**Universidade de São Paulo**
**Escola de Artes, Ciências e Humanidades**

**ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2024**
**Professor: José Ricardo G. Mendonça**

**Notas de aula – Elementos de análise combinatória**

*I hear and I forget. I see and I remember. I do and I understand.*
Kung-Fu Tzu (551–479 BC)

## 1. Introdução

Os dois princípios básicos da análise combinatória são o ***princípio da adição*** e o ***princípio da multiplicação***. No primeiro caso (princípio da adição, também conhecido como regra da soma), se um item pode ser selecionado dentre os elementos de um conjunto $A$ com $m$ elementos ou de um conjunto $B$ com $n$ elementos distintos daqueles em $A$, então o item pode ser selecionado de $m+n$ maneiras diferentes. Matematicamente, temos $|A \cup B| = |A| + |B|$, desde que $A \cap B = \varnothing$. No segundo caso (princípio da multiplicação, também conhecido como regra do produto), se temos de selecionar um item de um conjunto $A$ com $m$ elementos e outro item de um conjunto $B$ com $n$ elementos, distintos ou não daqueles em $A$, então os itens podem ser selecionados de $mn$ maneiras diferentes. Matematicamente, $|A \times B| = |A|\,|B|$.

A partir dos princípios da adição e da multiplicação é possível deduzir a maioria das fórmulas para o número de arranjos e combinações de um conjunto de objetos com ou sem repetições encontradas nos livros-texto elementares. Essas derivações são apresentadas em detalhes, em alguns casos de mais de uma maneira, na Seção 2 deste artigo, onde também discutimos brevemente o princípio da inclusão-exclusão, que podemos considerar o terceiro princípio básico de contagem. Na Seção 3 aplicamos esses princípios na contagem de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, ou, equivalentemente, de funções com tamanho da imagem fixo, onde introduzimos os números de Stirling de segunda espécie. Alguns problemas envolvem restrições que tornam sua análise menos imediata. Esse é o caso, por exemplo, do número de arranjos com repetição envolvendo menos elementos do que o total de elementos disponíveis ou a partir de um conjunto de objetos que possuem itens repetidos mas em número limitado. Vários desses casos podem ser abordados com auxílio do princípio da inclusão-exclusão. Outros, porém, necessitam do conceito de função geratriz para sua solução. Na Seção 4 discutimos dois desses problemas e sua solução e na Seção 5 discorremos brevemente sobre uma classificação dos problemas combinatoriais mais fundamentais proposta nos anos 1960 por Gian-Carlo Rota. Finalmente, na Seção 6 fazemos algumas observações finais e na Seção 7 oferecemos algumas indicações de referências ao estudante interessado.

## 2. Arranjos, combinações e o princípio da inclusão-exclusão

Uma grande variedade de problemas de contagem pode ser entendida a partir da retirada ou seleção de $k$ bolas de uma urna contendo $n$ bolas numeradas $1, \ldots, n$; veja a Figura 1.

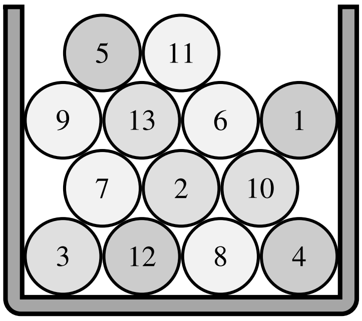


**Figure 1:** Urna contendo $n = 13$ bolas numeradas (distinguíveis).

A retirada das bolas da urna pode ser feita de várias maneiras. Primeiramente, as $k$ bolas podem ser retiradas uma a uma ou todas ao mesmo tempo. No primeiro caso pode-se observar a ordem em que as bolas são retiradas, enquanto no segundo caso (sejam as bolas de fato retiradas simultaneamente ou não) não observamos a ordem. Em segundo lugar, uma bola que foi retirada pode ser colocada de volta na urna ou deixada de fora. Isso é chamado, respectivamente, de retirada com e sem reposição. Quando a ordem em que as bolas são retiradas importa obtemos um ***arranjo***; quando a ordem em que as bolas são retiradas não importa obtemos uma ***combinação***.

As diferentes maneiras de retirar $k$ bolas de uma urna contendo $n$ bolas resultam, portanto, em 4 tipos de seleção: arranjo com e sem reposição ou combinação com e sem reposição. Vamos calcular o número de seleções diferentes que podemos obter em cada caso.

### 2.1. Arranjo sem reposição

Em um arranjo sem reposição, uma vez retirada uma bola não é mais possível selecioná-la novamente. Neste caso temos $n$ possibilidades para a primeira retirada, $n-1$ possibilidades para a segunda retirada e assim sucessivamente até ficarmos com $n-(k-1)$ possibilidades para a $k$-ésima retirada, resultando (pelo princípio da multiplicação) em um número total de

$$A(n,k) = n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1}$$

possíveis arranjos distintos. Outras notações para esse número são $A_{n,k}$, ${}_nA_k$ e $A^n_k$. Esse tipo de arranjo também é conhecido como uma $k$-permutação de $n$ objetos.

Quando retiramos todas as $n$ bolas, obtemos uma ***permutação*** das bolas, que é um arranjo de $n$ itens sem reposição. Assim, existem

$$A(n,n) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n! \tag{2}$$

permutações diferentes de $n$ itens. Esse número é normalmente denotado simplesmente por $P(n)$.

O estudante deve ter percebido que se inserirmos o valor $k = n$ na equação (1) para $A(n,k)$ encontramos um denominador igual a $0!$. Isso costuma causar confusão: se $k! = k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1$, então parece lógico que $0! = 0$. Na verdade, a interpretação combinatorial da expressão para $A(n,k)$ oferece uma justificativa para que convenhamos que $0! = 1$. Outra justificativa vem da interpretação combinatorial do coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, veja a Seção 2.3.

### 2.2. Arranjo com reposição

Cada vez que retiramos uma bola, ela pode ser qualquer uma das $n$ bolas, já que uma vez retirada ela é recolocada ou substituída por outra idêntica na urna. Portanto, temos $n$ possibilidades para a primeira retirada, novamente $n$ possibilidades para a segunda retirada e assim sucessivamente, de modo que existem

$$U(n,k) = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ vezes}} = n^k \tag{3}$$

possíveis arranjos distintos de $k$ itens com reposição a partir de $n$ itens.

### 2.3. Combinação sem reposição

A única diferença entre este caso e o do arranjo sem reposição é que agora a ordem em que as bolas são retiradas não importa. Isso significa que qualquer arranjo contendo os mesmos itens deve ser considerado equivalente — por exemplo, os arranjos `DCAB` e `ACDB` são considerados iguais. Uma vez que um conjunto de $k$ itens pode ser permutado de $k!$ maneiras diferentes, o número total de combinações de $k$ itens obtidos de um conjunto de $n$ itens sem reposição é dado por

$$C(n,k) = \frac{A(n,k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{4}$$

Este número é normalmente denotado por $\binom{n}{k}$, o ***coeficiente binomial***, e lido como "$n$, $k$ a $k$", expressando o fato de que ele corresponde ao número de maneiras diferentes de selecionar $k$ itens de $n$ itens possíveis sem reposição. Em termos conjuntistas podemos dizer que existem $\binom{n}{k}$ subconjuntos $A \subseteq B$ diferentes com $|A| = k$ e $|B| = n$; cada subconjunto $A$ corresponde a uma escolha diferente de $k$ elementos de $B$.

O coeficiente $C(n,k)$ fornece uma justificativa adicional para a identidade $0! = 1$. De fato, podemos selecionar $n$ objetos de um total de $n$ objetos de exatamente 1 maneira (selecionando todos!), e como esse número é dado por $C(n,n) = \dfrac{n!}{n!0!}$, a interpretação combinatorial de $C(n,k)$ implica que $0! = 1$.

