ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica (2024.2)

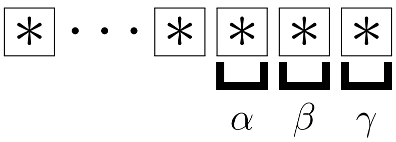
Primeira Prova – Outubro/2024

Nome: ____ Nº USP: ______________

Explicitar o raciocínio na resolução;
a mera apresentação das respostas não é digna de pontuação positiva

-1) Frequência (em %): 100 97 93 90 87 83 80 77 73 70

0) Conforme a figura abaixo, denote por α, β e γ, respectivamente, o antepenúltimo, o penúltimo e o último dígitos à direita de seu número USP. Este item é **obrigatório**.



Exemplo: se seu número USP for "1235", então $\alpha = 2$, $\beta = 3$ e $\gamma = 5$.

Definem-se os números Υ, Ψ e Ω da seguinte forma:

$$\Upsilon = \alpha + 10, \quad \Psi = \begin{cases} \beta + 5 & , \quad \text{se } 0 \leq \beta \leq 4 \\ \beta & , \quad \text{se } 5 \leq \beta \leq 9 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Omega = \begin{cases} \gamma + 5 & , \quad \text{se } 0 \leq \gamma \leq 4 \\ \gamma & , \quad \text{se } 5 \leq \gamma \leq 9 \end{cases}$$

Exemplo: se $\alpha = 2$, $\beta = 3$ e $\gamma = 5$, então $\Upsilon = 12$, $\Psi = 8$ e $\Omega = 5$.

Escreva seu Υ, Ψ e Ω

Υ	Ψ	Ω

1) Sejam $U = \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ e $V = \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ dois espaços vetoriais (aqui, $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ indica o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas reais) e sejam $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ e $C = \{c_1, c_2\}$ bases ordenadas de U e V, respectivamente. Tome $b_1 := \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $b_2 := \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $b_3 := \left(\begin{smallmatrix}\Psi\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $c_1 := \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)$ e $c_2 := \left(\begin{smallmatrix}\Omega\\0\end{smallmatrix}\right)$.

a) [3.0 pontos] Seja $[T]_{BC}$ a matriz de transformação linear (entre as bases ordenadas B e C) dada por $[T]_{BC} = \begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ -\Omega & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Determinar a forma algébrica de T (na forma canônica).

b) [1.0 ponto] Sejam E_U e E_V bases canônicas de U e V, nesta ordem. Determinar $[T]_{E_U E_V}$

c) [2.0 pontos] Seja $M = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ a matriz mudança de base de C para $\tilde{C}$. Determinar $[T]_{B\tilde{C}}$.

1a) Da organização de

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ -\Omega & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

sabe-se que

$$T(b_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}\Upsilon\\-\Omega\end{pmatrix}_C}^{\substack{\text{Coluna 1}\\ \text{de } [T]_{BC}}}, \quad T(b_2) = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}\Upsilon\\0\end{pmatrix}_C}^{\substack{\text{Coluna 2}\\ \text{de } [T]_{BC}}} \quad \text{e} \quad T(b_3) = T\begin{pmatrix}\Psi\\-1\\1\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}_C}^{\substack{\text{Coluna 3}\\ \text{de } [T]_{BC}}}. \tag{2}$$

A fim de aproveitar os vetores $T(b_1)$, $T(b_2)$ e $T(b_3)$ encontrados acima, deve-se estabelecer a correspondência entre $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in U$ (na base canônica) e sua representação na base B. Como

