Prova

1) Quantas solucoes não negativas(inteiras) são possíveis para a equacao

$$X1 + X2 + X3 + X4 + X5 = 30$$

C(34,30) = 34!/(30! * 4!) = 46 376

2) Prove que para eventos Ei com i=1,2...n

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$$

3) Um professor apresenta para seus alunos 10 problemas, afirmando que a prova final consistira de uma selecao aleatória de 5 delas. Se um estudante sabe resolver 7 dos problemas, qual a probabilidade que responda:

A gente pode separar os 10 problemas apresentados pelo professor em 7 sabidos e 3 não sabidos (como se separássemos 7 bolas vermelhas e 3 bolas azuis para outros problemas de probabilidade) e desses vamos tirar 5 problemas aleatórios que são os que cairão na prova.

a) Todos os 5 problemas

Temos:

A: probabilidade do primeiro problema ser um que o aluno sabe = 7/10

B: probabilidade do 2º problema ser um que o aluno sabe = 6/9 (não tem reposição)

C: probabilidade do 3º problema ser um que o aluno sabe = 5/8

D: probabilidade do 4º problema ser um que o aluno sabe 4/7

E: probabilidade do 5º problema ser um que o aluno sabe 3/6

Portanto a probabilidade é P(A).P(B).P(C).P(D).P(E) = 7/10 x 6/9 x 5/8 x 4/7 x 3/6 = 1/12

b) Ao menos 4 dos problemas

Usar combinação como no slide 47 da Aula 1.

4) Prove e X é uma variável aleatória com média μ então a variância de X definida por var(x) = E[(x-μ)^2] pode ser escrita como Var(x)=E(x^2)-[E(x)]^2

5) No canal de comunicacao binário (valores 0 ou 1), devido ao ruido, um sinal 1 pode ser recebido como 0 e vice-versa

Probabilidade

Transmitir 0, Receber 0: 0,99

Transmitir 1, Receber 1: 0,95

a) Determine a probabilidade de transmitir e receber o sinal 0

b) Determine a probabilidade de transmitir 1 e receber 0

P1 Esteban 2012

1 – Suponha que ao realizar um experimento, ocorre o evento A com probabilidade p. Repetimos o experimento de forma independente ate que ocorra A pela primeira vez. Seja a v.a. X= numero de repetiçoes do experimento ate que se obtenha A pela primeira vez:

$P(X = j) = (1-p)^{j-1}p$, j=1, 2, 3...

Prove que se s e t sao inteiros positivos, entao $P(X > s + t \mid X>s) = P(X > t)$

2 – Uma urna contem 5 bolas brancas e 10 bolas pretas. Um dado honesto é rolado e um certo numero de bolas é retirado da urna aleatoriamente de acordo com o numero que saiu no dado.

a) Qual é a probabilidade de que todas as bolas selecionadas sejam brancas?

b) Qual a probabilidade condicional de que tenha saido um 3 no dado se todas as bolas selecionadas forem brancas?

3 – A moeda 1 da cara com probabilidade 0,4 e a moeda 2 com probabilidade 0,7. Uma dessas moedas é escolhida aleatoriamente e jogada 10 vezes.

a) Qual a probabilidade de que a moeda de cara em exatamente 7 das 10 jogadas?

b) Dado que a primeira dessas 10 jogadas de cara, qual é a probabilidade condicional de que exatamente Todas 10 jogadas deem cara?

Problem 49 (flipping coins)

We are told in the problem statement that the event the first coin C_1, lands heads happens with probability 0.4, while the event that the second coin C_2 lands heads happens with probability 0.7.

Part (a): Let E be the event that exactly seven of the ten flips land on heads then condi- tioning on the initially drawn coin (either C_1 or C_2) we have

$$P(E) = P(E|C_1)P(C_1) + P(E|C_2)P(C_2) .$$

Now we can evaluate each of these conditional probabilities as

$$P(E|C_1) = 10\,(0.4)_7(0.6)_3 = 0.0424\ 7$$

$$P(E|C_2) = 10\,(0.7)_7(0.3)_3 = 0.2668\ .\ 7$$

So P(E) is given by (assuming uniform probabilities on the coin we initially select)

$P (E) = 0.5 \cdot 0.0424 + 0.5 \cdot 0.2668 = 0.1546$.

Part (b): If we are told that the first three of the ten flips are heads then we desire to compute what is the conditional probability that exactly seven of the ten flips land on heads. To compute this let A be the event that the first three flips are heads. Then we want to compute P(E|A), which we can do by conditioning on the initial coin selected, i.e.

$P (E|A) = P (E|A, C_1)P (C_1) + P (E|A, C_2)P (C_2)$. Now as before we find that

$P (E|A, C_1) = 74 (0.4)_4(0.6)_3 = 0.1935$

$P (E|A, C_2) = 74 (0.7)_4(0.3)_3 = 0.2268$. So the above probability is given by

$P (E|A) = 0.5 \cdot 0.1935 + 0.5 \cdot 0.2668 = 0.2102$.

4 – Suponha que a função de distribuição de X seja dada por:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \le b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \le b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \le b < 3 \\ 1 & 3 \le b \end{cases}$$

a) Determine P(X = i) para i = 1, 2, 3

b) Determine P(1/2 < X < 3/2)

c) Calcule E(X)

Solution. Recall that $P(X < t) = \lim_{s \uparrow t} F(s)$. We denote this limit-from-the-left by $F(t-)$. We have

$$P(X = i) = P(X \leq i) - P(X < i) = F(i) - f(i-) .$$

So

$$P(X = 1) = F(1) - F(1-) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$
$$P(X = 2) = F(2) - F(2-) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6},$$
$$P(X = 3) = F(3) - F(3-) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

For the second part,

$$P(1/2 < X < 3/2) = P(X < 3/2) - P(X \leq 1/2) = F(3/2-) - F(1/2) = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

□

5 – O tempo (em horas) necessario para a manutenção de uma máquina é uma variavel aleatoria exponencialmente distribuida com λ = ½ qual é

a) A probabilidade de que um reparo dure mais que 2 horas?

b) A probabilidade condicional de que o tempo de reparo dure pelo menos 10 horas, dado que a ??? seja superior a 9 horas?

c) O numero de horas esperado para a manutenção?

Part (a): We desire to compute $P\{T > 2\}$ which is given by

$$P\{T > 2\} = \int_2^\infty \frac{1}{2} e^{-1/2\,t} dt .$$

To evaluate this let $v = \frac{t}{2}$, giving $dv = \frac{dt}{2}$, from which the above becomes

$$P\{T > 2\} = \int_1^\infty e^{-v} dv = -e^{-v}\Big|_1^\infty = e^{-1} .$$

Part (b): The probability we are after is given by $P\{T > 10|T > 9\}$ which equals $P\{T > 10 - 9\} = P\{T > 1\}$ by the memoryless property of the exponential distribution. This is given by

$$P\{T > 1\} = 1 - P\{T < 1\} = 1 - (1 - e^{-1/2}) = e^{-1/2} .$$

6 – a espessura de uma forja de duralumínio (em mm) é normalmente distribuída com μ= 22,86 e σ??? Limites de especificação foram dados como 22,86 ± 0,127 mm.

a) Que percentual de forjas será defeituoso?

b) Qual é o valor máximo permissivel de σ que permite que nao exista mais de 1 forja ??? se as espessuras forem de μ= 22,86 e σ =?

A função de densidade conjunta de X e Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x<1, \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Part (a): Lets calculate the percentage that are *acceptable* if we let the variable X be the width of our normally distributed slot this percentage is given by

$$P\{0.895 < X < 0.905\} = P\{X < 0.905\} - P\{X < 0.895\}.$$

Each of these individual cumulative probabilities can be calculated by transforming to the standard normal, in the usual way. We have that the above is equal to (since the population mean is 0.9 and the population standard deviation is 0.003)

$$\begin{aligned} & P\left\{\frac{X-0.9}{0.003} < \frac{0.905-0.9}{0.003}\right\} - P\left\{\frac{X-0.9}{0.003} < \frac{0.895-0.9}{0.003}\right\} \\ = \; & \Phi(1.667) - \Phi(-1.667) = 0.904. \end{aligned}$$

So that the probability (or percentage) of defective forgings is one minus this number (times 100 to convert to percentages). This is $0.095 \times 100 = 9.5$.

Part (b): This question is asking to find the value of σ such that

$$P\{0.895 < X < 0.905\} = \frac{99}{100}.$$

Since these limits on X are symmetric about $X = 0.9$ we can simplify this probability by using

$$P\{0.895 < X < 0.905\} = 1 - 2P\{X < 0.895\} = 1 - 2P\left\{\frac{X-0.9}{\sigma} < \frac{0.905-0.9}{\sigma}\right\}$$

We thus have to solve for σ in

$$1 - 2\Phi\left(\frac{-0.005}{\sigma}\right) = 0.99$$

or inverting the Φ function and solving for σ we have

$$\sigma = \frac{-0.005}{\Phi^{-1}(0.005)}.$$

Using the Matlab command `norminv` to evaluate the above we have $\sigma = 0.0019$. See the Matlab file `chap_5_prob_22.m` for these calculations.

