$$

por exemplo, o número positivo δ não depende de x, mas apenas de ϵ. Esse tipo de comportamento foi destacado com uma definição aparte.

19.11.1 Definição: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Uma função é dita **uniformemente** contínua em A se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\epsilon) > 0 \quad : \quad |y - x| < \delta(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$ ♣

19.11.2 Exercício: Prove que toda função uniformemente contínua é contínua. ♣

A recíproca deste último resultado é falsa, como mostram os exemplos do seguinte exercício.

19.11.3 Exercício: Prove que as seguintes funções *não* são uniformemente contínuas:

(a) $f(x) = 1/x$, em nenhum intervalo $A \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Sugestão: Para qualquer $\delta > 0$ arbitrário mas fixo, $|f(x+\delta) - f(x)|$ toma valores arbitrariamente grandes quando x está suficientemente perto de 0.

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$, em $(0,1)$. Observe-se, de pasagem, que esta função é limitada em tal domínio.

Sugestão: Para qualquer $\delta > 0$ arbitrário mas fixo, $|f(x+\delta) - f(x)|$ não pode ser feito estrictamente menor que 1 se x está suficientemente perto de 0. ♣

Uma condição suficiente para a continuidade uniforme de uma função contínua é fornecida pelo resultado a seguir.

19.11.4 Exercício: Prove que:

(a) Toda função f contínua em um *intervalo compacto* $K = [a,b]$ é uniformemente contínua.

Sugestão: Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Como f é contínua em K, sabe-se que para cada $x \in K$ existe $\delta(\epsilon, x) > 0$ tal que:

$$|y - x| < \delta(\epsilon, x) \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \epsilon/4.$$

Seja $A_x := (x - \delta(\epsilon, x), x + \delta(\epsilon, x))$. Então $\bigcup_{x \in K} A_x$ é um cobrimento aberto de K, e pela compacidade tem-se que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{x_i}.$$

Então $\delta(\epsilon) := 2 \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\delta(\epsilon, x_i)\}$ faz o serviço da definição de continuidade uniforme. Para tanto, observe-se que se $|y - x| < \delta(\epsilon)$, então x e y pertencem ao mesmo intervalo aberto A_{i_0} ou então a dois diferentes com interseção não vazia.

Alternativamente, $\delta(\epsilon)$ pode ser escolhido como o número de Lebesgue do cobrimento. Em tal caso, se $|y - x| < \delta(\epsilon)$, então x e y pertencem ao mesmo membro do cobrimento.

(b) Generalize o resultado do item anterior para compactos arbitrários, não necesariamente intervalos, com interior não vazio.

Sugestão: Utilize o resultado do exercício 17.5.1(b). ♣

Em [17, Vol I, p. 390], o resultado do item (a) do exercício anterior é denominado Teorema de Heine-Cantor.

19.12 Extensões Contínuas de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$

Considerem-se funções contínuas definidas em $\mathbb{Q}$ com a topologia relativa de $\mathbb{R}$ e a valores em $\mathbb{R}$ com a topologia usual.

19.12.1 Exercício: Considere a função $f : \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) := \frac{1}{x - \sqrt{2}}.$$

(a) Prove que f está definida e é contínua em todo $\mathbb{Q}$. Observe-se que deve-se provar que $\lim_{x \to r} f(x) = f(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$ (portanto não pode ser $r = \sqrt{2}$).

(b) Não existe uma extensão contínua da f de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$. Observe-se que uma tal extensão não seria contína em $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ pois, agora sim, $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x)$ não existe, pelo fato de $f(x)$ não ser limitada numa vizinhança de $\sqrt{2}$. ♣

19.12.2 Exercício: Sob que condições é possível uma extensão de uma função f de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ que preserve a continuidade? ♣

Sugestão: Por que a presente seção sucede a anterior e não o contrário?

19.12.3 Exercício: Se f é contínua e $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então a sequência $f(s_n)$ *não* é de Cauchy em geral, como mostram os seguintes exemplos.

(a) Seja $f(x) = 1/x$, para $x \in (0, +\infty)$, e $s_n = 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em tal caso, $f(s_n) = f(1/n) = n$ nem siquer é limitada.

(b) Mesmo que f seja limitada, o *status quo* persiste. Com efeito, seja $f(x) = \cos(\pi/x)$, para $x \in (0, +\infty)$, e $s_n = 1/n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em tal caso, tem-se:

$$\begin{aligned} f(s_{2n}) &= f(1/2n) = \cos(2n\pi) = 1, \\ f(s_{2n+1}) &= f(1/(2n+1)) = \cos((2n+1)\pi) = -1. \end{aligned}$$

Portanto, $f(s_n)$ não é convergente. ♣

19.13 Continuidade Absoluta

19.13.1 Definição: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Uma função é dita **absolutamente** contínua em A se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\epsilon) > 0 \quad : \quad \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon,$$

para toda coleção de intervalos $(a_i, b_i) \subseteq A$ tal que $\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta$. ♣

19.13.2 Exercício: Prove que no intervalo $[0,1]$ as seguintes funções são absolutamente contínuas:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) $g(x) := \begin{cases} x^2 \left|\cos \pi/x\right|, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$ ♣

19.13.3 Exercício: Toda função absolutamente contínua é uniformemente contínua (e portanto contínua). ♣

A recíproca deste último resultado é falsa, como mostra o seguinte exemplo.

19.13.4 Exercício: Prove que a função definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x\sqrt{|\cos \pi/x|}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

não é absolutamente contínua em $[0,1]$, embora seja uniformemente contínua em tal intervalo. Observe-se que $h = f \circ g$, onde f e g são as funções do exercício 19.13.2. ♣

19.14 O Lema do Sol Nascente

19.14.1 Definição: Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Um ponto x recebe o nome de **ponto de sombra** de f se existe algum $y \in \mathbb{R}$ com $y > x$ tal que $f(y) > f(x)$. ♣

19.14.2 Exercício: O conjunto de pontos de sombra de uma função contínua é aberto.

Sugestão: Se x é ponto de sombra, então existe $y > x$ tal que $f(y) > f(x)$. Pelo Lema 19.3.1(c.1), existe $\delta > 0$ tal que $f(y) > f(\xi)$ para todo $\xi \in (x-\delta, x+\delta)$. Seja então $0 < \rho \leqslant \min\{\delta, y-x\}$. Então $y > \xi$ e $f(y) > f(\xi)$ para todo $\xi \in (x-\rho, x+\rho)$. ♣

Pela Proposição 17.4.1, sabe-se então que o conjunto de pontos de sombra é união disjunta numerável de intervalos (a,b) com a e b não sendo pontos de sombra.

19.14.3 Exercício: Seja (a,b) um intervalo e suponha-se que todos os seus pontos são pontos de sombra, mas que a e b não são.

(a) Prove que se $x \in (a, b)$, então o conjunto A definido por:

$$A := \{y \in \mathbb{R} \,:\, x < y \leqslant b \ \wedge\ f(x) < f(y)\}$$

é não vazio.

(b) Prove que se $x \in (a, b)$, então $f(x) \leqslant f(b)$.

Sugestão: Se $x \in (a, b)$ é de sombra, então existe $y > x$ tal que $f(y) > f(x)$. Se todos tais y fossem maiores que b, então o resultado é obvio, pois $f(b) \geqslant f(y) > f(x)$, para todo $y > b$, pelo fato de b não ser de sombra. Caso contrário, o conjunto A do item anterior deveria ser não vazio (como de fato é, segundo estabelecido no item anterior). Além disso, por definição, A é obviamente limitado superiormente por b. Portanto, existe $\sup A$. Basta então provar que $f(\sup A) \geqslant f(x)$ e que $\sup A = b$.

(c) Prove agora que $f(a) \leqslant f(b)$.

Sugestão: Isso segue facilmente da continuidade e do item (b) anterior.

(d) Finalmente, com o resultado do item (c) anterior, e usando o fato que a não é um ponto de sombra, prove que $f(a) = f(b)$. ♣

19.14.4 Exercício: **(a)** Examinando a prova do exercício anterior, observe-se que para a validade do resultado não é necessário que a função seja contínua em cada ponto z mas basta apenas a existência dos limites laterais $\lim\limits_{x \to z^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to z^+} f(x)$.

(b) Se f é contínua, ou com limites laterais, em $[\alpha, \beta]$ os resultados dos dois exercícios anteriores continuam sendo válidos com modificações triviais. Na verdade o único ponto problemático é o α. Dependendo da f, o ponto α poderá ser de sombra ou não. Se ele não é de sombra os resultados continuam válidos sem modificação. No entanto, se α é de sombra, o conjunto de tais pontos conterá o intervao semi-aberto $[\alpha, b)$, para algum b. Em tal caso, no exercício 19.14.3 o resultado do último item não é válido, mas todos os anteriores sim. Ou seja, em geral tem-se que $f(a) \leqslant f(b)$, com possível desigualdade estricta $<$ no caso de $a = \alpha$, mas com igualdade no caso dos outros intervalos abertos que constituem o conjunto de pontos de sombra.

(c) Idênticas considerações aplicam-se no caso em que α é $-\infty$. O ponto β também pode ser $+\infty$, mas isso não modifica em nada a validade dos resultados anteriores. ♣

Coletando as observações e resultados anteriores, resulta simples verificar o seguinte resultado.

19.14.5 Lema (do Sol Nascente)**:** *Seja f uma função contínua em $[\alpha, \beta]$. Se o conjunto de pontos de sombra de f é não vazio, então é união disjunta numerável de abertos (a, b). Mais ainda, em tal caso, para cada um desses intervalos tem-se $f(a) \leqslant f(b)$.* □

O Lema do Sol Nascente é utilizado na prova de alguns belos resultados, como por exemplo no famoso teorema de Lebesgue sobre a diferenciabilidade em quase todo ponto das funções monótonas. Este resultado será reproduzido no Capítulo 29. Vide Teorema 29.2.9.

Capítulo 20

Limite Superior e Inferior

20.1 Limite Superior e Inferior de Conjuntos

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto de números reais.

20.1.1 Definição: Um número real $u \in \mathbb{R}$ é denominado **quase limite superior** do conjunto A se $x \leqslant u$ para todos exceto uma quantidade finita de $x \in A$.

Analogamente, $u \in \mathbb{R}$ é denominado **quase limite inferior** do conjunto A se $u \leqslant x$ para todos exceto uma quantidade finita de $x \in A$.

Denotam-se por U_A e L_A os conjuntos de quase limites superiores e inferiores do conjunto A, respectivamente. ♣

20.1.2 Exemplo: Para os seguintes conjuntos, resulta simples verificar:

(a) Se $A := \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, então $U_A = (0, +\infty)$ e $L_A = (-\infty, 0]$.

(b) Se $A := \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\right\}$, então $U_A = (0, +\infty)$ e $L_A = (-\infty, 0)$.

(c) Se $A := \left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$, então $U_A = (1, +\infty)$ e $L_A = (-\infty, -1]$. ♣

20.1.3 Observação: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto *infinito* e *limitado*. Ou seja, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leqslant x \leqslant M$, $\forall\, x \in A$. Então:

(a) U_A é não vazio, pois $M \in U_A$, e limitado inferiormente, pois $u \in U_A \Rightarrow m < u$ pelo fato de ser A infinito.

(b) Analogamente L_A é não vazio, pois $m \in L_A$, e limitado superiormente, pois $l \in L_A \Rightarrow l < M$ pelo fato de ser A infinito. ♣

A observação anterior motiva a definição a seguir.

20.1.4 Definição: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto infinito e limitado.
Define-se o **limite superior** do conjunto A como $\limsup A := \inf U_A$.
Analogamente, define-se o **limite inferior** do conjunto A como $\liminf A := \sup L_A$. ♣

20.1.5 Exemplo: Com os conjuntos do exemplo anterior, resulta simples verificar:

(a) Se $A := \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, então $\limsup A = 0 = \liminf A$.

(b) Se $A := \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\right\}$, então $\limsup A = 0 = \liminf A$.

(c) Se $A := \left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$, então $\limsup A = 1$ e $\liminf A = -1$. ♣

20.1.6 Proposição: *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto infinito e limitado. Então:*

(a) $\liminf A \leqslant \limsup A$.

(b) $\limsup A \leqslant \sup A$ *e* $\inf A \leqslant \liminf A$.

(c) *Se* $\limsup A < \sup A$, *então A possui um máximo. Ou seja,* $\sup A \in A$.

(d) *Analogamente, se* $\inf A < \liminf A$, *então A possui um mínimo. Ou seja,* $\inf A \in A$. □

Demonstração: **(a)** Em primeiro lugar, observe que se $l \in L_A$ e $u \in U_A$, então deve ser $l < u$. Com efeito, se fosse $l \geqslant u$, como A é infinito e $u \in U_A$, existiriam infinitos $x \in A$ tais que $x \leqslant u \leqslant l$, ou seja, existiriam infinitos $x \in A$ tais que $x \leqslant l$, contradizendo o fato que $l \in L_A$ é um quase limite inferior. Assim, como $l < u$, para todo $l \in L_A$, $u \in U_A$, tem-se que $l \leqslant \limsup A$, para todo $l \in L_A$, pois $\limsup A = \inf U_A$. Portanto, $\liminf A \leqslant \limsup A$, pois $\liminf A = \sup L_A$.

(b) Por definição, tem-se que $\limsup A = \inf U_A \leqslant u$, para todo $u \in U_A$. Agora, como:

$$U_A \supseteq \{y \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant y,\ \ \forall\, x \in A\} =: V_A,$$

deve ser $\limsup A \leqslant y$, para todo $y \in V_A$. Portanto, $\limsup A \leqslant \sup A$, pois $\sup A \in V_A$, pelo fato de ser um limite superior (aliás, o menor de tais limtes superiores).

(c) Se $\limsup A < \sup A$, então deve existir $x \in A$ tal que $\limsup A < x \leqslant \sup A$. Com efeito, se fosse $\limsup A \geqslant x$ para todo $x \in A$, então $\limsup A$ seria um limite superior de A, de onde, pela definição de supremo, teria-se que $\sup A \leqslant \limsup A$,contradizendo a hipótese. Desta maneira, como $\limsup A < x$, deve existir $u \in U_A$ tal que $\limsup A \leqslant u < x$. Com efeito, se fosse $x \leqslant u$ para todo $u \in U_A$, então, pela definição de ínfimo, seria $x \leqslant \inf U_A = \limsup A$, contradizendo que $\limsup A < x$. Portanto, como $u \in U_A$ é um quase limite superior, existe uma quantidade finita, digamos $x_1, \ldots, x_n$, de $x_i \in A$ tais que $u < x_i$. Portanto, $\max A = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$.

(d) A prova é análoga à demonstração do item anterior. ∎

20.1.7 Observação: Para todo $\epsilon > 0$, existe uma quantidade *finita* de elementos de A que não pertencem ao conjunto $(\limsup A - \epsilon, \limsup A + \epsilon)$. A prova utiliza o mesmo tipo de argumento empregado na demonstração do item (c) do resultado precedente. ♣

20.1.8 Proposição: *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto infinito e limitado. Então:*

(a) *$\limsup A$ é um ponto de acumulação do conjunto A.*

(b) *De fato, é o maior de tais pontos.* □

Demonstração: **(a)** Por uma questão de brevidade, denota-se:

$$\begin{aligned} a &:= \limsup A, \\ B_\epsilon(a) &:= (a - \epsilon, a + \epsilon). \end{aligned}$$

Para provar o resultado enunciado, basta demonstrar que para todo $\epsilon > 0$ existem infinitos elementos de A em $B_\epsilon(a)$. Seja então $\epsilon > 0$ arbitrário.

<u>Afirmação:</u> Existe apenas uma quantidade *finita* de elementos $x \in A$ tais que $x \geqslant a + \epsilon$. ▽

Como $a = \limsup A = \inf U_A$, pela definição de ínfimo, existe $y \in U_A$ tal que $y < a + \epsilon$. Portanto, como $y \in U_A$ é um quase limite superior, existe apenas uma quantidade finita de elementos de $x \in A$ tais que $x > y$. Em particular, existe apenas uma quantidade finita de elementos de $x \in A$ tais que $x \geqslant a + \epsilon > y$. ▼

<u>Afirmação:</u> Existe uma quantidade *infinita* de elementos $x \in A$ tais que $x > a - \epsilon$. ▽

Se existise apenas uma quantidade finita de elementos $x \in A$ tais que $x > a - \epsilon$, então $a - \epsilon \in U_A$. Portanto, $a = \inf U_A \leqslant a - \epsilon$, obviamente uma contradição. ▼

Finalmente, combinando as duas afirmações precedentes, tem-se que existe uma quantidade infinita de elementos de A em $B_\epsilon(a)$.

(b) Seja x ponto de acumulação do conjunto A. Seja $y \in U_A$. Suponha-se que $y < x$. Como $y \in U_A$, existe apenas uma quantidade finita de elementos $z \in A$ tais que $z > y$. Por outro lado, como x é ponto de acumulação de A, para todo $\epsilon > 0$ deve existir uma quantidade infinita de elementos de A no aberto $B_\epsilon(x)$. Em particular, considerando $\epsilon = x - y > 0$, obtém-se uma contradição. Desta maneira, deve ser $x \leqslant y$, para todo $y \in U_A$. Portanto, pela definição de ínfimo, tem-se que $x \leqslant \inf U_A = \limsup A$. ∎

O seguinte resultado é o análogo do anterior, para limites inferiores.

20.1.9 Proposição: *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto infinito e limitado. Então:*

(a) $\liminf A$ *é um ponto de acumulação do conjunto* A.

(b) *De fato, é o menor de tais pontos.* □

Demonstração: Análoga à prova do resultado anterior. ∎

20.2 Limite Superior e Inferior de Sequências

Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais.

20.2.1 Definição: Para cada $k \in \mathbb{R}$ definem-se:

$$a_k := \sup\{s_k, s_{k+1}, \dots\},$$
$$b_k := \inf\{s_k, s_{k+1}, \dots\}.$$ ♣

20.2.2 Observação: Com as definições precedentes, tem-se:

(a) Os a_k formam uma sequência não-crescente. Ou seja:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots a_k \geqslant a_{k+1} \geqslant \cdots .$$

(b) Os b_k formam uma sequência não-decrescente. Ou seja:

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant \cdots b_k \leqslant b_{k+1} \leqslant \cdots .$$

(c) $b_k \leqslant a_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. ♣

20.2.3 Definição: Define-se o **limite superior** $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n$ da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Ou seja:

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} s_k.$$

Analogamente, define-se o seu **limite inferior** como $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Ou seja:

$$\liminf_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} s_k.$$ ♣

20.2.4 Lema: *Seja* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência. Então:*

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(-s_n) = -\liminf\limits_{n\to\infty} s_n$. □

Demonstração: **(a)** Por *reductio ad absurdum*, negando o resultado enunciado, tem-se:

$$\liminf_{n\to\infty} s_n > \limsup_{n\to\infty} s_n \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geqslant n} s_k\right) > \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geqslant n} s_k\right)$$
$$\Rightarrow \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \sup_{k\geqslant n_0} s_k < \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geqslant n} s_k\right) \quad \Rightarrow \quad \exists\ m_0 \in \mathbb{N} : \sup_{k\geqslant n_0} s_k < \inf_{k\geqslant m_0} s_k.$$

Ou seja, existem $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tais que $a_{n_0} < b_{m_0}$. Se fosse $n_0 < m_0$, então teria-se:

$$a_{m_0} \leqslant a_{m_0-1} \leqslant a_{m_0-2} \leqslant \cdots \leqslant a_{n_0} < b_{m_0}.$$

Portanto, $a_{m_0} < b_{m_0}$, contradizendo que $a_k \geqslant b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se fosse $n_0 = m_0$, então $a_{m_0} = a_{n_0} < b_{m_0}$. Portanto, $a_{m_0} < b_{m_0}$, contradizendo que $a_k \geqslant b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Finalmente, no caso $n_0 > m_0$, teria-se:

$$a_{n_0} < b_{m_0} \leqslant b_{m_0+1} \leqslant b_{m_0+2} \leqslant \cdots \leqslant b_{n_0}.$$

Portanto, $a_{n_0} < b_{n_0}$, contradizendo que $a_k \geqslant b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sejam a_n e b_n definidos respectivamente como:

$$a_n := \sup_{k\geqslant n}(-s_k),$$
$$b_n := \inf_{k\geqslant n} s_k.$$

Com as definições precedentes, tem-se:

$$b_n = \inf_{k\geqslant n} s_k \leqslant s_k,\ \forall k \geqslant n \quad \Rightarrow \quad -b_n \geqslant -s_k,\ \forall k \geqslant n$$
$$\Rightarrow \quad a_n = \sup_{k\geqslant n}(-s_k) \leqslant -b_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant a_m \leqslant -b_m,\ \forall m \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \quad b_m \leqslant -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n,\ \forall m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sup_{m\in\mathbb{N}} b_m \leqslant -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$$
$$\Rightarrow \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant -\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty}(-s_n) \leqslant -\liminf_{n\to\infty} s_n.$$

Portanto:

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leqslant -\limsup_{n\to\infty}(-s_n). \tag{20.2.1}$$

Por outro lado, sejam agora a_n e b_n definidos respectivamente como:

$$a_n := \sup_{k\geqslant n} s_k,$$
$$b_n := \inf_{k\geqslant n}(-s_k).$$

Com as definições precedentes, tem-se:

$$s_k \leqslant \sup_{k\geqslant n} s_k = a_n,\ \forall k \geqslant n \quad \Rightarrow \quad -s_k \geqslant -a_n,\ \forall k \geqslant n$$
$$\Rightarrow \quad b_n = \inf_{k\geqslant n}(-s_k) \geqslant -a_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n \geqslant b_m \geqslant -a_m,\ \forall m \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \quad -\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n \leqslant a_m,\ \forall m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad -\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n \leqslant \inf_{m\in\mathbb{N}} a_m$$
$$\Rightarrow \quad -\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n \quad \Rightarrow \quad -\limsup_{n\to\infty} s_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}(-s_n).$$

Portanto, substituindo s_n por $-s_n$ na última relação acima, tem-se:

$$-\limsup_{n\to\infty}(-s_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty}(s_n). \tag{20.2.2}$$

Desta maneira, combinando as relações (20.2.1) e (20.2.2), tem-se:

$$\liminf_{n\to\infty} s_n \leqslant -\limsup_{n\to\infty}(-s_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} s_n,$$

ou seja, $\limsup_{n\to\infty}(-s_n) = -\liminf_{n\to\infty} s_n$. ∎

20.2.5 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, $\lim_{n\to\infty} s_n$ existe e vale s se e somente se $\limsup_{n\to\infty} s_n$ e $\liminf_{n\to\infty} s_n$ existem ambos e são iguais, com valor comun s.* □

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \Rightarrow |s - s_n| < \epsilon/2.$$

Em particular, observando que se $n \geqslant N$ então $k \geqslant n \geqslant N$, tem-se:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s - a_n = s - \sup_{k\geqslant n} s_k \leqslant s - s_k \leqslant |s - s_k| < \epsilon/2. \tag{20.2.3}$$

Por outro lado, também em particular:

$$k \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_k - s \leqslant |s_k - s| < \epsilon/2 \quad \Rightarrow \quad s_k < s + \epsilon/2.$$

Portanto, observando que se $n \geqslant N$, então $\{k : k \geqslant n\} \subseteq \{k : k \geqslant N\}$, segue:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad a_n = \sup_{k\geqslant n} s_k \leqslant \sup_{k\geqslant N} s_k \leqslant s + \epsilon/2 \quad \Rightarrow \quad a_n - s \leqslant \epsilon/2$$
$$\Rightarrow \quad -\epsilon/2 \leqslant s - a_n. \tag{20.2.4}$$

Desta maneira, combinando as relações (20.2.3) e (20.2.4), tem-se:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |s - a_n| \leqslant \epsilon/2. \tag{20.2.5}$$

Análogamente, observando que se $n \geqslant N$, então $k \geqslant n \geqslant N$, tem-se:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad b_n - s = \inf_{k\geqslant n} s_k - s \leqslant s_k - s \leqslant |s_k - s| < \epsilon/2. \tag{20.2.6}$$

Por outro lado, também em particular:

$$k \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s - s_k \leqslant |s_k - s| < \epsilon/2 \quad \Rightarrow \quad s - \epsilon/2 \leqslant s_k.$$

Portanto, observando que se $n \geqslant N$, então $\{k : k \geqslant n\} \subseteq \{k : k \geqslant N\}$, segue:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s - \epsilon/2 \leqslant \inf_{k\geqslant N} s_k \leqslant \inf_{k\geqslant n} s_k = b_n \quad \Rightarrow \quad s - b_n \leqslant \epsilon/2$$
$$\Rightarrow \quad -\epsilon/2 \leqslant b_n - s. \tag{20.2.7}$$

Desta maneira, combinando as relações (20.2.6) e (20.2.7), tem-se:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad |b_n - s| \leqslant \epsilon/2. \tag{20.2.8}$$

Agora, combinando as relações (20.2.5) e (20.2.8), tem-se:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad a_n - b_n \leqslant |a_n - b_n| \leqslant |a_n - s| \ + \ |s - b_n| \leqslant \epsilon/2 \ + \ \epsilon/2 = \epsilon.$$

Em resumo, como $\epsilon > 0$ era abitrário, até aqui foi provado que:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\epsilon) \ : \ n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad a_n - b_n \leqslant \epsilon. \tag{20.2.9}$$

Por outro lado, pelo Lema 20.2.4(a), tem-se:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = \liminf_{n\to\infty} s_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Se fosse $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n < \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$, teria-se:

$$a_n - b_n \geqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n - \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n =: \delta > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, considerando $0 < \epsilon < \delta$ em (20.2.9), existiria $N = N(\delta)$ tal que:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad a_n - b_n \leqslant \epsilon < \delta.$$

Porém, a última relação contradiz a ante-última, onde foi estabelecido que $a_n - b_n \geqslant \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha-se:

$$s = \limsup_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n,$$
$$s = \liminf_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n.$$

Da primeira relação acima, utilizando a definição de ínfimo, tem-se que para todo $\epsilon > 0$ existe $k_0 = k_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a_{k_0} < s + \epsilon \quad \Rightarrow \quad s_n \leqslant \sup_{n\geqslant k_0} s_n = a_{k_0} < s + \epsilon \quad \Rightarrow \quad s_n < s + \epsilon, \ \forall n \geqslant k_0.$$

Análogamente, da segunda relação, utilizando a definição de supremo, tem-se que para todo $\epsilon > 0$ existe $j_0 = j_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$s - \epsilon < b_{j_0} \quad \Rightarrow \quad s - \epsilon < b_{j_0} = \inf_{n\geqslant j_0} s_n \leqslant s_n \quad \Rightarrow \quad s - \epsilon < s_n, \ \forall n \geqslant j_0.$$

Se $N \geqslant \max\{k_0, j_0\}$, então:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s - \epsilon < s_n < s + \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\epsilon < s_n - s < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |s_n - s| < \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existe e vale s. ∎

20.2.6 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência não-negativa, ou seja, $s_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$ se e somente se $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n \leqslant 0$.* □

Demonstração: ($\Rightarrow$) Pelo lema anterior, o valor do limite deve coincidir com o do limite superior, portanto:

$$0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 0.$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, utilizando a não-negatividade da sequência, tem-se:

$$s_n \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant \inf_{k\geqslant n} s_k = b_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant b_n \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n.$$

Portanto, utilizando a hipótese que o limite superior não é positivo, tem-se:

$$\liminf_{n\to\infty} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n \geqslant 0 \geqslant \limsup_{n\to\infty} s_n \geqslant \liminf_{n\to\infty} s_n.$$

Observe que a última desigualdade acima decorre do Lema 20.2.4(a). Ou seja, tem-se:

$$\liminf_{n\to\infty} s_n = \limsup_{n\to\infty} s_n = 0.$$

Desta maneira, pelo lema anterior, existe $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ e vale 0. ∎

20.2.7 Lema: *Suponha $a \in \mathbb{R}$, ou seja, a* finito. *Dada a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, considere as seguintes condições:*

1. $a = \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$.
2. *Para todo $\epsilon > 0$, são satisfeitas as seguintes duas propriedades:*
   - *Existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \Rightarrow s_n < a + \epsilon$.*
   - *O conjunto $\{n \in \mathbb{N} : s_n > a - \epsilon\}$ é infinito.*
3. *a é o* maior *ponto de acumulação da* sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Em tal caso, tem-se que (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(3). A relação recíproca (3)$\Rightarrow$(2) é satisfeita somente se a sequência em questão for limitada superiormente. □

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Seja $\epsilon > 0$. Observe que:

$$a + \epsilon > a = \limsup_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\leqslant n} s_k \right).$$

Pela definição de ínfimo, deve existir $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sup_{k\geqslant N} s_k < a + \epsilon \quad \Rightarrow \quad s_k \leqslant \sup_{k\geqslant N} s_k < a + \epsilon,\ \forall k \geqslant N.$$

Portanto, tem-se:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_n < a + \epsilon.$$

Isso prova a primeira propriedade da condição (2). Por outro lado, observe que:

$$a - \epsilon < a = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geqslant n} s_k \right) \leqslant \sup_{k\geqslant n} s_k, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pela definição de supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k(n) \in \mathbb{N}$, com $k(n) \geqslant n$, tal que $a - \epsilon < s_{k(n)}$. Em particular, dado $n = 1 \in \mathbb{N}$, existe $k(1) \in \mathbb{N}$, com $k(1) \geqslant 1$, tal que $a - \epsilon < s_{k(1)}$. Pela sua vez, dado $k(1) + 1 \in \mathbb{N}$, existe $k(2) \in \mathbb{N}$, com $k(2) \geqslant k(1) + 1 > k(1)$, tal que $a - \epsilon < s_{k(2)}$. Em geral, uma vez determinado $k(i)$, dado $k(i)+1 \in \mathbb{N}$, existe $k(i+1) \geqslant k(i)+1 > k(i)$ tal que $a-\epsilon < s_{k(i+1)}$. Desta maneira, resuta possível construir inductivamente uma sequência estrictamente crescente de números naturais:

$$k(1) < k(2) < \cdots < k(i) < k(i + 1) < \cdots$$

tal que $a - \epsilon < s_{k(i)}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, provando a segunda propriedade da condição (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Seja $a \in \mathbb{R}$ satisfazendo as duas propriedades da condição (2). Definindo:

$$a_n := \sup_{k\geqslant n} s_k,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se que $s_k \leqslant a_n$ para todo $k \geqslant n$.

<u>Afirmação:</u> $a \leqslant a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\triangledown$

Com efeito, por ***reductio ad absurdum***, a negação do resultado enunciado implicaria a existência de algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a > a_{n_0}$. Em tal caso, considerando $\epsilon := a - a_{n_0} > 0$ na segunda propriedade da condição (2), teria-se que existem infinitos $k \in \mathbb{N}$ tais que:

$$s_k > a - \epsilon = a - (a - a_{n_0}) = a - a + a_{n_0} = a_{n_0} = \sup_{k\geqslant n_0} s_k,$$

uma obvia contradição. $\blacktriangledown$

Portanto, pela afirmação anterior, a é um limite inferior para o conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Basta provar agora que a é o maior de tais limites inferiores. Para tanto, seja α um outro limite inferior. Se fosse $a < \alpha$, considerando $\epsilon := \alpha - a > 0$ na primeira propriedade da condição (2) teria-se que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_n < a + \epsilon = a + (\alpha - a) = a + \alpha - a = \alpha.$$

Ou seja, α seria um limite superior para o conjunto $\{s_k : k \geqslant N\}$ e portanto:

$$a_N = \sup_{k\geqslant N} s_k \leqslant \alpha.$$

Observe que não pode ser $a_N < \alpha$, pois tal relação contradiz o fato de α ser limite inferior do conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, ou seja, $\alpha \leqslant a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha-se então que $a_N = \alpha$. Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não-crescente, tem-se:

$$k \geqslant N \quad \Rightarrow \quad a_k \leqslant a_{k-1} \leqslant \cdots \leqslant a_N = \alpha \leqslant a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

A última desigualdade acima decorre do fato de α ser limite inferior do conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Portanto, deve ser:

$$k \geqslant N \quad \Rightarrow \quad a_k = a_{k-1} = \cdots = a_N = \alpha. \tag{20.2.10}$$

Considerando $\epsilon := (\alpha - a)/2 > 0$ na primeira propriedade da condição (2), existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N_1 \quad \Rightarrow \quad s_n < a + \epsilon = a + \frac{\alpha - a}{2} = \frac{2a + \alpha - a}{2} = \frac{a + \alpha}{2}.$$

Seja agora $N_2 \geqslant \max\{N, N_1\}$. Em tal caso:

$$n \geqslant N_2 \geqslant N_1 \quad \Rightarrow \quad s_n < \frac{a + \alpha}{2}.$$

Portanto, pela suposição $a < \alpha$, tem-se:

$$a_{N_2} = \sup_{k \geqslant N_2} s_k \leqslant \frac{a + \alpha}{2} < \frac{\alpha + \alpha}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha.$$

Ou seja, $a_{N_2} < \alpha$. Contudo, dado que $N_2 \geqslant N$, segundo a relação (20.2.10), deveria ser $a_{N_2} = a_N = \alpha$. Esta contradição, lembre-se, provém de supor $a < \alpha$. Portanto, dever ser $\alpha \geqslant a$. Desta maneira, finalmente tem-se:

$$a = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geqslant n} s_k \right) = \limsup_{n \to \infty} s_n.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Seja $\epsilon > 0$. Pela primeira propriedade da condição (2), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_n < a + \epsilon.$$

Pela segunda propriedade da condição (2), resulta infinito o conjunto A definido como:

$$A := \{n \in \mathbb{N} : s_n > a - \epsilon\}.$$

Observe que o conjunto $A \cap \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant N\}$ também deve ser *infinito*. Com efeito, se fosse finito, digamos com r elementos, decompondo A como união disjunta:

$$A = (A \cap \{n \in \mathbb{N} : n < N\}) \bigcup (A \cap \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant N\}),$$

resultaria óbvio que o conjunto A deveria ter no máximo $(N - 1) + r$ elementos. Portanto, para todo $\epsilon > 0$ existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que $a - \epsilon < s_n < a + \epsilon$, pois tais n são os elementos do conjunto infinito $A \cap \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant N\}$. Desta maneira, a é ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}$. Seja α um outro ponto de acumulação. Suponha que $\alpha > a$ e seja r tal que $a < r < \alpha$. Então, considerando agora $\epsilon := (r - a)/2 > 0$ na primeira propriedade da condição (2), existiria $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_n < a + \epsilon = a + \frac{r - a}{2} = \frac{a + r}{2} < \frac{r + r}{2} = r.$$

A relação acima estabelece que pode existir apenas um número finito, no máximo $\{s_1, s_2, \ldots, s_{N-1}\}$, de elementos s_k tais que $|s_k - \alpha| < (\alpha - r)/2$, contradizendo o fato de ser α ponto de acumulação da sequência. Desta maneira, deve ser $\alpha \leqslant a$, provando que a é o maior ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Se a é ponto de acumulação da sequência, então para todo $\epsilon > 0$ existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que:

$$|s_n - a| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \epsilon < s_n < a + \epsilon.$$

Em particular, existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que $s_n > a - \epsilon$. Isso prova a segunda propriedade da condição (2). Por outro lado, se a primeira propriedade não fosse válida, deveria existir $\epsilon_0 > 0$ com a seguinte propriedade: para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $n(N) \in \mathbb{N}$, com $n(N) \geqslant N$, tal que $s_{n(N)} \geqslant a + \epsilon_0$. Em tal caso, seria possível construir uma subsequência $\{s_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $s_{n(k)} \geqslant a + \epsilon_0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Se a sequência original $\{s_n\}$ fosse limitada superiormente, digamos por M, então $\{s_{n(k)}\}$ estaria contida no conjunto compacto $[a+\epsilon_0, M]$, possuindo assim um ponto de acumulação $\alpha \geqslant a + \epsilon_0 > a$ que seria também ponto de acumulação da sequência original $\{s_n\}$, contradizendo o fato de ser a o maior de tais pontos. Tal contradição provém de supor a existência de ϵ_0 com a propriedade mencionada acima. Portanto, negando tal propriedade, tem-se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_n < a + \epsilon.$$

Ou seja, a primeira propriedade da condição (2) também deve ser válida. Por outro lado, se $\{s_n\}$ não fosse limitada superiormente, pelo Lema 18.4.4, $+\infty > a$ seria ponto de acumulação, também contradizendo o fato de ser a o maior de tais pontos. ∎

O seguinte resultado é o analogo do anterior para limites inferiores.

20.2.8 Lema: *Suponha $a \in \mathbb{R}$, ou seja, a* finito. *Dada a sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, considere as seguintes condições:*

1. $a = \liminf_{n \to \infty} s_n$.
2. *Para todo $\epsilon > 0$, são satisfeitas as seguintes duas propriedades:*
   - *Existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \ \Rightarrow \ s_n > a - \epsilon$.*
   - *O conjunto $\{n \in \mathbb{N} \ : \ s_n < a + \epsilon\}$ é* infinito.
3. *a é o* menor *ponto de acumulação da* sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Em tal caso, tem-se que (1)⇔(2)⇒(3). A relação recíproca (3)⇒(2) é satisfeita somente se a sequência em questão for limitada inferiormente. □

Demonstração: Pelo Lema 20.2.4(b), tem-se:

$$-a = -\liminf_{n \to \infty} s_n = \limsup_{n \to \infty} (-s_n).$$

Portanto, basta utilizar o lema anterior, trocando s_n por $-s_n$ e a por $-a$, respectivamente. ∎

20.2.9 Exemplo: Considere-se a sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$s_n = \begin{cases} k, & \text{se } n = 2k - 1, \\ 1, & \text{se } n = 2k. \end{cases}$$

Ou seja, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência:

$$1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, \ldots, n, 1, n+1, 1 \ldots.$$

Observe que $a = 1$ é o único ponto de acumulação de tal sequência, e portanto o maior de tais pontos, mas $1 \neq \limsup_{n\to\infty} s_n$. De fato, o limite superior $\limsup_{n\to\infty} s_n$ *não existe* neste caso. Observe também que tal sequência *não* é limitada superiormente. ♣

20.2.10 Observação: Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência.

(a) $\limsup_{n\to\infty} s_n < +\infty$, se e somente se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente.

Considere $\limsup_{n\to\infty} s_n = a < +\infty$. Por *reductio ad absurdum*, suponha que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada superiormente. Em tal caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ não pode existir $\sup_{k\geqslant n} s_k$. Com efeito, dado $n \in \mathbb{N}$, arbitrário, se existisse tal supremo, digamos $\mathbb{R} \ni \mu := \sup_{k\geqslant n} s_k$, então:

$$s_k \leqslant \mu,\ \forall k \geqslant n \quad \Rightarrow \quad s_k \leqslant \max\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, \mu\} =: M,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, a sequência $\{s_k\}$ seria limitada superiormente por M.

Reciprocamente, se a sequência é limitada superiormente, digamos $s_n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\sup_{k\geqslant n} s_k \leqslant M,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geqslant n} s_k\right) \leqslant M < +\infty.$$

(b) $\liminf_{n\to\infty} s_n > -\infty$, se e somente se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente.

A prova é análoga à do item anterior. ♣

20.3 Incorporando Infinito nas Definições

Observe que a definição de sequência comporta perfeitamente a existencia de sequências nem siquer limitadas, e portanto não-limitadas nem superior nem inferiormente. De tal modo, seria desejável levantar a restrição sobre a limitação da sequência para a equivalência da condicão (3) nos Lemas 20.2.7 e 20.2.8 com as outras duas condições (1) e (2), que resultam incondicionalmente equivalentes entre si.

O exemplo 20.2.9 e a observação 20.2.10 parecem sugerir que a solução estaria em admitir valores eventualmente infinitos para os pontos de acumulação de sequências não-limitadas. Observe que a é ponto de acumulação de uma determinada sequência se e somente se existe uma sub-sequência da sequência original que converge para a, vide exercício 17.7.2. As definicões pertinentes foram apresentadas, de fato, na seção 18.4, e são reproduzidas a seguir por mera conveniência do leitor.

20.3.1 Definição: Se diz que a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge para** $+\infty$, o que se denota $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, se:

$$\forall M > 0 \quad \exists\ N = N(M) \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow s_n > M.$$

Analogamente, se diz que a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge para $-\infty$**, o que se denota $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$, se:

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\ \ N = N(M) \in \mathbb{N} : n \geqslant N \ \Rightarrow\ s_n < -M. \qquad \clubsuit$$

20.3.2 Definição: Se diz que **$+\infty$ é um ponto de acumulação** da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma subsequência $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = +\infty$.

Analogamente, se diz que **$-\infty$ é um ponto de acumulação** da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se existe uma subsequência $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} s_{n_k} = +\infty$. ♣

Com as definições adequadas, os dois últimos resultados homólogos da seção anterior podem ser aprimorados. De fato, o resultado a seguir constitui uma versão aprimorada do Lema 20.2.7.

20.3.3 Lema: *Suponha $a \in \mathbb{R}$, ou seja, a* finito. *Dada a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, as seguintes condições* são todas equivalentes*:*

1. $a = \limsup_{n\to\infty} s_n$.
2. *Para todo $\epsilon > 0$, são satisfeitas as seguintes duas propriedades:*
   - *Existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \ \Rightarrow\ s_n < a + \epsilon$.*
   - *O conjunto $\{n \in \mathbb{N} : s_n > a - \epsilon\}$ é* infinito*.*
3. *a é o maior ponto de acumulação da* sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Demonstração: Se a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente, então o presente enunciado segue de resultado original, Lema 20.2.7. Caso contrário, pelo Lema 18.4.4, $+\infty$ resulta ponto de acumulação, o que contradiz o fato de ser $a \in \mathbb{R}$ (isto é, um número finito) o maior de todos tais pontos. ∎

Analogamente, o próximo resultado constitui uma versão aprimorada do Lema 20.2.8.

20.3.4 Lema: *Suponha $a \in \mathbb{R}$, ou seja, a* finito. *Dada a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, as seguintes condições* são todas equivalentes*:*

1. $a = \liminf_{n\to\infty} s_n$.
2. *Para todo $\epsilon > 0$, são satisfeitas as seguintes duas propriedades:*
   - *Existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \ \Rightarrow\ s_n > a - \epsilon$.*
   - *O conjunto $\{n \in \mathbb{N} : s_n < a + \epsilon\}$ é* infinito*.*
3. *a é o menor ponto de acumulação da* sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Demonstração: Se a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então o presente enunciado segue de resultado original, Lema 20.2.8. Caso contrário, pelo Lema 18.4.6, $-\infty$ resulta ponto de acumulação, o que contradiz o fato de ser $a \in \mathbb{R}$ (isto é, um número finito) o menor de todos tais pontos. ∎

Resulta não muito dificil avançar um paso para frente, admitindo agora para o $a \in \mathbb{R}$ dos resultados anteriores a posibilidade de admitir os valores $\pm\infty$. Os resultados preliminares, considerados a continuação, serão uma inestimável ajuda, não apenas como auxiliares na prova dos resultados principais, mas também para iluminar o caminho a ser seguido para levar a bom término a desejada generalização.

20.3.5 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.
2. *A sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada superiormente.*
3. *$+\infty$ é um ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obviamente, trata-se neste caso do maior de tais pontos.* □

Demonstração: A equivalência (1)$\Leftrightarrow$(2) é consequência direta da observação 20.2.10(a). Por outro, lado a equivalência (2)$\Leftrightarrow$(3) foi estabelecida no Lema 18.4.4.

(2)$\Rightarrow$(3). Se a sequência não é limitada superiormente, então para todo $M > 0$ existe $n(M) \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n(M)} > M$. Em particular, dado $M = 1 > 0$, existe $n(1) \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n(1)} > 1$. Em geral, dado $N \in \mathbb{N}$ existe $n(N) \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n(N)} > N$. Seja A o conjunto definido como:

$$A := \{k \in \mathbb{N} \,:\, k > n(N) \;\wedge\; s_k > N+1\}.$$

Afirmação: A é um conjunto não-vazio de números naturais. ▽

Com efeito, se fosse $A = \emptyset$, teria-se:

$$s_k \leqslant N+1,\ \forall\, k > n(N) \quad \Rightarrow \quad s_k \leqslant \max\left\{N+1, s_1, s_2, \cdots, s_{n(N)}\right\} =: M,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seria limitada por M, contradizendo a hipótese estabelecida pela condição (2). ▼

Pelo Princípio de Boa Ordenação, o conjunto A possui primeiro elemento, que será denotado $n(N+1)$. Em particular, $n(N+1) > n(N)$ e $s_{n(N+1)} > N+1$. Desta maneira, resulta possível construir uma subsequência $\left\{s_{n(N)}\right\}_{N\in\mathbb{N}}$, tal que $n(N+1) > n(N)$ e $s_{n(N)} > N$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Para provar que tal subsequência converge para infinito, considere-se $M > 0$ arbitrário. Seja $K \in \mathbb{N}$ com $K > M$. Por exemplo, qualquer $K \geqslant [M+1]$ serve a tal efeito. Em tal caso, tem-se:

$$N \geqslant K \quad \Rightarrow \quad s_{n(N)} > N \geqslant K > M.$$

Como $M > 0$ era arbitrário, segue que $\lim\limits_{N\to\infty} s_{n(N)} = +\infty$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Seja $\{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sub-sequência tal que $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n(k)} = +\infty$. Então, para todo $M > 0$ existe $N(M) \in \mathbb{N}$ tal que $k \geqslant N \Rightarrow s_{n(k)} > M$. Portanto, para todo $M > 0$ tem-se que $s_{n(N(M))} > M$. Ou seja, a sequência $\{s_n\}$ não é limitada superiormente. ∎

Já no outro extremo, a formulação requer uma ligeira modificação, como o leitor poderá conferir no próximo resultado.

20.3.6 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$.
3. $-\infty$ é o único *ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Trivialmente, trata-se neste caso do maior de tais pontos.* □

Demonstração: A equivalência (2)$\Leftrightarrow$(3) foi estabelecida no Lema 18.4.5.

(1) $\Rightarrow$ (2). Por hipótese, tem-se:

$$-\infty = \limsup_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geqslant n} s_k \right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ a_n := \sup_{k\geqslant n} s_k \right\}.$$

Portanto, o conjunto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitado inferiormente. Ou seja, para todo $M > 0$ existe $N(M) \in \mathbb{N}$ tal que $a_N < -M$, de onde tem-se:

$$k \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_k \leqslant \sup_{k\geqslant N} s_k = a_N < -M.$$

Desta maneira, para todo $M > 0$ existe $N(M) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_n < -M.$$

Ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Por hipótese, para todo $M > 0$ existe $N = N(M) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_n < -M.$$

Portanto, tem-se:

$$\sup_{k\geqslant N} s_k \leqslant -M \quad \Rightarrow \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geqslant n} s_k \right) \leqslant \sup_{k\geqslant N} s_k \leqslant -M \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} s_n \leqslant -M.$$

Desta maneira, para todo $M > 0$ tem-se que $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n \leqslant -M$. Ou seja, $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, então obviamente $-\infty$ é ponto de acumulação da sequência. Da condição (2) tem-se que para todo $M > 0$ existe $N = N(M) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad s_n < -M. \tag{20.3.1}$$

Para provar a unicidade, suponha-se a existência de α ponto de acumulação da sequência, com $\alpha > -\infty$. Como α é ponto de acumulação, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n = n(\epsilon, N) \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant N$ tal que:

$$|s_n - \alpha| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \epsilon < s_n < \alpha + \epsilon. \tag{20.3.2}$$

Em particular, considere-se $\epsilon > |\alpha| \geqslant 0$. Seja $M :== |\alpha - \epsilon| > 0$, dado que $\epsilon \neq \alpha$, pois $\epsilon > |\alpha|$. Pela relação (20.3.1), existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N_1 \quad \Rightarrow \quad s_n < -M = -|\alpha - \epsilon| \leqslant \alpha - \epsilon.$$

Para tais $\epsilon > 0$ e $N_1 \in \mathbb{N}$, pela relação (20.3.2), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com $n_0 \geqslant N_1$ tal que:

$$\alpha - \epsilon < s_{n_0}.$$

Porém, como $n_0 \geqslant N_1$ teria-se que $s_{n_0} < \alpha - \epsilon$, uma contradição. Portanto, $-\infty$ é o único ponto de acumulação da sequência em questão.

(3) $\Rightarrow$ (1). Suponha que $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = a \in \mathbb{R}$, ou seja, um número finito $a > -\infty$. Pelo Lema 20.2.7, o número finito a seria (o maior) ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}$, contradizendo a unicidade de $-\infty$ como o único de tais pontos de acumulação. Por outro lado, se fosse $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, pelo Lema 20.3.5 anterior, $+\infty$ seria ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}$, contradizendo a unicidade de $-\infty$ como o único de tais pontos de acumulação. Portanto, deve ser $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

Prova alternativa verificando o condicional (3) $\Rightarrow$ (2). Se a sequência $\{s_n\}$ fosse não-limitada superiormente, pelo Lema 20.3.5 anterior, $+\infty$ seria ponto de acumulação de tal sequência, contradizendo que $-\infty$ era o único de tais pontos, por hipótese. Portanto, deve existir $M \in \mathbb{N}$ tal que:

$$s_n \leqslant M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

A negação lógica da condição (2) equivale a estabelecer a existência de algum $M_0 > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n(N) \in \mathbb{N}$ com $n(N) \geqslant N$ tal que $s_{n(N)} \geqslant -M_0$. Em particular, dado $N = 1 \in \mathbb{N}$, existe $n(1)$ com $n(1) \geqslant 1$ tal que $s_{n(1)} \geqslant -M_0$. Em geral, dado $n(k) + 1 \in \mathbb{N}$, existe $n(k+1)$ com $n(k+1) \geqslant n(k) + 1 > n(k)$ tal que $s_{n(k+1)} \geqslant -M_0$. Desta maneira, resulta possível construir uma subsequência $\left\{s_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ com $n(k+1) > n(k)$ tal que:

$$s_{n(k)} \geqslant -M_0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Combinando as duas últimas relações, tem-se:

$$-M_0 \leqslant s_{n(k)} \leqslant M, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a subsequência $\left\{s_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ está contida no conjunto compacto $[M_0, M]$. Pelo exercício 17.8.1, tal subsequência deve possuir um ponto de acumulação no intervalo $[M_0, M]$, ou seja, necessariamente um número finito. Pelo exercício 17.7.4(a), tal número finito seria também ponto de acumulação da sequência original, obviamente diferente de $-\infty$, contradizendo que $-\infty$ era o único de tais pontos. ∎

O seguinte resultado seria o análogo do Lema 20.3.5, para limites inferiores.

20.3.7 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$.

2. *A sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada inferiormente.*

3. $-\infty$ *é um ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obviamente, trata-se neste caso do menor de tais pontos.* □

Demonstração: A equivalência (1)⇔(2) é consequência direta da observação 20.2.10(b). Por outro, lado a equivalência (2)⇔(3) foi estabelecida no Lema 18.4.6. ∎

De igual maneira, o seguinte resultado seria o análogo do Lema 20.3.6, para limites inferiores.

20.3.8 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

3. $+\infty$ é o único *ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Trivialmente, trata-se neste caso do menor de tais pontos.* □

Demonstração: Utilizando o resultado do Lema 20.2.4(b), a equivalência (1)⇔(2) pode ser deduzida como consequência do Lema 20.3.6 anterior, trocando s_n por $-s_n$ e $+\infty$ por $-\infty$, respectivamente. Ou seja:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} s_n = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad -\liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty}(-s_n) = -\infty \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(-s_n) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad -\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty.\end{aligned}$$

Por outro, lado a equivalência (2)⇔(3) foi estabelecida no Lema 18.4.7. ∎

20.4 Limites Superior e Inferior de Sequências Revisitado

Na seção 18.5 foi introduzido o conjunto de números reais estendidos:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

com a relação de ordem dada por $-\infty < a < +\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Na mesma seção foi introduzido também o conjunto $\overline{\Xi}$ de pontos de acumulação estendido de qualquer sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ de números reais, definido como:

$$\overline{\Xi} := \left\{ x \in \overline{\mathbb{R}} \,:\, \text{existe uma sub-sequência } \{s_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} s_{n_k} = x \right\}.$$

Resulta também oportuno salientar que $\overline{\Xi} \neq \emptyset$, ou seja, o conjunto de pontos de acumulação estendido resulta sempre não-vazio, segundo estabelecido na observação 18.5.3(a).

20.4.1 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais. Então, o número real estendido $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n$ satisfaz as duas propriedades do Lema 18.5.4(a). Mais precisamente, tem-se:*

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n \in \overline{\Xi}$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n < x \;\Rightarrow\; \exists\, N = N(x) \in \mathbb{N} : n \geqslant N \;\Rightarrow\; s_n < x$. □

Demonstração: **(a)** No caso $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, a condição 3 do Lema 20.3.5 estabelece que $+\infty \in \overline{\Xi}$. Portanto, $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty \in \overline{\Xi}$.

Por outro lado, se fosse $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, então a condição 3 do Lema 20.3.6 estabelece que $-\infty \in \overline{\Xi}$, mais ainda, $\overline{\Xi} = \{-\infty\}$. Portanto, $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty \in \overline{\Xi}$.

Finalmente, no caso $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$, a condição 3 do Lema 20.2.7 estabelece que $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n \in \Xi \subseteq \overline{\Xi}$.

(b) No caso $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, a proposição lógica P definida como:

$$P := \limsup_{n\to\infty} s_n < x$$

é falsa. Portanto, a tabela de verdade introduzida na observação 18.5.5, estabelece que o condicional $P \Rightarrow Q$ é verdadeiro, onde Q é a proposição lógica definida no enunciado do item (b) do presente resultado.

Por outro lado, se fosse $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, a condição 2 do Lema 20.3.6 estabelece que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$. A última relação equivale a enunciar que para todo $x > -\infty = \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \quad\Rightarrow\quad s_n < x.$$

Observe que o último enunciado corresponde precisamente ao enunciado do item (b) do presente resultado, que se deseja provar.

Finalmente, considere o caso $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$. Suponha que $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n < x$. Seja $\epsilon := x - \limsup\limits_{n\to\infty} s_n > 0$. A primeira propriedade na condição 2 do Lema 20.2.7 estabelece a existência de $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \quad\Rightarrow\quad s_n < \limsup_{n\to\infty} s_n + \epsilon = \limsup_{n\to\infty} s_n + x - \limsup_{n\to\infty} s_n = x.$$ ■

20.4.2 Corolário: $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = \sup \overline{\Xi}$. *Em particular,* $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n$ *é o maior ponto de acumulação (estendido) da sequência* $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Demonstração: Segue diretamente do Lema 20.4.1 anterior e do Lema 18.5.4. ∎

O seguinte resultado é o análogo do Lema 20.4.1 para limites inferiores.

20.4.3 Lema: *Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais. Então, o número real estendido $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n$ satisfaz as duas propriedades do Lema 18.5.6(a). Mais precisamente, tem-se:*

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n \in \overline{\Xi}$.

(b) $x < \liminf\limits_{n\to\infty} s_n \;\Rightarrow\; \exists\; N = N(x) \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant N \;\Rightarrow\; x < s_n.$ □

Demonstração: Análoga à prova do Lema 20.4.1 anterior. ∎

20.4.4 Corolário: $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n = \inf \overline{\Xi}$. *Em particular, $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n$ é o menor ponto de acumulação (estendido) da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.* □

Demonstração: Segue diretamente do Lema 20.4.3 anterior e do Lema 18.5.6. ∎

Finalmente, os dois últimos resultados homólogos da seção 20.2, isto é, os Lemas 20.2.7 e 20.2.8, ligeiramente aprimorados na seção anterior, serão apresentados agora na sua versão definitiva. O seguinte resultado constitui a versão generalizada do Lema 20.2.7.

20.4.5 Lema: *Seja $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de números reais, então as seguintes condições são todas equivalentes entre si:*

1. $a = \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$.

2. *a é um ponto de acumulação (estendido) da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e para todo $a < x$ existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \;\Rightarrow\; s_n < x$.*

3. *a é o maior ponto de acumulação (estendido) da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.* □

Demonstração: O condicional (1) ⇒ (2) segue diretamente do Lema 20.4.1.

A equivalência (1)⇔(3) resulta da aplicação dos lemas 20.3.3, 20.3.5 e 20.3.6, segundo seja $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$, ou $a = -\infty$, respectivamente.

(2) ⇒ (3). No caso $a \in \mathbb{R}$, a hipótese (2) implica as duas propriedades da condição 2 no Lema 20.3.3, de onde segue (3). No caso $a = +\infty$, a conclusão (3) é obvia. No caso $a = -\infty$, a hipótese (2) implica que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, ou seja, a condição 2 no Lema 20.3.6, portanto $-\infty$ é o único ponto de acumulação da sequência, sendo trivialmente o maior de tais pontos. ∎

Analogamente, o próximo resultado constitui a versão generalizada do Lema 20.2.8.

20.4.6 Lema: *Seja $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de números reais, então as seguintes condições são todas equivalentes entre si:*

1. $a = \liminf\limits_{n\to\infty} s_n$.
2. *a é um ponto de acumulação (estendido) da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e para todo $x < a$ existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \Rightarrow x < s_n$.*
3. *a é o menor ponto de acumulação (estendido) da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.* □

Demonstração: O condicional (1) ⇒ (2) segue diretamente do Lema 20.4.3.

A equivalência (1)⇔(3) resulta da aplicação dos lemas 20.3.4, 20.3.7 e 20.3.8, segundo seja $a \in \mathbb{R}$, $a = -\infty$, ou $a = +\infty$, respectivamente.

(2) ⇒ (3). No caso $a \in \mathbb{R}$, a hipótese (2) implica as duas propriedades da condição 2 no Lema 20.3.4, de onde segue (3). No caso $a = +\infty$, a hipótese (2) implica que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, ou seja, a condição 2 no Lema 20.3.8, portanto $+\infty$ é o único ponto de acumulação da sequência, sendo trivialmente o maior de tais pontos. No caso $a = -\infty$, a conclusão (3) é obvia. ∎

20.5 Limite Superior e Inferior de Funções

20.5.1 Definição: Seja f uma função. Define-se o **limite superior de f quando x tende para a** como:

$$\limsup_{x\to a} f(x) := \inf_{\epsilon>0}\ \sup\{f(x)\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon\}.$$

Analogamente, define-se o **limite inferior de f quando x tende para a** como:

$$\liminf_{x\to a} f(x) := \sup_{\epsilon>0}\ \inf\{f(x)\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon\}.$$ ♣

20.5.2 Lema: $\liminf\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \limsup\limits_{x\to a} f(x)$. □

Demonstração: Seja $\epsilon_0 > 0$ arbitrário. Dado $\epsilon > 0$, no caso $\epsilon < \epsilon_0$, tem-se:

$$\{x\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon\} \subset \{x\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon_0\},$$

de onde segue:

$$\inf\ \{f(x)\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon_0\} \leqslant \inf\ \{f(x)\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon\} \leqslant \sup\ \{f(x)\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon\}.$$

Analogamente, no caso $\epsilon_0 \leqslant \epsilon$, tem-se:

$$\inf\ \{f(x)\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon_0\} \leqslant \sup\ \{f(x)\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon_0\} \leqslant \sup\ \{f(x)\ :\ 0 < |x-a| < \epsilon\}.$$

Portanto, qualquer que seja o caso, tem-se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon_0\} \leqslant \sup \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon\}.$$

Da última relação acima, utilizando a definição de ínfimo, tem-se:

$$\forall \epsilon_0 > 0 \quad \inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon_0\} \leqslant \inf_{\epsilon > 0} \,\sup \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon\} = \limsup_{x \to a} f(x).$$

Da última relação acima, utilizando agora a definição de supremo, tem-se:

$$\liminf_{x \to a} f(x) = \sup_{\epsilon_0 > 0} \,\inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon_0\} \leqslant \limsup_{x \to a} \{f(x)\}.$$

Ou seja, $\liminf_{x \to a} f(x) \leqslant \limsup_{x \to a} f(x)$.

Para um argumento alternativo, observe que, no caso $\epsilon < \epsilon_0$, tem-se:

$$\inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon\} \leqslant \sup \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon\} \leqslant \sup \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon_0\}.$$

Por outro lado, no caso se $\epsilon_0 \leqslant \epsilon$, tem-se:

$$\inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon\} \leqslant \inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon_0\} \leqslant \sup \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon_0\}.$$

Portanto, qualquer que seja o caso, tem-se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon\} \leqslant \sup \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon_0\}.$$

Da última relação acima, utilizando a definição de supremo, tem-se:

$$\forall \epsilon_0 > 0 \quad \liminf_{x \to a} f(x) = \sup_{\epsilon > 0} \,\inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon\} \leqslant \sup \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon_0\}.$$

Da última relação acima, utilizando agora a definição de ínfimo, tem-se:

$$\liminf_{x \to a} f(x) \leqslant \inf_{\epsilon_0 > 0} \,\sup \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon_0\} = \limsup_{x \to a} \{f(x)\}.$$

Ou seja, $\liminf_{x \to a} f(x) \leqslant \limsup_{x \to a} f(x)$. ∎

20.5.3 Lema: *$\lim_{x \to a} f(x)$ existe, e vale l, se e somente se $\limsup_{x \to a} f(x)$ e $\liminf_{x \to a} f(x)$ existem ambos e são iguais, com valor comun l.* □

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se $\lim_{x \to a} f(x) =: l$, então para todo $\rho > 0$ existe $\delta = \delta(\rho) > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \rho \quad \Leftrightarrow \quad -\rho < f(x) - l < \rho \quad \Leftrightarrow \quad l - \rho < f(x) < l + \rho.$$

Em particular:

$$l - \rho \leqslant \inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \delta(\rho)\}.$$

De onde segue:

$$l - \rho \leqslant \inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \delta(\rho)\} \leqslant \sup_{\epsilon > 0} \,\inf \{f(x) \,:\, 0 < |x-a| < \epsilon\} = \liminf_{x \to a} f(x).$$

Análogamente:

$$\sup\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\delta(\rho)\} \leqslant l+\rho.$$

De onde segue:

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \inf_{\epsilon>0}\ \sup\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\epsilon\} \leqslant \sup\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\delta(\rho)\} \leqslant l+\rho.$$

Portanto, utilizando o lema anterior, tem-se:

$$\forall\rho>0 \quad l-\rho \leqslant \liminf_{x\to a} f(x) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x) \leqslant l+\rho.$$

Como ρ é arbitrário, tomando o limite $\rho\to 0$, tem-se:

$$l \leqslant \liminf_{x\to a} f(x) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x) \leqslant l.$$

Ou seja:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \limsup_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} f(x).$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha-se que:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = l = \limsup_{x\to a} f(x).$$

Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência com $s_n\neq a$ para todo $n\in\mathbb{N}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$, ou seja:

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists\, N(\epsilon)\in\mathbb{N}\ :\ k\geqslant N(\epsilon) \quad\Rightarrow\quad 0<|s_k-a|<\epsilon.$$

Em particular:

$$\begin{aligned}\inf\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\epsilon\} \leqslant \inf\ \{f(s_k)\ :\ k\geqslant N(\epsilon)\} \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\ \inf\ \{f(s_k)\ :\ k\geqslant n\}\\ = \liminf_{n\to\infty} f(s_n).\end{aligned}$$

De onde segue:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \sup_{\epsilon>0}\ \inf\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\epsilon\} \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(s_n).$$

Ou seja:

$$\liminf_{x\to a} f(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(s_n).$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} f(s_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\ \sup\ \{f(s_k)\ :\ k\geqslant n\} \leqslant \sup\ \{f(s_k)\ :\ k\geqslant N(\epsilon)\}\\ \leqslant \sup\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\epsilon\}.\end{aligned}$$

De onde segue:

$$\limsup_{n\to\infty} f(s_n) \leqslant \inf_{\epsilon>0}\ \sup\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\epsilon\} = \limsup_{x\to a} f(x).$$

Ou seja:

$$\limsup_{n\to\infty} f(s_n) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x).$$

Portanto, utilizando a hipótese, tem-se:

$$\limsup_{n\to\infty} f(s_n) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x) = l = \liminf_{x\to a} f(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} f(s_n).$$

De onde segue que:

$$\limsup_{n\to\infty} f(s_n) = \liminf_{n\to\infty} f(s_n) = l.$$

Ou seja, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)$ sempre existe, para toda sequência $\{s_n\}$ com $s_n \neq a$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. Além disso, o valor de tal limite resulta ser l, independentemente da sequência $\{s_n\}$ empregada. Portanto, o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e vale l. ∎

20.6 Limites Laterais Superiores e Inferiores de Funções

20.6.1 Definição: Seja f uma função. Define-se o **limite superior e inferior de f quando x tende para a pela direita**, respectivamente por:

$$\limsup_{x\to a^+} f(x) := \inf_{\epsilon>0}\ \sup\{f(x)\ :\ 0<x-a<\epsilon\},$$
$$\liminf_{x\to a^+} f(x) := \sup_{\epsilon>0}\ \inf\{f(x)\ :\ 0<x-a<\epsilon\}.$$

Analogamente, define-se o **limite superior e inferior de f quando x tende para a pela esquerda**, respectivamente por:

$$\limsup_{x\to a^-} f(x) := \inf_{\epsilon>0}\ \sup\{f(x)\ :\ 0<a-x<\epsilon\},$$
$$\liminf_{x\to a^-} f(x) := \sup_{\epsilon>0}\ \inf\{f(x)\ :\ 0<a-x<\epsilon\}.$$

♣

20.6.2 Lema: *O limite superior e inferior e seus limites laterais satisfazem, respectivamente, as seguintes propriedades:*

(a) $\liminf\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \liminf\limits_{x\to a^\pm} f(x).$

(b) $\limsup\limits_{x\to a^\pm} f(x) \leqslant \limsup\limits_{x\to a} f(x).$ □

Demonstração: **(a)** Observe que:

$$\inf\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\epsilon\} \leqslant \inf\ \{f(x)\ :\ 0<x-a<\epsilon\}\,.$$

De onde segue que:

$$\sup_{\epsilon>0}\ \inf\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\epsilon\} \leqslant \sup_{\epsilon>0}\ \inf\ \{f(x)\ :\ 0<x-a<\epsilon\}\,.$$

Ou seja:

$$\liminf_{x\to a} f(x) \leqslant \liminf_{x\to a^+} f(x).$$

A prova no caso $x \to a^-$ é análoga.

(b) Observe que:

$$\sup\ \{f(x)\ :\ 0<x-a<\epsilon\} \leqslant \sup\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\epsilon\}\,.$$

De onde segue que:

$$\inf_{\epsilon>0}\ \sup\ \{f(x)\ :\ 0<x-a<\epsilon\} \leqslant \inf_{\epsilon>0}\ \sup\ \{f(x)\ :\ 0<|x-a|<\epsilon\}\,.$$

Ou seja:

$$\limsup_{x\to a^+} f(x) \leqslant \liminf_{x\to a} f(x).$$

A prova no caso $x \to a^-$ é análoga. ∎

20.6.3 Lema: *Os limites superior e inferior pela direita e esquerda satisfazem, respectivamente, as seguintes propriedades:*

(a) $\liminf\limits_{x\to a^+} f(x) \leqslant \limsup\limits_{x\to a^+} f(x)$.

(b) $\liminf\limits_{x\to a^-} f(x) \leqslant \limsup\limits_{x\to a^-} f(x)$. □

Demonstração: Análoga à prova do Lema 20.5.2, ficando a cargo do leitor. ∎

20.6.4 Lema: *Seja f uma função. Então:*

(a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ *existe, e vale l, se e somente se* $\limsup\limits_{x\to a^+} f(x)$ *e* $\liminf\limits_{x\to a^+} f(x)$ *existem ambos e são iguais, con valor comun l.*

(b) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *existe, e vale l, se e somente se* $\limsup\limits_{x\to a^-} f(x)$ *e* $\liminf\limits_{x\to a^-} f(x)$ *existem ambos e são iguais, com valor comun l.* □

Demonstração: Análoga à prova do Lema 20.5.3, ficando a cargo do leitor. ∎

20.6.5 Lema: *Seja f uma função. Então:*

(a) *Se* $\limsup\limits_{x\to a^+} f(x)$ *e* $\limsup\limits_{x\to a^-} f(x)$ *existem ambos e são iguais, com valor comun* l*, então existe* $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$*, e vale* l*.*

(b) *Reciprocamente, se* $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$ *existe, e vale* l*, então* pelo menos algum *dos limites laterais* $\limsup\limits_{x\to a^+} f(x)$ *ou* $\limsup\limits_{x\to a^-} f(x)$ *existe, com valor igual ao daquele limite, ou seja,* l*.* □

Demonstração: **(a)** Sejam α e l definidos respectivamente como:

$$\alpha := \limsup_{x\to a} f(x),$$
$$l := \limsup_{x\to a^+} f(x) = \liminf_{x\to a^-} f(x).$$

Pelo Lema 20.6.2(b), sabe-se que: $l \leqslant \alpha$. Seja $\rho > 0$ arbitrário. Observe que:

$$l = \limsup_{x\to a^+} f(x) = \inf_{\epsilon>0}\ \sup\left\{f(x)\,:\,0 < x-a < \epsilon\right\}.$$

Pela definição de ínfimo, deve existir $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\sup\left\{f(x)\,:\,0 < x-a < \delta_1\right\} < l+\rho.$$

Portanto:

$$\forall\{x\,:\,0 < x-a < \delta_1\} \quad f(x) \leqslant \sup\left\{f(x)\,:\,0 < x-a < \delta_1\right\} < l+\rho. \tag{20.6.1}$$

Analogamente, observe que:

$$l = \limsup_{x\to a^-} f(x) = \inf_{\epsilon>0}\ \sup\left\{f(x)\,:\,0 < a-x < \epsilon\right\}.$$

Pela definição de ínfimo, deve existir $\delta_2 > 0$ tal que:

$$\sup\left\{f(x)\,:\,0 < a-x < \delta_2\right\} < l+\rho.$$

Portanto:

$$\forall\{x\,:\,0 < a-x < \delta_2\} \quad f(x) \leqslant \sup\left\{f(x)\,:\,0 < a-x < \delta_2\right\} < l+\rho. \tag{20.6.2}$$

Seja $0 < \delta \leqslant \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Utilizando as relações (20.6.1) e (20.6.2), tem-se:

$$0 < |x-a| < \delta \quad\Rightarrow\quad f(x) < l+\rho \quad\Rightarrow\quad \sup\left\{f(x)\,:\,0 < |x-a| < \delta\right\} \leqslant l+\rho$$

De onde segue que:

$$\alpha = \limsup_{x\to a} f(x) = \inf_{\epsilon>0}\ \sup\left\{f(x)\,:\,0<|x-a|<\epsilon\right\} \leqslant \sup\left\{f(x)\,:\,0<|x-a|<\delta\right\} \leqslant l+\rho.$$

Portanto, para todo $\rho > 0$ tem-se que $\alpha \leqslant l+\rho$. Como $\rho > 0$ é arbitrário, tomando o limite $\rho \to 0$, segue que $\alpha \leqslant l$. Ou seja, $\alpha = \limsup\limits_{x\to a} f(x)$ existe, isto é, admite um valor finito (menor ou igual que l). De fato, como $l \leqslant \alpha \leqslant l$, deve ser $\limsup\limits_{x\to a} f(x) = \alpha = l$.

(b) Sejam l_+ e l_- definidos respectivamente como:

$$l_+ := \limsup_{x \to a^+} f(x),$$
$$l_- := \limsup_{x \to a^-} f(x).$$

Pelo Lema 20.6.2(b), sabe-se que $l_\pm \leqslant \alpha$. Seja $\rho > 0$ arbitrário. Observe que para todo $\epsilon > 0$ tem-se:

$$\alpha - \rho < \alpha = \limsup_{x \to a} f(x) = \inf_{\epsilon > 0} \sup \{ f(x) \, : \, 0 < |x-a| < \epsilon \} \leqslant \sup \{ f(x) \, : \, 0 < |x-a| < \epsilon \}.$$

Portanto, pela definição de supremo, deve existir algum $x_0 = x_0(\epsilon)$ com $0 < |x_0 - a| < \epsilon$ tal que $\alpha - \rho < f(x_0)$.

No caso $0 < x_0 - a < \epsilon$, tem-se:

$$\alpha - \rho < f(x_0) \leqslant \sup \{ f(x) \, : \, 0 < x - a < \epsilon \}.$$

De onde segue que:

$$\alpha - \rho \leqslant \inf_{\epsilon > 0} \sup \{ f(x) \, : \, 0 < x - a < \epsilon \} = \limsup_{x \to a^+} f(x) = l_+.$$

Portanto, para todo $\rho > 0$ tem-se que $\alpha - \rho \leqslant l_+$. Como $\rho > 0$ é arbitrário, tomando o limite $\rho \to 0$, segue que $l_+ \leqslant \alpha \leqslant l_+$. Ou seja, neste caso l_+ existe e vale α.

Por outro lado, no caso $0 < a - x_0 < \epsilon$ tem-se:

$$\alpha - \rho < f(x_0) \leqslant \sup \{ f(x) \, : \, 0 < a - x < \epsilon \}.$$

De onde segue que:

$$\alpha - \rho \leqslant \inf_{\epsilon > 0} \sup \{ f(x) \, : \, 0 < a - x < \epsilon \} = \limsup_{x \to a^-} f(x) = l_-.$$

Portanto, para todo $\rho > 0$ tem-se que $\alpha - \rho \leqslant l_-$. Como $\rho > 0$ é arbitrário, tomando o limite $\rho \to 0$, segue que $l_- \leqslant \alpha \leqslant l_-$. Ou seja, neste caso l_- existe e vale α. ∎

O resultado a seguir é o análogo do lema anterior para limites inferiores.

20.6.6 Lema: *Seja f uma função. Então:*

(a) *Se $\liminf_{x \to a^+} f(x)$ e $\liminf_{x \to a^-} f(x)$ existem ambos e são iguais, com valor comun l, então existe $\liminf_{x \to a} f(x)$, e vale l.*

(b) *Reciprocamente, se $\liminf_{x \to a} f(x)$ existe, então* pelo menos algum *dos limites laterais $\liminf_{x \to a^+} f(x)$ ou $\liminf_{x \to a^-} f(x)$ existe, com valor igual ao daquele limite, ou seja l.* □

Demonstração: Análoga à prova do Lema 20.6.5, ficando a cargo do leitor. ∎

Concluindo, o próximo resultado caracteriza a existência do limite de uma função, em termo dos limites superiores e inferiores laterais pela direita e esquerda.

20.6.7 Lema: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe, e vale* l*, se e somente se os limites* $\limsup\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\liminf\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\limsup\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\liminf\limits_{x\to a^-} f(x)$, *existem os quatro e são todos iguais, com valor comun* l. □

Demonstração: O limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe se e somente se os limites laterais $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existem ambos e são iguais. Pelo Lema 20.6.4(a), o limite lateral $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe se e somente se os limites $\limsup\limits_{x\to a^+} f(x)$ e $\liminf\limits_{x\to a^+} f(x)$ existem ambos e são iguais. Analogamente, pelo Lema 20.6.4(b), o limite lateral $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existe se e somente se os limites $\limsup\limits_{x\to a^-} f(x)$ e $\liminf\limits_{x\to a^-} f(x)$ existem ambos e são iguais. ∎

20.6.8 Observação: Eis uma prova alternativa do lema anterior.

$(\Rightarrow)$ Se o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, então, pelo Lema 20.5.3, existem ambos e são iguais os limites:

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \liminf_{x\to a} f(x).$$

Portanto, para $\mu \in \{+,-\}$ e $\tau \in \{+,-\}$ de maneira independente um do outro, tem-se:

$$\liminf_{x\to a^\mu} f(x) \leqslant \limsup_{x\to a^\mu} f(x) \leqslant \limsup_{x\to a} f(x) = \liminf_{x\to a} f(x) \leqslant \liminf_{x\to a^\tau} f(x).$$

Observe que a primeira desigualdade decorre do Lema 20.6.3, no entanto que a segunda desigualdade segue do Lema 20.6.2(b). A última desigualdade decorre do Lema 20.6.2(a). Para verificar a igualdade dos limites laterais, basta considerar em primeiro lugar $\mu = + = \tau$, e depois $\mu = - = \tau$. Alternativamente, basta considerar em primeiro lugar $\mu = +$ e $\tau = -$, e depois $\mu = -$ e $\tau = +$.

$(\Leftarrow)$ Reciprocamente, pelo Lema 20.6.5(a), se

$$\limsup_{x\to a^+} f(x) = \limsup_{x\to a^-} f(x),$$

então existe $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$, com igual valor. Analogamente, pelo Lema 20.6.6(a), se

$$\liminf_{x\to a^+} f(x) = \liminf_{x\to a^-} f(x),$$

então existe $\liminf\limits_{x\to a} f(x)$, com igual valor. Portanto, pelo Lema 20.5.3, o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, com igual valor.

Existe ainda um argumento alternativo. Pelo Lema 20.6.4(a), se

$$\limsup_{x\to a^+} f(x) = \liminf_{x\to a^+} f(x),$$

então existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, com igual valor. Analogamente, pelo Lema 20.6.4(b), se

$$\limsup_{x \to a^-} f(x) = \liminf_{x \to a^-} f(x),$$

então existe $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, com igual valor. Portanto, pela proposição 18.2.4, o limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, com igual valor. ♣

Exercícios para o Capítulo 20

20.7 Limite Superior e Inferior de Conjuntos e Sequências

20.7.1 Exercício: Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais. Considere-se o conjunto $A := \{s_1, s_2, \dots\}$ e suponha-se que A é infinito e limitado (em particular, a sequência em questão é limitada). Então:

(a) $\limsup A \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$.

(b) Forneça um exemplo em que a desigualdade do item (a) anterior seja estricta. Ou seja, exiba uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\limsup A < \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$.

Sugestão: Considere a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{se } n = 2k, \\ 1, & \text{se } n = 2k-1. \end{cases}$$

Ou seja, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência:

$$1, 1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots, 1, \frac{1}{n}, 1, \frac{1}{n+1}, \dots.$$

Observe que $U_A = (0, +\infty)$. Portanto, $\limsup A = \inf U_A = 0$. Por outro lado, a subsequência $\{s_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ obviamente converge para 1 quando $k \to \infty$. Assim, $1 \in \Xi$, e como $s_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que 1 deve ser o maior de tais pontos de acumulação. Ou seja, $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n = \sup \overline{\Xi} = \sup \Xi = 1$.

(c) Se os s_n são todos *diferentes*, então $\limsup A = \limsup\limits_{n\to\infty} s_n$. ♣

20.7.2 Exercício: Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais. Considere o conjunto $A := \{s_1, s_2, \dots\}$ e suponha que A é infinito e limitado (em particular, a sequência em questão é limitada). Então:

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n \leqslant \liminf A$.

(b) Forneça um exemplo em que a desigualdade do item (a) anterior seja estricta. Ou seja, exiba uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n < \liminf A$.

Sugestão: Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência definida no item (b) do exercício anterior, considere-se agora $-s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Se os s_n são todos *diferentes*, então $\liminf A = \liminf\limits_{n\to\infty} s_n$. ♣

Observe que o resultado dos exercícios 20.7.1(c) e 20.7.2(c) anteriores permitem definir $\limsup A$ e $\liminf A$, respectivamente, para conjuntos *não necessariamente limitados* que sejam *enumeráveis* (obviamente infinitos, portanto). Com efeito, dada uma enumeração de um tal conjunto, digamos, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$, considere a sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida como:

$$a_1, \quad a_1, a_2, \quad a_1, a_2, a_3, \quad a_1, a_2, a_3, a_4, \quad \dots$$

Basta então definir:

$$\limsup A := \limsup_{n\to\infty} s_n,$$
$$\liminf A := \liminf_{n\to\infty} s_n.$$

Observe que quando o conjunto A é limitado a definição de cada um desses limites coincide com a original, pelo exercício 20.7.1(c) e 20.7.2(c), respectivamente.

20.7.3 Exercício: Uma outra particularidade da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acima definida consiste em que cada $a_i \in A$ pertence ao conjunto de pontos de acumulação da mesma. Ou seja, $A \subseteq \Xi \subseteq \overline{\Xi}$.

(a) Em particular, considerando o caso $A = \mathbb{N}$, observe-se que uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pode ter até uma quantidade *infinta* de pontos de acumulação, embora o seu conjunto base $\{s_1, s_2, \dots\}$ não tenha *nenhum* ponto de acumulação.

(b) Se o conjunto A é limitado, tem-se $A \subseteq \Xi = \overline{\Xi}$. Caso contrário, $A \subseteq \Xi \subsetneqq \overline{\Xi}$, pois $\Xi \subsetneqq \Xi \cup \{+\infty\} \subseteq \overline{\Xi}$ se A for não-limitado superiormente, ou $\Xi \subsetneqq \Xi \cup \{-\infty\} \subseteq \overline{\Xi}$ se A for não-limitado inferiormente. Considerando $A = \mathbb{Q}$, observe-se que neste caso tem-se adicionalmente $A \subsetneqq \Xi \subsetneqq \overline{\Xi}$. Com efeito, se $A = \mathbb{Q}$, então $\Xi = \mathbb{R}$ e $\overline{\Xi} = \overline{\mathbb{R}}$. Portanto, $\mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \overline{\mathbb{R}}$.

(c) No caso $A = \mathbb{Q}$ do item anterior, observe também que a sequência associada ao conjunto tem uma quantidade infinita *não-enumerável* de pontos de acumulação. Mas neste caso o seu conjunto base $\mathbb{Q}$ também tem uma quantidade infinita não-enumerável de pontos de acumulação, a saber, $\mathbb{R}$. Existe algum conjunto numerável A cuja sequência associada tenha uma quantidade infinita não-enumerável de pontos de acumulação, embora A não tenha nenhum ponto de acumulação ou apenas uma quantidade finita ou no máximo enumerável de tais pontos? ♣

20.8 Alguns Limites Superiores e Inferiores de Sequências

20.8.1 Exercício: Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais positivos, ou seja, $s_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n} \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n}$

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{s_n}$.

20.8.2 Exercício: Seja $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uma sequência de números reais. Então:

(a) Prove que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada inferiormente se e somente se $-\infty$ é um ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sugestão: Vide Lema 20.3.7 e corolário do Lema 20.4.3.

(b) Forneça um exemplo de sequência não-limitada inferiormente cujo limite superior seja diferente de $-\infty$.

Sugestão: Considere $-s_n$, onde $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência do exemplo 20.2.9. Alternativamente, considere $s_n := (-1)^n\, n$.

(c) Conclua que a unicidade de $+\infty$ e $-\infty$ como ponto de acumulação no Lema 20.3.6 e Lema 20.3.8, respectivamente, é uma propriedade *sine quo non* para a validade da relação (c) $\Rightarrow$ (a) expressa em tais resultados. ♣

20.8.3 Exercício: No lema 20.3.6, a terceira condição estabelece que:

3. $-\infty$ é o *único* ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Considere as seguintes condições adicionais:

4. $-\infty$ é um ponto de acumulação da sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

5. A sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada inferiormente.

Observe que (3) $\Rightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5). Com efeito, o primeiro condicional é trivial, no entanto que a segunda equivalência decorre do lema 18.4.6. Determine que condições poderiam ser acrescidas para que o condicional recíproco (3) $\Leftarrow$ (4) também seja válido. ♣

20.9 Limites Superiores e Inferiores de Funções

20.9.1 Exercício: Diferentemente do limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, cuja existência é condição necessária e suficiente para a existência de ambos limites laterais $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x)$, o resultado do lema 20.6.5(b) parece sugerir que a existência do limite superior $\limsup\limits_{x\to a} f(x)$ não é tão forte o suficiênte como para garantir a existência simultânea de ambos limites laterais correlatos $\limsup\limits_{x\to a^\pm f(x)}$. Verifique, sem apelar a mundos exóticos, que isso pode acontecer, de fato. Ou seja, exiba um exemplo elementar onde exista o limite superior e *apenas um* dos limites superiores laterais.

Sugestão: Considere a função f definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x < 0; \\ 0, & \text{se } x \geqslant 0, \text{ com } x \in \mathbb{Q}; \\ -\dfrac{1}{x}, & \text{se } x > 0, \text{ com } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

no ponto $a = 0$. ♣

Capítulo 21

Descontinuidades

21.1 Descontinuidades Evitáveis

Dado que a continuindade de uma função depende da concorrência de várias condições (vide observação 19.1.2), uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode deixar de ser contínua num ponto a de várias maneiras. Por exemplo, poderia não estar definida em a, como é o caso de $f(x) = 1/x$ na origem, $a = 0$. Um caso diferente merecedor de destaque é o expressado a seguir.

21.1.1 Definição: Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe mas não é igual a $f(a)$, ou se f nem siquer está definida em a, então se diz que a função f possui uma **descontinuidade evitável** em a.

Em outras palavras, f possui uma descontinuidade evitável em a se na observação 19.1.2 é satisfeita a condição 2 mas não a condição 1 e/ou 3. ♣

21.1.2 Observação: Se f possui uma descontinuidade evitável em a, então a função g definida como:

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & \text{se } x = a, \end{cases}$$

resulta contínua em a, pois as condições 1 e 3 na observação 19.1.2 são satisfeitas automaticamente. ♣

21.1.3 Exemplo: **(a)** Pelo exercício 18.12.3(d), a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ possui uma descontinuidade evitável em $a = 0$. Portanto, a função definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

resulta contínua em $\mathbb{R}$, ou seja, contínua em a para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) A função considerada no exemplo 18.1.10 possui descontinuidades evitáveis em $\mathbb{Q} \cap (0,1)$. Observe que nesse caso, a função g definida na observação anterior, se reduz à função identicamente nula. ♣

Existe alguma função que seja discontínua em todo ponto e que tenha apenas descontinuidades evitáveis? Tal vez valha a pena considerar este problema, mas apenas como uma prova de intuição. Embora suspeite a solução correta, probavelmente o leitor deverá ler a próxima seção para poder demostrá-la.

21.2 Enumerando as Descontinuidades

21.2.1 Teorema: *Seja f definida em um conjunto compacto $K = [a,b]$ tal que $\lim\limits_{y\to x} f(y)$ existe para todo $x \in K$. Então, para cada $\epsilon > 0$, o conjunto:*

$$A_\epsilon := \left\{ x \in K \,:\, \left| \lim_{y\to x} f(y) - f(x) \right| > \epsilon \right\}$$

é finito. □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ arbitrário.

Afirmação: O conjunto A_ϵ não pode ter pontos de acumulação. ▽

Por *reductio ad absurdum*, suponha que $x_0 \in K$ seja um tal ponto. Por hipótese, existe $a := \lim\limits_{y\to x_0} f(y)$, ou seja, para todo $\mu > 0$ existe δ_0 tal que:

$$0 < |y - x_0| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |f(y) - a| < \mu.$$

Como x_0 é ponto de acumulação de A_ϵ, existe $x_1 \in A_\epsilon \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Também por hipótese, existe $b := \lim\limits_{y\to x_1} f(y)$, ou seja, para todo $\lambda > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$y \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \quad \Rightarrow \quad |f(y) - b| < \lambda.$$

Observe que $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ é não-vazio, pois $x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Portanto, se $y_0 \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$, tem-se:

$$|b - a| \leqslant |b - f(y_0)| \; + \; |f(y_0) - a| < \lambda \; + \; \mu.$$

Por outro lado, observe que:

$$x_1 \in A_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |b - f(x_1)| > \epsilon.$$

Como também que:

$$x_1 \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - a| < \mu.$$

Portanto:

$$\epsilon < |b - f(x_1)| \leqslant |b - a| \; + \; |a - f(x_1)| < (\lambda + \mu) \; + \; \mu = \lambda \; + \; 2\,\mu.$$

Como $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ são arbitrários, considerando $0 < \mu \leqslant \epsilon/4$ e $0 < \lambda \leqslant \epsilon/2$, da última relação acima, teria-se:

$$\epsilon < \lambda \; + \; 2\,\mu \leqslant \epsilon/2 \; + \; 2\epsilon/4 = \epsilon.$$

Ou seja, uma contradição. ▼

Portanto, se o conjunto A_ϵ fosse infinito, como $A_\epsilon \subseteq K$, com K compacto, então deveria ter algum ponto de acumulação, contradizendo a afirmação anterior. ∎

21.2.2 Corolário: *Seja f uma função como no enunciado do resultado anterior.*

(a) *Para cada $\epsilon > 0$, o conjunto:*

$$A_\epsilon := \left\{ x \in \mathbb{R} \; : \; \left| \lim_{y \to x} f(y) - f(x) \right| > \epsilon \right\}$$

é enumerável, ou seja, $|A_\epsilon| \leqslant \aleph_0$.

(b) *Uma tal função somente pode possuir, no máximo, uma quantidade enumerável de descontinuidades.* □

Demonstração: **(a)** Segue diretamente do resultado anterior, observando que $\mathbb{R}$ é um conjunto σ-compacto, ou seja, pode ser expressado como união *enumerável* de compactos K_n da forma:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

considerando, por exemplo, $K_n = [-n, n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) O conjunto de pontos de descontinuidade de f pode ser expresso como união enumerável:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n}$$

de conjuntos $A_{1/n}$, cada um deles enumerável, pelo item anterior. ∎

21.2.3 Corolário: *Se uma função f possui apenas descontinuidades evitáveis, então é contínua, com exceção de um conjunto enumerável.* □

Demonstração: Segue do corolário anterior, observando que se f tem apenas descontinuidades evitáveis, então satisfaz a hipótese do lema anterior, ou seja, f possui limites em todo ponto. ∎

O resultado do último corolário permite finalmente responder à questão colocada no encerramento da seção anterior. Com efeito, se f tem apenas descontinuidades evitáveis, então deve ser contínua exceto num conjunto enumerável. Portanto, uma tal f não pode ser descontínua por todas partes.

Exercícios para o Capítulo 21

21.3 Descontinuidades Evitáveis

21.3.1 Exercício: Determine se as seguintes funções possuem descontinuidades evitáveis nos pontos especificados.

(a) $f(x) = \text{sen}(1/x)$, para $x \neq 0$, no ponto $a = 0$.

(b) $f(x) = x\ \text{sen}(1/x)$, para $x \neq 0$, no ponto $a = 0$. ♣

21.3.2 Exercício: Seja f uma função cujos pontos de descontinuidade são todos evitáveis. Ou seja, o limite $\lim\limits_{y \to x} f(y)$ existe para todo x, mas f pode não ser contínua em alguns (inclusive infinitos) pontos x. Prove que a função definida por $g(x) := \lim\limits_{y \to x} f(y)$ é contínua em todo ponto. ♣

Parte III

Calculus

Em 1604, no auge da sua carreira científica, Galileo chegou à conclusão de que para um movimento retilíneo em que a velocidade aumenta proporcionalmente à distância percorrida a lei de movimento devia ser precisamente aquela $[x = ct^2]$ que ele havia descoberto na pesquisa da queda dos corpos. Entre 1695 e 1700 nenhuma das edições mensais das *Acta Eruditorun* de Leipzig publicou-se sem artigos de Leibniz, dos irmãos Bernoulli ou do Marquês de L'Hôpital, que tratavam, com notações ligeiramente diferentes da atual, os problemas mais diversos do cálculo diferencial, cálculo integral e do cálculo de variações. Assim, no espaço de quase precisamente um século o cálculo infinitesimal ou, como se costuma denominar agora em inglês, o "Calculus", o instrumento de calcular *par excellence*, foi forjado; e quase três séculos de uso constante não têm esgotado essa ferramenta formidável.

Nicholas Bourbaki[1]

[1]In: [25, p. 180].

Capítulo 22

Derivadas

22.1 Definições e Exemplos

22.1.1 Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$. Se diz que uma função f é **derivável em** a se existe o limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Em tal caso, o limite acima se denota por $\boldsymbol{f'(a)}$ e denomina-se a **derivada de** f **em** a. Se f é derivável em a para todo a no domínio da f, se diz simplesmente que f é **derivável**. ♣

22.1.2 Observação: Equivalentemente, uma função f é derivável em a se existe o limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

22.1.3 Exemplo: **(a)** Se f é uma função constante $f(x) = c$, então f é derivável e $f'(a) = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$. Com efeito, em tal caso tem-se:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0.$$

(b) Se f é a função linear $f(x) = x$, então f é derivável e $f'(a) = 1$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$. Com efeito, em tal caso tem-se:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{x \to a} 1 = 1.$$

(c) A função $f(x) = \sqrt{x}$ é derivável para todo $a > 0$. Com efeito, se $a > 0$ tem-se:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \, \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x - a)\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Portanto $f'(a) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $\forall\, a > 0$. ♣

22.1.4 Exemplo: A função $f(x) = |x|$ *não* é derivável em $a = 0$. Observe que:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1.$$

Por outro lado, tem-se:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Ou seja, os limites laterias existem mas não são iguais. Portanto, o limite

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

não pode existir. ♣

22.1.5 Teorema: *Se f é derivável em a, então f é contínua em a.* □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Observe que:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\, x - a = \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) + f'(a)\right)(x-a)\,.$$

Portanto:

$$|f(x)-f(a)| \leqslant \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| |x-a| \;+\; |f'(a)|\;|x-a|\,. \tag{22.1.1}$$

Por hipótese, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$|x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \epsilon/2.$$

Seja $\delta > 0$ definido como:

$$\delta := \min\left\{\delta_1,\, 1,\, \frac{\epsilon/2}{1 \;+\; |f'(a)|}\right\}.$$

Em tal caso, se $|x-a| < \delta$ têm-se as seguintes relações:

$$|x-a| < 1,$$

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \epsilon/2,$$

$$|f'(a)|\;|x-a| < |f'(a)|\;\frac{\epsilon/2}{1 \;+\; |f'(a)|} = \epsilon/2\,\frac{|f'(a)|}{1 \;+\; |f'(a)|} < \epsilon/2.$$

Combinando (22.1.1) e as relações acima tem-se que $|f(x)-f(a)| < (\epsilon/2)\,1 \;+\; \epsilon/2 = \epsilon$. ∎

22.1.6 Teorema: *Sejam f e g funções deriváveis em a. Então:*

(a) *A função soma $f+g$ é derivável em a e tem-se:*

$$(f+g)'(a) = f'(a) \ + \ g'(a).$$

(b) *A função produto $f\,g$ também é derivável em a e tem-se:*

$$(f\,g)'(a) = f'(a)\,g(a) \ + \ f(a)\,g'(a).$$

(c) *Se adicionalmente for $g(a) \neq 0$, então o quociente $\dfrac{1}{g}$ é derivável em a e tem-se:*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

(d) *Se adicionalmente for $g(a) \neq 0$, então a função quociente $\dfrac{f}{g}$ é derivável em a e tem-se:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) \ - \ f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

Demonstração: **(a)** Por hipótese, tem-se:

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ + \ \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \ + \ \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= f'(a) \ + \ g'(a).\end{aligned}$$

(b) Observe que:

$$\begin{aligned}(f\,g)(x) \ - \ (f\,g)(a) &= f(x)g(x) \ - \ f(a)g(a) \\ &= f(x)g(x) \ - \ f(a)g(x) \ + \ f(a)g(x) \ - \ f(a)g(a) \\ &= (f(x)-f(a))\ g(x) \ + \ f(a)\ (g(x)-g(a))\,.\end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema 22.1.5 sabe-se que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a)$. Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned}(f\,g)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(f\,g)(x)-(f\,g)(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a} g(x) \ + \ f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)\,g(a) \ + \ f(a)\,g'(a).\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} \\ &= -\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\frac{1}{g(x)g(a)} = -g'(a)\frac{1}{g(a)g(a)} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

(d) Empregando o resultado dos dois itens anteriores, tem-se:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\,\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\left(\frac{1}{g}\right)(a) \;+\; f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a)$$

$$= f'(a)\,\frac{1}{g(a)} \;-\; f(a)\,\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) \;-\; f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \quad \blacksquare$$

22.1.7 Corolário: *Sejam $c \in \mathbb{R}$ constante e f derivável em a. Então a função $g(x) := c\,f(x)$ é derivável em a e tem-se $g'(a) = c\,f'(a)$.* $\square$

Demonstração: Pelo Teorema 22.1.6(b) tem-se que $g'(a) = c'\,f(a) \;+\; c\,f'(a) = c\,f'(a)$, pois $c' = 0$ segundo o Exemplo 22.1.3(a). $\blacksquare$

22.2 Derivação de Funções Compostas

22.2.1 Teorema (Regra da cadeia)**:** *Sejam f, g funções tais que g é derivável em a e f é derivável em $g(a)$. Então, $f \circ g$ é derivável em a e tem-se:*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\,g'(a). \qquad \square$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Dado que por hipótese f é derivável em $g(a)$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ respectivamente tais que:

$$|y - g(a)| < \delta_1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} - f'(g(a))\right| < \epsilon/3,$$

$$|y - g(a)| < \delta_2 \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} - f'(g(a))\right| < \frac{\epsilon/3}{1 + |g'(a)|}.$$

Seja $\delta_0 > 0$ definido como $\delta_0 := \min\{\delta_1,\, \delta_2\}$. Pelo Teorema 22.1.5 existe $\rho_0 > 0$ tal que:

$$|x - a| < \rho_0 \;\Rightarrow\; |g(x) - g(a)| < \delta_0.$$

Dado que também por hipótese g é derivável em a, existem $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$ respectivamente tais que:

$$|x - a| < \rho_1 \;\Rightarrow\; \left|\frac{g(x) - g(a)}{x - a} - g'(a)\right| < 1,$$

$$|x - a| < \rho_2 \;\Rightarrow\; \left|\frac{g(x) - g(a)}{x - a} - g'(a)\right| < \frac{\epsilon/3}{1 + |f'(g(a))|}.$$

Seja $\delta > 0$ definido como $\delta := \min\{\rho_0,\, \rho_1,\, \rho_2\}$. Por outro lado, observe que:

$$\begin{aligned}
&\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)}{x-a} \;-\; f'(g(a))g'(a) = \frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} \;-\; f'(g(a))g'(a)\\
&= \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \;-\; f'(g(a))g'(a)\\
&= \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g'(a)+g'(a)\right) \;-\; f'(g(a))g'(a)\\
&= \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g'(a)\right) \;+\; \left(\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}-f'(g(a))\right)g'(a)\\
&= \left(\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}-f'(g(a))+f'(g(a))\right)\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g'(a)\right)\\
&\quad+\;\left(\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}-f'(g(a))\right)g'(a)\\
&= \left(\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}-f'(g(a))\right)\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g'(a)\right)\\
&\qquad\qquad+\;f'(g(a))\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}-g'(a)\right)\\
&\qquad\qquad\qquad+\;\left(\frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}-f'(g(a))\right)g'(a).
\end{aligned}$$

Portanto, se $|x-a|<\delta$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(a)}{x-a} \;-\; f'(g(a))g'(a)\right| &\leqslant \frac{\epsilon}{3}\,1 \;+\; \frac{\epsilon}{3}\,\frac{|f'(g(a))|}{1+|f'(g(a))|} \;+\; \frac{\epsilon}{3}\,\frac{|g'(a)|}{1+|g'(a)|}\\
&< \frac{\epsilon}{3} \;+\; \frac{\epsilon}{3} \;+\; \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

22.2.2 Exemplo: Considere a função f definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0,\\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então f é derivável para todo $a \in \mathbb{R}$. Com efeito, no caso $a = 0$ tem-se:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}(1/x) = 0.$$

A última igualdade acima segue observando que $0 \leqslant |x \operatorname{sen}(1/x)| \leqslant |x|$, para todo $x \neq 0$. No caso $a \neq 0$ a derivada pode ser obtida através de um cálculo elementar, derivando diretamente a expressão para f. Desta maneira, tem-se:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \;-\; \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0,\\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

A expressão acima prova que f' não é contínua na origem 0. Com efeito, o termo $\cos(1/x)$ oscila infinitamente entre os valores ± 1, se $x = 1/k\pi$ com $k \in \mathbb{N}$ par ou ímpar, respectivamente. ♣

22.2.3 Exemplo: Considere a função f definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então f é derivável para todo $a \in \mathbb{R}$. Com efeito, no caso $a = 0$ tem-se:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \operatorname{sen}(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x) = 0.$$

A última igualdade acima segue observando que $0 \leqslant \left|x^2 \operatorname{sen}(1/x)\right| \leqslant |x^2|$, para todo $x \neq 0$. No caso $a \neq 0$ a derivada pode ser obtida através de um cálculo elementar, derivando diretamente a expressão para f. Desta maneira, tem-se:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) - x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Portanto, diferentemente do exemplo anterior, neste caso f' é contínua na origem 0. Por outro lado, derivando a expressão acima para $x \neq 0$ tem-se:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \\ &= 6x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 3\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 6x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 4\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

A última expressão acima prova que f'' não é contínua na origem 0. Com efeito, o segundo termo $\cos(1/x)$ oscila infinitamente entre os valores ± 1, se $x = 1/k\pi$ com $k \in \mathbb{N}$ par ou ímpar, respectivamente. Por outro lado, o terceiro termo diverge oscilando infinitamente entre os valores $\pm k\pi/2$, se $x = 2/k\pi$ e $k \in \mathbb{N}$ ímpar com resto 1 ou 3 na divisão por 4, respectivamente. ♣

Exercícios para o Capítulo 22

22.3 Funções Potenciais

22.3.1 Exercício: Derivar as seguintes funções *usando a definição*:

(a) $f(x) = c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante. R: 0.

(b) $f(x) = x$. R: 1.

(c) $f(x) = x^2$. R: $2x$.

(d) $f(x) = x^3$. R: $3x^2$.

(e) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. R: $1/2\sqrt{x}$.

Sugestão: Cfr. Exercício 18.11.1(d).

(f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. R: $-1/x^2$.

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. R: $-2/x^3$. ♣

22.3.2 Exercício: Seja $f(x) = x^3$. Calcule:

(a) $f'(3)$. R: $3.3^2 = 3.9 = 27$.

(b) $f'(5)$. R: $3.5^2 = 3.25 = 75$.

(c) $f'(6)$. R: $3.6^2 = 3.36 = 108$. ♣

22.3.3 Exercício: Determine $f''(x)$ no caso em que:

(a) $f(x) = x^3$. R: $6x$.

(b) $f(x) = x^5$. R: $20x^3$.

(c) $f'(x) = x^4$. R: $4x^3$. ♣

22.3.4 Exercício: Para cada uma das seguintes funções f, determine $f'(f(x))$.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. R: $-(1+x)^2/(2+x)^2$.

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x$. R: $\cos(\operatorname{sen} x)$.

(c) $f(x) = x^2$. R: $2x^2$.

(d) $f(x) = 17$. R: 0. ♣

22.3.5 Exercício: Para cada uma das seguintes funções f, determine $f(f'(x))$.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. R: $-x^2$.

(b) $f(x) = x^2$. R: $4x^2$.

(c) $f(x) = 17$. R: 17.

(d) $f(x) = 17x$. R: 17^2. ♣

22.4 *Tour de Force* até Exponentes Racionais

22.4.1 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$. Verifique que a derivada da função $f(x) = x^n$ é dada por $f'(x) = n\,x^{n-1}$. Existem pelo menos três maneiras de provar isso. Escolha a que preferir:

(a) Usando a definição. Tal vez resulte util lembrar aqui a fórmula do binómio:

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k.$$

(b) O Exercício 18.10.1(c) apresenta o cálculo dessa derivada mas sob uma diferente maquiagem. Se fez aquele exercício, então todo o trabalho já foi feito. Na verdade, o importante aqui consiste em perceber que isso é assim!

(c) Por indução em n. O caso $n = 1$ não é nada mais do que o item (b) do Exercício 22.3.1 anterior. Para provar a validez do passo inductivo será conveniente usar a regra de derivação de um produto. ♣

22.4.2 Exercício: Verifique que a derivada da função $f(x) = x^{-n}$ com $n \in \mathbb{N}$ é dada por $f'(x) = (-n)\,x^{(-n)-1}$.

Sugestão: Apenas observe-se que $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ e use a regra de derivação de um quociente mais o resultado do exercício anterior. ♣

22.4.3 Exercício: Verifique que a derivada da função $f(x) = x^{1/m}$ com $m \in \mathbb{N}$ é dada por $f'(x) = (1/m)\,x^{(1/m)-1}$. Existem pelo menos duas maneiras de provar isso. Escolha a que preferir:

(a) Usando a definição, em conjunto com a seguinte estratégia. Defina $z := (a+h)^{1/m}$ e $w := a^{1/m}$. Observe que com essa definição tem-se:

$$\frac{(a+h)^{1/m} - a^{1/m}}{h} = \frac{z-w}{z^m - w^m}.$$

Chegado nesse ponto, observe que $z^m - w^m = (z-w)\sum_{i=1}^{m} z^{m-i}w^{i-1}$.

(b) Se $f(x) = x^{1/m}$, então tomando a potência m-ésima tem-se $(f(x))^m = x$. Basta então derivar os dois lados dessa identidade. A derivada do lado direito é dada pelo Exercício 22.3.1(b). Para o lado esquerdo basta usar a regra de derivação de um produto, pois $(f(x))^m$ não é mais do que o produto de $f(x)$ com si mesma m vezes, $\underbrace{f(x)f(x)\cdots f(x)}_{m \text{ vezes}}$. ♣

22.4.4 Exercício: Verifique que a derivada da função $f(x) = x^{n/m}$ com $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$ é dada por $f'(x) = (n/m)\, x^{(n/m)-1}$.

Sugestão: A função $f(x) = x^{n/m} = (x^{1/m})^n$ é a composição de duas funções. Com efeito, se $g(x) = x^n$ e $h(x) = x^{1/m}$, então $f = g \circ h$. Use então a regra de derivação de funções compostas para derivar f. Para derivar a funções g e h use os resultados dos exercícios anteriores. ♣

Moral da história: A derivada de $f(x) = x^r$ com $r \in \mathbb{Q}$ é dada por $f'(x) = r\, x^{r-1}$.

22.5 Mais Para uma Prova da Irracionalidade de e^r com $0 \neq r \in \mathbb{Q}$

22.5.1 Exercício: Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja f_n a função definida por:

$$f_n(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

Verifique as seguintes propriedades:

(a) Se $0 < x < 1$, então $0 < f_n(x) < 1/n!$.

(b) $f_n^{(k)}(0) = 0$, se $k < n$.

(c) Se $k > 2n$, então $f_n^{(k)}(x) = 0$ para todo x.

(d) Para $n \leqslant k \leqslant 2n$ tem-se:

$$f_n^{(k)}(0) = (k-n)!\binom{k}{n}\binom{n}{k-n}(-1)^{k-n}.$$

(e) Em particular, $f_n^{(k)}(0)$ é *inteiro* para todo $k \in \mathbb{N}$.

(f) Mais ainda, $f_n^{(k)}(1)$ também é *inteiro* para todo $k \in \mathbb{N}$. ♣

22.6 Funções Trigonométricas

22.6.1 Exercício: Derivar as seguintes funções *usando a definição*:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$. R: $\cos x$.

Sugestão: Cf. Exercício 18.13.1(k).

(b) $f(x) = \cos x$. R: $-\operatorname{sen} x$. ♣

22.6.2 Exercício: Observe que $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$, ou equivalentemente, $\cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^{1/2}$. Obtenha novamente a derivada de $\cos x$ mas usando agora a regra de derivação de funções compostas ou, se preferir, de funções compostas e produtos, uma vez que $\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x$. ♣

22.6.3 Exercício: Usando a regra de derivação de produtos e quocientes obtenha as derivadas das demais funções trigonométricas:

(a) $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$. R: $-\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x$.

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. R: $\operatorname{tg} x \sec x$.

(c) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. R: $\sec^2 x$.

(d) $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$. R: $-\operatorname{cosec}^2 x$. ♣

22.7 Funções Trigonométricas Inversas

22.7.1 Exercício: Derive a função $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ usando a seguinte estratégia. A identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$ é válida para qualquer a. Em particular, se $a = \operatorname{arcsen} x$ tem-se:

$$1 = \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x) + \cos^2(\operatorname{arcsen} x) = x^2 + \cos^2(\operatorname{arcsen} x).$$

Portanto:

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

O resto consiste em derivar ambos membros dessa última igualdade usando a regra de derivação de funções compostas. R: $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. ♣

22.7.2 Exercício: Derive $f(x) = \arccos x$ usando uma estratégia parecida. R: $\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$. ♣

22.7.3 Exercício: Para derivar $f(x) = \operatorname{arctg} x$ a estratégia anterior deve ser ligeiramente modificada. Partindo novamente da identidade trigonométrica $\operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$ e dividindo os dois lados por $\cos^2(a)$ tem-se:

$$\operatorname{tg}^2(a) + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2(a)}{\cos^2(a)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(a)}.$$

Portanto:

$$\sec a = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(a)}.$$

Em particular, se $a = \operatorname{arctg} x$ tem-se:

$$\sec(\operatorname{arctg} x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

O resto é parecido. Basta derivar ambos membros dessa última desigualdade usando a regra de derivação de funções compostas. O Exercício 22.6.3(b) pode servir de alguma ajuda aqui. R: $\dfrac{1}{1+x^2}$. ♣

22.8 Um Pequeno Aquecimento

22.8.1 Exercício: Derivar as seguintes funções. Não tem truques. Apenas use todas as regras de derivação que for necessário.

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(x + x^2)$. R: $(\cos(x + x^2)).(1 + 2x)$.

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x^2$. R: $\cos x + (\cos x^2).2x$.

(c) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$. R: $(\cos(\cos x)).(-\operatorname{sen} x)$.

(d) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$. R: $(\cos(\operatorname{sen} x)).(\cos x)$.

(e) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$. R: $\cos\left(\dfrac{\cos x}{x}\right).\dfrac{(-\operatorname{sen} x).x - \cos x}{x^2}$.

(f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{x}$. R: $\dfrac{(\cos(\cos x)).(-\operatorname{sen} x).x - \operatorname{sen}(\cos x)}{x^2}$.

(g) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$. R: $(\cos(x + \operatorname{sen} x)).(1 + \cos x)$.

(h) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\operatorname{sen} x))$. R: $\cos(\cos(\operatorname{sen} x)).(-\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)).(\cos x)$. ♣

22.9 Derivar é Preciso

22.9.1 Exercício: Idem que o exercício anterior. As respostas constam no final.

(a) $f(x) = \operatorname{sen}[(x + 1)^2(x + 2)]$.

(b) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + \operatorname{sen} x)$.

(c) $f(x) = \operatorname{sen}^2((x + \operatorname{sen} x)^2)$.

(d) $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.

(e) $f(x) = \operatorname{sen}(x.\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)$.

(f) $f(x) = (\cos x)^{31^2}$.

(g) $f(x) = (\operatorname{sen}^2 x).(\operatorname{sen} x^2).(\operatorname{sen}^2 x^2)$.

(h) $f(x) = \operatorname{sen}^3(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x))$.

(i) $f(x) = (x + \operatorname{sen}^5 x)^6$.

(j) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))))$.

(k) $f(x) = \operatorname{sen}((\operatorname{sen}^7 x^7 + 1)^7)$.

(l) $f(x) = (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5$.

(m) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen}(x^2 + \operatorname{sen} x^2))$.

(n) $f(x) = \operatorname{sen}(6\cos(6\operatorname{sen}(6\cos 6x)))$.

(o) $f(x) = \dfrac{(\operatorname{sen} x^2).(\operatorname{sen}^2 x)}{1 + \operatorname{sen} x}$.

(p) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x + \operatorname{sen} x}}$.

(q) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$.

(r) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x - \operatorname{sen} x}\right)}\right)$. ♣

Respostas do Exercício 22.9.1:

(a) $(\cos[(x+1)^2(x+2)]).[2(x+1)(x+2) + (x+1)^2]$.

(b) $(3\operatorname{sen}^2(x^2 + \operatorname{sen} x)).(\cos(x^2 + \operatorname{sen} x)).(2x + \cos x)$.

