现代信号处理期末论文

压缩感知综述

无研 144 刘菁菁 2014210763

一、 引言

压缩感知（Compressive sensing， CS）是一个全新的机制，它可以用远远小于通常所需的采样点数来恢复一个已知域的稀疏信号，即可以降低采集稀疏信号所需的采样频率。压缩感知所需的唯一条件是采样过程与变换是不相干的（incoherent），其中变换是要获得信号的稀疏表示（sparse representation），稀疏指的是信号可以用变换域的一组基中的极少个基向量的线性组合构成，不相干指的是变换后的稀疏信号保持了原始采样信号的距离。虽然稀疏信号可以由很少的基向量和其相乘系数构成，但是要确定信号是由哪些基向量构成通常是非常困难的[24]。

压缩感知发展的初期，其主要考虑标准的离散域到离散域的测量，对信号只假设其稀疏性，变换矩阵则考虑随机测量矩阵操作符（random matrix measurement operator），其导出的基本公式需要采用复杂的数学工具和很多的理论来分析恢复的算法和提供性能保证。随着 CS 被逐渐应用到其他领域，随机测量矩阵操作符以不能满足需求，而设计与硬件特性相匹配的感知结构成了 CS 的重点研究方向之一。同时，早期 CS 假设信号是有限维的，且符合标准稀疏性，这种先验假设也需要扩展到其它信号中，如信号维数低但不一定符合标准稀疏性或者信号是无限维的。由此，CS 发展出了两个研究领域，一个研究 CS 矩阵（CS matrices），如不完全随机的、且通常具有一定结构的 CS 矩阵的理论和应用；另一个研究信号，如扩展 CS 可作用的信号范围，信号不一定是稀疏的，比如可以具有一定的结构，信号也不一定是离散的，比如也可以是连续时间信号[25]。

压缩感知被广泛用于图像、雷达、语音识别和信号采集，而在通信领域，压缩感知则主要被用于稀疏信道估计。

压缩感知用于数模转换（Analog-to-digital conversion，ADC）

数模转换器将物理信号转换为数字信号，为接下来的数字信号的复杂处理奠定基础。由于采集的信号是离散的，而离散点之间的值被丢掉了，那么除非对原始的模拟信号有先验信息，否则将无法恢复该模拟信号。数模转换器所需的采样频率依赖于奈奎斯特采样定理：如果信号 $x(t)$ 的最高频率不超过 B 赫兹，那么以 $2B$ 的采样频率采集 $x(t)$ 将能完全恢复该信号。奈奎斯特采样定理给数模转换提供了一个理论框架，即只要采样频率高于信号最高频率的两倍，那么就能通过采集的离散信号无失真的恢复原来的模拟信号。而要想处理高频的信号，需要有更高采集频率的 ADC 设备。

随着宽带通信和射频通信的发展，信号的最高频率不断增大，已经远远超过了 ADC 设备可以处理的频率，怎样可以不用高速率采样来恢复模拟信号成了学术界和工业界普遍考虑的问题。如果能够利用一些信号的先验信息，那么将有可能降低所需的采样速率而更高效地处理信号。比如通信中常用的上下变频就是一个典型的代表，通过将基带信号进行二次变频，

可以将信号调制到射频来传输，而在接收端，则将模拟信号变到中频后再进行采样，这样就可以大大降低所需的采样频率。但是在这种情形中，接收端需要知道中频和射频的中心频率，即有载波频率的先验条件。

假设信号由被调制的高频的几个窄带信号构成，而调制的载波频率未知，是否有办法构建一个低于奈奎斯特采样频率的采样器？压缩感知即在解决这个问题。压缩感知研究用一个 M 维的向量完全恢复一个 N 维的信号，其中 $M << N$。它通过选择一组投影矢量来作为信号的测量器来获得信号与该组矢量的线性投影或者内积来作为信号的测量，然后可以利用测量来恢复原信号。