P1 2010

1 - Quantas soluções não negativas(inteiras) são possíveis para a equação:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=30$

R: Para essa análise será possível análises combinatórias com o valor 0 pois serão consideradas análises
combinatórias com valores não negativos que compreende o 0.
Sendo p o número de variáveis e n a somas dessas variáveis teremos como resposta dessa questão

uma
análise combinatória de p+n-1 e n-1.
Ou seja: C(34,4)

$$\frac{34!}{|4!.30!|}=\frac{34.33.32.31}{4.3.2.1}=46376$$

outra resolução

2 – Prove que para eventos Ei com i=1, 2, ..., n:

$$(\cup_{i=1}^{n} Ei)^c = \cap_{i=1}^{n} Ei^c$$

3 – Um professor apresenta para seus alunos 10 problemas, afirmando que a prova final consistira de uma seleção aleatória de 5 delas. Se um estudante sabe resolver 7 dos problemas, qual a probabilidade que ele responda:

a) Todos os 5 problemas

b) Ao menos 4 dos problemas

10 problemas disponíveis

Prova: 5 problemas

Estudante: Sabe 7 problemas

a) Estudante acerta os 5 problemas

$$P_1 = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \left(\frac{\cancel{7}.\cancel{6}}{\cancel{2}}\right).\left(\frac{5.4.3.\cancel{2}.1}{10.9.8.\cancel{7}.\cancel{6}}\right) = \frac{\cancel{8}.\cancel{4}.\cancel{3}}{\underset{2}{\cancel{10}}.\underset{3}{\cancel{9}}.\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{1}{12}$$

b) $p = p_1 + p_2$, onde p_2 é dado por

$$P_2 = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{5}} = \left(\frac{\cancel{7}.\cancel{6}.\cancel{5}}{\cancel{3}.\cancel{2}}\right).\ \frac{\cancel{5}.4.\cancel{3}.\cancel{2}.1}{\underset{2}{\cancel{10}}.9.\cancel{8}.\cancel{7}.\cancel{6}} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} = \frac{3+8}{36} = \frac{11}{36}$$

4 – Prove se X é uma variável aleatória com média M então a variância de X definida por Var(x) = E[(X-M)^2] pode ser escrita como Var(x) = E(x^2) – [E(x)]^2

R. $Var(X) = E[(X-\mu)^2]$
$= E[(X-E[X])^2]$
$= E[X^2 - 2 \cdot E(X) \cdot X + \mu^2]$
$= E[X^2] - E[2 \cdot E(X) \cdot X - E(X)^2]$
$= E[X^2] - E[2 \cdot E(X) \cdot X] + E[E(X)^2]$
$= E[X^2] - E[2 \cdot E(X) \cdot X] + E(X)^2$
$= E[X^2] - 2 \cdot E[X] \cdot E[X] + E(X)^2$
$= E[X^2] - 2 \cdot E[X]^2 + E(X)^2$
$= E[X^2] - E(X)^2$

5 – No canal de comunicação binário(valores 0 ou 1), no entanto, devido ao ruido, um sinal 1 pode ser recebido como 0 e vice-versa.
Probabilidades
Transmitir 0 e receber 0: 0,99
Transmitir 1 e receber 1: 0,95

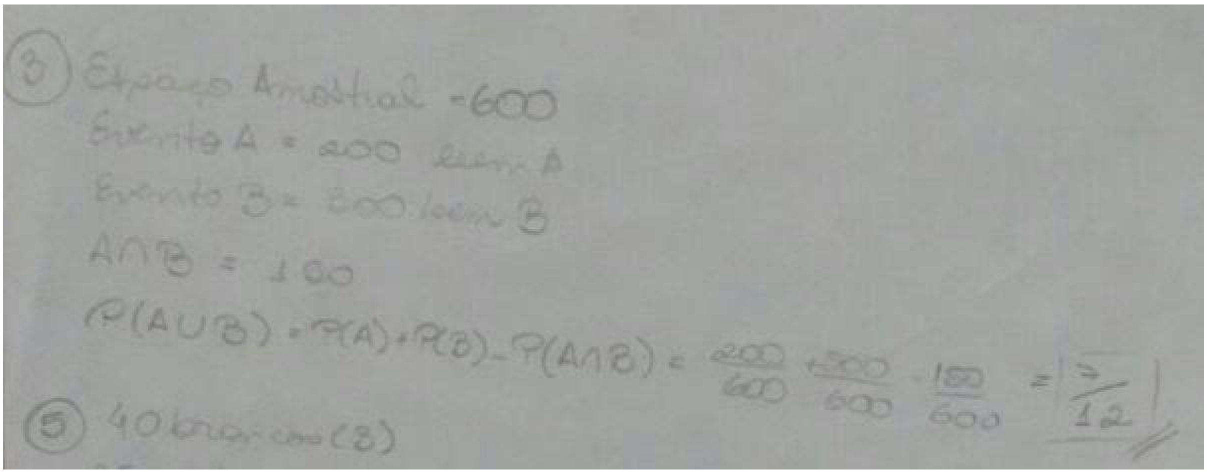
a) Determine a probabilidade de transmitir e receber o sinal 0
b) Determine a probabilidade de transmitir 1 e receber 0

R: Parecido com o 29

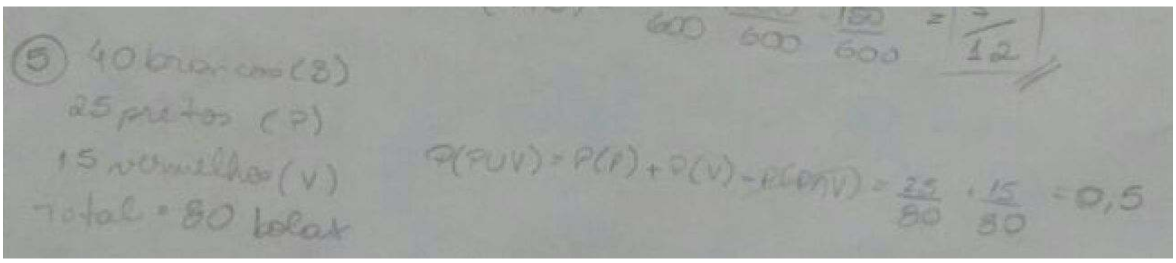
Lista de Exercícios

Realizados em Sala de Aula

3)


(3) Espaço Amostral = 600
Evento A = 200 (com A)
Evento B = 300 (com B)
$A \cap B = 100$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{200}{600} + \frac{300}{600} - \frac{150}{600} = \boxed{\frac{7}{12}}$
(5) 40 brancos (B)

5)


(5) 40 brancos (B)
25 pretos (P)
15 vermelhos (V)
Total = 80 bolas
$P(P \cup V) = P(P) + P(V) - P(P \cap V) = \frac{25}{80} + \frac{15}{80} = 0,5$

9)

$P(A \cap B) = \ldots$

9

$P(A) = 0{,}4$

$P(B) = 0{,}5$

$P(A \cup B) = 0{,}6$

a → $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}6 = 0{,}4 + 0{,}5 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0{,}3$

b → $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$0{,}4 = 0{,}3 + P(A \cap B^c)$

$P(A \cap B^c) = 0{,}1$

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
$= 0{,}5 - 0{,}3$
$= 0{,}2$

$P((A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)) = 0{,}3$

13)

$P(B|A) = \frac{0{,}05}{0{,}6} = 0{,}08$

13)

$P(A) = \frac{6}{9}$

$P(B|A) = \frac{8}{11}$

$P(A \cap B) = \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{8}{11} = \frac{16}{33}$

14) $P(\ldots) = 0{,}44 \cdot 0{,}44 = 0{,}1936$

16)

16 X = numero de defeitos

X	0	1	2	3	4
P(x)	0,08	0,15	0,45	0,27	0,05

a) $E(x) = \sum (x \cdot p(x))$

$E(x) = (0 \cdot 0{,}08) + (1 \cdot 0{,}15) + (2 \cdot 0{,}45) + (3 \cdot 0{,}27) + (4 \cdot 0{,}05)$

$E(x) =$

c) $V(x) = E(x^2) - E(x)^2$

b) $S(x) = \sqrt{E(x^2) - E(x)^2}$

17)

17 a) $b(8,\ 0{,}6)$ $P(x=3)$

$P(x=3) = \binom{8}{3} \cdot 0{,}6^{3} \cdot 0{,}4^{5}$

20)