**Observação 2.1** *A função gama de Euler, definida pela integral* $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$, *obedece à relação* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, *que para* $z \in \mathbb{N}$, $z \geqslant 1$ *pode ser escrita como* $\Gamma(z) = (z-1)!$. *Como* $\Gamma(1) = 1$, *a função* $\Gamma(z)$ *oferece uma justificativa analítica para a identidade* $0! = 1$. *Um valor notável da função gama de Euler é* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

## 2.4. Combinação com repetições

Existem muitas maneiras diferentes de contar combinações com repetições. O argumento a seguir é devido a Leonhard Euler (1707–1783). Para efeitos de argumentação matemática, numeramos os tipos de objetos de 1 a $n$. Considere qualquer uma das possíveis seleções de $k$ itens que podemos formar a partir de $n$ itens distintos com reposição e denote-a por $\{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$ em ordem fracamente crescente $1 \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_k \leqslant n$, onde por causa da repetição ilimitada, qualquer número de $c_i$ consecutivos pode ser igual. Por exemplo, uma possível combinação de 5 objetos a partir de um conjunto de 4 tipos de objetos com reposição poderia ser $\{1,1,2,4,4\}$, consistindo de 2 objetos do tipo 1, 1 objeto do tipo 2 e 2 objetos do tipo 4. A partir disso, formamos o conjunto $\{d_1, d_2, \cdots, d_k\}$ pela regra $d_i = c_i + i - 1$. Essa transformação implica que $d_{i+1} - d_i = c_{i+1} - c_i + 1$, de maneira que quaisquer que sejam os $c_i$, os $d_i$ são todos diferentes por pelo menos 1. Pelo método de Euler, a combinação $\{1,1,2,4,4\}$ se transforma na combinação $\{1,2,4,7,8\}$.

Como cada combinação distinta de $k$ itens, com repetição ou não, produz uma combinação distinta de $d_i$ e vice-versa, sua quantidade deve ser a mesma. Uma demonstração envolvendo esse tipo de correspondência é denominada ***demonstração bijetiva***. Como $d_i$ assume valores entre 1 e $n+k-1$, o número de combinações de $d_i$ corresponde ao número de combinações de $k$ itens sem repetição de $n+k-1$ elementos, que vale

$$C(n+k-1,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}, \tag{5}$$

onde a segunda identidade decorre diretamente da definição do coeficiente binomial.

Os números $\binom{n+k-1}{k}$ são conhecidos como ***coeficientes multiconjunto*** e denotados por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. A diferença entre conjuntos e multiconjuntos é que nos multiconjuntos cada elemento pode aparecer mais de uma vez. Multiconjuntos são geralmente denotados por $\{a^{m_a}, b^{m_b}, \ldots\}$, onde os números $m_i \geqslant 0$ indicam quantas vezes o elemento $i$ ocorre no multiconjunto; por exemplo, $\{1,1,1,2,3,3\} \equiv \{1^3, 2, 3^2\}$. Cada seleção $\{1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n}\}$ de $k$ itens tomados a partir de um conjunto de $n$ itens com reposição corresponde a um subconjunto do multiconjunto $\{1^k, 2^k, \ldots, n^k\}$ tal que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$. É importante usar uma notação que indique claramente se os arranjos são ordenados ou não. Geralmente denotamos arranjos ordenados como listas, por exemplo, $(1,1,2)$, e arranjos não ordenados como conjuntos ou multiconjuntos, por exemplo, $\{1,2,3\}$ ou $\{1,1,1,2,3,3\}$.

Como observamos, cada combinação de $k$ itens a partir de $n$ itens com reposição corresponde a uma seleção $\{1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots, n^{m_n}\}$ com $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$. Isso sugere que podemos contar o número de tais combinações como o número de soluções inteiras da equação $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$. Essa abordagem (que fornece mais um exemplo de demonstração bijetiva em combinatória) é normalmente empregada em livros didáticos elementares através do método denominado ***barras e bolas***. Nessa abordagem, $k$ bolas indistinguíveis devem ser distribuídas em $n$ compartimentos distinguíveis $m_1$, $m_2$, …, $m_n$, que podem conter qualquer número maior ou igual a zero de bolas, desde que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$. Essa configuração pode ser ilustrada como

$$\underbrace{\phantom{\circ\circ}}_{m_1} | \underbrace{\circ\circ\circ}_{m_2} | \underbrace{\circ\circ}_{m_3} | \cdots | \underbrace{\circ}_{m_n} \tag{6}$$

Nessa ilustração temos $m_1 = 0$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2, \ldots, m_n = 1$. Como podemos ver, cada configuração pode ser especificada pela posição de $n-1$ barras separando as $k$ bolas, o que pode ser feito de $C(n-1+k, n-1)$ maneiras diferentes, já que temos $n-1+k$ posições no total (barras + bolas) dentre as quais temos de escolher $n-1$ posições para as barras. Equivalentemente, podemos escolher as $k$ posições para as bolas, o que fornece o número $C(n-1+k, k)$ de configurações, cf. a equação (5).

Assim, o método das barras e bolas fornece a solução para o problema das combinações com repetições e também para o número de soluções de equações do tipo $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$ envolvendo números inteiros não negativos $m_1, \ldots, m_n, k$, em mais um exemplo de demonstração bijetiva de um problema combinatorial. Teremos oportunidade de contar as soluções para algumas equações desse tipo envolvendo restrições nos valores das variáveis $m_i$ na Seção 4.

### 2.5. O princípio da inclusão-exclusão

O princípio por trás do PIE para contar corretamente o número de elementos em $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ consiste em primeiro superestimar grosseiramente o número de elementos na união pela inclusão indiscriminada de todos os elementos em cada conjunto, em seguida realizar uma correção simples da estimativa pela exclusão dos elementos que não deveriam ter sido incluídos, depois corrigir essa exclusão pela inclusão dos elementos que não deveriam ter sido excluídos e assim por diante, incluindo e excluindo alternadamente elementos até que na contagem final restem somente os elementos que deveriam ser contados uma única vez. Uma das características mais evidentes de resultados obtidos através do PIE é a presença de somas de termos com sinais alternados.

O teorema a seguir estabelece rigorosamente uma das formas elementares do PIE.

**Teorema 2.2 (Princípio da inclusão-exclusão)** *Suponha que temos $N$ objetos e que cada objeto pode possuir ou não uma ou mais das propriedades $a_1, \ldots, a_n$. Denotando o número de objetos com as $k$ propriedades $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ por $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, o número de objetos que não possuem qualquer das propriedades $a_1, \ldots, a_n$ é dado por*

$$N - \sum_{i_1} N(a_{i_1}) + \sum_{i_1 < i_2} N(a_{i_1}, a_{i_2}) - \cdots + (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k} N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) + \cdots + (-1)^n N(a_1, \ldots, a_n), \tag{7}$$

*onde cada índice $i_k$ nos somatórios assume todos os possíveis valores $1, \ldots, n$.*

Para demonstrar o PIE na forma acima, basta verificar quantas vezes um objeto qualquer é contado pela expressão (7). Se um objeto não possui qualquer das propriedades, ele é contado uma única vez no termo $N$ em (7) e não contribui para os termos restantes. Um objeto que possui somente uma das propriedades, por sua vez, é contado uma vez em $N$ e uma vez em $\sum_{i_1} N(a_{i_1})$ e, portanto, contribui com $1 - 1 = 0$ para a soma. Já um objeto que possui exatamente $m \geqslant 2$ propriedades é contado uma vez no termo $N$, $m$ vezes no termo $\sum_{i_1} N(a_{i_1})$, $\binom{m}{2}$ vezes no termo $\sum_{i_1<i_2} N(a_{i_1}, a_{i_2})$ e assim sucessivamente, isto é, ele é contado $\binom{m}{k}$ vezes em cada termo $\sum_{i_1<\cdots<i_k} N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k})$, $0 \leqslant k \leqslant m$. A contribuição total desse objeto para a soma vale, portanto,

$$1 - m + \binom{m}{2} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} = (-1+1)^m = 0, \tag{8}$$

pelo teorema binomial.[(a)] Dessa forma, a expressão (7) conta somente os objetos que não possuem qualquer das propriedades $a_1, \ldots, a_n$, como queríamos demonstrar.

