

Propagación de ondas acústico-gravitatorias en el interior Solar

FÍSICA SOLAR Y CLIMA ESPACIAL

Elena Arjona Gálvez


Master en Astrofísica. Universidad de La Laguna.

November 22, 2020

Introducción

Las oscilaciones solares fueron descubiertas en los años 60 por Leighton et al. usando una técnica de espectroheliografía. A partir de entonces, se empezó a estudiar el comportamiento de estas ondas y se establecieron las primeras teorías. No fue hasta los años 70 que se dieron cuenta del carácter discreto en la frecuencia de estas ondas y apareció la teoría de ondas atrapadas en el interior solar.

Gracias a las misiones espaciales, se han conseguido tomar medidas muy precisas de estas ondas atrapadas. Sin embargo, es necesario un modelo teórico para entender en profundidad la naturaleza de estas ondas. Lo primero que se le ocurre a uno es modelizar el Sol como un plasma autogravitante y aplicarle a este modelo la teoría de propagación de ondas. Las siguientes secciones se desarrollarán bajo esta premisa, la cual nos permitirá dar una breve explicación de la naturaleza de estas *ondas atrapadas*.

La primera parte de este trabajo consistirá en el desarrollo teórico de este modelo bajo unas condiciones concretas. Seguidamente, resolveremos el modelo de manera numérica y expondremos los resultados obtenidos en él. Es posible encontrar el código desarrollado en el siguiente link: ¹

¹Hacer click en el símbolo para ver el código.

Método analítico

Para obtener una buena modelización de las ondas que encontramos en el Sol es necesario considerar las ecuaciones de conservación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p = -\rho \vec{\nabla} \Phi - \vec{\nabla} p \\ \nabla^2 \Phi &= 4\pi G \rho \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial t}\end{aligned}$$

Donde, realizando una aproximación adiabática, obtenemos que:

$$\frac{dS}{dt} = 0 \longrightarrow P \rho^{-\gamma} = \text{cte} \longrightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma P}{\rho} = c_s^2$$

Es posible realizar un análisis perturbativo de primer orden en nuestro sistema. Para ello, es necesario considerar perturbaciones pequeñas, tal que:

$$\begin{aligned}\rho &\equiv \rho_0 + \rho_1 \ ; \ |\rho_1| \ll \rho_0 \\ p &\equiv p_0 + p_1 \ ; \ |p_1| \ll p_0 \\ \vec{v} &= \vec{v}_1 \\ \Phi &\equiv \Phi_0 + \Phi_1 \ ; \ |\Phi_1| \ll \Phi_0\end{aligned}$$

Introduciendo estas magnitudes en las ecuaciones de conservación y teniendo en cuenta una aproximación de primer orden obtenemos las ecuaciones de conservación perturbadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla (\rho_0 \vec{v}) &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\rho_1 \vec{\nabla} \Phi_0 - \rho_0 \vec{\nabla} \Phi_1 - \vec{\nabla} p_1 \\ \nabla^2 \Phi_1 &= 4\pi G \rho_1 \\ \frac{\partial P_1}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) P_0 &= c_s^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho_0 \right)\end{aligned}$$

Un modelo muy usado para el estudio de la propagación de ondas acústico-gravitatorias en el interior solar es la consideración del Sol como una atmósfera isoterma estratificada con gravedad constante, donde:

$$P_0 = P_0(z) ; \rho_0 = \rho_0(z) ; ; g_0 = cte$$

Con esto, el sistema de ecuaciones nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla (\rho_0 \vec{v}) &= 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \rho_1 \vec{g} - \vec{\nabla} p_1 \\ \frac{\partial P_1}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) P_0 &= c_s^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho_0 \right) \end{aligned}$$

Si ahora suponemos que la atmósfera está en equilibrio encontramos que:

$$\vec{\nabla} P_0 = -\rho_0 \vec{g}$$

desarrollándolo teniendo en cuenta la condición de una atmósfera isoterma:

$$\frac{dP_0}{dz} = -\rho_0 g = -\frac{g}{\kappa T_0} P_0 \longrightarrow \frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\mu g}{\kappa T_0} dz = -\frac{dz}{H}$$

donde se ha definido H como la escala de altura

$$\boxed{\frac{1}{H} = -\frac{1}{P_0} \frac{dP_0}{dz} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{\mu g}{\kappa T_0}}$$

Conociendo esto, es posible manipular nuestro sistema hasta obtener una ecuación de dispersión para una atmósfera isoterma estratificada.

Introduciendo la ecuación de conservación de la masa en la ecuación de la energía obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) P_0 = -c_s^2 \rho_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = -\gamma P_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$$

Si, por otro lado, derivamos la ecuación del momento:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial^2 t} = -\vec{\nabla} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \vec{g}$$

podemos entonces sustituir en los términos correspondientes las ecuaciones de la masa y energía:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial^2 t} = \vec{\nabla} \left((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) P_0 \right) + \vec{\nabla} \left(\gamma P_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right) - \vec{g} \cdot \vec{\nabla} (\rho_0 \vec{v})$$

Haciendo uso de la condición de equilibrio, finalmente llegamos a la ecuación de la velocidad:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial^2 t} = c_s^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\gamma - 1) \vec{g} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{g})$$

Como podemos comprobar, tenemos una ecuación en derivadas parciales con coeficientes constantes. Suponiendo que la longitud de onda es mucho más pequeña que la escala característica de las variaciones de los parámetros atmosféricos es posible realizar una aproximación WKB, la cual propone solución que se puede expresar en armónicos esféricos de forma que

$$\vec{v} \sim \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$$

Introduciendo la solución en la ecuación, llegamos a la *ecuación de dispersión diferencial*

$$-\omega^2 \vec{v} = -c_s^2 \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}) + i(\gamma - 1) \vec{g} (\vec{k} \cdot \vec{v}) + i\vec{k} (\vec{g} \cdot \vec{v})$$

Suponiendo ahora sólo dos direcciones independientes, x y z , y realizando un desarrollo para cada dirección, encontramos dos ecuaciones lineales para las dos componentes de la velocidad. Al igualar el determinante de este sistema a cero encontramos que la *ecuación de dispersión para la frecuencia* viene dada por:

$$\omega^4 - [c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + ig\gamma k_z]\omega^2 + (\gamma - 1)g^2 k_x^2 = 0$$

Tenemos entonces una ecuación de cuarto orden. Con esto llegamos a dos importantes conclusiones:

- **k es complejo**, las ondas en general se amplificarán o atenuarán en el espacio o en el tiempo.

