Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2024
Professor: José Ricardo G. Mendonça

3ª Lista de Exercícios – Combinatória e Coeficientes Binomiais – 12 nov. 2024

Though this be madness, yet there is method in 't.
Polonius, in William Shakespeare, *Hamlet*, Ato 2, Cena 2

I. Permutações e combinações

1. Em cada um dos itens a seguir, determine:

   (a) O número de diagonais de um polígono convexo de n lados;

   (b) Quantos números ímpares de 5 algarismos diferentes existem;

   (c) O número de apostas distintas de 6 e de 7 números na loteria Mega-Sena;

   (d) De quantas maneiras distintas podemos preencher uma prateleira com n livros diferentes, cada um com k exemplares idênticos;

   (e) O número de maneiras de acomodar n pessoas em uma mesa redonda.

2. Quantos comitês podemos formar a partir de um grupo de 5 homens e 8 mulheres contendo (a) 2 homens e 4 mulheres, (b) 4 homens e 2 mulheres ou (c) um presidente (homem ou mulher), 2 homens e 3 mulheres?

3. (a) Quantos anagramas a palavra ***matematica*** possui?

   (b) Quantos anagramas da palavra ***exercicio*** possuem todas as vogais juntas e todas as consoantes juntas?

4. Duas retas paralelas são marcadas uma em n pontos e outra em k pontos distintos.

   (a) Quantos triângulos diferentes podemos formar usando esses pontos?

   (b) Quantos quadriláteros diferentes podemos formar usando esses pontos?

5. O teorema fundamental da aritmética garante que todo número inteiro $n \geqslant 2$ pode ser escrito na forma $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, onde os p_i são números primos e os expoentes $a_i \geqslant 1$. Por exemplo, $588 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^2$. Determine o número de divisores de n.

6. Quantas combinações de 4 objetos tomados de 3 em 3 com possíveis repetições existem? Rotulando os objetos de a, b, c e d, liste todas essas combinações.

7. (a) Quantas soluções inteiras não negativas existem para a equação $x + y + z = 16$?

   (b) Quantas soluções inteiras positivas existem para a inequação $x + y + z + t < 14$?

(*c*) Quantas soluções inteiras não negativas existem para a inequação $x + y + z \leqslant 21$?

Observação: números inteiros não negativos são maiores ou iguais a zero, enquanto números inteiros positivos são estritamente maiores que zero.

8. (*a*) Quantas sequências binárias de comprimento 8 possuem exatamente 4 zeros?

   (*b*) Quantas sequências binárias de comprimento 15 possuem mais zeros do que uns?

   (*c*) Quantas sequências binárias de comprimento n possuem exatamente $[n/2]$ zeros? *Notação*: $[\,x\,]$ denota a parte inteira de x.

9. (*a*) Mostre que p números zero e $q \geqslant p - 1$ números um podem ser concatenados sem que dois números zero fiquem juntos de $\binom{q+1}{p}$ maneiras diferentes;

   (*b*) Mostre que o número $f(n)$ de sequências binárias de comprimento n que não possuem dois números zero juntos é dado por $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ e $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ para $n \geqslant 2$;

   (*c*) Comparando os resultados dos itens (*a*) e (*b*), mostre que

$$f(n) = \sum_{p=0}^{[\frac{1}{2}(n+1)]} \binom{n-p+1}{p}$$

   e que a função $f(n)$ definida por esse somatório de fato observa as relações $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ e $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.[a]

II. Coeficientes binomiais[b]

1. Mostre que calcular 9^4 e 11^5 usando o teorema binomial é moleza. Generalize esses casos e encontre uma fórmula para expressões do tipo $(n \pm 1)^k$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$.

2. (*a*) Determine para que valores de k, $0 \leqslant k \leqslant n$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é máximo;

   (*b*) Determine o maior termo no desenvolvimento de $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^{56}$;

   (*c*) Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $\left(x^4 - \dfrac{1}{x}\right)^7$;

   (*d*) Determine o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1-x)^2(x+2)^n$.

