O PRINCÍPIO DO POMBAL

Teo. Se um conjunto de n elementos é dividido em $k < n$ subconjuntos, então pelo menos um subconjunto contém mais de um elemento.

Dem.: Seja $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ uma partição de S com $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $S_i \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Vamos supor que $|S_i| \leq 1$, $i = 1, \ldots, k$; daí

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_k| \leq$$

$$\leq 1 + 1 + \ldots + 1 = k,$$

uma contradição, pois $k < n$ e $|S| = n$.

Portanto $|S_i| > 1$ para pelo menos algum i.

Ex.: Em uma sala com 27 estudantes, pelo menos dois possuem a terceira letra do sobrenome igual.

Ex.: Na cidade de São Paulo existem pelo menos 20 pessoas com exatamente o mesmo número de fios de cabelo na cabeça.

cabeça:  $\sim$ hemisfério de raio $\sim$ 15cm

$\Rightarrow$ área $\sim 2\pi r^2 \sim 1500\ cm^2$

supondo $\sim$ 100 fios de cabelo por cm^2 $\Rightarrow$

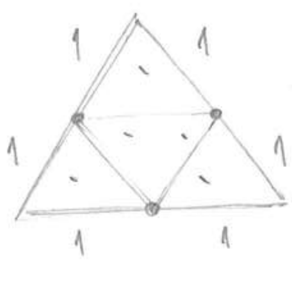
$\Rightarrow$ cabeça $\sim$ 200 mil fios de cabelo

como SP tem aprox. 10 milhões habit...

Teo.: (Princípio do pombal generalizado): Sejam m e n inteiros positivos. Se mn objetos são distribuídos em n conjuntos então pelo menos um conjunto deve conter pelo menos $m+1$ objetos.

Ex.: 5 pontos são escolhidos aleatoriamente no interior de um triângulo equilátero de lados 2 unidades. Então pelo menos um par de pontos está separado por menos de 1 unidade.

O triângulo equilátero pode ser dividido em 4 triângulos equiláteros de lado 1 unidade. Como temos 5 pontos para 4 triângulos, segue o resultado.



Ex.: Em todo cj. de 7 números inteiros distintos existem 2 números x e y tal que $x+y$ ou $x-y$ é divisível por 10.

Seja $X = \{x_1, \dots, x_7\}$ um cj. de

7 inteiros distintos e seja $r_i = x_i \bmod 10$

e seja $H_1 = \{x_i : r_i = 0\}$, $H_2 = \{x_i : r_i = 5\}$

$H_3 = \{x_i : r_i = 1 \text{ ou } 9\}$, $H_4 = \{x_i : r_i = 2 \text{ ou } 8\}$

$H_5 = \{x_i : r_i = 3 \text{ ou } 7\}$, $H_6 = \{x_i : r_i = 4 \text{ ou } 6\}$

Temos 6 cjs. H para 7 nrs. x_i, então pelo menos 2 x_i pertencem ao mesmo cj. H. Se eles pertencem a H_1 ou H_2, então $x-y$ e $x+y$ são div. por 10, se eles pertencem aos outros H então ou $x-y$ ou $x+y$ é div. por 10 (mas não ambos).

— + —

O PRINCÍPIO DA INCLUSÃO - EXCLUSÃO

Suponha que temos N objetos e que cada objeto pode possuir uma ou mais das propriedades $a_1, \ldots, a_r$. Denotando o nr. de objetos com as propriedades $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ por $N(a_{i_1} \ldots a_{i_k})$, então o nr. de objetos que não possui nenhuma das propriedades é dado por

