Calcular o valor, em função de x, as seguintes integrais, aplicando o método de substituição de variáveis:

>>> Para ver a solução, clique no botãozinho à esquerda da palavra **Solução** <<<

1) $I = \displaystyle\int \frac{1}{(3x-2)^2}\,dx$;

Solução

considerando u = 3x - 2 => du = 3dx => $\frac{1}{3}$du = dx

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{u}\right) + K = -\frac{1}{3u} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = -\dfrac{1}{3(3x-2)} + K$

OBS: K é uma constante.

----

2) $I = \displaystyle\int x^3\cos(x^4)\,dx$;

Solução

considerando u = sen(x^4) => du = 4x^3 cos(x^4)dx => $\frac{1}{4}$du = x^3 cos(x^4)dx

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int \frac{1}{4}\, du = \frac{1}{4}\int 1\, du = \frac{u}{4} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(x^4) + K$

----

3) $I = \int \mathbf{e}^x \sqrt{1+\mathbf{e}^x}\, dx$;

Solução

considerando $u = 1 + \mathbf{e}^x \Rightarrow du = \mathbf{e}^x dx$

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int \sqrt{u}\, du = \int u^{\left(\frac{1}{2}\right)} du = \frac{u^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\frac{3}{2}} + K = \frac{2\sqrt{u^3}}{3} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \frac{2\sqrt{(1+\mathbf{e}^x)^3}}{3} + K = \frac{2\sqrt{1+\mathbf{e}^x}^{\,3}}{3}$ + K

----

4) $I = \int \frac{x}{(1+4x^2)^2}\, dx$;

Solução

considerando $u = 1 + 4x^2 \Rightarrow du = 8x\,dx \Rightarrow \frac{1}{8}\,du = x\,dx$

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \frac{1}{8}\int \frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{u}\right) + K = -\frac{1}{8\,u} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = -\dfrac{1}{8(1+4\,x^2)} + K$

----

5) $I = \int x\,\mathbf{e}^{(-x^2)}\,dx$;

Solução

considerando $u = -x^2$ **=>** du = -2xdx => $-\frac{1}{2}$du = xdx

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = -\frac{1}{2}\int \mathbf{e}^{u}\,dx = -\frac{1}{2}\,\mathbf{e}^{u} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = -\dfrac{1}{2}\,\mathbf{e}^{(-x^2)} + K$

----

6) $I = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)^2}\,dx$;

Solução

considerando u = cos(x) => du = -sen(x)dx => - du = sen(x)dx
substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = -\int \frac{1}{u^2}\,du = -\left(-\frac{1}{u}\right) + K = \frac{1}{u} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \dfrac{1}{\cos(x)} + K$

----

7) $I = \int \operatorname{sen}(2\,x)\sqrt{5+\operatorname{sen}(x)^2}\,dx$;

Solução

considerando $u = 5 + \operatorname{sen}(x)^2 = 5 + \dfrac{1-\cos(2\,x)}{2} = 5 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos(2\,x)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ du = sen(2x)dx

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int \sqrt{u}\,dx = \int u^{\left(\frac{1}{2}\right)}\,du = \frac{u^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\frac{3}{2}} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \dfrac{2\,(5+\operatorname{sen}(x)^2)^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{3}$

----

8) $I = \int \operatorname{tg}(x)^3 \sec(x)^2\,dx$;

Soloção

considerando u = tg(x) => du = $\sec(x)^2$ dx
substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \frac{\operatorname{tg}(x)^4}{4} + K = \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{4\cos(x)}\right)^4 + K$

----

9) $I = \int \operatorname{sen}(x)\sec(x)^2\, dx$;

Solução

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)^2}\, dx$$

considerando u = cos(x) => du = -sen(x)dx => -du = sen(x)dx
substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = -\int \frac{1}{u^2}\, du = -\left(-\frac{1}{u}\right) + K = \frac{1}{u} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \frac{1}{\cos(x)} + K$

----

10) $I = \displaystyle\int \frac{\sec(x)^2}{3 + 2\,\mathrm{tg}(x)}\,dx$;

Solução

considerando u = 3 + 2 tg(x) => du = 2 $\sec(x)^2$dx => $\frac{1}{2}$ du = $\sec(x)^2$ dx

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ \ln(\,|\,u\,|\,) + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \frac{1}{2}\ \ln(\ |\ 3 + \mathrm{tg}(x)\,|\ ) + K$

----

11) $I = \displaystyle\int \frac{x+2}{x-1}\,dx$;

Solução

$$I = \int \frac{x+2}{x-1}\,dx = \int \frac{x-1+3}{x-1}\,dx = \int 1 + \frac{3}{x-1}\,dx$$

considerando u = x - 1 => du = dx

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int 1 + \frac{3}{u}\,du = \int 1\,du + 3\int \frac{1}{u}\,du = u + 3\ln(\,|\,u\,|\,) + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: I = x - 1 + 3 ln(| x - 1 |) + K = x + 3 ln (|

x - 1 |) + K

----

12) $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\, dx$;