压缩感知用于通信

1、 用于信道估计：如在超宽带（ultra-wideband，UW）通信中，用于分辨多径信道中的到达单径或者到达簇[1]，移动广播信道中估计多径延时和多普勒频移[2,3]以及水声信道中估计长多径延时及其多普勒频移[4]。
2、 码分多址（code division multiple access，CDMA）中检测有效用户[5]
3、 认知无线电（cognitive radios）中进行频谱感知（spectrum sensing）
4、 消除通信编码中的大的错误

二、 压缩感知中的基本定义

对于 N 维矢量 x，用 $M \times N$ 维矩阵 Φ 进行测量，得到 M 维测量向量（measurement vector）y，其中 $M < N$，用公式表示为 $y = \Phi x$。矩阵 Φ 的设计原则是使所需的测量维度 M 尽可能小，而又能满足能从 y 恢复 x。由于 $M < N$，那么将存在多个信号 x 满足得到相同的测量向量，为了能根据测量向量唯一恢复 x，那么就需要对 x 进行某种限定。

稀疏性：

稀疏性是 CS 中广泛使用的信号结构，要了解稀疏性的定义先需要了解信号表示法（signal representation）。考虑一组 N 维基 $\{\Psi_i\}_{i=1}^N$，其中 $\Psi_i \in R^N$，那么任一个 N 维向量 x 可用这组基的线性组合表示，其系数为 $\{\theta_i\}_{i=1}^N$，$x = \sum_{i=1}^{N} \Psi_i \theta_i$，用矩阵表示即为 $x = \Psi \theta$。

假设 Ψ 的列向量的维度为 L，$L < N$，且进行了归一化，那么对于任何向量 $x \in R^L$，存在很多的系数向量 θ 满足 $x = \Psi \theta$，其中 Ψ 被称为稀疏字典（sparsifying dictionary）[6]。

假设有一组基 Ψ，如果信号 x 存在系数向量 $\theta \in R^N$ 满足 $x = \Psi \theta$，其中 θ 中只有 K 个非零值，其中 $\mathrm{K} << N$，则称信号 x 满足 K-稀疏性（$K - Sparse$）。在此基础上，定义 θ 的支持集（the *support* of θ） supp(θ)表示 θ 中非零值所在的位置的集合，Σ_K 表示所有满足 K-稀疏性的信号集合。上述只考虑了实数情形，但是对于复数域来说也是一样的。

理论上来说，在稀疏字典已知的条件下，K-稀疏性的信号 x 只需要存储非零系数的值和位置就可以，存储值所需的 bit 由存储精度决定，存储位置则需要 $O(K\log_2 N)$ 比特的空间，这个过程即是转换编码（transform coding）。

对于不是完全稀疏的信号，那么其压缩数量就取决于 θ 中保留的非零值的数量。比如考虑一个信号 x，其系数 θ 中的值按幅度大小排序后满足按幂指数衰减即

$\theta(I(n)) \le Sn^{-\frac{1}{r}}$，$n=1,\ldots N$，其中 I 是系数值排序后其真实位置的集合。理论证明，该信号可以用一个 K-稀疏性信号很好地估计，其估计误差满足

$\sigma_\Psi(x,K) := \arg\min_{x'\in\Sigma_K} \| x-x' \|_2 \le CSK^{-s}$，其中 $s=\frac{1}{r}-\frac{1}{2}$，$C$ 为一个不依赖于 N 的常数[7]，可见随着 K 增加，估计误差 以指数 s 减小，可称信号为 s-可压缩的。

CS 矩阵的设计

CS 矩阵 Φ 设计的主要准则是可以从测量向量 y 唯一恢复信号 x，其中 $y=\Phi x$。考虑 K-稀疏性信号 Σ_K，$\Omega=\mathrm{supp}(x)$已知，测量数 $M>K$，令 Φ 中由指标集 Ω 指示的列构成矩阵 Φ_Ω，那么恢复算法即为 $x=\Phi_\Omega^+ y$，其中 Φ_Ω^+ 为 Φ 的伪逆，满足 $\Phi_\Omega^+=(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T$。而对于不同的信号 x 和 x'，$x,x'\in\Sigma_K$，要使得 $x\ne x'$ 时 $\Phi x\ne\Phi x'$，那么矩阵 Φ 还需要具备一些特点。

