形式逻辑

KLTree

2025 年 1 月 7 日

前言

数学在各个领域中发挥着重要的作用，学习数学是每个人必须经历的过程。然而，如何将数学学好却是一个值得深思的问题。数学是一门既抽象又严谨的学科，其抽象性和严谨性使得学习过程并不容易。基于“越有规律的事物越容易掌握”的原则，我们需要设法让数学变得更加有规律。为此，我尝试将数学中的各种概念通过少数几种关系（如包含关系、对应关系、属于关系等）进行关联。这样，读者可以清晰地了解数学概念之间的联系，有助于举一反三，从而系统地掌握数学知识。由于逻辑是数学的基础，它为我们提供了严格的推理工具和清晰的思维方法。因此，《形式逻辑》这本书成了基于这一理念而编写的第一本书。

本书分为三个部分：1. 树状图：第一部分展示了将相关概念通过三种关系关联起来而绘制的树状图。由于这张图较大，无法直接放在书中，因此单独附在一张纸上。2. 概念定义与实例：第二部分包含树状图中所有概念的定义和实例，其中一些概念还提供了反例，复杂的实例则附有详细解说。3. 相关命题：第三部分讨论了一些相关的命题，包括与自然演绎系统的完备性与可靠性相关的命题，以及一些常用的导出规则，每个导出规则都附有严格的证明。

本书旨在为读者提供一个系统的形式逻辑入门指南，从最基本的概念出发，逐步深入到更复杂的逻辑理论。

本书的特点在于：系统性：围绕命题展开，将书中的所有概念连接成一张图，形成一个系统，帮助读者快速掌握形式逻辑的全部内容。重视实践：每个重要概念都配有详细的例子和反例，帮助读者深入理解理论知识，并掌握实际应用。

由于个人水平有限，书中难免存在疏漏，恳请读者批评指正。

KLTree
2025 年 1 月 7 日

目录

第一章 定义

定义 59 (命题) 可以判断真假的陈述句被称为命题。

实例 59.1 英国比中国小。

实例 59.2 所有树叶都是绿色的。

实例 59.3 所有人都生活在地球上。

实例 59.4 伦敦不在中国。

实例 59.5 并非伦敦在中国。

实例 59.6 并非所有树叶都是绿色的。

实例 59.7 如果地球毁灭了, 那么所有人都将死去。

实例 59.8 法国的现任国王是秃顶的。

实例 59.9 地球比太阳小并且比月球大。

实例 59.10 地球比太阳小并且地球比月球大。

实例 59.11 每个桌子上的苹果都是红色的。

实例 59.12 对于任意一个苹果, 如果它在桌子上, 那么它是红色的。

定义 60 (命题的真值) 命题的“真”、“假”这两种属性称为命题的真值。

实例 60.1 3 比 2 大。$\mapsto$ 真

实例 60.2 伦敦不在中国。$\mapsto$ 真

实例 60.3 3 与 2 的和是 6。$\mapsto$ 假

实例 60.4 所有自然数都大于或等于 0。$\mapsto$ 真

实例 60.5 如果一个数与 2 的和是 5, 那么这个数是 3。$\mapsto$ 真

实例 60.6 如果一个数是质数，那么这个数是奇数。$\mapsto$ 假

实例 60.7 2 是质数并且是偶数。$\mapsto$ 真

实例 60.8 地球是平的。↦ 假

实例 60.9 大于 2 小于 5 的自然数只有 3 和 4。↦ 真

实例 60.10 空集没有子集。↦ 假

定义 61 (真命题) 真值为“真”的命题称为真命题。

实例 61.1 3 比 2 大。

实例 61.2 伦敦不在中国。

实例 61.3 所有自然数都大于或等于 0。

实例 61.4 2 是质数并且是偶数。

实例 61.5 如果一个数与 2 的和是 5, 那么这个数是 3。

实例 61.6 大于 2 小于 5 的自然数只有 3 和 4。

定义 62 (假命题) 真值为“假”的命题称为假命题。

实例 62.1 3 与 2 的和是 6。

实例 62.2 如果一个数是质数，那么这个数是奇数。

实例 62.3 地球是平的。

实例 62.4 空集没有子集。

定义 63 (原子命题) 不能再分解出其它命题的命题称为原子命题。

实例 63.1 空集没有子集。

实例 63.2 地球是平的。

实例 63.3 3 比 2 大。

反例 63.1 2 是质数并且是偶数。

反例 63.2 并非所有树叶都是绿色的。

定义 64 (逻辑联结词) 用来连接两个或多个命题，形成一个新命题的句子成分。像“并且”、“或者”、“如果... 那么...”、“并非”、“当且仅当”等。

定义 65 (命题中的原子命题) 设 A 为任意一个命题,B 为任意一个原子命题。

B 为 A 中的原子命题当且仅当 B 是从 A 中分解出来的。

实例 65.1 命题为:

2 是质数并且是偶数。

它里面的原子命题为:

2是质数。

2是偶数。

实例 65.2 命题为:

并非所有树叶都是绿色的。

它里面的原子命题为:

所有树叶都是绿色的。

定义 66 (命题中的逻辑联结词) 设 A 为任意一个命题,x 为任意一个逻辑联结词。

x 为 A 中的逻辑联结词当且仅当 x 是从 A 中分解出来的。

实例 66.1 命题为:

2 是质数并且是偶数。

它里面的逻辑联结词为:

$\cdots$ 并且 $\cdots$

实例 66.2 命题为:

并非所有树叶都是绿色的。

它里面的逻辑联结词为:

并非 $\cdots$

定义 67 (谓词) 用于描述对象的性质或对象间关系的一种句子成分。

定义 68 (量词) 用于描述对象的数量和范围的一种句子成分。

定义 69 (单指称项) 用于代表或指向单个对象的句子成分。

定义 70 (多指称项) 用于代表或指向多个对象的句子成分。

定义 71 (命题中的谓词) 设 A 为任意一个命题,x 为任意一个谓词。

x 为 A 中的谓词当且仅当 x 是从 A 中分解出来的。

实例 71.1 命题为:

2 是质数并且是偶数。

它里面的谓词为:

$\cdots$是质数。

$\cdots$是偶数。

实例 71.2 命题为:

并非所有树叶都是绿色的。

它里面的谓词为:

$\cdots$ 是绿色的。

定义 72 (命题中的量词) 设 A 为任意一个命题,x 为任意一个量词。

x 为 A 中的量词当且仅当 x 是从 A 中分解出来的。

实例 72.1 命题为:

有些数既是质数又是偶数。

它里面的量词为:

有些 $\cdots$

实例 72.2 命题为:

并非所有树叶都是绿色的。

它里面的量词为:

所有 $\cdots$

定义 73 (命题中的单指称项) 设 A 为任意一个命题,x 为任意一个单指称项。x 为 A 中的单指称项当且仅当 x 是从 A 中分解出来的。

实例 73.1 命题为:

2 是质数并且是偶数。

它里面的单指称项为:

2

实例 73.2 命题为:

地球是平的。

它里面的单指称项为:

地球

定义 74 (命题中的多指称项) 设 A 为任意一个命题,x 为任意一个多指称项。x 为 A 中的多指称项当且仅当 x 是从 A 中分解出来的。

实例 74.1 命题为:

有些数既是质数又是偶数。

它里面的多指称项为:

数

实例 74.2 命题为:

并非所有树叶都是绿色的。

它里面的多指称项为:

树叶

定义 75 (命题的命题级符号化键) 将命题中的所有原子命题和原子命题符号对应起来构成的整体称为命题的命题级符号化键。

定义 76 (命题相对于它的命题级符号化键的命题公式) 设 A 为任意一个命题,K 为 A 的一个命题级符号化键。

如果一个命题公式是 A 经过它的一个命题级符号化键 K 符号化得到的,那么称这个命题公式是 A 相对于 K 的命题公式。

实例 76.1 命题为:

小李在中国。

命题的命题级符号化键为:

$A:$ 小李在中国。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$A$$

实例 76.2 命题为:

小李不在中国。

命题的命题级符号化键为:

$A:$ 小李在中国。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$\neg A$$

实例 76.3 命题为:

小李和小王都在中国。

命题的命题级符号化键为:

A :小李在中国。

B :小王在中国。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$A \wedge B$$

实例 76.4 命题为:

虽然小李在中国, 但是小王不在中国。

命题的命题级符号化键为:

A :小李在中国。

B :小王在中国。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$A \wedge \neg B$$

实例 76.5 命题为:

小李在中国或小王在中国。

命题的命题级符号化键为:

A :小李在中国。

B :小王在中国。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$A \vee B$$

实例 76.6 命题为:

小李和小王都不在中国。

命题的命题级符号化键为:

A :小李在中国。

B :小王在中国。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$\neg A \wedge \neg B$$

实例 76.7 命题为:

如果小李在中国, 那么小王也在中国。

命题的命题级符号化键为:

A :小李在中国。

B :小王在中国。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$A \to B$$

实例 76.8 命题为:

只有小王在中国, 小李才在中国。

命题的命题级符号化键为:

A :小李在中国。

B :小王在中国。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$A \to B$$

实例 76.9 命题为:

4 为偶数当且仅当 4 能被 2 整除。

命题的命题级符号化键为:

A :4 为偶数。

B :4 能被 2 整除。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$A \leftrightarrow B$$

实例 76.10 命题为:

除非你穿了外套, 否则你会感冒。

命题的命题级符号化键为:

A :你穿了外套。

B :你会感冒。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$A \vee B$$

实例 76.11 命题为:

小李和小王都是消防员当且仅当他们都不是电工。

命题的命题级符号化键为:

A :小李是消防员。

B :小王是消防员。

C :小李是电工。

D :小王是电工。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg C \wedge \neg D)$$

实例 76.12 命题为:

如果小李或小王是间谍, 那么代码已损坏。

命题的命题级符号化键为:

A :小李是间谍。

B :小王是间谍。

C :代码已损坏。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$(A \vee B) \rightarrow C$$

实例 76.13 命题为:

如果小李和小王都不是间谍, 那么代码没有损坏。

命题的命题级符号化键为:

A :小李是间谍。

B :小王是间谍。

C :代码已损坏。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C$$

实例 76.14 命题为:

小李和小王中有一个人是间谍。

命题的命题级符号化键为:

A :小李是间谍。

B :小王是间谍。

命题相对于它的命题级符号化键的命题公式为:

$$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$$

定义 77 (命题公式) *按以下规则形成的符号串被称为命题公式。*

1. *每个原子命题公式是命题公式。*
2. *如果 $\mathcal{A}$ 是命题公式, 那么 $\neg\mathcal{A}$ 也是命题公式。*
3. *如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是命题公式, 那么 $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ 也是命题公式。*
4. *如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是命题公式, 那么 $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ 也是命题公式。*
5. *如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是命题公式, 那么 $(\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ 也是命题公式。*
6. *如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是命题公式, 那么 $(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$ 也是命题公式。*
7. *只有有限次使用上述规则形成的符号串才能得到命题公式。*

实例 77.1 A

实例 77.2 $A \vee B$

实例 77.3 $A \to B$

实例 77.4 $\neg B$

实例 77.5 $(A \vee B) \to C$

实例 77.6 $\neg(A \vee B)$

实例 77.7 $A \to (B \to C)$

实例 77.8 $\neg(A \vee B) \wedge \neg C$

定义 78 (原子命题符号) *大写字母或带数字下标的大写字母。*

即 $A, B, C, A_1, A_2 \cdots$

定义 79 (逻辑联结词符号) $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$

定义 80 (命题公式中的原子命题符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式,B 为任意一个原子命题符号。

B 为 $\mathcal{A}$ 中的原子命题符号当且仅当 B 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 81 (命题公式中的逻辑联结词符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式,x 为任意一个逻辑联结词符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的逻辑联结词符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 82 (命题公式相对于它的指派的真值) 命题公式 $\mathcal{A}$ 相对于它的指派 $(a(\mathcal{P}_1), a(\mathcal{P}_2), \ldots, a(\mathcal{P}_n))$ 的真值是按以下规则得到的函数 v 的取值。

1. 如果 $\mathcal{A}$ 是原子命题符号, 那么

$$v(\mathcal{A}) = a(\mathcal{A}).$$

2. 如果 $\mathcal{A}$ 是 $\neg\mathcal{B}$, 那么

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 & \text{如果} v(\mathcal{B}) = 0, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

3. 如果 $\mathcal{A}$ 是 $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$, 那么

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 & \text{如果} v(\mathcal{B}) = 1 \text{并且} v(\mathcal{C}) = 1, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

4. 如果 $\mathcal{A}$ 是 $(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$, 那么

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & \text{如果} v(\mathcal{B}) = 0 \text{并且} v(\mathcal{C}) = 0, \\ 1 & \text{其它}. \end{cases}$$

5. 如果 $\mathcal{A}$ 是 $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$, 那么

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & \text{如果} v(\mathcal{B}) = 1 \text{并且} v(\mathcal{C}) = 0, \\ 1 & \text{其它}. \end{cases}$$

6. 如果 $\mathcal{A}$ 是 $(\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C})$, 那么

$$v(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 & \text{如果} v(\mathcal{B}) = v(\mathcal{C}), \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ 均为命题公式.

实例 82.1 命题公式为:

$$A \wedge B$$

命题公式的一个指派为:

A	B
0	0

命题公式相对于它的这个指派的真值为:

假

说明: 根据定义 82 求命题公式相对于它的某个指派的真值如下:

由定义的第 1 条规则可得:

$$v(A) = a(A) = 0$$
$$v(B) = a(B) = 0$$

由定义的第 3 条规则可得:

$$v(A \wedge B) = 0$$

所以命题公式相对于它的这个指派的真值为假。

实例 82.2 命题公式为:

$$A \wedge B$$

命题公式的指派为:

A	B
1	1

命题公式相对于它的指派的真值为:

真

说明: 根据定义 82 求命题公式相对于它的某个指派的真值如下:

由定义的第 1 条规则可得:

$$v(A) = a(A) = 1$$

$$v(B) = a(B) = 1$$

由定义的第 3 条规则可得:

$$v(A \wedge B) = 1$$

所以命题公式相对于它的这个指派的真值为真。

实例 82.3 命题公式为:

$$(A \vee B) \to C$$

命题公式的指派为:

A	B	C
1	1	0

命题公式相对于它的指派的真值为:

假

说明: 根据定义 82 求命题公式相对于它的某个指派的真值如下:

由定义的第 1 条规则可得:

$$v(A) = a(A) = 1$$

$$v(B) = a(B) = 1$$

$$v(C) = a(C) = 0$$

由定义的第 4 条规则可得:

$$v(A \vee B) = 1$$

由定义的第 5 条规则可得:

$$v((A \vee B) \to C) = 0$$

所以命题公式相对于它的这个指派的真值为假。

实例 82.4 命题公式为:

$$A \to (B \to C)$$

命题公式的指派为:

A	B	C
0	1	0

命题公式相对于它的指派的真值为:

真

说明: 根据定义 82 求命题公式相对于它的某个指派的真值如下:

由定义的第 1 条规则可得:

$$v(A) = a(A) = 0$$
$$v(B) = a(B) = 1$$
$$v(C) = a(C) = 0$$

由定义的第 5 条规则可得:

$$v(B \to C) = 0$$

继续由定义的第 5 条规则可得:

$$v(A \to (B \to C)) = 1$$

所以命题公式相对于它的这个指派的真值为真。

定义 83 (命题公式的指派) 给命题公式中的每个原子命题符号赋予“真”或“假”的过程和结果。

设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式,$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ 为 $\mathcal{A}$ 中的原子命题符号。

有序 n 元组 $(a(\mathcal{P}_1), a(\mathcal{P}_2), \ldots, a(\mathcal{P}_n))$ 称为 $\mathcal{A}$ 的一个指派。

定义 84 (原子命题符号的指派) 给原子命题符号赋予“真”或“假”的过程和结果。

设 $\mathcal{P}$ 为任意一个原子命题符号。

$$\text{函数} a(\mathcal{P}) = \begin{cases} 1 & \text{如果}\mathcal{P}\text{为真}, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases} \text{称为}\mathcal{P}\text{的指派}$$

定义 85 (命题公式的成真指派) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式。

如果 $\mathcal{A}$ 的一个指派使得 $\mathcal{A}$ 的真值为真, 那么称这个指派为 $\mathcal{A}$ 的成真指派。

实例 85.1 命题公式为:

$$A \wedge B$$

它的一个成真指派为:

A	B
1	1

实例 85.2 命题公式为:

$$A \to (B \to C)$$

它的一个成真指派为:

A	B	C
0	1	0

定义 86 (命题公式的成假指派) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式。

如果 $\mathcal{A}$ 的一个指派使得 $\mathcal{A}$ 的真值为假, 那么称这个指派为 $\mathcal{A}$ 的成假指派。

实例 86.1 命题公式为:

$$A \wedge B$$

它的一个成假指派为:

A	B
0	0

实例 86.2 命题公式为:

$$(A \vee B) \to C$$

它的一个成假指派为:

A	B	C
1	1	0

定义 87 (命题公式的完整真值表) 将命题公式的所有指派和在这些指派下的真值画在一个表里得到的表称为命题公式的完整真值表。

实例 87.1 命题公式为:

$$A \wedge B$$

它的完整真值表为:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

实例 87.2 命题公式为:

$$A \to (B \to C)$$

它的完整真值表为:

A	B	C	$A \to (B \to C)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

定义 88 (命题公式的部分真值表) 将命题公式的部分指派和在这些指派下的真值画在一个表里得到的表称为命题公式的部分真值表。

实例 88.1 命题公式为:

$$A \wedge B$$

它的一个部分真值表为:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0

实例 88.2 命题公式为:

$$A \to (B \to C)$$

它的一个部分真值表为:

A	B	C	$A \to (B \to C)$
0	0	0	1

定义 89 (逻辑联结词符号的特征真值表) 下面的表格称为逻辑联结词（符号）的特征真值表。

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	$\neg \mathcal{A}$
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*

定义 90 (恒真命题公式) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式。

$\mathcal{A}$ 为恒真命题公式当且仅当对于 $\mathcal{A}$ 的任意一个指派,$\mathcal{A}$ 的真值都为真。即

$$\mathcal{A}\text{为恒真命题公式} \Longleftrightarrow \models \mathcal{A}$$

实例 90.1 $P \vee \neg P$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	$P \vee \neg P$
0	1
1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

实例 90.2 $P \to P$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	$P \to P$
0	1
1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

实例 90.3 $(P \wedge Q) \to P$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	$(P \wedge Q) \to P$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

实例 90.4 $\neg(P \wedge \neg P)$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	$\neg(P \wedge \neg P)$
0	1
1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

实例 90.5　$P \rightarrow (Q \vee \neg Q)$

说明： 画出这个命题公式的完整真值表如下：

P	Q	$P \rightarrow (Q \vee \neg Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

实例 90.6　$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$

说明： 画出这个命题公式的完整真值表如下：

P	Q	$(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

实例 90.7　$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

说明： 画出这个命题公式的完整真值表如下：

P	Q	$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

实例 90.8 $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$

说明：画出这个命题公式的完整真值表如下：

P	Q	R	$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

实例 90.9 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \to R$

说明：画出这个命题公式的完整真值表如下：

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \to R$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

实例 90.10 $\neg(A \to \neg C) \to (A \to C)$

说明：画出这个命题公式的完整真值表如下：

A	C	$\neg(A \to \neg C) \to (A \to C)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为真。因此，它是恒真命题公式。

反例 90.1 $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \to (Q \to R)$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge (P \to R) \to (Q \to R)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

从上表可看出，存在指派使这个命题公式的真值为假。因此，它不是恒真命题公式。

定义 91 (恒假命题公式) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式。

$\mathcal{A}$ 为恒假命题公式当且仅当对于 $\mathcal{A}$ 的任意一个指派,$\mathcal{A}$ 的真值都为假。即

$$\mathcal{A}\text{为恒假命题公式} \iff \models \neg\mathcal{A}$$

实例 91.1 $P \wedge \neg P$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	$P \wedge \neg P$
0	0
1	0

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为假。因此，它是恒假命题公式。

实例 91.2 $P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge \neg P$

说明： 画出这个命题公式的完整真值表如下：

P	Q	$P \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge \neg P$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为假。因此，它是恒假命题公式。

实例 91.3 $(P \wedge Q) \wedge \neg P$

说明： 画出这个命题公式的完整真值表如下：

P	Q	$(P \wedge Q) \wedge \neg P$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为假。因此，它是恒假命题公式。

实例 91.4 $(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$

说明： 画出这个命题公式的完整真值表如下：

P	Q	$(P \vee Q) \wedge \neg P \wedge \neg Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为假。因此，它是恒假命题公式。

实例 91.5 $(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$

说明： 画出这个命题公式的完整真值表如下：

P	Q	$(P \to Q) \land (P \land \neg Q)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为假。因此，它是恒假命题公式。

实例 91.6 $\neg(P \lor \neg P)$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	$\neg(P \lor \neg P)$
0	0
1	0

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为假。因此，它是恒假命题公式。

实例 91.7 $(P \land Q) \land (P \to \neg Q)$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	$(P \land Q) \land (P \to \neg Q)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为假。因此，它是恒假命题公式。

实例 91.8 $(P \lor Q) \land (\neg P \land \neg Q)$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	$(P \lor Q) \land (\neg P \land \neg Q)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

从上表可看出，对于这个命题公式的任意指派，它的真值都为假。因此，它是恒假命题公式。

反例 91.1 $P \to \neg P$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	$P \to \neg P$
0	1
1	0

从上表可看出，存在指派使这个命题公式的真值为真。因此，它不是恒假命题公式。

反例 91.2 $(P \wedge Q) \to (P \wedge \neg Q)$

说明: 画出这个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	$(P \wedge Q) \to (P \wedge \neg Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

从上表可看出，存在指派使这个命题公式的真值为真。因此，它不是恒假命题公式。

定义 92 (可真可假命题公式) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式。

$\mathcal{A}$ 为可真可假命题公式当且仅当 $\mathcal{A}$ 不是恒真命题公式也不是恒假命题公式。

实例 92.1 P

说明: 画出这个命题公式的一个部分真值表如下:

P	P
0	0
1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

实例 92.2 $P \wedge Q$

说明: 画出这个命题公式的一个部分真值表如下:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

实例 92.3 $P \vee Q$

说明： 画出这个命题公式的一个部分真值表如下：

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

实例 92.4 $P \to Q$

说明： 画出这个命题公式的一个部分真值表如下：

P	Q	$P \to Q$
1	0	0
1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

实例 92.5 $P \wedge (Q \vee R)$

说明： 画出这个命题公式的一个部分真值表如下：

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R)$
0	0	0	0
1	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

实例 92.6 $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$

说明： 画出这个命题公式的一个部分真值表如下：

P	Q	R	S	$(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

实例 92.7 $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$

说明：画出这个命题公式的一个部分真值表如下：

P	Q	R	S	$(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

实例 92.8 $(P \to Q) \wedge (R \to S)$

说明：画出这个命题公式的一个部分真值表如下：

P	Q	R	S	$(P \to Q) \wedge (R \to S)$
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

实例 92.9 $(P \wedge Q) \to R$

说明：画出这个命题公式的一个部分真值表如下：

P	Q	R	$(P \wedge Q) \to R$
1	1	0	0
1	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

实例 92.10 $(P \vee Q) \to (R \wedge S)$

说明：画出这个命题公式的一个部分真值表如下：

P	Q	R	S	$(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式为真，也有指派使这个命题公式为假。因此，这个命题公式是可真可假命题公式。

定义 93 (命题公式的解释) 将命题公式中的所有原子命题符号和原子命题对应起来构成的整体称为命题公式的解释。

定义 94 (命题公式相对于它的解释的命题) 如果一个命题是命题公式 $\mathcal{A}$ 经过它的一个解释 I 解释得到的, 那么称这个命题是 $\mathcal{A}$ 相对于 I 的命题。

实例 94.1 命题公式为:

$$A$$

命题公式的解释为:

$$A:\text{小李在中国。}$$

命题公式相对于它的解释的命题为:

小李在中国。

实例 94.2 命题公式为:

$$\neg A$$

命题公式的解释为:

$$A:\text{小李在中国。}$$

命题公式相对于它的解释的命题为:

小李不在中国。

实例 94.3 命题公式为:

$$A \wedge B$$

命题公式的解释为:

$$A:\text{小李在中国。}$$

$$B:\text{小王在中国。}$$

命题公式相对于它的解释的命题为:

小李和小王都在中国。

实例 94.4 命题公式为:

$$A \wedge B$$

命题公式的解释为:

A :现在下雨。

B :现在天很冷。

命题公式相对于它的解释的命题为:

现在下雨且天很冷。

实例 94.5 命题公式为:

$$A \leftrightarrow B$$

命题公式的解释为:

A :4 为偶数。

B :4 能被 2 整除。

命题公式相对于它的解释的命题为:

4 为偶数当且仅当 4 能被 2 整除。

实例 94.6 命题公式为:

$$A \leftrightarrow B$$

命题公式的解释为:

A :1 为正整数。

B :1 是大于 0 的整数。

命题公式相对于它的解释的命题为:

1 是正整数当且仅当 1 是大于 0 的整数。

实例 94.7 命题公式为:

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg R \wedge \neg S)$$

命题公式的解释为:

P :小李是消防员。

Q :小王是消防员。

R :小李是电工。

S :小王是电工。

命题公式相对于它的解释的命题为:

小李和小王都是消防员当且仅当他们都不是电工。

实例 94.8 命题公式为:

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow R$$

命题公式的解释为:

P :今天下雨。

Q :今天天气寒冷。

R :我会带伞。

命题公式相对于它的解释的命题为:

如果今天下雨并且天气寒冷, 那么我会带伞。

实例 94.9 命题公式为:

$$\neg(P \vee Q)$$

命题公式的解释为:

P :今天下雨。

Q :今天天气寒冷。

命题公式相对于它的解释的命题为:

今天既不下雨也不天气寒冷。

实例 94.10 命题公式为:

$$\neg(P \rightarrow Q)$$

命题公式的解释为:

P :现在下雨。

Q :地是湿的。

命题公式相对于它的解释的命题为:

现在下雨而地没有湿。

定义 95 (命题的谓词级符号化键)

定义一【不带函词】由以下几部分构成的整体称为命题的谓词级符号化键。

1. 写出论域。
2. 将命题中的所有谓词和谓词符号对应起来。
3. 将命题中的所有单指称项和个体常元符号对应起来。

定义二【带函词】由以下几部分构成的整体称为命题的谓词级符号化键。

1. 写出论域。
2. 将命题中的所有谓词和谓词符号对应起来。
3. 将命题中的所有函词和函词符号对应起来。
4. 将命题中的所有单指称项和个体常元符号对应起来。

定义 96 (命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式) 设 A 为任意一个命题,K 为 A 的一个谓词级符号化键。

如果一个谓词公式是 A 经过它的一个谓词级符号化键 K 符号化得到的,那么称这个谓词公式是 A 相对于 K 的谓词公式。

实例 96.1 命题为:

小李是中国人。

它的谓词级符号化键为:

$$\mathbf{UD}:\{\text{小李}\}$$

$$Ax:x\text{是中国人。}$$

$$a:\text{小李}$$

命题相对于它的符号化键的谓词公式为:

$$Aa$$

实例 96.2 命题为:

如果小李是中国人，那么小王和小刘也是。

它的谓词级符号化键为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD}\ &:\{\text{小李，小王，小刘}\}\\ Ax\ &:x\text{是中国人。}\\ a\ &:\text{小李}\\ b\ &:\text{小王}\\ b\ &:\text{小刘}\end{aligned}$$

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$Aa \to (Ab \land Ac)$$

实例 96.3 命题为:

每个人都是中国人。

它的谓词级符号化键为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD}\ &:\text{所有人}\\ Ax\ &:x\text{是中国人。}\end{aligned}$$

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\forall x Ax$$

实例 96.4 命题为:

有人是中国人。

它的谓词级符号化键为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD}\ &:\text{所有人}\\ Ax\ &:x\text{是中国人。}\end{aligned}$$

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\exists x Ax$$

实例 96.5 命题为:

没有人是中国人。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有人

Ax :x是中国人。

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\neg\exists xAx$$

实例 96.6 命题为:

并非所有人都是中国人。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有人

Ax :x是中国人。

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\neg\forall xAx$$

实例 96.7 命题为:

我的篮子里的每一个苹果都是红色的。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有苹果

Ax :x在我的蓝子里。

Bx :x是红色的。

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\forall x(Ax \to Bx)$$

实例 96.8 命题为:

我的篮子里的有些苹果是绿色的。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有苹果

Ax :x在我的蓝子里。

Cx :x是绿色的。

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\exists x(Ax \wedge Cx)$$

实例 96.9 命题为:

并非我的篮子里的所有苹果都是绿色的。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有苹果

Ax :x在我的蓝子里。

Cx :x是绿色的。

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\neg\forall x(Ax \rightarrow Cx)$$

实例 96.10 命题为:

我的篮子里的所有苹果都不是绿色的。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有苹果

Ax :x在我的蓝子里。

Cx :x是绿色的。

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\forall x(Ax \rightarrow \neg Cx)$$

实例 96.11 命题为:

所有玫瑰都有刺。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有玫瑰

Tx :x有刺。

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\forall xTx$$

实例 96.12 命题为:

所有玫瑰都有刺。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有植物

Rx :x是玫瑰。

Tx :x有刺。

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\forall x(Rx \to Tx)$$

实例 96.13 命题为:

小李的头发上戴着玫瑰。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有人和植物

Hxy :x头发上戴着y

Rx :x是玫瑰。

a :小李

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\exists x(Rx \wedge Hax)$$

实例 96.14 命题为:

小李的所有朋友都养狗。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有人和狗

Hxy :x养y

Fxy :x是y的朋友

Rx :x是狗。

a :小李

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\forall x(Fxa \rightarrow \exists y(Ry \wedge Hxy))$$

实例 96.15 命题为:

小李欠了其他人钱。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有人

Fxy :x欠y钱

a :小李

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\forall x(\neg(x = a) \rightarrow Fax)$$

实例 96.16 命题为:

除了小李之外, 没有人欠小王钱。

它的符号化键为:

UD :所有人

Fxy :x欠y钱

a :小李

b :小王

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\neg\exists x(\neg(x = a) \wedge Fxb)$$

实例 96.17 命题为:

只有小李欠小王钱。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有人

Fxy :x欠y钱

a :小李

b :小王

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$Fab \wedge \neg\exists x(\neg(x = a) \wedge Fxb)$$