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (y+z)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (x + \Psi y - y - z)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-y)\begin{pmatrix}\Psi\\-1\\1\end{pmatrix} = (y+z)\, b_1 + (x + \Psi y - y - z)\, b_2 + (-y)\, b_3, \tag{3}$$

a transformação linear T atuando em (3) implica

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= (y+z)\,T(b_1) + (x+\Psi y - y - z)\,T(b_2) + (-y)\,T(b_3) \\
&= (y+z)\begin{pmatrix} \Upsilon \\ -\Omega \end{pmatrix}_C + (x+\Psi y - y - z)\begin{pmatrix} \Upsilon \\ 0 \end{pmatrix}_C + (-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_C \\
&= \begin{pmatrix} \Upsilon x + \Upsilon\Psi y - y \\ -(y+z)\,\Omega + y \end{pmatrix}_C, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

onde os resutados de (2) foram invocados. Finalmente, a conversão de (4) para a base canônica conduz a

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon x + \Upsilon\Psi y - y \\ -(y+z)\,\Omega + y \end{pmatrix}_C &= [\Upsilon x + \Upsilon\Psi y - y]\,c_1 + [-(y+z)\,\Omega + y]\,c_2 \\
&= [\Upsilon x + \Upsilon\Psi y - y]\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + [-(y+z)\,\Omega + y]\begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\Omega\,(\Omega-1)\,y - \Omega^2 z \\ -\Upsilon x - (\Upsilon\Psi - 1)\,y \end{pmatrix}, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

que é a representação algébrica (na base canônica) de $T \in \mathcal{L}(U,V)$.

1b) De (5), é imediato que

$$
T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Upsilon \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega\,(\Omega-1) \\ -(\Upsilon\Psi-1) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (6)
$$

donde se tem

$$
[T]_{E_U E_V} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega\,(\Omega-1) & -\Omega^2 \\ -\Upsilon & -(\Upsilon\Psi-1) & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)
$$

1c) <u>Solução 01</u>: Se M é a matriz mudança de base de C para $\tilde{C}$, esta corresponde à transformação linear identidade entre as bases $\tilde{C}$ e C; denote a matriz desta transformação linear por $[I]_{\tilde{C}C}$. Por outro lado, M^{-1} é a matriz mudança de base de $\tilde{C}$ para C, e corresponde à matriz de transformação linear identidade $[I]_{C\tilde{C}}$ entre as bases C e $\tilde{C}$. De

$$
\left(\begin{array}{c|c} M & I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & M^{-1} \end{array}\right), \qquad (8)
$$

(adição da primeira linha multiplicada por -1 à segunda linha) tem-se

$$
M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (9)
$$

Logo, de $[T]_{B\tilde{C}} = [I \circ T]_{B\tilde{C}} = [I]_{C\tilde{C}}[T]_{BC} = M^{-1}[T]_{BC}$, chega-se a

$$
[T]_{B\tilde{C}} = M^{-1}[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ -\Omega & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ -\Omega-\Upsilon & -\Upsilon & -2 \end{pmatrix}. \qquad (10)
$$

<u>Solução 02</u>: Denote $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2\}$; se $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ é a matriz mudança de base de C para $\tilde{C}$, então

$$
\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{c}_1 & = & 1c_1 + 1c_2 = 1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ -1 \end{pmatrix} \\ \\ \tilde{c}_2 & = & 0c_1 + 1c_2 = 0\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right., \qquad (11)
$$

id est, $\tilde{c}_1 = \begin{pmatrix} \Omega \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\tilde{c}_2 = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \end{pmatrix}$ na representação da base canônica. De (5), tem-se

$$\begin{cases} T(b_1) &= T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Omega^2\\-\Upsilon\end{pmatrix} = \Upsilon\begin{pmatrix}\Omega\\-1\end{pmatrix} + (-\Omega-\Upsilon)\begin{pmatrix}\Omega\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Upsilon\\-\Omega-\Upsilon\end{pmatrix}_{\tilde{C}} \\ \\ T(b_2) &= T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\Upsilon\end{pmatrix} = \Upsilon\begin{pmatrix}\Omega\\-1\end{pmatrix} - \Upsilon\begin{pmatrix}\Omega\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Upsilon\\-\Upsilon\end{pmatrix}_{\tilde{C}} \\ \\ T(b_3) &= T\begin{pmatrix}\Psi\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Omega\\-1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}\Omega\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\Omega\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}_{\tilde{C}} \end{cases}, \tag{12}$$

donde se tem

$$[T]_{B\tilde{C}} = \begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ -\Omega-\Upsilon & -\Upsilon & -2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