(c) $(2\operatorname{sen}((x + \operatorname{sen} x)^2)).(\cos((x + \operatorname{sen} x)^2)).2(x + \operatorname{sen} x).(1 + \cos x)$.

(d) $\left(2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)\right).\cos\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right).\left(\dfrac{3x^2.\cos x^3 - x^3.(-\operatorname{sen} x^3).3x^2}{\cos^2 x^3}\right)$.

(e) $(\cos(x.\operatorname{sen} x)).[\operatorname{sen} x + x.\cos x] + (\cos(\operatorname{sen} x^2)).(\cos x^2).2x$.

(f) $(31^2.(\cos x)^{31^2-1}).(-\operatorname{sen} x)$.

(g)

$$(2\operatorname{sen} x).(\cos x).(\operatorname{sen} x^2).(\operatorname{sen}^2 x^2) + (\operatorname{sen}^2 x).(\cos x^2).2x.(\operatorname{sen}^2 x^2) + \\ (\operatorname{sen}^2 x).(\operatorname{sen} x^2).(2\operatorname{sen} x^2).(\cos x^2).2x.$$

(h) $(3\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x))).(\cos(\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x))).(2\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)).(\cos(\operatorname{sen} x)).\cos x$.

(i) $6(x+\operatorname{sen}^5 x)^5.[1+(5\operatorname{sen}^4 x).\cos x]$.

(j) $(\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))))).(\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))).(\cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))).(\cos(\operatorname{sen} x)).\cos x$.

(k) $(\cos((\operatorname{sen}^7 x^7+1)^7)).7(\operatorname{sen}^7 x^7+1)^6.(7\operatorname{sen}^6 x^7).(\cos x^7).7x^6$.

(l) $5(((x^2+x)^3+x)^4+x)^4.(4((x^2+x)^3+x)^3.(3(x^2+x)^2.(2x+1)+1)+1)$.

(m) $(\cos(x^2+\operatorname{sen}(x^2+\operatorname{sen} x^2))).[2x+(\cos(x^2+\operatorname{sen} x^2)).(2x+(\cos x^2).2x)]$.

(n) $(\cos(6\cos(6\operatorname{sen}(6\cos 6x)))).(-6\operatorname{sen}(6\operatorname{sen}(6\cos 6x))).(6\cos(6\cos 6x)).(-36\operatorname{sen} 6x)$.

(o) $\dfrac{[(\cos x^2).2x.(\operatorname{sen}^2 x)+(\operatorname{sen} x^2).(2\operatorname{sen} x).\cos x].(1+\operatorname{sen} x)-(\operatorname{sen} x^2).(\operatorname{sen}^2 x).\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$.

(p) $\dfrac{(1+\cos x).(x(x+\operatorname{sen} x)-2)-(x+\operatorname{sen} x).[(x+\operatorname{sen} x)+x(1+\cos x)]}{[x(x+\operatorname{sen} x)-2]^2}$.

(q)

$$\left(\cos\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)\right)\times \\ \times\frac{3x^2.\left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)\right)-x^3.\left(\cos\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)\right).\left(\dfrac{3x^2.\operatorname{sen} x-x^3.\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}.$$

(r)

$$\left(\cos\left(\frac{x}{x-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)}\right)\right)\times \\ \times\frac{\left[x-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)\right]-x.\left[1-\left(\cos\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)\right).\dfrac{(x-\operatorname{sen} x)-x.(1-\cos x)}{(x-\operatorname{sen} x)^2}\right]}{\left[x-\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)\right]^2}.\clubsuit$$

Capítulo 23

Consequências da Derivabilidade

23.1 Pontos Críticos

23.1.1 Definição: Seja f uma função e A um conjunto de números contido no seu domínio. Se diz que um ponto $x \in A$ é um **ponto de máximo** de f em A se:

$$f(x) \geqslant f(y), \, \forall \, y \in A.$$

Em tal caso, o número $f(x)$ recebe o nome de **valor máximo** de f em A. Costuma-se dizer também que f "atinge em x" o seu valor máximo em A. ♣

23.1.2 Definição: Seja f uma função e A um conjunto de números contido no seu domínio. Se diz que um ponto $x \in A$ é um **ponto de mínimo** de f em A se x for um ponto de máximo da função $-f$. ♣

23.1.3 Lema: *Seja f uma função definida em (a, b). Se x é um ponto de máximo, ou de mínimo, de f em (a, b) e f for derivável em x, então $f'(x) = 0$.* □

Demonstração: Para fixar idéias, suponha que x seja um ponto de máximo. Em particular:

$$f(x) \geqslant f(x+h), \; \forall \; h \text{ tal que } x+h \in (a, b).$$

Como por hipótese f é derivável em x, tem-se:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|} \leqslant 0.$$

Por outro lado, pelo mesmo motivo, também tem-se que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{-|h|} \geqslant 0.$$

Combinado as duas identidades acima, deve ser $f'(x) = 0$. A prova no caso em que x é um ponto de mínimo é totalmente análoga. ∎

23.1.4 Observação: **(a)** Este resultado não é válido se a função não é derivável. Considere-se, por exemplo, a função $f(x) = |x|$ no ponto $x = 0$.

(b) A recíproca do resultado anterior *não* é verdadeira. Ou seja, se $f'(x) = 0$ então o ponto x não é necessariamente um ponto de máximo (ou de mínimo) da função f. Considere-se, por exemplo, a função $f(x) = x^3$ no ponto $x = 0$. ♣

O segundo item da observação anterior serve como motivação para que os pontos x tais que $f'(x) = 0$ sejam destacados com uma definição própria, a seguir.

23.1.5 Definição: Denomina-se **ponto crítico**, ou **ponto singular**, de uma função f a todo ponto x tal que $f'(x) = 0$.

Em tal caso, o número $f(x)$ recebe o nome de **valor crítico**, ou **valor singular**, da f. ♣

23.2 Teorema do Valor Médio

23.2.1 Teorema (de Rolle): *Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) com $f(a) = f(b)$. Então, existe algum $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.* □

Demonstração: Como f é contínua em $[a, b]$, deve atingir um valor máximo e um valor mínimo em tal intervalo, pelo Teorema 19.2.3. Se tais valores máximo e mínimo estiverem ambos localizados nos extremos do intervalo, a função deveria ser constante, pela hipótese que $f(a) = f(b)$, e portanto $f'(\xi) = 0$ para todo $\xi \in (a, b)$. Por outro lado, no caso em que ou bem o valor máximo, ou bem o valor mínimo, pertence ao intervalo aberto (a, b), basta aplicar o Lema 23.1.3. ∎

23.2.2 Teorema (do Valor Médio): *Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável (a, b). Então, existe algum $\xi \in (a, b)$ tal que:*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$ □

Demonstração: Seja g a função linear definida como:

$$g(x) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) \ + \ f(a).$$

Incidentalmente, o gráfico da função g consiste na reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Considere agora a função $h(x) := f(x) - g(x)$. Observe que h é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) com $h(a) = 0 = h(b)$. Pelo Teorema de Rolle anterior, existe $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A relação acima prova o teorema. Apenas a título observação, a constante $f(a)$ é irrelevante na função g e basicamente a mesma prova funciona adotando a função h definida como:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

A única diferença neste caso consiste em que $h(a) = f(a) = h(b)$. ∎

23.2.3 Corolário: ***(a)*** *Seja f definida em um intervalo e tal que $f'(x) = 0$ para todos os x no intervalo. Então f é constante no intervalo.*

(b) *Sejam f e g definidas num mesmo intervalo e tais que $f'(x) = g'(x)$ para todos os x no intervalo. Então existe algum número $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + c$ no intervalo.* □

Demonstração: **(a)** Por *reductio ad absurdum*, suponha que existam $x, y \in (a, b)$ com $x \neq y$ tais que $f(x) \neq f(y)$. Sem perda de generalidade suponha que $x < y$. Como f é derivável em (a, b), resulta contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y). Pelo Teorema do Valor Médio anterior, existe $\xi \in (x, y)$ tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Mas $f'(\xi) = 0$ por hipótese, de onde segue que $f(x) = f(y)$, contradizendo a suposição $f(x) \neq f(y)$.

(b) Basta aplicar o resultado do item anterior à função $f(x) - g(x)$. ∎

Uma outra consequência importante do Teorema do Valor Médio (TVM) será dada a seguir, após introduzir um par de definições pertinentes.

23.2.4 Definição: Uma função f é denominada **estritamente crescente**, ou simplesmente **crescente** se não houver lugar a confusão, num dado intervalo se $f(x) < f(y)$ quando x e y são pontos do intervalo tais que $x < y$. ♣

23.2.5 Definição: Analogamente, uma função f é denominada **estritamente decrescente**, ou simplesmente **decrescente** se não houver lugar a confusão, num dado intervalo se $f(x) > f(y)$ quando x e y são pontos do intervalo tais que $x < y$. ♣

23.2.6 Observação: Uma função f é crescente se e somente se $-f$ é decrescente. Reciprocamente, f é decrescente se e somente se $-f$ é crescente. ♣

23.2.7 Teorema: ***(a)*** *Se $f'(x) > 0$ para todo x num dado intervalo, então f é estritamente crescente nesse intervalo.*

(b) *Se $f'(x) < 0$ para todo x num dado intervalo, então f é estritamente decrescente nesse intervalo.* □

Demonstração: **(a)** Sejam $x, y \in (a,b)$ com $x < y$. Como f é derivável em (a,b), resulta contínua em $[x,y]$ e derivável em (x,y). Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (x,y)$ tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Mas $f'(\xi) > 0$ por hipótese, de onde segue que $f(x) < f(y)$, ou seja, f é estritamente crescente.

(b) Prova-se de maneira totalmente análoga ao item anterior. Alternativamente, basta aplicar o item anterior à função $-f$ e usar a observação que precede o enunciado do presente teorema. ∎

Finalmente, encerrando esta seção, uma ligeira generalização do Teorema do Valor Médio que será de certa utilidade em um capítulo posterior.

23.2.8 Teorema (do Valor Médio de Cauchy)**:** *Sejam f e g contínuas em $[a,b]$ e deriváveis (a,b). Então, existe um número ξ em (a,b) tal que:*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, f'(\xi).$$ □

Demonstração: Considere a função $h(x) := f(x) - \alpha\, g(x)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante não especificada pelo momento. Observe que h é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Deseja-se escolher α de maneira tal que $h(a) = h(b)$. Para tanto, observe que:

$$f(a) - \alpha\, g(a) = h(a) = h(b) = f(b) - \alpha\, g(b) \;\Rightarrow\; \alpha(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$$
$$\Rightarrow\; \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Pelo Teorema de Rolle 23.2.1, existe $\xi \in (a,b)$ tal que:

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \alpha\, g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(\xi).$$

A relação acima prova o teorema no caso $g(a) \neq g(b)$. Se fosse $g(a) = g(b)$ mas $f(a) \neq f(b)$ a prova é análoga tomando h da forma $h(x) = \alpha\, f(x) - g(x)$. Se fosse $g(a) = g(b)$ e $f(a) = f(b)$ a identidade do enunciado se reduz à forma $0 = 0$ e teorema é trivial, ou seja, basta tomar qualquer $\xi \in (a,b)$. Apenas a título de observação, uma prova sem necessidade de considerar diversos casos particulares pode ser obtida basicamente com o mesmo raciocínio adotando a função h definida como:

$$h(x) = [g(b) - g(a)]\, f(x) - [f(b) - f(a)]\, g(x).$$

A única diferença neste caso consiste em que $h(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a) = h(b)$. ∎

23.3 A Regra de L'Hôpital

23.3.1 Teorema: *Seja f contínua em a e tal que $f'(x)$ existe para todo x em um intervalo que contem a exceto posivelmente para $x = a$. Suponha-se que existe $\lim_{x\to a} f'(x)$. Então, existe também $f'(a)$ e tem-se:*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

Em outras palavras, uma derivada não pode ter discontinuidades evitáveis. □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Denotando $r := \lim_{x\to a} f'(x)$, por hipótese existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f'(x) - r| < \epsilon.$$

Por outro lado, para $h > 0$ suficientemente pequeno, a função f é contínua em $[a, a+h]$ e derivável em $(a, a+h)$. Pelo TVM 23.2.2 existe $\xi(h) \in (a, a+h)$ tal que:

$$f'(\xi(h)) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Tomando $0 < h < \delta$ tem-se que $0 < |\xi(h) - a| < h < \delta$, pois $\xi(h) \in (a, a+h)$. Portanto:

$$\left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - r\right| = |f'(\xi(h)) - r| < \epsilon.$$

A identidade acima prova que:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = r.$$

Considerando agora $h < 0$ suficientemente pequeno, prova-se analogamente que:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = r.$$

Portanto o seguinte limite existe e vale r, ou seja:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = r = \lim_{x\to a} f'(x).$$ ∎

23.3.2 Teorema (Regra de L'Hôpital)**:** *Sejam f e g tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Suponha-se que existe $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Então, existe também $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ e tem-se:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Denotando:

$$r := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

por hipótese existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - r\right| < \epsilon.$$

Além disso, observe que a hipótese da existência de tal limite contém implicitamente as seguintes suposições:

1. Existe $\rho > 0$ tal que $f'(x)$ e $g'(x)$ existem para todo $x \in (a-\rho, a+\rho)$ exceto possivelmente para $x = a$.

2. Nesse intervalo $g'(x) \neq 0$, novamente com a possível exeção de $x = a$.

Por outro lado, não se supõe necessariamente que f e g estejam definidas em a. Contudo, definindo $f(a) = 0 = g(a)$, mudando se for necessário os valores anteriores de $f(a)$ e $g(a)$ caso estejam definidos, então f e g resultam contínuas em a. Desta maneira, se $a < x < a + \rho$, então o TVM e o TVM de Cauchy podem ser aplicados a f e g no intervalo $[a, x]$. Em primeiro lugar, observe que deve ser $g(x) \neq 0$, pois caso contrário, ou seja, se fosse $g(x) = 0$, aplicando o TVM a g no intervalo $[a, x]$ existiria $y \in (a, x)$ tal que:

$$g'(y) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = 0,$$

contradizendo a suposição 2 anterior. Agora, aplicando o TVM de Cauchy a f e g no intervalo $[a, x]$, existe $\xi(x) \in (a, x)$ tal que:

$$\begin{aligned} f(x)\, g'(\xi(x)) &= [f(x) - 0]\, g'(\xi(x)) = [f(x) - f(a)]\, g'(\xi(x)) \\ &= [g(x) - g(a)]\, f'(\xi(x)) = [g(x) - 0]\, f'(\xi(x)) = g(x)\, f'(\xi(x)), \end{aligned}$$

ou seja:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}.$$

Tomando $0 < \rho < \delta$ tem-se que $0 < |\xi(x) - a| < \rho < \delta$, pois $\xi(x) \in (a, x)$. Portanto:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - r\right| = \left|\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} - r\right| < \epsilon.$$

A identidade acima prova que:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = r.$$

Considerando agora $a - \rho < x < a$, o TVM e o TVM de Cauchy podem ser aplicados a f e g no intervalo $[x, a]$ e prova-se analogamente que:

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = r.$$

Portanto o seguinte limite existe e vale r, ou seja:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = r = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \blacksquare$$

Exercícios para o Capítulo 23

23.4 Pontos Críticos

23.4.1 Exercício: Determinar os pontos de críticos da f nos seguintes casos:

(a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$. R: $x = 1/3$ e $x = -5$.

(b) $f(x) = x^{6/5} - 12x^{1/5}$. R: $x = 2$.

(c) $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$. R: $x = 0$.

(d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 5x + 4}$. R: $x = -1 \pm \sqrt{10}$. ♣

23.5 Extremos Condicionados

23.5.1 Exercício: Seja $P > 0$. Se x e y são números tais que $x + y = P$, quais são os valores de x e y que maximizam o produto xy? R: $x = y = P/2$. ♣

23.5.2 Exercício: Dispõe-se de um arame de 200 metros de comprimento para cercar uma área de pastagem de forma retangular. Como deve ser escolhido o comprimento de cada um dos lados do retângulo para que a superfície encerrada sejam máxima? R: de 50 m. cada lado. ♣

23.5.3 Exercício: Seja $P > 0$. Se x e y são números tais que $x + y = P$, quais são os valores de x e y que minimizam a soma quadrática $x^2 + y^2$? R: $x = y = P/2$. ♣

23.5.4 Exercício: Expresse o número 4 como soma de dois números positivos de maneira tal que a soma do quadrado do primeiro mais o quadrado do segundo seja mínima. R: $4 = 2 + 2$. ♣

23.5.5 Exercício: Seja $S \in \mathbb{R}$. Se x e y são números tais que $xy = S$, quais são os valores reais de x e y que minimizam a soma quadrática $x^2 + y^2$? R: $(x, y) = (\sqrt{|S|}, S/\sqrt{|S|})$ ou $(x, y) = (-\sqrt{|S|}, -S/\sqrt{|S|})$, se $S \neq 0$; $x = y = 0$ se $S = 0$. ♣

23.5.6 Exercício: Determine qual é o ponto da hipérbole $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} : xy = 1\}$ que fica mais perto da origem. R: $(x, y) = (1, 1)$ ou $(x, y) = (-1, -1)$. ♣

23.5.7 Exercício: Seja $S > 0$. Se x e y são números tais que $xy = S$, quais são os valores positivos de x e y que minimizam a soma $x + y$? R: $x = y = +\sqrt{S}$. ♣

23.5.8 Exercício: Prove que a média geométrica de dois números positivos nunca excede a sua média aritmética. Ou seja, dados $a, b > 0$, sempre tem-se:

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Sugestão: O produto de a vezes b é positivo e pode ser denotado como $S = ab > 0$. Pelo exercício anterior sabe-se que a soma $a+b$ resulta mínima quando $a = b = \sqrt{S}$. Ou seja, $a+b \geqslant \sqrt{S}+\sqrt{S} = 2\sqrt{S} = 2\sqrt{ab}$. ♣

23.5.9 Exercício: Deseja-se construir um campo esportivo com perímetro total $P = 1000$ metros. O projeto apresenta formato retangular com duas regiões semicirculares anexadas em um par de lados opostos.

(a) Qual seria a máxima área possível para o campo? R: $P^2/4\pi$ m^2.

(b) O que acontece se o projeto original for modificado com mais duas regiões semicirculares anexadas no outro par de lados opostos?

(c) Como no item anterior, mas ignorando a área do retângulo. Observe que a fórmula do perímetro muda neste caso. ♣

23.5.10 Exercício: Uma firma comercial deseja estocar seu produto em recipientes cilíndricos de raio r e altura h. Se cada recipiente deve acomodar um volume fixo $V = 1000$ cm^3, qual será o formato cilíndrico que permite baratear as despesas com as embalagens.

Sugestão: Obviamente, será aquele formato que tiver área mínima para o volume dado, pois nesse caso maior quantidade de material será poupada. R: $r = (V/2\pi)^{1/3}$ e $h = (4V/\pi)^{1/3} = 2r$. ♣

23.5.11 Exercício: Dados n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a **média aritmética** é denotada $\overline{x}$ e definida por:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

(a) Verifique que $\overline{x}$ minimiza o **desvio padrão** σ, também denominado **erro quadrático médio**, dado pela expressão:

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2}.$$

(b) Qual é a relação entre o *valor* mínimo $\sigma(\overline{x})$ do desvio padrão e a **variância** do conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de dados? ♣

23.6 Teorema de Rolle

23.6.1 Exercício: Considere a função $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Prove que $f(-1) = f(1) = 0$ e que $f'(x)$ nunca anula-se no intervalo $[-1, 1]$. Explique por que esse resultado não contradiz o Teorema de Rolle. ♣

23.6.2 Exercício: Considere a equação $ax^3 + bx + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com a e b não simultaneamente nulos.

(a) Verifique a existência de (pelo menos) uma raiz real.

Sugestão: Faça um gráfico aproximado da função $f(x) = ax^3 + bx + c$. Observe-se que esta função é contínua em todo $\mathbb{R}$ e use o Teorema 19.3.2.

(b) Suponha que a e b têm o mesmo sinhal. Ou seja, equivalentemente, suponha que $a/|a| = b/|b|$. Verifique que a raiz do item anterior é *única*.

Sugestão: Use *reductio ad absurdum* e o Teorema de Rolle para forçar uma contradição.

(c) Suponha agora que a e b têm sinhal contrário. Ou seja, equivalentemente, suponha que $a/|a| = -b/|b|$. Verifique que neste caso não pode existir nenhuma raiz no intervalo $[-\sqrt{-b/3a}, \sqrt{-b/3a}]$.

Sugestão: Use o Teorema de Rolle para determinar a localização de uma eventual raiz. ♣

23.6.3 Exercício: Uma função f é denominada de **classe C^n** se f é n vezes derivável e a derivada n-ésima $f^{(n)}$ é contínua. Em tal caso, denota-se $f \in C^n$.

(a) Seja $f \in C^n$ tal que f admite $n+1$ raizes reais. Ou seja, $f(x) = 0$ para $n+1$ valores de $x \in \mathbb{R}$. Prove que $f^{(n)}(x) = 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$.

Sugestão: use o Teorema de Rolle n vezes.

(b) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in [a, b]$. Seja f de classe C^{n+1} em $[a, b]$ e seja P polinômio de grau menor o igual que n tal que $P(x_i) = f(x_i)$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Prove que para todo $x \in [a, b]$ existe algum $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(x) - P(x) = Q(x)\,\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

onde Q é definido por $Q(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)$.

Sugestão: dado $x \in [a,b]$, considere a funcão F definida por:

$$F(t) = Q(x)\,[f(t) - P(t)] - Q(t)\,[f(x) - P(x)].$$

Observe que $F \in C^{n+1}$ e que $F(t) = 0$ para $n+2$ valores de t, a saber, os $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ e x. Pelo item (a) anterior, existe c tal que:

$$0 = F^{(n+1)}(c) = Q(x)\,[f^{(n+1)}(c) - P^{(n+1)}(t)] - Q^{(n+1)}(c)\,[f(x) - P(x)] = \text{etc. etc.}$$ ♣

23.7 Teorema do Valor Médio

23.7.1 Exercício: Em cada um dos seguintes casos decida se o Teorema do Valor Médio é aplicável. Em caso afirmativo, determine um número ξ em (a,b) tal que $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Caso contrário, justifique por quê tal resultado não é aplicável.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, no intervalo $(-2,-1)$. R: $\xi = -\sqrt{2}$.

(b) $f(x) = |x-1|$, no intervalo $(0,2)$. R: A funcão não é derivável em $x = 1$.

(c) $f(x) = x^2 + 1$, no intervalo $(1,2)$. R: $\xi = 3/2$.

(d) A função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{se } x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } 1 \leqslant x; \end{cases}$$

no intervalo $[0,2]$. R: $\xi = 1/2$ e $\xi = \sqrt{2}$. ♣

23.7.2 Exercício: Considere as funções $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{-x}{x+1}$.

(a) Calcule $f'(x)$ e $g'(x)$. O que encontra?

(b) Qual é a constante pela qual essas funções diferem? R: $f = g + 1$. ♣

23.7.3 Exercício: Determine, em cada um dos seguintes casos, as funções f definidas pelas condições:

(a) $f'(x) = x$ e $f(0) = 1$. R: $x^2/2 + 1$.

(b) $f'(x) = x^2 - 2x - 4$ e $f(3) = -6$. R: $x^3/3 - x^2 - 4x + 6$.

(c) $f'(x) = x^2 + 3x - 1$ e $f(1) = 5$. R: $x^3/3 + 3x^2/2 - 1x + 25/6$. ♣

23.7.4 Exercício: Suponha-se que $f(1) = 1$, $f'(1) = 3$, $f''(1) = 6$ e $f'''(x) = 0$ para todo x.

(a) Determine que $f''(x) = 6$ para todo x.

(b) Verifique que $f'(x) = 6x - 3$ para todo x.

(c) Conclua finalmente que $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$ para todo x. ♣

23.7.5 Exercício: Determine, em cada um dos seguintes casos, todas as funções f tais que:

(a) $f'(x) = \operatorname{sen} x$. R: $-\cos x + c$.

(b) $f''(x) = x^3$. R: $x^5/20 + cx + d$.

(c) $f'''(x) = x + x^2$. R: $x^4/24 + x^5/60 + cx^2/2 + dx + a$. ♣

23.7.6 Exercício: Seja f tal que $f''(x) = x^2 - 3x$ com a condição adicional que $f(0) = 1$ e $f(1) = 7/12$. Quanto vale $f(-1)$? R: $f(x) = x^4/12 - x^3/2 + 1$. Assim, $f(-1) = 19/12$. ♣

23.7.7 Exercício: Verifique que $\dfrac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \dfrac{1}{8}$ sem calcular $\sqrt{66}$.

Sugestão: $8 = \sqrt{64}$. ♣

23.8 Regra de L'Hôpital

23.8.1 Exercício: **(a)** Determine qual é o erro na seguinte aplicação da Regra de LHôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

(b) Qual é o valor correto desse limite? R: -4. ♣

23.8.2 Exercício: Determine o valor dos seguintes limites *usando a Regra de L'Hôpital*:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$. R: 1.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$. R: -1.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen}(2x)}{x - \operatorname{sen}(2x)}$. R: -3.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$. R: 1.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{arcsen}(x)\, \operatorname{cosec}(x)$. R: 1. ♣

23.8.3 Exercício: Determine $f'(0)$ quando f é a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$$

onde g é uma função tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e $g''(0) = 17$. R: 17/2. ♣

Capítulo 24

Quem não é Côncavo pode ser Convexo

24.1 Funções Convexas

24.1.1 Lema: *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$. Então, o intervalo (x, y) pode ser expressado como:*

$$(x, y) = \{\lambda\, x + (1 - \lambda)\, y \,:\, \lambda \in (0, 1)\}. \qquad \square$$

Demonstração: Para provar a contenção ($\supseteq$), dado $\lambda \in (0, 1)$ tem-se:

$$\begin{aligned} x = x + \lambda\, x - \lambda\, x = \lambda\, x + (1 - \lambda)\, x < \lambda\, x + (1 - \lambda)\, y \\ < \lambda\, y + (1 - \lambda)\, y = \lambda\, y + y - \lambda\, y = y. \end{aligned}$$

Observe que as duas desigualdades acima decorrem da hipótese $x < y$.

Para provar a contenção recíproca ($\subseteq$), dado $z \in (x, y)$, ou seja, $x < z < y$, tem-se:

$$\begin{aligned} & x < z \;\Rightarrow\; -x > -z \;\Rightarrow\; y - x > y - z, \\ & x < y \;\Rightarrow\; y - x > 0, \\ & z < y \;\Rightarrow\; y - z > 0. \end{aligned}$$

Combinando as relações acima, tem-se:

$$0 < \frac{y - z}{y - x} < 1$$

Portanto, pode ser definido $\lambda \in (0, 1)$ como:

$$\lambda := \frac{y - z}{y - x}.$$

Em tal caso, tem-se:

$$\begin{aligned} z &= \frac{y-x}{y-x}\,z = \frac{yz-xz}{y-x} = \frac{yz-xz+xy-xy}{y-x} = \frac{(y-z)\,x+(z-x)\,y}{y-x} \\ &= \frac{y-z}{y-x}\,x + \frac{z-x}{y-x}\,y = \lambda\,x + \frac{y-y+z-x}{y-x}\,y = \lambda\,x + \frac{(y-x)-(y-z)}{y-x}\,y \\ &= \lambda\,x + \left(1-\frac{y-z}{y-x}\right)\,y = \lambda\,x+(1-\lambda)\,y. \end{aligned}$$ ∎

24.1.2 Lema: *Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a,b). Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *Para todo $x, y \in (a,b)$ tem-se:*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda\,f(x)+(1-\lambda)\,f(y); \quad \forall\, 0<\lambda<1.$$

2. *Para todo $x, y \in (a,b)$ tem-se:*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}; \quad \forall\, x<z<y.$$

3. *Para todo $x, y \in (a,b)$ tem-se:*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}; \quad \forall\, x<z<y.$$

4. *Para todo $x, y \in (a,b)$, o segmento retilíneo que une $(x, f(x))$ com $(y, f(y))$ fica por cima do gráfico da f.* □

Demonstração: Sejam $x, y \in (a,b)$. Observe que:

$$\begin{aligned} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z},\ \forall\, x<z<y &\Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(y-z) \leqslant f(y)-f(z) \\ &\Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(z-y) \geqslant f(z)-f(y). \end{aligned} \tag{24.1.1}$$

Dado que:

$$z-y = z-x+x-y = (z-x)+(x-y) = (z-x)-(y-x),$$

o membro esquerdo da última relação em (24.1.1) acima pode ser expressado como:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(z-x) \;-\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(y-x) \;=\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(z-x) \;-\; f(y) \;+\; f(x).$$

Portanto, a última relação em (24.1.1) é equivalente com:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(z-x) \geqslant f(z)-f(y)+f(y)-f(x) \Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x},\ \forall\, x<z<y. \tag{24.1.2}$$

A combinação das relações (24.1.1) e (24.1.2) fornece uma prova da equivalência (3) $\Leftrightarrow$ (2). Por outro lado, pelo Lema 24.1.1, a última relação em (24.1.2) acima é equivalente com:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant \frac{f(\lambda\,x+(1-\lambda)\,y)-f(x)}{\lambda\,x+(1-\lambda)\,y-x},\ \ \forall\ 0<\lambda<1$$
$$\Leftrightarrow f(\lambda\,x+(1-\lambda)\,y) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(\lambda\,x+(1-\lambda)\,y-x)+f(x),\ \ \forall\ 0<\lambda<1. \quad (24.1.3)$$

Observe que para todo $0<\lambda<1$ o membro direito da última relação em (24.1.3) acima pode ser expressado como:

$$\begin{aligned}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(\lambda\,x+(1-\lambda)\,y-x)+f(x) &= \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,[(1-\lambda)\,y-(1-\lambda)\,x]+f(x)\\ &= \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(1-\lambda)\,(y-x)+f(x)\\ &= (f(y)-f(x))\,(1-\lambda)+f(x)\\ &= (1-\lambda)\,f(y)-f(x)+f(x)\,\lambda+f(x)\\ &= \lambda\,f(x)+(1-\lambda)\,f(y).\end{aligned}$$

Portanto, a última relação em (24.1.3) é equivalente com:

$$f(\lambda\,x+(1-\lambda)\,y) \leqslant \lambda\,f(x)+(1-\lambda)\,f(y),\ \ \forall\ 0<\lambda<1.$$

A combinação da última relação em (24.1.2) junto com (24.1.3) e a relação acima fornece uma prova da equivalência (2) $\Leftrightarrow$ (1). Por outro lado, observe que a condição 4 é equivalente com:

$$f(z) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(z-x)+f(x),\ \ \forall\ x<z<y$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x},\ \ \forall\ x<z<y.$$

A relação acima prova finalmente a equivalência (4) $\Leftrightarrow$ (2). ∎

24.1.3 Definição: Uma função f definida num intervalo aberto (a,b) denomina-se **convexa** se é satisfeita alguma, logo qualquer uma, das condições equivalentes do Lema 24.1.2. ♣

24.1.4 Definição: Uma função f definida num intervalo aberto (a,b) denomina-se **côncava** se a função $-f$ é convexa. ♣

24.1.5 Lema: *Seja f convexa no intevalo aberto (a,b). Sejam $x,y,x',y' \in (a,b)$ tais que $x \leqslant x' < y'$ e $x < y \leqslant y'$. Então:*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}.$$

Em outras palavras, a corda sobre (x',y') tem maior pendente que a corda sobre (x,y). □

Demonstração: Antes da prova, talvez valha a pena interpretar gráficamente o enunciado do presente resultado. Para tanto, observe que:

$$L(z) := \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,(z-x)+f(x)$$

é a expressão funcional da reta que une o ponto $(x, f(x))$ com $(y, f(y))$. A condição 2 do Lema 24.1.2 estabelece que a pendiente desta reta é maior que a pendiente da reta que une o ponto $(z, f(z))$ com $(x, f(x))$, para todo $x < z < y$ se f é convexa, o que é óbvio graficamente. Analogamente, a condição 3 do Lema 24.1.2 estabelece que a pendiente da reta que une o ponto $(x, f(x))$ com $(y, f(y))$ é *menor* que a pendiente da reta que une o ponto $(z, f(z))$ com $(y, f(y))$.

Voltando para a prova propriamente dita, considere em primeiro lugar o caso $y \leqslant x'$. Em tal caso, pela condição 2 do Lema 24.1.2 aplicada aos pontos $x = x$, $z = y$ e $y = y'$ tem-se:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y')-f(x)}{y'-x}.$$

Por outro lado, pela condição 3 do Lema 24.1.2 aplicada aos pontos $x = x$, $z = x'$, e $y = y'$ tem-se:

$$\frac{f(y')-f(x)}{y'-x} \leqslant \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}.$$

Portanto, o afirmado no enunciado do presente resultado segue neste caso combinando as duas últimas desigualdades:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}.$$

Considere agora o caso $x' < y$. Em tal caso, pela condição 2 do Lema 24.1.2 aplicada aos pontos $x = x$, $z = y$ e $y = y'$ tem-se:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y')-f(x)}{y'-x}.$$

Por outro lado, pela condição 3 do Lema 24.1.2 aplicada aos pontos $x = x$, $z = x'$, e $y = y'$ tem-se:

$$\frac{f(y')-f(x)}{y'-x} \leqslant \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}.$$

Portanto, o afirmado no enunciado do presente resultado segue neste caso combinando as duas últimas desigualdades:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}.$$

Para uma outra prova da relação acima, considere alternativamente o seguinte argumento. Pela condição 3 do Lema 24.1.2 aplicada aos pontos $x = x$, $z = x'$ e $y = y$ tem-se:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x')}{y-x'}.$$

Por outro lado, pela condição 2 do Lema 24.1.2 aplicada aos pontos $x = x'$, $z = y$, e $y = y'$ tem-se:

$$\frac{f(y)-f(x')}{y-x'} \leqslant \frac{f(y')-f(x')}{y'-x'}.$$

Portanto, o afirmado no enunciado do presente resultado segue neste caso combinando as duas últimas desigualdades. ∎

24.2 Convexidade e Continuidade

24.2.1 Lema: *Seja f convexa no intevalo aberto (a, b). Então f é* absolutamente *contínua em cada subintervalo fechado de (a, b).* □

Demonstração: Sejam $x, y \in [c, d] \subset (a, b)$, e sem perda de generalidade suponha $x < y$. Pelo Lema 24.1.5 aplicado aos pontos $x = a$, $y = c$, $x' = x$, $y' = y$, tem-se:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Por outro lado, pelo mesmo Lema 24.1.5 aplicado agora aos pontos $x = x$, $y = y$, $x' = d$, $y' = b$, tem-se:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(b) - f(d)}{b - d}.$$

Combinando as duas últimas desigualdades,tem-se:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(b) - f(d)}{b - d}.$$

Sejam agora m_1 e m_2 definidos por:

$$m_1 := \left| \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right|;$$
$$m_2 := \left| \frac{f(b) - f(d)}{b - d} \right|.$$

Então, da última desigualdade dupla anterior segue que:

$$-m_1 \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant m_2.$$

Finalmente, definindo $M := \max\{m_1, m_2\}$, segue da última relação acima que:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant M\ |y - x|,$$

de onde a continuidade absoluta da f segue trivialmente. ∎

24.2.2 Observação: Na prova do resultado anterior foi demonstrado que que toda função convexa é na verdade uma função *Lipschitz*. ♣

24.3 Convexidade e Diferenciabilidade

24.3.1 Lema: *Seja f convexa no intevalo aberto (a, b) e considere $x_0 \in (a, b)$.*

(a) *Sejam $0 < h_1 < h_2$, tais que $x_0 + h_1, x_0 + h_2 \in (a, b)$. Então tem-se:*

$$\frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0)}{h_1} \leqslant \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0)}{h_2}.$$

(b) *Sejam $l_2 < l_1 < 0$, tais que $x_0 + l_2, x_0 + l_1 \in (a,b)$. Então tem-se:*

$$\frac{f(x_0+l_2)-f(x_0)}{l_2} \leqslant \frac{f(x_0+l_1)-f(x_0)}{l_1}.$$

(c) *Sejam $l < 0 < h$, tais que $x_0 + l, x_0 + h \in (a,b)$. Então tem-se:*

$$\frac{f(x_0+l)-f(x_0)}{l} \leqslant \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

□

Demonstração: **(a)** Se $0 < h_1 < h_2 < 0$, aplicando a condição 2 do Lema 24.1.2 com $x = x_0$, $z = x_0 + h_1$ e $y = x_0 + h_2$, tem-se:

$$\frac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1} \leqslant \frac{f(x_0+h_2)-f(x_0)}{h_2}.$$

(b) Analogamente, se $l_2 < l_1 < 0$, aplicando a condição 3 do Lema 24.1.2 com $x = x_0 + l_2$, $z = x_0 + l_1$ e $y = x_0$, tem-se:

$$\frac{f(x_0)-f(x_0+l_2)}{-l_2} \leqslant \frac{f(x_0)-f(x_0+l_1)}{-l_1}.$$

Portanto:

$$\frac{f(x_0+l_2)-f(x_0)}{l_2} \leqslant \frac{f(x_0+l_1)-f(x_0)}{l_1}.$$

(c) Considerando agora $l < 0 < h$, aplicando o Lema 24.1.5 com $x = x_0 + l$, $y = x_0 = x'$ e $y' = x_0 + h$, tem-se:

$$\frac{f(x_0)-f(x_0+l)}{-l} \leqslant \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Portanto:

$$\frac{f(x_0+l)-f(x_0)}{l} \leqslant \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

■

24.3.2 Lema: *Seja f convexa no intevalo aberto (a,b) e considere $x_0 \in (a,b)$. Seja $\Delta(h)$ a função definida como:*

$$\Delta(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

(a) *O limite lateral para zero pela direita existe, ou seja:*

$$\lim_{h\to 0^+} \Delta(h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

(b) *O limite lateral para zero pela esquerda existe, ou seja:*

$$\lim_{l\to 0^-} \Delta(l) = \lim_{l\to 0^-} \frac{f(x_0+l)-f(x_0)}{l}.$$

□

Demonstração: **(a)** Observe que $\Delta(h)$ está definida para h em um intervalo da forma $(0, r)$, para algum $r \in \mathbb{R}$. Basta tomar, por exemplo, $r = b - x_0$. Pelo Lema 24.3.1(c), a função $\Delta(h)$ é limitada inferiormente se $h > 0$, pois:

$$\Delta(l) \leqslant \Delta(h),$$

para todo $l < 0$ suficientemente pequeno de maneira tal que $x_0 + l \in (a, b)$. Portanto, existe:

$$\inf_{h>0} \Delta(h).$$

Observe também que, pelo Lema 24.3.1(a), a função $\Delta(h)$ é monótona não-decrescente. Portanto, o limite lateral existe e tem-se:

$$\lim_{h\to 0^+} \Delta(h) = \inf_{h>0} \Delta(h),$$

ou seja:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \inf_{h>0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

(b) Analogamente, observe que $\Delta(l)$ está definida para l em um intervalo da forma $(r, 0)$, para algum $r \in \mathbb{R}$. Basta tomar, por exemplo, $r = a - x_0$. Pelo Lema 24.3.1(c), a função $\Delta(l)$ é limitada superiormente se $l < 0$, pois:

$$\Delta(l) \leqslant \Delta(h),$$

para todo $h > 0$ suficientemente pequeno de maneira tal que $x_0 + h \in (a, b)$. Portanto, existe:

$$\sup_{l<0} \Delta(l).$$

Observe também que, pelo Lema 24.3.1(b), a função $\Delta(l)$ é monótona não-decrescente. Portanto, o limite lateral existe e tem-se:

$$\lim_{l\to 0^-} \Delta(l) = \sup_{l<0} \Delta(l),$$

ou seja:

$$\lim_{l\to 0^-} \frac{f(x_0+l) - f(x_0)}{l} = \sup_{l<0} \frac{f(x_0+l) - f(x_0)}{l}. \qquad \blacksquare$$

24.3.3 Definição: Seja f uma função qualquer. A **derivada pela direita** da f no ponto a, denotada por $f'_+(a)$, define-se como:

$$f'_+(a) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \qquad \clubsuit$$

24.3.4 Definição: Analogamente, a **derivada pela esquerda** da f no ponto a, denotada por $f'_-(a)$, define-se como:

$$f'_-(a) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \qquad \clubsuit$$

24.3.5 Lema: *Seja f convexa no intevalo aberto (a,b). Então:*

(a) f'_- e f'_+ *existem em cada ponto de (a,b).*

(b) $f'_- \leqslant f'_+$ *em (a,b).*

(c) f'_- e f'_+ *são ambas funções monótonas não-decrescentes em (a,b).*

(d) *Se $x_0, y_0 \in (a,b)$ com $x_0 < y_0$, então $f'_+(x_0) \leqslant f'_-(y_0)$.*

(e) f'_- e f'_+ *são iguais em aqueles pontos de (a,b) onde f'_- é contínua pela direita, ou em aqueles pontos de (a,b) onde f'_+ é contínua pela esquerda. Em particular, as derivadas laterais coinciden em aqueles pontos de (a,b) onde alguma delas for contínua.* $\square$

Demonstração: **(a)** Segue diretamente do Lema 24.3.2 anterior.

(b) Pelo Lema 24.3.1(c), tem-se:

$$\Delta(l) \leqslant \Delta(h), \ \ \forall\, l < 0 < h.$$

Tomando limite para $h \to 0^+$ no membro direito na relação acima tem-se:

$$\Delta(l) \leqslant f'_+(x_0), \ \ \forall\, l < 0.$$

Tomando agora limite para $l \to 0^-$ no membro esquerdo na relação acima tem-se:

$$f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0).$$

(c) Considere $x_0, y_0 \in (a,b)$ com $x_0 < y_0$. Sejam h, l tais que $0 < h$ e $0 < l < y_0 - x_0$, ou seja, $x_0 + l < y_0$. Aplicando o Lema 24.1.5 com $x = x_0$, $y = x_0 + l$, $x' = y_0$ e $y' = y_0 + h$, tem-se:

$$\frac{f(x_0+l) - f(x_0)}{l} \leqslant \frac{f(y_0+h) - f(y_0)}{h}.$$

Tomando limite para $l \to 0^+$ no membro esquerdo e para $h \to 0^+$ no membro direito, respectivamente, na relação acima tem-se:

$$f'_+(x_0) \leqslant f'_+(y_0).$$

Analogamente, considere $x_0, y_0 \in (a,b)$ com $x_0 < y_0$. Sejam agora h, l tais que $h < 0$ e $x_0 - y_0 < l < 0$, ou seja, $x_0 < y_0 + l < y_0$. Aplicando o Lema 24.1.5 com $x = x_0 + h$, $y = x_0$, $x' = y_0 + l$ e $y' = y_0$, tem-se:

$$\frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{-h} \leqslant \frac{f(y_0) - f(y_0+l)}{-l},$$

isto é:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant \frac{f(y_0+l) - f(y_0)}{l}.$$

Tomando limite para $h \to 0^-$ no membro esquerdo e para $l \to 0^-$ no membro direito, respectivamente, na relação acima tem-se:

$$f'_-(x_0) \leqslant f'_-(y_0).$$

(d) Considere $x_0, y_0 \in (a,b)$ com $x_0 < y_0$. Sejam h, l com $l < 0 < h$ tais que $x_0 + h < y_0 + l$, ou seja, $h - l < y_0 - x_0$. Aplicando o Lema 24.1.5 com $x = x_0$, $y = x_0 + h$, $x' = y_0 + l$ e $y' = y_0$, tem-se:

$$f'_+(x_0) \leqslant \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant \frac{f(y_0) - f(y_0+l)}{-l} = \frac{f(y_0+l) - f(y_0)}{l} \leqslant f'_-(y_0).$$

Observe que a primeira desigualdade é válida para todo $h > 0$, no entanto que a última é válida para todo $l < 0$. Portanto:

$$f'_+(x_0) \leqslant f'_-(y_0).$$

(e) Considere $x_0, y_0 \in (a,b)$ com $x_0 < y_0$. Observe que pelo item (b) anterior, tem-se:

$$f'_-(x) \leqslant f'_+(x), \ \forall\, x \in (a,b). \tag{24.3.1}$$

Também, pelo item (d) anterior tem-se:

$$f'_+(x_0) \leqslant f'_-(y_0). \tag{24.3.2}$$

Tomando o limite $x_0 \to y_0^-$ no membro esquerdo da relação (24.3.2) tem-se:

$$\lim_{x_0 \to y_0^-} f'_+(x_0) \leqslant f'_-(y_0).$$

Portanto, se f'_+ for contínua pela esquerda em y_0 teria-se que:

$$f'_+(y_0) = \lim_{x_0 \to y_0^-} f'_+(x_0) \leqslant f'_-(y_0) \leqslant f'_+(y_0).$$

Ou seja, $f'_+(y_0) = f'_-(y_0)$. Observe que a última desigualde acima segue da relação (24.3.1). Analogamente, tomando o limite $y_0 \to x_0^+$ no membro direito da relação (24.3.2) tem-se:

$$\lim_{y_0 \to x_0^+} f'_-(y_0) \geqslant f'_+(x_0).$$

Portanto, se f'_- for contínua pela direita em x_0 teria-se que:

$$f'_-(x_0) = \lim_{y_0 \to x_0^+} f'_-(y_0) \geqslant f'_+(x_0) \geqslant f'_-(x_0).$$

Ou seja, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Observe que a última desigualde acima segue da relação (24.3.1). ∎

24.4 Funções Convexas Diferenciáveis

O seguinte resultado fornece uma interpretação gráfica da convexidade.

24.4.1 Teorema: *Seja f convexa em (a,b).*

(a) *Se f é derivável em $x_0 \in (a,b)$, então a gráfica de f fica acima da tangente que passa por $(x_0, f(x_0))$ exceto no ponto $(x_0, f(x_0))$.*

(b) *Se $x_0, y_0 \in (a,b)$ com $x_0 < y_0$ e f é derivável em x_0 e y_0, então $f'(x_0) \leqslant f'(y_0)$.*

Demonstração: **(a)** Pelo Lema 24.3.2(a) sabe-se que:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \inf_{h>0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \end{aligned} \tag{24.4.1}$$

Denotando $x := x_0 + h$, a relação acima pode ser expressada como:

$$f'(x_0)\,(x-x_0) + f(x_0) \leqslant f(x).$$

Analogamente, pelo Lema 24.3.2(b) sabe-se que:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{l\to 0} \frac{f(x_0+l)-f(x_0)}{l} \\ &= \lim_{l\to 0^-} \frac{f(x_0+l)-f(x_0)}{l} = \sup_{l<0} \frac{f(x_0+l)-f(x_0)}{l} \geqslant \frac{f(x_0+l)-f(x_0)}{l}. \end{aligned} \tag{24.4.2}$$

Denotando $x := x_0 + l$, e observando que $l = x - x_0$ é negativo, a relação acima pode ser expressada novamente como:

$$f'(x_0)\,(x-x_0) + f(x_0) \leqslant f(x).$$

(b) Pela relação (24.4.1) com $h = y_0 - x_0 > 0$ tem-se:

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+(y_0-x_0))-f(x_0)}{y_0-x_0} = \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}.$$

Analogamente, pela relação (24.4.2) com $l = x_0 - y_0 < 0$ tem-se:

$$f'(y_0) \geqslant \frac{f(y_0+l)-f(y_0)}{l} = \frac{f(y_0+(x_0-y_0))-f(y_0)}{x_0-y_0} = \frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0} = \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}.$$

Combinando as últimas duas relações tem-se:

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0} \leqslant f'(y_0). \qquad \blacksquare$$

24.4.2 Observação: Um resultado análogo vale para funções *côncavas*, trocando “acima” por “abaixo” no Teorema 24.4.1(a) e trocando a condição $f'(x_0) \leqslant f'(y_0)$ por $f'(x_0) \geqslant f'(y_0)$ no Teorema 24.4.1(b). ♣

24.4.3 Lema: *Seja f diferenciável com f' não-decrescente em (a,b). Sejam $x_0, y_0 \in (a,b)$ com $x_0 < y_0$, tais que $f(x_0) = f(y_0)$. Então, deve ser $f(x) \leqslant f(x_0) = f(y_0)$, para todo $x_0 < x < y_0$.* $\square$

Demonstração: Por *reductio ad absurdum*, suponha que $f(x) > f(x_0) = f(y_0)$ para algum $x_0 < x < y_0$. Como f é contínua ao ser diferenciável, possui algum ponto de máximo a no intervalo $[x_0, y_0]$, com $f'(a) = 0$ e $f(a) \geqslant f(x) > f(x_0)$. Aplicando o Teorema do Valor Medio 23.2.2 no intervalo $[x_0, a]$, existe $\xi \in (x_0, a)$ tal que:

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} > 0.$$

Portanto, $f'(a) = 0 < f'(\xi)$ com $\xi < a$, contradizendo a hipótese de ser f' não-decrescente. ∎

O próximo resultado constitui o recíproco do Teorema 24.4.1(b) e também fornece um critério para verificar a convexidade.

24.4.4 Teorema: *Se f é derivável com f' não-decrescente em (a, b), então f é convexa em (a, b).* □

Demonstração: Sejam $x_0, y_0 \in (a, b)$ com $x_0 < y_0$. Considere a função g definida em (a, b) como:

$$g(x) := f(x) - \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}\,(x - x_0).$$

Observe que:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}.$$

Portanto, g' também é não-decrescente. Além disso, tem-se que $g(x_0) = f(x_0) = g(y_0)$. Aplicando o resultado anterior à função g, deve ser $g(x) \leqslant g(x_0) = f(x_0)$, para todo $x_0 < x < y_0$, ou seja:

$$f(x) - \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}\,(x - x_0) \leqslant f(x_0).$$

Equivalentemente, para todo $x_0 < x < y_0$ deve ser:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}.$$

Portanto, pela condição 2 do Lema 24.1.2 deve ser f convexa em (a, b). ∎

24.4.5 Observação: Um resultado análogo vale para funções *côncavas*, trocando "não-decrescente" por "não-crescente" no Teorema 24.4.4. ♣

O próximo resultado constitui o recíproco do Teorema 24.4.1(a) e também fornece um critério para verificar a convexidade.

24.4.6 Teorema: *Se f é derivável em (a, b) e a gráfica da f fica acima de cada tangente exceto no ponto de contato, então f é convexa.* □

Demonstração: Sejam $x_0, y_0 \in (a, b)$ com $x_0 < y_0$. Observe que a tangente ao gráfico da f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada pelo gráfico a função g definida em (a, b) como:

$$g(x) := f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

Se o ponto $(y_0, f(y_0))$ fica por cima da tangente, deve ser $f(y_0) > g(y_0)$, ou seja:

$$f(y_0) > f'(x_0)\,(y_0 - x_0) + f(x_0).$$

Portanto:

$$f'(x_0) < \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}. \tag{24.4.3}$$

Analogamente, a tangente ao gráfico da f no ponto $(y_0, f(y_0))$ é dada pelo gráfico a função h definida em (a, b) como:

$$h(x) := f'(y_0)\,(x - y_0) + f(y_0).$$

Se o ponto $(x_0, f(x_0))$ fica por cima da tangente, deve ser $f(x_0) > h(x_0)$, ou seja:

$$f(x_0) > f'(y_0)\,(x_0 - y_0) + f(y_0).$$

Portanto, observando que $x_0 - y_0$ é negativo, tem-se:

$$\frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(y_0)}{x_0 - y_0} < f'(y_0). \tag{24.4.4}$$

Combinando as relações (24.4.3) e (24.4.4) tem-se que $f'(x_0) < f'(y_0)$, ou seja, f' é estrictamente crescente. Pelo Teorema 24.4.4 segue que f é convexa em (a, b). ∎

24.4.7 Observação: Um resultado análogo vale para funções *côncavas*, trocando “acima” por “abaixo” no Teorema 24.4.6. ♣

24.4.8 Teorema: *Se f é derivável em um intervalo aberto (a, b) e cada uma das suas tangentes a corta apenas uma vez, então f é convexa ou é côncava em tal intervalo.* □

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 24.4.6 e a observação anterior. ∎

Exercícios para o Capítulo 24

24.5 A Desigualdade de Jensen

24.5.1 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ números ***positivos***, $p_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, tais que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

(a) Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são n números quaisquer, prove que:

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \{x_i\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{x_i\}.$$

(b) Prove a mesma dupla desigualdade agora para $\dfrac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$, onde $t = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$.

Sugestão: Use a desigualdade do item (a) anterior, que vale para n arbitrário, com $p_i' = p_i/t$.

(c) Em particular, observe-se que se f é uma função definida em (a, b) e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$, então, pelo item (b) anterior, tem-se que $\dfrac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$ também pertence a (a, b) e portanto ao domínio da f.

(d) Observe-se também que $p_n = 1 - t$. ♣

24.5.2 Exercício: **Desigualdade de Jensen**

Sob as hipóteses do exercício anterior, verifique que se f é convexa em (a, b) e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$, então:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i\, f(x_i).$$

Sugestão: Use indução sobre o número de somandos n. O caso $n = 2$ corresponde à definição de convexidade, segundo a condição 1 do Lema 24.1.2. Para verificar a validade do passo indutivo, observe-se que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i + p_n x_n = t\left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) + (1 - t) x_n,$$

e use a mesma desigualdade na condição 1 do Lema 24.1.2, o que pode ser feito pelo item (c) do exercício anterior. ♣

Capítulo 25

Gráficos Revisitados

25.1 Máximos e Mínimos Locais

25.1.1 Definição: Seja f uma função e A um conjunto de números contido no seu domínio. Se diz que um ponto $x \in A$ é um **ponto de máximo local** de f em A se existe algum $\delta > 0$ tal que x é um ponto de máximo de f em $A \cap (x - \delta, x + \delta)$. ♣

25.1.2 Definição: Seja f uma função e A um conjunto de números contido no seu domínio. Se diz que um ponto $x \in A$ é um **ponto de mínimo local** de f em A se x for um ponto de máximo local da função $-f$. ♣

25.1.3 Lema: *Seja f uma função definida em (a, b). Se x é um ponto de máximo, ou de mínimo, local de f em (a, b) e f for derivável em x, então $f'(x) = 0$.* □

Demonstração: Basta aplicar o Lema 23.1.3. ∎

25.1.4 Teorema: *Seja a um ponto crítico da função f, ou seja, $f'(a) = 0$. Suponha que existe $f''(a)$.*

(a) *Se $f''(a) > 0$, então f tem um mínimo local em a.*

(b) *Se $f''(a) < 0$, então f tem um máximo local em a.* □

Demonstração: **(a)** Como $f'(a) = 0$, tem-se:

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a + h) - f'(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a + h)}{h}.$$

Observe que se $f''(a) > 0$, então o quociente $f'(a + h)/h$ deve ser positivo para h suficientemente pequeno. Desta maneira, para h suficientemente pequeno deve ser:

$f'(a + h) > 0$ para $h > 0$.
$f'(a + h) < 0$ para $h < 0$.

Pelo Teorema 23.2.7, f é crescente em um intervalo à direita de a e decrescente em um intervalo à esquerda de a. Portanto, f possui um mínimo local em a.

(b) Prova-se analogamente ao item (a) anterior. ∎

O resultado anterior basicamente contém em si mesmo o seguinte recíproco parcial.

25.1.5 Teorema: *Suponha que $f''(a)$ existe.*

(a) *Se f tem um mínimo local em a, então $f''(a) \geqslant 0$.*

(b) *Se f tem um máximo local em a, então $f''(a) \leqslant 0$.* □

Demonstração: **(a)** Por *reductio ad absurdum*, se fosse $f''(a) < 0$, pelo item (b) do resultado anterior, f teria um máximo local em a. Como por hipótese f tem um mínimo local em a, deve ser f constante, em cujo caso seria $f''(a) = 0$, o que contradiz a suposição inicial que $f''(a) < 0$.

(b) Prova-se analogamente ao item (a) anterior. ∎

25.1.6 Observação: O recíproco do Teorema 25.1.4 não pode ser completo, ou seja, os sinais $\geqslant$ e $\leqslant$ no resultado anterior em geral não podem ser substituídos por $>$ e $<$, respectivamente.

(a) Com efeito, a função $f(x) = x^4$ possui um mínimo local em $x = 0$, mas $f''(x) = 12x^2$, ou seja, $f''(0) = 0$.

(b) Analogamente, a função $g(x) = -x^4$ possui um máximo local em $x = 0$, mas $g''(x) = -12x^2$, ou seja, $g''(0) = 0$.

De fato, o recíproco parcial estabelecido no resultado 25.1.5 é o melhor que se pode obter *sem analisar derivadas de ordem superior* ao segundo. ♣

25.2 Sobre o Traçado de Gráficos

Para determinar o gráfico de uma função f com certo grau de precisão qualitativa é facultativa a seguinte análise.

Aspectos Gerais do Gráfico

(a) Determinar os pontos de interseção da função com os eixos de coordenadas:

- O ponto de interseção com o eixo das ordenadas (eixo vertical) é dado pelo valor $f(0)$. Somente pode existir um único de tais pontos, pois caso contrário f não seria função.

- Os pontos de interseção com o eixo das abcissas (eixo horizontal) são os pontos x determinados pela condição $f(x) = 0$. Tais pontos são denominados as *raízes* da função f. Dependendo da função em questão, a determinação das suas raízes pode ser não-trivial. Calcule as raízes apenas quando isso seja possível sem demasiado trabalho.

(b) Determinar o comportamento assintótico de $f(x)$, ou seja, os limites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

(c) Determinar a paridade da função, caso tenha paridade bem definida. Conhecer a paridade de uma função é relevante, pois simplifica significativamente o traçado do seu gráfico:

- Se a função for par, ou seja, se $f(x) = f(-x)$, então o gráfico é simétrico com relação ao eixo das ordenadas (eixo vertical).
- Se a função for ímpar, ou seja, se $f(x) = -f(-x)$, então o gráfico é simétrico com relação à origem.

Máximos e Mínimos

Existem três grupos de pontos a serem analisados. De longe, o mais importante é o primeiro deles.

1. Pontos Críticos

São os pontos x tais que $f'(x) = 0$. Quando a função em questão é diferenciável, tais pontos são os candidatos favoritos para serem máximos e/ou mínimos locais.

(a) Determinar os valores críticos da função, ou seja, os valores de $f(x)$ quando x é um ponto crítico.

(b) Determinar o sinal de f' entre cada par de pontos críticos.

(c) Se f' muda de sinal ao passar da esquerda para a direita de um ponto crítico:

- Se muda de positivo para negativo, então f tem um máximo local $\frown$ em tal ponto.
- Se muda de negativo para positivo, então f tem um mínimo local $\smile$ em tal ponto.

(d) Se f' não muda de sinal ao passar da esquerda para a direita de um ponto crítico, então não tem nem máximo nem mínimo.

Alternativamente, se f'' existe nos pontos críticos os itens (b), (c) e (d) podem ser substituídos por:

(e) Determinar os valores de $f''(x)$ quando x é um ponto crítico:

- Se $f''(x) > 0$, então f tem um mínimo local $\smile$ em x.
- Se $f''(x) < 0$, então f tem um máximo local $\frown$ em x.
- Se $f''(x) = 0$, então nada pode ser afirmado e deve-se voltar para o procedimento nos itens (b), (c) e (d) anteriores.

2. Pontos em que a função não é diferenciável

3. Os extremos do intervalo

Uma vez analisados esses três conjuntos de pontos, o máximo absoluto será o maior de los valores de $f(x)$ quando x pertence a tais conjuntos. Idem para o mínimo absoluto.

Convexidade e concavidade

(a) Determinar os pontos x tais que $f''(x) = 0$.

(b) Determinar os valores de $f(x)$ quando x é um de tais pontos.

(c) Determinar o sinal de f'' entre cada par de tais pontos.

(d) Se f'' muda de sinal ao passar da esquerda para a direita de um de tais pontos, então f tem um ponto de inflexão:

- Se muda de positivo para negativo, então f muda de convexa para côncava $\smile\frown$.
- Se muda de negativo para positivo, então f muda de côncava para convexa $\frown\smile$.

(e) Se f'' não muda de sinal ao passar da esquerda para a direita de um de tais pontos:

- Se f'' se mantém positiva, então f é convexa $\smile$.
- Se f'' se mantém negativa, então f é côncava $\frown$.

Exercícios para o Capítulo 25

25.3 Máximos e Mínimos Absolutos

25.3.1 Exercício: Determinar, em caso de existirem, os máximos e mínimos *absolutos* da função f no intervalo especificado em cada um dos seguintes casos. Esboçar o gráfico talvez seja de alguma ajuda.

(a) $f(x) = 4 - 3x$ em $(-1, 2]$. R: mín $= -2$; máx $= \emptyset$.

(b) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ em $(-\infty, +\infty)$. R: mín $= 3$; máx $= \emptyset$.

(c) $f(x) = \sqrt{3 + x}$ em $[-3, +\infty)$. R: mín $= 0$; máx $= \emptyset$.

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$ em $[-1, 2]$. R: mín $= -1$; máx $= 1/2$.

(e) $f(x) = x^3 + 5x - 4$ em $[-3, -1]$. R: mín $= -46$; máx $= -10$.

(f) $f(x) = (x + 1)^{2/3}$ em $[-2, 1]$. R: mín $= 0$; máx $= 2^{2/3}$.

(g) A função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{se } -3 \leqslant x < 1, \\ x^2 - 2 & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$$

no intervalo $[-3, 3]$. R: mín $= -13$; máx $= 7$.

(h) A função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{se } x \neq -1, \\ 3 & \text{se } x = -1; \end{cases}$$

no intervalo $[-2, 1]$. R: mín $= \emptyset$; máx $= 3$. ♣

25.4 Extremos locais únicos são globais

25.4.1 Exercício: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada e diferenciável no intervalo *fechado* $[a, b]$ com um *único* ponto crítico $x_0 \in [a, b]$. Se x_0 é um mínimo (resp. máximo) local, então x_0 é mínimo (resp. máximo) *global* em $[a, b]$. ♣

Capítulo 26

Funções Inversas

26.1 Funções Injetoras e a Existência da Inversa

26.1.1 Definição: Uma função f é denominada **injetora**, ou **1-1**, se $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$. ♣

26.1.2 Observação: Equivalentemente, uma função f é 1-1 se e somente se $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. ♣

26.1.3 Exemplo: **(a)** A função identidade $f(x) = x$ é obviamente injetora.

(b) Toda função estrictamente monótona, crescente ou decrescente, é injetora.

(c) A função $f(x) = x^2$ *não* é injetora para $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, tem-se, por exemplo, que $f(-1) = f(1)$.

(d) Contudo, a função $f(x) = x^2$ definida apenas para $x \geqslant 0$, é injetora. Ou seja, restingindo convenientemente o seu domínio, uma função pode ser injetora.

(e) O exemplo acima pode ser facilmente generalizado como segue. A função $f(x) = x^n$ com n *par* não é injetora para $x \in \mathbb{R}$. Mas restringindo o seu domínio para $x \geqslant 0$ resulta injetora.

(f) Para n ímpar, a função $f(x) = x^n$ é injetora para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, $f'(x) = nx^{n-1} > 0$, pois em tal caso $n - 1$ é par e a potencia resulta positiva para qualquer valor de x. Segue que f é estrictamente crescente e portanto injetora. ♣

26.1.4 Definição: Se f é uma função qualquer, recebe o nome de função **inversa** da f e denota-se por $\boldsymbol{f^{-1}}$ o conjunto dos pares (a, b) tais que (b, a) pertence a f. ♣

26.1.5 Teorema: *f^{-1} é função se e somente se f é injetora.* □

Demonstração: Para provar a parte ($\Leftarrow$), suponha que f é injetora. Se (a, b) e (a, c) são dois pares pertencentes a f^{-1}, então os pares (b, a) e (c, a) pertencem a f. Como f é injetora e $f(b) = a = f(c)$ deve ser $b = c$. Desta maneira, não existem em f^{-1} dois pares diferentes com o mesmo primeiro elemento. Portanto, f^{-1} é função.

Reciprocamente, para provar a parte ($\Rightarrow$), suponha que f^{-1} é função. Se $f(b) = f(c)$, então os pares $(b, f(b))$ e $(c, f(c))$ pertencem a f, em cujo caso os pares $(f(b), b)$ e $(f(c), c)$ pertencem a f^{-1} e possuem o mesmo primeiro elemento. Como f^{-1} é função, não pode conter dois pares diferentes com o mesmo primeiro elemento, portanto deve ser $b = c$. Desta maneira, f é injetora. ∎

26.2 Funções Injetoras Contínuas

26.2.1 Lema: *Seja f uma função contínua e injetora definida em um intervalo. Sejam a, b e c pontos do intervalo com $a < c < b$.*

(a) *Se $f(a) < f(b)$, então $f(a) < f(c) < f(b)$.*

(b) *Se $f(a) > f(b)$, então $f(a) > f(c) > f(b)$.* □

Demonstração: **(a)** Como $a \neq c \neq b$ e f é injetora, deve ser $f(a) \neq f(c) \neq f(b)$, o que deixa em aberto as seguintes posibildades:

$$f(c) < f(a),$$
$$f(a) < f(c) < f(b),$$
$$f(b) < f(c).$$

Para probar o resultado, basta excluir o primeiro e terceiro caso acima. Suponha em primeiro lugar que $f(c) < f(a)$. Aplicando o Teorema 19.3.2 no intervalo $[c, b]$, como $f(c) < f(a) < f(b)$ deve existir algum $x \in [c, b]$ tal que $f(x) = f(a)$, contradizendo que f é injetora, pois $a < c \leqslant x \leqslant b$, ou seja, $a \neq x$. Analogamente, suponha agora que $f(b) < f(c)$. Aplicando o Teorema 19.3.2 no intervalo $[a, c]$, como $f(a) < f(b) < f(c)$ deve existir algum $x \in [a, c]$ tal que $f(x) = f(b)$, contradizendo que f é injetora, pois $a \leqslant x \leqslant c < b$, ou seja, $x \neq b$.

(b) Prova-se analogamente ao item (a) anterior. Alternativamente, uma maneira elegante de demonstração pode ser obtida aplicando o resultado do item (a) anterior à função $-f$. ∎

26.2.2 Lema: *Seja f uma função contínua e injetora definida em um intervalo. Sejam a e b dois pontos do intervalo com $a < b$ e suponha que $f(a) < f(b)$.*

(a) *Se c é um ponto do intervalo com $c < a$, então $f(c) < f(a)$.*

(b) *Análogamente, se c é um ponto do intervalo com $b < c$, então $f(b) < f(c)$.* □

Demonstração: **(a)** Por hipótese sabe-se que $c < a < b$. Se fosse $f(c) > f(b)$, pelo item (b) do resultado anterior aplicado aos pontos $c < a < b$ teria-se que $f(c) > f(a) > f(b)$, contradizendo a hipótese que $f(a) < f(b)$. Portanto, deve ser $f(c) < f(b)$. Em tal caso, pelo item (a) do resultado anterior aplicado aos pontos $c < a < b$, tem-se $f(c) < f(a) < f(b)$, ou seja, $f(c) < f(a)$.

(b) Prova-se analogamente ao item (a) anterior. ∎

26.2.3 Observação: Um resultado análogo ao anterior vale no caso $f(a) > f(b)$. O leitor pode ficar a vontade para formular e demonstrar. ♣

26.2.4 Teorema: *Se f é uma função contínua e injetora definida em um intervalo, então f é ou bem estrictamente crescente, ou bem estrictamente decrescente, em tal intervalo.* □

Demonstração: Sejam a, b dois pontos do intervalo com $a < b$. Como $a \neq b$ e f é injetora, deve ser $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$. O primeiro caso será analizado a seguir, conduzindo à conclusão que f deve ser estrictamente crescente. Para tanto, sejam c, d dois pontos quaisquer do intervalo com $c < b$. Suponha que algum de tais pontos, ou ambos, fosse igual a a ou b.

- Se $c = a$ e $d = b$, então é imediato que $f(c) = f(a) < f(b) = f(d)$.
- Se $c = a$, o Lema 26.2.1 permite provar que $f(c) < f(d)$, utilizando d ou b como ponto intermediário.
- Se $c = b$, o Lema 26.2.2 permite provar que $f(c) < f(d)$.
- Analogamente, se $d = b$, o Lema 26.2.1 permite provar que $f(c) < f(d)$, utilizando c ou a como ponto intermediário.
- Se $d = a$ então o Lema 26.2.2 permite provar que $f(c) < f(d)$.

Caso contrário, devem ser considerados os seguintes casos particulares:

$$\begin{aligned} &c < d < a < b \\ &c < a < d < b \\ &c < a < b < d \\ &a < c < d < b \\ &a < c < b < d \\ &a < b < c < d. \end{aligned}$$

Cada um desses casos pode ser analizado facilmente utilizando os dos lemas anteriores. A título de exemplo, no primeiro caso pode ser aplicado em primeiro lugar o Lema 26.2.2 aos pontos $c < a < b$ para provar que $f(c) < f(a)$ e a continuação o Lema 26.2.1 aos pontos $c < d < a$ para provar que $f(c) < f(d)$. A análise dos casos remanescentes constitui um exercício simples a cargo do leitor.

No caso $f(a) > f(b)$ a análise é análoga, conduzindo à conclusão que f deve ser estrictamente decrescente. Uma prova alternativa pode ser obtida aplicando o resultado precedente à função $-f$, método não apenas mas simples, como também mais elegante. ∎

26.2.5 Observação: Seja f uma função injetora. Em particular, pelo Teorema 26.1.5, existe a função inversa f^{-1}.

(a) Se f é estrictamente crescente, ou descrescente, então f^{-1} também é estrictamente crescente, ou descrescente, respectivamente. Para fixar idéias, considere o caso em que f é crescente. Deseja-se provar que:

$$a < b \Rightarrow f^{-1}(a) < f^{-1}(b),$$

para todo a, b no domínio da f^{-1}. Observe que tais números são respectivamente da forma $a = f(x)$ e $b = f(y)$ para alguns x, y no domínio da f, em cujo caso tem-se que $f^{-1}(a) = x$ e $f^{-1}(b) = y$. Desta maneira, deseja-se provar que:

$$f(x) < f(y) \Rightarrow x < y.$$

Se fosse $x = y$ teria-se obviamente que $f(x) = f(y)$. Se fosse $x > y$, como f é crescente teria-se que $f(x) > f(y)$. Ambos casos contradizem a hipótese que $f(x) < f(y)$. Portanto, deve ser $x < y$.

(b) Se além de injetora f é contínua definida em um intervalo, então o domínio de f^{-1} também é um intervalo, podendo ser finito, semi-infinito, ou $\mathbb{R}$. Com efeito, basta combinar o resultado 17.3.2 com o exercício 19.10.2. ♣

26.2.6 Teorema: *Se f é uma função contínua e injetora em um intervalo, então f^{-1} também é contínua.* □

Demonstração: Pelo resultado anterior, f deve ser ou bem estrictamente crescente, ou bem estrictamente decrescente, no intervalo considerado. O primeiro caso será analizado a seguir. O segundo caso pode ser considerado de maneira análoga, ou pelo artifício usal de aplicar o mesmo raciocínio à função $-f$. Deseja-se provar que:

$$\lim_{x \to b} f^{-1}(x) = f(b),$$

para todo b no domínio de f^{-1}. Observe que um tal número b é da forma $f(a)$ para algum a no domínio da f. Desta maneira, dado $\epsilon > 0$, deseja-se provar que existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - b| < \delta \Rightarrow \left|f^{-1}(x) - f^{-1}(b)\right| < \epsilon,$$

ou equivalentemente:

$$f(a) - \delta < x < f(a) + \delta \Rightarrow a - \epsilon < f^{-1}(x) < a + \epsilon.$$

Como $a - \epsilon < a < a + \epsilon$ e f é estrictamente crescente tem-se que $f(a - \epsilon) < f(a) < f(a + \epsilon)$. Seja $\delta > 0$ definido como:

$$\delta := \min \{f(a) - f(a - \epsilon),\ f(a + \epsilon) - f(a)\}.$$

Com esta escolha de δ tem-se:

$$f(a - \epsilon) \leqslant f(a) - \delta,$$
$$f(a) + \delta \leqslant f(a + \epsilon).$$

Portanto:

$$f(a) - \delta < x < f(a) + \delta \Rightarrow f(a - \epsilon) < x < f(a + \epsilon).$$

Pela observação anterior, sabe-se que f^{-1} é uma função crescente e x pertence ao seu domínio. Desta maneira, da última relação acima tem-se:

$$f^{-1}(f(a-\epsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a+\epsilon)),$$

ou seja:

$$a-\epsilon < f^{-1}(x) < a+\epsilon.$$ ∎

26.3 Funções Inversas Diferenciáveis

26.3.1 Lema: *Seja f uma função contínua e injetora definida em um intervalo. Se $f'(f^{-1}(a)) = 0$, então f^{-1}* não *é diferenciável em a.* □

Demonstração: Observe que $f(f^{-1}(x)) = x$. Por *reductio ad absurdum*, se f^{-1} fosse diferenciável em a, pela regra da cadeia 22.2.1 obteria-se a seguinte contradição:

$$1 = f'(f^{-1}(a)) \cdot (f^{-1})'(a) = 0 \cdot (f^{-1})'(a) = 0.$$ ∎

26.3.2 Exemplo: Considere a função $f(x) = x^3$. Como $f(0) = 0$, tem-se que $0 = f^{-1}(0)$. Observe que $f'(x) = 3x^2$. Desta maneira, $f'(f^{-1}(0)) = f'(0) = 0$. Portanto, pelo resultado anterior, f^{-1} não é diferenciável em 0. ♣

26.3.3 Teorema (da Função Inversa)**:** *Seja f contínua e injetora definida em um intervalo. Suponha que f é diferenciável em $f^{-1}(b)$ com $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Então, f^{-1} é diferenciável em b e tem-se:*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$ □

Demonstração: Denotando $a = f(b)$, tem-se:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h}.$$

Observe que todo número $b+h$ no domínio de f^{-1} pode ser expressado na forma $b+h = f(a+k)$ para um único $k = k(h)$. Desta maneira:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a+k)) - a}{f(a+k) - b} = \lim_{h\to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)}.$$

Como $b+h = f(a+k)$, tem-se que $f^{-1}(b+h) = a+k$. Desta maneira, k pode ser expressado na forma:

$$k = f^{-1}(b+h) - a = f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b).$$

Pelo Teorema 26.2.6, a função f^{-1} é contínua em b, de onde segue que k tende para zero quando h tende para zero. Portanto:

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{k} = f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0.$$

Desta maneira, tem-se:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \qquad \blacksquare$$

Exercícios para o Capítulo 26

26.4 Alguns Exemplos

26.4.1 Exercício: Exiba um exemplo de função injetora que seja discontínua em todo ponto do seu domínio.

Sugestão: Modifique de maneira conveniente o exemplo do Exercício 18.7.3 e prove que com tal modificação a função não deixa de ser injetora. ♣

26.5 Algumas Derivadas Revisitadas

26.5.1 Exercício: Reproduza o resultado do exercício 22.4.3 usando o Teorema da Função Inversa. Ou seja, verifique que a derivada da função $f(x) = x^{1/m}$ com $m \in \mathbb{N}$ é dada por $f'(x) = (1/m)\, x^{(1/m)-1}$. ♣

26.5.2 Exercício: Reproduza os resultados dos exercícios da seção 22.7 usando o Teorema da Função Inversa. Ou seja, calcule a derivada das seguintes funções trigonométicas inversas:

(a) $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

(b) $f(x) = \arccos x$.

(c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$. ♣

26.6 Funções Definidas Implicitamente

26.6.1 Exercício: Seja $c \in \mathbb{R}$ arbitrário mas fixo.

(a) Prove que existe uma função diferenciável f tal que $[f(x)]^5 + f(x) + x = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Prove que tal f pode ser expressada como uma função inversa. A maneira mais expeditiva de fazer isso consiste em determinar f^{-1} explicitamente. Para tanto, começe expressando $x = f^{-1}(y)$.

(b) Determine f' em termos de f usando o teorema apropriado do presente capítulo.

(c) Determine f' em termos de f de uma outra maneira, simplesmente derivando a expressão que define a f. ♣

Costuma se dizer que a função do exercício anterior está **definida implicitamente** pela equação $y^5 + y + x = 0$. Contudo, o caso desta equação é muito especial. Segundo indica o próximo exercício, uma equação não define em geral uma função implicitamente em toda a reta $\mathbb{R}$. Mais ainda, em algumas regiões pode estar definida implicitamente mais de uma função.

26.6.2 Exercício: **(a)** Determine quais são as duas funções diferenciáveis definidas implicitamente em $(-1, 1)$ pela equação $x^2 + y^2 = 1$. Ou seja, determine as funções que satisfazem $x^2 + [f(x)]^2 = 1$ para todo $x \in (-1, 1)$. Observe que não existem soluções definidas fora de $[-1, 1]$. Por que?

(b) Determine quais são as funções que satisfazem $x^2 + [f(x)]^2 = -1$.

(c) Determine quais são as funções diferenciáveis que satisfazem $[f(x)]^3 - 3f(x) = x$.

Sugestão: Será util trazar primeiro o gráfico da função $g(x) = x^3 - 3x$. ♣

Em geral, a determinação dos intervalos onde uma função diferenciável resulta definida implicitamente através de uma equação particular pode consistir um asunto delicado. Porém, *supondo* que f é uma solução diferenciável, então se pode deducir uma expressão para f' exatamente da mesma maneira que no exercício 26.6.1(c) anterior, ou seja, simplesmente derivando os dois membros da equação que define a f, procedimento conhecido como "derivação implícita".

26.6.3 Exercício: **(a)** Aplique esse método à equação $x^2 + [f(x)]^2 = 1$. Observe que a solução dependerá de f.

(b) Contudo, verifique que esta solução resulta adequada para as duas funções f encontradas no problema 26.6.2(a).

(c) Aplique o mesmo método à equação $[f(x)]^3 - 3f(x) = x$. ♣

Capítulo 27

Integrais à Riemann

27.1 Partições, Somas Inferiores e Superiores

27.1.1 Definição: Seja $a < b$. Recebe o nome de **partição** do intervalo $[a, b]$ toda coleção finita de pontos de $[a, b]$ que contém a e b. Ou seja, se $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ é uma partição, então:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$ ♣

27.1.2 Definição: Seja $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Considere f limitada em $[a, b]$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ definem-se m_i e M_i respectivamente como:

$$m_i := \inf\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\},$$
$$M_i := \sup\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}.$$

A **soma inferior** de f para P define-se como:

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Analogamente, a **soma superior** de f para P define-se como:

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$ ♣

27.1.3 Lema: *Seja f limitada em $[a, b]$.*

(a) *$L(f, P) \leqslant U(f, P)$, para toda partição P de $[a, b]$.*

(b) *Se Q é uma outra partição $[a, b]$ com $P \subseteq Q$, então:*

$$L(f, P) \leqslant L(f, Q),$$
$$U(f, P) \geqslant U(f, Q).$$

(c) *$L(f, P_1) \leqslant U(f, P_2)$, para quaisquer partições P_1 e P_2 de $[a, b]$.* □

Demonstração: **(a)** Segue diretamente da definição, pois $m_i \leqslant M_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

(b) Suponha que a partição Q contém um ponto adicional $t_j \notin P$. Para fixar idéias, suponha que $t_{i_0-1} < t_j < t_{i_0}$. A diferença entre $L(f, P)$ e $L(f, Q)$ consiste em que a primeira soma inferior conterá o termo:

$$m_{i_0}(t_{i_0} - t_{i_0-1}),$$

no entanto que a segunda conterá o termo:

$$m_1(t_j - t_{i_0-1}) + m_2(t_{i_0} - t_j),$$

onde m_1 e m_2 estão dados respectivamente por:

$$m_1 := \inf\{f(x) : t_{i_0-1} \leqslant x \leqslant t_j\},$$
$$m_2 := \inf\{f(x) : t_j \leqslant x \leqslant t_{i_0}\}.$$

Como obviamente $m_1 \geqslant m_{i_0}$ e $m_2 \geqslant m_{i_0}$, tem-se:

$$m_1(t_j - t_{i_0-1}) + m_2(t_{i_0} - t_j) \geqslant m_{i_0}(t_j - t_{i_0-1}) + m_{i_0}(t_{i_0} - t_j) = m_{i_0}(t_{i_0} - t_{i_0-1}).$$

Portanto, deve ser $L(f, P) \leqslant L(f, Q)$. A prova para as somas superiores é análoga, observando que se M_1 e M_2 estão dados respectivamente por:

$$M_1 := \sup\{f(x) : t_{i_0-1} \leqslant x \leqslant t_j\},$$
$$M_2 := \sup\{f(x) : t_j \leqslant x \leqslant t_{i_0}\},$$

então $M_1 \leqslant M_{i_0}$ e $M_2 \leqslant M_{i_0}$. Se a partição Q contiver mais pontos adicionais, a análise é a mesma para cada um de tais pontos adicionais.

(c) Basta observar que:

$$L(f, P_1) \leqslant L(f, P_1 \cup P_2) \leqslant U(f, P_1 \cup P_2) \leqslant U(f, P_1).$$

A primeira e terceira desigualdades acima decorrem do item (b) anterior, no entanto que a segunda é consequência do item (a). ∎

27.2 Integrais Inferiores e Superiores

27.2.1 Definição: Seja $a < b$. Considere f limitada em $[a, b]$. Define-se a **integral inferior para f em** $[a, b]$ como:

$$L(f, [a, b]) := \sup\{L(f, P) : P \text{ partição de } [a, b]\}.$$

Análogamente, define-se a **integral superior para f em** $[a, b]$ como:

$$U(f, [a, b]) := \inf\{U(f, P) : P \text{ partição de } [a, b]\}.$$ ♣

27.2.2 Observação: Pelo Lema 27.1.3, as integrais inferiores e superiores estão sempre bem definidas. ♣

27.2.3 Exemplo: **(a)** Seja $f(x) = c$ em $[a,b]$. Então, $L(f,[a,b]) = c(b-a) = U(f,[a,b])$.

(b) Considere a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é racional,} \end{cases}$$

Então, $L(f,[a,b]) = 0$ e $U(f,[a,b]) = 1$. ♣

27.2.4 Lema: *Seja $a < b$ e f limitada em $[a,b]$. Então:*

$$L(f,[a,b]) \leqslant U(f,[a,b]).$$

Demonstração: Pelo Lema 27.1.3(a), para todo P partição de $[a,b]$ tem-se que $L(f,P) \leqslant U(f,P)$. Por brevidade, seja $\alpha := L(f,[a,b])$. Se fosse $\alpha > U(f,P_0)$, para algum P_0 partição de $[a,b]$, então por definição de supremo existiria P_1 partição de $[a,b]$ tal que $U(f,P_0) < L(f,P_1)$. Pelo Lema 27.1.3(b), teria-se:

$$U(f,P_1 \cup P_0) \leqslant U(f,P_0) < L(f,P_1) \leqslant L(f,P_1 \cup P_0).$$

Mais isso contradiz o Lema 27.1.3(a), com $P = P_0 \cup P_1$. Portanto:

$$\alpha \leqslant U(f,P),$$

para todo P partição de $[a,b]$. Como o ínfimo é o maior de tais limites inferiores para $U(f,P)$, tem-se:

$$L(f,[a,b]) = \alpha \leqslant \inf_P \{U(f,P)\} = U(f,[a,b]).$$

Incidentalmente, observe que, pelo Lema 27.1.3(a,b) teria-se:

$$L(f,P_1) \leqslant L(f,P_0 \cup P_1) \leqslant U(f,P_0 \cup P_1) \leqslant U(f,P_0),$$

Mais isso contradiz $U(f,P_0) < L(f,P_1)$, constituindo uma maneira alternativa de provar que $\alpha \leqslant U(f,P)$ para todo P partição de $[a,b]$. ∎

27.2.5 Lema: *Seja $a < c < b$ e f limitada em $[a,b]$. Então:*

(a) $L(f,[a,b]) = L(f,[a,c]) + L(f,[c,b])$.

(b) $U(f,[a,b]) = U(f,[a,c]) + U(f,[c,b])$.

Demonstração: **(a)** Para simplificar a notação, sejam α, β, γ definidos respectivamente como:

$$\begin{aligned} \alpha &= L(f,[a,c]), \\ \beta &= L(f,[c,b]), \\ \gamma &= L(f,[a,b]). \end{aligned}$$

Se P_1 e P_2 são partições de $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente, então $P = P_1 \cup P_2$ é uma partição de $[a, b]$ e tem-se:

$$L(f, P_1) + L(f, P_2) = L(f, P) \leqslant \gamma,$$

ou seja:

$$L(f, P_1) \leqslant \gamma - L(f, P_2),$$

para todo P_1 partição de $[a, c]$. Como o supremo α é o menor de tais limites superiores para $L(f, P_1)$, tem-se:

$$\alpha \leqslant \gamma - L(f, P_2),$$

ou seja:

$$L(f, P_2) \leqslant \gamma - \alpha,$$

para todo P_2 partição de $[c, b]$. Como o supremo β é o menor de tais limites superiores para $L(f, P_2)$, tem-se:

$$\beta \leqslant \gamma - \alpha,$$

ou seja:

$$\beta + \alpha \leqslant \gamma.$$

Seja $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ partição arbitrária de $[a, b]$. Suponha que $t_{i_0-1} \leqslant c < t_{i_0}$. Sejam P_1, P_2 partições de $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente, definidas como:

$$P_1 = \{t_0, t_1, \ldots, t_{i_0-1}, c\},$$
$$P_2 = \{c, t_{i_0}, \ldots, t_n\}.$$

Em tal caso, $P_1 \cup P_2$ é um refinamento de P e tem-se:

$$L(f, P) \leqslant L(f, P_1 \cup P_2) = L(f, P_1) + L(f, P_2) \leqslant \alpha + \beta.$$

Como P era uma partição arbitrária de $[a, b]$ e o supremo γ é o menor de tais limites superiores para $L(f, P)$, tem-se:

$$\gamma \leqslant \alpha + \beta.$$

Portanto, deve ser $\alpha + \beta = \gamma$.

(b) Prova-se analogamente ao item (a) anterior. ∎

27.2.6 Lema: *Seja $a < b$ e f limitada em $[a, b]$. Então, as funções L e U definidas em $[a, b]$ respectivamente como:*

$$L(x) := L(f, [a, x]), \ \forall\, x \in [a, b],$$
$$U(x) := U(f, [a, x]), \ \forall\, x \in [a, b],$$

são contínuas em $[a, b]$. □

Demonstração: Seja $x \in [a, b]$ arbitrário. Considerando $h > 0$, tem-se:

$$L(x + h) - L(x) = L(f, [a, x + h]) - L(f, [a, x] = L(f, [x, x + h]).$$

Como f é limitada por hipótese, existe $M > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leqslant M \Leftrightarrow -M \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Portanto:

$$-Mh \leqslant L(f, [x, x + h] \leqslant U(f, [x, x + h]) \leqslant Mh.$$

Em particular:

$$-Mh \leqslant L(x + h) - L(x) \leqslant Mh. \tag{27.2.1}$$

Considere agora $h < 0$. Pela relação acima com $-h > 0$ tem-se:

$$-M(-h) \leqslant L(x) - L(x + h) \leqslant M(-h) = -Mh.$$

Multiplicando por -1 a relação acima tem-se:

$$M(-h) \geqslant L(x + h) - L(x) \geqslant Mh = -M(-h),$$

ou seja:

$$-M(-h) \leqslant L(x + h) - L(x) \leqslant M(-h). \tag{27.2.2}$$

Combinando as relações (27.2.1) e (27.2.2) tem-se:

$$|L(x + h) - L(x)| \leqslant M\,|h|, \;\; \forall\, h.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela relação acima, tem-se:

$$|h| < \frac{\epsilon}{M} \;\Rightarrow\; |L(x + h) - L(x)| \leqslant M|h| < M\,\frac{\epsilon}{M} = \epsilon.$$

Portanto:

$$\lim_{y \to x} L(y) = \lim_{h \to 0} L(x + h) = L(x),$$

provando que L é contínua em x. Como $x \in [a, b]$ era arbitrário, segue que L é contínua em $[a, b]$. A prova para a função U é análoga.

Incidentalmente, observe que da relação (27.2.1) segue diretamente que:

$$\lim_{y \to x^+} L(y) = L(x), \;\; \forall\; x \in [a, b).$$

Analogamente, da relação (27.2.2) tem-se:

$$\lim_{y \to x^-} L(y) = L(x), \;\; \forall\; x \in (a, b].$$

As duas relações acima provam que L é contínua em (a, b), contínua por direita em a e contínua, por esquerda em b. ∎

27.3 Funções Integráveis

27.3.1 Definição: Seja $a < b$. Uma função f limitada em $[a,b]$ é denominada **integrável** $[a,b]$ quando $L(f,[a,b]) = U(f,[a,b])$. Ou seja, quando as integrais inferior e superior são iguais. Em tal caso, o valor comum a ambas recebe o nome de **integral** de f em $[a,b]$ e denota-se $\displaystyle\int_a^b f$. ♣

27.3.2 Exemplo: Considere novamente as funções do exemplo 27.2.3.

(a) Para todo $a,b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, a função $f(x) = c$ é integrável em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = c(b-a)$.

(b) A função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é racional,} \end{cases}$$

não é integrável em $[a,b]$, para nenhum $a,b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. ♣

27.3.3 Teorema: *Seja f limitada em $[a,b]$. Então, f é integrável em $[a,b]$ se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$.* □

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $\epsilon > 0$. Como f é integrável em $[a,b]$ por hipótese, pela definição de supremo existe P_1 partição de $[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < L(f,P_1).$$

Analogamente, pela definição de ínfimo existe P_2 partição de $[a,b]$ tal que:

$$U(f,P_2) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}.$$

Se $P = P_1 \cup P_2$, então tem-se:

$$\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < L(f,P_1) \leqslant L(f,P),$$

ou seja:

$$-L(f,P) < \frac{\epsilon}{2} - \int_a^b f.$$

Analogamente:

$$U(f,P) \leqslant U(f,P_2) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}.$$

Combinando as duas últimas relações tem-se:

$$U(f,P) - L(f,P) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} - \int_a^b f = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Pelo Lema 27.1.3(c) sabe-se que $L(f,[a,b]) \leqslant U(f,[a,b])$. Se fosse $L(f,[a,b]) < U(f,[a,b])$, para $\epsilon := U(f,[a,b]) - L(f,[a,b]) > 0$ existiria P partição de $[a,b]$ tal que:

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon = U(f,[a,b]) - L(f,[a,b]).$$

Portanto, ter-se-ia a seguinte contradição:

$$U(f,P) < U(f,[a,b]) - [L(f,[a,b]) - L(f,P)] \leqslant U(f,[a,b]) \leqslant U(f,P).$$

A segunda desigualdade acima segue do fato que $L(f,[a,b]) - L(f,P) \geqslant 0$ pela definição de supremo, no entanto que a terceira decorre da definição de ínfimo. ∎

27.3.4 Lema: *Se f é integrável em $[a,b]$, então para qualquer partição P de $[a,b]$ tem-se:*

$$L(f,P) \leqslant \int_a^b f \leqslant U(f,P).$$

Mais ainda, a integral é o único número com esta propriedade. □

Demonstração: Se f é integrável em $[a,b]$, então para qualquer partição P de $[a,b]$ tem-se:

$$L(f,P) \leqslant \sup_P L(f,P) = \int_a^b f = \inf_P U(f,P) \leqslant U(f,P).$$

Para provar a unicidade, seja α tal que:

$$L(f,P) \leqslant \alpha \leqslant U(f,P).$$

para qualquer partição P de $[a,b]$. Da primeira desigualdade acima, segue que α é um limite superior para o conjunto de todas as somas inferiores $L(f,P)$, portanto deve ser $\int_a^b f \leqslant \alpha$, pois a integral é o menor de tais limites superiores. Analogamente, da segunda desigualdade acima, segue que α é um limite inferior para o conjunto de todas as somas superiores $U(f,P)$, portanto deve ser $\alpha \leqslant \int_a^b f$, pois a integral é o maior de tais limites inferiores. Portanto, deve ser $\alpha = \int_a^b f$. ∎

Observe que o Teorema 27.3.3 resulta apenas uma paráfrase da definição de integral, ou um mero exercício no uso das definições de ínfimo e supremo, segundo o leitor preferir. Contudo, tal teorema aliado ao lema anterior constituem boas ferramentas para provar resultados sobre integrabilidade de funções. Sua utilidade como ferramenta teórica será extensivamente explorada na prova de diversos resultados na seção seguinte. Essas ferramentas também não carecem de valor prático, como mostra o exemplo a seguir.

27.3.5 Exemplo: A função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Com efeito, se $1 \notin [a, b]$ o afirmado é trivial. Suponha portanto que se $1 \in [a, b]$. Seja $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Em primeiro lugar, observe que $L(f, P) = 0$. A determinação da soma superior requer um pouco mais de trabalho. Sem perda de generalidade, suponha-se que $t_{j-1} \leqslant 1 < t_j$. Em tal caso, observe que:

$$M_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Portanto:

$$U(f, P) - L(f, P) = 1 \cdot (t_j - t_{j-1}) - 0 = (t_j - t_{j-1}).$$

Pelo Teorema 27.3.3 a função em questão resulta integrável, pois dado $\epsilon > 0$ basta tomar uma tal partição com $t_j - t_{j-1} < \epsilon$. Observe também que $L(f, P) = 0 < t_j - t_{j-1} = U(f, P)$. Como P era uma partição arbitrária, tem-se que $L(f, P) \leqslant 0 \leqslant U(f, P)$. Portanto, pelo lema anterior o valor da integral deve ser zero. ♣

O seguinte resultado é uma consequência direta do Lema 27.2.6.

27.3.6 Teorema: *Seja f integrável em $[a, b]$. Considere função F definida em $[a, b]$ por:*

$$F(x) := \int_a^x f.$$

Então, F é contínua em $[a, b]$. □

Demonstração: Segue diretamente do Lema 27.2.6, pois quando f é integrável resulta $F(x) = L(x)$, ou $F(x) = U(x)$. ∎

O próximo resultado garante a existência de um suprimento mais do que razoável de funções integráveis.

27.3.7 Teorema: *Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.* □

Demonstração: Seja $x \in (a, b)$. Considere $h > 0$. Definem-se $m(h)$ e $M(h)$ respectivamente como:

$$m(h) = \inf \{f(t) \; : \; x \leqslant t \leqslant x + h\},$$
$$M(h) = \sup \{f(t) \; : \; x \leqslant t \leqslant x + h\}.$$

Seja $P = \{x, x+h\}$ partição de $[x, x+h]$. Observe que:

$$\begin{aligned} m(h)h = L(f,P) &\leqslant \sup_P L(f,P) = L(f,[x,x+h]) \\ &\leqslant U(f,[x,x+h]) = \inf_P U(f,P) \leqslant U(f,P) = M(h)h. \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que:

$$L(f,[x,x+h]) = L(f,[a,x+h]) - L(f,[a,x]) = L(x+h) - L(x).$$

Analogamente:

$$U(f,[x,x+h]) = U(f,[a,x+h]) - U(f,[a,x]) = U(x+h) - U(x).$$

Portanto:

$$m(h) \leqslant \frac{L(x+h)-L(x)}{h} \leqslant \frac{U(x+h)-U(x)}{h} \leqslant M(h), \ \ \forall\, h > 0.$$

Considere agora $h < 0$. Definem-se $m(h)$ e $M(h)$ respectivamente como:

$$\begin{aligned} m(h) &= \inf\{f(t) \ : \ x+h \leqslant t \leqslant x\}, \\ M(h) &= \sup\{f(t) \ : \ x+h \leqslant t \leqslant x\}. \end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, observando que $-h = |h| > 0$, tem-se:

$$m(h)(-h) \leqslant L(f,[x+h,x]) \leqslant U(f,[x+h,x]) \leqslant M(h)(-h),$$

de onde segue que:

$$m(h) \leqslant \frac{L(x)-L(x+h)}{-h} \leqslant \frac{U(x)-U(x+h)}{-h} \leqslant M(h).$$

Portanto:

$$m(h) \leqslant \frac{L(x+h)-L(x)}{h} \leqslant \frac{U(x+h)-U(x)}{h} \leqslant M(h), \ \ \forall\, h < 0.$$

Como f é contínua por hipótese, tem-se:

$$\lim_{h\to 0} m(h) = f(x) = \lim_{h\to 0} M(h).$$

Portanto:

$$L'(x) = U'(x) = f(x), \ \ \forall\, x \in (a,b).$$

Em particular, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $U(x) = L(x) + c$, para todo $x \in (a,b)$ e também para todo $x \in [a,b]$, pois U e L são contínuas, segundo o Lema 27.2.6. Observe que $0 = U(a) = L(a) + c = 0 + c = c$, ou seja, deve ser $c = 0$. Portanto:

$$U(x) = L(x), \ \ \forall\, x \in [a,b].$$

Em particular, $U(b) = L(b)$. Desta maneira, tem-se:

$$\begin{aligned} \sup\{L(f,P) \ : \ P \text{ partição de } [a,b]\} &= L(f,[a,b]) = L(b) \\ &= U(b) = U(f,[a,b]) = \inf\{U(f,P) \ : \ P \text{ partição de } [a,b]\}. \end{aligned}$$

Portanto f é integrável. ∎

Observe que o exemplo 27.3.5 exibe uma função integrável que *não* é contínua. Portanto, surge naturalmente a questão sobre se o resultado anterior seria suscetível de generalização. Como o leitor provavelmente poderia estar suspeitando, o mesmo exemplo resulta revelador. Com efeito, se em lugar de ser $f(1) = 1$ fosse $f(1) = c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, a função também seria integrável, o que pode ser verificado basicamente com a mesma prova. Somando tal função com qualquer função integrável obtém-se uma função que também é integrável, segundo o Teorema 27.4.5 a ser demonstrado na seção seguinte. Em resumo, isso significa que o valor de uma função integrável pode ser arbitrariamente modificado em um ponto qualquer sem destruir a integrabilidade. Decompondo o intervalo em muitos subintervalos de maneira conveniente, tem-se que o valor pode ser arbitrariamente modificado em uma quantidade finita de pontos quaisquer. Será que é possível ir além de uma quantidade finita? Com a necessária quota de paciência, a intuição do leitor será devidamente recompensada.

De fato, uma prova alternativa e mais general do último teorema será considerada no Capítulo 28 no contexto de um resultado bem mais forte. Observe, no entanto, que a demonstração aqui apresentada resulta interessante pelo fato de fornecer como subproduto uma notável e surpreendente melhora no Lema 27.2.6, a saber: Quando f é contínua em $[a, b]$, as funções $L(x)$ e $U(x)$ resultam *diferenciáveis* para todo $x \in [a, b]$. Mais notável ainda resulta o fato que essas derivadas podem ser calculadas explicitamente, resultando ser a função original: $L' = U' = f$. Colocado no seu devido contexto, esse fato resulta tão importante que é sacramentado como teorema *fundamental* do Cálculo e merece considerações filosóficas em um capítulo aparte. As implicações práticas serão também de longo alcance: Mudará completamente a abordagem para o cálculo de integrais, desterrando o uso de somas superiores e inferiores ao completo esquecimento.

27.4 Mais Alguns Resultados sobre Integrais

27.4.1 Lema: *Seja f integrável em $[a, b]$. Então:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx, \quad \forall\, c \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Demonstração: Se $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, então

$$P' = \{t_0 + c, t_1 + c, \ldots, t_n + c\}$$

será uma partição de $[a + c, b + c]$. Em tal caso tem-se:

$$\begin{aligned}
U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sup\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} ((t_i + c) - (t_{i-1} + c)) \sup\{f(x) : t_{i-1} + c \leqslant x + c \leqslant t_i + c\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (t'_i - t'_{i-1}) \sup\{f(y - c) : t_{i-1} + c \leqslant y \leqslant t_i + c\} \\
&= U(f(x - c), P').
\end{aligned}$$

Aqui $t'_i = t_i + c$. Um resultado análogo vale para as somas inferiores. ∎

27.4.2 Lema: *Seja* $\mathbb{R} \ni c > 0$ *e* f *integrável em* $[ac, bc]$. *Então:*

$$\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx = c\int_a^b f(cx)\,dx, \quad \forall\, c > 0.$$

Demonstração: Se $c = 0$ a identidade é trivialmente válida. Considere $c > 0$. Se $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ é uma partição de $[ca, cb]$, então

$$P' = \left\{\frac{t_0}{c}, \frac{t_1}{c}, \ldots, \frac{t_n}{c}\right\}$$

será uma partição de $[a, b]$. Em tal caso tem-se:

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\,\sup\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\} \\ &= c\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{c} - \frac{t_{i-1}}{c}\right)\,\sup\left\{f(x) : \frac{t_{i-1}}{c} \leqslant \frac{x}{c} \leqslant \frac{t_i}{c}\right\} \\ &= c\sum_{i=1}^{n}(t'_i - t'_{i-1})\,\sup\{f(cy) : t'_{i-1} \leqslant y \leqslant t'_i\} \\ &= c\,U(f(cy), P'). \end{aligned}$$

Aqui $t'_i = t_i/c$. Um resultado análogo vale para as somas inferiores. ∎

27.4.3 Lema: *Seja* $\mathbb{R} \ni a > 0$ *e* f *integrável em* $[0, a]$. *Então:*

(a) *Se* f *é par tem-se:*

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx;$$

(b) *Se* f *é ímpar tem-se:*

$$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_{-a}^0 f(x)\,dx.$$

Demonstração: Se $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ é uma partição de $[0, a]$, então

$$P' = \{-t_n, -t_{n-1}, \ldots, -t_1, -t_0\}$$

será uma partição de $[-a,0]$. Em tal caso tem-se:

$$\begin{aligned}
U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) \sup\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-t_{i-1} - (-t_i)) \sup\{f(x) : -t_i \leqslant -x \leqslant -t_{i-1}\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-t_{i-1} - (-t_i)) \sup\{f(-y) : -t_i \leqslant y \leqslant -t_{i-1}\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(t_i' - t_{i-1}') \sup\left\{f(-y) : t_{i-1}' \leqslant y \leqslant t_i'\right\}.
\end{aligned}$$

Aqui $t_i' = -t_{n-i}$. Observe que:

$$f(-y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } f \text{ é par;} \\ -f(y) & \text{se } f \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(a) Se f é par, pelos cálculos precedentes, tem-se que $U(f,P) = U(f,P')$. Um resultado análogo vale para as somas inferiores. Portanto:

$$\int_{-a}^{0} f = \int_{0}^{a} f.$$

(b) Se f é ímpar, pelos cálculos precedentes, tem-se:

$$\begin{aligned}
U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(t_i' - t_{i-1}') \sup\left\{-f(y) : t_{i-1}' \leqslant y \leqslant t_i'\right\} \\
&= -\sum_{i=1}^{n}(t_i' - t_{i-1}') \inf\left\{f(y) : t_{i-1}' \leqslant y \leqslant t_i'\right\} \\
&= -L(f,P').
\end{aligned}$$

Analogamente prova-se que $L(f,P) = -U(f,P')$. Observe que isso vale para qualquer partição P. Seja $\epsilon > 0$. Como f é integrável em $[0,a]$, pelo Teorema 27.3.3 existe P tal que $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$, de onde tem-se:

$$U(f,P') - L(f,P') = -L(f,P) + U(f,P) = U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

Portanto, f é integrável em $[-a,0]$. Além disso, como f é integrável em $[0,a]$, pelo Lema 27.3.4 tem-se:

$$L(f,P) \leqslant \int_{0}^{a} f \leqslant U(f,P).$$

Portanto:

$$U(f,P') = -L(f,P) \geqslant -\int_{0}^{a} f \geqslant -U(f,P) = L(f,P').$$

Novamente pelo resultado de unicidade no Lema 27.3.4, tem-se:

$$\int_{-a}^{0} f = -\int_{0}^{a} f.$$

∎

27.4.4 Teorema: *Seja $a < c < b$.*

(a) *Se f é integrável em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$.*

(b) *Reciprocamente, se f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

(c) *Finalmente, se f é integrável em $[a, b]$, então:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$ ∎

Demonstração: **(a)** Seja $\epsilon > 0$. Como f é integrável em $[a, b]$, existe P partição de $[a, b]$ tal que:

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Sem perda de generalidade, se pode supor que $c \in P$, substituindo se for necessário P pela partição $P' = P \cup \{c\}$, pois ao ser esta última um refinamento da original tem-se:

$$U(f, P') - L(f, P') \leqslant U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Sejam P_1, P_2 partições de $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente definidas como:

$$P_1 := P \cap [a, c],$$
$$P_2 := P \cap [c, b].$$

Observe que:

$$L(f, P) = L(f, P_1) + L(f, P_2),$$
$$U(f, P) = U(f, P_1) + U(f, P_2).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}[U(f, P_1) - L(f, P_1)] \; + \; [U(f, P_2) - L(f, P_2)]& \\ = [U(f, P_1) + U(f, P_2)] \; - \; [L(f, P_1) + L(f, P_2)] &= U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.\end{aligned}$$

Como cada um dos termos entre colchetes no primeiro membro da relação acima é não negativo, cada um deles deve ser separadamente menor que ϵ, ou seja:

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \epsilon,$$
$$U(f, P_2) - L(f, P_2) < \epsilon.$$

Desta maneira, resulta f integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$.

(b) Seja $\epsilon > 0$. Como f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$, existem P_1, P_2 partições de $[a, c]$ e $[c, b]$ respectivamente, tais que:

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \epsilon/2,$$
$$U(f, P_2) - L(f, P_2) < \epsilon/2.$$

Observe que $P = P_1 \cup P_2$ é uma partição de $[a, b]$ e tem-se:

$$L(f, P) = L(f, P_1) + L(f, P_2),$$
$$U(f, P) = U(f, P_1) + U(f, P_2).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}U(f,P)-L(f,P) &= [U(f,P_1)+U(f,P_2)] \ - \ [L(f,P_1)+L(f,P_2)] \\ &= [U(f,P_1)-L(f,P_1)] \ + \ [U(f,P_2)-L(f,P_2)] < \epsilon/2 \ + \ \epsilon/2 = \epsilon.\end{aligned}$$

Desta maneira, resulta f integrável em $[a,b]$.

(c) Sejam P, P_1, P_2 partições de $[a,b]$, $[a,c]$ e $[c,b]$ respectivamente como no item (a) anterior. Observe que:

$$\begin{aligned}L(f,P_1) &\leqslant \int_a^c f \leqslant U(f,P_1), \\ L(f,P_2) &\leqslant \int_c^b f \leqslant U(f,P_2).\end{aligned}$$

Portanto:

$$L(f,P) = L(f,P_1) \ + \ L(f,P_2) \leqslant \int_a^c f \ + \ \int_c^b f \leqslant U(f,P_1)+U(f,P_2) = U(f,P).$$

Desta maneira, tem-se:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \qquad \blacksquare$$

27.4.5 Teorema: *Se f e g são integráveis em $[a,b]$, então a função $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e tem-se:*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \qquad \square$$

Demonstração: Seja $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ partição de $[a,b]$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ definem-se m_i, $m_i(f)$ e $m_i(g)$, respectivamente como:

$$\begin{aligned}m_i &:= \inf\{(f+g)(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}, \\ m_i(f) &:= \inf\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}, \\ m_i(g) &:= \inf\{g(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}.\end{aligned}$$

Analogamente definem-se M_i, $M_i(f)$ e $M_i(g)$, trocando inf por sup. Observe que:

$$m_i(f) + m_i(g) \leqslant f(x) + g(x) = (f+g)(x).$$

Portanto $m_i(f) + m_i(g) \leqslant m_i$. Analogamente tem-se que $M_i \leqslant M_i(f) + M_i(g)$. Portanto:

$$\begin{aligned}L(f,P) + L(g,P) &\leqslant L(f+g,P), \\ U(f+g,P) &\leqslant U(f,P) + U(g,P).\end{aligned} \tag{27.4.1}$$

Observe que as desigualdades acima valem para qualquer partição arbitrária. Seja $\epsilon > 0$. Como f e g são integráveis em $[a,b]$, existem P_1, P_2 partições de $[a,b]$ tais que:

$$\begin{aligned}U(f,P_1) - L(f,P_1) &< \epsilon/2, \\ U(g,P_2) - L(g,P_2) &< \epsilon/2.\end{aligned}$$

Portanto:

$$[U(f,P_1)+U(g,P_2)] \ - \ [L(f,P_1)+L(g,P_2)] < \epsilon.$$

Se $P = P_1 \cup P_2$, então pelas relações 27.4.1 tem-se:

$$L(f,P_1)+L(g,P_2) \leqslant L(f,P)+L(g,P) \leqslant L(f+g,P),$$
$$U(f+g,P) \leqslant U(f,P)+U(g,P) \leqslant U(f,P_1)+U(g,P_2).$$

Portanto:

$$U(f+g,P)-L(f+g,P) \leqslant [U(f,P_1)+U(g,P_2)] \ - \ [L(f,P_1)+L(g,P_2)] < \epsilon.$$

Desta maneira, resulta $f+g$ integrável em $[a,b]$. Novamente pelas relações 27.4.1 tem-se:

$$L(f,P)+L(g,P) \leqslant L(f+g,P) \leqslant \int_a^b (f+g) \leqslant U(f+g,P) \leqslant U(f,P)+U(g,P).$$

Por outro lado, como f e g são integráveis em $[a,b]$, tem-se:

$$L(f,P)+L(g,P) \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g \leqslant U(f,P)+U(g,P).$$

Combinando as duas últimas relações tem-se:

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g) \ - \ \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) &\leqslant U(f,P)+U(g,P) \ - \ (L(f,P)+L(g,P)) \\ &= [U(f,P)-L(f,P)] \ + \ [U(g,P)-L(g,P)],\end{aligned}$$

como também:

$$\begin{aligned}-[U(f,P)-L(f,P)] \ - \ [U(g,P)-L(g,P)] &= L(f,P)+L(g,P) \ - \ (U(f,P)+U(g,P)) \\ &\leqslant \int_a^b (f+g) \ - \ \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right).\end{aligned}$$

Observe que nas duas últimas relações acima, os termos entre colchetes:

$$U(f,P)-L(f,P)$$
$$U(g,P)-L(g,P)$$

podem ser feitos arbitrariamente pequenos escolhendo a partição adequada. Portanto:

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

∎

27.4.6 Teorema: *Se f é integrável em $[a,b]$, então para qualquer $c \in \mathbb{R}$ a função cf é integrável em $[a,b]$ e tem-se:*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f.$$

□

Demonstração: No caso $c = 0$ a identidade vale trivialmente. Considere em primeiro lugar o caso $c > 0$. Se $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sup\{(cf)(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\} &= c \sup\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}, \\ \inf\{(cf)(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\} &= c \inf\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}. \end{aligned}$$

Observe que isso vale para qualquer partição P. Seja $\epsilon > 0$. Como f é integrável em $[a, b]$, pelo Teorema 27.3.3 existe P tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon/c$, de onde tem-se:

$$U(cf, P) - L(cf, P) = c\,U(f, P) - c\,L(f, P) < c\,\frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Portanto, cf é integrável em $[a, b]$. Além disso, como f é integrável em $[a, b]$, tem-se:

$$L(cf, P) = c\,L(f, P) \leqslant c \int_a^b f \leqslant c\,U(f, P) = U(cf, P).$$

Desta maneira, no presente caso tem-se:

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f.$$

Analogamente, no caso $c < 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sup\{(cf)(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\} &= c \inf\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}, \\ \inf\{(cf)(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\} &= c \sup\{f(x) : t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}. \end{aligned}$$

Observe que isso vale para qualquer partição P. Seja $\epsilon > 0$. Como f é integrável em $[a, b]$, pelo Teorema 27.3.3 existe P tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon/|c|$, de onde tem-se:

$$\begin{aligned} U(cf, P) - L(cf, P) = c\,L(f, P) - c\,U(f, P) &= -c(U(f, P) - L(f, P)) \\ &= |c|(U(f, P) - L(f, P)) < |c|\,\frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, cf é integrável em $[a, b]$. Além disso, como f é integrável em $[a, b]$, considerando $c < 0$, tem-se:

$$c\,U(f, P) \leqslant c \int_a^b f \leqslant c\,L(f, P),$$

de onde segue:

$$L(cf, P) = c\,U(f, P) \leqslant c \int_a^b f \leqslant c\,L(f, P) = U(cf, P).$$

Portanto:

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f. \qquad \blacksquare$$

27.4.7 Teorema: *Seja f integrável em $[a, b]$ e suponha-se que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$. Então:*

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b - a). \qquad \square$$

Demonstração: Considerando a partição de $[a, b]$ dada por $P_0 = \{a, b\}$, tem-se:

$$m(b-a) \leqslant L(f, P_0),$$
$$M(b-a) \geqslant U(f, P_0),$$

pois o ínfimo é o maior dos limites inferiores m, no entanto que o supremo é o menor dos limites superiores M. Se P é qualquer outra partição de $[a, b]$, então obviamente será um refinamento de P_0, ou seja, $P \supseteq P_0$. Portanto:

$$m(b-a) \leqslant L(f, P_0) \leqslant L(f, P) \leqslant \int_a^b f \leqslant U(f, P) \leqslant U(f, P_0) \leqslant M(b-a).$$ ∎

27.4.8 Teorema: *Se f é contínua em $[a, b]$, então existe $\xi \in [a, b]$ tal que:*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$ □

Demonstração: Se f é contínua em $[a, b]$, então é integrável em $[a, b]$ segundo 27.3.7. Além disso, pelo resultado 19.2.3, existem $\alpha, \beta \in [a, b]$ tais que $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$, para todo $x \in [a, b]$. Desta maneira, o teorema 27.4.7 precedente pode ser aplicado com

$$m = f(\alpha),$$
$$M = f(\beta),$$

de onde tem-se:

$$f(\alpha) \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leqslant f(\beta).$$

Usando a relação acima, o resultado do teorema 19.3.2 com

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

garante a existência de algum $\xi \in [a, b]$ tal que:

$$f(\xi) = c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$ ∎

Finalmente, acrescentam-se um par de convenções que serão um auxiliar particularmente útil na "determinação algébrica" de integrais. Observe que se f é integrável, então do Teorema 27.4.7 tem-se que:

$$\lim_{x \to a} \int_a^x f = 0.$$

Isso justifica, por assim dizer, a seguinte convenção.