实例 96.18 命题为:

桌子上至少有一个苹果。

它的谓词级符号化键为:

UD :桌子上的所有东西

Ax :x是苹果

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\exists x Ax$$

实例 96.19 命题为:

桌子上至少有两个苹果。

它的谓词级符号化键为:

UD :桌子上的所有东西

Ax :x是苹果

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\exists x\exists y(Ax \wedge Ay \wedge x \neq y)$$

实例 96.20 命题为:

桌子上最多有一个苹果。

它的谓词级符号化键为:

UD :桌子上的所有东西

Ax :x是苹果

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\forall x \forall y((Ax \wedge Ay) \rightarrow x = y)$$

实例 96.21 命题为:

桌子上最多有两个苹果。

它的谓词级符号化键为:

UD :桌子上的所有东西

Ax :x是苹果

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\forall x \forall y \forall z((Ax \wedge Ay \wedge Az) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$$

实例 96.22 命题为:

桌子上正好有一个苹果。

它的谓词级符号化键为:

UD :桌子上的所有东西

Ax :x是苹果

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\exists x(Ax \wedge \neg \exists y(Ay \wedge x \neq y))$$

实例 96.23 命题为:

桌子上正好有两个苹果。

它的谓词级符号化键为:

UD :桌子上的所有东西

Ax :x是苹果

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\exists x\exists y(Ax\wedge Ay\wedge x\neq y\wedge\neg\exists z(Az\wedge x\neq z\wedge y\neq z))$$

实例 96.24 命题为:

法国的现任国王是秃顶的。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有活着的人

Ax :x是法国的现任国王

Bx :x是秃顶的

命题相对于它的谓词级符号化键的谓词公式为:

$$\exists x(Ax\wedge\neg\exists y(Ay\wedge x\neq y)\wedge Bx)$$

实例 96.25 命题为:

法国的现任国王不是秃顶的。

这个命题可以有两种理解, 第一种为:

并非法国的现任国王是秃顶的。

第二种为:

法国的现任国王是不秃顶的。

符号化键为:

UD :所有活着的人

Ax :x是法国的现任国王

Bx :x是秃顶的

按第一种理解, 得到的谓词公式为:

$$\neg\exists x(Ax \wedge \neg\exists y(Ay \wedge x \neq y) \wedge Bx)$$

按第二种理解, 得到的谓词公式为:

$$\exists x(Ax \wedge \neg\exists y(Ay \wedge x \neq y) \wedge \neg Bx)$$

定义 97 (谓词公式) 这本书中谓词公式指所有个体变元符号都受量词符号作用的一类合式公式。也称闭合式公式或语句。

实例 97.1 $\forall xPx$

实例 97.2 $\forall x(Ax \to Bx)$

实例 97.3 $\exists x(Rx \wedge Lcx)$

实例 97.4 $\forall x((Sxp \wedge Mx) \to \neg\exists yCyx)$

实例 97.5 $P(f(a, b))$

实例 97.6 $\forall x(P(x, a) \to Q(f(x)))$

定义 98 (谓词公式中的谓词符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个谓词符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的谓词符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

实例 98.1 $\forall xPx \mapsto P$

实例 98.2 $\forall x(Ax \to Bx) \mapsto \{A, B\}$

实例 98.3 $\exists x(Rx \wedge Lcx) \mapsto \{R, L\}$

实例 98.4 $\forall x((Sxp \wedge Mx) \to \neg\exists yCyx) \mapsto \{S, M, C\}$

实例 98.5 $P(f(a, b)) \mapsto P$

实例 98.6 $\forall x(P(x, a) \to Q(f(x))) \mapsto \{P, Q\}$

定义 99 (谓词公式中的量词符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个量词符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的量词符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

实例 99.1 $\forall xPx \mapsto \forall$

实例 99.2 $\forall x(Ax \to Bx) \mapsto \forall$

实例 99.3 $\exists x(Rx \wedge Lcx) \mapsto \exists$

实例 99.4 $\forall x((Sxp \wedge Mx) \to \neg\exists yCyx) \mapsto \{\forall, \exists\}$

实例 99.5 $\forall x(P(x,a) \to Q(f(x))) \mapsto \forall$

定义 100 (谓词公式中的个体常元符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个个体常元符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的个体常元符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

实例 100.1 $\exists x(Rx \wedge Lcx) \mapsto c$

实例 100.2 $\forall x((Sxp \wedge Mx) \to \neg\exists yCyx) \mapsto p$

实例 100.3 $\forall x(P(x,a) \to Q(f(x))) \mapsto a$

实例 100.4 $P(f(a,b)) \mapsto \{a,b\}$

定义 101 (谓词公式中的个体变元符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个个体变元符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的个体变元符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

实例 101.1 $\forall xPx \mapsto x$

实例 101.2 $\forall x(Ax \to Bx) \mapsto x$

实例 101.3 $\exists x(Rx \wedge Lcx) \mapsto x$

实例 101.4 $\forall x((Sxp \wedge Mx) \to \neg\exists yCyx) \mapsto \{x,y\}$

实例 101.5 $\forall x(P(x,a) \to Q(f(x))) \mapsto x$

定义 102 (谓词公式中的逻辑联结词符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个逻辑联结词符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的逻辑联结词符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

实例 102.1 $\forall x(Ax \to Bx) \mapsto\to$

实例 102.2 $\exists x(Rx \wedge Lcx) \mapsto \wedge$

实例 102.3 $\forall x((Sxp \wedge Mx) \to \neg\exists yCyx) \mapsto \{\wedge, \to, \neg\}$

实例 102.4 $\forall x(P(x,a)\to Q(f(x)))\mapsto\to$

定义 103 (谓词符号) 大写字母或带数字下标的大写字母。

即 $P,Q,R,P_1,P_2\cdots$

定义 104 (量词符号) $\forall,\exists$

定义 105 (个体常元符号) a 到 w 的小写字母或带数字下标的 a 到 w 的小写字母。

即 $a,b,c,a_1,a_2\cdots$

定义 106 (个体变元符号) 小写字母 x,y,z 或带数字下标的小写字母 x,y,z。

即 $x,y,z,x_1,x_2\cdots$

定义 107 (谓词的外延) 指谓词所适用的所有对象的集合。

谓词 $\mathcal{P}$ 的外延记作 extension($\mathcal{P}$)，简写作 e($\mathcal{P}$).

定义 108 (单指称项的指称对象) 指该单指称项所代表或指向的具体实体。

单指称项 c 的指称对象记作 referent(c)，简写作 r(c).

定义 109 (谓词公式的解释)

定义一【不带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式的解释。

1. 写出论域。

2. 将谓词公式中的所有谓词符号和谓词对应起来。

3. 将谓词公式中的所有个体常元符号和单指称项对应起来。

定义二【带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式的解释。

1. 写出论域。

2. 将谓词公式中的所有谓词符号和谓词对应起来。

3. 将谓词公式中的所有函词符号和函词对应起来。

4. 将谓词公式中的所有个体常元符号和单指称项对应起来。

定义 110 (谓词公式相对于它的解释的模型)

定义一【不带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式相对于它的解释的模型。

1. 写出论域。
2. 写出谓词公式中的谓词符号经解释得到的谓词的外延。
3. 写出谓词公式中的个体常元符号经解释得到的单指称项的指称对象。

定义二【带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式相对于它的解释的模型。

1. 写出论域。
2. 写出谓词公式中的谓词符号经解释得到的谓词的外延。
3. 写出谓词公式中的函词符号经解释得到的函词的外延。
4. 写出谓词公式中的个体常元符号经解释得到的单指称项的指称对象。

定义 111 (谓词公式的模型)

定义一【不带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式的模型。

1. 写出一个非空集合, 作为论域。
2. 对谓词公式中的每个一元谓词符号赋予一个论域的子集, 作为一元谓词符号所代表的一元谓词的外延。
3. 对谓词公式中的每个 n 元谓词符号赋予一个由论域上的有序 n 元组构成的集合, 作为 n 元谓词符号所代表的 n 元谓词的外延。
4. 对谓词公式中的每个个体常元符号赋予一个论域中的元素, 作为个体常元符号所代表的单指称项的指称对象。

定义二【带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式的模型。

1. 写出一个非空集合, 作为论域。

2. 对谓词公式中的每个一元谓词符号赋予一个论域的子集，作为一元谓词符号所代表的一元谓词的外延。

3. 对谓词公式中的每个 n 元谓词符号赋予一个由论域上的有序 n 元组构成的集合，作为 n 元谓词符号所代表的 n 元谓词的外延。

4. 对谓词公式中的每个 n 元函词符号赋予一个由论域上的有序 $n+1$ 元组构成的集合，作为 n 元函词符号所代表的 n 元函词的外延。

5. 对谓词公式中的每个个体常元符号赋予一个论域中的元素，作为个体常元符号所代表的单指称项的指称对象。

定义 112 (谓词公式相对于它的模型的真值)

定义一【不带函词】设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,$\mathbb{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个模型。

按以下规则求函数 s 的取值，当 $\mathcal{S}$ 等于 $\mathcal{A}$ 时，函数 s 的取值就是 $\mathcal{A}$ 相对于 $\mathbb{M}$ 的真值.

1. 如果 $\mathcal{S}$ 是形如 $\mathcal{P}t_1\cdots t_n$ 的合式公式，那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}1 & \text{如果}(\Omega_1\cdots\Omega_n)\text{在}\mathbb{M}\text{的}\mathrm{extension}(\mathcal{P})\text{中},\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

如果 t_i 是个体常元符号，那么 $\Omega_i=\mathrm{referent}(t_i)$，如果 t_i 是个体变元符号，那么 $\Omega_i=\mathrm{assignment}(t_i)$.

2. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $\neg\mathcal{B}$，那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}1 & \text{如果}s(\mathcal{B},a)=0,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

3. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $(\mathcal{B}\wedge\mathcal{C})$，那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}1 & \text{如果}s(\mathcal{B},a)=1\text{且}s(\mathcal{C},a)=1,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

4. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})$，那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}0 & \text{如果}s(\mathcal{B},a)=0\text{且}s(\mathcal{C},a)=0,\\ 1 & \text{其它}.\end{cases}$$

5. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$, 那么

$$s(\mathcal{S}, a) = \begin{cases} 0 & \text{如果} s(\mathcal{B}, a) = 1 \text{且} s(\mathcal{C}, a) = 0, \\ 1 & \text{其它}. \end{cases}$$

6. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $(\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C})$, 那么

$$s(\mathcal{S}, a) = \begin{cases} 1 & \text{如果} s(\mathcal{B}, a) = s(\mathcal{C}, a), \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

7. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $\forall \chi \mathcal{B}$, 那么

$$s(\mathcal{S}, a) = \begin{cases} 1 & \text{如果} s(\mathcal{B}, a[\Omega|\chi]) = 1 \text{对于所有的} \Omega \in \mathbf{UD}, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

8. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $\exists \chi \mathcal{B}$, 那么

$$s(\mathcal{S}, a) = \begin{cases} 1 & \text{如果} s(\mathcal{B}, a[\Omega|\chi]) = 1 \text{对于某个} \Omega \in \mathbf{UD}, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

其中 $\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ 均为合式公式。

定义二【带函词】设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,$\mathbb{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个模型。

按以下规则求函数 s 的取值, 当 $\mathcal{S}$ 等于 $\mathcal{A}$ 时, 函数 s 的取值就是 $\mathcal{A}$ 相对于 $\mathbb{M}$ 的真值.

1. 如果 $\mathcal{S}$ 是形如 $\mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 的合式公式, 那么

$$s(\mathcal{S}, a) = \begin{cases} 1 & \text{如果} (\Omega_1 \cdots \Omega_n) \text{在} \mathbb{M} \text{的extension} (\mathcal{P}) \text{中}, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

如果 t_i 是常项, 那么 $\Omega_i = \text{referent}(t_i)$, 如果 t_i 是变项, 那么 $\Omega_i = \text{assignment}(t_i)$.

2. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $\neg \mathcal{B}$, 那么

$$s(\mathcal{S}, a) = \begin{cases} 1 & \text{如果} s(\mathcal{B}, a) = 0, \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

3. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $(\mathcal{B}\wedge\mathcal{C})$, 那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}1 & \text{如果}s(\mathcal{B},a)=1\text{且}s(\mathcal{C},a)=1,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

4. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})$, 那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}0 & \text{如果}s(\mathcal{B},a)=0\text{且}s(\mathcal{C},a)=0,\\ 1 & \text{其它}.\end{cases}$$

5. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $(\mathcal{B}\to\mathcal{C})$, 那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}0 & \text{如果}s(\mathcal{B},a)=1\text{且}s(\mathcal{C},a)=0,\\ 1 & \text{其它}.\end{cases}$$

6. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $(\mathcal{B}\leftrightarrow\mathcal{C})$, 那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}1 & \text{如果}s(\mathcal{B},a)=s(\mathcal{C},a),\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

7. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $\forall\chi\mathcal{B}$, 那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}1 & \text{如果}s(\mathcal{B},a[\Omega|\chi])=1\text{对于所有的}\Omega\in\mathbf{UD},\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

8. 如果 $\mathcal{S}$ 是 $\exists\chi\mathcal{B}$, 那么

$$s(\mathcal{S},a)=\begin{cases}1 & \text{如果}s(\mathcal{B},a[\Omega|\chi])=1\text{对于某个}\Omega\in\mathbf{UD},\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

其中 $\mathcal{B},\mathcal{C}$ 均为合式公式。

实例 112.1 谓词公式为:

$$\exists x(Ax\wedge Bx)$$

谓词公式的模型为:

$$\begin{aligned} \text{UD} =& \{1,2\} \\ \text{e}(A) =& \{1,2\} \\ \text{e}(B) =& \{2\} \end{aligned}$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

$$\text{真}$$

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下:

将 1 指派给 x,1 在 e(A) 中，不在 e(B) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Ax, a[1|x]) = 1$$

$$s(Bx, a[1|x]) = 0$$

由定义 112 的第 3 条规则可得:

$$s(Ax \wedge Bx, a[1|x]) = 0$$

再将 2 指派给 x,2 在 e(A) 中，也在 e(B) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Ax, a[2|x]) = 1$$

$$s(Bx, a[2|x]) = 1$$

由定义 112 的第 3 条规则可得:

$$s(Ax \wedge Bx, a[2|x]) = 1$$

由定义 112 的第 8 条规则可得:

$$s(\exists x(Ax \wedge Bx)) = 1$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为真。

实例 112.2 谓词公式为:

$$\forall x Axx \to Bd$$

谓词公式的模型为:

$$\begin{aligned} \textbf{UD} =& \{1\} \\ \text{e}(A) =& \{(1,1)\} \\ \text{e}(B) =& \{\} \\ \text{r}(d) =& 1 \end{aligned}$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

假

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下:

将 1 指派给 x，由于 $(1,1)$ 在 e(A) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Axx, a[1|x]) = 1$$

因为论域中总共只有这一个元素，由定义 112 的第 7 条规则可得:

$$s(\forall xAxx) = 1$$

因为 r(d) 不在 e(B) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Bd) = 0$$

由定义 112 的第 5 条规则可得:

$$s(\forall xAxx \to Bd) = 0$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为假。

实例 112.3 谓词公式为:

$$\forall xAxx \to Bd$$

谓词公式的模型为:

$$\mathbf{UD} = \{1\}$$
$$\text{e}(A) = \{1, 1\}$$
$$\text{e}(B) = \{1\}$$
$$\text{r}(d) = 1$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

真

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下:

将 1 指派给 x，由于 $(1,1)$ 在 e(A) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Axx, a[1|x]) = 1$$

因为论域中总共只有这一个元素，由定义 112 的第 7 条规则可得:

$$s(\forall xAxx) = 1$$

因为 `r`(d) 在 `e`(B) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得：

$$s(Bd) = 1$$

由定义 112 的第 5 条规则可得：

$$s(\forall xAxx \to Bd) = 1$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为真。

实例 112.4 谓词公式为:

$$\exists xSx$$

谓词公式的模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1,2\}\\ \mathrm{e}(S) =& \{1\}\end{aligned}$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

真

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下：

将 1 指派给 x，由于 1 在 `e`(S) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得：

$$s(Sx, a[1|x]) = 1$$

由定义 112 的第 8 条规则可得：

$$s(\exists xSx) = 1$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为真。

实例 112.5 谓词公式为:

$$\forall xSx$$

谓词公式的模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1,2\}\\ \mathrm{e}(S) =& \{1\}\end{aligned}$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

假

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下:

将 1 指派给 x，由于 1 在 $\mathtt{e}(S)$ 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Sx, a[1|x]) = 1$$

将 2 指派给 x，由于 2 在 $\mathtt{e}(S)$ 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Sx, a[2|x]) = 1$$

由定义 112 的第 7 条规则可得:

$$s(\forall xSx) = 1$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为真。

实例 112.6 谓词公式为:

$$Ad \wedge Bd \wedge Cd$$

谓词公式的模型为:

$$\mathbf{UD} = \{1\}$$
$$\mathrm{e}(A) = \{1\}$$
$$\mathrm{e}(B) = \{1\}$$
$$\mathrm{e}(C) = \{1\}$$
$$\mathrm{r}(d) = 1$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

真

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下:

由于 $\mathtt{r}(d)$ 在 $\mathtt{e}(A)$、$\mathtt{e}(B)$、$\mathtt{e}(C)$ 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Ad) = 1$$
$$s(Bd) = 1$$
$$s(Cd) = 1$$

由定义 112 的第 3 条规则可得:

$$s(Ad \wedge Bd \wedge Cd) = 1$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为真。

实例 112.7 谓词公式为:

$$\exists x \exists y Rxy$$

谓词公式的模型为:

$$\begin{aligned}\mathbf{UD} =& \{\text{小李}, \text{小王}, \text{小刘}\}\\ \mathrm{e}(R) =& \{(\text{小李}, \text{小王}), (\text{小王}, \text{小刘}), (\text{小刘}, \text{小李})\}\end{aligned}$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

真

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下:

将“小李”指派给 x，也将“小李”指派给 y，由于 (小李, 小李) 不在 e(R) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Rxy, a[(\text{小李}, \text{小李})|(x, y)]) = 0$$

将“小李”指派给 x，将“小王”指派给 y，由于 (小李, 小王) 在 e(R) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Rxy, a[(\text{小李}, \text{小王})|(x, y)]) = 1$$

由定义 112 的第 8 条规则可得:

$$s(\exists x \exists y Rxy) = 1$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为真。

实例 112.8 谓词公式为:

$$\forall x \forall y Rxy$$

谓词公式的模型为:

$$\begin{aligned}\mathbf{UD} =& \{\text{小李}, \text{小王}, \text{小刘}\}\\ \mathrm{e}(R) =& \{(\text{小李}, \text{小王}), (\text{小王}, \text{小刘}), (\text{小刘}, \text{小李})\}\end{aligned}$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

假

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下:

将“小李”指派给 x，也将“小李”指派给 y，由于 (小李, 小李) 不在 $\mathrm{e}(R)$ 中，由定义 112 的第 1 条规则可得：

$$s(Rxy, a[(\text{小李}, \text{小李})|(x, y)]) = 0$$

由定义 112 的第 7 条规则可得：

$$s(\forall x \forall y Rxy) = 0$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为假。

实例 112.9 谓词公式为:

$$\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx)$$

谓词公式的模型为:

$$\begin{aligned}\mathbf{UD} =& \{\text{小李}, \text{小王}, \text{小刘}\}\\ \mathrm{e}(R) =& \{(\text{小李}, \text{小王}), (\text{小王}, \text{小刘}), (\text{小刘}, \text{小李})\}\end{aligned}$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

假

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下：

将“小李”指派给 x，也将“小李”指派给 y，由于 (小李, 小李) 不在 $\mathrm{e}(R)$ 中，由定义 112.1 的第 1 条规则可得：

$$s(Rxy, a[(\text{小李}, \text{小李})|(x, y)]) = 0$$
$$s(Ryx, a[(\text{小李}, \text{小李})|(x, y)]) = 0$$

由定义 112 的第 4 条规则可得：

$$s(Rxy \vee Ryx, a[(\text{小李}, \text{小李})|(x, y)]) = 0$$

由定义 112 的第 7 条规则可得：

$$s(\forall x \forall y(Rxy \vee Ryx)) = 0$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为假。

实例 112.10 谓词公式为:

$$\forall x(Wx \to (Hx \wedge Wx))$$

谓词公式的模型为:

$$\mathbf{UD} = \{\text{小李}, \text{小王}, \text{小刘}\}$$
$$\mathrm{e}(H) = \{\text{小李}, \text{小王}, \text{小刘}\}$$
$$\mathrm{e}(W) = \{\text{小李}, \text{小王}\}$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

真

说明: 根据定义 112 求谓词公式相对于它的模型的真值如下:

将“小刘”指派给 x，由于“小李”在 e(W) 中，也在 e(H) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Wx, a[\text{小李}|x]) = 1$$
$$s(Hx, a[\text{小李}|x]) = 1$$

由定义 112 的第 3 条规则可得:

$$s(Hx \wedge Wx, a[\text{小李}|x]) = 1$$

由定义 112 的第 5 条规则可得:

$$s(Wx \to (Hx \wedge Wx), a[\text{小李}|x]) = 1$$

再将“小王”指派给 x，由于“小王”在 e(W) 和 e(H) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Wx, a[\text{小王}|x]) = 1$$
$$s(Hx, a[\text{小王}|x]) = 1$$

由定义 112 的第 3 条规则可得:

$$s(Hx \wedge Wx, a[\text{小王}|x]) = 1$$

由定义 112 的第 5 条规则可得:

$$s(Wx \to (Hx \wedge Wx), a[\text{小王}|x]) = 1$$

再将“小刘”指派给 x，由于“小刘”不在 e(W) 中，在 e(H) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得:

$$s(Wx, a[\text{小刘}|x]) = 0$$
$$s(Hx, a[\text{小刘}|x]) = 1$$

由定义 112 的第 3 条规则可得：

$$s(Hx \wedge Wx, a[\text{小刘}|x]) = 0$$

由定义 112 的第 5 条规则可得：

$$s(Wx \rightarrow (Hx \wedge Wx), a[\text{小刘}|x]) = 1$$

由定义 112 的第 7 条规则可得：

$$s(\forall x(Wx \rightarrow (Hx \wedge Wx))) = 1$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为真。

实例 112.11 谓词公式为:

$$\forall x \exists y P(x, f(x, y))$$

它的一个模型为:

$$\begin{aligned}\mathbf{UD} =& \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\} \\ \mathrm{e}(P) =& \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), \cdots, (n,n), \cdots\} \\ \mathrm{e}(f) =& \{(0,0,0), (0,1,0), (1,1,1), \cdots, (m,n,m \times n), \cdots\}\end{aligned}$$

谓词公式相对于它的模型的真值为:

真

说明: 根据定义 112 的第二种定义求谓词公式相对于它的模型的真值如下：

给 x 指派 0，给 y 也指派 0，由定义 113 可得：

$$a(x) = 0$$

$$a(y) = 0$$

由定义 193 可得：

$$a(f(x, y)) = f(a(x), a(y)) = 0$$

由于 $(0,0)$ 在 e(P) 中，由定义 112 的第 1 条规则可得：

$$s(P(x, f(x, y)), a[(0,0)|(x, y)]) = 1$$

因为论域中有无数个元素，不可能一个一个对论域中的所有元素做验证，直接给 x 指派 m，给 y 指派 n,m 和 n 代表论域中任意元素。由定义 112 可得：

$$a(x) = m$$

$$a(y) = n$$

由定义 112 可得：

$$a(f(x,y)) = f(a(x),a(y)) = m \times n$$

因为当 $n=1$ 时，不管 m 等于多少，$m = m \times n$ 都成立。由定义 112 的第 7 条和第 8 条规则可得：

$$s(\forall x \exists y P(x, f(x,y))) = 1$$

所以这个谓词公式相对于它的模型的真值为真。

定义 113 (个体变元符号的指派) 给个体变元符号赋予论域中的元素的过程和结果。

函数 $\text{assignment}(\chi) = \Omega$ 被称为个体变元符号的指派, 简写作 $a(\chi) = \Omega$, 也可写作 $a[\Omega|\chi]$, 表示将论域中的元素 Ω 赋值于个体变元符号 χ.

定义 114 (谓词公式的成真模型) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式。

如果 $\mathcal{A}$ 的一个模型使 $\mathcal{A}$ 的真值为真, 那么称这个模型为 $\mathcal{A}$ 的成真模型。

实例 114.1 谓词公式为:

$$Da \wedge Db$$

它的一个成真模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1\}\\ \text{e}(D) =& \{1\}\\ \text{r}(a) =& 1\\ \text{r}(b) =& 1\end{aligned}$$

实例 114.2 谓词公式为:

$$\exists x T x h$$

它的一个成真模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1\}\\ \text{e}(T) =& \{(1,1)\}\\ \text{r}(h) =& 1\end{aligned}$$

实例 114.3 谓词公式为：

$$Pm \land \neg\forall x Px$$

它的一个成真模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1,2\}\\ \text{e}(P) =& \{1\}\\ \text{r}(m) =& 1\end{aligned}$$

定义 115 (谓词公式的成假模型) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式。

如果 $\mathcal{A}$ 的一个模型使 $\mathcal{A}$ 的真值为假, 那么称这个模型为 $\mathcal{A}$ 的成假模型。

实例 115.1 谓词公式为：

$$Da \land Db$$

它的一个成假模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1\}\\ \text{e}(D) =& \{\}\\ \text{r}(a) =& 1\\ \text{r}(b) =& 1\end{aligned}$$

实例 115.2 谓词公式为：

$$\exists x Txh$$

它的一个成假模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1\}\\ \text{e}(T) =& \{\}\\ \text{r}(h) =& 1\end{aligned}$$

实例 115.3 谓词公式为：

$$Pm \land \neg\forall x Px$$

它的一个成假模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1\}\\ \text{e}(P) =& \{\}\\ \text{r}(m) =& 1\end{aligned}$$

定义 116 (恒真谓词公式) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式。

$\mathcal{A}$ 为恒真谓词公式当且仅当对于 $\mathcal{A}$ 的任意一个模型,$\mathcal{A}$ 的真值都为真。即

$$\mathcal{A}\text{为恒真谓词公式} \Longleftrightarrow \vDash \mathcal{A}$$

定义 117 (恒假谓词公式) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式。

$\mathcal{A}$ 为恒假谓词公式当且仅当对于 $\mathcal{A}$ 的任意一个模型,$\mathcal{A}$ 的真值都为假。即

$$\mathcal{A}\text{为恒假谓词公式} \Longleftrightarrow \vDash \neg\mathcal{A}$$

定义 118 (可真可假谓词公式) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式。

$\mathcal{A}$ 为可真可假谓词公式当且仅当 $\mathcal{A}$ 不是恒真谓词公式也不是恒假谓词公式。或者说存在模型使 $\mathcal{A}$ 为真, 也存在模型使 $\mathcal{A}$ 为假。

实例 118.1 $Da \wedge Db$

说明: 根据定义 118，只要构造出这个谓词公式的一个成真模型和一个成假模型，就能说明这个谓词公式为可真可假谓词公式。

成真模型为:	成假模型为:
$\mathbf{UD} = \{1\}$	$\mathbf{UD} = \{1\}$
$\mathrm{e}(D) = \{1\}$	$\mathrm{e}(D) = \{\}$
$\mathrm{r}(a) = 1$	$\mathrm{r}(a) = 1$
$\mathrm{r}(b) = 1$	$\mathrm{r}(b) = 1$

实例 118.2 $\exists xTxh$

说明: 根据定义 118，只要构造出这个谓词公式的一个成真模型和一个成假模型，就能说明这个谓词公式为可真可假谓词公式。

成真模型为:	成假模型为:
$\mathbf{UD} = \{1\}$	$\mathbf{UD} = \{1\}$
$\mathrm{e}(T) = \{(1,1)\}$	$\mathrm{e}(T) = \{\}$
$\mathrm{r}(h) = 1$	$\mathrm{r}(h) = 1$

实例 118.3 $Pm \wedge \neg\forall xPx$

说明: 根据定义 118，只要构造出这个谓词公式的一个成真模型和一个成假模型，就能说明这个谓词公式为可真可假谓词公式。

成真模型为：

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1,2\}\\ \text{e}(P) =&\{1\}\\ \text{r}(m) =&1\end{aligned}$$

成假模型为：

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1\}\\ \text{e}(P) =&\{\}\\ \text{r}(m) =&1\end{aligned}$$

实例 118.4 $\forall zJz \leftrightarrow \exists yJy$

说明： 根据定义 118，只要构造出这个谓词公式的一个成真模型和一个成假模型，就能说明这个谓词公式为可真可假谓词公式。

成真模型为：

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1\}\\ \text{e}(J) =&\{1\}\end{aligned}$$

成假模型为：

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1\}\\ \text{e}(J) =&\{1,2\}\end{aligned}$$

实例 118.5 $\forall x(Wxmn \lor \exists yLxy)$

说明： 根据定义 118，只要构造出这个谓词公式的一个成真模型和一个成假模型，就能说明这个谓词公式为可真可假谓词公式。

成真模型为：

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1\}\\ \text{e}(W) =&\{(1,1,1)\}\\ \text{e}(L) =&\{(1,1)\}\\ \text{r}(m) =&1\\ \text{r}(n) =&1\end{aligned}$$

成假模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1\}\\ \mathrm{e}(W) =&\{\}\\ \mathrm{e}(L) =&\{\}\\ \mathrm{r}(m) =&1\\ \mathrm{r}(n) =&1\end{aligned}$$

实例 118.6 $\exists x(Gx \to \forall y My)$

说明: 根据定义 118，只要构造出这个谓词公式的一个成真模型和一个成假模型，就能说明这个谓词公式为可真可假谓词公式。

成真模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1\}\\ \mathrm{e}(G) =&\{\}\\ \mathrm{e}(M) =&\{1\}\end{aligned}$$

成假模型为:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1,2\}\\ \mathrm{e}(G) =&\{1\}\\ \mathrm{e}(M) =&\{1\}\end{aligned}$$

定义 119 (命题公式集) 如果一个集合中的所有元素都是命题公式类中的元素，那么称这个集合为命题公式类的子集, 也称为命题公式集。

实例 119.1

$\{A \vee B, B \vee C, C \to \neg A\}$

定义 120 (命题公式集的指派) 给命题公式集中的每个原子命题符号赋予“真”或“假”的过程和结果。

设 $\mathbb{A}$ 为任意一个命题公式集,$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ 为 $\mathbb{A}$ 中所有命题公式中的原子命题符号。