20 - Total de Perguntas = 10 | $\Omega_x = \binom{10}{5}$

Respondidas pelo aluno = 7

Prova = 5

a) Todos os 5 problemas

$P(x=5) = \frac{\binom{7}{5}\binom{3}{0}}{\binom{10}{5}}$

b) Pelo menos 4

$P = P(x=4) + P(x=5) = \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{7}{5}\binom{3}{0}}{\binom{10}{5}}$

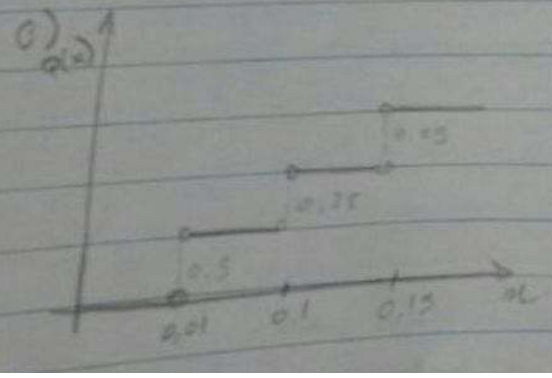
22)

22 - a)

x	0,01	0,1	0,15
$P(x)$	0,5	0,25	0,25

b) $E(x) = (0{,}01 \cdot 0{,}5) + (0{,}1 \cdot 0{,}25) + (0{,}15 \cdot 0{,}25)$

c)



23)

23 - $P(Y=x) = \dfrac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

a) $\lambda = 4$, $x \geq 2$

$P(x \geq 2) = 1 - \left(\dfrac{\lambda^{0} \cdot e^{-0}}{0!} + \dfrac{\lambda^{1} \cdot e^{-1}}{1!} \right)$

b) $\lambda_{10} = 10$, $\lambda_1 \Rightarrow \lambda_{40} = 40$

$P(x = 40) = \dfrac{40^{50} \cdot e^{-40}}{50!}$

25)

25 - $P(A) = 0,3$
$P(B) = 0,5$

a) $P(A \cup B)$ como são mutuamente exclusivos
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,5 = \underline{0,8}$

b) $P(A) = 0,3$

c) Por serem mutuamente exclusivos não há interseção $\therefore P(A \cap B) = 0$

28)

28 - $P(F_1 \cap F_2) = 0,55$
$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0,3$
$P(F_1 \cap F_2^c \cap F_3) = 0,2$
$P(F_1^c \cap F_2 \cap F_3) = 0,1$

O sistema só funciona se pelo menos dois componentes funcionam

O sistema funciona quando:

$F_1\ F_2\ F_3^c$ ñ temos
$F_1\ F_2^c\ F_3$ temos
$F_1^c\ F_2\ F_3$ temos
$F_1\ F_2\ F_3$ temos

$$P(F_1 \cap F_2 \cap F_3^c) = P(F_1 \cap F_2) - P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0,55 - 0,30 = \underline{0,25}$$

29)

29 - $P(R_0/T_0) = 0,99$
$P(R_1/T_1) = 0,95$
$P(T_0) = 0,75$
$P(T_1) = 0,25$

Prob de 0 ser transmitido = 0,75
Prob de 1 ser transmitido = 0,25

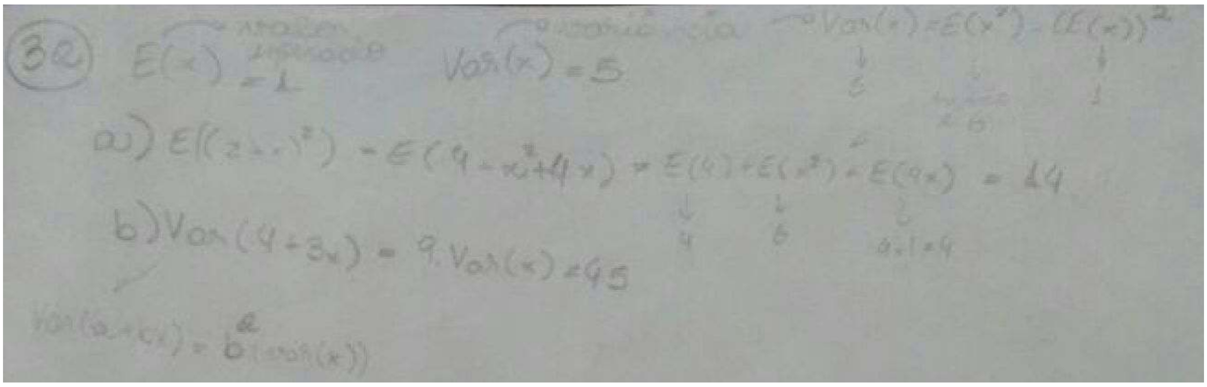
a) $P(T_1 \cap R_1) = P(R_1/T_1) \cdot P(T_1) = 0,95 \cdot 0,25$

b) $P(T_0 \cap R_1) = P(R_1/T_0) \cdot P(T_0) = 0,01 \cdot 0,75$

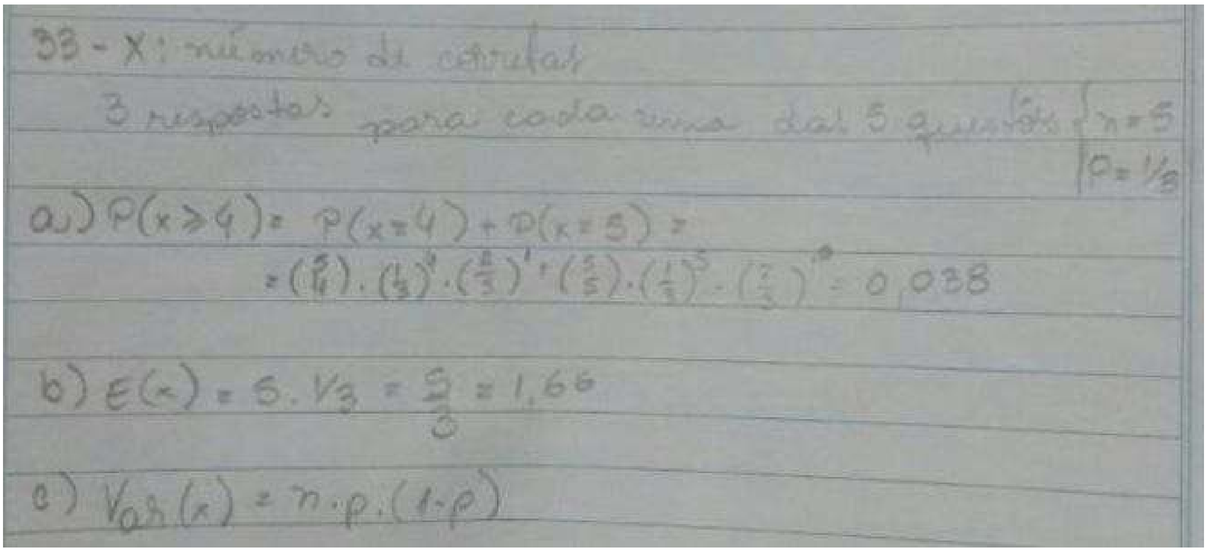
c) $P(R_1) = P(R_1 \cap T_1) + P(R_1 \cap T_0) = P(R_1/T_1) \cdot P(T_1) + P(R_1/T_0) \cdot P(T_0)$

d) $P(T_1/R_1) = \dfrac{P(T_1 \cap R_1)}{P(R_1)} = \dfrac{P(R_1/T_1) \cdot P(T_1)}{P(R_1)}$

32)



33)



34)
35)

Lista de Exercícios

1) **Sorteando um número de 1 a 30, qual a prob. de que ele seja par ou múltiplo de 5?**
PAR{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28, 30} = 15
MUL -5 {5, 10, 15, 20, 25, 30} = 6
PAR∩MUL-5 {10, 20, 30} = 3
P = {15 + 6 - 3}/24 = ¾

Resolução por Lucas Sposito - Galera, acho que é assim:
A - Evento dos números pares
B - Evento dos multiplos de 5
Como não são mutuamente exclusivos, temos: P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A∩B)
Portanto:
P(A) = {2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28, 30} = 15 possibilidades de um total de 30 = 15/30 = ½
P(B) = {5, 10, 15, 20, 25, 30} = 6 possibilidades de um total de 30 = 6/30 = ⅕

$P(A \cap B) = \{10, 20, 30\}$ = 3 possibilidades de um total de 30 = 1/10

Temos:

$P(AUB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - 1/10 = 6/10 = \frac{3}{5}$

2) Lançando simultaneamente dois dados não viciados, qual a probabilidade de que suas faces superiores exibam a soma igual a 7 ou 9?