- **La velocidad de propagación depende de ω y \vec{k}** , tenemos ondas de tipo dispersivo. Esto marca la diferencia con respecto a ondas puramente acústicas donde la velocidad de propagación se mantiene constante.

Vamos a suponer que no existe atenuación en el tiempo ni en la dirección tangencial, es decir, tanto ω como k_x son reales. Ahora separaremos k_z en su componente real y compleja. Sustituyendo esto en la relación anterior y separando la componente compleja de la real, encontramos que la componente compleja tiene la forma:

$$k_{zi} = -\frac{g\gamma}{2c_s^2} = -\frac{\gamma g}{2} \frac{\rho_0}{\gamma P_0} = -\frac{g\rho_0}{2} \frac{\mu}{\rho_0 RT_0} = -\frac{1}{2H}$$

Definiendo las siguientes frecuencias de corte como:

- *Frecuencia de corte* $\longrightarrow \omega_c = \gamma g / 2c_s^2 = c_s / 2H$
- *Frecuencia de Brunt-Väisälä* $\longrightarrow N^2 = g(\gamma - 1) / H\gamma$

Cabe notar, que la expresión que hemos dado para la frecuencia de Brunt-Väisälä sólo es válida para una atmósfera isoterma. Sustituyendo la componente compleja del número de onda y las frecuencias de corte la ecuación de dispersión nos queda una forma mucho más compacta.

$$\boxed{\omega^4 - \omega^2(c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2) + N^2\omega_c^2k_x^2 = 0}$$

Llegados a este punto, es posible resolver la ecuación para la frecuencia o para el número de ondas y con ello estudiar qué tipo de ondas se propagan en una atmósfera solar estratificada por gravedad. Despejando k_z :

$$k_z^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_c^2)}{c_s^2} + \frac{k_x^2}{\omega^2}(N^2 - \omega^2)$$

Encontramos que, dependiendo de ω , c_s y N , k_z^2 tendrá soluciones positivas o negativas. Existe entonces un valor en el cual, si $N < \omega < \omega_c$ el número de onda correspondiente a la propagación vertical será un número imaginario, por lo que la onda no se propagará en esa dirección.

Realizando un diagrama k - ω en el caso donde $k_z^2 = 0$ obtenemos tres zonas claramente diferenciadas:

$$\frac{\omega^2}{\omega_c^2} = \frac{1}{2}(1 + 4H^2k_x^2) \pm \sqrt{(1 + 4H^2k_x^2)^2 - \frac{16(\gamma - 1)}{\gamma^2}4H^2k_x^2}$$

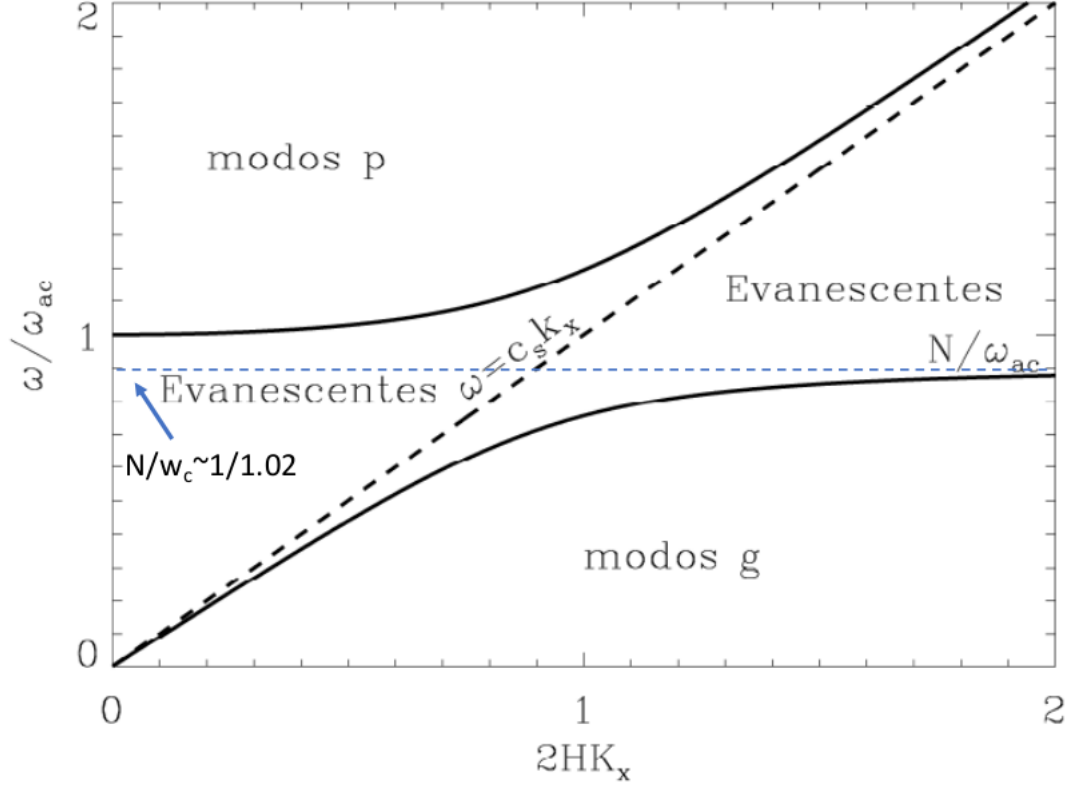


Figure (1) Ondas acústico-gravitatorias: diagrama k - ω

Encontramos en la región superior los modos p, se encuentran para frecuencias altas. Tenemos en esta región ondas propagándose a frecuencias mayores que la frecuencia de corte donde su fuerza restauradora es esencialmente la presión.