有序 n 元组 $(a(\mathcal{P}_1), a(\mathcal{P}_2), \ldots, a(\mathcal{P}_n))$ 称为 $\mathbb{A}$ 的一个指派。

定义 121 (相容命题公式集) 设 $\mathbb{A}$ 为任意一个命题公式集。

$\mathbb{A}$ 为相容命题公式集当且仅当至少有一个 $\mathbb{A}$ 的指派使 $\mathbb{A}$ 中的所有命题公式都为真。

实例 121.1 $\{A \to A, \neg A \to \neg A, A \wedge A, A \vee A\}$

说明: 画出这个命题公式集的一个部分真值表如下:

A	$A \to A$	$\neg A \to \neg A$	$A \wedge A$	$A \vee A$
1	1	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式集中的所有命题公式都为真，因此，这个命题公式集是相容命题公式集。

实例 121.2 $\{A \vee B, A \to C, B \to C\}$

说明: 画出这个命题公式集的一个部分真值表如下:

A	B	C	$A \vee B$	$A \to C$	$B \to C$
1	1	1	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式集中的所有命题公式都为真，因此，这个命题公式集是相容命题公式集。

实例 121.3 $\{A \leftrightarrow (B \vee C), C \to \neg A, A \to \neg B\}$

说明: 画出这个命题公式集的一个部分真值表如下:

A	B	C	$A \leftrightarrow (B \vee C)$	$C \to \neg A$	$A \to \neg B$
0	0	0	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式集中的所有命题公式都为真，因此，这个命题公式集是相容命题公式集。

实例 121.4 $\{A \vee B, B \vee C, C \to \neg A\}$

说明: 画出这个命题公式集的一个部分真值表如下:

A	B	C	$A \vee B$	$B \vee C$	$C \to \neg A$
0	1	1	1	1	1

从上表可看出，有指派使这个命题公式集中的所有命题公式都为真，因此，这个命题公式集是相容命题公式集。

反例 121.1 $\{A \wedge B, C \to \neg B, C\}$

说明: 画出这个命题公式集的完整真值表如下:

A	B	C	$A \wedge B$	$C \rightarrow \neg B$	C
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

从上表可看出，没有指派使这个命题公式集中的所有命题公式都为真，因此，这个命题公式集不是相容命题公式集。

反例 121.2 $\{B \wedge (C \vee A), A \rightarrow B, \neg(B \vee C)\}$

说明: 画出这个命题公式集的完整真值表如下:

A	B	C	$B \wedge (C \vee A)$	$A \rightarrow B$	$\neg(B \vee C)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

从上表可看出，没有指派使这个命题公式集中的所有命题公式都为真，因此，这个命题公式集不是相容命题公式集。

定义 122 (谓词公式集) 如果一个集合中的所有元素都是谓词公式类中的元素，那么称这个集合为谓词公式类的子集, 也称为谓词公式集。

实例 122.1

$$\{\neg(Ma \wedge \exists x Ax), Ma \vee Fa, \forall x(Fx \rightarrow Ax)\}$$

定义 123 (谓词公式集的解释)

定义一【不带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式集的解释。

1. 写出论域。
2. 将谓词公式集中的所有谓词符号和谓词对应起来。
3. 将谓词公式集中的所有个体常元符号和单指称项对应起来。

定义二【带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式集的解释。

1. 写出论域。
2. 将谓词公式集中的所有谓词符号和谓词对应起来。
3. 将谓词公式集中的所有函词符号和函词对应起来。
4. 将谓词公式集中的所有个体常元符号和单指称项对应起来。

定义 124 (谓词公式集相对于它的解释的模型)

定义一【不带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式集相对于它的解释的模型。

1. 写出论域。
2. 写出谓词公式集中的谓词符号经解释得到的谓词的外延。
3. 写出谓词公式集中的个体常元符号经解释得到的单指称项的指称对象。

定义二【带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式集相对于它的解释的模型。

1. 写出论域。
2. 写出谓词公式集中的谓词符号经解释得到的谓词的外延。
3. 写出谓词公式集中的函词符号经解释得到的函词的外延。
4. 写出谓词公式集中的个体常元符号经解释得到的单指称项的指称对象。

定义 125 (谓词公式集的模型)

定义一【不带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式集的模型。

1. 写出一个非空集合，作为论域。
2. 对谓词公式集中的每个一元谓词符号赋予一个论域的子集，作为一元谓词符号所代表的一元谓词的外延。
3. 对谓词公式集中的每个 n 元谓词符号赋予一个由论域上的有序 n 元组构成的集合，作为 n 元谓词符号所代表的 n 元谓词的外延。
4. 对谓词公式集中的每个个体常元符号赋予一个论域中的元素，作为个体常元符号所代表的单指称项的指称对象。

定义二【带函词】由以下几部分构成的整体称为谓词公式集的模型。

1. 写出一个非空集合，作为论域。
2. 对谓词公式集中的每个一元谓词符号赋予一个论域的子集，作为一元谓词符号所代表的一元谓词的外延。
3. 对谓词公式集中的每个 n 元谓词符号赋予一个由论域上的有序 n 元组构成的集合，作为 n 元谓词符号所代表的 n 元谓词的外延。
4. 对谓词公式集中的每个 n 元函词符号赋予一个由论域上的有序 *n+1* 元组构成的集合，作为 n 元函词符号所代表的 n 元函词的外延。
5. 对谓词公式集中的每个个体常元符号赋予一个论域中的元素，作为个体常元符号所代表的单指称项的指称对象。

定义 126 (相容谓词公式集)

定义一 设 $\mathbb{A}$ 为任意一个谓词公式集。

$\mathbb{A}$ 为相容谓词公式集当且仅当至少有一个 $\mathbb{A}$ 的模型使 $\mathbb{A}$ 中的所有谓词公式都为真。

定义二 设 $\mathbb{A}$ 为任意一个谓词公式集。

$\mathbb{A}$ 是不相容谓词公式集当且仅当可以由 $\mathbb{A}$ 导出矛盾的结论。也就是说 $\mathbb{A} \vdash (\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{B})$，其中 $\mathcal{B}$ 为谓词公式。

$\mathbb{A}$ 是相容谓词公式集当且仅当 $\mathbb{A}$ 不是不相容谓词公式集。

实例 126.1 $\{Ma, \neg Na, Pa, \neg Qa\}$

说明: 构造一个这个谓词公式集的模型如下:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1\}\\ \text{e}(M) =&\{1\}\\ \text{e}(N) =&\{\}\\ \text{e}(P) =&\{1\}\\ \text{e}(Q) =&\{\}\\ \text{r}(a) =&1\end{aligned}$$

这个模型使得这个谓词公式集中的所有谓词公式都为真。因此，这个谓词公式集是相容谓词公式集。

实例 126.2 $\{Lee, Lef, \neg Lfe, \neg Lff\}$

说明: 构造一个这个谓词公式集的模型如下:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1,2\}\\ \text{e}(L) =&\{(1,1),(1,2)\}\\ \text{r}(e) =&1\\ \text{r}(f) =&2\end{aligned}$$

这个模型使得这个谓词公式集中的所有谓词公式都为真。因此，这个谓词公式集是相容谓词公式集。

实例 126.3 $\{\neg(Ma \wedge \exists xAx), Ma \vee Fa, \forall x(Fx \to Ax)\}$

说明: 构造一个这个谓词公式集的模型如下:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =&\{1\}\\ \text{e}(M) =&\{\}\\ \text{e}(A) =&\{1\}\\ \text{e}(F) =&\{1\}\\ \text{r}(a) =&1\end{aligned}$$

这个模型使得这个谓词公式集中的所有谓词公式都为真。因此，这个谓词公式集是相容谓词公式集。

实例 126.4 $\{\forall yGy, \forall x(Gx \to Hx), \exists y\neg Iy\}$

说明: 构造一个这个谓词公式集的模型如下:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1, 2\}\\ \text{e}(G) =& \{1, 2\}\\ \text{e}(H) =& \{1, 2\}\\ \text{e}(I) =& \{1\}\end{aligned}$$

这个模型使得这个谓词公式集中的所有谓词公式都为真。因此，这个谓词公式集是相容谓词公式集。

实例 126.5 $\{\exists x Xx, \exists x Yx, \forall x(Xx \leftrightarrow \neg Yx)\}$

说明: 构造一个这个谓词公式集的模型如下:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1, 2\}\\ \text{e}(X) =& \{1\}\\ \text{e}(Y) =& \{2\}\end{aligned}$$

这个模型使得这个谓词公式集中的所有谓词公式都为真。因此，这个谓词公式集是相容谓词公式集。

实例 126.6 $\{\forall x(Px \lor Qx), \exists x\neg(Qx \land Px)\}$

说明: 构造一个这个谓词公式集的模型如下:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1, 2\}\\ \text{e}(P) =& \{1\}\\ \text{e}(Q) =& \{2\}\end{aligned}$$

这个模型使得这个谓词公式集中的所有谓词公式都为真。因此，这个谓词公式集是相容谓词公式集。

实例 126.7 $\{\exists z(Nz \land Ozz), \forall x\forall y(Oxy \to Oyx)\}$

说明: 构造一个这个谓词公式集的模型如下:

$$\begin{aligned}\textbf{UD} =& \{1, 2\}\\ \text{e}(N) =& \{1\}\\ \text{e}(O) =& \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}\end{aligned}$$

这个模型使得这个谓词公式集中的所有谓词公式都为真。因此，这个谓词公式集是相容谓词公式集。

实例 126.8 $\{\neg\exists x\forall y Rxy, \forall x\exists y Rxy\}$

说明: 构造一个这个谓词公式集的模型如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{UD} =&\{1,2\}\\ \mathrm{e}(R) =&\{(1,1),(2,1)\}\end{aligned}$$

这个模型使得这个谓词公式集中的所有谓词公式都为真。因此，这个谓词公式集是相容谓词公式集。

反例 126.1 $\{\forall x\forall y(x=y), \exists x(x\neq a)\}$

说明: 以这个谓词公式集为前提，构造一个形式证明如下:

1	$\forall x\forall y(x=y)$	
2	$\exists x(x\neq a)$	
3	$\forall y(a=y)$	`∀E 1`
4	$a=b$	`∀E 3`
5	$a=a$	`=I`
6	$b=a$	`=E 4，5`
7	$\forall x(x=a)$	`∀I 6`
8	$\exists x(x\neq a)$	`R 2`

第 7 行与第 8 行矛盾，因此，这个谓词公式集是不相容谓词公式集。

定义 127 (命题集) 如果一个集合中的所有元素都是命题类中的元素，那么称这个集合为命题类的子集，也称为命题集。

定义 128 (命题集的命题级符号化键) 将命题集中的所有原子命题和原子命题符号对应起来构成的整体称为命题集的命题级符号化键。

定义 129 (命题集的谓词级符号化键)

定义一【不带函词】 由以下几部分构成的整体称为命题集的谓词级符号化键。

1. 写出论域。
2. 将命题集中的所有谓词和谓词符号对应起来。

3. 将命题集中的所有单指称项和个体常元符号对应起来。

定义二【带函词】 由以下几部分构成的整体称为命题集的谓词级符号化键。

1. 写出论域。

2. 将命题集中的所有谓词和谓词符号对应起来。

3. 将命题集中的所有函词和函词符号对应起来。

4. 将命题集中的所有单指称项和个体常元符号对应起来。

定义 130 (命题与命题的推出关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题。

$\mathcal{A}$ 推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 通过 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ 的符号化键转换得到的命题公式或谓词公式推出 $\mathcal{B}$ 通过 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ 的符号化键转换得到的命题公式或谓词公式。记作 $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

实例 130.1 大象很大。⇒ 小王结婚了或者没结婚。

说明: 这些命题的命题级符号化键如下:

$$A: \text{大象很大}$$

$$B: \text{小王结婚了}$$

将前提转换为命题公式如下:

$$A$$

将结论转换为命题公式如下:

$$B \vee \neg B$$

因为

$$A \Rightarrow B \vee \neg B$$

所以

$$\text{大象很大。} \Rightarrow \text{小王结婚了或者没结婚。}$$

实例 130.2 所有苹果都是红色的。⇒ 有些苹果是红色的。

说明: 这些命题的谓词级符号化键如下:

$$\mathbf{UD}: \text{所有苹果}$$

$$Ax: x\text{是红色的}$$

将前提转换为命题公式如下:

$$\forall xAx$$

将结论转换为命题公式如下:

$$\exists xAx$$

因为

$$\forall xAx \Rightarrow \exists xAx$$

所以

所有苹果都是红色的。$\Rightarrow$ 有些苹果是红色的。

反例 130.1 所有的哲学家都是逻辑学家。$\not\Rightarrow$ 所有的逻辑学家都是哲学家。

说明: 这些命题的谓词级符号化键如下:

UD :所有人

Px :x是哲学家

Qx :x是逻辑学家

将前提转换为命题公式如下:

$$\forall x(Px \to Qx)$$

将结论转换为命题公式如下:

$$\forall x(Qx \to Px)$$

因为

$$\forall x(Px \to Qx) \not\Rightarrow \forall x(Qx \to Px)$$

所以

所有的哲学家都是逻辑学家。$\not\Rightarrow$ 所有的逻辑学家都是哲学家。

定义 131 (命题集与命题的推出关系) 设 $\varPhi$ 为一个命题集,$\mathcal{B}$ 为一个命题。

$\varPhi$ 推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当 $\varPhi$ 通过 $\varPhi \cup \{\mathcal{B}\}$ 的符号化键转换得到的命题公式集或谓词公式集推出 $\mathcal{B}$ 通过 $\varPhi \cup \{\mathcal{B}\}$ 的符号化键转换得到的命题公式或谓词公式。记作 $\varPhi \Rightarrow \mathcal{B}$.

实例 131.1 {橘子是水果或乐器。橘子不是乐器。} $\Rightarrow$ 橘子是水果。

说明: 这些命题的命题级符号化键如下:

A :橘子是水果

B :橘子是乐器

将前提转换为命题公式如下:

$$A \vee B$$

$$\neg B$$

将结论转换为命题公式如下:

$$A$$

因为

$$\{A \vee B, \neg B\} \Rightarrow A$$

所以

{橘子是水果或乐器。橘子不是乐器。} ⇒ 橘子是水果。

实例 131.2 {如果桌子上有苹果, 那么小李去上课了。桌子上有苹果。} ⇒ 小李去上课了。

说明: 这些命题的命题级符号化键如下:

A :桌上有苹果

B :小李去上课了

将前提转换为命题公式如下:

$$A \to B$$

$$A$$

将结论转换为命题公式如下:

$$B$$

因为

$$\{A \to B, A\} \Rightarrow B$$

所以

{如果桌子上有苹果，那么小李就去上课了。桌子上有苹果。} ⇒ 小李去上课了。

实例 131.3 {外面下雨了或者我带了雨伞。我带了雨伞或者我会被淋湿。我没有带雨伞。} ⇒ 外面下雨了并且我会被淋湿。

说明: 这些命题的命题级符号化键如下:

$$A:\text{外面下雨了}$$
$$B:\text{我带了雨伞}$$
$$C:\text{我会被淋湿}$$

将前提转换为命题公式如下:

$$A \vee B$$
$$B \vee C$$
$$\neg B$$

将结论转换为命题公式如下:

$$A \wedge C$$

因为

$$\{A \vee B, B \vee C, \neg B\} \Rightarrow A \wedge C$$

所以

{外面下雨了或者我带了雨伞。我带了雨伞或者我会被淋湿。我没有带雨伞。} ⇒ 外面下雨了并且我会被淋湿。

实例 131.4 {今天是星期一当且仅当明天是星期二。明天是星期二当且仅当后天是星期三。} ⇒ 今天是星期一当且仅当后天是星期三。

说明: 这些命题的命题级符号化键如下:

$$A:\text{今天是星期一}$$
$$B:\text{明天是星期二}$$
$$C:\text{后天是星期三}$$

将前提转换为命题公式如下:

$$A \leftrightarrow B$$
$$B \leftrightarrow C$$

将结论转换为命题公式如下:

$$A \leftrightarrow C$$

因为

$$\{A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C\} \Rightarrow A \leftrightarrow C$$

所以

{今天是星期一当且仅当明天是星期二。明天是星期二当且仅当后天是星期三。} ⇒ 今天是星期一当且仅当后天是星期三。

实例 131.5 {所有哲学家都是古怪的。小李是哲学家。} ⇒ 小李是古怪的。

说明: 这些命题的谓词级符号化键如下:

UD :所有人

Px :x是哲学家

Qx :x是古怪的

a :小李

将前提转换为谓词公式如下:

$$\forall x(Px \to Qx)$$

$$Pa$$

将结论转换为谓词公式如下:

$$Qa$$

因为

$$\{\forall x(Px \to Qx), Pa\} \Rightarrow Qa$$

所以

{所有哲学家都是古怪的。小李是哲学家。} ⇒ 小李是古怪的。

实例 131.6 {有些人是老师。所有老师喜欢锻炼身体。} ⇒ 有些人喜欢锻炼身体。

说明: 这些命题的谓词级符号化键如下:

UD :所有人

Px :x是老师

Qx :x喜欢锻炼身体

将前提转换为谓词公式如下:

$$\exists x Px$$

$$\forall x(Px \rightarrow Qx)$$

将结论转换为谓词公式如下:

$$\exists x Qx$$

因为

$$\{\exists x Px, \forall x(Px \rightarrow Qx)\} \Rightarrow \exists x Qx$$

所以

{有些人是老师。所有老师喜欢锻炼身体。} ⇒ 有些人喜欢锻炼身体。

实例 131.7 {没有父亲是女性。小李是一名父亲。} ⇒ 小李不是女性。

说明: 这些命题的谓词级符号化键如下:

UD :所有人

Px :x是父亲

Qx :x是女性

a :小李

将前提转换为谓词公式如下:

$$\neg\exists x(Px \wedge Qx)$$

$$Pa$$

将结论转换为谓词公式如下:

$$\neg Qa$$

因为

$$\{\neg\exists x(Px \wedge Qx), Pa\} \Rightarrow \neg Qa$$

所以

{没有父亲是女性。小李是一名父亲。} ⇒ 小李不是女性。

实例 131.8 {有些数学系学生崇拜所有数学家。没有数学系学生崇拜小偷。} ⇒ 没有数学家是小偷。

说明： 这些命题的谓词级符号化键如下：

UD :所有人

Px :x是数学系学生

Qx :x是数学家

Nx :x是小偷

Rxy :x崇拜y

将前提转换为谓词公式如下：

$$\exists x(Px \land \forall y(Qy \to Rxy))$$

$$\neg\exists x(Px \land \exists y(Ny \land Rxy))$$

将结论转换为谓词公式如下：

$$\neg\exists x(Qx \land Nx)$$

因为

$$\{\exists x(Px \land \forall y(Qy \to Rxy)), \neg\exists x(Px \land \exists y(Ny \land Rxy))\} \Rightarrow \neg\exists x(Qx \land Nx)$$

证明在实例147.8，所以

{有些数学系学生崇拜所有数学家。没有数学系学生崇拜小偷。} ⇒ 没有数学家是小偷。

实例 131.9 { 婴儿是不讲逻辑的。能对付鳄鱼的人不会被鄙视。不讲逻辑的人会被鄙视。} ⇒ 婴儿对付不了鳄鱼。

说明： 这些命题的谓词级符号化键如下：

UD :所有人

Px :x是婴儿

Qx :x不讲逻辑

Nx :x能对付鳄鱼

Sx :x会被鄙视

将前提转换为谓词公式如下：

$$\forall x(Px \to Qx)$$

$$\forall x(Nx \to \neg Sx)$$

$$\forall x(Qx \to Sx)$$

将结论转换为谓词公式如下：

$$\forall x(Px \to \neg Nx)$$

因为

$$\{\forall x(Px \to Qx), \forall x(Nx \to \neg Sx), \forall x(Qx \to Sx)\} \Rightarrow \forall x(Px \to \neg Nx)$$

证明在实例147.9，所以

{ 婴儿是不讲逻辑的。能对付鳄鱼的人不会被鄙视。不讲逻辑的人会被鄙视。} ⇒ 婴儿对付不了鳄鱼。

实例 131.10 { 每个理解人性的人都很聪明。每个真正的诗人都能震撼人心。莎士比亚写了《哈姆雷特》。不理解人性的人无法撼动人心。只有真正的诗人才能写出《哈姆雷特》。} ⇒ 莎士比亚很聪明。

说明: 这些命题的谓词级符号化键如下：

UD :所有人

Px :x理解人性

Qx :x很聪明

Nx :x写了《哈姆雷特》

Sx :x能震撼人心

Tx :x是真正的诗人

a :莎士比亚

将前提转换为谓词公式如下：

$$\forall x(Px \to Qx)$$

$$\forall x(Tx \to Sx)$$

$$Na$$

$$\forall x(\neg Px \to \neg Sx)$$

$$\forall x(Nx \to Tx)$$

将结论转换为谓词公式如下：

$$Qa$$

因为

$$\{\forall x(Px \to Qx), \forall x(Tx \to Sx), Na, \forall x(\neg Px \to \neg Sx), \forall x(Nx \to Tx)\} \Rightarrow Qa$$

证明在实例147.10，所以

{ 每个理解人性的人都很聪明。每个真正的诗人都能震撼人心。莎士比亚写了《哈姆雷特》。不理解人性的人无法撼动人心。只有真正的诗人才能写出《哈姆雷特》。} ⇒ 莎士比亚很聪明。

反例 131.1 {所有哲学家都是古怪的。小李是古怪的。} $\not\Rightarrow$ 小李是哲学家。

说明: 这些命题的谓词级符号化键如下:

UD :所有人

Px :x是哲学家

Qx :x是古怪的

a :小李

将前提转换为谓词公式如下:

$$\forall x(Px \to Qx)$$

$$Qa$$

将结论转换为谓词公式如下:

$$Pa$$

因为

$$\{\forall x(Px \to Qx), Qa\} \not\Rightarrow Pa$$

所以

{所有哲学家都是古怪的。小李是古怪的。} $\not\Rightarrow$ 小李是哲学家。

反例 131.2 {有些象棋大师是男性。有些男性不擅长下象棋。} $\not\Rightarrow$ 有些象棋大师不擅长下象棋。

说明: 这些命题的谓词级符号化键如下:

UD :所有人

Px :x是象棋大师

Qx :x是男性

Nx :x不擅长下象棋

将前提转换为谓词公式如下：

$$\exists x(Px \wedge Qx)$$

$$\exists x(Qx \wedge Nx)$$

将结论转换为谓词公式如下：

$$\exists x(Px \wedge Nx)$$

因为

$$\{\exists x(Px \wedge Qx), \exists x(Qx \wedge Nx)\} \not\Rightarrow \exists x(Px \wedge Nx)$$

所以

{有些象棋大师是男性。有些男性不擅长下象棋。} $\not\Rightarrow$ 有些象棋大师不擅长下象棋。

定义 132 (命题公式与命题公式的推出关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题公式。

$\mathcal{A}$ 推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 语义推出 $\mathcal{B}$ 或 $\mathcal{A}$ 导出 $\mathcal{B}$。记作 $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

定义 133 (命题公式与命题公式的语义推出关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题公式。

$\mathcal{A}$ 语义推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当没有 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ 的指派使 $\mathcal{A}$ 为真 $\mathcal{B}$ 为假。记作 $\mathcal{A} \vDash \mathcal{B}$.

实例 133.1 $A \vDash (A \vee B)$

说明： 画出这两个命题公式的完整真值表如下：

A	B	A	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

从上表可看出，没有指派使前提为真，结论为假。所以 $A \vDash (A \vee B)$

实例 133.2 $(A \to B) \wedge A \vDash B$

说明： 画出这两个命题公式的完整真值表如下：

A	B	$(A\to B)\wedge A$	B
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

从上表可看出，没有指派使前提为真，结论为假。所以 $(A\to B)\wedge A\vDash B$

实例 133.3 $(A\to B)\wedge(B\to C)\vDash(A\to C)$

说明: 画出这两个命题公式的完整真值表如下:

A	B	C	$(A\to B)\wedge(B\to C)$	$A\to C$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

从上表可看出,没有指派使前提为真,结论为假。所以 $(A\to B)\wedge(B\to C)\vDash(A\to C)$

反例 133.1 $A\to A\nvDash A$

说明: 画出这两个命题公式的完整真值表如下:

A	$A\to A$	A
0	1	0
1	1	1

从上表可看出，有指派使前提为真，结论为假。所以 $A\to A\nvDash A$

定义 134 (命题公式与命题公式的导出关系) 设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 为任意两个命题公式。

$\mathcal{M}$ 导出 $\mathcal{N}$ 当且仅当可以给出一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的由以下推理规则, 被称为命题级基本推理规则, 关联起来的命题公式序列。记作 $\mathcal{M}\vdash\mathcal{N}$.

1. 如果 $\mathcal{A}\in\Gamma$, 那么 $\Gamma\vdash\mathcal{A}$. (R)

2. 如果 $\Gamma\vdash\mathcal{A}$, 并且 $\Gamma\vdash\mathcal{B}$, 那么 $\Gamma\vdash\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$. ($\wedge$I)

3. *如果* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{B}$. (∧E)

4. *如果* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$. (∨I)

5. *(1) 如果* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \vdash \neg\mathcal{B}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A}$.

   (2) 如果 $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \vdash \neg\mathcal{A}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{B}$. (∨E)

6. *如果* $\mathit{\Gamma} \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. (→ I)

7. *如果* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{B}$. (→ E)

8. *如果* $\mathit{\Gamma} \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \cup \{\mathcal{B}\} \vdash \mathcal{A}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$. (↔ I)

9. *(1) 如果* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{B}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A}$.

   (2) 如果 $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{B}$. (↔ E)

10. *如果* $\mathit{\Gamma} \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \neg\mathcal{B}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \neg\mathcal{A}$. (¬I)

11. *如果* $\mathit{\Gamma} \cup \{\neg\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, *并且* $\mathit{\Gamma} \cup \{\neg\mathcal{A}\} \vdash \neg\mathcal{B}$, *那么* $\mathit{\Gamma} \vdash \mathcal{A}$. (¬E)

其中 $\mathit{\Gamma}$ 为命题公式集,$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为命题公式。

实例 134.1 $R \vee F \vdash \neg R \to F$

实例 134.2 $K \wedge L \vdash K \leftrightarrow L$

实例 134.3 $Q \to (Q \wedge \neg Q) \vdash \neg Q$

实例 134.4 $J \to \neg J \vdash \neg J$

实例 134.5 $M \vee (N \to M) \vdash \neg M \to \neg N$

实例 134.6 $S \leftrightarrow T \vdash S \leftrightarrow (T \vee S)$

定义 135 (命题公式与命题公式的导出关系的形式证明) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题公式。

$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ 的形式证明指从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的由命题级基本推理规则关联起来的命题公式序列。

实例 135.1 命题公式与命题公式的导出关系为:

$$R \vee F \vdash \neg R \rightarrow F$$

它的形式证明为:

1	$R \vee F$	
2	$\quad \neg R$	
3	$\quad F$	$\vee$E 1, 2
4	$\neg R \rightarrow F$	$\rightarrow$I 2–3

实例 135.2 命题公式与命题公式的导出关系为:

$$K \wedge L \vdash K \leftrightarrow L$$

它的形式证明为:

1	$K \wedge L$	
2	K	$\wedge$E 1
3	L	$\wedge$E 1
4	$\quad K$	
5	$\quad L$	R 3
6	$\quad L$	
7	$\quad K$	R 1
8	$K \leftrightarrow L$	$\leftrightarrow$I 4–5, 6–7

实例 135.3 命题公式与命题公式的导出关系为:

$$Q \rightarrow (Q \wedge \neg Q) \vdash \neg Q$$

它的形式证明为:

1	$Q \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$	
2	$\quad Q$	
3	$\quad Q \wedge \neg Q$	$\rightarrow$E 1, 2
4	$\quad Q$	$\wedge$E 3
5	$\quad \neg Q$	$\wedge$E 3
6	$\neg Q$	$\neg$I 2–5

实例 135.4 命题公式与命题公式的导出关系为：

$$J \to \neg J \vdash \neg J$$

它的形式证明为：

1	$\vert\ J \to \neg J$	
2	$\vert\ \vert\ J$	
3	$\vert\ \vert\ \neg J$	→E 1, 2
4	$\vert\ \vert\ J$	R 2
5	$\vert\ \neg J$	¬I 2–4

实例 135.5 命题公式与命题公式的导出关系为：

$$M \vee (N \to M) \vdash \neg M \to \neg N$$

它的形式证明为：

1	$\vert\ M \vee (N \to M)$	
2	$\vert\ \vert\ \neg M$	
3	$\vert\ \vert\ N \to M$	∨E 1, 2
4	$\vert\ \vert\ \vert\ N$	
5	$\vert\ \vert\ \vert\ M$	→E 3, 4
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg M$	R 2
7	$\vert\ \vert\ \neg N$	¬I 4–6
8	$\vert\ \neg M \to \neg N$	→I 2–7

实例 135.6 命题公式与命题公式的导出关系为：

$$S \leftrightarrow T \vdash S \leftrightarrow (T \vee S)$$

它的形式证明为：

1	$S \leftrightarrow T$	
2	$\quad S$	
3	$\quad T$	$\leftrightarrow$E 1, 2
4	$\quad T \vee S$	$\vee$I 3
5	$\quad T \vee S$	
6	$\quad\quad \neg S$	
7	$\quad\quad T$	$\vee$E 5, 6
8	$\quad\quad S$	$\leftrightarrow$E 1, 7
9	$\quad\quad \neg S$	R 6
10	$\quad S$	$\neg$E 6–9
11	$S \leftrightarrow (T \vee S)$	$\leftrightarrow$I 2–4, 5–10

定义 136 (命题公式集与命题公式的推出关系) 设 Φ 为一个命题公式集,$\mathcal{B}$ 为一个命题公式。

Φ 推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当 Φ 语义推出 $\mathcal{B}$ 或 Φ 导出 $\mathcal{B}$。记作 $\Phi \Rightarrow \mathcal{B}$.

定义 137 (命题公式集与命题公式的语义推出关系) 设 Φ 为一个命题公式集,$\mathcal{B}$ 为一个命题公式。

Φ 语义推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当没有 $\Phi \cup \{\mathcal{B}\}$ 的指派使 Φ 中的所有命题公式都为真 $\mathcal{B}$ 为假。记作 $\Phi \vDash \mathcal{B}$.

