Prova 1

Test: 2
User ID:
Timestamp:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ define-se o **intervalo aberto** (a, b) como o subconjunto:

$$(a, b) = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b \,\}$$

Um subconjunto de $\mathbb{R}$ denomina-se **aberto** se for união enumerável de intervalos abertos *disjuntos*, entanto que se diz **fechado** se o seu complementar for aberto.

1. Com relação ao subconjunto de números reais racionais $\mathbb{Q}$ pode ser afirmado que:

(a) É um subconjunto aberto e fechado simultaneamente.

(b) É um subconjunto aberto.

(c) É um subconjunto fechado.

(d) Não é aberto nem fechado.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

Uma função $f\colon X \to Y$ se diz **injetora** se:

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y, \;\forall\, x, y \in X.$$

Por outro lado, f se diz **sobrejetora** quando a sua imagem consiste no conjunto Y completo. Uma função simultaneamente injetora e sobrejetora denomina-se **bijetora**.

2. Considere a aplicação $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ como:

$$\begin{aligned} f(2n) &= n, \\ f(2n-1) &= -n. \end{aligned}$$

Com relação a tal f pode ser afirmado que:

(a) f não é uma função injetora nem sobrejetora.

(b) f é uma função sobrejetora mas não é injetora.

(c) f é uma função bijetora.

(d) f é uma função injetora mas não é sobrejetora.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Com relação ao limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{ax^2+bx-1}$$

pode ser afirmado que:

(a) Se $a \neq 0$ o valor do limite também é diferente de zero, independentemente de b.

(b) Se $b \neq 0$ o valor do limite também é diferente de zero, independentemente de a.

(c) Existe somente se $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

(d) Existe para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $b > 0$. Sabendo que

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$$

pode ser afirmado que:

(a) $\log a = b^2$.

(b) $\log b = 2a$.

(c) $\log b = a^2$.

(d) $\log a = 2b$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

5. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, não necessariamente contínua. Com relação ao conjunto A definido como

$$A \;=\; \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; f \text{ é continua em } x \,\}$$

pode ser afirmado que:

(a) Existe f tal que A coincide com o conjunto dos racionais.

(b) Existe f tal que o conjunto A se reduz a um único ponto.

(c) Se $A = \mathbb{R}$ então a função f não pode ser limitada.

(d) Se f é limitada então o conjunto A não pode ser todo $\mathbb{R}$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

6. Com relação à função f definida como

$$f(x) \ = \ \frac{1}{1 + \exp x}$$

pode ser afirmado que:

(a) $f'' = f^3 - 2f^2 + f$.

(b) $f' = f(f-1)$.

(c) $f' = f - f^2$.

(d) $f' = f + f^2$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

7. Com relação à função f definida como

$$f(x) \ = \ \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

pode ser afirmado que:

(a) $f'' = 2f^3 - f^2$.

(b) $f' = 1 - f^2$.

(c) $2f'' = f^3 - f$.

(d) $f' = f^2 + 1$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

8. Com relação à função f definida como:

$$f(x) \ = \ \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

pode ser afirmado que:

(a) É continua em $x = 0$, mas não é diferenciável em tal ponto.

(b) É diferenciável em $x = 0$ e a derivada é contínua em tal ponto.

(c) É diferenciável em $x = 0$, mas a derivada não é contínua em tal ponto.

(d) Não é contínua no ponto $x = 0$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

9. Com relação à função f definida como:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{se } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } 1 \leqslant x \end{cases}$$

pode ser afirmado que:

(a) f é derivável no ponto $a = 1$, mas f' não é contínua em tal ponto.

(b) f é derivável no ponto $a = 1$, e f' é contínua em tal ponto.

(c) f não é derivável no ponto $a = 1$, mas é contínua em tal ponto.

(d) f é derivável no ponto $a = 1$, mas não é contínua em tal ponto.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

10. Com relação às funções f, g definidas respectivamente como

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+\cos x} \\ g(x) &= \sqrt{1-\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

pode ser afirmado que:

(a) $ff' = gg'$.

(b) $f'' = -f$ e $g'' = g$.

(c) $gf'' = fg''$.

(d) $g^2 = ff' - 1$ ou $f^2 = gg' + 1$.

(e) Duas ou mais das afirmações anteriores são corretas.

(f) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.