2 Dados, $n(U) = 6^2 = 36$.

Para soma = 7, temos: A = {(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)} portanto n(A) = 6

Para soma = 9, temos: B= {(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)} portanto n(B) = 4

Assim, n(AUB) = 10

P(AUB) = n(AUB)/n(U) = 10/36 = **5/18**

3) Numa pesquisa feita com 600 pessoas de uma comunidade, verificou-se que 200 leem o jornal A, 300 leem o jornal B e 150 leem os jornais a e B. Qual a probabilidade de, sorteando-se uma pessoa, ela ser leitora do jornal A ou do jornal B?

n(U) = 600 n(A) = 200 n(B) =300 $n(A \cap B) = 150$

$P = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ P = 200/600 + 300/600 - 150/600 = **7/12**

4) Extrai-se aleatoriamente uma carta de um baralho de 52 cartas. Qual é a probabilidade de a carta extraída ser valete ou carta de paus? Um baralho possui 4 valete e 13 cartas de paus. Só existe 1 valete de paus.

n(U) = 52 n(Valete) = 4 n(Paus) =13 $n(Valete \cap Paus) = 1$

$P = P(Valete) + P(Paus) - P(Valete \cap Paus)$

P = 4/52 + 13/52 - 1/52 = **4/13**

5) Numa urna há 40 bolas brancas, 25 bolas pretas e 15 vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, determina a probabilidade de que ela seja preta ou vermelha.

n(U) = 80 n(b) = 80**40** n(p) =25 n(v) = 5**15**

P(pUv) = P(p) + P(v)

P(pUv) = 25/80 + 15/80 = $\frac{1}{2}$

6) Considere um experimento aleatório e os eventos X e Y associados, tais que P(X) =1/2, P(Y) =1/3 e $P(X \cap Y)$=1/4. Calcule P(X U Y).

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(X \cup Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ = **0,58**

7) Quatro universidades-1,2,3 e 4— estão participando de um torneio de basquete. Na primeira etapa, 1 jogará com 2 e 3 com 4. Os dois vencedores disputarão o campeonato e os dois perdedores também jogarão. Um resultado possível pode ser representado por 1324 (1 ganha de 2 e 3 ganha de 4 nos jogos da primeira etapa e 1 ganha de 3 e 2 ganha de 4)

a) Relacione todos os resultados de s

S = {1324 3124 1342 3142 1423 1432 4123 4132 2314 2341 3214 3241 2413 2431 4213 4231}

b) Represente p/ A o evento em que 1 ganha o torneio. Relacione os resultados de A.

A = {1324 1342 1423 1432}

c) Represente por B o evento em que 2 seja um dos finalistas do campeonato. Relacione os resultados de B.

B = {2314 2341 3214 3241 2413 2431 4213 4231}

d) Quais são os resultados de AUB e de A∩B? Quais são os resultados de A'?

A ∪ B = {1324 1342 1423 1432 2314 2341 3214 3241 2413 2431 4213 4231}

A ∩ B não possui elementos (A e B são disjuntos)

A′ = {3124 3142 4123 4132 2314 2341 3214 3241 2413 2431 4213 4231}.

8) Selecione aleatoriamente um estudante em uma determinada universidade e represente por A o evento de ele possuir um cartão de crédito Visa e por B o evento análogo para um MasterCard. Suponha que P (A) = 0.5, P (B) = 0.4 e P (A∩B) 0.25

a)Calcule a probabilidade de que o indivíduo selecionado tenha pelo menos um dos dois tipos de cartão (ou seja, a probabilidade do evento A U B).

P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

P(A U B) = 0,5 +0,4 - 0,25 = **0,65**

b) Qual é a probabilidade de o indivíduo selecionado não ter nenhum dos tipos de cartão?

P(A U B)’ = 1 - 0,65 = **0,35**

c) Descreva, em termos de A e B, o evento em que o estudante selecionado possui um cartão Visa, mas não um MasterCard. Calcule a probabilidade deste evento.

P(A U B’) = P(A) - P(A∩B)

P(A U B’) = 0,5 - 0,25 = **0,25**

9) A rota usada por um motorista que vai ao trabalho contem dois cruzamentos com semáforos. A probabilidade de que ele tenha de parar no primeiro semáforo é 0.4, a probabilidade análoga para o segundo semáforo é 0.5 e a probabilidade de que ele tenha de parar em pelo menos um dos dois semáforos é 0.6. Qual a probabilidade de ele ter de parar:

a) Nos dois semáforos?

P(A) = 0,4 P(B) = 0,5 P(A U B) = 0,6

P (A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

0,6 = 0,4 + 0,5 = P(A ∩ B)

P(A ∩ B) = 0,9 - 0,6 = 0,3

b) No primeiro semáforo mas não no segundo?

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$

c) Em exatamente um semáforo?
$P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$

10) O conselho de estudantes de engenharia de certa faculdade possui um aluno representante de cada uma das áreas de engenharia (civil, elétrica, produçao de materiais e mecânica). De quantas formas é possível:
a) Selecionar um **presidente e um vice-presidente?**
4 pessoas, 2 cargos
A^4_2 = binomial(4, 2) = (4!)/(2!)^2 = 6

@Ralph Sendo os 4 estudantes representados por ABCD, as formas possíveis de termos um presidente e um vice, são: AB, AC AD, BA, BC,BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC. Diferente do problema 11, aqui não temos que desconsiderar nenhuma posição. Logo a resposta é $A^4_2 = (4*3) = \mathbf{12}$
"Desce o 4 duas vezes...." https://www.youtube.com/watch?v=VK_ThpOO6TE

b) Selecionar um presidente, um vice-presidente e um secretário'?
4 pessoas, 3 cargos A^4_3 = binomial(4, 3) = (4!)/(3!)^3 = 4
@Ralph mesmo caso anterior. Como são 3 cargos "Desce o 4 três vezes"
$A^4_3 = (4*3*2) = \mathbf{24}$

11) Três moléculas do tipo A, três do tipo B, três do tipo C e três do tipo D serão vinculadas uma à outra para formar uma cadeia molecular. Uma molécula deste tipo é ABCDABCDABCD e outra é BCDDAAABDBCC

a) Quantas moléculas deste tipo podem ser formadas? (Sugestão: se as três moléculas A forem diferentes uma da outra —A_1, A2, A3- assim como as B,C e D, quantas moléculas haverá? Como esse número será reduzido se nao houver distinção entre as moléculas A?)
12 moléculas, 12 posições (12!). No entanto, a molécula é formada por 3 elementos idênticos de 4 grupos distintos. Existem 3! posições para cada grupo. Portanto o total de moléculas é $\mathbf{12!/(3!)^4 = 369600}$

b) Suponha que uma molécula composta do tipo descrito seja selecionada aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que todas as moléculas de cada tipo estejam juntas (corno em BBBAAADDDCCC)?
Podemos considerar que A' = AAA, B' = BBB e etc. O número total de arranjos para esses elementos é **4!**. A probabilidade de ele ocorrer é $\mathbf{4!/369600 = 6{,}5 * 10^{-5}}$

12) Certa loja faz reparos em compon entes e presente por A o evento em que o próximo componente trazid de áudio e vídeo. Ro para conserto seja de áudio e por B o evento em que o próximo componente seja um CD-player (de forma que o evento B está contido em A). Suponha que P(A) = 0.6 e P(B) = 0.05. Qual é P(B|A)?
Se B está contido em A. Portanto $(A \cap B) = B$.

Portanto, P(B|A) = P(A∩B)/P(A) = P(B)/P(A) = 0.05/0.6 = **0.08**

13) Uma caixa contem seis bolas vermelhas e três verdes e uma segunda caixa contém sete bolas vermelhas e três verdes. Uma bola é retirada da primeira caixa e colocada na segunda. Então uma bola é retirada da segunda caixa e colocada na primeira.

a) Qual é a probabilidade de uma bola vermelha ser selecionada na primeira caixa e outra bola vermelha na segunda?

@Ralph. Entendi que a probabilidade a ser calculada é da extração que já foi feita.

P(Verm1) = 6/9	P(Verd1) = 3/9
P(Verm1 Verm2) = 8/11	P(Verm1 Verd2) = 3/11
P(Verd1 Verm2) = 7/11	P(Verd1 Verd2) = 4/11

P(Verm1 & Verm2) = P(Verm1) * P(Verm1 Verm2) + P(Verd1) * P(Verd1 Verm2)
P(Verm1 & Verm2) = 6/9 * 8/11 + 3/9 * 4/11@Vini aqui nao seria 7/11?
P(Verm1 & Verm2) = **0,60...**

14) Suponha que as proporções de fenótipos sanguineos em uma população sejam as seguintes:

A	B	AB	O
0.42	0.10	0.04	0.44

Assumindo que os fenótipos de dois indivíduos selecionados aleatoriamente sejam independentes um do outro, qual é a probabilidade de que ambos os fenótipos sejam O? Qual é a probabilidade de que os fenótipos de dois indivíduos selecionados aleatoriamente sejam iguais?