实例 137.1 $\{A \vee B, \neg B\} \vDash A$

说明: 画出这些命题公式的完整真值表如下:

A	B	$A \vee B$	$\neg B$	A
0	0	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	0	1

从上表可看出，没有指派使前提都为真，结论为假。所以 $\{A \vee B, \neg B\} \vDash A$。

实例 137.2 $\{A \vee B, B \vee C, \neg B\} \vDash (A \wedge C)$

说明： 画出这些命题公式的完整真值表如下：

A	B	C	$A \vee B$	$B \vee C$	$\neg B$	$A \wedge C$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1

从上表可看出，没有指派使前提都为真，结论为假。所以 $\{A\vee B, B\vee C, \neg B\} \vDash (A\wedge C)$。

实例 137.3 $\{A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C\} \vDash A \leftrightarrow C$

说明： 画出这些命题公式的完整真值表如下：

A	B	C	$A \leftrightarrow B$	$B \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow C$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

从上表可看出，没有指派使前提都为真，结论为假。所以 $\{A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C\} \vDash A \leftrightarrow C$。

反例 137.1 $\{A \vee B, B \vee C, \neg A\} \nvDash (B \wedge C)$

说明： 画出这些命题公式的完整真值表如下：

A	B	C	$A \vee B$	$B \vee C$	$\neg A$	$B \wedge C$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

从上表可看出，有指派使前提都为真，结论为假。所以 $\{A \vee B, B \vee C, \neg A\} \not\models (B \wedge C)$。

反例 137.2 $\{(B \wedge A) \to C, (C \wedge A) \to B\} \not\models (C \wedge B) \to A$

说明: 画出这些命题公式的完整真值表如下:

A	B	C	$(B \wedge A) \to C$	$(C \wedge A) \to B$	$(C \wedge B) \to A$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

从上表可看出，有指派使前提都为真，结论为假。所以

$$\{(B \wedge A) \to C, (C \wedge A) \to B\} \not\models (C \wedge B) \to A$$

定义 138 (命题公式集与命题公式的导出关系) 设 Φ 为一个命题公式集,$\mathcal{N}$ 为一个命题公式。

Φ 导出 $\mathcal{N}$ 当且仅当可以给出一个从 Φ 到 $\mathcal{N}$ 的由命题级基本推理规则关联起来的命题公式序列。记作 $\Phi \vdash \mathcal{N}$.

实例 138.1 $\{P \to Q, Q \to R\} \vdash P \to R$

实例 138.2 $\{W \to \neg B, A \wedge W, B \vee (J \wedge K)\} \vdash K$

实例 138.3 $\{L \leftrightarrow \neg M, L \vee \neg M\} \vdash L$

实例 138.4 $\{Z \to (C \wedge \neg N), \neg Z \to (N \wedge \neg C)\} \vdash N \vee C$

定义 139 (命题公式集与命题公式的导出关系的形式证明) 设 Φ 为一个命题公式集,$\mathcal{B}$ 为一个命题公式。

$\Phi \vdash \mathcal{B}$ 的形式证明指从 Φ 到 $\mathcal{B}$ 的由命题级基本推理规则关联起来的命题公式序列。

实例 139.1 命题公式集与命题公式的导出关系为:

$$\{P \to Q, Q \to R\} \vdash P \to R$$

它的形式证明为:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & P \to Q & \\
2 & Q \to R & \\
\hline
3 & \quad \mid P & \\
4 & \quad \mid Q & \to\text{E } 1, 3 \\
5 & \quad \mid R & \to\text{E } 2, 4 \\
6 & P \to R & \to\text{I } 3\text{–}5
\end{array}
$$

实例 139.2 命题公式集与命题公式的导出关系为:

$$\{W \to \neg B, A \wedge W, B \vee (J \wedge K)\} \vdash K$$

它的形式证明为:

$$
\begin{array}{r|l l}
1 & W \to \neg B & \\
2 & A \wedge W & \\
3 & B \vee (J \wedge K) & \\
\hline
4 & W & \wedge\text{E } 2 \\
5 & \neg B & \to\text{E } 1, 4 \\
6 & J \wedge K & \vee\text{E } 3, 5 \\
7 & K & \wedge\text{E } 3, 5
\end{array}
$$

实例 139.3 命题公式集与命题公式的导出关系为:

$$\{L \leftrightarrow \neg M, L \vee \neg M\} \vdash L$$

它的形式证明为：

1	$\vert\ L \leftrightarrow \neg M$	
2	$\vert\ L \vee \neg M$	
3	$\vert\ \vert\ \neg L$	
4	$\vert\ \vert\ \neg M$	$\vee$E 2, 3
5	$\vert\ \vert\ L$	$\leftrightarrow$E 1, 4
6	$\vert\ \vert\ \neg L$	R 3
7	$\vert\ L$	$\neg$E 3–6

实例 139.4 命题公式集与命题公式的导出关系为:

$$\{Z \to (C \wedge \neg N), \neg Z \to (N \wedge \neg C)\} \vdash N \vee C$$

它的形式证明为：

1	$\vert\ Z \to (C \wedge \neg N)$	
2	$\vert\ \neg Z \to (N \wedge \neg C)$	
3	$\vert\ \vert\ \neg(N \vee C)$	
4	$\vert\ \vert\ \neg N \wedge \neg C$	
5	$\vert\ \vert\ \vert\ Z$	
6	$\vert\ \vert\ \vert\ C \wedge \neg N$	$\to$E 1, 5
7	$\vert\ \vert\ \vert\ C$	$\wedge$E 6
8	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg C$	$\wedge$E 4
9	$\vert\ \vert\ \neg Z$	$\neg$I 5–8
10	$\vert\ \vert\ N \wedge \neg C$	$\to$E 2, 9
11	$\vert\ \vert\ N$	$\wedge$E 10
12	$\vert\ \vert\ \neg N$	$\wedge$E 4
13	$\vert\ N \vee C$	$\neg$E 3–12

定义 140 (谓词公式与谓词公式的推出关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式。

$\mathcal{A}$ 推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 语义推出 $\mathcal{B}$ 或 $\mathcal{A}$ 导出 $\mathcal{B}$。记作 $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

定义 141 (谓词公式与谓词公式的语义推出关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式。

$\mathcal{A}$ 语义推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当没有 $\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ 的模型使 $\mathcal{A}$ 为真 $\mathcal{B}$ 为假。记作 $\mathcal{A} \vDash \mathcal{B}$.

反例 141.1 $\forall x \exists y Rxy \nvDash \exists x \forall y Rxy$

说明: 构造这两个谓词公式的一个模型如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{UD} =& \{1,2\}\\ \mathrm{e}(R) =& \{(1,2),(2,1)\}\end{aligned}$$

这个模型使前提为真，结论为假。所以 $\forall x \exists y Rxy \nvDash \exists x \forall y Rxy$。

反例 141.2 $\exists x(Px \wedge \neg Qx) \nvDash \forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$

说明: 构造这两个谓词公式的一个模型如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{UD} =& \{1,2\}\\ \mathrm{e}(P) =& \{1,2\}\\ \mathrm{e}(Q) =& \{2\}\end{aligned}$$

这个模型使前提为真，结论为假。所以 $\exists x(Px \wedge \neg Qx) \nvDash \forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$。

定义 142 (谓词公式与谓词公式的导出关系) 设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 为任意两个谓词公式。

$\mathcal{M}$ 导出 $\mathcal{N}$ 当且仅当可以给出一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的由以下推理规则关联起来的谓词公式序列。记作 $\mathcal{M} \vdash \mathcal{N}$.

1. 如果 $\mathcal{A} \in \Gamma$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$. (R)

2. 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, 并且 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$. ($\wedge$I)

3. 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, 并且 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. ($\wedge$E)

4. 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, 并且 $\Gamma \vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$. ($\vee$I)

5. *(1)* 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, 并且 $\Gamma \vdash \neg\mathcal{B}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.
   (2) 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, 并且 $\Gamma \vdash \neg\mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. ($\vee$E)

6. 如果 $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. ($\rightarrow$ I)

7. 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, 并且 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. ($\rightarrow$ E)

8. 如果 $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, 并且 $\Gamma \cup \{\mathcal{B}\} \vdash \mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$. $(\leftrightarrow \mathrm{I})$

9. (1) 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, 并且 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

   (2) 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, 并且 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. $(\leftrightarrow \mathrm{E})$

10. 如果 $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, 并且 $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \neg\mathcal{B}$, 那么 $\Gamma \vdash \neg\mathcal{A}$. $(\neg \mathrm{I})$

11. 如果 $\Gamma \cup \{\neg\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, 并且 $\Gamma \cup \{\neg\mathcal{A}\} \vdash \neg\mathcal{B}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$. $(\neg \mathrm{E})$

12. 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \exists \chi \mathcal{A}[\chi || c]$. 其中 $\mathcal{A}[\chi || c]$ 表示用 χ 替换 $\mathcal{A}$ 中的一部分或所有 c. $(\exists \mathrm{I})$

13. 如果 $\Gamma \vdash \exists \chi \mathcal{A}$, 并且 $\Gamma \cup \{\mathcal{A}[c | \chi]\} \vdash \mathcal{B}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{B}$. 其中 $\mathcal{A}[c | \chi]$ 表示用 c 替换 $\mathcal{A}$ 中的所有 χ. 另外 c 不能出现在 $\exists \chi \mathcal{A}, \mathcal{B}$ 或任意未消除的假设中. $(\exists \mathrm{E})$

14. 如果 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \forall \chi \mathcal{A}[\chi | c]$. 其中 $\mathcal{A}[\chi | c]$ 表示用 χ 替换 $\mathcal{A}$ 中的所有 c. 另外 c 不能出现在任意未消除的假设中. $(\forall \mathrm{I})$

15. 如果 $\Gamma \vdash \forall \chi \mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A}[c | \chi]$. 其中 $\mathcal{A}[c | \chi]$ 表示用 c 替换 $\mathcal{A}$ 中的所有 χ. $(\forall \mathrm{E})$

16. $\Gamma \vdash c = c$. $(= \mathrm{I})$

17. (1) 如果 $\Gamma \vdash c = d$, 并且 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A}[c || d]$. 其中 $\mathcal{A}[c || d]$ 表示用 c 替换 $\mathcal{A}$ 中的部分或所有 d.

    (2) 如果 $\Gamma \vdash c = d$, 并且 $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, 那么 $\Gamma \vdash \mathcal{A}[d || c]$. 其中 $\mathcal{A}[d || c]$ 表示用 d 替换 $\mathcal{A}$ 中的部分或所有 c. $(= \mathrm{E})$

其中 Γ 为谓词公式集,$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为谓词公式,c, d 为个体常元符号,χ 为个体变元符号。

实例 142.1 $\forall x(Cx \wedge Dt) \vdash \forall x Cx \wedge Dt$

实例 142.2 $\exists x(Cx \vee Dt) \vdash \exists x Cx \vee Dt$

实例 142.3 $\exists x \forall y(\forall z(Lxz \to Lyz) \to Lxy) \vdash \exists x Lxx$

定义 143 (谓词公式与谓词公式的导出关系的形式证明) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式。

$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ 的形式证明指从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的由谓词级基本推理规则关联起来的谓词公式序列。

实例 143.1 谓词公式与谓词公式的导出关系为:

$$\forall x(Cx \land Dt) \vdash \forall xCx \land Dt$$

它的形式证明为:

1	$\mid\ \forall x(Cx \land Dt)$	
2	$\mid\ Ca \land Dt$	∀E 1
3	$\mid\ Ca$	∧E 2
4	$\mid\ \forall xCx$	∀I 3
5	$\mid\ Dt$	∧E 2
6	$\mid\ \forall xCx \land Dt$	∧I 4, 5

实例 143.2 谓词公式与谓词公式的导出关系为:

$$\exists x(Cx \lor Dt) \vdash \exists xCx \lor Dt$$

它的形式证明为:

1	$\mid\ \exists x(Cx \lor Dt)$	
2	$\mid\ \mid\ Ca \lor Dt$	
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg(\exists xCx \lor Dt)$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\exists xCx \land \neg Dt$	命题141 3
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg Dt$	∧E 4
6	$\mid\ \mid\ \mid\ Ca$	∨E 2, 5
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \exists xCx$	∃I 6
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\exists xCx$	∧E 4
9	$\mid\ \mid\ \exists xCx \lor Dt$	¬E 3–8
10	$\mid\ \exists xCx \lor Dt$	∃E 1, 2–9

实例 143.3 谓词公式与谓词公式的导出关系为:

$$\exists x\forall y(\forall z(Lxz \to Lyz) \to Lxy) \vdash \exists xLxx$$

它的形式证明为：

1	$\vert\ \exists x\forall y(\forall z(Lxz \to Lyz) \to Lxy)$	
2	$\vert\ \vert\ \forall y(\forall z(Laz \to Lyz) \to Lay)$	
3	$\vert\ \vert\ \forall z(Laz \to Laz) \to Laa$	
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\exists xLxx$	
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \forall x\neg Lxx$	命题153 4
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg Laa$	∀E 5
7	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\forall z(Laz \to Laz)$	命题119 3, 6
8	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ Lab$	
9	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ Lab$	R 8
10	$\vert\ \vert\ \vert\ Lab \to Lab$	→I 8, 9
11	$\vert\ \vert\ \vert\ \forall z(Laz \to Laz)$	∀I 10
12	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\forall z(Laz \to Laz)$	R 7
13	$\vert\ \vert\ \exists xLxx$	¬E 4–12
14	$\vert\ \exists xLxx$	¬E 1, 2–13

定义 144 (谓词公式集与谓词公式的推出关系) 设 $\mathit{\Phi}$ 为一个谓词公式集,$\mathcal{B}$ 为一个谓词公式。

$\mathit{\Phi}$ 推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当 $\mathit{\Phi}$ 语义推出 $\mathcal{B}$ 或 $\mathit{\Phi}$ 导出 $\mathcal{B}$。记作 $\mathit{\Phi} \Rightarrow \mathcal{B}$.

定义 145 (谓词公式集与谓词公式的语义推出关系) 设 $\mathit{\Phi}$ 为一个谓词公式集,$\mathcal{B}$ 为一个谓词公式。

$\mathit{\Phi}$ 语义推出 $\mathcal{B}$ 当且仅当没有 $\mathit{\Phi} \cup \{\mathcal{B}\}$ 的模型使 $\mathit{\Phi}$ 中的所有谓词公式都为真 $\mathcal{B}$ 为假。记作 $\mathit{\Phi} \vDash \mathcal{B}$.

反例 145.1 $\{\exists x(Dx \vee Fx), \forall x(Dx \to Fx)\} \nvDash \exists x(Dx \wedge Fx)$

说明: 构造这些谓词公式的一个模型如下：

$$\mathbf{UD} = \{1, 2\}$$

$$\mathrm{e}(D) = \{\}$$

$$\mathrm{e}(F) = \{1\}$$

这个模型使得前提都为真，结论为假。因此，

$$\{\exists x(Dx \lor Fx), \forall x(Dx \to Fx)\} \nvDash \exists x(Dx \land Fx)$$

反例 145.2 $\{\forall xPx \to \forall xQx, \exists x\neg Px\} \nvDash \exists x\neg Qx$

说明: 构造这些谓词公式的一个模型如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{UD} =&\{1,2,3\}\\ \mathrm{e}(P) =&\{1,2\}\\ \mathrm{e}(Q) =&\{1,2,3\}\end{aligned}$$

这个模型使得前提都为真，结论为假。因此，

$$\{\forall xPx \to \forall xQx, \exists x\neg Px\} \nvDash \exists x\neg Qx$$

定义 146 (谓词公式集与谓词公式的导出关系) 设 Φ 为一个谓词公式集,$\mathcal{N}$ 为一个谓词公式。

Φ 导出 $\mathcal{N}$ 当且仅当可以给出一个从 Φ 到 $\mathcal{N}$ 的由谓词级基本推理规则关联起来的谓词公式序列。记作 $\Phi \vdash \mathcal{N}$.

实例 146.1 $\{\forall xSx \to Tx, \exists xSx\} \vdash \exists xTx$

实例 146.2 $\{\forall x\forall y(x = y), \exists xBx, \forall x(Bx \to \neg Cx)\} \vdash \neg\exists xCx$

定义 147 (谓词公式集与谓词公式的导出关系的形式证明) 设 Φ 为一个谓词公式集,$\mathcal{B}$ 为一个谓词公式。

$\Phi \vdash \mathcal{B}$ 的形式证明指从 Φ 到 $\mathcal{B}$ 的由谓词级基本推理规则关联起来的谓词公式序列。

实例 147.1 谓词公式集与谓词公式的导出关系为:

$$\{\forall x(Sx \to Tx), \exists xSx\} \vdash \exists xTx$$

它的形式证明为:

1	$\forall x(Sx \to Tx)$		
2	$\exists xSx$		want $\exists xTx$
3		Sa	
4		$Sa \to Ta$	$\forall$E 1
5		Ta	$\to$E 3, 4
6		$\exists xTx$	$\exists$I 5
7	$\exists xTx$		$\exists$E 2, 3–6

实例 147.2 谓词公式集与谓词公式的导出关系为：

$$\{\forall x \forall y(x = y), \exists x Bx, \forall x(Bx \to \neg Cx)\} \vdash \neg\exists x Cx$$

它的形式证明为：

1	$\vert\ \forall x \forall y(x = y)$	
2	$\vert\ \exists x Bx$	
3	$\vert\ \forall x(Bx \to \neg Cx)$	want $\neg\exists x Cx$
4	$\vert\ \vert\ Be$	
5	$\vert\ \vert\ e = f$	$\forall$E 1
6	$\vert\ \vert\ Bf$	=E 5, 4
7	$\vert\ \vert\ Bf \to \neg Cf$	$\forall$E 3
8	$\vert\ \vert\ \neg Cf$	$\to$E 7, 6
9	$\vert\ \neg Cf$	$\exists$E 2, 4–8
10	$\vert\ \forall x \neg Cx$	$\forall$I 9
11	$\vert\ \vert\ \exists x Cx$	
12	$\vert\ \vert\ \vert\ Ce$	
13	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \forall x \neg Cx$	
14	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ \neg Ce$	$\forall$E 13
15	$\vert\ \vert\ \vert\ \vert\ Ce$	R 12
16	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\forall x \neg Cx$	$\neg$I 13–15
17	$\vert\ \vert\ \neg\forall x \neg Cx$	$\exists$E 11–16
18	$\vert\ \vert\ \forall x \neg Cx$	R 10
19	$\vert\ \neg\exists x Cx$	$\neg$I 11–18

实例 147.3 谓词公式集与谓词公式的导出关系为：

$$\{\forall x \exists y(Rxy \lor Ryx), \forall x \neg Rmx\} \vdash \exists x Rxm$$

它的形式证明为：

1	$\forall x \exists y(Rxy \vee Ryx)$	
2	$\forall x \neg Rmx$	
3	$\exists y(Rmy \vee Rym)$	∀E 1
4	$Rma \vee Ram$	
5	$\neg Rma$	∀E 2
6	Ram	∨E 4, 5
7	$\exists x Rxm$	∃I 6
8	$\exists x Rxm$	∃E 3, 4–7

实例 147.4 谓词公式集与谓词公式的导出关系为：

$$\{\forall x(\exists y Lxy \rightarrow \forall z Lzx), Lab\} \vdash \forall x Lxx$$

它的形式证明为：

1	$\forall x(\exists y Lxy \rightarrow \forall z Lzx)$	
2	Lab	
3	$\exists y Lay \rightarrow \forall z Lza$	∀E 1
4	$\exists y Lay$	∃I 2
5	$\forall z Lza$	→E 3, 4
6	Lca	∀E 5
7	$\exists y Lcy \rightarrow \forall z Lzc$	∀E 1
8	$\exists y Lcy$	∃I 6
9	$\forall z Lzc$	→E 7, 8
10	Lcc	∀E 9
11	$\forall x Lxx$	∀I 10

实例 147.5 谓词公式集与谓词公式的导出关系为：

$$\{\forall x(Jx \rightarrow Kx), \exists x \forall y Lxy, \forall x Jx\} \vdash \exists x(Kx \wedge Lxx)$$

它的形式证明为：

1	$\forall x(Jx \to Kx)$	
2	$\exists x\forall yLxy$	
3	$\forall xJx$	
4	Ja	∀E 3
5	$Ja \to Ka$	∀E 1
6	Ka	→E 4, 5
7	$\forall yLay$	
8	Laa	∀E 7
9	$Ka \wedge Laa$	∧I 6, 8
10	$\exists x(Kx \wedge Lxx)$	∃I 9
11	$\exists x(Kx \wedge Lxx)$	∃E 2, 7–10

实例 147.6 谓词公式集与谓词公式的导出关系为：

$$\{\forall x(Mx \leftrightarrow Nx), Ma \wedge \exists xRxa,\} \vdash \exists xNx$$

它的形式证明为：

1	$\forall x(Mx \leftrightarrow Nx)$	
2	$Ma \wedge \exists xRxa$	
3	$Ma \leftrightarrow Na$	∀E 1
4	Ma	∧E 2
5	Na	↔E 3, 4
6	$\exists xNx$	∃I 5

实例 147.7 谓词公式集与谓词公式的导出关系为：

$$\{\forall x(\neg Mx \vee Ljx), \forall x(Bx \to Ljx), \forall x(Mx \vee Bx)\} \vdash \forall xLjx$$

它的形式证明为：

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \forall x(\neg Mx \vee Ljx) & \\
2 & \forall x(Bx \to Ljx) & \\
3 & \forall x(Mx \vee Bx) & \\
\cline{2-2}
4 & \neg Ma \vee Lja & \forall\text{E } 1 \\
5 & Ma \to Lja & \text{命题}147\ 4 \\
6 & Ba \to Lja & \forall\text{E } 2 \\
7 & Ma \vee Ba & \forall\text{E } 3 \\
8 & Lja & \text{命题}117\ 7,\ 5,\ 6 \\
9 & \forall x Ljx & \forall\text{I } 8
\end{array}$$

实例 147.8 谓词公式集与谓词公式的导出关系为：

$$\{\exists x(Px \wedge \forall y(Qy \to Rxy)), \neg\exists x(Px \wedge \exists y(Ny \wedge Rxy))\} \vdash \neg\exists x(Qx \wedge Nx)$$

它的形式证明为：

1	$\mid\ \exists x(Px \land \forall y(Qy \to Rxy))$	
2	$\mid\ \neg\exists x(Px \land \exists y(Ny \land Rxy))$	
3	$\mid\ \forall x\neg(Px \land \exists y(Ny \land Rxy))$	命题153 2
4	$\mid\ \forall x(\neg Px \lor \neg\exists y(Ny \land Rxy))$	命题143与命题127 3
5	$\mid\ \forall x(Px \to \neg\exists y(Ny \land Rxy))$	命题147 4
6	$\mid\ Pc \to \neg\exists y(Ny \land Rcy)$	$\forall$E 5
7	$\mid\ \mid\ Pc \land \forall y(Qy \to Rcy)$	
8	$\mid\ \mid\ Pc$	$\land$E 7
9	$\mid\ \mid\ \neg\exists y(Ny \land Rcy)$	$\to$E 6, 8
10	$\mid\ \mid\ \forall y\neg(Ny \land Rcy)$	命题153 9
11	$\mid\ \mid\ \forall y(\neg Ny \lor \neg Rcy)$	命题143与127 10
12	$\mid\ \mid\ \forall y(Ny \to \neg Rcy)$	命题147 11
13	$\mid\ \mid\ Nd \to \neg Rcd$	$\forall$E 12
14	$\mid\ \mid\ \forall y(Qy \to Rcy)$	$\land$E 7
15	$\mid\ \mid\ Qd \to Rcd$	$\forall$E 14
16	$\mid\ \mid\ \mid\ \exists x(Qx \land Nx)$	
17	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ Qd \land Nd$	
18	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ Qd$	$\land$E 17
19	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ Nd$	$\land$E 17
20	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg Rcd$	$\to$E 13, 19
21	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ Rcd$	$\to$E 15, 18
22	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ Rcd \land \neg Rcd$	$\land$I 20, 21
23	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \bot$	矛盾 22
24	$\mid\ \mid\ \mid\ \bot$	$\exists$E 16, 17–23
25	$\mid\ \mid\ \neg\exists x(Qx \land Nx)$	$\neg$I 16–24
26	$\mid\ \neg\exists x(Qx \land Nx)$	$\exists$E 1, 7–25

实例 147.9　谓词公式集与谓词公式的导出关系为：

$$\{\forall x(Px \to Qx), \forall x(Nx \to \neg Sx), \forall x(Qx \to Sx)\} \vdash \forall x(Px \to \neg Nx)$$

它的形式证明为：

1	$\forall x(Px \to Qx)$	
2	$\forall x(Nx \to \neg Sx)$	
3	$\forall x(Qx \to Sx)$	
4	$Pa \to Qa$	∀E 1
5	$Na \to \neg Sa$	∀E 2
6	$Qa \to Sa$	∀E 3
7	$Pa \to Sa$	命题121 4, 6
8	$Sa \to \neg Na$	命题151 5
9	$Pa \to \neg Na$	命题121 7, 8
10	$\forall x(Px \to \neg Nx)$	∀I 9

实例 147.10 谓词公式集与谓词公式的导出关系为：

$$\{\forall x(Px \to Qx), \forall x(Tx \to Sx), Na, \forall x(\neg Px \to \neg Sx)\forall x(Nx \to Tx)\} \vdash Qa$$

它的形式证明为：

1	$\forall x(Px \to Qx)$	
2	$\forall x(Tx \to Sx)$	
3	Na	
4	$\forall x(\neg Px \to \neg Sx)$	
5	$\forall x(Nx \to Tx)$	
6	$Pa \to Qa$	∀E 1
7	$Ta \to Sa$	∀E 2
8	$\neg Pa \to \neg Sa$	∀E 4
9	$Na \to Ta$	∀E 5
10	Ta	→E 9, 3
11	Sa	→E 7, 10
12	$Sa \to Pa$	命题151 8
13	$Sa \to Qa$	命题121 12, 6
14	Qa	→E 13, 11

定义 148 (命题级形式定理) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式。

$\mathcal{A}$ 为命题级形式定理当且仅当 $\varnothing \vdash \mathcal{A}$. 简写作 $\vdash \mathcal{A}$.

实例 148.1 $\neg(P \wedge \neg P)$

实例 148.2 $\neg(A \to \neg C) \to (A \to C)$

定义 149 (命题级形式定理的形式证明) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题级形式定理。

$\mathcal{A}$ 的形式证明指由命题级基本推理规则关联起来的命题公式序列, 并且这个序列中没有前提, 以 $\mathcal{A}$ 为结论.

实例 149.1 命题级形式定理为:

$$\neg(P \wedge \neg P)$$

它的形式证明为:

1	$P \wedge \neg P$	
2	P	$\wedge$E 1
3	$\neg P$	$\wedge$E 1
4	$\neg(P \wedge \neg P)$	$\neg$I 1–3

实例 149.2 命题级形式定理为:

$$\neg(A \to \neg C) \to (A \to C)$$

它的形式证明为:

1	$\neg(A \to \neg C)$	
2	$\neg C$	
3	A	
4	$\neg C$	R 2
5	$A \to \neg C$	$\to$I 3, 4
6	$\neg(A \to \neg C)$	R 1
7	C	$\neg$E 2–6
8	A	
9	C	R 7
10	$A \to C$	$\to$I 8, 9
11	$\neg(A \to \neg C) \to (A \to C)$	$\to$I 1, 10

定义 150 (谓词级形式定理) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式。

$\mathcal{A}$ 为谓词级形式定理当且仅当 $\varnothing \vdash \mathcal{A}$. 简写作 $\vdash \mathcal{A}$.

实例 150.1 $\forall x(\exists y Lxy \to \forall z Lzx) \wedge Lab \to \forall x Lxx$

定义 151 (谓词级形式定理的形式证明) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词级形式定理。

$\mathcal{A}$ 的形式证明指由谓词级基本推理规则关联起来的谓词公式序列, 并且这个序列中没有前提, 以 $\mathcal{A}$ 为结论.

实例 151.1 谓词级形式定理为:

$$\forall x(\exists y Lxy \to \forall z Lzx) \wedge Lab \to \forall x Lxx$$

它的形式证明为:

1	$\forall x(\exists y Lxy \to \forall z Lzx) \wedge Lab$	
2	$\forall x(\exists y Lxy \to \forall z Lzx)$	$\wedge$E 1
3	Lab	$\wedge$E 1
4	$\exists y Lay \to \forall z Lza$	$\forall$E 2
5	$\exists y Lay$	$\exists$I 3
6	$\forall z Lza$	$\to$E 4, 5
7	Lca	$\forall$E 6
8	$\exists y Lcy \to \forall z Lzc$	$\forall$E 2
9	$\exists y Lcy$	$\exists$I 7
10	$\forall z Lzc$	$\to$E 8, 9
11	Lcc	$\forall$E 10
12	$\forall x Lxx$	$\forall$I 11
13	$\forall x(\exists y Lxy \to \forall z Lzx) \wedge Lab \to \forall x Lxx$	$\to$I 1–12

实例 151.2 谓词级形式定理为:

$$\exists x Mx \vee \forall x \neg Mx$$

它的形式证明为：

1	$\neg(\exists x Mx \vee \forall x \neg Mx)$	
2	$\neg\exists x Mx \wedge \neg\forall x \neg Mx$	命题141 1
3	$\neg\exists x Mx$	$\wedge$E 2
4	$\forall x \neg Mx$	命题153 3
5	$\neg\forall x \neg Mx$	$\wedge$E 2
6	$\exists x Mx \vee \forall x \neg Mx$	$\neg$E 1–5

实例 151.3 谓词级形式定理为：

$$\forall x Fx \vee \neg\forall x Fx$$

它的形式证明为：

1	$\neg(\forall x Fx \vee \neg\forall x Fx)$	
2	$\neg\forall x Fx \wedge \neg\neg\forall x Fx$	命题141 1
3	$\neg\forall x Fx$	$\wedge$E 2
4	$\neg\neg\forall x Fx$	$\wedge$E 2
5	$\forall x Fx \vee \neg\forall x Fx$	$\neg$E 1–4

定义 152 (命题与命题的等价关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 等价当且仅当 $\mathcal{A}$ 通过 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ 的符号化键转换得到的命题公式或谓词公式推出 $\mathcal{B}$ 通过 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ 的符号化键转换得到的命题公式或谓词公式，并且 $\mathcal{B}$ 通过 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ 的符号化键转换得到的命题公式或谓词公式也推出 $\mathcal{A}$ 通过 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ 的符号化键转换得到的命题公式或谓词公式。记作 $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.