En la región central obtenemos la región donde se cumple que $k_z^2 < 0$, las ondas pertenecientes a esta región son denominadas ondas evanescentes, no se propagarán en la dirección vertical.

Por otro lado, en las frecuencias menores que la frecuencia de corte se ubican los modos g. Debido a sus frecuencias bajas, estas ondas están atrapadas cerca del núcleo y son muy difíciles de medir. Se ubican en el mismo sitio correspondiente a la granulación y son difíciles de distinguir en observaciones.

Como hemos visto en la figura 1, sólo se propagarán las ondas con una frecuencia mayor que la frecuencia de corte. Sin embargo, si la frecuencia de corte aumenta

con la altura, llegará un punto en el cual la frecuencia de la onda será menor que la frecuencia de corte y ésta se volverá evanescente. A esta altura se le conoce como altura de corte, y es la correspondiente a $\omega = \omega_c$.

Además de la altura de corte, existe una altura de reflexión interna, conocida como *lower turning point*. Debido a la estratificación del medio, el índice de refracción cambia con la altura. En la atmósfera solar, la temperatura aumenta hacia abajo y con ello la velocidad del sonido. Se produce entonces un fenómeno de refracción en el cual, al aumentar la velocidad con la altura, el ángulo de propagación de la onda respecto a la propagación vertical será cada vez mayor hasta llegar a una altura donde sólo haya propagación horizontal y $k_z = 0$. Una vez que la onda pase de este punto, volverá a propagarse verticalmente hacia la superficie hasta de nuevo encontrarse con la altura de corte.

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} \quad ; \quad \text{si } v_2 > v_1 \longrightarrow \theta_2 > \theta_1$$

En esta altura, dado que no hay propagación horizontal $k_z = 0$. Teniendo en cuenta que estas ondas se encuentran en la región de modos p, cuya frecuencia será mucho mayor que las frecuencias de corte, tenemos que:

$$0 = \frac{(\omega^2 - \omega_c^2)}{c_s^2} + \frac{k_x^2}{\omega^2}(N^2 - \omega^2) \xrightarrow{\omega \gg \omega_c, N} \omega = c_s k_x \rightarrow T c_s = \lambda$$

Por tanto, las ondas con longitudes de onda mayores (o frecuencias pequeñas) se reflejarán a mayores profundidades mientras que las ondas con longitud de onda menor (frecuencias grandes) quedarán cerca de la superficie.

Cálculo numérico

En esta sección vamos a proceder a realizar un modelo numérico para calcular las trayectorias de las ondas acústico-gravitatorias que se propagan en el interior solar.

Resolviendo la relación de dispersión vista anteriormente para ω^2 se obtiene una ecuación de primer orden no lineal en derivadas parciales tal que:

$$F(x, z, k_x, k_z) = \frac{c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2)^2 - 4c_s^2 N^2 k_x^2} - \omega^2 = 0$$

donde la solución con un + se refiere a la solución correspondiente a la onda rápida mientras que la solución con un - se refiere a la solución para la onda lenta.

En el caso de que los parámetros de la ecuación c_s , N y ω_c varíen poco en distancias comparables con la longitud de onda, se puede resolver la ecuación por el método de la Eikonal. En este método, el camino que recorre la onda (x, z) y la variación de los números de onda k_x y k_z se pueden expresar en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dk_x}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial x} ; \quad \frac{dk_z}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial F}{\partial k_x} ; \quad \frac{dz}{ds} = \frac{\partial F}{\partial k_z}$$

F se refiere a la ecuación no-lineal en derivadas parciales y la variable s es la distancia a lo largo del camino de propagación de la onda.

Derivando analíticamente este sistema, y teniendo en cuenta que las variables x , z , k_x y k_z son independientes, obtenemos:

$$\frac{dk_x}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dk_z}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial z} = -\left(\frac{2c_s(k_x^2 + k_z^2)\frac{dc_s}{dz} + 2\omega_c\frac{d\omega_c}{dz}}{2} \pm \frac{2(c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2)(2c_s(k_x^2 + k_z^2)\frac{dc_s}{dz} + 2\omega_c\frac{d\omega_c}{dz}) - 4(2c_sN^2k_x^2\frac{dc_s}{dz} + 2c_s^2Nk_x^2\frac{dN}{dz})}{4\sqrt{(c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2)^2 - 4c_s^2N^2k_x^2}} \right)$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial F}{\partial k_x} = \frac{2c_s^2k_x}{2} \pm \frac{2(c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2)2c_s^2k_x - 8c_s^2N^2k_x}{4\sqrt{(c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2)^2 - 4c_s^2N^2k_x^2}}$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial F}{\partial k_z} = \frac{2c_s^2k_z}{2} \pm \frac{2(c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2)2c_s^2k_z}{4\sqrt{(c_s^2(k_x^2 + k_z^2) + \omega_c^2)^2 - 4c_s^2N^2k_x^2}}$$

Comprobamos que el número de onda en la dirección transversal, k_x es independiente de la trayectoria y, por tanto, la propagación horizontal se mantendrá constante en todo momento.

