

Lista de Exercícios - P1

Valdinei Freire

18 de Março de 2025

1 Probabilidade Condicional

Suponha que aprendemos que um evento B ocorreu e que desejamos computar a probabilidade de um outro evento A levando em conta que sabemos que o evento B ocorreu. A nova probabilidade do evento A é chamada de probabilidade condicional do evento A dado que o evento B ocorreu e é denotada $\Pr(A|B)$. Se $\Pr(B) > 0$, temos que:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

A probabilidade condicional $\Pr(A|B)$ não é definida se $\Pr(B) = 0$.

1. Considere o experimento de lançar um dado com 6 faces e defina os seguintes eventos: (i) evento $A = \{2\}$ e (ii) evento B que é a ocorrência de números pares. Calcule: $\Pr(A)$, $\Pr(B)$, $\Pr(A|B)$ e $\Pr(B|A)$

$$\Pr(A) = \frac{1}{6}$$

$$\Pr(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr(A|B) = \frac{1}{3}$$

$$\Pr(B|A) = 1$$

2. Considere o experimento de retirar 5 cartas de um baralho e defina os seguintes eventos: (i) evento A , no qual todas as 5 cartas são de copas e (ii) evento B , no qual pelo menos uma carta é de copas. Calcule: $\Pr(A)$, $\Pr(B)$, $\Pr(B|A)$ e $\Pr(A|B)$

$$\Pr(A) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

$$\Pr(B) = 1 - \frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}}$$

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A)}{\Pr(B)}$$

$$\Pr(B|A) = 1$$

3. Considere o experimento no qual dois dados são arremessados. Foi observado que a soma dos dois dados é ímpar. Qual é a probabilidade de que a soma seja menor que 8?

$$\Pr(A|B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Suponha que A e B são eventos tal que $\Pr(A \cap B) > 0$. Então:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B|A) = \Pr(B) \Pr(A|B)$$

- (a) Considere o experimento de retirar 5 cartas de um baralho. Calcule a probabilidade de todas as 5 cartas serem vermelhas.

$$\Pr(A) = \frac{26}{52} \frac{25}{51} \frac{24}{50} \frac{23}{49} \frac{22}{48}$$

- (b) Suponha que 3 cartas são retiradas de um baralho, uma por vez. Calcule a probabilidade que a primeira é vermelha, a segunda é preta, e a terceira é de paus.

Note que tanto faz a ordem das probabilidades. Considerando primeiro o evento ‘a terceira é de paus’ facilita as probabilidades condicionais.

$$\Pr(A) = \frac{13}{52} \frac{26}{51} \frac{25}{50}$$

Como $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são disjuntos, tem-se que:

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A \cap B^c).$$

Supondo que $\Pr(B) > 0$ e $\Pr(B^c) > 0$, pode-se reescrever como:

$$\Pr(A) = \Pr(A|B) \Pr(B) + \Pr(A|B^c) \Pr(B^c).$$

7. Um piloto de fórmula 1 tem 0,5 de probabilidade de vencer determinada corrida, quando esta se realiza sob chuva. Caso não chova durante a corrida, sua probabilidade de vitória é de 0,25. Se o serviço de Meteorologia estimar em 0,3 a probabilidade de que chova durante a corrida, qual é a probabilidade deste piloto ganhar a corrida?

Considere os eventos V , o piloto vence a corrida, e C , chove. Do enunciado tiramos as seguintes informações:

$$\Pr(V|C) = 0.5, \Pr(V|C^c) = 0.25, \text{ e } \Pr(C) = 0.3$$

Logo:

$$\Pr(V) = \Pr(V|C) \Pr(C) + \Pr(V|C^c) \Pr(C^c) = 0.5 \times 0.3 + 0.25 \times (1 - 0.3) = 0.325$$

8. Suponha que 4 cartas são retiradas de um baralho, uma por vez. Calcule a probabilidade que a primeira é vermelha, a segunda é preta, a terceira é de paus e a quarta é um 5.