实例 152.1 如果下雨了，那么地面是湿的。$\Leftrightarrow$ 如果地面不湿，那么没有下雨。

说明： 这两个命题的命题级符号化键如下：

A :下雨了

B :地面是湿的

将这两个命题转换为命题公式如下：

$$A \to B$$

$$\neg B \to \neg A$$

因为

$$A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$$

所以

如果下雨了，那么地面是湿的。⇔ 如果地面不湿，那么没有下雨。

实例 152.2 如果外面下雨了, 那么我会带伞并且我会穿雨鞋。⇔ 如果外面下雨了, 那么我会带伞，并且, 如果外面下雨了, 我会穿雨鞋。

说明: 这两个命题的命题级符号化键如下:

A :外面下雨了

C :我会带伞

D :我会穿雨鞋

将这两个命题转换为命题公式如下:

$$A \to (C \wedge D)$$

$$(A \to C) \wedge (A \to D)$$

因为

$$A \to (C \wedge D) \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (A \to D)$$

所以

如果外面下雨了，那么我会带伞并且我会穿雨鞋。⇔ 如果外面下雨了，那么我会带伞，并且，如果外面下雨了，我会穿雨鞋。

实例 152.3 如果外面下雨了，那么地面湿滑，并且如果地面湿滑，那么外面下雨了。⇔ 外面下雨了当且仅当地面湿滑。

说明: 这两个命题的命题级符号化键如下:

A :外面下雨了

B :地面湿滑

将这两个命题转换为命题公式如下:

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

$$A \leftrightarrow B$$

因为

$$(A \to B) \land (B \to A) \Leftrightarrow A \leftrightarrow B$$

所以

如果外面下雨了，那么地面湿滑，并且如果地面湿滑，那么外面下雨了。⇔ 外面下雨了当且仅当地面湿滑。

定义 153 (命题公式与命题公式的等价关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题公式。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 等价当且仅当 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 逻辑等价或 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 证明等价。记作 $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.

定义 154 (命题公式与命题公式的逻辑等价关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题公式。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 逻辑等价当且仅当 $\mathcal{A} \vDash \mathcal{B}$ 并且 $\mathcal{B} \vDash \mathcal{A}$. 或者说在任意 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ 的指派下,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的真值都相同。

实例 154.1 $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

说明: 画出这两个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q \to \neg P$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

从上表可看出，在任意指派下，这两个命题公式的真值都相同。所以

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$$

实例 154.2 $P \to (Q \land R) \Leftrightarrow (P \to Q) \land (P \to R)$

说明: 画出这两个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	R	$P \to (Q \land R)$	$(P \to Q) \land (P \to R)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

从上表可看出，在任意指派下，这两个命题公式的真值都相同。所以

$$P \to (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (P \to R)$$

实例 154.3 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \Leftrightarrow P \vee (Q \wedge R)$

说明: 画出这两个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	R	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \vee (Q \wedge R)$
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

从上表可看出，在任意指派下，这两个命题公式的真值都相同。所以

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \Leftrightarrow P \vee (Q \wedge R)$$

实例 154.4 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$

说明: 画出这两个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

从上表可看出，在任意指派下，这两个命题公式的真值都相同。所以

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$$

反例 154.1 $P \wedge (Q \to R) \not\Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$

说明: 画出这两个命题公式的完整真值表如下:

P	Q	R	$P \wedge (Q \to R)$	$(P \wedge Q) \to R$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

从上表可看出，在有些指派下，这两个命题公式的真值不同。所以

$$P \wedge (Q \to R) \not\Leftrightarrow (P \wedge Q) \to R$$

定义 155 (命题公式与命题公式的证明等价关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题公式。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 证明等价当且仅当 $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ 并且 $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$.

实例 155.1 $P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$

实例 155.2 $P \to (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (P \to R)$

实例 155.3 $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \Leftrightarrow P \vee (Q \wedge R)$

实例 155.4 $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow P \wedge (Q \vee R)$

实例 155.5 $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

实例 155.6 $(P \to Q) \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$

定义 156 (谓词公式与谓词公式的等价关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 等价当且仅当 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 逻辑等价或 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 证明等价。记作 $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$.

定义 157 (谓词公式与谓词公式的逻辑等价关系) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 逻辑等价当且仅当 $\mathcal{A} \vDash \mathcal{B}$ 并且 $\mathcal{B} \vDash \mathcal{A}$. 或者说在任意 $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ 的模型下,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的真值都相同。

反例 157.1 $\forall x Px \to Qc \not\Leftrightarrow \forall x(Px \to Qc)$

说明: 构造这两个谓词公式的一个模型如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{UD} =& \{1,2\}\\ \mathrm{e}(P) =& \{1\}\\ \mathrm{e}(Q) =& \{\}\\ \mathrm{r}(c) =& 1\end{aligned}$$

这个模型使一个谓词公式为真一个谓词公式为假。所以

$$\forall xPx \to Qc \not\Leftrightarrow \forall x(Px \to Qc)$$

定义 158 (谓词公式与谓词公式的证明等价关系) 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 证明等价当且仅当 $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ 并且 $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$.

定义 159 (命题公式与命题公式的证明等价关系的形式证明) 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为任意两个命题公式, 且 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 证明等价。

$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ 的形式证明与 $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$ 的形式证明一起被称为 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的证明等价关系的形式证明。

实例 159.1　命题公式与命题公式的证明等价关系为:

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$$

它的形式证明为:

1	$P \to Q$	
2	$\quad \neg Q$	
3	$\quad\quad P$	
4	$\quad\quad Q$	$\to$E 1, 3
5	$\quad\quad \neg Q$	R 2
6	$\quad \neg P$	$\neg$I 3–5
7	$\neg Q \to \neg P$	$\to$I 2–6

1	$\neg Q \to \neg P$	
2	$\quad P$	
3	$\quad\quad \neg Q$	
4	$\quad\quad \neg P$	$\to$E 1, 3
5	$\quad\quad P$	R 2
6	$\quad Q$	$\neg$E 3–5
7	$P \to Q$	$\to$I 2–6

实例 159.2　命题公式与命题公式的证明等价关系为:

$$P \to (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (P \to R)$$

它的形式证明为:

1	$P \to (Q \wedge R)$		
2		P	
3		$Q \wedge R$	$\to$E 1, 2
4		Q	$\wedge$E 3
5	$P \to Q$		$\to$I 2–4
6		P	
7		$Q \wedge R$	$\to$E 1, 2
8		R	$\wedge$E 7
9	$P \to R$		$\to$I 6–8
10	$(P \to Q) \wedge (P \to R)$		$\wedge$I 5, 9

1	$(P \to Q) \wedge (P \to R)$		
2	$P \to Q$		$\wedge$E 1
3	$P \to R$		$\wedge$E 1
4		P	
5		Q	$\to$E 2, 4
6		R	$\to$E 3, 4
7		$Q \wedge R$	$\wedge$I 5, 6
8	$P \to (Q \wedge R)$		$\to$I 4–7

定义 160 (谓词公式与谓词公式的证明等价关系的形式证明) 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式, 且 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 证明等价。

$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ 的形式证明与 $\mathcal{B} \vdash \mathcal{A}$ 的形式证明一起被称为 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的证明等价关系的形式证明。

实例 160.1 谓词公式与谓词公式的证明等价关系为:

$$\forall x Px \wedge Qc \Leftrightarrow \forall x(Px \wedge Qc)$$

它的形式证明为:

1	$\forall x Px \wedge Qc$	
2	$\forall x Px$	$\wedge$E 1
3	Pa	$\wedge$E 2
4	Qc	$\wedge$E 1
5	$Pa \wedge Qc$	$\wedge$I 3, 4
6	$\forall x(Px \wedge Qc)$	$\forall$I 5

1	$\forall x(Px \wedge Qc)$	
2	$Pa \wedge Qc$	$\wedge$E 1
3	Pa	$\wedge$E 2
4	Qc	$\wedge$E 2
5	$\forall x Px$	$\forall$I 3
6	$\forall x Px \wedge Qc$	$\wedge$I 4, 5

实例 160.2 谓词公式与谓词公式的证明等价关系为:

$$Qc \vee \exists x Qx \Leftrightarrow \exists x(Qc \vee Qx)$$

它的形式证明为:

1	$Qc \vee \exists x Qx$	
2	$\mid\ Qc$	
3	$\mid\ Qc \vee Qa$	$\vee$I 2
4	$\mid\ \exists x(Qc \vee Qx)$	$\exists$I 3
5	$Qc \rightarrow \exists x(Qc \vee Qx)$	$\rightarrow$I 2–4
6	$\mid\ \exists x Qx$	
7	$\mid\ \mid\ Qb$	
8	$\mid\ \mid\ Qc \vee Qb$	$\vee$I 7
9	$\mid\ \mid\ \exists x(Qc \vee Qx)$	$\exists$I 8
10	$\mid\ \exists x(Qc \vee Qx)$	$\exists$E 6, 7–9
11	$\exists x Qx \rightarrow \exists x(Qc \vee Qx)$	$\rightarrow$I 6–10
12	$\exists x(Qc \vee Qx)$	命题117 1, 5, 11

1	$\exists x(Qc \vee Qx)$	
2	$Qc \vee Qa$	
3	Qc	
4	$Qc \vee \exists xQx$	
5	$Qc \to (Qc \vee \exists xQx)$	→I 3–4
6	Qa	
7	$\exists xQx$	∃I 6
8	$Qc \vee \exists xQx$	∨I 7
9	$Qa \to (Qc \vee \exists xQx)$	→I 6–8
10	$Qc \vee \exists xQx$	命题117 2, 5, 9
11	$Qc \vee \exists xQx$	∃E 1, 2–10

实例 160.3 谓词公式与谓词公式的证明等价关系为:

$$\forall x\forall yDxy \Leftrightarrow \forall y\forall xDyx$$

它的形式证明为:

1	$\forall x\forall yDxy$	
2	$\forall yDay$	∀E 1
3	Dab	∀E 2
4	$\forall xDxb$	∀I 3
5	$\forall y\forall xDxy$	∀I 4

1	$\forall y\forall xDxy$	
2	$\forall xDax$	∀E 1
3	Dab	∀E 2
4	$\forall yDyb$	∀I 3
5	$\forall x\forall yDxy$	∀I 4

定义 161 (合式公式)

定义一【不带函词】按以下规则形成的符号串称为合式公式:

1. 谓词符号后面紧跟若干个个体常元符号或个体变元符号构成的符号串是合式公式。
2. 如果 $\mathcal{A}$ 是合式公式, 那么 $\neg\mathcal{A}$ 也是合式公式。
3. 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是合式公式, 那么 $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$ 也是合式公式。
4. 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是合式公式, 那么 $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$ 也是合式公式。
5. 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是合式公式, 那么 $(\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B})$ 也是合式公式。
6. 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是合式公式, 那么 $(\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B})$ 也是合式公式。
7. 如果 $\mathcal{A}$ 是一个合式公式,χ 是一个个体变元符号, 那么 $\forall\chi\mathcal{A}$ 是合式公式。
8. 如果 $\mathcal{A}$ 是一个合式公式,χ 是一个个体变元符号, 那么 $\exists\chi\mathcal{A}$ 是合式公式。
9. 有限次使用规则 1-8 形成的符号串都是合式公式。

定义二【带函词】按以下规则形成的符号串称为合式公式:

1. 如果 $\mathcal{P}$ 是 n 元谓词符号,$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是项, 那么 $\mathcal{P}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 是合式公式。
2. 如果 $\mathcal{A}$ 是合式公式, 那么 $\neg\mathcal{A}$ 也是合式公式。
3. 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是合式公式, 那么 $(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$ 也是合式公式。
4. 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是合式公式, 那么 $(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})$ 也是合式公式。
5. 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是合式公式, 那么 $(\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B})$ 也是合式公式。
6. 如果 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是合式公式, 那么 $(\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B})$ 也是合式公式。
7. 如果 $\mathcal{A}$ 是一个合式公式,χ 是一个个体变元符号, 那么 $\forall\chi\mathcal{A}$ 是合式公式。
8. 如果 $\mathcal{A}$ 是一个合式公式,χ 是一个个体变元符号, 那么 $\exists\chi\mathcal{A}$ 是合式公式。

9. 有限次使用规则 1-8 形成的符号串都是合式公式。

实例 161.1 $\neg\exists xTx$

说明: 按定义 161 做验证如下:

由定义 161 的第 1 条规则可知:

$$Tx \text{ 是合式公式}$$

由定义 161 的第 8 条规则可知:

$$\exists xTx \text{ 是合式公式}$$

由定义 161 的第 2 条规则可知:

$$\neg\exists xTx \text{ 是合式公式}$$

实例 161.2 $\forall x(Mx \to Nx)$

说明: 按定义 161 做验证如下:

由定义 161 的第 1 条规则可知:

$$Mx\text{是合式公式}$$
$$Nx\text{是合式公式}$$

由定义 161 的第 5 条规则可知:

$$Mx \to Nx \text{ 是合式公式}$$

由定义 161 的第 7 条规则可知:

$$\forall x(Mx \to Nx) \text{ 是合式公式}$$

实例 161.3 $\exists x(Cx \wedge \neg\exists yDxy)$

实例 161.4 $\neg\exists xBxx$

实例 161.5 $\forall x(Cx \to \forall y(\neg Cy \to Bxy))$

实例 161.6 $\exists x(Cx \wedge Sa \wedge Tab)$

实例 161.7 $\forall x_2Px_1x_2 \to Px_2a$

实例 161.8 $Fz \to \neg\forall x\forall yGxy$

实例 161.9 $\forall xMx \to \forall yNxy$

实例 161.10 $\forall xPxy \land \forall yQxy$

实例 161.11 $P(f(a,b))$

实例 161.12 $\forall x(P(x) \to (Q(g(x)) \lor R(f(x),b)))$

说明: 按定义 161 做验证如下:

由定义 161 的定义二的第 1 条规则可知:

$$P(x)\text{是合式公式}$$
$$Q(g(x))\text{是合式公式}$$
$$R(f(x),b)\text{是合式公式}$$

由定义 161 的定义二第 4 条规则可知:

$$Q(g(x)) \lor R(f(x),b) \text{ 是合式公式}$$

由定义 161 的定义二第 5 条规则可知:

$$P(x) \to (Q(g(x)) \lor R(f(x),b)) \text{ 是合式公式}$$

由定义 161 的定义二第 7 条规则可知:

$$\forall x(P(x) \to (Q(g(x)) \lor R(f(x),b))) \text{ 是合式公式}$$

实例 161.13 $\forall x(P(x,a) \to Q(f(x)))$

实例 161.14 $P(a) \to \exists z(Q(z) \land R(f(a,z)))$

实例 161.15 $\forall y(P(f(x,y),x) \to \forall xQ(z,g(x,y)))$

定义 162 (命题公式的子公式) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式,$\mathcal{A}$ 的子公式定义如下:

1. $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式,

2. 如果 $\neg\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 也是,

3. 如果 $(\mathcal{B} \land \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 也是,

4. 如果 $(\mathcal{B} \lor \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 也是,

5. 如果 $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 也是,

6. 如果 $(\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 也是,

7. 一串符号是 $\mathcal{A}$ 的子公式，当且仅当它可以有限次使用以上规则得到。

实例 162.1 命题公式为:

$$\neg(A \vee B) \wedge \neg C$$

它的子公式有:

$$\neg(A \vee B) \wedge \neg C \qquad \neg(A \vee B) \qquad \neg C \qquad A \vee B \qquad C \qquad A \qquad B$$

说明: 按定义 162 做验证如下:

由定义 162 的第 1 条规则可知:

$$\neg(A \vee B) \wedge \neg C \text{ 是它的一个子公式}$$

由定义 162 的第 3 条规则可知:

$$\neg(A \vee B)\text{是它的一个子公式}$$
$$\neg C\text{是它的一个子公式}$$

由定义 162 的第 2 条规则可知:

$$A \vee B\text{是它的一个子公式}$$
$$C\text{是它的一个子公式}$$

由定义 162 的第 4 条规则可知:

$$A\text{是它的一个子公式}$$
$$B\text{是它的一个子公式}$$

定义 163 (合式公式的子公式) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个合式公式,$\mathcal{A}$ 的子公式定义如下:

1. $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式,

2. 如果 $\neg\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 也是,

3. 如果 $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 也是,

4. 如果 $(\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 也是,

5. 如果 $(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 也是,

6. 如果 $(\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C})$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 也是,

7. 如果 $\exists\chi\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 也是,

8. 如果 $\forall\chi\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子公式, 那么 $\mathcal{B}$ 也是,

9. 一串符号是 $\mathcal{A}$ 的子公式，当且仅当它可以有限次使用以上规则得到。

实例 163.1 合式公式为:

$$\exists x(Cx \land \neg\exists y Dxy)$$

它的子公式有:

$$\exists x(Cx \land \neg\exists y Dxy) \qquad Cx \land \neg\exists y Dxy \qquad Cx \qquad \neg\exists y Dxy \qquad \exists y Dxy \qquad Dxy$$

说明: 按定义 163 做验证如下:

由定义 163 的第 1 条规则可知:

$$\exists x(Cx \land \neg\exists y Dxy) \text{ 是它的一个子公式}$$

由定义 163 的第 7 条规则可知:

$$Cx \land \neg\exists y Dxy \text{ 是它的一个子公式}$$

由定义 163 的第 3 条规则可知:

$$Cx\text{是它的一个子公式}$$

$$\neg\exists y Dxy\text{是它的一个子公式}$$

由定义 163 的第 2 条规则可知:

$$\exists y Dxy\text{是它的一个子公式}$$

由定义 163 的第 7 条规则可知:

$$Dxy\text{是它的一个子公式}$$

定义 164 (合式公式中的谓词符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个合式公式,x 为任意一个谓词符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的谓词符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 165 (合式公式中的量词符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个合式公式,x 为任意一个量词符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的量词符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 166 (合式公式中的个体常元符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个个体常元符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的个体常元符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 167 (合式公式中的个体变元符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个个体变元符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的个体变元符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 168 (合式公式中的逻辑联结词符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个逻辑联结词符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的逻辑联结词符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 169 (合式公式中的量词符号的作用变元) 称合式公式 $\forall\chi\mathcal{A}$ 中的 χ 为量词符号 $\forall$ 的作用变元, 合式公式 $\exists\chi\mathcal{A}$ 中的 χ 为量词符号 $\exists$ 的作用变元。

定义 170 (合式公式中的量词符号的作用域) 称合式公式 $\forall\chi\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{A}$ 为量词符号 $\forall$ 的作用域, 合式公式 $\exists\chi\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{A}$ 为量词符号 $\exists$ 的作用域。

定义 171 (合式公式中的约束变元符号) 如果一个合式公式中的个体变元符号是合式公式中的某个量词符号的作用变元, 并且出现在量词符号的作用域中, 那么这个个体变元符号是这个合式公式中的约束变元符号。

实例 171.1 合式公式 $\forall x\forall y(Dxy \to Exy)$ 的约束变元符号为 x 和 y。

实例 171.2 合式公式 $\forall xAx \wedge Bx$ 中的约束变元符号为子公式 $\forall xAx$ 中的 x。

实例 171.3 合式公式 $\exists xLxy \wedge \forall yLyx$ 中的约束变元符号为子公式 $\exists xLxy$ 中的 x 和子公式 $\forall yLyx$ 中的 y。

实例 171.4 合式公式 $\forall x\exists y(Rxy \to (Jz \wedge Kx)) \vee Ryx$ 中的约束变元符号为子公式 $\forall x\exists y(Rxy \to (Jz \wedge Kx))$ 中的 x 和 y。

定义 172 (合式公式中的自由变元符号) 如果一个合式公式中的某个个体变元符号不是约束变元符号，那么这个个体变元符号是这个合式公式中的自由变元符号。

实例 172.1 合式公式 $\forall x\forall y(Dxy \to Exy)$ 中没有自由变元符号。

实例 172.2 合式公式 $\forall xAx \wedge Bx$ 中的自由变元符号为子公式 Bx 中的 x。

实例 172.3 合式公式 $\exists xLxy \wedge \forall yLyx$ 中的自由变元符号为子公式 $\exists xLxy$ 中的 y 和子公式 $\forall yLyx$ 中的 x。

实例 172.4 合式公式 $\forall x\exists y(Rxy \to (Jz \wedge Kx)) \vee Ryx$ 中的约束变元符号为子公式 $\forall x\exists y(Rxy \to (Jz \wedge Kx))$ 中的 z 和子公式 Ryx 中的 x 和 y。

定义 173 (简单合取式) 由原子命题符号或原子命题符号的否定利用合取符号（∧）连接构成的命题公式称为简单合取式。

实例 173.1 A

实例 173.2 $\neg A$

实例 173.3 $\neg A \wedge B$

实例 173.4 $\neg A \wedge B \wedge \neg B$

实例 173.5 $A \wedge B \wedge C$

实例 173.6 $P \wedge Q \wedge \neg R$

定义 174 (简单析取式) 由原子命题符号或原子命题符号的否定利用析取符号（∨）连接构成的命题公式称为简单析取式。

实例 174.1 A

实例 174.2 $\neg A$

实例 174.3 $\neg A \vee B$

实例 174.4 $\neg A \vee B \vee B$

实例 174.5 $A \vee B \vee C$

实例 174.6 $P \vee Q \vee R$

定义 175 (合取范式) 由若干简单析取式利用合取符号（∧）连接构成的命题公式称为合取范式。

实例 175.1 A

实例 175.2 $\neg A$

实例 175.3 $(\neg A \vee B) \wedge (C \vee D \vee E)$

实例 175.4 $(A \vee B \vee \neg C) \wedge D$

实例 175.5 $A \wedge (B \vee C)$

实例 175.6 $(P \vee Q) \wedge (M \vee N) \wedge R$

定义 176 (析取范式) 由若干简单合取式利用析取符号（∨）连接构成的命题公式称为析取范式。

实例 176.1 A

实例 176.2 $\neg A$

实例 176.3 $(\neg A \wedge B) \vee (C \wedge D \wedge E)$

实例 176.4 $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee D$

实例 176.5 $A \vee (B \wedge C)$

实例 176.6 $(P \wedge Q) \vee (M \wedge N) \vee R$

定义 177 (命题公式的合取范式) 设 P 为任意一个命题公式,Q 为任意一个合取范式.

Q 为 P 的合取范式当且仅当 Q 与 P 等价。

实例 177.1 命题公式为:

$$(\neg A \vee B) \rightarrow C$$

它的一个合取范式为:

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

说明: 可以先求出 $(\neg A \vee B) \rightarrow C$ 的否定，也就是 $\neg((\neg A \vee B) \rightarrow C)$ 的析取范式，然后使用德摩根律和替换规则得到 $(\neg A \vee B) \rightarrow C$ 的合取范式。下面先来求 $\neg((\neg A \vee B) \rightarrow C)$ 的析取范式。

画出 $\neg((\neg A \vee B) \rightarrow C)$ 的完整真值表如下：

A	B	C	$\neg((\neg A \vee B) \rightarrow C)$
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0

找出 $\neg((\neg A \vee B) \rightarrow C)$ 的所有的成真指派，分别为：

$$(0,0,0),(0,1,0),(1,1,0)$$

写出对应的简单合取式，分别为：

$$\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C, \neg A \wedge B \wedge \neg C, A \wedge B \wedge \neg C$$

将各简单合取式用析取符号连接，得到 $\neg((\neg A \vee B) \to C)$ 的析取范式如下：

$$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

进而得到与 $(\neg A \vee B) \to C$ 等价的命题公式

$$\neg((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C))$$

对整个命题公式使用德摩根律，得到

$$\neg(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \wedge \neg(\neg A \wedge B \wedge \neg C) \wedge \neg(A \wedge B \wedge \neg C)$$

对 $\neg(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C), \neg(\neg A \wedge B \wedge \neg C), \neg(A \wedge B \wedge \neg C)$ 分别使用德摩根律，并使用替换规则，得到 $(\neg A \vee B) \to C$ 的合取范式如下：

$$(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

实例 177.2 命题公式为:

$$(\neg A \vee B) \to C$$

它的一个合取范式为:

$$(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$$

说明: 分析 $(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ 的结构可知它是一个合取范式。

从 $(\neg A \vee B) \to C$ 推导 $(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$：

$$\begin{array}{r|l}
1 & (\neg A \vee B) \to C \\ \hline
2 & \neg(\neg A \vee B) \vee C \\
3 & (A \wedge \neg B) \vee C \\
4 & (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)
\end{array}$$

再从 $(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ 推导 $(\neg A \vee B) \to C$：

$$\begin{array}{r|l}
1 & (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \\ \hline
2 & (A \wedge \neg B) \vee C \\
3 & \neg(\neg A \vee B) \vee C \\
4 & (\neg A \vee B) \to C
\end{array}$$

这说明 $(\neg A \vee B) \to C$ 与 $(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ 等价。所以 $(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ 是 $(\neg A \vee B) \to C$ 的合取范式。

实例 177.3 命题公式为:

$$(A \vee B) \to C \to A$$

它的一个合取范式为:

$$(A \vee B) \wedge (\neg C \vee A)$$

说明: 分析 $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee A)$ 的结构可知它是一个合取范式。

从 $(A \vee B) \to C \to A$ 推导 $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee A)$:

$$\begin{array}{r|l}
1 & (A \vee B) \to C \to A \\
\hline
2 & \neg((A \vee B) \to C) \vee A \\
3 & \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \vee A \\
4 & (\neg\neg(A \vee B) \wedge \neg C) \vee A \\
5 & (A \vee B) \wedge (\neg C \vee A)
\end{array}$$

再从 $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee A)$ 推导 $(A \vee B) \to C \to A$:

$$\begin{array}{r|l}
1 & (A \vee B) \wedge (\neg C \vee A) \\
\hline
2 & (\neg\neg(A \vee B) \wedge \neg C) \vee A \\
3 & \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \vee A \\
4 & \neg((A \vee B) \to C) \vee A \\
5 & (A \vee B) \to C \to A
\end{array}$$

这说明 $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee A)$ 与 $(A \vee B) \to C \to A$ 等价。所以 $(A \vee B) \wedge (\neg C \vee A)$ 是 $(A \vee B) \to C \to A$ 的合取范式。

定义 178 (命题公式的析取范式) 设 P 为任意一个命题公式,Q 为任意一个析取范式.