Integrando este sistema de ecuaciones se obtiene el camino que recorre la onda, tanto lenta como rápida, en forma de $x(s)$, $z(s)$. Para ello se hará uso del método Runge-Kutta de cuarto orden. Este método consiste en un conjunto de métodos iterativos que permite aproximar las soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias. Definiendo un problema de valor inicial tal que:

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Entonces se cumple que

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) ; \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) ; \quad k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \end{aligned}$$

Como condición inicial, empezaremos la integración en el el punto de refracción interior ("lower turning point"), donde, si recordamos de la sección anterior, se cumple que $k_z = 0$. Para ello, fijaremos una profundidad y calcularemos el k_x correspondiente. Para $k_z = 0$, la propagación horizontal depende de la profundidad de la forma:

$$k_x^2 = \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_c^2)}{c_s^2(\omega^2 - N^2)}$$

Los parámetros c_s , N y ω_c se calcularán a partir del modelo de atmósfera donde se nos proporciona la densidad, la presión y la temperatura y son únicamente funciones de la profundidad, z . Para calcular dichos parámetros se han utilizado las siguiente relaciones:

$$c_s^2 = \gamma \frac{P}{\rho} ; \quad \omega_c^2 = \frac{(\gamma g)^2}{4c_s^2} ; \quad N^2 = \frac{g^2(\gamma - 1)}{c_s^2}$$

donde se ha tomado un valor para la gravedad de $g = 274 \text{ m/s}^2$ y para la constante adiabática un valor de $\gamma = 5/3$.

Para el caso de las derivadas que aparecen en el sistema de ecuaciones, $\frac{dc_s}{dz}$, $\frac{dN}{dz}$ y $\frac{d\omega_c}{dz}$, se calcularán numéricamente a través de un método de elementos finitos, más en concreto usaremos una derivada *centered*, la cual se define de la siguiente forma:

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)$$

En cada interacción del método de integración se han calculado unos nuevos valores para todas las variables dependientes de la profundidad a través de una interpolación lineal de modelo proporcionado.

Resultados

Procedemos entonces a realizar el cálculo de las trayectorias para las ondas de $\omega = 5$ mHz y 2.5 mHz.

Hemos iniciado la integración en ambos casos para diversas condiciones iniciales que dependían únicamente de la profundidad. Para ello, se ha calculado la profundidad de corte de cada onda mediante una interpolación lineal donde hemos interpolado el valor de la profundidad correspondiente a $\omega_c = \omega$. Dicho esto, la profundidad de corte calculada para cada una de las ondas en el modelo proporcionado es:

$$z_c(5\text{mHz}) = 174.502\text{km} \quad ; \quad z_c(2.5\text{mHz}) = -1195.704\text{km}$$

Las distintas profundidades en las que se ha iniciado han sido:

$$z_0 = z_c - h|z_c|$$

siendo h un valor de 0.5, 1, 2, 5, 10 y 20.

Ondas de 5 mHz

En la siguiente tabla podemos ver el número de onda correspondiente a la propagación horizontal para cada una de las profundidades iniciales, además de su longitud de onda.

z_0 [km]	87.25	0.0	-174.5	-698.01	-1570.52	-2443.03
k_x [Mm ⁻¹]	4.146	3.941	3.059	2.429	2.013	1.749
λ [Mm]	1.515	1.594	2.054	2.586	3.122	3.591

En la tabla antetior se puede apreciar como la longitud de onda aumenta con la profundidad como ya comentamos anteriormente. Si ahora representamos las trayectorias para la onda rápida a cada una de estas profundidades iniciales, es posible

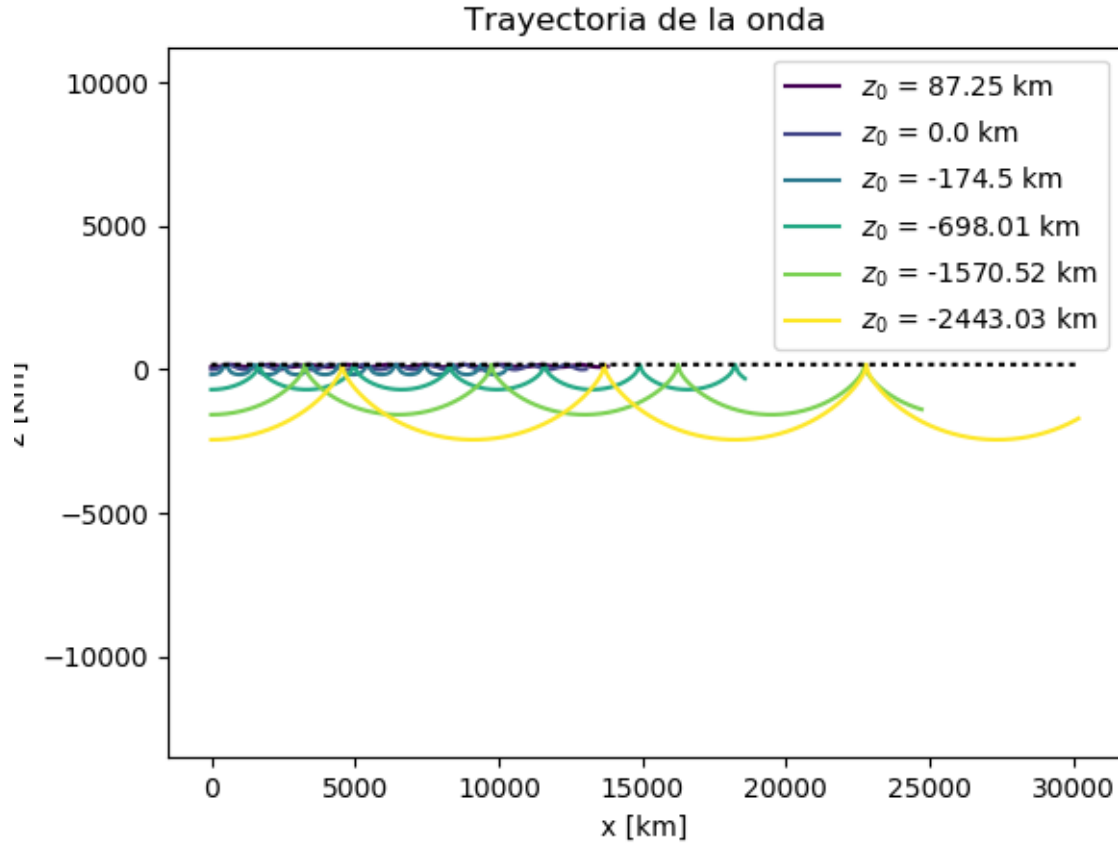


Figure (2) Trayectoria de las ondas de 5mHz para distintas profundidades. La línea rayada negra corresponde con la profundidad de corte de dicha onda.

apreciar en la figura 2 como a mayor profundidad obtenemos una trayectoria de la onda mucho más abajo que cuando iniciamos en una profundidad menor. También se puede apreciar como, debido al cambio en el índice de refracción, la trayectoria se va curvando hasta que en el *lower turning point* la propagación vertical se anula. La línea negra rayada se corresponde con la profundidad de corte calculada. Vemos como la onda "rebota" en esta profundidad y se invierte la propagación en la dirección vertical.