**Observação 2.3** *Se truncarmos a expressão (7) após um termo negativo (respectivamente, positivo), obtemos uma cota inferior (respectivamente, superior) para o número de objetos que não possuem qualquer das propriedades $a_1, \ldots, a_n$. Isso significa que cada termo negativo da soma corrige um excesso de contagem e cada termo positivo corrige uma deficiência de contagem até aquele ponto.*

Podemos interpretar o PIE em termos conjuntistas da seguinte forma. Suponha que $A_1, \ldots, A_r$ sejam subconjuntos de um conjunto $\Omega$ tais que $A_i = \{x \in \Omega \colon x \text{ possui a propriedade } a_i\}$. Quantos elementos não possuem qualquer das propriedades $a_i$? Esses são os elementos que estão em $\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_r$. Seguindo a receita do PIE, para contá-los tomamos todos os elementos de $\Omega$ e subtraímos os elementos que estão em pelo menos um $A_i$, adicionamos aqueles que estão em pelo menos dois $A_i$, subtraímos aqueles que aparecem em pelo menos três $A_i$ e assim por diante, e daí ficamos com

$$\left|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_r\right| = |\Omega| - \sum_{i_1} |A_{i_1}| + \sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \cdots + (-1)^r |A_1 \cap \cdots \cap A_r|. \tag{9}$$

**Observação 2.4** *A expressão acima pode ser escrita de maneira mais compacta como*

$$\left|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_r\right| = \sum_{J \subseteq [n]} (-1)^{|J|} |A_J|, \tag{10}$$

*onde $[n]$ é uma notação usual em matemática discreta para o conjunto $\{1, \ldots, n\}$, $J \subseteq [n]$ denota todos os $2^n$ subconjuntos de $[n]$ e $A_J = \bigcap_{j \in J} A_j$, com a convenção de que $A_\varnothing = \Omega$.*

A fórmula do PIE talvez mais conhecida, principalmente em contextos elementares, é aquela usada para calcular $|A_1 \cup \cdots \cup A_r|$, isto é, para determinar o número de objetos que possuem pelo menos uma das propriedades $a_1, \ldots, a_r$. Como, por definição de conjunto complementar, $\Omega = (A_1 \cup \cdots \cup A_r) \cup (\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_r})$ e pela lei de DeMorgan $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_r} = \bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_r$, encontramos que $|A_1 \cup \cdots \cup A_r| = |\Omega| - \left|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_r\right|$ e daí, pela equação (9),

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_r| = \sum_{i_1} |A_{i_1}| - \sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \cdots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_r|, \tag{11}$$

[(a)] O teorema binomial de Newton estabelece que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, onde $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ é o coeficiente binomial usual. Colocando $x = -1$ e $y = 1$ nesta expressão obtemos a identidade empregada na equação (8).

que generaliza a expressão $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ para um número arbitrário de conjuntos.

## 3. Funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras

Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos quaisquer, finitos ou não. Escrevemos $f\colon A \to B$ para denotar uma função definida sobre os elementos de seu ***domínio*** $A$ assumindo valores em seu ***contradomínio*** $B$, e escrevemos $f(a)$ para denotar a imagem de $a \in A$ sob a ação de $f$. O conjunto de todas as funções de $A \to B$ é denotado por $B^A$; assim, a notação $f\colon A \to B$ é equivalente à notação $f \in B^A$. A seguir identificamos os elementos de $A$ por $a_1, \ldots, a_m$ e os elementos de $B$ por $b_1, \ldots, b_n$.

A notação $B^A$ para o conjunto de todas as funções $f\colon A \to B$ reflete o fato de que para cada elemento $a \in A$ existem $|B|$ escolhas possíveis para o valor de $f(a) \in B$, e como existem $|A|$ elementos em $A$, pelo princípio da multiplicação o número total de funções $f\colon A \to B$ possíveis é dado por $|B| \cdot |B| \cdots |B| = |B|^{|A|} = n^m$, que é a cardinalidade de $B^A$. Outra maneira (inteiramente equivalente) de ver isso consiste em reparar que cada função $f\colon A \to B$ pode ser colocada em correspondência única com algum termo do produto

$$\underbrace{(b_1 + \cdots + b_n) \cdot (b_1 + \cdots + b_n) \cdots (b_1 + \cdots + b_n)}_{m \text{ vezes}}, \tag{12}$$

Por exemplo, se $|A| = 4$ e $|B| = 7$, o termo $b_3 b_1 b_7 b_3$ na expansão acima especifica a função $f(a_1) = b_3$, $f(a_2) = b_1$, $f(a_3) = b_7$ e $f(a_4) = b_3$. O produto (12) claramente possui $|B|^{|A|} = n^m$ termos.

Um exemplo clássico em análise combinatória elementar consiste em contar quantas funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras existem entre dois conjuntos finitos $A$ e $B$. Uma grande variedade de problemas combinatoriais pode ser reduzida à contagem de funções desses tipos, uma vez que se identifique quais são os conjuntos $A$ e $B$ apropriados ao problema específico. O caso mais interessante é, sem dúvida, o das funções sobrejetoras. Vamos examinar cada um deles a seguir.

### 3.1. Funções injetoras

Uma função $f\colon A \to B$ é denominada ***injetora*** se mapeia elementos distintos de $A$ em elementos distintos de $B$: se $a \neq a'$ em $A$, então $f(a) \neq f(a')$ em $B$. Em inglês usa-se a expressão ***one-to-one*** para denominar funções injetoras. Embora $f$ esteja definida para todo $a \in A$, não é necessário que para todo $b \in B$ exista um $a \in A$ tal que $b = f(a)$; pode haver elementos de $B$ a descoberto. Veja a Figura 2. Denotamos o conjunto de todas as funções injetoras de $A \to B$ por $\mathrm{Inj}(A, B)$.

Se $f\colon A \to B$ é injetora, então $|A| \leqslant |B|$. Para especificar $f$, basta escolher os $m$ elementos de $B$ que serão associados por $f$ aos $m$ elementos de $A$. Isso pode ser feito de

$$|\mathrm{Inj}(A, B)| = n \cdot (n-1) \cdots (n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{13}$$

maneiras diferentes, que é o número de arranjos de $n$ itens tomados $m$ de cada vez. Cada arranjo $b_{i_1}, \ldots, b_{i_m}$ de elementos de $B$ define uma função injetora dada por $f(a_k) = b_{i_k}$, $k = 1, \ldots, m$.

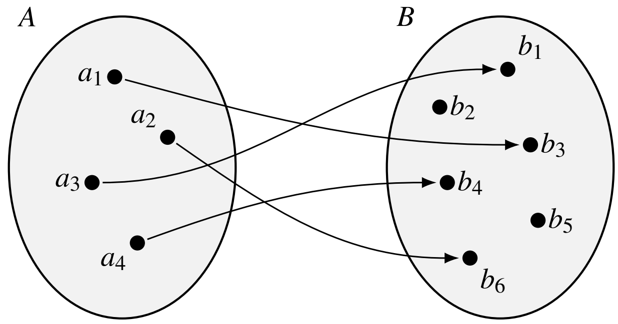


**Figure 2:** Função injetora $f\colon A \to B$, que requer $|A| \leqslant |B|$.

**Observação 3.1** *O **princípio do pombal**, um resultado simples que possui enorme utilidade em toda a matemática, estabelece que se tentarmos distribuir $n > k$ objetos em $k$ urnas, pelo menos uma das urnas conterá mais de um objeto. O princípio do pombal equivale a afirmar que não existem funções injetoras de $A \to B$ se $|A| > |B|$; basta identificar os elementos de $A$ com os pombos e os elementos de $B$ com as casinhas do pombal. A formulação do princípio do pombal costuma ser atribuída ao matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) por volta de 1842, embora haja evidências de que o princípio fosse conhecido anteriormente. Dirichlet se referia ao princípio do pombal como "Schubfachprinzip", ou princípio da gaveta, em alemão.*

### 3.2. Funções sobrejetoras

Uma função $f\colon A \to B$ é ***sobrejetora*** se para todo $b \in B$ existe um $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Neste caso, a imagem de $A$ pela função $f$ recobre $B$ (nenhum elemento de $B$ fica a descoberto) e podemos escrever $f(A) = B$. Repare que pode haver mais de um $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Veja a Figura 3. Em inglês, funções sobrejetoras são denominadas ***onto***. Denotamos o conjunto de todas as funções sobrejetoras de $A \to B$ por $\mathrm{Sur}(A,B)$, do francês *surjection*, palavra também usada em inglês.