Q 为 P 的析取范式当且仅当 Q 与 P 等价。

实例 178.1 命题公式为:

$$(\neg A \vee B) \to C$$

它的一个析取范式为:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

说明: 画出 $(\neg A \vee B) \to C$ 的完整真值表如下:

A	B	C	$(\neg A \vee B) \to C$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

找出 $(\neg A \vee B) \to C$ 的所有的成真指派，分别为:

$$(1,0,0),(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$$

写出对应的简单合取式，分别为:

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C, \neg A \wedge \neg B \wedge C, A \wedge \neg B \wedge C, \neg A \wedge B \wedge C, A \wedge B \wedge C$$

将各简单合取式用析取符号连接，得到 $(\neg A \vee B) \to C$ 的析取范式如下:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

实例 178.2 命题公式为:

$$(\neg A \vee B) \to C$$

它的一个析取范式为:

$$(A \wedge \neg B) \vee C$$

说明: 原命题公式为:

$$(\neg A \vee B) \to C$$

使用命题 146，得到:

$$\neg(\neg A \vee B) \vee C$$

使用命题 140 和命题 126，得到:

$$(A \wedge \neg B) \vee C$$

实例 178.3 命题公式为:

$$((A \vee B) \to C) \to A$$

它的一个析取范式为:

$$(A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C) \vee A$$

说明: 分析 $(A\wedge\neg C)\vee(B\wedge\neg C)\vee A$ 的结构可知它是一个析取范式。因此只要证明 $((A\vee B)\to C)\to A\Leftrightarrow(A\wedge\neg C)\vee(B\wedge\neg C)\vee A$ 即可。

由命题 146 可知:

$$((A\vee B)\to C)\to A\Leftrightarrow\neg((A\vee B)\to C)\vee A$$

由命题 146 和命题 126 可知:

$$\neg((A\vee B)\to C)\vee A\Leftrightarrow\neg(\neg(A\vee B)\vee C)\vee A$$

由命题 140 和命题 126 可知:

$$\neg(\neg(A\vee B)\vee C)\vee A\Leftrightarrow\neg((\neg A\wedge\neg B)\vee C)\vee A$$

由命题 140 和命题 126 可知:

$$\neg((\neg A\wedge\neg B)\vee C)\vee A\Leftrightarrow(\neg(\neg A\wedge\neg B)\wedge\neg C)\vee A$$

由命题 142 和命题 126 可知:

$$(\neg(\neg A\wedge\neg B)\wedge\neg C)\vee A\Leftrightarrow((\neg\neg A\vee\neg\neg B)\wedge\neg C)\vee A$$

由命题 144 和命题 126 可知:

$$((\neg\neg A\vee\neg\neg B)\wedge\neg C)\vee A\Leftrightarrow((A\vee B)\wedge\neg C)\vee A$$

由命题 138 和命题 126 可知:

$$((A\vee B)\wedge\neg C)\vee A\Leftrightarrow(A\wedge\neg C)\vee(B\wedge\neg C)\vee A$$

所以 $(A\wedge\neg C)\vee(B\wedge\neg C)\vee A$ 是 $((A\vee B)\to C)\to A$ 的析取范式。

定义 179 (前束范式) 所有量词符号及其作用变元符号都处于最前面的合式公式称为前束范式。

实例 179.1 $\forall x\exists y(\neg Px\vee Qxy)$ **实例 179.2** $\exists x\forall y(Px\wedge(Qy\vee Rxy))$

定义 180 (谓词公式的前束范式) 设 P 为任意一个谓词公式,Q 为任意一个前束范式。

Q 为 P 的前束范式当且仅当 Q 与 P 等价。

实例 180.1 $\forall x(Px\to\exists yQxy)\mapsto\forall x\exists y(Px\to Qxy)$

说明: 分析 $\forall x\exists y(Px \to Qxy)$ 的结构可知它是一个前束范式。因此只要证明 $\forall x(Px \to \exists yQxy) \Leftrightarrow \forall x\exists y(Px \to Qxy)$ 即可。

由命题 158 可知,

$$Px \to \exists yQxy \Leftrightarrow \exists y(Px \to Qxy)$$

由替换规则（命题 127）可得:

$$\forall x(Px \to \exists yQxy) \Leftrightarrow \forall x\exists y(Px \to Qxy)$$

所以 $\forall x\exists y(Px \to Qxy)$ 是 $\forall x(Px \to \exists yQxy)$ 的前束范式。

实例 180.2 $\exists x(Px \wedge \forall y(Qy \vee Rxy)) \mapsto \exists x\forall y(Px \wedge (Qy \vee Rxy))$

说明: 分析 $\exists x\forall y(Px \wedge (Qy \vee Rxy))$ 的结构可知它是一个前束范式。因此只要证明 $\exists x(Px \wedge \forall y(Qy \vee Rxy)) \Leftrightarrow \exists x\forall y(Px \wedge (Qy \vee Rxy))$ 即可。由命题 160 可知,

$$Px \wedge \forall y(Qy \vee Rxy) \Leftrightarrow \forall y(Px \wedge (Qy \vee Rxy))$$

使用替换规则（命题 127）可得:

$$\exists x(Px \wedge \forall y(Qy \vee Rxy)) \Leftrightarrow \exists x\forall y(Px \wedge (Qy \vee Rxy))$$

所以 $\exists x\forall y(Px \wedge (Qy \vee Rxy))$ 是 $\exists x(Px \wedge \forall y(Qy \vee Rxy))$ 的前束范式。

实例 180.3 $\forall x(\exists yPy \vee (\exists zQz \to Rx)) \mapsto \forall x\exists y\forall z(Py \vee (Qz \to Rx))$

说明: 分析 $\forall x\exists y\forall z(Py \vee (Qz \to Rx))$ 的结构可知它是一个前束范式。因此只要证明 $\forall x(\exists yPy \vee (\exists zQz \to Rx)) \Leftrightarrow \forall x\exists y\forall z(Py \vee (Qz \to Rx))$ 即可。

由命题 157 可知:

$$\exists zQz \to Rx \Leftrightarrow \forall z(Qz \to Rx)$$

由替换规则（命题 127）, 得到:

$$\forall x(\exists yPy \vee (\exists zQz \to Rx)) \Leftrightarrow \forall x(\exists yPy \vee \forall z(Qz \to Rx))$$

由命题 163 可知:

$$\exists yPy \vee \forall z(Qz \to Rx) \Leftrightarrow \exists y(Py \vee \forall z(Qz \to Rx))$$

由替换规则（命题 127）, 得到:

$$\forall x(\exists yPy \vee \forall z(Qz \to Rx)) \Leftrightarrow \forall x\exists y(Py \vee \forall z(Qz \to Rx))$$

由命题 162 可知：

$$Py \lor \forall z(Qz \to Rx) \Leftrightarrow \forall z(Py \lor (Qz \to Rx))$$

由替换规则（命题 127），得到：

$$\forall x \exists y(Py \lor \forall z(Qz \to Rx)) \Leftrightarrow \forall x \exists y \forall z(Py \lor (Qz \to Rx))$$

所以 $\forall x \exists y \forall z(Py \lor (Qz \to Rx))$ 是 $\forall x(\exists y Py \lor (\exists z Qz \to Rx))$ 的前束范式。

实例 180.4 $\forall x(\exists y Rxy \land \forall y \neg Sxy \to \neg \exists y Rxy) \mapsto \forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3(\neg Rxy_1 \lor Sxy_2 \lor \neg Rx, y_3)$

说明：使用命题 147 与替换规则（命题 127），得到：

$$\forall x(\neg(\exists y Rxy \land \forall y \neg Sxy) \lor \neg \exists y Rxy)$$

使用命题 143 与替换规则（命题 127），得到：

$$\forall x(\neg \exists y Rxy \lor \neg \forall y \neg Sxy \lor \neg \exists y Rxy)$$

使用命题 152，命题 153 与替换规则（命题 127），得到：

$$\forall x(\forall y \neg Rxy \lor \exists y Sxy \lor \forall y \neg Rxy)$$

使用命题 166，命题 167 与替换规则（命题 127），得到：

$$\forall x(\forall y_1 \neg Rxy_1 \lor \exists y_2 Sxy_2 \lor \forall y_3 \neg Rxy_3)$$

使用命题 162，命题 163 与替换规则（命题 127），得到最终结果：

$$\forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3(\neg Rxy_1 \lor Sxy_2 \lor \neg Rxy_3)$$

定义 181 (函词) 用于将一个或多个对象映射到另一个对象的句子成分。

定义 182 (单指称项中的函词) 设 t 为任意一个单指称项,f 为任意一个函词。f 为 t 中的函词当且仅当 f 是从 t 中分解出来的。

实例 182.1 中国的首都 $\mapsto \cdots$ 的首都

实例 182.2 2 的平方 $\mapsto \cdots$ 的平方

实例 182.3 2 与 3 的和 $\mapsto \cdots$ 与 $\cdots$ 的和

定义 183 (多指称项中的函词) 设 t 为任意一个多指称项,f 为任意一个函词。

f 为 t 中的函词当且仅当 f 是从 t 中分解出来的。

实例 183.1 集合的幂集 $\mapsto \cdots$ 的幂集

实例 183.2 自然数的平方 $\mapsto \cdots$ 的平方

实例 183.3 自然数与自然数的和 $\mapsto \cdots$ 与 $\cdots$ 的和

定义 184 (函词的外延) 指函词所适用的所有输入输出对构成的集合。

函词 f 的外延记作 $\mathrm{e}(f)$。简写作 $\mathrm{e}(f)$。

实例 184.1 假设论域为

$$\mathbf{UD} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, m, \cdots\}$$

谓词 f 为

$$\cdots \text{ 的平方}$$

那么谓词 f 的外延为

$$\mathrm{e}(f) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), \cdots, (m, m^2), \cdots\}$$

实例 184.2 假设论域为

$$\mathbf{UD} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, m, \cdots\}$$

谓词 f 为

$$\cdots \text{ 与 } \cdots \text{ 的和}$$

那么谓词 f 的外延为

$$\mathrm{e}(f) = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3), \cdots, (m, n, m + n), \cdots\}$$

定义 185 (个体常元符号的指称对象) 个体常元符号所代表的单指称项的指称对象称为该个体常元符号的指称对象。

个体常元符号 c 的指称对象记作 $\mathrm{referent}(c)$,简写作 $\mathrm{r}(c)$.

定义 186 (合式公式中的函词符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个合式公式,x 为任意一个函词符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的函词符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 187 (函词符号) f, g, h 或带数字下标的 f, g, h。

即 $f, g, h, f_1, g_{10}, h_{99}, \cdots$

定义 188 (合式公式中的项) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个合式公式,x 为任意一个项。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的项当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 189 (项) 按以下规则形成的符号串称为项:

1. 所有个体常元符号都是项。
2. 所有个体变元符号都是项。
3. 如果 f 是一个 n 元函词符号,$t_1, \cdots, t_n$ 是项,那么 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 也是项。
4. 有限次使用规则 1-3 得到的符号串都是项。

定义 190 (常项) 按以下规则形成的符号串称为常项:

1. 所有个体常元符号都是常项。
2. 如果 f 是一个 n 元函词符号,$t_1, \cdots, t_n$ 都是常项, 那么 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 也是常项。
3. 有限次使用规则 1-2 得到的符号串都是常项。

实例 190.1 a

实例 190.2 b

实例 190.3 c

实例 190.4 f(a)

实例 190.5 f(b)

实例 190.6 f(b,c)

实例 190.7 f(a,b,c)

实例 190.8 f(g(a))

实例 190.9 f(b,g(c))

定义 191 (变项) 按以下规则形成的符号串称为变项:

1. 所有个体变元符号都是变项。
2. 如果 f 是一个 n 元函词符号,$t_1, \cdots, t_n$ 中有变项, 那么 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 也是变项。
3. 有限次使用规则 1-2 得到的符号串都是变项。

实例 191.1 x

实例 191.2 y

实例 191.3 z

实例 191.4 f(x)

实例 191.5 f(y)

实例 191.6 f(x,z)

实例 191.7 f(a,z)

实例 191.8 f(b,x,z)

实例 191.9 f(x,y,z)

定义 192 (常项的指称对象) 设 t 为任意一个常项,$r(t)$ 为 t 的指称对象。

如果 $t = c$, 那么

$$r(t) = r(c),\text{ 其中 } c \text{ 是个体常元符号。}$$

如果 $t = f(c_1, c_2, \cdots, c_n)$, 那么

$$r(t) = f(r(c_1), \cdots, r(c_n)),\text{ 其中 } c_1, \cdots, c_n \text{ 都是常项。}$$

定义 193 (变项的指派) 设 t 为任意一个变项,$a(t)$ 为 t 的指派。

如果 $t = \chi$, 那么

$$a(t) = a(\chi)$$

其中 χ 是个体变元符号。

如果 $t = f(c_1, \cdots, c_n, \chi_1, \cdots, \chi_n)$, 那么

$$a(t) = f(r(c_1), \cdots, r(c_n), a(\chi_1), \cdots, a(\chi_n))$$

其中 $c_1, \cdots, c_n$ 都是常项, $\chi_1, \cdots, \chi_n$ 都是变项。

定义 194 (谓词公式中的函词符号) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个函词符号。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的函词符号当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 195 (谓词公式中的项) 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式,x 为任意一个项。

x 为 $\mathcal{A}$ 中的项当且仅当 x 在 $\mathcal{A}$ 的符号串序列中。

定义 196 (命题集相对于它的命题级符号化键的命题公式集) 如果一个命题公式集是命题集 $\mathbb{A}$ 经过它的一个命题级符号化键 K 符号化得到的, 那么称这个命题公式集是 $\mathbb{A}$ 相对于 K 的命题公式集。

实例 196.1 命题集为：

1. 小李和小王都是电工。
2. 如果小李是一名消防员，那么他对自己的职业很满意。
3. 小李是一名消防员，除非他是一名电工。
4. 小王是一名对自己的职业不满意的电工。
5. 小李和小王都不是电工。
6. 小李和小王都是电工，但他们对自己的职业都不满意。
7. 只有小王是一名电工时，他才会对自己的职业满意。
8. 如果小李不是一名电工，那么小王也不是，但如果小李是一名电工，那么小王也是。
9. 小李对自己的职业满意当且仅当小王对自己的职业不满意。
10. 如果小王既是一名电工又是一名消防员，那么他一定对自己的职业满意。
11. 小王不可能既是电工又是消防员。
12. 小李和小王都是消防员当且仅当他们都不是电工。

它的命题级符号化键为:

E_1 :小李是一名电工

E_2 :小王是一名电工

F_1 :小李是一名消防员

F_2 :小王是一名消防员

S_1 :小李对自己的职业满意

S_2 :小王对自己的职业满意

命题集相对于它的命题级符号化键的命题公式集为:

1. $E_1 \wedge E_2$
2. $F_1 \to S_1$
3. $\neg E_1 \to F_1$
4. $E_2 \wedge \neg S_2$
5. $\neg E_1 \wedge \neg E_2$
6. $E_1 \wedge E_2 \wedge \neg(S_1 \vee S_2)$

7. $S_2 \to F_2$
8. $(\neg E_1 \to \neg E_2) \land (E_1 \to E_2)$
9. $S_1 \leftrightarrow \neg S_2$
10. $(E_2 \land F_2) \to S_2$
11. $\neg(E_2 \land F_2)$
12. $(F_1 \land F_2) \leftrightarrow (\neg E_1 \land \neg E_2)$

定义 197 (命题公式集相对于它的命题级解释的命题集) 如果一个命题集是命题公式集 $\mathbb{A}$ 经过它的一个命题级解释 I 解释得到的, 那么称这个命题集是 $\mathbb{A}$ 相对于 I 的命题集。

实例 197.1 命题公式集为:

1. $E_1 \land E_2$
2. $F_1 \to S_1$
3. $\neg E_1 \to F_1$
4. $E_2 \land \neg S_2$
5. $\neg E_1 \land \neg E_2$
6. $E_1 \land E_2 \land \neg(S_1 \lor S_2)$
7. $S_2 \to F_2$
8. $(\neg E_1 \to \neg E_2) \land (E_1 \to E_2)$
9. $S_1 \leftrightarrow \neg S_2$
10. $(E_2 \land F_2) \to S_2$
11. $\neg(E_2 \land F_2)$
12. $(F_1 \land F_2) \leftrightarrow (\neg E_1 \land \neg E_2)$

它的命题级解释为:

E_1 :小李是一名电工

E_2 :小王是一名电工

F_1 :小李是一名消防员

F_2 :小王是一名消防员

S_1 :小李对自己的职业满意

S_2 :小王对自己的职业满意

命题公式集相对于它的命题级解释的命题集为:

1. 小李和小王都是电工。
2. 如果小李是一名消防员，那么他对自己的职业很满意。
3. 小李是一名消防员，除非他是一名电工。
4. 小王是一名对自己的职业不满意的电工。
5. 小李和小王都不是电工。
6. 小李和小王都是电工，但他们对自己的职业都不满意。
7. 只有小王是一名电工时，他才会对自己的职业满意。
8. 如果小李不是一名电工，那么小王也不是，但如果小李是一名电工，那么小王也是。
9. 小李对自己的职业满意当且仅当小王对自己的职业不满意。
10. 如果小王既是一名电工又是一名消防员，那么他一定对自己的职业满意。
11. 小王不可能既是电工又是消防员。
12. 小李和小王都是消防员当且仅当他们都不是电工。

定义 198 (命题集相对于它的谓词级符号化键的谓词公式集) 如果一个谓词公式集是命题集 $\mathbb{A}$ 经过它的一个谓词级符号化键 K 符号化得到的, 那么称这个谓词公式集是 $\mathbb{A}$ 相对于 K 的谓词公式集。

实例 198.1 命题集为:

1. 小艾，小波和小彩都住在动物园。
2. 小波是一只爬行动物，但不是鳄鱼。
3. 如果小彩喜欢小波，那么小波是一只猴子。
4. 如果小波和小彩都是鳄鱼，那么小艾喜欢它们俩。
5. 一些爬行动物生活在动物园。
6. 所有鳄鱼都是爬行动物。
7. 生活在动物园的所有动物都是猴子或鳄鱼。
8. 有些爬行动物不是鳄鱼。
9. 小彩喜欢一只爬行动物。
10. 小波喜欢住在动物园里的所有猴子。
11. 小艾喜欢的所有猴子都喜欢它。

12. 如果所有动物都是爬行动物，那么小艾也是爬行动物。
13. 任意一只鳄鱼都是爬行动物。
14. 小彩喜欢的每只猴子小艾也喜欢。
15. 有一只猴子喜欢小波，但小波不喜欢它。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有动物

Ax :x是一只鳄鱼

Mx :x是一只猴子

Rx :x是一只爬行动物

Zx :x住在动物园

Lxy :x喜欢y

a :小艾

b :小波

c :小彩

命题集相对于它的谓词级符号化键的谓词公式集为:

1. $Za \wedge Zb \wedge Zc$
2. $Rb \wedge \neg Ab$
3. $Lcb \to Mb$
4. $(Ab \wedge Ac) \to (Lab \wedge Lac)$
5. $\exists x(Rx \wedge Zx)$
6. $\forall x(Ax \to Rx)$
7. $\forall x(Zx \to (Mx \vee Ax))$
8. $\exists x(Rx \wedge \neg Ax)$
9. $\exists x(Rx \wedge Lcx)$
10. $\forall x((Mx \wedge Zx) \to Lbx)$
11. $\forall x((Mx \wedge Lax) \to Lxa)$
12. $\exists xRx \to Ra$
13. $\forall x(Ax \to Ra)$

14. $\forall x((Mx \wedge Lcx) \to Lax)$
15. $\exists x(Mx \wedge Lxb \wedge \neg Lbx)$

实例 198.2 命题集为:

1. 伯蒂是一只喜欢武士电影的狗。
2. 伯蒂、爱默生、和弗吉斯都是狗。
3. 爱默生比弗吉斯更大，并且弗吉斯比爱默生更大。
4. 所有狗都喜欢武士电影。
5. 只有狗喜欢武士电影。
6. 有一只狗比爱默生更大。
7. 如果有一只狗比弗吉斯更大，那么有一只狗比爱默生更大。
8. 没有喜欢武士电影的狗比爱默生更大。
9. 没有狗比弗吉斯更大。
10. 所有不喜欢武士电影的狗都比伯蒂大。
11. 有一只动物比伯蒂大比爱默生小。
12. 没有狗比伯蒂大比艾默生小。
13. 没有狗比它自己大。
14. 对于每一只狗，都有其它狗比它大。
15. 有一只动物比每一只狗都小。

它的谓词级符号化键为:

$$\begin{aligned} \textbf{UD}&:\text{所有动物}\\ Dx&:x\text{是一只狗}\\ Sx&:x\text{喜欢武士电影}\\ Lxy&:x\text{比}y\text{更大}\\ b&:\text{伯蒂}\\ e&:\text{爱默生}\\ f&:\text{弗吉斯}\end{aligned}$$

命题集相对于它的谓词级符号化键的谓词公式集为:

1. $Db \wedge Sb$

2. $Db \wedge De \wedge df$
3. $Leb \wedge Lfe$
4. $\forall x(Dx \to Sx)$
5. $\forall x(Sx \to Dx)$
6. $\exists x(Dx \wedge Lxe)$
7. $\exists x(Dx \wedge Lxf) \to \exists x(Dx \wedge Lxe)$
8. $\forall x(Lxe \to \neg Sx)$
9. $\neg\exists x(Lxf \wedge Dx)$
10. $\forall x(\neg Sx \to Lxb)$
11. $\exists x((Lxb \wedge Lex) \vee (Lxe \wedge Lbx))$
12. $\neg\exists(Dx \wedge ((Lxb \wedge Lex) \vee (Lxe \wedge Lbx)))$
13. $\neg\exists x(Dx \wedge Lxx)$
14. $\forall x(Dx \to \exists y(Dy \wedge Lyx \wedge x \neq y))$
15. $\exists x\forall y(Dy \to Lyx)$

实例 198.3 命题集为：

1. 存在没有元素的集合。
2. 存在仅有任意两个元素构成的集合。
3. 存在由任意集合中满足某一性质的元素构成的集合。
4. 每个非空集合都存在某个元素，且这个元素的所有元素都不是这个非空集合的元素。
5. 存在由任意一个集合的所有元素的元素构成的集合。
6. 存在由任意一个集合的所有子集构成的集合, 如果一个集合的所以元素都是另一个集合的元素，那么这个集合就是另一个集合的子集。

它的谓词级符号化键为:

UD :所有集合

Bxy :x属于y, 或x是y的元素

命题集相对于它的谓词级符号化键的谓词公式集为:

1. $\exists y\forall x\neg Bxy$

2. $\forall x_1 \forall x_2 \exists y \forall x_3 (Bx_3y \leftrightarrow (x_3 = x_1 \vee x_3 = x_2))$
3. $\forall y_1 \exists y_2 \forall x (Bxy_2 \leftrightarrow (Bxy_1 \wedge \varphi(x)))$
4. $\forall x (\exists z Bzx \rightarrow \exists z (Bzx \wedge \forall y (Byz \rightarrow \neg Byx)))$
5. $\forall z \exists y_1 \forall x (Bxy_1 \leftrightarrow \exists y_2 (By_2z \wedge Bxy_2))$
6. $\forall y_1 \exists z \forall y_2 (By_2z \leftrightarrow \forall x (Bxy_2 \rightarrow Bxy_1))$

将 Bxy 换成 $x \in y$, 就是我们熟悉的集合论公理:

1. $\exists y \forall x \neg (x \in y)$
2. $\forall x_1 \forall x_2 \exists y \forall x_3 (x_3 \in y \leftrightarrow (x_3 = x_1 \vee x_3 = x_2))$
3. $\forall y_1 \exists y_2 \forall x (x \in y_2 \leftrightarrow (x \in y_1 \wedge \varphi(x)))$
4. $\forall x (\exists z (z \in x) \rightarrow \exists z (z \in x \wedge \forall y (y \in z \rightarrow \neg (y \in x))))$
5. $\forall z \exists y_1 \forall x (x \in y_1 \leftrightarrow \exists y_2 (y_2 \in z \wedge x \in y_2))$
6. $\forall y_1 \exists z \forall y_2 (y_2 \in z \leftrightarrow \forall x (x \in y_2 \rightarrow x \in y_1))$

定义 199 (谓词公式集相对于它的谓词级解释的命题集) 如果一个命题集是谓词公式集 $\mathbb{A}$ 经过它的一个谓词级解释 I 解释得到的, 那么称这个命题集是 $\mathbb{A}$ 相对于 I 的命题集。

实例 199.1 谓词公式集为:

1. $Za \wedge Zb \wedge Zc$
2. $Rb \wedge \neg Ab$
3. $Lcb \rightarrow Mb$
4. $(Ab \wedge Ac) \rightarrow (Lab \wedge Lac)$
5. $\exists x (Rx \wedge Zx)$
6. $\forall x (Ax \rightarrow Rx)$
7. $\forall x (Zx \rightarrow (Mx \vee Ax))$
8. $\exists x (Rx \wedge \neg Ax)$
9. $\exists x (Rx \wedge Lcx)$
10. $\forall x ((Mx \wedge Zx) \rightarrow Lbx)$
11. $\forall x ((Mx \wedge Lax) \rightarrow Lxa)$
12. $\exists x Rx \rightarrow Ra$

13. $\forall x(Ax \to Ra)$
14. $\forall x((Mx \land Lcx) \to Lax)$
15. $\exists x(Mx \land Lxb \land \neg Lbx)$

它的谓词级解释为:

UD :所有动物
Ax :x是一只鳄鱼
Mx :x是一只猴子
Rx :x是一只爬行动物
Zx :x住在动物园
Lxy :x喜欢y
a :小艾
b :小波
c :小彩

谓词公式集相对于它的解释的命题集为：

1. 小艾，小波和小彩都住在动物园。
2. 小波是一只爬行动物，但不是鳄鱼。
3. 如果小彩喜欢小波，那么小波是一只猴子。
4. 如果小波和小彩都是鳄鱼，那么小艾喜欢它们俩。
5. 一些爬行动物生活在动物园。
6. 所有鳄鱼都是爬行动物。
7. 生活在动物园的所有动物都是猴子或鳄鱼。
8. 有些爬行动物不是鳄鱼。
9. 小彩喜欢一只爬行动物。
10. 小波喜欢住在动物园里的所有猴子。
11. 小艾喜欢的所有猴子都喜欢它。
12. 如果所有动物都是爬行动物，那么小艾也是爬行动物。
13. 任意一只鳄鱼都是爬行动物。
14. 小彩喜欢的每只猴子小艾也喜欢。

15. 有一只猴子喜欢小波，但小波不喜欢它。

定义 200 (命题公式集的完整真值表) 将命题公式集的所有指派和在这些指派下命题公式集中所有命题公式的真值画在一个表里得到的表称为命题公式集的完整真值表。

实例 200.1 命题公式集为：

$$\{(A \wedge B) \rightarrow C, (A \wedge C) \rightarrow B, (B \wedge C) \rightarrow A\}$$

它的完整真值表为：

A	B	C	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$(A \wedge C) \rightarrow B$	$(B \wedge C) \rightarrow A$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

定义 201 (命题公式集的部分真值表) 将命题公式集的部分指派和在这些指派下命题公式集中所有命题公式的真值画在一个表里得到的表称为命题公式集的部分真值表。

实例 201.1 命题公式集为：

$$\{(A \wedge B) \rightarrow C, (A \wedge C) \rightarrow B, (B \wedge C) \rightarrow A\}$$

它的一个部分真值表为：

A	B	C	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$(A \wedge C) \rightarrow B$	$(B \wedge C) \rightarrow A$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0

定义 202 (公理) 假定为真或不证自明的命题称为公理。

定义 203 (定义) 用于对概念的含义做精准陈述的陈述句称为定义。

定义 204 (定理) 被证明为真的命题称为定理。

定义 205 (真命题集) 如果一个集合中的所有元素都是真命题类中的元素, 那么称这个集合为真命题类的子集, 也称为真命题集。

定义 206 (命题级形式理论) 与某个主题相关的若干条命题公式构成的集合称为命题级形式理论。

定义 207 (谓词级形式理论) 与某个主题相关的若干条谓词公式构成的集合称为谓词级形式理论。

实例 207.1 形式化线性序理论, 其中 L 表示“$\cdots$ 小于 $\cdots$”, E 表示“$\cdots$ 等于 $\cdots$”。

(1) $\forall x \neg L(x,x)$

(2) $\forall x \forall y \neg (L(x,y) \wedge L(y,x))$

(3) $\forall x \forall y \forall z (L(x,y) \wedge L(y,z) \to L(x,z))$

(4) $\forall x \forall y (L(x,y) \vee L(y,x) \vee E(x,y))$

实例 207.2 形式化稠密线性序理论, 其中 L 表示“$\cdots$ 小于 $\cdots$”, E 表示“$\cdots$ 等于 $\cdots$”。

(1) $\forall x \neg L(x,x)$

(2) $\forall x \forall y \neg (L(x,y) \wedge L(y,x))$

(3) $\forall x \forall y \forall z (L(x,y) \wedge L(y,z) \to L(x,z))$

(4) $\forall x \forall y (L(x,y) \vee L(y,x) \vee E(x,y))$

(5) $\forall x \forall y (L(x,y)) \to \exists z (L(x,z) \wedge L(z,y))$

(6) $\forall x \exists y L(x,y)$

(7) $\forall x \exists y L(y,x)$

实例 207.3 形式化域理论, 其中 E 表示“$\cdots$ 等于 $\cdots$”,f 表示“$\cdots$ 与 $\cdots$ 的和”,g 表示“$\cdots$ 与 $\cdots$ 的积”, “c_0”表示加法单位元, 通常记作 0,“c_1”表示乘法单位元, 通常记作 1.

(1) $\forall x\forall y\forall zE(f(x,f(y,z)),f(f(x,y),z))$

(2) $\forall xE(f(x,c_0),x)$

(3) $\forall x\exists yE(f(x,y),c_0)$

(4) $\forall x\forall yE(f(x,y),f(y,x))$

(5) $\forall x\forall y\forall zE(g(x,g(y,z)),g(g(x,y),z))$

(6) $\forall xE(g(x,c_1),x)$

(7) $\forall x(E(x,c_0)\vee\exists yE(g(y,x),c_1))$

(8) $\forall x\forall yE(g(x,y),g(y,x))$

(9) $\forall x\forall y\forall zE(g(x,f(y,z)),f(g(x,y),g(y,z)))$

(10) $\neg E(c_0,c_1)$

实例 207.4 形式化有序域理论, 其中 L 表示“$\cdots$ 小于 $\cdots$”,E 表示“$\cdots$ 等于 $\cdots$”, f 表示“$\cdots$ 与 $\cdots$ 的和”,g 表示“$\cdots$ 与 $\cdots$ 的积”, “c_0”表示加法单位元, 通常记作 0,“c_1”表示乘法单位元, 通常记作 1.

(1) $\forall x\forall y\forall zE(f(x,f(y,z)),f(f(x,y),z))$

(2) $\forall xE(f(x,c_0),x)$

(3) $\forall x\exists yE(f(x,y),c_0)$

(4) $\forall x\forall yE(f(x,y),f(y,x))$

(5) $\forall x\forall y\forall zE(g(x,g(y,z)),g(g(x,y),z))$

(6) $\forall xE(g(x,c_1),x)$

(7) $\forall x(E(x,c_0)\vee\exists yE(g(y,x),c_1))$

(8) $\forall x\forall yE(g(x,y),g(y,x))$

(9) $\forall x\forall y\forall zE(g(x,f(y,z)),f(g(x,y),g(y,z)))$

(10) $\neg E(c_0,c_1)$

(11) $\forall x\neg L(x,x)$

(12) $\forall x\forall y\neg(L(x,y)\wedge L(y,x))$

(13) $\forall x\forall y\forall z(L(x,y)\wedge L(y,z)\rightarrow L(x,z))$

(14) $\forall x\forall y(L(x,y)\vee L(y,x)\vee E(x,y))$

(15) $\forall x\forall y\forall z(L(x,y)\rightarrow L(f(x,z),f(y,z)))$

(16) $\forall x\forall y\forall z(L(x,y)\wedge L(c_0,z)\rightarrow L(g(x,z),g(y,z)))$

实例 207.5 形式化代数闭域理论, 其中 E 表示“$\cdots$ 等于 $\cdots$”,f 表示“$\cdots$ 与 $\cdots$ 的和”, g 表示“$\cdots$ 与 $\cdots$ 的积”,“c_0”表示加法单位元, 通常记作 0,“c_1”表示乘法单位元, 通常记作 1.