27.4.9 Definição: Se $a \in \mathbb{R}$, então define-se:

$$\int_a^a f := 0. \qquad \clubsuit$$

A segunda e última convenção tem por objetivo fazer que o resultado do Teorema 27.4.4 seja válido para pontos a, b, c quaisquer, não necessariamente com $a < c < b$.

27.4.10 Definição: Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $b < a$, então define-se:

$$\int_a^b f := -\int_b^a f. \qquad \clubsuit$$

Exercícios para o Capítulo 27

27.5 Uma Estimativa de $\log 2$

27.5.1 Exercício: Considere $f(x) = 1/x$. Seja P_n uma partição equi-espaciada do intervalo $[1, 2]$ em n subintervalos de igual comprimento, ou seja, $1/n$ cada.

(a) Calcule a soma inferior $L(f, P_n)$.

$$\text{R: } L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

(b) Calcule a soma superior $U(f, P_n)$.

$$\text{R: } U(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

(c) Calcule a diferença $U(f, P_n) - L(f, P_n)$. Conclua que a função $f(x) = 1/x$ é integrável no intervalo $[1, 2]$.

$$\text{R: } U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{1}{2n} \text{ tende a zero quando } n \to \infty.$$ ♣

27.5.2 Exercício: Com a mesma partição P_n do exercício anterior considere agora a soma superior $U'(f, P_n)$ calculada com *trapezios* e não com retângulos. Observe que $U'(f, P_n)$ deve ser menor que $U(f, P_n)$. Calcule a diferença $U(f, P_n) - U'(f, P_n)$.

Sugestão: Calcular a diferença diretamente é muito mais facil que calcular $U'(f, P_n)$ por separado e depois substrair do resultado do item (b) do exercício anterior.

$$\text{R: } U(f, P_n) - U'(f, P_n) = \frac{1}{4n}.$$ ♣

27.5.3 Exercício: Considere $\log 2$ apenas como uma notação para a seguinte integral:

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx,$$

cuja existência garante o item (c) do exercício 27.5.1. Apelando ao significado geométrico da integral verifique as seguintes estimativas.

(a) $1/2 < \log 2$.

Sugestão: Use o item (a) do exercício 27.5.1 para algum n conveniente.

R: $n = 1$.

(b) $\log 2 < 0,75$.

Sugestão: Use o item (b) do exercício 27.5.1 para algum n conveniente. Observe que ao calcular a soma superior com diversos n, se o valor correspondente for maior que o solicitado, antes de calcular com outro n pode ser empregado o resultado do exercício 27.5.2 anterior para verificar se a soma com trapezios seria adequada.

R: $n = 5$ com retângulos, ou $n = 1$ com trapezios.

(c) $\log 2 < 0,7$.

Sugestão: Se fez o item (b) anterior, use o exercício 27.5.2 anterior para verificar se a diferença $0,75 - 0,70 = 0,05$ pode ser obtida com $n = 5$ ao passar de retângulos para trapezios. ♣

27.6 A Definição de Integral

27.6.1 Exercício: Calcule a integral das seguintes funções no intervalo $[a, b]$ usando a definição. A título de sugestão, os cálculos podem ser significativamente mais simples ao utilizar uma partição equi-espaciada P_n do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, cada um de comprimento $(b-a)/n$. Em particular, se $P_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, então $t_k = a + k(b-a)/n$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.

(a) $f(x) = c$. R: $c(b-a)$.

(b) $f(x) = x$. R: $b^2/2 - a^2/2$.

(c) $f(x) = x^2$, supondo que $0 \leqslant a < b$. R: $b^3/3 - a^3/3$. ♣

27.7 A Integral de x^n com $n \in \mathbb{N}$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $I_n := \displaystyle\int_0^1 x^n \, dx$.

27.7.1 Exercício: Prove a seguinte relação de recorrência:

$$2^n I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{n} \binom{n}{k} I_k.$$ ♣

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathrm{par}(n)$ a **paridade** de n, definida como:

$$\mathrm{par}(n) := \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par;} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

27.7.2 Exercício: Prove que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se a seguinte relação:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k\,\mathrm{par}}}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \left(2^n - \mathrm{par}(n)\right).$$ ♣

27.7.3 Exercício: Prove que $I_n = \dfrac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Use inducão em n. ♣

27.7.4 Exercício: Finalmente, se $0 < a < b$ prove que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\int_a^b x^n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Observe-se que o mesmo resultado para $0 \leqslant a$ segue por continuidade. ♣

27.7.5 Exercício: Generalize o resultado do exercício anterior para a e b arbitrários. Para tanto, suponha-se que $a < 0$ e considere por separado os casos $0 < b$ e $b \leqslant 0$, respectivamente. Nesse último caso, considere separadamente n par e ímpar como sub-casos. ♣

27.8 A Integral de cos e sen

27.8.1 Exercício: Seja $a \in (0, \pi/2]$. Usando partições equi-espaciadas do tipo P_n prove que:

(a) $\displaystyle\int_0^a \operatorname{sen} x\,dx = 1 - \cos a.$

(b) $\displaystyle\int_0^a \cos x\,dx = \operatorname{sen} a.$ ♣

27.8.2 Exercício: Considere a integral do Exercício 27.8.1(b).

(a) Use a paridade da função cos para verificar que a expressão para essa integral é válida também para a no intervalo $[-\pi/2, 0]$. Portanto, resulta válida para todo a em $[-\pi/2, \pi/2]$.

(b) Verifique a validade da mesma expressão dessa integral no itervalo $\pi/2 \leqslant a \leqslant 3\pi/2$.

Sugestão: Em tal caso $-\pi/2 \leqslant a - \pi \leqslant \pi/2$ e assim:

$$\begin{aligned}\int_0^a \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^a \cos x\,dx = \operatorname{sen}\pi/2 + \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos(x+\pi)\,dx \\ = 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi} \cos x\,dx = 1 - \operatorname{sen}(a-\pi) + \operatorname{sen}(-\pi/2).\end{aligned}$$

(c) Generalize para todo $a \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Observe-se que o intervalo $-\pi/2 \leqslant a \leqslant 3\pi/2$ tem comprimento 2π e use a periodicidade das funções cos e sen. ♣

27.8.3 Exercício: Generalize o resultado do Exercício 27.8.1(a) para todo $a \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Observe-se que:

$$\begin{aligned}\int_0^a \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi/2}^a \operatorname{sen} x\, dx = (1 - \cos \pi/2) + \int_0^{a-\pi/2} \operatorname{sen}(x + \pi/2)\, dx \\ = (1-0) + \int_0^{a-\pi/2} \cos x\, dx = 1 + \operatorname{sen}(a - \pi/2) = 1 - \cos a.\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade acima será necessário apelar ao resultado do item (c) do exercício anterior. ♣

27.9 A Integral de x^n com $n \in \mathbb{N}$: Cálculo Alternativo

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b$. Considere $P_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ partição de $[a, b]$ tal que as *razões* t_i/t_{i-1} são iguais, em vez de partições equi-espaciadas, onde são iguais as diferenças $t_i - t_{i-1}$.

27.9.1 Exercício: Prove que para uma tal partição P_n tem-se que $t_i = a\, c^{i/n}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, onde $c = b/a$. ♣

Considere agora $p \in \mathbb{N}$. Em particular, deve ser $p > 0$ e $p \neq -1$. Observe que a função $f(x) = x^p$ é estritamente crescente no intervalo $[t_{i-1}, t_i] \subseteq [a, b] \subset (0, +\infty)$, pois $f'(x) = p\, x^{p-1} > 0$, para todo $x \in (0, +\infty)$.

27.9.2 Exercício: Prove que a soma superior da função $f(x) = x^p$ com a partição P_n do exercício anterior é dada por:

$$U(f, P_n) = (b^{p+1} - a^{p+1})\, \frac{c^{p/n}}{1 + c^{1/n} + c^{2/n} + \cdots + c^{p/n}}.$$ ♣

27.9.3 Exercício: Prove que a soma inferior da função $f(x) = x^p$ com a partição P_n do exercício anterior é dada por:

$$L(f, P_n) = (b^{p+1} - a^{p+1})\, \frac{1}{1 + c^{1/n} + c^{2/n} + \cdots + c^{p/n}}.$$ ♣

27.9.4 Exercício: Prove que:

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{1+p} = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n).$$

Conclua que a integral da função $f(x) = x^p$ em $[a,b]$ existe e vale $\dfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$. ♣

Desta maneira, dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a \leqslant b$, para cada $p \in \mathbb{N}$ a função $f(x) = x^p$ resulta integrável no intervalo $[a,b]$. Mais ainda, em tal caso o valor da integral é dado por:

$$\int_a^b x^p = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}.$$

Observe adicionalmente que o mesmo resultado para o caso $a = 0$ segue por continuidade.

27.10 A Integral de x^s com $s \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$: Introductio

Considere a função $f(x) = x^s$ com $s \in \mathbb{R}$ e $s \neq -1$.

27.10.1 Exercício: Suponha adicionalmente $s > 0$. Empregando técnicas análogas à da seção anterior prove:

(a) $U(f,P_n) = c^{s/n}\, L(f,P_n)$.

(b) A diferença $U(f,P_n) - L(f,P_n)$ tende para zero quando n tende para infinito. Conclua que f é integrável.

(c) Verifique que a soma inferior é dada por:

$$L(f,P_n) = \left(b^{s+1} - a^{s+1}\right)\, \frac{1-c^{1/n}}{1-c^{(s+1)/n}}.$$ ♣

Observe que para calcular explicitamente o valor da integral deve ser calculado o limite:

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \left(b^{s+1} - a^{s+1}\right) \lim_{n\to\infty} \phi_s(n),$$

onde $\phi_s(n)$ é a função definida como:

$$\phi_s(n) := \frac{1-c^{1/n}}{1-c^{(s+1)/n}}.$$

O valor deste limite será determinado posteriormente, pois no momento não é possível derivar funções da forma $f(x) = x^s$ com $s \in \mathbb{R}$ arbitrário a partir da definição de exponencial fornecida no Capítulo 12. De fato, no último exercício da seção 32.15 é provado que:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_s(n) = \frac{1}{s+1}.$$

Portanto:

$$\int_a^b x^s\, dx = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \left(b^{s+1} - a^{s+1}\right) \lim_{n\to\infty} \phi_s(n) = \frac{b^{s+1}-a^{s+1}}{s+1}.$$

27.11 Desigualdades e Integrais

27.11.1 Exercício: **(a)** Se f é integrável em $[a,b]$ com $f \geqslant 0$, então $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

(b) Se f e g são integráveis em $[a,b]$ com $f \leqslant g$, então $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Sugestão: Observe que $g - f \geqslant 0$ satisfaz a hipótese do item anterior. ♣

27.11.2 Exercício: **(a)** Se f é integrável em $[a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$.

Sugestão: Basta considerar $g = |f|$ no Exercício 27.11.1(b).

(b) Se f é integrável em $[a,b]$, então $\displaystyle -\int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$.

Sugestão: Basta aplicar o resultado do item anterior à função $-f$, observando que $|-f| = |f|$.

(c) Conclua dos itens (a) e (b) que se f é integrável em $[a,b]$ então $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$. ♣

27.11.3 Exercício: Do Exercício 27.11.1 anterior sabe-se que se $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$. Forneça um exemplo em que $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,b]$ com $f(x_0) > 0$ *para algum* $x_0 \in [a,b]$, e tal que $\displaystyle\int_a^b f = 0$.
Sugestão: Considere o Exemplo 27.3.5. ♣

Uma situação como no exemplo do exercício anterior resulta excluida se a função em questão for *contínua* no ponto onde é positiva, como mostra o exercício a seguir.

27.11.4 Exercício: Seja f integrável em $[a,b]$ com $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,b]$. Suponha adicionalmente que f é contínua em algum $x_0 \in [a,b]$ e que $f(x_0) > 0$. Prove que $\displaystyle\int_a^b f > 0$.
Sugestão: Basta encontrar alguma soma inferior $L(f,P)$ que seja positiva. ♣

O resultado do exercício anterior pode ser extendido para funcões f integráveis com $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, não necessariamente contínuas. Isso não é nem um pouco dificil, usando o exercício anterior mais o fato que as funções integráveis na verdade resultam contínuas em “muitos pontos”. Contudo, a prova desse último resultado deverá esperar até o próximo capítulo, vide Exercício 28.5.1.

27.12 O Lema Fundamental do Cálculo Variacional

27.12.1 Exercício: Suponha-se que f é contínua em $[a,b]$ e que $\displaystyle\int_a^b fg = 0$ para todas as funções g contínuas em $[a,b]$. Prove que $f = 0$.

Sugestão: Considerando $g = f$, use *reductio ad absurdum* com o Exercício 27.11.4 para fozar uma contradição. ♣

27.12.2 Exercício: Suponha-se que f é contínua em $[a,b]$ e que $\displaystyle\int_a^b fg = 0$ para todas as funções g contínuas em $[a,b]$ e tais que satisfazem a condição adicional $g(a) = g(b) = 0$. Prove que neste caso resulta também $f = 0$.

Sugestão: Como no exercício anterior, use *reductio ad absurdum* com o Exercício 27.11.4 para fozar uma contradição, considerando por separado os casos $f(x_0) > 0$ e $f(x_0) < 0$, mas agora a função g escolhida dependerá do comportamento da f perto de x_0. ♣

27.13 Funções Degrau

27.13.1 Definição: Uma função s definida em $[a,b]$ denomina-se **função degrau** se existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que s é constante em cada um dos intervalos (t_{i-1}, t_i). Os valores de s e t_i podem ser arbitrários. ♣

27.13.2 Exercício: **(a)** Seja f integrável em $[a,b]$. Prove que para todo $\epsilon > 0$ existem funções degrau s_1 e s_2 com $s_1 \leqslant f$ e $s_2 \geqslant f$ tais que:

$$\int_a^b f - \int_a^b s_1 < \epsilon;$$
$$\int_a^b s_2 - \int_a^b f < \epsilon.$$

Sugestão: As funções degrau vêm de graça na definição de integrabilidade.

(b) Reciprocamente, se para todo $\epsilon > 0$ existem funções degrau s_1 e s_2 com $s_1 \leqslant f$ e $s_2 \geqslant f$ tais que:

$$\int_a^b s_2 - \int_a^b s_1 < \epsilon,$$

então f é integrável em $[a,b]$. ♣

27.13.3 Exercício: Seja f integrável em $[a,b]$. Prove que para todo $\epsilon > 0$ existe uma função contínua g com $g \leqslant f$ tal que:

$$\int_a^b f - \int_a^b g < \epsilon.$$

Sugestão: Obtenha em primeiro lugar uma função degrau com esta propriedade e depois uma contínua. Um desenho será de muita ajuda nessa oportunidade. ♣

27.14 A Integral como Área

27.14.1 Exercício: Detrmine o valor das seguintes integrais apelando ao *significado geométrico* da integral. Faça em cada caso um gráfico da função envolvida. Lembre que a integral atribui área negativa à parte do gráfico que fica por debaixo do eixo das abcisas.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f$, onde a função f é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } -1 \leqslant x < 0; \\ 5, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$ R: $9/2$.

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x - |x|)\, dx.$ R: $-\pi^2$.

(c) $\displaystyle\int_{-3}^{4} |x+2|\ dx.$ R: $37/2$.

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\, dx.$ R: 0.

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx.$ R: $\pi/2$.

Sugestão: Determine o significado geométrico do conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ no plano.

(f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{1-x^2}\, dx.$ R: 0.

(g) $\displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{x}\, dx.$ R: $4\sqrt{2}/3$.

Sugestão: Aqui talvez seja de grande utilidade conhecer o resultado do item (c) do Exercício 27.6.1. ♣

27.14.2 Exercício: Apelando mais uma vez ao significado geométrico da integral, determine o valor da função $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\, dx$ quando:

(a) A função f é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$ R: $F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqslant t < 1; \\ t-1, & \text{se } 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$

(b) A função f é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqslant x < 1; \\ 2x - 2, & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases} \qquad \text{R: } F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leqslant t < 1; \\ (t-1)^2, & \text{se } 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

(c) Para cada um dos itens anteriores grafique $F(t)$.

(d) No caso do item (b) calcule $F'(t)$. O que descobre? ♣

27.14.3 Exercício: Somas inferiores e superiores para $f(x) = x^2$

Dada a função $f(x) = x^2$, escreva as somas superior e inferior no intervalo $[1, 2]$ usando uma partição tal que o comprimento de cada subintervalo seja $1/2$.

R: $L = 13/8$; $U = 25/8$. ♣

27.14.4 Exercício: Somas inferiores e superiores para $f(x) = 1/x$

Dada a função $f(x) = 1/x$, escreva as somas superior e inferior no intervalo $[1, 3]$ usando uma partição tal que o comprimento de cada subintervalo seja $1/3$.

R: $L = 1/4 + 1/5 + \cdots + 1/9$; $U = 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/8$. ♣

27.14.5 Exercício: Notação para a Integral

O presente exercício consiste em determinar o valor, e não em *calcular*, as seguintes integrais. Ou seja, é um exercício apenas no uso da notação (e não sobre técnicas calculatórias). Use os resultados do exercício anterior quando necessário.

(a) $\displaystyle\int_a^b (x + y)\, dx.$ R: $b^2/2 - a^2/2 + y(b - a)$.

(b) $\displaystyle\int_a^x (y + t)\, dy.$ R: $x^2/2 - a^2/2 + t(x - a)$.

(c) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_a^x (1 + t)\, dz \right) dx.$ R: $\displaystyle(1 + t)\,[b^2/2 - a^2/2 - a(b - a)] = (1 + t)\,\frac{(b - a)^2}{2}.$

(d) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d (x + y)\, dy \right) dx.$ R: $[d^2/2 - c^2/2](b - a) + (d - c)[b^2/2 - a^2/2]$.

(e) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d f(x) g(y)\, dy \right) dx.$ R: $\displaystyle\left(\int_a^b f \right) \left(\int_c^d g \right).$ ♣

27.14.6 Exercício: Linearidade da Integral

Determine o valor das seguintes integrais:

(a) $\int_a^b (f+g)$, sabendo que $\int_a^b f = 3$ e $\int_a^b g = -4$. R: -1.

(b) $\int_a^b (2\phi - 3\psi)$, sabendo que $\int_a^b \phi = 4$ e $\int_a^b \psi = \pi^2$. R: $8 - 3\pi^2$.

(c) $\int_{-1}^1 (2\phi(x) - 3\psi(x) + x)\, dx$, sabendo que $\int_{-1}^1 \phi = 4$ e $\psi(x) = \int_{-1}^x t^2\, dt$. R: 6.

(d) $\int_{-1}^1 (2x^3 + 3)\, dx$. R: 6. ♣

27.14.7 Exercício: Determine um valor b tal que $\int_{b-2}^b x\, dx = 6$. R: 4. ♣

Capítulo 28

Existência e Unicidade da Integral de Riemann

28.1 Resultados e Definições Preliminares

Para conveniência do leitor, se reproduzem a seguir as definições introduzidas na Seção 19.7 e os resultados do Exercício 19.7.1.

Se $\mathbb{R} \supset I$ é um *intervalo limitado* e $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ uma função *limitada*, define-se:

$$\begin{aligned} M(f, I) &:= \sup \{f(x) \,:\, x \in I\}\,; \\ m(f, I) &:= \inf \{f(x) \,:\, x \in I\}\,; \\ \omega(f, I) &:= M(f, I) - m(f, I). \end{aligned}$$

Se $a \in I$, define-se a **oscilação**, ou o **pulo**, **de** f **em** a como:

$$\omega(f, a) := \inf \{\omega(f, J \cap I) \,:\, J \text{ é aberto e } J \ni a\}\,.$$

A aplicação $a \longmapsto \omega(f, a)$ recebe o nome de **função oscilação**, ou **função pulo**, de f.

28.1.1 Observação: Segue trivialmente das definições precedentes que se $J \subseteq I$, então $\omega(f, J) \leqslant \omega(f, I)$. ♣

28.1.2 Lema: ***(a)*** *$\omega(f, a) = 0$ se e somente se f é contínua em a. Em particular, f não contínua em a implica $\omega(f, a) > 0$.*

(b) *Se $\omega(f, I) = 0$ então f é* constante *em I.*

(c) *Para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,:\, \omega(f, x) < a\}$ é aberto.* □

Demonstração: Cf. Exercício 19.7.1.

(a) Para provar a parte ($\Leftarrow$), suponha que f é contínua em a. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela definição de continuidade, existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in (a-\delta, a+\delta) =: J_\delta \;\Leftrightarrow\; |x-a| < \delta$$
$$\Rightarrow\; |f(x)-a| < \frac{\epsilon}{2} \;\Leftrightarrow\; f(x) \in (f(a)-\epsilon/2, f(a)+\epsilon/2).$$

Em particular:

$$f(x) < f(a) + \frac{\epsilon}{2},\; \forall\, x \in J_\delta,$$
$$f(x) > f(a) - \frac{\epsilon}{2},\; \forall\, x \in J_\delta.$$

De onde segue:

$$M(f, J_\delta) \leqslant f(a) + \frac{\epsilon}{2},$$
$$m(f, J_\delta) \geqslant f(a) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto:

$$0 \leqslant \omega(f, J_\delta) \leqslant \epsilon,$$

de onde segue que:

$$0 \leqslant \omega(f, a) \leqslant \omega(f, J_\delta \cap I) \leqslant \epsilon.$$

Agora, como ϵ era arbitrário, tem-se $\omega(f, a) = 0$.

Reciprocamente, para provar a parte ($\Rightarrow$) suponha $\omega(f, a) = 0$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela definição de ínfimo existe J_0 intervalo aberto com $a \in J_0$ tal que $\omega(f, J_0 \cap I) < \epsilon$. Observando que $m(f, I) \leqslant f(a) \Rightarrow -f(a) \leqslant -m(f, I)$ para qualquer $I \ni a$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant M(f, J_0 \cap I) = M(f, J_0 \cap I) + f(a) - f(a) \\ &\leqslant M(f, J_0 \cap I) + f(a) - m(f, J_0 \cap I) = \omega(f, J_0 \cap I) + f(a) < \epsilon + f(a). \end{aligned}$$

Portanto, $f(x) - f(a) < \epsilon$, para todo $x \in J_0$. Analogamente, observando que $f(a) \leqslant M(f, I) \Rightarrow -f(a) \geqslant -M(f, I)$ para qualquer $I \ni a$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant m(f, J_0 \cap I) = m(f, J_0 \cap I) - f(a) + f(a) \\ &\geqslant m(f, J_0 \cap I) - M(f, J_0 \cap I) + f(a) = -\omega(f, J_0 \cap I) + f(a) \\ &> -\epsilon + f(a). \end{aligned}$$

Portanto, $-\epsilon < f(x) - f(a)$, para todo $x \in J_0$. Combinando esta última relação com a obtida anteriormente, tem-se que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, para todo $x \in J_0$, provando que f é contínua em a.

(b) Observe que:

$$\omega(f, I) = 0 \;\Rightarrow\; M(f, I) = m(f, I) =: c.$$

Portanto:

$$c = m(f, I) \leqslant f(x) \leqslant M(f, I) = c \;\Rightarrow\; f(x) = c,\; \forall\, x \in I.$$

(c) Seja A o conjunto definido como:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \,:\, \omega(f,x) < a\}\,.$$

Se A for o conjunto vazio então é obviamente aberto. Suponha que existe $x \in A$. Pela definição de A, tem-se $\omega(f,x) < a$. Portanto, existe J intervalo aberto tal que $x \in J$ e $\omega(f, J \cap I) < a$. Agora, se $y \in J$, pela definição de ínfimo tem-se:

$$\omega(f,y) \leqslant \omega(f, J \cap I) < a \;\Rightarrow\; \omega(f,y) < a \;\Rightarrow\; y \in A.$$

Portanto, $J \subseteq A$, provando que éste último conjunto é aberto. ∎

28.1.3 Definição: Se $\mathbb{R} \supset J$ é um intervalo limitado, aberto, fechado, semi-aberto ou semi-fechado, com extremos a e b, com $a < b$, denota-se o seu comprimento por $\lambda(J)$, ou seja, $\lambda(J) = b - a$. ♣

28.1.4 Lema: *Seja J intervalo compacto e $f : J \longmapsto \mathbb{R}$ uma função limitada. Suponha que existe $\mathbb{R} \ni a > 0$ tal que $\omega(f,x) < a$ para todo $x \in J$. Então, existe uma partição P do intervalo J tal que:*

$$U(f,P) - L(f,P) < a\,\lambda(J).$$ □

Demonstração: Como $\omega(f,x) < a$ para cada $x \in J$, existe I_x intervalo aberto com $x \in I_x$ tal que $\omega(f, I_x \cap J) < a$. Desta maneira, a família $\{I_x\}_{x \in J}$ é um cobrimento por abertos do conjunto compacto J. Portanto, para algum $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$J \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_{x_i}.$$

Seja P a partição determinada pelos pontos nos extremos de $I_{x_i} \cap J$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Suponha que $I_1, I_2, \ldots, I_k$ sejam os intervalos que constituem P. Observe que dado I_i existe algum $j = j(i)$ tal que $I_i \subseteq I_{x_j} \cap J$, em cujo caso tem-se $\omega(f, I_{x_j} \cap J) < a$. Portanto:

$$\begin{aligned}
U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{k} M(f,I_i)\,\lambda(I_i) \;-\; \sum_{i=1}^{k} m(f,I_i)\,\lambda(I_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \left(M(f,I_i) \;-\; m(f,I_i)\right)\,\lambda(I_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \omega(f,I_i)\,\lambda(I_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} \omega(f, I_{x_j} \cap J)\,\lambda(I_i) \\
&< a \sum_{i=1}^{k} \lambda(I_i) = a\,\lambda(J).
\end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato de ser P uma partição de J. ∎

28.1.5 Definição: Se diz que um subconjunto $\mathbb{R} \supset E$ tem **medida de Lebesgue nula**, ou simplesmente **medida nula**, se para todo $\epsilon > 0$ existe uma família enumerável $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos com:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_i) < \epsilon$$

tais que:

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i.$$

Observe-se que a família $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dependerá em general do ϵ e, obviamente, do conjunto E. Quando E tem medida de Lebesgue nula, isso denota-se por $\lambda(E) = 0$. ♣

28.1.6 Lema: *Se $A \subseteq B$ e $\lambda(B) = 0$, então $\lambda(A) = 0$. Ou seja, todo sub-conjunto de um conjunto de medida nula também tem medida nula.* □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe uma família numerável $\{J_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos com:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_i) < \epsilon$$

tal que:

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i.$$

Como $A \subseteq B$, obviamente tem-se:

$$A \subseteq B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i.$$

Como $\epsilon > 0$ era arbitrário, segue que $\lambda(A) = 0$. ∎

28.1.7 Lema: *Se $\lambda(E) = 0$, então $\lambda(-E) = 0$. Aqui $-E := \{-x : x \in E\}$. Ou seja, se um conjunto tem medida nula, então a sua reflexão especular com relação à origem também tem medida nula.* □

Demonstração: A prova baseia-se em operações simples com conjuntos e fica a cargo do leitor. ∎

28.1.8 Lema: *União enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula. Ou seja, se:*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

onde cada E_n tem medida nula, então o conjunto E também tem medida nula. □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, para cada E_n existe uma família enumerável $\{J_i^n\}_{i\in\mathbb{N}}$ de intervalos abertos com:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_i^n) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

tais que:

$$E_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i^n.$$

A coleção $\{J_i^n\}_{i\in\mathbb{N}}^{n\in\mathbb{N}}$ de todas essas famílias continua sendo enumerável e obviamente:

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i^n.$$

Finalmente, tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_i^n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \epsilon. \qquad \blacksquare$$

28.2 Existência da Integral de Riemann

28.2.1 Teorema: *Uma função f é integrável Riemann se e somente se f é contínua exceto um conjunto de medida nula.* □

Demonstração: Seja E o conjunto definido como:

$$E := \{x \,:\, x \in [a,b] \ \wedge\ f \text{ não é contínua em } x\}\,.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja E_n o conjunto definido como:

$$E_n := \left\{x \,:\, x \in [a,b] \ \wedge\ \omega(f,x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Observe que $x \in E \Rightarrow \omega(f,x) > 0$, portanto:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Para provar a parte ($\Rightarrow$) suponha f integrável Riemann. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ arbitrários. Como f é integrável, existe P partição de $[a,b]$ tal que:

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\epsilon}{2n}.$$

Se $I_1, I_2, \ldots, I_k$ são os intervalos que constituem a partição P, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{k} \omega(f,I_i)\,\lambda(I_i) = \sum_{i=1}^{k} M(f,I_i)\,\lambda(I_i) \ - \ \sum_{i=1}^{k} m(f,I_i)\,\lambda(I_i) = U(f,P) - L(f,P) < \frac{\epsilon}{2n}.$$

Sejam E_n^1 e E_n^2 definidos como:

$$E_n^1 := \{x \in E_n \,:\, x \in P\} = E_n \cap P,$$
$$E_n^2 := E_n \backslash E_n^1.$$

Segue trivialmente da definição precedente que:

$$E_n = E_n^1 \cup E_n^2,$$

onde a união é disjunta. Além disso, observe que E_n^1 é finito, pois $E_n^1 = E_n \cap P \subseteq P$, sendo P um conjunto finito. Portanto, existem $J_1, J_2, \ldots, J_p$ intervalos abertos tais que:

$$E_n^1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} J_i,$$

com a propriedade:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda(J_i) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como efeito, se fosse, por exemplo, $|E_n^1| = p$ com $E_n^1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$, basta tomar como J_i o intervalo $(x_i - \delta/4p, x_i + \delta/4p)$ onde δ é qualquer número $0 < \delta < \epsilon$, por exemplo, $\delta = \epsilon/2$. Em tal caso, para todo $i = 1, 2, \ldots, p$, tem-se:

$$\lambda(J_i) = 2\,\frac{\delta}{4p},$$

como também:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda(J_i) = 2\,\frac{\delta}{4p}\,p = \frac{\delta}{2} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja agora $x \in E_n^2$. Em tal caso, x deve ser *ponto interior* de algum I_j, pois se estivesse em algum extremo do intervalo estaria em P, contradizendo que $x \in E_n^2$. Portanto:

$$\omega(f, I_j) \geqslant \omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n},$$

pois, como $x \in E_n^2 \subseteq E_n$, o afirmado segue da definição de E_n. Sejam $I_{i_1}, I_{i_2}, \ldots, I_{i_r}$ os intervalos de P que contém elementos de E_n^2. Então:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} \lambda(I_{i_j}) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \omega(f, I_{i_j})\,\lambda(I_{i_j}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \omega(f, I_j)\,\lambda(I_i) < \frac{\epsilon}{2n}.$$

A primeira desigualdade acima segue da relação precedente, entanto que para a segunda basta observar que os elementos da soma são não-negativos, pois $\omega(f, I_{i_j}) \geqslant 0$ e $\lambda(I_{i_j}) > 0$. Como consequência trival da última relação, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda(I_{i_j}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sejam J_{i_j} os intervalos abertos com os mesmos extremos de I_{i_j}, ou seja, $J_{i_j} = \overset{\circ}{I}_{i_j}$. Em tal caso, a família de conjuntos $\{J_1, J_2, \ldots, J_p\} \cup \{J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_r}\}$ constitui uma cobertura de E_n por abertos com soma de comprimentos menor que ϵ. Como $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$ eram arbitrários, segue que E_n tem medida nula, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a união enumerável:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

também tem medida nula.

Reciprocamente, para provar a parte ($\Leftarrow$) suponha agora que $\lambda(E) = 0$. Se fosse $\omega(f, [a, b]) = 0$, então pelo Lema 28.1.2(b) f seria constante em $[a, b]$ e obviamente integrável Riemann em $[a, b]$. Suponha portanto $\omega(f, [a, b]) > 0$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\,\epsilon > 2(b-a)$, ou equivalentemente:

$$\frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{28.2.1}$$

Observe que $E_n \subseteq E$ e $\lambda(E) = 0$ implicam que $\lambda(E_n) = 0$. Portanto, pela definição de conjunto de medida nula, existe uma família de conjuntos $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com cada I_k aberto, tal que:

$$E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

com a propriedade:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < \frac{\epsilon}{2\,\omega(f, [a, b])}. \tag{28.2.2}$$

Pelo Lema 28.1.2(c) o conjunto $\{\omega(f, x) < 1/n\}$ é aberto, sendo o complemento $\{\omega(f, x) \geqslant 1/n\}$ um conjunto fechado. Desta maneira o conjunto:

$$E_n = \left\{x \in [a, b] \,:\, \omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n}\right\} = [a, b] \bigcap \left\{\omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

é fechado por ser união finita de dois conjuntos fechados. Como $E_n \subseteq [a, b]$ também resulta E_n limitado. Assim, o conjunto E_n é *compacto*. Em particular, existe uma cobertura *finita* $\{I_{k_i}\}_{i=1}^{r}$ de E_n por abertos. Dado que I_{k_i} é aberto, seu complemento $I_{k_i}^{\mathsf{c}}$ é fechado, como também é o conjunto $[a, b] \cap I_{k_i}^{\mathsf{c}}$ por ser interseção finita de dois fechados. Mais ainda, $[a, b] \cap I_{k_i}^{\mathsf{c}}$ é limitado pois está contido em $[a, b]$, sendo portanto também compacto. Desta maneira, o conjunto:

$$[a, b] \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{r} I_{k_i}\right)^{\mathsf{c}} = [a, b] \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{r} I_{k_i}^{\mathsf{c}}\right) = \bigcap_{i=1}^{r} \left([a, b] \bigcap I_{k_i}^{\mathsf{c}}\right)$$

é união finita de compactos (disjuntos) fechados, que será denotada $J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_s$. Incidentalmente, observe que esta união disjunta está obviamente contida em $[a, b]$, e tem-se:

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda(J_i) = \lambda(J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_s) \leqslant \lambda([a, b]) = b - a. \tag{28.2.3}$$

Voltando à relação anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}[a,b] &= \left[[a,b] \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{r} I_{k_i}\right)\right] \bigcup^* \left[[a,b] \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{r} I_{k_i}\right)^{\mathsf{c}}\right] \\ &= \left[\left(\bigcup_{i=1}^{r} I_{k_i}\right) \bigcup^* \left(\bigcup_{l=1}^{s} J_l\right)\right] \bigcap [a,b].\end{aligned} \tag{28.2.4}$$

Aqui $\cup^*$ denota união *disjunta*. Observe também que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ tem-se:

$$\begin{aligned} x \in J_i \;\Rightarrow\; x \in \bigcup_{l=1}^{s} J_l \;\Rightarrow\; x \in [a,b] \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{r} I_{k_i}\right)^{\mathsf{c}} \;\Rightarrow\; x \notin \bigcup_{i=1}^{r} I_{k_i} \supseteq E_n \\ \Rightarrow\; x \notin E_n \;\Rightarrow\; \omega(f,x) < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 28.1.4 existe uma partição P_i de J_i tal que:

$$U(f, P_i) - L(f, P_i) < \frac{1}{n}\,\lambda(J_i). \tag{28.2.5}$$

Seja P a partição de $[a,b]$ definida como $P := P_1 \bigcup P_2 \bigcup \cdots \bigcup P_s \bigcup \{a,b\}$. Pela propriedade (28.2.4), os intervalos que constituem P são os intervalos constituintes de cada P_i, acrescidos dos conjuntos:

$$\begin{aligned} &\overline{I}_{k_1} \bigcap [a,b] \\ &\overline{I}_{k_2} \bigcap [a,b] \\ &\quad\ldots \\ &\overline{I}_{k_r} \bigcap [a,b] \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{s} U(f,P_i) - L(f,P_i) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{r} \left[M\left(f, \overline{I}_{k_j} \bigcap [a,b]\right) \;-\; m\left(f, \overline{I}_{k_j} \bigcap [a,b]\right)\right] \lambda\left(\overline{I}_{k_j} \bigcap [a,b]\right) \\ &< \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} \lambda(J_i) \;+\; \sum_{j=1}^{r} \omega\left(f, \overline{I}_{k_j} \bigcap [a,b]\right) \lambda(I_{k_j}) \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{n}\,(b-a) \;+\; \omega(f,[a,b]) \sum_{j=1}^{r} \lambda(I_{k_j}) \\ &\qquad\qquad < \frac{\epsilon}{2} \;+\; \omega(f,[a,b])\,\frac{\epsilon}{2\,\omega(f,[a,b])} = \frac{\epsilon}{2} \;+\; \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade foi usada a relação (28.2.5) no primeiro termo. Na segunda, a relação (28.2.3) no primeiro termo e a Observação 28.1.1 no segundo termo. Na terceira, a relação (28.2.1) no primeiro termo e a relação (28.2.2) no segundo termo. Como ϵ era arbitrário, segue que f é integrável Riemann. ∎

28.3 Caracterização Unívoca da Integral de Riemann

Considere-se uma aplicação I que atribui a certas funções limitadas f e conjuntos limitados $A \subset \mathbb{R}$ um número real $I_A f$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. **Linearidade:** Se $I_A f$ e $I_A g$ estão definidas, então para todo $a, b \in \mathbb{R}$ também está definida $I_A(af + bg)$ e tem-se:

$$I_A(af + bg) = a\, I_A f + b\, I_A g.$$

2. **Positividade:** Se $f \geqslant 0$ e $I_A f$ está definida, então $I_A f \geqslant 0$.

3. **Homogeneidade:** Se A é um intervalo e 1 denota a função identicamente igual ao número 1 em A, então $I_A 1$ está definida e tem-se $I_A 1 = \lambda(A)$.

4. **Aditividade Finita:** Se $\{A_i\}_{i=1}^n$ é uma família finita de subconjuntos ***disjuntos*** e $I_{A_i} f$ está definida para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, então $I_{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} f$ também está definida e tem-se:

$$I_{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} f = I_{A_1} f + I_{A_2} f + \cdots + I_{A_n} f.$$

28.3.1 Lema: *Se A é um intervalo e 0 denota a função identicamente nula em A, então $I_A 0$ está definida e tem-se $I_A 0 = 0$.* □

Demonstração: $I_A 1$ está bem definido, pela propriedade 3. Portanto, pela propriedade 1, também está bem definido $I_A(1 + (-1)1)$ e vale $I_A 1 + (-1)\, I_A 1$. Desta maneira:

$$I_A 0 = I_A(1 + (-1)1) = I_A 1 + (-1)\, I_A 1 = \lambda(A) - \lambda(A) = 0.$$ ■

28.3.2 Definição: Se $\mathbb{R} \supseteq A$ é um subconjunto qualquer, a função característica de A é denotada por χ_A e definida como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A; \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$ ♣

Observe que se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo, então $I_A \chi_A$ está definida e tem-se $I_A \chi_A = \lambda(A)$. Com efeito, $\chi_A = 1$ em A. Portanto, $I_A \chi_A = I_A 1 = \lambda(A)$. O próximo resultado generaliza esta propriedade para qualquer subconjunto de A.

28.3.3 Lema: *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ intervalos (limitados) com $B \subseteq A$. Então, $I_A \chi_B$ está definida e tem-se $I_A \chi_B = \lambda(B)$.* □

Demonstração: Se o intervalo B está contido no intervalo A, então este último pode ser particionado em, no máximo, três intervalos disjuntos, digamos, $A = A_1 \cup B \cup A_2$. Desta maneira, χ_B vale zero em A_1 e A_2 e χ_B vale 1 em B. Pelo lema anterior, $I_{A_1} \chi_B$ e $I_{A_2} \chi_B$ estão bem definidas e valem zero. Pela propriedade 3, também está bem definida $I_B\chi_B$ e vale $\lambda(B)$. Portanto, pela propriedade 4, tem-se que $I_A\chi_B = I_{A_1\cup B\cup A_2}\chi_B$ está bem definida e vale:

$$I_{A_1}\chi_B \ + \ I_B\chi_B \ + \ I_{A_2}\chi_B = I_{A_1}0 \ + \ I_B 1 \ + \ I_{A_2} = 0 \ + \ \lambda(B) \ + \ 0 = \lambda(B). \qquad \blacksquare$$

28.3.4 Teorema: *Se $I_{[a,b]}f$ e $\displaystyle\int_a^b f$ existem ambas, então são iguais.* □

Demonstração: Suponha que $\int_a^b f < I_{[a,b]}f$. Seja $\epsilon := I_{[a,b]}f - \int_a^b f > 0$. Como f é integrável em $[a,b]$, por definição de ínfimo, existe $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$ partição de $[a,b]$ tal que:

$$U(f,P) - \int_a^b f < \epsilon. \tag{28.3.1}$$

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, seja $J_i := [t_{i-1}, t_i]$ e seja M_i definido como:

$$M_i := \sup\{f(x) \, : \, x \in J_i\}.$$

Obviamente, cada J_i é um intervalo contido em $[a,b]$. Pelo lema anterior, $I_{[a,b]}\chi_{J_i}$ está bem definida. Pela propriedade 1, também está bem definido $I_{[a,b]}g$, onde g é a combinação linear definida como:

$$g := \sum_{i=1}^{n} M_i \, \chi_{J_i}.$$

Mais ainda, tem-se:

$$I_{[a,b]}g = \sum_{i=1}^{n} M_i \, I_{[a,b]}\chi_{J_i} = \sum_{i=1}^{n} M_i\lambda(J_i) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, (t_i - t_{i-1}) = U(f,P). \tag{28.3.2}$$

Portanto:

$$I_{[a,b]}g - \int_a^b f = U(f,P) - \int_a^b f < \epsilon = I_{[a,b]}f - \int_a^b f,$$

de onde segue:

$$I_{[a,b]}g < I_{[a,b]}f. \tag{28.3.3}$$

Por outro lado, decorre trivialmente da definição que $g \geqslant f$. Portanto, pela propriedade 2, deveria ser $I_{[a,b]}g \geqslant I_{[a,b]}f$, contradizendo a relação acima.

Desta maneira, deve ser $\int_a^b f \geqslant I_{[a,b]}f$. Se fosse $\int_a^b f > I_{[a,b]}f$, então seja $\epsilon := \int_a^b f - I_{[a,b]}f > 0$. Como f é integrável, pela definição de supremo, existe $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$ partição de $[a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f - L(f,P) < \epsilon. \tag{28.3.4}$$

Com o mesmo argumento anterior, $I_{[a,b]}g$ está bem definida, onde agora g é a combinação linear definida como:

$$g := \sum_{i=1}^{n} m_i \, \chi_{J_i},$$

com m_i definido como:

$$m_i := \inf \{f(x) \, : \, x \in J_i\},$$

e tem-se:

$$I_{[a,b]}g = \sum_{i=1}^{n} m_i \, I_{[a,b]} \, \chi_{J_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \lambda(J_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (t_i - t_{i-1}) = L(f, P).$$

Portanto:

$$\int_a^b f - I_{[a,b]}g = \int_a^b f - L(f, P) < \epsilon = \int_a^b f - I_{[a,b]}f,$$

de onde segue:

$$I_{[a,b]}f < I_{[a,b]}g. \tag{28.3.5}$$

Por outro lado, decorre trivialmente da definição que $g \leqslant f$. Portanto, pela propriedade 2, deveria ser $I_{[a,b]}g \leqslant I_{[a,b]}f$, contradizendo a relação acima.

Finalmente, pela propriedade de tricotomia, deve ser $\int_a^b f = I_{[a,b]}f$. ∎

Exercícios para o Capítulo 28

28.4 Caracterização Alternativa da Unicidade

28.4.1 Exercício: Prove o Teorema 28.3.4 asumindo para I as propriedades 1 a 3 enumeradas no texto mais a condição alternativa:

4. **Invariância por restrições:** Se $B \subseteq A$, então $I_B f$ está definida se e somente se $I_A(f|_B)$ está definida, em cujo caso são iguais, ou seja $I_B f = I_A(f|_B)$.

Sugestão: Observe que a propriedade 4 enunciada no texto somente foi utilizada na prova do Lema 28.3.3. Basta portanto demonstrar esse resultado via a propriedade alternativa acima. ♣

28.5 Funções Integráveis Positivas

O exercício a seguir constitui uma continuação dos resultados da Seção 27.11.

28.5.1 Exercício: Seja f integrável em $[a, b]$ com $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Prove que $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

Sugestão: Se f é integrável, então pelo Teorema 28.2.1 deve existir algum ponto $x_0 \in [a, b]$ onde f é contínua. O resto é consequência da hipótese de positividade e do Exercício 27.11.4. ♣

Capítulo 29

Monótonas são Interessantes

29.1 Monotonia e Continuidade

Na presente seção serão consideradas apenas funções monótonas não-decrescentes. Resultados totalmente análogos valem para funções monótonas não-crescentes, cujas provas podem ser obtidas observando que si f é uma delas, então $-f$ é uma daquelas.

29.1.1 Lema: *Seja f não-decrescente, ou seja, $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$. Então os limites laterais $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existem ambos.* □

Demonstração: Seja A o conjunto definido como:

$$A := \{f(x) \,:\, x < a\}.$$

Observe que A é limitado superiormente por $f(a)$, pois $x < a \Rightarrow f(x) \leqslant f(a)$. Portanto, existe $\alpha := \sup A$. Em particular, tem-se que $\alpha \geqslant f(x)$ para todo $x < a$.

<u>Afirmação:</u> $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \alpha$. ▽

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela definição de supremo existe $x_0 \in A$, ou seja, $x_0 < a$, tal que $\alpha - \epsilon < f(x_0)$. Portanto, definindo $\delta := a - x_0$, tem-se:

$$0 < a - x < \delta = a - x_0 \Leftrightarrow x_0 < x < a \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0) > \alpha - \epsilon \Rightarrow |\alpha - f(x)| = \alpha - f(x) < \epsilon. \blacktriangledown$$

Considere agora o conjunto B definido como:

$$B := \{f(x) \,:\, a \leqslant x\}.$$

Observe que B é limitado inferiormente por $f(a)$, pois $a \leqslant x \Rightarrow f(a) \leqslant f(x)$. Portanto, existe $\beta := \inf B$. Analogamente ao caso anterior prova-se que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \beta$. ∎

29.1.2 Corolário: *Se f está definida num intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e é não-decrescente, então f não possui discontinuidades evitáveis.* □

Demonstração: Se fosse $l := \lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, então deve ser $f(a) < l$, ou $f(a) > l$. Observe que:

$$l = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |l - f(x)| < \epsilon.$$

Desta maneira, se fosse $f(a) < l$, tomando $\epsilon := l - f(a) > 0$, teria-se:

$$l - f(x) = |l - f(x)| < \epsilon = l - f(a),$$

de onde segue que $f(a) < f(x)$, o que contradiz a monotonia da função, pois $x < a \Rightarrow f(x) \leqslant f(a)$. A prova no caso $f(a) > l$ é análoga. ∎

29.1.3 Teorema: *Seja f não-decrescente definida em um conjunto compacto $K = [a, b]$. Então, para cada $\epsilon > 0$ o conjunto:*

$$A_\epsilon := \left\{ x \in K \,:\, \lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-} f(y) > \epsilon \right\}$$

é finito. □

Demonstração: Se $A_\epsilon \neq \emptyset$, para cada $x \in A_\epsilon$, seja B_x o conjunto definido como:

$$B_x := \left\{ z \in [f(a), f(b)] \,:\, \lim_{y\to x^-} f(y) < z < \lim_{y\to x^+} f(y) \right\}.$$

Observe que se $x \in A_\epsilon$, então o comprimento de B_x é maior o igual a ϵ. Além disso, os conjuntos B_x são disjuntos entre si, pela monotonia da função. Por outro lado, o intervalo $f(b) - f(a)$ pode ser particionado em, no máximo uma quantidade finita, a saber:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\epsilon}$$

de sub-intervalos disjuntos de comprimento ϵ. ∎

29.1.4 Corolário: *O conjunto de pontos em que uma função não-decrescente é discontínua é enumerável.* □

Demonstração: Seja K compacto. O conjunto de pontos de K onde f é discontínua pode ser expressado como união enumerável:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$$

de conjuntos $A_{1/n}$ finitos, no caso de f ser monótona não-decrescente, pelo teorema anterior. Portanto, o conjunto de pontos de K onde f é discontínua resulta enumerável. O resultado enunciado segue observando que $\mathbb{R}$ é σ-compacto, ou seja, união enumerável de compactos, e união enumerável de conjuntos enumeráveis resulta enumerável. ∎

29.2 Monotonia e Diferenciabilidade

O Corolário 29.1.4 anterior mostra que uma função monótona resulta automaticamente contínua em "muitos" pontos. Para a derivabilidade, a situação é mais dificil de analizar e também mais interessante. Uma função não-decrescente pode deixar de ser derivável em um conjunto não-enumerável de pontos. Contudo, ainda continua sendo verdade que tais funções são deriváveis em "quase todos" os pontos, segundo um sentido diferente da expressão "quase todos" que difere do "muitos" da continuidade.

Esse fato é garantido por um famoso teorema de Henry Lebesgue, publicado em 1904 na primeira edição do seu famoso livro sobre integração. O resultado em questão aparece no final do último capítulo, como broche de ouro de toda a teoria:

29.2.1 Teorema (Lebesgue, 1904)**:** *Seja f não-decrescente. Então f é diferenciável com a posível exceição de um conjunto de medida nula.* ∎

A definição de conjunto de medida nula foi introduzida na Definição 28.1.5 no Capítulo 28 da presente.

Nesta seção é apresentada uma prova do Teorema de Lebesgue baseada na demonstração que consta no não menos famoso livro de F. Riesz e Sz.-Nagy, [20, p. 6 & ss.]. A prova do Teorema de Lebesgue fornece uma bela aplicação do Lema do Sol Nascente 19.14.5 que reproduzimos a seguir para conveniência do leitor, na sua versão ligeiramente generalizada fornecida pelo Exercício 19.14.4:

29.2.2 Lema (do Sol Nascente – Versão Aprimorada)**:** *Seja f uma função com limites laterais em $[\alpha, \beta]$. Se o conjunto de pontos de sombra de f é não vazio, então é união disjunta numerável de abertos (a, b). Mais ainda, em tal caso, para cada um desses intervalos tem-se $f(a) \leqslant f(b)$.* ∎

Além desse resultado, a prova do Teorema de Lebesgue é pontilhada de outros resultados auxiliares enunciados como diversos Lemas a seguir, após as definições pertinentes.

Sejam $\overline{f}'_\pm$ e $\underline{f}'_\pm$ definidas por:

$$\begin{aligned} \overline{f}'_\pm(x) &:= \limsup_{h\to 0^\pm} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \\ \underline{f}'_\pm &:= \liminf_{h\to 0^\pm} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definem-se os conjuntos $E(\alpha)$ e $F(\alpha)$ por:

$$\begin{aligned} E(\alpha) &:= \{x \in [a, b] \,:\, \overline{f}'_+(x) > \alpha\}, \\ F(\alpha) &:= \{x \in [a, b] \,:\, \underline{f}'_-(x) < \alpha\}. \end{aligned}$$

29.2.3 Lema: *Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário. Seja f monótona. Então:*

(a) *O conjunto $E(\alpha)$ está contido no conjunto $G(\alpha)$ de pontos de sombra da função $g = g_\alpha$ definida como:*

$$g(x) := f(x) - \alpha\, x.$$

(b) *O conjunto $E(\alpha)$ pode ser coberto por uma família numerável de intervalos abertos $\{J_k = (a_k, b_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tais que:*

$$\alpha\,(b_k - a_k) \leqslant f(b_k) - f(a_k), \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

(c) *Em particular, tem-se:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_k) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{\alpha}.$$

(d) *Se $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(n)$, então $\lambda(E) = 0$.* □

Demonstração: **(a)** Dado $x \in E(\alpha)$ arbitrário, tem-se:

$$\alpha < \overline{f}'_+(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \inf_{\epsilon>0}\left(\sup_{0<h<\epsilon} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$
$$\leqslant \sup_{0<h<\epsilon} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \ \forall\,\epsilon > 0.$$

Ou seja:

$$\alpha < \sup_{0<h<\epsilon} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Portanto, existe $0 < h_0 < \epsilon$ tal que:

$$\alpha < \frac{f(x+h_0) - f(x)}{h_0}.$$

Se $\xi := x + h_0$, então $\xi > x$ e a última relação pode ser expressada como:

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > \alpha.$$

Ou seja, existe $\xi > x$ tal que:

$$f(\xi) - \alpha\,\xi > f(x) - \alpha\, x.$$

A relação acima significa que x é ponto de sombra da função $g(x) := f(x) - \alpha\, x$. Como $x \in E(\alpha)$ era arbitrário, segue o resultado enunciado.

(b) Em primeiro termo, observe que se f é monótona, então existem os limites laterais de f. Por outro lado, observe que a função $x \longmapsto \alpha\, x$ é contínua, e portanto existem seus limites laterais também. Desta maneira, existem os limites laterais da função $g(x) = f(x) - \alpha\, x$. Portanto, aplicando o Lema do Sol Nascente para g, tem-se que o conjunto de pontos de sobra da g pode ser expressado como união disjunta enumerável de abertos (a_k, b_k) com $g(a_k) \leqslant g(b_k)$, ou seja:

$$\begin{aligned} f(a_k) - \alpha\, a_k &\leqslant f(b_k) - \alpha\, b_k \\ \alpha\,(b_k - a_k) &\leqslant f(b_k) - f(a_k) \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. O resultado enunciado segue portanto do item anterior.

(c) Da relação:

$$\alpha\,(b_k - a_k) \leqslant f(b_k) - f(a_k)$$

do item anterior, tem-se:

$$\alpha \sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k - a_k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} f(b_k) - f(a_k) \leqslant f(b) - f(a),$$

onde a última desigualdade é consequência da monotonia da f. Portanto:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(J_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k - a_k) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{\alpha}.$$

(d) Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Seja $n_0 \in (N)$ tal que: $n_0\, \epsilon > f(b) - f(a)$. Portanto:

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq E_{n_0} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \;\Rightarrow\; \lambda(E) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) = \sum_{k}^{\infty} \lambda(J_k) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{n_0} < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ era abitrário, segue que $\lambda(E) = 0$. ∎

29.2.4 Corolário: $\overline{f}'_+$ *existe com a possível exceição de um conjunto de medida nula.* □

Demonstração: Dado que f é monótona não-decrescente tem-se:

$$f(x+h) - f(x) \geqslant 0,\ \forall\, h > 0 \;\Rightarrow\; \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0,\ \forall\, h > 0.$$

Portanto:

$$\overline{f}'_+(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \inf_{\epsilon>0} \left(\sup_{0<h<\epsilon} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \geqslant 0.$$

Ou seja, $-\infty < \overline{f}'_+$. Desta maneira, tem-se:

$$\left\{x \,:\, \text{ existe } \overline{f}'_+(x)\right\} = \left\{x \,:\, \overline{f}'_+ < +\infty\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \,:\, \overline{f}'_+(x) \leqslant n\right\}.$$

De onde segue que:

$$\Big\{x\ :\ \text{existe } \overline{f}'_+(x)\Big\}^{\mathsf{c}} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big\{x\ :\ \overline{f}'_+(x) \leqslant n\Big\}^{\mathsf{c}} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big\{x\ :\ \overline{f}'_+(x) > n\Big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(n) = E.$$

Finalmente, o resultado enunciado segue observando que e $\lambda(E) = 0$ pelo item (d) do lema anterior. ∎

29.2.5 Lema: *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário. Seja f monótona. Então:*

(a) *O conjunto $-F(\alpha)$ está contido no conjunto $H(\alpha)$ de pontos de sombra da função $h = h_\alpha$ definida como:*

$$h(x) := f(-x) + \alpha\, x.$$

Ou seja, $x \in F(\alpha) \Rightarrow -x \in H(\alpha)$. Em outras palavras, se $x \in F(\alpha)$, então $-x$ é um ponto de sombra da função h.

(b) *O conjunto $F(\alpha)$ pode ser coberto por uma família enumerável de intervalos abertos $\{L_k = (a_k, b_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tais que:*

$$f(b_k) - f(a_k) \leqslant \alpha\,(b_k - a_k),\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$ □

Demonstração: **(a)** Dado $x \in F(\alpha)$ arbitrário, tem-se:

$$\alpha > \underline{f}'_-(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sup_{\epsilon>0}\left(\inf_{-\epsilon<h<0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$
$$\geqslant \inf_{-\epsilon<h<0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},\ \ \forall\, \epsilon > 0.$$

Ou seja:

$$\inf_{-\epsilon<h<0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \alpha.$$

Portanto existe $-\epsilon < h_0 < 0$ tal que:

$$\frac{f(x+h_0) - f(x)}{h_0} < \alpha.$$

Se $\xi := x + h_0$, então a última relação pode ser expressada como:

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} < \alpha.$$

de onde, lembrando que $\xi - x = h_0 < 0$, tem-se:

$$f(\xi) - f(x) > \alpha\,\xi - \alpha\, x$$
$$f(\xi) - \alpha\,\xi > f(x) - \alpha\, x$$

Seja $h(x) := f(-x) + \alpha\, x$. A última relação acima expressa que $h(-\xi) > h(-x)$ com $-\xi = -x - h_0 > -x$, pois $-h_0 > 0$. Portanto, $-x$ é ponto de sombra da função h.

(b) Em primeiro termo, observe que se f é monótona não-decrescente, então:

$$x < y \Rightarrow -x > -y \Rightarrow f(-x) \geqslant f(-y).$$

Ou seja, a função $x \longmapsto f(-x)$ é monótona não-crescente e portanto existem os seus limites laterais. Por outro lado, observe que a função $x \longmapsto \alpha\, x$ é contínua, e portanto existem seus limites laterais também. Desta maneira, existem os limites laterais da função $h(x) = f(-x) + \alpha\, x$. Portanto, aplicando o Lema do Sol Nascente para h, tem-se que o conjunto de pontos de sombra da h pode ser expressado como união disjunta enumerável de abertos $J_k := (-b_k, -a_k)$ com $h(-b_k) \leqslant h(-a_k)$, ou seja:

$$\begin{aligned} f(b_k) - \alpha\, b_k &\leqslant f(a_k) - \alpha\, a_k \\ f(b_k) - f(a_k) &\leqslant \alpha\,(b_k - a_k) \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. O resultado enunciado segue portanto do item anterior, definindo $L_k = -J_k = (a_k, b_k)$. ∎

29.2.6 Lema: *Com as definições precedentes tem-se:*

$$\left\{x \,:\, \overline{f}'_{+}(x) \leqslant \underline{f}'_{-}(x)\right\}^{\mathsf{c}} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(q) \bigcap E\left(q + \frac{1}{n}\right). \qquad \square$$

Demonstração: Basta observar que:

$$\begin{aligned} \left\{x \,:\, \overline{f}'_{+}(x) \leqslant \underline{f}'_{-}(x)\right\}^{\mathsf{c}} &= \left\{x \,:\, \overline{f}'_{+}(x) > \underline{f}'_{-}(x)\right\} \\ &= \left\{x \,:\, \underline{f}'_{-}(x) < \overline{f}'_{+}(x)\right\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left\{x \,:\, \underline{f}'_{-}(x) < q < \overline{f}'_{+}(x)\right\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \,:\, \underline{f}'_{-}(x) < q < q + \frac{1}{n} < \overline{f}'_{+}(x)\right\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{x \,:\, \underline{f}'_{-}(x) < q\right\} \bigcap \left\{x \,:\, q + \frac{1}{n} < \overline{f}'_{+}(x)\right\} \\ &= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F(q) \bigcap E\left(q + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

∎

29.2.7 Lema: $\overline{f}'_{+} \leqslant \underline{f}'_{-}$, *com a possível exceição de um conjunto de medida nula.* □

Demonstração: Pelo lema precedente, basta provar que cada um dos conjuntos

$$F(q) \bigcap E\left(q + \frac{1}{n}\right)$$

tem medida nula. Isso será consequência da seguinte proposição mais geral:

$$\alpha < \beta \Rightarrow F(\alpha) \cap E(\beta) \text{ tem medida nula.}$$

Com efeito, depois basta tomar $\alpha = q$ e $\beta = q + 1/n$. Seja então $\alpha < \beta$. Apenas por conveniência, a prova será dividida em várias partes.

(a) Pelo Lema 29.2.5 sabe-se que:

$$F(\alpha) \subseteq H_1(\alpha) := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k^1, b_k^1)$$

com

$$f(b_k^1) - f(a_k^1) \leqslant \alpha\,(b_k^1 - a_k^1),$$

onde $H_1(\alpha)$ é o conjunto de pontos de sombra da função $h_\alpha(x) = f(-x) + \alpha\,x$.

Seja $g_\beta(x) = f(x) - \beta\,x$ e sejam g_β^k as restrições:

$$g_\beta^k = g_\beta|_{(a_k^1, b_k^1)}\,.$$

Pelo Lema de Sol Nascente, o conjunto $G_1^k(\beta)$ de pontos de sombra de g_β^k, pode ser expressado como união disjunta:

$$G_1^k(\beta) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (a_{k_j}^1, b_{k_j}^1)$$

com

$$\beta\,(b_{k_j}^1 - a_{k_j}^1) \leqslant f(b_{k_j}^1) - f(a_{k_j}^1),\ \forall\, k, j \in \mathbb{N}.$$

Portanto:

$$G_1(\beta) := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_1^k(\beta) =: \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k^2, b_k^2),$$

onde a última união é *disjunta*, pois os intervalos (a_k^1, b_k^1) originais são disjuntos. Desta maneira:

$$\begin{aligned}
\beta\,\lambda(G_1(\beta)) &= \beta \sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k^2 - a_k^2) \\
&= \beta \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} (b_{k_j}^1 - a_{k_j}^1) \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} (f(b_{k_j}^1) - f(a_{k_j}^1)) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} f(b_k^1) - f(a_k^1) \\
&\leqslant \alpha \sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k^1 - a_k^1) \\
&= \alpha\,\lambda(H_1(\alpha)).
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\lambda(G_1(\beta)) \leqslant \frac{\alpha}{\beta}\,\lambda(H_1(\alpha)).$$

(b) Sejam agora h_α^k as restrições:

$$h_\alpha^k := h_\alpha|_{(a_k^2, b_k^2)}\,.$$

Pelo Lema do Sol Nascente, o conjunto H_2^k de pontos de sombra de h_α^k pode ser expressado como união disjunta:

$$H_2^k(\alpha) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (a_{k_j}^2, b_{k_j}^2)$$

com

$$f(b_{k_j}^2) - f(a_{k_j}^2) \leqslant \alpha\,(b_{k_j}^2 - a_{k_j}^2).$$

Portanto:

$$H_2(\alpha) := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_2^k(\alpha) =: \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a_k^3, b_k^3),$$

onde a última união é *disjunta*, pois os intervalos (a_k^2, b_k^2) originais são disjuntos. Desta maneira:

$$\begin{aligned}
\lambda(H_2(\alpha)) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k^3 - a_k^3) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} (b_{k_j}^2 - a_{k_j}^2) \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} (b_k^2 - a_k^2) \\
&= \lambda(G_1(\beta)).
\end{aligned}$$

A última desigualdade acima decorre do fato que $(a_{k_j}^2, b_{k_j}^2) \subseteq (a_k^2, b_k^2)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto:

$$\lambda(H_2(\alpha)) \leqslant \lambda(G_1(\beta)).$$

(c) O processo descrito nas partes (a) e (b) precedentes pode ser continuado inductivamente, considerando agora as restrições:

$$g_\beta^k = g_\beta|_{(a_k^3, b_k^3)}\,,$$

etc. Desta maneira resulta possível construir uma coleção $G_n(\beta)$ e $H_n(\alpha)$ de famílias de abertos disjuntos tais que:

$$\begin{aligned}
&\lambda(G_n(\beta)) \leqslant \frac{\alpha}{\beta}\,\lambda(H_n(\alpha)), \\
&\lambda(H_n(\beta)) \leqslant \lambda(G_{n-1}(\beta)).
\end{aligned}$$

Em tal caso, tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda(G_n(\beta)) &\leqslant \frac{\alpha}{\beta}\,\lambda(H_n(\alpha)) \\
&\leqslant \frac{\alpha}{\beta}\,\lambda(G_{n-1}(\beta)) \\
&\leqslant \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \lambda(H_{n-1}(\alpha)) \\
&\leqslant \cdots \\
&\leqslant \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \lambda(G_1(\beta)) \\
&\leqslant \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n} \lambda(H_1(\alpha)).
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\lambda(G_n(\beta)) \leqslant \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n} \lambda(H_1(\alpha)).$$

Desta maneira, tem-se:

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\lambda(G_n(\beta)) = 0.$$

(d) Pelo resultado da parte precedente, para concluir a prova do lema basta verificar:

$$F(\alpha)\cap E(\beta) \subseteq G_n(\beta),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

A prova desta relação será feita por indução em n. Para o caso $n = 1$, observando que:

$$\begin{aligned}
&F(\alpha) \subseteq H_1(\alpha)\\
&E(\beta) \subseteq G(\beta)
\end{aligned}$$

tem-se:

$$F(\alpha)\cap E(\beta) \subseteq H_1(\alpha)\cap G(\beta) \subseteq G_1(\beta).$$

A última contenção acima segue da definição de $G_1(\beta)$. Continuando o processo inductivo, observe que agora tem-se:

$$\begin{aligned}
F(\alpha)\cap E(\beta) &\subseteq G_1(\beta)\\
F(\alpha)\cap E(\beta) \subseteq F(\alpha) &\subseteq H_1(\beta)
\end{aligned}$$

de onde segue:

$$F(\alpha)\cap E(\beta) \subseteq H_1(\alpha)\cap G_1(\beta) = H_2(\alpha).$$

Desta maneira agora tem-se:

$$\begin{aligned}
&F(\alpha)\cap E(\beta) \subseteq H_2(\alpha)\\
&F(\alpha)\cap E(\beta) \subseteq G_1(\beta)
\end{aligned}$$

de onde segue:

$$F(\alpha)\cap E(\beta) \subseteq H_2(\alpha)\cap G_1(\beta) = G_2(\beta).$$

Desta maneira o processo pode ser continuado inductivamente até qualquer $n \in \mathbb{N}$. ∎

29.2.8 Corolário: *Em particular, $\overline{f}'_- \leqslant \underline{f}'_+$, com a possível exceição de um conjunto de medida nula.* $\square$

Demonstração: Se f é monótona não-decrescente, então a aplicação $x \longmapsto f(-x)$ é não-crescente, de onde a aplicação $x \longmapsto -f(-x)$ é não-descrescente. Por outro lado, observe que:

$$\begin{aligned}\overline{-f}'_+(-x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{-f(-(x+h)) - (-f(-x))}{h} &= \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} \\ &= \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \overline{f}'_-(-x).\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned}\underline{-f}'_-(-x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{-f(-(x+h)) - (-f(-x))}{h} &= \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} \\ &= \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \underline{f}'_+(-x).\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o lema precedente à função $-f(-x)$, sabe-se que o complemento do conjunto:

$$\Big\{x \,:\, \overline{f}'_-(-x) \leqslant \underline{f}'_+(-x)\Big\} = \Big\{-x \,:\, \overline{f}'_-(x) \leqslant \underline{f}'_+(x)\Big\} = -\Big\{x \,:\, \overline{f}'_-(x) \leqslant \underline{f}'_+(x)\Big\} =: -E$$

tem medida nula. Dado que $-E = \{x \,:\, -x \in E\}$, segue que:

$$(-E)^{\mathsf{c}} = \{x \,:\, x \notin -E\} = \{x \,:\, -x \notin E\} = \{-x \,:\, x \notin E\} = -\{x \,:\, x \notin E\} = -E^{\mathsf{c}}.$$

Portanto: $0 = \lambda((-E)^{\mathsf{c}}) = \lambda(-E^{\mathsf{c}}) \Rightarrow \lambda(-(-E^{\mathsf{c}})) = 0 \Rightarrow \lambda(E^{\mathsf{c}}) = \lambda(-(-E^{\mathsf{c}})) = 0$. Ou seja, o complemento do conjunto E tem medida nula, o que constitui uma paráfrase do enunciado. ∎

29.2.9 Teorema (Lebesgue, 1904)**:** *Seja f não-decrescente. Então f é diferenciável com a posível exceição de um conjunto de medida nula.* $\square$

Demonstração: Basta supor que f está definida em um intervalo *finito* $[a, b]$, pois $\mathbb{R}$ pode ser expresado como união enumerável de tais intervalos, por exemplo $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n]$, e união enumerável de conjuntos de medida nula possui medida nula. Para fixar idéias, suponha que f é monótona *não-decrescente* em $[a, b]$. Têm-se então as seguintes relações:

$$\overline{f}'_+ \leqslant \underline{f}'_- \leqslant \overline{f}'_- \leqslant \underline{f}'_+ \leqslant \overline{f}'_+ < \infty,$$

salvo um conjunto de medida nula. Com efeito, a primeira desigualdade segue do Lema 29.2.7; a terceira do Corolário 29.2.8; a segunda e quarta são triviais, pois:

$$\liminf_{h\to 0^-} \leqslant \limsup_{h\to 0^-},$$
$$\liminf_{h\to 0^+} \leqslant \limsup_{h\to 0^+};$$

entanto que a quinta e última desigualdade segue do Corolário 29.2.4. Assim, f' existe em $[a, b]$ com a possível exceção de um conjunto de medida nula. ∎

29.2.10 Observação: Se f é monótona, então pelo Corolário 29.1.4 f deve ser contínua exceto posívelmente um conjunto enumerável e portanto de medida nula. Desta maneira, na prova do Teorema de Lebesgue pode ser usado o Lema do Sol Nascente na sua versão original para funções contínuas, ou seja, sem a generalização da Versão Aprimorada apresentada no Lema 29.2.2. ♣

Exercícios para o Capítulo 29

29.3 A Conexão para uma Contínua Monotonia

Para a definição de função conexa, vide Seção 19.10.

29.3.1 Exercício: Prove que toda função conexa e monótona é contínua.

Sugestão: Observe-se que para uma tal função, pelo fato de ser monótona e o Lema 29.1.1, os limites laterais em algum ponto, digamos a, sempre existem. Eles não podem ser diferentes, pois isso entraria em conflito com a suposta conexidade da função. Portanto, $\lim_{x \to a} f(x)$ sempre existe. Se tal limite fosse diferente de $f(a)$, então a função teria uma discontinuidade evitável, mas isso é proibido pelo Corolário 29.1.2. Portanto, deve ser $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Ou seja, f é contínua. ♣

29.4 Com Monotonia a Continuidade Resulta Absoluta

Se f e g são funções absolutamente contínuas, a sua composição $h = f \circ g$ não hereda necessariamente tal propriedade, como pode ser verificado junto ao contra-exemplo do Exercício 19.13.4. A monotonia da g, porém, acrescenta um ingrediente a mais.

29.4.1 Exercício: Sejam f, g funções absolutamente contínuas. Se g é monótona, então $f \circ g$ é absolutamente contínua. ♣

29.5 Diferenciabilidade de Funções Convexas

29.5.1 Exercício: Prove que toda função convexa resulta automaticamente diferenciável exceto em um conjunto numerável.

Sugestão: Qualquer função f será diferenciável quando as suas derivadas laterais f'_- e f'_+ sejam iguais (vide definições 24.3.3 e 24.3.4). Para uma função convexa, isso acontece, em particular, quando uma qualquera delas é contínua, pelo Lema 24.3.5(e). Agora bem, segundo o mesmo Lema 24.3.5(c), tais derivadas laterais são funções monótonas não-decrescentes, e portanto automaticamente contínuas exceto um conjunto numerável, pelo Corolário 29.1.4. ♣

29.6 Integral de Funções Monótonas Não-Decrescentes

29.6.1 Exercício: Seja f uma função **não-decrescente**, ou seja, $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$. Seja P_n a partição do intervalo $[a,b]$ em n intervalos de comprimento $(b-a)/n$ cada. Ou seja, $P_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, onde $t_k = a + k(b-a)/n$, para $k = 0, 1, \ldots, n$.

(a) Prove que:

$$L(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k).$$

(b) Prove que:

$$U(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).$$

(c) Prove que $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \left(f(b) - f(a)\right)(b-a)/n$.

Sugestão: A identidade resulta evidente trazando um gráfico.

(d) Conclua do item anterior que uma tal f é integrável em $[a,b]$.

(e) Suponha que existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \leqslant I \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k),$$

Prove que $\displaystyle\int_a^b f = I$. ♣

29.7 Integral de Funções Monótonas Não-Crescentes

29.7.1 Exercício: Seja f uma função **não-crescente**, ou seja, $x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$. Seja P_n a partição do intervalo $[a,b]$ em n intervalos de comprimento $(b-a)/n$ cada. Ou seja, $P_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, onde $t_k = a + k(b-a)/n$, para $k = 0, 1, \ldots, n$.

(a) Prove que:

$$L(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).$$

(b) Prove que

$$U(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k).$$

(c) Prove que $U(f, P_n) - L(f, P_n) = \left(f(a) - f(b)\right)(b-a)/n$.

Sugestão: A identidade resulta evidente trazando um gráfico.

(d) Conclua do item anterior que uma tal f é integrável em $[a,b]$.

(e) Suponha que existe $I \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k) \leqslant I \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k),$$

Prove que $\displaystyle\int_a^b f = I$. ♣

29.8 Integral de Inversas de Funções Monótonas Crescentes

29.8.1 Exercício: Seja f uma função (estrictamente) crescente. Se $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ é uma partição de $[a,b]$, seja P' dada por $P' = \{f^{-1}(t_0), f^{-1}(t_1), \ldots, f^{-1}(t_n)\}$.

(a) Prove que:

$$L(f^{-1}, P) + U(f, P') = b\, f^{-1}(b) \; - \; a\, f^{-1}(a).$$

Sugestão: Resulta aqui de inestimável ajuda usar primeiramente um gráfico para vizualizar por quê isso deve ser assim.

(b) Usando o item anterior, prove que:

$$\int_a^b f^{-1} = b\, f^{-1}(b) \; - \; a\, f^{-1}(a) \; - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f.$$ ♣

29.9 A Integral de x^p com $p \in \mathbb{N}$ Revisitada

29.9.1 Exercício: Seja $p \in \mathbb{N}$.

(a) Use a identidade:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p \leqslant \frac{n^{p+1}}{p+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} (k+1)^p$$

provada no Exercício 3.11.1(c) conjuntamente com o Exercício 29.6.1 anterior para provar que

$$\int_0^b x^p\, dx = \frac{b^{p+1}}{p+1}.$$

(b) Generalize o resultado anterior para $\displaystyle\int_a^b x^p\, dx$ com $0 \leqslant a < b$.

(c) Generalize para a e b arbitrários.

Sugestão: Asuma que $a < 0$ e considere por separado os casos $b > 0$ e $b \leqslant 0$, respectivamente. Neste último caso, considere separadamente p par e ímpar como sub-casos. ♣

29.10 A Integral de $x^{1/p}$ com $p \in \mathbb{N}$

29.10.1 Exercício: Seja $p \in \mathbb{N}$. Considerando $0 \leqslant a < b$, use os exercícios 29.8.1 e 29.9.1 para provar que:

$$\int_a^b x^{1/p}\,dx = \frac{b^{(1/p)+1}}{(1/p)+1} - \frac{a^{(1/p)+1}}{(1/p)+1}.$$

♣

29.11 A Integral de cos e sen Revisitada

29.11.1 Exercício: Use a identidade

$$\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{ka}{n}\right) < \operatorname{sen} a < \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{ka}{n}\right), \;\; \forall\, n \in \mathbb{N};$$

válida para qualquer $0 < a \leqslant \pi/2$ provada no Exercício 15.11.11, conjuntamente com o Exercício 29.7.1 anterior para provar que:

$$\int_0^a \cos x\,dx = \operatorname{sen} a,$$

para todo $0 < a \leqslant \pi/2$. Observe-se esta expressão também é válida para $a = 0$, pois em tal caso ambos membros são nulos. ♣

29.11.2 Exercício: **(a)** Use a paridade do coseno para verificar que a expressão para integral do exercício anterior é válida também no intervalo $-\pi/2 \leqslant a \leqslant 0$. Portanto, resulta válida em $-\pi/2 \leqslant a \leqslant \pi/2$.

(b) Verifique a validade da expressão para integral do exercício anterior no intervalo $\pi/2 \leqslant a \leqslant 3\pi/2$.

Sugestão: Em tal caso $-\pi/2 \leqslant a - \pi \leqslant \pi/2$ e assim:

$$\begin{aligned}\int_0^a \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{a}\cos x\,dx &= \operatorname{sen}\pi/2 + \int_{-\pi/2}^{a-\pi}\cos(x+\pi)\,dx \\ &= 1 - \int_{-\pi/2}^{a-\pi}\cos x\,dx = 1 - \operatorname{sen}(a-\pi) + \operatorname{sen}(-\pi/2).\end{aligned}$$

(c) Generalize para todo $a \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Observe-se que o intervalo $-\pi/2 \leqslant a \leqslant 3\pi/2$ tem comprimento 2π e use a periodicidade das funções trigonométricas. ♣

29.11.3 Exercício: Use o Exercício 29.11.1 para provar que:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx = 1.$$

Sugestão: Observe que:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx = \int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{sen}(x+\pi/2)\, dx = \int_{-\pi/2}^{0} \cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos(-x)\, dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \operatorname{sen} \pi/2 = 1. \qquad \clubsuit$$

29.11.4 Exercício: Use o exercício anterior para provar que:

$$\int_0^{a} \operatorname{sen} x\, dx = 1 - \cos a,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Observe que:

$$\int_0^{a} \operatorname{sen} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx + \int_{\pi/2}^{a} \operatorname{sen} x\, dx = 1 + \int_0^{a-\pi/2} \operatorname{sen}(x+\pi/2)\, dx$$
$$= 1 + \int_0^{a-\pi/2} \cos x\, dx = 1 + \operatorname{sen}(a-\pi/2) = 1 - \cos a. \qquad \clubsuit$$

Capítulo 30

Teorema Fundamental do Cálculo

30.1 Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Se f é integrável em $[a,b]$, então a função F dada pela expressão

$$F(x) := \int_a^x f$$

está bem definida para todo $x \in [a,b]$, segundo 27.4.4(a), sendo contínua em tal domínio de definição, vide 27.3.6.

Quando, além de meramente integrável, a função f é *contínua* em $[a,b]$, resultados mais fortes podem ser obtidos. A seguinte observação reforça o comentário no final da seção 27.3.

30.1.1 Observação: Apelando ao resultado 27.3.7, no caso particular em que f é contínua em $[a,b]$ tem-se:

$$F'(x) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f.$$

Aplicando o resultado 27.4.8 no intervalo $[x, x+h]$, segue a existência de $\xi = \xi(h) \in [x, x+h]$ tal que:

$$f(\xi) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f.$$

Observe que pelo resultado 18.6.2 deve ser:

$$x \leqslant \xi \leqslant x+h \quad \Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} \xi = x.$$

Desta maneira, usando adicionalmente 19.1.7, para cada $x \in [a,b]$ tem-se:

$$F'(x) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f \;=\; \lim_{h\to 0} f(\xi) \;=\; f\left(\lim_{h\to 0} \xi\right) \;=\; f(x). \qquad \clubsuit$$

Em outras palavras, quando f é contínua em *todo* o intervalo $[a,b]$, a função F é diferenciável com $F'(x)=f(x)$, para todo $x\in[a,b]$. O importante resultado a seguir constitui um refinamento desta observação.

30.1.2 Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo: *Seja f integrável em $[a,b]$. Considere a função F definida em $[a,b]$ como:*

$$F(x):=\int_a^x f.$$

Se f é contínua em algum ponto $c\in[a,b]$, então F é derivável em c e tem-se:

$$F'(c)=f(c).$$

Quando $c=a$ ou $c=b$, então $F'(c)$ deve ser entendida como a derivada lateral, pela direita ou esquerda, respectivamente, da F. $\square$

Demonstração: Como f é integrável por hipótese, sabe-se que $F(x)=L(x)=U(x)$. Portanto a presente prova constitui basicamente uma paráfrase da demonstração do Teorema 27.3.7. Seja $c\in(a,b)$. Considere $h>0$. Definem-se $m(h)$ e $M(h)$ respectivamente como:

$$\begin{aligned}m(h)&=\inf\{f(t)\ :\ c\leqslant t\leqslant c+h\},\\ M(h)&=\sup\{f(t)\ :\ c\leqslant t\leqslant c+h\}.\end{aligned}$$

Seja $P=\{c,c+h\}$ partição de $[c,c+h]$. Observe que:

$$\begin{aligned}m(h)h=L(f,P)\leqslant\sup_P L(f,P)&=L(f,[c,c+h])\\ &\leqslant U(f,[c,c+h])=\inf_P U(f,P)\leqslant U(f,P)=M(h)h.\end{aligned}$$

Por outro lado, observe que:

$$L(f,[c,c+h])=L(f,[a,c+h])-L(f,[a,c])=L(c+h)-L(c).$$

Analogamente:

$$U(f,[c,c+h])=U(f,[a,c+h])-U(f,[a,c])=U(c+h)-U(c).$$

Portanto:

$$m(h)\leqslant\frac{L(c+h)-L(c)}{h}\leqslant\frac{U(c+h)-U(c)}{h}\leqslant M(h),\ \ \forall\,h>0.$$

Considere agora $h<0$. Definem-se $m(h)$ e $M(h)$ respectivamente como:

$$\begin{aligned}m(h)&=\inf\{f(t)\ :\ c+h\leqslant t\leqslant c\},\\ M(h)&=\sup\{f(t)\ :\ c+h\leqslant t\leqslant c\}.\end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, observando que $-h=|h|>0$, tem-se:

$$m(h)(-h)\leqslant L(f,[c+h,x])\leqslant U(f,[c+h,x])\leqslant M(h)(-h),$$

de onde segue que:

$$m(h) \leqslant \frac{L(c) - L(c+h)}{-h} \leqslant \frac{U(c) - U(c+h)}{-h} \leqslant M(h).$$

Portanto:

$$m(h) \leqslant \frac{L(c+h) - L(c)}{h} \leqslant \frac{U(c+h) - U(c)}{h} \leqslant M(h), \quad \forall\, h < 0.$$

Como f é contínua em c por hipótese, tem-se:

$$\lim_{h \to 0} m(h) = f(c) = \lim_{h \to 0} M(h).$$

Portanto:

$$L'(c) = U'(c) = f(c).$$

Se c estiver em algum dos extremos do intervalo, então $F'(c)$ deve ser entendida como a derivada lateral, pela direita ou esquerda, em cujo caso o leitor não terá dificuldade em modificar convenientemente os argumentos aqui apresentados. ∎

Quando f é contínua em todo o intervalo $[a, b]$, pelo teorema anterior, a função F resulta derivável em $[a, b]$. Em tal caso, teoremas concernentes a funções deriváveis em todo um intervalo podem ser aplicados a F. O seguinte resultado constitui um exemplo. Embora não passe de um mero corolário do teorema anterior, na prática permite reduzir o cálculo de certas integrais a uma verificação quase trivial.

30.1.3 Corolário: *Se f é contínua em $[a, b]$ e $f = g'$ para alguma função g, então:*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$ □

Demonstração: Se f é contínua em $[a, b]$, pelo teorema anterior, a função F definida como:

$$F(x) := \int_a^x f$$

resulta derivável em todo $[a, b]$. Mais ainda, para todo $x \in [a, b]$ tem-se que $F'(x) = f(x) = g'(x)$. Portanto, deve ser $F(x) = g(x) + c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Observando que:

$$0 = \int_a^a f = F(a) = g(a) + c$$

segue que $c = -g(a)$. Desta maneira, $F(x) = g(x) - g(a)$ para $x \in [a, b]$. Em particular, tomando $x = b$, resulta:

$$\int_a^b f = F(b) = g(b) - g(a).$$ ∎

30.2 Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

O último corolário da seção anterior costuma ser denominado *segundo teorema fundamental do cálculo*, principalmente por aqueles que confundem a definição de integral com a de antiderivada ou primitiva. Seguindo Spivak [25], esse nome será reservado aqui para um resultado mais geral, válido para f não apenas contínua, mas integrável. Embora a demonstração seja completamente diferente, uma vez que neste caso não é mais possível apelar ao Teorema 30.1.2, as consequências práticas se mantém basicamente sem modificação.

30.2.1 Segundo Teorema Fundamental do Cálculo: *Seja f integrável em $[a,b]$ e $f = g'$ para alguma função g. Então:*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a). \qquad \square$$

Demonstração: Seja $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ partição do intervalo $[a,b]$. Pelo Teorema do Valor Médio 23.2.2, existe $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que:

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)\,(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)\,(t_i - t_{i-1}).$$

Definindo:

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) \;:\; t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) \;:\; t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}, \end{aligned}$$

segue obviamente que:

$$m_i\,(t_i - t_{i-1}) \leqslant f(x_i)\,(t_i - t_{i-1}) \leqslant M_i\,(t_i - t_{i-1}).$$

Portanto:

$$m_i\,(t_i - t_{i-1}) \leqslant g(t_i) - g(t_{i-1}) \leqslant M_i\,(t_i - t_{i-1}).$$

Somando as relações acima para $i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\,(t_i - t_{i-1}) \leqslant g(t_n) - g(t_0) \leqslant \sum_{i=0}^{n} M_i\,(t_i - t_{i-1}).$$

Ou seja:

$$L(f,P) \leqslant g(b) - g(a) \leqslant U(f,P).$$

Observe que P era arbitrária, portanto a relação acima vale para toda partição P do intervalo $[a,b]$. Como f é integrável por hipótese, pelo Lema 27.3.4, deve ser:

$$\int_a^b f = g(b) - g(a). \qquad \blacksquare$$

Exercícios para o Capítulo 30

30.3 Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

30.3.1 Exercício: Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{4+t^2}\, dt.$ R: $\sqrt{4+x^2}$.

(b) $F(x) = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{4+t^2}\, dt.$ R: 0.

(c) $F(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\, dt.$ R: $-\sqrt{1+x^4}$. ♣

30.3.2 Exercício: Seja $G(x) = \displaystyle\int_a^{h(x)} f(t)\, dt$, onde h é uma função derivável. Provar que $G'(x) = f(h(x))\, h'(x)$.

Sugestão: O resultado é uma simples consequência da regra de derivação de funções compostas e do primeiro TFCI. ♣

30.3.3 Exercício: Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{1}{1+t}\, dt.$ R: $2x/(1+x^2)$.

(b) $G(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} t^2\, dt.$ R: $(x^2)^2.2x = 2x^5$.

(c) $G(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4}\, dt.$ R: $2x\sqrt{1+x^8}$.

(d) $G(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{1+x^4}} t^2\, dt.$ R: $2x^3(1+x^4)/\sqrt{1+x^4}$.

(e) $G(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{2+t}\, dt.$ R: $\cos x/(2+\operatorname{sen} x)$.

(f) $G(x) = \displaystyle\int_{2x}^{1} \cos^2 t \, dt.$ R: $-2\cos^2(2x)$.

(g) $G(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1}{3+t^2} \, dt.$ R: $2/(3+x^2)$.

(h) $G(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1}{3+t^3} \, dt.$ R: $1/(3-x^3) + 1/(3+x^3)$. ♣

30.4 Integrais definidas

30.4.1 Exercício: Determine o valor das seguintes integrais. Em alguns casos, cálculos podem ser evitados por considerações de paridade.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x^3+3) \, dx.$ R: 6.

(b) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x^5-x}{3x^3} \, dx.$ R: 27/4.

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx.$ R: 1.

(d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} x + \cos x) \, dx.$ R: 0.

(e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \, dx.$ R: $\operatorname{arctg}(1) = \pi/4$. ♣

30.4.2 Exercício: Calcule as seguintes integrais. A técnica é a mesma que a do exercício anterior, mas aqui será necessário um pouco mais de trabalho para reconhecer o integrando como a derivada de uma certa função.

(a) $\displaystyle\int_{1}^{4} \left(\sqrt{x}+x\right)^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right) dx.$ R: $(6^5-2^5)/5$.

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx.$ R: $\pi^2/32$. ♣

30.4.3 Exercício: Para cada item do presente exercício, considere que o conjunto de possíveis soluções poderia conter mais de um elemento, talvez infinitos, como também ser vazio.[1]

(a) Determine o conjunto de $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$\int_{x}^{\pi/2} \cos t \, dt = \frac{1}{2},$$

sujeito à condição $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$. R: $x = \operatorname{arcsen}(1/2) = \pi/6$.

[1] Sugestão e correções de Otacilio Lucas Kobashigawa Amorim `olk.amorim@usp.br`, EACH-USP, agosto de 2017.

(b) Determine o conjunto de $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$\int_x^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{1}{2},$$

sujeito à condição $x \leqslant \pi/2$. R: $\{\pi/6\} \cup \{\pi/6 - 2n\pi\ :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{5\pi/6 - 2n\pi\ :\ n \in \mathbb{N}\}$.

(c) Determine o conjunto de $x \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\int_x^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{1}{2}.$$

R: $\{\pi/6 + 2k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/6 + 2k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Determine o conjunto de $x \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\int_x^{\pi/2} \cos t\, dt = -\frac{1}{2}.$$

R: $\emptyset$.

(e) Determine o conjunto de $x \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\left| \int_x^{\pi/2} \cos t\, dt \right| = \frac{1}{2}.$$

R: $\{\pi/6 + 2k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/6 + 2k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\}$. ♣

30.4.4 Exercício: Sejam f, g funções tais que $g(x) = f'(x)$, para todo x. Determine o valor da constante c tal que:

$$\int_{\pi/2}^{b} g(\operatorname{sen}(x)) \cos(x)\, dx = f(\operatorname{sen}(b)) + c.$$

R: $c = -f(1)$. ♣

30.5 Áreas Determinadas por Curvas

30.5.1 Exercício: Determine a área limitada pelo gráfico de:

(a) $f(x) = x^{-2/3}$, o eixo das abcissas e as retas $x = 8$ e $x = 27$. R: 3.

(b) $f(x) = (x + 30)^{-1/2}$, o eixo das abcissas e as retas $x = 1$ e $x = 6$. R: $2(6 - \sqrt{31})$. ♣

30.5.2 Exercício: Determine a área limitada pelas curvas e retas em cada caso:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ e a reta $x = 0$. R: 16/3.

(b) $f(x) = x^3$, o eixo das ordenadas e a tangente a f no ponto $(1, 1)$. R: 3/4.

(c) $f(x) = x + 1$, $g(x) = -x + 1$ e o eixo das abcissas. R: 1. ♣

30.5.3 Exercício: Calcule a área compreendida entre as funções f e g nos seguintes casos:

(a) $f(x) = 6x - x^2$ e $g(x) = x^2 - 2x$. R: 64/3.

(b) $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = x - 2$. R: 9/2. ♣

30.6 Volume de Sólidos de Revolução

30.6.1 Exercício: Calcular o volume do sólido gerado rotando cada uma das seguintes funções em torno do eixo das abcissas nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leqslant x < 1, \\ 2 & \text{se } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$ no intervalo $[0,3]$. R: 6π.

(b) $f(x) = x^2$, no intervalo $[0,2]$. R: $32\pi/5$.

(c) $f(x) = 2\cos x$, no intervalo $[0,\pi/2]$. R: π^2. ♣

30.6.2 Exercício: Calcule o volume de:

(a) Um cilindro circular reto de raio r e altura h. R: $\pi r^2 h$.

(b) Um cone circular reto de raio r e altura h. R: $\pi r^2 h/3$. ♣

30.6.3 Exercício: Um sólido de revolução é gerado pela rotação do gráfico da função $f(x)$, definida para todo $x \geqslant 0$. Se para cada $a > 0$ o volume deste sólido é dado por $a^2 + a$, determine a função f. R: $f(x) = \sqrt{(2x+1)/\pi}$. ♣

Capítulo 31

As Funcões Trigonométricas

31.1 O Número π e a Área do Círculo Unitário

As propriedades fundamentais das "funções trigonométricas" foram introduzidas na seção 15.10, e são reproduzidas a seguir para conveniência do leitor.

Seja $\mathbb{R} \ni \pi > 0$. Considere duas funções, denotadas por sen e cos, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. *Domínio de definição*: As funções sen e cos estão definidas em todo $\mathbb{R}$.

2. *Valores especiais*:

$$\begin{aligned} \cos 0 = \operatorname{sen} \pi/2 &= 1, \\ \cos \pi &= -1. \end{aligned}$$

3. *Coseno de uma diferença*: Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\cos(y - x) = \cos(y)\, \cos(x) + \operatorname{sen}(y)\, \operatorname{sen}(x).$$

4. *Desigualdades fundamentais*: Para $0 < x < \pi/2$ tem-se:

$$0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Resulta oportuno lembrar também que a partir dessas "propriedades algébricas" foi possível deduzir a continuidade e derivabilidade, como também calcular as integrais das funções trigonométricas.

Contudo, até aqui nunca foi provada a *existência* de duas funções com tais propriedades. No presente capítulo serão definidas formalmente as funções cos e sen e as propriedades acima enunciadas serão demostradas rigorosamente.

Talvez resulte óbvio para o leitor que um tal programa deveria começar definindo o número positivo misterioso que encabeça a lista de propriedades acima. Para tanto, em primeiro lugar observe que a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ está bem definida e é contínua no intervalo $[-1, 1]$, sendo portanto integrável em tal domínio. Isso justifica a seguinte definição.

31.1.1 Definição: Define-se o número $\boldsymbol{\pi}$ como:

$$\pi := 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx. \qquad \clubsuit$$

31.1.2 Lema:

$$\frac{\pi}{4} = \int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx. \qquad \square$$

Demonstração: Como o integrando que define π é uma função par, tem-se:

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx. \qquad \blacksquare$$

31.1.3 Observação: **(a)** No caso $0 \leqslant x \leqslant 1$, a área geométrica do setor circular no círculo unitário é dada por:

$$A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_{x}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

onde o segundo termo acima representa a área do setor circular, entanto que o primeiro representa a área do triângulo retângulo cuja base corresponde ao segmento que vai de 0 até x. Neste caso, ambas áreas devem ser adicionadas.

(b) No caso $-1 \leqslant x \leqslant 0$ a área geométrica do setor circular no círculo unitário é dada por:

$$A(x) = \int_{x}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2},$$

onde o primeiro termo acima representa a área do setor circular, entanto que o primeiro representa a área do triângulo retângulo cuja base corresponde ao segmento que vai de x até 0. Neste caso, a segunda área deve ser subtraída da segunda. Isso é garantido pelo fato que x no numerador no segundo termo é negativo neste caso. $\clubsuit$

A observação precedente justifica que a área de um setor circular no círculo unitário possa ser definida para qualquer $-1 \leqslant x \leqslant 1$ com a mesma expressão.

31.1.4 Definição: Para $-1 \leqslant x \leqslant 1$ define-se a função $A(x)$ como:

$$A(x) := \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_{x}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt. \qquad \clubsuit$$

31.1.5 Lema: *A função $A(x)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $A(1) = 0$, $A(-1) = \pi/2$ e $A(0) = \pi/4$.

(b) $A(x)$ *é derivável em* $(-1, 1)$ *e tem-se:*

$$A'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

(c) *No intervalo* $(-1, 1)$ *a função* A *é monótona estritamente decrescente e portanto injetora.*

(d) *Em particular,* A *é invertível em tal intervalo.* □

Demonstração: **(a)** Os dois primeiros valores especiais $A(1) = 0$ e $A(-1) = \pi/2$, seguem direto da definição de A. O terceiro é consequência do Lema 31.1.2 anterior.

(b) Utilizando o primeiro teorema fundamental do Cálculo 30.1.2 para derivar o segundo termo em $A(x)$, se $-1 < x < 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{x\,(-2x)}{4\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\,\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Em particular, $A'(x) < 0$ para todo $x \in (-1, 1)$.

(c) Pelo item (b) anterior, $A'(x) < 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. Portanto, a monotonicidade segue do Lema 23.2.7(b). Pelo Exemplo 26.1.3(b), toda função monótona é injetora.

(d) O afirmado é consequência do item (c) precedente e do Teorema 26.1.5. ■

31.2 Definição e Propriedades de cos e sen

O resultado do Lema 31.1.5(d) justifica a primeira das definições a seguir. A segunda simplesmente incorpora o Teorema de Pitágoras na interpretação gráfica dos conceitos analíticos aqui apresentados.

31.2.1 Definição: Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$ define-se a função $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$ pela relação:

$$A(\cos x) = \frac{x}{2}.$$

Ou seja, $\cos := (2A)^{-1}$. Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$ define-se a funções $\mathbf{sen}\,\boldsymbol{x}$ como:

$$\operatorname{sen} x := \sqrt{1-\cos^2 x}.$$ ♣

31.2.2 Observação: **(a)** Dado que o domíno de A é o intervalo $[-1,1]$, a imagem de cos estará contida nesse intervalo. Portanto, $|\cos x| \leqslant 1$ se $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Mais ainda, deve ser:

$$|\cos x| < 1, \text{ se } 0 < x < \pi.$$

Com efeito, pelo Lema 31.1.5(a) tem-se que $A(\pm 1) = x/2 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pi$.

(b) Em particular, a função sen está bem definida e tem-se:

$$\operatorname{sen} x > 0, \text{ se } 0 < x < \pi,$$

como também:

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

(c) Pelo resultado do Lema 31.1.5(a) sabe-se que $A(1) = 0$. Portanto:

$$\cos 0 = 1,$$
$$\operatorname{sen} 0 = \sqrt{1-\cos^2 0} = \sqrt{1-1} = 0.$$

♣

31.2.3 Lema: *As funções* cos *e* sen *são diferenciáveis em* $(0,\pi)$ *e em tal intervalo tem-se:*

(a) $\cos' = -\operatorname{sen}$.

(b) $\operatorname{sen}' = \cos$.

□

Demonstração: **(a)** Para simplificar a notação, denotando $B := 2A$, tem-se:

$$B(\cos x) = 2A(\cos x) = 2\,\frac{x}{2} = x \Rightarrow \cos x = B^{-1}(x).$$

Portanto, utilizando a fórmula de derivação da função inversa tem-se:

$$\begin{aligned}
\cos' x &= (B^{-1})'(x) \\
&= \frac{1}{B'(B^{-1}(x))} \\
&= \frac{1}{2A'(\cos x)} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-\cos^2 x}}} \\
&= -\sqrt{1-\cos^2 x} \\
&= -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

(b) Utilizando o resultado do item anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}' x &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\,(-2)\,\cos x\,\cos' x \\
&= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,(-\operatorname{sen} x) \\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

■

31.2.4 Definição: **Extensão de** sen **e** cos **para** $\mathbb{R}$

Para $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ as funções trigonométricas sen e cos definem-se da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= -\operatorname{sen}(2\pi - x); \\ \cos x &= \cos(2\pi - x). \end{aligned}$$

Se $x \in \mathbb{R}$, então tem-se que $x = 2\pi\, k + x'$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e algum $x' \in [0, 2\pi]$. Em tal caso, define-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x'; \\ \cos x &= \cos x'. \end{aligned}$$ ♣

31.2.5 Lema: *As funções* cos *e* sen *assim estendidas continuam sendo são diferenciáveis em todo* $\mathbb{R}$ *e em tal conjunto ainda verifica-se que:*

(a) $\cos' = -\operatorname{sen}$.

(b) $\operatorname{sen}' = \cos$. □

Demonstração: Segue diretamente do Lema 31.2.3 anterior. ∎

31.3 Fórmulas de Adição

31.3.1 Lema: *Seja* f *tal que existe* $f''(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *e tal que:*

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Então, $f = 0$. □

Demonstração: Observe que:

$$((f')^2 + f^2)' = 2\, f'\, f'' + 2\, f\, f' = 2\, f'\, (f'' + f) = 0.$$

Portanto, a função $(f')^2 + f^2$ deve ser uma constante, digamos, c. O valor desta constante pode ser determinado observando que:

$$c = (f'(0))^2 + f^2(0) = 0 + 0 = 0.$$

Desta maneira, $(f')^2 + f^2 = 0$. Como a soma de quadrados somente pode ser nula se cada um dos termos for nulo, deve ser $f = 0$. ∎

31.3.2 Lema: *Se existe $f''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e:*

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \\ f'(0) &= b. \end{aligned}$$

Então, $f(x) = a\,\cos x + b\,\operatorname{sen} x.$ ◻

Demonstração: Definindo a função g como $g := f - a\,\cos - b\,\operatorname{sen}$, tem-se:

$$\begin{aligned} g &= f - a\,\cos - b\,\operatorname{sen}, \\ g' &= f' + a\,\operatorname{sen} - b\,\cos, \\ g'' &= f'' + a\,\cos + b\,\operatorname{sen}. \end{aligned}$$

Portanto, $g'' + g = f'' + f = 0$. Além disso, observe que:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - a\,\cos 0 - b\,\operatorname{sen} 0 = f(0) - a = 0, \\ g'(0) &= f'(0) + a\,\operatorname{sen} 0 + b\,\cos 0 = f'(0) - b = 0. \end{aligned}$$

Pelo Lema 31.3.1 anterior, deve ser $g = 0$, ou seja, $f(x) = a\,\cos x + b\,\operatorname{sen} x$. ∎

31.3.3 Lema: *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:*

(a) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x\,\cos y + \cos x\,\operatorname{sen} y.$

(b) $\cos(x + y) = \cos x\,\cos y - \operatorname{sen} x\,\operatorname{sen} y.$ ◻

Demonstração: **(a)** Seja $y \in \mathbb{R}$. Considerando a função $f(x) = \operatorname{sen}(x + y)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x + y), \\ f'(x) &= \cos(x + y), \\ f''(x) &= -\operatorname{sen}(x + y). \end{aligned}$$

Portanto, $f'' + f = 0$. Além disso, observe que:

$$\begin{aligned} f(0) &= \operatorname{sen} y, \\ f'(0) &= \cos y. \end{aligned}$$

Pelo Lema 31.3.2 anterior, deve ser:

$$\operatorname{sen}(x + y) = f(x) = \operatorname{sen} y\,\cos x + \cos y\,\operatorname{sen} x.$$

(b) Derivando a relação acima com relação a x tem-se:

$$\cos(x + y) = \operatorname{sen}'(x + y) = \operatorname{sen} y\,\cos' x + \cos y\,\operatorname{sen}' x = -\operatorname{sen} y\,\operatorname{sen} x + \cos y\,\cos x.$$ ∎

Com os resultados até aqui apresentados resulta possível demonstrar as propriedades fundamentais das funções trigonométricas enumeradas no começo do presente capítulo. Essa tarefa será confiada para os primeiros exercícios do presente capítulo.

31.4 Algumas Desigualdades

31.4.1 Lema: *A função* sen *satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\operatorname{sen} x < x$, *se* $0 < x < \pi/2$.

(b) $\operatorname{sen} x < x$, *se* $0 < x < +\infty$.

(c) $|\operatorname{sen} x| < |x|$, *se* $0 < |x|$.

(d) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| < |x - y|$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *com* $x \neq y$. □

Demonstração: **(a)** Pelo Teorema do Valor Médio 23.2.2, existe $\xi \in (0, x)$ tal que:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \operatorname{sen}' \xi,$$

ou seja:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos \xi \leqslant |\cos \xi| \leqslant 1.$$

Por outro lado, observe que a função cos é estritamente decrescente em $(0, \pi/2)$ com $\cos 0 = 1$, de onde segue que $\cos \xi < 1$ se $0 < \xi < \pi/2$. Portanto:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos \xi < 1,$$

ou seja, $\operatorname{sen} x < x$ se $0 < x < \pi/2$.

(b) Observe que se $x \geqslant \pi/2$, então:

$$\operatorname{sen} x \leqslant |\operatorname{sen} x| \leqslant 1 < \pi/2 \leqslant x.$$

A primeira desigualdade é trivial; a segunda segue de $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$, entanto que a última vale por hipótese. Para provar a terceira, observe primeiramente que em quadrado de lado a e diagonal igual a 1, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se $a^2 + a^2 = 1$, ou seja, $2a^2 = 1$. Por outro lado, observe agora que a área do semicírculo superior de ráio 1 deve ser maior que a soma de dois quadrados de diagonal 1 no primeiro e segundo quadrantes. Portanto:

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx > 2a^2 = 1,$$

ou seja, $\pi/2 > 1$.

(c) Se $0 < x < \pi/2$, pelo item (a) anterior tem-se:

$$-|x| < 0 < \operatorname{sen} x < x = |x|.$$

Por outro lado, se $-\pi/2 < x < 0$ então $-x \in (0, \pi/2)$. Portanto aplicando a relação acima para $-x$ tem-se:

$$-|-x| < 0 < \operatorname{sen}(-x) < -x = |-x|,$$

ou seja:

$$-|x| < -\operatorname{sen} x < |x| \Rightarrow |x| > \operatorname{sen} x > -|x| \Rightarrow -|x| < \operatorname{sen} x < |x|.$$

Portanto, $|\operatorname{sen} x| < |x|$ se $0 < |x| < \pi/2$. Finalmente, no caso $|x| \geqslant \pi/2$, tem-se:

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 < \pi/2 \leqslant |x| \,.$$

Portanto, $|\operatorname{sen} x| < |x|$, para todo $|x| > 0$.

(d) Em primeiro termo, pelo Lema 31.3.3 tem-se:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\\
&= [\operatorname{sen} y/2\ \cos(-x/2)\ +\ \cos y/2\ \operatorname{sen}(-x/2)]\ [\cos x/2\ \cos y/2\ -\ \operatorname{sen} x/2\ \operatorname{sen} y/2]\\
&= \operatorname{sen} y/2\ \cos^2 x/2\ \cos y/2\ -\ \operatorname{sen}^2 y/2\ \cos x/2\ \operatorname{sen} x/2\\
&\qquad -\cos^2 y/2\ \operatorname{sen} x/2\ \cos x/2\ +\ \cos y/2\ \operatorname{sen}^2 x/2\ \operatorname{sen} y/2\\
&\qquad = \operatorname{sen} y/2\ \cos y/2\ -\ \cos x/2\ \operatorname{sen} x/2.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$2\ \operatorname{sen}\left(\frac{y-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\ \operatorname{sen} y/2\ \cos y/2\ -\ 2\ \cos x/2\ \operatorname{sen} x/2 = \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x.$$

Voltando à prova do resultado principal, suponha sem perda de generalidade que $x < y$. Em particular, $y - x > 0$. Utilizando a identidade acima, tem-se:

$$|\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{y-x}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \leqslant 2\left|\operatorname{sen}\frac{y-x}{2}\right| < 2\,\frac{|y-x|}{2} = |y-x| \,.$$

A primeira desigualdade segue de $|\cos x| \leqslant 1$ para todo x, entanto que a segunda é consequência do item anterior, pois $|y - x| = y - x > 0$. ∎

31.4.2 Observação: A relação do item (a) do lema precedente, a saber:

$$\operatorname{sen} x < x, \text{ se } 0 < x < \pi/2,$$

foi introduzida no Exercício 15.10.13, sendo denominada *sub-linearidade do seno*. Nesse exercício a relação foi verificada utilizando as propriedades fundamentais.

Observe que a prova desta mesma relação no Lema 31.4.1(a) tem a vantagem de prescindir das propriedades fundamentais.

Observe também que a prova apresentada no Exercício 15.10.13 vale na verdade para $0 < x < \pi$. Com efeito, seja x tal que $0 < x < \pi/2$. Pela primeira desigualdade da propriedade 4 sabe-se que $\cos x > 0$. Portanto, pela última desigualda da propriedade 4 tem-se que $\operatorname{sen} x\ \cos x < x$. Portanto:

$$\operatorname{sen} 2x = 2\ \operatorname{sen} x\ \cos x < 2\,x.$$

O afirmado segue observando que $0 < x < \pi/2$ se e somente se $0 < 2x < \pi$. ♣

Exercícios para o Capítulo 31

31.5 Valores Especiais

31.5.1 Exercício: Verifique os seguintes valores especiais:

$$\begin{aligned} \cos 0 &= 1, \\ \cos \pi/2 &= 0, \\ \cos \pi &= -1. \end{aligned}$$

Sugestão: Pelo Lema 31.1.5(a) tem-se:

$$\begin{aligned} A(1) &= 0, \\ A(0) &= \pi/4, \\ A(-1) &= \pi/2; \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} 2A(1) &= 0, \\ 2A(0) &= \pi/2, \\ 2A(-1) &= \pi; \end{aligned}$$

portanto... ♣

31.5.2 Exercício: Verifique os seguintes valores especiais:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 0 &= 0, \\ \operatorname{sen} \pi/2 &= 1, \\ \operatorname{sen} \pi &= 0. \end{aligned}$$

Sugestão: Basta usar a definição da função seno, $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, com os valores especiais do exercício anterior. ♣

31.6 Verificação das Propriedades Algébricas

31.6.1 Exercício: Verifique a propriedade 2 *Valores especiais*.

Sugestão: Use os Exercícios 31.5.1 e 31.5.2. ♣

31.6.2 Exercício: Verifique a propriedade 3 *Coseno de uma diferença.*

Sugestão: Pelo Lema 31.3.3(b) tem-se:

$$\cos(y - x) = \cos y\, \cos(-x) - \operatorname{sen} y\, \operatorname{sen}(-x) = \cos y\, \cos x + \operatorname{sen} y\, \operatorname{sen} x.$$ ♣

31.6.3 Exercício: Verifique a propriedade 4 *Desigualdades fundamentais* procedindo com base nas seguintes etapas:

(a) Em primeiro lugar, verifique a relação:

$$0 < \cos x, \text{ se } 0 < x < \pi/2,$$

usando o fato que a função A é injetora (por ser monótona estrictamente decrescente) e que $A(0) = \pi/4$, ou seja, $2A(0) = \pi/2$.

(b) Seja x tal que $0 < x < \pi/2$. Em primeiro termo, use o Teorema do Valor Médio 23.2.2 no intervalo $(0, x)$ com a função sen. Depois observe que $\operatorname{sen}' = \cos$ e que a função cos é monótona *estrictamente decrescente* em tal intervalo para verificar a desigualdade:

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Se ainda tiver dúvidas, compare com a prova do item (a) do Lema 31.4.1.