---

[a] Os números $f(n)$ são conhecidos como *números de Fibonacci*, devido ao seu aparecimento no tratado *Liber Abaci*, de Leonardo de Pisa, o Fibonacci, em 1202, embora eles já fossem conhecidos em diversas culturas desde muito antes. Os primeiros números de Fibonacci são $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ etc. ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$), de forma que nosso $f(n) = F_{n+2}$. Os números de Fibonacci possuem inúmeras propriedades matemáticas, das mais mundanas às mais arcanas, e vêm fascinando gerações de curiosos há séculos. De fato, existe até uma respeitosa publicação dedicada aos números de Fibonacci, a *The Fibonacci Quarterly* (ISSN: 0015-0517). Uma discussão abrangente dos números de Fibonacci pode ser encontrada no excelente livro-texto de R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2a. ed. (Reading: Addison-Wesley, 1994), Seção 6.6.

[b] O estudante interessado em coeficientes e identidades binomiais deve consultar o livro-texto de R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2a. ed. (Reading: Addison-Wesley, 1994), Capítulo 5, ou, para um tratamento mais abrangente, J. Riordan, *Combinatorial Identities* (New York: Krieger, 1979).

3. Se $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}$, determine o valor de $a_0 + a_1 + \cdots + a_{2n}$.

4. Demonstre a identidade hexagonal
$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}.$$
Justifique o nome dado à identidade.

5. Use o teorema binomial (seja criativo) para calcular as seguintes somas (nos itens (c) e (d) as somas vão até o ponto em que seus termos começam a se anular):

   (a) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$;

   (b) $\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}^2$;

   (c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$;

   (d) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$.

6. Mostre que $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k} = \binom{k+n+1}{k+1}$. Essa identidade pode ser usada na dedução do número de k-combinações de n objetos com repetições.

7. Mostre que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ pelos seguintes métodos:

   (a) Mostre que $\binom{k+2}{3} - \binom{k}{3} = k^2$ e some sobre k;

   (b) Mostre que $\binom{k}{2} + \binom{k+1}{2} = k^2$ e some sobre k usando o resultado do exercício II.6.

8. Mostre por indução matemática em m que
$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\left(\frac{n}{2}-k\right) = \frac{m+1}{2}\binom{n}{m+1}.$$
Repare que sem o termo $(\frac{n}{2}-k)$ multiplicando o somando do lado esquerdo a soma resultante, que corresponde à soma parcial de uma linha do triângulo de Pascal, não pode ser obtida em forma fechada (compare com o exercício II.6) — espantoso, não?[c]

9. Mostre que $\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \binom{i}{j}\binom{i-j}{k-j}$ para todo $j \leqslant k \leqslant i$ e que, portanto,
$$\sum_{j\leqslant k\leqslant i}(-1)^k\binom{i}{k}\binom{k}{j} = 0.$$

10. Mostre que se $a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k$ para todo $n \geqslant 0$, então $b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}a_k$. Essa é uma *fórmula de inversão* envolvendo coeficientes binomiais. *Dica*: substitua a expressão para b_k na expressão para a_n (tomando cuidado para não se atrapalhar com os índices) e efetue a soma dos produtos obtidos com auxílio do resultado do exercício II.9.

---

[c] Graham, Knuth & Patashnik (v. nota (a)), p. 166, reparam que essa situação é matematicamente semelhante à das integrais $\int_{-\infty}^{a} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$ e $\int_{-\infty}^{a} e^{-x^2}\mathrm{d}x$: a primeira parece mais complicada mas, de fato, sua integração é muito simples, enquanto a segunda parece mais simples mas é impossível de se calcular de forma fechada.

III. *Divertissement*: Aproximações racionais

A formulação do princípio do pombal costuma ser atribuída ao matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859),[d] que em 1842 utilizou-o para mostrar que para qualquer número real r e qualquer número inteiro positivo N existem números inteiros p e q com $0 < q \leqslant N$ tais que $|\, r - p/q \,| < 1/qN$.[e] A aproximação de um número real r por um número racional com propriedades ótimas é conhecida como *aproximação diofantina*.[f] Em seus trabalhos posteriores, Dirichlet se referia ao princípio do pombal como *Schubfachprinzip*, ou "princípio da gaveta", em alemão. Vamos enunciar e demonstrar o teorema de Dirichlet:

Teorema (Dirichlet, 1842). Sejam r um número real e N um número inteiro positivo quaisquer. Então existem números inteiros p e q com $0 < q \leqslant N$ tais que $|\, r - p/q \,| < 1/qN$.