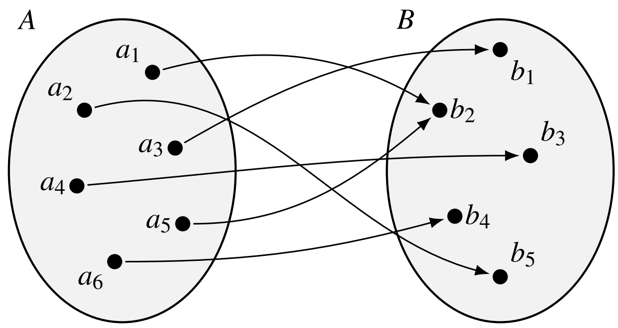


**Figure 3:** Função sobrejetora $f\colon A \to B$, que requer $|A| \geqslant |B|$.

**Observação 3.2** *A introdução das denominações injetora e sobrejetora para funções é devida a Nicolas Bourbaki, nome fictício de um coletivo de matemáticos majoritariamente franceses que se dedicou a partir da década de 1930 a formalizar e descrever vastas partes da matemática em livros e artigos que* *se tornaram bastante influentes. O grupo sempre incluiu, em cada uma de suas gerações, matemáticos renomados, como Henri Cartan, André Weil, Laurent Schwartz, Jean-Pierre Serre e Alexander Grothendieck, entre outros. O grosso do trabalho de organização e redação coube durante muito tempo a Jean Dieudonné. O trabalho do grupo, no entanto, recebeu muitas críticas pela sua exposição excessivamente axiomática, estilo árido e seleção elitista de tópicos, muitas vezes descolada de outras partes da matemática moderna. A nefasta tendência expositória abstrata que ficou conhecida nos anos 1950–1970 como "Nova Matemática" nos meios didáticos é atribuída em boa parte (embora não somente) à influência do grupo Bourbaki.*

Se $f\colon A \to B$ é sobrejetora, então $|A| \geqslant |B|$. Para contar quantas funções sobrejetoras $f$ existem, vamos usar o PIE. Para isso, excluímos do conjunto $B^A$ todas as funções $f$ para as quais $f(A) \neq B$, isto é, as funções que deixam um ou mais elementos de $B$ a descoberto. As funções que deixam um subconjunto $K \subseteq B$ a descoberto podem fazê-lo de $\binom{n}{|K|}$ maneiras (correspondendo às possíveis escolhas de $|K|$ elementos de $B$) e existem em número $|B \setminus K|^{|A|} = (n-|K|)^m$. A aplicação do PIE, equação (9), fornece o número de funções sobrejetoras de $A \to B$ como

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Sur}(A,B)| &= \sum_{K \subseteq B} (-1)^{|K|} \binom{n}{|K|} (n-|K|)^m = \\
&= n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)^m = \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^m = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

onde na última passagem fizemos a mudança de variável $k \to n-k$ e reparamos que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Deixamos o termo com $k = 0$ no somatório meramente para indicar a origem da fórmula no PIE.

### 3.3. Funções bijetoras

Uma funções bijetora $f\colon A \to B$ é simultaneamente injetora e sobrejetora, isto é, $f$ está definida para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$ existe um único $a \in A$ tal que $b = f(a)$. Veja a Figura 4. Como o valor de $a \in A$ é único para cada $b \in B$, uma função bijetora pode ser invertida e sua função inversa $f^{-1}\colon B \to A$ é também uma bijeção: se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$, isto é, $f^{-1}(f(a)) = a$ e $f(f^{-1}(b)) = b$. Denotamos o conjunto de todas as funções bijetoras de $A \to B$ por $\mathrm{Bij}(A,B)$.

Uma bijeção entre $A$ e $B$ só existe se $|A| = |B|$. Especificar uma função bijetora $f$ corresponde a escolher o valor de $b \in B$ que $f$ assume quando aplicada a cada $a \in A$. Para $f(a_1)$ temos $n$ possíveis escolhas de $b$, para $f(a_2)$ temos $n-1$ possíveis escolhas de $b$ restantes e assim sucessivamente. Portanto, podemos especificar uma função bijetora de $A \to B$ de

$$
|\mathrm{Bij}(A,B)| = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n! \tag{15}
$$

maneiras diferentes.

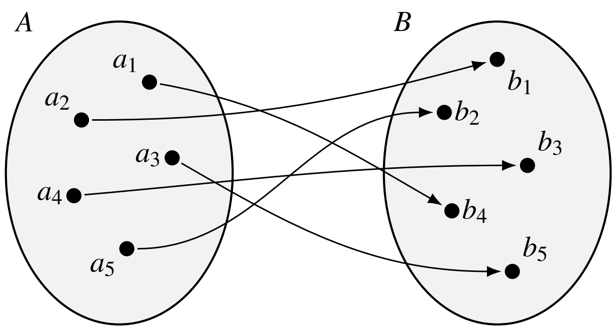


**Figure 4:** Função bijetora $f\colon A \to B$, que requer $|A| = |B|$.

**Observação 3.3** *O estudante atento deve ter percebido que permutações correspondem a bijeções de $A \to A$. Nesse caso, cada bijeção $f\colon A \to A$ corresponde a uma das $n!$ possíveis permutações $\sigma$ dos elementos de $A$ e vice-versa; a ação de $f$ consiste em reordenar os elementos de $A$, transformando a lista $(a_1, \dots, a_n)$ na lista $(f(a_1), \dots, f(a_n))$, que pode ser entendida como $(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})$.*

Olhando para as expressões (14) e (15) para o número, respectivamente, de funções sobrejetoras e bijetoras de $A \to B$, vemos que quando $m = n$ obtemos a curiosa expressão para $n!$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!. \tag{16}$$

O estudante pode querer verificar essa expressão para alguns valores pequenos de $n$.

### 3.4. Números de Stirling

Contar o número de partições não vazias de um conjunto finito de $n$ elementos é equivalente a contar as maneiras de se distribuir $n$ objetos distinguíveis (os elementos do conjunto) em $k$ caixas indistinguíveis (os subconjuntos), com a restrição de que nenhuma caixa pode ficar vazia. Esse problema é mais difícil do que o problema de distribuir $n$ objetos, distinguíveis ou não, em $k$ caixas distinguíveis; veja a Seção 4. Em particular, não existe uma forma fechada para o número de partições de um conjunto finito de $n$ elementos em $k$ subconjuntos não vazios exceto para alguns valores particulares de $k$, somente uma expressão em forma de somatório que não pode ser simplificada.

O número de partições não vazias de um conjunto finito de $n$ elementos em $k$ subconjuntos não vazios é denominado ***número de Stirling de segunda espécie*** e denotado por $\left\{ {n \atop k} \right\}$, que se lê "$n$ subconjunto $k$". Obviamente, para $n > 0$ temos $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$, $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$, $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ e $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$ se $k > n$, já que neste caso pelo menos algum subconjunto ficaria vazio; por convenção tomamos $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$. O número total de partições não vazias de um conjunto finito de $n \geqslant 0$ elementos é dado pelo ***número de Bell***

$$B_n = \left\{ {n \atop 0} \right\} + \left\{ {n \atop 1} \right\} + \cdots + \left\{ {n \atop n} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}. \tag{17}$$

Embora não se conheça uma expressão simples para $B_n$, existe uma relação de recorrência dada por

$$B_0 = 1, \qquad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k. \tag{18}$$

Os primeiros números de Bell para $n \geqslant 0$ são 1, 1, 2, 5, 15, 52 etc.

Além dos valores especiais para $\left\{ {n \atop k} \right\}$ quando $k = 0$, 1 e $n$, podemos obter também o valor de $\left\{ {n \atop 2} \right\}$ pelo seguinte raciocínio: se um conjunto $S$ de $n$ elementos é dividido em duas partes não vazias $P$ e $Q$, uma das partes, digamos, $P$, deverá conter o "primeiro" elemento de $S$ unido a um subconjunto qualquer $P'$ dos $n-1$ elementos restantes — por exemplo, se $S = \{a,b,c,d,e\}$, uma das partes poderia ser $P = \{a\} \cup \{c,e\}$, isto é, o conjunto formado pelo "primeiro" elemento $a$ unido ao subconjunto $P' = \{c,e\}$. Naturalmente, neste caso $Q = S \setminus P = \{b,d\}$. Existem $2^{n-1}$ maneiras diferentes de escolher o subconjunto $P'$, já que cada um dos $n-1$ elementos restantes de $S$ podem pertencer a ele ou não. No entanto, de todas essas maneiras devemos evitar aquela em que $P'$ contém todos os $n-1$ elementos restantes de $S$, senão $P = S$ e $Q$ ficaria vazio. Assim, terminamos com a partição de $S$ em $P = \{a\} \cup P'$ e $Q = S \setminus P$ em que $P'$ pode ser escolhido de $2^{n-1} - 1$ maneiras diferentes, de forma que $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$. Por exemplo, se $|S| = 5$, temos $\left\{ {5 \atop 2} \right\} = 2^4 - 1 = 15$ maneiras diferentes de particionar $S$ em dois conjuntos disjuntos não vazios. Da mesma forma, podemos deduzir que $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$, porque em uma divisão de $n$ elementos em $n-1$ subconjuntos não vazios teremos necessariamente $n-2$ subconjuntos com um elemento cada e um subconjunto com dois elementos. O processo de partição se reduz, portanto, à escolha dos dois elementos que ficarão juntos, o que pode ser feito de $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ maneiras diferentes.