(c) Finalmente, para $0 < x < \pi/2$, use a desigualdade do Lema 31.4.1(a) e o fato de ser $0 < \cos x \leqslant 1$ em tal intervalo para verificar a desigualdade $\operatorname{sen} x \cos x < x$, de onde segue trivialmente que:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Com maior precisão, poderia ser observado que na verdade $0 < \cos x < 1$, mas com a desigualdade mencionada já é suficiente. ♣

31.7 Desigualdades Fundamentais Revisitadas

31.7.1 Exercício: Uma maneira alternativa de demonstrar a última das desigualdades fundamentais consiste em observar:

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} &= A(\cos x)\\ &= \frac{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}}{2} + \int_{\cos x}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt\\ &= \frac{\cos x\, \operatorname{sen} x}{2} + \int_{\cos x}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt\\ &> \frac{\operatorname{sen} x\, \cos x}{2}.\end{aligned}$$

A última desigualdade segue observando que o integrando $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ é uma função contínua, portanto integrável, e $f(t) > 0$ para $t \in (-1, 1)$, portanto a integral é positiva (vide Exercício 28.5.1). Desta maneira, tem-se:

$$x > \operatorname{sen} x\, \cos x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$ ♣

31.7.2 Exercício: Eis uma maneira alternativa de demonstrar a segunda das desigualdades fundamentais. Seja tg a função definida como:

$$\operatorname{tg} x := \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Em particular, tem-se:

$$\operatorname{tg} 0 = \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0,$$

Além diso, para $0 < x < \pi/2$ tem-se:

$$\operatorname{tg}' x = \frac{\cos x \, \cos x \; - \; \operatorname{sen} x \, (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x \; + \; \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

Dado x com $0 < x < \pi/2$, pelo Teorema do Valor Médio 23.2.2 aplicado à função tg existe $\xi \in (0, x)$ tal que:

$$\frac{1}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 0}{x - 0} = \operatorname{tg}' \xi = \frac{1}{\cos^2 \xi} > 1,$$

onde a última desigualdade segue observando que: $0 < x < \pi/2 \Rightarrow 0 < \cos x < 1 \Rightarrow \cos^2 x < 1$. Portanto:

$$\frac{1}{x}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} > 1 \Rightarrow \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$ ♣

31.8 Mais Valores Especiais

31.8.1 Exercício: **(a)** Usando a fórmula do Exercício 15.10.4 prove que $\operatorname{sen} \pi/4 = \cos \pi/4$.

(b) Prove que $\operatorname{sen} \pi/4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Sugestão: Use o resultado do Exercício 31.5.2 e a fórmula de adição para o seno.

(c) Combinando os dois itens anteriores, prove também que $\cos \pi/4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ♣

31.8.2 Exercício: **(a)** Usando a fórmula do Exercício 15.10.4 prove que:

$$\operatorname{sen} \pi/3 = \cos \pi/6,$$
$$\operatorname{sen} \pi/6 = \cos \pi/3.$$

(b) Usando o item (a) anterior e a fórmula de adição para o seno prove que $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$.

(c) Usando os dois itens anteriores prove que $\cos \pi/3 = 1/2$.

(d) Usando a definição da função seno, $\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, com o valor especial do item (c) anterior prove que $\operatorname{sen} \pi/3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(e) Usando os itens (a) e (d) anteriores prove que $\cos \pi/6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ♣

31.9 Ortogonalidade do Sistema Trigonométrico

31.9.1 Exercício: Verifique se $m, n \in \mathbb{N}$ são números naturais quaisquer, então:

(a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \, \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \\ \pi & \text{se } m = n. \end{cases}$$

(b)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \\ \pi & \text{se } m = n. \end{cases}$$

(c)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \, \cos nx \, dx = 0.$$

♣

31.9.2 Exercício: Seja f é integrável em $[-\pi, \pi]$.

(a) Verifique que o valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - a \, \cos nx]^2 \, dx$$

apresenta-se quando

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \cos nx \, dx.$$

(b) Verifique agora que o valor mínimo de

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - a \, \operatorname{sen} nx]^2 \, dx$$

apresenta-se quando

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Sugestão: Tanto em um caso como no outro, tire a constante a da integral e considere a expressão quadrática em a que se obtém. ♣

Sejam a_n e b_n os **coeficientes de Fourier** da função f definidos como:

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \operatorname{sen} nx \, dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

31.9.3 Exercício: Se c_i e d_i são números quaisquer, verifique que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \operatorname{sen} nx \right) \right]^2 dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - 2\pi \left(\frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \, c_n + b_n \, d_n \right) + \pi \left(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n^2 + d_n^2 \right)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2 \right)$$
$$+ \pi \left(\left(\frac{c_0}{\sqrt{2}} - \frac{a_0}{\sqrt{2}} \right) + \sum_{n=1}^{N} (c_n - a_n)^2 + (d_n - b_n)^2 \right).$$

Em particular, essa identidade prova que a integral à esquerda resulta mínima quando $c_i = a_i$ e $d_i = b_i$. Em outras palavras, entre todas as possíveis combinações lineares das funções $\cos nx$ e $\operatorname{sen} nx$ com $1 \leqslant n \leqslant N$ a função particular dada por:

$$g(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

constitui a "máxima aproximação" à função f em $[-\pi, \pi]$. ♣

31.10 A Desigualdade de Bessell

Nesta seção será utilizada a notação e definições para os coeficiêntes de Fourier a_i e b_i de uma função f integrável em $[-\pi, \pi]$ introduzidas da seção precedente.

31.10.1 Exercício: Prove que para todo $N \in \mathbb{N}$ verifica-se a seguinte relação, denominada **desigualdade de Bessell**:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2 \right) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx.$$

Sugestão: No caso $c_i = a_i$ e $d_i = b_i$ a identidade do Exercício 31.9.3 se reduz a:

$$0 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \operatorname{sen} nx \right) \right]^2 dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx \; - \; \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2 \right).$$ ♣

31.10.2 Exercício: Em particular, da desigualdade de Bessell segue que a sequência cujo termo N-ésimo é dado por:

$$\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2 \right)$$

é limitada superiormente pelo número:

$$\|f\|^2 := \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx.$$

Como tal sequência é obviamente não-decrescente, pelo fato ser soma de termos não-negativos, resulta "somável", ou seja, existe o limite para $N \to \infty$. Em outras palavras, a "série" acima "converge", com soma menor ou igual que $\|f\|^2$.

31.11 O Lema de Riemann-Lebesgue

Segundo Spivak [25], constitui uma excelente prova de intuição predecir o valor do limite:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx.$$

As funções contínuas f provavelmente resultem as mais acessíveis à intuição, mas uma vez obtida a idéia para uma demonstração, o limite acima pode ser facilmente estabelecido, sem muito esforço adicional, para qualquer f integrável.

31.11.1 Exercício: **(a)** Prove que:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b \operatorname{sen} \lambda x \, dx = 0$$

calculando a integral explicitamente.

(b) Se s é uma função degrau em $[a, b]$, então:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b s(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx = 0.$$

As funções degrau foram introduzidas na Definição 27.13.1.

(c) Finalmente, use o Exercício 27.13.2 para provar que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen} \lambda x \, dx = 0$$

para qualquer função f integrável em $[a, b]$. ♣

O resultado do item (c) no exercício anterior é conhecido como **Lema de Riemann-Lebesgue** e sua relevância será apreciada em capítulos posteriores.

31.12 O Núcleo de Dirichlet

31.12.1 Exercício: Suponha-se que $\operatorname{sen} x/2 \neq 0$. Verifique que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\frac{\operatorname{sen}(n+1/2)x}{2\ \operatorname{sen} x/2} + \cos(n+1)x = \frac{\operatorname{sen}(n+3/2)x}{2\ \operatorname{sen} x/2}.$$

Sugestão: Use as fórmulas de adição para sen e cos. ♣

31.12.2 Exercício: Prove que se $\operatorname{sen} x/2 \neq 0$, então:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)x}{2\ \operatorname{sen} x/2}.$$

Sugestão: Use indução em n e o exercício anterior para verificar a validade do paso indutivo. ♣

31.12.3 Exercício: Caso o leitor esteja se perguntando, existe também uma fórmula análoga à do exercício anterior para uma soma de senos. Prove que se $\operatorname{sen} x/2 \neq 0$, então:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx &= \frac{\operatorname{sen} nx}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2}\,\frac{1-\cos nx}{1-\cos x};\\ &= \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} nx - \operatorname{sen}(n+1)x}{2\,(1-\cos x)}.\end{aligned}$$

Sugestão: Use indução em n. A primeira identidade a direita acima permite verificar o caso $n = 1$ de maneira simples, no entanto que a segunda resulta bacana para provar a validade do paso inductivo. ♣

31.12.4 Exercício: Assumindo que $\operatorname{sen} x/2 \neq 0$, use o exercício anterior para verificar a seguinte relação:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx\right| = |\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx| < \operatorname{cosec}^2 x/2, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$ ♣

31.12.5 Exercício: O presente exercício fornece uma prova alternativa da identidade do Exercício 31.12.3 anterior.

(a) Prove que para $\mathbb{R} \ni a \neq 1$ tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a - a^{n+1}}{1-a}.$$

(b) Expresando o seno como exponencial complexa:

$$\operatorname{sen} kx = \frac{\mathrm{e}^{ikx} - \mathrm{e}^{-ikx}}{2i},$$

e usando o resultado do item anterior prove que:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right).$$

(c) Prove que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) &= \frac{\operatorname{sen} nx}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2}\,\frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} nx - \operatorname{sen}(n+1)x}{2\,(1 - \cos x)}. \end{aligned}$$

(d) Utilizando o resultado dos dois itens precedentes reproduza a identidade do Exercício 31.12.3. ♣

Capítulo 32

As Funcões Logarítmica e Exponencial

32.1 A Função Logarítmica

32.1.1 Definição: Se $x > 0$, define-se a função **logarítmica** por:

$$\log x := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt. \qquad \clubsuit$$

Embora o leitor possa expressar as suas reservas com relação à esta definição, uma coisa deveria resultar evidente: A derivada da função log é simples de obter. De fato, por uma aplicação direta do primeiro TFCI 30.1.2, tem-se:

$$\log' x = \frac{1}{x}.$$

A "propriedade fundamental" da função logarítmica agora resulta quase uma trivialidade.

32.1.2 Teorema: *Se* $x, y > 0$, *então* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$. $\square$

Demonstração: Seja $y > 0$ arbitrário mas fixo. Considerando a função $f(x) := \log(xy)$ tem-se:

$$f'(x) = \log'(xy) \cdot y = y\,\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} = \log' x.$$

Portanto, existe alguma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log x + c$. O valor da constante pode ser obtido observando que:

$$\log y = f(1) = \log(1) + c = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 + c = c.$$

Ou seja, $\log(xy) = f(x) = \log x + \log y$. $\blacksquare$

32.1.3 Corolário: *A função logarítmica satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *Se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $x > 0$*, então* $\log(x^n) = n \, \log(x)$.

(b) *Se* $x, y > 0$*, então* $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$. □

Demonstração: **(a)** Por indução em n. O caso n é trivial. Para verificar a validade do paso inductivo, observe que:

$$\log(x^{n+1}) = \log(x^n x) = \log(x^n) + \log(x) = n \, \log(x) + \log(x) = (n+1) \, \log(x).$$

(b) Pelo teorema anterior tem-se:

$$\log(x) = \log\left(\frac{x}{y} \, y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log(y),$$

ou seja, $\log(x) - \log(y) = \log(x/y)$. ∎

32.1.4 Lema: *A função logarítmica satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\log x$ *é uma função monótona estrictamente crescente para* $x > 0$.

(b) *Em particular, existe a função inversa* $\log^{-1}$.

(c) *Para qualquer* $n \in \mathbb{N}$ *tem-se:*

$$\log(2^n) = n \, \log 2.$$

Em particular, $\log$ *é uma função não-limitada superiormente.*

(d) *Analogamente, para qualquer* $n \in \mathbb{N}$ *tem-se:*

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log 1 - \log 2^n = -n \, \log 2,$$

Portanto, $\log$ *também é uma função não-limitada inferiormente.*

(e) $\log$ *assume todos os valores reais. Ou seja,* $\mathrm{Img}(\log) = \mathbb{R}$.

(f) $\mathrm{Dom}(\log^{-1}) = \mathbb{R}$. □

Demonstração: **(a)** Observe que a função $1/x$ é contínua se $x > 0$. Segue da definição 32.1.1 da função log e do primeiro TFCI 30.1.2 que:

$$\log'(x) = 1/x.$$

Portanto, $\log'(x) > 0$ para $x > 0$, e a monotonicidade segue do Lema 23.2.7(a).

(b) Pelo Exemplo 26.1.3(b), toda função monótona é injetora. Portanto, do item (a) precedente e do Teorema 26.1.5 segue a existência da função inversa $\log^{-1}$.

(c) A igualdade $\log(2^n) = n\,\log 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é consequência direta do Corolário 32.1.3(a). Observe que do Exercício 27.5.2(a) tem-se que $\log 2 > 0$. Desta maneira, dado qualquer $M \in \mathbb{R}$, pela arquimedianidade, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\,\log 2 > M$ e portanto, $\log(2^n) = n\,\log 2 > M$.

(d) Analogamente, a identidade:

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log 1 - \log 2^n = -n\,\log 2,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, segue do Corolário 32.1.3(b). Dado qualquer $M \in \mathbb{R}$, pela arquimedianidade, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\,\log 2 > M$ e portanto, $\log(1/2^n) = -n\,\log 2 < -M$.

(e) Da definição 32.1.1 da função log e do Teorema 27.3.6 tem-se que log é uma função contínua. Sendo não-limitada e contínua, toma realmente todos os valores reais. Ou seja, $\mathrm{Img}(\log) = \mathbb{R}$.

(f) Como consequência direta do item anterior segue que $\mathrm{Dom}(\log^{-1}) = \mathbb{R}$. ∎

32.2 A Função Exponencial

32.2.1 Definição: A função **exponencial** exp define-se como $\exp = \log^{-1}$. ♣

32.2.2 Observação: Como $\log 1 = 0$, tem-se que $\exp(0) = 1$. ♣

32.2.3 Teorema: *Para todo* $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$. □

Demonstração: Através de uma simples aplicação do Teorema 26.3.3 tem-se:

$$\exp'(x) = \left(\log^{-1}\right)' = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))} = \frac{1}{\dfrac{1}{\log^{-1}(x)}} = \log^{-1}(x) = \exp(x).$$ ∎

32.2.4 Teorema: *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *tem-se* $\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$. □

Demonstração: Observe que:

$$\exp(x) = u \Leftrightarrow x = \log u,$$
$$\exp(y) = v \Leftrightarrow y = \log v.$$

Portanto:

$$x + y = \log u + \log v = \log uv \Leftrightarrow \exp(x+y) = uv = \exp(x)\,\exp(y).$$ ∎

32.2.5 Definição: O número ***e*** define-se como $e := \exp(1)$. ♣

32.2.6 Observação: Se $r \in \mathbb{Q}$ e $x \in \mathbb{R}$, então $\exp(rx) = \exp^r(x)$. Em particular, com $x = 1$, tem-se $\exp(r) = \exp^r(1) = e^r$, para todo $r \in \mathbb{Q}$. Com efeito:

(a) Se $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\exp(nx) = \exp(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{\exp(x)\ \exp(x) \cdots \exp(x)}_{n \text{ vezes}} = \exp^n(x).$$

(b) Também, $1 = \exp(0) = \exp(nx - nx) = \exp(nx)\exp(-nx)$. Portanto:

$$\exp(-nx) = \frac{1}{\exp(nx)} = \frac{1}{\exp^n(x)} = \exp^{-n}(x).$$

(c) Em particular, dos dois itens anteriores segue que $\exp(nx) = \exp^n(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Se agora $n \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$, então tem-se:

$$\begin{aligned}\exp^m(nx/m) &= \underbrace{\exp(nx/m)\ \exp(nx/m) \cdots \exp(nx/m)}_{m \text{ vezes}} \\ &= \exp(\underbrace{(nx/m) + (nx/m) + \cdots + (nx/m)}_{m \text{ vezes}}) = \exp(mnx/m) = \exp(nx) = \exp^n(x),\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do item (c) anterior. Portanto, $\exp(nx/m) = \exp^{n/m}(x)$. ♣

32.3 Exponenciais de Base Positiva Revisitadas

Seja $a > 0$. Se $x \in \mathbb{Q}$, então pela observação 32.2.6 anterior tem-se:

$$a^x = (\exp(\log a))^x = \exp^x(\log a) = \exp(x \log a).$$

Ou seja, as funções:

$$f(x) = a^x,$$
$$g(x) = \exp(x \log a),$$

coincidem no conjunto denso $\mathbb{Q}$, e logo, pela continuidade em todo $\mathbb{R}$. Em particular, no caso $a = e$ tem-se:

$$e^x = \exp(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Desta maneira, as expressões e^x e $\exp(x)$ serão consideradas como sinônimos para a mesma função, a função exponencial, e como tais serão usadas indistintamente segundo a conveniência do contexto.

A expressão alternativa $\exp(x \log a)$ para a^x resulta de inestimável importancia para demonstrar propriedades dessa última função que com a definição original do Capítulo 12 resultariam completamente inviáveis.

Mais ainda, se o Capítulo 12 fosse omitido, o valor de a^x para x real irracional seria precisamente definido como $\exp(x \log a)$. Tal proceder estaria justificado pelo fato da identidade $a^x = \exp(x \log a)$ ser válida para todo $x \in \mathbb{Q}$, pela observação 32.2.6, e pelo fato da expressão $\exp(x \log a)$ estar definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

32.3.1 Definição (alternativa para a exponencial de base positiva)**:** Seja $a > 0$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$ define-se $\boldsymbol{a^x}$ como:

$$a^x := \exp(x \log a) = e^{x \log a}. \qquad \clubsuit$$

32.3.2 Teorema: *Seja $a > 0$. Então:*

(a) *Para todo $b, c \in \mathbb{R}$ tem-se $(a^b)^c = a^{bc}$.*

(b) *$a^1 = a$.*

(c) *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se $a^{x+y} = a^x\, a^y$.* □

Demonstração: **(a)** Empregando a definição alternativa da exponencial de base $a > 0$ tem-se:

$$(a^b)^c = \exp\left(c \log a^b\right) = \exp\left(c \log(\exp(b \log a))\right) = \exp(cb \log a) = a^{bc}.$$

(b) Basta observar que $a^1 = \exp(\log a) = a$.

(c) Utilizando a definição tem-se:

$$a^{x+y} = \exp((x + y) \log a) = \exp(x \log a + y \log a) = \exp(x \log a)\, \exp(y \log a) = a^x\, a^y. \ \blacksquare$$

32.3.3 Observação: Seja $f(x) = a^x$.

(a) Se $a = 1$, então $f(x) = 1^x = e^{x \log 1} = e^0 = 1$.

(b) Seja $a > 1$. Em tal caso $\log a > 0$, portanto:

$$x < y \Rightarrow x \log a < x \log y \Rightarrow a^x = \exp(x \log a) < \exp(x \log y) = a^y,$$

ou seja, a função $f(x) = a^x$ é estrictamente crescente.

(c) Seja agora $0 < a < 1$. Neste caso $\log a < 0$ e analogamente ao caso anterior prova-se que a função $f(x) = a^x$ é estrictamente decrescente.

(d) Desta maneira, se $a > 0$ com $a \neq 1$, a função $f(x) = a^x$ é injetora e portanto invertível. ♣

32.3.4 Definição: Seja $a > 0$ com $a \neq 1$. Define-se a função **logaritmo em base** a, denotada $\log_a$, como a função inversa de $f(x) = a^x$. ♣

Exercícios para o Capítulo 32

32.4 Gráficos, Derivadas, Integrais

32.4.1 Exercício: Trazar o gráfico aproximado das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2^x$.

(b) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. ♣

32.4.2 Exercício: Nos seguintes casos determine o valor de x quando possível:

(a) $e^{2x} = 8$. R: $x = \frac{1}{2}\log 8 = \frac{3}{2}\log 2$.

(b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{3x} = \dfrac{9}{25}$. R: $x = 2/3$.

(c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = -5$. R: Não existe um tal x.

(d) $\log_{10}(x) = 4$. R: $x = 10^4$. ♣

32.4.3 Exercício: Derive as seguintes funções:

(a) $f(x) = \mathrm{e}^x$. R: e^x.

(b) $f(x) = x^e$. R: $e\,x^{e-1}$.

(c) $f(x) = a^x$. R: $(\log a)\,a^x$.

(d) $f(x) = \log g(x)$. R: $g'(x)/g(x)$.

(e) $f(x) = g(x)^{h(x)}$. R: $g(x)^{h(x)}\ [h'(x)\ \log g(x) + h(x)g'(x)/g(x)]$. ♣

32.4.4 Exercício: Se $f(x) = \log x$ determine os números ξ tais que $e^2 < \xi < e^3$ satisfazendo:

$$f'(\xi) = \frac{f(e^3) - f(e^2)}{e^3 - e^2}.$$ R: $\xi = e^3 - e^2$. ♣

32.4.5 Exercício: Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $F(t) = \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^t\, dt.$ R: $F' = 0$. ♣

32.4.6 Exercício: Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\, dx.$ R: 1.

(b) $\displaystyle\int_0^{\log 2} \mathrm{e}^x\, dx.$ R: 1. ♣

32.4.7 Exercício: Em cada um dos seguintes casos determine, se existir, o valor de x tal que:

(a) $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{u}\, du = 1.$ R: $x = e$.

(b) $\displaystyle\int_{\log 2}^x e^{2t}\, dt = 1.$ R: $x = \frac{3}{2}\log 2$.

(c) $\displaystyle\int_{-x}^x t\, e^{3t^2}\, dt = 2.$ R: Não existe um tal x. ♣

32.4.8 Exercício: Quanto deve valer a constante a para que a derivada de $(x^2 - 2x + a)\, e^x$ seja $(x^2 + 2)\, e^x$. R: 4. ♣

32.5 Logaritmo de Base Positiva Arbitrária

32.5.1 Exercício: Prove que $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$.

Sugestão: Basta apenas usar as definições. ♣

32.5.2 Exercício: Prove que $\log_{10} 2$ é irracional.

Sugestão: Por *reductio ad absurdum*, suponha-se que tal número fosse racional, digamos, da forma m/n. Pelo exercício anterior teria-se:

$$\frac{m}{n} = \log_{10} 2 = \frac{\log 2}{\log 10}.$$

Como $2 > 1$ e $10 > 1$ tem-se que $\log 2 > 0$ e $\log 10 > 0$. Portanto, sem perda de generalidade se pode supor que $m, n \in \mathbb{N}$. Da identidade acima segue que $n \log 2 = m \log 10$, ou seja, $\log 2^n = \log 10^m$, de onde tem-se que $2^n = 10^m = 2^m 5^m$, mas isso não pode ser possível e a demostração acaba se descobrir o por quê. ♣

32.6 Uma Função Melíflua

Nesta seção será provado que a função logaritmica, embora não limitada, não cresce rapidamente. A ênfase aqui reside na vagarosidade. Com maior precisão, a função logarítmica cresce mais devagar do que qualquer reta pela origem de pendiente positiva arbitrária. O caso particular em que a pendiente vale 1 será considerado primeiramente.

32.6.1 Exercício: Prove que $\log x < x$ para todo $x > 0$. Considere por separado os três casos a seguir:

(a) $0 < x < 1$. Neste caso, $\log x < 0 < x$.

(b) $x = 1$. Aqui, $\log x = \log 1 = 0 < 1 = x$.

(c) $1 < x$. Neste caso observe-se que $\log x < x - 1 < x$, onde a primeira desigualdade pode ser obtida majorando a integral que define o logaritmo com uma soma superior bem simples. ♣

Eis o enunciado do resultado geral, cuja prova é o objetivo da presente seção.

32.6.2 Teorema: *Para todo $a > 0$ existe um número não-negativo $M = M(a) \geqslant 0$, em geral dependente de a, tal que $\log x < ax$, para todo $x > M$.* □

Para provar este resultado, será necessário considerar por separado três casos, cada um deles abordado com detalhe nos seguintes três exercícios, respectivamente.

32.6.3 Exercício: **Caso** $a = 1$

Sugestão: Neste caso basta tomar $M = 0$. Isso segue direto do Exercício 32.6.1 anterior. ♣

32.6.4 Exercício: **Caso** $a > 1$

Sugestão: Também pelo exercício 32.6.1, tem-se $\log x < x < ax$ para todo $x > 0$, onde a última desigualdade é consequência do fato de ser $a > 1$. Desta maneira, neste caso também basta tomar $M = 0$. ♣

32.6.5 Exercício: **Caso** $0 < a < 1$

Este caso exige um pouco mais de cuidado que os anteriores.

(a) Prove que deve existir algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^2 k > 1$.

Sugestão: $\mathbb{R}$ é um conjunto arquimediano.

(b) O mesmo $k \in \mathbb{N}$ do item anterior satisfaz $ak > 1/a > 1$.

(c) Prove que se $1 < ak < x$ então:

$$\log x < (ak - 1) \; + \; (x - ak)\,\frac{1}{ak}.$$

Sugestão: Como de praxe, majore a integral que define o logaritmo por uma soma superior, considerando a partição $\{1, ak, x\}$.

(d) Prove que:

$$(ak - 1) + (x - ak)\frac{1}{ak} < ax \;\Leftrightarrow\; \frac{ak - 2}{a^2k - 1}\,ak < x.$$

Sugestão: Em algum ponto será necessário observar que $a^2k - 1 > 0$, o que é garantido pela escolha do k no item (a).

(e) Se já cogitou em escolher $M(a) = \max\left\{ak, \dfrac{ak - 2}{a^2k - 1}\,ak\right\}$ então está no caminho certo. ♣

32.7 (Nem) O Céu é o seu Limite

Como contraponto da seção anterior, na presente será provado que a função exponencial cresce fantásticamente rápido. Mais precisamente, cresce mais rápido que qualquer polinômio, como estabelece o seguinte resultado.

32.7.1 Teorema: *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se que* $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty.$ □

A prova deste teorema será quebrada em várias partes a serem consideradas nos exercícios a seguir.

32.7.2 Exercício: Prove que $e^x > x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Isso é consequência direta do exercício 32.6.1. ♣

32.7.3 Exercício: Prove que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} = \infty$.

Sugestão: Observe que:

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{x/2}\,e^{x/2}}{2\,\dfrac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x/2}}{\dfrac{x}{2}}\right)\,e^{x/2}.$$

Pelo exercício anterior, a expressão entre parênteses é maior do que 1. Por outro lado, $\lim\limits_{x \to \infty} e^{x/2} = \infty$. ♣

32.7.4 Exercício: Prove que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$.

Sugestão: Observe que:

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{(e^{x/n})^n}{n^n \left(\dfrac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^{x/n}}{\dfrac{x}{n}} \right)^n .$$

Pelo exercício anterior, a expressão dentro do parêntese resulta arbitrariamente grande. Com a n-ésima potência haverá de acontecer o mesmo. ♣

32.8 Uma estimativa do número e

Se fez o Exercício 32.4.6(a) já poderá ter observado que:

$$1 = \log(\exp(1)) = \log e = \int_1^e \frac{1}{t}\, dt.$$

Esta identidade pode ser usada para estimar a ordem de grandeza do número e, como nos exercícios a seguir.

32.8.1 Exercício: Primeiramente, prove que $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\, dt < 1$.

(a) Uma prova pode ser obtida majorando a integral por uma soma superior. Isso é quase imediato e um gráfico pode facilitar a visualização.

(b) Uma outra prova é fornecida pelo Exercício 27.5.3(b) ou (c). De fato, nesse exercício a estimativa da integral é ainda mais exata. Contudo, para a estimativa do número e na presente seção a majoração por 1 já é suficiente. ♣

32.8.2 Exercício: Prove agora que $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t}\, dt > 1$.

Sugestão: Apresente uma soma inferior igual a 1 considerando a partição $\{1, 2, 4\}$. ♣

32.8.3 Exercício: *Le coup de grâce*

(a) Conclua da observação inicial e dos dois exercícios anteriores que:

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\, dt < \int_1^e \frac{1}{t}\, dt < \int_1^4 \frac{1}{t}\, dt.$$

(b) Conclua finalmente que $2 < e < 4$. ♣

Essa última estimativa do número e pode ser notavelmente aprimorada, mas para tanto serão necessárias outras técnicas, introduzidas posteriormente, vide Capítulo 35.

32.9 Orgia de Limites Logarítmicos

32.9.1 Exercício: Determine o valor dos seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\log(1+y)}{y}$. R: 1.

Sugestão: Uma maneira consiste em utilizar a regra de L'Hôpital. Uma outra consiste em observar que $\log(1) = 0$, $\log'(1) = 1$ e usar a definição de derivada.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+ax)}{x}$. R: a.

Sugestão: Uma maneira consiste em utilizar a regra de L'Hôpital. Uma outra consiste em manipular algebricamente a fração e utilizar o resultado do item anterior.

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} x \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. R: 1.

Sugestão: Segue facilmente do item (a) anterior. ♣

32.9.2 Exercício: Prove que $\log b = \lim\limits_{x\to\infty} x(b^{1/x} - 1)$.

Sugestão: Observe que:

$$\lim_{x\to\infty} x(b^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{(1/x)\log b} - 1}{1/x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y \log b} - 1}{y}$$

e use a regra de L'Hôpital. ♣

32.9.3 Exercício: Seja $c > 0$.

(a) Prove que para todo $c > 0$ e todo $t \geqslant 1$ tem-se que:

$$\frac{1}{t} \leqslant t^{c-1}.$$

(b) Usando o item (a) anterior, prove que para todo $x > 1$ tem-se:

$$0 < \log x < \frac{x^c}{c}.$$

(c) Em particular, para todo $a > 0$, $b > 0$ tem-se:

$$0 < \frac{(\log x)^b}{x^a} < \frac{x^{bc-a}}{c^b}, \quad \forall\, x > 1.$$ ♣

32.9.4 Exercício: Se $a > 0$ e $b > 0$, então verifique:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\log x)^b}{x^a} = 0.$

Sugestão: Considere $0 < c < b/a$, por exemplo $c = a/2b$, no Exercício 32.9.3(c) anterior.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{e^{ax}} = 0.$

(c) $\lim\limits_{x\to0^+} x^a (\log x)^b = 0.$

Sugestão: Observe que:

$$x^a (\log x)^b = \frac{\left(-\log \dfrac{1}{x}\right)^b}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^a} = (-1)^b \frac{\left(\log \dfrac{1}{x}\right)^b}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^a}.$$

♣

32.9.5 Exercício: Prove que $\lim\limits_{x\to0^+} x^x = 1.$

Sugestão: Usando a continuidade da função exponencial tem-se:

$$\lim_{x\to0^+} x^x = \lim_{x\to0^+} \exp(x\log x) = \exp\left(\lim_{x\to0^+} x\log x\right).$$

Uma maneira de determinar o valor do último limite consiste em usar o Exercício 32.9.4(c) com $a = 1$ e $b = 1$. ♣

32.10 Forma de Cauchy do Número e

32.10.1 Exercício: Seja $a \in \mathbb{R}$. Verifique que todos os seguintes limites têm o mesmo resultado. Não é necessário, contudo, determinar explicitamente o valor de tal resultado.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{ax}.$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{x}.$

(c) $\lim\limits_{x\to0} (1 + ax)^{1/x}.$

(d) $\lim\limits_{y\to0} (1 + y)^{a/y}.$ ♣

32.10.2 Exercício: O valor dos limites no exercício anterior pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to0} (1+ax)^{1/x} = \lim_{x\to0} \exp\left[\frac{1}{x}\log(1+ax)\right] = \exp\left[\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\log(1+ax)\right],$$

onde a última igualdade segue da continuidade da função exponencial. Para determinar o valor do último limite pode ser usado o Exercício 32.9.1(b). R: e^a. ♣

32.10.3 Exercício: O valor dos limites no Exercício 32.10.1 também pode ser calculado alternativamente da seguinte maneira.

(a) Prove primeiramente que $e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Sugestão: Observe que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \exp\left[x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \exp\left[\lim_{x \to +\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right],$$

onde a última igualdade segue da continuidade da função exponencial. O valor do último limite pode ser determinado a partir do resultado do Exercício 32.9.1(c).

(b) Verifique agora que $e^a = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax}$.

Sugestão: No resultado anterior tome a potência a-ésima e use o fato que a função $f(x) = x^a = \exp(a \log x)$ é obviamente contínua para $x > 0$. ♣

32.10.4 Exercício: Prove também que:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ou seja, o número $e = \exp(1)$ e o número e introduzido na Seção 8.6 são na verdade o mesmo número.

Sugestão: Use o resultado do Exercício 32.10.3(a), ou alternativamente a combinação dos Exercícios 32.10.1(b,c) e 32.10.2 com $a = 1$, junto com o resultado do Exercício 18.8.2. ♣

32.11 O Cálculo de Juros Compostos

Se o capital C é aplicado a uma taxa de T por cento pelo periodo p, o juro J ao cabo de um tempo t, segundo a **fórmula de juros simples** é dado por:

$$J = \frac{C \times T \times t}{100 \times p}.$$

onde o periodo P e o tempo t são expressados *na mesma unidade*. Desta maneira, a poupança total P ao cabo do tempo t, dada pelo capital inicial mais os juros, pode ser expressada como:

$$P = C + J = C + \frac{C\,T\,t}{100\,p} = C\left(1 + \frac{T\,t}{100\,p}\right).$$

No seguinte, apenas para simplificar os cálculos, suponha que a taxa de juros seja $T = 100\%$ anual (não longe da realidade, em alguns países) e que o tempo t é contabilizado em meses; portanto, $p = 12$. Com essas simplificações, a poupança total ao cabo de t meses resulta:

$$P = C\left(1 + \frac{t}{12}\right).$$

Em particular, a poupança anual ao cabo de $t = 12$ meses de juros simples é dada por:

$$P = C\,(1+1)\,.$$

A poupança semestral ao cabo de $t = 6$ meses de juros simples é dada por:

$$P = C\left(1+\frac{6}{12}\right) = C\left(1+\frac{1}{2}\right).$$

Observe que se essa poupança P semestral é usada como capital inicial $C' = P$ de uma nova aplicação semestral, a poupança anual resultante agora será dada por:

$$P = C'\left(1+\frac{1}{2}\right) = C\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = C\left(1+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Para efeitos de comparação, suponha que o capital inicial inicial C é dado por $C = 1$ (que pode ser R$ 1 ou R$ 1 milhão, como preferir). Em tal caso, a poupanca anual com juros simples é de $P = 2$, entanto que a poupança anual *composta semestralmente* resulta:

$$P = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Observe que este resultado é sensivelmente maior que o anterior, pois:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2.$$

De fato, $9/4 = 2,25$.

Suponha agora que o capital inicial $C = 1$ é aplicado por um quatrimestre, ou seja $t = 4$ meses. Em tal caso, a poupança será dada por:

$$P = C\left(1+\frac{4}{12}\right) = C\left(1+\frac{1}{3}\right).$$

Se o produto dessa aplicação é composto três vezes ao cabo de um ano, a poupança anual total desta vez será:

$$P = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3.$$

Observe que este resultado é maior que o anterior, pois:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} > \frac{9}{4}.$$

De fato, $64/27 \approx 2,37$.

Analogamente, se o capital inicial $C = 1$ é aplicado por um trimestre, ou seja $t = 3$ meses, a poupança será dada por:

$$P = C\left(1+\frac{3}{12}\right) = C\left(1+\frac{1}{4}\right).$$

Se o produto dessa aplicação é composto quatro vezes ao cabo de um ano, a poupança anual total será:

$$P = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4.$$

Mais uma vez, observe que esse resultado é maior que o anterior, pois:

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{5^4}{4^4} > \frac{4^3}{3^3}.$$

De fato, $5^4/4^4 \approx 2,44$.

Dessa maneira, a aplicação inicial pode continuar se reduzindo sucessivamente para bimestral, mensal, semanal, diária, etc. etc. Nada impede que o ano possa ser dividido em periodos de tempo $t = 12/n$ arbitrariamente pequenos tomando n suficientemente grande. Em tal caso, a poupança anual composta é dada por:

$$P = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Como nos exemplos precedentes, neste caso verifica-se que P continua crescendo a medida que n aumenta, como prova o seguinte exercício.

32.11.1 Exercício: Prove que a sequência s_n dada por:

$$s_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é estrictamente crescente.

Sugestão: Use o Exercício 3.9.2. ♣

Desta maneira, surge naturalmente a questão sobre se a sequência s_n cresce indefinidamente ou se, pelo contrário, atinge um limite finito quando $n \to \infty$ e em tal caso qual seria esse limite. A resposta dessas duas questões e o assunto dos seguintes dois exercícios.

32.11.2 Exercício: Prove que a sequência s_n é limitada e forneça limites inferiores e superiores para ela.

Sugestão: Use o Exercício 3.9.3 ou veja uma solução no Exercício 8.6.2. ♣

32.11.3 Exercício: Prove que $\lim_{n\to\infty} s_n = e$.

Sugestão: Vide Exercício 32.10.4. ♣

32.11.4 Exercício: Forneça uma expressão para a poupança total com juros compostos no caso geral.

Sugestão: Use o Exercício 32.10.1(b) com $a = T/100$ e o resultado do Exercício 32.10.2 ou 32.10.3.
R: $P = C\, e^{T/100}$. ♣

32.12 As Funções Trigonométricas Hiperbólicas

32.12.1 Definição: As funções **seno hiperbólico** e **coseno hiperbólico** definem-se respectivamente por:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ♣

Existem muitas analogias entre estas funções e as correspondentes funções trigonométricas ordinárias. Algumas delas serão analizadas nos exercícios a seguir.

32.12.2 Exercício: **Identidade hiperbólica**

Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1.$$ ♣

32.12.3 Exercício: **Fórmulas de adição**

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x\, \cosh y + \cosh x\, \operatorname{senh} y;$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x\, \cosh y + \operatorname{senh} x\, \operatorname{senh} y.$$ ♣

32.12.4 Exercício: **Fórmulas do ângulo duplo** ou **fórmulas de duplicação**

Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 1 + 2\, \operatorname{senh}^2 x;$$
$$\operatorname{senh}(2x) = 2\, \operatorname{senh} x\, \cosh x.$$ ♣

32.12.5 Exercício: **Fórmulas de redução**

Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\operatorname{senh}^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2};$$
$$\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}.$$

♣

32.12.6 Exercício: Regras de derivação

Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\operatorname{senh}' x = \cosh x;$$
$$\cosh' x = \operatorname{senh} x.$$

♣

32.12.7 Exercício: Derivação das co-funções hiperbólicas

Usando a regra de derivação de produtos e quocientes obtenha as derivadas das demais funções trigonométricas hiperbólicas:

(a) $\operatorname{cosech} x := \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$. R: $-\operatorname{cotgh} x \operatorname{cosech} x$.

(b) $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$. R: $-\operatorname{tgh} x \operatorname{sech} x$.

(c) $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$. R: $\operatorname{sech}^2 x$.

(d) $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$. R: $-\operatorname{cosech}^2 x$. ♣

32.13 Funções Trigonométricas Hiperbólicas Inversas

32.13.1 Exercício: Derive a função $f(x) = \operatorname{arcsenh} x$ utilizando a seguinte técnica. A identidade trigonométrica:

$$\cosh^2(a) - \operatorname{senh}^2(a) = 1$$

é válida para qualquer a. Em particular, se $a = \operatorname{arcsenh} x$ tem-se:

$$1 = \cosh^2(\operatorname{arcsenh} x) - \operatorname{senh}^2(\operatorname{arcsenh} x) = \cosh^2(\operatorname{arcsenh} x) - x^2.$$

Portanto:

$$\cosh(\operatorname{arcsenh} x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

A raiz quadrada *positiva* justifica-se pelo fato que $\cosh x \geqslant 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. O resto consiste em derivar ambos membros desta última identidade usando a regra de derivação de funções compostas. R: $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. ♣

32.13.2 Exercício: Derive $f(x) = \operatorname{arccosh} x$ usando uma técnica parecida. R: $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ para $x > 1$. ♣

32.13.3 Exercício: Para derivar $f(x) = \operatorname{arctgh} x$ a técnica anterior deve ser ligeiramente modificada. Partindo novamente da identidade hiperbólica:

$$\cosh^2 a - \operatorname{senh}^2 a = 1$$

e dividendo ambos termos por $\cosh^2 a$ tem-se:

$$1 - \operatorname{tgh}^2 a = 1 - \frac{\operatorname{senh}^2 a}{\cosh^2 a} = \frac{1}{\cosh^2 a}.$$

Portanto:

$$\operatorname{sech} a = \sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 a}.$$

Em particular, se $a = \operatorname{arctgh} x$ tem-se:

$$\frac{1}{\cosh(\operatorname{arctgh} x)} = \operatorname{sech}(\operatorname{arctgh} x) = \sqrt{1-x^2}.$$

O resto é parecido. Basta derivar ambos membros da última identidade usando a regra de derivação de funções compostas. O Exercício 32.12.7(b) pode servir de alguma ajuda aqui. R: $\dfrac{1}{1-x^2}$ para $|x| < 1$. ♣

32.13.4 Exercício: Determine uma fórmula explícita para cada uma das seguintes funções.

(a) $f(x) = \operatorname{arcsenh} x$. R: $\operatorname{arcsenh} y = \log(y + \sqrt{y^2+1}),\ \forall\, y \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Coloque x em evidência na equação:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(b) $f(x) = \operatorname{arccosh} x$. R: $\operatorname{arccosh} y = \log(y + \sqrt{y^2-1}),\ \forall\, y \geqslant 1$; ou $\operatorname{arccosh} y = \log(y - \sqrt{y^2-1}),\ \forall\, y \geqslant 1$.

Sugestão: Idem.

(c) $f(x) = \operatorname{arctgh} x$. R: $\operatorname{arctgh} y = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right),\ |y| < 1$.

Sugestão: Idem, observando neste caso que:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}.$$

♣

32.14 Algumas Médias Revisitadas

32.14.1 Exercício: Prove as seguintes propriedades:

(a) A função exponencial exp é convexa.

(b) A função logarítmica log é côncava. ♣

32.14.2 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário mas fixo. Considere um conjunto de n números positivos $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ tais que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

(a) Prove que se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são n números positivos quaisquer, $x_i > 0$, então:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log x_i \leqslant \log\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right).$$

(b) Em particular, $\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

(c) Forneça uma outra prova da desigualdade $G \leqslant M_1$, ou seja:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Sugestão: Use o item (b) anterior com $p_i = 1/n$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. ♣

32.15 A Integral de x^s com $s \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$: Coda

32.15.1 Exercício: Prove que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-(1-h)^s}{h} = s$$

Sugestão: Considere a função $f(x) = (1-x)^s$. Observe que, além de ser $f(0) = 1$, tem-se $f'(x) = -s(1-x)^{s-1}$ e portanto $f'(0) = -s$. Agora, reproduza este mesmo resultado usando a definição de derivada. ♣

32.15.2 Exercício: Prove que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-c^{s/n}}{1-c^{1/n}} = s$$

Sugestão: Considere a sequência definida como $a_n := 1 - c^{1/n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e também que:

$$\frac{1-c^{s/n}}{1-c^{1/n}} = \frac{1-\left(c^{1/n}\right)^s}{1-c^{1/n}} = \frac{1-\left(1-\left(1-c^{1/n}\right)\right)^s}{1-c^{1/n}} = \frac{1-(1-a_n)^s}{a_n} = f(a_n),$$

onde $f(h) := \dfrac{1-(1-h)^s}{h}$. Agora, um resultado conveniente estabelece que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{h\to 0} f(h)$ e pelo exercício anterior esse último limite vale s. ♣

32.15.3 Exercício: Finalmente, prove que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-c^{1/n}}{1-c^{(s+1)/n}} = \frac{1}{1+s}$$

Sugestão: Manipule a expressão dentro do limite de maneira tal que o resultado do exercício anterior possa ser utilizado:

$$\begin{aligned}\frac{1-c^{1/n}}{1-c^{(s+1)/n}} = \frac{1-c^{1/n}}{1-c^{1/n}c^{s/n}} &= \frac{1-c^{1/n}}{1-c^{1/n}c^{s/n}+c^{s/n}-c^{s/n}} \\ &= \frac{1-c^{1/n}}{\left(1-c^{s/n}\right)+\left(1-c^{1/n}\right)\, c^{s/n}} = \frac{1}{\dfrac{1-c^{s/n}}{1-c^{1/n}}+c^{s/n}}.\end{aligned}$$

Observe também que $c^{s/n} = (c^s)^{1/n} \to 1$ quando $n\to\infty$. ♣

Capítulo 33

Integração em Termos Elementares

33.1 Integral Indefinida e Primitivas

33.1.1 Definição: Uma função g que satisfaz $g' = f$ é denominada **primitiva** da f. Alguns autores empregam o termo **antiderivada** com o mesmo significado. ♣

33.1.2 Exemplo: O Teorema 30.1.2 garante que toda função contínua f possui uma primitiva, a saber:

$$F(x) = \int_a^x f.$$ ♣

33.1.3 Observação: **(a)** Seja g uma primitiva de alguma função f. Se $\mathbb{R} \ni c$ é uma constante arbitrária, então $g + c$ também é uma primitiva da f. Com efeito:

$$(g + c)' = g' + c' = f + 0 = f.$$

(b) Reciprocamente, se g e h são duas primitivas de f, tem-se que $g' = f = h'$. Portanto, deve existir alguma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g = h + c$. ♣

33.1.4 Definição: Se g é uma primitiva de f, ou seja, $g' = f$, então tal condição será denotada:

$$g = \int f.$$ ♣

Em outras palavras, o símbolo $\int f$ denota uma primitiva da f. Em vista da observação anterior, alguns autores empregam o mesmo símbolo para denotar mais precisamente o *conjunto* de todas as primitivas de f. Contudo, por exemplo se $f(x) = x$, seria desejável poder escrever identidades tais como:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2},$$

interpretando a identidade acima como uma relação de igualdade entre *funções* e não entre conjuntos de funções (o termo à direita acima é certamente uma função, não um conjunto de tais).

33.1.5 Observação: O símbolo $\displaystyle\int f$ costuma se denominar integral **indefinida** de f, por contraposição a $\displaystyle\int_a^b f$, a integral **definida**. ♣

33.2 Integração por Partes

33.2.1 Teorema (Integração por Partes)**:** *Se f' e g' são contínuas, então:*

(a) $\displaystyle\int f\,g' \;=\; f\,g - \int f'\,g.$

(b) $\displaystyle\int f(x)\,g'(x)\,dx \;=\; f(x)\,g(x) \;-\; \int f'(x)\,g(x)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \;=\; f(x)\,g(x)\Big|_a^b \;-\; \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$ □

Demonstração: **(a)** Observe que o enunciado estabelece que uma primitiva da função fg' pode ser obtida subtraindo do produto fg uma primitiva da função $f'g$. De fato, se h é uma primitiva de $f'g$, ou seja, $h' = f'g$, então tem-se:

$$(fg - h)' = (fg)' - h' = f'g + fg' - f'g = fg'.$$

Portanto, $fg - h$ é uma primitiva de fg'.

(b) Trata-se apenas de uma paráfrase do item (a) anterior.

(c) Segue trivialmente do item (a) ou (b) anteriores, aplicando o Corolário 30.1.3. ■

33.3 Integração por Substituição

33.3.1 Teorema (Fórmula de Substituição)**:** *Se f e g' são contínuas, então:*

(a) $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f \;=\; \int_a^b (f\circ g)\,g'.$

(b) $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \;=\; \int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx.$

(c) $\displaystyle\left(\int f\right)\circ g \;=\; \int (f\circ g)\,g'.$ □

Demonstração: **(a)** Pelo Teorema 30.1.2 toda função contínua possui (pelo menos) uma primitiva. Seja então h primitiva de f. Pelo Corolário 30.1.3 tem-se:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = h(g(b)) - h(g(a)).$$

Por outro lado, observe que:

$$(h \circ g)'(x) = h'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x),$$

ou seja, $h \circ g$ é uma primitiva de $(f \circ g)\, g'$. Portanto:

$$\int_a^b (f \circ g)\, g' = (h \circ g)(b) - (h \circ g)(a) = h(g(b)) - h(g(a)).$$

(b) Trata-se apenas de uma paráfrase do item (a) anterior.

(c) O membro direito da igualdade denota uma função cuja derivada é $(f \circ g)\, g'$. Por outro lado, dado que $\int f$ denota uma função cuja derivada é f, a derivada do membro esquerdo da igualdade é dada por $f(g(x)) \cdot g'(x)$, ou seja, $(f \circ g)\, g'$. ∎

Exercícios para o Capítulo 33

33.4 Integrais Imediatas

33.4.1 Exercício: Calcule as seguintes integrais apelando à lista de primitivas conhecidas. Alguma manipulação algébrica simples será necessária.

(a) $\displaystyle\int \left(5x^4 - \frac{5}{x^3} + x\right) dx.$ R: $x^5 + \frac{5}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^2.$

(b) $\displaystyle\int \left(\cos x + \frac{1}{x}\right) dx.$ R: $\operatorname{sen} x + \log x.$

(c) $\displaystyle\int (2x - \operatorname{sen} x + e^x)\, dx.$ R: $x^2 + \cos x + e^x.$

(d) $\displaystyle\int \left(x^{1/3} + x^{2/3}\right) dx.$ R: $\frac{3}{4}\, x^{4/3} + \frac{3}{5}\, x^{5/3}.$

(e) $\displaystyle\int \left(\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) dx.$ R: $\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\, x^{3/2} - x^{1/2}\right).$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{\sqrt{x}}\, dx.$ R: $2\left(\frac{1}{9}\, x^{9/2} + \frac{2}{5}\, x^{5/2} - x^{1/2}\right).$

(g) $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx.$ R: $\frac{1}{3}\, x^3 + \frac{3}{2}x^{2/3}.$

(h) $\displaystyle\int \left(\frac{4}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + 1\right) dx.$ R: $-8/\sqrt{x} + 1/x + x.$

(i) $\displaystyle\int \frac{3}{1+x^2}\, dx.$ R: $3 \operatorname{arctg} x.$

(j) $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$ R: $\operatorname{arcsen} x + x.$ ♣

33.5 Integração por Partes

33.5.1 Exercício: Calcule as seguintes integrais por partes:

(a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \, dx.$ R: $-x \cos x + \operatorname{sen} x.$

(b) $\displaystyle\int \log x \, dx.$ R: $x(\log x - 1).$

(c) $\displaystyle\int x^n \log x \, dx.$ R: $\displaystyle\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right).$ ♣

33.5.2 Exercício: Para calcular as seguintes integrais será necessário integrar por partes mais de uma vez:

(a) $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx.$ R: $(x^2 - 2x + 2)\, e^x.$

(b) $\displaystyle\int e^{-x} \cos x \, dx.$ R: $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)\, e^{-x}.$

Sugestão: Aqui também será necessário perceber um detalhe. ♣

33.6 Integração por Substituição

33.6.1 Exercício: Calcule as seguintes integrais por simples substituição, a maioria das quais pode ser feita mentalmente.

(a) $\displaystyle\int (x+1)^{-5/4} \, dx.$ R: $-4(x+1)^{-1/4}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, dx.$ R: $2\sqrt{x+1}.$

(c) $\displaystyle\int \cos^4 x \, \operatorname{sen} x \, dx.$ R: $-\frac{1}{5}\cos^5 x.$

(d) $\displaystyle\int 5x\sqrt{4 - x^2} \, dx.$ R: $-\frac{5}{3}\,(4 - x^2)^{3/2}.$

(e) $\displaystyle\int \cos(\omega x) \, dx.$ R: $\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega x).$

(f) $\displaystyle\int \cos(\omega x) \, d\omega.$ R: $\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\omega x).$ ♣

33.6.2 Exercício: Idem, apenas para o leitor ter certeza que captou a idéia.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)^{2/3}} \, dx.$ R: $-3\,(1-x)^{1/3}.$

(b) $\displaystyle\int x\,(1 + x^2) \, dx.$ R: $\frac{1}{4}(1 + x^2)^2.$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{5+2x^2}}\,dx.$ R: $\frac{3}{8}\,(5+2x^2)^{2/3}.$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(2x)\,\cos(2x)\,dx.$ R: $\frac{1}{8}\,\operatorname{sen}^4(2x).$

(e) $\displaystyle\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ R: $-\frac{1}{3}\,\arccos^3 x.$

(f) $\displaystyle\int x\,e^{x^2}\,dx.$ R: $\frac{1}{2}\,e^{x^2}.$

(g) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$ R: $2\,e^{\sqrt{x}}.$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,e^{1/x}\,dx.$ R: $-e^{1/x}.$

(i) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x}\,\cos x\,dx.$ R: $e^{\operatorname{sen} x}.$

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^{(4-5x)}}.$ R: $\frac{1}{5}\,e^{-(4-5x)}.$

(k) $\displaystyle\int \left(e^{x/a} \;-\; e^{-x/a}\right)^2\,dx.$ R: $\frac{a}{2}\,e^{2x/a} \;-\; 2x \;-\; \frac{a}{2}\,e^{-2x/a}.$

(l) $\displaystyle\int x\,2^{-2x^2/3}\,dx.$ R: $\frac{-3}{4\log 2}\,2^{-2x^2/3}.$

(m) $\displaystyle\int \frac{4^{(5-3/x)}}{x^2}\,dx.$ R: $\frac{1}{3\log 4}\,4^{5-3/x}.$

(n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\log x}.$ R: $\log(\log x).$

(o) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx.$ R: $\log(x^2+x+1).$

(p) $\displaystyle\int \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx.$ R: $\operatorname{sen}(\log x).$

(q) $\displaystyle\int \frac{\cos(3x)}{1+\operatorname{sen}^2(3x)}\,dx.$ R: $\frac{1}{3}\,\operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(3x)).$

(r) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\log^2 x}}.$ R: $\operatorname{arcsen}(\log x).$

(s) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$ R: $2\,[\sqrt{x} \;+\; \log(\sqrt{x}-1)].$ ♣

33.6.3 Exercício: Para calcular as seguintes integrais será necessário realizar várias substituições sequencialmente:

(a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$ R: $-2\log(\cos\sqrt{x}) = \log(\sec^2\sqrt{x})$ ♣

Embora não esteja errado fazer várias substituições seguidas, observe de passagem que duas, ou mais, delas podem ser combinadas apenas numa só. Nesse ponto deve ser acrescentado que perceber *a priori* qual é a substituição única que simplifica completamente o integrando poderia ser considerado como um exercício de super-intuição, beirando quase no paranormal, dependendo da integral em questão.

33.7 Substituições Trigonométricas

33.7.1 Exercício: A substituição $u = \operatorname{arctg} x$

Para calcular as seguintes integrais manipule o denominador, completando quadrados se necessário, e depois use a substituição trigonométrica do título do exercício.

(a) $\displaystyle\int \frac{3}{9+x^2}\,dx.$ R: $\operatorname{arctg}(x/3)$.

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-x+1}.$ R: $\displaystyle\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+29}.$ R: $\displaystyle\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{5}\right).$ ♣

33.7.2 Exercício: A substituição $u = \operatorname{arcsen} x$

Para calcular as seguintes integrais manipule o denominador, completando quadrados se necessário, e depois use a substituição trigonométrica do título do exercício.

(a) $\displaystyle\int \frac{10}{\sqrt{25-x^2}}\,dx.$ R: $10\operatorname{arcsen}(x/5)$. ♣

33.8 Substituições Hiperbólicas

33.8.1 Exercício: A substituição $u = \operatorname{arcsenh} x$

Para calcular as seguintes integrais manipule o denominador, completando quadrados se necessário, e depois use a substituição trigonométrica do título do exercício.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$ R: $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsenh} x + x\sqrt{1+x^2}\right).$

Sugestão: Aqui também será necessario lembrar a fórmula de redução para o coseno hiperbólico do Exercício 32.12.5. ♣

33.9 Funções Trigonométricas

33.9.1 Exercício: Calcule $\int \operatorname{tg} x \, dx$. R: $-\log(\cos x) = \log(\sec x)$.

Sugestão: basta apenas uma simples substituição. ♣

33.9.2 Exercício: Analogamente ao exercício anterior, calcule $\int \operatorname{cotg} x \, dx$. R: $\log(\operatorname{sen} x)$. ♣

33.9.3 Exercício: Calcule $\int \sec x \, dx$. R: $\log\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)^{1/2}$.

Sugestão: Use substituição, mas antes observe que:

$$\begin{aligned}\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} &= \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)} + \frac{1}{2}\frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)}.\end{aligned}$$ ♣

33.9.4 Exercício: Analogamente ao exercício anterior, calcule $\int \operatorname{cosec} x \, dx$.

R: $\log\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{1/2}$. ♣

33.10 Funções Trigonométricas Inversas

33.10.1 Exercício: Nas seguintes integrais, primeiro integre por partes e depois use substituição.

(a) $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$. R: $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$.

(b) $\int \arccos x \, dx$. R: $x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

(c) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$. R: $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) = x \operatorname{arctg} x + \log\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. ♣

33.11 Algumas Integrais Trigonométricas Curiosas

33.11.1 Exercício: **(a)** Calcule $\int \dfrac{1}{1+\cos x}\, dx$. R: $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$.

Sugestão: Começe integrando por partes a integral do item (b) imediatamente abaixo com $g' = \cos x$. Na nova integral resultante lembre que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = (1+\cos x)(1-\cos x)$ e por arte de mágica aparece a integral deste exercício junto com a primitiva!

(b) Calcule $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$. R: $\displaystyle x - \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$.

Sugestão: Observe que o numerador pode ser escrito como $\cos x = (1+\cos x) - 1$. Depois use o resultado do item anterior. ♣

33.11.2 Exercício: **(a)** Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$. R: $\displaystyle\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$.

Sugestão: Começe integrando por partes a integral do item (b) imediatamente abaixo com $g' = \cos x$. Na nova integral resultante lembre que $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = (1+\cos x)(1-\cos x)$ e por arte de mágica aparece a integral deste exercício junto com a primitiva!

(b) Calcule $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1-\cos x}\,dx$. R: $\displaystyle -x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1}$.

Sugestão: Observe que o numerador pode ser escrito como $\cos x = -(1-\cos x) + 1$. Depois use o resultado do item anterior. ♣

33.11.3 Exercício: Analogamente a qualquer um dos dois exercícios anteriores, calcule o seguinte par de integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$. R: $\displaystyle -\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$. R: $\displaystyle x + \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$. ♣

33.11.4 Exercício: As integrais seguintes podem ser calculadas analogamente ao exercício anterior, ou, alternativamente, fazendo uma substituição trivial e usando a paridade ímpar da função sen.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$. R: $\displaystyle\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$. R: $\displaystyle -x + \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$. ♣

33.11.5 Exercício: Verifique que $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x$ sem calcular a integral diretamente.

Sugestão: Observe que:

$$\operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{(1+\cos x)(1-\cos x)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\cos x}.$$

Agora, basta usar os resultados dos Exercícios 33.11.1(a) e 33.11.2(a). ♣

33.11.6 Exercício: Calcule $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}\,dx.$ R: $x - \operatorname{sen} x$.

Sugestão: Apenas simplifique o integrando, observando que:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = (1+\cos x)(1-\cos x).$$

♣

33.11.7 Exercício: Calcule $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}\,dx.$ R: $\displaystyle 2\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} - x$.

Sugestão: Simplifique o integrando com a mesma técnica que o exercício anterior, ou seja, observando que:

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = (1+\cos x)(1-\cos x).$$

Depois use os resultados do Exercício 33.11.1. ♣

33.11.8 Exercício: Considere a função $f(x) := \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$. Observe que, pelo exercício anterior, tem-se:

$$\int f^2(x)\,dx = 2\,f(x) - x.$$

Derivando a igualdade anterior, usando o primeiro Teorema Fundamental do Cálculo 30.1.2, tem-se que $f^2(x) = 2\,f'(x) - 1$, ou seja:

$$f' = \frac{f^2+1}{2}.$$

Portanto:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\int dx = \int \frac{f'(x)\,dx}{f^2+1}.$$

(a) Calcule a integral no membro direito na última igualdade acima.

Sugestão: Basta usar a simples substituição $u = f(x)$.

(b) Verifique que $f(x) = \operatorname{tg}(x/2)$.

(c) Em particular, isso prova a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.$$

Obviamente, isso pode ser provado também através de um cálculo direto:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} &= \frac{2\,\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}{1+\cos^2(x/2)-\operatorname{sen}^2(x/2)} = \frac{2\,\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}{1-\operatorname{sen}^2(x/2)+\cos^2(x/2)}\\ &= \frac{2\,\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2\,\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}{2\,\cos^2(x/2)} = \frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

(d) Como subproduto das identidades no enunciado, deduza o valor da seguinte integral:

$$\int \frac{\log(1+\cos x)}{1+\cos x}\,dx = [2+\log(1+\cos x)]\,\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \;-\; x.$$ ♣

33.11.9 Exercício: As integrais seguintes podem ser calculadas analogamente à primeira da lista.

(a) $\int \sqrt{1-\cos x}\,dx.$ R: $-2\sqrt{1+\cos x}.$

Sugestão: Basta uma simples substituição.

(b) $\int \sqrt{1+\cos x}\,dx.$ R: $2\sqrt{1-\cos x}.$

(c) $\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,dx.$ R: $2\sqrt{1+\operatorname{sen} x}.$

(d) $\int \sqrt{1+\operatorname{sen} x}\,dx.$ R: $-2\sqrt{1-\operatorname{sen} x}.$

Incidentalmente, observe que esta integral pode ser calculada de maneira alternativa a partir da integral do item (c) anterior, usando uma substituição trivial e a paridade ímpar da função sen. ♣

33.11.10 Exercício: As integrais dos produtos dos integrandos do exercício anterior, ou seja, integrais da forma:

$$\int \sqrt{1\pm\cos x}\,\sqrt{1\pm\operatorname{sen} x}\,dx,$$

podem ser reduzidas através da integração por partes ao cálculo de uma única integral desse tipo, que pode ser, digamos, a seguinte:

$$\int \sqrt{1+\cos x}\,\sqrt{1+\operatorname{sen} x}\,dx.$$

Tente calcular essa última integral. Isso não é nem um pouco dificil com o uso de certas identidades trigonométricas que, embora simples e conhecidas, o leitor poderia ter esquecido a esta altura. Em lugar de incluir aqui, como acostumado, a dica providencial a título de sugestão, será feita uma observação que talvez acrescente um pouco mais de mistério ao assunto. As quatro funções que aparecem no integrando em cada um dos itens do Exercício 33.11.9, respectivamente, satisfazem todas elas a equação diferencial:

$$4f'' + f = 0,$$

que, sendo de segunda ordem, pode ter *apenas duas* soluções linearmente independentes. Esse aparente paradoxo está relacionado com o cálculo da última integral no seguinte sentido: Se souber como explicar o primeiro, seguramente o leitor não terá inconveniente em determinar as identidades trigonométricas que devem ser usadas para o cálculo da segunda. ♣

33.12 Decomposição em Frações Simples

33.12.1 Exercício: Nas seguintes integrais, primeiramente descomponha o integrando em frações simples e depois aplique o método de integração apropriado para cada caso.

(a) $\displaystyle\int \frac{4x+1}{x^2-5x+6}\,dx.$ R: $\displaystyle\log\frac{(x-3)^{13}}{(x-2)^9}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}\,dx.$ R: $\displaystyle\log\frac{(x-2)^3}{x-1}.$

(c) $\displaystyle\int \frac{5x^2-2x+6}{x(x+4)(x-1)}\,dx.$ R: $\displaystyle\log\frac{(x+4)^{47/10}\,(x-1)^{18/10}}{x^{3/2}}.$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}.$ R: $\displaystyle\frac{1}{3}\left(\log(x+1)-\frac{\sqrt{3}}{6}\log\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right).$

Sugestão: Observe que $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. Para calcular a integral de uma das frações simples resultante, pode procurar inspiração no Exercício 33.7.1(b). ♣

33.13 Mundo Mix

33.13.1 Exercício: Para calcular as seguintes integrais será necessário uma combinação dos diferentes métodos de integração.

(a) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x\,\cos x\,dx.$ R: $(\operatorname{sen} x-1)\,e^{\operatorname{sen} x}.$

Sugestão: Primeiro use substituição e depois integre por partes.

(b) $\displaystyle\int \frac{x\,\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$ R: $-\operatorname{arcsen} x\,\sqrt{1-x^2}+x.$

Sugestão: Idem.

(c) $\displaystyle\int \log^3 x\,dx.$ R: $(\log^3 x-3\log^2 x+6\log x-6)\,x.$

Sugestão: Primeiro use substituição e depois integre por partes uma vez. Depois disso continue integrando por partes ou então parta para integrar usando o resultado do Exercício 33.5.2(a).

(d) $\displaystyle\int x^2\log^2 x\,dx.$ R: $\displaystyle\left(\frac{1}{3}\log^2 x-\frac{2}{3^2}\log x+\frac{2}{3^3}\right)x^3.$

Sugestão: Idem.

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}.$ R: $\displaystyle\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right).$

Sugestão: Rescreva o integrando observando que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x}.$$

Depois basta uma simples substituição, arrematando com uma descomposição em frações simples. Saberia o leitor esclarecer por que motivo a função f dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right)$$

é uma resposta *incorreta* para essa integral, embora sua derivada seja o integrando?

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$. R: $\displaystyle -\frac{1}{2} \log\left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)$.

Sugestão: Idem que o exercício anterior. Alternativamente, observe que o integrando pode ser transformado via a relação trigonométrica $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$. Depois basta usar uma substituição bem simples e o resultado do exercício anterior. Seria igualmente instrutivo observar que, no presente caso, a função f dada por:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}\right)$$

é uma resposta *incorreta* para essa integral, embora sua derivada seja o integrando. ♣

33.14 Fórmula de Redução para $\int x^n e^{ax}\, dx$

Quem tiver feito algum dos Exercícios 33.5.2(a) ou 33.13.1(a,c,d) seguramente terá encontrado algum caso particular da seguinte integral:

$$\int x^n e^{ax}\, dx, \tag{33.14.1}$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$. O objetivo do presente exercício consiste em determinar seu valor no caso general.

33.14.1 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{R} \ni a \neq 0$ arbitrários mas fixos. Estabeleça a seguinte **fórmula de redução**:

$$\int x^n e^{ax}\, dx = x^n \frac{e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, dx.$$

Sugestão: Integre por partes uma vez, com $g'(x) = e^{ax}$. ♣

33.14.2 Exercício: Calcule explícitamente a seguinte fórmula para o valor da primitiva:

$$\int x^n e^{ax}\, dx = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{-1}{a}\right)^k x^{n-k}\right] \frac{e^{ax}}{a}.$$

Existem pelo menos três maneiras de fazer isso. Escolha a que preferir:

(a) Continue integrando por partes na fórmula de redução do exercício anterior.

(b) Integre aplicando n vezes a fórmula de redução do exercício anterior.

(c) Use indução em n.

Existe ainda uma outra maneira, destacada no próximo exercício. ♣

Incidentalmente, observe que, como caso particular da fórmula do exercício anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}\int x^n\, e^{-ax}\,dx &= \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{-1}{-a}\right)^k x^{n-k}\right]\frac{e^{-ax}}{-a}\\ &= -\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{x^{n-k}}{a^k}\right]\frac{e^{-ax}}{a}\\ &= -\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\,(ax)^{n-k}\right]\frac{e^{-ax}}{a^{n+1}}.\end{aligned}$$

33.14.3 Exercício: Verifique o resultado do exercício anterior, derivando a expressão obtida. ♣

33.14.4 Exercício: Através de substituições adequadas, reduça o cálculo das seguintes integrais ao de uma integral da forma (33.14.1).

(a) $\displaystyle\int x^a \log^m x\,dx$, com $m \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{R} \ni a \neq -1$.

Observação: No caso $a = -1$ a integral fica bem simples, sendo igual a $\dfrac{\log^{m+1} x}{m+1}$. ♣

Capítulo 34

Integrais Impróprias

34.1 Integrais Impróprias de Primeira Espécie

34.1.1 Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$. Se a integral $\int_a^b f$ existe para todo $b \geqslant a$, então define-se a **integral imprópria de primeira espécie** como:

$$\int_a^\infty f := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f.$$

Quando o limite acima existe se diz que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, se diz que a integral imprópria **não-converge** ou que **diverge**. ♣

34.1.2 Exemplo: Seja $s \in \mathbb{R}$. Então, a integral $\displaystyle\int_1^\infty x^{-s}\,dx$ é convergente, com valor $\dfrac{1}{s-1}$, se e somente se $s > 1$.

Com efeito, no caso $s \neq 1$ tem-se:

$$\int_1^R x^{-s}\,dx = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_1^R = \frac{R^{-s+1}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} = \frac{1}{s-1} - \frac{R^{-s+1}}{s-1} = \frac{1}{s-1}\left[1 - e^{(1-s)\log R}\right].$$

Portanto:

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R x^{-s}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1}, & \text{se } 1-s<0;\\ \infty, & \text{se } 1-s>0. \end{cases}$$

No caso $s = 1$ tem-se:

$$\int_1^R x^{-s}\,dx = \log x\big|_1^R = \log R - \log 1 = \log R.$$

Portanto, a integral é claramente divergente neste caso. ♣

34.1.3 Definição: Analogamente, dado $a \in \mathbb{R}$, se a integral $\int_b^a f$ existe para todo $b \leqslant a$, então define-se:

$$\int_{-\infty}^{a} f := \lim_{R \to -\infty} \int_R^a f. \qquad \clubsuit$$

34.1.4 Definição: Se as integrais $\int_a^\infty f$ e $\int_{-\infty}^a f$ existem ambas para algum $a \in \mathbb{R}$, então define-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f := \int_{-\infty}^{a} f + \int_a^\infty f. \qquad \clubsuit$$

34.1.5 Exemplo: Seja $a \in \mathbb{R}$. Então, a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\, dx$ é convergente, com valor $2/a$, se $a > 0$.

Com efeito, se $a > 0$ tem-se:

$$\int_0^R e^{-a|x|}\, dx = \int_0^R e^{-ax}\, dx = \left.\frac{e^{-ax}}{-a}\right|_0^R = \frac{e^{-aR}}{-a} - \frac{1}{-a} = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) \xrightarrow[R \to \infty]{} \frac{1}{a}.$$

Analogamente prova-se que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-a|x|}\, dx = \frac{1}{a}$, de onde segue o afirmado. $\clubsuit$

34.1.6 Exemplo: A integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ não existe, mas $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} x\, dx$ existe (com valor igual a zero, neste caso). $\clubsuit$

34.2 Alguns Critérios de Convergência

34.2.1 Lema: *Suponha que:*

1. $\displaystyle\int_a^b f$ *existe para todo* $b \geqslant a$.
2. $0 \leqslant f(x)$, *para todo* $x \geqslant a$.

Então, a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f$ *converge se e somente se existe* $M > 0$ *tal que* $\displaystyle\int_a^b f \leqslant M$, *para todo* $b \geqslant a$. □

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se $\displaystyle\int_a^\infty f$ converge, então a sequência $a_n := \displaystyle\int_a^{a+n} f$ é limitada. Ou seja, existe $M > 0$ tal que $\displaystyle\int_a^{a+n} f \leqslant M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $b \geqslant a$, então $a \leqslant b < a + n_0$, para algum

$n_0 \in \mathbb{N}$. Portanto:

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^{a+n_0} f \leqslant M,$$

onde a primeira desigualdade segue do fato que $f \geqslant 0$.

$(\Leftarrow)$ A sequência $a_n := \displaystyle\int_a^{a+n} f$ é não-decrescente, pois $f \geqslant 0$, e limitada superiormente, por M. Portanto, converge. ∎

34.2.2 Lema (Convergência Dominada): *Suponha que:*

1. $\displaystyle\int_a^b f$ *existe para todo* $b \geqslant a$.
2. $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, *para todo* $x \geqslant a$.
3. $\displaystyle\int_a^\infty g$ *converge.*

Então, a integral imprópria $\displaystyle\int_a^\infty f$ *também converge e tem-se que* $\displaystyle\int_a^\infty f \leqslant \int_a^\infty g$. □

Demonstração: Observe que, pela segunda condição, tem-se:

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g \leqslant \int_a^\infty g.$$

Portanto, basta tomar $M \geqslant \int_a^\infty g$ no lema anterior. ∎

34.2.3 Lema (Critério de Comparação): *Suponha que:*

1. $\displaystyle\int_a^b f$ e $\displaystyle\int_a^b g$ *existem para todo* $b \geqslant a$.
2. $f(x) \geqslant 0$ e $g(x) > 0$, *para todo* $x \geqslant a$.
3. *Existe* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =: c$.

Então:

(a) *Se* $c \neq 0$, *então as integrais impróprias* $\displaystyle\int_a^\infty f$ e $\displaystyle\int_a^\infty g$, *ou bem convergem ambas, ou bem divergem ambas.*

(b) *Se* $c = 0$, *então somente pode-se concluir que a convergência de* $\displaystyle\int_a^\infty g$ *implica a convergência de* $\displaystyle\int_a^\infty f$. □

Demonstração: **(a)** Se $c \neq 0$, então deve ser $c > 0$, pela condição 2 acima. Pela condição 3 tem-se que para todo $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \epsilon \Longleftrightarrow -\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - c < \epsilon \Longleftrightarrow c - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < c + \epsilon.$$

Portanto, tomando, por exemplo, $\epsilon = c/2 > 0$ tem-se:

$$x \geqslant N(c/2) \Rightarrow c - c/2 < \frac{f(x)}{g(x)} < c + c/2 \Rightarrow 0 < \frac{c}{2}\, g(x) < f(x) < \frac{3c}{2}\, g(x).$$

Observe que na última relação acima foi usado o fato que $g(x) > 0$ como também $c > 0$. Desta maneira, o afirmado segue da última relação acima, usando o resultado de convergência dominada, ou seja, o Lema 34.2.2.

(b) Analogamente ao caso anterior, mas tomando agora $\epsilon = 1$, tem-se que:

$$x \geqslant N(1) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \Rightarrow 0 \leqslant f(x) < g(x).$$

Desta maneira, o afirmado segue da última relação acima, usando convergência dominada, ou seja, o Lema 34.2.2. ∎

34.2.4 Exemplo: Seja $s \in \mathbb{R}$. Então, a integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\, x^s\, dx$ é convergente, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Com efeito, tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}\, x^s}{x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+2}}{e^x} = 0.$$

Observe que a integral $\displaystyle\int_1^\infty x^{-2}\, dx$ é convergente, segundo o Exemplo 34.1.2. Portanto, o afirmado segue usando a segunda parte do critério de comparação, Lema 34.2.3(b). ♣

Os criterios apresentados na presente seção aplicam-se apenas para funções não-negativas, $f \geqslant 0$. Portanto, para uma função f arbitrária, os critérios podem ser aplicados a $|f|$.

34.2.5 Definição: Se f é uma função, define-se a sua **parte positiva** f_+ como:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geqslant 0; \\ 0, & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Analogamente, define-se a **parte negativa** f_- como:

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x) \leqslant 0; \\ 0, & \text{se } f(x) > 0. \end{cases}$$

Observe que as funções $f_\pm$ assim definidas resultam ambas não-negativas, $f_\pm \geqslant 0$. ♣

34.2.6 Lema: *Se a integral imprópria de $|f|$ converge, então a respectiva integral imprópria para f também converge.* □

Demonstração: Observe que $0 \leqslant f_{\pm} \leqslant f_{+} + f_{-} = |f|$. Portanto, pelo critério de convergência dominada 34.2.2, as integrais impróprias das funções $f_{\pm}$ são ambas convergentes. Como $f = f_{+} - f_{-}$, segue que a integral imprópria da f também resulta convergente, pois é a soma de duas integrais impróprias convergentes. ∎

34.3 Integrais Impróprias de Segunda Espécie

34.3.1 Definição: Seja f definida em $(a, b]$. Se a integral $\int_x^b f$ existe para todo $a < x \leqslant b$, então define-se a **integral imprópria de segunda espécie** como:

$$\int_{a^+}^{b} f := \lim_{x \to a^+} \int_x^b f.$$

Quando o limite acima existe se diz que a integral imprópria **converge**. Caso contrário, se diz que a integral imprópria **não-converge** ou que **diverge**. ♣

34.3.2 Exemplo: Seja $b > 0$. Então, a integral $\displaystyle\int_{0^+}^{b} x^{-s}\, dx$ é convergente, com valor $\dfrac{b^{1-s}}{1-s}$, se e somente se $s < 1$.

Com efeito, observe que a função $f(x) = x^{-s} = e^{-s\ \log x}$, está definida para $x > 0$ e tem-se:

$$\int_x^b f = \int_x^b u^{-s}\, du = \begin{cases} \dfrac{b^{1-s} - x^{1-s}}{1-s}, & \text{se } s \neq 1; \\ \log b - \log x, & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

Observe que $x^{1-s} = e^{(1-s)\ \log x}$ converge com limite finito (igual a zero, neste caso) quando $x \to 0^+$, se e somente se $1 - s > 0 \iff s < 1$.

Uma outra maneira de provar a convergência, consiste em calcular a integral valendo-se da substituição $y = 1/u$ da seguinte maneira:

$$\int_x^b u^{-s}\, du = \int_{1/x}^{1/b} \left(\frac{1}{y}\right)^{-s} \left(-y^{-2}\right)\, dy = -\int_{1/x}^{1/b} y^{s-2}\, dy = \int_{1/b}^{1/x} y^{s-2}\, dy.$$

Portanto:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{1/b}^{1/x} y^{s-2}\, dy = \lim_{R \to \infty} \int_{1/b}^{R} y^{s-2}\, dy.$$

Pelo Exemplo 34.1.2, o limite acima existe se e somente se $s - 2 < -1 \iff s < 1$. ♣

34.3.3 Exemplo: A função $f(x) = x^{-3/4}$, para $0 < x \leqslant 1$, tem área finita, mas o volume do sólido de revolução gerado é infinito.

Com efeito, pelo exemplo anterior, a integral:

$$\int_{0^+}^{1} x^{-3/4}\, dx$$

converge, mas o volume do sólido de revolução, dado pela integral:

$$\pi \int_{0^+}^{1} \left[x^{-3/4}\right]^2 dx = \pi \int_{0^+}^{1} x^{-3/2}\, dx,$$

é divergente. ♣

34.4 A Função Gamma

34.4.1 Lema: *A seguinte integral:*

$$\int_{0^+}^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt := \int_{0^+}^{1} e^{-t} t^{s-1}\, dt + \int_{1}^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt,$$

converge para todo $s > 0$. □

Demonstração: A segunda integral no lado direito acima é convergente para todo $s \in \mathbb{R}$, em virtude do Exemplo 34.2.4. Portanto, basta provar a convergência da primeira integral. Utilizando a substituição $t = 1/u$ tem-se:

$$\int_{x}^{1} e^{-t} t^{s-1}\, dt = \int_{1/x}^{1} e^{-1/u} u^{1-s} (-u^{-2})\, du = -\int_{1/x}^{1} e^{-1/u} u^{-s-1}\, du = \int_{1}^{1/x} e^{-1/u} u^{-s-1}\, du.$$

De onde segue que:

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{1}^{1/x} e^{-1/u} u^{-s-1}\, du = \lim_{R \to \infty} \int_{1}^{R} e^{-1/u} u^{-s-1}\, du$$

Agora, observe que $0 \leqslant e^{-1/u} u^{-s-1} \leqslant u^{-s-1} = u^{-(s+1)}$. Portanto, utilizando a convergência dominada do Lema 34.2.2 com a função do Exemplo 34.1.2, tem-se que o último limite acima existe para todo $s + 1 > 1 \iff s > 0$. ∎

34.4.2 Definição: Define-se a **função gamma** $\Gamma(s)$ para $s > 0$ como a integral:

$$\Gamma(s) := \int_{0^+}^{\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt, \ \ \forall\, s > 0;$$

cuja convergência é garantida pelo resultado anterior. ♣

Exercícios para o Capítulo 34

34.5 Integrais Impróprias de Primeira Espécie

34.5.1 Exercício: Determine se cada uma das seguintes integrais impróprias converge ou não. Em caso afirmativo, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx.$ R: 1/2.

(b) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$ R: Diverge como $2(\sqrt{R}-2)$.

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\, dx.$ R: Diverge como $\operatorname{sen} R$.

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\, dx.$ R: 2.

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx.$ R: Diverge como $2(\sqrt{R+1}-1)$. ♣

34.5.2 Exercício: **(a)** Verifique a convergência de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$

Sugestão: A integral em questão pode ser expressada como

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_0^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

A primeira integral no termo direito resulta elementar. Por outro lado, observe que para $x > 0$ tem-se:

$$0 < x^2 < 1 + x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2}.$$

Desta maneira, na segunda integral o critério de convergência dominada do Lema 34.2.2 pode ser combinado com o resultado do Exemplo 34.1.2.

(b) Verifique a convergência de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$

Sugestão: Basta usar a definição de integral imprópria e o resultado do item anterior. ♣

34.5.3 Exercício: Suponha que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ existe. Então:

(a) A existência e o valor da integral independem do ponto a em questão.

(b) O limite $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f$ existe, com valor igual ao da integral. Observe que a recíproca deste resultado não é válida, como mostra o Exemplo 34.1.6. ♣

34.6 Integrais Impróprias de Segunda Espécie

34.6.1 Exercício: Verifique se cada uma das seguintes integrais impróprias existe, ou seja, se admite um valor finito. Em caso afirmativo, calcule o valor da integral.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^{-1/3}\,dx.$ R: 3/2.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x+1)^{5/4}\,dx.$ R: 4/9.

(c) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^{-4/3}\,dx.$ R: Diverge como $3\left(\frac{1}{\epsilon^{1/3}}-1\right)$ para $\epsilon\to 0^+$.

(d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^{2/3}}\,dx.$ R: 6.

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx.$ R: 1/2. ♣

34.6.2 Exercício: **(a)** Verifique a convergência da integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$

Sugestão: Integrando por partes tem-se:

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\cos a}{a}-\frac{\cos b}{b}-\int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

(b) Prove que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)t}{\operatorname{sen}(t/2)}\,dt=\pi.$

(c) Prove que $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi \operatorname{sen}(\lambda+1/2)\,t\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{\operatorname{sen}(t/2)}\right]dt=0.$

Sugestão: O termo entre colchetes é limitado (por quê?) e pode ser aplicado o Lema de Riemann-Lebesgue 31.11.1(c).

(d) Utilizando a substituição $u=(\lambda+1/2)t$ e o item (b) anterior, prove que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$ ♣

34.7 Algumas Fórmulas de Redução

34.7.1 Exercício: Fórmula de redução para $(1-x^2)^n$

(a) Integrando por partes, prove a seguinte fórmula de redução (embora não pareça):

$$\int (1-x^2)^n\,dx = (1-x^2)^n\,x \;+\; 2n\int x^2(1-x^2)^{n-1}\,dx.$$

(b) Usando a fórmula de redução do item anterior tantas vezes como necessário, prove que:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = 2n\,\frac{2(n-1)}{3}\,\frac{2(n-2)}{5}\,\cdots\,\frac{4}{2n-3}\,\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$ ♣

34.7.2 Exercício: Fórmula de redução para $(1+x^2)^{-n}$

(a) Prove a seguinte fórmula de redução:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} \;+\; \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Sugestão: Observe que:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \;-\; \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n}.$$

(b) Usando a fórmula de redução do item anterior tantas vezes como necessário, prove que:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\,\cdots\,\frac{2n-3}{2n-2}.$$ ♣

34.7.3 Exercício: Fórmula de redução para $\cos^n x$

(a) Integrando por partes, prove a seguinte fórmula de redução:

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x\,\cos^{n-1} x}{n} \;+\; \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$ ♣

34.7.4 Exercício: Fórmula de redução para $\operatorname{sen}^n x$

(a) Integrando por partes, prove a seguinte fórmula de redução:

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\cos x\,\operatorname{sen}^{n-1} x}{n} \;+\; \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, seja $I(k)$ definido como:

$$I(k) := \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^k x\,dx.$$

Prove que $I(0) = \pi/2$ e $I(1) = 1$, como também a seguinte relação de recorrência:

$$I(k) = \prod_{i=1}^{l} \frac{k-(2i-1)}{k-2(i-1)}\, I(k-2l)$$

para todo $l \in \mathbb{N}$ tal que $k - 2l \geqslant 0$.

(c) Usando a relação de recorrência do item anterior, prove que:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\,\cdots\,\frac{2n-1}{2n}.$$

(d) Idem, mas agora para exponente ímpar:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{7}\,\cdots\,\frac{2n}{2n+1}.$$

♣

34.7.5 Exercício: Uma fórmula para o cálculo de π

(a) Utilizando os resultados do exercício anterior, prove que:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx} \left(\frac{2}{1}\,\frac{4}{3}\,\frac{6}{5}\,\cdots\,\frac{2n}{2n-1}\,\frac{1}{2n+1}\right)^2 2n+1.$$

(b) Prove que:

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx} \leqslant 1 + \frac{1}{2n}.$$

Sugestão: $0 < x < \pi/2 \Rightarrow 0 < \operatorname{sen}^{2n+1} x = \operatorname{sen}^{2n} x \operatorname{sen} x < \operatorname{sen}^{2n} x$.

(c) Conclua que:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1}\,\frac{4}{3}\,\frac{6}{5}\,\cdots\,\frac{2n}{2n-1}\,\frac{1}{2n+1}\right)^2 2n+1.$$

(d) Utilizando o resultado do item anterior, verifique adicionalmente que:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{1}\,\frac{4}{3}\,\frac{6}{5}\,\cdots\,\frac{2n}{2n-1}\right).$$

♣

34.8 Integrais Gaussianas

34.8.1 Exercício: **(a)** Prove que $1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$, para todo $x > 0$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$(1-x^2)^n \leqslant e^{-nx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^n},$$

onde a primeira desigualdade vale para todo $0 < x < 1$, entanto que a segunda vale para todo $x > 0$.

(b) Utilizando o resultado do item anterior, prove que:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} \, du$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} \, du \leqslant \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

(c) Finalmente, combinando o resultado do item anterior com os resultados da seção anterior, conclua que:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Além de importantes aplicações na Estatística, por exemplo, este resultado é particularmente notável, pois a função $f(x) = e^{-x^2}$ não pode ser integrada em termo de funções elementares, embora o valor da integral *indefinida* acima possa ser calculado exatamente. ♣

34.8.2 Exercício: Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $E(X^n)$ definido como:

$$E(X^n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, e^{-x^2/2} \, dx.$$

Resulta fácil deduzir que $E(X^{2n+1}) = 0$ apelando a argumentos de paridade. O caso de n par é abordado no presente exercício.

(a) Usando o exercício anterior verifique que no caso $n = 0$ tem-se $E(X^0) = 1$.

(b) Integrando por partes verifique a seguinte fórmula de redução:

$$\int x^{2n} \, e^{-x^2/2} \, dx = -x^{2n-1} \, e^{-x^2/2} \; + \; (2n-1) \int x^{2n-2} \, e^{-x^2/2} \, dx.$$

(c) Utilizando a fórmula de redução do item anterior verifique a relação de recorrência $E(X^{2n}) = (2n-1)\, E(X^{2n-2})$.

(d) Prove por indução em n que $E(X^{2n}) = (2n-1)(2n-3)\cdots 1$.

(e) Finalmente, conclua que $E(X^{2n}) = \dfrac{(2n)!}{2^n \, n!}$.

34.9 Propriedades Elementares da Função Gamma

34.9.1 Exercício: A função Gamma possui a propriedade de interpolar os valores do fatorial, como mostra o presente exercício.

(a) Integrando por partes, verifique que $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, para todo $x > 0$.

(b) Através de um cálculo direto, verifique que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Prove que $\Gamma(n) = (n-1)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Use indução em n, observando que o caso $n = 1$ é o resultado do item anterior. A validade do passo indutivo segue trivialmente do item (a) acima.

(d) Em particular, se n é par, então $\Gamma(n/2+1) = (n/2)!$. ♣

34.9.2 Exercício: **(a)** Verifique que:

$$\Gamma(x) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-u^{1/x}}\,du.$$

Sugestão: Utilize a substituição $u = t^x$.

(b) Utilizando o valor da integral gaussiana calculado na seção anterior, conclua que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(c) No caso em que n é ímpar, verifique a fórmula:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n!!}{2^{(n+1)/2}}\sqrt{\pi}.$$

Aqui, o **fatorial duplo** é definido como $n!! := n(n-2)(n-4)\cdots 1$. ♣

34.10 Transformada de Fourier

34.10.1 Definição: Se f é integrável em $\mathbb{R}$ define-se a sua **transformada de Fourier** $\mathcal{F}[f]$ como:

$$\mathcal{F}[f](\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\,dx.$$

34.10.2 Exercício: **(a)** Integrando por partes e assumindo que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, verifique que $\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda)$.

(b) Derivando formalmente sob a integral, verifique que $\mathcal{F}[f]^{(n)} = (-i)^n \mathcal{F}[x^n f(x)]$. ♣

34.10.3 Exercício: Calcule a transformada de Fourier das seguintes funções:

(a) $f(x) = e^{-x^2/2}$. R: $\mathcal{F}[f](\lambda) = e^{-\lambda^2/2}$.

(b) $f(x) = x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta}$, para $x > 0$. R: $\mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(1 + i\lambda\beta)^{-\alpha}\,\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)$. ♣

Capítulo 35

Aproximação Mediante Funções Polinômicas

35.1 Polinômios de Taylor

35.1.1 Definição: Uma função f é denominada de **classe C^n** se f é n vezes diferenciável e a derivada n-ésima $f^{(n)}$ é contínua.

Se f é de classe C^n, então denota-se $f \in C^n$. ♣

Também será convencionalmente denotado $f^{(0)} := f$.

35.1.2 Lema: *Seja $f \in C^n$ no intervalo $[a, x]$. Se P é um polinômio de grau n tal que $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, então:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demonstração: Aplicando a regra de L'Hôpital n vezes tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) \; - \; P(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a} \frac{f'(x) \; - \; P'(x)}{n\,(x-a)^{n-1}} \\
&= \cdots \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x) \; - \; P^{(n)}(x)}{n\,(n-1)\cdots 2\cdot 1} \\
&= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(a) \; - \; P^{(n)}(a)\right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(a) \; - \; f^{(n)}(a)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A antepenúltima igualdade acima segue da continuidade de $f^{(n)}$ em a. ∎

O seguinte resultado é apenas uma variante do anterior que dispensa a continuidade de $f^{(n)}$, mas restringe a escolha do polinômio P.

35.1.3 Lema: *Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja f uma função tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existem todas elas. Seja P polinômio de grau n tal que $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, sujeito à condição adicional:*

$$P(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \; + \; \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \; + \; \textit{termos de ordem inferior.}$$

Então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0. \qquad \square$$

Demonstração: Observe que:

$$P^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(a)\,(x-a) \; + \; f^{(n-1)}(a).$$

Aplicando a regra de L'Hôpital $n-1$ vezes tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x) \; - \; P(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - P'(x)}{n\,(x-a)^{n-1}} \\
&= \cdots \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) \; - \; P^{(n-1)}(x)}{n\,(n-1)\cdots 2\,(x-a)} \\
&= \frac{1}{n!}\left(\lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \; - \; f^{(n)}(a) \right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(a) \; - \; f^{(n)}(a) \right) \\
&= 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Um caso particular na escolha do polinômio P de grande importância é consagrado na próxima definição.

35.1.4 Definição: Seja f uma função tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existem todas elas. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $P_{n,a,f}$ o polinômio de grau n definido como:

$$\begin{aligned}
P_{n,a,f}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \\
&= f(a) \; + \; f'(a)\,(x-a) \; + \; \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 \; + \; \ldots \\
&\qquad + \; \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\,(x-a)^{n-1} \; + \; \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n.
\end{aligned}$$

O polinômio $P_{n,a,f}$ recebe o nome **polinômio de Taylor de ordem** n **para** f **em** a e será denotado simplesmente $P_{n,a}$ sem referência à função f, quando não houver ambiguidade. ♣

35.1.5 Lema: *Seja f uma função tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existem todas elas. Então:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demonstração: Observe que para todo $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ tem-se:

$$P_{n,a,f}^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \, k\,(k-1) \cdots (k-j+1)\,(x-a)^{k-j}.$$

Em particular, se $x = a$ o único termo não-nulo corresponde ao valor $k = j$, ou seja:

$$P_{n,a,f}^{(j)}(a) = \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \, j\,(j-1) \cdots 1 = \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \, j! = f^{(j)}(a).$$

Desta maneira, o resultado segue diretamente do Lema 35.1.3. ∎

35.2 Caraterização Unívoca do Polinômio de Taylor

Nesta seção será verificado que a condição adicional sobre P do Lema 35.1.3 não é demasiado restrictiva. De fato, existe básicamente apenas uma escolha possível para um polinômio garantir o resultado do Lema 35.1.5.

35.2.1 Definição: Duas funções f e g são denominadas **iguais até a ordem** n **em** a se:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

♣

35.2.2 Exemplo: Seja f uma função tal que $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ existem todas elas. Então, pelo Lema 35.1.5 anterior, tem-se que f e $P_{n,a,f}$ são iguais até a ordem n em a. ♣

35.2.3 Lema: *Sejam P e Q dois* polinômios *em $(x-a)$ de grau menor ou igual a n. Suponha que P e Q são iguais até a ordem n em a. Então:*

(a) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^k} = 0$, *para todo $k = 0, 1, \ldots, n$.*

(b) *Mais ainda, deve ser $P = Q$.*

Demonstração: Para simplificar a notação, seja $R := P - Q$.

(a) Observe que:

$$\frac{R(x)}{(x-a)^k} = \frac{R(x)}{(x-a)^n}\,(x-a)^{n-k} = \frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^n}\,(x-a)^{n-k}.$$

No termo à direita acima, o primeiro fator converge a zero quando x tende para a, por hipótese. O segundo fator também converge a zero se $n-k>0$, ou vale 1 no caso $n-k=0$.

(b) Basta provar que $R=0$. Para tanto, suponha que:

$$R(x) = b_0 \;+\; b_1\,(x-a) \;+\; b_2\,(x-a)^2 \;+\; \cdots \;+\; b_n\,(x-a)^n.$$

Pelo item anterior com $k=0$ tem-se:

$$0 = \lim_{x\to a} R(x) = b_0.$$

Ou seja, deve ser:

$$R(x) = b_1\,(x-a) \;+\; b_2\,(x-a)^2 \;+\; \cdots \;+\; b_n\,(x-a)^n.$$

Portanto, usando mais uma vez o item anterior mas desta vez com $k=1$ tem-se:

$$0 = \lim_{x\to a}\frac{R(x)}{x-a} = b_1.$$

Desta maneira, a mesma técnica pode ser empregada iterativamente n vezes para provar que $b_k=0$, para todo $k=0,1,2,\ldots,n$, ou seja, $R=0$. ∎

O próximo resultado caracteriza o polinômio de Taylor de ordem n para f em a como o *único* polinômio de grau n igual a f até ordem n em a.

35.2.4 Lema: *Seja f diferenciável n vezes em a. Suponha que P é um polinômio em $(x-a)$, com grau não maior que n, igual a f até a ordem n em a. Então deve ser $P = P_{n,a,f}$.* □

Demonstração: Pelo Lema 35.1.5 o polinômio de Taylor $P_{n,a,f}$ de ordem n para f em a é igual a f até a ordem n em a. Se P é um outro polinômio com tais propriedades, então tem-se:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{P(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x\to a}\frac{P(x)-f(x)+f(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{P(x)-f(x)}{(x-a)^n} \;+\; \lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0 \;+\; 0 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema 35.2.3(b) deve ser $P = P_{n,a,f}$. ∎

35.3 Expressões para o Resto

35.3.1 Definição: Define-se o **resto** $R_{n,a,f}$ de ordem n para f em a pela identidade:

$$f(x) = P_{n,a,f}(x) \;+\; R_{n,a,f}(x),$$

ou seja:

$$R_{n,a,f}(x) = f(x) \; - \; P_{n,a,f}(x) = f(x) \; - \; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

O resto será denotado simplesmente $R_{n,a}$ sem referência à função f, quando não houver ambigüidade. ♣

35.3.2 Lema: *Seja f tal que todas as derivadas de ordem $n+1$ existem em $[a, x]$. Considere a função $F(t)$ definida para todo t em $[a, x]$ pela expressão:*

$$F(t) = f(t) \; + \; \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Então:

(a) *F é contínua e diferenciável em $[a, x]$ com:*

$$F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

(b) $F(a) = P_{n,a,f}(x)$.

(c) $F(x) = f(x)$. □

Demonstração: **(a)** A função F resulta obviamente contínua pois f é $n+1$ vezes diferenciável e *ipso facto* tem-se:

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) \; + \; \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\,(x-t)^k \; + \; \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\,(-1)\,k\,(x-t)^{k-1} \\ &= f'(t) \; + \; \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\,(x-t)^k \; - \; f'(t) \; - \; \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}\,(x-t)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\,(x-t)^k \; - \; \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}\,(x-t)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\,(x-t)^k \; - \; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\,(x-t)^k \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n. \end{aligned}$$

(b) Observe que:

$$F(a) = f(a) \; + \; \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k = P_{n,a,f}(x).$$

(c) Analogamente, neste caso tem-se:

$$F(x) = f(x) \; + \; \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\,(x-x)^k = f(x) \; + \; 0 = f(x).$$ ∎

35.3.3 Lema: *Seja f tal que todas as derivadas de ordem $n+1$ existem em $[a,x]$. Seja G qualquer função contínua em $[a,x]$ e diferenciável em (a,x). Então, para algum t em (a,x) tem-se:*

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,\frac{G(x)-G(a)}{G'(t)}. \qquad \square$$

Demonstração: Com a mesma notação do lema anterior, observe que:

$$R_{n,a}(x) = f(x) \ - \ P_{n,a}(x) = F(x) \ - \ F(a).$$

Por outro lado, pelo Teorema de valor médio de Cauchy 23.2.8 existe algum t em (a,x) tal que:

$$[F(x)-F(a)]\,G'(t) = [G(x)-G(a)]\,F'(t).$$

Portanto, para algum t em (a,x) tem-se:

$$R_{n,a,f}(x) = F(x) \ - \ F(a) = F'(t)\,\frac{G(x)-G(a)}{G'(t)} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,\frac{G(x)-G(a)}{G'(t)}. \qquad \blacksquare$$

35.3.4 Corolário: *Sob as hipóteses do lema anterior, para algum t em (a,x) tem-se:*

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!\,p}\,(x-t)^{n+1-p}\,(x-a)^p. \qquad \square$$

Demonstração: Seja $p \in \mathbb{N}$. Se $G(t) = (x-t)^p$, então:

$$G(x) = 0,$$
$$G(a) = (x-a)^p,$$

como também:

$$G'(t) = -p\,(x-t)^{p-1}.$$

Portanto, pelo lema precedente tem-se:

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,\frac{-(x-a)^p}{-p(x-t)^{p-1}} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!\,p}\,(x-t)^{n-p+1}\,(x-a)^p. \qquad \blacksquare$$

35.3.5 Teorema (de Taylor)**:** *Seja f tal que todas as derivadas de ordem $n+1$ existem em $[a,x]$. Se $R_{n,a,f}$ é o resto de ordem n para f em a, então:*

(a) **Forma de Lagrange do resto:** *Para algum t em (a,x) tem-se:*

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}.$$

(b) **Forma de Cauchy do resto:** *Para algum t em (a,x) tem-se:*

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,(x-a).$$

(c) **Forma Integral do resto:** *Se $f^{(n+1)}$ é integrável em $[a,x]$, tem-se:*

$$R_{n,a,f}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,dt.$$

Demonstração: **(a)** Considerando $p = n+1$ no corolário anterior tem-se:

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!\,(n+1)}\,(x-t)^{n-(n+1)+1}\,(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

(b) Considerando $p = 1$ no corolário anterior tem-se:

$$R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^{n+1-1}\,(x-a) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,(x-a).$$

(c) Se $f^{(n+1)}$ é integrável em $[a,x]$, pelo corolário 30.1.3 do primeiro Teorema Fundamental do Cálculo e o Lema 35.3.2, tem-se:

$$R_{n,a}(x) = f(x) \;-\; P_{n,a,f}(x) = F(x) \;-\; F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt$$
$$= \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,dt. \qquad \blacksquare$$

Exercícios para o Capítulo 35

35.4 Aproximações Lineares

35.4.1 Exercício: Encontre aproximações lineares, ou seja, de primeira ordem, nos seguintes casos:

(a) $(1.02)^8$. R: 1.16.

(b) $\left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10}$. R: 2.

(c) $(0.99)^{100}+(0.99)^{10}$. R: 0.9.

(d) $\sqrt{49.1}$. R: $7+\dfrac{1}{140}$.

(e) $\sqrt{35.99}$. R: $6-\dfrac{1}{1200}$.

(f) $\operatorname{sen}(5\pi/24)$. R: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{24}\right)$.

(g) $\cos(21\pi/10)$. R: 1.

(h) $\log(1.01)$. R: 0.01.

(i) $e^{0.01}$. R: 1.01. ♣

35.4.2 Exercício: Idem, mas agora também estime o erro na aproximação:

(a) $\sqrt{50}$. R: $7+\dfrac{1}{14}$; $\quad -\dfrac{1}{8\cdot 7^3} < R_{1,49,\sqrt{x}}(50) < -\dfrac{1}{8^4}$.

(b) $(0.025)^{1/3}$. R: $\dfrac{3}{10}-\dfrac{2}{270}$; $\quad -\dfrac{1}{9\cdot 2^3\cdot 10} < R_{1,0.027,x^{1/3}}(0.025) < -\dfrac{4}{9\cdot 3^5\cdot 10}$.

(c) $e^{-0.1}$. R: 0.9; $\quad 0 < R_{1,0,e^x}(-0.1) < \dfrac{1}{200}$. ♣

35.4.3 Exercício: Usando os resultados do Capítulo 35 prove que:

(a) $\log x < x$, se $x > 0$. Cf. Exercício 32.6.1.

(b) $e^x > 1+x$, se $x > 0$. ♣

35.5 Polinômios de Taylor

35.5.1 Exercício: Calcule o polinômio de Taylor de terceira ordem para as seguintes funções nos pontos indicados:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, em $a = 0$. R: $1 - x + x^2 - x^3$.

(b) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$, em $a = 0$. R: $-1 + 2x^2 - x^3$.

(c) $f(x) = \log(x^2 + 1)$, em $a = 0$. R: x^2.

(d) $f(x) = \operatorname{sen} x$, em $a = \pi$. R: $-(x - \pi) + \dfrac{1}{6}(x - \pi)^3$.

(e) $f(x) = \log x$, em $a = e$. R: $1 + \dfrac{1}{e}(x - e) - \dfrac{1}{2e^2}(x - e)^2 + \dfrac{1}{3e^3}(x - e)^3$. ♣

35.6 As Funções Trigonométricas

Derivando sucessivamente a função sen tem-se:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^{(0)} x &= \operatorname{sen} x, \\
\operatorname{sen}^{(1)} x &= \cos x, \\
\operatorname{sen}^{(2)} x &= -\operatorname{sen} x, \\
\operatorname{sen}^{(3)} x &= -\cos x.
\end{aligned}$$

Derivando mais uma vez, resulta:

$$\operatorname{sen}^{(4)} x = \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^{(0)} x.$$

Desta maneira, o ciclo anterior repete-se a cada quatro derivadas. Observe que, pelo algoritmo da divisão 4.2.1, qualquer $n \in \mathbb{N}$ arbitrário pode ser expressado na forma $n = 4p + r$, com $0 \leqslant r < 4$. Portanto:

$$\operatorname{sen}^{(4p+r)} x = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } r = 0, \\ \cos x & \text{se } r = 1, \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } r = 2, \\ -\cos x & \text{se } r = 3. \end{cases}$$

35.6.1 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$.

(a) Se n é par, ou seja, $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então:

$$\operatorname{sen}^{(2k)} x = (-1)^k \operatorname{sen} x.$$

(b) Analogamente, se n é ímpar, ou seja, $n = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então:

$$\operatorname{sen}^{(2k+1)} x = (-1)^k \cos x.$$

♣

35.6.2 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$. Usando o resultado do exercício anterior, verifique as seguintes afirmações.

(a) O polinômio de Taylor de ordem $2n+1$ para sen em $a = 0$ é dado por:

$$P_{2n+1,0,\mathrm{sen}}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(b) Uma estimativa do resto de ordem $2n+1$ para sen em $a = 0$ é dada por:

$$|R_{2n+1,0,\mathrm{sen}}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

(c) Usando a desigualdade $|\operatorname{sen} x| < |x|$ para $0 < |x|$, estabelecida no lema 31.4.1(c), a estimativa para o resto pode ser expressada de maneira ligeiramente diferente:

$$|R_{2n+1,0,\mathrm{sen}}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+2)!}.$$

Note que a estimativa acima constitui um aprimoramento com relação à do item do anterior somente no caso $|x| < 1$. ♣

O mesmo tipo de resultado pode ser obtido para a função cos, como nos exercícios seguintes.

35.6.3 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$.

(a) Se n é par, ou seja, $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então:

$$\cos^{(2k)} x = (-1)^k \cos x.$$

Sugestão: Dado que $\cos x = \operatorname{sen}' x$, tem-se $\cos^{(2k)} x = \operatorname{sen}^{(2k+1)} x$. Agora basta usar o resultado do exercício 35.6.1(b).

(b) Analogamente, se n é ímpar, ou seja, $n = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então:

$$\cos^{(2k+1)} x = (-1)^{k+1} \operatorname{sen} x.$$

Sugestão: Usando o resultado do item anterior tem-se $\cos^{(2k+1)} x = (-1)^k \cos' x$. ♣

35.6.4 Exercício: Seja $n \in \mathbb{N}$. Usando o resultado do exercício anterior, verifique as seguintes afirmações.

(a) O polinômio de Taylor de ordem $2n$ para cos em $a = 0$ é dado por:

$$P_{2n,0,\cos}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

(b) Uma estimativa do resto de ordem $2n$ para cos em $a = 0$ é dada por:

$$|R_{2n,0,\cos}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(c) Usando a desigualdade $|\operatorname{sen} x| < |x|$ para $0 < |x|$, estabelecida no lema 31.4.1(c), a estimativa para o resto pode ser expressada de maneira ligeiramente diferente:

$$|R_{2n,0,\cos}(x)| < \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!}.$$

Note que a estimativa acima constitui um aprimoramento com relação à do item do anterior somente no caso $|x| < 1$. ♣

35.7 A Função Exponencial e o Número e

Salvo menção explícita em contrário, nesta seção será $f(x) = e^x$ e $a = 0$.

35.7.1 Exercício: Calcule $P_{n,0,f}$ e verifique que ele é dado por:

$$P_{n,0,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$ ♣

35.7.2 Exercício: Determine uma estimativa do resto no caso $x \geqslant 0$ como indicado a seguir.

(a) Use a forma integral do resto para obter uma primeira estimativa:

$$R_{n,0,f}(x) = \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n \, dt \leqslant \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)^n \, dt = \frac{e^x \, x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) Use o resultado do Exercício 32.8.3(b) para concluir que:

$$0 < R_{n,0,f}(x) < \frac{4^x \, x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

A primeira desigualdade $0 < R_{n,0,f}(x)$ resulta simples consequência do Exercício27.11.4. ♣

35.7.3 Exercício: Apenas por disciplina, determine agora uma estimativa do resto no caso $x \leqslant 0$ como indicado a seguir.

(a) Como antes, da forma integral do resto tem-se:

$$R_{n,0,f}(x) = \int_x^0 \frac{e^t}{n!}(x-t)^n \, dt.$$

Também como antes, aqui pode ser usado o fato da função exponencial ser crescente para obter a majoração $e^t < e^0 = 1$ para todo $t \in [x, 0]$, mas é preciso ter cuidado com o fator $(x-t)^n$ no integrando, cujo sinal vai depender de n. Por isso, resulta conveniente rescrever o resto na forma:

$$R_{n,0,f}(x) = (-1)^n \int_x^0 \frac{e^t}{n!}(t-x)^n \, dt.$$

Nesta última integral, observe que o integrando resulta sempre não-negativo, e tem-se:

$$\int_x^0 \frac{e^t}{n!}(t-x)^n \, dt \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} \, dt = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

onde a última igualdade acima segue do fato de ser $x \leqslant 0$.

(b) Se n é par, então $(-1)^n = 1$ o resto está dado neste caso por:

$$R_{n,0,f}(x) = \int_x^0 \frac{e^t}{n!}(t-x)^n \, dt.$$

Em particular, $R_{n,0,f}(x)$ é positivo. Portanto:

$$|R_{n,0,f}(x)| = R_{n,0,f}(x) = \int_x^0 \frac{e^t}{n!}(t-x)^n \, dt \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) Analogamente, se n é ímpar tem-se:

$$R_{n,0,f}(x) = -\int_x^0 \frac{e^t}{n!}(t-x)^n \, dt.$$

Em particular, $R_{n,0,f}(x)$ é negativo. Portanto:

$$|R_{n,0,f}(x)| = -R_{n,0,f}(x) = \int_x^0 \frac{e^t}{n!}(t-x)^n \, dt \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(d) Finalmente, segue dos dois itens precedentes que qualquera seja $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$|R_{n,0,f}(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

♣

35.7.4 Exercício: Use os resultados dos exercícios 35.7.1 e 35.7.2 anteriores para concluir que, se $0 \leqslant x \leqslant 1$, então:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R,$$

onde:

$$0 < R < \frac{4}{(n+1)!}.$$

♣

35.7.5 Exercício: Uma Estimativa Aprimorada do Número e

(a) Particularizando o resultado anterior, conclua que se $n = 4$, então:

$$0 < R < \frac{4}{5!} < \frac{1}{10}.$$

(b) Particularizando o resultado anterior para $x = 1$, conclua que:

$$\begin{aligned} e = e^1 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + R \\ &= \frac{65}{24} + R \\ &= 2 + \frac{17}{24} + R, \end{aligned}$$

onde $0 < R < \dfrac{1}{10}$.

(c) Conclua que $2 < e < 3$.

(d) Observe que o resultado do item (c) permite também aprimorar ligeiramente a estimativa anterior para o resto:

$$0 < R_{n,0,f}(x) < \frac{3^x \, x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

♣

35.8 A Função arctg e Aproximações para π

Salvo menção explícita em contrário, nesta seção será $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e $a = 0$.

35.8.1 Exercício: Prove que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$1 + (-1)^m \, t^{2m+2} = (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^m \, t^{2m}) \, (1 + t^2).$$

♣

35.8.2 Exercício: Verifique que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se a seguinte identidade:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^m \, \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + (-1)^{m+1} \int_0^x \frac{t^{2m+2}}{1+t^2} \, dt.$$

Sugestão: Da identidade do exercício anterior segue que:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^m \, t^{2m} - (-1)^m \frac{t^{2m+2}}{1+t^2}.$$

A expresão procurada pode ser obtida integrando entre 0 e x ambos membros desta identidade, usando o corolário 30.1.3 do primeiro Teorema Fundamental do Cálculo e lembrando que $\operatorname{arctg}' x = 1/(1+x^2)$, como também $\operatorname{arctg} 0 = 0$. ♣

35.8.3 Exercício: Defina $P_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x)$ e $R_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x)$ pelas seguintes expressões:

$$P_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x) := x \;-\; \frac{x^3}{3} \;+\; \frac{x^5}{5} \;-\; \frac{x^7}{7} \;+\; \cdots \;+\; (-1)^m\, \frac{x^{2m+1}}{2m+1},$$

$$R_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x) := (-1)^{m+1} \int_0^x \frac{t^{2m+2}}{1+t^2}\, dt.$$

(a) Prove que:

$$|R_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x)| \leqslant \frac{x^{2m+3}}{2m+3}.$$

(b) Prove que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, x - P_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x)}{x^{2m+1}} = 0.$$

(c) Conclua que $P_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem $2m+1$ para a função arctg em $a=0$. ♣

Em particular, pelo item (a) do exercício anterior, observe que o resto $R_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x)$ pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando m suficientemente grande no caso $|x| \leqslant 1$. Ou seja, $\lim\limits_{m\to\infty} R_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x) = 0$, se $|x| \leqslant 1$.