Ambos sejam O = 0,44 x 0,44 = $(0,44)^2$

Sejam iguais = $(0,42)^2 + (0,1)^2 + (0,04)^2 + (0,44)^2$

15) Seja X = número de dígitos não-nulos de um código CEP selecionado aleatoriamente. Quais são os valores possíveis de X? Forneça três resultados possiveis e seus valores associados X.

Valores possíveis para X: { 1,...,8 }
03642-040 -> 5
12430-010 -> 5
03720-130 -> 5

16) A fmp de X = o número de defeitos graves em um eletrodomésitco selecionado aleatoriamente é

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.08	0.15	0.45	0.27	0.05

Calcule os dados a seguir:

a) E(X)

$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i} \cdot \beta(x) =$ 0 x 0,08 + 1 x 0,15 + 2 x 0,45 + 3 x 0,27 + 4 x 0,05 = 0,15 + 0,9 + 0,81 + 0,2

E(X) = 2,06

b) O desvio padrão de X

sqrt(var) = sqrt(3,14)

c) V(X)

Var(X) = $E(X^2) - (E(X))^2$ = 0,15 + 4 x 0,45 + 9 x 0,27 + 16 x 0,05 - 2,06 = 0,15 + 1,8 + 2,43 +

0,8 - 2,06 = 3,14

17) Calcule as seguintes probabilidades binomiais diretamente definida pela fórmula de b(n,p):

a) b(8, 0.6) P(X = 3)

b(n, p) = b(8, 0.6) = binomial (n,x) $p^x \cdot q^{n-x}$

P (X= 3) = binomial(8,3) $0,6^3 * 0,4^5$ = (8! / 3!5!) * $0,6^3 * 0,4^5$

= 56 * 0,21 * 0,01 = **0,11**

b) b(8, 0.6) P(X = 5)

P (X=5) = binomial(8,5) $0,6^5 \times 0,4^3$ = (8! / 5!3!) * $0,6^5 * 0,4^3$

= 56 * 0,07 * 0,06 = **0,23**

c) P(X > 1) quando n = 12 e p = 0.1.

c) b(12, 0.1) =

{

binomial(12,x) $0,1^x\, 0,9^{n-x}$, x=0,1...12

0 , c.c

}

P(X>=1) = 1 - P(X=0) = 1 - $0,1^0 \times 0,9^{12}$ = 1 - $0,9^{12}$

18) Suponha que 90% de todas as pilhas de certo fabricante tenham voltagens aceitáveis. Um determinado tipo de lanterna necessita de duas pilhas tipo D, e ela só funciona se as duas pilhas tiverem voltagem aceitável. Entre 10 lanternas selecionadas aleatoriamente, qual é a probabilidade de pelo menos 9 funcionarem?

P(aceitável) = 0,9 Duas Pilhas = 0,9 * 0,9 = 0,81

p=0,81 q=1-0,81 k=9 n=10

B(10,9) * $0,81^9 * 0,19^{10-9}$ = **0,28**

19) Um instrutor que lecionou estatística para engenheiros para duas turmas no semestre passado, a primeira com 20 alunos e a segunda com 30, decidiu pedir aos alunos um projeto semestral. Após a entrega de todos os projetos, o instrutor os organizou aleatoriamente antes de corrigi-los. Considere os primeiros 15 projetos a serem corrigidos.

a) Qual é a probabilidade de exatamente 10 projetos serem da segunda turma?

b) Qual é a probabilidade de pelo menos 10 projetos serem da segunda turma?

c) Qual é a probabilidade de ao menos 10 projetos serem da mesma turma?

20) Um professor apresenta para seus alunos 10 problemas, afirmando que a prova final consistirá de uma seleção aleatória de 5 delas. Se um estudante sabe resolver 7 dos problemas, qual é a probabilidade que responda

a) Todos os 5 problemas

b) pelo menos 4 dos problemas.

10 problemas disponíveis

Prova: 5 problemas

Estudante: Sabe 7 problemas

a) Estudante acerta os 5 problemas

$$P_1 = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \left(\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{6}}{\cancel{2}}\right)\cdot\left(\frac{5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot1}{10\cdot9\cdot8\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}}\right) = \frac{3\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}}{\underset{2}{\cancel{10}}\cdot\underset{3}{\cancel{9}}\cdot\underset{2}{\cancel{8}}} = \frac{1}{12}$$

b) $p = P_1 + P_2$, onde P_2 é dado por

$$P_2 = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{5}} = \left(\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\right)\cdot\frac{\cancel{5}\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1}{\underset{2}{\cancel{10}}\cdot9\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{6}} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} = \frac{3+8}{36} = \frac{11}{36}$$

21) Para encontrar informação através da internet um usuário escolhe três buscadores. (—)10% das vezes escolhe o buscador A, neste caso de cada 5 vezes não encontra a informação. (—)30% das vezes o usuário escolhe o buscador B, nesse caso a probabilidade de que ache a informação é de 0.75.(—)60% das vezes escolhe o buscador C e a chance de encontrar a informação desejada é de 0.95

a) Qual a probabilidade de que o usuário encontre a informação?

P(E/A)*P(A) + P(E/B)*P(B) + P(E/C)*P(C)   //lei da prob. total

b) Se o usuário encontrou a informação, com qual destes três buscadores é mais provável que tenha conseguido?

22) A proporção de componentes eletrônicos defeituosos em certos lotes, é uma variável aleatória discreta X cuja distribuição acumulada tenha a seguinte forma: $F(0.01) — F(0.01^{(-)}) = 0.5$, $F(0.1) — F(0.1^{(-)}) = 0.25$, e $F(0.15) — F(0.15^{(-)}) = 0.25$. Tem-se

uma grande quantidade de lotes deste tipo.

a) Determine a função de probabilidade de X

b) Qual é a média(valor esperado) do número de componentes defeituosos por lote?

c) Construa o gráfico da FDA.

23) Num estudo de desempenho de uma central de computação, o acesso à CPU é descrito por uma variável Poisson com média de 4 requisições por segundo. Essas requisições podem ser de várias naturezas, tais como: imprimir um arquivo, efetuar um cálculo, enviar uma mensagem, entre outras.

a) Escolhendo-se ao acaso um intervalo de 1 segundo, qual é a probabilidade de haver dois ou mais acessos à CPU?

b) Considerando-se agora o intervalo de 10 segundos, também escolhido ao acaso, qual a probabilidade de haver 50 acessos?

(5) $\lambda = 4$ requisições / segundo

a) $\lambda t = 4$

$$P(\{N((0,t]) \geq 2\}) = 1 - P(\{N((0,t]) = 0\}) - P(\{N(0,t]) = 1\})$$

$$= 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} - \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-4} - 4e^{-4} = 1 - 5e^{-4}$$

b) $\lambda t = 10 \cdot 4 = 40$

$$P(\{N((0,t]) = 50\}) = \frac{(40)^{50}}{50!} e^{-40}$$

24) Um robô é programado para operar mediante microprocessadores, e pode falhar em um determinado período (turno de 8 horas) independente dos outros turnos com probabilidade de 0.2. Quando um robô falha pela segunda vez, ele é mandado para a manutenção geral. Determinar

a) a probabilidade de que o robô seja enviado para manutenção no máximo no quinto turno.

b) o número esperado de turnos até ser enviado à manutenção.

25) Suponha que A e B são eventos mutuamente exclusivos, com P(A) = 0.3 e P(B) = 0.5. Qual a probabilidade de

a) Ambos A ou B ocorram.

P(A)+P(B) = 0,3 + 0,5 = 0,8

b) A ocorra mas B não ocorra.

P(A).P(B)complementar = 0,3 . (1-0,5) = 0,15

c) Ambos A e B ocorram.

P(A).P(B) = 0,3. 0,5 = 0,15

-Como os eventos são MUTUAMENTE

EXCLUSIVOS, eles não ocorrem juntos. Ou

seja, a probabilidade é zero.

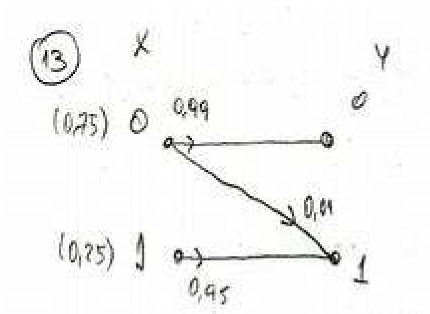
26) Prove: se X é urna variável aleatória com média u então a variância de X definida por Var(X) $E[(x - \mu)^2]$ pode ser escrita como V ar(X)= $E[X^2]$ — $(E[X])^2$

Var(X) = $E[(X-\mu)^2]$
= $E[(X-E[X])^2]$
= $E[X^2 - 2 \cdot E(X) \cdot X + \mu^2]$
= $E[X^2] - E[2 \cdot E(X) \cdot X - E(X)^2]$
= $E[X^2] - E[2 \cdot E(X) \cdot X] + E[E(X)^2]$
= $E[X^2] - E[2 \cdot E(X) \cdot X] + E(X)^2$
= $E[X^2] - 2 \cdot E[X] \cdot E[X] + E(X)^2$
= $E[X^2] - 2 \cdot E[X]^2 + E(X)^2$
Var(X) = $E[X^2] - E(X)^2$

27) Mostre que se A e B são independentes, também A e B^C são independentes.