Um raciocínio semelhante aos apresentados acima pode ser empregado para mostrar que os números de Stirling de segunda espécie obedecem à relação de recorrência

$$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1, \qquad \left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}, \; n \geqslant k \geqslant 1. \tag{19}$$

Repare que sem o fator $k$ multiplicando o primeiro termo do lado direito, essa a relação de recorrência se torna aquela para os coeficientes binomiais, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, que os estudantes do ensino fundamental e médio normalmente associam ao triângulo de Pascal.

Por fim, uma identidade útil envolvendo os números de Stirling de segunda espécie é dada por

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x(x-1)\cdots(x-(k-1)). \tag{20}$$

O produto $x(x-1)\cdots(x-(k-1))$ é conhecido como ***fatorial descendente*** e denotado por $(x)_k$ ou $x^{\underline{k}}$, que se lê "$x$ elevado a $k$ descendente". Repare que quando $x \geqslant k$ são inteiros positivos, $x^{\underline{k}} = x!/(x-k)!$, daí a convenção $x^{\underline{0}} = 1$. Foi a expressão (20) que motivou James Stirling (1692–1770) a estudar os números que hoje levam seu nome. A identidade (20) possibilita o cálculo dos números de Stirling de segunda espécie de maneira relativamente imediata, uma vez que para encontrá-los basta resolver o sistema linear possível e determinado de ordem $n+1$ oriundo da equação (20) para as incógnitas $\left\{ {n \atop k} \right\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Como sabemos que $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$, $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$, $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$, $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ e $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$, o sistema linear tem, de fato, ordem $n+1-5 = n-4$. Os coeficientes de $x^j$ oriundos dos termos $x(x-1)\cdots(x-(k-1))$ são denominados ***números de Stirling de primeira espécie***, denotados por $\left[ {n \atop k} \right]$ e lidos como "$n$ ciclo $k$",

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-(k-1)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k,\ n \geqslant 0. \tag{21}$$

O sistema linear resultante é triangular superior, e sua resolução pode ser obtida em $O(n^2)$ operações.

Os números de Stirling de segunda espécie fornecem uma maneira praticamente imediata de contar o número de funções sobrejetoras de $A \to B$. Se a imagem de $f$ possui exatamente $|B| = n$ elementos, como no caso de uma função sobrejetora, então a pré-imagem $f^{-1}(B)$ de $B$ sob a ação de $f$ consiste numa partição de $A$ em $n$ blocos disjuntos e não vazios $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ tal que para cada $b \in B$, $f^{-1}(b) = A_i$ para algum $A_i$.

**Observação 3.4** *A notação $f^{-1}(b)$ para a pré-imagem de $b$ não significa necessariamente que a função $f$ possui inversa (isso só acontece se $f$ for injetora), de maneira que, em princípio, a pré-imagem de cada elemento $b \in B$ é um subconjunto, não um elemento, de $A$. Veja a Figura 5.*

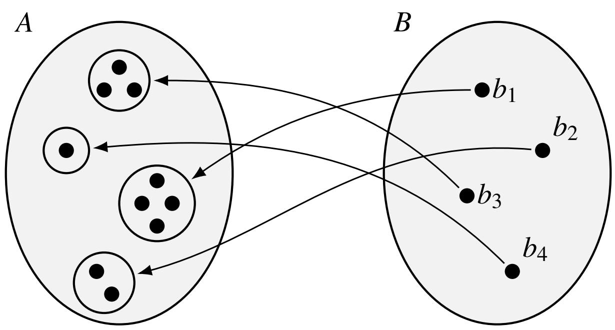


**Figure 5:** Ilustração das pré-imagens $f^{-1}(b)$, $b \in B$, de uma função sobrejetora $f \colon A \to B$.

Como o número de partições de $A$ em $n$ subconjuntos disjuntos não vazios é dado pelo número de Stirling de segunda espécie $\left\{ {m \atop n} \right\}$ e cada partição dá origem a $n!$ funções $f$ distintas pela permutação das $n$ pré-imagens $A_i$, o número total de funções sobrejetoras de $A \to B$ é dado por

$$|\mathrm{Sur}(A,B)| = \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix} n! \tag{22}$$

Comparando as equações (14) e (22) obtemos a seguinte fórmula para os números de Stirling de segunda espécie,

$$\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m. \tag{23}$$

A equação (23) fornece uma alternativa à relação de recorrência (19) e à resolução do sistema linear oriundo da expressão (20) para o cálculo dos números $\left\{ {m \atop n} \right\}$.

### 3.5. O caso geral

As derivações apresentadas anteriormente nesta seção têm objetivo de serem detalhadas e didáticas, introduzindo conceitos e aplicações dos princípios básicos e algumas novas definições. Podemos, no entanto, com o auxílio dos números de Stirling de segunda espécie, resumir os resultados obtidos de maneira mais objetiva. A pergunta fundamental é: quantas funções $f\colon A \to B$ possuem exatamente $k$ elementos em sua imagem? Se $|f(A)| = k$, então a pré-imagem de $f$ particiona $A$ em $k$ subconjuntos disjuntos $A_1, \dots, A_k$, e isso pode ser feito de $\left\{ {|A| \atop k} \right\}$ maneiras distintas. A partição de $A$, no entanto, não especifica completamente a função $f$. Para completar a especificação precisamos estabelecer que partes $A_i$ estão associadas a que elementos de $B$, isto é, estabelecer as imagens $f(A_i) = \{b_i\}$, $i = 1, \dots, |B|$. Isso corresponde a um arranjo sem reposição de $k$ elementos de $B$, dos quais existem $|B|!/(|B|-k)!$. Assim, pela regra da multiplicação, existem exatamente

$$\big|\{f \in B^A\colon\ |f(A)| = k\}\big| = \left\{ {|A| \atop k} \right\} \frac{|B|!}{(|B|-k)!} \tag{24}$$

funções $f\colon A \to B$ com imagem de tamanho $|f(A)| = k$.

A contagem das funções injetoras ($k = |A|$), sobrejetoras ($k = |B|$) e bijetoras ($k = |A| = |B|$) de $A \to B$ pode ser obtida imediatamente da equação (24). Essa equação também nos informa que não existem funções $f\colon A \to B$ quando $k = |A|$ e $|B| < |A|$ ou quando $k = |B|$ e $|A| < |B|$, porque o tamanho da imagem $f(A)$ pode ser no máximo do mesmo tamanho do contradomínio $B$.

## 4. Combinatória de palavras

Nesta seção resolvemos alguns problemas envolvendo arranjos e combinações que possuem restrições adicionais usando somente os princípios da adição e da multiplicação e o PIE. Esses problemas são mais desafiadores do que aqueles normalmente abordados no ensino da análise combinatória elementar mas podem ser resolvidos e compreendidos sem o emprego de técnicas mais avançadas, tipicamente envolvendo funções geratrizes, que mencionamos de passagem.

### 4.1. Uma monte de palavras e seu dicionário

Todos conhecemos o problema envolvendo ***anagramas***: dada uma palavra de $n$ letras, quantas outras palavras (que não necessariamente precisam possuir significado) podemos formar usando as mesmas $n$ letras? A resposta depende se a palavra contém letras repetidas ou não.

Se a palavra não contém letras repetidas, como a palavra `BIROSCA`, o número de anagramas corresponde simplesmente ao número de arranjos sem repetição (permutações) das $n$ letras,

$$A(n,n) = P(n) = n! \tag{25}$$

Podemos também calcular o número total de palavras de qualquer tamanho que se pode formar a partir das $n$ letras de uma dada palavra sem letras repetidas—seu ***dicionário***. Neste caso, basta somar o número de todos os arranjos $A(n,k)$ com $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$D(n) = \sum_{k=0}^{n} A(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = 1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n!, \tag{26}$$

onde $A(n,0) = 1$ conta a ***palavra vazia*** de tamanho zero. O número $D(n)$ é par quando $n$ é ímpar e vice-versa. Não é difícil mostrar a partir da equação (26) que $D(n)$ obedece à relação de recorrência

$$D(0) = 1, \qquad D(n) = 1 + nD(n-1),\ n \geqslant 1, \tag{27}$$

que fornece um mecanismo mais prático para calcular esses números.

