LÓGICA E CÁLCULO PROPOSICIONAL

1. Proposições

Proposições são declarações que possuem um valor verdade bem definido: V (verdadeiro) ou F (falso).

Nem todas as declarações da linguagem cotidiana são proposições:

(i) Hoje é segunda-feira.

(ii) A Armênia fica na Europa.

(iii) Faça os exercícios da lista.

(iv) $2+2=3$.

As declarações (i), (ii) e (iv) são proposições — podem ser avaliadas quanto à verdade ou não de seu conteúdo — enquanto a declaração (iii) não é.

Proposições compostas

São proposições formadas pela justaposição de outras proposições por meio de conectivos lógicos e cujo valor verdade pode ser determinado a partir dos valores verdade das proposições que a compõe.

Ex.: Hoje é 2ª f e está fazendo sol.

O Corinthians perdeu o jogo ou o juiz roubou

Os principais conectivos lógicos são e (and), ou (or) e não (not).

2. Operações lógicas elementares

Conjunção: e

Se p e q são duas proposições, podemos compô-las para formar a proposição $p \wedge q$ (lê-se "p e q").

$p \wedge q$ é proposição, então possui valor verdade que pode ser determ[inado] a partir dos valores verdade de p e de q.

Def.: Se p e q são V, então $p \wedge q$ é V, senão $p \wedge q$ é F.

Podemos usar uma tabela verdade para determinar o valor de $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

<u>Disjunção</u>: <u>ou</u>

p, q proposições podem ser compostas na <u>disjunção</u> $p \vee q$ (lê-se "p ou q").

<u>Def.</u>: se p e q são F, então $p \vee q$ é F, senão $p \vee q$ é V.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. Tabelas verdade

Seja $\varphi(p,q,\dots)$ uma expressão construída a partir das variáveis lógicas $p, q, \dots$ e dos conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, e $\neg$.

Essa expressão é naturalmente uma proposição composta que pode ser avaliada e possui uma tabela verdade $\therefore$ pode ser determinada a partir dos valores verdade das proposições que a compõe.

Ex.: $\varphi(p,q) = \neg(p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Naturalmente, com a prática podemos "pular" algumas dessas colunas, por ex., as colunas 3 e 4 ou as colunas 2 e 4 no exemplo anterior.

Ordem de precedência

Para evitar excesso de parêntesis convenciona-se que $\neg$ tem precedência sobre $\wedge$ que tem precedência sobre $\vee$.

Ex.: $\neg p \wedge q = (\neg p) \wedge q$, e não $\neg(p \wedge q)$

$p \wedge q \vee r = (p \wedge q) \vee r$, e não $p \wedge (q \vee r)$

Ex.: Avalie a proposição $p \wedge q \vee q \wedge \neg r$

(VVV, VVF, ..., FFF : V, V, F, F, F, F, F, F)

4. Tautologias, contradições e equival.

Tautologias

Expressões lógicas que são identicamente verdadeiras: $\varphi(p, q, \ldots) = V$. Por ex., $p \vee \neg p$ é uma tautologia.

Contradição: $\varphi(p, q, \ldots) = F$ identicalᵉ.
Por ex., $p \wedge \neg p$.

A negação de uma tautologia é uma contradição e vice-versa.

Ex.: Mostre que $p \vee \neg(p \wedge q)$ é uma tautologia e que $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ é uma contradição

Um dos principais objetivos da lógica é estabelecer tautologias, que são sempre verdade independentemente dos argumentos. Por ex., todo teorema em matemática é uma tautologia!

Se $\varphi(p,q,\dots)$ é uma tautologia e $P(p,q,\dots)$, $Q(p,q,\dots)$ são proposições quaisquer, então $\varphi(P,Q,\dots)$ continua sendo uma tautologia.

<u>Equivalência lógica</u>: Duas proposições $\varphi(p,q,\dots)$ e $\psi(p,q,\dots)$ envolvendo as mesmas proposições $p,q,\dots$ são ditas equivalentes,

$$\varphi(p,q,\dots) \equiv \psi(p,q,\dots)$$

se possuem as mesmas tabelas verdade.

Às vezes denotamos $\varphi \equiv \psi$ por $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

<u>Ex.</u>: $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$.

5. Álgebra de proposições

A álgebra de proposições possui uma relação estreita com a álgebra de conjuntos que já estudamos.

Idempotência: $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$

Associativa: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Comutativa: $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Distributiva: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Identidade: $p \vee F = p$, $p \vee V = V$

$$p \wedge F = F , \quad p \wedge V = p$$

Involução: $\neg\neg p = p$

Complemento: $p \vee \neg p \equiv V$, $\neg V \equiv F$

$p \wedge \neg p \equiv F$, $\neg F \equiv V$

Leis de De Morgan: $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

Ex.: Procure reescrever algumas dessas relações em termos de operações sobre conjuntos.

6. Declarações condicionais

Muitas declarações são do tipo "se p então q", que podem também ser avaliadas como V ou F e são denotadas

$$p \to q$$

que também se lê "p implica q" ou então "p somente se q".

Declarações do tipo "p se e somente se q" são denotadas por

$$p \leftrightarrow q$$

e são conhecidas como declarações bicondicionais. As tabelas verdade de $p \to q$ e $p \leftrightarrow q$ são

p	q	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

A declaração condicional $p \to q$ é falsa somente quando $p = V$ e $q = F$, ou seja, não podemos "concluir" que alguma coisa é falsa tão somente porque outra coisa é verdadeira.