(1) $\forall x\forall y\forall zE(f(x,f(y,z)),f(f(x,y),z))$

(2) $\forall xE(f(x,c_0),x)$

(3) $\forall x\exists yE(f(x,y),c_0)$

(4) $\forall x\forall yE(f(x,y),f(y,x))$

(5) $\forall x\forall y\forall zE(g(x,g(y,z)),g(g(x,y),z))$

(6) $\forall xE(g(x,c_1),x)$

(7) $\forall x(E(x,c_0)\vee\exists yE(g(y,x),c_1))$

(8) $\forall x\forall yE(g(x,y),g(y,x))$

(9) $\forall x\forall y\forall zE(g(x,f(y,z)),f(g(x,y),g(y,z)))$

(10) $\neg E(c_0,c_1)$

(11) 对每个 $n\geq 1$, 有如下谓词公式, 其中 $y^k=g(y^{k-1},y),k\geq 1$

$$\forall x_0\forall x_1\cdots\forall x_n\exists y(E(f(f(f(\cdots f(g(x_n,y^n),g(x_{n-1},y^{n-1})),\cdots),g(x_1,y^1)),x_0)$$
$$,c_0)\vee E(x_n,c_0))$$

定义 208 (闭合式公式) 不含自由变元符号的合式公式称为闭合式公式。本书中闭合式公式与谓词公式是同一个概念。

定义 209 (开合式公式) 含自由变元符号的合式公式称为开合式公式。

第二章　命题

命题 104 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为任意两个命题公式,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有语义推出关系。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有导出关系。即

$$\mathcal{A} \vDash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$$

命题 105 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为任意两个命题公式,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有导出关系。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有语义推出关系。即

$$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \mathcal{B}$$

命题 106 设 $\varPhi$ 为任意一个命题公式集,$\mathcal{B}$ 为任意一个命题公式,$\varPhi$ 与 $\mathcal{B}$ 具有语义推出关系。

$\varPhi$ 与 $\mathcal{B}$ 具有导出关系。即

$$\varPhi \vDash \mathcal{B} \Rightarrow \varPhi \vdash \mathcal{B}$$

命题 107 设 $\varPhi$ 为任意一个命题公式集,$\mathcal{B}$ 为任意一个命题公式,$\varPhi$ 与 $\mathcal{B}$ 具有导出关系。

$\varPhi$ 与 $\mathcal{B}$ 具有语义推出关系。即

$$\varPhi \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \varPhi \vDash \mathcal{B}$$

命题 108 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有语义推出关系。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有导出关系。

$$\mathcal{A} \vDash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$$

命题 109 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有导出关系。

$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有语义推出关系。即

$$\mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \mathcal{B}$$

命题 110 设 $\mathit{\Phi}$ 为任意一个谓词公式集,$\mathcal{B}$ 为任意一个谓词公式,$\mathit{\Phi}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有语义推出关系。

$\mathit{\Phi}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有导出关系。

$$\mathit{\Phi} \vDash \mathcal{B} \Rightarrow \mathit{\Phi} \vdash \mathcal{B}$$

命题 111 设 $\mathit{\Phi}$ 为任意一个谓词公式集,$\mathcal{B}$ 为任意一个谓词公式,$\mathit{\Phi}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有导出关系。

$\mathit{\Phi}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有语义推出关系。

$$\mathit{\Phi} \vdash \mathcal{B} \Rightarrow \mathit{\Phi} \vDash \mathcal{B}$$

命题 112 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个恒真命题公式。

$\mathcal{A}$ 是命题级形式定理。即

$$\vDash \mathcal{A} \Rightarrow \vdash \mathcal{A}$$

命题 113 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题级形式定理。

$\mathcal{A}$ 是恒真命题公式。即

$$\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \vDash \mathcal{A}$$

命题 114 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个恒真谓词公式。

$\mathcal{A}$ 是谓词级形式定理。即

$$\vDash \mathcal{A} \Rightarrow \vdash \mathcal{A}$$

命题 115 设 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词级形式定理。

$\mathcal{A}$ 是恒真谓词公式。即

$$\vdash \mathcal{A} \Rightarrow \vDash \mathcal{A}$$

命题 116 $\{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \to \mathcal{C}, \mathcal{B} \to \mathcal{C}\} \vdash \mathcal{C}$. 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 均为命题公式。

证明

1	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$			
2	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$			
3	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$			want $\mathcal{C}$
4		$\neg\mathcal{C}$		for *reductio*
5			$\mathcal{A}$	for *reductio*
6			$\mathcal{C}$	$\to$E 2, 5
7			$\neg\mathcal{C}$	R 4
8		$\neg\mathcal{A}$		$\neg$I 5–7
9			$\mathcal{B}$	for *reductio*
10			$\mathcal{C}$	$\to$E 3, 9
11			$\neg\mathcal{C}$	R 4
12		$\neg\mathcal{B}$		$\neg$I 9–11
13		$\mathcal{B}$		$\vee$E 1, 8
14	$\mathcal{C}$			$\neg$E 4–13

命题 117 $\{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \to \mathcal{C}, \mathcal{B} \to \mathcal{C}\} \vdash \mathcal{C}$. 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 均为谓词公式。

证明 与命题116的证明相同。

命题 118 $\{\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \neg\mathcal{B}\} \vdash \neg\mathcal{A}$. 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$		
2	$\neg\mathcal{B}$		want $\neg\mathcal{A}$
3		$\mathcal{A}$	for *reductio*
4		$\mathcal{B}$	$\to$E 1, 3
5		$\neg\mathcal{B}$	R 2
6	$\neg\mathcal{A}$		$\neg$I 3–5

命题 119 $\{\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \neg\mathcal{B}\} \vdash \neg\mathcal{A}$. 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题118的证明相同。

命题 120 $\{\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{C}\} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{C}$. 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
2	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	want $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$
3	$\mathcal{A}$	want $\mathcal{C}$
4	$\mathcal{B}$	$\to$E 1, 3
5	$\mathcal{C}$	$\to$E 2, 4
6	$\mathcal{A} \to \mathcal{C}$	$\to$I 3–5

命题 121 $\{\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{C}\} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{C}$. 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题120的证明相同。

命题 122 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题公式,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有逻辑等价关系, $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有证明等价关系。

命题 123 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个命题公式,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有证明等价关系, $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有逻辑等价关系。

命题 124 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有逻辑等价关系, $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有证明等价关系。

命题 125 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为任意两个谓词公式,$\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有证明等价关系, $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 具有逻辑等价关系。

命题 126 设 $\mathcal{A}$ 为含子公式 $\mathcal{B}$ 的命题公式, 用命题公式 $\mathcal{C}$ 替换 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{B}$ 得到命题公式 $\mathcal{D}$. 如果 $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, 那么 $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{D}$.

命题 127 设 $\mathcal{A}$ 为含子公式 $\mathcal{B}$ 的谓词公式, 用合式公式 $\mathcal{C}$ 替换 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{B}$ 得到谓词公式 $\mathcal{D}$. 如果 $\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$, 那么 $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{D}$.

命题 128 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\mathcal{A} \lor \mathcal{B}$			
2		$\neg(\mathcal{B} \lor \mathcal{A})$		
3			$\mathcal{A}$	
4			$\mathcal{B} \lor \mathcal{A}$	$\lor$I 3
5			$\neg(\mathcal{B} \lor \mathcal{A})$	R 2
6		$\neg\mathcal{A}$		$\neg$I 2–5
7			$\neg\mathcal{A}$	
8			$\mathcal{B}$	$\lor$E 1, 7
9			$\mathcal{B} \lor \mathcal{A}$	$\lor$I 8
10			$\neg(\mathcal{B} \lor \mathcal{A})$	R 2
11		$\mathcal{A}$		$\neg$E 7–10
12		$\neg\mathcal{A}$		R 6
13	$\mathcal{B} \lor \mathcal{A}$			$\neg$E 2–12

1	$\mid \mathcal{B} \lor \mathcal{A}$	
2	$\mid \mid \neg(\mathcal{A} \lor \mathcal{B})$	
3	$\mid \mid \mid \mathcal{B}$	
4	$\mid \mid \mid \mathcal{A} \lor \mathcal{B}$	$\lor$I 3
5	$\mid \mid \mid \neg(\mathcal{A} \lor \mathcal{B})$	R 2
6	$\mid \mid \neg\mathcal{B}$	$\neg$I 2–5
7	$\mid \mid \mid \neg\mathcal{B}$	
8	$\mid \mid \mid \mathcal{A}$	$\lor$E 1, 7
9	$\mid \mid \mid \mathcal{A} \lor \mathcal{B}$	$\lor$I 8
10	$\mid \mid \mid \neg(\mathcal{A} \lor \mathcal{B})$	R 2
11	$\mid \mid \mathcal{B}$	$\neg$E 7–10
12	$\mid \mid \neg\mathcal{B}$	R 6
13	$\mid \mathcal{A} \lor \mathcal{B}$	$\neg$E 2–12

命题 129 $\mathcal{A} \lor \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \lor \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题128的证明相同。

命题 130 $\mathcal{A} \land \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \land \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\mid \mathcal{A} \land \mathcal{B}$	
2	$\mid \mathcal{A}$	$\land$E 1
3	$\mid \mathcal{B}$	$\land$E 1
4	$\mid \mathcal{B} \land \mathcal{A}$	$\land$I 3, 2

1	$\mid \mathcal{B} \land \mathcal{A}$	
2	$\mid \mathcal{B}$	$\land$E 1
3	$\mid \mathcal{A}$	$\land$E 1
4	$\mid \mathcal{A} \land \mathcal{B}$	$\land$I 3, 2

命题 131 $\mathcal{A} \land \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \land \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题130的证明相同。

命题 132 $(\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \lor \mathcal{C})$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

$$\begin{array}{rll}
1 & \vert\ \underline{(\mathcal{A}\lor\mathcal{B})\lor\mathcal{C}} & \\
2 & \vert\ \vert\ \underline{\neg(\mathcal{A}\lor(\mathcal{B}\lor\mathcal{C}))} & \\
3 & \vert\ \vert\ \vert\ \underline{\mathcal{A}} & \\
4 & \vert\ \vert\ \vert\ \mathcal{A}\lor(\mathcal{B}\lor\mathcal{C}) & \lor\text{I } 3 \\
5 & \vert\ \vert\ \vert\ \neg(\mathcal{A}\lor(\mathcal{B}\lor\mathcal{C})) & \text{R } 2 \\
6 & \vert\ \vert\ \neg\mathcal{A} & \neg\text{I } 3\text{–}5 \\
7 & \vert\ \vert\ \vert\ \underline{\mathcal{B}} & \\
8 & \vert\ \vert\ \vert\ \mathcal{B}\lor\mathcal{C} & \lor\text{I } 7 \\
9 & \vert\ \vert\ \vert\ \mathcal{A}\lor(\mathcal{B}\lor\mathcal{C}) & \lor\text{I } 8 \\
10 & \vert\ \vert\ \vert\ \neg(\mathcal{A}\lor(\mathcal{B}\lor\mathcal{C})) & \text{R } 2 \\
11 & \vert\ \vert\ \neg\mathcal{B} & \neg\text{I } 7\text{–}10 \\
12 & \vert\ \vert\ \vert\ \underline{\mathcal{C}} & \\
13 & \vert\ \vert\ \vert\ \mathcal{B}\lor\mathcal{C} & \lor\text{I } 12 \\
14 & \vert\ \vert\ \vert\ \mathcal{A}\lor(\mathcal{B}\lor\mathcal{C}) & \lor\text{I } 13 \\
15 & \vert\ \vert\ \vert\ \neg(\mathcal{A}\lor(\mathcal{B}\lor\mathcal{C})) & \text{R } 2 \\
16 & \vert\ \vert\ \neg\mathcal{C} & \neg\text{I } 12\text{–}15 \\
17 & \vert\ \vert\ \mathcal{A}\lor\mathcal{B} & \lor\text{E } 1,\ 16 \\
18 & \vert\ \vert\ \mathcal{B} & \lor\text{E } 6,\ 17 \\
19 & \vert\ \vert\ \neg\mathcal{B} & \text{R } 11 \\
20 & \vert\ \mathcal{A}\lor(\mathcal{B}\lor\mathcal{C}) & \neg\text{E } 2,\ 19
\end{array}$$

1	$\vert\ \mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \lor \mathcal{C})$	
2	$\vert\quad \vert\ \neg((\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C})$	
3	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \mathcal{A}$	
4	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \mathcal{A} \lor \mathcal{B}$	$\lor$I 3
5	$\vert\quad \vert\quad \vert\ (\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C}$	$\lor$I 4
6	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \neg((\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C})$	R 2
7	$\vert\quad \vert\ \neg\mathcal{A}$	$\neg$I 3–6
8	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \mathcal{B}$	
9	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \mathcal{A} \lor \mathcal{B}$	$\lor$I 8
10	$\vert\quad \vert\quad \vert\ (\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C}$	$\lor$I 9
11	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \neg((\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C})$	R 2
12	$\vert\quad \vert\ \neg\mathcal{B}$	$\neg$I 8–11
13	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \mathcal{C}$	
14	$\vert\quad \vert\quad \vert\ (\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C}$	$\lor$I 13
15	$\vert\quad \vert\quad \vert\ \neg((\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C})$	R 2
16	$\vert\quad \vert\ \neg\mathcal{C}$	$\neg$I 13–15
17	$\vert\quad \vert\ \mathcal{B} \lor \mathcal{C}$	$\lor$E 1, 7
18	$\vert\quad \vert\ \mathcal{C}$	$\lor$E 12, 17
19	$\vert\quad \vert\ \neg\mathcal{C}$	R 16
20	$\vert\ (\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C}$	$\neg$E 2–19

命题 133 $(\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \lor \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \lor \mathcal{C})$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题132的证明相同。

命题 134 $(\mathcal{A} \land \mathcal{B}) \land \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \land (\mathcal{B} \land \mathcal{C})$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$	
2	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\wedge$E 1
3	$\mathcal{C}$	$\wedge$E 1
4	$\mathcal{A}$	$\wedge$E 2
5	$\mathcal{B}$	$\wedge$E 2
6	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	$\wedge$I 3, 5
7	$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	$\wedge$I 4, 6

1	$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	
2	$\mathcal{A}$	$\wedge$E 1
3	$\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	$\wedge$E 1
4	$\mathcal{B}$	$\wedge$E 2
5	$\mathcal{C}$	$\wedge$E 2
6	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\wedge$I 2, 4
7	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C}$	$\wedge$I 5, 6

命题 135 $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$，其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题134的证明相同。

命题 136 $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$，其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	
2	$\quad \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	
3	$\quad\quad \neg\mathcal{A}$	
4	$\quad\quad \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	$\vee$E 1, 3
5	$\quad\quad \mathcal{B}$	$\wedge$E 4
6	$\quad\quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\vee$I 5
7	$\quad\quad \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	R 2
8	$\quad \mathcal{A}$	$\neg$E 3–7
9	$\quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\vee$I 8
10	$\quad \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	R 2
11	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\neg$E 2–10
12	$\quad \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$	
13	$\quad\quad \neg\mathcal{A}$	
14	$\quad\quad \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$	$\vee$E 1, 3
15	$\quad\quad \mathcal{C}$	$\wedge$E 14
16	$\quad\quad \mathcal{A} \vee \mathcal{C}$	$\vee$I 15
17	$\quad\quad \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$	R 2
18	$\quad \mathcal{A}$	$\neg$E 13–17
19	$\quad \mathcal{A} \vee \mathcal{C}$	$\vee$I 18
20	$\quad \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	R 12
21	$\mathcal{A} \vee \mathcal{C}$	$\neg$E 12–20
22	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$	$\wedge$I 11, 21

1	$\mid (\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \land (\mathcal{A} \lor \mathcal{C})$	
2	$\mid \mathcal{A} \lor \mathcal{B}$	∧E 1
3	$\mid \mathcal{A} \lor \mathcal{C}$	∧E 1
4	$\mid \; \mid \neg(\mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \land \mathcal{C}))$	
5	$\mid \; \mid \; \mid \neg\mathcal{A}$	
6	$\mid \; \mid \; \mid \mathcal{B}$	∨E 2, 5
7	$\mid \; \mid \; \mid \mathcal{C}$	∨E 3, 5
8	$\mid \; \mid \; \mid \mathcal{B} \land \mathcal{C}$	∧I 6, 7
9	$\mid \; \mid \; \mid \mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \land \mathcal{C})$	∨I 8
10	$\mid \; \mid \; \mid \neg(\mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \land \mathcal{C}))$	R 4
11	$\mid \; \mid \mathcal{A}$	¬E 5–10
12	$\mid \; \mid \mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \land \mathcal{C})$	∨I 11
13	$\mid \; \mid \neg(\mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \land \mathcal{C}))$	R 4
14	$\mid \mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \land \mathcal{C})$	¬E 4–13

命题 137 $\mathcal{A} \lor (\mathcal{B} \land \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \lor \mathcal{B}) \land (\mathcal{A} \lor \mathcal{C})$，其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题136的证明相同。

命题 138 $\mathcal{A} \land (\mathcal{B} \lor \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \land \mathcal{B}) \lor (\mathcal{A} \land \mathcal{C})$，其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\vert\ \underline{\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})}$	
2	$\vert\ \mathcal{A}$	∧E 1
3	$\vert\ \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$	∧E 1
4	$\vert\ \vert\ \underline{\neg((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}))}$	
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \underline{\mathcal{B}}$	
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	∧I 2, 5
7	$\vert\ \vert\ \vert\ (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	∨I 6
8	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}))$	R 4
9	$\vert\ \vert\ \neg\mathcal{B}$	¬I 5–8
10	$\vert\ \vert\ \vert\ \underline{\mathcal{C}}$	
11	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{C}$	∧I 2, 10
12	$\vert\ \vert\ \vert\ (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	∨I 11
13	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}))$	R 4
14	$\vert\ \vert\ \neg\mathcal{C}$	¬I 10–13
15	$\vert\ \vert\ \mathcal{C}$	∨E 3, 9
16	$\vert\ (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$	¬E 4–15

1	$(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\vee(\mathcal{A}\wedge\mathcal{C})$	
2	$\neg(\mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C}))$	
3	$\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$	
4	$\mathcal{A}$	$\wedge$E 3
5	$\mathcal{B}$	$\wedge$E 3
6	$\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$	$\vee$I 5
7	$\mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})$	$\wedge$I 4, 6
8	$\neg(\mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C}))$	R 2
9	$\neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})$	$\neg$I 3–8
10	$\mathcal{A}\wedge\mathcal{C}$	
11	$\mathcal{A}$	$\wedge$E 10
12	$\mathcal{C}$	$\wedge$E 10
13	$\mathcal{B}\vee\mathcal{C}$	$\vee$I 12
14	$\mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})$	$\wedge$I 11, 13
15	$\neg(\mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C}))$	R 2
16	$\neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{C})$	$\neg$I 10–15
17	$\mathcal{A}\wedge\mathcal{C}$	$\vee$E 1, 9
18	$\mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})$	$\neg$E 2–17

命题 139 $\mathcal{A}\wedge(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})\Leftrightarrow(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B})\vee(\mathcal{A}\wedge\mathcal{C})$, 其中 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题138的证明相同。

命题 140 $\neg(\mathcal{A}\vee\mathcal{B})\Leftrightarrow\neg\mathcal{A}\wedge\neg\mathcal{B}$, 其中 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	
2	$\mid \mathcal{A}$	
3	$\mid \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\vee$I 2
4	$\mid \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	R 1
5	$\neg\mathcal{A}$	$\neg$I 2–4
6	$\mid \mathcal{B}$	
7	$\mid \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\vee$I 6
8	$\mid \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	R 1
9	$\neg\mathcal{B}$	$\neg$I 6–8
10	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	$\wedge$I 5, 9

1	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	
2	$\neg\mathcal{A}$	$\wedge$E 1
3	$\neg\mathcal{B}$	$\wedge$E 1
4	$\mid \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
5	$\mid \mathcal{B}$	$\vee$E 2, 4
6	$\mid \neg\mathcal{B}$	R 3
7	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	$\neg$I 4–6

命题 141 $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$，其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题140的证明相同。

命题 142 $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$，其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\vert\ \underline{\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})}$	
2	$\vert\ \vert\ \underline{\neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})}$	
3	$\vert\ \vert\ \vert\ \underline{\neg\mathcal{A}}$	
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	$\vee$I 3
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$	R 2
6	$\vert\ \vert\ \mathcal{A}$	$\neg$E 3–5
7	$\vert\ \vert\ \vert\ \underline{\neg\mathcal{B}}$	
8	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	$\vee$I 7
9	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$	R 2
10	$\vert\ \vert\ \mathcal{B}$	$\neg$E 7–9
11	$\vert\ \vert\ \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\wedge$I 6, 10
12	$\vert\ \vert\ \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	R 1
13	$\vert\ \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	$\neg$E 2–12

1	$\vert\ \underline{\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}}$	
2	$\vert\ \vert\ \underline{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}}$	
3	$\vert\ \vert\ \mathcal{A}$	$\wedge$E 2
4	$\vert\ \vert\ \vert\ \underline{\neg\mathcal{A}}$	
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \neg\mathcal{A}$	R 4
6	$\vert\ \vert\ \vert\ \mathcal{A}$	R 3
7	$\vert\ \vert\ \neg\neg\mathcal{A}$	$\neg$I 4–6
8	$\vert\ \vert\ \neg\mathcal{B}$	$\vee$E 1, 7
9	$\vert\ \vert\ \mathcal{B}$	$\wedge$E 2
10	$\vert\ \neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$\neg$I 2–9

命题 143 $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$，其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题142的证明相同。

命题 144 $\neg\neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}$ 为任意一个命题公式。

证明

1	$\mid\ \neg\neg\mathcal{A}$	
2	$\mid\ \mid\ \neg\mathcal{A}$	
3	$\mid\ \mid\ \neg\mathcal{A}$	R 2
4	$\mid\ \mid\ \neg\neg\mathcal{A}$	R 1
5	$\mid\ \mathcal{A}$	¬E 2–4

1	$\mid\ \mathcal{A}$	
2	$\mid\ \mid\ \neg\mathcal{A}$	
3	$\mid\ \mid\ \neg\mathcal{A}$	R 2
4	$\mid\ \mid\ \mathcal{A}$	R 1
5	$\mid\ \neg\neg\mathcal{A}$	¬I 2–4

命题 145 $\neg\neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}$ 为任意一个谓词公式。

证明 与命题144的证明相同。

命题 146 $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\mid\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	
2	$\mid\ \mid\ \neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	
3	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\mathcal{A}$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	∨I 3
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	R 2
6	$\mid\ \mid\ \mathcal{A}$	¬E 3–5
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mathcal{B}$	
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	∨I 7
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	R 2
10	$\mid\ \mid\ \neg\mathcal{B}$	¬I 7–9
11	$\mid\ \mid\ \mathcal{B}$	→E 1, 6
12	$\mid\ \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	¬E 2–11

1	$\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	
2	$\vert\ \mathcal{A}$	
3	$\vert\ \vert\ \neg\mathcal{A}$	
4	$\vert\ \vert\ \neg\mathcal{A}$	R 3
5	$\vert\ \vert\ \mathcal{A}$	R 2
6	$\vert\ \neg\neg\mathcal{A}$	¬I 3–5
7	$\vert\ \mathcal{B}$	∨E 1, 6
8	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	→I 2–7

命题 147 $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题146的证明相同。

命题 148 $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	
2	$\vert\ \mathcal{A}$	
3	$\vert\ \mathcal{B}$	↔E 1, 2
4	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	→I 2–3
5	$\vert\ \mathcal{B}$	
6	$\vert\ \mathcal{A}$	↔E 1, 5
7	$\mathcal{B} \to \mathcal{A}$	→I 5–6
8	$(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$	∧I 4, 7

1	$(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$	
2	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	$\wedge$E 1
3	$\mathcal{B} \to \mathcal{A}$	$\wedge$E 1
4	$\mathcal{A}$	
5	$\mathcal{B}$	$\to$E 2, 4
6	$\mathcal{B}$	
7	$\mathcal{A}$	$\to$E 3, 6
8	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	$\leftrightarrow$I 4–5, 6–7

命题 149 $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \to \mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题148的证明相同。

命题 150 $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为命题公式。

证明

1	$P \to Q$	
2	$\neg Q$	
3	P	
4	Q	$\to$E 1, 3
5	$\neg Q$	R 2
6	$\neg P$	$\neg$I 3–5
7	$\neg Q \to \neg P$	$\to$I 2–6

1	$\neg Q \to \neg P$	
2	P	
3	$\neg Q$	
4	$\neg P$	$\to$E 1, 3
5	P	R 2
6	Q	$\neg$E 3–5
7	$P \to Q$	$\to$I 2–6

命题 151 $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg\mathcal{B} \to \neg\mathcal{A}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为谓词公式。

证明 与命题150的证明相同。

命题 152 $\neg\forall\chi\mathcal{A}[\chi] \Leftrightarrow \exists\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\mid \neg\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	
2	$\mid \neg\mathcal{A}[c]$	∀E 1
3	$\mid \exists\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$	∃I 2

1	$\mid \exists\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$	
2	$\mid \quad \mid \neg\mathcal{A}[c]$	
3	$\mid \quad \mid \quad \mid \forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	
4	$\mid \quad \mid \quad \mid \mathcal{A}[c]$	∀E 3
5	$\mid \quad \mid \quad \mid \neg\mathcal{A}[c]$	R 2
6	$\mid \quad \mid \neg\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	¬I 3–5
7	$\mid \neg\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	∃E 1, 2–6

命题 153 $\forall\chi\neg\mathcal{A}[\chi] \Leftrightarrow \neg\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\mid \forall\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$	
2	$\mid \quad \mid \exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	
3	$\mid \quad \mid \quad \mid \mathcal{A}[c]$	
4	$\mid \quad \mid \quad \mid \quad \mid \forall\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$	
5	$\mid \quad \mid \quad \mid \quad \mid \neg\mathcal{A}[c]$	∀E 4
6	$\mid \quad \mid \quad \mid \quad \mid \mathcal{A}[c]$	R 3
7	$\mid \quad \mid \quad \mid \neg\forall\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$	¬I 4–6
8	$\mid \quad \mid \neg\forall\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$	∃E 2, 3–7
9	$\mid \quad \mid \forall\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$	R 1
10	$\mid \neg\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	¬I 2–9

1	$\neg\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	
2	$\vert\ \neg\forall\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$	
3	$\vert\ \mathcal{A}[c]$	$\forall$E 2
4	$\vert\ \exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	$\exists$I 3
5	$\vert\ \neg\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	R 1
6	$\forall\chi\neg\mathcal{A}[\chi]$	$\neg$E 2–5

命题 154 $\forall\chi(\mathcal{A}[\chi]\wedge\mathcal{B}[\chi])\Leftrightarrow\forall\chi\mathcal{A}[\chi]\wedge\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi],\mathcal{B}[\chi]$ 均表示含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\forall\chi(\mathcal{A}[\chi]\wedge\mathcal{B}[\chi])$	
2	$\mathcal{A}[c]\wedge\mathcal{B}[c]$	$\forall$E 1
3	$\mathcal{A}[c]$	$\wedge$E 2
4	$\mathcal{B}[c]$	$\wedge$E 2
5	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	$\forall$I 3
6	$\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	$\forall$I 4
7	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi]\wedge\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	$\wedge$I 5, 6

1	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi]\wedge\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	
2	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	$\wedge$E 1
3	$\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	$\wedge$E 1
4	$\mathcal{A}[c]$	$\forall$E 2
5	$\mathcal{B}[c]$	$\forall$E 3
6	$\mathcal{A}[c]\wedge\mathcal{B}[c]$	$\wedge$I 4, 5
7	$\forall\chi(\mathcal{A}[\chi]\wedge\mathcal{B}[\chi])$	$\forall$I 6

命题 155 $\exists\chi(\mathcal{A}[\chi]\vee\mathcal{B}[\chi])\Leftrightarrow\exists\chi\mathcal{A}[\chi]\vee\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi],\mathcal{B}[\chi]$ 均表示含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\mid \underline{\exists\chi(\mathcal{A}[\chi]\lor\mathcal{B}[\chi])}$	
2	$\mid\ \mid \underline{\mathcal{A}[c]\lor\mathcal{B}[c]}$	
3	$\mid\ \mid\ \mid \underline{\neg(\exists\chi\mathcal{A}[\chi]\lor\exists\chi\mathcal{B}[\chi])}$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \underline{\exists\chi\mathcal{A}[\chi]}$	
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \exists\chi\mathcal{A}[\chi]\lor\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∨I 4
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \neg(\exists\chi\mathcal{A}[\chi]\lor\exists\chi\mathcal{B}[\chi])$	R 3
7	$\mid\ \mid\ \mid \neg\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	¬I 4–6
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \underline{\exists\chi\mathcal{B}[\chi]}$	
9	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \exists\chi\mathcal{A}[\chi]\lor\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∨I 8
10	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \neg(\exists\chi\mathcal{A}[\chi]\lor\exists\chi\mathcal{B}[\chi])$	R 3
11	$\mid\ \mid\ \mid \neg\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	¬I 8–10
12	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \underline{\neg\mathcal{A}[c]}$	
13	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \mathcal{B}[c]$	∨E 2, 12
14	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∃I 13
15	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid \neg\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	R 11
16	$\mid\ \mid\ \mid \mathcal{A}[c]$	¬E 12–15
17	$\mid\ \mid\ \mid \exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	∃I 16
18	$\mid\ \mid\ \mid \neg\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	R 11
19	$\mid\ \mid \exists\chi\mathcal{A}[\chi]\lor\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	¬E 3–18
20	$\mid \exists\chi\mathcal{A}[\chi]\lor\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∃E 1, 2–19

1	$\exists x\mathcal{A}[x] \vee \exists x\mathcal{B}[x]$	
2	$\quad \exists x\mathcal{A}[x]$	
3	$\quad\quad \mathcal{A}[c]$	
4	$\quad\quad \mathcal{A}[c] \vee \mathcal{B}[c]$	$\vee$I 3
5	$\quad\quad \exists x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\exists$I 4
6	$\quad \exists x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\exists$E 2, 3–5
7	$\exists x\mathcal{A}[x] \to \exists x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\to$I 2–6
8	$\quad \exists x\mathcal{B}[x]$	
9	$\quad\quad \mathcal{B}[c]$	
10	$\quad\quad \mathcal{A}[c] \vee \mathcal{B}[c]$	$\vee$I 9
11	$\quad\quad \exists x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\exists$I 10
12	$\quad \exists x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\exists$E 8, 9–11
13	$\exists x\mathcal{A}[x] \to \exists x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\to$I 8–12
14	$\exists x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	p 1, 7, 13

命题 156 $\forall x(\mathcal{A}[\cancel{x}] \to \mathcal{B}[x]) \Leftrightarrow \mathcal{A}[\cancel{x}] \to \forall x\mathcal{B}[x]$, 其中 $\mathcal{A}[\cancel{x}]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是不含自由变元符号 x 的合式公式, $\mathcal{B}[x]$ 表示 $\mathcal{B}$ 是含自由变元符号 x 的合式公式。

证明

1	$\forall x(\mathcal{A}[\cancel{x}] \to \mathcal{B}[x])$	
2	$\mathcal{A}[\cancel{x}] \to \mathcal{B}[c]$	$\forall$E 1
3	$\quad \mathcal{A}[\cancel{x}]$	
4	$\quad \mathcal{B}[c]$	$\to$E 2, 3
5	$\quad \forall x\mathcal{B}[x]$	$\forall$I 4
6	$\mathcal{A}[\cancel{x}] \to \forall x\mathcal{B}[x]$	$\to$I 3–5

1	$\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	
2	$\mathcal{A}[\cancel{\chi}]$	
3	$\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	$\to$E 1, 2
4	$\mathcal{B}[c]$	$\forall$E 3
5	$\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \mathcal{B}[c]$	$\to$I 2–4
6	$\forall\chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \mathcal{B}[\chi])$	$\forall$I 5

命题 157 $\forall\chi(\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]) \Leftrightarrow \exists\chi\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是含自由变元符号 χ 的合式公式, $\mathcal{B}[\cancel{\chi}]$ 表示 $\mathcal{B}$ 是不含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\forall\chi(\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}])$	
2	$\mathcal{A}[c] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	$\forall$E 1
3	$\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	
4	$\mathcal{A}[c]$	
5	$\mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	$\to$E 2, 4
6	$\mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	$\exists$E 3, 4–5
7	$\exists\chi\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	$\to$I 3–6