Considere os seguintes eventos:

- A : a primeira é vermelha, a segunda é preta, a terceira é de paus e a quarta é um 5
- A_1 : primeira é vermelha, a segunda é preta, a terceira é de paus e a quarta é um 5 vermelho
- A_2 : primeira é vermelha, a segunda é preta, a terceira é de paus e a quarta é um 5 de paus
- A_3 : primeira é vermelha, a segunda é preta, a terceira é de paus e a quarta é um 5 de espada

Note que A_1 , A_2 e A_3 formam uma partição de A pois: A_1 , A_2 e A_3 são disjuntos e $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Logo:

$$\Pr(A) = \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3) = \frac{2}{52} \frac{13}{51} \frac{25}{50} \frac{25}{49} + \frac{1}{52} \frac{12}{51} \frac{24}{50} \frac{26}{49} + \frac{1}{52} \frac{13}{51} \frac{24}{50} \frac{26}{49} = \frac{13 \times 2 \times 25}{52 \times 51 \times 50}$$

Dois eventos A e B são independentes se:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B).$$

Além disso, se $\Pr(A) > 0$ e $\Pr(B) > 0$, A e B são independentes se e somente se $\Pr(A|B) = \Pr(A)$ e $\Pr(B|A) = \Pr(B)$.

9. Considere o experimento de lançar um dado com 6 faces e defina os seguintes eventos: (i) evento $A = \{2\}$, (ii) evento B que é a ocorrência de números pares e (iii) evento C que é a ocorrência de números menores ou

iguais a 2. Os eventos A e B são independentes? Os eventos A e C são independentes? Os eventos B e C são independentes?

Temos que calcular às várias probabilidades:

$$\Pr(A) = \frac{1}{6}, \Pr(B) = \frac{1}{2}, \Pr(C) = \frac{1}{3}$$

$$\Pr(A \cap B) = \frac{1}{6}, \Pr(A \cap C) = \frac{1}{6}, \Pr(B \cap C) = \frac{1}{6}$$

Agora, basta testar se $\Pr(X \cap Y) = \Pr(X) \Pr(Y)$.

A e B não são independentes, A e C não são independentes, B e C são independentes.

10. Suponha que 4 cartas são retiradas de um baralho, uma por vez. Considere o evento T que é a ocorrência que a primeira é vermelha, a segunda é preta, e a terceira é de paus. Considere o evento V que é a ocorrência que a quarta é um 5. Os eventos T e V são independentes?

Note que $\Pr(T \cap V)$ foi calculado no exercício 8.

$$\Pr(T) = \frac{13}{52} \frac{25}{51} \frac{26}{50}, \Pr(V) = \frac{4}{52}, \Pr(T) \Pr(V) = \frac{13}{52} \frac{25}{51} \frac{26}{50} \frac{4}{52}$$

Como $\Pr(T \cap V) = \Pr(T) \Pr(V)$, então T e V são independentes.

Os k eventos A_1, \dots, A_k são condicionalmente independentes dado B se, para cada subconjunto A_{i_1}, \dots, A_{i_j} de j desses eventos ($j = 2, 3, \dots, k$),

$$\Pr(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j} | B) = \Pr(A_{i_1} | B) \dots \Pr(A_{i_j} | B).$$

Suponha que A_1 , A_2 , e B são eventos tal que $\Pr(A_1 \cap B) > 0$. Então A_1 e A_2 são condicionalmente independentes dado B se e somente se $\Pr(A_2 | A_1 \cap B) = \Pr(A_2 | B)$.

11. Considere o experimento de retirar 5 cartas de um baralho. Calcule a probabilidade de todas as 5 cartas serem vermelhas dado que os valores das cartas foram retiradas na seguinte ordem: 2, 4, 6, A, K.

$$\left(\frac{2}{4}\right)^5$$

12. Considere o experimento de retirar 5 cartas de um baralho e defina os seguintes eventos: (i) evento A que é a ocorrência da primeira carta retirada ser de copas, (ii) evento B que é a ocorrência da segunda carta retirada ser de copas, (iii) evento C que é a ocorrência da terceira carta retirada ser de copas, e (iv) evento D que é a ocorrência dos valores das cartas serem retirados na seguinte ordem: A, 4, A, 4, K.

a) Os eventos A e B são independentes?

Não.

$$\Pr(A) = \frac{13}{52}, \Pr(B) = \frac{13}{52}, \Pr(A \cap B) = \frac{13}{52} \frac{12}{51} \neq \frac{13}{52} \frac{13}{52} = \Pr(A) \Pr(B)$$

b) Os eventos A e C são independentes?

Idem item a),

c) Repita a) e b) condicionados em D ?