**Observação 4.1** *Aparentemente, as duas maiores palavras da língua inglesa sem letras repetidas são* `SUBDERMATOGLYPHIC` *e* `UNCOPYRIGHTABLE`*, ambas com 17 letras. No português temos* `SEXTUPLICANDO` *e* `PENDURICALHOS`*, entre outras palavras com 13 letras sem repetição. É muito difícil encontrar palavras longas sem letras repetidas em português devido à abundância de vogais nas palavras de nossa língua. Alfabetos maiores (como o alfabeto cirílico, com 33 caracteres) em princípio oferecem mais possibilidades, mas não necessariamente; o árabe oferece um contraexemplo.*

### 4.2. O problema mais difícil com letras repetidas

Se a palavra contém letras repetidas, como por exemplo a palavra `ARRASO`, alguns arranjos das letras coincidem. Isso acontece porque se permutarmos entre si as letras repetidas do arranjo, o resultado permanece o mesmo. Por exemplo, diferenciando as letras `R` da palavra `ARRASO`, vemos que os arranjos `AṘOR̈AS` e `AR̈OṘAS` correspondem a um único anagrama. Se as $n$ letras são de $k$ tipos diferentes e cada letra do tipo $i$ possui $n_i$ repetições, a ***quantidade de anagramas*** distintos que podemos formar com essas $n$ letras é dada por

$$A(n_1, \ldots, n_k) = \frac{A(n,n)}{n_1! \cdots n_k!} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}, \tag{28}$$

onde $n = n_1 + \cdots + n_k$ e os fatores $n_i!$ no denominador correspondem às permutações que podemos fazer entre as $n_i$ letras idênticas sem alterar o arranjo. Por exemplo, existem $6!/(2!2!1!1!) = 180$ anagramas da palavra `ARRASO`.

Contar o número de palavras distintas que podemos formar com $r < n$ letras a partir de $n$ letras com repetições é significativamente mais difícil do que no caso em que $r = n$, cuja resposta é dada pelo número de anagramas (28). Cada palavra de $r < n$ letras com possíveis repetições pode possuir $0 \leqslant r_i \leqslant n_i$ letras do tipo $i = 1, \ldots, k$, desde que o número total de letras usadas seja igual a $r_1 + \cdots + r_k = r$. Cada palavra dessa pode ser rearranjada em $P(r_1, \ldots, r_k) = r!/(r_1! \cdots r_k!)$ anagramas. Assim, o número de palavras de

$r < n$ letras com possíveis repetições é dado formalmente por

$$\sum_{\substack{0 \leqslant r_i \leqslant n_i \\ r_1+\cdots+r_k=r}} \frac{r!}{r_1!\cdots r_k!}, \tag{29}$$

onde a soma se extende por todas as soluções de $r_1 + \cdots + r_k = r$ respeitando as restrições $0 \leqslant r_i \leqslant n_i$, $i = 1, \ldots, k$. Como se vê, a solução formal (29) do problema—que na verdade consiste tão somente em refraseá-lo em símbolos matemáticos—não é nada prática. Na Seção 4.3 tratamos da resolução da equação $r_1 + \cdots + r_k = r$ com restrições, equação 36.

**Observação 4.2** *Se eliminarmos as restrições $0 \leqslant r_i \leqslant n_i$, $i = 1, \ldots, k$, isto é, se deixarmos cada $r_i$ assumir qualquer valor entre $0$ e $r$, pode-se ver sem muita dificuldade que a soma (29) vale*

$$\sum_{r_1+\cdots+r_k=r} \frac{r!}{r_1!\cdots r_k!} = k^r. \tag{30}$$

*Para ver isso basta considerar o coeficiente de $x^r$ na expansão de $\mathrm{e}^{kx}$,*

$$\mathrm{e}^{kx} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{k^r}{r!} x^r = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}\right)^k = \left(\sum_{r_1=0}^{\infty} \frac{x^{r_1}}{r_1!}\right) \cdots \left(\sum_{r_k=0}^{\infty} \frac{x^{r_k}}{r_k!}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{r_1+\cdots+r_k=r} \frac{1}{r_1!\cdots r_k!}\right) x^r. \tag{31}$$

A solução eficaz do problema das palavras de $r < n$ letras com possíveis repetições, tanto do ponto de vista teórico quanto computacional, requer a introdução de ***funções geratrizes exponenciais***. A raiz do método consiste em reparar que podemos obter cada possível combinação (não arranjo!) de $r \leqslant n$ letras a partir das letras da palavra `ARRASO` como um termo do produto

$$\left(1 + \mathtt{A} + \frac{\mathtt{AA}}{2!}\right)\left(1 + \mathtt{R} + \frac{\mathtt{RR}}{2!}\right)(1 + \mathtt{S})(1 + \mathtt{O}), \tag{32}$$

onde os fatoriais nos denominadores garantem que se a letra em particular aparece mais de uma vez, ela carrega consigo sua “normalização” referente às permutações entre si que as tornam equivalentes. Por exemplo, um dos termos do produto em (32) com $r = 4$ letras é `ARSO`; outro termo é $\frac{1}{2}$`ARRO`. Cada um desses termos gera $r! = 4!$ anagramas. Assim, para contar o número de palavras distintas de 4 letras com possíveis repetições que podemos formar a partir das letras da palavra `ARRASO`, contamos o número de termos com 4 letras do produto (32) e multiplicamos o resultado por 4!, levando em consideração os denominadores fatoriais quando eles estiverem presentes. O produto (32) possui $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ termos, dos quais 8 possuem 4 letras, a saber: `ARSO`, $\frac{1}{2}$`ARRO`, $\frac{1}{2}$`ARRS`, $\frac{1}{2}$`AARO`, $\frac{1}{2}$`AASO`, $\frac{1}{2}$`AARS`, $\frac{1}{4}$`AARR` e $\frac{1}{2}$`RRSO`. Multiplicando cada um desses termos por 4! encontramos que, no total, eles geram $4! \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) = 102$ palavras distintas de 4 letras com possíveis repetições.

Em geral, não estamos interessados nos anagrams eles próprios, apenas em sua quantidade. Isso significa que podemos substituir cada letra `A`, `R`, `S` e `O` na expressão (32) por uma variável $x$ muda, meramente formal. O número de palavras com $r \leqslant 6$ letras com possíveis repetições que podem ser formadas a partir das letras da palavra ARRASO passa a ser dado, dessa forma, pelo coeficiente de $x^r/r!$ (ou, equivalentemente, pelo coeficiente de $x^r$ multiplicado por $r!$) do polinômio

$$\begin{aligned} A(2\mathtt{A},2\mathtt{R},\mathtt{S},\mathtt{O};x) &= \underbrace{\Big(1+x+\frac{x^2}{2!}\Big)}_{\mathtt{AA}}\underbrace{\Big(1+x+\frac{x^2}{2!}\Big)}_{\mathtt{RR}}\underbrace{\Big(1+x\Big)}_{\mathtt{S}}\underbrace{\Big(1+x\Big)}_{\mathtt{O}} = \\ &= 1+4x+7x^2+7x^3+\frac{17}{4}x^4+\frac{3}{2}x^5+\frac{1}{4}x^6. \end{aligned} \tag{33}$$

A solução (33) é mais geral que a dada pela expressão (32), pois vale para qualquer palavra com 2 pares de letras repetidas mais 2 letras distintas, como por exemplo DANADO ou TORPOR. Da expressão acima vemos imediatamente que o número de palavras distintas de $r = 4$ letras com possíveis repetições que podem ser formadas a partir das letras da palavra ARRASO vale $4! \cdot \frac{17}{4} = 102$, como antes. O estudante pode querer verificar que existem exatamente 42 palavras únicas de 3 letras formadas a partir das letras da palavra ARRASO com repetições e listar essas palavras.

A generalização da solução (33) é óbvia: o número de arranjos de $0 \leqslant r \leqslant n$ letras a partir de $n$ letras de $k$ tipos diferentes com $n_i$ repetições da letra do tipo $i$ pode ser obtido a partir do coeficiente de $x^r/r!$ do polinômio

$$A(n_1,\ldots,n_k;x) = \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{n_i}\frac{x^j}{j!}\right) = \left(1+x+\cdots+\frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\cdots\left(1+x+\cdots+\frac{x^{n_k}}{n_k!}\right). \tag{34}$$

Dessa expressão podemos ver imediatamente que existe somente 1 palavra vazia, que é o coeficiente do termo em $x^0$, e que o coeficiente de $x^1$ vale $k$, que corresponde ao número de palavras distintas de 1 letra, que é igual ao número de letras distintas. Vemos também que o coeficiente do termo em $x^{n_1}\cdots x^{n_k} = x^{n_1+\cdots+n_k} = x^n$ multiplicado por $n!$ sempre vale $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$, que corresponde ao número de anagramas $A(n_1,\ldots,n_k)$ dado pela equação (28).

