Primeira prova de Cálculo 2 – 23 / 10 / 2020 – Prof. Alexandre F. Ramos

Leia atentamente todas as instruções a seguir.

Respostas corretas que não apresentarem justificativas serão desconsideradas.

As folhas de respostas devem ser reunidas em um só arquivo, formato .pdf. A primeira linha de cada página da folha de respostas deve conter as seguintes informações:

Nome: ; **N. USP:** ; **Turma:** .

Q.1 (Total: 1 ponto(s)). A Lei da Renda de Pareto afirma que o número de pessoas com renda entre $x = a$ e $x = b$ é $N = \int_a^b Ax^{-k}\,dx$, em que A e k são constantes que satisfazem $A > 0$ e $k > 1$. A renda média dessas pessoas é dada por:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\int_a^b Ax^{1-k}\,dx.$$

a. *(Vale: 0,5 ponto(s)).* Calcule A como função de k, a e b.

b. *(Vale: 0,5 ponto(s)).* Calcule $\overline{x}$.

Q.2 (Total: 3 ponto(s)). Uma empresa de tecnologia compra um novo sistema de computação cujo valor inicial é V. O sistema depreciará a uma taxa $f = f(t)$ e acumulará custos de manutenção a uma taxa $g = g(t)$, onde t é o tempo medido em meses. A companhia quer determinar o tempo ótimo para substituir o sistema.

a. *(Vale: 0,75 ponto(s)).* Seja

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds.$$

Mostre que os números críticos de C ocorrem nos números t nos quais $C(t) = f(t) + g(t)$.

b. *(Vale: 0,75 ponto(s)).* Suponha que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{se } 0 < t \leq 30 \\ 0 & \text{se } t > 30 \end{cases}$$

e $g(t) = \dfrac{Vt^2}{12.900}$ se $t > 0$.

Determine o período de tempo T para que a depreciação total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ seja igual ao valor inicial V.

c. *(Vale: 0,75 ponto(s)).* Determine o mínimo absoluto de C em $(0, T]$.

d. *(Vale: 0,75 ponto(s)).* Esboce os gráficos de C e $f + g$ no mesmo sistema de coordenadas e verifique o resultado da parte *a.* nesse caso.

Q.3 (Total: 2 ponto(s)). Os astrônomos usam uma técnica chamada *estereografia estelar* para determinar a densidade das estrelas em um aglomerado estelar a partir da densidade (bidimensional) observada, que pode ser analisada a partir de uma fotografia. Suponha que em um aglomerado esférico de raio R a densidade das estrelas dependa somente da distância r do centro do aglomerado. Se a densidade estelar aparente for dada por $y(s)$, onde s é a distância planar observada do centro do aglomerado e $x(r)$ é a densidade real, pode ser mostrado que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}x(r)\,dr.$$

Se a densidade real das estrelas em um aglomerado for $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encontre a densidade aparente $y(s)$.

Q.4 (Total: 4 ponto(s)). Um foguete é lançado verticalmente, consumindo combustível a uma taxa constante de b quilogramas por segundo. Seja $v = v(t)$ a velocidade do foguete no instante t e suponha que a velocidade da emissão de gases u seja constante. Considere $M = M(t)$ como a massa do foguete no tempo t e observe que M decresce à medida que o combustível queima. Se desprezarmos a resistência do ar, segue da Segunda Lei de Newton que

$$F = M\frac{dv}{dt} - ub,$$

em que a força $F = -Mg$. Logo,

$$M\frac{dv}{dt} - ub = -Mg. \qquad (1)$$

Sejam M_1 a massa do foguete sem combustível, M_2 a massa inicial do combustível, e $M_0 = M_1 + M_2$. Então, até ele ficar sem combustível no tempo $t = M_2/b$, a massa será $M = M_0 - bt$.

a. (Vale: 1 ponto(s)). Substitua $M = M_0 - bt$ na Equação (1) e isole v na equação resultante. Use a condição inicial $v(0) = 0$ para calcular a constante.

b. (Vale: 1 ponto(s)). Determine a velocidade do foguete no instante $t = M_2/b$. Esta é chamada velocidade terminal.

c. (Vale: 1 ponto(s)). Determine a altura do foguete $y = y(t)$ no tempo terminal.

d. (Vale: 1 ponto(s)). Encontre a altura do foguete em um instante t qualquer.