ACH2053 – Introdução à Estatística

Aula 03: Probabilidade Condicional

Valdinei Freire

valdinei.freire@usp.br

http://www.each.usp.br/valdinei

Escola de Artes, Ciências e Humanidades - USP

2025

Livros Textos

1. DEGROOT, M.H., SCHERVISH, M.J. Probability and Statistics, Addison Wesley, 4th edition (2011). **Capítulo 2**
2. DEVORE, J.L. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências, Pioneira Thompson Learning, 8ª edição, 2016. **Capítulo 2, seções 2.4, 2.5**

Probabilidade Condicional

Suponha que aprendemos que um evento B ocorreu e que desejamos computar a probabilidade de um outro evento A levando em conta que sabemos que o evento B ocorreu. A nova probabilidade do evento A é chamada de probabilidade condicional do evento A dado que o evento B ocorreu e é denotada $\Pr(A|B)$. Se $\Pr(B) > 0$, temos que:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

A probabilidade condicional $\Pr(A|B)$ não é definida se $\Pr(B) = 0$.

1. Considere o experimento de lançar um dado com 6 faces e defina os seguintes eventos: (*i*) evento $A = \{2\}$ e (*ii*) evento B que é a ocorrência de números pares. Calcule: $\Pr(A)$, $\Pr(B)$, $\Pr(A|B)$ e $\Pr(B|A)$

2. Considere o experimento de retirar 5 cartas de um baralho e defina os seguintes eventos: (*i*) evento A, no qual todas as 5 cartas são de copas e (*ii*) evento B, no qual pelo menos uma carta é de copas. Calcule: $\Pr(A)$, $\Pr(B)$, $\Pr(B|A)$ e $\Pr(A|B)$

3. Considere o experimento no qual dois dados são arremessados. Foi observado que a soma dos dois dados é ímpar. Qual é a probabilidade de que a soma seja menor que 8?

Regra da Multiplicação para Probabilidades Condicionais

Suponha que A e B são eventos tal que $\Pr(A \cap B) > 0$. Então:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B|A) = \Pr(B)\Pr(A|B)$$

Suponha que A, B e X são eventos tal que $\Pr(A \cap B|X) > 0$. Então:

$$\Pr(A \cap B|X) = \Pr(A|X)\Pr(B|A \cap X) = \Pr(B|X)\Pr(A|B \cap X)$$

Suponha que A, B e C são eventos tal que $\Pr(A \cap B \cap C) > 0$. Então:

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A)\Pr(B|A)\Pr(C|A \cap B)$$

Regra da Multiplicação para Probabilidades Condicionais

Suponha que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos tal que $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Então:

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \Pr(A_1)\Pr(A_2|A_1)\Pr(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots \\ \Pr(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).\end{aligned}$$

Suponha que $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ são eventos tais que $\Pr(B) > 0$ e $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}|B) > 0$. Então:

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|B) = \Pr(A_1|B)\Pr(A_2|A_1 \cap B)\ldots \\ \Pr(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B).\end{aligned}$$

Exercícios

4. Considere o experimento de retirar 5 cartas de um baralho. Calcule a probabilidade de todas as 5 cartas serem vermelhas.

5. Suponha que 3 cartas são retiradas de um baralho, uma por vez. Calcule a probabilidade que a primeira é vermelha, a segunda é preta, e a terceira é de paus.

Lei da Probabilidade Total

Considere o evento B e seu complemento B^c. Para qualquer evento A, é verdade que:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

Como $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são disjuntos, tem-se que:

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B^c).$$

Supondo que $\Pr(B) > 0$ e $\Pr(B^c) > 0$, pode-se reescrever como:

$$\Pr(A) = \Pr(A|B)\Pr(B) + \Pr(A|B^c)\Pr(B^c).$$

Lei da Probabilidade Total

Seja Ω o espaço amostral de algum experimento, e considere k eventos **disjuntos** $B_1, B_2, \ldots, B_k$ em Ω tal que $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$. Então, esses eventos formam uma partição de Ω.

Suponha que os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ formam uma partição do espaço amostral Ω e que $\Pr(B_j) > 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Então, para todo evento A em Ω,

$$\Pr(A) = \sum_{j=1}^{k} \Pr(B_j) \Pr(A|B_j) = \sum_{j=1}^{k} \Pr(A \cap B_j),$$

e para todo C tal que $\Pr(C) > 0$ e que $\Pr(B_j|C) > 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$, temos:

$$\Pr(A|C) = \sum_{j=1}^{k} \Pr(B_j|C) \Pr(A|B_j \cap C) = \sum_{j=1}^{k} \Pr(A \cap B_j|C).$$

Exercícios

7. Um piloto de fórmula 1 tem 0,5 de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 0,25. Se o serviço de Meteorologia estimar em 0,3 aprobabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida?

8. Suponha que 4 cartas são retiradas de um baralho, uma por vez. Calcule a probabilidade que a primeira é vermelha, a segunda é preta, a terceira é de paus e a quarta é um 5.

Eventos Independentes

Se saber que o evento B ocorreu não altera a probabilidade do evento A ocorrer, então diremos que A e B são independentes.
Dois eventos A e B são independentes se:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B).$$

Além disso, se $\Pr(A) > 0$ e $\Pr(B) > 0$, A e B são independentes se e somente se $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ e $\Pr(B|A) = \Pr(B)$.