Solução

considerando u = x + 1 => du = dx

x = u - 1

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int \frac{(u-1)^2}{u}\, du = \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u}\, du = \int u - 2 + \frac{1}{u}\, du = \int u\, du - \int 2\, du + \int \frac{1}{u}\, du =$$

$$= \frac{u^2}{2} - 2u + \ln(|u|) + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2(x+1) + \ln(|x+1|) + K =$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) - 2x - 2 + \ln(|x+1|) + K =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(|x+1|) + K$$

----

13) $I = \displaystyle\int \frac{2}{5+(x+2)^2}\,dx$;

Solução

considerando $\sqrt{5}\,u = x + 2 \Rightarrow \sqrt{5}\,du = dx$
substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int \frac{2\sqrt{5}}{5+(\sqrt{5}\,u)^2}\,du = \int \frac{2\sqrt{5}}{5+5\,u^2}\,du = \int \frac{2\sqrt{5}}{5\,(1+u^2)}\,du = \frac{2\sqrt{5}}{5}\int \frac{1}{1+u^2}\,du =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{arctg}(u) + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + K =$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}\,(x+2)}{5}\right) + K$$

----

14) $I = \displaystyle\int \frac{2}{x^2+2\,x+2}\,dx$;

Solução

$$x^2+2\,x+2 = x^2+2\,x+1+1 = (x+1)^2+1 \Rightarrow I = \int \frac{2}{1+(x+1)^2}\,dx$$

considerando $u = x + 1 \Rightarrow du = dx$
substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = 2\int \frac{1}{1+u^2}\,du \quad = \quad 2\text{arctg}(u) + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = 2\,\text{arctg}(x + 1) + K$

----

15) $I = \displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)^2}\,dx$;

Solução

considerando $u = \ln(x)$ => $du = \frac{1}{x}\,dx$ => $x\,du = dx$

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int \frac{x}{x\,u^2}\,du \quad = \int \frac{1}{u^2}\,du \quad = -\frac{1}{u} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = -\frac{1}{\ln(x)} + k$

----

16) $I = \displaystyle\int 6\,x^2\,\mathbf{e}^{(-x^3)}\,dx$;

Solução

considerando $u = -x^3$ => $du = -3\,x^2\,dx$ => $-\frac{1}{3}\,du = x^2\,dx$

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I \;=\; -6\int \frac{\mathbf{e}^{u}}{3}\,du \;=\; -2\int \mathbf{e}^{u}\,du \;=\; -2\,\mathbf{e}^{u} + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = -2\,\mathbf{e}^{(-x^{3})} + K$

----

17) $I = \displaystyle\int \frac{x^{4}}{\cos(1-x^{5})^{2}}\,dx$;

Solução

considerando $u = 1 - x^{5}$ => $du = -5\,x^{4}\,dx$ => $-\frac{1}{5}\,du = x^{4}\,dx$

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{\cos(u)^{2}}\,du \;=\; -\frac{1}{5}\int \sec(u)^{2}\,du \;=\; -\frac{1}{5}\,\operatorname{tg}(u) + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = -\frac{1}{5}\,\operatorname{tg}(1-x^{5}) + K$

----

18) $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$;

Solução

considerando u = $\sqrt{x} = x^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ => du = $\frac{1}{2} x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ dx = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ dx => 2 du = $\frac{1}{\sqrt{x}}$ dx

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = 2 \int \operatorname{sen}(u)\, du = -2 \cos(u) + k$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = -2 \cos(\sqrt{x}) + K$

----

19) $I = \int \frac{\ln(x)}{x\,(1 + \ln(x)^2)}\, dx$;

Solução

considerando u = ln(x) => du = $\frac{1}{x}$ dx => x du = dx

substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int \frac{x\,u}{x\,(1 + u^2)}\, du = \int \frac{u}{1 + u^2}\, du$$

considerando w = $1 + u^2$ => dw = 2u du => $\frac{1}{2}$ dw = u du

substituindo estes valores na última integral, temos:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{w}\, dw = \frac{1}{2} \ln(w) + K$$

como u = ln(x) => w = $1 + \ln(x)^2$

substituindo w na última expressão, temos: $I = \frac{1}{2} \ln(1 + \ln(x)^2) + K$

----

20) $I = \int \frac{\mathbf{e}^x}{1 + \mathbf{e}^{(2x)}}\, dx$;

Solução

$$I = \int \frac{\mathbf{e}^x}{1 + \mathbf{e}^{(2x)}}\, du = \int \frac{\mathbf{e}^x}{1 + (\mathbf{e}^x)^2}\, du$$

considerando $u = \mathbf{e}^x$ => $du = \mathbf{e}^x\, dx$
substituindo estes valores na integral, temos:

$$I = \int \frac{1}{1 + u^2}\, du = \text{arctg}(u) + K$$

substituindo u por seu valor original, temos: $I = \text{arctg}(\mathbf{e}^x) + K$

==
Jailson Marinho Cardoso
Aluno do curso de Matemática
Universidade Federal da Paraíba
Campus I
15/07/2000
==