35.8.4 Exercício: O comportamento do resto $R_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x)$ no caso $|x| > 1$ é considerado no presente exercício.

(a) Prove que se $t \in [0,x]$, ou se $t \in [x,0]$ no caso $x<0$, então:

$$1+t^2 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2\,x^2, \quad \text{se } |x| \geqslant 1.$$

(b) Usando o item (a) anterior, tem-se:

$$\left|\int_0^x \frac{t^{2m+2}}{1+t^2}\, dt\right| \geqslant \frac{1}{2\,x^2} \left|\int_0^x t^{2m+2}\, dt\right| = \frac{|x|^{2m+1}}{4m+6}.$$

(c) Conclua que no caso $|x|>1$ o resto $R_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x)$ cresce arbitrariamente con n. Ou seja, $\lim\limits_{m\to\infty} |R_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}(x)| = +\infty$, se $|x|>1$. ♣

35.8.5 Exercício: **A Fórmula de Leibniz para π**

A expressão para o polinômio de Taylor $P_{2m+1,0,\mathrm{arctg}}$ do Exercício 35.8.3 anterior fornece uma fórmula para o cálculo aproximado de π. Com efeito:

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\, 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^m\, \frac{1}{2m+1} + R,$$

onde $|R| \leqslant \dfrac{1}{2m+3}$. Embora seja uma bela identidade, ela não resulta muito útil para estimativas devido a sua baixa velocidade de convergência: $1/n$ tende para zero muito devagar se comparado com $1/n!$ como no caso do número e e a função exponencial analizados na seção anterior. ♣

35.8.6 Exercício: Para $x, y \in \mathbb{R}$ com x, y e $x+y$ que não sejam da forma $k\pi + \pi/2$, verifique a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} y}.$$

Sugestão: Use as fórmulas de adição para sen e cos. ♣

35.8.7 Exercício: Verifique agora a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1 - x\,y}\right),$$

indicando as restrições necessárias para x e y.

Sugestão: Substitua x por $\operatorname{arctg} x$ e y por $\operatorname{arctg} y$ na identidade do exercício anterior. ♣

35.8.8 Exercício: Em particular, se $x = y$ na fórmula do exercício anterior, tem-se:

$$2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1 - x^2}\right).$$ ♣

35.8.9 Exercício: A Fórmula de Machin

Usando os resultados dos Exercícios 35.8.7 e 35.8.8 anteriores, verifique as seguintes identidades:

(a) $\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

(b) $\dfrac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{239}\right)$. ♣

A notável identidade do item (b) do exercício precedente foi descoberta em 1706 por John Machin (1680-1751). Esta relação permite calcular as primeiras cinco casas decimais de π com surprendentemente poco trabalho, como no exercicio a seguir.

35.8.10 Exercício: Como π é proximo de $3,2$, tem-se que $\pi/4$ será próximo de $0,8$, ou seja, $4/5$. Agora bem, como $\operatorname{arctg} x \approx x$ para x pequeno, tem-se que $4/5 = 4(1/5) \approx 4 \operatorname{arctg}(1/5)$. Neste ponto entra a fórmula de Machin, fornecendo a correção necessária, a saber:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Use a identidade acima para determinar a primeiras 5 casas decimais de π. ♣

35.9 A Função $\log(x+1)$

Salvo menção explícita em contrário, nesta seção será $f(x) = \log(x+1)$ e $a = 0$.

35.9.1 Exercício: Prove que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$1 + (-1)^{n-1}\, t^n = (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\, t^{n-1})\,(1+t).$$

♣

35.9.2 Exercício: Se $x > -1$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt.$$

Sugestão: Da identidade do exercício anterior segue que:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\, t^{n-1} + \frac{(-1)^n\, t^n}{1+t}.$$

A expresão procurada pode ser obtida integrando entre 0 e x ambos membros desta identidade, usando o corolário 30.1.3 do primeiro Teorema Fundamental do Cálculo e lembrando que $[\log(x+1)]' = 1/(1+x)$, como também $\log 1 = 0$. ♣

35.9.3 Exercício: Defina $P_{n,0,f}(x)$ e $R_{n,0,f}(x)$ pelas seguintes expressões:

$$P_{n,0,f}(x) := x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n};$$
$$R_{n,0,f}(x) := (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt.$$

(a) Se $x \geqslant 0$, então:

$$|R_{n,0,f}(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

(b) Se $-1 < x \leqslant 0$, então:

$$|R_{n,0,f}(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}.$$

(c) Desta maneira, no caso $-1 < x \leqslant 1$, resulta possível provar:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x+1) - P_{n,0,f}(x)}{x^n} = 0.$$

(d) Conclua que $P_{n,0,f}(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n para a função $\log(x+1)$ na origem $a = 0$. ♣

Em particular, pelos itens (a) e (b) do exercício anterior, observe que o resto $R_{n,0,f}(x)$ pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando n suficientemente grande no caso $-1 < x \leqslant 1$. Ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,0,f}(x) = 0$, se $-1 < x \leqslant 1$.

Caso contrário, observando ainda que a função $\log(x+1)$ não está definida para $x \leqslant -1$, basta analizar o que acontece com o resto $R_{n,0,f}(x)$ apenas no caso $x > 1$.

35.9.4 Exercício: O comportamento do resto $R_{n,0,f}(x)$ no caso $x > 1$ é considerado no presente exercício.

(a) Prove que se $t \in [0, x]$, então:

$$1 + t \leqslant 1 + x \leqslant 2\,x, \ \text{ se } x \geqslant 1.$$

(b) Usando o item (a) anterior, tem-se:

$$\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt \geqslant \frac{1}{2\,x} \int_0^x t^n\,dt = \frac{|x|^n}{2n+2}.$$

(c) Conclua que no caso $x > 1$ o resto $R_{n,0,f}(x)$ cresce arbitrariamente con n. Ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} |R_{n,0,f}(x)| = +\infty$, se $x > 1$. ♣

35.10 A Função Binomial $(1+x)^\alpha$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e n inteiro não-negativo, define-se o **coeficiente binomial** "generalizado" $\dbinom{\alpha}{n}$ como:

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0; \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & \text{se } n \geqslant 1. \end{cases}$$

35.10.1 Exercício: Com a definição precedente, prove que:

(a) Se $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $\dbinom{\alpha}{n} = 0$, para todo $n \geqslant \alpha + 1$.

(b) Se $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $\dbinom{\alpha}{n} \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Neste caso, o sinal de $\dbinom{\alpha}{n}$ começa a alternar de positivo para negativo e viceversa para $n > \alpha + 1$. ♣

35.10.2 Exercício: Verifique que o polinômio de Taylor de ordem n para a função binomial $f(x) = (1+x)^\alpha$ na origem $a = 0$ está dado por:

$$P_{n,0,(1+x)^\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k.$$ ♣

35.10.3 Exercício: Prove que a forma de Cauchy para o resto $R_{n,0,(1+x)^\alpha}(x)$ resulta dada por:

$$R_{n,0,(1+x)^\alpha}(x) = (n+1)\binom{\alpha}{n+1} x\,(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n,$$

para algum t em $(0,x)$, ou t em $(x,0)$, segundo seja x positivo ou negativo, respectivamente. ♣

35.10.4 Exercício: Prove agora que a forma de Lagrange para o resto $R_{n,0,(1+x)^\alpha}(x)$ resulta dada por:

$$R_{n,0,(1+x)^\alpha}(x) = \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}\,(1+t)^{\alpha-n-1},$$

para algum t em $(0,x)$, ou t em $(x,0)$, segundo seja x positivo ou negativo, respectivamente. ♣

35.11 A Equação $f'' + f = 0$ Revisitada

Seja f tal que existe $f''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e tal que:

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Pelo Lema 31.3.1 sabe-se que uma tal função deve ser identicamente nula. Na presente seção será fornecida uma segunda prova independente desse fato, que serve para ilustrar o uso do polinômio de Taylor e a forma integral do resto como ferramentas teóricas.

35.11.1 Exercício: Seja f tal que $f'' + f = 0$. Então:

(a) f resulta automáticamente infinitamente diferenciável. Ou seja, $f^{(k)}$ existe para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Mais ainda, tem-se:

$$\{f^{(k)} : k \in \mathbb{N}\} = \{f, f', -f, -f'\}.$$

Ou seja, existem as derivadas de todas as ordens, mas apenas quatro diferentes.

(c) Se f satisfaz a condição adicional $f(0) = f'(0) = 0$, então $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(d) Em particular, $P_{n,0,f} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, usando a forma integral do resto tem-se:

$$f(x) = P_{n,0,f}(x) + R_{n,0,f}(x) = R_{n,0,f}(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,dt.$$

(e) Como $f^{(n+1)}$ é contínua, pois existe $f^{(n+2)}$, resulta limitada no compacto $[0,x]$, para todo x. Ou seja, dado $x \geqslant 0$ arbitrário mas fixo, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que *para todo* $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M, \quad \forall\, t \in [0,x].$$

Observe que a claúsula "para todo $n \in \mathbb{N}$" pode ser acrescentada sem problema na relação acima, pois existem no máximo quatro $f^{(k)}$ diferentes.

(f) Com estas observações, tem-se:

$$|f(x)| \leqslant M \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt \right| = M \, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(g) Pelo Exercício 3.10.4 a expresão à direita acima pode ser feita arbitrariamente pequena tomando n suficientemente grande.

(h) Desta maneira, $|f(x)| < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, e portanto $f(x) = 0$. Como era x arbitrário, segue que $f = 0$. ♣

35.12 Uma Abordagem Alternativa da Função Exponencial

Seja f uma função tal que $f' = f$. Um exemplo de tal função é dado pela função identicamente nula $f = 0$. Esta trivialidade pode ser evitada acrescendo a restrição adicional $f(0) = 1$. Desta maneira, a presente análise focaliza uma função f tal que:

$$\begin{aligned} f' &= f, \\ f(0) &= 1. \end{aligned}$$

Observe que uma tal função resulta automaticamente indefinidamente diferenciável, ou seja C^∞.

35.12.1 Exercício: **(a)** Prove que $f^{(k)} = f$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) O polinômio de Taylor $P_{n,0,f}$ de ordem n para f em zero é dado por:

$$P_{n,0,f}(x) \;=\; f(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \;=\; 1 \;+\; x \;+\; \frac{x^2}{2} \;+\; \ldots \;+\; \frac{x^n}{n!}.$$

(c) Usando a forma de Lagrange 35.3.5(a), o resto $R_{n,0,f}$ de ordem n para f em zero é dado por:

$$R_{n,0,f} = f(t) \, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

para algum $t \in (0, x)$. ♣

35.12.2 Exercício: **(a)** Prove que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe o limite $\lim_{n \to \infty} P_{n,0,f}(x)$.

Sugestão: Dado $x \in \mathbb{R}$ arbitrário mas fixo, basta provar que a sequência $\{P_{n,0,f}(x)\}$ é de Cauchy. Para tanto, basta provar que a sequência não-decrescente A_n definida como

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{|x|^k}{k!}$$

é limitada superiormente.

(b) Mais ainda, para cada $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_{n,0,f}(x)$.

Sugestão: Se f é diferenciável, então é contínua e portanto limitada em compactos, digamos $|f(x)| \leqslant M$ quando $|x| \leqslant K$. Em tal caso, tem-se:

$$|f(x) - P_{n,0,f}(x)| = |R_{n,0,f}(x)| = |f(t)|\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M\frac{K^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Este último termo pode ser feito arbitrariamente pequeno se $n = n(x)$ for suficientemente grande, pelo resultado do exercício 3.10.4. ♣

Pelo resultado do exercício precedente, se pode definir para cada $x \in \mathbb{R}$ a função exp como:

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty} P_{n,0,f}(x).$$

Em tal caso, obviamente tem-se:

$$\begin{aligned} \exp' &= \exp, \\ \exp(0) &= 1. \end{aligned}$$

35.12.3 Exercício: Na semirreta dos reais não-negativos, ou numa vizinhança da origem, a função exp é estritamente crescente e convexa. ♣

Define-se o número e como:

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to\infty} P_{n,0,f}(1) = \lim_{n\to\infty} 1 \;+\; 1 \;+\; \frac{1}{2!} \;+\; \frac{1}{3!} \;+\; \cdots \;+\; \frac{1}{n!}.$$

Considerando os três primeiros termos da soma acima, tem-se:

$$2.5 = 1 \;+\; 1 \;+\; \frac{1}{2!} \leqslant 1 \;+\; 1 \;+\; \frac{1}{2!} \;+\; \frac{1}{3!} \;+\; \cdots \;+\; \frac{1}{n!}$$

de onde, tomando limite para $n \to \infty$ no termo à direita, obtém-se a estimativa $2 < 2.5 \leqslant e$. Um limite superior é obtido no exercício a seguir.

35.12.4 Exercício: **(a)** Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $2^{n-1} \leqslant n!$ com desigualdade estrita no caso $n \geqslant 3$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$1 \;+\; 1 \;+\; \frac{1}{2!} \;+\; \frac{1}{3!} \;+\; \cdots \;+\; \frac{1}{n!} \;<\; 3 \;-\; \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(c) Em particular, $e \leqslant 3$.

(d) Usando a estimativa do item anterior, prove que se $0 < x \leqslant 1$, então:

$$0 < R_{n,0,f}(x) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

(e) Finalmente, use o resultado do item anterior para provar que $e < 3$. ♣

35.12.5 Exercício: **(a)** Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y \geqslant 0$ tem-se $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Sugestão: Considere a função $f(x) = \exp(x+y)/\exp(y)$. O que pode ser afirmado sobre f' e $f(0)$?

(b) Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Em particular, $\exp(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Observe que no caso particular $x \geqslant 0$ sabe-se, pelo exercício 35.12.3, que $\exp(x) \geqslant \exp(0) = 1 > 0$.

(c) Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Em particular, $\exp(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) A função exponencial é estritamente crescente em todo $\mathbb{R}$. ♣

Combinando o resultado do exercício 35.12.5(d) com o exemplo 26.1.3(b), a função exponencial é injetora em $\mathbb{R}$. Logo, pelo teorema 26.1.5, existe a função inversa $\exp^{-1} =: \log$. Observe que, pelo resultado do exercício 35.12.5(c), o domínio de log deve ser o conjunto dos reais estritamente positivos. Observe também que $\log 1 = \log(\exp(0)) = 0$.

35.12.6 Exercício: **(a)** Para todo $x > 0$ tem-se $\log' x = \dfrac{1}{x}$.

(b) Para todo $x, y > 0$ tem-se $\log(xy) = \log x + \log y$. ♣

35.13 A Fórmula de Euler

Uma leitura, mesmo que superficial, das seções 35.6 e 35.7, ou 35.12, revela que os polinômios de Taylor das funções cos, sen e exp envolvem todos a mesma expressão, a saber:

$$\frac{x^k}{k!}$$

combinadas de maneira diferente. Na função exponencial tal expressão aparece para todo $k \in \mathbb{N}$ e sempre com sinal positivo:

$$P_{n,0,\exp}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Nas funções cos e sen os sinais alternam entre positivo e negativo, requerendo apenas os $k \in \mathbb{N}$ pares ou ímpares, respectivamente:

$$\begin{aligned} P_{2n,0,\cos}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ P_{2n+1,0,\mathrm{sen}}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Por causa dos sinais alternados, resulta óbvio que:

$$P_{2n+1,0,\exp}(x) \neq P_{2n,0,\cos}(x) + P_{2n+1,0,\mathrm{sen}}(x).$$

Mas, não poderia existir alguma outra relação algébrica parecida entre tais polinômios?

35.13.1 Exercício: Verifique a identidade $P_{2n+1,0,\exp}(ix) = P_{2n,0,\cos}(x) + i\, P_{2n+1,0,\mathrm{sen}}(x)$. ♣

Uma identidade funcional mais forte ainda que a do exercício precedente é dada pela **fórmula de Euler**:

$$\exp(ix) = \cos x + i \,\mathrm{sen}\, x.$$

A prova desta relação requer um pouco mais de trabalho adicional, mas nenhum resultado essencialmente diferente daqueles apresentados no exercício 35.12.2 da seção anterior.

35.13.2 Exercício: **(a)** Prove que para cada $x \in \mathbb{R}$ existem os limites:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} P_{n,0,\cos}(x), \\ &\lim_{n\to\infty} P_{n,0,\mathrm{sen}}(x). \end{aligned}$$

(b) Mais ainda, para cada $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \cos x &= \lim_{n\to\infty} P_{n,0,\cos}(x), \\ \mathrm{sen}\, x &= \lim_{n\to\infty} P_{n,0,\mathrm{sen}}(x). \end{aligned}$$

♣

Neste ponto, a fórmula de Euler $\exp(ix) = \cos x + i \,\mathrm{sen}\, x$ surge como corolário de ambos exercícios precedentes. Particularizando esta expressão para $x = \pi$ obtém-se a assim denominada **identidade de Euler**, a saber, $\exp(i\pi) = -1$, ou alternativamente:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta bela e notável identidade emoldura em uma expressão única os "cinco números mais importantes" de toda a Matemática.

Capítulo 36

Irracionalidade de e e π

36.1 Racional é o que e não é

36.1.1 Teorema: *$e \notin \mathbb{Q}$, ou seja, o número e é irracional.* $\square$

Demonstração: Pelos resultados da seção 35.7, sabe-se que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$e = \exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n,$$

onde:

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Por ***reductio ad absurdum***, suponha que e seja racional, ou seja, da forma $e = p/q$, sem perda de generalidade com p e q inteiros positivos, pois sabe-se que $e > 2 > 0$. Seja agora $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > q$ e $n > 3$, por exemplo, $n \geqslant \max\{3, q\}$. Em tal caso, tem-se:

$$\frac{p}{q} = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n,$$

portanto:

$$\frac{n!\,p}{q} = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!\,R_n.$$

Observe que na identidade acima, o membro à esquerda é inteiro, pois $n > q$. O mesmo acontece certamente com os primeiros termos no membro à direita, com a possível exceição do último. Desta maneira, o termo $n!\,R_n$ também deveria ser inteiro, pois pode ser expressado como diferença de dois inteiros. Por outro lado, usando a relação:

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}$$

se $n > 3$ tem-se:

$$0 < n!\,R_n < \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1,$$

contradizendo que $n!\,R_n$ era inteiro. ∎

36.2 Irracionalidade de e^r para $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

Os dois lemas a seguir são resultados auxiliares que foram introduzidos anteriormente, nos exercícios 3.10.4 e 22.5.1, respectivamente.

36.2.1 Lema: *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $b > 0$ arbitrários, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n! > a^n b$.* □

Demonstração: Cf. Exercício 3.10.4 e os exercícios precedentes daquela seção. ∎

36.2.2 Lema: *Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja f_n a função definida por:*

$$f_n(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

A função f_n satisfaz as seguintes propriedades:

(a) *Se $0 < x < 1$, então $0 < f_n(x) < 1/n!$.*

(b) *$f_n^{(k)}(0) = 0$, se $k < n$.*

(c) *Se $k > 2n$, então $f_n^{(k)}(x) = 0$ para todo x.*

(d) *Para $n \leqslant k \leqslant 2n$ tem-se:*

$$f_n^{(k)}(0) = (k-n)! \binom{k}{n} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n}.$$

(e) *Em particular, $f_n^{(k)}(0)$ é* inteiro *para todo $k \in \mathbb{N}$.*

(f) *Mais ainda, $f_n^{(k)}(1)$ também é* inteiro *para todo $k \in \mathbb{N}$.* □

Demonstração: **(a)** Se $0 < x < 1$, então adicionalmente tem-se que $0 < 1-x < 1$. Combinando essas duas relações tem-se:

$$0 < x^n < 1,$$
$$0 < (1-x)^n < 1.$$

Portanto:

$$0 < f_n(x) = \frac{x^n\,(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!}.$$

(b) Observe que:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n\,(1-x)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{n!}\,x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\, x^k \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\, x^{k+n} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j=n}^{2n} \binom{n}{j-n} (-1)^{j-n}\, x^j. \end{aligned}$$

Incidentalmente, observe que definindo $c(n,j)$ como:

$$c(n,j) := \binom{n}{j-n} (-1)^{j-n},$$

tem-se que $c(n,j) \in \mathbb{Z}$ para todo $n \leqslant j \leqslant 2n$. Da expressão anterior para $f(x)$ como polinômio em x segue diretamente que $f_n^{(k)}(0) = 0$ se $k < n$.

(c) Da expressão do item anterior para $f(x)$ como polinômio em x de grau $2n$ segue diretamente que, no caso $k > 2n$, tem-se $f_n^{(k)}(x) = 0$ para todo x.

(d) Seja $n \leqslant k \leqslant 2n$. Derivando k vezes a expressão obtida no item (b) anterior tem-se:

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=n}^{2n} \binom{n}{j-n} (-1)^{j-n}\, j(j-1)\cdots(j-k+1)\, x^{j-k}.$$

Portanto:

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n}\, k(k-1)\cdots(k-k+1) = \frac{1}{n!} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n}\, k!.$$

No caso particular $k = n$ tem-se:

$$f_n^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{0} n! = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1.$$

Por outro lado, se $k > n$ tem-se:

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(0) &= \frac{1}{n!} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n}\, k! = \frac{k!}{n!} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n} \\ &= (k-n)!\,\frac{k!}{n!(k-n)!} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n} = (k-n)! \binom{k}{n} \binom{n}{k-n} (-1)^{k-n}. \end{aligned}$$

(e) Basta usar o resultado do item anterior, pois os coeficientes binomiais são números naturais.

(f) Observe que:

$$f_n(1-x) = \frac{(1-x)^n\,(1-(1-x))^n}{n!} = \frac{(1-x)^n\,x^n}{n!} = f_n(x).$$

Portanto:

$$f_n^{(k)}(1-x) = (-1)^k\, f_n^{(k)}(x).$$

Tomando $x = 0$ nesta última expressão tem-se:

$$f_n^{(k)}(1) = (-1)^k\, f_n^{(k)}(0),$$

que é inteiro pelo resultado do item anterior. ∎

36.2.3 Teorema: *Para cada $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, o número e^r é irracional.* □

Demonstração: Primeiramente, observe que basta provar que e^k não pode ser racional para cada k inteiro positivo, pois se $e^{k/m}$ fosse racional, então $(e^{k/m})^m = e^k$ também seria. Seja então $k \in \mathbb{N}$ e, por ***reductio ad absurdum***, suponha que:

$$e^k = \frac{a}{b},$$

para certos inteiros a e b, que sem perda de generalidade podem ser considerados positivos, pois $e > 2 > 0$. Seja então $n \in \mathbb{N}$ tal que $n! > ak^{2n+1}$, cuja existência resulta garantida pelo Lema 36.2.1. Define-se a função F por:

$$F(x) := k^{2n} f_n(x) \;-\; k^{2n-1} f_n'(x) \;+\; k^{2n-2} f_n''(x) \;\pm\; \cdots \;-\; k f_n^{(2n-1)}(x) \;+\; f_n^{(2n)}(x).$$

Derivando diretamente a identidade acima, tem-se:

$$F'(x) = k^{2n} f_n'(x) \;-\; k^{2n-1} f_n''(x) \;+\; k^{2n-2} f_n'''(x) \;\pm\; \cdots \;-\; k f_n^{(2n)}(x) \;+\; f_n^{(2n+1)}(x).$$

Observe que a última derivada é zero pelo Lema 36.2.2(c), de onde segue:

$$F'(x) = -kF(x) \;+\; k^{2n+1} f_n(x).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}[e^{kx}F(x)]' &= ke^{kx}F(x) \;+\; e^{kx}F'(x)\\ &= ke^{kx}F(x) \;-\; ke^{kx}F(x) \;+\; k^{2n+1}e^{kx}f_n(x) = k^{2n+1}e^{kx}f_n(x).\end{aligned}$$

Desta identidade, usando o corolário 30.1.3, tem-se:

$$\begin{aligned} b\int_0^1 k^{2n+1}e^{kx}f_n(x)\,dx &= b\,e^{kx}F(x)\Big|_0^1 = b\,e^k F(1) - bF(0)\\ &= b\,\frac{a}{b}\,F(1) - bF(0) = aF(1) - bF(0).\end{aligned}$$

Pelo Lema 36.2.2(e,f), o termo à extrema direita na última identidade acima deveria ser um número inteiro. Por outro lado, usando o Lema 36.2.2(a), a escolha de n garante que:

$$0 < b\int_0^1 k^{2n+1}e^{kx}f_n(x)\,dx \leqslant bk^{2n+1}e^k\,\frac{1}{n!} = bk^{2n+1}\,\frac{a}{b}\,\frac{1}{n!} = \frac{ak^{2n+1}}{n!} < 1,$$

contradizendo que o produto de b com a integral acima era um inteiro. ∎

36.3 π^2 é Irracional

36.3.1 Teorema: *$\pi^2 \notin \mathbb{Q}$, ou seja o número π^2 é irracional. Em particular, π é irracional.* □

Demonstração: Primeiramente, observe que se π fosse racional, então $\pi^2 = \pi\,\pi$ também seria, provando que a última afirmação no enunciado do teorema segue da primeira. Para provar que π^2 não pode ser racional, suponha, por *reductio ad absurdum*, que

$$\pi^2 = \frac{a}{b},$$

para certos inteiros a e b que sem perda de generalidade podem ser considerados positivos, pois $\pi^2 > 0$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $n! > \pi\, a^n$, cuja existência resulta garantida pelo Lema 36.2.1. Define-se a função G por:

$$\begin{aligned} G(x) := b^n[\pi^{2n} f_n(x) \;-\; \pi^{2n-2} f_n''(x) \;+\; \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) \;\pm\; \cdots \\ +\; (-1)^{n-1}\pi^2 f_n^{(2n-2)}(x) \;+\; (-1)^n f_n^{(2n)}(x)]. \end{aligned}$$

Derivando diretamente duas vezes a identidade acima, tem-se:

$$\begin{aligned} G''(x) = b^n[\pi^{2n} f_n''(x) \;-\; \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) \;+\; \pi^{2n-4} f_n^{(6)}(x) \;\pm\; \cdots \\ +\; (-1)^{n-1}\pi^2 f_n^{(2n)}(x) \;+\; (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)]. \end{aligned}$$

Observe que a última derivada é zero pelo Lema 36.2.2(c), de onde segue:

$$G''(x) = -\pi^2 G(x) \;+\; b^n \pi^{2n+2} f_n(x).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} &[G'(x)\operatorname{sen}\pi x - \pi G(x)\cos\pi x]' \\ &= G''(x)\operatorname{sen}\pi x \;+\; \pi G'(x)\cos\pi x \;-\; \pi G'(x)\cos\pi x \;+\; \pi^2 G(x)\operatorname{sen}\pi x \\ &= (G''(x) + \pi^2 G(x))\operatorname{sen}\pi x = b^n \pi^{2n+2} f_n(x)\operatorname{sen}\pi x \\ &\qquad = (b\pi^2)^n \pi^2 f_n(x)\operatorname{sen}\pi x = \pi^2 a^n f_n(x)\operatorname{sen}\pi x. \end{aligned}$$

Desta identidade, usando o corolário 30.1.3, tem-se:

$$\pi \int_0^1 a^n f_n(x)\operatorname{sen}\pi x\, dx = \frac{1}{\pi}[G'(x)\operatorname{sen}\pi x - \pi G(x)\cos\pi x]\Big|_0^1 = G(1) + G(0).$$

Pelo Lema 36.2.2(e,f), o termo à extrema direita na última identidade acima deveria ser um número inteiro, pois os fatores:

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k} b^k$$

resultam inteiros para todo $k = 1, 2, \ldots, n$. Por outro lado, usando o Lema 36.2.2(a), a escolha de n garante que:

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x)\operatorname{sen}\pi x\, dx \leqslant \frac{\pi a^n}{n!} < 1,$$

contradizendo que o produto de π com a integral acima era um inteiro. ∎

Parte IV

Análise

Uma das séries mais notáveis da análise algébrica é a seguinte:

$$1 + \frac{m}{1}\,x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\,x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdots n}\,x^n + \cdots$$

Quando m é um inteiro positivo, a soma da série, que então é finita, se pode expresar, segundo sabe-se, por $(1+x)^m$. Quando m não é inteiro, a série vai para infinito, e convergirá ou divergirá segundo m e x tenham uns valores ou outros. Em este caso, escreve-se a mesma igualdade

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}\,x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\,x^2 + \cdots \text{ etc.}$$

[...] Supoe-se que a igualdade numérica se cumplirá sempre que a série seja convergente, mas isso ainda não tem sido demostrado.

Niels Henrik Abel[1]

[1] Citado em [25, p. 494].

Capítulo 37

Sequências Revisitadas

37.1 Sequências Recorrentes Lineares

37.1.1 Definição: Uma sequência de números reais $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ é denominada **recorrente linear de ordem** p se existem p números reais $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{R}$ com $\alpha_0 \neq 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$a_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \, a_{n+i} = \alpha_0 \, a_0 + \alpha_1 \, a_1 + \cdots + \alpha_{p-1} \, a_{n+p-1}, \quad \forall \, n \geqslant n_0. \tag{37.1.1}$$

O conjunto de tais sequências será denotado por $\mathcal{R}_p(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$. ♣

37.1.2 Observação: O estudo de sequências recorrentes lineares $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ pode ser reduzido sem nenhuma perda de generalidade apenas à análise do caso em que $n_0 = 0$. Com efeito, seja $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência definida por:

$$b_n := a_{n+n_0}, \ \forall \, n \geqslant 0.$$

Em tal caso tem-se $a_n = b_{n-n_0}$ e esta nova sequência resulta recorrente linear da mesma ordem e com $n_0 = 0$, pois:

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \, b_{n+i} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \, a_{n+n_0+i} = a_{n+n_0+p} = b_{n+p}, \ \forall \, n \geqslant 0.$$ ♣

37.1.3 Lema: ***(a)*** *$\mathcal{R}_p(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$ é um espaço vetorial.*

(b) *De fato, $\dim \mathcal{R}_p(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) = p$.* □

Demonstração: **(a)** O enunciado segue basicamente do fato que a equação (37.1.1) é uma combinação linear das variáveis a_i. Com efeito, sejam $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{R}_p(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$. Se

$c_n = \lambda\, a_n \;+\; \mu\, b_n$ com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, então tem-se:

$$\begin{aligned} c_{n+p} &= \lambda\, a_{n+p} \;+\; \mu\, b_{n+p} \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i\, a_{n+i} \;+\; \mu \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i\, b_{n+i} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i (\lambda\, a_{n+i} \;+\; \mu\, b_{n+i}) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i c_{n+i}, \end{aligned}$$

para todo $n \leqslant n_0$.

(b) Observe que a aplicação:

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \longrightarrow (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais entre $\mathcal{R}_p(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ e $\mathbb{R}^p$. ∎

37.1.4 Exemplo: Sequências Recorrentes Lineares de Ordem $p = 1$

Neste caso, a relação (37.1.1) se reduz a:

$$a_{n+1} = \alpha_0\, a_n, \;\forall\, n \geqslant 0.$$

Portanto:

$$a_{n+1} = \alpha_0\, a_n = \alpha_0^2\, a_{n-1} = \alpha_0^3\, a_{n-2} = \cdots = \alpha_0^{n+1}\, a_0, \;\forall\, n \geqslant 0.$$

Desta maneira, uma tal sequência deve ser necessariamente da forma:

$$a_n = \alpha_0^n\, a_0, \;\forall\, n \geqslant 0.$$

Em particular, o espaço vetorial $\mathcal{R}_1(\alpha_0)$ é gerado pela sequência geométrica de razão α_0. ♣

37.2 Sequências Recorrentes Lineares de Ordem $p = 2$

Neste caso, a relação (37.1.1) se reduz a:

$$a_{n+2} = \alpha_0\, a_n + \alpha_1\, a_{n+1}.$$

37.2.1 Lema: *Seja $\{a_n\}$ sequência recorrente linear de ordem 2. Suponha adicionalmente que:*

$$a_n = r^n, \;\forall\, n \geqslant 0.$$

Então r deve ser raiz da equação quadrática $x^2 - \alpha_1\, x - \alpha_0 = 0$. □

Demonstração: Em tal caso, usando a relação de recorrência tem-se:

$$r^n\,r^2 = r^{n+2} = \alpha_0\,r^n \;+\; \alpha_1\,r^{n+1} = r^n(\alpha_0 \;+\; \alpha_1\,r) \;\Rightarrow\; r^2 \;-\; \alpha_1\,r \;-\; \alpha_0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Desta maneira, pelo lema anterior deve ser:

$$r = \frac{\alpha_1 \;\pm\; \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_0}}{2}.$$

Se o discriminante da equação quadrática do resultado anterior é positivo, ou seja, $\alpha_1^2 + 4\alpha_0 > 0$, então tal equação possuirá duas soluções *diferentes*, digamos r_1 e r_2.

37.2.2 Lema: *Suponha que $\alpha_1^2 + 4\alpha_0 > 0$ e sejam r_1, r_2 as duas soluções diferentes da equação quadrática considerada no resultado anterior. Então:*

(a) *O espaço vetorial $\mathcal{R}_2(\alpha_0, \alpha_1)$ resulta gerado pelas sequências geométricas de razão r_1 e r_2, respectivamente.*

(b) *Os coeficientes a_n podem ser expressados explicitamente em função de a_0 e a_1 e dos parâmetros α_0 e α_1 na forma:*

$$a_n = \left(\frac{a_1 - a_0\,r_2}{r_1 - r_2}\right) r_1^n \;+\; \left(\frac{a_0\,r_1 - a_1}{r_1 - r_2}\right) r_2^n. \qquad \square$$

Demonstração: **(a)** Sejam r_1, r_2 as duas soluções diferentes da equação quadrática considerada no lema anterior. Mais precisamente:

$$r_1 = \frac{\alpha_1 \;+\; \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_0}}{2}$$
$$r_2 = \frac{\alpha_1 \;-\; \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_0}}{2}.$$

Se $\{a_n\} \in \mathcal{R}_2(\alpha_0, \alpha_1)$, basta provar que existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a_n = \lambda\,r_1^n \;+\; \mu\,r_2^n, \;\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Em tal caso teria-se, em particular:

$$a_0 = \lambda\,r_1^0 \;+\; \mu\,r_2^0 = \lambda \;+\; \mu,$$
$$a_1 = \lambda\,r_1 \;+\; \mu\,r_2.$$

Incidentalmente, observe que estas duas relações podem ser combinadas em uma única identidade matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Usando a primeira relação, segue que:

$$\mu = a_0 - \lambda.$$

Combinando esta expressão com a segunda identidade, tem-se:

$$a_1 = \lambda\, r_1 \;+\; \mu\, r_2 = \lambda\, r_1 \;+\; (a_0 - \lambda) r_2 = a_0\, r_2 \;+\; \lambda(r_1 - r_2) \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2}.$$

Desta maneira:

$$\mu = a_0 - \lambda = a_0 \;-\; \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{a_0 r_1 - a_0 r_2 - a_1 + a_0 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{a_0 r_1 - a_1}{r_1 - r_2}.$$

(b) Usando o resultado do item anterior com as expressões para λ, μ obtidas acima, tem-se:

$$a_n = \lambda\, r_1^n \;+\; \mu\, r_2^n = \left(\frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2}\right) r_1^n \;+\; \left(\frac{a_0 r_1 - a_1}{r_1 - r_2}\right) r_2^n. \qquad \blacksquare$$

37.2.3 Exemplo: A sequência de Fibonacci a_n foi introduzida no Exercício 3.5.2, onde também se pede verificar por indução em n a fórmula:

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}, \ \forall\, n \geqslant 0.$$

Observe que a sequência de Fibonacci é definida pela relação de recorrência:

$$a_{n+2} = a_{n+1} \;+\; a_n.$$

Portanto, trata-se de uma sequência recorrente linear de ordem 2, onde $a_0 = a_1 = 1$ com $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Em particular, o discriminante 5 é positivo e as duas soluções da equação quadrática do Lema 37.2.1 estão dadas por:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
$$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Observe que:

$$r_1 - r_2 = \sqrt{5},$$
$$r_1\, r_2 = -1.$$

O resultado do lema anterior fornece uma prova independente da relação acima para o termo geral

a_n. Com efeito, tem-se:

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(\frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2}\right) r_1^n \,+\, \left(\frac{a_0 r_1 - a_1}{r_1 - r_2}\right) r_2^n \\
&= \left(\frac{1 - r_2}{r_1 - r_2}\right) r_1^n \,+\, \left(\frac{r_1 - 1}{r_1 - r_2}\right) r_2^n \\
&= \frac{r_1^n \,-\, r_2\, r_1^n \,+\, r_1\, r_2^n \,-\, r_2^n}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{r_1^n \,-\, r_1\, r_2\, r_1^{n-1} \,+\, r_1\, r_2\, r_2^{n-1} \,-\, r_2^n}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{r_1^n \,+\, r_1^{n-1} \,-\, r_2^{n-1} \,-\, r_2^n}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{r_1^n \,+\, r_1^{n-1} \,-\, (r_2^n \,+\, r_2^{n-1})}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{r_1^{n-1}(r_1 \,+\, 1) \,-\, r_2^{n-1}(r_2 \,+\, 1)}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{r_1^{n-1}\, r_1^2 \,-\, r_2^{n-1}\, r_2^2}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{r_1^{n+1} \,-\, r_2^{n+1}}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}},
\end{aligned}$$

para todo $n \geqslant 0$. ♣

Por outro lado, se o discriminante da equação quadrática do Lema 37.2.1 for nulo, ou seja, $\alpha_1^2 + 4\alpha_0 = 0$, tal equação possuirá apenas uma solução, a saber:

$$r_1 = \frac{\alpha_1}{2}.$$

Incidentalmente, observe que:

$$\alpha_1^2 + 4\alpha_0 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1^2 = -4\alpha_0 \;\Rightarrow\; r_1^2 = \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 = \frac{\alpha_1^2}{4} = -\alpha_0.$$

Portanto, neste caso uma sequência recorrente linear de ordem 2 estará dada por:

$$a_n = r_1^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Uma outra tal sequência linearmente independente pode ser obtida usando um método do tipo "variação de parâmetros". Com efeito, considere como ponto de partida o seguinte *Ansatz*:

$$a_n = \lambda_n\, r_1^n.$$

Em tal caso, usando a relação de recorrência:

$$a_{n+2} = \alpha_0\, a_n + \alpha_1\, a_{n+1}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+2}\, r_1^{n+2} &= \alpha_0\, \lambda_n\, r_1^n \;+\; \alpha_1\, \lambda_{n+1}\, r_1^{n+1} \\
\lambda_{n+2}\, r_1^2 &= \alpha_0\, \lambda_n \;+\; \alpha_1\, \lambda_{n+1}\, r_1 \\
-\alpha_0\, \lambda_{n+2} &= \alpha_0\, \lambda_n \;+\; \frac{\alpha_1^2}{2}\, \lambda_{n+1} \\
-\alpha_0\, \lambda_{n+2} &= \alpha_0\, \lambda_n \;-\; 2\alpha_0\, \lambda_{n+1} \\
\alpha_0\, (\lambda_{n+2} \;-\; \lambda_{n+1}) &= \alpha_0\, (\lambda_{n+1} \;-\; \lambda_n).
\end{aligned}$$

Portanto, dado que $\alpha_0 \neq 0$, resulta:

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+2} \;-\; \lambda_{n+1} &= \lambda_{n+1} \;-\; \lambda_n \\
&= \lambda_n \;-\; \lambda_{n-1} \\
&= \lambda_{n-1} \;-\; \lambda_{n-2} \\
&= \ldots \\
&= \lambda_1 \;-\; \lambda_0.
\end{aligned}$$

Desta maneira, denotando a constante $c := \lambda_1 - \lambda_0$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+2} &= c \;+\; \lambda_{n+1} \\
&= c \;+\; c \;+\; \lambda_n \\
&= c \;+\; c \;+\; c \;+\; \lambda_{n-1} \\
&= \ldots \\
&= (n+2)c \;+\; \lambda_0.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\lambda_n = c\, n \;+\; \lambda_0,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Desta maneira, a sequência pode ser expressada como:

$$a_n = \lambda_n\, r_1^n = (c\, n + \lambda_0)\, r_1^n = c\, n\, r_1^n \;+\; \lambda_0\, r_1^n.$$

Agora, observe que $\mathcal{R}_2(\alpha_0, \alpha_1)$ é um espaço vetorial. Portanto, a sequência:

$$a_n = n\, r_1^n$$

também é recorrente linear de ordem 2 e resulta independentemente linear da anterior $a_n = r_1^n$. De fato, estas duas sequências formam uma base deste espaço, segundo estabelece o resultado a seguir.

37.2.4 Lema: *Suponha que $\alpha_1^2 + 4\alpha_0 = 0$ e seja r_1 a única solução da equação quadrática considerada no Lema 37.2.1, ou seja, $r_1 = \alpha_1/2$. Então:*

- ***(a)*** *O espaço vetorial $\mathcal{R}_2(\alpha_0, \alpha_1)$ resulta gerado pelas sequências $\{r_1^n\}$ e $\{n\, r_1^n\}$.*
- ***(b)*** *Os coeficientes a_n podem ser expressados explicitamente em função de a_0 e a_1 e dos parâmetros α_0 e α_1 na forma:*

$$a_n = \left(a_0 \;+\; \frac{2\, a_1 - \alpha_1\, a_0}{\alpha_1}\, n\right) \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^n. \qquad \square$$

Demonstração: **(a)** Se $\{a_n\} \in \mathcal{R}_2(\alpha_0, \alpha_1)$, basta provar que existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a_n = \lambda\, r_1^n \;+\; \mu\, n\, r_1^n = (\lambda \;+\; \mu\, n)\, r_1^n.$$

Em tal caso, teria-se, em particular:

$$\begin{aligned} a_0 &= (\lambda \;+\; \mu \cdot 0)\, r_1^0 = \lambda, \\ a_1 &= (\lambda \;+\; \mu)\, r_1. \end{aligned}$$

Usando a primeira relação segue que $\lambda = a_0$. Logo, a partir da segunda relação tem-se:

$$\mu = \frac{a_1 - \lambda\, r_1}{r_1} = \frac{a_1 - a_0\, r_1}{r_1} = \frac{a_1}{r_1} \;-\; a_0 = \frac{a_1}{\frac{\alpha_1}{2}} \;-\; a_0 = \frac{2\, a_1}{\alpha_1} \;-\; a_0 = \frac{2\, a_1 - \alpha_1\, a_0}{\alpha_1}.$$

(b) Usando o resultado do item anterior com as expressões para λ, μ obtidas acima, tem-se:

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda\, r_1^n \;+\; \mu\, n\, r_1^n \\ &= (\lambda \;+\; \mu\, n)\, r_1^n \\ &= \left(a_0 \;+\; \frac{2\, a_1 - \alpha_1\, a_0}{\alpha_1}\, n\right) \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^n \\ &= \frac{a_0\, \alpha_1 \;+\; 2\, a_1\, n \;-\; \alpha_1\, a_0\, n}{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^n \\ &= \frac{a_0\, \alpha_1\, (1-n) \;+\; 2\, a_1\, n}{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^n \\ &= \frac{a_0\, \alpha_1\, (1-n) \;+\; 2\, a_1\, n}{\alpha_1}\, \frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left[n\, a_1 \;-\; \frac{a_0 \alpha_1}{2}\, (n-1)\right] \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

∎

O caso $p = 2$ com discriminante negativo infelizmente foge do corpo dos números reais e, *ipso facto*, do escopo da presente obra. Contudo, cabe salientar que a sua abordagem não resulta nada difícil, após a introdução de algumas poucas definições básicas. Apelando para a paciência do leitor, o tratamento deste caso será adiado para uma melhor oportunidade.

37.3 Sequências Recorrentes Lineares de Ordem p

Em compensação o caso geral pode ser abordado com algum detalhe, embora basicamente com as mesmas ressalvas. O primeiro resultado, a seguir, indica uma possível abordagem. Embora esse método não resulte muito útil na prática, mas por outros motivos, a técnica usada resulta original o suficiente como para não poder deixar de mencioná-la aqui.

37.3.1 Lema: *Seja $\{a_n\}$ uma sequência recorrente linear de ordem p. Considere a sequência de* vetores *$\{u_n\}$ em $\mathbb{R}^p$ definida como:*

$$u_n := (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p-1}), \;\; \forall\, n \geqslant 0.$$

(a) *Para cada inteiro não-negativo $n \geqslant 0$ tem-se $u_{n+1} = A\,u_n$, onde $A \in M_p(\mathbb{R})$ é a matriz $p \times p$ com coeficientes reais dada por:*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-2} & \alpha_{p-1} \end{pmatrix}.$$

(b) *Para cada inteiro não-negativo $n \geqslant 0$ tem-se $u_n = A^n\,u_0$.* □

Demonstração: **(a)** Se $u_n = (a_n,\ a_{n+1}, \dots, a_{n+p-1}) \in \mathbb{R}^p$, então:

$$u_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+p}) = (a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i\, a_{n+i}).$$

Observe que esta relação pode ser expressada matricialmente como:

$$u_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{p-2} & \alpha_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \\ \vdots \\ \\ a_{n+p-2} \\ a_{n+p-1} \end{pmatrix} = A\,u_n.$$

(b) Usando o resultado do item anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$u_{n+1} = A\,u_n = A^2\,u_{n-1} = \ \dots\ = A^{n+1}\,u_0.$$

Portanto, $u_n = A^n\,u_0$, para todo $n \geqslant 0$, uma vez que esta relação é trivialmente válida no caso $n = 0$. ∎

Desta maneira, para obter uma expressão geral de todas as sequências recorrentes lineares de ordem p basta determinar u_n. Para tanto, basta computar as sucessivas potencias da matriz A. Infelizmente, uma abordagem direta deste cálculo poderia revelar-se uma tarefa infrutífera, mesmo para ordens p baixas. Contudo, determinar uma *base* para o espaço vetorial $\mathcal{R}_p(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$ resulta ainda possível.

37.3.2 Lema: *O polinômio característico $p(x) = \det(x\,I - A)$ da matriz A é dado por:*

$$p(x) = x^p - \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i\, x^i.$$ □

Demonstração: Observe que:

$$p(x) = |x\,I - A| = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & -\alpha_{p-2} & x-\alpha_{p-1} \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo o determinante a partir da última coluna, tem-se:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-\alpha_{p-1})\,x^{p-1} \;-\; (-1)\Delta(p-1,p) \\ &= (x-\alpha_{p-1})\,x^{p-1} \;+\; \Delta(p-1,p) \\ &= (x-\alpha_{p-1})\,x^{p-1} \;+\; \left[-\alpha_{p-2}\,x^{p-2} \;-\; (-1)\Delta(p-2,p-1)\right] \\ &= (x-\alpha_{p-1})\,x^{p-1} \;-\; \alpha_{p-2}\,x^{p-2} \;+\; \Delta(p-2,p-1) \\ &= \cdots \\ &= (x-\alpha_{p-1})\,x^{p-1} \;-\; \alpha_{p-2}\,x^{p-2} \;-\; \cdots \\ &= x^p \;-\; \alpha_{p-1}\,x^{p-1} \;-\; \alpha_{p-2}\,x^{p-2} \;-\; \cdots \\ &= x^p \;-\; \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i\,x^i. \end{aligned}$$

∎

37.3.3 Lema: *Considere a transformação linear T definida no espaço de todas as sequências $\{a_n\}$ como:*

$$T\,\{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

(a) *A condição (37.1.1) é satisfeita se e somente se $p(T)\,\{a_n\} = 0$.*

(b) *Em particular, $\mathcal{R}_p(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) = \ker p(T)$.* □

Demonstração: **(a)** Segue diretamente da expressão para p do resultado anterior.

(b) Segue trivialmente do item anterior. ∎

37.3.4 Lema: ***(a)*** *Todo polinômio p (num dado corpo) pode ser fatorizado em potências de fatores "primos" irredutíveis (em tal corpo). Ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$, naturais $l_1, l_2, \dots, l_k$ e polinômios irredutíveis (no dado corpo) tais que $p = p_1^{l_1}\,p_2^{l_2}\,\cdots\,p_k^{l_k}$.*

(b) *Em tal caso, se T é uma transformação linear entre espaços vetoriais, tem-se:*

$$\ker p(T) = \ker p_1^{l_1}(T) \;\oplus\; \ker p_2^{l_2}(T) \;\oplus\; \cdots \;\oplus\; \ker p_k^{l_k}(T).$$ □

Demonstração: Vide referências. ∎

No seguinte supõe-se que todos os fatores irredutíveis do polinômio p sejam *lineares*, ou seja:

$$p = p_1^{l_1}\, p_2^{l_2}\, \cdots\, p_k^{l_k},$$

com o grau de p_i igual a 1 para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Resulta altamente oportuno salientar que isso nem sempre acontece e depende do polinômio em questão, até onde o corpo aguentar. Por exemplo, no corpo real $\mathbb{R}$ o polinômio $p(x) = x^2 - 1$ pode ser fatorado em fatores primos lineares na forma $p(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Por outro lado, o polinômio $p(x) = x^2 + 1$ é irredutível no corpo real e não admite fatores primos lineares em tal corpo, mas sim, por exemplo, no corpo complexo $\mathbb{C}$, onde resulta $p(x) = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$. De fato, no corpo $\mathbb{C}$ *todo* polinômio possui fatores irredutíveis lineares, o que não é mais do que uma paráfrase do assim denominado Teorema Fundamental da Álgebra.

37.3.5 Lema: *Seja $q(x) = q_0 + q_1\, x + q_2\, x^2 + \cdots + q_l\, x^l$ um polinômio. Considere a sequência definida por $\{q(n)\, r_i^n\}$, para algum $r_i \in \mathbb{R}$.*

(a) *Um cálculo direto permite verificar a seguinte fórmula explícita:*

$$(T - r_i\, I)\, \{q(n)\, r_i^n\} = \left\{ \left(\sum_{k=0}^{l-1} \left[\sum_{i=k+1}^{l} \binom{i}{k} q_i \right] n^k \right) r_i^{n+1} \right\}.$$

(b) *Se a sequência $\{q(n)\, r_i^n\} \in \ker(T - r_i\, I)^{l_i}$, então o grau de q deve ser estritamente menor que l_i.*

(c) *A família de sequências dada por $\{n^j\, r_i^n\}$ para $j = 0, 1, \ldots, l_i - 1$ constitui um conjunto de l_i sequências linearmente independente em $\ker(T - r_i\, I)^{l_i}$.* □

Demonstração: **(a)** Observe que:

$$\begin{aligned}(T - r_i\, I)\, \{q(n)\, r_i^n\} &= T\, \{q(n)\, r_i^n\} \;-\; \{q(n)\, r_i^{n+1}\} \\ &= \{q(n+1)\, r_i^{n+1}\} \;-\; \{q(n)\, r_i^{n+1}\} \\ &= \{[q(n+1) - q(n)]\, r_i^{n+1}\}.\end{aligned}$$

Agora, se:

$$q(n) = \sum_{i=0}^{l} q_i\, n^i$$

então:

$$\begin{aligned}
q(n+1) &= \sum_{i=0}^{l} q_i\,(n+1)^i \\
&= \sum_{i=0}^{l} q_i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} n^k \\
&= \sum_{i=0}^{l} q_i \left[\sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} n^k \;+\; n^i\right] \\
&= \sum_{i=0}^{l} q_i\, n^i \;+\; \sum_{i=1}^{l} q_i \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} n^k \\
&= q(n) \;+\; \sum_{i=1}^{l} q_i \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} n^k.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$q(n+1) \;-\; q(n) = \sum_{i=1}^{l} q_i \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} n^k = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{i-1} q_i \binom{i}{k} n^k.$$

Com relação aos termos desta última soma dupla, observe que podem ser dispostos na tabela:

$k \rightarrow$	0	1	2	3	$\cdots$	$l-2$	$l-1$
$i \downarrow 1$	$*$						
2	$*$	$*$					
3	$*$	$*$	$*$				
4	$*$	$*$	$*$	$*$			
$\cdots$	....						
$l-1$	$*$	$*$	$*$	$*$	$\ldots$	$*$	
l	$*$	$*$	$*$	$*$	$\ldots$	$*$	$*$

Cada termo foi representado com um asterisco, pois sua forma detalhada não interessa na presente argumentação. Apenas é importante notar que a soma dupla anterior consiste em somar primeiro separadamente cada linha da tabela e depois adicionar todos os resultados obtidos. Dado que a soma é comutativa, o mesmo resultado será obtido somando primeiro separadamente cada *coluna* da tabela e depois adicionando todos os resultados obtidos. Em tal caso, a soma dupla resulta expressada da seguinte maneira:

$$q(n+1) \;-\; q(n) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{i-1} q_i \binom{i}{k} n^k = \sum_{k=0}^{l-1}\sum_{i=k+1}^{l} q_i \binom{i}{k} n^k = \sum_{k=0}^{l-1}\left[\sum_{i=k+1}^{l} q_i \binom{i}{k}\right] n^k.$$

Em particular, observe que o grau de $(T - r_i\, I)\,\{q(n)\, r_i^n\}$ é estritamente menor que l.

(b) Se fosse $l < l_i$, então o resultado seria trivialmente válido. Suponha portanto que $l \geqslant l_i$. A prova é por indução em l_i. No caso $l_i = 1$, observe que:

$$(T - r_i\, I)\,\{q(n)\, r_i^n\} = 0 \;\Rightarrow\; q(n+1) - q(n) = 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; q(n+1) = q(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para cada $n = 0, 1, \ldots, l$ deve ser:

$$q(n) = q(n-1) = \cdots = q_0.$$

Desta maneira q é uma constante, ou seja, um polinômio de grau 0, isto é, estritamente menor que $l_i = 1$. Para verificar a validade do passo indutivo, suponha que:

$$0 = (T - r_i\, I)^{l_i}\, \{q(n)\, r_i^n\} = (T - r_i\, I)^{l_i - 1}\, (T - r_i\, I)\, \{q(n)\, r_i^n\}.$$

Pela hipótese indutiva, o grau de $(T - r_i\, I)\, \{q(n)\, r_i^n\}$ deve ser estritamente menor que $l_i - 1$. Desta maneira, usando o resultado do item anterior, tem-se:

$$\sum_{i=k+1}^{l} q_i \binom{i}{k} = 0, \ \forall\, l_i - 1 \leqslant k \leqslant l - 1.$$

Em particular, para $k = l - 1$, tem-se:

$$0 = \sum_{i=(l-1)+1}^{l} q_i \binom{i}{l-1} = \sum_{i=l}^{l} q_i \binom{i}{l-1} = q_l \binom{l}{l-1} = q_l\, l \ \Rightarrow \ q_l = 0.$$

Para $k = l - 2$, tem-se:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=(l-2)+1}^{l} q_i \binom{i}{l-2} \\
&= \sum_{i=l-1}^{l} q_i \binom{i}{l-2} \\
&= q_{l-1} \binom{l-1}{l-2} \ + \ q_l \binom{l}{l-2} \\
&= q_{l-1} \binom{l-1}{l-2} \\
&= q_{l-1}\, (l-1),
\end{aligned}$$

de onde segue que $q_{l-1} = 0$. Analogamente, prova-se que $q_{l_i} = q_{l_i+1} = \cdots = q_{l-1} = q_l = 0$. Portanto, o grau de q deve ser estritamente menor que l_i.

(c) Seja $j \in \{0, 1, \ldots, l_i - 1\}$ arbitrário mas fixo. A partir da expressão obtida no item (a) anterior sabe-se que o grau de $(T - r_i\, I)\, \{n^j\, r_i^n\}$ é estritamente menor que j. Desta maneira, o grau de $(T - r_i\, I)^j\, \{n^j\, r_i^n\}$ deve ser estritamente menor que 1, ou seja, zero, tratando-se portanto de uma constante. Desta maneira, tem-se:

$$(T - r_i\, I)^{j+1}\, \{n^j\, r_i^n\} = (T - r_i\, I)\, (T - r_i\, I)^j\, \{n^j\, r_i^n\} = 0.$$

Portanto, $\{n^j\, r_i^n\} \in \ker(T - r_i\, I)^k$ para todo $k > j$. Em particular para $k = l_i$. ∎

37.3.6 Lema: *Suponha que todos os fatores primos de p sejam lineares, ou seja:*

$$p(x) = (x - r_1)^{l_1}\, (x - r_2)^{l_2}\, \cdots\, (x - r_k)^{l_k}.$$

(a) *Uma base do espaço vetorial $\mathcal{R}_p(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ é dada pelo conjunto de sequências:*

$$\big\{ \{n^j\, r_i^n\}_{n=0}^{\infty} \;:\; j = 0, 1, \ldots, l_i - 1 \big\}$$

para $i = 1, \ldots, k$.

(b) *Em particular, toda e qualquer sequência recorrente linear de ordem p será uma soma de sequências da forma $\{q(n)\, r_i^n\}$, onde q é um polinômio de grau estritamente menor que l_i.* ☐

Demonstração: **(a)** Para simplificar a notação seja $\mathcal{R}_p := \mathcal{R}_p(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$. Usando os resultados anteriores tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_p &= \ker p(T) \\ &= \ker \big[(T - r_1\, I)^{l_1}\, (T - r_2\, I)^{l_2} \,\cdots\, (T - r_k\, I)^{l_k}\big] \\ &= \ker(T - r_1\, I)^{l_1} \,\oplus\, \ker(T - r_2\, I)^{l_2} \,\oplus\, \cdots \,\oplus\, \ker(T - r_k\, I)^{l_k} \\ &= \operatorname{span}\big\{\{n^j\, r_1^n\}_{n=0}^{\infty}\big\}_{j=0}^{l_1 - 1} \,\oplus\, \operatorname{span}\big\{\{n^j\, r_2^n\}_{n=0}^{\infty}\big\}_{j=0}^{l_2 - 1} \,\oplus\, \cdots \,\oplus\, \operatorname{span}\big\{\{n^j\, r_k^n\}_{n=0}^{\infty}\big\}_{j=0}^{l_k - 1} . \end{aligned}$$

A primeira igualdade decorre do Lema 37.3.3(b). A segunda é consequência da hipótese do presente resultado. A terceira segue do Lema 37.3.4(b), entanto que a quarta e última do Lema 37.3.5(c). Adicionalmente, observe que o conjunto de sequências:

$$\big\{ \{n^j\, r_i^n\}_{n=0}^{\infty} \;:\; j = 0, 1, \ldots, l_i - 1 \big\}$$

para $i = 1, \ldots, k$, constitui um conjunto linearmente independente de $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = p = \dim \mathcal{R}_p$ sequências em $\mathcal{R}_p$. Portanto, $\mathcal{R}_p$ resulta gerado por tal conjunto, constituindo assim a base procurada.

(b) Trata-se apenas de uma paráfrase do resultado do item anterior. ∎

37.4 Sequências Subaditivas

37.4.1 Definição: Uma sequência de números reais $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denominada **subaditiva** se:

$$a_{n+m} \leqslant a_n + a_m, \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$ ♣

37.4.2 Lema: *Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência* subaditiva *de números reais, então:*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_m}{m}, \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$ ☐

Demonstração: Seja $m \in \mathbb{N}$ arbitrário mas fixo. Bastará provar que para todo ponto de acumulação α da sequência $\{a_n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem-se $\alpha \leqslant a_m/m$, pois o limite superior é o maior de tais pontos de acumulação. Por *reductio ad absurdum*, suponha-se que existe um tal α com $a_m/m < \alpha$. A partir deste ponto serão considerados dois casos separadamente.

Caso 1: $a_m \neq 0$.

Seja $\epsilon > 0$ definido como:

$$\epsilon = \frac{\alpha \,-\, \dfrac{a_m}{m}}{2}.$$

Pela arquimedianidade, deve existir $\tilde{p} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\tilde{p} > \left(1 \,-\, \frac{\epsilon}{4}\,\frac{m}{|a_m|}\right)\frac{4}{\epsilon}\,\frac{|a_m|}{m}.$$

Se $k(m)$ é definido como:

$$k(m) = \max\left\{a_q \;:\; q = 0, 1, \ldots, m-1\right\},$$

então também pela arquimedianidade deve existir $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_1 > \frac{4\,k(m)}{\epsilon}.$$

Observe que α é um ponto de acumulação da sequência $\{a_n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se e somente se para todo $\delta > 0$ tem-se:

$$\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N} \;:\; n > N \ \wedge\ \frac{a_n}{n} \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)\,.$$

Em outras palavras, se existe uma subsequência que converge para α. Portanto, dados $\delta > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ definidos como:

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}$$
$$N = (\tilde{p}\,m + m) \,+\, n_1$$

existe $n \in \mathbb{N}$ com $n > N$ tal que:

$$\frac{a_n}{n} > \alpha - \delta = \alpha - \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelo algoritmo da divisão, vide proposição 4.2.1, deve ser $n = pm + q$ para alguns $p, q \in \mathbb{Z}_+$ com $0 \leqslant q < m$.

Afirmação: $p > \tilde{p}$. $\triangledown$

Com efeito, tem-se:

$$q < m \;\Rightarrow\; \tilde{p}\,m + q < \tilde{p}\,m + m \leqslant N < n = pm \,+\, q \;\Rightarrow\; (p - \tilde{p})\,m > 0 \;\Rightarrow\; p > \tilde{p},$$

pois $\mathbb{N} \ni m > 0$. $\blacktriangledown$

Desta maneira, tem-se:

$$p > \tilde{p} > \left(1 \,-\, \frac{\epsilon}{4}\,\frac{m}{|a_m|}\right)\frac{4}{\epsilon}\,\frac{|a_m|}{m} = \left(1 \,-\, \frac{\epsilon}{4}\,\frac{m}{|a_m|}\right)\frac{4}{\epsilon}\,\frac{|a_m|}{m^2}\,m > \left(1 \,-\, \frac{\epsilon}{4}\,\frac{m}{|a_m|}\right)\frac{4}{\epsilon}\,\frac{|a_m|}{m^2}\,q$$
$$\Rightarrow\; pm\,\frac{\epsilon}{4}\,\frac{m}{|a_m|} > q \,-\, \frac{\epsilon}{4}\,\frac{m}{|a_m|}\,q \;\Rightarrow\; (pm + q)\,\frac{\epsilon}{4}\,\frac{m}{|a_m|} > q \;\Rightarrow\; \frac{q}{pm + q}\,\frac{|a_m|}{m} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Por outro lado:

$$n > N > n_1 > \frac{4\,k(m)}{\epsilon} \;\Rightarrow\; \frac{k(m)}{n} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Ainda por outro lado, pela subaditividade tem-se:

$$a_{pm} = a_{m\,+\,\cdots\,+\,m} \leqslant \underbrace{a_m \;+\; \cdots \;+\; a_m}_{p \text{ vezes}} = p\,a_m.$$

Portanto:

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{pm+q}}{n} \leqslant \frac{a_{pm} + a_q}{n} \leqslant \frac{p\,a_m + a_q}{n} = \frac{pm}{n}\,\frac{a_m}{m} \;+\; \frac{a_q}{n} = \frac{pm}{pm+q}\,\frac{a_m}{m} \;+\; \frac{a_q}{n}.$$

Desta maneira, dado que $k(m) = \max\{a_q \;:\; q = 0, 1, \ldots, m-1\}$, segue que:

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{pm}{pm+q}\,\frac{a_m}{m} \;+\; \frac{k(m)}{n}.$$

Reunindo todas as informações até aqui, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n} &\leqslant \frac{pm}{pm+q}\,\frac{a_m}{m} \;+\; \frac{k(m)}{n} \\
&= \frac{(pm+q)-q}{pm+q}\,\frac{a_m}{m} \;+\; \frac{k(m)}{n} \\
&= \left(1 \;-\; \frac{q}{pm+q}\right)\frac{a_m}{m} \;+\; \frac{k(m)}{n} \\
&= \frac{a_m}{m} \;-\; \frac{q\,a_m}{(pm+q)m} \;+\; \frac{k(m)}{n} \\
&\leqslant \frac{a_m}{m} \;+\; \left|\frac{q\,a_m}{(pm+q)m}\right| \;+\; \frac{k(m)}{n} \\
&= \frac{a_m}{m} \;+\; \frac{q}{pm+q}\,\frac{|a_m|}{m} \;+\; \frac{k(m)}{n} \\
&< \frac{a_m}{m} \;+\; \frac{\epsilon}{4} \;+\; \frac{\epsilon}{4} \\
&= \frac{a_m}{m} \;+\; \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Mas combinando esta última relação com uma anterior, a saber:

$$\frac{a_n}{n} > \alpha - \frac{\epsilon}{2},$$

obtém-se uma contradição. Com efeito, basta observar que:

$$\frac{\epsilon}{2} \;+\; \frac{\epsilon}{2} = \epsilon < 2\,\epsilon = \alpha \;-\; \frac{a_m}{m} \;\Rightarrow\; \frac{a_m}{m} \;+\; \frac{\epsilon}{2} < \alpha \;-\; \frac{\epsilon}{2} \;\Rightarrow\; \frac{a_n}{n} < \frac{a_m}{m} \;+\; \frac{\epsilon}{2} < \alpha \;-\; \frac{\epsilon}{2} < \frac{a_n}{n}.$$

<u>Caso 2</u>: $a_m = 0$.

Seja $\epsilon > 0$ definido como:

$$\epsilon = \frac{\alpha}{2},$$

pois neste caso $\alpha > a_m/m = 0$. Como no caso precedente, se $k(m)$ é definido como:

$$k(m) = \max\{a_q \ : \ q = 0, 1, \ldots, m-1\},$$

então pela arquimedianidade deve existir $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_1 > \frac{2\,k(m)}{\epsilon}.$$

Analogamente, dado que α é um ponto de acumulação, para $\delta > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ definidos como:

$$\delta = \frac{\epsilon}{2}$$
$$N = n_1$$

existe $n \in \mathbb{N}$ com $n > N$ tal que:

$$\frac{a_n}{n} > \alpha - \delta = \alpha - \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelo algoritmo da divisão, deve ser $n = pm + q$ para alguns $p, q \in \mathbb{Z}_+$ com $0 \leqslant q < m$. Exatamente como no caso anterior, pela subaditividade tem-se $a_{pm} \leqslant p\,a_m$ de onde segue que:

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{pm+q}}{n} \leqslant \frac{a_{pm} + a_q}{n} \leqslant \frac{p\,a_m + a_q}{n} = \frac{a_q}{n} \leqslant \frac{k(m)}{n},$$

pois neste caso $a_m = 0$. Reunindo todas as informações até aqui, tem-se:

$$n > N = n_1 > \frac{2\,k(m)}{\epsilon} \ \Rightarrow\ \frac{k(m)}{n} < \frac{\epsilon}{2} \ \Rightarrow\ \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{k(m)}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Mas combinando esta última relação com uma anterior, a saber:

$$\frac{a_n}{n} > \alpha - \frac{\epsilon}{2},$$

obtém-se uma contradição. Com efeito, basta observar que:

$$\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon < 2\,\epsilon = \alpha \ \Rightarrow\ \frac{\epsilon}{2} < \alpha - \frac{\epsilon}{2} \ \Rightarrow\ \frac{a_n}{n} < \frac{\epsilon}{2} < \alpha - \frac{\epsilon}{2} < \frac{a_n}{n}.$$ ∎

37.4.3 Corolário: *Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência* subaditiva *de números reais, então o limite* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ *existe e vale* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$. □

Demonstração: Basta observar que:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

A primeira desigualdade segue do resultado anterior e da definição de ínfimo. Para justificar a segunda desigualdade, observe que se fosse o contrário, ou seja:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} > \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n},$$

então existiria um ponto de acumulação α com:

$$\alpha < \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_m}{m}, \ \forall\, m \in \mathbb{N},$$

o que resulta uma contradição. Finalmente, a terceira desigualdade é trivial. Desta maneira, o limite existe e deve ser:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$ ∎

37.4.4 Observação: Um resultado análogo vale para sequências que satisfazem a desigualdade contrária:

$$a_{n+m} \geqslant a_n + a_m, \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, também existe o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$, com valor igual a $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$. ♣

Exercícios para o Capítulo 37

37.5 Sequências Monótonas

O conceito de monotonia para sequências foi introduzido na seção 7.1, vide definição 7.1.4, reproduzido a seguir para conveniência do leitor.

Uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita **crescente**, ou **estritamente crescente**, se:

$a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N};$

e **não-decrescente** se:

$a_n \leqslant a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Analogamente definem-se as sequências **decrescentes** e **não-crescentes**. Ou seja, uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ será dita **decrescente**, ou **estritamente decrescente**, se:

$a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N};$

e **não-crescente** se:

$a_n \geqslant a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$

37.5.1 Exercício: Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Prove que:

(a) Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é não-crescente, então para todo $N \in \mathbb{N}$ tem-se $a_n \leqslant a_N$, $\forall n \geqslant N$.

(b) Analogamente, se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é não-decrescente, então para todo $N \in \mathbb{N}$ tem-se $a_N \leqslant a_n$, $\forall n \geqslant N$. ♣

37.5.2 Exercício: Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Considere as seguintes condições:

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é não-crescente.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. $a_n \geqslant 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Verifique os seguintes enunciados:

(a) As primeiras duas condições implicam a terceira.

(b) Prove que para uma sequência não-crescente, a condição de não ser eventualmente constante, ou seja, é falso que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a_N$ para todo $n \geqslant N$, resulta equivalente à condição de possuir uma subsequência estritamente decrescente.

(c) A combinação da primeira e terceira condições não basta para garantir a segunda. Tal enunciado pode ser verificado de maneira simples considerando uma sequência constante e positiva, por exemplo $a_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Forneça um exemplo de sequência que não seja eventualmente constante satisfazendo a primeira e terceira condições mas não a segunda.

(d) Forneça um exemplo de sequência satisfazendo a segunda e terceira condições mas não a primeira.

(e) Prove que se a segunda e terceira condições são válidas, então a sequência possui uma subsequência estritamente decrescente, a menos que seja eventualmente constante, em cujo caso o valor constante deve ser nulo pela segunda condição. Incidentalmente, observe que se a sequência for eventualmente constante, então a primeira condição é satisfeita trivialmente. ♣

37.5.3 Exercício: Estabeleça e prove o resultado análogo ao do exercício anterior para sequências $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não-decrescentes, com $a_n \leqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e tais que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ♣

37.6 Convergência de Algumas Sequências

37.6.1 Exercício: Verifique o limite das seguintes sequências:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

Sugestão: Vide exercício 7.5.1(a).

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$ ♣

37.6.2 Exercício: Como o leitor já pode ter suspeitado, o item (a) do exercício anterior pode ser generalizado da seguinte maneira: Se $p > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0.$ ♣

37.6.3 Exercício: Verifique o limite das seguintes sequências:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0.$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n} \ - \ \sqrt[4]{n+1} = 0.$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^2+1} \ - \ \sqrt[4]{n^2} = 0.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^2+1} \ - \ \sqrt{n+1} = 0.$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} \ - \ \sqrt[8]{n^2} = 0.$ ♣

37.6.4 Exercício: Considerando por separado cada um dos casos a seguir, prove que se $p > 0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$. Incidentalmente, observe-se que esse resultado já foi obtido, embora por outros médios, no capítulo 12.

(a) Caso $p > 1$.

Sugestão: Prove que a sequência $x_n := \sqrt[n]{p} - 1$ converge para zero.

(b) Caso $p = 1$. Este caso é trivial.

(c) Caso $p < 1$.

Sugestão: como $1/p > 1$ pode-se reduzir o presente caso ao primeiro. ♣

37.6.5 Exercício: Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ♣

37.6.6 Exercício: Fazendo uso do resultado do exercício anterior, verifique o limite das seguintes sequências:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1.$

Sugestão: Observe que $n < n+1 < n^2$ para $n \geqslant 2$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}} = 1.$

Sugestão: Idem.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/n} = 1.$ ♣

37.6.7 Exercício: Prove que se $p > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0.$ ♣

37.6.8 Exercício: Considerando por separado cada um dos seguintes casos, prove que se $|x| < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0.$

(a) Caso $0 < x < 1$.

Sugestão: considere $\alpha = 0$ e $x = 1/(1+p)$ no exercício anterior.

(b) Caso $x = 0$. Este caso é trivial.

(c) Caso $-1 < x < 0$.

Sugestão: como $x^n = (-1)^n(-x)^n$ pode-se reduzir o presente caso ao primeiro. ♣

37.6.9 Exercício: Convergência da Média Aritmética

(a) Seja $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para zero, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Prove que a *nova* sequência $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$w_n = \frac{z_1 \ + \ z_2 \ + \ z_3 \ + \ \cdots \ + \ z_n}{n}$$

também converge para zero.

(b) Se $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, então $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

Sugestão: Em tal caso $(z_n - L) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e o resultado do item (a) pode ser aplicado.

(c) Forneça um exemplo de sequência z_n *não-convergente* tal que a sequência de médias aritméticas w_n seja convergente.

Sugestão: Considere $z_n = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$. ♣

37.6.10 Exercício: Convergência da Média Geométrica

Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais *positivos*, ou seja, $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que converge para algum número, digamos, L, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Prove que a *nova* sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$y_n = \sqrt[n]{x_1\, x_2\, x_3\, \cdots\, x_n}$$

também converge para L. ♣

37.6.11 Exercício: O cálculo dos limites das seguintes sequências constitui um exemplo da aplicação do resultado anterior.

(a) Para todo $p \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$. Observe que este resultado constitui uma generalização do exercício 37.6.5.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}} = 0$. ♣

Capítulo 38

Séries

38.1 Definições e Resultados Básicos

38.1.1 Definição: A sequência $\{s_n\}$ de **somas parciais** de uma sequência $\{a_n\}$ é definida como:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \; + \; a_2 \; + \; \cdots \; + \; a_n. \qquad \clubsuit$$

38.1.2 Definição: Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada **somável** se a sequência $\{s_n\}$ das suas somas parciais é convergente. Em tal caso, o seu limite:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 \; + \; a_2 \; + \; \cdots \; + \; a_n)$$

denota-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

e recebe o nome de **soma** da sequência $\{a_n\}$. $\clubsuit$

38.1.3 Observação: A terminologia introduzida costuma-se substituir por expressões menos precisas. De fato, o título do presente capítulo provem da linguagem corrente. Uma soma infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

denomina-se generalmente **série**, ou série infinita, destacando a palavra "série" a conexão com a sequência infinita $\{a_n\}$. A afirmação de $\{a_n\}$ ser, ou não ser, somável é frequentemente substituída pela afirmação de que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge ou não converge. Esta última terminologia resulta um tanto peculiar, pois no melhor dos casos o símbolo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

refere-se a um número (de maneira tal que não pode "convergir") e não designa absolutamente nada se a sequência $\{a_n\}$ não for somável. Contudo, estamos mais uma vez ante o paradigma do popular: Esta linguagem informal resulta conveniente, é muito difundida e resulta pouco provável que ceda ante ataques fundamentados na lógica. ♣

38.1.4 Exemplo: A Série Geométrica de razão r

Considerada como a rainha das sequências somáveis, provavelmente devido ao fato que as suas somas parciais

$$s_n = 1 \,+\, r \,+\, r^2 \,+\, \cdots \,+\, r^n,$$

podem ser explicitamente calculadas, de fato, de maneira bem simples, como no exercício 3.5.1:

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Observe que se $|r| < 1$, pelo exercício 37.6.8 tem-se que $r^{n+1} \to 0$. Portanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}, \;\; |r| < 1.$$

Em particular,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Observe que se $r = 1$, então $s_n = n + 1$, de onde segue que a série geométrica não converge neste caso. Se $|r| > 1$, então $r^{n+1} \to \infty$ se $r > 1$ ou diverge sem limite se $r < -1$. Com efeito, nesse último caso tem-se que $r^{2k} \to +\infty$, entanto que $r^{2k+1} \to -\infty$. Desta maneira, a moral da história toda resume-se no fato que a série geométrica de razão r converge se e somente se $|r| < 1$. ♣

38.1.5 Exemplo: Uma sequência não somável

A sequência $\{1/n\}$ não é somável. Com efeito, a seguinte agrupação dos termos $1/n$ mostra que a sequência de somas parciais s_n nem sequer é limitada:

$$1 \,+\, \frac{1}{2} \quad+\quad \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\substack{\geqslant \frac{1}{2} \\ \text{(2 termos } \geqslant \frac{1}{4} \text{ cada.)}}} \quad+\quad \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\substack{\geqslant \frac{1}{2} \\ \text{(4 termos } \geqslant \frac{1}{8} \text{ cada.)}}} \quad+\quad \underbrace{\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\substack{\geqslant \frac{1}{2} \\ \text{(8 termos } \geqslant \frac{1}{16} \text{ cada.)}}} \quad+\quad \cdots.$$

Ou seja, $s_{2^n} > 1 + n/2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ♣

38.1.6 Lema (Critério de Cauchy): *A sequência $\{a_n\}$ é somável se e somente se*

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m = 0. \quad \square$$

Demonstração: A sequência é somável se, e somente se, a sequência de somas parciais é convergente. Esta última condição equivale ao fato da sequência de somas parciais ser uma sequência de Cauchy, ou seja:

$$0 = \lim_{m,n\to\infty} s_m - s_n = \lim_{m,n\to\infty} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m. \quad \blacksquare$$

Embora o critério de Cauchy tenha certa importância teórica, é pouco útil para decidir a somabilidade de qualquer sequência em particular. Contudo, uma consequência simples desse critério fornece uma condição *necessária* para a somabilidade, que resulta importante o suficiente como para que não seja possível deixar de citá-la explicitamente:

38.1.7 Lema (Condição do Resto): *Se $\{a_n\}$ é somável, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.* $\square$

Demonstração: A condição segue diretamente do critério de Cauchy considerando $m = n+1$. Alternativamente, pode ser demonstrada de maneira auto-contida como segue. Se

$$\lim_{n\to\infty} s_n = l,$$

então:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = l - l = 0. \quad \blacksquare$$

38.1.8 Observação: A condição do resto está longe de ser suficiente, como mostra o exemplo 38.1.5. Com efeito, em tal caso tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

mas a sequência $\{1/n\}$ não é somável. ♣

38.2 Sequências Não-Negativas

38.2.1 Definição: Uma sequência $\{a_n\}$ é denominada **não-negativa** se $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ♣

38.2.2 Lema (Critério de Limitação): *Se $\{a_n\}$ é uma sequência não-negativa, então é somável se e somente se o conjunto das suas somas parciais é limitado.* $\square$

Demonstração: Observe que se $\{a_n\}$ é não-negativa, então a sequência de somas parciais

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

é não-decrescente. Se tal sequência for também limitada, então pelo lema 8.2.1 seria convergente, ou seja, a sequência original seria somável. Reciprocamente, se $\{a_n\}$ é somável, então a sequência de somas parciais é convergente e portanto limitada, segundo o resultado do exercício 7.3.1(c). ∎

38.2.3 Teorema (Prova de Comparação)**:** *Se $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\{b_n\}$ é somável, então $\{a_n\}$ também é somável.* □

Demonstração: Sejam $\{s_n\}, \{t_n\}$ as sequências de somas parciais de $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ respectivamente, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ sejam

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Se $\{b_n\}$ é somável, pelo critério de limitação deve ser $\{t_n\}$ limitada. Pela hipótese, para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $0 \leqslant s_n \leqslant t_n$, de onde segue que $\{s_n\}$ também deve ser limitada. Portanto, usando novamente o critério de limitação, $\{a_n\}$ é somável. ∎

38.2.4 Exemplo: A prova de comparação pode ser utilizada frequentemente para analisar séries de aspecto muito complicado, onde a maior parte da complicação é irrelevante. Por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^2}$$

converge, pois

$$0 \leqslant \frac{2 + \operatorname{sen}^3(n+1)}{2^n + n^2} < \frac{3}{2^n}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

é uma série geométrica de razão $1/2$ e portanto convergente, segundo o exemplo 38.1.4. ♣

38.2.5 Exemplo: Resulta possível utilizar a prova de comparação também no sentido inverso. Por exemplo, podemos esperar que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

seja divergente, pois $(n+1)/(n^2+1)$ é praticamente $1/n$ quando n é grande. Para provar isso, observe que

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{n+1}{n^2+1}, \ \forall\, \mathbb{N} \ni n > 1.$$

Esta relação prova que a série originalmente considerada diverge, pois se convergisse, então, pela prova de comparação, a série $1/n$ também seria convergente. Mas esto último é falso, segundo o exemplo 38.1.5. ♣

De fato, considerando a técnica empregada no exemplo 38.1.5, o seguinte resultado poderia ilustrar o aforismo que dignifica ironicamente este tipo de truques bem sucedidos ao salientar que "um teorema é truque que se usa sistematicamente" (George Pólya).

38.2.6 Teorema (de Condensação de Cauchy)**:** *Seja $\{a_n\}$ uma sequência não-negativa e não-crescente, ou seja, $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant 0$. Em tal caso, $\{a_n\}$ é somável se e somente se $\{2^n a_{2^n}\}$ é somável.* □

Demonstração: Sejam $\{s_n\}, \{t_n\}$ as sequências de somas parciais de $\{a_n\}$ e $\{2^n\, a_{2^n}\}$ respectivamente, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ sejam

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \ + \ a_2 \ + \ \cdots \ + \ a_n,$$

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} 2^i a_{2^i} = 2^1\, a_{2^1} \ + \ 2^2\, a_{2^2} \ + \ \cdots \ + \ 2^n\, a_{2^n}.$$

Se $[x]$ denota a parte inteira de x, então tem-se:

$$[\log_2 n] \leqslant \log_2 n < [\log_2 n] \ + \ 1.$$

Portanto:

$$2^{m-1} \leqslant n < 2^m,$$

onde $m = m(n) := [\log_2 n] + 1$. Agora observe que:

$$\begin{aligned} s_n \leqslant s_{2^m} &= a_1 \ + \ (a_2 + a_3) \ + \ \cdots \ + \ (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^k+2^k-1}) \ + \ \cdots \\ &\leqslant a_1 \ + \ 2\, a_2 \ + \ \cdots \ + \ 2^k\, a_{2^k} \ + \ \cdots = a_1 \ + \ \sum_{i=1}^{m} 2^i\, a_{2^i} = a_1 \ + \ t_m. \end{aligned}$$

Suponha que $\{2^n\, a_{2^n}\}$ é somável. Em tal caso, pelo critério de limitação, a sequência de somas parciais $\{t_n\}$ é limitada. Pela relação acima, $\{s_n\}$ também é limitada. Portanto, usando novamente o critério de limitação, resulta $\{a_n\}$ somável.

<u>Afirmação</u>: Para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$2^{k+1}\, a_{2^{k+1}} \leqslant 2 \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i. \qquad \triangledown$$

Com efeito, tem-se:

$$\begin{aligned}
2^{k+1}\, a_{2^{k+1}} &= 2^k\, 2\, a_{2^{k+1}} \\
&= 2^k\, (a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}}) \\
&= (a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}}) \;+\; (a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}}) \;+\; \cdots \;+\; (a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}}) \\
&\leqslant (a_{2^k+1} + a_{2^k+1}) \;+\; (a_{2^k+2} + a_{2^k+2}) \;+\; \cdots \;+\; (a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}}) \\
&= 2\, a_{2^k+1} \;+\; 2\, a_{2^k+2} \;+\; \cdots \;+\; 2\, a_{2^{k+1}} \\
&= 2 \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i .
\end{aligned}$$

Observe que a desigualdade intermediária decorre da hipótese $a_n \geqslant a_{n+1}$. ▼

Desta maneira, se $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
t_n &\leqslant 2\, a_1 \;+\; t_n \\
&= 2\, a_1 \;+\; 2^1\, a_{2^1} \;+\; 2^2\, a_{2^2} \;+\; 2^3\, a_{2^3} \;+\; \cdots \;+\; 2^n\, a_{2^n} \\
&\leqslant 2\, a_1 \;+\; 2\, a_2 \;+\; 2\,(a_3 + a_4) \;+\; 2\,(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) \;+\; \cdots \;+\; 2\,(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\
&= 2\, s_{2^n} .
\end{aligned}$$

Suponha que $\{a_n\}$ é somável. Em tal caso, pelo critério de limitação, a sequência de somas parciais $\{s_n\}$ é limitada. Pela relação acima, $\{t_n\}$ também é limitada. Portanto, usando novamente o critério de limitação, resulta $\{2^n\, a_{2^n}\}$ somável. ∎

38.2.7 Exemplo: O teorema anterior fornece uma prova alternativa da não-somabilidade de $\{1/n\}$. Com efeito, $2^n(1/2^n) = 1$, que constitui uma sequência obviamente não-somável. ♣

38.2.8 Exemplo: Seja $s \in \mathbb{R}$. A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

é somável se e somente se $s > 1$. Com efeito, basta usar o resultado anterior, observando que

$$2^n\, a_{2^n} = 2^n\, \frac{1}{2^{ns}} = \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n$$

trata-se de uma série geométrica de razão 2^{1-s}, menor que 1 se e somente $1 - s < 0$. Vide exemplo 38.1.4. ♣

38.3 Alguns Testes de Convergência

Critérios importantes para verificar a somabilidade de sequências podem ser obtidos a partir da prova de comparação quando são utilizadas como catalizadores algumas séries previamente analisadas. Por exemplo, escolhendo a série geométrica 38.1.4, convergente *par excellence*, obtém-se um par dos mais importantes de todos os testes de somabilidade.

38.3.1 Teorema (Teste da Raiz): *Dada $\{a_n\}$, seja $r := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Então:*

(a) *Se $r < 1$ a sequência $\{a_n\}$ é somável.*

(b) *Se $r > 1$ os termos a_n não tendem para zero, e portanto a sequência não é somável.*

(c) *Se $r = 1$ o teste é inconclusivo.* □

Demonstração: **(a)** Se que $r < 1$, deve existir algum $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $r < \rho < 1$. Por hipótese, tem-se:

$$1 > r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{|a_k|} \right).$$

Portanto, existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leqslant \sup_{k\geqslant N} \sqrt[k]{|a_k|} < \rho, \ \forall\, k \geqslant N.$$

Desta maneira, tem-se:

$$0 \leqslant |a_k| < \rho^k, \ \forall\, k \geqslant N.$$

Dado que $0 \leqslant r < \rho < 1$, a sequência geométrica $\{\rho^n\}$ é somável, vide 38.1.4. Portanto, pela identidade acima e a prova de comparação 38.2.3, a sequência $\{|a_n|\}$ é somável. Observe que:

$$0 \leqslant |a_{n+1} \ + \ a_{n+2} \ + \ \cdots \ + \ a_m| \leqslant |a_{n+1}| \ + \ |a_{n+2}| \ + \ \cdots \ + \ |a_m|.$$

Pelo critério de Cauchy 38.1.6, o termo à direita na relação acima converge para zero quando m, n tendem para infinito. Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} \ + \ a_{n+2} \ + \ \cdots \ + \ a_m = 0.$$

Desta maneira, usando novamente o critério de Cauchy 38.1.6, segue que $\{a_n\}$ é somável.

(b) Se $r > 1$, seja $\epsilon := r - 1 > 0$. Pelo lema 20.2.7, existem infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que $a_n > r - \epsilon = 1$. Em particular, o termo geral a_n não converge para zero. Portanto, pela condição do resto 38.1.7, a sequência $\{a_n\}$ não é somável.

(c) Pelo exercício 37.6.5, sabe-se que:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Observe que neste caso a sequência $\{1/n\}$ não é somável, segundo o exemplo 38.1.5. Por outro lado, pelo exercício 37.6.11(a), tem-se:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1.$$

Contudo, neste caso a sequência $\{1/n^2\}$ é somável, segundo o exemplo 38.2.8. ∎

38.3.2 Teorema (Teste da Razão): *Seja $\{a_n\}$ com $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então:*

(a) *Se*

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

a sequência é somável.

(b) *Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1, \ \forall\, n \geqslant N$$

a sequência não é somável.

(c) *No caso em que*

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 \leqslant \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

o teste é inconclusivo. ∎

Demonstração: **(a)** Para simplificar a notação seja

$$r := \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Se $r < 1$, deve existir algum $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $r < \rho < 1$. Por hipótese, tem-se:

$$1 > r = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geqslant n} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right).$$

Portanto, existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant \sup_{k\geqslant N} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < \rho, \ \forall\, k \geqslant N.$$

Desta maneira, tem-se:

$$|a_{k+1}| < \rho\, |a_k|, \ \forall\, k \geqslant N.$$

Portanto, para todo $n \geqslant N+1$ tem-se:

$$0 \leqslant |a_n| < \rho\, |a_{n-1}| < \rho^2\, |a_{n-2}| < \cdots < \rho^{n-N}\, |a_N| = |a_N|\, \rho^{-N}\, \rho^n.$$

Dado que $0 \leqslant r < \rho < 1$, a sequência geométrica $\{\rho^n\}$ é somável, vide 38.1.4. Portanto, pela identidade acima e a prova de comparação 38.2.3, a sequência $\{|a_n|\}$ é somável. Observe que:

$$0 \leqslant |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|.$$

Pelo critério de Cauchy 38.1.6, o termo à direita na relação acima converge para zero quando m, n tendem para infinito. Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m = 0.$$

Desta maneira, usando novamente o critério de Cauchy 38.1.6, segue que $\{a_n\}$ é somável.

(b) Neste caso tem-se:

$$|a_{n+1}| \geqslant |a_n|\,, \ \forall\, n \geqslant N.$$

Observe que a hipótese $a_N \neq 0$ implica $|a_N| > 0$. Portanto, para todo $n \geqslant N+1$ tem-se:

$$|a_n| \geqslant |a_{n-1}| \geqslant |a_{n-2}| \geqslant \cdots \geqslant |a_N| > 0.$$

Em particular, o termo geral a_n não converge para zero. Portanto, pela condição do resto 38.1.7, a sequência $\{a_n\}$ não é somável.

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $a_n = 1/n$. Em tal caso tem-se:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Observe que neste caso a sequência $\{1/n\}$ não é somável, segundo o exemplo 38.1.5. Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$ seja agora $a_n = 1/n^2$. Neste caso tem-se:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = 1.$$

Contudo, neste caso a sequência $\{1/n^2\}$ é somável, segundo o exemplo 38.2.8. ∎

38.3.3 Exemplo: Considere a série definida por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, r^n.$$

Neste caso tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, r^{n+1}}{n\, r^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n}\, r = r.$$

Portanto, se $0 \leqslant r < 1$ a série considerada converge. Em particular:

$$\lim_{n\to\infty} n\, r^n = 0.$$

Este resultado vale também para $-1 < r \leqslant 0$, pois o módulo de $n\, r^n$ não muda. Constitui um instrutivo exercício, uma verdadeira prova de razão, provar este resultado sem usar como intermediário a prova da razão. ♣

38.3.4 Observação: **(a)** Nenhum desses testes é particularmente sutil em relação à divergência. Ambos a deduzem do fato do termo de a_n não tender para zero quando $n \to \infty$.

(b) O teste da razão resulta frequentemente mais fácil de aplicar que o teste da raiz, pois em geral é mais fácil calcular quocientes que raízes enésimas. ♣

Não resulta muito difícil exibir de séries para as que o teste da raiz pode ser aplicado, entanto o teste da razão falha, como nos dois exemplos a seguir.

38.3.5 Exemplo: Considere a série dada pela expressão:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \cdots .$$

Mais precisamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ deve ser:

$$a_{2n-1} = 2^{-n},$$
$$a_{2n} = 3^{-n}.$$

Desta maneira, tem-se:

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 3^{-n/2n} = 3^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Analogamente:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 2^{-n/(2n-1)} = 2^{-1/2} \lim_{n\to\infty} 2^{1/2}\, 2^{-n/(2n-1)} = 2^{-1/2} \lim_{n\to\infty} 2^{-1/2(2n-1)}$$
$$= 2^{-1/2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1/(2n-1)} = 2^{-1/2} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Note que o valor do limite acima foi determinado usando o resultado do exercício 37.6.4. Portanto, o teste da raiz indica convergência. Por outro lado:

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{-n}}{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Analogamente:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-(n+1)}}{3^{-n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Portanto, o teste da razão nada permite concluir. ♣

38.3.6 Exemplo: Considere a série dada pela expressão:

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^6} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{2^{2(n-1)}} + \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n}} + \cdots .$$

Mais precisamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ deve ser:

$$a_{2n-1} = 2^{-(2n-1)},$$
$$a_{2n} = 2^{-2(n-1)}.$$

Desta maneira, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 2^{-(2n-1)/(2n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o teste da raiz indica convergência. Por outro lado:

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-(2n+1)}}{2^{-2(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-2}}{2^{2n+1}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

Analogamente:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-2(n-1)}}{2^{-(2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n-1}}{2^{2n-2}} = 2.$$

Portanto, o teste da razão nada permite concluir. ♣

Embora os dois exemplos precedentes aparentem ser de tipo um tanto artificial, o teste da raiz possui, de fato, maior alcance que o da razão. Mais precisamente, sempre que o teste da razão concluir por convergência, também o fará o teste da raiz; sempre que o teste da raiz for inconcludente também o será o da razão. Isso é consequência do resultado a seguir.

38.3.7 Teorema: *Para qualquer sequência $\{a_n\}$ de números reais positivos tem-se:*

(a) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(b) $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. □

Demonstração: **(a)** Para simplificar a notação seja

$$r := \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Se $r = +\infty$ a relação enunciada é trivialmente válida. Suponha portanto $r \in \mathbb{R}$, isto é, r finito. Em tal caso, obviamente existe algum $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $r < \rho$. Por definição, tem-se:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geqslant n} \frac{a_{k+1}}{a_k} \right).$$

Portanto, existe algum $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \sup_{k\geqslant N} \frac{a_{k+1}}{a_k} < \rho, \ \forall\, k \geqslant N.$$

Desta maneira, dado que $a_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$a_{k+1} < \rho\, a_k, \ \forall\, k \geqslant N.$$

Portanto, para todo $n \geqslant N+1$ tem-se

$$0 < a_n < \rho\, a_{n-1} < \rho^2\, a_{n-2} < \cdots < \rho^{n-N}\, a_N = a_N\, \rho^{-N}\, \rho^n,$$

de onde segue:

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_N\,\rho^{-N}}\,\rho,\ \forall\, n \geqslant N+1.$$

Observe que o primeiro fator no membro direito na relação acima converge para 1, segundo o resultado do exercício 37.6.4. Desta maneira, tem-se:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_N\,\rho^{-N}}\,\rho = \rho \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_N\,\rho^{-N}} = \rho\cdot 1 = \rho.$$

Observe que a relação acima é válida para qualquer $\rho > r$. Portanto, deve ser:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant r.$$

(b) Esta relação prova-se analogamente à do item anterior. ∎

Embora os testes da raiz e da razão possuem certa importância teórica, como ferramenta prática podem chegar a ser decepcionantes em alguns casos. Um dos inconvenientes provem do fato que os limites envolvidos podem ser difíceis de determinar ou ainda podem não existir. Uma deficiência mais séria, que aparece com regularidade desconcertante, provem do fato que esse limite pode ser igual à unidade, em cujo caso os testes são basicamente inconclusivos: A série pode não convergir, como no caso de $1/n$, mas também pode fazê-lo, como no de $1/n^2$.

O próximo resultado fornece uma prova completamente diferente para a determinação da convergência o divergência de séries infinitas. Ao igual que os dois testes anteriores, é uma consequência imediata da prova de comparação. Porém, a série escolhida para comparar constitui uma inovação.

38.3.8 Teorema (Teste da Integral)**:** *Seja f uma função positiva e decrescente no intervalo $[1,\infty)$ tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\{a_n\}$ é somável se e somente se existe o limite:*

$$\int_1^\infty f := \lim_{R\to\infty} \int_1^R f.$$ □

Demonstração: Observe que:

$$= \int_1^n f = \int_1^2 f \;+\; \int_2^3 f \;+\; \cdots \;+\; \int_{n-1}^n f = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f.$$

Portanto, a existência da integral imprópria é equivalente à somabilidade da sequência $\left\{\int_n^{n+1} f\right\}$. Agora, dado que f é decrescente, para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$f(k+1) < f(x) < f(k),\ \forall\, x \in [k, k+1].$$

Portanto:

$$a_{k+1} = f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f \leqslant \int_k^{k+1} f(k) = f(k) = a_k.$$

Por hipótese, $a_k = f(k) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, trata-se de sequências não-negativas, podendo ser aplicada a prova de comparação 38.2.3. Desta maneira, a primeira desigualdade acima implica que a sequência $\{a_n\}$ é somável se a integral imprópria existe. Reciprocamente, a segunda desigualdade acima estabelece a existência da integral imprópria a partir da somabilidade da sequência.

Incidentalmente, somando cada uma das relações acima para $k = 1, 2, \ldots, n$ tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f = \int_{1}^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Portanto, se os respectivos limites quando n tende para infinito existirem, teria-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \; - \; a_1 \leqslant \int_{1}^{\infty} f \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Esta última relação pode ser utilizada para estimar o valor da integral imprópria a partir do valor da série, ou vice-versa, segundo corresponda. ∎

Embora alguns dos critérios de somabilidade considerados até aqui sejam aplicáveis apenas a sequências não-negativas, as sequências não-positivas podem ser também consideradas, usando basicamente as mesmas técnicas, dado que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} -a_n \right) .$$

Por outro lado, as sequências contendo termos positivos e negativos são uma questão completamente diferente.

38.4 Convergência Absoluta

Dada uma série com termos positivos e negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

pode-se considerar alternativamente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| ,$$

cujos termos são todos não-negativos. Esquecendo despreocupadamente a possibilidade de haver jogado fora alguma informação de interesse com relação à sequência original, a definição a seguir dignifica aquelas sequências que tornam-se somáveis através deste expediente.

38.4.1 Definição: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é denominada **absolutamente convergente** se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é convergente. Mais formalmente, a sequência $\{a_n\}$ é **absolutamente somável** se $\{|a_n|\}$ é somável. ♣

Embora não exista nenhum motivo *a priori* para esperar que esta definição seja de algum interesse, resulta, de fato, de importância considerável. O resultado a seguir indica que pelo menos a definição não é completamente inútil.

38.4.2 Teorema: *Toda série absolutamente convergente é convergente. Mais ainda, uma série é absolutamente convergente se e somente se a série formada com seus termos não-negativos e a série formada com seus termos não-positivos são ambas convergentes.* □

Demonstração: Observe que:

$$0 \leqslant |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|.$$

Pelo critério de Cauchy 38.1.6, o termo à direita na relação acima converge para zero quando m, n tendem para infinito. Portanto:

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m = 0.$$

Desta maneira, usando novamente o critério de Cauchy 38.1.6, segue que $\{a_n\}$ é somável.

Para demonstrar a segunda afirmação do enunciado, definem-se:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{se } a_n \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } a_n \leqslant 0, \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} a_n, & \text{se } a_n \leqslant 0 \\ 0 & \text{se } a_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Se $\{a_n^\pm\}$ são ambas somáveis, observando

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^+ - a_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

segue que $\{a_n\}$ é absolutamente somável. Reciprocamente, se $\{a_n\}$ é absolutamente somável então é somável, como já demonstrado acima. Desta maneira, observando que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + |a_n|}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - |a_n|}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

segue que $\{a_n^\pm\}$ são ambas somáveis. ∎

Segundo o resultado precedente, a partir de uma série absolutamente convergente se podem obter uma infinidade de outras séries (absolutamente) convergentes apenas distribuindo sinais menos *ad libitum* entre seus termos. Contudo, não todas as séries convergentes podem ser obtidas desta maneira, ou seja, existem séries convergentes que não são absolutamente convergentes. Neste caso, tais séries denominam-se **condicionalmente convergentes**. Alguns resultados da próxima seção ilustram esse ponto.

38.5 Séries Alternadas

Dada uma sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ define-se A_n como a soma parcial da sequência $\{a_n\}$ até o n-ésimo termo; por conveniência, define-se também $A_0 = 0$. Formalmente:

$$A_0 = 0,$$
$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

38.5.1 Lema (Fórmula de Adição Por Partes)**:** *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências. Para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $1 \leqslant n \leqslant m$ tem-se:*

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1} A_k\,(b_k - b_{k+1}) \ + \ A_m\, b_m \ - \ A_{n-1}\, b_n.$$ □

Demonstração: Observe que, se $k > 1$, então:

$$A_k \ - \ A_{k-1} = \sum_{l=1}^{k} a_l \ - \ \sum_{l=1}^{k-1} a_l = a_k.$$

Analogamente, se $k = 1$, então:

$$A_k \ - \ A_{k-1} = A_1 \ - \ A_0 = \sum_{l=1}^{1} a_l \ - \ A_0 = a_1 - 0 = a_1.$$

Portanto:

$$A_k \ - \ A_{k-1} = a_k, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Desta maneira, tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m} a_k b_k &= \sum_{k=n}^{m} (A_k - A_{k-1})\, b_k \\
&= \sum_{k=n}^{m} A_k\, b_k \ - \ \sum_{k=n}^{m} A_{k-1}\, b_k \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} A_k\, b_k \ + \ A_m\, b_m \ - \sum_{k=n-1}^{m-1} A_k\, b_{k+1} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} A_k\, b_k \ + \ A_m\, b_m \ - \ A_{n-1}\, b_n \ - \sum_{k=n}^{m-1} A_k\, b_{k+1} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} A_k\,(b_k - b_{k+1}) \ + \ A_m\, b_m \ - \ A_{n-1}\, b_n.
\end{aligned}$$ ■

38.5.2 Proposição (Critério de Dirichlet)**:** *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências tais que:*

1. *As somas parciais A_n de $\{a_n\}$ constituem uma sequência limitada.*

2. *$\{b_n\}$ é não-crescente, ou seja, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant \cdots$.*

3. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Então, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.* □

Demonstração: Em primeiro lugar, observe que as duas últimas condições implicam que $b_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segundo o resultado do exercício 37.5.2(a). Por outro lado, pela primeira condição existe uma constante não-negativa M tal que:

$$|A_n| \leqslant M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Desta maneira, dados $n, m \in \mathbb{N}$ com $m \geqslant n$, usando a fórmula de adição por partes 38.5.1 tem-se:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} A_k\,(b_k - b_{k+1}) \ + \ A_m\, b_m \ - \ A_n\, b_{n+1}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{m-1} |a_k|\ |b_k - b_{k+1}| \ + \ |A_m|\ |b_m| \ + \ |A_n|\ |b_{n+1}| \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{m-1} |a_k|\ (b_k - b_{k+1}) \ + \ |A_m|\ b_m \ + \ |A_n|\ b_{n+1} \\
&\leqslant M\ (b_{n+1} - b_m) \ + \ M\, b_m \ + \ M\, b_{n+1} \\
&= 2\, M\, b_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Note que o limite acima decorre da terceira condição. Portanto, usando o critério de Cauchy 38.1.6, segue a somabilidade de $\{a_n b_n\}$. ∎

38.5.3 Proposição (Critério de Abel)**:** *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências com a primeira somável e a segunda limitada e monótona, ou seja, existe uma constante não-negativa M tal que*

$$|b_n| \leqslant M, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e tem-se, ou bem

$$b_n \leqslant b_{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ou bem

$$b_n \geqslant b_{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Então, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge.* □

Demonstração: Em primeiro lugar observe que se $\{a_n\}$ é somável, então suas somas parciais constituem uma sequência convergente e portanto limitada, vide 7.3.1(c).

Suponha em primeiro lugar que $b_n \leqslant b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\{b_n\}$ é não-decrescente e limitada (superiormente), pelo lema 8.2.1 deve ser convergente, ou seja, existe o limite:

$$b := \lim_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{b_n\} .$$

Seja $c_n := b - b_n \geqslant 0$. Observe que:

$$b_n \leqslant b_{n+1} \;\Rightarrow\; -b_n \geqslant -b_{n+1} \;\Rightarrow\; b - b_n \geqslant b - b_{n+1} \;\Rightarrow\; c_n \geqslant c_{n+1},\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observe também:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = b \;-\; \lim_{n\to\infty} b_n = b \;-\; b = 0.$$

Desta maneira, $\{c_n\}$ resulta uma sequência não-crescente e que converge para zero. Portanto, usando o critério de Dirichlet 38.5.2 segue a somabilidade de $\{a_n c_n\}$. Observe que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k\,(b_k - b + b) = -\sum_{k=1}^{n} a_k\,(b - b_k) \;+\; b\sum_{k=1}^{n} a_k = -\sum_{k=1}^{n} a_k c_k \;+\; b\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Dado que as duas sequências de somas parciais no membro direito da identidade acima são convergentes, segue a existência do limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Desta maneira, $\{a_n b_n\}$ resulta somável neste caso.

Por outro lado, suponha agora $b_n \geqslant b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\{b_n\}$ é não-crescente e limitada (inferiormente), pelo lema 8.2.1 deve ser convergente, ou seja, existe o limite:

$$b := \lim_{n\to\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{b_n\} .$$

Seja $c_n := b_n - b \geqslant 0$. Observe que:

$$b_n \geqslant b_{n+1} \;\Rightarrow\; b_n - b \geqslant b_{n+1} - b \;\Rightarrow\; c_n \geqslant c_{n+1},\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observe também:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n \;-\; b = b \;-\; b = 0.$$

Desta maneira, $\{c_n\}$ resulta uma sequência não-crescente e que converge para zero. Portanto, usando o critério de Dirichlet 38.5.2 segue a somabilidade de $\{a_n c_n\}$. A partir deste ponto, o resto da prova é análogo ao caso anterior. ∎

38.5.4 Teorema (de Leibniz): *Seja $\{c_n\}$ uma sequência tal que:*

1. $c_{2n} \leqslant 0 \leqslant c_{2n-1}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

2. $|c_1| \geqslant |c_2| \geqslant |c_3| \geqslant \cdots \geqslant |c_n| \geqslant |c_{n+1}| \geqslant \cdots$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Então, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *converge.* □

Demonstração: Definindo $b_n := (-1)^{n+1}\, c_n$ tem-se:

$$b_n = \begin{cases} -c_n, & \text{se } n \text{ é par} \\ c_n, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, dado que, para cada $n \in \mathbb{N}$, por hipótese sabe-se que:

$$\begin{aligned} |c_{2n}| &= -c_{2n} \\ |c_{2n-1}| &= c_{2n-1}, \end{aligned}$$

deve ser:

$$b_n = |c_n|, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Desta maneira, pela segunda hipótese tem-se:

$$b_n \geqslant b_{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

entanto que da terceira hipótese segue que:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Por outro lado, definindo $a_n := (-1)^{n+1}$, ou seja

$$a_n = \{1, -1, 1, -1, \cdots\},$$

tem-se:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto, as somas parciais de $\{a_n\}$ são limitadas. Desta maneira, o critério de Dirichlet 38.5.2 pode ser aplicado para estabelecer a somabilidade da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, (-1)^{n+1}\, c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$ ■

38.5.5 Teorema (de Leibniz - Versão Alternativa)**:** *Seja* $\{a_n\}$ *uma sequência tal que:*

1. $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

2. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \cdots$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Então a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n = a_1 \;-\; a_2 \;+\; a_3 \;-\; a_4 \;+\; a_5 \;-\; a_6 \;+\; \cdots$$

é convergente. □

Demonstração: Definindo $c_n := (-1)^{n+1}\,a_n$ tem-se:

$$c_n = \begin{cases} -a_n, & \text{se } n \text{ é par} \\ a_n, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto:

$$c_{2n} \leqslant 0 \leqslant c_{2n-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso:

$$|c_n| = \left|(-1)^{n+1}\,a_n\right| = \left|(-1)^{n+1}\right|\,|a_n| = |a_n| = a_n.$$

Desta maneira, pela primeira hipótese tem-se:

$$|c_1| \geqslant |c_2| \geqslant \cdots \geqslant |c_n| \geqslant |c_{n+1}| \geqslant \cdots\,,$$

entanto que da segunda hipótese segue que:

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Desta maneira, o Teorema de Leibniz 38.5.4 pode ser aplicado para estabelecer a somabilidade da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n.$$ ∎

38.5.6 Exemplo: Um exemplo típico da aplicação do Teorema de Leibniz, ou da sua versão alternativa 38.5.4, é dado pela sequência $a_n = 1/n$, que não é somável segundo o exemplo 38.1.5, mas serve como catalizador da sequência somável $(-1)^{n+1}\,a_n$, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 \;-\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{1}{3} \;-\; \frac{1}{4} \;+\; \cdots$$ ♣

Com relação à série do exemplo precedente, sejam x e s_n os valores da sua soma e somas parciais, respectivamente. Mais precisamente:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$x = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Como na prova do Teorema de Leibniz, considere as sequências:

$$a_n = (-1)^{n+1}$$
$$b_n = \frac{1}{n}.$$

Se $A_0 := 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ denotam-se por A_n as somas parciais de $\{a_n\}$, tem-se:

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Observe também:

$$k < k+1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \;\Rightarrow\; b_{k+1} < b_k \;\Rightarrow\; 0 < b_k - b_{k+1}.$$

Agora seja $n \in \mathbb{N}$ arbitrário mas fixo. Usando a fórmula de adição por partes 38.5.1, para $m \geqslant n$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \\
&= \sum_{k=1}^{2n-1} a_k b_k \;+\; \sum_{k=2n}^{m} a_k b_k \\
&= s_{2n-1} \;+\; \sum_{k=2n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \;+\; A_m b_m \;-\; A_{2n-1} b_{2n} \\
&> s_{2n-1} \;+\; A_m b_m \;-\; A_{2n-1} b_{2n} \\
&= s_{2n-1} \;+\; \frac{A_m}{m} \;-\; \frac{1}{2n}. \\
&= s_{2n} \;+\; \frac{A_m}{m}.
\end{aligned}$$

Portanto mantendo n fixo e tomando limite em m que tende para infinito, resulta:

$$x \geqslant s_{2n}, \;\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $n = 1$, tem-se:

$$x \geqslant s_2 = 1 \;-\; \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Alternativamente, de maneira análoga observe que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \\
&= \sum_{k=1}^{2n} a_k b_k \;+\; \sum_{k=2n+1}^{m} a_k b_k \\
&= s_{2n} \;+\; \sum_{k=2n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \;+\; A_m b_m \;-\; A_{2n} b_{2n+1} \\
&> s_{2n} \;+\; A_m b_m \;-\; A_{2n} b_{2n+1} \\
&= s_{2n} \;+\; \frac{A_m}{m}.
\end{aligned}$$

Portanto mantendo n fixo e tomando limite em m que tende para infinito, resulta:

$$x \geqslant s_{2n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para $n = 1$, tem-se:

$$x \geqslant s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Desta maneira, qualquer que seja a alternativa utilizada, obtém-se a relação $x \geqslant 1/2$.

Por outro lado, expressando x como uma soma infinita, considere agrupar cada termo positivo seguido de dois negativos sequencialmente:

$$\begin{aligned}
x &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{16} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}\,x.
\end{aligned}$$

Portanto, decorre desta manipulação que $x = x/2$, de onde segue que $x = 0$, contradizendo a relação $x \geqslant 1/2$ obtida anteriormente. Qual o motivo desse aparente paradoxo?

38.6 Reordenações

No final da seção anterior, observe que a derivação do segundo resultado, $x = 0$, através da manipulação formal dos termos da série, assume implicitamente que as operações válidas para somas *finitas* possuem uma contrapartida análoga para somas infinitas. A sequência

$$\{a_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \cdots\right\}$$

contém os mesmos elementos da sequência

$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}, \cdots\right\}$$

De fato, a segunda é uma **reordenação** da primeira no seguinte sentido preciso. Existe uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que "permuta" o conjunto dos naturais de maneira tal que $b_n = a_{f(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Com efeito, no presente caso tem-se:

$$\begin{aligned}
f(2m+1) &= 3m+1 \\
f(4m) &= 3m \\
f(4m+2) &= 3m+2.
\end{aligned}$$

Contudo, não existe nenhum motivo *a priori* para supor que o valor da soma de tais sequências

$$\lim_{n\to\infty} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$\lim_{n\to\infty} b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

deva ser igual. Essas sequências de somas parciais são diferentes, de maneira tal que a ordem particular dos termos pode resultar importante.