定义 1：定义 $spark(\Phi)$ 为 Φ 的最小的线性相关的列数。那么可知 Φ 的秩为 $spark(\Phi)-1$。[8]

理论 1：若 $spark(\Phi)>2K$，那么对于 $y\in R^M$，那么至多存在一个信号 $x\in\Sigma_K$，使得 $y=\Phi x$。由于 $spark(\Phi)\in[2,M+1]$，那么可得到 $M\ge 2K$。[8]

虽然理论 1 可以保证 K-稀疏性信号的唯一性，但是计算 $spark(\Phi)$ 的复杂度很高。

定义 2：矩阵 Φ 的相干 $\mu(\Phi)$ 表示矩阵 Φ 中任何两个列向量中内积的最大绝对值

$\mu(\Phi)=\max_{1\le i\ne j\le N}\frac{<\Phi_i,\Phi_j>}{\|\Phi_i\|_2\|\Phi_j\|_2}$，其中 $\mu(\Phi)\in[\sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}},1]$。[9,10]

理论 2：令 $m\times m$ 矩阵 M 为 $[M_{i,j}]_{1\le i,j\le m}$，其特征值 $\{d_i\}_{i=1}^m$ 位于 m 个圆形区域 $d_i=d_i(c_i,r_i)$ 的集合中，其中 $c_i=M_{i,i}$，半径 $r_i=\sum_{i\ne j}|M_{i,j}|$。

将该理论用于格拉姆矩阵（Gram matrix）$G=\Phi_\Omega^T\Phi_\Omega$，可以得到 $spark(\Phi)\ge 1+\frac{1}{\mu(\Phi)}$。

对于 $k < \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\mu(\Phi)})$，对于任何测量向量 y，至多存在一个信号 $x \in \Sigma_K$ 使得 $y = \Phi x$。这就为 CS 提供了一个理论基础，即对于 K-稀疏性信号，采样维度 M 满足 $k = \mathrm{O}(\sqrt{M})$，可以保证测量向量的唯一性。

实际应用中，由于噪声和误差的存在，将存在 $y = \Phi x + n$ 以及 $\Phi' = \Phi + \Delta$，其中 n 为噪声，Δ 表示误差。为了能够抵抗这类误差，需要保证测量过程和采样过程的不相干性，即测量具有保距性，结果 y, y' 保持了原始信号 x, x' 的距离，这就使得对于两个相差很大的稀疏信号 x, x'，即使噪声存在，它们也不会得到相同的观测向量，这就是限制等距特性（*restricted isometry property*，RIP）。

定义3：矩阵 Φ 若符合 (K,δ) 限制性等距特性（(K,δ)-restricted isometry property，(K,δ)-RIP），表示对于所有 $x \in \Sigma_K$，满足 $(1-\delta)\|x\|_2^2 \le \|\Phi x\|_2^2 \le (1+\delta)\|x\|_2^2$。$(K,\delta)$-RIP 条件使得 Φ 中所有 $M \times K$ 的子矩阵是近似等距的，从而保证了不相干性。[11]

理论证明，如果矩阵 Φ 列向量进行了归一化，并且其相干为 $\mu = \mu(\Phi)$，那么 Φ 满足 (K,δ)-RIP，其中 $\delta \le (K-1)\mu$。RIP也可以与 $spark(\Phi)$ 结合，如果任何K-稀疏性向量可以被唯一测量，那么 Φ 满足 $(2K,\delta)$-RIP，其中 $\delta > 0$。由于矩阵的所有2K向量线性无关，那么可知 $spark(\Phi) > 2K$。RIP对于恢复稳定性的保证强于 $spark(\Phi)$ 和相干，但是验证矩阵满足 (K,δ)-RIP很难。

CS矩阵实例

1、$M \times N$ Vandermonde[12]矩阵 V 由 N 个不同的标量构成，其满足 $spark(V) = M+1$。该矩阵在 N 较大时存在数值不稳定性。

2、伽伯（Gabor）框架用 Alltop 序列[13]和等角紧框架[14]（equiangular tight frames）产生 $M \times M^2$ 相干下界为 $\mu(\Phi) = \frac{1}{\sqrt{M}}$ 的矩阵。