A e B são independentes.

$$\Pr(A|D) = \frac{1}{4}, \Pr(B|D) = \frac{1}{4}, \Pr(A \cap B|D) = \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \Pr(A|D) \Pr(B|D)$$

A e C não são independentes.

$$\Pr(A|D) = \frac{1}{4}, \Pr(C|D) = \frac{1}{4}, \Pr(A \cap C|D) = 0 \neq \frac{1}{4} \frac{1}{4} \Pr(A|D) \Pr(C|D)$$

Seja B_1, \dots, B_k eventos que formam uma partição do espaço amostral S tal que $\Pr(B_i) > 0$ para $j = 1, \dots, k$ e seja A um evento tal que $\Pr(A) > 0$. Então, para $i = 1, \dots, k$,

$$\Pr(B_i|A) = \frac{\Pr(B_i) \Pr(A|B_i)}{\sum_{j=1}^k \Pr(B_j) \Pr(A|B_j)} = \frac{\Pr(B_i) \Pr(A|B_i)}{\Pr(A)}.$$

13. Considere que ao escolher um aluno do segundo ano na EACH, há uma chance de 0,8 desse aluno saber Cálculo II. Se um aluno sabe Cálculo II, existe uma chance de 0,9 dele ser aprovado em Estatística, enquanto se um aluno não sabe Cálculo II, existe uma chance de 0,8 dele ser reprovado em Estatística. Considere um aluno reprovado em Estatística, qual é a chance dele saber Cálculo II?

Sejam os eventos, C , saber Cálculo II, e E , ser aprovado em Estatística. Temos:

$$\Pr(C) = 0.8, \Pr(E|C) = 0.9, \text{ e } \Pr(E^c|C^c) = 0.8$$

Queremos calcular:

$$\Pr(C|E^c) = \frac{\Pr(E^c|C) \Pr(C)}{\Pr(E^c|C) \Pr(C) + \Pr(E^c|C^c) \Pr(C^c)} = \frac{\Pr(E^c|C) \Pr(C)}{\Pr(E^c)}$$

$$\Pr(C|E^c) = \frac{(1 - 0.9) \times 0.8}{(1 - 0.9) \times 0.8 + 0.8 \times (1 - 0.8)} = \frac{0.08}{0.08 + 0.16} = \frac{0.08}{0.24} = \frac{1}{3} = 0.333$$

14. Repita o item anterior, mas agora considere que se um aluno sabe cálculo, existe uma chance de 0,5 dele ser aprovado.

Sejam os eventos, C , saber Cálculo II, e E , ser aprovado em Estatística. Temos:

$$\Pr(C) = 0.8, \Pr(E|C) = 0.5, \text{ e } \Pr(E^c|C^c) = 0.8$$

Queremos calcular:

$$\Pr(C|E^c) = \frac{\Pr(E^c|C) \Pr(C)}{\Pr(E^c|C) \Pr(C) + \Pr(E^c|C^c) \Pr(C^c)} = \frac{\Pr(E^c|C) \Pr(C)}{\Pr(E^c)}$$

$$\Pr(C|E^c) = \frac{(1 - 0.5) \times 0.8}{(1 - 0.5) \times 0.8 + 0.8 \times (1 - 0.8)} = \frac{0.4}{0.4 + 0.16} = \frac{0.4}{0.56} = \frac{5}{7} = 0.71$$

15. Há três portas, uma contém um carro (com probabilidade igual). Eu escolho uma porta às cegas, digamos a primeira porta. Monty Hall abre uma das outras portas, digamos a segunda. Se lhe for dada a chance de mudança, você muda para a terceira porta?

Considere os seguintes eventos:

- A : o evento de que o prêmio está atrás da porta 1
- B : o evento de que a porta aberta por Monty Hall não tem o prêmio atrás dela.

Queremos calcular:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)}$$

Note que $\Pr(B|A) = 1$ e $\Pr(A) = \frac{1}{3}$.

Precisamos definir a probabilidade $\Pr(B)$. Podemos considerar dois casos:

- Monty Hall sabe em qual porta está o prêmio e sempre escolhe uma porta que não contém o prêmio, para deixar o jogo mais animado. Nesse caso $\Pr(B) = 1$ e temos:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)} = \frac{1}{3}$$

- Monty Hall NÃO sabe em qual porta está o prêmio e sempre escolhe uma porta aleatoriamente. Nesse caso $\Pr(B) = \frac{2}{3}$ e temos:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A) \Pr(A)}{\Pr(B)} = \frac{1}{2}$$

Em todo caso, vale a pena trocar de porta.