28) Um sistema é composto por componentes e_i,c_2 e c_3 de modo que funciona se e somente se, pelo menos dois destes três componentes funcionam. Dados os eventos F_i o componente funciona, i = 1, 2,3 e conhecendo-se as seguintes probabilidades:
$P(F_i \cap F_2) = 0.55$, $P(Fi \cap F2 \cap F_3) = 0.3$, $P(F_i \cap F_2^C \cap F_3)$, 0.2 e $P(F_i^C \cap F_2 \cap F_3) = 0.1$. Determine a confiabilidade do sistema.

29) No canal de comunicação binário, um sinal só pode tomar dois valores (0 ou 1). No entanto, devido a ruído, um sinal com O pode ser recebido como 1 ou um sinal com 1 pode ser recebido corno 0. A probabilidade de que um sinal que se transmite como O e chegue como O é de 0.99. Se o sinal foi transmitido como 1, a probabilidade de que se receba como 1 é de 0.95. Sabe-se que a probabilidade de que se transmita um O é de 0.75.



P(x = 0) = 0,75
P(x = 1) = 0,25
P(y=0 | x=0) = 0,99
P(y=1 | x=1) = 0,05
P(y=1 | x=0) = 0,01

a) Determine a probabilidade de se transmitir e receber o sinal 1.

P= 0,25*0,95 = 0,2375

b) Determine a probabilidade de transmitir o sinal O e receber o sinal 1

P= 0,75*0,01 = 0,0075

c) Qual a probabilidade de receber o sinal igual a 1?

P= 0,75*0,01 + 0,25*0,95 = 0,245

d) Foi recebido o sinal igual a 1, qual a probabilidade de que o sinal 1 foi o sinal transmitido?

$$P(y=1 \mid x=1) = \frac{P(y=1 \mid x=1) * P(x = 1)}{P(y = 1)}$$

Mas

P(y = 1) = P(y=1 | x=1) * P(x = 1) + P(y=1 | x=0) * P(x = 0) >>> 0,95*0,25+0,01+0,75

Logo

$$P(x=1 \mid y=1) = \frac{0{,}95*0{,}25}{0{,}95*0{,}25+0{,}01+0{,}75} = 0{,}9694$$

30) Uma variável aleatória X tem a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 10 \\ 0.2, & \text{se } 10 \leq x < 12 \\ 0.5, & \text{se } 12 \leq x < 13 \\ 0.9, & \text{se } 13 \leq x < 25 \\ 1, & \text{se } x \geq 25 \end{cases}$$

14 a) $P(X=x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 10 \\ 0{,}2, & \text{se } 10 \leq x < 12 \\ 0{,}3, & \text{se } 12 \leq x < 13 \\ 0{,}4, & \text{se } 13 \leq x < 25 \\ 0{,}1, & \text{se } 25 \leq x \end{cases}$

b) $P(X=12) = 0{,}3$

c) $P(12 \leq x \leq 20) = F(20) - F(12^+) = F(20) - \{F(12) - P(x = 12^+)\}$

$= 0{,}4 - 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}4$

a) Determine a função de probabilidade de X,

b) P(X = 12)

c) P(12 <X < 20)

d) Calcule E[X]

e) $E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(0,2\,\delta(x-10) + 0,3\,\delta(x-12) + 0,4\,\delta(x-13) + 0,1\,\delta(x-25)\right)dx$

$E\{x\} = 0,2 \cdot 10 + 0,3 \cdot 12 + 0,4 \cdot 13 + 0,1 \cdot 25$

$E\{x\} = 2 + 0,3(12+13) + 1,3 + 2,5$

$E\{x\} = 7,5 + 5,8 = 13,3$

31) Numa central telefonica, o número de ligações recebidas por minuto é descrita por uma variável Poisson com média de 4 ligações por minuto.

a) Escolhendo-se ao acaso o intervalo de 1 minuto, qual a probabilidade de haver duas ou mais ligações?

b) Considerando agora o intervalo de 10 minutos, também escolhido ao acaso, qual a probabilidade de haver 50 ligações?

(5) $\lambda = 4$ requisições / segundo

a) $\lambda t = 4$

$P(\{N((0,t]) \geq 2\}) = 1 - P(\{N((0,t]) = 0\}) - P(\{N(0,t]) = 1\})$

$= 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} - \frac{(\lambda t)^1}{1!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-4} - 4e^{-4} = 1 - 5e^{-4}$

b) $\lambda t = 10 \cdot 4 = 40$

$P(\{N((0,t]) = 50\}) = \frac{(40)^{50}}{50!} e^{-40}$

32) Se E[X] = 1 e V ar(X) = 5, encontre:

- $E\{(2 + X)^2]$
- Var(4 + 3X)

16

$E[x] = 1, \quad Var(x) = 5 \Rightarrow E[x^2] = Var(x) + (E[x])^2$

$E[x^2] = 5 + 1 = 6$

a) $E[(2+x)^2] = E[x^2] + 4E[x] + 4 = 6 + 4 + 4 = 14$

b) $Var(4+3x) = E[(4+3x)^2] - E[(4+3x)]^2 =$

$= E[(4+3x)^2] - E[8]^2$

$= E[9x^2] + 24E[x] + 16 - 64$

$= 9.6 + 24 + 16 - 64 = 54 + 24 + 16 - 64$

$= -10 + 40 = 30$ //

33) Em uma prova de múltipla escolha, há três respostas possíveis para cada uma das 5 questões.

a) Qual é a probabilidade de que um estudante responda 4 ou mais questoes "adivinhando"?

b) Qual é o número esperado de respostas corretas?

(17) 3 possibilidades para cada uma das 5 questões

$p = \frac{1}{3}$: probabilidade de acerto :

a) $\binom{5}{4} p^4 (1-p)^1 = 5 \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3^5}$

b) $\sum_{k=0}^{+\infty} k \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k} = \sum_{k=0}^{5} \frac{5!}{(k-1)!(5-k)} \cdot p^k (1-p)^{5-k}$

$= p \sum_{k=1}^{5} \binom{5-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{5-k} = p\,(1+p)^4 = 1{,}0535$

34) A duração (em anos) de um componente eletrônico pode ser considerada como uma variável aleatória X com função de densidade f(x) = 0.1 exp$^{-0.1.x}$ > 0

(a) Se a garantia for de um ano para qualquer componente, que porcentagem dos componentes serão trocadas?

(18) $f_X(x) = 0{,}1\, e^{-0{,}1x}, \quad x > 0$

a) $F_X(x) = \int f_X(x)\,dx = -e^{-0{,}1x} + c$

mas

$F_X(\infty) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-0{,}1x}$

logo

$P(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - e^{-0{,}1}$

b) Calcule a média de duração dos componentes.

b) $E\{X\} = \int_0^{+\infty} x \cdot \underbrace{0{,}1\, e^{-0{,}1x}}_{u'}\, dx = x(-e^{-0{,}1x})\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-0{,}1x}\,dx$

$= \dfrac{1}{0{,}1} = 10$ anos

c) Calcule a Função de Distribuição acumulada da variável aleatória X.

c) $F_X(x) = 1 - e^{-0{,}1x}$

d) Considere a seguinte função de utilidade para os componentes:

$$g(x) = \begin{cases} -100, & \text{se } X \leq 1, \\ 200, & \text{se } X > 1; \end{cases}$$

qual seria a utilidade esperada do fabricante?

e) Mostre que P(X > t + h/X > t) P(X > h),Para Qualquer h > O, para qualquer t > O (falta de memória)

d) $$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x)\,dx = \int_0^1 0{,}1\, e^{-0{,}1x} \cdot (-100)\,dx \; +$$

$$+ \int_{+1}^{+\infty} 200 \cdot (0{,}1\, e^{-0{,}1x})\,dx = 100\, e^{-0{,}1x}\Big|_0^1 - 200\, e^{-0{,}1x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= 100\,(e^{-0{,}1} - 1) + 200 = 100\,(e^{-0{,}1} + 1)$$

e) $$P(X > t+h \mid X > t) = \frac{P(X > t+h)}{P(X > t)} = \frac{1 - F_X(t+h)}{1 - F_X(t)}$$

$$= \frac{e^{-0{,}1(t+h)}}{e^{-0{,}1t}} = e^{-0{,}1h} = 1 - F_X(h) = P(X > t)$$

kikiiiiiiç

35) A voltagem suministrada por uma fonte geradora no instante t é dado por X_t = a cos(wt+θ), com a e w constantes e e uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo {-π, π]. Calcule o valor esperado desta voltagem.

