

ACH2053 – Introdução à Estatística

Aula 02: Probabilidade

Valdinei Freire

`valdinei.freire@usp.br`

`http://www.each.usp.br/valdinei`

Escola de Artes, Ciências e Humanidades - USP

2025

1. DEGROOT, M.H., SCHERVISH, M.J. Probability and Statistics, Addison Wesley, 4th edition (2011). **Capítulo 1**
2. DEVORE, J.L. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências, Pioneira Thompson Learning, 8ª edição, 2016. **Capítulo 2, seções 2.1, 2.2, 2.3**

Experimento

Um experimento é qualquer processo, real ou hipotético, no qual os possíveis resultados podem ser identificados *a priori*.

Classificamos os experimentos em dois tipos: aleatórios e determinísticos. O resultado dos experimentos determinísticos é conhecido antes mesmo que ele ocorra. Probabilidade é uma medida sobre o espaço de resultados de experimentos aleatórios.

1. sorteia-se uma pessoa presa com posse de maconha, e verifica o resultado do julgamento.
2. sorteia-se um pessoa aleatoriamente e aplica-se um exame com N questões.
3. sorteia-se uma pessoa na população, pede para a pessoa fazer uma pergunta ao ChatGPT e verifica a resposta do ChatGPT.

Experimento

1. (i) coloca-se um anúncio na internet recrutando voluntários que atuam na área de saúde para teste de vacinas; (ii) entre os candidatos, 13.000 são selecionados; (iii) metade toma a vacina CORONAVAC e a outra metade toma uma vacina placebo; (iv) acompanha-se os indivíduos por 3 meses, realizando testes para o COVID semanalmente.
2. sortear pessoas na sala até encontrar algum aniversariante de agosto
3. arremessar um dado com 6 lados
4. arremessar uma moeda
5. arremessar uma moeda três vezes
6. tirar uma carta do baralho
7. arremessar um dado e uma moeda
8. colocar 3 bolas vermelhas e 4 bolas verdes em uma caixa e pegar uma de olhos fechados

Evento e Espaço Amostral

Um evento é um conjunto bem-definido de possíveis resultados do experimento. A coleção de todos possíveis resultados de um experimento é chamada de espaço amostral do experimento, denominado por S ou Ω .

Os eventos representam as perguntas que podem ser formuladas sobre o experimento, enquanto a probabilidade é uma medida sobre a ocorrência de eventos.

- ▶ dados: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ▶ moeda: $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$
- ▶ moeda 3 vezes: $\Omega = \{(\text{cara}, \text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}, \text{cara}, \text{coroa}), \dots, (\text{coroa}, \text{coroa}, \text{coroa})\}$
- ▶ baralho: $\Omega = \{A \text{ paus}, 2 \text{ paus}, \dots, Q \text{ ouros}, K \text{ ouros}\}$
- ▶ dado e moeda: $\Omega = \{(1, \text{cara}), (2, \text{cara}), \dots, (6, \text{coroa})\}$
- ▶ aniversariante de agosto: $\Omega = 2^{\{\text{Alan}, \text{Alexsandro}, \dots, \text{Valdinei}, \dots, \text{Vinicius}, \text{Willian}\}}$

Evento e Espaço Amostral

- ▶ posse de maconha:
 $\Omega = \{(\text{preto}, \text{homem}, 23 \text{ anos}, \dots, 5 \text{ gramas}, \text{condenado}), \dots, (\text{branco}, \text{homem}, 18 \text{ anos}, \dots, 11 \text{ gramas}, \text{não condenado}), \dots\}$
- ▶ exame com $N = 5$: $\Omega = \{00000, 00001, 00010, \dots, 11110, 11111\}$
- ▶ vacinação: $\Omega = \{(\text{vacinado e COVID}=56, \text{placebo e COVID}=0), \dots, (\text{vacinado e COVID}=83, \text{placebo e COVID}=167), \dots\}$
- ▶ ChatGPT: $\Omega = \{\dots, (\text{Valdinei}, \text{'O que é probabilidade?'}, \text{'Probabilidade é um conceito matemático que ...'}), \dots\}$

Espaço de Medida

Condições sobre eventos para teoria de probabilidade:

1. O espaço amostral Ω deve ser um evento.
2. Se A é um evento, então A^c também é um evento.¹
3. Se A_1, A_2, \dots é uma coleção contável de eventos, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ também é um evento.

A classe de eventos \mathcal{A} satisfazendo estas propriedades é denominada σ -álgebra.

A dupla (Ω, \mathcal{A}) é um espaço mensurável.

Se existe uma medida $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, então a tripla $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida.

¹Aqui A^c indica o complemento do conjunto A com relação ao espaço amostral Ω . Pode-se utilizar também \bar{A} para indicar o complemento de A .

1. O conjunto vazio \emptyset é um evento.
2. A união de uma quantidade finita de eventos A_1, A_2, \dots, A_n é um evento.
3. Se A e B são eventos, então $A \cap B$ também é um evento.