O comportamento da série no exemplo precedente não tem nada de excepcional. Pelo contrário, reflete o caso típico, segundo estabelece o resultado a seguir.

38.6.1 Teorema: *Se $\{a_n\}$ é somável mas não absolutamente somável, então para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ existe uma reordenação $\{b_n\}$ da sequência original tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$.* ◻

Demonstração: Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ as séries formadas com os termos positivos e negativos de $\{a_n\}$, respectivamente. Segundo o teorema 38.4.2 pelo menos uma desta séries não converge. De fato, as duas devem ser divergentes. Com efeito, se uma delas tivesse somas parciais limitadas entanto que a outra não, então a série original também teria somas parciais não limitadas, contradizendo a hipótese de somabilidade. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário mas fixo. Para fixar ideias, suponha que $\alpha > 0$; a prova para $\alpha < 0$ é análoga. Dado que a série de termos positivos não converge, possui somas parciais não limitadas. Portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=1}^{N} p_n > \alpha.$$

Seja N_1 o menor inteiro com esta propriedade, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{N_1-1} p_n \leqslant \alpha$$
$$\sum_{n=1}^{N_1} p_n > \alpha.$$

Desta maneira, definindo

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N_1} p_n$$

tem-se:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N_1} p_n = \sum_{n=1}^{N_1-1} p_n \ + \ p_{N_1} \leqslant \alpha \ + \ p_{N_1} \ \Rightarrow \ S_1 - \alpha \leqslant p_{N_1}.$$

Dado que $S_1 > \alpha$, termos negativos $\{q_n\}$ podem ser adicionados a S_1, tantos como seja necessário até obter uma nova soma, digamos T_1, que seja menor que α. Mais formalmente, seja M_1 o menor inteiro tal que:

$$T_1 := S_1 \ + \sum_{n=1}^{M_1} q_n < \alpha.$$

Analogamente, tem-se:

$$T_1 = S_1 \ + \sum_{n=1}^{M_1} q_n = S_1 \ + \sum_{n=1}^{M_1-1} q_n \ + \ q_{M_1} \geqslant \alpha \ + \ q_{M_1} \ \Rightarrow \ \alpha - T_1 \leqslant -q_{M_1}.$$

Continuando este processo indefinidamente, podem ser obtidas somas parciais alternadamente maiores e menores que α, escolhendo cada vez os inteiros N_k ou M_k os menores possíveis. Desta maneira, a sequência

$$p_1, \ldots, p_{N_1}, q_1, \ldots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \ldots, p_{N_2}, \ldots$$

é uma reordenação da sequência original. Por construção, as somas parciais desta reordenação aumentam até o valor S_1, depois decrescem até T_1, depois crescem até S_2, etc. Observe também que:

$$|S_k - \alpha| \leqslant p_{N_k}$$
$$|T_k - \alpha| \leqslant -q_{M_k}.$$

Os termos à direita em ambas relações acima decrescem para zero, pois constituem a sequência original $\{a_n\}$ que é somável por hipótese. ∎

38.6.2 Teorema: *Seja $\{a_n\}$ absolutamente somável. Se $\{b_n\}$ é uma reordenação qualquer da sequência original, então também é (absolutamente) somável e tem-se* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Demonstração: Para simplificar a notação, sejam:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$
$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$
$$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Por hipótese, $\{a_n\}$ é somável como também absolutamente somável. Portanto, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow |s - s_n| < \frac{\epsilon}{2}$$
$$n \geqslant N_2 \Rightarrow |S - S_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considere $N := \max\{N_2, N_2\}$. Seja $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de maneira tal que

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \subseteq \{b_1, b_2, \ldots, b_M\}.$$

Observe que se $m > M$, então a diferença $t_m - s_N$ será a soma de certos a_i *excluindo* àqueles no conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Portanto:

$$|t_m - s_N| \leqslant S - S_N.$$

Desta maneira, se $m > M$ tem-se:

$$|s - t_m| = |s - s_N + s_N - t_m| \leqslant |s - s_N| + |s_N - t_m| \leqslant |s - s_N| + |S - S_N| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dado que $\epsilon > 0$ era arbitrário, segue que $\{b_n\}$ é somável.

Por outro lado, observe que o argumento anterior pode ser aplicado separadamente às sequências de termos positivos e negativos de $\{a_n\}$, para concluir que as sequências de termos positivos e negativos de $\{b_n\}$ são ambas somáveis. A partir deste ponto, basta aplicar o teorema 38.4.2 para concluir que $\{b_n\}$ é absolutamente somável. ∎

38.7 Séries Duplas

Seja $\{a_{ij}\}$ uma sequência indexada por um par de números naturais, ou seja, $i, j \in \mathbb{N}$.

38.7.1 Definição: Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ define-se a **soma parcial** $s_{m,n}$ como:

$$s_{m,n} := \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{ij}.$$ ♣

Observe que $s_{m,n}$ corresponde à soma dos elementos compreendidos no "retângulo" determinado pelas primeiras m filas e n colunas. Mais ainda, tal soma é feita *em qualquer ordem*.

38.7.2 Definição: Se diz que $\{a_{ij}\}$ é **somável**, com soma s, se:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists M, N \in \mathbb{N} \ : \ m \geqslant M \ \wedge \ n \geqslant N \ \Rightarrow \ |s_{m,n} - s| < \epsilon.$$

Em tal caso, denota-se

$$\lim_{m,n \to \infty} s_{m,n} = s.$$ ♣

Por abuso de linguagem, costuma-se dizer também $s_{m,n}$ converge (para s), ou ainda, que a "série"

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_{ij}$$

converge (para s).

38.7.3 Definição: Se diz que $\{a_{ij}\}$ é **absolutamente somável** se $\{|a_{ij}|\}$ é somável, ou seja, se existe o limite

$$\lim_{m,n\to\infty} \sigma_{m,n}$$

onde $\sigma_{m,n}$ é definida como:

$$\sigma_{m,n} := \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{ij}|\,. \qquad \clubsuit$$

38.7.4 Lema: *Seja $\{a_{ij}\}$ uma sequência dupla. Considere as seguintes condições:*

1. $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\ M, N \in \mathbb{N}\ :\ m \geqslant M\ \wedge\ n \geqslant N\ \Rightarrow\ |s_{m,n} - s| < \epsilon.$

2. $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ :\ m, n \geqslant N\ \Rightarrow\ |s_{m,n} - s| < \epsilon.$

3. $\forall\,\epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ :\ n \geqslant N\ \Rightarrow\ |s_{n,n} - s| < \epsilon.$

Então:

(a) *As duas primeiras condições são equivalentes e implicam a terceira.*

(b) *Se adicionalmente $a_{ij} \geqslant 0$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$, então as três condições são equivalentes.*

(c) *Em particular, $\{a_{ij}\}$ é absolutamente somável se e somente se $\sigma_{n,n}$ converge.* □

Demonstração: **(a)** Para provar que (1) ⇒ (2) basta considerar $N \geqslant \max\{M, N\}$. Para provar que (2) ⇒ (1) basta tomar $M = N$. A terceira condição segue, por exemplo, de (2) com $m = n$.

(b) Suponha que sequência dupla consta de termos não-negativos. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Se a condição (3) é válida, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$s - s_{N,N} = |s - s_{N,N}| < \epsilon.$$

Portanto, se $m, n \geqslant N$ tem-se:

$$|s - s_{m,n}| = s - s_{m,n} \leqslant s - s_{N,N} < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ era arbitrário, segue a validade da condição (2).

(c) Segue imediatamente do item anterior. ∎

38.7.5 Lema (Condição do Resto para Séries Duplas)**:** *Se $s_{m,n}$ converge, então:*

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = 0.$$ □

Demonstração: Basta observar que

$$a_{nm} = (s_{m,n} - s_{m,n-1}) - (s_{m-1,n} - s_{m-1,n-1})$$

como também

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{m,n} = s$$

por hipótese. ■

38.7.6 Lema (Condição de Stolz)**:** *A série dupla $s_{m,n}$ converge se e somente se é satisfeita a assim denominada* **condição de Stolz***, a saber:*

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, M, N \in \mathbb{N} \;:\; m \geqslant M \;\wedge\; n \geqslant N \;\Rightarrow\; |s_{m+p,n+p} - s_{m,n}| < \epsilon,\; \forall\, p \in \mathbb{N}.$$ □

Demonstração: A condição é obviamente necessária. Para provar que também é suficiente, observe que:

$$q \geqslant M + N \;\vee\; q \geqslant \max\{M, N\} \;\Rightarrow\; |s_{q+p,q+p} - s_{q,q}| < \epsilon.$$

Desta maneira, $\{s_{n,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência Cauchy. Logo, existe o limite

$$s := \lim_{n\to\infty} s_{m,n}.$$

Portanto, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N_1 \;\Rightarrow\; |s_{n,n} - s| < \epsilon.$$

Seja $q_0 \geqslant \max\{N, M, N_1\}$ arbitrário mas fixo. Se $m, n \geqslant \max\{M, N\} + q_0$, então deve ser

$$m = a + q_0$$
$$n = b + q_0$$

com $a, b \geqslant \max\{M, N\}$. Portanto:

$$|s_{m,n} - s| \leqslant |s_{m,n} - s_{q_0,q_0}| + |s_{q_0,q_0} - s| = |s_{q_0+a,q_0+b} - s_{q_0,q_0}| + |s_{q_0,q_0} - s| < \epsilon + \epsilon = 2\,\epsilon.$$

Com relação à segunda desigualdade, para o primeiro termo da soma observe que $q_0 \geqslant N$ e $q_0 \geqslant M$, entanto que para o segundo termo da soma note que $q_0 \geqslant N_1$. ■

38.7.7 Corolário: *Toda série dupla absolutamente convergente é convergente.* □

Demonstração: Cf. a prova do teorema 38.4.2. ■

38.7.8 Definição: Se $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ converge para cada $i \in \mathbb{N}$, define-se a **soma por filas** da sequência dupla $\{a_{ij}\}$ como:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right).$$

Analogamente, se $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ converge para cada $j \in \mathbb{N}$, define-se a **soma por colunas** como:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right). \qquad \clubsuit$$

38.7.9 Lema: *Se a soma e soma por filas existem ambas, então são iguais. Analogamente, se a soma e a soma por colunas existem ambas, então são iguais.* □

Demonstração: Suponha a existência da soma e da soma por filas. Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja

$$b_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Dado que a soma converge, existem $M, N \in \mathbb{N}$ tais que:

$$m \geqslant N \ \wedge \ n \geqslant N \ \Rightarrow \ |s_{m,n} - s| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado que a soma por filas existe, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $M_i \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m \geqslant M_i \ \Rightarrow \ \left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - b_i\right| < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}.$$

Portanto, se para cada $n \geqslant N$ escolhe-se $m = m(n) \geqslant \max\{M_1, M_2, \dots, M_n, M\}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} b_i - s\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\left(b_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) - s\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|b_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right| \; + \; \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - s\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|b_i - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right| \; + \; |s_{m,n} - s| \\
&< \frac{\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} \; + \; \frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} \; + \; \frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{\epsilon}{2}\cdot 1 \; + \; \frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{\epsilon}{2} \; + \; \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

A prova no caso da soma por colunas é análoga. ∎

38.7.10 Lema: *Se a sequência dupla $\{a_{ij}\}$ é absolutamente somável com soma s, então a sua soma em qualquer ordem existe e vale s.* □

Demonstração: Denotando

$$\sigma_{m,n} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{ij}|$$

por hipótese existe o limite

$$\sigma := \lim_{m,n\to\infty} \sigma_{m,n}.$$

Em outras palavras, observando que $\sigma_{m,n}$ contém termos não-negativos, para todo $\epsilon > 0$ existem $M, N \in \mathbb{N}$ tais que:

$$m \geqslant M \;\wedge\; n \geqslant N \;\Rightarrow\; \sigma - \sigma_{m,n} = |\sigma - \sigma_{m,n}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, denotando

$$s_{m,n} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij}$$

pelo corolário 38.7.7 também existe o limite

$$s := \lim_{m,n\to\infty} s_{m,n}.$$

Seja $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ uma enumeração do conjunto $\{a_{ij} \;:\; i, j \in \mathbb{N}\}$. Seja $p_0 \geqslant \max\{M, N\}$ arbitrário mas fixo. Seja q_0 tal que

$$E(q_0) := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{q_0}\} \supseteq \{a_{ij} \;:\; 1 \leqslant i \leqslant p_0 \;\wedge\; 1 \leqslant j \leqslant p_0\}\,.$$

Sejam

$$a(q) := \max\{i \in \mathbb{N} \;:\; a_{ij} \in E(q_0)\}$$
$$b(q) := \max\{j \in \mathbb{N} \;:\; a_{ij} \in E(q_0)\}\,.$$

Finalmente, seja

$$t_q = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i.$$

Agora, se $q \geqslant q_0$, então:

$$|t_q - s_{p_0,p_0}| \leqslant \sum_{\substack{p_0 < i \leqslant a(q) \\ p_0 < j \leqslant b(q) \\ a_{ij} \in E(q)}} |a_{ij}| \leqslant \sum_{\substack{p_0 < i \\ p_0 < j}} |a_{ij}| = \sigma - \sigma_{p_0,p_0} < \frac{\epsilon}{2}.$$

A última desigualdade acima segue do fato que $p_0 \geqslant M$ e $p_0 \geqslant N$. Por outro lado, tem-se:

$$|s - s_{p_0,p_0}| = \left| \sum_{\substack{p_0 < i \\ p_0 < j}} a_{ij} \right| \leqslant \sum_{\substack{p_0 < i \\ p_0 < j}} |a_{ij}| = \sigma - \sigma_{p_0,p_0} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Combinando as duas últimas relações tem-se:

$$|t_q - s| \leqslant |t_q - s_{q_0,q_0}| \;+\; |s_{q_0,q_0} - s| < \frac{\epsilon}{2} \;+\; \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Desta maneira, tem-se:

$$q \geqslant q_0 \;\Rightarrow\; |t_q - s| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ era arbitrário, segue que:

$$\lim_{q \to \infty} t_q = s.$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \lim_{q \to \infty} \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = \lim_{q \to \infty} t_q = s = \lim_{m,n \to \infty} s_{m,n} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{ij}. \qquad \blacksquare$$

38.8 Adição e Produto de Séries

38.8.1 Lema: *Sejam $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ duas sequências somáveis. Então:*

(a) *A sequência $\{a_i + b_i\}$ é somável, com soma dada por* $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i\right)$.

(b) *Para cada $c \in \mathbb{R}$, a sequência $\{c\,a_i\}$ é somável, com soma dada por* $c\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)$. □

Demonstração: **(a)** Observe que as somas parciais de $\{a_i + b_i\}$ são iguais à soma das somas parciais das respectivas sequências. Desta maneira, o resultado enunciado segue basicamente da linearidade do limite.

(b) Idem. ∎

38.8.2 Lema (Cauchy)**:** *Sejam $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ duas sequências absolutamente somáveis. Então a sequência dupla definida pelos produtos $\{a_i b_j\}$ é absolutamente somável. Mais ainda, a sua soma independe da ordem e vale* $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i\right)$. □

Demonstração: Se $\{a_n\}$ é absolutamente somável, pelo teorema 38.4.2 também é somável. Desta maneira, denotando

$$\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

existe o limite $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$. Analogamente, existe o limite $\beta := \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$, onde

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n\,\beta_n = \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} \beta_n\right) = \alpha\,\beta.$$

Por outro lado, observe que:

$$\alpha_n\beta_n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_i\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_i b_j =: s_{n,n}.$$

Analogamente, denotando

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} |b_i|$$

por hipótese existem os limites

$$A := \lim_{n\to\infty} A_n$$
$$B := \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} A_n B_n = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = A\,B.$$

Por outro lado, observe que:

$$A_n B_n = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |b_i|\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_i|\,|b_j| = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_i b_j| =: \sigma_{n,n}.$$

Desta maneira, pelo lema 38.7.4(b) existe o limite

$$\lim_{m,n\to\infty} \sigma_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{n,n} = \lim_{n\to\infty} A_n B_n = A\,B.$$

Logo, pelo corolário 38.7.7 a (dupla) sequência de produtos $\{a_i b_j\}$ é (absolutamente) somável. Usando novamente o resultado do lema 38.7.4(b), finalmente tem-se:

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j = \lim_{m,n\to\infty} s_{m,n} = \lim_{n\to\infty} s_{n,n} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \beta_n = \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} \beta_n\right)$$
$$= \alpha\,\beta = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i\right). \blacksquare$$

38.8.3 Definição: Sejam $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ duas sequências. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja c_k dado pela expressão:

$$c_k := \begin{cases} a_1 b_1, & \text{se } k = 1; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}, & \text{se } k \geqslant 2. \end{cases}$$

Define-se a **soma por diagonais**, ou **produto de Cauchy**, das respectivas séries, como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k. \qquad \clubsuit$$

38.8.4 Corolário: *Se $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ são duas sequências absolutamente somáveis, então a sua soma por diagonais, ou produto de Cauchy, é absolutamente somável com soma* $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i\right)$. $\square$

Demonstração: Segue diretamente do lema de Cauchy anterior. Alternativamente, o leitor é facultado a considerar a seguinte prova independente. Se $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ são absolutamente somáveis, então são somáveis pelo teorema 38.4.2. Portanto, existem

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \\ \beta &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i.\end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \sum_{i=0}^{n} a_i \\ \beta_n &= \sum_{i=0}^{n} b_i \\ B_n &= \beta_n - \beta \\ c_n &= \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \\ \gamma_n &= \sum_{i=0}^{n} c_i.\end{aligned}$$

Em tal caso, tem-se:

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \sum_{k=0}^{n} c_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_0 b_k \;+\; a_1 b_{k-1} \;+\; \cdots \;+\; a_k b_0) \\ &= a_0 \left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right) \;+\; a_1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i\right) \;+\; \cdots \;+\; a_n b_0 \\ &= a_0\beta_n \;+\; a_1\beta_{n-1} \;+\; \cdots \;+\; a_n\beta_0 \\ &= a_0(B_n+\beta) \;+\; a_1(B_{n-1}+\beta) \;+\; \cdots \;+\; a_n(B_0+\beta) \\ &= \beta\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \;+\; a_0B_n \;+\; a_1B_{n-1} \;+\; \cdots \;+\; a_nB_0 \\ &= \beta\alpha_n \;+\; a_0B_n \;+\; a_1B_{n-1} \;+\; \cdots \;+\; a_nB_0 \\ &= \beta\alpha_n \;+\; \rho_n\end{aligned}$$

onde

$$\rho_n = a_0B_n \;+\; a_1B_{n-1} \;+\; \cdots \;+\; a_nB_0.$$

Por hipótese, sabe-se que $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} (\beta\alpha_n \;+\; \rho_n) = \beta\alpha \;+\; \lim_{n\to\infty} \rho_n.$$

Desta maneira, basta provar que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Denote-se

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Por hipótese, sabe-se que $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = 0$, portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \;\Rightarrow\; |B_n| < \epsilon.$$

Desta maneira, para $n \geqslant N$ tem-se:

$$\begin{aligned}
|\rho_n| &= |B_0 a_n \;+\; \cdots \;+\; B_{N-1} a_{n-N+1} \;+\; B_N a_{n-N} \;+\; \cdots \;+\; B_n a_0| \\
&\leqslant |B_0 a_n \;+\; \cdots \;+\; B_{N-1} a_{n-N+1}| \;+\; |B_N a_{n-N} \;+\; \cdots \;+\; B_n a_0| \\
&\leqslant |B_0 a_n \;+\; \cdots \;+\; B_{N-1} a_{n-N+1}| \;+\; |B_N| \cdot |a_{n-N}| \;+\; \cdots \;+\; |B_n| \cdot |a_0| \\
&< |B_0 a_n \;+\; \cdots \;+\; B_{N-1} a_{n-N+1}| \;+\; \epsilon \sum_{i=0}^{n-N} |a_i| \\
&\leqslant |B_0 a_n \;+\; \cdots \;+\; B_{N-1} a_{n-N+1}| \;+\; \epsilon A.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

pela condição do resto 38.1.7. Portanto, mantendo N fixo e fazendo tender n a infinito tem-se:

$$\limsup_{n\to\infty} |\rho_n| \leqslant \epsilon A.$$

Como $\epsilon > 0$ era arbitrário, deve ser

$$\limsup_{n\to\infty} |\rho_n| = 0,$$

de onde segue a existência do limite $\lim\limits_{n\to\infty} |\rho_n| = 0$, vide 20.2.6. ∎

Exercícios para o Capítulo 38

38.9 Séries Geométricas

38.9.1 Exercício: Cada uma das seguintes séries pode ser reduzida a uma série geométrica. Em cada caso, provar que a série converge e que o valor da soma é o indicado.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}.$ ♣

38.10 Séries Telescópicas

Uma série é denominada **telescópica** se seu termo geral a_n é da forma $a_n = b_n - b_{n+1}$, para certos b_n. Em tal caso, as somas parciais resultam simplesmente:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Portanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = b_1 - \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

38.10.1 Exercício: Cada uma das seguintes séries pode ser reduzida a uma que tem a propriedade telescópica. Em cada caso, provar que a série converge e que o valor da soma é o indicado.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{2}.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}.$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (1+n)\right]}{(\log n^n)[\log(n+1)^{n+1}]} = \frac{1}{2\,\log 2}.$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n\,(n+1)} = 1.$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}.$

Sugestão: Use o resultado do item (a) anterior.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}\,n\,(n+1)} = 1.$

Sugestão: Trata-se de uma combinação de série geométrica com telescópica. Use o resultado do item (a) anterior. ♣

38.11 O Teste de Comparação

38.11.1 Exercício: Determine se as seguintes séries são convergentes ou não, justificando a resposta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}.$ R: convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}.$ R: divergente.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\,n+b}.$ R: divergente para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n\theta|}{n^2}.$ R: convergente.

(e) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$ R: convergente.

(f) $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots.$ R: divergente.

Sugestão: O que acontece com as somas parciais de ordem par?

(g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}.$ R: divergente.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}.$ R: divergente.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}.$ R: divergente.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}.$ R: divergente.

Sugestão: Use a continuidade de $\cos x$ em $x = 0$.

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}.$ R: divergente.

Sugestão: Use a propriedade 4 da seção 15.10 para comparar a série dada com a do item precedente.

(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}.$ R: convergente.

Sugestão: Observe que a função logarítmica é não-limitada, ou seja, para qualquer constante r tem-se $r < \log x$ para x grande. Escolhendo r adequadamente é possível comparar a série dada com uma geométrica.

(m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}.$ R: convergente.

Sugestão: Parecido com o item precedente, mas agora escolhendo r adequadamente para comparar a série dada com uma cujo termo geral seja da forma $1/n^r$.

(n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}.$ R: divergente.

Sugestão: Use o crescimento sublinear da função logarítmica. Vide exercício 32.6.1. ♣

38.12 O Teste da Raiz

38.12.1 Exercício: Determine se as seguintes séries são convergentes ou não, justificando a resposta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$. R: convergente.

Incidentalmente, observe que esta série já foi analisada usando o teste de comparação. ♣

38.13 O Teste da Razão

38.13.1 Exercício: Determine se as seguintes séries são convergentes ou não, justificando a resposta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$. R: convergente para todo $a \in \mathbb{R}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$. R: convergente.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. R: convergente.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. R: convergente.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$. R: divergente.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$. R: divergente.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$. R: convergente.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n^2}$. R: convergente. ♣

38.13.2 Exercício: Analise a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$$

em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}$. Para estudar o caso $a = e$ veja a próxima seção. R: converge se $a < e$ e diverge se $a > e$. ♣

38.14 Uma estimativa de $n!$

38.14.1 Exercício: Seja f uma função decrescente, ou seja

$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y)$$

no intervalo $[1, \infty)$.

(a) Usando somas inferiores e superiores prove que:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) < \int_1^n f < \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

(b) Se a sequência $\{f(n)\}$ for somável, então sua soma pode ser estimada como:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx \;+\; f(1).$$

♣

38.14.2 Exercício: Seja f uma função crescente, ou seja

$$x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$$

no intervalo $[1, \infty)$.

(a) Usando somas inferiores e superiores prove que:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) < \int_1^n f < \sum_{k=2}^{n} f(k).$$

(b) Se a sequência $\{f(n)\}$ for somável, então sua soma pode ser estimada como:

$$f(1) \;+\; \int_1^\infty f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

♣

38.14.3 Exercício: Considere a função crescente $f(x) = \log x$.

(a) Usando a relação do exercício anterior prove que:

$$e\, n^n\, e^{-n} < n! < e\, n^{n+1}\, e^{-n}.$$

(b) Em particular, segue que:

$$\frac{e^{1/n}}{e} < \frac{(n!)^{1/n}}{n} < \frac{e^{1/n}\, n^{1/n}}{e}.$$

(c) Desta maneira, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n} = \frac{1}{e}.$$

♣

O último resultado do exercício anterior fornece uma estimativa grosseira da ordem de magnitude de $n!$, a saber:

$$(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}$$

quando n tende para infinito.

38.14.4 Exercício: Observe que da relação no item (a) do exercício anterior segue que:

$$e < \frac{e^n n!}{n^n} < e\,n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Desta maneira, o termo geral da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$$

não tende para zero quando $a = e$. Portanto, tal série resulta divergente neste caso. ♣

38.15 O Teste da Integral

38.15.1 Exercício: Determine se as seguintes séries são convergentes ou não, justificando a resposta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n^2}$. R: convergente.

Incidentalmente, observe que esta série já foi analisada usando o teste da razão. ♣

Para n suficientemente grande tem-se $1 < \log n < n$, de onde segue que $\log n < (\log n)^{\log n} < (\log n)^n$. Portanto:

$$\frac{1}{(\log n)^n} < \frac{1}{(\log n)^{\log n}} < \frac{1}{\log n}.$$

As séries à esquerda e à direita na relação acima foram analisada usando a prova de comparação, resultando convergente e divergente, respectivamente. O que acontece com a série no meio? O uso da mesma prova de comparação poderia resultar infrutífera neste caso:

$$r < \log n \ \Rightarrow\ r\log(\log n) < \log n \cdot \log(\log n) \ \Rightarrow\ e^{r\log(\log n)} < e^{\log n \cdot \log(\log n)}$$
$$\Rightarrow\ (\log n)^r < (\log n)^{\log n} \ \Rightarrow\ \frac{1}{(\log n)^{\log n}} < \frac{1}{(\log n)^r}.$$

Uma abordagem diferente o leitor encontra no exercício a seguir.

38.15.2 Exercício: **(a)** Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{n}\right)^n$ é covergente.

Sugestão: Tanto o teste da raiz como o da razão vão bem aqui.

(b) Prove que a integral imprópria $\int_0^{\infty}\frac{e^x}{x^x}\,dx$ existe usando o resultado do item (a) anterior.

(c) Prove que série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ converge.

Sugestão: Use o teste da integral. Mediante uma substituição conveniente, o resultado do item (b) anterior pode ser utilizado.

(d) Prove que série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log(\log n)}}$ diverge.

Sugestão: Use o teste da integral. A mesma substituição empregada no item (c) anterior pode ser reaproveitada. A partir desse ponto, resulta possível verificar mediante um cálculo direto que a integral resultante diverge. ♣

38.15.3 Exercício: Considere a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^p}{n}$ com $p \in \mathbb{R}$. Prove que tal série resulta convergente se e somente se $p < -1$. ♣

38.15.4 Exercício: Prove que a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^k}$ resulta divergente para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Sugestão: Se k for negativo ou nulo, então a série diverge, pois o seu termo geral $(\log n)^{|k|}$ não converge para zero. Para $k \in \mathbb{N}$ o método que da título à presente seção pode ser aplicado. Incidentalmente, observe que o caso $k = 1$ já foi analisado usando o teste de comparação. ♣

38.15.5 Exercício: Generalize o resultado do exercício anterior para expoente real, ou seja, prove que a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^p}$ resulta divergente para todo $p \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Como no exercício anterior, se $p \leqslant 0$ a divergência resulta da não convergência do termo geral para zero. Se $p > 0$, então $k \leqslant p < k + 1$ para algum natural k e o resultado exercício precedente pode ser aplicado para tal $k \in \mathbb{N}$. ♣

38.16 A Série $\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^p/n^s$

As séries introduzidas nos três últimos exercícios da seção anterior constituem casos particulares da série geral definida por:

$$F(s,p) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^p}{n^s}$$

com parâmetros $p, s \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 \ + \ F(s,0)$$

é a função Zeta de Riemann, de considerável interesse na Matemática até hoje.

O objetivo dos exercícios incluídos na presente seção consiste em determinar o conjunto de pontos no plano $(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ onde a série $F(s,p)$ resulta respectivamente convergente ou divergente. Para tanto, serão introduzidos previamente alguns conjuntos no plano. Definem-se os semiplanos S_1, S_- e P_+ como sendo o semiplano à direita da abscisa $s = 1$, o semiplano a esquerda da origem e o semiplano superior incluindo a borda, respectivamente, ou seja:

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, 1 < s\} \\ S_- &:= \{(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, s < 0\} \\ P_+ &:= \{(s,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, 0 \leqslant p\}. \end{aligned}$$

38.16.1 Exercício: A prova da convergência de $F(s,p)$ em todo o semiplano S_1 pode ser dividida em dois sub-casos:

(a) Prove que $F(s,p)$ é convergente em $S_1 \cap P_+$. Uma maneira particularmente expeditiva de fazer isso consiste em usar a desigualdade do exercício 32.9.3(c).

(b) Comparando $F(s,p)$ com a série cujo termo geral é dado por $1/n^s$ prove que aquela resulta convergente também no conjunto $S_1 \cap P_+^{\complement}$. ♣

38.16.2 Exercício: Comparando a série cujo termo geral é dado por $1/n^s$ com $F(s,p)$, prove agora que esta última resulta *divergente* em $S_1^{\complement} \cap P_+$. ♣

38.16.3 Exercício: Prove que $F(s,p)$ é divergente em $S_- \cap P_+^{\complement}$, verificando que em tal caso o termo geral de tal série não converge para zero. ♣

Resta portanto analisar o que acontece na semi-faixa definida por $S_1^{\complement} \cap P_+^{\complement} \cap S_-^{\complement}$. Observe que na margem esquerda desta semi-faixa a série resulta divergente, segundo o resultado do exercício 38.15.5. Por outro lado, na borda direita, diverge no segmento $-1 \leqslant p < 0$, entanto que converge na semirreta $p < -1$, segundo o resultado do exercício 38.15.3.

38.16.4 Exercício: Comparando a série do exercício 38.15.3 com $F(s,p)$, verifique que esta última resulta divergente no quadradinho superior da semi-faixa $S_1^{\complement} \cap P_+^{\complement} \cap S_-^{\complement}$, ou seja, interseção desta semi-faixa com o conjunto definido pela condição $-1 \leqslant p < 0$. ♣

38.16.5 Exercício: Finalmente, analise o que acontece na interseção da semi-faixa $S_1^{\complement} \cap P_+^{\complement} \cap S_-^{\complement}$ com o conjunto definido pela condição $p < -1$.

Sugestão: Espera-se que a série divirja em tal conjunto. Provas serão bem-vindas. ♣

38.17 Convergência Absoluta

38.17.1 Exercício: Determine se as seguintes séries são convergentes ou não, justificando a resposta. A título de sugestão, observe que séries "muito" parecidas já foram analisadas nas seções precedentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\theta}{n^2}$. R: convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^n}$. R: convergente. ♣

38.18 Séries Alternadas

Os próximos dois exercícios constituem corolários da fórmula de adição por partes 38.5.1.

38.18.1 Exercício: **Desigualdade de Abel**

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências, a segunda com termos não-negativos e não-crescente, ou seja, $b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Prove que para cada $m \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right| \leqslant \max \{ |A_k| \ : \ k = 1, \ldots, m \} \ b_1 .$$

Esta relação é conhecida como **desigualdade de Abel**.

(b) Prove que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $m \geqslant n \geqslant 2$ tem-se:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k b_k \right| \leqslant 2 \max \{ |A_k| \ : \ k = 1, \ldots, m \} \ b_n .$$

Sugestão: Utilize o resultado do item precedente com as sequências $\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ e $\{b_n, b_{n+1}, \ldots\}$. ♣

38.18.2 Exercício: Lema de Abel

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas sequências, a segunda de termos não-negativos e não-crescente, ou seja, $b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, suponha que a primeira sequência possui somas parciais limitadas, ou seja, existem constantes $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Verifique a seguinte relação, conhecida como **Lema de Abel**[1]:

$$b_1 \, m \leqslant a_1 b_1 \; + \; a_2 b_2 \; + \; \ldots \; + \; a_n b_n \leqslant b_1 \, M, \; \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

(b) Prove que para todo $k, n \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant k$ tem-se:

$$-b_k \, (M - m) \leqslant a_k b_k \; + \; a_{k+1} b_{k+1} \; + \; \ldots \; + \; a_n b_n \leqslant b_k \, (M - m).$$

Sugestão: Utilize o resultado do item precedente com as sequências $\{a_k, a_{k+1}, \ldots\}$ e $\{b_k, b_{k+1}, \ldots\}$. ♣

38.18.3 Exercício: Prova Alternativa do Critério de Dirichlet

Forneça duas provas adicionais do critério de Dirichlet 38.5.2 como indicado a seguir.

(a) Partindo da desigualdade de Abel introduzida no exercício 38.18.1(b).

(b) Partindo do lema de Abel estabelecido no exercício 38.18.2. Mais precisamente, a partir do seu corolário 38.18.2(b).

38.18.4 Exercício: Prova Alternativa da Versão Alternativa do Teorema de Leibniz

A versão alternativa 38.5.5 do Teorema de Leibniz possui também uma prova alternativa, incluída aqui principalmente pelo fato de resultar independente dos outros resultados apresentados na seção 38.5. Seja s_n a sequência de somas parciais da sequência $(-1)^{n+1} \, a_n$, ou seja:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \, a_k.$$

(a) Prove que a sequência de somas parciais de ordem par $\{s_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é não-decrescente, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant s_{2n+2} \leqslant \cdots .$$

(b) Analogamente, prove que a sequência de somas parciais de ordem ímpar $\{s_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é não-crescente, ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$s_1 \geqslant s_3 \geqslant s_5 \geqslant \cdots \geqslant s_{2n-1} \geqslant s_{2n+1} \geqslant \cdots .$$

(c) Verifique agora que toda soma parcial de ordem par é majorada por qualquer uma de ordem ímpar. Ou seja, prove que $s_k \leqslant s_l$, se k é par e l é ímpar.

[1] Cf. [25, p. 570].

Sugestão: Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geqslant 0$ por hipótese. Portanto, $s_{2n} \leqslant s_{2n+1}$. Isso prova um caso particular da relação desejada (na verdade, prova uma infinidade deles, um para cada $n \in \mathbb{N}$). Agora, combinando esta relação com os itens (a) e (b) anteriores obtém-se diretamente o caso geral. Com efeito, dados k par e l ímpar, basta escolher um $n \in \mathbb{N}$ tal que $2n \geqslant k$ e $2n+1 \geqslant l$, em cujo caso resulta $s_k \leqslant s_{2n} \leqslant s_{2n+1} \leqslant s_l$.

(d) Desta maneira, sendo $\{s_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência não-decrescente limitada superiormente (por qualquer s_l com l ímpar), segue a existência do limite:

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{s_{2n}\}.$$

Analogamente, existe o limite:

$$\beta := \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{s_{2n+1}\}.$$

Mais ainda, pelo item (c) anterior tem-se $\alpha \leqslant \beta$.

(e) Agora, observando mais uma vez que $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$ e que a_n converge a zero por hipótese, deve ser $\alpha = \beta$.

(f) Finalmente, conclua que existe o limite $\lim_{n\to\infty} s_n$ e que vale $\alpha = \beta$. ♣

38.18.5 Exercício: Seja $\{a_n\}$ uma sequência satisfazendo as hipóteses da versão alternativa 38.5.5 do Teorema de Leibniz. Analisando a prova alternativa apresentada no exercício anterior, obtenha a seguinte estimativa:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n \;-\; (a_1 - a_2 + \cdots \pm a_N)\right| \leqslant a_N.$$ ♣

38.18.6 Exercício: Invertendo o procedimento adotado no texto, prove o Teorema de Leibniz 38.5.4 a partir da sua versão alternativa 38.5.5, que pode ser alternativamente provada de maneira independente, como estabelecido no exercício 38.18.4 da presente seção. ♣

38.18.7 Exercício: Verifique a convergência das seguintes séries usando o Teorema de Leibniz 38.5.4.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n}$.

Incidentalmente, observe que a série "original" $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ é divergente, segundo o resultado do exercício 38.15.3.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\log n)^n}$.

Incidentalmente, observe que esta série já foi analisada nos exercícios 38.11.1(l) e 38.17.1(b). ♣

38.18.8 Exercício: Seja $\{b_n\}$ uma sequência monótona e convergente para zero. Use o critério de Dirichlet 38.5.2, para provar a convergência das seguintes séries.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Existe apenas um único ponto problemático, convenientemente esclarecido pelo resultado do exercício 31.12.4, a saber:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen} kx\right| < \operatorname{cosec}^2 x/2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

no caso $\operatorname{sen} x/2 \neq 0$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$, para todo $\mathbb{R} \ni x \neq 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Sugestão: Todo o trabalho pesado aqui pode ser gerenciado através do resultado do exercício 31.12.2. ♣

Em particular, observe que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

resulta convergente para todo real x que não seja um múltiplo inteiro de 2π, em cujo caso claramente diverge.

38.18.9 Exercício: Seja $\{b_n\}$ uma sequência monótona e convergente para zero. Verifique a convergência das seguintes séries. A título de sugestão, observe que basta apenas substituir x por $x + \pi$ no exercício anterior.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n \operatorname{sen} nx$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n \cos nx$, para todo $\mathbb{R} \ni x \neq (2k+1)\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. ♣

38.19 O Número e Revisitado

Seja e definido como:

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1\ +\ 1\ +\ \frac{1}{2!}\ +\ \frac{1}{3!}\ +\ \cdots\ +\ \frac{1}{n!}\ +\ \cdots.$$

A série acima é muito bem comportada: Não apenas é converge, mas a convergência é relativamente *rápida*. Resulta muito fácil verificar a sua somabilidade usando algum dos testes do presente capítulo, por exemplo, o teste da razão 38.3.2. Contudo, comparando-a diretamente com uma série geométrica se pode obter, além da convergência, uma estimativa da soma da série, como no exercício a seguir.

38.19.1 Exercício: Seja $\{s_n\}$ a sequência de somas parciais da série definida acima, ou seja:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 \;+\; 1 \;+\; \frac{1}{2!} \;+\; \frac{1}{3!} \;+\; \cdots \;+\; \frac{1}{n!}.$$

(a) Prove que $2 < s_n < 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Comece verificando a relação

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n} \leqslant \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2}_{(n-1) \text{ fatores}}} = \frac{1}{2^{n-1}}, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observe que a expressão à direita é o termo geral de uma série geométrica cuja soma é conhecida, vide exemplo 38.1.4. Use essa desigualdade apenas para o caso $n \geqslant 3$. Incidentalmente, observe que para $n \geqslant 3$ a desigualdade é estrita, ou seja:

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}, \; \forall n \geqslant 3.$$

(b) Usando o critério de limitação 38.2.2, conclua que a série é somável. Desta maneira, e está bem definido e tem-se $2 < e \leqslant 3$.

(c) Usando agora a desigualdade

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

apenas para $n \geqslant 4$, verifique que a segunda desigualdade na estimativa do item anterior pode ser aprimorada na forma $e < 3$. ♣

38.19.2 Exercício: Usando os métodos do capítulo 35 determine e com uma precisão de 15 (quinze) casas decimais. Com efeito, pelos resultados da seção 35.7 sabe-se que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$e = s_n \;+\; R_n = 1 \;+\; \frac{1}{1!} \;+\; \frac{1}{2!} \;+\; \frac{1}{3!} \;+\; \cdots \;+\; \frac{1}{n!} \;+\; R_n,$$

onde:

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Portanto:

(a) Procure numa tabela de fatoriais o valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que o erro da aproximação s_n seja menor o igual que a precisão desejada, ou seja, tal que $R_n < 10^{-15}$.

(b) Some então a série até esse valor de n. Para tanto, um simples programinha de computador, em alguma linguagem conhecida, pode constituir uma ajuda providencial. ♣

38.19.3 Exercício: Mn$e$motécnica

A aproximação para e com 15 casas decimais é particularmente fácil de lembrar, mas para isso tem um truque. Com efeito, sabendo que $e \approx 2,718281828459045$, separando os dígitos consecutivos da maneira adequada tem-se:

2, 7␣1828␣1828␣45␣90␣45

(a) O primeiro algarismo decimal, 7, deve ser memorizado. Não tem outra maneira, mas é muito fácil.

(b) Lembrar a sequência final 45␣90␣45 também é simples. Com efeito, o número 45 repete-se no começo e no final; o número no meio, 90, é precisamente o *dobro* de 45.

(c) A sequência de dígitos 1828 é repetida duas vezes seguidas. Esse número também pode ser lembrado pelo fato que o *ano* de 1828 marca um fato na história dos Estados Unidos. Qual?

(d) Para quem mora nos Estados Unidos, esse fato poderia ser lembrado praticamente todo dia, cada vez que tirar a carteira do bolso. Por que? ♣

38.19.4 Exercício: Definição de Cauchy do Número e

O objetivo do presente exercício consiste em verificar a expressão:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

(a) Prove que $t_n < s_n$. Portanto, $\limsup_{n\to\infty} t_n \leqslant e$.

Sugestão: desenvolva $t_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ usando o a fórmula do binômio 3.8.2.

(b) Variando ligeiramente a técnica do item (a), prove que para qualquer $m \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant m$ tem-se:

$$t_n > 1 \,+\, 1 \,+\, \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \,+\, \cdots \,+\, \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

Tomando limite para $n \to \infty$ nesta desigualdade mantendo m fixo, conclua que

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \geqslant s_m, \ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Agora, tomando limite para $m \to \infty$ nesta nova desigualdade, tem-se:

$$\liminf_{n\to\infty} t_n \geqslant \lim_{m\to\infty} s_m = e.$$

(c) Finalmente, combinando o resultado dos dois itens anteriores, conclua que existe o limite $\lim_{n\to\infty} t_n$ e que vale e. ♣

O exercício a seguir fornece uma estimativa da rapidez com que a série acima converge para o número e.

38.19.5 Exercício: Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!\,n}. \tag{38.19.1}$$

Sugestão: Observe que

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Agora, a expressão entre colchetes à direita é uma série geométrica cuja soma é conhecida, vide 38.1.4. ♣

38.19.6 Exercício: **Irracionalidade** e

A desigualdade (38.19.1) do exercício anterior pode ser usada para fornecer uma outra prova da irracionalidade do número e. Com efeito, por *reductio ad absurdum*, suponha que $e = m/n$ com m, n inteiros. Dado que $e > 2 > 0$, se pode supor, sem perda de generalidade, que $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > 1$, pois a desigualdade $2 < e < 3$ garante que e não é natural. Com essas observações preliminares *in mente*, usando a desigualdade (38.19.1) tem-se:

$$0 < n!(e - s_n) < \frac{1}{n} < 1.$$

A partir deste ponto, para obter uma contradição o leitor é facultado a usar o roteiro a seguir.

(a) Prove que se $e = \frac{m}{n}$, então $n!\,e$ deve ser um número natural.

(b) Prove que $n!\,s_n$ é natural.

(c) Portanto, o número $\alpha := n!\,(e - s_n) = n!\,e - n!\,s_n$, sendo diferença de dois naturais, deve ser um número inteiro. Mas a última desigualdade acima garante que $0 < \alpha < 1$, o que é impossível para um tal número. ♣

Desta maneira, observe que o número e pode ser aproximado com precisão arbitrária por números racionais, a saber, os $s_n \in \mathbb{Q}$. Mais ainda, essa aproximação converge com relativa rapidez. Contudo, e não é um número racional. Longe de ser inusual, esse tipo se comportamento é *genérico* em $\mathbb{R}$: Quanto "melhor" um número pode ser aproximado por racionais, tanto "pior" ele é, num certo sentido, e tais números não são meras patologias isoladas mas na verdade constituem a "maioria" dos números em $\mathbb{R}$.

38.20 Outros Critérios para Convergência

38.20.1 Exercício: Considere duas sequências $\{a_n\}, \{b_n\}$ com termos eventualmente positivos, ou seja, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a_n > 0 \ \wedge \ b_n > 0, \ \forall\, n \geqslant N.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja c_n definido como:

$$c_n := b_n - b_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Verifique as seguintes propriedades.

(a) Se existe uma constante positiva $r > 0$ tal que $c_n \geqslant r > 0$ para todo $n \geqslant N$, então $\{a_n\}$ é somável.

Sugestão: Comece provando que $\displaystyle\sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \frac{a_N b_N}{r}$.

(b) Se $c_n \leqslant 0$ para todo $n \geqslant N$ e se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ diverge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge.

Sugestão: Comece provando que para n suficientemente grande tem-se $\dfrac{1}{b_n} \leqslant c\,a_n$, para alguma constante $c > 0$. ♣

38.20.2 Exercício: Critério de Raabe

Seja $\{a_n\}$ sequência de termos positivos. Aplicando o resultado do exercício anterior com $b_{n+1} = n$ verifique as seguintes propriedades.

(a) Se existem $N \in \mathbb{N}$ e uma constante positiva $r > 0$ tais que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n}, \ \forall\, n \geqslant N$$

então $\{a_n\}$ é somável.

(b) Por outro lado, se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}, \ \forall\, n \geqslant N$$

então $\{a_n\}$ não é somável. ♣

38.20.3 Exercício: Critério de Gauss

Seja $\{a_n\}$ sequência de termos positivos. Suponha que existem $N \in \mathbb{N}$, uma constante positiva $M > 0$ e uma função f com $|f(n)| \leqslant M$, como também $s > 1$ e $A \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{A}{n} + \frac{f(n)}{n^s}, \ \forall n \geqslant N.$$

Então, $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ converge se $A > 1$ e diverge caso contrário. ♣

38.21 Resultados Adicionais Sobre Séries

38.21.1 Exercício: Uma espécie de prova de comparação

Verifique que se $a_n, b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =: c \neq 0,$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. ♣

38.21.2 Exercício: Dadas duas sequências $\{a_n\}, \{b_n\}$ verifique as seguintes propriedades.

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergem, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ também converge.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ também converge. ♣

38.21.3 Exercício: Uma espécie de condição do resto para sequências monótonas

Considere uma sequência $\{a_n\}$ não-crescente, ou seja, $a_n \geqslant a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$. ♣

38.21.4 Exercício: Seja $\{a_n\}$ uma sequência. Para cada $n, M \in \mathbb{N}$ com $n \geqslant M$ define-se:

$$s(M, n) := \sum_{k=M}^{n} a_k.$$

Prove que uma sequência somável $\{a_n\}$ possui as seguintes propriedades.

(a) $s(M) := \lim_{n\to\infty} s(M, n) =: \sum_{k=M}^{\infty} a_k$ está bem definido para cada $M \in \mathbb{N}$.

(b) Se $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ com $M_1 < M_2$ então $s(M_1) - s(M_2) = \sum_{k=M_1}^{M_2-1} a_k$.

(c) $\lim_{M\to\infty} s(M) = 0$. ♣

38.22 A Série Binomial para $(1+x)^\alpha$

O objetivo dos exercícios na presente seção consiste em verificar a convergência da assim denominada **série binomial**:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

para $|x| < 1$. A função binomial $f(x) = (1+x)^\alpha$ foi introduzida na seção 35.10. A prova de convergência na presente seção consiste em verificar que o resto $R_{n,0,(1+x)^\alpha}(x)$ converge para zero.

38.22.1 Exercício: **(a)** Utilizando o teste da razão 38.3.2, verifique que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ converge se $|x| < 1$.

(b) Em particular, $\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 0$, para $|x| < 1$. ♣

38.22.2 Exercício: Suponha que $0 \leqslant x < 1$. Usando a forma de Lagrange para resto $R_{n,0,(1+x)^\alpha}(x)$ verificada no exercício 35.10.4, prove que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0,(1+x)^\alpha}(x) = 0$, neste caso.

Sugestão: Observe que $(1+t)^{\alpha-n-1} \leqslant 1$ se $n+1 > \alpha$. ♣

38.22.3 Exercício: Suponha agora que $-1 < x < 0$. Seja $t \in (x, 0)$.

(a) Prove a seguinte relação:

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = |x| \left(\frac{1-t/x}{1+t}\right) \leqslant |x|.$$

(b) Verifique agora que:

$$\left|x\,(1+t)^{\alpha-1}\right| \leqslant M\ |x|,$$

onde $M = \max\{1, (1+x)^{\alpha-1}\}$.

(c) Finalmente, observe que:

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha-1}{n}.$$ ♣

38.22.4 Exercício: Considere $-1 < x < 0$. Provido dos resultados do exercício anterior, use a forma de Cauchy para resto $R_{n,0,(1+x)^\alpha}(x)$ verificada no exercício 35.10.3, para provar que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0,(1+x)^\alpha}(x) = 0$ também neste caso. ♣

Capítulo 39

Sequências de Funções

39.1 Convergência Uniforme

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definida no domínio $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja f uma função definida em A.

39.1.1 Definição: Se diz que a sequência $\{f_n\}$ converge **pontualmente** para f em A, ou que f é o limite **pontual** de $\{f_n\}$ em A, se para cada $x \in A$ tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. ♣

De maneira equivalente, $\{f_n\}$ converge pontualmente para f em A, se

$$\forall\, x \in A, \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;:\; n \geqslant N \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Observe que no enunciado acima, em geral será $N = N(x, \epsilon)$. Desta maneira, se poderia esperar que o deslocamento do quantificador "$\forall\, x \in A$" produza efeitos não triviais como, de fato, é o caso. Esta nova definição, embora um tanto mais restritiva, resulta surpreendentemente prolífica em resultados.

39.1.2 Definição: Se diz que a sequência $\{f_n\}$ converge **uniformemente** para f em A, ou que f é o limite **uniforme** de $\{f_n\}$ em A, se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;:\; n \geqslant N \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \;\forall\, x \in A.$$ ♣

39.1.3 Teorema: *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções* contínuas *em $[a, b]$ que converge uniformemente para uma função f em $[a, b]$. Então f também é contínua em $[a, b]$.* □

Demonstração: Seja $x \in (a, b)$ arbitrário mas fixo. Seja $h > 0$ suficientemente pequeno de maneira tal que $(x - h, x + h) \subseteq (a, b)$. Por hipótese, sabe-se que para todo $\epsilon > 0$ existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N(\epsilon) \;\Rightarrow\; |f_n(y) \;-\; f(y)| < \epsilon, \;\forall\, y \in [a, b].$$

Portanto:

$$n \geqslant N(\epsilon/3) \;\Rightarrow\; |f_n(x) \;-\; f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$
$$n \geqslant N(\epsilon/3) \;\Rightarrow\; |f_n(x+h) \;-\; f(x+h)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por outro lado, dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ a função f_n é contínua por hipótese, existe $\delta = \delta(n, \epsilon) > 0$ tal que:

$$|h| < \delta(n, \epsilon) \;\Rightarrow\; |f_n(x) \;-\; f_n(x+h)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto, se $|h| < \delta(N(\epsilon/3), \epsilon/3)$ tem-se:

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leqslant |f(x+h) - f_N(x+h)| \;+\; |f_N(x+h) - f_N(x)| \;+\; |f_N(x) - f(x)| \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{3} \;+\; \frac{\epsilon}{3} \;+\; \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ era arbitrário, segue que f é contínua em $x \in (a, b)$. Como $x \in (a, b)$ era arbitrário, f é contínua no intervalo. ∎

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. O conjunto de funções a valores reais contínuas em A será denotado como $C(A)$, ou seja:

$$C(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ é contínua}\}.$$

39.1.4 Definição: Uma sequência de funções $\{f_n\}$ em $C(A)$ se diz uma **sequência de Cauchy** com relação à convergência uniforme se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;:\; m, n \geqslant N \;\Rightarrow\; |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \;\forall\, x \in A. \qquad \clubsuit$$

39.1.5 Teorema: *Se $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $C(A)$, então existe $f \in C(A)$ tal que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f.* □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Por definição, se $\{f_n\}$ é de Cauchy em $C(A)$, então $\{f_n(x)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ para cada $x \in A$. Dado que $\mathbb{R}$ é um corpo completo, para cada $x \in A$ existe o limite

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Seja $x \in A$ arbitrário, mas fixo. Por hipótese existe $N_1 = N_1(\epsilon)$ tal que:

$$m, n \geqslant N_1 \;\Rightarrow\; |f_m(y) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \;\forall\, y \in A.$$

Pela definição da função f, existe $N_2 = N_2(x, \epsilon)$ tal que:

$$n \geqslant N_2 \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Escolhendo $m := \max\{N_1, N_2\}$, se $n \geqslant N_1$ tem-se:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_m(x)| \ + \ |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \ + \ \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\,\epsilon}{3} < \epsilon, \ \forall\, x \in A.$$

Portanto, $\{f_n\}$ converge uniformemente para f. Logo, f é contínua pelo resultado anterior. ∎

39.1.6 Teorema (de Dini)**:** *Seja* $X \subset \mathbb{R}$ compacto. *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência* não-crescente *de funções em* $C(X)$*, ou seja, cada* f_n *é contínua e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tem-se:*

$$f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x), \ \forall\, x \in X.$$

Suponha que $\{f_n\}$ *converge pontualmente em* X *para alguma função* $f \in C(X)$*. Então,* $\{f_n\}$ *converge* uniformemente *para* f *em* X*.* □

Demonstração: Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$g_n(x) := f_n(x) - f(x).$$

Observe que, por hipótese, cada g_n é contínua e não-negativa, ou seja, $g_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$. Além disso, a sequência $\{g_n\}$ é não-crescente

$$g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x), \ \forall\, x \in X$$

e converge pontualmente para zero em X, ou seja, para cada $x \in X$ tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0.$$

Desta maneira, basta provar que a sequência $\{g_n\}$ converge para zero *uniformemente* em X. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Para cada $x \in X$ existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leqslant g_{N(x)}(x) < \epsilon$. Por continuidade, existe um aberto A_x, com $x \in A_x$ tal que

$$0 \leqslant g_{N(x)}(y) < \epsilon, \ \forall\, y \in A_x.$$

Dado que a sequência $\{g_n\}$ é não-crescente, tem-se:

$$n \geqslant N(x) \ \Rightarrow \ 0 \leqslant g_n(y) \leqslant g_{N(x)}(y) < \epsilon, \ \forall\, y \in A_x.$$

A família $\{A_x \ : \ x \in X\}$ forma um cobrimento aberto de X compacto. Portanto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tais que

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} A_{x_i}.$$

Se $n \geqslant N := \max\{N(x_1), N(x_2), \ldots, N(x_k)\}$, então $n \geqslant N(x_i)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Agora, se $y \in X$, existe algum $i_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $y \in A_{x_{i_0}}$. Portanto:

$$0 \leqslant g_n(y) \leqslant g_N(y) \leqslant g_{N(x_{i_0})}(y) < \epsilon.$$

Desta maneira, tem-se:

$$n \geqslant N \ \Rightarrow \ 0 \leqslant g_n(y) < \epsilon, \ \forall\, y \in X.$$

Isso prova que a sequência $\{g_n\}$ converge para zero uniformemente em X. ∎

39.1.7 Observação: Um resultado análogo ao anterior vale para sequências *não-decrescentes*. Com efeito, dada uma tal sequência f_n basta usar o teorema de Dini com $-f_n$. ♣

39.1.8 Lema: *Sejam $\{f_n\}, \{g_n\}$ duas sequências de funções definidas em $X \subseteq \mathbb{R}$, que convergem uniformemente para f, g respectivamente, com f, g limitadas em X. Então, a sequência de produtos $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente para fg.* □

Demonstração: Sendo por hipótese funções limitadas em X, para $\phi = f$ ou $\phi = g$ está bem definido

$$\|\phi\| = \sup_{x \in X} |\phi(x)|.$$

Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\begin{aligned} n \geqslant N_1 \ &\Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall\, x \in X \\ n \geqslant N_2 \ &\Rightarrow\ |g_n(x) - f(x)| < \epsilon,\ \forall\, x \in X. \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que:

$$\begin{aligned} f_n g_n \ - \ fg &= f_n g_n \ - \ f_n g \ + \ f_n g \ - \ fg \\ &= f_n(g_n - g) \ + \ g(f_n - f) \\ &= f_n(g_n - g) \ - \ f(g_n - g) \ + \ f(g_n - g) \ + \ g(f_n - f) \\ &= (f_n - f)(g_n - g) \ + \ f(g_n - g) \ + \ g(f_n - f). \end{aligned}$$

Portanto, se $n \geqslant N := \max\{N_1, N_2\}$ tem-se

$$\begin{aligned} &|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \\ &\leqslant |f_n(x) - f(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| \ + \ |f(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| \ + \ |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad < \epsilon^2 \ + \ \|f\|\, \epsilon \ + \ \|g\|\, \epsilon,\ \forall\, x \in X. \end{aligned}$$

Incidentalmente, observe que as hipóteses deste resultado são satisfeitas, em particular, para sequências em $C(X)$ com X compacto. ∎

39.1.9 Lema: *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções* integráveis *em $[a, b]$ que converge uniformemente para uma função f em $[a, b]$ com f também integrável em $[a, b]$. Então:*

$$\int_a^b f = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n.$$ □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant N \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2\,(b - a)},\ \forall\, x \in [a, b].$$

Portanto, se $n \geqslant N$ tem-se:

$$\left| \int_a^b f_n \; - \; \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \; dx$$
$$\leqslant \frac{\epsilon}{2\,(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\epsilon}{2\,(b-a)}\,(b-a) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Dado que $\epsilon > 0$ era arbitrário, segue o resultado enunciado. ∎

39.1.10 Observação: No resultado anterior, a convergência uniforme é crucial e não pode ser substituída por pontual. Com efeito, considere a sequência de funções definida para cada $n \in \mathbb{N}$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} n \operatorname{sen} nx & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{n} \\ 0 & \text{se } \dfrac{\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Observe que $\{f_n\}$ converge pontualmente à função nula $f = 0$ no intervalo $[0, \pi]$. Observe também que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\int_0^{\pi} f_n(x)\, dx = n \int_0^{\pi/n} \operatorname{sen} nx\, dx = n \left. \frac{-\cos nx}{n} \right|_0^{\pi/n} = \cos 0 \; - \; \cos \pi = 1 \; - \; (-1) = 2.$$

Portanto:

$$\int_0^{\pi} f = 0 \neq 2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f_n.$$ ♣

39.1.11 Lema: *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções* deriváveis *em $[a,b]$ que converge (pontualmente) para uma função f em $[a,b]$. Suponha adicionalmente que $\{f_n'\}$ converge uniformemente em $[a,b]$ para alguma função g contínua em $[a,b]$. Então f é derivável e tem-se:*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \;\; \forall\, x \in [a,b].$$ □

Demonstração: Em primeiro lugar observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$, as descontinuidades da função f_n' não podem ser evitáveis, pelo teorema 23.3.1. Logo, pelo corolário 21.2.2, somente pode ter uma quantidade enumerável de tais descontinuidades (de fato, uma quantidade finita pois $[a,b]$ é compacto; vide teorema 21.2.1). Portanto, pelo teorema 28.2.1, tal função é integrável no sentido de Riemann. Desta maneira, pelo resultado 30.2.1, para qualquer $x \in [a,b]$ tem-se:

$$\int_a^x f_n' = f_n(x) - f_n(a).$$

Portanto, usando o resultado do lema anterior, segue:

$$\int_a^x g = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \; - \; \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(x) - f(a).$$

Por outro lado, dado que g contínua, pelo teorema o 30.1.2 a função

$$\int_a^x g$$

é derivável com derivada igual a g. Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) = \left(\int_a^x g\right)' = f'(x).$$ ∎

39.2 Aproximação Uniforme de Funções Contínuas

39.2.1 Lema: *Se $n, k \in \mathbb{N}$, com $k \leqslant n$, então:*

(a) $\left[x^k\,(1-x)^{n-k}\right]' = x^{k-1}\,(1-x)^{n-k-1}\,(k - n\,x)$.

(b) *O valor máximo da função $f(x) = x\,(1-x)$ no intervalo $[0,1]$ é $1/4$.* □

Demonstração: **(a)** Derivando diretamente, tem-se:

$$\begin{aligned}[x^k(1-x)^{n-k}]' &= k\,x^{k-1}(1-x)^{n-k} \;-\; x^k(n-k)(1-x)^{n-k-1}\\ &= x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k(1-x) \;-\; (n-k)x]\\ &= x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}[k - kx - nx + kx]\\ &= x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx).\end{aligned}$$

(b) Usando o resultado do item anterior com $n = 2$ e $k = 1$ tem-se:

$$[x(1-x)]' = 1 - 2x = 0 \;\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Adicionalmente, observe que:

$$[x(1-x)]'' = (1-2x)' = -2 < 0.$$

Portanto, o ponto crítico $x = 1/2$ é um ponto de máximo e tem-se:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Finalmente, observe que nos pontos extremos do intervalo $[0,1]$ tem-se $f(0) = f(1) = 0$. ∎

39.2.2 Lema: *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:*

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}\,\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{x\,(1-x)}{n}.$ □

Demonstração: **(a)** Usando o resultado do exercício 3.8.2 tem-se:

$$1 = [x + (1-x)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k}.$$

(b) Derivando a expressão do item anterior usando o resultado do item (a) do lema precedente tem-se:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[x^k (1-x)^{n-k}\right]' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k - nx).$$

Multiplicando a expressão acima por $x(1-x)$ tem-se:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}(k-nx) = 0.$$

Derivando esta nova expressão tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\left(x^k(1-x)^{n-k}\right)'(k-nx) \; - \; n\, x^k (1-x)^{n-k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^2 \; - \; n\, x^k(1-x)^{n-k}\right]. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)^2 = n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n\, x^k (1-x)^{n-k} = n.$$

Observe que na última igualdade foi usado o resultado do item anterior. Finalmente, multiplicando a última expressão por $x(1-x)/n^2$, tem-se:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n}. \qquad \blacksquare$$

39.2.3 Definição: Seja f uma função definida no intervalo $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ define-se o **polinômio de Bernstein** B_n de ordem n associado com f pela expressão:

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, (1-x)^{n-k} \, f\left(\frac{k}{n}\right). \qquad \clubsuit$$

39.2.4 Teorema (de Aproximação de Weierstrass)**:** *Seja f uma função contínua a valores reais definida no intervalo $[a,b]$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio $p = p_\epsilon$ com coeficientes reais tal que $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ para todo $x \in [a,b]$.* $\square$

Demonstração: Em primeiro lugar, o teorema será demonstrado para o caso do intervalo $[0, 1]$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Para todo $x \in [0, 1]$ tem-se:

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

Neste ponto, observe que pela compacidade de $[0, 1]$, a função f é *uniformemente* contínua em $[0, 1]$, segundo o resultado do exercício 19.11.4. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Desta maneira a soma para $k = 0, \ldots, n$ acima pode ser quebrada em duas regiões: uma delas contendo aqueles k tais que $|x - k/n| < \delta$; a outra sendo o seu complemento. Em tal caso, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|<\delta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &< \frac{\epsilon}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|<\delta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Na última igualdade foi usado o resultado do lema 39.2.2(a). Para analisar a soma na região complementar, observe que f é contínua no compacto $[0, 1]$, de onde segue que f é limitada em $[0, 1]$, pelo resultado do teorema 19.2.2. Portanto, existe $K > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leqslant K, \ \forall\, x \in [0, 1].$$

Por outro lado, observe também:

$$\begin{aligned} \delta^2 \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|\geqslant\delta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leqslant \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|\geqslant\delta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 = \frac{x(1-x)}{n} \leqslant \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

Na última igualdade foi usado o resultado do lema 39.2.2(b), entanto que na última desigualdade foi usado o resultado do lema 39.2.1(b). Portanto:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|\geqslant\delta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4\delta^2 n}.$$

Desta maneira, se $n > K/\delta^2\epsilon$ tem-se:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|\geqslant\delta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant 2K \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|\geqslant\delta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{2K}{4\delta^2 n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, se $n > K/\delta^2\epsilon$ finalmente tem-se:

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$
$$= \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|<\delta}}^{n} [*] \; + \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|\geqslant\delta}}^{n} [*] < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo $x \in [0,1]$, pois $K/\delta^2\epsilon$ não depende de x.

Agora o teorema será demonstrado no caso de $[a,b]$ geral. Se $a = b$ basta tomar o polinômio constante $p(x) = f(a)$. Suponha portanto $a < b$. Considere a função $\rho : [0,1] \to [a,b]$ definida como:

$$\rho(x) := (b-a)x + a.$$

Obviamente, ρ é uma aplicação contínua de $[0,1]$ em $[a,b]$. Portanto, a função g definida como

$$g(x) := (f \circ \rho)(x) = f((b-a)x + a)$$

trata-se de uma função contínua definida em $[0,1]$. Pelo teorema já demonstrado no caso $[0,1]$, dado $\epsilon > 0$ existe um polinômio p tal que:

$$|f(\rho(x)) - p(x)| = |g(x) - p(x)| < \epsilon, \; \forall\, x \in [0,1].$$

Portanto:

$$\left| f(x) - p\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| = \left| f(x) - p(\rho^{-1}(x)) \right| < \epsilon.$$

Desta maneira, a função

$$\tilde{p}(x) := p\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

é um polinômio que satisfaz o enunciado neste caso. ∎

Observe que o teorema anterior afirma que os polinômios constituem um conjunto denso no espaço (topológico, de fato, métrico) $C[a,b]$ com relação à convergência uniforme. Tal afirmação pode ser parafraseada alternativamente expressando que as funções

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$$

constituem uma "subálgebra" (real) densa em $C[a,b]$.

Expressado nesta formulação alternativa, o teorema 39.2.4 pode ser generalizado em várias direções. Em primeiro lugar, em vez de considerar *todas* as potências positivas de x, se poderia admitir a existência de lacunas de exponentes, considerando desta maneira o conjunto de funções

$$1, x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_k}, \ldots$$

com $n_k \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots .$$

O resultado a seguir formaliza esta variante.

39.2.5 Teorema (de Müntz): *Seja $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos, ou seja, para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se $n_k \in \mathbb{N}$ com*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots .$$

Então, as combinações lineares finitas com coeficientes reais das funções

$$1, x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_k}, \ldots$$

constituem um conjunto denso em $C[a,b]$ com relação à convergência uniforme se e somente se a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n_k}$$

é divergente. □

Demonstração: Vide [14, pp. 46-48] ou [1, pp. 43-46]. ∎

Por outro lado, em lugar de polinômios, com ou sem lacunas de exponentes, se poderia considerar uma subálgebra arbitrária de funções contínuas. O que acontece neste caso é dado por um conjunto de resultados conhecidos sob o nome genérico de teoremas de Stone-Weierstrass, formulados na seguinte seção.

39.3 Álgebras separantes

Seja $\mathcal{A} \subseteq C(X)$, ou seja, $\mathcal{A}$ é uma família de funções a valores reais definidas em $X \subseteq \mathbb{R}$ e contínuas.

39.3.1 Definição: Se diz que $\mathcal{A}$ é uma **subálgebra** de $C(X)$ se:

1. $f, g \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ af + g \in \mathcal{A},\ \forall\, a \in \mathbb{R}$.
2. $f, g \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ fg \in \mathcal{A}$. ♣

Em outras palavras, um subconjunto de $C(X)$ é uma subálgebra se constitui um subespaço vetorial (real) com relação à soma de funções e um subanel com relação à multiplicação de funções.

39.3.2 Definição: Se diz que $\mathcal{A}$ é um **sub-reticulado** de $C(X)$ se:

$$f, g \in \mathcal{A} \ \Rightarrow\ \max\{f, g\} \in \mathcal{A} \ \wedge\ \min\{f, g\} \in \mathcal{A}.$$ ♣

39.3.3 Definição: Se diz que $\mathcal{A}$ **separa pontos** em X se para cada par de pontos $x, y \in X$ com $x \neq y$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. ♣

39.3.4 Lema: *A função $f(x) = |x|$ pode ser aproximada uniformemente no intervalo $[-1,1]$ por polinômios que carecem do termo constante.* □

Demonstração: Considere a função:

$$f(y) = y^2 \; - \; 2y = y\,(y-2).$$

Dado que $f'(x) = 2y - 2 = 2(y-1)$, trata-se de uma função decrescente no intervalo $[0,1]$ com $f(0) = 0$. Logo, tem-se:

$$f(y) \leqslant 0, \;\; \forall\, y \in [0,1].$$

Portanto:

$$0 \leqslant y \leqslant a \leqslant 1 \;\Rightarrow\; y^2 - 2y = f(y) \geqslant f(a) = a^2 - 2a \;\Rightarrow\; y^2 - a^2 \geqslant 2y - 2a$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}(y^2 - a^2) \geqslant y - a \;\Rightarrow\; a \geqslant y \;-\; \frac{1}{2}(y^2 - a^2) \;\Rightarrow\; y \;+\; \frac{1}{2}(a^2 - y^2) \leqslant a.$$

Por outro lado:

$$y \leqslant a \;\Rightarrow\; y^2 = y\,y \leqslant y\,a \leqslant a\,a = a^2 \;\Rightarrow\; a^2 - y^2 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; y \leqslant y \;+\; \frac{1}{2}(a^2 - y^2).$$

Combinando as duas últimas relações resulta:

$$0 \leqslant y \leqslant a \leqslant 1 \;\Rightarrow\; 0 \leqslant y \leqslant y \;+\; \frac{1}{2}(a^2 - y^2) \leqslant a.$$

Considere a sequência definida iterativamente como:

$$y_0 = 0$$
$$y_{n+1} = y_n \;+\; \frac{1}{2}(a^2 - y_n^2), \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Da relação anterior segue que $0 \leqslant y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant a$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Portanto, a sequência $\{y_n\}$ é não-decrescente e limitada superiormente (por a), logo, existe o limite:

$$y := \lim_{n\to\infty} y_n \geqslant 0.$$

Para determinar o valor de y, observe que

$$y_{n+1} = y_n \;+\; \frac{1}{2}(a^2 - y_n^2) \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} y_n \;+\; \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a^2 - y_n^2)$$
$$\Rightarrow\; y = y \;+\; \frac{1}{2}(a^2 - y^2) \;\Rightarrow\; a^2 = y^2 \;\Rightarrow\; y = a$$

pois $0 \leqslant a$ e $0 \leqslant y$. Considere agora a sequência de funções definida iterativamente como:

$$p_0(x) = 0$$
$$p_{n+1}(x) = p_n(x) \;+\; \frac{1}{2}\left[x^2 - p_n^2(x)\right], \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Desta maneira, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tem-se:

1. Cada p_n é um polinômio sem termo constante, ou seja, $p_n(0) = 0$.
2. $0 \leqslant p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x)$.
3. Para cada $x \in [-1, 1]$, tem-se $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|$.
4. Dado que a sequência $\{p_n\}$ converge monotonamente a uma função contínua $p(x) = |x|$ e $[-1, 1]$ é compacto, segue que tal convergência é uniforme.

Portanto, $\{p_n\}$ é uma sequência aproximante como a descrita no enunciado. ∎

39.3.5 Lema: *Seja $\mathcal{A}$ uma subálgebra* fechada *de $C(X)$. Então:*

(a) $f \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; |f| \in \mathcal{A}$.

(b) $f \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \max\{f, g\} \in \mathcal{A} \;\wedge\; \min\{f, g\} \in \mathcal{A}$.

Em particular, toda subálgebra fechada de $C(X)$ é um sub-reticulado. □

Demonstração: **(a)** Para $f = 0$ o resultado segue trivialmente. Suponha portanto $f \neq 0$. Observe que para $0 \neq f \in \mathcal{A}$ tem-se

$$0 \neq \|f\| := \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

se X for compacto. Logo:

$$g := \frac{f}{\|f\|} \in \mathcal{A}$$

e tem-se:

$$|g(x)| \leqslant 1, \;\forall\, x \in X.$$

Pelo resultado anterior, dado $\epsilon > 0$ existe $p = p_\epsilon$ tal que

$$|p(x) - |x|| < \epsilon, \;\forall\, x \in [-1, 1]$$

de onde segue:

$$|(p \circ g)(x) - |g(x)|| < \epsilon, \;\forall\, x \in X.$$

Agora, observe que se $g \in \mathcal{A}$ e p é um polinômio sem termo constante, então $p \circ g \in \mathcal{A}$. Desta maneira, $|g| \in \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, pois $\mathcal{A}$ é fechada por hipótese. Portanto:

$$\frac{|f|}{\|f\|} = |g| \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; |f| \in \mathcal{A}.$$

(b) Se $f, g \in \mathcal{A}$, então $f + g \in \mathcal{A}$, como também $|f - g| \in \mathcal{A}$ pelo item anterior. Observe que:

$$\begin{aligned} f + g &= \max\{f, g\} \;+\; \min\{f, g\} \\ |f - g| &= \max\{f, g\} \;-\; \min\{f, g\}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\,(f+g\ +\ |f-g|)$$
$$\min\{f,g\} = \frac{1}{2}\,(f+g\ -\ |f-g|)\,.$$

Desta maneira, combinando as duas identidades acima com a primeira observação segue o resultado enunciado. ∎

39.3.6 Lema: *Seja $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ uma subálgebra que* separa pontos. *Suponha que para cada $x \in X$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq 0$. Então, para cada par de pontos $x, y \in X$ com $x \neq y$ e $r, s \in \mathbb{R}$ números reais arbitrários existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) = r$ e $f(y) = s$.* □

Demonstração: Caso contrário, para cada $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ o sistema linear de duas equações com duas incógnitas a, b dado por

$$\left.\begin{array}{rcl} af_1(x)\ +\ bf_2(y) & = & r \\ af_1(y)\ +\ bf_2(y) & = & s \end{array}\right\}$$

carece de solução. Logo, seu determinante deve ser nulo:

$$f_1(x)\,f_2(y)\ -\ f_1(y)\,f_2(x) = 0.$$

Em particular, escolhendo $f_1 = f$ e $f_2 = f^2$ tem-se:

$$f(x)\,f(y)\,[f(y) - f(x)] = f(x)\,f^2(y)\ -\ f(y)\,f^2(x) = 0,\ \forall\, f \in \mathcal{A}.$$

Em particular, escolhendo $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x) \neq g(y)$, cuja existência é garantida pela hipótese da subálgebra separar pontos, deve ser:

$$g(x)\,g(y) = 0.$$

Se fosse $g(x) = 0$, tomando $f_1 = g$ no determinante tem-se:

$$0 = g(x)\,f_2(y) = f_2(x)g(y),\ \forall\, f_2 \in \mathcal{A}\ \Rightarrow\ f_2(x)\,g(y) = 0,\ \forall\, f_2 \in \mathcal{A}.$$

Observando que

$$g(x) = 0\ \wedge\ g(x) \neq g(y)\ \Rightarrow\ g(y) \neq 0$$

deve ser $f_2(x) = 0$ para toda $f_2 \in \mathcal{A}$, contradizendo a hipótese da existência de $f \in \mathcal{A}$ com $f(x) \neq 0$. Se fosse $g(y) = 0$, uma contradição seria obtida argumentando de maneira completamente análoga. ∎

39.3.7 Lema: *Seja X espaço topológico* compacto. *Seja $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ um* sub-reticulado. *Se $f \in C(X)$ é uma função tal que para cada par de pontos $x, y \in X$ com $x \neq y$ existe uma sequência de funções $f_n \in \mathcal{A}$ com*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$$

então $f \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Demonstração: Dados $\epsilon > 0$ e $x, y \in X$, por hipótese existe $f_{xy} \in \mathcal{A}$ tal que:

$$|f(x) - f_{xy}(x)| < \epsilon$$
$$|f(y) - f_{xy}(y)| < \epsilon.$$

Sejam $U_{xy}, V_{xy} \subseteq X$ definidos respectivamente como:

$$U_{xy} = \{z \in X \ : \ f_{xy}(z) < f(z) + \epsilon\}$$
$$V_{xy} = \{z \in X \ : \ f_{xy}(z) > f(z) - \epsilon\}.$$

Observe que $x, y \in U_{xy} \cap V_{xy}$. Seja agora $y \in X$ *fixo*. Dado que para cada $x \in X$ tem-se $x \in U_{xy}$, a família $\{U_{xy}\}_{x \in X}$ é um cobrimento aberto de X compacto. Logo, existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que:

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i y}.$$

Define-se:

$$f_y := \min\{f_{x_i y} \ : \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Observe que $f_y \in \mathcal{A}$ por hipótese. Seja $V_y \subseteq X$ definido como:

$$V_y := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i y}.$$

Se $x \in X$, então $x \in U_{x_{i_0} y}$ para algum $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto:

$$f_y(x) \leqslant f_{x_{i_0} y}(x) < f(x) + \epsilon.$$

Por outro lado, se $x \in V_y$, então $f_{x_i y}(x) > f(x) - \epsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, de onde segue que

$$f_y(x) > f(x) - \epsilon.$$

Agora, dado que para cada $y \in X$ tem-se $y \in V_y$, a família $\{V_y\}_{y \in X}$ é um cobrimento aberto de X compacto. Logo, existem $y_1, \ldots, y_m \in X$ tais que:

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} V_{y_i}.$$

Define-se:

$$f_\epsilon := \max\{f_{y_i} \ : \ i = 1, \ldots, m\}.$$

Se $x \in X$, então $x \in V_{y_{j_0}}$ para algum $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Portanto:

$$f_\epsilon(x) \geqslant f_{y_{j_0}}(x) > f(x) - \epsilon.$$

Por outro lado:

$$f_\epsilon(x) = f_{y_{l_0}}(x) \leqslant f_{x_{i_0} y_{l_0}}(x) < f(x) + \epsilon.$$

Portanto:

$$|f(x) - f_\epsilon(x)| < \epsilon, \ \forall x \in X$$

pois f_ϵ independe de $x \in X$. Em outras palavras, f pode ser aproximada *uniformemente* em X por funções $f_\epsilon \in \mathcal{A}$. Portanto, $f \in \overline{\mathcal{A}}$. ∎

39.3.8 Teorema (de Stone-Weierstrass)**:** *Seja X espaço topológico* compacto. *Seja $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ uma subálgebra que* separa pontos.

(a) *Se para cada $x \in X$ existe uma $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq 0$ (em particular, se as funções constantes pertencem a $\mathcal{A}$), então $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$.*

(b) *Se, pelo contrário, existe algum $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$ para toda $f \in \mathcal{A}$ (incidentalmente, observe que pode existir no máximo apenas um tal $x_0 \in X$, dado que $\mathcal{A}$ separa pontos), então $\overline{\mathcal{A}} = \{f \in C(X) \ : \ f(x_0) = 0\}$.* □

Demonstração: **(a)** Como $\mathcal{A}$ é subálgebra, $\overline{\mathcal{A}}$ também é subálgebra, obviamente fechada. Portanto, pelo lema 39.3.5, segue que $\overline{\mathcal{A}}$ é um sub-reticulado. Seja $g \in C(X)$ e sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Como $\mathcal{A}$ separa pontos e satisfaz a hipótese do item (a), pelo lema 39.3.6 aplicado aos números reais

$$r := g(x)$$
$$s := g(y)$$

segue que existe $f \in \mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ tal que

$$f(x) = r = g(x)$$
$$f(y) = s = g(y).$$

Desta maneira, $\overline{\mathcal{A}}$ e g satisfazem as hipóteses do lema 39.3.7. Portanto, $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Como $g \in C(X)$ era arbitrária, segue que $C(X) \subseteq \overline{\mathcal{A}}$. Dado que obviamente vale a contenção contrária, ambos conjuntos devem ser iguais.

(b) Basta aplicar a parte (a) já demonstrada à álgebra gerada por $\mathcal{A}$ e as funções constantes. Com efeito, denotando $\mathcal{B}$ tal álgebra, ou seja,

$$\mathcal{B} = \{f + c \ : \ f \in \mathcal{A} \ \wedge \ c \in \mathbb{R}\}.$$

observe que $\mathcal{B}$ satisfaz a hipótese enunciada no item (a), de onde segue $\overline{\mathcal{B}} = C(X)$. Seja $g \in C(X)$ tal que $g(x_0) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, existem $f \in \mathcal{A}$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(x) + c \ - \ g(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall\, x \in X.$$

Em particular, escolhendo $y = x_0$ tem-se:

$$|c| = |0 + c \ - \ 0| = |f(x_0) + c \ - \ g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto:

$$|g(x) \ - \ f(x)| \leqslant |g(x) - f(x) - c| \ + \ |c| < \frac{\epsilon}{2} \ + \ \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \ \forall\, x \in X$$

de onde segue que $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Desta maneira:

$$\{g \in C(X) \ : \ g(x_0) = 0\} \subseteq \overline{\mathcal{A}}.$$

Dado que por hipótese vale a contenção contrária, ambos conjuntos devem ser iguais. ∎

39.4 Convergência Normal

Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções contínuas em $X \subseteq \mathbb{R}$, ou seja, $\mathcal{F} \subseteq C(X)$.

39.4.1 Definição: Se diz que $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ é uma família de funções **equicontínua** em algum ponto $a \in X$ se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(a, \epsilon) \;:\; |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon, \;\forall\, f \in \mathcal{F}.$$

Se diz que $\mathcal{F}$ é uma família **equicontínua** em X se $\mathcal{F}$ é **equicontínua** em a, para todo $a \in X$. ♣

39.4.2 Definição: Se diz que $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ é uma família de funções **uniformemente equicontínua** em X se:

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\epsilon) \;:\; |x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \epsilon, \;\forall\, f \in \mathcal{F}.$$ ♣

39.4.3 Lema: *Se $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ é uma família de funções equicontínua em algum $a \in X$, então o fecho de $\mathcal{F}$ na topologia da convergência* pontual *também possui tal propriedade.* □

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Se f está no fecho de $\mathcal{F}$ na topologia da convergência pontual, então existe uma sequência de funções $f_n \in \mathcal{F}$ que converge pontualmente para f. Portanto, para cada $x \in X$ existe $N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant N(x, \epsilon) \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por hipótese, existe $\delta = \delta(a, \epsilon)$ tal que

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f_n(a)| < \epsilon, \;\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Desta maneira, dado x arbitrário mas fixo com $|x - a| < \delta$, tomando $N := \max\{N(x, \epsilon), N(a, \epsilon)\}$, tem-se:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| \;+\; |f_N(x) - f_N(a)| \;+\; |f_N(a) - f(a)| < \frac{\epsilon}{3} \;+\; \frac{\epsilon}{3} \;+\; \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$ ∎

39.4.4 Definição: Se diz que $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ é uma família de funções **pontualmente equilimitada**, ou simplesmente **equilimitada**, em X se para cada $x \in X$ existe $M = M(x) > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para toda $f \in \mathcal{F}$. ♣

39.4.5 Definição: Se diz que $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ é uma família de funções **localmente equilimitada** em X se para todo compacto $K \in X$ existe $M = M(K) > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para todo $x \in K$, para toda $f \in \mathcal{F}$. ♣

39.4.6 Lema: *Seja X* compacto. *Se $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ é uma família de funções uniformemente equicontínua e pontualmente equilimitada em X, então é uniformemente limitada.* □

Demonstração: Se $\mathcal{F}$ é pontualmente equilimitada em X, então para cada $x \in X$ existe

$$\phi(x) := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Dado que $\mathcal{F}$ é uniformemente equicontínua em X, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, f \in \mathcal{F}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} |f(x)| \;-\; |f(y)| \leqslant ||f(x)| \;-\; |f(y)|| \leqslant |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow\; |f(x)| < |f(y)| \;+\; \frac{\epsilon}{2} \leqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(y)| \;+\; \frac{\epsilon}{2} = \phi(y) \;+\; \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, f \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Logo, pela definição de supremo, tem-se

$$\phi(x) \leqslant \phi(y) + \frac{\epsilon}{2} \;\Rightarrow\; \phi(x) - \phi(y) \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \tag{39.4.1}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} |f(y)| \;-\; |f(x)| \leqslant ||f(y)| \;-\; |f(x)|| \leqslant |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \\ \Rightarrow\; |f(y)| < |f(x)| \;+\; \frac{\epsilon}{2} \leqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| \;+\; \frac{\epsilon}{2} = \phi(x) \;+\; \frac{\epsilon}{2},\ \forall\, f \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Logo, pela definição de supremo, tem-se

$$\phi(y) \leqslant \phi(x) + \frac{\epsilon}{2} \;\Rightarrow\; -\epsilon < -\frac{\epsilon}{2} \leqslant \phi(x) - \phi(y). \tag{39.4.2}$$

Combinando as relações (39.4.1) e (39.4.2) tem-se:

$$|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon.$$

Desta maneira, a função ϕ é (uniformemente) contínua em X compacto. Logo, ϕ é limitada em X. Portanto, tem-se

$$|f(x)| \leqslant \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| = \phi(x) \leqslant M$$

para todo $x \in X$, onde M é uma constante (ou seja, não depende de x). ∎

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definida em $X \subseteq \mathbb{R}$ e seja f uma função também definida em X.

39.4.7 Definição: Se diz que a sequência $\{f_n\}$ converge **normalmente** para f em X, ou que f é o limite **normal** de $\{f_n\}$ em X se:

1. $\{f_n\}$ converge pontualmente para f em X, ou seja, para cada $x \in X$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

2. $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em K, para todo subconjunto compacto $K \subseteq X$. ♣

Observe que o teorema de Dini 39.1.6 estabelece que toda sequência não-crescente de funções contínuas que converge pontualmente para uma função contínua, converge, de fato, normalmente.

39.4.8 Definição: Se diz que $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ é uma família de funções **normal** em X se toda sequência $\{f_n\}$ com $f_n \in \mathcal{F}$ possui alguma subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge *normalmente* em X. ♣

39.4.9 Lema: *Seja $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ uma família de funções equicontínua em X. Considere uma sequência $\{f_n\}$ com $f_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\{f_n\}$ converge pontualmente para f em X, então converge* normalmente *para f em X.* □

Demonstração: Seja f o limite pontual de $\{f_n\}$, ou seja, para cada $x \in X$ tem-se:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Dado $K \subseteq X$ compacto, basta provar que $\{f_n\}$ converge para f uniformemente em K. Para tanto, basta provar que $\{f_n\}$ é uniformemente de Cauchy em K. Por *reductio ad absurdum*, suponha o contrário. Em tal caso, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que:

$$\forall\, N \in \mathbb{N} \;\; \exists\, m, n \geqslant N \; : \; \exists\, x \in K \; : \; |f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \epsilon_0.$$

Portanto:

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n_k, m_k \geqslant k \; : \; \exists\, x_k \in K \; : \; |f_{m_k}(x_k) - f_{n_k}(x_k)| \geqslant \epsilon_0.$$

Dado que a sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está contida no compacto K, deve existir $x_0 \in K$ ponto de acumulação de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Por hipótese, a família de funções é equicontínua em $x_0 \in X$, logo, existe $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \;\forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{39.4.3}$$

Agora, observando

$$m_k, n_k \geqslant k \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$$

segue

$$\lim_{k\to\infty} |f_{m_k}(x_0) - f_{n_k}(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0.$$

Com efeito, basta usar a relação

$$||a| \;-\; |b|| \leqslant |a \;-\; b| \leqslant |a| \;+\; |b|, \;\forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

com $a = a(k)$ e $b = b(k)$ dados por

$$a := f_{m_k}(x_0) - f(x_0)$$
$$b := f_{n_k}(x_0) - f(x_0)$$

observando que

$$\lim_{k\to\infty} a(k) = \lim_{k\to\infty} b(k) = 0$$

pois $\{f_n\}$ converge pontualmente para f por hipótese. Desta maneira, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geqslant k_0 \;\Rightarrow\; |f_{m_k}(x_0) - f_{n_k}(x_0)| < \frac{\epsilon_0}{3}. \tag{39.4.4}$$

Por outro lado, dado que x_0 é ponto de acumulação de $\{x_k\}$ deve existir uma subsequência $\{x_{k_j}\}$ que converge para x_0. Portanto, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_{j_0} \geqslant k_0$ e:

$$\left|x_{k_{j_0}} - x_0\right| < \delta(x_0, \epsilon). \tag{39.4.5}$$

Se $k := k_{j_0} \geqslant k_0$, então obtém-se a seguinte contradição:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \leqslant |f_{m_k}&(x_k) - f_{n_k}(x_k)| \\ &\leqslant |f_{m_k}(x_k) - f_{m_k}(x_0)| \;+\; |f_{m_k}(x_0) - f_{n_k}(x_0)| \;+\; |f_{n_k}(x_0) - f_{n_k}(x_0)| \\ &\qquad < \frac{\epsilon_0}{3} \;+\; \frac{\epsilon_0}{3} \;+\; \frac{\epsilon_0}{3} = \epsilon_0.\end{aligned}$$

Na segunda linha acima, o limite para o primeiro e terceiro termo segue de (39.4.5) e (39.4.3), entanto que o limite para o segundo termo segue de (39.4.4). Desta maneira, $\{f_n\}$ é de Cauchy no espaço completo $(C(K), \|\,.\,\|_\infty)$. Portanto, $\{f_n\}$ converge uniformemente para f em K. Como $K \subseteq X$ era um compacto arbitrário, segue a convergência normal da sequência em questão. ∎

39.4.10 Corolário: *Para toda família equicontínua de funções contínuas a topologia da convergência pontual coincide com a topologia da convergência uniforme em subconjuntos compactos.* □

Demonstração: Observe que a convergência uniforme implica trivialmente a convergência pontual. Para a afirmação recíproca, basta usar o resultado anterior. ∎

39.4.11 Lema: *Seja $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ uma família de funções equicontínua em X. Considere uma sequência $\{f_n\}$ com $f_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\{f_n\}$ converge pontualmente para f em um subconjunto* denso *$S \subseteq X$, então converge* normalmente *para f em X.* □

Demonstração: Pelo lema 39.4.9, basta provar que $\{f_n\}$ converge pontualmente para f em X. Seja $x \in X$. Basta provar que $\{f_n(x)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $\epsilon > 0$. Dado que por hipótese $\mathcal{F}$ é uma família equicontínua, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|y - x| < \delta \;\Rightarrow\; |f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{39.4.6}$$

Dado que o conjunto S é denso, existe $\xi \in S$ tal que:

$$|\xi - x| < \delta. \tag{39.4.7}$$

Por hipótese, $\{f_n(\xi)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geqslant N \;\Rightarrow\; |f_m(\xi) - f_n(\xi)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{39.4.8}$$

Desta maneira, se $m, n \geqslant N$ tem-se:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f_m(\xi)| \;+\; |f_m(\xi) - f_n(\xi)| \;+\; |f_n(\xi) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3} \;+\; \frac{\epsilon}{3} \;+\; \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Para a segunda desigualdade acima, o limite para o primeiro e terceiro termo segue de (39.4.7) e (39.4.6), entanto que o limite para o segundo termo segue de (39.4.8). Desta maneira, $\{f_n(x)\}$ é de Cauchy no corpo completo $\mathbb{R}$. Portanto, $\{f_n\}$ converge pontualmente para f em X. Pelo lema 39.4.9, segue a convergência normal da sequência em questão. ∎

39.4.12 Teorema (de Arzelà-Áscoli)**:** *Suponha que X é separável, ou seja, possui um subconjunto denso enumerável, e considere $\mathcal{F} \subseteq C(X)$. Se $\mathcal{F}$ é equicontínua e (pontualmente) equilimitada em X, então $\mathcal{F}$ é normal em X.* □

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ sequência de funções com $f_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração do conjunto denso em X que existe por hipótese. Dado que $\mathcal{F}$ é uma família equilimitada, existe $M_1 \geqslant 0$ tal que:

$$|f_n(x_1)| \leqslant M_1, \;\forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\{f_n(x_1) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$. Logo, possui um ponto de acumulação, digamos, y_1. Em particular, existe uma subsequência $\{f_{n_k^1}(x_1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k^1}(x_1) = y_1.$$

Analogamente prova-se que $\{f_{n_k^1}(x_2) \,:\, k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$. Logo, possui um ponto de acumulação, digamos, y_2. Em particular, existe uma subsequência $\{f_{n_k^2}(x_2)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_{n_k^1}(x_2)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k^2}(x_2) = y_2.$$

Continuando este processo indutivamente, para cada $i \in \mathbb{N}$ é possível provar a existência de uma sequência $\{f_{n_k^i}(x_i)\}_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência de $\{f_{n_k^{i-1}}(x_{i-1})\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k^i}(x_i) = y_i.$$

Todas estas sequências podem ser dispostas num arranjo:

$$\begin{array}{llll}
f_{n_1^1}(x_1) & f_{n_2^1}(x_1) & f_{n_3^1}(x_1) & \cdots \\
f_{n_1^2}(x_2) & f_{n_2^2}(x_2) & f_{n_3^2}(x_2) & \cdots \\
f_{n_1^3}(x_3) & f_{n_2^3}(x_3) & f_{n_3^3}(x_3) & \cdots \\
\multicolumn{4}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

Se $n_k := n_k^k$, então:

$$n_{k+1} = n_{k+1}^{k+1} > n_k^{k+1} = n_l^k \geqslant n_k^k = n_k.$$

A primeira desigualdade acima segue do fato que $\{n_j^{k+1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência. A segunda igualdade vale para algum $l \geqslant k$, pois $\{n_j^{k+1}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{n_j^k\}_{j\in\mathbb{N}}$. Finalmente, a segunda desigualdade segue do fato que $\{n_j^k\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência e $l \geqslant k$. Portanto, $n_{k+1} > n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ resulta, de fato, uma *subsequência*. Desta maneira, dado $i \in \mathbb{N}$ a sequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{f_{n_k^i}\}_{k\in\mathbb{N}}$ com a possível exceção dos primeiros $i-1$ termos. Portanto:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_i) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k^i}(x_i) = y_i, \ \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\{f_{n_k}\}$ converge pontualmente no conjunto denso $\{x_n \,:\, i \in \mathbb{N}\}$. Logo, pelo lema 39.4.11, $\{f_{n_k}\}$ converge normalmente em X. Dado que a sequência $\{f_n\}$ era arbitrária, seque que $\mathcal{F}$ é uma família normal em $C(X)$. ∎

39.4.13 Corolário: *Suponha X separável* e compacto. *Considere $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ um subconjunto* fechado. *Então, $\mathcal{F}$ é um subconjunto compacto de $C(X)$ na topologia da convergência uniforme se e somente se $\mathcal{F}$ é equicontínua e (pontualmente) equilimitada em X.* □

Demonstração: Observe que se X for um espaço métrico, então a hipótese de separabilidade é redundante, vide lema B.4.12.

($\Rightarrow$) Em primeiro lugar, observe que se $\mathcal{F}$ é compacto, então é totalmente limitado, vide B.4.9. Em particular, é limitado na norma de $C(X)$, de onde segue que para cada $x \in X$ tem-se

$$|f(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |f(x)| = \|f\| \leqslant M, \ \forall\, f \in \mathcal{F}$$

provando que $\mathcal{F}$ é pontualmente equilimitado. Por outro lado, para provar a equicontinuidade, seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pelo fato de $\mathcal{F}$ ser totalmente limitado, existe um conjunto finito $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\epsilon/3}(f_i).$$

Como X é compacto, cada f_i é *uniformemente* contínua em X, vide exercício 19.11.4. Portanto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe $\delta_i > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta_i \ \Rightarrow \ |f_i(x) - f_i(y)| \leqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Se $f \in \mathcal{F}$ é arbitrária mas fixa, então existe algum $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $f \in B_{\epsilon/3}(f_k)$, ou seja, $\|f - f_k\| \leqslant \epsilon/3$. Desta maneira, se $|x-y| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$ tem-se:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leqslant |f(x) - f_k(x)| \ + \ |f_k(x) - f_k(y)| \ + \ |f_k(y) - f(y)| \\ &\leqslant \|f(x) - f_k(x)\| \ + \ |f_k(x) - f_k(y)| \ + \ \|f_k(y) - f(y)\| \leqslant \frac{\epsilon}{3} \ + \ \frac{\epsilon}{3} \ + \ \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

provando a equicontinuidade.

(⇐) Pelo teorema de Arzelà-Áscoli 39.4.12, $\mathcal{F}$ é normal, ou seja, toda sequência de elementos em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que converge uniformemente em compactos, logo, em X por hipótese. Portanto, dado que $\mathcal{F}$ é fechado, segue que é sequencialmente compacto, logo, compacto, vide B.4.10. ∎

39.5 Um Teste de Abel

Em aplicações em diversas áreas, certas equações diferenciais em derivadas parciais com condições de fronteira admitem soluções da forma

$$\phi(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, g_i(t).$$

Nesta seção é estabelecida uma forma generalizada de um teste devido a Abel que fornece uma condição suficiente para a convergência uniforme deste tipo de série.

39.5.1 Teorema: *Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região no plano. Suponha que:*

1. *A série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ converge uniformemente em x, para todo x tal que $(x,t) \in R$.*
2. *A sequência $\{g_i\}$ é monótona não-crescente, ou seja, $g_i(t) \geqslant g_{i+1}(t)$, para todo t tal que $(x,t) \in R$.*
3. *A sequência $\{g_i\}$ é uniformemente equilimitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$, tem-se $|g_i(t)| \leqslant M$, para todo t tal que $(x,t) \in R$.*

Então, a série $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, g_i(t)$ converge uniformemente nas variáveis (x,t) na região R. □

Demonstração: Para simplificar a notação, sejam:

$$S_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, g_i(t)$$
$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

Desta maneira, basta provar que $\{S_n\}$ é uma sequência de Cauchy com relação à convergência uniforme, vide 39.1.5 e a definição precedente. Para $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$ tem-se:

$$\begin{aligned}
S_n - S_m &= f_{m+1}\, g_{m+1} \;+\; f_{m+2}\, g_{m+2} \;+\; \cdots \;+\; f_n\, g_n \\
&= (s_{m+1} - s_m)\, g_{m+1} \;+\; (s_{m+2} - s_{m+1})\, g_{m+2} \;+\; \cdots \;+\; (s_n - s_{n-1})\, g_n \\
&= (s_{m+1} - s_m)\, g_{m+1} \;+\; (s_{m+2} - s_m)\, g_{m+2} \;-\; (s_{m+1} - s_m)\, g_{m+2} \;+\; \cdots \\
&\qquad\qquad + \; (s_n - s_m)\, g_n \;-\; (s_{n-1} - s_m)\, g_n \\
&= (s_{m+1} - s_m)[g_{m+1} - g_{m+2}] \;+\; (s_{m+2} - s_m)[g_{m+2} - g_{m+3}] \;+\; \cdots \\
&\qquad\qquad + \; (s_{n-1} - s_m)[g_{n-1} - g_n] \;+\; (s_n - s_m)\, g_n.
\end{aligned}$$

Observe que, pela hipótese de monotonicidade, os fatores entre colchetes acima são todos não-negativos. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Dado que $\{s_n\}$ é uniformemente somável por hipótese, deve ser de Cauchy com relação à convergência uniforme. Logo, existe $N = N(\epsilon)$ tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$m \geqslant N \;\Rightarrow\; |s_{m+i}(x) - s_m(x)| < \frac{\epsilon}{3M}, \;\forall\, x.$$

Portanto, se $n > m \geqslant N$ tem-se:

$$|S_n - S_m| < \frac{\epsilon}{3M}\left[(g_{m+1} - g_{m+2}) \;+\; (g_{m+2} - g_{m+3}) \;+\; \cdots \;+\; (g_{n-1} - g_n) \;+\; |g_n|\right]$$
$$= \frac{\epsilon}{3M}\left[g_{m+1} \;-\; g_n \;+\; |g_n|\right] \leqslant \frac{\epsilon}{3M}\left[|g_{m+1}| \;+\; 2|g_n|\right] \leqslant \frac{\epsilon}{3M}\,3M = \epsilon.$$

Desta maneira, $\{S_n\}$ é uniformemente de Cauchy, de onde segue a convergência uniforme. ∎

39.5.2 Observação: **(a)** Um resultado análogo ao anterior vale no caso da sequência $\{g_n\}$ ser monótona *não-decrescente*.

(b) Suponha que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

seja convergente. Seja $\{g_n\}$ uma sequência monótona e uniformemente equilimitada de funções. Então, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, g_n(x)$$

converge uniformemente. Com efeito, basta considerar a sequencia de funções constantes $f_n = a_n$ no resultado anterior.

(c) Portanto, o resultado anterior generaliza o teorema de Abel considerado no exercício 40.6.1. Neste último caso, considera-se a sequência $g_n(x) = x^n$ para $x \in [0, 1]$, que resulta não-crescente e obviamente limitada $|g_n(x)| = |x^n| \leqslant 1$ em tal intervalo. ♣

Capítulo 40

Séries de Potências

40.1 A Prova M de Weierstrass

40.1.1 Definição: A sequência $\{s_n\}$ de **somas parciais** de uma sequência de funções $\{f_n\}$ é definida como:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k = f_1 \ + \ f_2 \ + \ \cdots \ + \ f_n. \qquad \clubsuit$$

40.1.2 Definição: Uma sequência de funções $\{f_n\}$ é denominada **uniformemente somável** em um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se a sequência $\{s_n\}$ das suas somas parciais é uniformemente convergente em A. Em tal caso, o limite uniforme

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k = \lim_{n\to\infty} (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$$

denota-se:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

e recebe o nome de **soma** da sequência $\{f_n\}$. ♣

40.1.3 Observação: Como no caso das sequências numéricas ordinárias, por abuso de linguagem costuma-se dizer que a "série" de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

"converge" uniformemente para a sua soma. ♣

40.1.4 Lema: *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *uniformemente convergente para* f *em* $[a, b]$.

(a) *Se cada f_n é contínua em $[a,b]$, então f é contínua em $[a,b]$.*

(b) *Se f e cada f_n são integráveis em $[a,b]$, então:*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n. \qquad \square$$

Demonstração: **(a)** Se cada f_n é contínua, então é contínua cada uma das somas parciais $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Portanto, f é o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas. Logo, deve ser contínua, pelo teorema 39.1.3.

(b) Se cada f_n é integrável, então é integrável cada uma das somas parciais $s_n = f_1+f_2+\cdots+f_n$. Portanto, a função integrável f é o limite uniforme

$$f = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$$

de uma sequência de funções integráveis. Desta maneira, pelo lema 39.1.8 tem-se:

$$\begin{aligned}\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 + \cdots + \int_a^b f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n. \ \blacksquare\end{aligned}$$

40.1.5 Lema: *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ convergente (pontualmente) para f em $[a,b]$. Se cada f_n é derivável e a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

converge uniformemente para alguma função contínua em $[a,b]$, então f é derivável em $[a,b]$ e tem-se:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \ \forall\, x \in [a,b]. \qquad \square$$

Demonstração: Se cada f_n é derivável, então é derivável cada uma das somas parciais $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, com derivada $s_n' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$. Por hipótese, $\{s_n'\}$ é uniformemente somável com soma contínua. Desta maneira, pelo lema 39.1.9, f é derivável e tem-se:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \lim_{n\to\infty} [f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_n'(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \ \forall\, x \in [a,b]. \qquad \blacksquare$$

40.1.6 Teorema (Prova M de Weierstrass)**:** *Sejam $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas em $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\{M_n\}$ uma sequência de números reais tais que:*

$$|f_n(x)| \leqslant M_n, \ \forall\, x \in A.$$

Suponha adicionalmente que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

seja convergente. Então, para cada $x \in A$ a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge (de fato, absolutamente) e

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge uniformemente em A para a função f dada por:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \ \forall\, x \in A.$$

Demonstração: Pela prova de comparação 38.2.3, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

converge. Logo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge (absolutamente). Além disso, para todo $x \in A$ tem-se:

$$|f(x) \ - \ [f_1(x) + \cdots + f_n(x)]| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Dado que $\{M_n\}$ é somável por hipótese, o termo à direita acima pode ser feito arbitrariamente pequeno escolhendo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, vide exercício 38.21.4(c). ∎

40.2 Uma Função Sempre Contínua e Nunca Derivável

Seja $\{x\}$ a distância de x ao inteiro mais próximo. Considere a sequência de funções $\{f_n\}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ como:

$$f_n(x) := \frac{1}{10^n} \{10^n\, x\}.$$

Observe que para esta sequência de funções a prova M de Weierstrass resulta aplicável, pois

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{10^n} \{10^n\, x\} \right| \leqslant \frac{1}{10^n} \frac{1}{2} < \frac{1}{10^n}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

converge, pois trata-se de uma série geométrica de razão $1/10 < 1$. Desta maneira, a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge uniformemente em $\mathbb{R}$. Mais ainda, ao ser cada f_n contínua, o lema 40.1.4(a) garante que a função:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \{10^n\, x\}$$

também é contínua.

40.2.1 Teorema: *A função f definida por*

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \{10^n\, x\}$$

é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}$, mas não é derivável em nenhum. ☐

Demonstração: A continuidade da função f foi estabelecida nos comentários que precedem o enunciado do presente resultado; esta é a única parte da demonstração onde a convergência uniforme é usada. Resta provar que f não é diferenciável em a, para cada $a \in \mathbb{R}$. Observando que a aplicação $x \to \{x\}$ é periódica de período 1, basta considerar apenas $0 < a \leqslant 1$. A estratégia para verificar que f não é diferenciável consiste em exibir uma sequência $\{h_m\}$ que converge para zero tal que o limite

$$\lim_{m \to \infty} \frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

não existe. Para tanto suponha que a expressão decimal de a seja

$$a = 0.a_1 a_2 \cdots a_m \cdots$$

e defina-se

$$h_m = \begin{cases} 10^{-m} & \text{se } a_m \notin \{4, 9\} \\ -10^{-m} & \text{se } a_m \in \{4, 9\}. \end{cases}$$

Em tal caso, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \frac{\{10^n(a+h_m)\} \;-\; \{10^n\, a\}}{h_m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \frac{\{10^n(a+h_m)\} \;-\; \{10^n\, a\}}{\pm 10^m} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pm 10^{n-m} \left(\{10^n(a+h_m)\} \;-\; \{10^n\, a\}\right).\end{aligned}$$

Esta série infinita trata-se, na verdade, de uma soma finita. Com efeito, se $n \geqslant m$ então $10^n h_m$ é inteiro. Logo, pela periodicidade tem-se:

$$\{10^n(a+h_m)\} \;-\; \{10^n a\} = \{10^n a \;+\; 10^n h_m\} \;-\; \{10^n a\} = \{10^n a\} \;-\; \{10^n a\} = 0.$$

Por outro lado, para $n < m$, se pode expressar

$$\begin{aligned} 10^n a &= \text{inteiro} \;+\; 0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_m \cdots \\ 10^n(a+h_m) &= \text{inteiro} \;+\; 0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots(a_m \pm 1)\cdots.\end{aligned}$$

Observe que para a validade da segunda identidade é imprescindível que $h_m = -10^{-m}$ (com sinal negativo) quando $a_m = 9$. Agora, supondo que

$$0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_m\cdots \leqslant \frac{1}{2}$$

então

$$0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots(a_m \pm 1)\cdots \leqslant \frac{1}{2}.$$

Observe que para a validade desta afirmação é imprescindível que $h_m = -10^{-m}$ (com sinal negativo) quando $a_m = 4$, no caso $m = n+1$. Desta maneira, tem-se:

$$\{10^n(a+h_m)\} \;-\; \{10^n a\} = [0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots(a_m \pm 1)\cdots] \;-\; [0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_m\cdots] = \pm 10^{n-m}.$$

A validade de exatamente a mesma identidade no caso

$$0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_m\cdots > \frac{1}{2}$$

prova-se analogamente. Portanto, para $n < m$ tem-se:

$$10^{n-m} \left(\{10^n(a+h_m)\} \;-\; \{10^n\, a\}\right) = \pm 1.$$

Desta maneira, o quociente

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$

é a soma de $m-1$ termos, iguais a ± 1 cada. Adicionando ± 1 a um número, muda-se a sua paridade. Portanto, a soma de $m-1$ números cada um dos quais é igual ± 1 é um inteiro par se m é ímpar e vice-versa. Desta maneira a sequência de quocientes

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$

não pode ser convergente, pois trata-se de uma sequência de *inteiros* alternativamente pares e ímpares. ∎

40.3 Séries de Taylor

A prova M de Weierstrass constitui uma ferramenta útil para analisar a somabilidade de sequências constituídas por funções exibindo algum tipo de regularidade. Entre elas, especialmente importante resulta o caso das funções polinomiais.

40.3.1 Definição: Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \,(x-a)^n$$

com cada $a_n \in \mathbb{R}$, denomina-se **série de potências** centrada em a. ♣

Em outras palavras, uma série de potências é uma série de funções onde cada função f_n é da forma

$$f_n(x) = a_n \,(x-a)^n$$

com $a_n \in \mathbb{R}$. Um grupo de séries de potências de particular interesse é aquele onde os coeficientes a_n são da forma

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

para alguma função f admitindo derivadas de todas as ordens.

40.3.2 Definição: Se f é uma função infinitamente diferenciável, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \,(x-a)^n$$

denomina-se **série de Taylor** para f em a. ♣

Dada uma função infinitamente diferenciável f, em geral *não* tem-se:

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \,(x-a)^n.$$

A igualdade na relação acima é válida unicamente quando os restos $R_{n,f,a}(x)$ convergem para zero. Sabe-se a partir dos exercícios para o capítulo 35 que tal coisa não acontece necessariamente para qualquer valor de x.

40.3.3 Exemplo: Pelo exercício 35.8.3 sabe-se que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \,-\, \frac{x^3}{3} \,+\, \frac{x^5}{5} \,-\, \frac{x^7}{7} \,+\, \cdots$$

converge para $|x| \leqslant 1$, em cujo caso a sua soma é dada por $\operatorname{arctg} x$. Por outro lado, pelo exercício 35.8.4 sabe-se também que tal série diverge no caso $|x| > 1$. ♣

40.3.4 Exemplo: Pelo exercício 35.9.3 sabe-se que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

converge para $-1 < x \leqslant 1$, em cujo caso a sua soma é dada por $\log(x+1)$. Por outro lado, pelo exercício 35.9.4 sabe-se também que tal série diverge no caso $x > 1$. ♣

Podem existir ainda séries de potências que convergem apenas para um único valor de x.

40.3.5 Exemplo: A série de potências definida por

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

converge apenas para $x = 0$. Com efeito, os quocientes

$$\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} = \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} = (n+1)\, x$$

não estão nem sequer limitados qualquer que seja o $x \neq 0$. ♣

Contudo, se uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

converge para algum $x_0 \neq 0$, então várias coisas interessantes podem ser ditas sobre o seu comportamento quando $|x| < |x_0|$. No seguinte, para simplificar a exposição serão consideradas apenas séries de potências centradas em $a = 0$, mas todos os resultados podem ser estendidos sem nenhuma dificuldade adicional (isto é, basicamente com a mesma prova, modificada *ad hoc*) para o caso geral.

40.3.6 Teorema: *Suponha que a série*

$$f(x_0) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_0^n$$

convirja, e seja a um número qualquer tal que $0 < a < |x_0|$. Então:

(a) *No intervalo* $[-a, a]$ *a série*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

converge uniformemente (e absolutamente).