(19) $X_t = a\cos(\omega t + \Theta)$, $f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} , & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 , & c.c. \end{cases}$

logo

$$E\{X_t\} = \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos(\omega t + \theta) \cdot f_{\Theta}(\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a\cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{a}{2\pi} \operatorname{sen}(\omega t + \theta) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

36) A distribuição da resistência de resistores de um tipo específico é normal, 10% dos equipamentos apresentam resistência maior que 10.256 ohms e 5% menor que 9.671 ohms. Quais são os valores da média e do desvio padrão das resistências?

(20) $P(X > 10,256) = 0,1$

$P(X < 9,671) = 0,05$

$$\int_{10,256}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m_x)^2\right\} dx = 0,1$$

$x = \sigma y + m_x$

$$\int_{\frac{10,256-m_x}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} dy = 0,1$$

Usando a tabela de valores para a função

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \int_0^x \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} dt = 2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

temos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{10,256-m_x}{\sigma}\right) = 0,1 \Rightarrow \operatorname{erf}\left(\frac{10,256-m_x}{\sigma}\right) = 0,8$$

$$\Rightarrow \frac{10,256-m_x}{\sigma} = 0,9062 \quad (I)$$

Além disso

$$\int_{-\infty}^{9,671} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m_x)^2\right\} = 0,05$$

$$\frac{1}{2} + \int_{0}^{\frac{9,671-m_x}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = 0,05$$

$$\text{erf}\left(\frac{9,671-m_x}{\sigma}\right) = 0,9 \quad \Rightarrow \quad \frac{9,671-m_x}{\sigma} = 1,1631 \quad (\text{II})$$

Subtraindo (II) de (I):

$$\frac{0,585}{\sigma} = 0,2569 \Rightarrow \sigma = 2,2773$$

e

$$m_x = -1,1631\sigma + 9,671$$

$$m_x = 7,0223$$

40) A poupança dos moradores de uma cidade (medidas em milhares de reais) e considerada uma variável aleatória contínua X, cujo modelo probabilistico está determinado pela regra f (x) = x^2 / 9,0 $\leq$ x $\leq$ 3.

a) Qual a porcentagem de habitantes desta cidade que poupam mais de mil reais?

b) Qual é a poupança media dos habitantes?

c) Segundo as autoridades, o consumo dos habitantes da cidade em relação a poupança está dado por Y = 1 + 4X. Determine a densidade de Y.

(24) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$, x: milhares de reais

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{t^2}{9}\, dt, \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{27}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \frac{1}{27} = 0{,}963$

b) $E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^3 x \cdot \frac{x^2}{9}\, dx = \int_0^3 \frac{x^3}{9}\, dx$

$E\{X\} = \left.\frac{x^4}{36}\right|_0^3 = \frac{3^4}{3^2 \cdot 4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ mil reais

c) $P(Y \leq y) = P(1 + 4X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-1}{4}\right) =$

$= F_X\left(\frac{y-1}{4}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{27} \cdot \left(\dfrac{y-1}{4}\right)^3, & 1 \leq y \leq 4 \cdot 3 + 1 = 13 \\ 0, & c.c \end{cases}$

41) Se P(A ∩ C/B)=0.1,P(A ∩ C/B) = 0.2, encontre P(A/B).

25

$$P(A \cap B \cap C) = 0{,}1\,P(B)$$

$$P(A \cap B \cap \bar{C}) = 0{,}2\,P(B)$$

Note que

$$[A \cap B \cap C] \cap [A \cap B \cap \bar{C}] = [A \cap B] \cap [C \cap \bar{C}] = \phi$$

logo

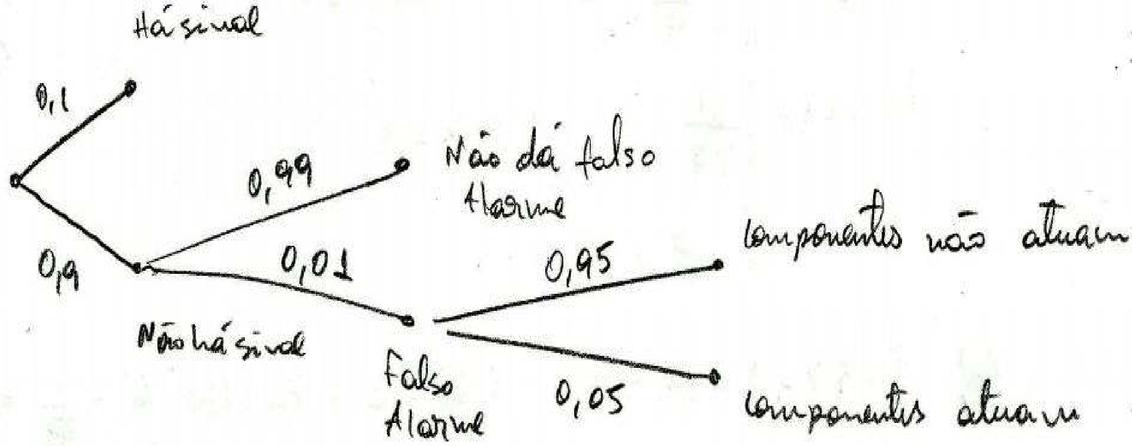
$$0{,}3\,P(B) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) = P[(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C})] =$$

$$= P(A \cap B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0{,}3 \Rightarrow P(A \mid B) = 0{,}3$$

42) Um sistema de proteção contra-incêndios tem dois componentes básicos, um de detecção e outro de extinção. O primeiro envia um aviso ao segundo componente quando detecta algum sinal de incêndio (fumaça ou possível aumento na temperatura). O segundo, apenas quando o primeiro dá o aviso, ativa os alarmes e os extintores. Por experiência, sabe-se que existe uma probabilidade de 0.1 de apresentar-se algum sinal de incêndio e, neste caso, os componentes sempre atuam. No entanto, quando não apresentam estes sinais, existe uma probabilidade de 0.01 de que o componente de detecção envie um aviso ao componente de extinção que, neste caso, ativa os alarmes e os extintores com uma probabilidade de 0.05. Encontre a probabilidade de que o sistema de proteção contra incêndios responda incidentalmente, i.e, na ausência dos sinais de incêndio.

(26) Probabilidade de sinal de incêndio = 0,1 ⇒ componentes sempre atuam

Probabilidade de falso alarme = 0,01 ⇒ probabilidade dos componentes atuarem = 0,05



$\Rightarrow P = 0{,}9 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}05 = 45 \cdot 10^{-5} = 0{,}045\%$

43) Se $P(A \cap B^c \cap C) = 0.8$ e $P(A \cap B^c \cap C \cap D^c) = 0.5$

a) Encontre $P(A \cap B^c \cap C \cap D)$

b) Encontre $P(A^c \cup B \cup C^c \cup D^c)$

(27) Note que

a) $P[A \cap \bar{B} \cap C \cap D] + \underbrace{P[A \cap \bar{B} \cap C \cap \bar{D}]}_{0,5} = 0{,}8$ (conjuntos disjuntos)

$P[A \cap \bar{B} \cap C \cap D] = 0{,}3$ //

b) $P[\overline{A \cap \bar{B} \cap C \cap D}] = 1 - 0{,}3$

$P[\bar{A} \cup B \cup \bar{C} \cup \bar{D}] = 0{,}7$

44) O tempo de resposta (em segundos) de um procedimento (tempo que temora para o procedimento realizar um pedido) é uma variável aleatória X com uma função de densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{57}{40} - \frac{51(x-1)^2}{10}; 0.5 < x < 1.5 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine a probabilidade de que o tempo de resposta esteja entre 0.8s e is.

b) Encontre a média e o desvio padrão do tempo de resposta do processo.

c) Determine P (IX - μx| < 2σ x).