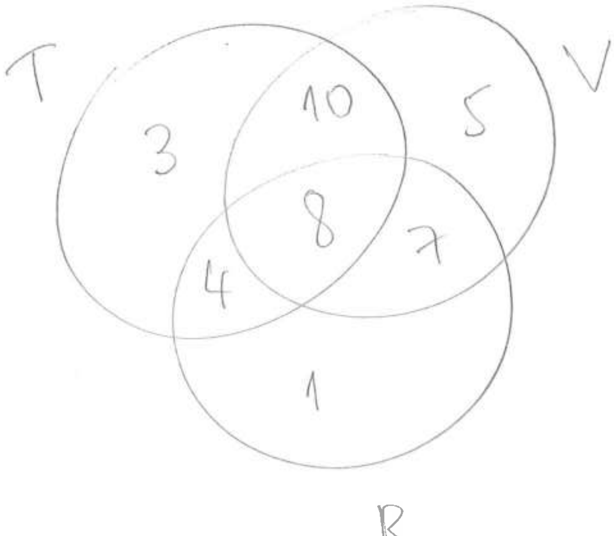
$$N_0 = N - \sum_i N(a_i) + \sum_{i<j} N(a_i a_j) - \cdots + (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} N(a_{i_1} \ldots a_{i_k}) + \cdots + (-1)^r N(a_1 \ldots a_r).$$

Esse é o princípio da inclusão-exclusão.

Dem. Suponha que um obj. não possui nenhuma das propriedades. Então o lado dir. conta esse objeto uma vez no termo N. Por outro lado, suponha que um objeto possua $m \geq 1$ propriedades. Esse objeto é contado uma vez no termo N, m vezes no termo $\sum N(a_i)$, $\binom{m}{2}$ vezes no termo $\sum_{i<j} N(a_i a_j)$ e assim sucessivamente, contado $\binom{m}{k}$ vezes no termo $\sum_{i_1<\dots<i_k} N(a_{i_1} \dots a_{i_k})$. A contribuição total desse objeto para o lado direito da igualdade é dado por

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = 0 \quad , \qquad \underline{\text{QED}}.$$

<u>Ex.</u>: Uma coleção de 50 pedras possui 25 pedras transparentes (T), 30 pedras vermelhas (V), 20 pedras redondas (R), 18 pedras verm. transp., 12 pedras redondas transp., 15 pedras redondas verm. e 8 pedras verm. redondas transp. Quantas pedras não são nem redondas, nem vermelhas e nem transparentes?



$\therefore$ $50 - 38 = 12$ pedras não são nem R, nem V, nem T.

Em termos do princípio de inclusão - exclusão podemos escrever

$$N_0 = N - N(T) - N(R) - N(V) + N(RT) + N(VT) + N(RV) - N(RTV) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_0 = 50 - 25 - 20 - 30 + 12 + 18 + 15 - 8 = \underline{\underline{12}}.$$

Forma simbólica

Podemos lembrar do princ. inclusão - exclusão pela expressão

$$N(a_1' a_2' \ldots a_r') = N\left[(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_r)\right]$$

onde a_1' significa "não possui a propriedade a_1" e a expressão deve ser interpretada como

$$N[(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_r)] =$$

$$= N[1-a_1-a_2-\dots-a_r+a_1a_2+\dots+a_{r-1}a_r$$

$$+\dots(-1)^r a_1\dots a_r] =$$

$$= N - N(a_1) - \dots - N(a_r) + N(a_1a_2) + \dots +$$

$$+ N(a_{r-1}a_r) + \dots + (-1)^r N(a_1\dots a_r).$$

Também podemos considerar o nr. de objetos que possuem as propriedades $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ e não possuem as propriedades $a_{j_1}, \dots, a_{j_r}$ $(r+s=k)$ na forma

$$N(a_{i_1}\dots a_{i_s}\, a'_{j_1}\dots a'_{j_r}) =$$

$$= N[a_{i_1}\dots a_{i_s}(1-a_{j_1})\dots(1-a_{j_r})].$$

Por exemplo, se queremos o nr. de objetos <u>com</u> as propriedades a_1 e a_3 e <u>sem</u> as propriedades a_2 e a_4 calculamos

$$N(a_1 a'_2 a_3 a'_4) = N[a_1(1-a_2)a_3(1-a_4)] =$$

$$= N(a_1a_3) - N(a_1a_2a_3) - N(a_1a_3a_4)$$

$$+ N(a_1a_2a_3a_4).$$

<u>Ex.</u> Encontre o nr. de soluções inteiras da eq. $x+y+z+w=17$ onde $1\leq x\leq 3$, $2\leq y\leq 4$, $3\leq z\leq 5$ e $4\leq w\leq 6$.