3、$M \times N$ 正定矩阵[15]满足 (K,δ)-RIP，其中 $K = \mathrm{O}(\frac{\sqrt{M}\log(M)}{\log(\frac{N}{M})})$。为了恢复 K-稀疏性

信号，它要求测量值 M 满足 $M = \mathrm{O}(K^2 \log N)$，这对于实际应用来说压缩比例不太理想。

4、$M \times N$ 随机矩阵，其每个元素值满足独立同分布（independent and identically distributed，i.i.d.），该随机矩阵以大概率满足 $spark(\Phi) = M+1$。理论证明如果元素分布满足零均值和有限方差，那么矩阵相干渐近收敛于 $\mu(\Phi) = 2\sqrt{\frac{\log N}{M}}$ [16,17]。另外，如果分布满足高斯（Gaussian）、拉德马赫（Rademacher）或者亚高斯（sub-Gaussian），那么若 $M = \mathrm{O}(\frac{K \log \frac{N}{K}}{\delta^2})$，则矩阵 Φ 以高概率满足 (K,δ) -RIP[18]。

4、其他类型的矩阵，如 subsampled Fourier and Hadamard transforms。数值计算结果表明它们也适用于 CS。

三、 基于范数的 CS 恢复算法

基于 *l₀* 范数最优化

$$x = \arg\min_{x \in R^N} \| x \|_0 \text{ 满足 } y = \Phi x 。$$

解决该方程依赖于穷举法，对于 $x \in \Sigma_K$，如果 M 足够小，那么该算法可以很好地计算。但是该算法需要检查 y 是否是矩阵 Φ 中 K 个列的线性组合，这就使得计算复杂度很大。

基于 *l₁* 范数最优化

$$x = \arg\min_{x \in R^N} \| x \|_1 \text{ 满足 } y = \Phi x 。$$

基追踪算法（basis pursuit ，BP）[19]就采用该算法为基础。由于可以采用凸优化来计算，该算法可以以信号长度的多项式复杂度解决。

将BP算法扩展到存在噪声的条件，得到基追踪不等式约束算法（basis pursuit with inequality constraints ，BPIC），它的计算复杂度也是多项式的。

$$x = \arg\min_{x \in R^N} \| x \|_1 \text{ 满足 } \| y - \Phi x \|_2 \le \varepsilon \text{，其中 } \varepsilon \ge \| n \|_2$$

采用拉格朗日乘子，可以得到基追踪去噪算法（basis pursuit with inequality constraints ，BPIC），其定义为 $x = \arg\min_{x \in R^N} \| x \|_1 + \lambda \| y - \Phi x \|_2$。

四、 贪婪算法

贪婪算法采用迭代方法，根据矩阵 Φ 与测量y的内积选择 Φ 中的列。常见的有正交匹配追踪算法（orthogonal matching pursuit algorithms ，OMP）[20,21]、COSaMP算法[22]和子空间追踪（subspace pursuit ，SP）算法[23]。

OMP 算法

在当前迭代步骤i，将测量向量y减掉当前估计信号x_i的测量值Φx_i，得到残余量r，利用该信号残余r找到Φ中最相似的列的位置$\mathrm{supp}(\Gamma(b,1))$，将该位置加入恢复矩阵所选择的列指标集合$\Omega$，构建当前恢复矩阵$\Phi_\Omega$得到信号估计$x_{i+1}$进行下一步迭代直到获得所有的$\Phi_\Omega$。算法具体步骤如下：

Algorithm 1: Orthogonal Matching Pursuit

Input: CS matrix Φ, measurement vector y

Output: Sparse representation $\widehat{x}$

Initialize: $\widehat{x}_0 = 0, r = y, \Omega = \emptyset, i = 0$

while halting criterion false **do**

$i \leftarrow i + 1$

$b \leftarrow \Phi^T r$ {form residual signal estimate}

$\Omega \leftarrow \Omega \cup \mathrm{supp}(\mathcal{T}(b, 1))$ {update support with residual}