Es posible realizar un seguimiento de las trayectorias que aparecen en la figura 2 en el diagrama $k-\omega$. En la figura 3 vemos como la mayor parte de las ondas están dentro de la región de modos p. Es fácil notar que las dos ondas correspondientes a las profundidades $z = 87.25$ km y $z = 0.0$ km se encuentran en la región evanescente.

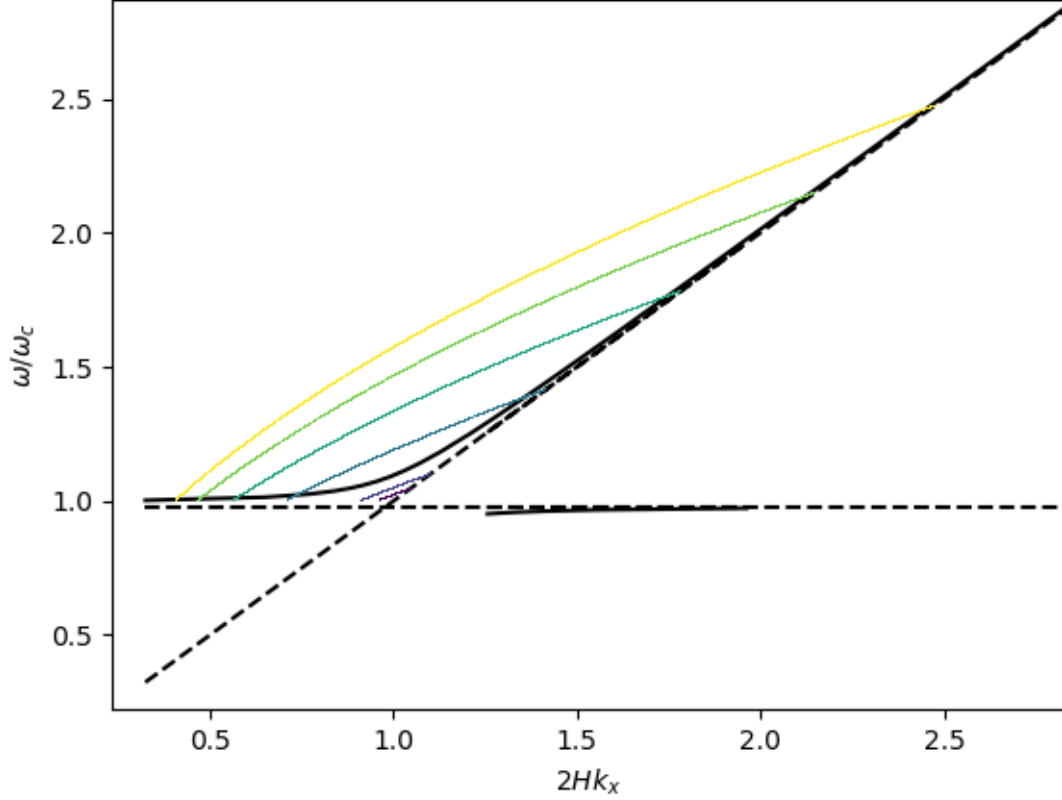


Figure (3) Diagrama k - ω correspondiente con la trayectoria para las ondas de la figura 2. Cada color corresponde con la profundidad indicada en la gráfica de sus trayectorias.

La primera suposición fue pensar que esto era debido a que habíamos iniciado el cálculo de la trayectoria fuera del interior Solar, y esto traía consecuencias a la hora de la propagación de la propia onda. Sin embargo, un rápido vistazo al diagrama realizado para el caso de $\omega = 2.5$ mHz, figura 6 nos hizo ver que no era así, ya que obteníamos el mismo resultado en este caso con profundidades que distaban mucho de estar fuera del interior solar. Por tanto, la posible explicación es debida a la cercanía de la profundidad inicial con respecto a su profundidad de corte; la frecuencia en este caso no es mucho mayor que la frecuencia de corte en la que iniciamos la trayectoria, por lo que está por debajo de la región de los modos p .