Eventos Independentes

Se dois eventos A e B são independentes, então:

- os eventos A e B^c também são independentes,
- os eventos A^c e B também são independentes, e
- os eventos A^c e B^c também são independentes.

Exercícios

9. Considere o experimento de lançar um dado com 6 faces e defina os seguintes eventos: (*i*) evento $A = \{2\}$, (*ii*) evento B que é a ocorrência de números pares e (*iii*) evento C que é a ocorrência de números menores ou iguais a 2. Os eventos A e B são independentes? Os eventos A e C são independentes? Os eventos B e C são independentes?

10. Suponha que 4 cartas são retiradas de um baralho, uma por vez. Considere o evento T que é a ocorrência que a primeira é vermelha, a segunda é preta, e a terceira é de paus. Considere o evento V que é a ocorrência que a quarta é um 5. Os eventos T e V são independentes?

Eventos Mutuamente Independentes

Os k eventos $A_1, \ldots, A_k$ são (mutuamente) independentes se, para cada subconjunto $A_{i_1}, \ldots, A_{i_j}$ de j desses eventos ($j = 2, 3, \ldots, k$),

$$\Pr(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \Pr(A_{i_1}) \ldots \Pr(A_{i_j}).$$

Seja k eventos $A_1, \ldots, A_k$ tal que $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) > 0$. Então $A_1, \ldots, A_k$ são independentes se e somente se, para todos dois subconjuntos disjuntos $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ e $\{j_1, j_2, \ldots, j_\ell\}$ de $\{1, 2, \ldots, k\}$, então

$$\Pr(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m} | A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_\ell}) = \Pr(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m}).$$

Independência Condicional

Os k eventos $A_1, \ldots, A_k$ são condicionalmente independentes dado B se, para cada subconjunto $A_{i_1}, \ldots, A_{i_j}$ de j desses eventos ($j = 2, 3, \ldots, k$),

$$\Pr(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j} | B) = \Pr(A_{i_1} | B) \ldots \Pr(A_{i_j} | B).$$

Suponha que A_1, A_2, e B são eventos tal que $\Pr(A_1 \cap B) > 0$. Então A_1 e A_2 são condicionalmente independentes dado B se e somente se $\Pr(A_2 | A_1 \cap B) = \Pr(A_2 | B)$.

Exercícios

11. Considere o experimento de retirar 5 cartas de um baralho. Calcule a probabilidade de todas as 5 cartas serem vermelhas dado que os valores das cartas foram retiradas na seguinte ordem: 2, 4, 6, A, K.

12. Considere o experimento de retirar 5 cartas de um baralho e defina os seguintes eventos: (*i*) evento A que é a ocorrência da primeira carta retirada ser de copas, (*ii*) evento B que é a ocorrência da segunda carta retirada ser de copas, (*iii*) evento C que é a ocorrência da terceira carta retirada ser de copas, e (*iv*) evento D que é a ocorrência dos valores das cartas serem retirados na seguinte ordem: A, 4, A, 4, K.
    a) Os eventos A e B são independentes?
    b) Os eventos A e C são independentes?
    c) Repita a) e b) condicionados em D?

Teorema de Bayes

Seja $B_1, \ldots, B_k$ eventos que formam uma partição do espaço amostral S tal que $\Pr(B_i) > 0$ para $j = 1, \ldots, k$ e seja A um evento tal que $\Pr(A) > 0$. Então, para $i = 1, \ldots, k$,

$$\Pr(B_i|A) = \frac{\Pr(B_i)\Pr(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k} \Pr(B_j)\Pr(A|B_j)} = \frac{\Pr(B_i)\Pr(A|B_i)}{\Pr(A)}.$$

Seja C um evento tal que $\Pr(B_i \cap C) > 0$ para $j = 1, \ldots, k$, $\Pr(A \cap C) > 0$ e $\Pr(C) > 0$. Então, para $i = 1, \ldots, k$,

$$\Pr(B_i|A \cap C) = \frac{\Pr(B_i|C)\Pr(A|B_i \cap C)}{\Pr(A|C)}.$$

Teorema de Bayes

Usualmente as probabilidades $\Pr(B_i)$ são chamadas probabilidades *a priori*, pois são as probabilidades dos eventos antes de saber que o evento A aconteceu.

As probabilidades $\Pr(B_i|A)$ são chamas probabilidades *a posteriori*, pois são as probabilidades dos eventos depois de saber que o evento A aconteceu.

Exercícios

13. Considere que ao escolher um aluno do segundo ano na EACH, há uma chance de 0,8 desse aluno saber Cálculo II. Se um aluno sabe Cálculo II, existe uma chance de 0,9 dele ser aprovado em Estatística, enquanto se um aluno não sabe Cálculo II, existe uma chance de 0,8 dele ser reprovado em Estatística. Considere um aluno reprovado em Estatística, qual é a chance dele saber Cálculo II?
14. Repita o item anterior, mas agora considere que se um aluno sabe Cálculo II, existe uma chance de 0,5 dele ser aprovado em Estatística.
15. Há três portas, uma contém um carro (com probabilidade igual). Eu escolho uma porta às cegas, digamos a primeira porta. Monty Hall abre uma das outras portas, digamos a segunda. Se lhe for dada a chance de mudança, você muda para a terceira porta?