A expressão análoga à (26) para o tamanho do dicionário de palavras distintas formadas a partir das letras de uma palavra com letras repetidas é dado por

$$D(n_1,\ldots,n_k) = \sum_{r=0}^{n}[x^r]A(n_1,\ldots,n_k;x)\cdot r! = 1+k+\cdots+\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}, \tag{35}$$

onde $[x^r]A(n_1,\ldots,n_k;x)$ é a notação usual para indicar o coeficiente do termo em $x^r$ do polinômio $A(n_1,\ldots,n_k;x)$. Os termos indicados por reticências em (35) dependem da estrutura particular da palavra, isto é, dos números $n_1,\ldots,n_k$. Por exemplo, se temos $p$ números $n_i = 2$ em (34), o coeficiente de $x^2$ vale $\binom{k}{2}+\frac{1}{2}p$; no nosso exemplo (33), temos $k = 4$ e $p = 2$, donde $[x^2]P(2\mathtt{A},2\mathtt{R},\mathtt{S},\mathtt{O};x) = \binom{4}{2}+\frac{1}{2}2 = 7$. Exceto nos casos mais simples, a extração desses coeficientes requer técnicas analíticas e algébricas avançadas.

**Observação 4.3** *Como exemplo de conexão entre funções geratrizes e técnicas analíticas mais avançadas, observamos que se uma função geratriz possui (ainda que apenas formalmente) série de Laurent*

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *então o coeficiente $a_n$ pode ser obtido da integral de Cauchy*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,$$

*onde o caminho fechado anti-horário $\gamma$ envolve o polo $z_0$. Dessa forma, todo o arsenal de teoremas e técnicas disponíveis para o cálculo de integrais como essa encontra utilidade em análise combinatória.*[b]

### 4.3. Combinações com repetições e restrições

Concluímos nosso trabalho com a análise de um problema não muito difícil mas raramente mencionado na literatura didática elementar: a contagem de multiconjuntos com restrições.

Seja um conjunto de $n$ objetos de $k$ tipos diferentes com $n_i$ objetos de cada tipo, de tal forma que $n_1+\cdots+n_k = n$. Quantas combinações de $r$ objetos ($0 \leqslant r \leqslant n$) de $k$ tipos diferentes com possíveis repetições podemos formar? Podemos pensar, por exemplo, numa subcoleção de $r$ itens de uma coleção de $n$ bolinhas de gude contendo $r_1 \leqslant n_1$ bolinhas verdes, $r_2 \leqslant n_2$ bolinhas azuis etc. Como a ordem dos itens na subcoleção não importa, cada subcoleção é um multiconjunto $\{1^{r_1},\ldots,k^{r_k}\}$ com

$$r_1+\cdots+r_k = r, \quad 0 \leqslant r_i \leqslant n_i,\ i = 1,\ldots,k. \tag{36}$$

O número de combinações de $r < n$ objetos de $k$ tipos diferentes com possíveis repetições que podemos formar corresponde ao número de soluções desse problema. Podemos calcular esse número pelo PIE, equação (7).

Pela equação (5) e interpretação (6), o número irrestrito de soluções da equação (36) vale $|S| = C(k-1+r,r)$. Desse número irrestrito de soluções devemos excluir aquelas soluções que violam uma ou mais das restrições $0 \leqslant r_i \leqslant n_i$. Seja $A_i$ o conjunto das soluções que violam a $i$-ésima restrição $0 \leqslant r_i \leqslant n_i$. Fazendo a substituição $r_i = n_i+1+s_i$, a condição indesejável $r_i > n_i$ corresponde agora à condição $s_i \geqslant 0$. O número de soluções que violam a restrição $0 \leqslant r_i \leqslant n_i$ corresponde ao número de soluções da equação $r_1+\cdots+s_i+\cdots+r_k = r-(n_i+1)$, que vale $C(k-1+r-(n_i+1),r-(n_i+1))$. Assim, a contribuição das soluções que violam uma restrição vale

$$\sum_{i=1}^{k} |A_i| = \sum_{i=1}^{k} C(k-1+r-(n_i+1),r-(n_i+1)). \tag{37}$$

Exatamente pelo mesmo raciocínio, a contribuição das soluções que violam simultaneamente $q$ restrições ($2 \leqslant q \leqslant k$) vale

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_q} |A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_q}| = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_q} C\Big(k-1+r-\sum_{j=1}^{q}(n_{i_j}+1),\, r-\sum_{j=1}^{q}(n_{i_j}+1)\Big). \tag{38}$$

[b] Essa observação faz uso de conceitos de cálculo diferencial e integral envolvendo variáveis complexas e funções definidas no plano complexo. Uma referência elementar para esse assunto é o livro-texto de James W. Brown e Ruel V. Churchill, ***Variáveis Complexas e Aplicações***, 9a. ed. (Porto Alegre: AMGH, 2015).

A soma de todas as contribuições com $q = 1, \dots, k$ com os sinais apropriados $(-1)^q$ dados pelo PIE, equação (9), corresponde ao número de combinações distintas que podemos formar com $r$ objetos $(0 \leqslant r \leqslant n)$ de $k$ tipos diferentes com possíveis repetições conforme a equação (36).

Quando todas as letras são iguais ($k = 1$) e a palavra usa os $n$ caracteres ($r = n$, $n_1 = n$), o conjunto de soluções irrestritas possui $|S| = C(k-1+r, r) = C(n,n) = 1$ solução e o conjunto de soluções que violam a única restrição possui $|A_1| = C(k-1+r-(n_1+1), r-(n_1+1)) = C(-1,-1) = 0$ soluções. A solução neste caso corresponde à palavra formada pela única letra repetida $n$ vezes.

**Observação 4.4** *O estudante pode estar se perguntando porque escrevemos os coeficientes binomiais que aparecem na solução deste problema na forma $C(k-1+r, r)$ e não na forma aparentemente mais simples $C(k-1+r, k-1)$, que evitaria a repetição de expressões bastante longas que aparecem no segundo argumento do coeficiente, como na equação (38). Fazemos isso porque no exemplo com $k = 1$ e $r = n$ somos levados a considerar o coeficiente $C(-1,-1) = 0$ no primeiro caso e $C(-1,0) = 1$ no segundo caso, e somente o primeiro caso fornece a resposta correta. O que ocorre é que o fator $r - \sum_{j=1}^{q}(n_{i_j}+1)$ "monitora" a existência de soluções: se esse fator for negativo, não existem soluções. Nos coeficientes binomiais isso corresponde ao fato de que se seu segundo argumento for negativo, o coeficiente vale zero, independentemente do valor do primeiro argumento. A igualdade $C(n,k) = C(n,n-k)$ só vale quando $n \geqslant 0$.*

Outro caso interessante ocorre quando todos os $n_i$ são iguais. Neste caso, colocando todos os $n_i = p$, os coeficientes $C(k-1+r-\sum_{j=1}^{q}(n_{i_j}+1), r-\sum_{j=1}^{q}(n_{i_j}+1))$ valem $C(k-1+r-q(p+1), r-q(p+1))$, e já que são todos iguais a sua soma vale

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_q \leqslant n} C(k-1+r-q(p+1), r-q(p+1)) = \binom{k}{q} C(k-1+r-q(p+1), r-q(p+1)), \quad (39)$$

uma vez que cada combinação de índices $i_1, \dots, i_q$ entre 1 e $k$ aparece exatamente uma vez na soma. Pelo PIE, o número de soluções do problema (36) com todas as restrições $r_i \leqslant p$ iguais vale

$$M(k,r,p) = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} \binom{k-1+r-q(p+1)}{r-q(p+1)}. \quad (40)$$

Dependendo dos valores de $k$, $r$ e $p$, a soma (40) pode valer zero. Por exemplo, se $r = kp+1$, não existe nenhuma solução para a equação (36), já que se todos os $r_i \leqslant p$, então $r_1 + \cdots + r_k$ vale no máximo $kp$ e estaríamos tentando distribuir mais objetos do que é possível. Inserindo $r = kp+1$ na expressão (40) obtemos a curiosa identidade

$$M(k,kp+1,p) = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} \binom{(k-q)(p+1)}{k-1} = 0. \quad (41)$$

Por exemplo, quando $k = 3$ a identidade (41) fornece $\binom{3(p+1)}{2} - 3\binom{2(p+1)}{2} + 3\binom{(p+1)}{2} - \binom{0}{2} = 0$, ou, equivalentemente, $\frac{1}{2}[(3p+3)(3p+2) - 3(2p+2)(2p+1) + 3(p+1)p] = 0$, que de fato vale para todo $p$. Da mesma forma, tomando $r = kp-1$ ficamos com $k$ soluções, que correspondem ao número de maneiras de tomar algum dos $k$ possíveis $r_i$ igual a $p-1$ para obter a soma $r_1 + \cdots + r_k = kp-1$. Inserindo $r = kp-1$ na expressão (40) obtemos a igualmente curiosa identidade

$$M(k, kp-1, p) = \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} \binom{(k-q)(p+1)-2}{k-1} = k, \tag{42}$$

que convidamos o estudante a verificar para alguns valores de $k$. Esses exemplos demonstram que é possível obter inúmeras identidades combinatoriais pela aplicação do PIE. Para tanto, basta encontrar os conjuntos $S$ e $A_i$ apropriados—tarefa que constitui, na verdade, a maior parte do desafio!