Si nos centramos en estas trayectorias dentro de la región evanescente y la com-

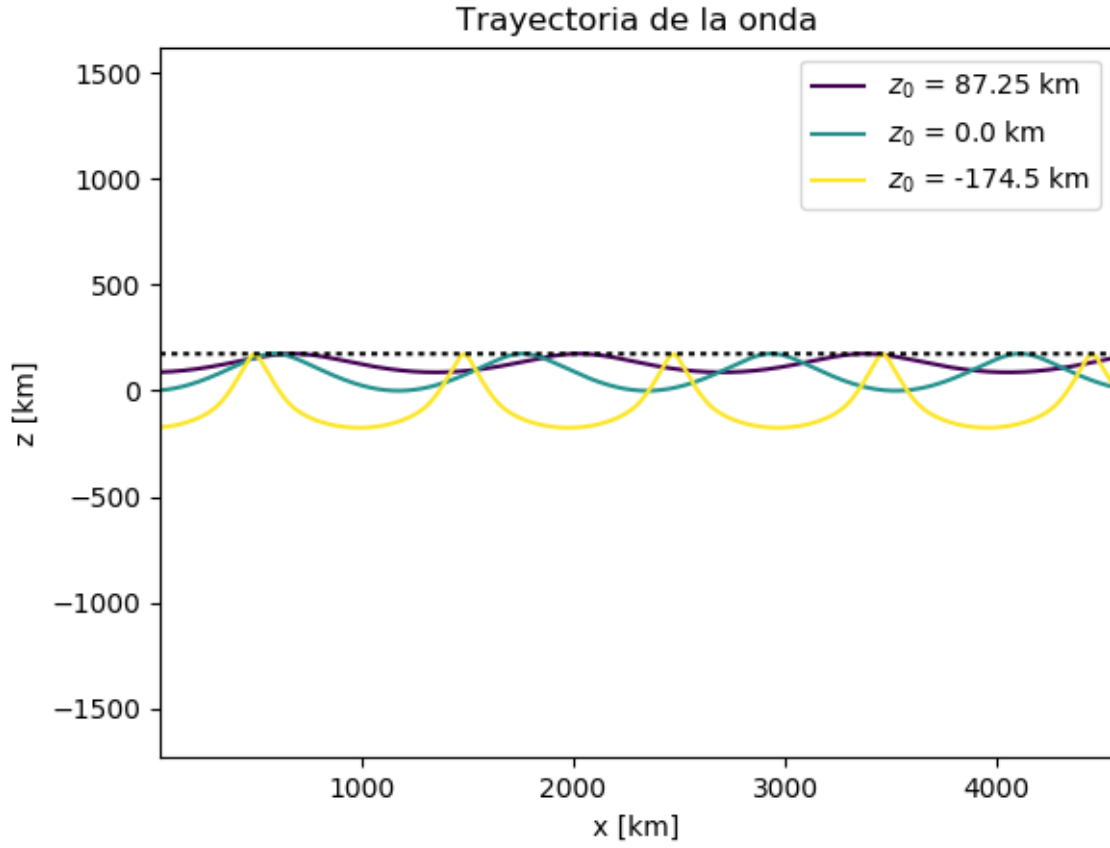


Figure (4) Trayectorias de las ondas con respecto a la profundidad. Las líneas azul y moradas corresponden a las trayectorias de las ondas pertenecientes a la región evanescente. La línea amarilla corresponde a una trayectoria dentro de la región de modo p

paramos con la primera trayectoria calculada que está dentro de la región de los modos p, figura 4, podemos ver como no siguen la regla comentada anteriormente. La onda apenas reduce su propagación en la dirección horizontal, sin embargo, si que podemos apreciar una disminución en su fase.

Ondas de 2.5 mHz

Calculando ahora las trayectorias para la frecuencia de 2.5 mHz, encontramos el número de onda correspondiente a la propagación horizontal para cada una de las profundidades iniciales, además de su longitud de onda en la siguiente tabla.

z_0 [km]	-1793.56	-2391.41	-3587.11	-7174.22	-13152.74	-19131.27
k_x [Mm ⁻¹]	0.9683	0.8815	0.7499	0.5181	0.3554	0.2860
λ [Mm]	6.489	7.128	8.378	12.126	17.682	21.969

Análogamente al apartado anterior, encontramos en la figura 5 las trayectorias de las ondas para cada una de las profundidades iniciales tomadas. Además, en la figura 6 encontramos la posición de cada una de estas trayectorias en el diagrama k - ω .

Onda lenta

Para todo momento hemos realizado los cálculos con la onda rápida. Sin embargo, es posible también resolver la trayectoria para la onda lenta. En la figura 7 tenemos la trayectoria de una onda de 5 mHz resuelta para una profundidad inicial de -698.01 km. En esta gráfica apreciamos cómo para una misma trayectoria fija, la onda rápida llega más lejos que la onda lenta. Vemos también cómo la trayectoria parece estar invertida.

Dependencia de la trayectoria con la temperatura

Por último, vamos a realizar un análisis de la dependencia de la trayectoria con respecto a la temperatura. Recordemos que la velocidad del sonido escala con la temperatura tal que:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

Dado que la velocidad del sonido entra en nuestro cálculo de la trayectoria en todo momento, es posible realizar un seguimiento de la dependencia de ésta con respecto a la temperatura de nuestro modelo. Para ello hemos tomado la onda de 2.5 mHz y la profundidad inicial de -3587.11 km y hemos variado la temperatura unos 100 K en ambas direcciones. En la figura 8 podemos ver como un aumento de la temperatura implica una reducción en la propagación de la onda mientras que una disminución de la temperatura nos provoca que la onda se propague a unas profundidades mayores.