(b) *Idêntica afirmação pode ser feita com relação à série*

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}.$$

(c) *Finalmente,* f *é diferenciável e tem-se*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

para todo x *tal que* $|x| < |x_0|$. □

Demonstração: **(a)** Dado que por hipótese a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x_0^n$$

converge, seu termo geral tende para zero, pela condição do resto 38.1.7. Logo, todos os termos da série são limitados, ou seja, existe $M > 0$ tal que

$$|a_n\, x_0^n| = |a_n| \cdot |x_0^n| \leqslant M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Agora, para todo $x \in [-a, a]$ tem-se $|x| \leqslant |a|$, de onde segue

$$|a_n\, x^n| = |a_n| \cdot |x^n| \leqslant |a_n| \cdot |a^n| = |a_n| \cdot |x_0|^n \cdot \left|\frac{a}{x_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{a}{x_0}\right|^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observando que $|a/x_0| < 1$, segue que a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \left|\frac{a}{x_0}\right|^n = M \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a}{x_0}\right|^n$$

converge, vide exemplo 38.1.4. Desta maneira, escolhendo $M_n := M\,|a/x_0|^n$ na prova M de Weierstrass 40.1.6 segue a convergência uniforme da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

no intervalo $[-a, a]$.

(b) A prova é análoga à do item anterior. O ponto crucial aqui consiste em observar

$$|n\, a_n\, x^{n-1}| = n\,|a_n| \cdot |x^{n-1}| \leqslant n\,|a_n| \cdot |a^{n-1}| = \frac{|a_n| \cdot |x_0|^n}{|a|}\, n \left|\frac{a}{x_0}\right|^n \leqslant \frac{M}{|a|}\, n \left|\frac{a}{x_0}\right|^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Observando que $|a/x_0| < 1$, segue que a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{|a|}\, n \left|\frac{a}{x_0}\right|^n = \frac{M}{|a|} \sum_{n=1}^{\infty} n \left|\frac{a}{x_0}\right|^n$$

converge, vide exemplo 38.3.3. Desta maneira, escolhendo

$$M_n := \frac{M}{|a|}\, n \left|\frac{a}{x_0}\right|^n$$

na prova M de Weierstrass 40.1.6 segue a convergência uniforme da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

no intervalo $[-a, a]$.

(c) Pelo lema 40.1.4(a) tem-se que a função

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}.$$

é contínua. Observe que a convergência desta série é uniforme em $[-a, a]$, segundo o item (b) anterior. Portanto, pelo lema 40.1.5 tem-se

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = g(x),\ \forall\, x \in [-a, a].$$

Dado que a com $0 < a < |x_0|$ era arbitrário, este resultado vale para todo x com $|x| < |x_0|$. ∎

40.3.7 Exemplo: Usando o teorema 38.5.5 verifica-se que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \;-\; \frac{x^3}{3} \;+\; \frac{x^5}{5} \;-\; \frac{x^7}{7} \;+\; \cdots$$

converge para $x_0 = 1$. Portanto, pelo teorema 40.3.6 anterior, converge também para todo $|x| < 1$. Isso não constitui nenhuma novidade, pois já foi provado no exercício 35.8.3, onde verifica-se também a convergência para $x = \pm 1$ e ainda é fornecida uma expressão explícita para a soma de tal série, a saber:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \;-\; \frac{x^3}{3} \;+\; \frac{x^5}{5} \;-\; \frac{x^7}{7} \;+\; \cdots$$

Contudo, a novidade acrescida pelo teorema 40.3.6 consiste em que tal série pode ser *derivada* termo a termo em tal intervalo, em cujo caso obtém-se:

$$\frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n} = 1 \;-\; x^2 \;+\; x^4 \;-\; x^6 \;+\; \cdots,\ \forall\, |x| < 1.$$

Neste caso a série para a derivada diverge para $x = \pm 1$. Observe que isso não contradiz o teorema 40.3.6, que garante apenas a validade de tal expressão apenas para $|x| < 1$. ♣

40.3.8 Exemplo: Analogamente, usando o teorema 38.5.5 verifica-se que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} = x\;-\;\frac{x^2}{2}\;+\;\frac{x^3}{3}\;-\;\frac{x^4}{4}\;+\;\cdots$$

converge para $x_0 = 1$. Portanto, pelo teorema 40.3.6 anterior, converge também para todo $|x| < 1$. No exercício 35.9.3 verifica-se também a convergência para $x = 1$ e ainda é fornecida uma expressão explícita para a soma de tal série, a saber:

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} = x\;-\;\frac{x^2}{2}\;+\;\frac{x^3}{3}\;-\;\frac{x^4}{4}\;+\;\cdots$$

Derivando a série termo a termo obtém-se:

$$\frac{1}{1+x} = \log'(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,x^{n-1} = 1\;-\;x\;+\;x^2\;-\;x^3\;+\;\cdots\,,\ \forall\,|x|<1.$$

Neste caso a série para a derivada também diverge para $x = \pm 1$. ♣

Qualquer consideração aplicável a séries de potências, resulta automaticamente estendida para suas derivadas, desde que tais derivadas possam ser representadas como séries de potências. Desta maneira, resulta o seguinte corolário do teorema 40.3.6.

40.3.9 Corolário: *Se uma série de potências*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$$

converge para todo x pertencente a um intervalo aberto $(-R, R)$, então a função f por ela definida resulta automaticamente infinitamente diferenciável em tal intervalo. Mais ainda,

$$f^{(n)}(0) = n!\,a_n,\ \forall\,n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, uma série de potências convergente é sempre a série de Taylor da função por ela definida. □

Demonstração: Pelo teorema 40.3.6 tem-se

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}$$

para todo $x \in (-R, R)$. Aplicando novamente tal teorema para a série acima, resulta

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n\,x^{n-2}.$$

Procedendo indutivamente, tem-se:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,a_n\,x^{n-k}.$$

Da identidade acima resulta:

$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

ou seja

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. ∎

As séries de Taylor das funções sen, cos e exp são consideradas em diversas seções correspondentes aos exercícios para o presente capítulo. Elas são tão satisfatórias como se poderia desejar. Convergem para todo $x \in \mathbb{R}$ e podem ser derivadas termo a termo em $\mathbb{R}$, conduzindo aos resultados esperados:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}' &= \cos \\ \cos' &= -\operatorname{sen} \\ \exp' &= \exp\,. \end{aligned}$$

Desta maneira, havendo chegado neste ponto feliz, o estudo das séries de potências e séries de Taylor poderia considerar-se satisfatoriamente encerrado. Contudo, uma análise cuidadosa da presente situação, vai revelar alguns fatos ainda sem explicação.

A série de Taylor da função $\log(x+1)$ não é totalmente complacente. Converge apenas para $-1 < x \leqslant 1$. Mas essa deficiência resulta da natureza básica das séries de potências. Se a série de Taylor fosse convergente para algum x_0 com $|x_0| > 1$, então convergiria também no intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$, e a função que define seria diferenciável, e portanto contínua, em tal intervalo. Mas isso é impossível, pois não é nem sequer limitada no intervalo $(-1, 1)$, onde é igual à função $\log(x+1)$. Idênticas considerações aplicam-se à serie para a sua derivada, $1/(1+x)$.

Já a série de Taylor para a função arctg é mais difícil de compreender. Parece não existir motivo algum para que deixe de convergir quando $|x| > 1$. Este comportamento misterioso resulta mais surpreendente ainda para a sua derivada, a função $f(x) = 1/(1+x^2)$, cuja série de Taylor

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n} = 1 \;-\; x^2 \;+\; x^4 \;-\; x^6 \;+\; \cdots$$

não converge de maneira nenhuma se $|x| \geqslant 1$. Por que? Que obstáculo invisível impede que a série de Taylor se estenda além de 1 e -1? Resulta sempre arriscado formular este tipo de questões, pois provavelmente a resposta seja pouco grata: Acontece porque acontece; as coisas são assim; paciência.

No presente caso existe, de fato, uma explicação. Contudo, para esclarecer essa questão resulta necessário colocá-la em um contexto mais amplo que, infelizmente, foge do alcance da presente obra. Apenas como incentivo para o leitor curioso que deseje aventurar-se nessa direção em futuros estudos, pode-se acrescentar que tal percurso conduz a uma das áreas mais úteis e elegantes da Matemática.

Exercícios para o Capítulo 40

40.4 Unicidade da Representação em Série de Potências

40.4.1 Exercício: Suponha que a série de potências

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

seja convergente para todo $x \in (-R, R)$ para algum $R > 0$.

(a) Se $f(x) = 0$ para todo $x \in (-R, R)$, então $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Observe que $a_n = f^{(n)}(0)/n!$.

(b) Se apenas sabe-se que $f(x_n) = 0$ para alguma sequência $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, então neste caso também deve ser $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Demonstre primeiro que $a_0 = f(0) = 0$; depois que $a_1 = f'(0) = 0$; etc. ♣

Incidentalmente, observe que o resultado do item (b) do exercício anterior prova também que uma função definida como uma série de potências não pode ser nula para $x \leqslant 0$ e não-nula para $x > 0$. Em particular, uma série de potências (digamos, centrada em zero) não pode descrever o movimento de uma partícula que tem permanecido em repouso até um dado instante (digamos, $t = 0$) e depois principia a movimentar-se.

40.4.2 Exercício: Suponha que as séries de potências

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n$$

sejam convergentes para todo $x \in (-R, R)$ para algum $R > 0$.

(a) Se $f(x_n) = g(x_n)$ para alguma sequência $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, então $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Em particular, uma função admite uma única representação como série de potências. ♣

40.4.3 Exercício: Considere a função f definida como:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então f não pode ser expressada como série de potências.

Sugestão: Use o resultado do exercício 40.4.1(b). ♣

40.5 Funções C^∞ e Real-Analíticas

Apenas no contexto da presente seção, uma função será denominada *real-analítica*, ou simplesmente *analítica*, se pode ser representada como série de potências convergente em algum aberto. Mais formalmente, uma função f é denominada **real-analítica** no ponto $a \in \mathbb{R}$ se existe alguma série de potências centrada em a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

convergente em algum intervalo aberto A que contem o ponto a tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \ \forall x \in A.$$

Decorre do exercício 40.4.2 que se existir uma tal série de potências, então ela é única, ou seja, os seus coeficientes estão univocamente determinados pela função f, tratando-se na verdade da série de Taylor da função f (com maior precisão, deveria ser expressado que os seus coeficientes estão univocamente determinados pelo comportamento da função f numa vizinhança do ponto a).

Pelo corolário 40.3.9 sabe-se que toda função real-analítica em algum ponto a resulta automaticamente C^∞, ou seja infinitamente diferenciável, numa vizinhança de a. Observe que a afirmação recíproca não é verdadeira. Com efeito, no exercício 40.4.3 é exibido um exemplo de função C^∞ cuja série de Taylor não converge em um aberto.

Os exercícios a seguir objetivam estabelecer uma condição suficiente para que uma função C^∞ na vizinhança de algum ponto $a \in \mathbb{R}$ seja analítica em tal ponto.

40.5.1 Exercício: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e f infinitamente diferenciável no intervalo $[a-R, a+R]$ para algum $R > 0$. Suponha a existência de uma constante $M \geqslant 0$ tal que:

$$\sup_{x \in [a, a+R]} \left| f^{(n)}(x) \right| \leqslant nM, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando a forma integral do resto, prove que

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a,f}(a+R) = 0.$$

Em particular, a série de Taylor para f centrada em a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n,$$

converge para $x = a + R$ com soma $f(a+R)$. ♣

Pelo teorema 40.3.6 segue que tal série converge no aberto $(a-r, a+r)$ para qualquer $0 < r < R$. No entanto, ainda não se sabe se tal série representa à função original em tal aberto.

40.5.2 Exercício: Sob as mesmas hipóteses do exercício anterior, prove que na verdade tem-se:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n,\ \forall\, x \in [a, a+R].$$

Sugestão: Se $x = a$ a identidade acima resulta trivial e se $x = a + R$ decorre do exercício anterior. Se $0 < r < R$, então tem-se:

$$\sup_{x\in[a,a+r]} \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \sup_{x\in[a,a+R]} \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant nM,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, o resultado do exercício anterior vale também para $x = a + r$. ♣

Observe que um resultado análogo para o intervalo $[a-R, a]$ pode ser provado ao longo das mesmas linhas. Desta maneira, resulta o corolário enunciado no exercício a seguir.

40.5.3 Exercício: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e f infinitamente diferenciável no intervalo $[a-R, a+R]$ para algum $R > 0$. Suponha a existência de uma constante $M \geqslant 0$ tal que:

$$\sup_{x\in[a-R,a+R]} \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant nM,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Então, f é real-analítica em a. ♣

40.5.4 Exercício: Suponha que o resultado do exercício anterior seja também uma condição *necessária* para a real-analiticidade. Em tal caso, prove que toda função real-analítica em algum ponto resulta também real-analítica em uma vizinhança de tal ponto. ♣

40.6 Somabilidade no Sentido de Abel

Suponha que a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

seja convergente. Sabe-se então, pelo teorema 40.3.6(a), que a série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

converge uniformemente no intervalo $[-a, a]$, para qualquer $0 < a < 1$. Contudo, esta série de potências pode não convergir uniformemente em $[-1, 1]$. De fato, pode nem sequer convergir (pontualmente) em -1, como no caso da função $f(x) = \log(x + 1)$, por exemplo.

40.6.1 Exercício: Um Teorema de Abel

(a) Se a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge, então a série de potências

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$.

Sugestão: Observe que

$$|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \epsilon/2 \;\Rightarrow\; \left|a_m\, x^m + a_{m+1}\, x^{m+1} + \cdots + a_n\, x^n\right| \leqslant \epsilon$$

segundo o Lema de Abel considerado no exercício 38.18.2(a).

(b) Portanto, f é contínua em $[0, 1]$. Em particular, tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

♣

40.6.2 Exercício: Somabilidade no Sentido de Abel

Uma sequência numérica $\{a_n\}$ é denominada **somável no sentido de Abel** se existe o limite

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Pelo resultado do exercício anterior, toda sequência somável resulta necessariamente somável no sentido de Abel. Forneça um exemplo de sequência somável no sentido Abel mas que não seja somável.

Sugestão: Verifique a lista de séries de Taylor conhecidas até encontrar alguma que divirja em 1 embora a função que represente seja contínua em 1. ♣

40.7 Produto de Cauchy de Séries Revisitado

Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ duas sequências. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ seja c_k definido como

$$c_k = \begin{cases} a_0 b_0 & \text{se } k = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} & \text{se } k \geqslant 1. \end{cases}$$

40.7.1 Exercício: Suponha que $\{a_n\}, \{b_n\}$ são somáveis. Usando o teorema de Abel 40.6.1(b) prove que a sequência $\{c_n\}$ acima definida também é somável e tem-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$ ♣

40.8 Séries Duplas Revisitadas

40.8.1 Exercício: Seja $\{a_{ij}\}$ uma sequência indexada por um par de índices $i, j \in \mathbb{N}$. Suponha que tal sequência dupla é absolutamente somável por filas, ou seja, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe a soma

$$b_i := \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|.$$

Suponha adicionalmente que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i$$

converge. Então, a soma por filas e por colunas da sequência dupla original existem ambas e são iguais, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$ ♣

40.9 Definição Alternativa da Função Exponencial

Define-se a função exponencial "dos analistas" pela seguinte expressão como série de potências:

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 \ + \ x \ + \ \frac{x^2}{2!} \ + \ \frac{x^3}{3!} \ + \ \cdots .$$

40.9.1 Exercício: Usando seu teste de convergência favorito, prove que a série acima converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, exp resulta diferenciável, e portanto contínua, em $\mathbb{R}$. ♣

40.9.2 Exercício: Usando o produto de Cauchy para séries (vide 38.8.4 e definição precedente), prove que:

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y). \qquad \clubsuit$$

Observe que $\exp 0 = 1$. Portanto, a função exponencial dos analistas está bem definida em todo $\mathbb{R}$, é não nula, e satisfaz $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$. Desta maneira, o resultado do exercício 12.7.1 pode ser aplicado. Mais ainda, exp é continua, e o resultado do exercício 19.9.2 também pode ser aplicado. Conclusão: A função exponencial dos analistas é a velha $\exp_{\exp(1)}$, onde aqui exp denota a função exponencial definida no capítulo 12, entanto que $\exp(1)$ denota a função exponencial dos analistas avaliada em 1. A vantagem dos analistas reinventarem a roda será explorada nos exercícios a seguir.

40.9.3 Exercício: Usando apenas a expressão como série de potências verifique os seguintes enunciados.

(a) $\exp' x = \exp x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) exp é uma função estritamente crescente, ou seja, se $x < y$, então $\exp x < \exp y$.

(c) Se $x > 0$, então $\exp x > x$. Portanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty.$$

A partir deste limite resulta fácil provar também que:

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0.$$

(d) Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $x > 0$, então

$$\exp x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Equivalentemente:

$$\frac{x^n}{\exp x} < \frac{(n+1)!}{x}.$$

Portanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\exp x} = 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. ♣

Como exp é contínua e estritamente crescente, logo injetora, resulta invertível, segundo o teorema 26.1.5. A sua função inversa $\exp^{-1}$ tem como domínio o conjunto dos reais positivos e será denotada log.

40.9.4 Exercício: **(a)** Observe que para $y > 0$, tem-se:

$$\exp'\left(\exp^{-1} y\right) = \exp\left(\exp^{-1} y\right) = y > 0.$$

Portanto, $\log = \exp^{-1}$ resulta diferenciável no seu domínio de definição, e tem-se:

$$\log' y = \frac{1}{\exp'\left(\exp^{-1} y\right)} = \frac{1}{\exp\left(\exp^{-1} y\right)} = \frac{1}{y}.$$

(b) Como $\exp 0 = 1$, tem-se:

$$\log 1 = \exp^{-1} 1 = \exp^{-1}(\exp 0) = 0.$$

Portanto, do corolário ao primeiro teorema fundamental do cálculo infinitesimal 30.1.3 segue que:

$$\log y = \log y \; - \; 0 = \log y \; - \; \log 1 = \int_1^y \log' t \, dt = \int_1^y \frac{1}{t} \, dt. \qquad \clubsuit$$

40.9.5 Exercício: Apenas para ter certeza que entendeu os conceitos, definindo $e := \exp 1$, prove partindo de primeiros princípios que $\exp x = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ♣

40.10 Definição Alternativa das Funções Trigonométricas

Definem-se as funções trigonométricas "dos analistas" pelas seguintes expressões como série de potências:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 \; - \; \frac{x^2}{2!} \; + \; \frac{x^4}{4!} \; - \; \frac{x^6}{6!} \; + \; \cdots, \\
\operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \; - \; \frac{x^3}{3!} \; + \; \frac{x^5}{5!} \; - \; \frac{x^7}{7!} \; + \; \cdots.
\end{aligned}$$

40.10.1 Exercício: **(a)** Usando seu teste de convergência favorito, prove que as séries acima convergem para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Verifique os valores especiais:

$$\begin{aligned}
\cos 0 &= 1, \\
\operatorname{sen} 0 &= 0.
\end{aligned}$$

(c) Verifique a paridade das funções trigonométricas:

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos x, \\
\operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

(d) Pelo item (a), as funções sen e cos resultam diferenciáveis em todo $\mathbb{R}$. Derivando as séries termo a termo, prove que:

$$\begin{aligned}&\cos' x = -\operatorname{sen} x,\\&\operatorname{sen}' x = \cos x.\end{aligned}$$

♣

O item (d) do último exercício reproduz basicamente o conteúdo do lema 31.2.5 e a partir daqui o desenvolvimento das propriedades das funções seno e coseno poderia ser continuado na mesma linha que fora apresentada no capítulo 31, exceto por um detalhe: está faltando definir o número π. Isso requer ainda um pouco mais de trabalho.

40.10.2 Exercício: Suponha que $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Verifique que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant 0.$$

Partindo desta relação, conclua que $\cos x > 0$ para todo $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. ♣

40.10.3 Exercício: Prove que:

$$\cos 2 = -\frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+2}}{(4n+2)!}\left[1 - \frac{4}{(4n+3)(4n+4)}\right].$$

Partindo desta expressão conclua que $\cos 2 < 0$. ♣

40.10.4 Exercício: Prove que:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\left[1 - \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\right].$$

Partindo desta expressão conclua que

$$\operatorname{sen} x \geqslant \frac{x}{3},$$

para todo $0 \leqslant x \leqslant 2$. ♣

40.10.5 Exercício: Prove que existe um único $x_0 \in (0, 2)$ tal que $\cos x_0 = 0$. Mais ainda, $x_0 > \sqrt{2}$.

Sugestão: A existência segue facilmente do resultado dos exercícios 40.10.2 e 40.10.3 pela continuidade do coseno. O resultado do primeiro destes exercícios prova também que deve ser $x_0 > \sqrt{2}$. Para a unicidade, considere o método de *reductio ad absurdum* usando o resultado do exercício 40.10.4 para obter uma contradição. ♣

Esta única raiz do coseno no intervalo $(\sqrt{2}, 2)$ denomina-se $\pi/2$. Desta maneira, sabe-se que $2\sqrt{2} < \pi < 4$.

40.10.6 Exercício: Uma Estimativa Aprimorada de π

(a) Verifique que a expressão

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

é positiva quando $x = 25/16$.

(b) Verifique que a expressão

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

é negativa quando $x = (6 - 2\sqrt{3})^{1/2} \approx 1.5924$.

(c) Conclua que $3.125 < \pi < 3.185$. ♣

40.10.7 Exercício: Alguns Valores Especiais

(a) Usando as fórmulas para o seno e coseno de uma soma, prove que para todo $k \in \mathbb{Z}$ tem-se:

$$\cos k\pi = (-1)^k$$
$$\operatorname{sen} k\pi = 0.$$

Sugestão: Para $k \in \mathbb{N}$ use indução. Para k inteiro negativo use a paridade do seno e coseno para voltar ao caso $k \in \mathbb{N}$.

(b) Em particular, $\cos 2k\pi = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Prove que, de fato, $\cos\beta = 1$ se e somente se $\beta = 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. ♣

40.10.8 Exercício: Uma das desigualdades fundamentais também pode ser verificada através de uma abordagem direta. Prove que:

$$\operatorname{sen} x - x \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}\left[4n - 2 - \frac{x^2}{4n+1}\right].$$

Partindo desta expressão conclua que $\operatorname{sen} x - x\cos x > 0$, ou equivalentemente que

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

para $0 < x < \pi/2$. ♣

40.11 A Função Exponencial Complexa

Ignorando irresponsavelmente o fato que os números complexos nunca foram considerados de maneira séria na presente obra, define-se a função exponencial para $z \in \mathbb{C}$ pela série

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

40.11.1 Exercício: **(a)** Usando seu teste de convergência favorito, verifique que a série acima converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) $\exp' z = \exp z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(c) $\exp(z)\exp(w) = \exp(z + w)$, todo $z, w \in \mathbb{C}$.

(d) Em particular, para todo $z \in \mathbb{C}$ tem-se $\exp z \neq 0$ e

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}.$$

♣

Observando que conjugação complexa é uma operação contínua

$$|\overline{z} - \overline{w}| = |\overline{z - w}| = |z - w|$$

tem-se:

$$\overline{\exp z} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{n} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{n} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{n} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp \overline{z}.$$

40.11.2 Exercício: **(a)** Para cada $z \in \mathbb{C}$ tem-se $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$.

(b) Em particular, se $\theta \in \mathbb{R}$, então $|\exp i\theta| = 1$. ♣

Para $z \in \mathbb{C}$ arbitrário, definem-se as **funções trigonométricas complexas** como:

$$\cos z = \frac{\exp(iz) \ + \ \exp(-iz)}{2},$$
$$\operatorname{sen} z = \frac{\exp(iz) \ - \ \exp(-iz)}{2i}.$$

40.11.3 Exercício: Verifique que para todo $z \in \mathbb{C}$ as funções trigonométricas complexas satisfazem as seguintes identidades.

(a) $\exp(iz) = \cos z \ + \ i \operatorname{sen} z$.

(b) Paridade:

$$\cos(-z) = \cos z,$$
$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z.$$

(c) Identidade pitagórica: $\cos^2 z \;+\; \operatorname{sen}^2 z = 1.$

(d) Fórmulas de adição, ou seja, para todo $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w \;-\; \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w,$$
$$\operatorname{sen}(z+w) = \cos z \operatorname{sen} w \;+\; \operatorname{sen} z \cos w.$$

(e) Regras de derivação:

$$\cos' z = -\operatorname{sen} z,$$
$$\operatorname{sen}' z = \cos z.$$

♣

Usando o item (a) do exercício anterior para $z = i\theta$, com $\theta \in \mathbb{R}$, obtém-se a **fórmula de Euler**, a saber:

$$\exp i\theta = \cos\theta \;+\; i \operatorname{sen}\theta.$$

Particularizando esta fórmula para $\theta = \pi$, obtém-se $\exp i\pi = -1$, ou equivalentemente:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta identidade notável, conhecida como **identidade de Euler**, reúne em uma única expressão os “cinco números mais importantes” da Matemática.

40.11.4 Exercício: Verifique as seguintes expressões como séries de potências.

(a) A função cos pode ser expressada como:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 \;-\; \frac{z^2}{2!} \;+\; \frac{z^4}{4!} \;-\; \frac{z^6}{6!} \;+\; \cdots$$

(b) Analogamente, a função sen pode ser expressada como:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z \;-\; \frac{z^3}{3!} \;+\; \frac{z^5}{5!} \;-\; \frac{z^7}{7!} \;+\; \cdots$$

♣

40.11.5 Exercício: **Relação com as funções trigonométricas hiperbólicas**

Para cada $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\cos(x+iy) = \cos x \cosh y \;-\; i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$
$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y \;+\; i \cos x \operatorname{senh} y.$$

♣

Para $z \in \mathbb{C}$ arbitrário, definem-se as **funções trigonométricas hiperbólicas complexas** como:

$$\cosh z = \frac{\exp(z) \ + \ \exp(-z)}{2},$$
$$\operatorname{senh} z = \frac{\exp(z) \ - \ \exp(-z)}{2}.$$

40.11.6 Exercício: Verifique que as funções trigonométricas hiperbólicas complexas satisfazem as seguintes identidades.

(a) Para cada $z \in \mathbb{C}$ tem-se:

$$\cosh z = \cos(iz),$$
$$\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz).$$

(b) Para cada $z \in \mathbb{C}$ tem-se:

$$\cos z = \cosh(iz),$$
$$\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz).$$

♣

40.12 A Série Binomial Revisitada

A convergência da série binomial

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

para $|x| < 1$ foi estabelecida na seção 38.22. No exercício a seguir considera-se uma prova alternativa.

40.12.1 Exercício: **(a)** Utilizando o teste da razão 38.3.2, verifique que a série

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

converge absolutamente para $|x| < 1$.

(b) Em particular, f pode ser derivada termo a termo para $|x| < 1$. Prove que

$$(1+x)\, f'(x) \ - \ \alpha\, f(x) = 0$$

para $|x| < 1$.

(c) Usando o item anterior, prove que deve ser $f(x) = c\,(1+x)^\alpha$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Considere a função $g(x) = f(x)/(1+x)^\alpha$. O que acontece com a sua derivada?

(d) Observando que $1 = f(0) = c$, conclua finalmente que:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

para $|x| < 1$. ♣

A demonstração anterior da convergência para $x \in (-1, 1)$ foi tão simples, principalmente se comparada com todo o trabalho da seção 38.22, que se poderia avançar um passo a mais, e estabelecer a convergência para $x = \pm 1$ no caso particular em que $\alpha > 0$.

40.12.2 Exercício: Suponha $\alpha > 0$.

(a) Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{n} \right|$ converge.

(b) Usando o resultado do item anterior e a prova M de Weierstrass 40.1.6, segue que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

converge uniforme e absolutamente para $x \in [-1, 1]$. Em particular, a função definida por tal série resulta contínua em $[-1, 1]$.

(c) Finalmente, observe que a função $f(x) = (1+x)^\alpha$ e a função definida pela série acima são duas funções contínuas no intervalo $[-1, 1]$ que, pelo exercício anterior, coincidem no subconjunto denso $(-1, 1)$. Portanto, deve ser

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

para $|x| \leqslant 1$, no caso particular $\alpha > 0$. ♣

40.13 A Sequência de Fibonacci em Série

40.13.1 Exercício: A sequência de Fibonacci $\{a_n\}$ é definida como $a_1 = a_2 = 1$ e pela relação de recorrência

$$a_{n+1} = a_n \ + \ a_{n-1}$$

para todo $n \geqslant 2$.

(a) Prove que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 2$.

(b) Considere a série de potências definida como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n-1} = 1 \;+\; x \;+\; 2\,x^2 \;+\; 3\,x^3 \;+\; 5\,x^4 \;+\; \cdots$$

Valendo-se do teste da razão 38.3.2, prove que $f(x)$ converge para $|x| < 1/2$.

(c) Demonstre que se $|x| < 1/2$, então:

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$

Sugestão: A identidade acima pode ser expressada alternativamente como

$$f(x) \;-\; x^2\, f(x) \;-\; x\, f(x) = 0.$$

(d) Use a descomposição em frações simples para $1/(x^2 + x - 1)$ e a série de potências para $1/(x - a)$ para obter uma outra série de potências para f.

(e) Finalmente, use o resultado de unicidade para a representação em série de potências do exercício 40.4.2 para demostrar, mais uma vez, que:

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \;-\; \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \;\forall\, n \geqslant 1.$$ ♣

40.14 Convergência de Algumas Séries de Potências

40.14.1 Exercício: Determine o valor da soma de cada uma das seguintes séries de potências.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 \;-\; x \;+\; \frac{x^2}{2!} \;-\; \frac{x^3}{3!} \;+\; \cdots.$ R: e^{-x}.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{3n} = 1 \;-\; x^3 \;+\; x^6 \;-\; x^9 \;+\; \cdots.$ R: $1/(1+x^3)$.

(c) Para $|x| < 1$, a série:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)} = \frac{x^2}{2\cdot 1} \;-\; \frac{x^3}{3\cdot 2} \;+\; \frac{x^4}{4\cdot 3} \;-\; \frac{x^5}{5\cdot 4} \;+\; \cdots\,.$$

R: $(x+1)\,(\log(x+1) \;-\; 1)$.

Sugestão: O quê se obtém derivando a série termo a termo?

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2\cdot 1} \;-\; \frac{1}{3\cdot 2} \;+\; \frac{1}{4\cdot 3} \;-\; \frac{1}{5\cdot 4} \;+\; \cdots.$ R: $2\,(\log 2 \;-\; 1)$.

Sugestão: Use o resultado do exercício 40.6.1(b) junto com o item anterior.

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{1+3n} = 1 \; - \; \frac{1}{4} \; + \; \frac{1}{7} \; - \; \frac{1}{10} \; + \; \cdots .$ R: ?. ♣

Parte V

Aplicações

Não existe nenhuma categoria da Ciência à qual se possa dar o nome de Ciência Aplicada. O que existe são a Ciência e as aplicações da Ciência, intimamente ligadas, como frutos à árvore que os gerou.

Louis Pasteur [1]

I think that the difference between pure and applied mathematics is social rather than scientific. A pure mathematician is paid for making mathematical discoveries. An applied mathematician is paid for the solution of given problems. When Columbus set sail he was like an applied mathematician, paid for the search of the solution of a concrete problem: find a way to India. His discovery of the New World was similar to the work of a pure mathematician.

V. I. Arnold [2]

---

[1] *Pourquoi la France n'a pas trouvé d'hommes supérieurs au moment du péril*, Revue Scientifique, Paris, 1871.
[2] In: [15]

Capítulo 41

Ordinárias, mas Bonitinhas

ou **Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem**.

Este capítulo pode ser incluído logo após o capítulo 32.

> Assim como a dedução deveria estar suplementada pela intuição, também o impulso à progressiva generalização deve ser amenizado e balanceado pelo respeito e afeição pelo detalhe em toda a sua gama de cores. O problema individual não deveria ser degradado ao papel de mera ilustração particular de teorias generais abrangentes. De fato, teorias generais emergem na consideração do específico, carecendo de significado se não contribuírem no esclarecimento e ordenação da particular substância em que descansam. A interação entre generalidade e individualidade, dedução e construção, lógica e imaginação —essa é a essência palpitante da matemática. Cada uma dessas facetas da matemática podem ser subjazentes a determinado grande logro. Já em um desenvolvimento de longo alcance, todas elas estarão envolvidas. Em linhas gerais, um tal desenvolvimento começará no chão do "concreto". Então, perdendo lastro através da abstração, elevar-se-á até as espaçosas camadas de ar rarefeito onde a navegação e observação aparecem facilitadas; após esse voo vem a prova crucial da aterrizagem e o alvejamento de objetivos específicos nas recentemente visualizadas planícies na "realidade" do particular. Resumindo, o voo na generalidade abstrata deve começar e finalizar no concreto e específico.
>
> *Richard Courant* [1]

41.1 Um Resultado de Unicidade

Considere uma função y satisfazendo a relação:

$$y' = y.$$

A função exponencial $y = \exp$ constitui um exemplo de tal função. Porém, não é a única com tal propriedade.

[1] Citado em [24, p. xxiii].

41.1.1 Exemplo: Seja $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária. Toda função da forma $y = c \exp$ satisfaz $y' = y$. Com efeito, tem-se:

$$y' = (c \exp)' = c \exp' = c \exp = y. \qquad \clubsuit$$

Contudo, as funções do exemplo anterior esgotam a lista de tais funções. Uma prova simples e elegante desse fato constitui mais um exemplo da aplicação do Teorema do Valor Médio 23.2.2.

41.1.2 Lema: *Se y é diferenciável e $y'(x) = y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então existe alguma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $y(x) = c \exp(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.* □

Demonstração: Considere a função g definida como:

$$g(x) := \frac{y(x)}{\exp(x)}.$$

Esta função está bem definida no domínio $\mathbb{R}$, pois $\exp(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, tem-se:

$$g'(x) = \frac{y'(x)\,\exp(x) \;-\; y(x)\,\exp'(x)}{\exp^2(x)} = \frac{y(x)\,\exp(x) \;-\; y(x)\,\exp(x)}{\exp^2(x)} = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = c$, ou seja, tal que $y(x) = c \exp(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. ∎

41.2 Equações de Primeira Ordem Homogêneas

Seja f uma função dada. Considere uma função y satisfazendo:

$$y' \;+\; f\,y = 0. \tag{41.2.1}$$

A relação acima é o exemplo mais geral de **equação diferencial ordinária de primeira ordem, linear e homogênea**. Aqui a função f supõe-se conhecida. Determinar uma *solução* da equação diferencial consiste em encontrar uma função y que satisfaça a relação (41.2.1), para a dada f.

41.2.1 Exemplo: Se $f = -1$, então a equação (41.2.1) assume a forma $y' - y = 0$, ou seja, $y' = y$. Segundo o Lema 41.1.2, todas as suas soluções são da forma $y = c \exp$. ♣

41.2.2 Lema: *Uma solução da equação (41.2.1) satisfazendo $y(x_0) = y_0$ é dada por:*

$$y(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right). \qquad \square$$

Demonstração: A prova apresentada a seguir é construtiva. Em primeiro lugar, observe que a relação (41.2.1) pode ser reformulada da seguinte maneira:

$$\frac{1}{y(t)}\,y'(t) = -f(t),$$

de onde segue que:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{y(t)}\, y'(t)\, dt = -\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Usando a regra de derivação de funções compostas, verifica-se que o integrando no membro esquerdo acima é a derivada da função $\log y(x)$. Logo, pelo corolário 30.1.3 do Teorema Fundamental do Cálculo, a integral à esquerda é dada por

$$\log y(x) \;-\; \log y(x_0).$$

Alternativamente, a primitiva desta integral pode ser determinada através da substituição $u = y(t)$, com $du = y'(t)\, dt$, ou seja:

$$\int \frac{1}{y(t)}\, y'(t)\, dt = \int \frac{1}{u}\, du = \log u = \log y(t).$$

Desta maneira, tem-se:

$$-\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y(t)}\, y'(t)\, dt = \log y(t)\big|_{x_0}^{x} = \log y(x) \;-\; \log y(x_0) = \log \frac{y(x)}{y(x_0)}.$$

Portanto, se $y_0 = y(x_0)$, finalmente resulta:

$$y(x) = y_0 \, \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right). \qquad \blacksquare$$

41.3 A Equação Não-Homogênea

A incipiente exploração no mundo das Equações Diferenciais iniciada nas seções anteriores pode ser levada um passo adiante com apenas mais um pouco de esforço adicional.

Sejam agora f e g duas funções dadas. A equação:

$$y' \;+\; f\, y = g, \tag{41.3.1}$$

constitui o exemplo mais geral de equação diferencial de primeira ordem, linear, **não-homogênea**. A equação homogênea (41.2.1) da seção anterior é um caso particular com $g = 0$.

41.3.1 Lema: *Uma solução da equação (41.3.1) satisfazendo $y(x_0) = y_0$ é dada por:*

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right) \left[y_0 \;+\; \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{t} f(u)\, du \right) g(t)\, dt \right]. \qquad \square$$

Demonstração: A prova apresentada a seguir é construtiva. Multiplicando ambos membros da equação (41.3.1) por uma função μ, não especificada pelo momento, tem-se:

$$\mu(t)\, y'(t) \;+\; f(t)\, \mu(t)\, y(t) = \mu(t)\, g(t). \tag{41.3.2}$$

A ideia agora consiste em usar a liberdade de escolha para a função μ de maneira tal que o membro à esquerda acima resulte a derivada de alguma expressão. Esta técnica denomina-se *variação de constantes*. Para tanto, usando a regra de derivação de um produto, observe que:

$$(\mu\, y)'(t) = \mu(t)\, y'(t) \;+\; \mu'(t)\, y(t).$$

Desta maneira, o membro à esquerda na equação (41.3.2) resultará a derivada da função $\mu\, y$ desde que $\mu'(t) = f(t)\, \mu(t)$. Ou seja, equivalentemente, se μ satisfazer a relação:

$$\mu' \;-\; f\, \mu = 0.$$

Esta última relação constitui uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, linear e *homogênea* para μ, cuja solução é conhecida. Com efeito, pelo Lema 41.2.2, tal solução é dada por:

$$\mu = \mu(x_0)\, \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right). \tag{41.3.3}$$

Com essa função μ, a equação (41.3.2) resulta em:

$$(\mu\, y)'(t) = \mu(t)\, g(t),$$

de onde segue que:

$$\int_{x_0}^{x} (\mu\, y)'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \mu(t)\, g(t)\, dt.$$

Desta maneira, usando agora o corolário 30.1.3 do Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se:

$$\mu(x)\, y(x) \;-\; \mu(x_0)\, y(x_0) = \int_{x_0}^{x} \mu(t)\, g(t)\, dt.$$

Portanto:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left(\mu(x_0)\, y(x_0) \;+\; \int_{x_0}^{x} \mu(t)\, g(t)\, dt \right).$$

Introduzindo a expressão explícita para $\mu(x)$ dada por (41.3.3), obtém-se finalmente a solução geral da equação diferencial ordinária de primeira ordem linear não-homogênea:

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right) \left[y(x_0) \;+\; \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{t} f(u)\, du \right) g(t)\, dt \right]. \qquad \blacksquare$$

Se bem satisfatório pelo momento, provavelmente neste ponto o percurso depara-se com um impasse. Embora seja possível derivar *formalmente* soluções de todas as equações diferenciais apresentadas, as expressões obtidas não serão de muita utilidade a menos que se saiba como determinar explicitamente expressões tais como:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

ou:

$$\int_{x_0}^{x} \mu(t)\, g(t)\, dt,$$

para funções f e g conhecidas mas em princípio arbitrárias. Felizmente, métodos sistemáticos para esse tipo de cálculo podem ser desenvolvidos, sendo efetivos para uma abrangente variedade de funções, como poderá constatar o leitor que tenha se debruçado na resolução dos exercícios para o Capítulo 33.

Exercícios para o Capítulo 41

41.4 Unicidade da Solução

41.4.1 Exercício: Determine as funções contínuas y que satisfazem cada uma das seguintes identidades. A título de sugestão, observe que em tais casos a função y é automaticamente diferenciável (por quê?) e determine que propriedade deve ter y'.

(a) $y(x) = \displaystyle\int_0^x y(t)\,dt.$ R: $y = 0$.

(b) $y(x) = 2 \ + \displaystyle\int_1^x y(t)\,dt.$ R: $y(x) = \dfrac{2}{e}\,e^x = 2e^{x-1}$. ♣

41.4.2 Exercício: Determine quais são todas as funções diferenciáveis y que satisfazem a identidade:

$$y'(x) = y(x) \ + \int_0^1 y(t)\,dt.$$

Sugestão: Observe que em tal caso a função y é automaticamente *duas vezes* diferenciável. Denote $u = y'$ e determine que propriedade deve ter u'. R: $y(x) = c\,e^x \ + \ c\,(1-e)/2$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. ♣

41.5 Decaimento Radioativo

O fenômeno da radioatividade foi descoberto por volta da virada do século XIX para o XX. Verificou-se que certos elementos, assim denominados *radioativos*, são instáveis e que num dado período de tempo uma proporção fixa dos seus átomos desintegra-se espontaneamente dando origem a átomos de outros elementos. Sendo uma propriedade dos átomos, a radioatividade de uma substância é diretamente proporcional ao número de átomos presentes na substância. Portanto, se $y = y(t)$ denota o número de átomos presentes ao tempo t, então o número de átomos que se desintegram por unidade de tempo y' é proporcional a y, ou seja:

$$y' = -\lambda y.$$

A constante $\lambda \in \mathbb{R}$ é positiva e denomina-se **constante de decaimento** da substância em questão.

41.5.1 Exercício: Considere uma substância radioativa com constante de decaimento λ.

(a) Determine o número de átomos $y(t)$ presentes ao tempo t em termos da quantidade y_0 presente ao tempo $t_0 = 0$. R: $y(t) = y_0\, e^{-\lambda\, t}$.

(b) Verifique a existência de um número $\tau \in \mathbb{R}$ com a propriedade de que $y(t+\tau) = y(t)/2$ e obtenha uma expressão para o mesmo. O número τ com essa propriedade é conhecido como a **vida média** da substância em questão. R: $\tau = (\log 2)/\lambda$. ♣

41.6 Lei de Malthus do Crescimento Populacional

Seja $y = y(t)$ a população de uma dada espécie medida em número de indivíduos, e seja $r(t, y)$ a diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade. Se a população é *isolada*, ou seja, sem imigração nem emigração, então a taxa de variação da população y' é igual a ry. No modelo mais simplista possível se pode assumir que r é constante. Desta maneira, a equação diferencial que governa o crescimento populacional neste caso é dada por:

$$y' = ry,$$

onde $r \in \mathbb{R}$ é uma constante. A equação acima determina um *crescimento exponencial* para a população em questão. Esse tipo de comportamento denomina-se **Lei de Malthus**.

41.7 Lei de Esfriamento de Newton

A taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a sua própria temperatura e a do meio ambiente. Se $y = y(t)$ é a temperatura do corpo no instante t e $A(t)$ a temperatura conhecida do meio ambiente, então a **Lei de Esfriamento de Newton** expressa que:

$$y' = -k(y - A),$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva.

41.7.1 Exercício: Assuma como válida a Lei de Esfriamento de Newton precedente.

(a) Determine a temperatura em função do tempo $y(t)$ para um determinado corpo, supondo que a temperatura do ambiente é constante, com valor $A \in \mathbb{R}$. R: $y(t) = [y(t_0) - A]\, e^{-k(t-t_0)} \ + \ A$.

(b) Qual é a temperatura *final* do corpo em questão? R: $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = A$. Ou seja, a temperatura do corpo tende a igualar-se com a temperatura do ambiente. ♣

41.8 Abordagem Alternativa da Função Exponencial

Suponha que a equação diferencial $f' = f$ admite uma solução não-trivial. Em outras palavras, suponha a existência de alguma função f tal que $f' = f$, com $f \neq 0$, ou seja, existe *algum* $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq 0$.

41.8.1 Exercício: Seja f tal que $f' = f$ e $f \neq 0$. Em tal caso, prove que:

(a) Deve ser $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. Mais ainda, deve ser $f(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$, mas esta afirmação reserva-se para o exercício a seguir.

(b) Existe f tal que $f' = f$ e $f(0) = 1$. ♣

41.8.2 Exercício: Seja agora f tal que $f' = f$ e $f \neq 0$, com a condição adicional que $f(0) = 1$, que sempre pode ser assumida sem perda de generalidade, segundo o último item do exercício anterior. Então:

(a) $f(x+y) = f(x)\,f(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Em particular, tem-se $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Uma tal f é injetora. Em particular, existe f^{-1}.

(e) $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. ♣

41.9 Abordagem Alternativa das Funções Trigonométricas

Suponha que a equação diferencial $f'' + f = 0$ admite uma solução não-trivial. Em outras palavras, suponha a existência de alguma função f tal que $f'' + f = 0$ com $f \neq 0$, ou seja, existe *algum* $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq 0$.

41.9.1 Exercício: Seja f tal que $f'' + f = 0$ e $f \neq 0$. Em tal caso, prove que:

(a) Deve ser $f^2 + (f')^2$ constante.

(b) Conclua que deve ser, ou bem $f(0) \neq 0$, ou bem $f'(0) \neq 0$.

(c) Prove que em tal caso deve existir uma função s tal que $s'' + s = 0$, com $s(0) = 0$ e $s'(0) = 1$.

Sugestão: Tente-se com uma s da forma $s = a\,f + b\,f'$, para algumas constantes $a, b \in \mathbb{R}$ convenientes. ♣

Chegados neste ponto, usando o resultado do item (c) do exercício anterior, se poderia *definir*:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} &:= s, \\ \cos &:= s'. \end{aligned}$$

Em tal caso, quase todas as propriedades das funções trigonométricas resultam triviais. Existe, contudo, um ponto que requer trabalho: Obter o número π. Para tanto, resulta necessário um pequeno desvio de percurso, a ser trilhado no exercício a seguir.

41.9.2 Exercício: Seja f uma função duas vezes diferenciável com as seguintes propriedades:

1. $f(x) > 0$, para todo $x \geqslant 0$.

2. f é estritamente decrescente na semirreta positiva.

3. $f'(0) = 0$.

Observe *en passant* que um exemplo de tal função é dado por:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

(a) Sob as hipóteses acima, prove que deve ser $f''(x_0) = 0$ para algum $x_0 > 0$. Assim, em certos casos razoáveis se pode esperar que f tenha algum *ponto de inflexão* em tal x_0.

Sugestão: Deve existir algum $y_0 > 0$ tal que $f'(y_0) \leqslant 0$, pois, caso contrário, se fosse $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$ seria f estritamente crescente, o que contradiz a segunda hipótese. Em particular, se fosse $f'(y_0) = 0$, então pelo Teorema do Valor Médio 23.2.2 existiria algum $x_0 \in (0, y_0)$ tal que:

$$f''(x_0) = \frac{f'(y_0) - f'(0)}{y_0} = 0,$$

o que prova o enunciado. Suponha então que $f'(y_0) < 0$. Em tal caso, se pode provar por *reductio ad absurdum* que deve existir algum $y_1 > y_0$ tal que $f'(y_1) > f'(y_0)$. Considere então a função *contínua* (por que?) f' no intervalo *compacto* $[0, y_1]$.

(b) Cada uma das hipóteses acima resulta essencial, como fica evidenciado no caso das funções:

$f(x) = 1 - x^2$, que não é positiva para todo $x \geqslant 0$;

$f(x) = x^2$, que não é decrescente;

$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, que não satisfaz $f'(0) = 0$. ♣

41.9.3 Exercício: **(a)** Use o resultado do item (a) do exercício anterior, para demostrar que $\cos x$ não pode ser positivo para todo $x > 0$.

(b) Portanto, existe algum x_0 *mínimo* tal que $\cos x_0 = 0$ e se pode definir $\pi := 2x_0$.

(c) Prove que $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.

Sugestão: Dado que $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$, deve ser $\operatorname{sen}(\pi/2) = \pm 1$. O problema consiste em decidir por que $\operatorname{sen}(\pi/2)$ deve ser positivo.

(d) Determine os valores de $\cos \pi$, $\operatorname{sen} \pi$, $\cos 2\pi$ e $\operatorname{sen} 2\pi$.

Sugestão: Naturalmente, poderiam ser usadas as fórmulas da soma, dado que estas podem ser deduzidas a partir das identidades $\operatorname{sen}' = \cos$ e $\cos' = -\operatorname{sen}$.

(e) Demostrar que as funções cos e sen são periódicas, com período 2π. ♣

41.10 A Equação $f'' - f = 0$

41.10.1 Exercício: Suponha que f satisfaz $f'' - f = 0$ e que $f(0) = f'(0) = 0$. Demonstre que deve ser $f = 0$ como segue:

(a) Prove que $f^2 - (f')^2 = 0$.

(b) Usando o item (a) anterior, prove que se fosse $f(x) \neq 0$ para todo x em algum intervalo (a, b), então deve ser, o bem $f(x) = c\,e^x$, ou bem $f(x) = c\,e^{-x}$, para todo $x \in (a, b)$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$.

(c) Finalmente, por *reductio ad absurdum*, suponha a existência de algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Então, por continuidade, deve ser $f(x) \neq 0$ para todo x em algum intervalo (a, b) contendo x_0. Em tal caso, o item (b) anterior pode ser usado para obter uma contradição. Por exemplo, $f(0) = 0$ implicaria que $c = 0$, e portanto se teria que $f(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. ♣

41.10.2 Exercício: Seja f tal que $f'' - f = 0$. Em tal caso, prove que:

(a) Deve ser $f(x) = a\,e^x \; + \; b\,e^{-x}$, para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Imagine primeiramente como deveriam ser a e b em termos de $f(0)$ e $f'(0)$. Depois use o resultado do exercício 41.10.1(b) anterior.

(b) Prove que f pode ser expressada alternativamente como $f(x) = \alpha \operatorname{senh} x \; + \; \beta \cosh x$, para certas constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ♣

41.11 O Teorema de Comparação de Sturm

41.11.1 Exercício: Suponha que ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem as equações:

$$\phi_1'' \; + \; g_1\,\phi_1 = 0,$$
$$\phi_2'' \; + \; g_2\,\phi_2 = 0,$$

respectivamente, com $g_2 > g_1$.

(a) Prove que:

$$\phi_1''\,\phi_2 \; - \; \phi_2''\,\phi_1 \; - \; (g_2 - g_1)\,\phi_1\phi_2 = 0.$$

(b) Verifique que se $\phi_1(x) > 0$ e $\phi_2(x) > 0$ para todo x de algum intervalo (a, b), então:

$$\int_a^b (\phi_1''\,\phi_2 - \phi_2''\,\phi_1) > 0.$$

(c) Use o item anterior para concluir que:

$$[\phi_1'(b)\,\phi_2(b) - \phi_1'(a)\,\phi_2(a)] \; + \; [\phi_1(b)\,\phi_2'(b) - \phi_1(a)\,\phi_2'(a)] > 0.$$

(d) Prove que em tal caso resulta impossível ter $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$.

Sugestão: Considere o sinal de $\phi_1'(a)$ e $\phi_1'(b)$.

(e) Verifique que as equações $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$ também são impossíveis em cada um dos casos:

$$\phi_1 > 0, \quad \phi_2 < 0;$$
$$\phi_1 < 0, \quad \phi_2 > 0;$$
$$\phi_1 < 0, \quad \phi_2 < 0.$$

♣

A moral da história pode ser resumida da seguinte maneira: Se a e b são zeros consecutivos de ϕ_1, então ϕ_2 deve ter algum zero em algum ponto intermediário entre a e b. Este resultado, numa forma ligeiramente mais geral, resulta conhecido como **Teorema de Comparação de Sturm**.

41.11.2 Exercício: Como exemplo particular, qualquer solução da equação diferencial:

$$y'' + (x+1)\, y = 0$$

deve ter zeros no semieixo horizontal positivo localizados a distância menor que π um do outro. ♣

Capítulo 42

Equações Diferenciais Separáveis

Este capítulo e o próximo podem ser incluídos logo após o capítulo 33.

42.1 Definições e Resultados Básicos

42.1.1 Definição: Uma equação de primeira ordem é denominada **separável** se a expressão para y' pode ser fatorada como o produto de um par de funções, uma das quais depende apenas de x, entanto que a outra depende apenas de y. Por exemplo, na forma:

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y(x))}. \qquad \clubsuit$$

42.1.2 Lema: *Sejam f e g duas funções. Suponha que $G' = g$ e $F' = f$. Então:*

(a) *Se a função y satisfaz a equação diferencial separável*

$$g(y(x))\, y'(x) = f(x)$$

para todo x pertencente a algum intervalo, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$G(y(x)) = F(x) + c.$$

(b) *Reciprocamente, se y satisfaz $G(y(x)) = F(x) + c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$, então y satisfaz a equação diferencial $g(y(x))\, y'(x) = f(x)$.* $\square$

Demonstração: **(a)** Observe que:

$$F'(x) = f(x) = g(y(x))\, y'(x) = G'(y(x))\, y'(x) = (G \circ y)'(x).$$

Portanto, basta aplicar o resultado do corolário 23.2.3(b).

(b) Basta observar que:

$$f(x) = F'(x) = G'(y(x))\, y'(x) = g(y(x))\, y'(x). \qquad \blacksquare$$

Se $\mathbb{R} \ni x_0 \in \mathrm{Dom}(y)$, com relação ao item (a) do resultado anterior observe que se $G(y(x)) = F(x) + c$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(y)$, então particularizando esta relação para $x = x_0$ resulta possível obter o valor da constante c em termos dos "valores iniciais" conhecidos x_0 e $y_0 := y(x_0)$, como:

$$c = G(y(x_0)) - F(x_0) = G(y_0) - F(x_0).$$

Desta maneira, a relação do item (a) do resultado anterior pode ser expressada alternativamente como:

$$G(y(x)) \ - \ G(y(x_0)) = G(y(x)) \ - \ G(y_0) = F(x) \ - \ F(x_0).$$

Portanto, resolver a equação diferencial original resulta tão "simples" como resulte inverter a função G, ou seja:

$$y(x) = G^{-1}[F(x) + (G(y_0) - F(x_0))].$$

Exercícios para o Capítulo 42

42.2 Equações Diferenciais Separáveis

42.2.1 Exercício: Determine as soluções y da equação diferencial:

$$y'(x) = \frac{1+x^2}{1+y(x)}.$$

Sugestão: Use o item (b) do Lema 42.1.2 com as funções:

$$f(x) = 1 + x^2,$$
$$g(x) = 1 + x.$$

Depois "resolva" a equação resultante para encontrar y. Observe que nenhuma das soluções terá todo $\mathbb{R}$ como domínio. R: $y(x) = -1 \pm \sqrt{1 + 2\left(x + \frac{x^3}{3} + c\right)}$. ♣

42.2.2 Exercício: Seja y uma função satisfazendo a seguinte equação diferencial:

$$y'(x) = \frac{-1}{1+5y^4(x)}.$$

(a) Verifique que condições deve satisfazer a função y. R: $y^5(x) + y(x) + x = c$.

Sugestão: Use o item (b) Lema 42.1.2 com $f(x) = -1$ e $g(x) = 1 + 5x^4$.

(b) Observe que, pelo exercício 26.6.1, uma tal função y existe, é invertível e a sua inversa y^{-1} está definida em todo $\mathbb{R}$. ♣

42.2.3 Exercício: Considere a seguinte equação diferencial:

$$y(x)\, y'(x) = -x.$$

(a) Determine todas as suas soluções. R: $y(x) = \pm\sqrt{2c - x^2}$.

Sugestão: Use o item (b) Lema 42.1.2 com $f(x) = -x$ e $g(x) = x$.

(b) Determine a solução particular tal que $y(0) = -1$. R: $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. ♣

Mais exemplos de equações diferenciais separáveis serão explorados no seguinte capítulo, no contexto de aplicações particulares em problemas surgidos em diferentes áreas.

Capítulo 43

Relatividade Especial Elementar

Oh let the sun beat down upon my face,
stars to fill my dream.
I am a traveler of both time and space,
to be where I have been.

Led Zeppelin [1]

43.1 Conservação da Energia

A formulação newtoniana da Mecânica Clássica baseia-se no conceito primitivo de **força**. Para sistemas unidimensionais, a força é uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

43.1.1 Definição: Dada uma força F, define-se o **trabalho** W (do inglês *work*) como:

$$W := \int_{x_0}^{x_1} F(x)\, dx. \qquad \clubsuit$$

Considere a seguinte equação diferencial, ou equação de movimento:

$$F(x) = m\, x''. \tag{43.1.1}$$

Aqui m é uma constante não-negativa. Em tal caso, denotando $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$, pela fórmula de substituição 33.3.1(b), tem-se:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t))\, x'(t)\, dt = m \int_{t_0}^{t_1} x''(t)\, x'(t)\, dt.$$

Esta última integral pode ser calculada facilmente por partes:

$$\int x''(t)\, x'(t)\, dt = x'(t)\, x'(t) \; - \int x'(t)\, x''(t)\, dt \;\Rightarrow\; 2 \int x''(t)\, x'(t)\, dt = x'(t)\, x'(t).$$

[1] *Kashmir.* In: Physical Graffity, 1974. Vide *e.g.* [16].

Portanto, denotando $v = x'$, neste caso o trabalho é dado por:

$$W = m\,\frac{v^2(t)}{2}\bigg|_{t_0}^{t_1} = m\,\frac{v^2(t_1)}{2} \;-\; m\,\frac{v^2(t_0)}{2}.$$

Em outras palavras, denotando:

$$E_k := m\,\frac{v^2}{2},$$

tem-se:

$$W = \Delta E_k := E_k(t_1) - E_k(t_0).$$

43.1.2 Definição: Uma força F é dita **conservativa** se existe alguma função U tal que $F = U'$. Por motivos históricos, a função $V := -U$ denomina-se **potencial**. ♣

43.1.3 Teorema (da Conservação da Energia)**:** *Considere a função E definida como:*

$$E := E_k + V = m\,\frac{v^2}{2} \;+\; V(x) = m\,\frac{v^2}{2} \;-\; U(x).$$

Se F é conservativa, então E é constante nas órbitas de qualquer solução da equação (43.1.1). □

Demonstração: Se F é conservativa, então, pelo corolário 30.1.3 do Teorema Fundamental do Cálculo, sabe-se que:

$$W = U(x_1) \;-\; U(x_0).$$

Desta maneira, pela observação precedente, na órbita de tais soluções, tem-se:

$$U(x_1) \;-\; U(x_0) = W = E_k(t_1) - E_k(t_0) \;\Rightarrow\; E_k(t_0) - U(x_0) = E_k(t_1) - U(x_1).$$

Desta maneira, resulta $E(t_0) = E(t_1)$. Portanto, como t_0 e t_1 são arbitrários, deve ser E constante. ∎

43.2 Dinâmica de Massas Variáveis

A equação diferencial (43.1.1) introduzida na seção anterior, que costuma ser denominada **segunda lei de Newton**, descreve na Mecânica Clássica o movimento uma partícula de massa m submetida à ação de uma força F. Denotando $v = x'$, esta equação pode ser expressada alternativamente como:

$$F(x) = m\,x'' = m\,v' = (mv)'.$$

A última igualdade acima decorre do fato que m é constante. Contudo, observe que a expressão resultante:

$$F = (mv)'$$

possui validade geral, tanto para massa variável ou constante, sendo que nesse último caso a segunda Lei de Newton é recuperada.

Existem muitas situações físicas em que a massa é variável. Um caso de particular interesse, por exemplo, corresponde ao de um foguete espacial. Com efeito, em tal caso, inicialmente uma parcela significativa da sua massa é dada pelo combustível, que é rapidamente consumido nas primeiras etapas do voo, fazendo com que a massa total mude drasticamente em um intervalo de tempo relativamente curto.

Portanto, não é necessário apelar a mundos exóticos para salientar a relevância da análise de tais situações com massa variável. Contudo, considera-se oportuno apresentar nesta seção alguns aspectos do movimento de corpos com massas variáveis em um contexto um tanto diferente daquele da Mecânica Clássica.

O ponto de partida da presente análise consiste na equação de movimento discutida precedentemente:

$$F = (mv)'.$$

Denotando $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$, o trabalho da força F é dado por:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t))\, x'(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (mv)'(t)\, v(t)\, dt.$$

Integrando por partes a última integral acima, tem-se:

$$\int (mv)'(t)\, v(t)\, dt = m\, v^2(t) \;-\; \int m\, v(t)\, v'(t)\, dt.$$

Suponha que a massa m seja uma função apenas da velocidade $m = m(v)$. Utilizando a fórmula de substituição na integral remanescente da linha acima, com $u = v(t)$, logo $du = v'(t)\, dt$, resulta:

$$\int (mv)'(t)\, v(t)\, dt = m\, v^2(t) \;-\; \int m(u)\, u\, du.$$

43.3 Aplicação na Teoria da Relatividade Especial

Na *Teoria da Relatividade Especial* supõe-se que a massa depende da velocidade. Mais especificamente, tal dependência funcional é dada pela expressão $m = m_0\, \gamma^{-1/2}$, onde $\gamma = \gamma(v)$ é dado por:

$$\gamma(v) := 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

e $m_0 \geqslant 0$ e $c > 0$ são duas constantes, ou seja:

$$m(v) = \frac{m_0}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Em tal caso, usando a substituição:

$$y = 1 - \frac{u^2}{c^2}$$

$$dy = -\,\frac{2u}{c^2}\, du$$

tem-se:

$$\int m(u)\,u\,du = \int \frac{m_0}{\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}}\,u\,du = -m_0\,\frac{c^2}{2}\int y^{-1/2}\,dy$$

$$= -m_0\,\frac{c^2}{2}\,2\,y^{1/2} = -m_0c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} = -m_0c^2\,\gamma^{1/2}.$$

Portanto, resulta:

$$\int (mv)'(t)\,v(t)\,dt = m\,v^2(t) \; - \; \int m(u)\,u\,du = m_0\,\gamma^{-1/2}\,v^2 \; + \; m_0c^2\,\gamma^{1/2}$$

$$= m_0\,\gamma^{-1/2}\,c^2\left(\frac{v^2}{c^2}+\gamma\right) = m_0\,\gamma^{-1/2}\,c^2\left(\frac{v^2}{c^2}+1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0\,\gamma^{-1/2}\,c^2 = mc^2.$$

Desta maneira, finalmente tem-se:

$$E_k := \int F(x)\,dx = mc^2.$$

43.3.1 Teorema (da Equivalência Massa-Energia)**:** *Suponha que $F = (mv)'$, onde m é uma função que depende apenas de v. Então:*

$$E_k = mc^2$$

se e somente se:

$$m(v) = \frac{m(0)}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \qquad \square$$

Demonstração: A parte ($\Leftarrow$) decorre dos comentários que precedem o enunciado do presente teorema. Para provar a parte ($\Rightarrow$), usando a substituição $u = v(t)$, logo $du = v'(t)\,dt$, tem-se:

$$mc^2 = E_k = \int F(x)\,dx = \int (mv)'(t)\,v(t)\,dt = mv^2 \; - \; \int mv(t)\,v'(t)\,dt$$

$$= mu^2 \; - \; \int m(u)\,u\,du.$$

Desta maneira, resulta:

$$\int m(u)\,u\,du = m(u^2-c^2).$$

Derivando a identidade acima com relação a u, tem-se:

$$m(u)\,u = m'(u)(u^2-c^2) \; + \; 2\,m(u)\,u \;\Rightarrow\; m'(u) = \frac{u}{c^2-u^2}\,m(u).$$

Observe que esta última identidade constitui uma equação diferencial separável, que pode ser integrada facilmente. Com efeito, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^v \frac{m'(u)}{m(u)}\,du &= \int_0^v \frac{u}{c^2-u^2}\,du \\
\int_{m(0)}^{m(v)} \frac{1}{y}\,dy &= -\frac{1}{2}\int_0^v \frac{-2u}{c^2-u^2}\,du \\
\log\frac{m(v)}{m(0)} &= -\frac{1}{2}\log\frac{c^2-v^2}{c^2} \\
\log\frac{m(v)}{m(0)} &= -\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \\
\log\frac{m(v)}{m(0)} &= \log\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Portanto, deve ser:

$$m(v) = m(0)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \qquad \blacksquare$$

43.4 Campo Gravitacional Constante

Suponha que a partícula encontra-se submetida a uma força proporcional a sua massa, ou seja, $F = g\,m$, onde g é uma constante não-nula. Tal situação corresponde, por exemplo, à interação da partícula com um campo gravitacional constante de magnitude g. Supondo a massa variável e utilizando a equação $F = (mv)'$ da seção anterior, o movimento da partícula será governado pela equação diferencial:

$$g\,m = F = (mv)' = m'\,v \ + \ m\,v'.$$

Adicionalmente, suponha que o movimento é relativístico, ou seja, a massa da partícula depende da velocidade na forma:

$$m(v) = \frac{m_0}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_0\,\gamma^{-1/2}.$$

Em tal caso, tem-se:

$$m' = m_0\,\frac{-1}{2}\gamma^{-3/2}\,\frac{-2v}{c^2}\,v' = m_0\,\gamma^{-3/2}\,\frac{v}{c^2}\,v'.$$

Desta maneira, resulta:

$$\begin{aligned}
g\,m = m'\,v \ + \ m\,v' &= m_0\,\gamma^{-3/2}\,\frac{v^2}{c^2}\,v' \ + \ m_0\,\gamma^{-1/2}\,v' \\
&= m_0\,\gamma^{-1/2}\,v'\left(\frac{v^2/c^2}{\gamma} \ + \ 1\right) = mv'\,\frac{v^2/c^2 \ + \ \gamma}{\gamma} = mv'\,\frac{1}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$v' = g\,\gamma = g\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Observe que a identidade acima constitui uma equação diferencial separável, que pode ser integrada facilmente. Com efeito, usando a substituição $u = v/c$, tem-se:

$$gt = \int g\,dt = \int \frac{v'(t)\,dt}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)} = c\int \frac{du}{1-u^2} = c\ \mathrm{arctgh}\,u = c\ \mathrm{arctgh}(v/c).$$

Desta maneira, a velocidade $v(t)$ da partícula como função do tempo t, no caso $v(0) = 0$, resulta dada por:

$$v(t) = c\ \mathrm{tgh}(gt/c).$$

Adicionalmente, observe que, usando a substituição $u = \cosh t$, logo $du = \mathrm{senh}\,t\,dt$, tem-se:

$$\int \mathrm{tgh}\,t\,dt = \int \frac{\mathrm{senh}\,t}{\cosh t}\,dt = \int \frac{1}{u}\,du = \log u = \log\cosh t.$$

Portanto, a posição $x(t)$ da partícula como função do tempo t, no caso $x(0) = 0$, resulta dada por:

$$x(t) = \int x'(t)\,dt = \int v(t)\,dt = c\int \mathrm{tgh}(gt/c)\,dt = c\,\frac{c}{g}\log\cosh(gt/c) = \frac{c^2}{g}\log\cosh(gt/c).$$

Exercícios para o Capítulo 43

43.5 Campo Gravitacional Constante

43.5.1 Exercício: Uma partícula no espaço vazio parte no instante t_0 com velocidade inicial $v(t_0) = v_0$ e movimenta-se relativisticamente sob o efeito de um campo Gravitacional constante g.

(a) Prove que a velocidade $v(t)$ de tal partícula como função do tempo t pode ser expressada como:

$$v(t) = c\,\frac{1 - A_0\, e^{-2g(t-t_0)/c}}{1 + A_0\, e^{-2g(t-t_0)/c}}$$

onde A_0 é uma constante dada por:

$$A_0 = \frac{1 - v_0/c}{1 + v_0/c}.$$

Sugestão: Observe que $v(t)$ satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem separável, que pode ser integrada utilizando o método de decomposição em frações simples.

(b) Em particular, observe que se $|v_0| < c$, então $v(t) < c$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, a partícula em questão nunca supera a "velocidade da luz" c, pelo menos em tempo finito, como prova o resultado do próximo item.

(c) Prove que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = c$. ♣

Enrico Fermi tem sugerido que o fenômeno descrito no exercício anterior, extrapolado ao caso de partículas de poeira interestelar com carga elétrica, aceleradas pelos campos magnéticos das estrelas, pode dar conta, ao menos parcialmente, da origem dos raios cósmicos primários, [24, p. 80].

43.5.2 Exercício: Sob as mesmas hipóteses do exercício anterior, determine a posição $x(t)$ da partícula como função do tempo t. ♣

Capítulo 44

Estatística

44.1 Experimentos Aleatórios

Um **experimento** consiste basicamente num procedimento executado sob certas condições, sucetível de ser repetido uma quantidade arbitrária de vezes sob as mesmas condições, e que uma vez completado certos resultados podem ser observados. Um experimento é **determinístico** se os seus resultados podem ser completamente inferidos a partir das condições iniciais. Um experimento cujos resultados não podem ser determinados a partir das condições iniciais, exceto pelo fato de pertencer a um dado conjunto de resultados possíveis, é dito **aleatório**.

O conjunto Ω de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório denomina-se **espaço amostral**. Certos conjuntos de Ω, mas não todos em geral, denominam-se **eventos**. Por exemplo, Ω e $\emptyset$ são eventos, conhecidos como eventos **certo** e **impossível**, respectivamente. Eventos da forma $\{\omega\}$ são conhecidos como eventos **simples**, no entanto que um evento com dois ou mais pontos é dito **composto**.

Na formalização matemática da teoria dos experimentos aleatórios, assume-se a existência de uma função de conjunto P, denominada **probabilidade**, de maneira tal que $P(A)$ é a frequência relativa de cada evento $A \in \Omega$. Em outras palavras, $P(A)$ é a porcentagem do total de resultados em que o evento A é observado. A única diferência consiste no fato que P é normalizada de 0 a 1, em lugar de 0 a 100 como uma porcentagem comun.

44.1.1 Exemplo: Experimento Binomial
Considere um experimento com dois resultados possíveis, a saber: 0 ou fracaso, e 1 ou sucesso. Em tal caso, $\Omega = \{0, 1\}$ e costuma-se denotar $p := P(1)$ e $q := 1 - p = P(0)$. Por exemplo, o resultado do lançamento de uma moeda é o exemplo paradigmático de experimento binomial, com $p = q = 1/2$, neste caso. ♣

44.1.2 Exemplo: Suponha-se que um experimento binomial é repetido n vezes. Em tal caso, denotando $S = \{0, 1\}$, tem-se:

$$\Omega = \underbrace{S \times \cdots \times S}_{n \text{ vezes}}.$$

Se as n repetições são independentes, ou seja, o resultado de qualquera delas não influencia o de nenhuma outra, qual é probabilidade de obter exatamente k sucessos? Para responder a questão, observe-se em primeiro lugar que todo evento A_k com exatamente k sucessos resulta da interseção de k eventos da forma:

$$S \times \cdots \times S \times \{1\} \times S \times \cdots \times S,$$

com a interseção de $n-k$ eventos da forma:

$$S \times \cdots \times S \times \{0\} \times S \times \cdots \times S.$$

Como todos esses eventos são independentes, tem-se $P(A_k) = p^k q^{n-k}$. Finalmente, observe-se que o evento com exatamente k sucessos resulta da união disjunta de todos eventos da forma A_k. Todos eses eventos tem a mesma probabilidade, calculada acima, e existem exatamente $\binom{n}{k}$ deles. Portanto, a probabilidade $P(X = k)$ de obter exatamente k sucessos em n repetições independentes de um experimento binomial é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\, p^k q^{n-k}. \qquad \clubsuit$$

44.1.3 Exemplo: Aproximação Binomial para um Processo de Poisson

Deseja-se determinar qual é a probabilidade $P(X = k)$ de k ônibus passarem por um dado ponto no intervalo de tempo entre 0 a T. Para simplificar, suponha-se que $T = 1$ (uma hora, um dia, etc.). Esta experiência pode ser abordada como um experimento binomial, através do seguinte procedimento. O intervalo de tempo é dividido em n subintervalos iguais de comprimento $1/n$ cada. Ao final de cada um desses subintervalos de tempo, olhamos para o ponto. Se tiver um ônibus no ponto é sucesso, caso contrário, fracaso. Adicionalmente, considerem-se as seguintes hipôteses:

- A chegada de ônibus em diferentes subintervalos acontece de maneira independente.

- A ocorrência de dois ou mais ônibus chegarem num mesmo subintervalo tem probabilidade zero. Observe-se que esta suposição é verdadeira desde que o comprimento dos subintervalos for suficientemente pequeno, ou seja, n suficientemente grande.

- A probabilidade de um ônibus chegar num dado intervalo de tempo é proporcional ao comprimento t do intervalo, digamos, $p = \lambda t$, onde λ é a constante de proporcionalidade.

Portanto, tem-se:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

No limite em que n tende para infinito, a expressão acima pode ser simplificada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= \frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\,\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k}}.
\end{aligned}$$

Observe-se que se n tende para infinito, então todas as expressões entre parênteses acima convergem para 1, exceto o numerador da última fração que converge para $e^{-\lambda}$. Portanto:

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

A mesma aproximação é válida para qualquer experimento binomial onde p_n tende para zero de maneira tal que np_n tende para uma constante. ♣

44.2 Variáveis Aleatórias

Uma **variável aleatória** é uma função $X:\Omega\longmapsto\mathbb{R}$. As variáveis aleatórias são abordadas indiretamente, através da sua **função de distribuição**, também denominada **função de distribuição acumulada**, definida como $F(x) := P(X\leqslant x)$. Observe-se que:

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a).$$

Em certos casos, por exemplo se F for continuamente diferenciável, condição que pode ser relaxada significativamente, tem-se que:

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx,$$

para alguma função integrável f. Em tal caso, se diz que f é uma **função de densidade** de probabilidade (f.d.p) para a variável aleatória X.

Se $g:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ define-se $E(g(X))$ como:

$$E(g(X)) := \int_{\mathbb{R}} g(x)\,f(x)\,dx.$$

Alguns casos particulares recebem nomes especiais. Por exemplo, o n-**ésimo momento** de X é definido como:

$$E(X^n) = \int_{\mathbb{R}} x^n\, f(x)\, dx.$$

O primeiro momento é relevante, e recebe o nome **média** da distribuição em questão:

$$\mu := EX = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx.$$

Com a média é possível calcular o n-**ésimo momento central**:

$$E(X - EX)^n = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^n\, f(x)\, dx.$$

O segundo momento central também é importante, denominando-se **variança**:

$$\sigma^2 := E(X - EX)^2 = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx.$$

A raiz quadrada positiva σ da variança recebe o nome de **desvio padrão**. Uma expressão alternativa para a variança é dada por:

$$\begin{aligned} E(X - EX)^2 &= E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - 2(EX)(EX) + (EX)^2 \\ &= E(X^2) - (EX)^2. \end{aligned}$$

Uma outra expressão útil para o cálculo da variança é a seguinte:

$$\begin{aligned} E(X - EX)^2 &= E(X^2) - (EX)^2 \\ &= E(X^2 - X + X) - (EX)^2 \\ &= E(X(X-1) + X) - (EX)^2 \\ &= E(X(X-1)) + EX - (EX)^2 \\ &= E(X(X-1)) - EX(EX - 1). \end{aligned}$$

44.2.1 Exemplo: A Distribuição Normal ou Gaussiana

Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$. Se diz que X possui distribuição normal de media μ e variança σ se a sua f.d.p é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Em tal caso denota-se $X \sim N(\mu, \sigma)$. ♣

44.2.2 Exemplo: A Distribuição Gamma

Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Se diz que X possui distribuição gamma de parâmetros α e β se a sua f.d.p é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^{\alpha}}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x/\beta} & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Em tal caso denota-se $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. ♣

44.2.3 Exemplo: A Distribuição Chi-quadrado
Seja $r \in \mathbb{N}$. Se diz que X possui distribuição chi-quadrado com r graus de liberdade se $X \sim \Gamma(r/2, 2)$, ou seja, se a sua f.d.p é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r/2)\,2^{r/2}}\, x^{(r/2)-1}\, e^{-x/2} & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Em tal caso denota-se $X \sim \chi^2_r$. ♣

44.3 Função Característica

Se X é uma variável aleatória com f.d.p f, a sua **função característica** ϕ_X é definida como:

$$\phi_X(t) := E(e^{iXt}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\, f(x)\, dx.$$

Observe que $\phi_X(t) = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f](-t)$.

Capítulo 45

Mecânica Quântica

45.1 Relação de Incerteza de Heisenberg

Na formalização da Mecânica Quântica via espaços de Hilbert, os conceitos primitivos *sistema*, *estado* e *observável* são asociados com um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, um elemento $x \in \mathcal{H}$ e um operador linear, limitado, auto-adjunto $A \in B(\mathcal{H})$, respectivamente. O produto escalar no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, será denotado por $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$, sendo considerado linear no segundo argumento, e anti-linear no primeiro. Observe que um operador linear $A \in B(\mathcal{H})$ auto-adjunto satisfaz $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

45.1.1 Definição: Seja $x \in \mathcal{H}$ e $A \in B(\mathcal{H})$. Define-se o **valor de expectação**, ou **esperança**, de A no estado x como:

$$\langle A\rangle := \langle x, Ax\rangle.$$

Define-se a **incerteza** de A no estado x como:

$$\Delta A := \|(A - \langle A\rangle)x\|.$$ ♣

45.1.2 Definição: Se $A, B \in B(\mathcal{H})$, o operador **comutador** de A com B, denotado por $[A, B]$ é definido como $[A, B] := AB - BA$. ♣

45.1.3 Exercício: Para cada $A \in B(\mathcal{H})$, seja $\overline{A} \in B(\mathcal{H})$, definido como $\overline{A} := A - \langle A\rangle I$.

(a) Prove que $[\overline{A}, \overline{B}] = [A, B]$.

(b) Se $x \in \mathcal{H}$, observe que $\Delta A = \left\|\overline{A}x\right\|$. Em particular, $\Delta A = 0$ se e somente se x é um autovetor de A.

(c) Prove que se A é auto-adjunto, então $\langle A\rangle \in \mathbb{R}$.

(d) Prove que se $\|x\| = 1$, então $(\Delta A)^2 = \|Ax\|^2 - \langle A\rangle^2$. ♣

45.1.4 Exercício: Relação de Incerteza de Heisenberg
Sejam $A, B \in B(\mathcal{H})$ auto-adjuntos.

(a) Verifique a seguinte desigualdade:

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geqslant \frac{1}{4}\left|\langle x, [A, B]x\rangle\right|^2 + \left(\frac{1}{2}\langle x, (AB + BA)x\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle\right)^2 .$$

Sugestão: Utilizando a desigualdade de Schwarz, tem-se:

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 = \left\|\overline{A}x\right\|^2 \left\|\overline{B}x\right\|^2 \geqslant \left|\langle \overline{A}x, \overline{B}x\rangle\right|^2 = \left(\mathrm{Re}\langle \overline{A}x, \overline{B}x\rangle\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\langle \overline{A}x, \overline{B}x\rangle\right)^2 .$$

(b) Supondo adicionalmente que $[A, B] = -i\hbar$, usando o item anterior verifique que:

$$(\Delta A)(\Delta B) \geqslant \frac{\hbar}{2}.$$

♣

A relação estabelecida no segundo item do exercício anterior constitui a famosa **relação de incerteza de Heisenberg** que pode ser encontrada nos textos de Mecânica Quântica. Observe que trata-se na verdade de um caso bastante particular da desigualdade muito mais geral considerada no item precedente do mesmo exercício.

45.2 Relações Canônicas de Comutação

Considere A, B operadores lineares em $\mathcal{H}$ satisfazendo as assim denominadas **relações canônicas de comutação**, a saber:

$$[A, B] = i\hbar.$$

A constante $\hbar$ denomina-se **constante de Plank**.

45.2.1 Exercício: Sejam A, B operadores lineares em $\mathcal{H}$ satisfazendo as relações canônicas de comutação, ou seja, $[A, B] = i\hbar$. Suponha adicionalmente que $A, B \in B(\mathcal{H})$, ou seja, que ambos são operadores *limitados*.

(a) Prove que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$AB^n = i\hbar\, B^{n-1} \; + \; BAB^{n-1}.$$

(b) Aplicando reiteradamente a "fórmula de redução" para AB^n do item anterior tantas vezes como necessário, verifique a identidade:

$$[A, B^n] = ni\hbar\, B^{n-1}.$$

(c) Usando o resultado do item anterior, prove que $n\hbar \leqslant 2\,\|A\|\,\|B\|$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Observe que:

$$n\hbar\left\|B^{n-1}\right\| = \left\|ni\hbar\, B^{n-1}\right\| = \|[A, B^n]\| \leqslant 2\,\|A\|\,\|B^n\| \leqslant 2\,\|A\|\,\|B\|\,\left\|B^{n-1}\right\| .$$

♣

45.2.2 Exercício: Prove que se A, B são operadores lineares em $\mathcal{H}$ satisfazendo as relações canônicas de comutação $[A, B] = i\hbar$, então não podem ser simultaneamente limitados.

Sugestão: Usando *reductio ad absurdum*, suponha que ambos operadores sejam limitados. Observe em primeiro lugar que tais operadores não podem ser simultaneamente *nulos*, pois em tal caso teria-se $0 = i\hbar$. Portanto, se pode supor, sem perda de generalidade, que $A \neq 0$ e, consequentemente, $\|A\| \neq 0$. A partir desse ponto, para concluir a demonstração basta usar o resultado do item (c) do exercício anterior para contradizer a suposição inicial que B era limitado. ♣

45.2.3 Teorema (de Hellinger-Toeplitz)**:** *Seja A operador em $\mathcal{H}$ com domínio $D(A) = \mathcal{H}$ e simétrico, ou seja:*

$$\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle, \ \forall x, y \in D(A).$$

Então, A é limitado. □

Demonstração: Se A é simétrico com $D(A) = \mathcal{H}$, então A deve ser auto-adjunto e, consequentemente, fechado. Pelo Teorema do Gráfico Fechado tem-se que A é limitado. ∎

45.2.4 Exercício: Prove que se um operador linear simétrico A não é limitado, então não pode estar definido em todo o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Sugestão: Use o Teorema de Hellinger-Toeplitz. ♣

O resultado dos exercícios da presente seção permite concluir que dois operadores lineares auto-adjuntos A, B satisfazendo as relações canônicas de comutação $[A, B] = -i\hbar$ não podem ser simultaneamente limitados nem estar definidos em todo o espaço $\mathcal{H}$. Desta maneira, a Mecânica Quântica apresentada nos livros de texto elementares é formalmente incorreta, sendo o seu contexto adequado a teoria de operadores ***não-limitados*** em espaços de Hilbert. Mesmo assim, os livros continuam existindo sem modificação alguma. Por quê?

45.3 A Equação de Schödinger

Para sistemas físicos não-relativísticos em dimensão 1 costuma-se tomar $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, com o estado genérico sendo denotado por $\psi = \psi(x, t) \in L^2(\mathbb{R})$. Em tal caso, a evolução temporal dos estados é governada pela assim denominada **equação de Schödinger**, a saber:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

onde $H \in B(\mathcal{H})$ recebe o nome de **operador Hamiltoniano** do sistema em questão. Uma solução ψ da equação de Schödinger denomina-se a **função de onda** do sistema físico correspondente. Em tal caso, na interpretação de Copenhägen da Mecânica Quântica, a grandeza $|\psi(x, t)|^2 \, dx$ representa a *probabilidade* de encontrar o sistema no local dx ao tempo t quando o seu estado é descrito pelo estado $\psi(x, t)$. Isso impõe a seguinte condição de normalização na função de onda:

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x, t)|^2 \, dx = 1.$$

45.3.1 Exercício: A partícula livre

No caso de uma partícula livre, ou seja, não submetida à ação de nenhuma influência externa (força ou potencial), o operador Hamiltoniano é dado por:

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},$$

onde m é uma constante positiva que representa a massa da partícula.

(a) Determine a solução geral da equação de Schödinger para a partícula livre.

(b) Determine a solução particular no caso de um pacote de ondas gaussiano, ou seja, quando a condição inicial é dada por $\psi(x, 0) = e^{-x^2/2}$. ♣

Capítulo 46

O n-volume da n-esfera

46.1 Definições e Exemplos

46.1.1 Definição: Denomina-se n**-esfera** de raio R ao conjunto $S_n(R) \subset \mathbb{R}^n$ definido como:

$$S_n(R) := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = R^2\}.$$

O n**-volume** da n-esfera é dado por:

$$V_n(R) = \int_{S_n(R)} dV_n.$$

♣

46.1.2 Exemplo: 1-Esfera

A 1-esfera de raio R é simplesmente o intervalo $S_1(R) = [-R, R]$. Neste caso, o 1-volume é dado pelo comprimento do intervalo, ou seja, $V_1(R) = 2R$. ♣

46.1.3 Exemplo: 2-Esfera

A 2-esfera de raio R é o círculo do mesmo raio, ou seja:

$$S_2(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Observe que a parte superior da circunferência é dada pelo gráfico da função $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Portanto, neste caso o 2-volume será dado por:

$$V_2(R) = 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

Alternativamente, usando coordenadas polares, tem-se:

$$V_2(R) = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\, d\theta\, dr = \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^R r\, dr = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

Observe que este valor corresponde à *área* do círculo de raio R. ♣

46.1.4 Exemplo: 3-Esfera

A 3-esfera de raio R corresponde à esfera no espaço de tal raio, propriamente dita, ou seja:

$$S_3(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Neste caso, usando coordenadas esféricas o 3-volume será dado por:

$$\begin{aligned} V_3(R) = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\phi \, d\theta \, dr &= \int_0^R r^2 \, dr \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \, \frac{R^3}{3} \, (\cos 0 - \cos \pi) = 2\pi \, \frac{R^3}{3} \, 2 = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Observe que este valor corresponde ao *volume* da esfera de raio R. ♣

Como abordar o caso geral da n-esfera para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário? Analisando os exemplos precedentes, observa-se que:

$$V_1(R) \propto R,$$
$$V_2(R) \propto R^2,$$
$$V_3(R) \propto R^3.$$

Esses exemplos sugerem a hipótese $V_n(R) \propto R^n$. Mais precisamente, nesses exemplos tem-se:

$$V_n(R) = S_n \int_0^R r^{n-1} \, dr = S_n \, \frac{R^n}{n},$$

onde S_n vale 2, 2π e 4π para n igual a 1, 2 e 3, respectivamente. Desta maneira, seria razoável propor o seguinte ponto de partida, ou *Ansatz*:

$$dV_n = r^{n-1} \, dr \, dS_n,$$

pois em tal caso resulta:

$$\begin{aligned} V_n(R) = \int_{S_n(R)} dV_n = \int_{S_n(R)} r^{n-1} \, dr \, dS_n &= \int_0^R r^{n-1} dr \int_{S_n(R)} dS_n \\ &= S_n \int_0^R r^{n-1} dr = S_n \, \frac{r^n}{n}\bigg|_0^R = S_n \frac{R^n}{n}. \end{aligned}$$

Desta maneira, o cálculo do n-volume $V_n(R)$ consiste agora no problema de determinar S_n. Este problema será abordado através de dois métodos diferentes nas próximas seções.

46.2 Método das Integrais Gaussianas

Pelo resultado do exercício 34.8.1(c) sabe-se que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Seja agora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e considere a integral:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\,dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_1^2}\,dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_2^2}\,dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax_n^2}\,dx_n\\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du\right)^n.\end{aligned}$$

Utilizando a substituição:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{a}\,u\\ \frac{dy}{\sqrt{a}} &= du\end{aligned}$$

tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\frac{dy}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}.$$

Portanto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2}\,dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

Agora, esta mesma integral será calculada usando coordenadas polares. Em tal caso, tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ar^2}\,r^{n-1}\,dr\,dS_n\\ &= \int_0^{\infty} r^{n-1}\,e^{-ar^2}\int_{S_n} dS_n\\ &= S_n\int_0^{\infty} r^{n-1}\,e^{-ar^2}\,dr.\end{aligned}$$

Utilizando novamente o método de integração por substituição com:

$$\begin{aligned} ar^2 = u \;&\Rightarrow\; r = \left(\frac{u}{a}\right)^{1/2}\\ du = a2r\,dr \;&\Rightarrow\; dr = \frac{du}{2ar} = \frac{du}{2a\left(\frac{u}{a}\right)^{1/2}}\end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} r^{n-1}\,e^{-ar^2}\,dr &= \int_0^{\infty}\left(\frac{u}{a}\right)^{(n-1)/2} e^{-u}\,\frac{du}{2a}\,\left(\frac{u}{a}\right)^{-1/2}\\ &= \frac{1}{2a}\int_0^{\infty}\left(\frac{u}{a}\right)^{(n/2)-1} e^{-u}du\\ &= \frac{1}{2a}\,\frac{1}{a^{(n/2)-1}}\int_0^{\infty} u^{(n/2)-1}\,e^{-u}\,du\\ &= \frac{1}{2a^{n/2}}\,\Gamma(n/2).\end{aligned}$$

Desta maneira, resulta:

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2}\, dx = \frac{S_n}{2a^{n/2}}\, \Gamma(n/2),$$

de onde segue que:

$$S_n = \frac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto:

$$V_n(R) = S_n\, \frac{R^n}{n} = \frac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\, \frac{R^n}{n} = \frac{R^n\,\pi^{n/2}}{\dfrac{n}{2}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} = \frac{R^n\,\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}.$$

Observe que na última igualdade foi usado o resultado do exercício 34.9.1(a). Desta maneira, usando o resultado do exercício 34.9.1(d), quando n é par tem-se:

$$V_n(R) = \frac{R^n\,\pi^{n/2}}{(n/2)!}.$$

Analogamente, usando o resultado do exercício 34.9.2(c), no caso de n ímpar tem-se:

$$V_n(R) = \frac{R^n\,\pi^{n/2}}{\dfrac{n!!}{2^{(n+1)/2}}\,\pi^{1/2}} = \frac{R^n\, 2^{(n+1)/2}\,\pi^{(n-1)/2}}{n!!}.$$

46.3 Método do Jacobiano

Na seção anterior o elemento de volume foi obtido a partir do *Ansatz*:

$$dV_n = r^{n-1}\, dr\, dS_n.$$

Esta expressão pode ser obtida explicitamente analisando o jacobiano da transformação de coordenadas esféricas para cartesianas; vide apêndices C e D.

46.3.1 Exemplo: 2-Esfera

A partir do exemplo 46.1.3 sabe-se que:

$$dV_2 = r\, d\theta\, dr.$$

Neste caso, a transformação de variáveis é dada pela função f definida como:

$$f(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\,\cos\theta \\ r\,\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}.$$

A diferencial, ou matriz jacobiana, resulta:

$$Df(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\,\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Portanto, o determinante jacobiano é dado por:

$$\det Df(r,\theta) = r\,(\cos^2\theta \;+\; \mathrm{sen}^2\,\theta) = r.$$

Desta maneira, tem-se:

$$dV_2 = |\det Df|\; d\theta\, dr. \qquad \clubsuit$$

46.3.2 Exemplo: 3-Esfera

A partir do exemplo 46.1.4 sabe-se que:

$$dV_3 = r^2\;\mathrm{sen}\,\theta\, dr\, d\theta\, d\phi.$$

Neste caso, a transformação de variáveis é dada pela função f definida como:

$$f(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\,\cos\theta \\ r\;\mathrm{sen}\,\theta\;\mathrm{sen}\,\phi \\ r\;\mathrm{sen}\,\theta\;\cos\phi \end{pmatrix}.$$

A diferencial, ou matriz jacobiana, resulta:

$$Df(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial r} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial r} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \theta} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\;\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta\;\mathrm{sen}\,\phi & r\,\cos\theta\;\mathrm{sen}\,\phi & r\;\mathrm{sen}\,\theta\;\cos\phi \\ \mathrm{sen}\,\theta\;\cos\phi & r\,\cos\theta\;\cos\phi & -r\;\mathrm{sen}\,\theta\;\mathrm{sen}\,\phi \end{pmatrix}.$$

Portanto, o determinante jacobiano é dado por:

$$\begin{aligned} \det Df(r,\theta,\phi) &= \cos\theta\,(-r^2\;\mathrm{sen}\,\theta\;\cos\theta) \;+\; r\,\mathrm{sen}\,\theta\,(-r\;\mathrm{sen}^2\,\theta) \\ &= -r^2\;\mathrm{sen}\,\theta\;\cos^2\theta \;-\; r^2\;\mathrm{sen}\,\theta\;\mathrm{sen}^2\,\theta \\ &= -r^2\;\mathrm{sen}\,\theta\,(\cos^2\theta \;+\; \mathrm{sen}^2\,\theta) \\ &= -r^2\;\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

Desta maneira, tem-se:

$$dV_3 = |\det Df|\; dr\, d\theta\, d\phi. \qquad \clubsuit$$

Analogamente, no caso geral de $n \in \mathbb{N}$, a transformação de coordenadas esféricas para cartesianas é dada pelas relações:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\,\cos\phi_1\\
x_2 &= r\,\operatorname{sen}\phi_1\,\cos\phi_2\\
x_3 &= r\,\operatorname{sen}\phi_1\,\operatorname{sen}\phi_2\,\cos\phi_3\\
x_4 &= r\,\operatorname{sen}\phi_1\,\operatorname{sen}\phi_2\,\operatorname{sen}\phi_3\,\cos\phi_4\\
&\vdots\\
x_{n-2} &= r\,\operatorname{sen}\phi_1\,\operatorname{sen}\phi_2\,\cdots\,\cos\phi_{n-2}\\
x_{n-1} &= r\,\operatorname{sen}\phi_1\,\operatorname{sen}\phi_2\,\cdots\,\operatorname{sen}\phi_{n-2}\cos\phi_{n-1}\\
x_n &= r\,\operatorname{sen}\phi_1\,\operatorname{sen}\phi_2\,\cdots\,\operatorname{sen}\phi_{n-2}\operatorname{sen}\phi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Pelo resultado do Teorema D.4.1 deve ser:

$$dV_n = |\det D_n f|\; dr\, d\phi_1\,\cdots\, d\phi_n,$$

onde $D_n f$ denota a diferencial, ou matriz jacobiana, da transformação acima, ou seja:

$$D_n f(r,\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n-1}) = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \phi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \phi_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial \phi_{n-1}}\\
\dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \phi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \phi_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial \phi_{n-1}}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\dfrac{\partial x_n}{\partial r} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \phi_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \phi_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \phi_{n-1}}
\end{pmatrix}.$$

Mais precisamente, observe que:

$$D_n f(r,\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n-1}) = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial x_1}{\partial r} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \phi_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
\dfrac{\partial x_2}{\partial r} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \phi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \phi_2} & 0 & \ldots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial r} & \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \phi_1} & \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \phi_2} & \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \phi_3} & \ldots & \dfrac{\partial x_{n-2}}{\partial \phi_{n-2}} & 0\\
\dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial r} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \phi_1} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \phi_2} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \phi_3} & \ldots & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \phi_{n-2}} & \dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial \phi_{n-1}}\\
\dfrac{\partial x_n}{\partial r} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \phi_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \phi_2} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \phi_3} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \phi_{n-2}} & \dfrac{\partial x_n}{\partial \phi_{n-1}}
\end{pmatrix}.$$

O determinante $J_n = \det D_n f$ desta matriz será desenvolvido a partir da última coluna. Começando com o sinal $+$ no elemento do canto superior esquerdo e alternando o sinal, descendo pela primeira coluna até o final e depois avançando pela última linha até o elemento no canto inferior direito, o sinal deve ter alternado $2(n-1)$ vezes, ou seja, um número par de vezes. Portanto o sinal correspondente ao elemento no canto inferior direito também é positivo. Desta maneira, tem-se:

$$
\begin{aligned}
J_n &= \frac{\partial x_n}{\partial \phi_{n-1}}\,\Delta(n,n) \;-\; \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \phi_{n-1}}\,\Delta(n-1,n) \\
&= \frac{\partial x_n}{\partial \phi_{n-1}}\,\cos\phi_{n-1}\,J_{n-1} \;-\; \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \phi_{n-1}}\,\operatorname{sen}\phi_{n-1}\,J_{n-1} \\
&= r\prod_{i=1}^{n-2}\operatorname{sen}\phi_i\cos\phi_{n-1}\,\cos\phi_{n-1}\,J_{n-1} \;+\; r\prod_{i=1}^{n-2}\operatorname{sen}\phi_i\operatorname{sen}\phi_{n-1}\,\operatorname{sen}\phi_{n-1}\,J_{n-1} \\
&= r\prod_{i=1}^{n-2}\operatorname{sen}\phi_i\,J_{n-1}\,\left(\cos^2\phi_{n-1} \;+\; \operatorname{sen}^2\phi_{n-1}\right) \\
&= r\prod_{i=1}^{n-2}\operatorname{sen}\phi_i\,J_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Usando esta relação de recorrência para J_n tem-se:

$$
\begin{aligned}
J_n &= r\prod_{i=1}^{n-2}\operatorname{sen}\phi_i\,J_{n-1} \\
&= r\prod_{i=1}^{n-2}\operatorname{sen}\phi_i\,\cdot\,r\prod_{i=1}^{n-3}\operatorname{sen}\phi_i\,J_{n-2} \\
&= r\prod_{i=1}^{n-2}\operatorname{sen}\phi_i\,\cdot\,r\prod_{i=1}^{n-3}\operatorname{sen}\phi_i\,\cdot\,r\prod_{i=1}^{n-4}\operatorname{sen}\phi_i\,J_{n-3} \\
&= \ldots \\
&= r\prod_{i=1}^{n-2}\operatorname{sen}\phi_i\,\cdot\,r\prod_{i=1}^{n-3}\operatorname{sen}\phi_i\,\cdot\,r\prod_{i=1}^{n-4}\operatorname{sen}\phi_i\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,r\,\operatorname{sen}\phi_1\,J_2 \\
&= r\prod_{i=1}^{n-2}\operatorname{sen}\phi_i\,\cdot\,r\prod_{i=1}^{n-3}\operatorname{sen}\phi_i\,\cdot\,r\prod_{i=1}^{n-4}\operatorname{sen}\phi_i\,\cdot\,\cdots\,\cdot\,r\,\operatorname{sen}\phi_1\,\cdot\,r \\
&= r^{n-1}\,\operatorname{sen}^{n-2}\phi_1\,\operatorname{sen}^{n-3}\phi_2\,\cdots\,\operatorname{sen}^2\phi_{n-3}\,\operatorname{sen}\phi_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Agora, comparando as expressões:

$$
dV_n = |J_n|\,dr\,d\phi_1\,\cdots\,d\phi_{n-1} = r^{n-1}\,dr\,dS_n
$$

deve ser:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int_{S_n(R)} dS_n \\
&= \int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^{n-2}\phi_1\,\operatorname{sen}^{n-3}\phi_2\,\cdots\,\operatorname{sen}^2\phi_{n-3}\,\operatorname{sen}\phi_{n-2}\,d\phi_1\,\cdots\,d\phi_{n-1} \\
&= \left(\int_0^\pi\operatorname{sen}^{n-2}\phi_1\,d\phi_1\right)\left(\int_0^\pi\operatorname{sen}^{n-3}\phi_2\,d\phi_2\right)\cdots\left(\int_0^\pi\operatorname{sen}\phi_{n-2}\,d\phi_{n-2}\right)\left(\int_0^{2\pi}d\phi_{n-1}\right) \\
&= \left(\int_0^\pi\operatorname{sen}^{n-2}\phi_1\,d\phi_1\right)\left(\int_0^\pi\operatorname{sen}^{n-3}\phi_2\,d\phi_2\right)\cdots\left(\int_0^\pi\operatorname{sen}\phi_{n-2}\,d\phi_{n-2}\right)2\pi.
\end{aligned}
$$

Pela simetria da função seno no intervalo $[0,\pi]$ e usando o resultado do exercício 34.7.4(c,d) tem-se:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \pi\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$
$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = 2\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = 2\,\frac{((2n+1)-1)!!}{(2n+1)!!}.$$

Portanto:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{k} x\,dx = \Delta_k\,\frac{(k-1)!!}{k!!}$$

onde $\Delta_k = \pi$ ou $\Delta_k = 2$ segundo k seja par ou ímpar, respectivamente. Desta maneira, se n é par, então $n-2$ também é par e tem-se:

$$S_n = \pi\,\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}\,2\,\frac{(n-4)!!}{(n-3)!!}\,\pi\,\frac{(n-5)!!}{(n-4)!!}\,\ldots\,\pi\frac{1!!}{2!!}\,2\,\frac{0!!}{1!!}\,2\pi = \frac{(2\pi)^{(n-2)/2}}{(n-2)!!}\,2\pi = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(n-2)!!}.$$

Observe que este resultado coincide com o da seção anterior. Com efeito, se n é par, digamos $n=2k$, tem-se:

$$S_n = \frac{(2\pi)^{n/2}}{(n-2)!!} = \frac{(2\pi)^k}{(2k-2)!!} = \frac{(2\pi)^k}{2^{k-1}(k-1)!} = \frac{2\,\pi^k}{(k-1)!} = \frac{2\,\pi^k}{\frac{1}{k}\,k!} = \frac{2\,\pi^{n/2}}{\frac{2}{n}\,(n/2)!}$$
$$= \frac{2\,\pi^{n/2}}{\frac{2}{n}\,\Gamma(n/2+1)} = \frac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Na penúltima e última igualdade foi usado o resultado dos exercícios 34.9.1(d) e 34.9.1(a), respectivamente. Observe que no caso de n par uma expressão alternativa para S_n e dada por:

$$S_n = \frac{n\,\pi^{n/2}}{(n/2)!} = \frac{n\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Analogamente, se n é ímpar, então $n-2$ também é ímpar e tem-se:

$$S_n = 2\,\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}\,\pi\,\frac{(n-4)!!}{(n-3)!!}\,2\,\frac{(n-5)!!}{(n-4)!!}\,\ldots\,2\frac{2!!}{3!!}\,\pi\frac{1!!}{2!!}\,2\,\frac{0!!}{1!!}\,2\pi = 2\,\frac{(2\pi)^{(n-3)/2}}{(n-2)!!}\,2\pi$$
$$= \frac{2^{(n+1)/2}\,\pi^{(n-1)/2}}{(n-2)!!}.$$

Observe que este resultado coincide com o da seção anterior. Com efeito, tem-se:

$$S_n = \frac{2^{(n+1)/2}\,\pi^{(n-1)/2}}{(n-2)!!} = \frac{n\,2^{(n+1)/2}\,\pi^{n/2}}{n!!\,\sqrt{\pi}} = \frac{n\,\pi^{n/2}}{\frac{n!!}{2^{(n+1)/2}}\,\sqrt{\pi}} = \frac{n\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$
$$= \frac{2\,\pi^{n/2}}{\frac{2}{n}\,\Gamma(n/2+1)} = \frac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Na antepenúltima e última igualdade foi usado o resultado dos exercícios 34.9.2(c) e 34.9.1(a), respectivamente. Observe que no caso de n ímpar uma expressão alternativa para S_n e dada por:

$$S_n = \frac{n\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

Capítulo 47

A Conjectura de Collatz

Mathematics is not yet ready for such problems.
Paul Erdös [1]

47.1 Algoritmo $3x + 1$

O **algoritmo** $3x+1$ pode ser formulado de maneira simples em termos da **função de Collatz** C, definida no conjunto dos inteiros pela "multiplicação por três mais um" se o número for ímpar e pela "divisão por dois" se o número for par. Ou seja:

$$C(n) = \begin{cases} 3n+1, & \text{se } n \equiv 1 \mod 2, \\ n/2, & \text{se } n \equiv 0 \mod 2. \end{cases}$$

Por exemplo, escolhendo como número inicial $a_0 = 7$, a iteração sucessiva da função de Collatz gera a seguinte sequência:

$$7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.$$

No caso $a_0 = 24$, obtém-se:

$$24, 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.$$

Igualmente, com $a_0 = 100$ como número inicial, a sequência obtida é dada por:

$$100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.$$

Note que em todos os casos a sequência é deliberadamente truncada ao chegar no número 1, pois a partir do mesmo a iteração entra em um ciclo fechado: do 1 passa para o 4, deste para o 2 e daí novamente para o 1.

Observe que se $n = 2k+1$ é impar, então $3n+1$ é par:

$$3n + 1 = 3(2k + 1) + 1 = 6k + 4 = 2(3k + 2).$$

[1] Citado em [11, p. 1].

Esta propriedade motiva a definição da **função de Terras** T como:

$$T(n) = \begin{cases} (3n+1)/2, & \text{se } n \equiv 1 \mod 2, \\ n/2, & \text{se } n \equiv 0 \mod 2. \end{cases}$$

Lagarias, [12]–[13], denomina a função T como *função* $3x+1$. Esta função parece ter sido introduzida pela primeira vez em um par de trabalhos seminais de Riho Terras, [28]–[29]. Por tal motivo, virtualmente todos os tratamentos teóricos do algoritmo $3x+1$ consideram a iteração da função de Terras, dispensando a função de Collatz, prática que também será adotada no presente trabalho.

47.2 Conjectura de Collatz

A **conjectura de Collatz** estabelece que, como nos exemplos anteriores, a aplicação iterativa do algoritmo $3x+1$ sempre conduz ao número 1, independemente do número natural de partida. Denotando $T^n(a_0) = a_n$, a conjectura de Collatz pode ser parafraseada como:

> Para todo $a_0 \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(a_0) = 1$.

Este problema também é conhecido como *problema de Kakutani*, *de Syracuse*, ou ainda, *de Ulam*.

Embora a origem exata do algoritmo $3x+1$ seja um tanto obscura, este problema tem sido tradicionalmente atribuido ao matemático Lothar Collatz, que desenvolveu sua carreira na Universidade de Hamburgo, na Alemanha, principalmente durante a segunda metade do século XX. O problema da iteração do algoritmo $3x+1$ foi considerado por Collatz na década de 1930, ainda quando estudante na Universidade de Hamburgo. Nos anos de 1950 o problema já era amplamente conhecido na comunidade matemática internacional. Apesar disso, a questão da validade ou não da conjectura permanece em aberto até a presente data.

O menor número $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(a_0) < a_0$, caso exista, denomina-se **tempo de parada** (*stopping time*) de a_0. Caso contrário, se diz que a_0 possui tempo de parada infinito. O tempo de parada de a_0 denota-se $\sigma(a_0)$. A conjectura de Collatz pode ser reformulada em termos do tempo de parada da seguinte maneira:

> Todo número natural possui tempo de parada finito, ou seja, para todo a_0 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(a_0) < a_0$.

Define-se a **trajetória** de $a_0 \in \mathbb{N}$ como o conjunto $\{T^k(a_0) : 0 \leqslant k \leqslant \sigma(a_0)\}$. Ou seja, a trajetória de a_0 consiste no conjunto de todos os seus iterados sucessivos pelo algoritmo $3x+1$. Observe-se que esse conjunto poderia ser eventualmente infinito. A conjectura de Collatz afirma que a trajetória de qualquer número natural é sempre finita.

A Conjectura de Collatz permanece em aberto até a presente data. Quase todas as tentativas de abordagem deste problema revelaram-se infrutíferas, o que levou o matemático húngaro Paul Erdös a dizer que "a Matemática ainda não está pronta" para esse tipo de problema. Recentemente, supostas "demonstrações" da conjectura foram publicadas, [13], mas todas elas se revelaram com falhas que invalidam a principal linha de argumentação, pelo que as palavras de Erdös parecem ecoar até hoje.

Contudo, a Conjectura de Collatz tem sido verificada computacionalmente para todos os números naturais até 20×2^{58}. Tal "recorde" pertence ao pesquisador português Tomás Oliveira e

Silva, [13], [7]. Eric Roosendaal [21] verificou a conjectura de maneira independente até o número 685×2^{50}.

47.3 Vetor de Paridade

Seja $n \in \mathbb{N}$. Dado $k \in \mathbb{N}$ arbitrário mas fixo, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ define-se $p_i(n)$ pela condição:

$$T^i(n) \equiv p_i(n) \mod 2, \quad \forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Ou seja, $p_i(n)$ toma os valores 0 ou 1 segundo $T^i(n)$ seja par ou ímpar, respectivamente. Define-se o **vetor de paridade de ordem k para n** como:

$$p(n) = (p_0(n), p_1(n), \ldots, p_{k-1}(n)).$$

O vetor de paridade codifica completamente as primeiras k iterações de T, segundo estabelece o resultado a seguir.

47.3.1 Lema: *Para cada $i = 1, \ldots, k$ tem-se:*

$$T^i(n) = \frac{3^{\sum_{j=0}^{i-1} p_j(n)}}{2^i}\, n \;+\; \sum_{j=0}^{i-2} p_j(n)\, \frac{3^{\sum_{l=j+1}^{i-1} p_l(n)}}{2^{i-j}} \;+\; \frac{p_{i-1}(n)}{2}. \tag{47.3.1}$$

□

Demonstração: Por indução em i. Observe-se que, pela definição da função de Terras, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$T(n) = \frac{3^{p_0(n)}}{2}\, n \;+\; \frac{p_0(n)}{2}. \tag{47.3.2}$$

A relação (47.3.2) acima prova o caso $i = 1$. Supondo agora que a identidade (47.3.1) vale para

$1 \leqslant i < k$, usando (47.3.2) e a hipótese indutiva tem-se:

$$
\begin{aligned}
T^{i+1}(n) &= T(T^i(n)) \\
&= \frac{3^{p_0(T^i(n))}}{2}\, T^i(n) \; + \; \frac{p_0(T^i(n))}{2} \\
&= \frac{3^{p_i(n)}}{2}\, T^i(n) \; + \; \frac{p_i(n)}{2} \\
&= \frac{3^{p_i(n)}}{2} \left(\frac{3^{\sum\limits_{j=0}^{i-1} p_j(n)}}{2^i}\, n \; + \; \sum_{j=0}^{i-2} p_j(n)\, \frac{3^{\sum\limits_{l=j+1}^{i-1} p_l(n)}}{2^{i-j}} \; + \; \frac{p_{i-1}(n)}{2} \right) \; + \; \frac{p_i(n)}{2} \\
&= \frac{3^{\sum\limits_{j=0}^{i} p_j(n)}}{2^{i+1}}\, n \; + \; \sum_{j=0}^{i-2} p_j(n)\, \frac{3^{\sum\limits_{l=j+1}^{i} p_l(n)}}{2^{i-j+1}} \; + \; p_{i-1}(n)\, \frac{3^{p_i(n)}}{2^2} \; + \; \frac{p_i(n)}{2} \\
&= \frac{3^{\sum\limits_{j=0}^{i} p_j(n)}}{2^{i+1}}\, n \; + \; \sum_{j=0}^{i-1} p_j(n)\, \frac{3^{\sum\limits_{l=j+1}^{i} p_l(n)}}{2^{(i+1)-j}} \; + \; \frac{p_i(n)}{2}.
\end{aligned}
$$

∎

47.3.2 Corolário: *Se $T^i(n)$ é ímpar para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$ então:*

$$
T^k(n) = \frac{3^k}{2^k}\, n \; + \; \left[\left(\frac{3}{2} \right)^k - 1 \right]. \tag{47.3.3}
$$

□

Demonstração: Por hipótese, tem-se que $p_i(n) = 1$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Desta maneira, através de um cálculo direto a partir de (47.3.1) verifica-se:

$$
\begin{aligned}
T^k(n) &= \frac{3^k}{2^k}\,n \;+\; \sum_{j=0}^{k-2} \frac{3^{k-1-j}}{2^{k-j}} \;+\; \frac{1}{2} \\
&= \frac{3^k}{2^k}\,n \;+\; \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-2} \frac{3^{k-1-j}}{2^{k-1-j}} \;+\; \frac{1}{2} \\
&= \frac{3^k}{2^k}\,n \;+\; \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^j \;+\; \frac{1}{2} \\
&= \frac{3^k}{2^k}\,n \;+\; \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^j \\
&= \frac{3^k}{2^k}\,n \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^k}{1-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{3^k}{2^k}\,n \;+\; \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1\right].
\end{aligned}
$$

47.3.3 Corolário (do Corolário)**:** *Se $T^i(n)$ é ímpar para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$ então:*

$$
T^k(n) + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^k (n+1). \tag{47.3.4}
$$

Em particular, não podem existir trajetórias monotonamente crescentes pela iteração de T. □

Demonstração: A identidade (47.3.4) segue trivialmente do corolário anterior. Observe que para uma trajetória monotonamente crescente deve ser $T^i(n)$ ímpar para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, a relação entre números inteiros (47.3.4) deveria valer para todo $k \in \mathbb{N}$. Porém, para um dado $n \in \mathbb{N}$, o membro direito dessa relação não pode ser inteiro *para todo* $k \in \mathbb{N}$. ∎

47.3.4 Lema: *$T^i(n)$ é ímpar para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$ e $T^k(n)$ é par se e somente se $n = 2^k\alpha - 1$ para alguns $k, \alpha \in \mathbb{N}$ com α ímpar.* □

Demonstração: ($\Rightarrow$) Utilizando a identidade (47.3.3) tem-se:

$$
\begin{aligned}
T^k(n) &= \left(\frac{3}{2}\right)^k n \;+\; \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1\right] \\
&= n \;+\; \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1\right] n \;+\; \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1\right] \\
&= n \;+\; \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1\right] (n+1) \\
&= n \;+\; \left(3^k - 2^k\right) \frac{n+1}{2^k}.
\end{aligned}
$$

Observe que, por hipótese, $n = T^0(n)$ é ímpar e $T^k(n)$ é par, portanto o segundo termo à direita $\left(3^k - 2^k\right) \dfrac{n+1}{2^k}$ deve ser ímpar. Agora, $3^k - 2^k$ é obviamente ímpar. Desta maneira, $\alpha := \dfrac{n+1}{2^k}$ deve ser ímpar.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $n = 2^k\alpha - 1$ para alguns $k, \alpha \in \mathbb{N}$, então prova-se facilmente por indução em i que:

$$T^i(n) = 2^{k-i}3^i\alpha - 1, \;\; \forall i = 0, 1, \ldots, k.$$

Em particular, segue diretamente da identidade acima que $T^i(n)$ é ímpar para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Mais ainda, se α é ímpar, então $T^k(n) = 3^k\alpha - 1$ é par. ∎

A seguir, uma coletânea de resultados isolados encontrados espalhados aqui e ali dentre referências. São incluidos aqui apenas como ilustração dos resultados até aqui obtidos, pois todos seguem trivialmente do lema anterior.