$\widehat{x}_{i\ \Omega} \leftarrow \Phi_\Omega^\dagger y, \widehat{x}_{i\ \Omega^C} \leftarrow 0$ {update signal estimate}

$r \leftarrow y - \Phi\widehat{x}_i$ {update measurement residual}

end while

return $\widehat{x} \leftarrow \widehat{x}_i$

其中$\Gamma(x,K)$是一个阈值操作符，它将 x 中幅度最大的 K 个值保留，其余的值置为 0，x_Ω是值 x 中由Ω集合中的值所指的位置的值构成的信号。

COSaMP 算法

在当前迭代步骤i，将测量向量y减掉当前估计信号x_i的测量值Φx_i，得到残余量r，利用该信号残余r得到残余信号估计$e = \Phi^T r$，找到e中幅度最大的 2K 个列的位置$\mathrm{supp}(\Gamma(e,2K))$，将该 2K 个位置加入列指标集合$\Omega$，并将$\Omega$和当前估计信号$x_i$中非零值的位置$\mathrm{supp}(x_i)$加入恢复矩阵所选择的列指标集合$T$，构建当前恢复矩阵$\Phi_T$得到初步信号估计$b_T$，信号估计值$x_{i+1}$则为$\Gamma(b,K)$，若未满足迭代终止条件，则继续执行以上步骤直到满足条件。算法具体步骤如下：

Algorithm 2: CoSaMP

Input: CS matrix Φ, measurement vector y, sparsity K

Output: K-sparse approximation $\widehat{x}$ to true signal x

Initialize: $\widehat{x}_0 = 0, r = y, i = 0$

while halting criterion false **do**

$i \leftarrow i + 1$

$e \leftarrow \Phi^T r$ {form residual signal estimate}

$\Omega \leftarrow \text{supp}(\mathcal{T}(e, 2K))$ {prune residual}

$T \leftarrow \Omega \cup \text{supp}(\widehat{x}_{i-1})$ {merge supports}

$b|_T \leftarrow \Phi_T^{\dagger} y, b|_{T^C} \leftarrow 0$ {form signal estimate}

$\widehat{x}_i \leftarrow \mathcal{T}(b, K)$ {prune signal using model}

$r \leftarrow y - \Phi\widehat{x}_i$ {update measurement residual}

end while

return $\widehat{x} \leftarrow \widehat{x}_i$

五、 总结

压缩感知作为一个新兴的信号处理方式，它克服了奈奎斯特采样定理的瓶颈，为稀疏信号采集和处理提供了一个新的方案。本文主要介绍了压缩感知的一些主要定义以及其基本恢复算法，虽然本文只介绍了实数的有限维信号的压缩感知处理算法，但是这些算法可以很容易地扩展到复数领域。另外，有众多论文也考虑了无限维信号、连续信号的压缩感知，只是由于时间有限，本文并没有作介绍。压缩感知主要分为了两个研究领域，一个研究压缩感知的矩阵，一个研究压缩的信号模型。通过设计合适的 CS 矩阵可以实现对稀疏信号的更低维的有效测量，通过研究需要处理的信号的结构，可以为压缩感知提供更多的先验条件，这也为更有效的压缩感知提供了条件。

六、 参考文献

[1] J. L. Paredes, G. R. Arce, and Z. Wang, "Ultra-Wideband Compressed Sensing: Channel Estimation," *IEEE J.Selected Topics Signal Process.*, vol. 1, no. 3, Oct. 2007, pp. 383–95.

[2] G. Tauböck *et al.*, "Compressive Estimation of Doubly Selective Channels in Multicarrier Systems: Leakage Effects and Sparsity-Enhancing Processing," *IEEE J. Selected Topics Signal Process.*, vol. 4, no. 2, Apr. 2010, pp. 255–71.

[3] W. U. Bajwa *et al.*, "Compressed Channel Sensing: A New Approach to Estimating Sparse Multipath Channels," *Proc. IEEE*, vol. 98, no. 6, June 2010, pp.1058–76.

