**Universidade de São Paulo**
**Escola de Artes, Ciências e Humanidades**

**ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2023**
**Professor: José Ricardo G. Mendonça**

**Gabarito — 1ª Prova — Data: 13 nov. 2023**

*Na resolução dos problemas, explique seu raciocínio e o que você está fazendo de forma que eu possa acompanhá-lo(a). Soluções "mágicas" ou "geniais" não serão aceitas sem explicações.*

## Problemas

1. [2 pontos] O conectivo lógico ***nor*** ("not-or") é definido pela relação $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$.

   ($a$) Reescreva $\neg p$, $p \wedge q$ e $p \vee q$ em termos do conectivo lógico ***nor***;

   O conectivo ***nor*** necessita de dois argumentos. Assim, para reescrever $\neg p$ em termos de ***nor*** precisamos reescrever $p$ (ou $\neg p$) como uma combinação de duas cláusulas. Como o conectivo ***nor*** envolve um ***ou*** lógico, tentamos

   $$p \equiv p \vee p,$$

   que é uma equivalência óbvia. Daí obtemos, pela própria definição de ***nor***, que

   $$\neg p \equiv \neg(p \vee p) \equiv p \downarrow p.$$

   Para reescrever $p \wedge q$ podemos usar a lei de De Morgan $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg p \downarrow \neg q$, pela definição do conectivo ***nor***. Mas já sabemos que para negar uma cláusula basta fazer o ***nor*** da cláusula com ela mesma, de forma que

   $$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg p \downarrow \neg q \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q).$$

   Finalmente, para reescrever $p \vee q$ podemos usar uma dupla negação para obter

   $$p \vee q \equiv \neg\neg(p \vee q) \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q).$$

   ($b$) Reescreva $p \to q$ e $p \leftrightarrow q$ em termos do conectivo lógico ***nor***.

   Sabemos que $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Usando os resultados anteriores para $\neg p$ e $p \vee q$, vemos que podemos escrever $p \to q$ em termos do conectivo ***nor*** como

   $$p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv (p \downarrow p) \vee q = ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q).$$

Já a relação de equivalência $p \leftrightarrow q$ pode ser escrita como $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, e como $(p \wedge q) \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ e $(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg(p \vee q) \equiv (p \downarrow q)$, obtemos

$$p \leftrightarrow q \equiv \big[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)\big] \vee (p \downarrow q).$$

Agora precisamos apenas nos livrar do ***ou*** lógico para finalmente obter

$$p \leftrightarrow q \equiv \big[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)\big] \downarrow \big[(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)\big].$$

Outra forma de escrever a relação de equivalência é $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, que após algumas simplificações produz uma expressão similar à que obtivemos.

2. [2 pontos] Seja $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ a diferença simétrica entre os conjuntos $A$ e $B$. Dados três subconjuntos $A$, $B$ e $C$ quaisquer de um mesmo conjunto universo, mostre que:

   $(a)$ $A \triangle B = \overline{A} \triangle \overline{B}$, onde $\overline{X} = \{x \colon x \notin X\}$ denota o complemento de $X$;

   Lembrando que $A \setminus B = \{x \colon x \in A, x \notin B\} = \{x \colon x \in A, x \in \overline{B}\} = A \cap \overline{B}$ temos

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

   Uma vez que $\overline{\overline{X}} = X$, podemos escrever o lado direito da expressão acima (apenas trocando alguns termos de posição) como

$$A \triangle B = (\overline{\overline{A}} \cap \overline{B}) \cup (\overline{\overline{B}} \cap \overline{A}) = (\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}) \cup (\overline{B} \cap \overline{\overline{A}}) = (\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) = \overline{A} \triangle \overline{B},$$

   como queríamos mostrar.

   Uma maneira inteiramente equivalente de demonstrar essa igualdade é reparar que $A \setminus B = \{x \colon x \in A, x \notin B\} = \{x \colon x \notin \overline{A}, x \in \overline{B}\} = \overline{B} \setminus \overline{A}$, e novamente obtemos $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (\overline{B} \setminus \overline{A}) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = \overline{B} \triangle \overline{A} = \overline{A} \triangle \overline{B}$.

   $(b)$ $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

   Podemos mostrar a identidade avaliando cada um de seus lados e mostrando que eles são iguais. Do lado esquerdo temos, aplicando a lei distributiva, que

$$(i)\ A \cap (B \triangle C) = A \cap [(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})] = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C).$$

   Já do lado direito temos que

$$(ii)\ (A \cap B) \triangle (A \cap C) = [(A \cap B) \cap (\overline{A \cap C})] \cup [(A \cap C) \cap (\overline{A \cap B})].$$

   Aplicando a lei de De Morgan aos termos $\overline{A \cap B}$ e $\overline{A \cap C}$ e a lei distributiva obtemos

$$(ii)\ (A \cap B) \triangle (A \cap C) = (A \cap \overline{A} \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{A} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C),$$

   e como $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $X \cap \varnothing = \varnothing$ e $X \cup \varnothing = X$ para qualquer conjunto $X$ obtemos

$$(ii)\ (A \cap B) \triangle (A \cap C) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C),$$

   de forma que, de fato, $(i) = (ii)$, como queríamos mostrar.

3. [2 pontos] Determine o valor verdade e estabeleça a negação das seguintes proposições:

   ($a$) $(\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x+y=z)$.

