Lista de exercícios- Matrizes Vetores e Geometria Analítica
Prof. Dr. Helton Hideraldo Bíscaro

1. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se a aplicação $<,>$ é um produto interno no espaço vetorial V.

   (a) $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2)$ e $< u, v >= 2x_1x_2 + 4y_1y_2$;

   (b) $V = \mathbb{R}^3$, $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2)$ e $< u, v >= x_1x_2 + y_1y_2$;

   (c) $V = \mathbb{R}^4$, $u = (x_1, y_1, z_1, t_1), v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ e $< u, v >= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$;

2. Seja $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine $< u, v >$, $\|u\|, \|v\|$ e o ângulo entre u e v para $u = (1, 2, 1)$e $v = (3, 4, 2)$. Verifique também se os vetores $u_1 = (0, 1, 1)$e $v_1 = (1, 1, 0)$ são ortogonais.

3. Prove que em qualquer espaço vetorial, os vetores $\|u\| v + \|v\| u$ e $\|u\| v - \|v\| u$ são ortogonais.

4. Mostre que a desigualdade de Cauchy-Schwarz se reduz a uma igualdade desde que os vetores u e v sejam LD.

5. (Teorema de Pitágoras Generalizado) Mostre que em qualquer espaço vetorial com produto interno vale, para quaisquer vetores u e v, a igualdade:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| \cos(\theta)$$

   onde θ é o ângulo entre os vetores u e v.