[4] C. R. Berger *et al*., “Sparse Channel Estimation for Multicarrier Underwater Acoustic Communication: From Subspace Methods to Compressed Sensing,” *IEEE Trans. Signal Process*., vol. 58, no. 3, Mar. 2010, pp. 1708–21.
[5] D. Angelosante *et al*., “Sparsity-Aware Estimation of CDMA System Parameters,” *IEEE Wksp. Signal Process. Advances in Wireless Commun*., Perugia, Italy, June 2009
[6] S. Mallat and Z. Zhang, “Matching pursuit with time-frequency dictionaries, IEEE Trans. Signal Process., vol. 41, no. 12, pp. 3397–3415,Dec. 1993.
[7] A. Cohen, W. Dahmen, and R. A. DeVore, “Compressed sensing and best _-term approximation,” *J. Amer. Math. Soc.*, vol. 22, no. 1, pp. 211–231, Jan. 2009.
[8] D. L. Donoho and M. Elad, “Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via minimization,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 100, no. 5, pp. 2197–2202, Mar.2003.
[9] L. R.Welch, “Lower bounds on the maximum cross correlation of signals,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 20, no. 3, pp. 397–399, May 1974.
[10] T. Strohmer and R. Heath, “Grassmanian frames with applications to coding and communication,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 14, no. 3, pp. 257–275, Nov. 2003.
[11] E. J. Candès, “Compressive sampling,” in Proc. Int. Congr. Math., Madrid, Spain, 2006,vol.3,pp. 1433–1452.
[12] A. Cohen, W. Dahmen, and R. A. DeVore, “Compressed sensing and best _-term approximation,” J. Amer. Math. Soc., vol. 22, no. 1, pp.211–231, Jan. 2009.
[13] M. A. Herman and T. Strohmer, “High-resolution radar via compressed sensing,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 57, no. 6, pp. 2275–2284,Jun. 2009.
[14] T. Strohmer and R. Heath, “Grassmanian frames with applications to coding and communication,” Appl. Comput. Harmon. Anal., vol. 14,no. 3, pp. 257–275, Nov. 2003.
[15] R. A. DeVore, “Deterministic constructions of compressed sensing matrices,”J. Complex., vol. 23, no. 4, pp. 918–925, Aug. 2007.
[16] D. Donoho, “For most large underdetermined systems of linear equations, the l_1 minimal -norm solution is also the sparsest solution,” Comm. Pure Appl. Math., vol. 59, no. 6, pp. 797–829, 2006.
[17] E. J. Candès and Y. Plan, “Near-ideal model selection by l_1 minimization,” Ann. Statist., vol. 37, no. 5A, pp. 2145–2177, Oct. 2009.
[18] R. G. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin, “A simple proof of the restricted isometry property for random matrices,” Construct. Approximation, vol. 28, no. 3, pp. 253–263, 2008.
[19] S. Chen, D. L. Donoho, and M. Saunders, “Atomic decomposition by basis pursuit,” SIAM J. Sci. Comput., vol. 20, no. 1, pp. 33–61, 1998.
[20] S. Mallat and Z. Zhang, “Matching pursuit with time-frequency dictionaries,” IEEE Trans. Signal Process., vol. 41, no. 12, pp. 3397–3415,Dec. 1993.
[21] Y. Pati, R. Rezaifar, and P. Krishnaprasad, “Orthogonal matching pursuit:Recursive function approximation with applications towavelet decomposition,”presented at the Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput.,Pacific Grove, CA, Nov. 1993.
[22] D. Needell and J. A. Tropp, “CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples,” Appl. Comput. Harmon. Anal.,vol. 26, no. 3, pp. 301–321, May 2008.
[23] W. Dai and O. Milenkovic, “Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 55, no. 5, pp.2230–2249, May 2009.

[24] Christian R. Berger, Zhaohui Wang, Jianzhong Huang, and Shengli Zhou, “Application of Compressive Sensing to Sparse Channel Estimation”. IEEE Communications Magazine, pp. 164-174, Nov 2010
[25] Marco F. Duarte and Yonina C. Eldar, “Structured Compressed Sensing: From Theory to Applications”, IEEE Trans. Signal Process. VOL. 59, NO. 9, Sep 2011