Definition

Uma medida de probabilidade, ou simplesmente, probabilidade, sobre um espaço amostral Ω é uma especificação de números $\Pr(A)$ para qualquer evento A sobre Ω que satisfaz os seguintes axiomas:

1. Para todo evento A , $\Pr(A) \geq 0$.
2. $\Pr(\Omega) = 1$.
3. Para toda sequência infinita de eventos disjuntos² A_1, A_2, \dots ,

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(A_i).$$

²Em termos de eventos, A e B são disjuntos se ambos não podem ocorrer juntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$.

- ▶ Para toda sequência finita de eventos disjuntos A_1, A_2, \dots, A_n ,

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i).$$

.

- ▶ Para todo evento A , $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$.
- ▶ $\Pr(\emptyset) = 0$
- ▶ Se $A \subset B$, então $\Pr(A) \leq \Pr(B)$.
- ▶ Para dois eventos A e B , $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$.

Propriedades de Probabilidade

- ▶ Para todo evento A_1, A_2, \dots, A_n ,

$$\begin{aligned}\Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = & \sum_{i=1}^n \Pr(A_i) - \sum_{i < j} \Pr(A_i \cap A_j) \\ & + \sum_{i < j < k} \Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots \\ & + (-1)^{n+1} \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n).\end{aligned}$$

- ▶ (de Morgan) Para dois eventos A e B , temos:

$$\Pr([A \cup B]^c) = \Pr([A^c \cap B^c]) \quad \text{e} \quad \Pr([A \cap B]^c) = \Pr([A^c \cup B^c])$$

- ▶ (de Morgan) Para todo evento A_1, A_2, \dots, A_n , temos:

$$\Pr\left(\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right]^c\right) = \Pr\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) \quad \text{e} \quad \Pr\left(\left[\bigcap_{i=1}^n A_i\right]^c\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c\right)$$

Probabilidade informa sobre a ocorrência de eventos.

Clássica Todo resultado possível tem a mesma chance de ocorrer (simetria).

Frequencialista A probabilidade de um evento ocorrer determina a frequência com que eventos ocorrem.

Bayesiana A probabilidade de um evento é subjetiva.

Técnicas de Contagem

- ▶ Se os resultados de um experimento são equiprováveis, a tarefa de calcular probabilidades se reduz a uma contagem. Temos que:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Exercícios

1. Qual é a probabilidade de sair número ímpar ao lançar um dado?
2. Qual é a probabilidade da quantidade de moedas com cara ser ímpar ao realizar três lançamentos de moedas?
3. Qual é a probabilidade de sortear uma carta de um baralho e essa carta ser de ouros ou uma letra?
4. Considere o seguinte experimento: arremesse uma moeda até obter cara.
 - 4.1 Qual é a probabilidade de que você precise de pelo menos 4 lançamentos?
 - 4.2 Qual é a probabilidade de que você precise no máximo 3 lançamentos?
 - 4.3 Qual é a probabilidade de que você precise de exatamente 3 lançamentos?

Técnicas de Contagem

- ▶ Se o primeiro elemento ou objeto de um par ordenado puder ser selecionado de n_1 formas e para cada uma dessas n_1 formas o segundo elemento do par puder ser selecionado de n_2 formas, então, o número de pares é $n_1 n_2$.

Exercícios

1. Considere o seguinte experimento: arremesse uma moeda e um dado ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de que o dado seja menor ou igual a 2 e a moeda seja cara?
2. Considere o seguinte experimento: arremesse um dado até obter a face 2. (a) Qual é a probabilidade de que você precise de pelo menos 4 lançamentos? (b) Qual é a probabilidade de que você precise no máximo 3 lançamentos? (c) Qual é a probabilidade de que você precise de exatamente 3 lançamentos?
3. Considere o seguinte experimento: arremesse três dados. Qual é a probabilidade de que todos os dados sejam iguais?

- ▶ Um subconjunto ordenado é chamado arranjo. O número de arranjos de tamanho k que podem ser criados a partir de n indivíduos ou objetos em grupo será representado por $N_{k,n}$ e pode ser obtido por:

$$N_{k,n} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- ▶ Um subconjunto não ordenado é chamado combinação. O número de combinações de tamanho k que podem ser criadas a partir de n indivíduos ou objetos em grupo será representado por $C_{k,n} = \binom{n}{k}$. $\binom{n}{k}$ se lê “ n tomados k a k ” e pode ser obtido por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exercícios

1. Considere o seguinte experimento: retire 5 cartas de um baralho. Qual é a probabilidade de que todas sejam de copas?
2. Considere o seguinte experimento: retire 5 cartas de um baralho. Qual é a probabilidade de que todas sejam de um mesmo naipe?
3. Considere o seguinte experimento: retire 5 cartas de um baralho. Qual é a probabilidade de que elas formem uma sequência?
4. Considere o seguinte experimento: retire 5 cartas de um baralho. Qual é a probabilidade de que 3 sejam de paus e 2 sejam de copas?
5. Considere o seguinte experimento: retire 5 cartas de um baralho. Qual é a probabilidade de que 3 sejam de um valor e 2 sejam de outro valor?