Ex.: Mostre que $p \to q \equiv \neg p \vee q$.

7. Argumentos

Um argumento é uma afirmação acerca de um cj. de proposições $P_1, \dots, P_n$ que por conseguinte fornece uma outra proposição Q:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

Def.: Um argumento $P_1, \dots, P_n \vdash Q$ é válido (ou lógico) toda vez que Q é verdade quando todos os $P_1, \dots, P_n$ são verdade. Um argumento que não é válido é chamado de falácia.

As proposições $P_1, \dots, P_n$ em um argumento são chamadas premissas e a proposição Q é chamada conclusão.

Podemos ler o argumento $P \vdash Q$ como "a partir de P, sabemos que Q". Também podemos usar $\vdash Q$ para denotar "sabemos que Q é verdade", o equivalente lógico de um teorema em matemática!

Ex.: $p, p \to q \vdash q$ é um argumento válido, pois p e $p \to q$ são ambos verdadeiros somente quando ambos p e q são V, e portanto q é V.

Ex.: $p \to q, q \vdash p$ é uma falácia ("falácia da afirmação do consequente")

Teo.: O argumento $P_1, \ldots, P_n \vdash Q$ é válido se e somente se a proposição $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q$ for uma tautologia.

<u>Silogismos</u> consistem na "transitividade" dos argumentos válidos: se p implica q e q implica r, então p implica r, isto é, o argumento

$$p \to q, q \to r \vdash p \to r$$

é válido. Esse argumento pode ser reescrito na forma

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

<u>Ex.</u>: Se um homem é solteiro, ele é infeliz.
Se um homem é infeliz, ele morre cedo.
Portanto, homens solteiros morrem cedo.

h. solteiro → infeliz, infeliz → morre cedo
⊢ h. solteiro morre cedo.

(Este é um silogismo altamente duvidoso hoje em dia; quem sabe no tempo de de Aristóteles...)

8. Funções proposicionais e quantificadores

Uma <u>função proposicional</u> $p(x)$ é uma expressão que sempre vale (é verdadeira) em determinado conjunto A. O <u>conjunto verdade</u> de $p(x)$ é dado por

$$V_p = \{x : x \in A,\ p(x) \text{ é verdade}\}$$

ou ainda, mais simplesmente, $V_p = \{x : p(x)\}$

Frequentemente A é um cj. numérico e $p(x)$ é uma equação ou inequação.

Ex.: $p(x) \equiv x+2>7,\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow V_p = \{6,7,8,\dots\}$

$p(x) \equiv x+5<4,\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow V_p = \emptyset$

$p(x) \equiv x+1>0,\ x \in \mathbb{N} \Rightarrow V_p = \mathbb{N}$.

Quantificador universal

Seja $p(x)$ uma função proposicional sobre determinado cj. A.

$p(x)$ é uma "expressão aberta", sem valor verdade, até que seja quantificada, isto é, até que digamos para que $x \in A$ ela é válida.

O quantificador universal estabelece que $p(x)$ vale para todos os x em determinado cj. e se escreve

$$(\forall x \in A)\, p(x) \quad \text{ou} \quad \forall x\; p(x)$$

e se lê "para todo $x \in A$, $p(x)$ é verdadeira" ou ainda "para todo x, $p(x)$".

Quando precedemos a expressão $p(x)$ por "$\forall x$" ela adquira valor verdade.

$(\exists x \in A)\, p(x) \equiv \{x : x \in A,\ p(x)\} \neq \emptyset$,

isto é, o cj. verdade de $p(x)$ não é vazio.

Ex.: $(\exists n \in \mathbb{N})(n+4<7)$ é verdade, pois $V_p = \{1,2\} \neq \emptyset$

$(\exists x \in \mathbb{R})(x^2+1=0)$ é falso, pois $V_p = \emptyset$.

Negação de proposições quantificadas

Como uma função proposicional quantificada é uma proposição, ela pode ser negada.

Teo (De Morgan). $\underbrace{\neg(\forall x \in A)\, p(x)}_{(i)} \equiv \underbrace{(\exists x \in A) \neg p(x)}_{(ii)}$

Dem.:

(i) Não é verdade que para todo $x \in A$ vale $p(x)$

(ii) Existe um $x \in A$ tal que $p(x)$ não é verdade

Obviamente (i) $\equiv$ (ii).

Teo (De Morgan). $\underbrace{\neg(\exists x \in A)\, p(x)}_{(i)} \equiv \underbrace{(\forall x \in A) \neg p(x)}_{(ii)}$

Dem.:

(i) Não é verdade que existe um $x \in A$ tal que $p(x)$ vale

(ii) Para todo $x \in A$, $p(x)$ não é verdade.

Obviamente (i) $\equiv$ (ii).

<u>Obs.</u>: A expressão $\neg p(x)$ significa que $\neg p(x)$ é verdade quando $p(x)$ é falso e vice-versa.

Podemos igualmente usar $p(x) \wedge q(x)$ e $p(x) \vee q(x)$ no mesmo sentido.

Em termos de conjuntos verdade temos

$$V(\neg p(x)) = \overline{V(p(x))}$$

$$V(p(x) \wedge q(x)) = V(p(x)) \cap V(q(x))$$

$$V(p(x) \vee q(x)) = V(p(x)) \cup V(q(x))$$

<u>Ex.</u>: Mostre as leis de De Morgan para funções proposicionais:

$$\neg(p(x) \wedge q(x)) = \neg p(x) \vee \neg q(x) \quad \text{etc.}$$