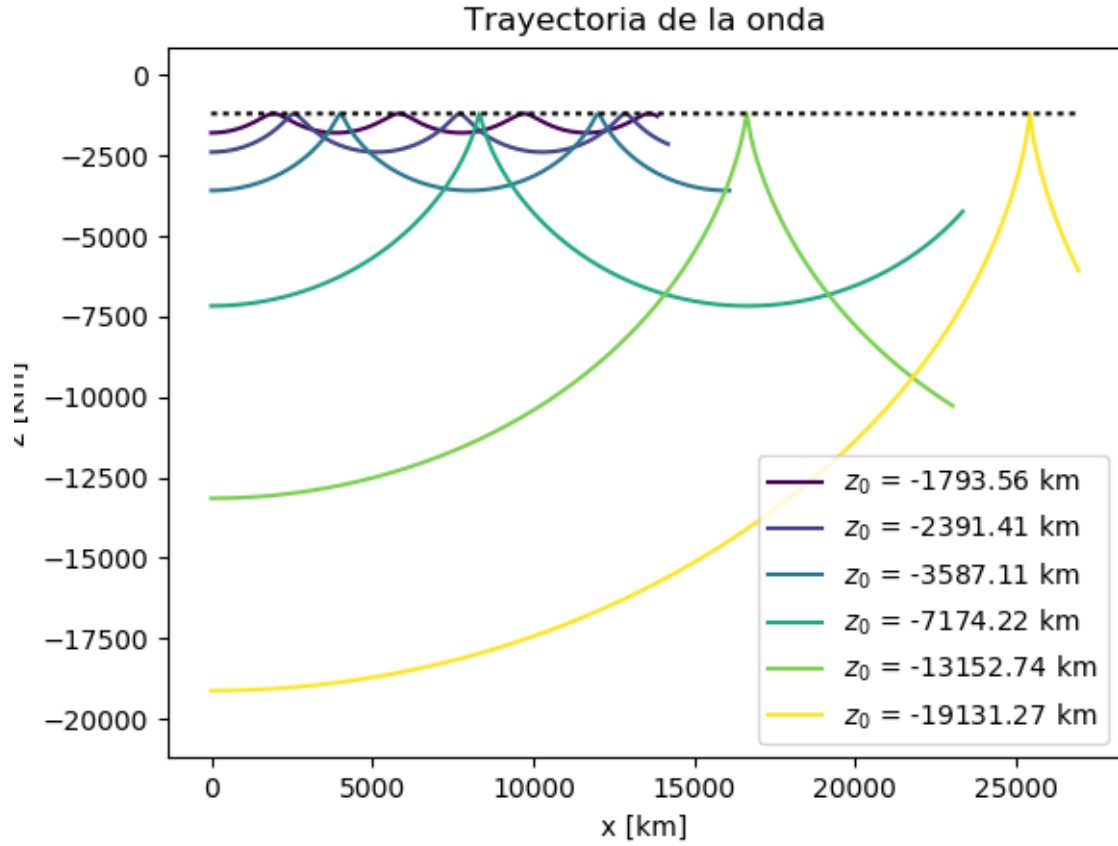


Figure (5) Trayectoria de las ondas de 2.5 mHz para distintas profundidades. La línea rayada negra corresponde con la profundidad de corte de dicha onda.

Esto tiene sentido con el hecho de que la frecuencia de corte tiene una dependencia inversa con la velocidad del sonido. Por lo que una disminución (o aumento) de la temperatura provoca una disminución (o aumento) en la velocidad del sonido y esto a su vez un aumento (o disminución) en la frecuencia de corte con respecto a la profundidad. Por lo que si tenemos en cuenta que la frecuencia de corte aumenta con la profundidad entonces obtendremos una profundidad de corte más cercana a la superficie en el caso de que aumentemos la temperatura en el modelo o más profunda en el caso de que la disminuyamos. También es posible ver un cambio en el número de onda. Si recordamos la expresión para k_x vemos cómo ésta depende inversamente con la velocidad del sonido. Por lo que una disminución de la temperatura implica un aumento en la propagación horizontal y viceversa.

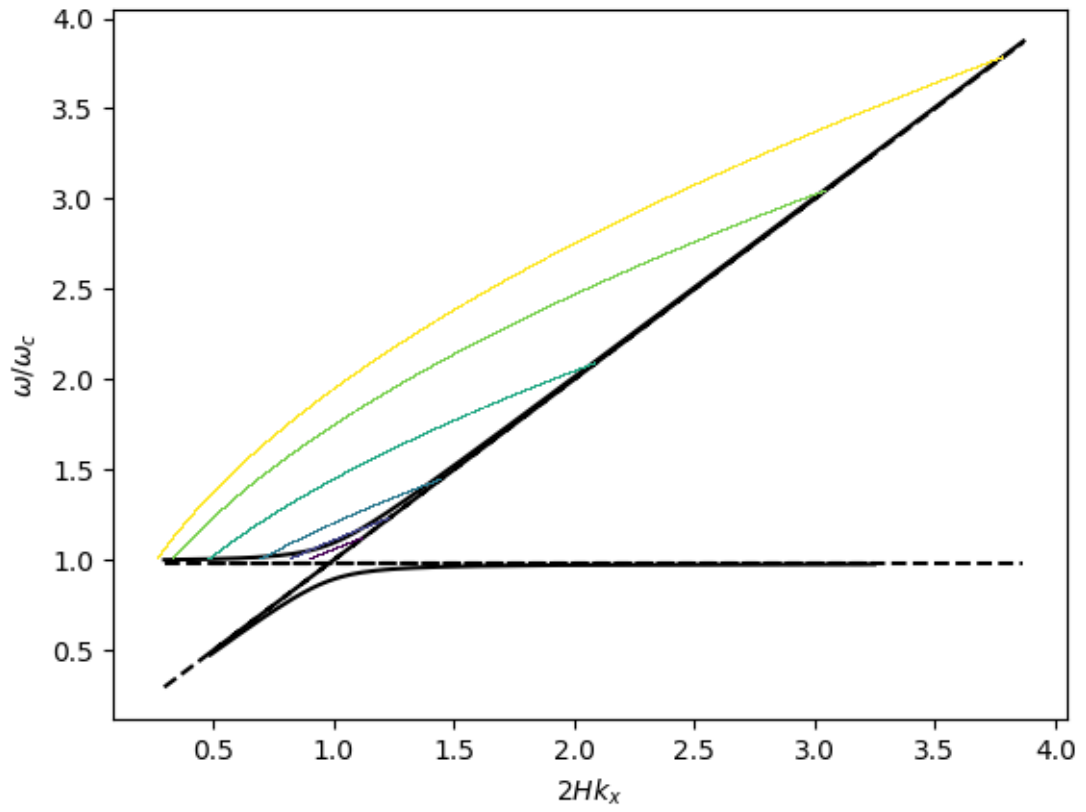


Figure (6) Diagrama k - ω correspondiente con la trayectoria para las ondas de la figura 5. Cada color corresponde con la profundidad indicada en la gráfica de sus trayectorias.