Fazendo $x = a+1$, $y = b+2$, $z = c+3$ e

$w = 4+d$, precisamos resolver a equação

$$a+b+c+d = 7, \quad 0 \leq a,b,c,d \leq 2$$

Seja X = cj. de soluções inteiras da eq.,

A = cj. soluções $a \geq 3$, B = cj. sol. $b \geq 3$,

C = cj. sol. $c \geq 3$ e D = cj. sol. $d \geq 3$.

Sabemos que $N(X) = \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$

isto é, $N(X) = 120$, enquanto

$$N(A) = N(B) = N(C) = N(D) = \binom{4+4-1}{4}$$

$$= \binom{7}{4} = 35 \quad (\text{por quê?});$$

da mesma forma

$$N(A \cap B) = N(A \cap C) = \cdots = N(C \cap D) = \binom{4}{3}$$

e $N(A \cap B \cap C)$ etc. $= 0$, porque não

existem soluções de $a+b+c+d = 7$

com 3 vars. ≥ 3.

Portanto o nr. de soluções de $x+y+z+w=17$ com as condições dadas para x, y, z e w é

$$120 - 4\times 35 + 6\times 4 = 4.$$

Exiba essas soluções!

Ex. Calcule o nr. de números primos entre 1 e n.

Se $n \geqslant 4$ é um número composto, podemos escrever $n = ab$ com $1 < a \leqslant b$, e daí $a^2 \leqslant n \Rightarrow a \leqslant \sqrt{n}$, de forma que n deve ser divisível por um nr. primo $p \leqslant \sqrt{n}$. Assim, podemos contar o nr. de números primos entre 1 e n eliminando todos os múltiplos dos nrs. primos $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$ (crivo de Eratóstenes)

<u>Ex.</u> Calcule o nr. de números primos menores ou iguais a 120.

$10 \leq \sqrt{120} < 11 \Rightarrow p = 2, 3, 5, 7 \leq \sqrt{120}$

Precisamos testar/contar apenas as divisibilidades por 2, 3, 5 e 7:

$N_2 = 120/2 = 60$, $N_3 = 120/3 = 40$,

$N_5 = 120/5 = 24$, $N_7 = \underbrace{120/7}_{\text{inteira}} = 17$

Temos também

$N_{2,3} = 120/6 = 20$, $N_{2,5} = 120/10 = 12$,

$N_{2,7} = 120/14 = 8$, $N_{3,5} = 120/15 = 8$,

$N_{3,7} = 120/21 = 5$, $N_{5,7} = 120/35 = 3$

e

$N_{2,3,5} = 120/30 = 4$, $N_{2,3,7} = 120/42 = 2$,

$N_{2,5,7} = 120/70 = 1$, $N_{3,5,7} = 120/105 = 1$,

$N_{2,3,5,7} = 120/210 = 0$.

Dessa forma, o nr. de números que não são divisíveis por nenhuma combinação de primos $p_1^{e_1} p_2^{e_2} p_3^{e_3} p_4^{e_4}$ com $e_1, e_2, e_3, e_4 = 0, 1$ é dado por

$$N_0 = 120 - (60 + 40 + 24 + 17) +$$
$$+ (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) +$$
$$- (4 + 2 + 1 + 1) + 0 = 27$$

Falta no entanto incluir os números primos eles próprios e excluir o nr. 1, que não é primo, e daí ficamos com

$$N_p = 27 + 4 - 1 = 30$$

nrs. primos entre 1 e 120. (Exiba esses números!).

— + —