   A proposição pode ser lida como "exite um $z \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $y \in \mathbb{R}$ vale $z = x+y$" e é, obviamente, uma proposição ***falsa***: não existe nenhum número real $z$ que seja a "soma universal" de quaisquer dois outros números reais! A negação dessa proposição é dada por

   $$(\forall z \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x+y \neq z),$$

   que é ***verdadeira***: de fato, para todo $z$ dado, existem infinitos pares de números reais $x$ e $y$ para os quais $x+y \neq z$—precisamente, todos os pontos do plano que não pertencem à reta $x+y=z$.

   ($b$) $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \in \mathbb{R}^*)(xy=1)$, onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   A proposição pode ser lida como "para todo $x \in \mathbb{R}$ diferente de zero existe um $y \in \mathbb{R}$ diferente de zero tal que $xy = 1$" e é ***verdadeira***: $y$ nada mais é que o inverso multiplicativo de $x$ e sua existência é um dos axiomas que definem o corpo dos números reais.* A negação dessa proposição é dada por

   $$(\exists x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*)(xy \neq 1),$$

   que naturalmente é ***falsa***: o ponto $y = 1/x$ fornece um contra-exemplo.

4. [2 pontos] Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ um conjunto formado por números inteiros distintos $1 \leqslant a_i \leqslant 8$. Mostre que as somas dos elementos de cada um dos subconjuntos não-vazios de $A$ não podem ser todas diferentes entre si.

   O conjunto $A$ possui $\binom{5}{1} + \cdots + \binom{5}{5} = 2^5 - 1 = 31$ subconjuntos não-vazios. Os possíveis valores para a soma dos elementos desses subconjuntos estão necessariamente contidos entre o valor mínimo 1, caso o subconjunto seja $\{1\}$, e máximo 30, caso o subconjunto seja $\{4,5,6,7,8\}$. Assim, temos no máximo 30 possíveis valores distintos para as somas dos elementos de 31 subconjuntos, de maneira que necessariamente pelo menos dois sub-

*Um *anel* é um conjunto $R$ munido de duas operações binárias, normalmente denominadas "adição", denotada por $a+b$ e para a qual vale $a+b=b+a$, e "multiplicação", denotada por $a \cdot b$, não necessariamente igual a $b \cdot a$, com a multiplicação distributiva sobre a adição, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, que combinam $a, b \in R$ num terceiro elemento de $R$ de maneira única. O anel é dito *comutativo* quando $a \cdot b = b \cdot a$. Um *corpo* é um anel comutativo com unidade (o elemento neutro multiplicativo "1" tal que $1 \cdot a = a$) no qual todo elemento diferente de "0" (o elemento neutro aditivo, $a+0=a$) possui um elemento inverso com relação à multiplicação. Exemplos bem conhecidos são os corpos dos números reais $\mathbb{R}$, que é um *corpo ordenado*, para o qual é possível definir uma *relação de ordem* $x<y$ compatível com as operações de adição e multiplicação, e dos números complexos $\mathbb{C}$, que não é ordenado.

conjuntos possuirão a mesma soma de seus elementos. Por exemplo, se $A = \{1,3,5,6,8\}$, os subconjuntos $\{6,8\}$, $\{3,5,6\}$ e $\{1,5,8\}$ possuem todos a mesma soma.[†]

5. [2 pontos] Quantas soluções inteiras positivas existem para a inequação $x+y+z+t \leqslant 25$ satisfazendo as condições $x > 4$ e $t \geqslant 5$?

   Estamos em busca de soluções inteiras positivas $x, y, z, t \geqslant 1$ para a inequação dada. Sabemos resolver equações desse tipo quando $x, y, z, t \geqslant 0$. Assim, vamos realizar as mudanças de variáveis $x = a+5$, $y = b+5$, $z = c+1$ e $t = d+1$, com $a, b, c, d \geqslant 0$, de maneira que a inequação do problema se torna

$$(a+5)+(b+5)+(c+1)+(d+1) \leqslant 25 \quad \Rightarrow \quad a+b+c+d \leqslant 13.$$

   Essa última inequação corresponde a 14 equações $a+b+c+d = k$ com $k = 0, 1, \ldots, 13$, cada uma com $\binom{4+k-1}{4-1}$ soluções, de maneira que o número total de soluções vale

$$\sum_{k=0}^{13} \binom{4+k-1}{4-1} = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \cdots + \binom{16}{3}.$$

   Podemos efetuar essa soma para obter 2380 ou resolver o problema de outra forma. Introduzindo a variável auxiliar $e \geqslant 0$, podemos escrever a inequação na forma

$$a+b+c+d = 13-e \quad \Rightarrow \quad a+b+c+d+e = 13,$$

   que possui $\binom{5+13-1}{5-1} = \binom{17}{4} = 2380$ soluções inteiras não-negativas, que é o número de soluções inteiras da inequação original.

   Repare que a resolução desse problema de duas maneiras distintas nos permitiu obter, como corolário, a identidade

$$\sum_{k=0}^{\ell} \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+\ell}{n}.$$

Boa prova!

[†]Este problema possui relação com o "problema da soma dos subconjuntos": dado um conjunto finito $A \subset \mathbb{Z}$, decidir se existe um subconjunto não-vazio de $A$ cuja soma dos elementos vale $k$ para um dado $k \in \mathbb{Z}$. Esse problema é NP-completo, o que significa que não se conhece um algoritmo que possa sempre fornecer uma resposta "sim" ou "não" para a pergunta em tempo polinomial no tamanho de $A$. O problema da soma dos subconjuntos é equivalente a vários outros problemas computacionais de enorme importância em teoria e aplicações da computação. Veja R. M. Karp, "Reducibility among combinatorial problems", *in*: R. E. Miller, J. W. Thatcher e J. D. Bohlinger (eds.), *Complexity of Computer Computations* (Plenum, New York, 1972), p. 85–103.