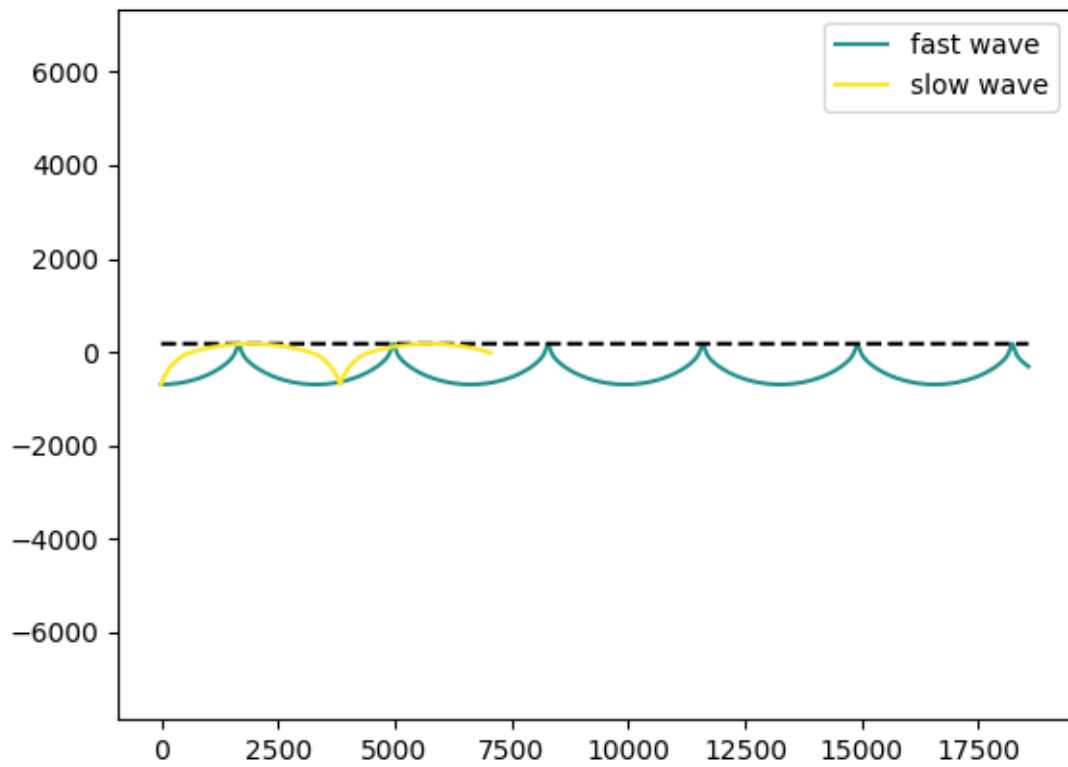


Figure (7) Trayectorias de una onda de 5 mHz a una profundidad inicial dada. La línea amarilla corresponde a la trayectoria de la onda lenta mientras que la azul corresponde a la onda rápida.

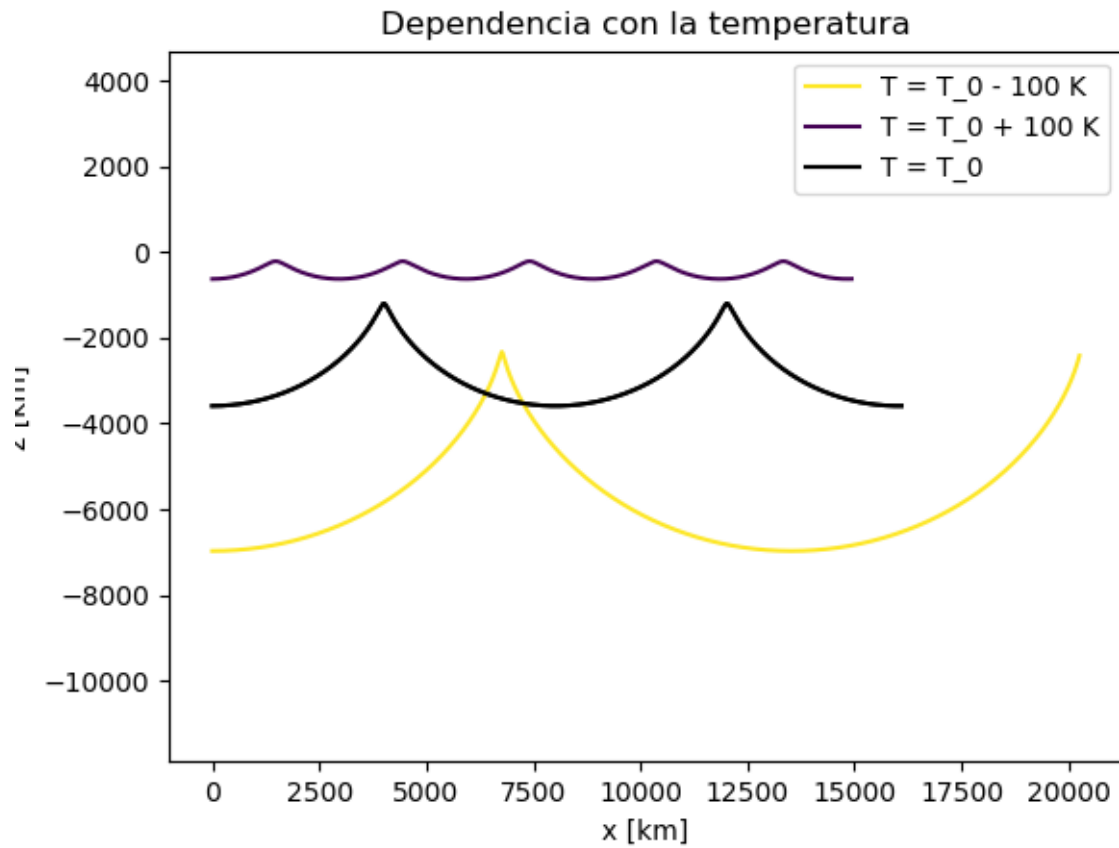


Figure (8) Dependencia de las trayectorias de una onda de 2.5 mHz a una profundidad inicial dada. Cada trayectoria se ha iniciado a la misma profundidad pero con una temperatura diferente en el modelo. La línea negra se corresponde con la trayectoria que seguiría la onda sin cambiar el modelo mientras que las línea morada y amarilla se corresponden con las trayectorias para una temperatura 100 K mayor y menor, respectivamente.