44) $X \sim$ tempo de resposta

$$f(x) = \begin{cases} \frac{57}{40} - \frac{51(x-1)^2}{10} \; ; \; 0{,}5 < x < 1{,}5 \\ 0 \; ; \; c.c \end{cases}$$

$P(0.8 < X < 1)$, $E(X)$, $DP(X)$ $P(|X - \mu_x| < 2\sigma_x) = ?$

$$P(0.8 < X < 1) = \int_{0.8}^{1} \frac{57}{40} - \frac{51}{10}(x-1)^2 \, dx$$

$$= \frac{57}{40}\int_{0{,}8}^{1} dx - \frac{51}{10}\int_{0{,}8}^{1}(x-1)^2 dx = \frac{57}{40}(1-0{,}8) - \frac{51}{10}\,\frac{1}{3}\left[(1-1)^3 - (0{,}8-1)^3\right]$$

$$= \frac{57}{40}\,\frac{2}{10} - \frac{51}{10}\cdot\frac{1}{3}\,0{,}2^3 = 0{,}285 - 0{,}0136 = 27{,}14\%$$

$$E(X) = \int_{0.5}^{1.5} x\left[\frac{57}{40} - \frac{51}{10}(x-1)^2\right] dx$$

$$= \frac{57}{40}\int_{0.5}^{1.5} x\,dx - \frac{51}{10}\int_{0.5}^{1.5} x\,\underbrace{(x-1)^2}_{u'}\,dx$$

$$= \frac{57}{40}\,\frac{1}{2}(1.5^2 - 0.5^2) - \frac{51}{10}\left[\frac{x^2}{2}(x-1)^2\Big|_{0.5}^{1.5} - \int_{0.5}^{1.5} x^2(x-1)\,dx\right]$$

$$= \frac{57}{40} - \frac{51}{10}\left(\frac{1.5^2 \times 0.5^2 - 0.5^2 \times 0.5^2}{2} - \frac{1.5^4 - 0.5^4}{4} + \frac{1.5^3 - 0.5^3}{3}\right)$$

$$\frac{57}{40} - \frac{51}{10}\left(0.5^2 - \frac{5}{4} + \frac{3{,}25}{3}\right) = \frac{57}{40} - \frac{51}{10}\left(\frac{12 \times 0{,}25 - 15 + 13}{12}\right)$$

$$= \frac{57}{40} - \frac{51}{10}\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{171 - 51}{120} = \frac{120}{120} = 1$$

$$1.5^4 - 0.5^4 = (1.5^2)^2 - (0.5^2)^2 = \underbrace{(1.5^2 + 0.5^2)}_{(2{,}25 + 0{,}25)}\underbrace{(1.5^2 - 0.5^2)}_{2}$$

pág 1/ex 44

$$E(X^2) = \frac{57}{40}\int_{0.5}^{1.5} x^2 dx - \frac{51}{10}\left[\int_{0.5}^{1.5} x^4 dx - 2\int_{0.5}^{1.5} x^3 dx + \int_{0.5}^{1.5} x^2 dx\right]$$

$$= \frac{57}{40}\cdot\frac{1}{3}(1.5^3 - 0.5^3) - \frac{5}{10}\left[\frac{1}{5}(1.5^5 - 0.5^5) - \frac{1}{2}(1.5^4 - 0.5^4) + \frac{1}{3}(1.5^3 - 0.5^3)\right]$$

$$= \frac{57 \times 3.25}{120} - \frac{5}{10}\left(\frac{7.5625}{5} - \frac{5}{2} + \frac{3,25}{3}\right)$$

$$= \frac{185.25}{120} - \frac{5}{10}\left(\frac{45.375 - 75 + 32,5}{30}\right)$$

$$E(X^2) = \frac{185.25}{120} - \frac{14,375}{300} = 1,49583$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,49583$$

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)} \simeq 1,223$$

$$P(|X - \mu x| < 2\sigma x) = P(-2\sigma x < X - \mu x < 2\sigma x)$$

$$P(\mu x - 2\sigma x < X < \mu x + 2\sigma x) = P(-1,446 < X < 3,446)$$

$$= P(0.5 < X < 1.5) = 1$$

45) A ocorrência de certo evento catastrófico para a economia ocorre de acordo a um processo Poisson com uma taxa de um a cada 5 anos.

a) Determine a probabilidade de que nurn período de 10 anos não ocorra mais de duas vezes este evento catastrófico.

b) Encontre a probabilidade de que num período de 5 anos, ocorra mais de duas vezes este evento catastrófico.

c) Um projeto deve executar durante um período de dez anos. Se este evento não se apresenta durante o período de execução do projeto, o custo é de 200 unidades monetárias (u.m); Em outro caso este custo incrementa-se em 100 u.m. por cada unidade de tempo faltante até terminar a execução do projeto. Determine o valor esperado do custo de execução do projeto.

d) Qual é a probabilidade de que passem mais de 20 anos até que ocorra três vezes o dito evento?

46) Para a variável X com distribuição exponencial de parâmetro A mostre que P (X > t + h I X > t) = P (X > h) ,para qualquer h > 0, para qualquer t > 0 (falta de memória).

46) $X \sim Exp(\lambda) \quad , \forall t > 0 , \forall h > 0$

$$P(X > t+h \mid X > t) = \frac{P(X > t+h, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+h)}{P(X > t)}$$

$$(*)\ P(X > t+h) = \int_{t+h}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -\lambda . \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_{t+h}^{+\infty} = -\left[\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^{(t+h)\lambda}}\right]$$

$$\therefore P(X > t+h) = \frac{1}{e^{\lambda(t+h)}}$$

$$(**)\ P(X > t) = \int_{t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -\lambda \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_{t}^{+\infty} = -\left(\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^{t\lambda}}\right)$$

$$\therefore P(X > t) = \frac{1}{e^{\lambda t}}$$

$$\text{de } (*) \text{ e } (**) : P(X > t+h \mid X > t) = \frac{1/e^{\lambda(t+h)}}{1/e^{\lambda t}} = \frac{1}{e^{\lambda h}} \quad (***)$$

$$\text{mas } \int_{h}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{e^{\lambda h}} = P(X > h) \quad \text{de } (***) :$$

$$\boxed{P(X > t+h \mid X > t) = P(X > h)}$$

47) Se o comprimento da rosca de um parafuso tem distribuição normal com media 5cm e a empresa considera corno aceitáveis os parafusos que cuja medida não estão mais do que 45% ao redor da media. Quais são então os limites para os tamanhos aceitáveis?

48) Sejam P.Q e R probabilidades tais que para cada evento A de Ω: Q (A) = P (A / B) e R(A) = Q (A / C) Demonstre que para cada evento A: R(A) = P(A / B ∩ C) .

48| P, Q e R probabilidades

$$\begin{cases} Q(A) = P(A/B) \quad (*) \\ R(A) = Q(A/C) \quad (**) \end{cases}$$

Seja $A \subset \Omega$:

$$R(A) \overset{(**)}{=} Q(A/C) = \frac{Q(A,C)}{Q(C)} = \frac{Q(C/A).Q(A)}{Q(C)} = \frac{Q(C/A).P(A/B)}{P(C/B)}$$

$$= \frac{Q(C/A)\,\frac{P(A,B)}{P(B)}}{\frac{P(C,B)}{P(B)}} = Q(C/A).\frac{P(A,B)}{P(C,B)} = Q(C/A).\frac{P(B/A).P(A)}{P(B/C).P(B)}$$

$$= \frac{Q(A,C)}{Q(A)}.\frac{P(B/A).P(A)}{P(B/C).P(B)} = \frac{Q(A,C)}{P(A/B)}.\frac{P(B/A).P(A)}{P(B/C).P(B)}$$

$$= \frac{Q(A,C)\,P(B)}{P(A,B)}.\frac{P(B/A)\,P(A)}{P(B/C).P(B)} = \frac{P(A,C/B).P(B)}{P(A,B)}.\frac{P(B/A)\,P(A)}{P(B/C).P(B)}$$

$$= \frac{\frac{P(A,B,C)}{P(B)}.P(B)}{P(A,B)}.\frac{P(B/A).P(A)}{P(B/C).P(B)} = \frac{P(C/A,B)\,P(B/A).P(A)}{P(B/C).P(B)} = \frac{P(A,B,C)}{P(B,C)}$$

$$= P(A/B,C) \quad \square$$

OBS: Notação utilizada $P(X \cap Y) = P(X,Y)$

49) Para converter dois sinais digitais em analógicos, para sua transmissão, usa-se um de três modems disponíveis: m_l, m_2 e m_3. Por experiência, sabe-se que a probabilidade de usar m_1 é de 0.2 e de 0.45 a de usar m2. Também sabe-se as seguintes probabilidades: 0.01, a de usar m_1 e de efetuar mal a conversão, 0.1 a de usar m_2 e realizar bem a conversão e 0.3 a de usar m_3 e efetuar mal a conversão. Qual a probabilidade de efetuar mal a conversão?

51) Suponha que o tempo de espera de um ônibus no período da manhã é

uniformemente distribuído entre [0, 5], o tempo de espera deste ônibus à tarde é uniformemente distribuído [0, 10] e independente do período da manhã.

a) Se você pegar o ônibus cada manhã e tarde durante uma semana, qual o tempo total de espera? [defina as variáveis aleatórias X_1, ..., X5 para manhãs e X_6, ..., X_io para tardes]

b) Qual a variância do tempo total de espera?

52) A corporação MNM tomará aos seus empregados um teste de aptidão. Os scores do teste são normalmente distribuídos com média 75 e desvio padrão 15. Uma amostra de 25 indivíduos é tomada de uma populaça° de 500.

a) Qual é o valor esperado e o desvio padrão de x` ?

b) Qual a probabilidade de que o score médio do teste aplicado na amostra esteja entre 70.14 e 82.14?

c) Encontre o valor de C tal que P(x` $\geq$ C) = 0.015