Demonstração. As partes fracionárias (resíduos mod 1) dos números rk, $0 \leqslant k \leqslant N$, formam um conjunto de $N+1$ números em $[0,1)$. Se dividirmos o intervalo $[0,1)$ em N subintervalos iguais, pelo princípio do pombal pelo menos um subintervalo vai conter dois resíduos diferentes, sejam eles $r_i = rk_i - n_i$ e $r_j = rk_j - n_j$ com $k_j > k_i$. Como os dois resíduos pertencem ao mesmo subintervalo, $|\,(rk_j - n_j) - (rk_i - n_i)\,| < 1/N$, e tomando $p = n_j - n_i$ e $q = k_j - k_i$ obtemos dois inteiros p e q com $0 \leqslant q \leqslant N$ tais que $|\, r - p/q \,| < 1/qN$. ■

O teorema de Dirichlet não fornece um método para a construção de aproximações diofantinas para um dado número real. O método clássico para a construção de tais aproximações é o das *frações contínuas*, que são frações (possivelmente infinitas) da forma

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}},$$

onde geralmente se assume que todos os elementos a_i, $i \neq 0$, são inteiros positivos.[g]

Embora o resultado de Dirichlet não pareça grande coisa à primeira vista, ele possui aplicações profundas em matemática e, portanto, em ciência da computação. Por exemplo, o resultado de Dirichlet permitiu a Joseph Liouville (1809–1882) provar pela primeira vez, em 1844, que *números transcendentais* existem e construir explicitamente uma família deles na forma

---

[d] Há evidências de que o princípio do pombal já fosse conhecido anteriormente, *cf.* B. Rittaud e A. Heeffer, "The pigeonhole principle, two centuries before", *The Mathematical Intelligencer*, v. 36, n. 2, pp. 27–29 (2014).

[e] G. Lejeune Dirichlet, "Recherches sur les formes quadratiques a coefficients et a indérteminées complexes", *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*, v. 24, pp. 291–371 (1842), em especial §13; G. Lejeune Dirichlet, "Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen", *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1842), pp. 93–95.

[f] A análise diofantina trata das soluções inteiras para equações algébricas e das aproximações racionais para números reais. O nome vem de Diofanto de Alexandria, matemático grego do século III que por volta do ano 250 d. C. escreveu o tratado *Aritmética* sobre questões dessa natureza.

[g] Exposições detalhadas sobre frações contínuas aparecem no excelente A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions* (New York: Dover, 1997) e R. L. Graham, D. E. Knuth e O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, 2a. ed. (Reading: Addison-Wesley, 1994), Seções 4.5 e 6.7.

$L_a = \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k!}$, com a um número inteiro qualquer diferente de 0 e ± 1.[h] Alguns anos mais tarde, em 1874, Georg Cantor (1845–1918) mostrou que os números transcendentais não são enumeráveis—isto é, que a maioria esmagadora dos números reais é transcendente!—, introduzindo, de passagem, um novo método para construir esses números.[i] Demonstrar que determinado número ou família de números é transcendental é uma questão difícil em matemática, embora tanto as técnicas desenvolvidas nas tentativas quanto os eventuais números encontrados possuam diversas aplicações teóricas e práticas em potencial.[j]

O teorema de Dirichlet encontra uma interessante aplicação em aritmética em ponto flutuante. Vamos primeiro estabelecer o seguinte fato: se $r = a/b$ é um número racional, então existe um intervalo aberto ao redor de r que não contém nenhuma aproximação racional para r com denominador igual a b. Pode-se ver isso reparando que se $p/q \neq r$, com p e $q \neq 0$ números inteiros, então $|qa - pb| \geqslant 1$, de onde segue que $|qr - p| \geqslant 1/b$. Dessa forma, enquanto o teorema de Dirichlet afirma que números *irracionais* podem ser aproximados por números racionais tão bem quanto se queira (basta tomar q suficientemente grande), o mesmo não pode ser feito para números *racionais*; obviamente não estamos considerando aproximar o número racional por ele próprio. Como os números em ponto flutuante usados para representar números reais nos computadores são necessariamente racionais (possuem um número finito de dígitos), esse é um assunto do maior interesse no design de hardware, por exemplo, *floating-point units* (FPUs), e de software. Por exemplo, se queremos representar no computador um número real r resultante de determinado cálculo, ele deve ser arredondado para um número em ponto flutuante de n bits. Tomando $q = 2^{n+1}$, estabelecemos um intervalo ao redor de r no qual nenhum número a meio caminho entre dois números com precisão de n bits pode estar. O design de um hardware ou algoritmo que efetua uma aproximação para r que caia *dentro* do intervalo excluído garante então que o valor aproximado obtido para r é o melhor valor representável pela máquina.