1	$\exists\chi\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	
2	$\mathcal{A}[c]$	
3	$\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	$\exists$I 2
4	$\mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	$\to$E 1, 3
5	$\mathcal{A}[c] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	$\to$I 2–4
6	$\forall\chi(\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}])$	$\forall$I 5

命题 158 $\exists\chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \mathcal{B}[\chi]) \Leftrightarrow \mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$, 其中 $\mathcal{A}[\cancel{\chi}]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是不含自由变元符号 χ 的合式公式, $\mathcal{B}[\chi]$ 表示 $\mathcal{B}$ 是含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\mid\; \underline{\exists\chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \mathcal{B}[\chi])}$	
2	$\mid\;\mid\; \underline{\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \mathcal{B}[c]}$	
3	$\mid\;\mid\;\mid\; \underline{\mathcal{A}[\cancel{\chi}]}$	
4	$\mid\;\mid\;\mid\; \mathcal{B}[c]$	→E 2, 3
5	$\mid\;\mid\;\mid\; \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∃I 4
6	$\mid\;\mid\; \mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	→E 3–5
7	$\mid\; \mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∃E 1, 2–6

1	$\mid\; \underline{\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \exists\chi\mathcal{B}[\chi]}$	
2	$\mid\;\mid\; \underline{\neg\exists\chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \mathcal{B}[\chi])}$	
3	$\mid\;\mid\; \forall\chi\neg(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \mathcal{B}[\chi])$	p
4	$\mid\;\mid\; \neg(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \mathcal{B}[c])$	∀E 3
5	$\mid\;\mid\; \neg(\neg\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \vee \mathcal{B}[c])$	
6	$\mid\;\mid\; \mathcal{A}[\cancel{\chi}] \wedge \neg\mathcal{B}[c]$	
7	$\mid\;\mid\; \mathcal{A}[\cancel{\chi}]$	∧E 6
8	$\mid\;\mid\; \neg\mathcal{B}[c]$	∧E 6
9	$\mid\;\mid\; \forall\chi\neg\mathcal{B}[\chi]$	∀I 9
10	$\mid\;\mid\; \neg\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	
11	$\mid\;\mid\; \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	→E 1, 7
12	$\mid\; \exists\chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \to \mathcal{B}[\chi])$	¬E 2, 11

命题 159 $\exists\chi(\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]) \Leftrightarrow \forall\chi\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是含自由变元符号 χ 的合式公式, $\mathcal{B}[\cancel{\chi}]$ 表示 $\mathcal{B}$ 是不含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\exists\chi(\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}])$			
2		$\mathcal{A}[c] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$		
3			$\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	
4			$\mathcal{A}[c]$	∀E 3
5			$\mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	→E 2, 4
6		$\forall\chi\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$		→I 3–5
7	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$			∃E 1, 2–6

1	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}]$		
2		$\neg\exists\chi(\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}])$	
3		$\forall\chi\neg(\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}])$	
4		$\neg(\mathcal{A}[c] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}])$	
5		$\neg(\neg\mathcal{A}[c] \lor \mathcal{B}[\cancel{\chi}])$	
6		$\mathcal{A}[c] \land \neg\mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	
7		$\mathcal{A}[c]$	∧E 6
8		$\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	∀I 7
9		$\mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	→E 1, 8
10		$\neg\mathcal{B}[\cancel{\chi}]$	∧E 6
11	$\exists\chi(\mathcal{A}[\chi] \to \mathcal{B}[\cancel{\chi}])$		¬E 2

命题 160 $\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \forall\chi\mathcal{B}[\chi] \Leftrightarrow \forall\chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \mathcal{B}[\chi])$, 其中 $\mathcal{A}[\cancel{\chi}]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是不含自由变元符号 χ 的合式公式, $\mathcal{B}[\chi]$ 表示 $\mathcal{B}$ 是含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \underline{\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \forall \chi \mathcal{B}[\chi]} & \\
2 & \mathcal{A}[\cancel{\chi}] & \land\text{E } 1 \\
3 & \forall \chi \mathcal{B}[\chi] & \land\text{E } 1 \\
4 & \mathcal{B}[c] & \forall\text{E } 3 \\
5 & \mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \mathcal{B}[c] & \land\text{I } 2,\ 4 \\
6 & \forall \chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \mathcal{B}[\chi]) & \forall\text{I } 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \underline{\forall \chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \mathcal{B}[\chi])} & \\
2 & \mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \mathcal{B}[c] & \forall\text{E } 1 \\
3 & \mathcal{A}[\cancel{\chi}] & \land\text{E } 2 \\
4 & \mathcal{B}[c] & \land\text{E } 2 \\
5 & \forall \chi \mathcal{B}[\chi] & \forall\text{I } 4 \\
6 & \mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \forall \chi \mathcal{B}[\chi] & \land\text{I } 3,\ 5
\end{array}$$

命题 161 $\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \exists \chi \mathcal{B}[\chi] \Leftrightarrow \exists \chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \mathcal{B}[\chi])$, 其中 $\mathcal{A}[\cancel{\chi}]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是不含自由变元符号 χ 的合式公式, $\mathcal{B}[\chi]$ 表示 $\mathcal{B}$ 是含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

$$\begin{array}{r|ll}
1 & \underline{\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \exists \chi \mathcal{B}[\chi]} & \\
2 & \mathcal{A}[\cancel{\chi}] & \land\text{E } 1 \\
3 & \exists \chi \mathcal{B}[\chi] & \land\text{E } 1 \\
4 & \quad \mid \underline{\mathcal{B}[c]} & \\
5 & \quad \mid \mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \mathcal{B}[c] & \land\text{I } 2,\ 4 \\
6 & \quad \mid \exists \chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \mathcal{B}[\chi]) & \exists\text{I } 5 \\
7 & \exists \chi(\mathcal{A}[\cancel{\chi}] \land \mathcal{B}[\chi]) & \exists\text{E } 3,\ 4\text{–}6
\end{array}$$

1	$\vert\ \exists\chi(\mathcal{A}[\not\chi]\land\mathcal{B}[\chi])$	
2	$\vert\ \vert\ \mathcal{A}[\not\chi]\land\mathcal{B}[c]$	
3	$\vert\ \vert\ \mathcal{A}[\not\chi]$	∧E 2
4	$\vert\ \vert\ \mathcal{B}[c]$	∧E 2
5	$\vert\ \vert\ \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∃I 4
6	$\vert\ \vert\ \mathcal{A}[\not\chi]\land\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∧I 3, 4
7	$\vert\ \mathcal{A}[\not\chi]\land\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∃E 1, 2–6

命题 162 $\mathcal{A}[\not\chi]\lor\forall\chi\mathcal{B}[\chi]\Leftrightarrow\forall\chi(\mathcal{A}[\not\chi]\lor\mathcal{B}[\chi])$, 其中 $\mathcal{A}[\not\chi]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是不含自由变元符号 χ 的合式公式, $\mathcal{B}[\chi]$ 表示 $\mathcal{B}$ 是含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\vert\ \mathcal{A}[\not\chi]\lor\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	
2	$\vert\ \vert\ \mathcal{A}[\not\chi]$	
3	$\vert\ \vert\ \mathcal{A}[\not\chi]\lor\mathcal{B}[c]$	∨I 2
4	$\vert\ \vert\ \forall\chi(\mathcal{A}[\not\chi]\lor\mathcal{B}[\chi])$	∀I 3
5	$\vert\ \mathcal{A}[\not\chi]\to\forall\chi(\mathcal{A}[\not\chi]\lor\mathcal{B}[\chi])$	→I 2–4
6	$\vert\ \vert\ \forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	
7	$\vert\ \vert\ \mathcal{B}[c]$	∀E 6
8	$\vert\ \vert\ \mathcal{A}[\not\chi]\lor\mathcal{B}[c]$	∨I 7
9	$\vert\ \vert\ \forall\chi(\mathcal{A}[\not\chi]\lor\mathcal{B}[\chi])$	∀I 8
10	$\vert\ \forall\chi\mathcal{B}[\chi]\to\forall\chi(\mathcal{A}[\not\chi]\lor\mathcal{B}[\chi])$	→I 6–9
11	$\vert\ \forall\chi(\mathcal{A}[\not\chi]\lor\mathcal{B}[\chi])$	p 1, 5, 10

1	$\forall\chi(\mathcal{A}[\not\chi] \vee \mathcal{B}[\chi])$	
2	$\mathcal{A}[\not\chi] \vee \mathcal{B}[c]$	∀E 1
3	$\mid\ \mathcal{A}[\not\chi]$	
4	$\mid\ \mathcal{A}[\not\chi] \vee \forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	∨I 3
5	$\mathcal{A}[\not x] \to (\mathcal{A}[\not x] \vee \forall\chi\mathcal{B}[\chi])$	→I 3–4
6	$\mid\ \mathcal{B}[c]$	
7	$\mid\ \forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	∀I 6
8	$\mid\ \mathcal{A}[\not\chi] \vee \forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	∨I 7
9	$\mathcal{B}[c] \to (\mathcal{A}[\not\chi] \vee \forall\chi\mathcal{B}[\chi])$	→I 6–8
10	$\mathcal{A}[\not\chi] \vee \forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	p 2, 5, 9

命题 163 $\mathcal{A}[\not\chi] \vee \exists\chi\mathcal{B}[\chi] \Leftrightarrow \exists\chi(\mathcal{A}[\not\chi] \vee \mathcal{B}[\chi])$, 其中 $\mathcal{A}[\not\chi]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是不含自由变元符号 χ 的合式公式, $\mathcal{B}[\chi]$ 表示 $\mathcal{B}$ 是含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\mathcal{A}[\not\chi] \vee \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	
2	$\mid\ \mathcal{A}[\not\chi]$	
3	$\mid\ \mathcal{A}[\not\chi] \vee \mathcal{B}[c]$	∨I 2
4	$\mid\ \exists\chi(\mathcal{A}[\not x] \vee \mathcal{B}[\chi])$	∃I 3
5	$\mathcal{A}[\not x] \to \exists\chi(\mathcal{A}[\not x] \vee \mathcal{B}[x])$	→I 2–4
6	$\mid\ \exists x\mathcal{B}[\chi]$	
7	$\mid\ \mid\ \mathcal{B}[c]$	
8	$\mid\ \mid\ \mathcal{A}[\not\chi] \vee \mathcal{B}[c]$	∨I 7
9	$\mid\ \mid\ \exists\chi(\mathcal{A}[\not x] \vee \mathcal{B}[\chi])$	∃I 8
10	$\mid\ \exists\chi(\mathcal{A}[\not\chi] \vee \mathcal{B}[\chi])$	∃E 6, 7–9
11	$\exists\chi\mathcal{B}[\chi] \to \exists\chi(\mathcal{A}[\not\chi] \vee \mathcal{B}[\chi])$	→I 6–10
12	$\exists\chi(\mathcal{A}[\not\chi] \vee \mathcal{B}[\chi])$	p 1, 5, 11

1	$\mid \exists x(\mathcal{A}[\cancel{x}] \vee \mathcal{B}[x])$	
2	$\mid \mid \mathcal{A}[\cancel{x}] \vee \mathcal{B}[c]$	
3	$\mid \mid \mid \mathcal{A}[\cancel{x}]$	
4	$\mid \mid \mid \mathcal{A}[\cancel{x}] \vee \exists x\mathcal{B}[x]$	∨I 3
5	$\mid \mid \mathcal{A}[\cancel{x}] \to (\mathcal{A}[\cancel{x}] \vee \exists x\mathcal{B}[x])$	→I 3–4
6	$\mid \mid \mid \mathcal{B}[c]$	
7	$\mid \mid \mid \exists x\mathcal{B}[x]$	∃I 6
8	$\mid \mid \mid \mathcal{A}[\cancel{x}] \vee \exists x\mathcal{B}[x]$	∨I 7
9	$\mid \mid \mathcal{B}[c] \to (\mathcal{A}[\cancel{x}] \vee \exists x\mathcal{B}[x])$	→I 6–8
10	$\mid \mid \mathcal{A}[\cancel{x}] \vee \exists x\mathcal{B}[x]$	p 2, 5, 9
11	$\mid \mathcal{A}[\cancel{x}] \vee \exists x\mathcal{B}[x]$	∃E 1, 2–10

命题 164 $\forall x\forall y\mathcal{A}[x,y] \Leftrightarrow \forall y\forall x\mathcal{A}[x,y]$, 其中 $\mathcal{A}[x,y]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是含自由变元符号 x 与 y 的合式公式。

证明

1	$\mid \forall x\forall y\mathcal{A}[x,y]$	
2	$\mid \forall y\mathcal{A}[a,y]$	∀E 1
3	$\mid \mathcal{A}[a,b]$	∀E 2
4	$\mid \forall x\mathcal{A}[x,b]$	∀I 3
5	$\mid \forall y\forall x\mathcal{A}[x,y]$	∀I 4

1	$\mid \forall y\forall x\mathcal{A}[x,y]$	
2	$\mid \forall x\mathcal{A}[x,b]$	∀E 1
3	$\mid \mathcal{A}[a,b]$	∀E 2
4	$\mid \forall y\mathcal{A}[a,y]$	∀I 3
5	$\mid \forall x\forall y\mathcal{A}[x,y]$	∀I 4

命题 165 $\exists x\exists y\mathcal{A}[x,y] \Leftrightarrow \exists y\exists x\mathcal{A}[x,y]$, 其中 $\mathcal{A}[x,y]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是含自由变元符号 x 与 y 的合式公式。

证明

$$\begin{array}{lll}
1 & \vert\ \underline{\exists x\exists y\mathcal{A}[x,y]} & \\
2 & \vert\quad \vert\ \underline{\exists y\mathcal{A}[a,y]} & \\
3 & \vert\quad \vert\quad \vert\ \underline{\mathcal{A}[a,b]} & \\
4 & \vert\quad \vert\quad \vert\ \exists x\mathcal{A}[x,b] & \exists\mathrm{I}\ 3 \\
5 & \vert\quad \vert\quad \vert\ \exists y\exists x\mathcal{A}[x,y] & \exists\mathrm{I}\ 4 \\
6 & \vert\quad \vert\ \exists y\exists x\mathcal{A}[x,y] & \exists\mathrm{E}\ 2,\ 3\text{–}5 \\
7 & \vert\ \exists y\exists x\mathcal{A}[x,y] & \exists\mathrm{E}\ 1,\ 2\text{–}6
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
1 & \vert\ \underline{\exists y\exists x\mathcal{A}[x,y]} & \\
2 & \vert\quad \vert\ \underline{\exists x\mathcal{A}[x,b]} & \\
3 & \vert\quad \vert\quad \vert\ \underline{\mathcal{A}[a,b]} & \\
4 & \vert\quad \vert\quad \vert\ \exists y\mathcal{A}[a,y] & \exists\mathrm{I}\ 3 \\
5 & \vert\quad \vert\quad \vert\ \exists x\exists y\mathcal{A}[x,y] & \exists\mathrm{I}\ 4 \\
6 & \vert\quad \vert\ \exists x\exists y\mathcal{A}[x,y] & \exists\mathrm{E}\ 2,\ 3\text{–}5 \\
7 & \vert\ \exists x\exists y\mathcal{A}[x,y] & \exists\mathrm{E}\ 1,\ 2\text{–}6
\end{array}$$

命题 166 $\exists x\mathcal{A}[x] \Leftrightarrow \exists y\mathcal{A}[y|x]$, 其中 $\mathcal{A}[x]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是含自由变元符号 x 的合式公式, $\mathcal{A}[y|x]$ 表示用 y 替换 $\mathcal{A}$ 中的所有 x 得到的合式公式。

证明

$$\begin{array}{lll}
1 & \vert\ \underline{\exists x\mathcal{A}[x]} & \\
2 & \vert\quad \vert\ \underline{\mathcal{A}[c]} & \\
3 & \vert\quad \vert\ \exists y\mathcal{A}[y] & \exists\mathrm{I}\ 2 \\
4 & \vert\ \exists y\mathcal{A}[y] & \exists\mathrm{E}\ 1,\ 2\text{–}3
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
1 & \vert\ \underline{\exists y\mathcal{A}[y]} & \\
2 & \vert\quad \vert\ \underline{\mathcal{A}[c]} & \\
3 & \vert\quad \vert\ \exists x\mathcal{A}[x] & \exists\mathrm{I}\ 2 \\
4 & \vert\ \exists x\mathcal{A}[x] & \exists\mathrm{E}\ 1,\ 2\text{–}3
\end{array}$$

命题 167 $\forall x\mathcal{A}[x] \Leftrightarrow \forall y\mathcal{A}[y|x]$, 其中 $\mathcal{A}[x]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是含自由变元符号 x 的合式公式, $\mathcal{A}[y|x]$ 表示用 y 替换 $\mathcal{A}$ 中的所有 x 得到的合式公式。

证明

1	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	
2	$\mathcal{A}[c]$	$\forall$E 1
3	$\forall y\mathcal{A}[y]$	$\forall$I 2

1	$\forall y\mathcal{A}[y]$	
2	$\mathcal{A}[c]$	$\forall$E 1
3	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	$\forall$I 2

命题 168 $\forall\chi(\mathcal{A}[\chi]\to\mathcal{B}[\chi])\Rightarrow\exists\chi\mathcal{A}[\chi]\to\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi],\mathcal{B}[\chi]$ 均表示含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\forall\chi(\mathcal{A}[\chi]\to\mathcal{B}[\chi])$	
2	$\mathcal{A}[c]\to\mathcal{B}[c]$	$\forall$E 1
3	$\quad\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	
4	$\quad\quad\mathcal{A}[c]$	
5	$\quad\quad\mathcal{B}[c]$	$\to$E 2, 4
6	$\quad\quad\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	$\exists$I 5
7	$\quad\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	$\exists$E 3, 4–6
8	$\exists\chi\mathcal{A}[\chi]\to\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	$\to$I 3–8

命题 169 $\forall\chi(\mathcal{A}[\chi]\to\mathcal{B}[\chi])\Rightarrow\forall\chi\mathcal{A}[\chi]\to\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi],\mathcal{B}[\chi]$ 均表示含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\forall\chi(\mathcal{A}[\chi]\to\mathcal{B}[\chi])$	
2	$\mathcal{A}[c]\to\mathcal{B}[c]$	$\forall$E 1
3	$\quad\forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	
4	$\quad\mathcal{A}[c]$	$\forall$E 3
5	$\quad\mathcal{B}[c]$	$\to$E 2, 4
6	$\quad\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	$\exists$I 5
7	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi]\to\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	$\to$I 3–6

命题 170 $\forall\chi(\mathcal{A}[\chi]\leftrightarrow\mathcal{B}[\chi])\Rightarrow\forall\chi\mathcal{A}[\chi]\leftrightarrow\forall\chi\mathcal{B}[\chi]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi],\mathcal{B}[\chi]$ 均表示含自由变元 χ 的合式公式。

证明

1	$\forall\chi(\mathcal{A}[\chi] \leftrightarrow \mathcal{B}[\chi])$	
2	$\mathcal{A}[c] \leftrightarrow \mathcal{B}[c]$	∀E 1
3	$\mathcal{A}[c] \rightarrow \mathcal{B}[c]$	↔E 2
4	$\mathcal{B}[c] \rightarrow \mathcal{A}[c]$	↔E 2
5	$\qquad \forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	
6	$\qquad \mathcal{A}[c]$	∀E 5
7	$\qquad \mathcal{B}[c]$	→E 2, 6
8	$\qquad \forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	∀I 7
9	$\qquad \forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	
10	$\qquad \mathcal{B}[c]$	∀E 9
11	$\qquad \mathcal{A}[c]$	→E 4, 10
12	$\qquad \forall\chi\mathcal{A}[\chi]$	∀I 11
13	$\forall\chi\mathcal{A}[\chi] \leftrightarrow \forall\chi\mathcal{B}[\chi]$	↔I 5–8, 9–12

命题 171 $\forall\chi(\mathcal{A}[\chi] \leftrightarrow \mathcal{B}[\chi]) \Rightarrow \exists\chi\mathcal{A}[\chi] \leftrightarrow \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$, 其中 $\mathcal{A}[\chi], \mathcal{B}[\chi]$ 均表示含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\forall\chi(\mathcal{A}[\chi] \leftrightarrow \mathcal{B}[\chi])$	
2	$\mathcal{A}[c] \leftrightarrow \mathcal{B}[c]$	∀E 1
3	$\mathcal{A}[c] \to \mathcal{B}[c]$	↔E 2
4	$\mathcal{B}[c] \to \mathcal{A}[c]$	↔E 2
5	$\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	
6	$\mathcal{A}[c]$	
7	$\mathcal{B}[c]$	→E 3, 6
8	$\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∃I 7
9	$\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	∃E 5, 6–8
10	$\exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	
11	$\mathcal{B}[c]$	
12	$\mathcal{A}[c]$	→E 4, 11
13	$\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	∃I 12
14	$\exists\chi\mathcal{A}[\chi]$	∃E 10, 11–13
15	$\exists\chi\mathcal{A}[\chi] \leftrightarrow \exists\chi\mathcal{B}[\chi]$	↔I 5–9, 10–14

命题 172 $\forall\chi\mathcal{A}[\chi] \vee \forall\chi\mathcal{B}[\chi] \Rightarrow \forall\chi(\mathcal{A}[\chi] \vee \mathcal{B}[\chi])$，其中 $\mathcal{A}[\chi], \mathcal{B}[\chi]$ 均表示含自由变元符号 χ 的合式公式。

证明

1	$\forall x\mathcal{A}[x] \vee \forall x\mathcal{B}[x]$	
2	$\quad \forall x\mathcal{A}[x]$	
3	$\quad \mathcal{A}[c]$	$\forall$E 2
4	$\quad \mathcal{A}[c] \vee \mathcal{B}[c]$	$\vee$I 3
5	$\quad \forall x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\forall$I 4
6	$\forall x\mathcal{A}[x] \to \forall x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\to$I 2–5
7	$\quad \forall x\mathcal{B}[x]$	
8	$\quad \mathcal{B}[c]$	$\forall$E 7
9	$\quad \mathcal{A}[c] \vee \mathcal{B}[c]$	$\vee$I 8
10	$\quad \forall x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\forall$I 9
11	$\forall x\mathcal{B}[x] \to \forall x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	$\to$I 7–10
12	$\forall x(\mathcal{A}[x] \vee \mathcal{B}[x])$	p 1, 6, 11

命题 173 $\exists x(\mathcal{A}[x] \wedge \mathcal{B}[x]) \Rightarrow \exists x\mathcal{A}[x] \wedge \exists x\mathcal{B}[x]$, 其中 $\mathcal{A}[x], \mathcal{B}[x]$ 均表示含自由变元符号 x 的合式公式。

证明

1	$\exists x(\mathcal{A}[x] \wedge \mathcal{B}[x])$	
2	$\quad \mathcal{A}[c] \wedge \mathcal{B}[c]$	
3	$\quad \mathcal{A}[c]$	$\wedge$E 2
4	$\quad \mathcal{B}[c]$	$\wedge$E 2
5	$\quad \exists x\mathcal{A}[x]$	$\exists$I 3
6	$\quad \exists x\mathcal{B}[x]$	$\exists$I 4
7	$\quad \exists x\mathcal{A}[x] \wedge \exists x\mathcal{B}[x]$	$\wedge$I 5, 6
8	$\exists x\mathcal{A}[x] \wedge \exists x\mathcal{B}[x]$	$\exists$E 1, 2–7

命题 174 $\exists x\forall y\mathcal{A}[x, y] \Rightarrow \forall y\exists x\mathcal{A}[x, y]$, 其中 $\mathcal{A}[x, y]$ 表示 $\mathcal{A}$ 是含自由变元符号 x 与 y 的合式公式。

证明

1	$\exists x \forall y \mathcal{A}[x, y]$	
2	$\forall y \mathcal{A}[a, y]$	
3	$\mathcal{A}[a, b]$	$\forall$E 2
4	$\exists x \mathcal{A}[x, b]$	$\exists$I 3
5	$\forall y \exists x \mathcal{A}[x, y]$	$\forall$I 4
6	$\forall y \exists x \mathcal{A}[x, y]$	$\exists$E 1, 2–5

命题 175 $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 均为命题公式。

证明

1	$\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$	
2	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	
3	$\mathcal{A}$	$\wedge$E 2
4	$\mathcal{B}$	$\wedge$E 2
5	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	$\to$E 1, 3
6	$\mathcal{C}$	$\to$E 4, 5
7	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$	$\to$I 2–6

1	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$	
2	$\mathcal{A}$	
3	$\mathcal{B}$	
4	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\wedge$I 2, 3
5	$\mathcal{C}$	$\to$E 1, 4
6	$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$	$\to$I 3–5
7	$\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C})$	$\to$I 2–6

命题 176 $\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \to \mathcal{C}$, 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 均为谓词公式。

证明 与命题175的证明相同。

Appendix A

基本推理规则

重复规则 (**R**)

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} & \\ & \mathcal{A} & \text{R } m \end{array}$$

合取引入规则 ($\wedge$**I**)

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} & \\ n & \mathcal{B} & \\ & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \wedge\text{I } m,\, n \end{array}$$

合取消去规则 ($\wedge$**E**)

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} & \\ & \mathcal{B} & \wedge\text{E } m \\ & \mathcal{B} & \wedge\text{E } m \end{array}$$

析取引入规则 ($\vee$**I**)

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A} & \\ & \mathcal{A} \vee \mathcal{B} & \vee\text{I } m \\ & \mathcal{B} \vee \mathcal{A} & \vee\text{I } m \end{array}$$

析取消去规则 (∨E)

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \lor \mathcal{B} & \\
n & \neg\mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} & \lor\text{E } m,\ n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \lor \mathcal{B} & \\
n & \neg\mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} & \lor\text{E } m,\ n
\end{array}$$

条件引入规则 (→I)

$$\begin{array}{r|l|ll}
m & & \mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
n & & \mathcal{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \to \mathcal{B}} & \to\text{I } m\text{–}n
\end{array}$$

条件消去规则 (→E)

$$\begin{array}{r|ll}
m & \mathcal{A} \to \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} & \to\text{E } m,\ n
\end{array}$$

双条件引入规则 (↔I)

$$\begin{array}{r|l|ll}
m & & \mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
n & & \mathcal{B} & \\
p & & \mathcal{B} & \\ \cline{3-3}
q & & \mathcal{A} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}} & \leftrightarrow\text{I } m\text{–}n,\ p\text{–}q
\end{array}$$

双条件消去规则 ($\leftrightarrow$E)

$$\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{B} & \\
 & \mathcal{A} & \leftrightarrow\text{E } m, n
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} & \\
n & \mathcal{A} & \\
 & \mathcal{B} & \leftrightarrow\text{E } m, n
\end{array}$$

否定引入规则 ($\neg$I)

$$\begin{array}{l|l|ll}
m & & \mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
n-1 & & \mathcal{B} & \\
n & & \neg\mathcal{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\neg\mathcal{A}} & \neg\text{I } m\text{–}n
\end{array}$$

否定消去规则 ($\neg$E)

$$\begin{array}{l|l|ll}
m & & \neg\mathcal{A} & \\ \cline{3-3}
n-1 & & \mathcal{B} & \\
n & & \neg\mathcal{B} & \\
 & \multicolumn{2}{l}{\mathcal{A}} & \neg\text{E } m\text{–}n
\end{array}$$

存在引入规则 ($\exists$I)

$$\begin{array}{l|ll}
m & \mathcal{A}[c] & \\
 & \exists\chi\mathcal{A}[\chi||c] & \exists\text{I } m
\end{array}$$

χ 替换一部分或所有 $\mathcal{A}$ 中的 c.

存在消去规则 (∃E)

$$\begin{array}{r|l} m & \exists\chi\mathcal{A}[\chi] \\ \begin{array}{r} n \\ p \end{array} & \quad \begin{array}{|l} \mathcal{A}[c|\chi] \\ \hline \mathcal{B} \end{array} \\ & \mathcal{B} \end{array}$$

个体常元符号 c 必须不出现在 $\exists\chi\mathcal{A}[\chi], \mathcal{B}$ 和其他任意未消除的假设中.

全称引入规则 (∀I)

$$\begin{array}{r|ll} m & \mathcal{A}[c] & \\ & \forall\chi\mathcal{A}[\chi|c] & \qquad \forall\text{I } m \end{array}$$

χ 替换所有 $\mathcal{A}$ 中的 c, c 必须不出现在任意未消除的假设中.

全称消去规则 (∀E)

$$\begin{array}{r|ll} m & \forall\chi\mathcal{A}[\chi] & \\ & \mathcal{A}[c|\chi] & \qquad \forall\text{E } m \end{array}$$

等词引入规则 (=I)

$$\begin{array}{|ll} c = c & \qquad =\text{I} \end{array}$$

等词消去规则 (=E)

$$\begin{array}{l|ll} m & c = d & \\ n & \mathcal{A} & \\ & \mathcal{A}[c||d] & =\text{E } m, n \\ & \mathcal{A}[d||c] & =\text{E } m, n \end{array}$$

用一个个体常元符号替换一部分或所有另一个个体常元符号.

Appendix B

注意事项

关于“谓词公式”

在形式逻辑或数理逻辑中，谓词公式一般指的是谓词逻辑中的合式公式，也就是说谓词公式中也可以有自由变元符号。为了与命题公式相对应，本书中将谓词公式限制为不含自由变元的合式公式，不含自由变元的合式公式称为闭合式公式或语句，也就是说，本书中的谓词公式事实上指的是闭合式公式或语句。

关于“命题级”和“谓词级”这两个前缀

有些概念的名称在命题逻辑中和在谓词逻辑中是相同的，为了不混淆，本书中加了“命题级”和“谓词级”这两个前缀区分它们。

关于“符号化键”

这个概念来自于这本参考书第一本参考书中的 symbolization key.，由于没有找到关于它的标准的汉语翻译，所以本书中暂且用有道词典按字面意思翻译成了符号化键，后面如果有更好的翻译再改过来。

参考文献

[1] P.D.Magnus. *An Introduction to Formal Logic*. 1.23. University at Albany, State University of New York, 2007.

[2] Peter Smith. *An Introduction to Formal Logic*. University of Cambridge, 2003.

[3] Cherie D'Mello William Weiss. *Fundamentals of Model Theory*. University of Toronto, 2015.

[4] 耿素云，屈婉玲，王捍贫. 离散数学教程. 北京大学出版社, 2002.