## 5. O caminho duodécuplo

Na década de 1960, o matemático ítalo-norte-americano Gian-Carlo Rota (1932–1999) classificou os problemas combinatoriais "fundamentais" e suas respostas em termos das possíveis distribuições de $n$ bolas, distintas (por exemplo, numeradas) ou idênticas, entre $k$ urnas, também distintas ou idênticas, sujeitas a algumas restrições adicionais. Essa classificação, que aparece resumida na Tabela 1, ficou conhecida como ***the twelvefold way*** ("o caminho duodécuplo"). É possível estender a Tabela 1 para considerar a possibilidade de que os conteúdos das urnas sejam ordenados (exigindo, nesse caso, bolas distintas), mas não faremos essa discussão aqui.

**Table 1:** Classificação de G.-C. Rota dos problemas combinatoriais fundamentais.

| ***Caminho duodécuplo*** | $n$ bolas distintas $k$ urnas distintas | $n$ bolas distintas $k$ urnas idênticas | $n$ bolas idênticas $k$ urnas distintas | $n$ bolas idênticas $k$ urnas idênticas |
|---|---|---|---|---|
| máximo 1 bola/urna | $k^{\underline{n}} = \dfrac{k!}{(k-n)!}$ | 1 se $n \leqslant k$ <br> 0 se $n > k$ | $\binom{n}{k}$ | 1 se $n \leqslant k$ <br> 0 se $n > k$ |
| mínimo 1 bola/urna | $\left\{ n \atop k \right\} k!$ | $\left\{ n \atop k \right\}$ | $\binom{n-1}{k-1}$ | $p(n,k)$ |
| sem restrições | $k^n$ | $\sum_{j=1}^{k} \left\{ n \atop j \right\}$ | $\binom{k-1+n}{n}$ | $\sum_{j=1}^{k} p(n,j)$ |

Fonte: Elaboração própria, 2023.

O estudante pode facilmente identificar na Tabela 1 alguns dos problemas abordados nestas notas. Em particular, podemos interpretar algumas entradas da Tabela 1 em termos de funções. Por exemplo, contar de quantas maneiras podemos distribuir $n$ bolas distintas em $k$ urnas distintas no caso em que cada urna recebe no mínimo 1 bola é obviamente equivalente a contar quantas funções sobrejetoras existem de $A \to B$ com $|A| = n$ e $|B| = k$. Os números $p(n,k)$ que aparecem na Tabela 1 contam as partições do número inteiro $n \geqslant 1$ em $1 \leqslant k \leqslant n$ partes. Por exemplo, o número 6 pode ser partido em 2 partes de 3 maneiras diferentes, $1+5=2+4=3+3$, de forma que $p(6,2)=3$; naturalmente, $p(n,1)=p(n,n)=1$. Vemos que $p(n,k)$ equivale ao número de multiconjuntos de $k$ inteiros positivos com soma igual a $n$ que podemos formar, que por sua vez equivale ao número de distribuições de $n$ bolas idênticas em $k$ urnas idênticas sem deixar nenhuma urna vazia.

## 6. Observações finais

Nestas notas abordamos versões relativamente simples de problemas envolvendo arranjos e combinações com repetições e alguma restrição adicional. A resolução desses problemas envolve em alguns casos o uso do princípio da inclusão-exclusão (PIE), em outros casos funções geratrizes.

Uma das maneiras mais rigorosas e abrangentes de tratar problemas de distribuição, ocupação e partição, dos quais os problemas envolvendo arranjos e combinações tratados na literatura didática são exemplos elementares, é através do ***teorema mestre de MacMahon*** e suas variações. Esse teorema estabelece uma conexão entre problemas combinatoriais e polinômios multivariados—semelhantemente à abordagem através de funções geratrizes—, envolvendo tópicos avançados de álgebra (tais como representação de grupos e funções simétricas) e análise real e complexa (tais como polinômios ortogonais e funções hipergeométricas). Aplicações e extensões dessa maquinaria constituem tópicos correntes de pesquisa em diversas áreas, da álgebra de anéis não-comutativos à física matemática e à computação simbólica. O seu domínio, porém, constitui um investimento significativo. Trata-se de um excelente assunto para ser explorado em uma dissertação ou tese por um estudante de pós-graduação suficientemente motivado.

## 7. Referências

O aluno interessado em análise combinatória elementar (nível de ensino médio) pode consultar o livro-texto de Samuel Hazzan, ***Combinatória e Probabilidade***, 8a. ed. (São Paulo: Atual, 2013), volume 5 da conhecida coleção de textos Fundamentos de Matemática Elementar. Outro livro-texto aproximadamente no mesmo nível é Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez, ***Análise Combinatória e Probabilidade***, 11a. ed. (Rio de Janeiro: SBM, 2020), da Coleção do Professor de Matemática da SBM.

Em nível de graduação, o livro-texto de José Plínio O. Santos, Margarida P. Mello e Idani T. C. Murari, ***Introdução à Análise Combinatória***, 4a. ed. rev. (Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007), oferece um excelente apanhado em nível introdutório acerca do princípio da inclusão-exclusão, funções geratrizes (ou geradoras) e relações de recorrência, com muitos exercícios e problemas, a maioria com soluções.

Um livro de análise de algoritmos que serve como um tratado de matemática discreta é Robert Sedgewick e Philippe Flajolet, ***An Introduction to the Analysis of Algorithms***, 2a. ed. (Upper Saddle River: Addison-Wesley, 2013). Os autores empregam uma grande qualtidade de técnicas e resultados em matemática discreta na análise de algoritmos mantendo o nível de exposição elementar e acessível. O tratamento das funções geratrizes e aproximações assintóticas, assunto nos quais Flajolet foi um reconhecido especialista, inovador e irreverente, é excelente e altamente recomendado.

Embora não seja um livro-texto de análise combinatória, o volume de Ronald L. Graham, Donald E. Knuth e Oren Patashnik, ***Matemática Concreta: Fundamentos para a Ciência da Computação***, 2a. ed. (São Paulo: LTC, 1995), é um livro de enorme reputação, escrito de maneira atraente, com uma quantidade inigualável de informação matemática, histórica e prática. Nesse texto o estudante vai encontrar um capítulo inteiro dedicado aos coeficientes binomiais, outro aos números especiais incluindo números de Stirling, harmônicos, de Bernoulli e de Fibonacci, e também um capítulo dedicado às funções geratrizes. O capítulo inicial sobre somas e manipulação de somas e produtos é indispensável. O livro contém exercícios (em geral trabalhosos) e soluções. Tendo em vista que a tradução para o português do original em inglês já possui quase três décadas e que a versão em inglês passou por diversas reimpressões com muitas correções e alterações desde então, sugiro ao estudante interessado que procure uma edição (reimpressão) mais recente do livro em inglês.

Finalmente, existem inúmeros textos para o estudante interessado em ingressar na área de análise combinatória "profissional", dependendo da área e subárea de interesse dentro da discplina. Três textos consagrados, no entanto, cobrem quase todos os fundamentos e são referências obrigatórias: Richard P. Stanley, ***Enumerative Combinatorics***, Volume 1, 2a. ed. (New York: Cambridge University Press, 2012), Philippe Flajolet e Robert Sedgewick, ***Analytic Combinatorics*** (Cambridge: Cambridge University Press, 2009), uma versão mais avançada e abrangente do livro-texto dos mesmos autores mencionado anteriormente, e Jacobus H. Van Lint e Richard M. Wilson, ***A Course in Combinatorics***, 2a. ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 2001). A partir dessas referências o estudante já poderia se dedicar à pesquisa em matemática discreta e análise combinatória, por exemplo, aplicada à teoria da computação e análise de algoritmos.

$* - * - *$