As relações do teorema de Dirichlet com outras áreas da matemática e da ciência da computação são discutidos nos livros de Mark Kac e Stanislaw M. Ulam, *Mathematics and Logic:*

---

[h] J. Liouville, "Mémoires et communications des membres et des correspondants de l'Académie" e "Nouvelle démonstration d'un théoréme sur les irrationalles algébriques, inséré dans le Compte rendu de la dernière séance", *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, v. XVIII, n. 20, pp. 883–885 e pp. 910–911 (1844).

[i] G. Cantor, "Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 77, pp. 258–262 (1874).

[j] Números reais são chamados de *algébricos* quando podem ser obtidos como solução de uma equação algébrica (uma equação polinomial) contendo apenas coeficientes racionais, caso contrário eles são chamados de *transcendentais*. O fato de um número ser algébrico nada tem a ver com o fato dele ser racional: $\sqrt{2}$, por exemplo, é irracional mas é algébrico, pois é raiz da equação polinomial $x^2 - 2 = 0$. Por outro lado, todo número transcendental é irracional, uma vez que todo número racional é obviamente algébrico (se $x = p/q \in \mathbb{Q}$ então ele é raiz da equação algébrica $qx - p = 0$). Os números π, a constante de Gelfond-Schneider $2^{\sqrt{2}}$ e a constante de Champernowne $0{,}123456789101112\ldots$, construída pela concatenação dos números inteiros, são exemplos de números transcendentais. Também sabemos que os números de Liouville generalizados $L_a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a^{k!}$, com a um número algébrico no intervalo $(-1, 1)$, são transcendentais. Por outro lado, até hoje não se sabe se a constante de Euler-Mascheroni, dada por $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \big) \simeq 0{,}57721\,56649\ldots$, é um número algébrico ou transcendental; na verdade, não se sabe sequer se γ é um número racional ou não!

Retrospect and Prospects (New York: Praeger, 1968), em particular na Seção 1.3, e Peter Markstein, *IA-64 and Elementary Functions: Speed and Precision* (Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2000), em particular na Seção 6.3. O livro de Kac e Ulam, dois gigantes da matemática pura e aplicada do século XX, oferece um interessantíssimo passeio pelos mais diversos assuntos matemáticos, do princípio do pombal ao teorema de Gödel, através de exemplos em lógica, teoria das probabilidades elementar, álgebra linear, cálculo numérico, teoria dos jogos e teoria da informação. O segundo texto, de uma série de manuais profissionais da Hewlett-Packard, detalha a implementação em nível de processador (no caso, o IA-64 da Intel, também conhecido como Itanium) de algoritmos matemáticos básicos como os de divisão e de extração de raízes quadradas em ponto flutuante. Um dos avanços mais interessantes obtidos recentemente nessa área foi a descoberta do *fast inverse square root*, um algoritmo capaz de calcular uma excelente aproximação para $1/\sqrt{x}$ de um número em ponto flutuante até quatro vezes mais rapidamente que uma simples divisão! Esse método veio a público pela primeira vez no código-fonte do jogo *Quake III Arena*, de 1999, como parte de algoritmos de iluminação e traçado de raios. O aluno interessado deve consultar o artigo da Wikipedia ⟨https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_inverse_square_root⟩ (acessado em 10 nov. 2024). Nesse artigo vocês poderão perceber como o conhecimento de geometria analítica elementar (o cálculo da norma de um vetor), cálculo diferencial (o método de Newton para extrair raizes quadradas), matemática discreta (representação de números) e um pouco de *hacking* são aspectos igualmente importantes na prática de programação.

⋆ — ⋆ — ⋆