---

2) Considere $A = \begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ -\Omega & 0 & -1 \\ -\Omega & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4\times3}(\mathbb{R})$.

a) [2.0 pontos] Determinar a imagem de A, $\mathrm{Im}(A)$.
b) [2.0 pontos] Determinar o kernel (núcleo) de A, $\ker(A)$.

Observação: Por construção, tem-se $\Upsilon \neq 0$ e $\Omega \neq 0$.

2a) Dado $x = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}^T \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$, a imagem de A, $\mathrm{Im}(A) = \{y \in \mathbb{M}_{4\times1}(\mathbb{R}) : y = Ax \text{ com } x \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R})\}$ pode ser estudada mediante a investigação de

$$Ax = \alpha\begin{pmatrix}\Upsilon\\\Upsilon\\-\Omega\\-\Omega\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\Upsilon\\\Upsilon\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3, \tag{14}$$

onde $u_1 := \begin{pmatrix}\Upsilon & \Upsilon & -\Omega & -\Omega\end{pmatrix}^T$, $u_2 := \begin{pmatrix}\Upsilon & \Upsilon & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ e $u_3 := \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}^T$. A fim de investigar a (in)dependência linear do conjunto formado por estes três vetores,

$$\begin{array}{r} u_1 \leftarrow \\ u_2 \leftarrow \\ u_3 \leftarrow \end{array} \begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & -\Omega & -\Omega \\ \Upsilon & \Upsilon & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & -\Omega & -\Omega \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Omega & -\Omega \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

onde, na primeira passagem, multiplicou-se a segunda e a terceira linhas por $1/\Upsilon$ e -1, respectivamente; na segunda passagem, adicionou-se a segunda linha multiplicada por $-1/\Upsilon$ à primeira, além de adicionar a segunda linha multiplicada por 1 à terceira linha; na última passagem, adicionou-se a terceira linha multiplicada por Ω à primeira. Não sendo mais possível simplificar a matriz resultante, chega-se a

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}. \tag{15}$$

2b) Dado $x = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$, o kernel de A, $\ker(A) = \{x \in \mathbb{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : Ax = 0\}$ pode ser estudado mediante a investigação de $Ax = 0$, representado pelo sistema abaixo, onde a parte independendete foi omitida por ser composta somente por zeros.

$$\begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ -\Omega & 0 & -1 \\ -\Omega & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Upsilon & \Upsilon & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde adicionou-se a primeira linha multiplicada por -1 à segunda, além de adicionar a terceira linha multiplicada por -1 à quarta linha. A parte relevante do sistema gerado acima pode então ser escrita como

$$\begin{cases} \Upsilon x_1 + \Upsilon x_2 + x_3 = 0 \\ -\Omega x_1 - x_3 = 0 \end{cases}, \tag{16}$$

que implica

$$\begin{cases} x_2 = \frac{\Omega - \Upsilon}{\Upsilon} x_1 \\ x_3 = -\Omega x_1 \end{cases}. \tag{17}$$

Logo, para $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \ker(A)$, tem-se

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{\Omega - \Upsilon}{\Upsilon} x_1 \\ -\Omega x_1 \end{pmatrix} = \frac{x_1}{\Upsilon} \begin{pmatrix} \Upsilon \\ \Omega - \Upsilon \\ -\Omega \Upsilon \end{pmatrix}, \tag{18}$$

donde se tem

$$\ker(A) = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} \Upsilon \\ \Omega - \Upsilon \\ -\Omega \Upsilon \end{pmatrix} \right\}. \tag{19}$$