47.3.5 Corolário: ***(a)*** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $T^k(2^k n - 1) = 3^k n - 1$.*

(b) *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $T^3(8n + 3) = 9n + 4$.*

(c) *Para provar a conjectura de Collatz, basta prová-la apenas para os números $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \equiv 2 \mod 6$.* □

Demonstração: **(a)** A identidade enunciada segue diretamente da relação (47.3.4).

(b) Observe que:

$$8n + 3 \;=\; 2^3 n \;+\; 4 \;-\; 1 \;=\; 2^3 n \;+\; 2^2 \;-\; 1 \;=\; 2^2(2n+1) \;-\; 1.$$

Portanto, usando o item (a) com $k = 2$ e $\alpha = 2n + 1$ ímpar tem-se:

$$T^2(8n+3) \;=\; T^2(2^2(2n+1) - 1) \;=\; 3^2(2n+1) - 1 \;=\; 3^2 2n + (3^2 - 1) \;=\; 3^2 2n + 2^3.$$

Portanto:

$$T^3(8n+3) \;=\; T(3^2 2n + 2^3) \;=\; 3^2 n + 2^2 \;=\; 9n + 4.$$

(c) Observe que para provar a conjectura de Collatz, basta prová-la para os números ímpares (pois todo número par tem tempo de parada finito igual a 1) e todo tal número pode ser expressado na forma $2^k\alpha - 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e α ímpar (de maneira única, aliás, pelo Teorema Fundamental da Aritmética). Após k iterações pela função T, tem-se, pelo item (a), que $T^k(2^k\alpha - 1) = 3^k\alpha - 1$ é par, de onde segue que $T^k(2^k\alpha - 1) - 2$ também é par. Agora,

$$T^k(2^k\alpha - 1) \, - \, 2 \, = \, 3^k\alpha \, - \, 1 \, - \, 2 \, = \, 3^k\alpha \, - \, 3 \, = \, 3(3^{k-1}\alpha - 1).$$

Portanto, o número $T^k(2^k\alpha-1)-2$ além de ser par, deve ser também múltiplo de três, de onde segue que deve ser múltiplo de 6. Em outras palavras, tem-se que $T^k(2^k\alpha - 1) \equiv 2 \mod 6$. Ou seja, a trajetória de qualquer número ímpar sempre atinge algum número $n = T^k(2^k\alpha-1)$ tal que $n \equiv 2 \mod 6$. ∎

47.4 Propriedades de Periodicidade

47.4.1 Lema: *Sejam $k, \alpha, m \in \mathbb{N}$. Então, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ tem-se:*

$$T^i(2^k\alpha + m) \, = \, 2^{k-i}\, 3^{\sum_{j=0}^{i-1} p_j(m)} \, \alpha \, + \, T^i(m). \tag{47.4.1}$$

□

Demonstração: Por indução em i. Para provar o caso $i = 1$, se for m par, então os números $p_0(m) = 0$, $T(m) = m/2$ como também $2^k\alpha + m$ resultam todos pares. Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} T(2^k\alpha + m) \, &= \, \frac{2^k\alpha + m}{2} \, = \, 2^{k-1}\alpha \, + \, \frac{m}{2} \, = \, 2^{k-1}\alpha \, + \, T(m) \\ &= \, 2^{k-1}\, 3^{p_0(m)}\, \alpha \, + \, T(m). \end{aligned}$$

Por outro lado, se for m ímpar, então os números $p_0(m) = 1$, $T(m) = (3m+1)/2$ como também $2^k\alpha + m$ resultam todos ímpares. Portanto, analogamente, neste caso tem-se:

$$\begin{aligned} T(2^k\alpha + m) \, &= \, \frac{3(2^k\alpha + m) + 1}{2} \, = \, 2^{k-1}\, 3\, \alpha + \frac{3m+1}{2} \\ &= \, 2^{k-1}\, 3\, \alpha \, + \, T(m) \, = \, 2^{k-1}\, 3^{p_0(m)}\, \alpha \, + \, T(m). \end{aligned}$$

Ou seja, tem-se provado a validade geral da seguinte identidade:

$$T(2^k\alpha + m) \, = \, 2^{k-1}\, 3^{p_0(m)}\, \alpha \, + \, T(m). \tag{47.4.2}$$

Suponha-se agora que a relação (47.4.1) vale para $1 \leqslant i < k$. Pela hipótese indutiva e (47.4.2)

tem-se:

$$\begin{aligned}
T^{i+1}(2^k\alpha + m) &= T(T^i(2^k\alpha + m)) \\
&= T\left(2^{k-i}\, 3^{\sum_{j=0}^{i-1} p_j(m)} \alpha \;+\; T^i(m) \right) \\
&= 2^{k-i-1}\, 3^{p_0(T^i(m))}\, 3^{\sum_{j=0}^{i-1} p_j(m)} \alpha \;+\; T(T^i(m)) \\
&= 2^{k-(i+1)}\, 3^{p_i(m)}\, 3^{\sum_{j=0}^{i-1} p_j(m)} \alpha \;+\; T^{i+1}(m) \\
&= 2^{k-(i+1)}\, 3^{\sum_{j=0}^{i} p_j(m)} \alpha \;+\; T^{i+1}(m);
\end{aligned}$$

o que prova a validade do passo indutivo. ∎

47.4.2 Corolário: *Sejam $k, \alpha, m \in \mathbb{N}$. Então, para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$ a paridade de $T^i(2^k\alpha + m)$ é igual à paridade de $T^i(m)$. Em particular:*

$$p_i(2^k\alpha + m) = p_i(m), \ \forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1. \qquad \square$$

Demonstração: O caso $i = 0$ é trivial. Os outros casos são consequência direta da relação (47.4.1). ∎

47.4.3 Lema: *Para cada $k \in \mathbb{N}$, sobre qualquer conjunto de 2^k números consecutivos o vetor de paridade de ordem k toma todos os possíveis 2^k valores (binários) uma vez e apenas uma vez.* □

Demonstração: Por indução em k. O caso $k = 1$ é trivialmente válido pois dados dois números consecutivos, um deles deve ser par e outro ímpar, e o vetor de paridade de ordem 1 toma os valores 0 e 1 respectivamente. Suponha agora que o resultado é válido para qualquer conjunto de 2^k números consecutivos e seja

$$\{m+1, m+2, \ldots, m+2^{k+1}\}$$

um conjunto arbitrário de 2^{k+1} números consecutivos. Pela hipótese indutiva, o vetor de paridade de ordem k toma todos os valores possíveis nos dois conjuntos

$$\{m+1, m+2, \ldots, m+2^k\}$$
$$\{m+2^k+1, m+2^k+2, \ldots, m+2^{k+1}\}$$

separadamente. Mais ainda, pelo corolário anterior com $\alpha = 1$, sabe-se que:

$$p_i(2^k + (m+a)) = p_i(m+a),\ \forall\, i = 0, 1, \ldots, k-1;$$

para todo $a = 1, \ldots, 2^k$. Ou seja, não somente o vetor de paridade toma todos os valores possíveis nos dois conjuntos

$$\{m+1, m+2, \ldots, m+2^k\}$$
$$\{m+2^k+1, m+2^k+2, \ldots, m+2^{k+1}\}$$

separadamente, mas esses valores são iguais em ambos conjuntos. Por outro lado, usando (47.4.1) com $\alpha = 1$ e $i = k$ tem-se:

$$T^k(2^k + (m+a)) \ = \ 3^{\sum_{j=0}^{k-1} p_j(m+a)} \ + \ T^k(m+a),\ \forall\, a = 1, \ldots, 2^k.$$

Dado que o primeiro termo à direita

$$3^{\sum_{j=0}^{k-1} p_j(m+a)}$$

é ímpar, a identidade acima implica que $T^k(2^k+(m+a))$ e $T^k(m+a)$ possuem paridades diferentes. Ou seja, nos conjuntos

$$\{m+1, m+2, \ldots, m+2^k\}$$
$$\{m+2^k+1, m+2^k+2, \ldots, m+2^{k+1}\}$$

as primeiras k componentes do vetor de paridade são iguais, mas a componente $k+1$ tem paridade diferente no primeiro conjunto com relação ao segundo. ∎

Exercícios para o Capítulo 47

47.5 Órbitas Monotonamente Decrescentes

47.5.1 Exercício: **(a)** Prove que se $k \in \mathbb{N}$ é ímpar então $3k+1$ também é.

(b) Prove que o seguinte **mapa de Terras** definido por:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \dfrac{a_n}{2} & \text{se } a_n \text{ é par,} \\ a_n + \dfrac{a_n+1}{2} & \text{se } a_n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

é equivalente ao mapa de Collatz anteriormente definido. ♣

47.5.2 Exercício: Prove que todo número $\mathbb{N} \ni \gamma$ ímpar pode ser escrito *univocamente* na forma $\gamma = 2^n\alpha - 1$, com $n \in \mathbb{N}$ e α ímpar.

Sugestão: Isso é equivalente a dizer que todo número par $\gamma + 1$ pode ser escrito univocamente na forma $\gamma + 1 = 2^n\alpha$ com α ímpar, o que segue do Teorema Fundamental da Aritmética. ♣

47.5.3 Exercício: Seja T o mapa de Terras introduzido no Exercício 47.5.1. Seja $a_0 \in \mathbb{N}$ dado. Seja $m \in \mathbb{N}$. Suponha-se que $T^k a_0$ é ímpar para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Então:

(a) Prove que:

$$T^m a_0 = a_0 + (a_0 + 1)\left[\frac{3^m}{2^m} - 1\right].$$

(b) Em tal caso, deve ser $a_0 = 2^m\alpha - 1$, para algum $\alpha \in \mathbb{N}$.

Sugestão: Observe-se que $T^m a_0$ deve ser um número natural. Em particular, o segundo termo do membro à direita na expressão do item anterior deve ser natural. Mas $3^m - 2^m$ é ímpar e, portanto, deve ser $(a_0 + 1)$ múltiplo de 2^m. ♣

47.5.4 Exercício: **(a)** Prove que se $T^k a_0$ é ímpar para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ e $T^n a_0$ é par, então deve ser $a_0 = 2^n\alpha - 1$, para algum $\mathbb{N} \ni \alpha$ ímpar.

(b) Reciprocamente, se $a_0 = 2^n\alpha - 1$, para algum $\mathbb{N} \ni \alpha$ ímpar, então $T^k a_0$ é ímpar para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ e $T^n a_0$ é par.

Sugestão: Para o item (a) use o Exercício 47.5.3 anterior, com $m = n$. Para a parte (b), primeiramente prove que deve existir algum $k \leqslant n$ tal que $T^k a_0$ é par. Para tanto, use redução ao absurdo, usando o Exercício 47.5.3(a) com $m = n$ para obter uma contradição. Se k_0 é o mínimo de tais k, então prove que deve ser $k_0 = n$. Para isso, use o item (a) anterior com $n = k_0$ e o resultado de unicidade do Exercício 47.5.2. ♣

47.5.5 Exercício: Seja $a_0 = 2^n\alpha - 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \ni \alpha$ ímpar.

(a) Prove que $T^n a_0 = 3^n\alpha - 1$. Observe-se que, pelo Exercício 47.5.4(b), resulta $T^n a_0$ par. Portanto, tem-se:

$$T^{n+1}a_0 = \frac{3^n\alpha - 1}{2}.$$

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Prove que $3^n > 2^{n+1}$ se e somente se $n \geqslant 2$.

(c) Determine condições necessárias e suficientes sobre n e α para que $T^{n+1}a_0 < a_0$. Resposta: $n = 1$ e $\alpha \geqslant 3$. ♣

Observe que nos exemplos exibidos de seqüências de Collatz, o número 1 resulta sempre atingido. De fato, em *todos* os exemplos até hoje conhecidos, tarde ou cedo a seqüência sempre acaba no 1. Contudo, não existe nenhuma prova rigorosa desse fato. A conjectura de que esse sempre será o caso, para qualquer número de partida arbitrário, é conhecida como Problema de Collatz, ou alternativamente como Problema $3x + 1$, ou de Hasse, ou de Syracuse, ou de Kakutani, e até de Ulam.

47.5.6 Exercício: Com relação ao problema de Collatz, observe-se que:

(a) Basta prová-lo para os números ímpares.

(b) Na verdade, basta prová-lo apenas para os números ímpares da forma $a_0 = 2\,\alpha - 1$, com $\mathbb{N} \ni \alpha$ ímpar.

Sugestão: Use os resultados dos Exercícios 47.5.2 e 47.5.4. ♣

47.5.7 Exercício: $a_0 = 2\,\alpha - 1$, com $\mathbb{N} \ni \alpha$ ímpar, $\alpha \geqslant 3$, se e somente se $a_0 = 4k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$. ♣

Os Exercícios 47.5.6(b) e 47.5.5(a) inspiram as seguintes definições. Sejam γ e β funções definidas por:

$$\gamma(\alpha) := 2\,\alpha - 1;$$

$$\beta(\alpha) := \frac{3\,\alpha - 1}{2}.$$

Observe-se que se $a_0 = \gamma(\alpha)$ com α ímpar, então, pelo Exercício 47.5.5(a) com $n = 1$, tem-se $T^2 a_0 = \beta(\alpha)$.

47.5.8 Exercício: Prove que as funções γ e β satisfazem as seguintes propriedades:

(a) $\gamma(\alpha)$ é ímpar, para todo $\alpha \in \mathbb{N}$.

(b) $\gamma^n(\alpha) > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se $\alpha > 1$.

(c) $\beta(\alpha) < \gamma(\alpha)$, para todo $\alpha > 1$.

(d) $\beta\gamma = \gamma\beta$. Ou seja, γ e β comutam.

(e) $\gamma^n(\alpha) = 2^n(\alpha - 1) + 1$, para todo α.

(f) $\beta^n(\alpha) = \left(\frac{3}{2}\right)^n (\alpha - 1) + 1$, para todo α. ♣

Usando as propriedades do Exercício anterior, resulta facil provar o resultado a seguir.

47.5.9 Exercício: Seja $a_0 \in \mathbb{N}$ da forma $a_0 = 4^n\rho + 1$, com $n \in \mathbb{N} \ni \rho$.

(a) Seja $\alpha := 2^n\rho + 1$. Prove que $T^{2k}a_0 = \gamma^{n-k}(\beta^k(\alpha))$, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(b) Os $T^{2k}a_0$ com $k = 0, 1, 2, \ldots n$, constituem uma sequência estritamente decrescente. Ou seja, $T^{2n}a_0 < T^{2(n-1)}a_0 < \cdots < T^2 a_0 < a_0$.

Sugestão: Para o item (a), observe que se $\alpha := 2^n\rho + 1$, então $a_0 = \gamma^n(\alpha)$. Observe também que, na hipótese do exercício, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ tem-se:

$$\beta^k(\gamma^{n-k-1}(\alpha)) = 4^{n-k-1}(3^k 2\rho) + 1,$$

que é um número ímpar (maior ou igual que 3, o que será necessário para provar o item (b)). ♣

47.5.10 Exercício: Em particular, se $a_0 = 4^n\rho + 1$, com $n \in \mathbb{N} \ni \rho$, tem-se:

(a) $T^{2n}a_0 = \beta^n(\alpha) = 3^n\rho + 1$.

(b) $a_0 - T^{2n}a_0 = (a_0 - 1)\left[1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$.

(c) Portanto:

$$\frac{a_0 - T^{2n}a_0}{a_0 - 1} = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$ ♣

Apêndices

Apêndice A

gnuplot

A.1 Introdução

O `gnuplot` é um programa desenvolvido pelo Projeto GNU, destinado à criação de gráficos de funções e conjuntos de dados em duas ou três dimensões. Trata-se de um aplicativo poderoso e completo, de uso simples e versátil. Algumas das suas características são:

- O projeto tem seu código-fonte aberto, sendo licenciado sob a GPL e distribuído gratuitamente.

- Pode ser utilizado de maneira interativa, através de um interpretador de comandos próprio, executado pela *shell* do sistema.

- Além de exibir os gráficos na tela, existe a possibilidade de exportá-los em diversos formatos, como `postscript`, `fig`, `tex`, `jpeg`, `gif`, `png`, ou `svg`.

- O aplicativo oferece ainda ferramentas de análise de dados, como ajuste de funções a dados experimentais.

- Além do uso a partir do terminal, o aplicativo pode ser utilizado de maneira não-interativa, pela execução de *scripts* (arquivos em lote). Esta funcionalidade permite a automação de tarefas, facilitando a geração dos mais diversos tipos de gráficos, a partir de único comando.

Nas seguintes seções do presente apêndice serão consideradas algumas dessas características. A abordagem aqui é meramente instrumental, apresentando apenas os conceitos e comandos básicos. Para uma análise com riqueza de detalhes, o leitor é fortemente encorajado a consultar a documentação do projeto, que pode ser encotrada no site `http://sourceforge.net/projects/gnuplot`.[1]

A.2 Interpretador de Comandos

O `gnuplot` possui um interpretador do comandos, ou *shell*, próprio. Para executá-lo, basta digitar o comando:

[1] Vide [32]. Cf. [9].

```
$ gnuplot
```

em qualquer terminal do sistema e pressionar a tecla Enter. Ao ser iniciado, o programa imprime uma mensagem na tela contendo algumas informações, tais como a versão do *software* instalada no sistema, seus autores e o endereço do projeto na Internet, onde podem ser obtidas maiores informações. Cabe destacar que o `gnuplot` é um projeto muito bem documentado. Após essas informações, a última linha no terminal deverá conter o *prompt* de comando do `gnuplot`, com a seguinte aparência:

```
gnuplot>
```

No *prompt* de comando, o usuário pode digitar diversas instruções a serem executadas pelo `gnuplot`. Alguns desses comandos serão analisados nas seções posteriores do presente Apêndice. Aqui serão abordadas apenas algumas características gerais do interpretador de comandos.

Para cada sessão interativa do `gnuplot`, a sua *shell* mantém o registro dos comandos digitados pelo usuário no *prompt*. Para navegar pelo histórico de comandos para trás ou para frente, basta utilizar as teclas com a seta para cima ↑ e para baixo ↓, respectivamente. A reutilização dos comandos digitados com anterioridade facilita consideravelemente o trabalho, principalmente se tiver que lidar com linhas de comando quilométricas.

A *shell* do `gnuplot` possui também um sistema de documentação razoavelmente completo. Para acessar o *menu* de ajuda, utilize o comando:

```
gnuplot> ?
```

O texto será exibido até o comprimento máximo da tela. Na última linha, aprecerá a mensagem:

`Press return for more:`

Ou seja, para avançar as páginas do *menu* de ajuda basta apertar a tecla Enter. Na página final costuma aparecer uma lista com assuntos específicos que podem ser consultados. Observe que informações sobre algum tópico em particular podem ser consultadas diretamente, por exemplo, através do comando:

```
gnuplot> ?plot
```

que exibirá, no caso, a página de ajuda específica do comando `plot`. Ao chegar na última página do manual, o *prompt* de comando do `gnuplot` tornará a aparecer outra vez. Para sair a qualquer momento do menu de ajuda, basta presionar simultaneamente as teclas Ctrl C .

Finalmente, para encerrar a sessão interativa do `gnuplot`, basta digitar o comando:

```
gnuplot> quit
```

ou simplesmente a letra `q`, e em seguida pressionar a tecla Enter .

A.3 Gráficos em 2D

Os comandos `plot` e `splot` permitem gerar gráficos em duas e três dimensões respectivamente. Esta seção é devotada ao estudo do primeiro deles. A sintaxe do comando `plot` adota a forma geral de uma lista de argumentos, separados com vírgulas se houver mais de um:

`gnuplot> plot` *argument* [`,` *argument* ...]

Cada *argument* indica a função ou arquivo de dados a serem representados graficamente, junto com alguns parâmetros opcionais, obedecendo ao seguinte formato:

[*ranges*] *function*|*datafile* [`with` *style*] [*colors*] [`pointtype` *n*]

Nas seguintes sub-seções são analisados alguns desse argumentos opcionais modificadores do comando `plot`.

A.3.1 Funções ou Arquivos

O argumento mandatório *function* ou *datafile* define a função ou conjunto de dados que serão representados graficamente. Por exemplo, para gerar o gráfico da função $f(x) = x^2$ pode ser utilizado o comando:

```
gnuplot> plot x**2
```

Para facilitar o trabalho, funções complicadas podem ser definidas de maneira a facilitar a digitação. Por exemplo:

```
gnuplot> f(x) = x**2
```

Em tal caso, agora basta digitar:

```
gnuplot> plot f(x)
```

Duas ou mais funções podem ser colocadas no mesmo gráfico simultaneamente, separando os nomes com vírgulas:

```
gnuplot> plot sin(x) , cos(x)
```

Para gerar o gráfico de mais de uma função ou conjunto de dados utilizando apenas uma vez o comando `plot`, basta separar cada função ou conjunto de dados por vírgulas, como no exemplo a seguir:

```
gnuplot> plot sin(x) , f(x) , "file.dat"
```

A linha de comando acima permite gerar o gráfico da função sen, junto com o gráfico da função $f(x)$, a qual deve ter sido previamente definida, e ainda o gráfico do conjunto de dados contido no arquivo `file.dat`, cujo formato será explicado numa seção posterior da presente.

A.3.2 Intervalo

O parâmetro opcional *ranges* define o intervalo de valores de x e/ou y compreendidos no gráfico. Se qualquer um desses valores for omitido, então o programa utilizará aquele que estimar conveniente. Um exemplo de uso seria o seguinte:

```
gnuplot> plot [0:pi*2] sin(x)
```

Em tal caso o gráfico será gerado apenas no intervalo $0 < x < 2\pi$. Neste outro exemplo:

```
gnuplot> plot [0:pi*2] [-1:1] sin(x)
```

o gráfico será gerado nos intervalos $0 < x < 2\pi$ e $-1 < y < 1$. Para não ter que especificar os limites do gráfico cada vez que for gerado, pode ser utilizado o comando:

```
gnuplot> set xrange [0:pi*2]
```

Analogamente, o intervalo no eixo das ordenadas pode ser definido através do comando:

```
gnuplot> set yrange [-1:1]
```

Maiores esclarecimentos podem ser obtidos através do comando:

```
gnuplot> ?range
```

A.3.3 Estilo

O parâmetro opcional `with` *style* define a aparência do gráfico. Por exemplo, se o gráfico será representado por uma linha sólida, uma linha pontilhada, linhas e pontos combinados, etc. No exemplo:

```
gnuplot> plot x**2 with points
```

será gerado o gráfico da função $f(x) = x^2$ representada por pontos. Alguns parâmetros que podem ser utilizados com o argumento `with`, são:

`lines` Utiliza apenas uma linha que liga todos os pontos. Este é o estilo *default*, ou seja, utilizado por omissão.

`points` Utiliza pontos com formatos diferentes como quadrados, sinais de adição, diamantes, asteriscos, etc.

`linespoints` Consiste na combinação dos dois itens anteriores. Utiliza uma linha que liga todos os pontos e além disso mostra os pontos como no item anterior.

`errorbars` Permite apresentar cada ponto com suas barras de erro. Resulta possível também exibir as barras de erro apenas em x ou apenas em y, bastando para tanto utilizar os comandos `xerrorbars` ou `yerrorbars`, respectivamente. As barras de erro são interpretadas por *default* como pertencentes à variável y.

Maiores esclarecimentos podem ser obtidos através do comando:

```
gnuplot> ?style
```

A.3.4 Cor

O parâmetro opcional *colors* permite definir qual será a cor utilizada, sendo representado por um número inteiro, geralmente entre 0 e 8 (ou 9). Por exemplo, o comando:

```
gnuplot> plot x**2 with points 3
```

permite gerar o gráfico na cor representada pelo número 3, ou seja, cor azul. Alterando esse número, a cor será modificada *pari passu*. A cor utilizada por *default* é a número 1, ou seja vermelha. Para visualizar todas as opções existentes, utilize:

```
gnuplot> test
```

Maiores esclarecimentos podem ser obtidos através do comando:

```
gnuplot> ?colors
```

A.3.5 Pontos

O parâmetro opcional `pointtype` n permite definir qual será o caractere utilizado para representar os "pontos" no gráfico, representado pelo número inteiro n. Por exemplo, o comando:

```
gnuplot> plot x**2 with points pointtype 2
```

gera um gráfico com os pontos representados pelo caractere $\times$. O carctere utilizado por *default* é o representado pelo número 1, ou seja, pelo sinal de adição $+$. Os pontos também podem ser representados por asteriscos, bolinhas, quadrados, triângulos, etc. Para visualizar todas as opções existentes, utilize:

```
gnuplot> test
```

A.4 Arquivos de Dados

O comando `plot` pode receber como argumento um arquivo contendo dados para serem representados graficamente. Este arquivo deve ser editado segundo certos padrões, para que os dados sejam corretamente interpretados e o gráfico seja gerado de maneira satisfatória. O exemplo a seguir ilustra o conteúdo de um possível arquivo de dados:

```
966.3     0.0043     0.0002
1267.9    0.0053     0.0003
2568.5    0.0104     0.0005
3169.2    0.0154     0.0007
```

O arquivo deve conter pelo menos duas colunas. Os números da primeira coluna são interpretados como os pontos x, ou seja, correspondentes ao eixo das abcissas. Analogamente, os números da segunda coluna são interpretados como os pontos y, ou seja, correspondentes ao eixo das ordenadas. No caso de um gráfico 2D, o comando `plot` interpreta os números da terceira coluna como os erros em x ou em y, sendo que esta informação deve ser fornecida explicitamente pelo usuário, por exemplo:

```
gnuplot> plot "file.dat" with yerrorbars
```

Neste caso, o comando interpretará a terceira coluna como erros em y. No caso de gráficos 3D, ou seja, se for utilizado o comando `splot`, os números da terceira coluna são interpretados como os pontos do eixo z.

Uma observação importante sobre o arquivo de dados consiste em que todas as colunas devem estar necessariamente separadas por tabulações, ou seja, utilizando a tecla Tab . Observe também que o caractere utilizado para separar as casas decimais deve ser o ponto. Para facilitar o trabalho é conveniente, embora não seja obrigatório, que arquivo de dados esteja no mesmo diretório no qual foi executado o `gnuplot`.

A.5 Ajustando uma Função a um Conjunto de Dados

Para ajustar uma função a um conjunto de dados, deve-se definir uma função com parâmetros a serem ajustados, por exemplo:

```
gnuplot> f(x) = a*x + b
```

No exemplo acima, a e b são os parâmetros livres a serem ajustados. Após definida a função, deve-se definir o limite de ajuste, usualmente da seguinte maneira:

```
gnuplot> FIT_LIMIT = 1e-15
```

O último passo consiste no ajuste propriamente dito, através do comando:

```
gnuplot> fit f(x) "file.dat" via a, b
```

O comando acima irá ajustar os parâmetros a e b ao conjunto de dados contido no arquivo especificado e irá imprimir na tela os valores dos parâmetros ajustados, como também outras informações estatísticas. Para verificar o ajuste, o gráfico do conjunto de dados pode ser gerado junto com a função ajustada:

```
gnuplot> plot "file.dat" , f(x)
```

O comando `fit` anterior gera um arquivo ASCII nomeado `fit.log` dentro do diretório a partir do qual o `gnuplot` foi iniciado. As informações relativas a todos os ajustes realizados pelo `gnuplot` estarão gravadas neste arquivo.

A.6 Títulos e Legendas

A legenda no gráfico pode ser deslocada para qualquer posição arbitrária. Por exemplo:

```
gnuplot> set key 0 , 0.4
```

Existem outros comandos que permitem o deslocamento da legenda para certas posições predefinidas. Por exemplo, para controlar o poscicionamento no sentido horizontal, tem-se:

```
gnuplot> set key [left|right]
```

Analogamente, para o posicionamento vertical, podem ser usados os comandos:

```
gnuplot> set key [top|bottom]
```

O seguinte comando permite centralizar a legenda no centro do gráfico:

```
gnuplot> set key center
```

Alguns desses comandos podem ser combinados entre si. Por exemplo:

```
gnuplot> set key top left
```

Existem também comandos para posicionar a legenda no espaço exterior ao gráfico. Por exemplo:

```
gnuplot> set [above|below|outside]
```

Esses comandos podem ser combinados, por exemplo, com `left`, `center` e `right`. Uma outra opção interessante consiste em encerrar a legenda numa caixa:

```
gnuplot> set key box
```

que também pode ser combinada com outras opções de posicionamento. Caso esteja se perguntando a esta altura, sim, a legenda também pode ser completamente removida:

```
gnuplot> unset key
```

Finalmente, para reverter ao modo de funcionamento padrão, utilize:

```
gnuplot> set key default
```

Os títulos do gráfico podem ser definidos valendo-se dos seguintes comandos:

```
gnuplot> set title "Função Seno"
gnuplot> set ylabel "sen(x)"
gnuplot> set xlabel "x"
```

A.7 Redirecionamento da Saída

Ao gerar um gráfico com o `gnuplot`, a saída padrão do gráfico será o *display*, ou seja, o gráfico é exibido na tela do monitor em uma janela. Em não poucas oportunidades, resulta conveniente salvar o gráfico em um arquivo de imagem com determinado formato, LaTeXpor exemplo, caso seja desejável incluir o gráfico em algum artigo, relatório, ou trabalho monográfico.

O `gnuplot` permite exportar gráficos em uma grande variedade de formatos. Para tanto, o programa deve ser instruído a redirecionar a saída para o tipo de terminal conveniente, através do comando:

`gnuplot> set term` *terminal* [*options*]

onde *terminal* é alguns dos terminais suportados, incluindo os seguintes tipos: `postscript`, `latex`, `fig`, `jpeg`, `gif`, `png` e `svg`, entre outros. Para consultar a lista completa de formatos disponíveis, utilize o comando:

```
gnuplot> ?term
```

A seguir, comentam-se brevemente alguns tipos de terminais que aparecem na prática, como também algumas das opções respectivas comumente utilizadas.

A.7.1 PostScript

Geralmente identificado pela extensão `.ps`, este formato costumava ser muito utilizado, pois era o formato padrão reconhecido pelas impressoras laser. Para especificar este tipo de terminal, utilize o comando:

```
gnuplot> set term postscript [color|monochrome]
```

Ao utilizar este tipo de terminal, caso seja necessário o emprego de caracteres especiais, tais como acentos, por exemplo, nos títulos dos gráficos, pode ser usado o seguinte comando:

```
gnuplot> set encoding iso_8859_1
```

Resulta oportuno salientar que o formato PostScript está a caminho da obsolescência, sendo na atualidade subtituído majoritariamente pelo formato PDF. Contudo, existem algumas publicações periódicas (*journals*) que atualmente não aceitam o formato PDF para a submissão de artigos para publicação. Neste caso, PostScript pode resultar uma opção admissível e conveniente.

A.7.2 LaTeX

Também conhecido como TeX (embora não sejam exatamente sinônimos) e identificado com a extensão `.tex`, este formato é utlizado intensivamente, principalmente no meio acadêmico, para a redação de textos matemáticos e científicos em geral. Para especificar este tipo de terminal, utilize o comando:

```
gnuplot> set term latex
```

Ao incluir figuras geradas com o `gnuplot` em documentos LaTeX, o caractere das aspas duplas " pode aparecer dentro do comando `\special`. Em tal caso, resulta conveniente desabilitar seu significado especial, reabilitando-o logo após a inclusão da figura. Na versão 3.5 do pacote `babel` isso não é necessário, mas na versão 3.6 é obrigatório, sob pena de erro na inclusão da figura. Para tanto, no corpo do arquivo `.tex` poderia ser utilzado o seguinte código:[2]

```
\begin{figure}[htbp]
\centering
\catcode`\"12\relax % Turn off double quotes.
\input{your_file.tex}
\catcode`\"\active % Turn on double quotes.
\caption{Gráfico gerado com o gnuplot.}
\label{your_label}
\end{figure}
```

A.7.3 Fig

Este formato, geralmente identificado pela extensão `.fig`, permite gerar gráficos vetoriais simples, por exemplo, figuras geométricas, tais como retas, círculos, polígonos, etc., que podem ser utilizados para representar graficamente funções matemáticas sem muito grau de detalhamento. Para especificar este tipo de terminal, utilize o comando:

```
gnuplot> set term fig [color|monochrome]
```

Os arquivos Fig podem ser também gerados e/ou editados através do aplicativo `xfig`. Para incluir um arquivo Fig em um documento LaTeX resulta necessário exportá-lo antes para o formato EPS (Encapsulated PostScript), tarefa que o `xfig` anteriormente mencionado realiza sem o menor inconveniente.

A.7.4 Utilização em *pipes*

Concomitantemente com a especifiação do tipo de terminal, utiliza-se o comando:

```
gnuplot> set output "filename"
```

[2] Vide [26].

que instrui o `gnuplot` para exportar o gráfico no arquivo cujo nome for especificado. Alternativamente, em sistemas que suportam o uso de *pipes*, por exemplo, Unix e similares, a saída pode ser canalizada através da *shell* do sistema. Para tanto, o primeiro caractere não-vazio do nome de arquivo utilizado deve ser `|`. Por exemplo, o comando:

```
gnuplot> set output "|lpr -Plaser filename"
```

permite submeter o gráfico diretamente para a impressora, caso tenha sido especificado previamente um tipo de terminal compatível, tal como PostScript, por exemplo.

A.8 Arquivos de Automação

O `gnuplot` permite gerar gráficos de maneira não interativa, através de arquivos de automação, ou *scripts*. Um *script* para o `gnuplot` não é nada mais que um arquivo de texto ASCII contendo linhas de comando para o `gnuplot` que serão executadas sequencialmente, de maneira totalmente análoga à *shell* nas sessões interativas. Naturalmente, a sintaxe e ordenamento lógico dos comandos devem ser os mesmos que seriam se fossem utilizados no interpretador de comandos.

Um exemplo de *script* é monstrado na Listagem A.1. Observe que o caractere `#` no início de cada linha indica que a linha em questão trata-se apenas de um comentário, que não será executada pelo `gnuplot`. Esse tipo de comentário serve para documentar o *script*, ou para desabilitar temporariamente comandos sem removê-los de maneira definitiva (e talvez irreversível), como o trecho entre as linhas 20 e 24 no exemplo mostrado.

Para executar o *script*, basta abrir um terminal e digitar o comando:

```
$ gnuplot /path/to/your/script
```

Observe que *paths* não absolutos, ou seja que não começam com o caractere `/`, serão ancorados no diretório atual do terminal onde o comando acima foi executado. Uma maneira alternativa de executar o *script*, consiste em iniciar o interpretador de comandos do `gnuplot` e digitar o seguinte comando:

```
gnuplot> load "/path/to/your/script"
```

Existe ainda uma outra maneira de executar o *script*. Observe que a primeira linha começa com a combinação de dois caracteres `#!`. Trata-se de um tipo muito especial de "comentário", pois indica para a *shell* do sistema que tal *script* deve ser executado com o aplicativo cujo nome precede aqueles dois caracteres, no caso, o programa `/usr/bin/gnuplot`. Uma vez sabendo qual o aplicativo a ser usado, basta tornar o *script* executável:

```
#!/usr/bin/gnuplot

# Relative paths are achored to PWD of system shell or gnuplot shell.
datafile = "1.dat"
outputfile = "1.ps"

# Set titles.
set title "Dados Experimentais e Reta Ajustada"
set ylabel "Grandeza em y"
set xlabel "Grandeza em x"

# Set the legend position and style.
set key left top box

# Fit a linear function to the given data.
f(x) = a*x + b
FIT_LIMIT = 1e-15
fit f(x) datafile via a, b

# Plot the data along with the function fitted
#plot datafile with points pointsize 2 , f(x) with lines 3
#
# Pause to view the graphic.
#pause -1 "Press Enter to continue ... "

# Create output file in the given format (PostScript).
set term postscript color
set output outputfile
set encoding iso_8859_1
# The last command above allows special characters (accents, etc) in PS files.

# Plot the data along with the function fitted
plot datafile with points pointsize 2 , f(x) with lines 3
```

Listagem A.1: Exemplo de *script* para o `gnuplot`.

```
$ chmod +x /path/to/your/script
```

e executá-lo de fato:

```
$ /path/to/your/script
```

Observe que os dois comandos acima devem ser executados na *shell* do sistema. No caso do segundo comando, ao executar qualquer programa na *shell* do sistema resulta necessário empregar o *path absoluto* do mesmo, lembrando que o diretório atual pode ser abreviado com o caractere `.` correspondente ao ponto.

Apêndice B

Alguns Resultados Topológicos

B.1 Bases

B.1.1 Lema: *Seja X um conjunto. Então, $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ é base de alguma topologia do conjunto*

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

se e somente se para cada par $U, V \in \mathcal{B}$ e para cada $x \in U \cap V$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$. □

Demonstração: (⇒) Se $\mathcal{B}$ é base da topologia $\mathcal{T}$, então $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Logo, $U, V \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$. Portanto, $U \cap V$ é uma vizinhança aberta de todo $x \in U \cap V$. Desta maneira, por definição de base, deve existir $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

(⇐) Define-se $\mathcal{T} \subseteq P(X)$ pela condição $A \in \mathcal{T}$ se e somente se A é união de membros de $\mathcal{B}$. Para provar que $\mathcal{T}$ define uma topologia no conjunto X, basta verificar que se $U, V \in \mathcal{T}$ então $U \cap V \in \mathcal{T}$. Para tanto, seja $x \in U \cap V$. Por hipótese, existe $W \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$. Como $x \in U \cap V$ era arbitrário, segue que $U \cap V$ é vizinhança de cada um dos seus pontos. Logo, $U \cap V \in \mathcal{T}$. ∎

B.1.2 Corolário: *Seja X um conjunto. Seja $\mathcal{S} \subseteq P(X)$ não vazia. Então, a família de interseções finitas de membros de $\mathcal{S}$ é base de alguma topologia para o conjunto*

$$X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S.$$ □

Demonstração: O subconjunto de $P(X)$ definido como

$$\mathcal{B} = \left\{ A \in P(X) \; : \; A = \bigcap_{i=1}^{n} S_i \; : \; S_i \in \mathcal{S}, \; \forall\, i \right\}$$

satisfaz a condição no enunciado do resultado anterior. Com efeito, dados $U, V \in \mathcal{B}$ basta tomar $W := U \cap V \in \mathcal{B}$. ∎

B.1.3 Lema: *Seja X um conjunto. Sejam $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ duas topologias em X, com bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivamente. Então, $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ se e somente se*

$$A \in \mathcal{B}_1 \;\Rightarrow\; \forall x \in A \,(\exists\, U \in \mathcal{B}_2 \;:\; x \in U \subseteq A)\,.$$ □

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, então

$$A \in \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{T}_2 \;\Rightarrow\; A = \bigcup_j B_j$$

com $B_j \in \mathcal{B}_2$ para todo j. Portanto, se $x \in A$ existe j_0 tal que $x \in B_{j_0} \in \mathcal{B}_2$ e obviamente $B_{j_0} \subseteq A$. Desta maneira, basta tomar $U = B_{j_0}$.

($\Leftarrow$) Basta provar que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, pois todo aberto de $\mathcal{T}_1$ é união de membros de $\mathcal{B}_1$ e a família de conjuntos $\mathcal{T}_2$ é fechada por tais uniões. Agora, se $A \in \mathcal{B}_1$, a condição que constitui a hipótese neste caso, implica que A é uma vizinhança de cada um de seus pontos na topologia $\mathcal{T}_2$. Portanto, $A \in \mathcal{T}_2$. ∎

B.1.4 Definição: O **fecho** de um subconjunto $A \subseteq X$ é definido como a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm A, denotando-se $\overline{A}$. ♣

B.1.5 Lema: *$x \in \overline{A}$ se e somente se $V \cap A \neq \emptyset$ para todo V vizinhança de x.* □

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $x \in \overline{A}$. Por *reductio ad absurdum*, suponha que existe uma vizinhança V de x tal que $V \cap A = \emptyset$. Logo, $V \subseteq A^{\mathsf{C}}$. Portanto, existe um aberto U tal que $x \in U \subseteq V \subseteq A^{\mathsf{C}}$. Desta maneira, $U^{\mathsf{C}} \supseteq A$, ou seja, U^{C} é um fechado que contém A, mas $x \notin U^{\mathsf{C}}$, pois $x \in U$, contradizendo que $x \in \overline{A}$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $x \notin \overline{A}$, então existe algum fechado F com $A \subseteq F$ tal que $x \notin F$. Portanto, $x \in F^{\mathsf{C}}$. Logo, F^{C} é uma vizinhança aberta de x com $F^{\mathsf{C}} \cap A = \emptyset$, pois $A \subseteq F$, contradizendo a hipótese neste caso. ∎

B.1.6 Definição: Um subconjunto $A \subseteq X$ é denominado **denso** em X se $\overline{A} = X$. ♣

B.1.7 Lema: *$A \subseteq X$ é denso se e somente se $A \cap U \neq \emptyset$ para todo U aberto não vazio.* □

Demonstração: Segue diretamente de B.1.5. ∎

B.2 Compacidade

B.2.1 Lema: *Em um espaço topológico T_2 os conjuntos compactos separam-se dos pontos.* □

Demonstração: Sejam K compacto e $x \notin K$. Como o espaço é T_2, para cada $y \in K$ existem U_y e V_y, vizinhanças abertas de x e y respectivamente, tais que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Portanto, o conjunto

$$\bigcup_{y \in K} V_y$$

é uma cobertura aberta de K e, pela compacidade, tem-se que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} =: V.$$

Seja U definido como:

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

Então U é aberto, pois é interseção finita de abertos, e $U \cap V = \emptyset$. Com efeito, suponha-se a existência de algum $y \in U \cap V$. Em tal caso, ter-se-ia que $y \in V_{y_{i_0}}$ para algum $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, como também que $y \in \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} \Rightarrow y \in U_{y_{i_0}}$. Portanto, $y \in U_{y_{i_0}} \cap V_{y_{i_0}}$, o que contradiz o fato que tal intersecção é vazia. ∎

B.2.2 Lema: *Em um espaço topológico T_2 dois conjuntos compactos disjuntos separaram-se por abertos disjuntos.* □

Demonstração: Sejam K, M compactos disjuntos. Para cada $x \in M$, pelo resultado anterior, existem U_x e V_x vizinhanças abertas de x e K respectivamente, com $U_x \cap V_x = \emptyset$. Desta maneira, o conjunto

$$\bigcup_{x \in M} U_x$$

é uma cobertura de M por abertos, e pela compacidade, tem-se que:

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} =: U.$$

Observe-se também que o conjunto V definido como:

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

é aberto, com $K \subseteq V$, e $U \cap V = \emptyset$. ∎

B.3 Espaços Métricos

B.3.1 Lema: *Se uma sequência* convergente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *em um espaço métrico X possui infinitos elementos diferentes, então o seu limite*

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

é um ponto de acumulação do conjunto *formado pelos elementos da sequência.* ▯

Demonstração: Por *reductio ad absurdum*, suponha que x não seja um ponto de acumulação do *conjunto* formado pelos elementos da sequência

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Em tal caso, existe $r > 0$ tal que a bola

$$B_r(x) = \{y \in X \,:\, d(y, x) < r\}$$

não contém nenhum elemento de A diferente de x. Por outro lado, dado que x é o limite da sequência, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant N \;\Rightarrow\; d(x_n, x) < r \;\Rightarrow\; x_n \in B_r(x).$$

Desta maneira, a sequência somente pode possuir, no máximo, N elementos diferentes

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x\}$$

contradizendo a hipótese. ∎

B.3.2 Lema: *Um subespaço de um espaço métrico completo é completo se e somente se é fechado.* ▯

Demonstração: Seja X espaço métrico completo e $Y \subseteq X$ subespaço de X.

($\Rightarrow$) Suponha-se Y completo. Para provar que Y é fechado basta provar que Y contém cada um dos seus pontos de acumulação. Seja $y \in X$ um tal ponto. Em tal caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in Y \backslash \{y\}$ tal que $y_n \in B_{1/n}(y)$. Por construção, a sequência $\{y_n\}$ converge para y em X, sendo também uma sequência de Cauchy em Y. Dado o limite é único, tal sequência converge para y em Y. Como Y é completo, segue que $y \in Y$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja $\{y_n\}$ sequência de Cauchy em Y. Obviamente, esta sequência também é de Cauchy em X. Dado que X é completo, deve convergir para algum $x \in X$. Se tal sequência possui uma quantidade finita de elementos, então x deve ser um desses elementos (repetindo-se infinitas vezes), logo $x \in Y$. Caso contrário, ou seja, se a sequência possui uma quantidade infinita de elementos, pelo lema anterior, x é um ponto de acumulação do conjunto de pontos da sequência, logo $y \in Y$, pois Y é fechado por hipótese. ∎

B.3.3 Teorema (Cantor)**:** *Seja X espaço métrico. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *X é completo.*
2. *Para toda família $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não-crescente de subconjuntos fechados e não-vazios de X, ou seja, $X \supseteq A_n \neq \emptyset$ fechado e $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$ tem-se que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ para algum $x \in X$.* ▯

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Como $A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A_n$.

Afirmação: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. $\triangledown$

Com efeito, se $m \geqslant n$ então $d(x_m, x_n) \leqslant \sup\{d(x,y) : x, y \in A_n\} = \mathrm{diam}(A_n)$, pois $x_m \in A_m \subseteq A_n \ni x_n$. Ou seja, $d(x_m, x_n) \leqslant \mathrm{diam}(A_n)$, que converge a zero pela hipótese (2). $\blacktriangledown$

Portanto, segue da afirmação anterior que existe $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Afirmação: $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. $\triangledown$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ tem-se que $n \geqslant m \Rightarrow x_n \in A_n \subseteq A_m \Rightarrow x_n \in A_m$. Portanto, como A_m é fechado, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$, de onde segue que $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. $\blacktriangledown$

Agora, se $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, então $d(x,y) \leqslant \mathrm{diam}(A_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que tende a zero pela hipótese (2). Portanto, $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. Ou seja, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ define-se o conjunto A_n como:

$$A_n := \{x_m : m \geqslant n\}.$$

Obviamente, cada A_n é fechado e não-vazio. Mais ainda, a família de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é não-crescente, pois $i > j \Rightarrow m \geqslant i > j \Rightarrow A_i \subseteq A_j$.

Afirmação: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(A_n) = 0$. $\triangledown$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, sabe-se que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geqslant N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$. Se $n \geqslant N$ então, $x \in A_n \Rightarrow x = x_k$ para algum $k \geqslant n \geqslant N$. Portanto, $d(x,y) < \epsilon$ para todo $x, y \in A_n$, de onde segue que $\mathrm{diam}(A_n) < \epsilon$, se $n \geqslant N$. Como $\epsilon > 0$ era arbitrário, segue o afirmado. $\blacktriangledown$

Portanto, segue da afirmação anterior e da hipótese (2) que existe $x \in X$ tal que $x = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Afirmação: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. $\triangledown$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Pela afirmação anterior, sabe-se que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \Rightarrow \mathrm{diam}(A_n) < \epsilon$. Portanto, $n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x) \leqslant \mathrm{diam}(A_n) < \epsilon$, pois $x_n \in A_n$ e $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq A_n$. $\blacktriangledown$

Uma outra prova da última afirmação pode ser obtida observando que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ é o conjunto de pontos de acumulação da sequência $\{x_n\}$. Além disso, como $\mathrm{diam}(A_n)$ tende para zero, a sequência $d(x_n, x)$ está contida num compacto, sendo portanto convergente. $\blacksquare$

B.3.4 Teorema (de Categoria de Baire)**:** *Seja X métrico completo. Seja $A \subseteq X$ tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, com $\overset{\circ}{\overline{A}_n} = \emptyset$, ou seja, $\overline{A}_n$ não contém abertos. Então, $X \cap A^c$ é denso em X.* $\square$

Demonstração: Observe que se pode supor, sem perda de generalidade, que cada A_n é fechado. Com efeito, caso contrário, substituindo A_n por $\overline{A}_n$ tem-se:

$$A_n \subseteq \overline{A}_n \Rightarrow A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n =: B,$$

de onde segue que $A^c \supseteq B^c \Rightarrow X \cap B^c \subseteq X \cap A^c$. Portanto, se $X \cap B^c$ é denso, o conjunto $X \cap A^c$ também o será.

Seja agora $X \supseteq V$ aberto não-vazio arbitrário. Para provar o resultado enunciado, basta provar que $V \cap A^c \neq \emptyset$. Seja U_1 aberto tal que $U_1 \subseteq \overline{U}_1 \subseteq V$ e $\operatorname{diam} \overline{U}_1 < 1$. Por exemplo, como V é aberto não-vazio, se $x \in V$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq \overline{V}$. Portanto, se poderia escolher $U_1 := B_\delta(x)$, onde $\delta \leqslant \min\{r/2, 1/2\}$. Como $A_1 = \overline{A}_1$ não contém abertos, U_1 não é subconjunto de A_1, de onde segue que $U_1 \cap A_1^c$ é um aberto ***não-vazio***, pois A_1^c é aberto, pela suposição inicial de ser A_1 fechado.

Analogamente, se agora U_2 é um aberto não-vazio tal que $U_2 \subseteq \overline{U}_2 \subseteq (U_1 \cap A_1^c)$ e $\operatorname{diam} \overline{U}_2 < 1/2$, este processo poderia ser continuado indutivamente. Suponha-se portanto que já foram determinados $U_1, U_2, \cdots, U_n$ abertos não-vazios tais que $\overline{U}_{j+1} \subseteq (U_j \cap A_j^c)$ e $\operatorname{diam} \overline{U}_{j+1} < 1/(j+1)$, para todo $j = 1, 2, \cdots, n-1$. Então, como $A_n = \overline{A}_n$ não contém abertos, U_n não será subconjunto de A_n, de onde segue que $U_n \cap A_n^c$ é um aberto não-vazio, pois A_n^c é aberto, pela suposição inicial de ser A_n fechado. Portanto, existe U_{n+1} aberto não-vazio tal que $U_{n+1} \subseteq \overline{U}_{n+1} \subseteq (U_n \cap A_n^c)$ e com $\operatorname{diam} \overline{U}_{n+1} < 1/(n+1)$. Obtém-se desta maneira uma sequência não-crescente $\{\overline{U}_n\}$ de fechados não-vazios tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} \overline{U}_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Como X é completo, pelo Teorema de Cantor anterior, existe $x \in X$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n$. Finalmente, observe que:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_{n+1} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap A_n^c) \subseteq U_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \subseteq V \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = V \cap A^c.$$

onde a terceira relação de contenção de conjuntos acima segue do fato que $U_n \subseteq U_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

B.3.5 Corolário: *Um espaço métrico completo X não pode ser união enumerável $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ de conjuntos A_n com $\overset{\circ}{\overline{A}_n} = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.* $\square$

Demonstração: Com efeito, se fosse $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =: A$, então pelo Teorema de Baire ter-se-ia que $X \cap A^c = X \cap X^c = \emptyset$ seria denso, o que é impossível pelo fato de ser vazio. ∎

B.3.6 Teorema: *Seja X espaço métrico. Então, todo subconjunto fechado de X é um G_δ, isto é, interseção enumerável de abertos em X.* □

Demonstração: Seja $X \supseteq F$ fechado.

<u>Afirmação:</u> Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x \in X \,:\, d(x,F) < 1/n\} =: A_n$ é aberto em X. ▽

Com efeito, observando que:

$$x \in A_n \Rightarrow d(x,F) < 1/n \Rightarrow \delta := \frac{1/n - d(x,F)}{2} > 0,$$

tem-se:

$$d(x,F) < d(x,F) + \delta = d(x,F) + \frac{1}{2n} - \frac{d(x,F)}{2} = \frac{d(x,F) + 1/n}{2}.$$

Portanto, como $d(x,F) = \inf\{d(x,y) \,:\, y \in F\}$, pela definição de ínfimo existe $y_0 \in F$ tal que:

$$d(x,y_0) < \frac{d(x,F) + 1/n}{2}.$$

Agora, se $z \in B_\delta(x)$ então tem-se:

$$\begin{aligned} d(z,F) &= \inf\{d(z,y) : y \in F\} \leqslant d(z,y_0) \leqslant d(z,x) + d(x,y_0) \\ &< \delta + \frac{d(x,F) + 1/n}{2} = \frac{1/n - d(x,F)}{2} + \frac{d(x,F) + 1/n}{2} = \frac{2/n}{2} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade acima segue do fato que $y_0 \in F$, no entanto que a terceira desigualdade estrita (a primeira na linha inferior acima) segue do fato que $z \in B_\delta(x)$. Portanto, $B_\delta(x) \subseteq A_n$. ▼

<u>Afirmação:</u> $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \,:\, d(x,F) < 1/n\}$. ▽

Com efeito, para a parte ($\subseteq$) observe que:

$$\begin{aligned} y \in F \;\Rightarrow\; 0 \leqslant \inf\{d(y,z) \,:\, z \in F\} \leqslant d(y,y) = 0 \;\Rightarrow\; d(y,F) = 0 < \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\; y \in A_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n. \end{aligned}$$

Por outro lado, para a parte ($\supseteq$) considere $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Por *reductio ad absurdum*, suponha que $x \notin F$. Em tal caso, como F^c é aberto, se $x \in F^c$, então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq F^c$. Em particular, $d(x,y) \geqslant r$, $\forall y \in F$. Com efeito, se para algum $y \in F$ fosse $d(x,y) < r$, então $y \in B_r(x) \subseteq F^c$, contradizendo o fato que $y \in F$. Desta maneira, tem-se:

$$d(x,F) = \inf\{d(x,y) \,:\, y \in F\} \geqslant r. \tag{B.3.1}$$

Seja agora $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < r$. Então tem-se:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \;\Rightarrow\; x \in A_{n_0} \;\Rightarrow\; d(x, F) < \frac{1}{n_0} < r,$$

o que contradiz (B.3.1). ▼

Desta maneira, a última afirmação conclui a prova do resultado enunciado. ∎

B.3.7 Observação: A relação (B.3.1) deduzida na prova da última afirmação na prova do teorema anterior, serve na realidade para provar que se $X \supseteq F$ é um subconjunto fechado e $x \notin F$, então $d(x, F) > 0$. ♣

B.3.8 Corolário: *Em um espaço métrico X, todo subconjunto aberto de X é um F_σ, isto é, união enumerável de fechados em X.* □

Demonstração: Basta usar as leis de De Morgan no teorema anterior. ∎

B.4 Compacidade em Espaços Métricos

B.4.1 Definição: Se diz que um espaço métrico possui a **propriedade de Bolzano-Weierstrass** se todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação. ♣

B.4.2 Definição: Um espaço métrico se diz **sequencialmente compacto** se toda sequência possui uma subsequência convergente. ♣

B.4.3 Lema: *Um espaço métrico é sequencialmente compacto se e somente se possui a propriedade de Bolzano-Weierstrass.* □

Demonstração: Seja X espaço métrico.

($\Rightarrow$) Se $A \subseteq X$ é um conjunto infinito, então pode ser extraída uma sequência $\{x_n\}$ com elementos $x_n \in A$ todos diferentes. Pela hipótese de compacidade sequencial, esta sequência possui uma subsequência convergente, cujo limite é um ponto de acumulação (de um subconjunto) do conjunto A, pelo lema B.3.1.

($\Leftarrow$) Seja $\{x_n\}$ uma sequência arbitrária em X. Se a sequência possui um elemento que se repete uma quantidade infinita de vezes, então pode ser definida uma subsequência constante, contendo apenas tal elemento, que resulta obviamente convergente. Caso contrário, ou seja, se todo elemento da sequência consta apenas uma quantidade finita de vezes, então o conjunto A formado pelos elementos da sequência possui uma quantidade infinita de elementos (diferentes). Por hipótese, A possui um ponto de acumulação, que também é um ponto de acumulação da sequência, vide 17.7.5(a) e 17.7.2. ∎

B.4.4 Lema: *Todo espaço métrico compacto possui a propriedade de Bolzano-Weierstrass.* □

Demonstração: Seja A um subconjunto infinito do espaço métrico compacto X. Por *reductio ad absurdum*, suponha que A não possui nenhum ponto de acumulação. Em tal caso, cada ponto de X será o centro de alguma bola aberta de raio positivo que não contém nenhum ponto de A diferente do seu centro. O conjunto dessas bolas define uma cobertura de X por abertos que, pela compacidade, possui uma subcobertura finita. O conjunto A somente pode estar contido no conjunto dos centros dessa cobertura finita, contradizendo o fato que A era infinito. ∎

B.4.5 Definição: Um número $r > 0$ se diz **número de Lebesgue** de uma cobertura por abertos do espaço métrico X, se cada subconjunto de X com diâmetro menor que r está (propriamente) contido em algum membro da cobertura. ♣

B.4.6 Teorema (da cobertura de Lebesgue)**:** *Em um espaço métrico sequencialmente compacto, toda cobertura por abertos possui um número de Lebesgue.* □

Demonstração: Seja $\{U_i\}$ uma cobertura por abertos do espaço métrico sequencialmente compacto X. Um subconjunto de X é dito "gordo" se não está contido propriamente em nenhum membro da cobertura. Se não existe nenhum conjunto gordo, então qualquer número positivo serve como número de Lebesgue. Suponha portanto que existem conjuntos gordos e seja a o maior limite inferior de seus diâmetros, ou seja:

$$a = \inf\{d(A) \ : \ A \text{ é gordo}\}.$$

Observe que $0 \leqslant a \leqslant +\infty$. Se fosse $a = +\infty$, então qualquer número positivo serve como número de Lebesgue r. Se fosse $a > 0$, então bastaria tomar $r = a$. O resto da presente demonstração, consistirá em provar que $a = 0$ conduz a uma contradição. Se fosse $a = 0$, pela definição de ínfimo segue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto gordo G_n tal que

$$0 < d(G_n) < \frac{1}{n}$$

onde a primeira desigualdade decorre do fato que um conjunto gordo deve conter pelo menos dois elementos. Para cada G_n escolha-se $x_n \in G_n$. Dado que X é sequencialmente compacto por hipótese, a sequência $\{x_n\}$ possui uma subsequência que converge, digamos, para $x \in X$ que pertence a algum membro da cobertura, digamos $x \in U_{i_0}$. Como este membro é aberto, existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x) \subseteq U_{i_0}$. Dado que a sequência converge para x, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geqslant N_1 \ \Rightarrow \ x_n \in B_{\rho/2}(x)$$

Por arquimedianidade, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $1/N_2 < \rho/2$. Portanto, se $N := \max\{N_1, N_2\}$, dado que $x_N \in G_N$ e $d(G_N) < 1/N < \rho/2$ ter-se-ia que $G_N \subseteq B_\rho(x) \subseteq U_{i_0}$ (vide observação infra), contradizendo que G_N é um conjunto gordo. ∎

B.4.7 Observação: Seja $a \in X$ espaço métrico. Suponha $A \subseteq X$ com $d(A) < r$ tal que

$A \cap B_r(a) \neq \emptyset$. Então, $A \subseteq B_{2r}(a)$. Com efeito, se $b \in A \cap B_r(a)$, então para todo $x \in A$ tem-se

$$d(a,x) \leqslant d(a,b) \ + \ d(b,x) < r \ + \ d(b,x) \leqslant r \ + \ \sup\{d(u,v) \ : \ u,v \in A\}$$
$$= r \ + \ d(A) = r \ + \ r = 2r. \ \clubsuit$$

B.4.8 Definição: Um espaço métrico X se diz **totalmente limitado** se para todo $\epsilon > 0$ existe um subconjunto *finito* $A \subseteq X$ tal que

$$X = \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a). \qquad \clubsuit$$

B.4.9 Lema: *Todo espaço métrico sequencialmente compacto é totalmente limitado.* □

Demonstração: Seja X espaço métrico sequencialmente compacto. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Escolha-se um ponto inicial $a_1 \in X$. Se $X \subseteq B_\epsilon(a_1)$, então basta definir $A = \{a_1\}$. Caso contrário, deve existir algum $a_2 \notin B_\epsilon(a_1)$. Se $X \subseteq B_\epsilon(a_1) \cup B_\epsilon(a_2)$, então basta definir $A = \{a_1, a_2\}$. Caso contrário, deve existir algum $a_3 \notin B_\epsilon(a_1) \cup B_\epsilon(a_2)$, etc. Se este processo fosse suscetível de ser continuado indefinidamente, a sequência $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ não possuiria nenhuma subsequência convergente, contradizendo a hipótese. Portanto, deve existir algum número finito $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(a_i).$$

Desta maneira, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é o conjunto finito procurado. ■

B.4.10 Lema: *Todo espaço métrico sequencialmente compacto é compacto.* □

Demonstração: Seja $\{U_i\}$ uma cobertura por abertos do espaço métrico sequencialmente compacto X. Pelo teorema da cobertura de Lebesgue B.4.6, esta cobertura possui número de Lebesgue $r > 0$. Dado $\epsilon = r/3 > 0$, pelo lema B.4.9 existe um conjunto finito, digamos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(a_i).$$

Observe que para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ tem-se $d(B_\epsilon(a_i)) = 2\epsilon = 2r/3 < r$. Logo, pela definição de número de Lebesgue, existe algum k_i tal que $B_\epsilon(a_i) \subseteq U_{k_i}$. Dado que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(a_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$$

segue que $\{U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots, U_{k_n}\}$ é uma subcobertura finita. Logo, X é compacto. ■

B.4.11 Lema: *Um espaço métrico é compacto se e somente se é completo e totalmente limitado.* □

Demonstração: Seja X espaço métrico.

($\Rightarrow$) Se X é compacto, então é totalmente limitado, pelo lema B.4.9. Toda sequência de Cauchy em X possui uma subsequência convergente, pois X é sequencialmente compacto. Logo, a sequência original também converge (vide 7.2.3). Desta maneira, X é completo.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha X completo e totalmente limitado. Para provar a compacidade basta provar que X é sequencialmente compacto. Para tanto, dado que X é completo, basta provar que toda sequência

$$S_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots\}$$

possui uma subsequência de Cauchy. Dado que X é totalmente limitado, existe uma coleção *finita* de bolas cada uma de raio $1/2$ cuja união contém X. Portanto, pode ser extraída uma subsequência

$$S_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots\}$$

de S_1 de maneira tal que S_2 esteja completamente contida dentro de uma *única* de tais bolas de raio $1/2$. Repetindo o mesmo argumento, pode ser extraída uma subsequência

$$S_3 = \{x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots\}$$

de S_2 de maneira tal que S_3 esteja completamente contida dentro de uma *única* bola de raio $1/3$. Continuando este processo indefinidamente, considere a subsequência "diagonal"

$$S = \{x_{11}, x_{22}, x_{33}, \dots\}$$

da sequência original S_1. Por construção, tem-se $d(x_{mm}, x_{nn}) \leqslant 2/m$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$. Desta maneira, S é uma sequência de Cauchy. ∎

B.4.12 Corolário: *Todo espaço métrico compacto é separável.* □

Demonstração: Se X é um espaço métrico compacto, pelo lema B.4.11 é totalmente limitado. Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um conjunto finito

$$A_n = \{a_1^n, a_2^n, \dots, a_{k(n)}^n\}$$

tal que

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{k(n)} B_{1/n}(a_i^n).$$

Dado que cada A_n é finito, o conjunto

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

é obviamente enumerável. Afirma-se que A também é denso em X. Com efeito, seja $U \subseteq X$ aberto não-vazio. Se $a \in U$, pelo fato de ser U aberto existe $b \in U$ e $r > 0$ tais que $a \in B_r(b) \subseteq U$. Seja $\epsilon = r - d(a,b) > 0$. Por arquimedianidade, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon$. Por construção, $a \in B_{1/N}(a_{i_0}^N)$ para algum $i_0 \in \{1, 2, \dots, k(N)\}$. Desta maneira, tem-se:

$$d(a_{i_0}^N, b) \leqslant d(a_{i_0}^N, a) \; + \; d(a,b) < \frac{1}{N} \; + \; d(a,b) < \epsilon \; + \; d(a,b) = r - d(a,b) \; + \; d(a,b) = r.$$

Portanto $a_{i_0}^N \in B_r(b) \subseteq U$. Como $U \subseteq X$ era aberto arbitrário, segue que A é denso em X. ∎

B.4.13 Corolário: *Um subespaço fechado de um espaço métrico completo é compacto se e somente se é totalmente limitado.* □

Demonstração: Todo subespaço fechado de um espaço métrico completo é completo, pelo lema B.3.2. Logo, a compacidade decorre do lema B.4.11. ■

Considerando o resultado anterior, em um espaço métrico completo a propriedade de ser totalmente limitado é relevante para a compacidade. Esta constatação conduz naturalmente à questão sobre qual seria o traço característico de um espaço métrico X totalmente limitado. Intuitivamente, os pontos do subconjunto finito A devem estar "bem espalhados" em X, de maneira tal que cada ponto de X encontre-se a uma distância menor que ϵ de algum ponto de A. Observe que um espaço métrico totalmente limitado é limitado, pois o diâmetro de A é finito e tem-se $d(X) \leqslant d(A) + 2\epsilon$. Contudo, o recíproco não é verdadeiro. Com efeito, no espaço métrico $X = \ell^2(\mathbb{R})$ a bola unitária $B_1 = \{x \in X \ : \ \|x\| \leqslant 1\}$ é obviamente limitada. Por outro lado, a sequência

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \{1, 0, 0, 0, \ldots\} \\
&x_2 = \{0, 1, 0, 0, \ldots\} \\
&x_3 = \{0, 0, 1, 0, \ldots\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

não é de Cauchy, pois para todo $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \neq n$ tem-se $\|x_m - x_n\| = \sqrt{2}$. Portanto, não pode possuir nenhuma subsequência convergente. Desta maneira, B_1 é um subespaço fechado, logo completo (vide B.3.2), que não é (sequencialmente) compacto. Portanto, B_1 não pode ser totalmente limitado, pelo lema B.4.11. Apenas para provocar a intuição matemática do leitor, menciona-se, omitindo a prova, que um espaço de Banach tem dimensão finita se e somente se todo subespaço limitado é totalmente limitado.

Finalmente, o seguinte teorema é incluído basicamente a título de recapitulação dos principais resultados precedentes.

B.4.14 Teorema: *Se X é um espaço métrico, então as seguintes afirmações são todas equivalentes:*

(a) *X é compacto.*

(b) *X possui a propriedade de Bolzano-Weierstrass.*

(c) *X é sequencialmente compacto.*

(d) *X é completo e totalmente limitado.* □

Demonstração: (a)⇒(b) Segue de B.4.4. (b)⇒(c) Segue de B.4.3. (c)⇒(a) Segue de B.4.10. (d)⇔(a) Segue de B.4.11. ■

Apêndice C

Diferenciação em $\mathbb{R}^n$

C.1 Sistemas de Coordenadas Multidimensionais

Analogamente ao caso do plano, um sistema de coordenadas tridimensionais no espaço $\mathbb{R}^3$ pode ser obtido através de uma estrutura de três eixos ortogonais que se interceptam em um único ponto, denominado origem. O sentido positivo de cada eixo é diferenciado com uma seta, indicando a progressão crescente dos valores. Cada eixo recebe o nome da variável cartesiana associada com o mesmo, ou seja, x, y, z segundo corresponda.

C.1.1 Coordenadas Polares no Plano

As **coordenadas polares** são determinadas pela transformação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como:

$$f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$$

para $r > 0$ e $-\pi \leqslant \theta < \pi$. Desta maneira, tem-se:

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta.$$

As identidades acima permitem obter a transformação inversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

C.1.2 Fórmula de Euler

Um número complexo $z = x + iy$ pode ser representado graficamente como um ponto no plano (x, y), podendo portanto ser expressado em termo de coordenadas polares. Em particular, o número complexo $z = z(x) := e^{ix}$ é suscetível de ser expressado em coordenadas polares (r, θ) como:

$$e^{ix} = r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

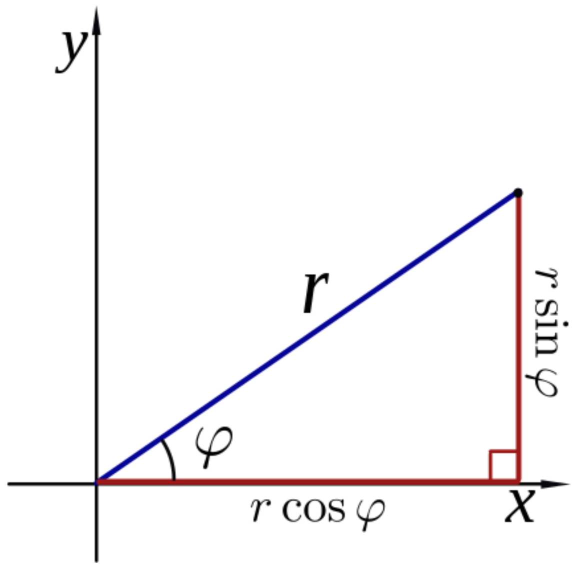

Figura C.1: Sistema de coordenadas polares no plano.

Observe que $r = r(x)$ e $\theta = \theta(x)$. Supondo que r e θ sejam funções diferenciáveis, tem-se:

$$\begin{aligned} ie^{ix} &= \left(e^{ix}\right)' \\ &= r'(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) + r(-\operatorname{sen}\theta \cdot \theta' + i\cos\theta \cdot \theta') \\ &= r'(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) + ir(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\theta' \\ &= \frac{r'}{r}\, e^{ix} + ie^{ix}\theta'. \end{aligned}$$

Cancelando o fator comum e^{ix} tem-se:

$$i = \frac{r'}{r} + i\theta',$$

ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{r'}{r} &= 0 \\ \theta' &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, deve ser $r = r_0$ e $\theta = x + \theta_0$, para algumas constantes r_0, θ_0, cujo valor pode ser determinado atribuindo valores particulares convenientes para x. Por exemplo, se $x = 0$ tem-se:

$$1 = e^{i0} = r_0(\cos\theta_0 + i \operatorname{sen}\theta_0).$$

Observe que deve ser $\operatorname{sen}\theta_0 = 0$, ou seja, $\theta_0 = 0$, se $-\pi \leqslant \theta < \pi$, pois θ é o ângulo das coordenadas polares no plano. Com este valor de θ_0, a identidade acima se reduz a $1 = r_0$, fornecendo o valor da constante remanescente. Desta maneira, obtém-se a **fórmula de Euler**:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

No caso particular $x = \pi$ a fórmula de Euler se reduz à assim denominada **identidade de Euler**, a saber, $e^{i\pi} = -1$, que pode ser expressada alternativamente como:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Esta última identidade reúne em uma única expressão os "cinco números mais importantes" da Matemática.

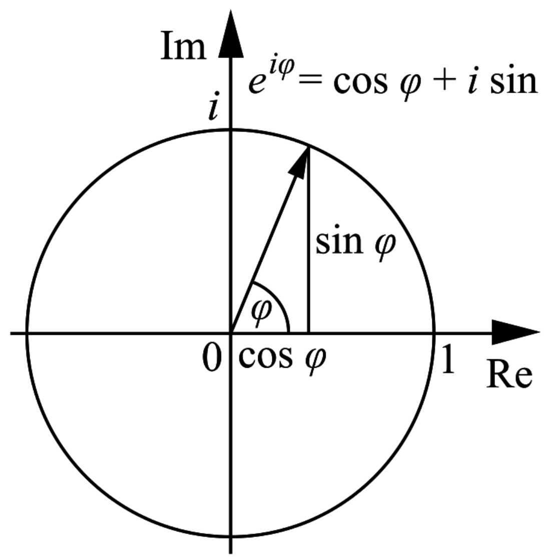

Figura C.2: O plano complexo e a fórmula de Euler.

C.1.3 Coordenadas Cilíndricas

As **coordenadas cilíndricas** são determinadas pela transformação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como:

$$f(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

para $r > 0$, $-\pi \leqslant \theta < \pi$ e $z \in \mathbb{R}$. Desta maneira, tem-se:

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$
$$z = z.$$

As identidades acima permitem obter a transformação inversa:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x},$$
$$z = z.$$

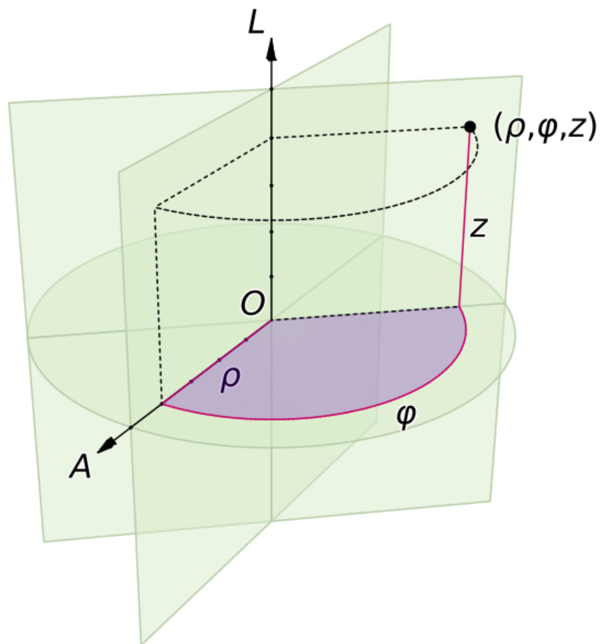

Figura C.3: Sistema de coordenadas cilíndricas no espaço.

C.1.4 Coordenadas Esféricas

As **coordenadas esféricas** são determinadas pela transformação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como:

$$f(r, \theta, \phi) = (r \cos\theta \operatorname{sen}\phi, r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, r \cos\phi)$$

para $r > 0$, $-\pi \leqslant \theta < \pi$ e $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Desta maneira, tem-se:

$$x = r \cos\theta \operatorname{sen}\phi,$$
$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi,$$
$$z = r \cos\phi.$$

A variável r representa a distância do ponto (x, y, z) até a origem de coordenadas. A variável θ denomina-se **ângulo azimutal** e consiste no ângulo polar no plano (x, y) da projeção em tal plano do segmento que une o ponto (x, y, z) com a origem de coordenadas. A variável ϕ denomina-se **ângulo zenital** e consiste no ângulo entre a reta na direção positiva do eixo z e o segmento que une o ponto (x, y, z) com a origem de coordenadas. As identidades acima permitem obter a transformação inversa. No caso de r verifica-se facilmente que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

No caso de θ tem-se:

$$\frac{y}{x} = \frac{r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi}{r \cos\theta \operatorname{sen}\phi} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Finalmente, ϕ resulta dado por:

$$\frac{z}{r} = \frac{r\cos\phi}{r} = \cos\phi \Rightarrow \phi = \arccos\frac{z}{r} = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

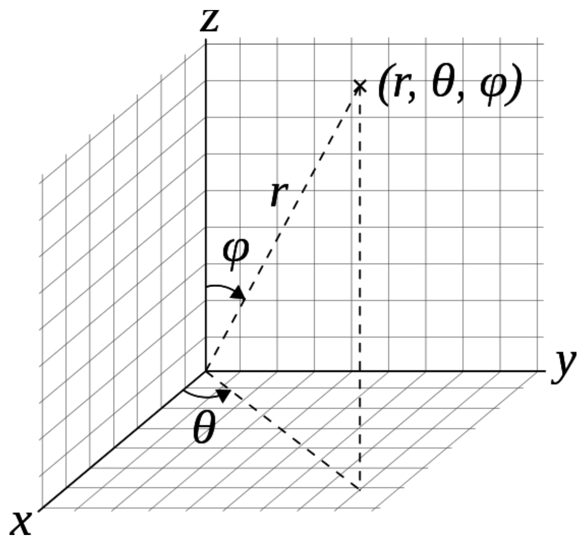

Figura C.4: Sistema de coordenadas esféricas no espaço.

C.2 Limites e Continuidade

As funções de várias variáveis mais gerais possíveis são da forma $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com $n, m \in \mathbb{N}$. Funções da forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ denominam-se **curvas**. Funções da forma $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denominam-se **funções reais**.

C.2.1 Definição: Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se diz que a função f converge para $l \in \mathbb{R}^m$ quando x tende para $a \in \mathbb{R}^n$ se:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ : \ 0 < \|x - a\| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(x) - l\| < \epsilon.$$

Em tal caso denota-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. ♣

C.2.2 Exemplo: Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Tomando o limite por retas que passam pela origem, ou seja, considerando pontos da forma (x, ax), tem-se:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x\,ax}{x^2 + (ax)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{ax^2}{(1 + a^2)x^2} = \frac{a}{1 + a^2}.$$

Observe que tal limite depende de a. Portanto *não* existe o limite de tal f na origem. ♣

C.2.3 Definição: Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se diz **contínua** em $a \in \mathbb{R}^n$ se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$ ♣

C.3 Diferenciação

C.3.1 Definição: Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Define-se a **derivada parcial** de f com relação a x_i como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) \; - \; f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}.$$ ♣

C.3.2 Exemplo: Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = x^2 + y^2$. Verifica-se trivialmente que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x.$$

Analogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$ ♣

C.3.3 Definição: Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dado $u \in \mathbb{R}^n$, define-se a **derivada direcional** de f na direção de u como:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hu) \; - \; f(x)}{h}.$$ ♣

C.3.4 Observação: As derivadas parciais são casos particulares de derivadas direcionais. Com efeito, basta considerar u no conjunto de vetores $\{e_i\}_{i=1}^n$ da base canônica em $\mathbb{R}^n$. Em outras palavras, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. ♣

C.3.5 Definição: Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se diz **diferenciável** no ponto $a \in \mathbb{R}^n$ se existe uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \; - \; f(a) \; - \; L(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Em tal caso, $L = L(a)$ denota-se $Df(a)$ e se denomina a **diferencial** da função f no ponto a. ♣

C.3.6 Teorema: *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}^n$, então existem todas as derivadas direcionais de f em a, em cujo caso tem-se:*

$$\frac{\partial f}{\partial u} = Df(a)u.$$

Em particular, existem todas as derivadas parciais de f em a e tem-se:

$$[Df(a)]_{ij} = \langle Df(a)e_j, e_i\rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial e_j}, e_i\rangle = \langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, e_i\rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \qquad \square$$

Neste ponto surge naturalmente a questão de como determinar a diferencial Df para uma dada função f. Observe que no caso de uma variável real tem-se $Df(a) = f'(a)$, ou seja, a diferencial é a função linear cujo gráfico é a reta tangente ao gráfico da função no ponto $(a, f(a))$. Para simplificar, considere o caso $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Por analogia, a diferencial seria a função linear cujo gráfico é o plano tangente ao gráfico de f no ponto em questão. Tal plano é dado pela condição:

$$\langle x - a, n\rangle = 0$$

onde n é um vetor normal ao plano em questão. Tal vetor pode ser determinado, por exemplo, considerando o produto vetorial $n = u \wedge v$ de dois vetores linearmente independentes u, v que jazem em tal plano. Apelando à representação gráfica da derivada para funções de uma variável real, tem-se:

$$u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a)\right).$$

Analogamente:

$$v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Portanto, o vetor normal ao plano estará dado por:

$$n = u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), -1\right).$$

Desta maneira, tem-se:

$$0 = \langle x - a, n\rangle = (x - a)\,\frac{\partial f}{\partial x}(a) \;+\; (y - b)\,\frac{\partial f}{\partial y}(a) \;-\; (z - c).$$

Portanto:

$$(z - c) = (x - a)\,\frac{\partial f}{\partial x}(a) \;+\; (y - b)\,\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Agora, heurísticamente, se x tende para a, pela definição da diferencial deveria ser:

$$Df(a)(x-a) \approx f(x) - f(a) \approx z - c = (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a) \; + \; (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Esta análise não rigorosa sugere que para uma função real em geral deve ser:

$$[Df(a)] \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Analogamente, no caso geral $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, digamos:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

deveria ser:

$$[Df(a)] \overset{?}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

A matriz no membro direito acima denomina-se matriz **jacobiana** da função f no ponto a e denota-se $Jf(a)$.

C.3.7 Teorema: *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se existem todas as derivadas parciais de f em $a \in \mathbb{R}^n$ e são contínuas, então f é diferenciável em a, $Df(a)$ depende continuamente de a e $[Df(a)] = Jf(a)$.* ∎

C.3.8 Teorema (Regra da cadeia multidimensional)**:** *Sejam $f : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ no domínio de g tal que $g(a)$ pertence ao domínio de f. Se g é diferenciável em a e f é diferenciável em $g(a)$, então $f \circ g$ é diferenciável em a e tem-se:*

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) \circ Dg(a).$$

Em particular, $J(f \circ g)(a) = Jf(g(a))Jg(a)$. ∎

C.3.9 Exemplo: Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida como $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Em tal caso, tem-se:

$$D(f \circ g)(t) = Df(g(t)) \circ Dg(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t & 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} = -2\cos t \operatorname{sen} t \; + \; 2\operatorname{sen} t \cos t = 0.$$

O mesmo resultado poderia ser obtido trivialmente observando que $(f \circ g)(t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. ♣

C.3.10 Definição: Seja f uma função real $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Define-se **gradiente** $\nabla f \in \mathbb{R}^n$ de f como:

$$\nabla f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$ ♣

C.3.11 Observação: Se f é diferenciável em a, então $\nabla f(a) = Df(a)$, onde a igualdade deve ser entendida no sentido de aplicações lineares, a saber:

$$\langle \nabla f(a), x \rangle = Df(a)x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$ ♣

C.4 Matrizes Definidas

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada com coeficientes reais.

C.4.1 Definição: Se diz que A é **hermitiana** se:

$$\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle, \ \forall x, y.$$ ♣

C.4.2 Observação: Uma matriz com coeficientes *reais* é hermitiana se e somente se:

$$A_{ij} = A_{ji}, \ \forall i, j.$$

Neste último caso, se diz que a matriz é **simétrica**. Em outras palavras, se o corpo é real os conceitos de hermitiana e simétrica coincidem. Contudo, se o corpo for complexo tal afirmação não é necessariamente verdadeira. ♣

C.4.3 Definição: Se diz que A é **definida positiva** se:

$$\langle x, Ax \rangle > 0, \ \forall x \neq 0.$$

Analogamente, se diz que A é **definida negativa** se:

$$\langle x, Ax \rangle < 0, \ \forall x \neq 0.$$ ♣

C.4.4 Exemplo: **(a)** A matriz identidade I é trivialmente definida positiva, pois $\langle x, Ix \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 > 0$, se $x \neq 0$.

(b) Considerando o exemplo do item anterior, segue trivialmente que a matriz $-I$ é definida negativa.

(c) A matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

não definida positiva nem negativa. Com efeito, o produto escalar do vetor (x, y) e $A(x, y)$ é dado por $(x, y) \cdot (x, -y) = x^2 - y^2$, que toma valores positivos, por exemplo se $(x, y) = (1, 0) \neq 0$, como também negativos, por exemplo se $(x, y) = (0, 1) \neq 0$. $\clubsuit$

C.4.5 Teorema: *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ hermitiana. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é definida positiva.*
2. *Todos os autovalores de A são positivos.*
3. **Critério de Sylvester:** $\det A_i > 0$, *para todo $i = 1, \dots, n$. Aqui A_i denota o menor principal de ordem i da matriz A.*

Analogamente, as seguintes condições são equivalentes:

1. *A é definida negativa.*
2. *Todos os autovalores de A são negativos.*
3. **Critério de Sylvester:** $\det A_i > 0$ *para todo i par e* $\det A_i < 0$ *para todo i ímpar. Aqui A_i denota o menor principal de ordem i da matriz A.* $\square$

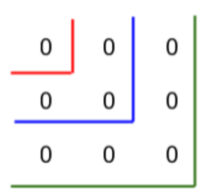

Figura C.5: Os primeiros três menores principais de uma matriz.

C.5 Extremos de Funções Reais

No caso de funções de uma variável real, os pontos críticos estão definidos pela condição $f'(x) = 0$. Usando o polinômio de Taylor de ordem 2, tem-se:

$$f(x) = f(a) \; + \; f'(a)(x - a) \; + \; \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \; + \; R_{2,f,a}(x).$$

Se a for um ponto crítico, então $f'(a) = 0$ e a expressão acima se reduz a:

$$f(x) - f(a) = \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \; + \; R_{2,f,a}(x).$$

De onde tem-se:

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = \frac{f''(a)}{2!} \;+\; \frac{R_{2,f,a}(x)}{(x-a)^2}.$$

Observe que, pelo Lema 35.1.5, o segundo termo no membro direito na identidade acima tende para zero quando x tende para a. Portanto, a natureza do ponto crítico fica determinada pelo sinal de $f''(a)$. Com efeito, se for positivo, então $f(x)-f(a)>0$ para x numa vizinhança de a, sendo a um mínimo local da f. Por outro lado, se for negativo, então $f(x)-f(a)<0$ para x numa vizinhança de a, sendo a um máximo local da f. Observe que se $f''(a)=0$ então este método é inconclusivo. Neste último caso o ponto crítico poderia ser máximo, ou mínimo, ou nenhum dos dois. Para funções reais de várias variáveis a análise é análoga.

C.5.1 Definição: Seja f uma função real. Um ponto x se diz **crítico** para f se $Df(x)=0$. ♣

Analogamente, funções reais podem ser expresadas como:

$$f(x) = f(a) \;+\; Df(a)(x-a) \;+\; \langle x-a, Hf(a)(x-a)\rangle \;+\; R_{2,f,a}(x).$$

No termo de segunda ordem acima, $Hf(a)$ é uma matriz definida como:

$$[Hf(a)]_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}.$$

A matriz $Hf(a)$ denomina-se matriz **hessiana** para f em a. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$ a matriz hessiana é dada por:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, em $\mathbb{R}^3$ tem-se:

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

C.5.2 Observação: Se todas as derivadas parciais de segunda ordem de f são contínuas em um dado ponto $a \in \mathbb{R}^n$, então independem da ordem, ou seja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a),\ \forall i,j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Portanto, neste caso a matriz hessiana $Hf(a)$ resulta *simétrica.* ♣

C.5.3 Exemplo: Considere $f(r,\theta) = r\cos\theta$. Em tal caso, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos\theta \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0.$$

Analogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta.$$

Por último:

$$\frac{\partial f}{\partial r\,\partial \theta} = -\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta\,\partial r}.$$

Desta maneira, resulta:

$$Hf(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \theta} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta\,\partial r} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -\,\mathrm{sen}\,\theta & -r\cos\theta \end{pmatrix}.$$ ♣

C.5.4 Definição: Um ponto crítico x de uma função real f é denominado **não-degenerado** se $\det Hf(x) \neq 0$. ♣

C.5.5 Teorema: *Seja a ponto crítico não-degenerado de f.*

(a) *Se $Hf(a)$ é definida positiva, então a é um ponto de mínimo local.*

(b) *Se $Hf(a)$ é definida negativa, então a é um ponto de máximo local.*

(c) *Se $\langle x, Hf(a)x\rangle$ resulta positivo para alguns x e negativo para outros, então a é um* **ponto de sela**. *A mesma conclusão segue no caso em que o ponto crítico seja degenerado.* □

C.5.6 Exemplo: Considere $f(x,y) = x^2 + y^2$. A condição $Df(x) = 0$ é equivalente a:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x,$$
$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Portanto $(x,y) = (0,0)$ é o único ponto crítico neste caso. Agora, observe que:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é obviamente definida positiva. Desta maneira, o ponto crítico $(0,0)$ é um ponto de mínimo. ♣

C.5.7 Exemplo: Considere $f(x,y) = x^2 + y^2(1-x)^3$. A condição $Df(x) = 0$ é equivalente a:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y^2(1-x)^2, \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(1-x)^3. \end{aligned}$$

Pela segunda identidade acima, deve ser $y = 0$ ou $x = 1$, mas $x = 1$ é incompatível com a primeira identidade. Logo, deve ser $y = 0$ de onde segue que $x = 0$. Portanto $(x,y) = (0,0)$ é o único ponto crítico neste caso. Agora, observe que:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6y^2(1-x) & -6y(1-x)^2 \\ -6y(1-x)^2 & 2(1-x)^3 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é obviamente definida positiva. Desta maneira, o ponto crítico $(0,0)$ é um ponto de mínimo. ♣

C.5.8 Exemplo: Considere $f(x,y) = (x+y)(xy + xy^2)$. Em primeiro lugar, a condição:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} &= (xy + xy^2) \;+\; (x+y)(y+y^2) = x(y+y^2) \;+\; (x+y)(y+y^2) \\ &= (2x+y)(y+y^2) = y(1+y)(2x+y) \end{aligned}$$

implica que $y = 0$, ou $y = -1$, ou $2x = -y$. Por outro lado, considere a condição:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = (xy + xy^2) \;+\; (x+y)(x+2xy) = x(y+y^2) \;+\; (x+y)x(1+2y).$$

Se $y = 0$, então $x = 0$. Portanto $(0,0)$ é um ponto crítico. Se $y = -1$, então $x = 0$ ou $x = 1$. Desta maneira, $(0,-1)$ e $(1,-1)$ também são pontos críticos. No caso $x = -y/2$, tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{y}{2}\left(y \;+\; y^2 \;+\; \left(y - \frac{y}{2}\right)(1+2y)\right) = -\frac{y}{2}\left(y \;+\; y^2 \;+\; \frac{y}{2}(1+2y)\right) \\ &= -\frac{y}{2}\left(y \;+\; y^2 \;+\; \frac{y}{2} \;+\; y^2\right) = -\frac{y}{2}\left(y \;+\; 2y^2 \;+\; \frac{y}{2}\right) = -\frac{y^2}{2}\left(2y \;+\; \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Se $y = 0$, então $x = 0$ conduz ao ponto $(0,0)$ já obtido anteriormente. Se $y = -3/4$, então $x = -y/2 = 3/8$. Portanto $(3/8, -3/4)$ é um novo ponto crítico. Agora, observe que:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y(1+y) & y + y^2 + x(1+2y) + (x+y)(1+2y) \\ y + y^2 + x(1+2y) + (x+y)(1+2y) & x(1 + 2y + (1+2y) + 2(x+y)) \end{pmatrix}.$$

Em particular, tem-se:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desta maneira, o ponto crítico $(0,0)$ é degenerado. Portanto, não será considerado.

Analogamente:

$$Hf(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, observe o produto escalar de (a,b) com $Hf(0,-1)(a,b)$ é dado por:

$$(a,b) \cdot (b,a) = 2ab.$$

A expressão acima será positiva ou negativa, segundo a e b tenham o mesmo sinal ou não, respectivamente. Portanto, o ponto crítico $(0,-1)$ é um ponto de sela.

Analogamente:

$$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, observe o produto escalar de (a,b) com $Hf(1,-1)(a,b)$ é dado por:

$$(a,b) \cdot (-b, -a-2b) = -ab - ab - 2b^2 = -2(ab + b^2) = -2b(b+a).$$

A expressão acima é uma função quadrática de b com duas raizes reais, $b = 0$ e $b = -a$, que será positiva ou negativa, dependendo dos valores de a e b. Por exemplo, se $a \neq 0$ e $b = -a/2$ resulta $-2b(b+a) = a^2/2 > 0$. Por outro lado, se $a = 0$ resulta $-2b(b+a) = -2b^2 < 0$. Portanto, o ponto crítico $(1,-1)$ também é um ponto de sela.

A análise do ponto crítico remanenscente $(3/8, -3/4)$ fica a cargo do leitor. ♣

C.5.9 Observação: O resultado do exercício 25.4.1 não é valido para funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Com efeito, considere $f(x,y) := x^2 + y^2(1-x)^3$. Em tal caso, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y^2(1-x)^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(1-x)^3.$$

Se a segunda derivada parcial acima for nula, então deve ser $x = 1$ ou $y = 0$. No primeiro caso, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,y) = 2 \neq 0.$$

Por outro lado, no segundo caso tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x.$$

Portanto, no caso $y = 0$ a derivada parcial de f com relação a x é nula se $x = 0$. Desta maneira $(0, 0)$ é o *único* ponto crítico da função f. Observe agora que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 + 6y^2(1-x) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} &= -6y(1-x)^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= -6y(1-x)^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2(1-x)^3
\end{aligned}$$

de onde segue que:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $Hf(0, 0)$ é definida positiva, de onde segue que $(0, 0)$ é um ponto de *mínimo* local, com valor mínimo dado por $f(0, 0) = 0$. Este ponto de mínimo local, não é global, pois:

$$f(4,1) = 4^2 + (1-4)^3 = 4^2 + (-3)^3 = 4^2 - 3^3 = 16 - 27 = -11 < 0 = f(0,0). \qquad \clubsuit$$

C.6 O Método dos Quadrados Mínimos

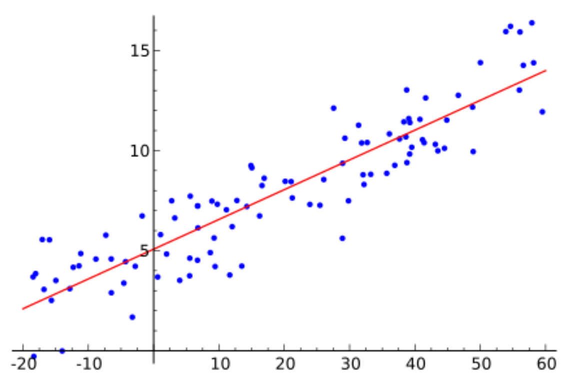

Figura C.6: Conjunto de dados e regressão linear.

Considere um conjunto de dados da forma $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$, onde somente os y_i são variáveis aleatórias. Um problema básico de **regressão linear** consiste em determinar uma reta $R(x) = ax + b$ que ajuste o conjunto de dados. Um critério seria determinar R de maneira tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - R(x_i)|$$

seja um mínimo. Como a função módulo é problemática, por exemplo não é diferenciável, a expressão acima é substituída por:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - R(x_i))^2.$$

Desta maneira, o problema matemático consiste em determinar os mínimos da função real $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - R(x_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i + b))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ - \ 2y_i(ax_i + b) \ + \ (ax_i + b)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ - \ 2ay_ix_i \ - \ 2by_i \ + \ a^2x_i^2 \ + \ 2abx_i \ + \ b^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ - \ 2a\sum_{i=1}^{n} y_ix_i \ - \ 2b\sum_{i=1}^{n} y_i \ + \ a^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ + \ 2ab\sum_{i=1}^{n} x_i \ + \ nb^2 \\
&= \|y\|^2 \ - \ 2a\langle x, y\rangle \ - \ 2nb\overline{y} \ + \ a^2\|x\|^2 \ + \ 2nab\overline{x} \ + \ nb^2.
\end{aligned}$$

Na última linha acima foi usada a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
x &:= (x_1, \dots, x_n), \\
y &:= (y_1, \dots, y_n), \\
\overline{x} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \\
\overline{y} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.
\end{aligned}$$

Para determinar os pontos críticos, observe que a condição $Df(a,b) = 0$ é equivalente a:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial a} = -2\langle x, y\rangle \ + \ 2a\|x\|^2 \ + \ 2nb\overline{x}, \\
0 &= \frac{\partial f}{\partial b} = -2n\overline{y} \ + \ 2na\overline{x} \ + \ 2nb.
\end{aligned}$$

Desta maneira, resulta o seguinte sistema linear de duas equações com duas incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcrcr}
\|x\|^2 a & + & n\overline{x}b & = & \langle x,y\rangle \\
\overline{x}a & + & b & = & \overline{y}
\end{array}\right\}$$

cuja segunda equação permite expressar $b = \overline{y} - \overline{x}a$. Substituindo esta expressão para b na primeira equação do sistema, resulta possível determinar o valor de a como:

$$a = \frac{\langle x, y\rangle - n\overline{x}\,\overline{y}}{\|x\|^2 - n\overline{x}^2}.$$

Portanto:

$$b = \overline{y} - \overline{x}a = \frac{\overline{y}\,\|x\|^2 \;-\; n\overline{y}\,\overline{x}^2 \;-\; \overline{x}\langle x, y\rangle \;+\; n\overline{x}^2\overline{y}}{\|x\|^2 \;-\; n\overline{x}^2} = \frac{\overline{y}\,\|x\|^2 \;-\; \overline{x}\langle x, y\rangle}{\|x\|^2 \;-\; n\overline{x}^2}.$$

Esses valores de a e b fornecem o único ponto crítico da f. A matriz hessiana é dada por:

$$Hf(a,b) = \begin{pmatrix} 2\,\|x\|^2 & 2n\overline{x} \\ 2n\overline{x} & 2n \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \|x\|^2 & n\overline{x} \\ n\overline{x} & n \end{pmatrix}.$$

Com relação ao menor principal de primeira ordem, tem-se $H_1 = \|x\|^2 > 0$, se $x \neq 0$. Observe que $x = 0$ implica $x_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, em cujo caso os dados experimentais jazem todos em uma reta vertical, a saber, o eixo das ordenadas. Com relação ao menor principal de segunda ordem, seu determinante é dado por:

$$\det H_2 = n\,\|x\|^2 \;-\; n^2\overline{x}^2 = n\left(\|x\|^2 \;-\; n\overline{x}^2\right).$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz aos vetores x e $u := (1, \ldots, 1)$, tem-se:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| = |\langle x, u\rangle| \leqslant \|x\|\,\|u\| = \|x\|\,n^{1/2} \;\Rightarrow\; n^2\overline{x}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant \|x\|^2\,n$$
$$\Rightarrow\; n\overline{x}^2 \leqslant \|x\|^2 \;\Rightarrow\; \|x\|^2 - n\overline{x}^2 \geqslant 0.$$

Agora, na desigualdade de Schwarz vale a igualde se e somente se os vetores x e u são linearmente dependentes. Em tal caso, existiria $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x_i = \lambda$ para todo $i = 1, \ldots, n$, em cujo caso os dados experimentais jazem todos em uma reta vertical. Portanto, deve ser $\det H_2 > 0$. Desta maneira, a matriz hessiana da f resulta definida positiva, de onde segue que o ponto crítico é um ponto de mínimo.

Incidentalmente, observe que $\det H_2$ é um múltiplo do denominador que aparece nas expressões para a e b obtidas acima, que resultam portanto bem definidas.

Apêndice D

Integrais em $\mathbb{R}^n$

D.1 Conjuntos em $\mathbb{R}^n$

D.1.1 Definição: Um **retângulo** é um subconjunto R de $\mathbb{R}^n$ definido como:

$$R := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,:\, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \, \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Estrictamente falando, a condição acima define um tipo particular de retângulo, denominado **retângulo fechado**.

A condição $a_i < x_i < b_i$ define um outro caso particular de retângulo, denominado **retângulo aberto**.

A condição $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ acima poderia ser substituida alternativamente por $a_i < x_i \leqslant b_i$, ou por $a_i \leqslant x_i < b_i$. Em tal caso, os conjuntos assim determinados também são denominados retângulos. ♣

D.1.2 Definição: Dado um retângulo R, define-se seu **volume**, ou **conteúdo**, $V(R)$ como:

$$V(R) := \prod_{i=1}^{n} b_i - a_i = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Se $V(R) = 0$, então o retângulo é denominado **degenerado**. ♣

D.1.3 Definição: Um conjunto *finito* de hiperplanos $(n-1)$-dimensionais em $\mathbb{R}^n$ paralelos aos planos coordenados é denominado **rede**.

Observe que uma rede divide $\mathbb{R}^n$ em um conjunto finito de retângulos limitados $R_1, R_2, \ldots, R_k$ e um número finito de regiões não-limitadas.

O máximo dos comprimentos das arestas dos retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_k$ será denominado **malha** da rede.

Se diz que uma rede **cobre** um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ se B estiver contido na união dos retângulos limitados $R_1, R_2, \ldots, R_k$. ♣

D.2 Integrais Múltiplas

Sejam f uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ e B um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ contido no domínio de f tais que:

1. B é um conjunto limitado.
2. f é limitada em B, ou seja, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leqslant K$, para todo $x \in B$.

Seja f_B a restrição de f a B, ou seja, a função definida como:

$$f_B(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in B; \\ 0, & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Seja G uma rede que cobre B com malha $m(G)$. Para cada um dos retângulos limitados R_i escolha-se um ponto arbitrário $x_i \in R_i$, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$.

D.2.1 Definição: Uma **soma de Riemann**[1] para f em B é definida como:

$$\sum_{i=1}^{k} f_B(x_i)\, V(R_i).$$

Observe que, dados f e B, a soma de Riemann depende de G e dos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k$. ♣

D.2.2 Definição: Se independientemente da escolha de rede G, com malha $m(G)$ tendendo a zero, o limite

$$\lim_{m(G)\to 0} \sum_{i=1}^{k} f_B(x_i)\, V(R_i)$$

existe e é sempre o mesmo, então denomina-se a **integral** de f em B, denotando-se por $\displaystyle\int_B f$.

Em tal caso, diz-se que f é **integrável** em B. ♣

D.2.3 Definição: Denomina-se **conjunto diferenciável** em $\mathbb{R}^n$ à imagem de um conjunto limitado e fechado por uma função continuamente diferenciável $\phi : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^n$, com $m < n$.

Um conjunto diferenciável em $\mathbb{R}$ é apenas um ponto. ♣

D.2.4 Teorema: *Seja $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ definida e limitada em um conjunto limitado $B \subseteq \mathbb{R}^n$, cuja fronteira esteja contida num número finito de conjuntos diferenciáveis.*

(a) *Se f é contínua em B, exceto possivelmente em um número finito de conjuntos diferenciáveis, então f é integrável em B.*

[1] Bernhard Riemann (1826-1866).

(b) *Em tal caso, a integral* $\int_B f$ *independe dos valores de* f *em qualquer conjunto diferenciável.* □

D.2.5 Teorema: *Sejam* f *e* g *limitadas num conjunto limitado* B*. Então:*

(a) **Linearidade:** *Se* f *e* g *são integráveis em* B*, então para todo* $a \in \mathbb{R}$ *a função* $af + g$ *é integrável em* B *e tem-se:*

$$\int_B (a\,f + g) = a \int_B f + \int_B g.$$

(b) **Positividade:** *Se* f *é não-negativa e integrável em* B*, então:*

$$\int_B f \geqslant 0.$$

(c) **Homogeneidade:** *Para todo retângulo* R *tem-se:*

$$\int_R 1 = V(R).$$

(d) **Invariância por restrições:** *Se* C *é um conjunto limitado tal que* $C \supseteq B$*, então* $\int_B f$ *existe se e somente se* $\int_C f_B$ *existe, e em tal caso ambas integrais são iguais.* □

D.2.6 Teorema: *Seja* I *uma aplicação que atribui a certos conjuntos limitados* B *e certas funções* $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ *limitadas em* B *um número real* $I_B f$ *com as seguintes propriedades:*

(a) **Linearidade**: *Se* $I_B f$ *e* $I_B g$ *estão definidas, então* $I_B(af + g)$ *está definido para todo* $a \in \mathbb{R}$ *e tem-se* $I_B(af + g) = a\, I_B f + I_B g$*.*

(b) **Positividade**: *Se* f *é não-negativa em* B *e* $I_B f$ *está definida, então* $I_B f \geqslant 0$*.*

(c) **Homogeneidade:** *Para todo retângulo* R *tem-se* $I_R 1 = V(R)$*.*

(d) **Invariância por restrições:** *Se* C *é um conjunto limitado tal que* $C \supseteq B$*, então* $I_B f$ *existe se e somente se* $I_C f_B$ *existe e em tal caso são iguais.*

Em tal caso, se $I_B f$ *e* $\int_B f$ *existem, então são iguais.* □

D.3 Integrais Iteradas

D.3.1 Definição: A **integral iterada** de uma função $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ é definida como:

$$\int dx_1 \int dx_2 \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n. \qquad ♣$$

D.3.2 Teorema: *A integral iterada satisfaz cada uma das condições do Teorema D.2.5.* ∎

D.3.3 Teorema: *Seja B um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que a integral iterada de f existe em B. Se também a integral multipla $\int_B f$ existe, então ambas são iguais.* ∎

D.3.4 Teorema: *Suponha que a integral multipla $\int_B f$ existe. Se integrais iteradas da f existem para determinados ordenamentos das variáveis de integração, então todas são iguais.* ∎

D.4 Mudança de Variáveis

D.4.1 Teorema: *Seja $g : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ uma aplicação continuamente diferenciável. Seja B um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cuja fronteira consiste numa união finita de conjuntos diferenciáveis. Suponha-se que B e sua fronteira estão contidas no interior do domínio de g e que:*

1. *g é injetora em B.*

2. *O determinante jacobiano de g é não-nulo em B, ou seja, $\det Dg(x) \neq 0$, para todo $x \in B$.*

Se f é uma função limitada e contínua em $g(B)$, a imagem de B pela transformação g, então tem-se:

$$\int_{g(B)} f = \int_B (f \circ g)\ |\det Dg|\,.$$

Mais ainda, o mesmo resultado continua sendo válido se quaisquer das condições acima deixam de ser válidas em um conjunto de conteúdo zero. ∎

Referências Bibliográficas

> Toda pessoa deveria ler apenas aquilo a que é levado pelas suas inclinações; pois o que lê como obrigação pouco lhe aproveitará.
>
> *Samuel Johnson* [2]

[1] N. I. Achieser. *Vorlesungen über Approximationstheorie*. Akademie, Berlin, 1953.

[2] T. M. Apostol. *Calculus*. Reverté, Barcelona, 2 edition, 1973.

[3] Vladimir Igorevich Arnold. Polymathematics: is mathematics a set of arts or a single science? In *Mathematics towards the third millennium*, Rome, May 27-29, 1999. Accademia dei Lincei. Disponível em `http://math.ucr.edu/home/baez/Polymath.pdf`.

[4] Jorge Luis Borges. *Edición Crítica*, volume 1. Emece, Buenos Aires, 2010.

[5] Lewis Carroll. *Through the Looking-Glass, and what Alice found there.*

[6] Alain Daniélou. *Dioses y Mitos de la India*. Atalanta, Girona, 2009.

[7] T. Oliveira e Silva. Maximum excursion and stopping time record-holders for the $3x + 1$ problem: Computational results. *Mathematics of Computation*, (68):371–384, 1999.

[8] Umberto Eco. *O Nome da Rosa*. Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1983.

[9] Luiz Carlos Guidolin. *Uma Breve Introdução ao Gnuplot*. IF-USP, Site.

[10] E. Hewitt and K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1965.

[11] J. C. Lagarias. The $3x + 1$ problem and its generalizations. *Amer. Math. Montly*, (92):3–23, 1985. Disponível em `http://www.math.lsa.umich.edu/~lagarias`.

[12] J. C. Lagarias. The $3x+1$ problem: An annotated bibliography (1963-1999). `http://arxiv.org/abs/math.NT/0309224`, 2003.

[13] J. C. Lagarias. The $3x + 1$ problem: An annotated bibliography, ii (2000-2009). `http://arxiv.org/abs/math.NT/0608208`, 2006.

[14] G. G. Lorentz. *Bernstein Polinomials*. University of Toronto Press, Toronto, 1953.

[15] S. H. Lui. An interview with vladimir arnold. *Notices of AMS*, 44(4):432–438, april 1997.

[2] Citado em [25, p. 757].

[16] Jimmy Page, Robert Plant, and John Bonham. Kashmir. `http://www.youtube.com/watch?v=bzEYNsFC2gE`, 1974. Led Zeppelin. In: Physical Graffity (Swan Song).

[17] J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, and C. A. Trejo. *Análisis Matemático*. Editorial Kapeluz, Buenos Aires, 1952. 3 volúmenes.

[18] Robert M. Pirsig. *Zen e a Arte da Manutenção de Motocicletas. Uma investigação sobre valores*. Paz e Terra, Rio de Janeiro, 1984.

[19] G. Polya. *A Arte de Resolver Problemas*. Interciência, Rio de Janeiro, 1995.

[20] F. Riesz and B. Sz.-Nagy. *Functional Analysis*. Ungar, New York, 1955.

[21] E. Roosendaal. On the $3x + 1$ problem. `http://www.ericr.nl/wondrous/index.html`.

[22] Bertrand Russell. *Introducción a la Filosofía Matemática*. Losada, Buenos Aires, 1945.

[23] Bertrand Russell. *La Perspectiva Científica*. Sarpe, Buenos Aires, 1985.

[24] G. F. Simmons. *Ecuaciones Diferenciales. Con Aplicaciones y Notas Históricas*. McGraw-Hill, México, 1972.

[25] M. Spivak. *Calculus*. Reverté, Barcelona, 1978.

[26] Klaus Steding-Jessen. *LaTeX demo: Exemplos com LaTeX2e*. Site.

[27] Jonathan Swift. Gulliver's travels into several remote nations of the world.

[28] R. Terras. A stopping time problem on the positive integers. *Acta Arith.*, (30):241–252, 1976.

[29] R. Terras. On the existence of a density. *Acta Arith.*, (35):101–102, 1979.

[30] Lao Tzu. *Tao-te King. O livro do sentido e da vida*. Pensamento, São Paulo, 1997.

[31] Wikipedia. The free enciclopedia. `http://www.wikipedia.org`.

[32] Thomas Williams and Colin Kelley. *gnuplot. An Interactive Plotting Program*. Site.

Epílogo

Concluindo, estou cheio de dúvidas. Não sei exatamente por que me decidi a criar coragem e apresentar [a presente obra]. Digamos: um gesto de apaxionado. Ou, se quisermos, um modo de libertar-me de numerosas e antigas obsessões.

Umberto Eco [3]

Cuenta la historia que en aquel pasado
Tiempo en que sucedieron tantas cosas
Reales, imaginarias y dudosas,
Un hombre concibió el desmesurado
Proyecto de cifrar el universo
En un libro y con ímpetu infinito
Erigió el alto y arduo manuscrito
Y limó y declamó el último verso.
Gracias iba a rendir a la fortuna
Cuando al alzar los ojos vio un bruñido
Disco en el aire y comprendió, aturdido,
Que se había olvidado de la luna.

Jorge Luis Borges [4]

[3] In: [8], *Um manuscrito, naturalmente*, p. 15.
[4] La Luna, In: *El Hacedor*.

Lista de Símbolos

Usam-se signos e signos de signos apenas quando nos fazem falta as coisas.
William de Baskerville [5]

[5] In: [8, p. 43], Primeiro dia, Terceira.

Índice Remissivo

When I use a word, Humpty Dumpty said, in rather a scornful tone, *it means just what I choose it to mean – neither more nor less.*

Lewis Carroll, [5, ch. 6].