

# JEANS MASS AND GRAVITATIONAL COLLAPSE

---

TÉCNICAS DE SIMULACION NUMÉRICA

---

Elena Arjona Gálvez

Master en Astrofísica. Universidad de La Laguna.

May 24, 2020

## Introduction

En términos de formación estelar y de galaxias, la inestabilidad de Jeans juega un papel importante. Esta inestabilidad causa el colapso de nubes de gas cuando la fuerza gravitatoria supera la presión interna que mantiene esta nube en equilibrio. La presión ya no es suficiente para soportar la fuerza gravitatoria y entonces colapsa.

La dinámica de una nube de gas viene dada por las ecuaciones de un fluido autogravitante<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x(\rho v) = 0$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla_x(\rho v^2 + P\mathcal{I}) = -\rho \nabla_x \phi$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \nabla_x[(\rho \epsilon + P)v] = -\rho v \nabla_x \phi$$

donde, por la ecuación de Poisson tenemos que:

$$\nabla_x^2 \phi = 4\pi G \rho$$

---

<sup>1</sup>Notar que en todo momento, por simplicidad y similitud con los cálculos que realizaremos numéricamente, estamos realizando un análisis de las ecuaciones en una dimensión.

Vamos a estudiar este fluido bajo un análisis perturbativo. Suponiendo que los cambios en las magnitudes vienen dados por una pequeña perturbación tal que

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad P = P_0 + P' \quad v = v' \quad \epsilon = \epsilon_0 + \epsilon' \quad \phi = \phi_0 + \phi'$$

donde las cantidades perturbadas se denotan por ' y son mucho más pequeñas que la magnitud no perturbada, denotada bajo el subíndice 0.

Sustituyendo esto en las ecuaciones anteriores y suponiendo que estamos en un medio continuo e isótropo podemos realizar una aproximación de primer orden, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla_x(\rho_0 v') = 0$$

$$\frac{\partial \rho_0 v'}{\partial t} + \nabla_x P' = -\rho_0 \nabla_x \phi_0$$

$$\nabla_x^2 \phi' = 4\pi G \rho'$$

Realizando ahora la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de continuidad y sustituyendo en este resultado la ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla_x v' \right) = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial^2 t} + \rho_0 \nabla_x \frac{\partial v'}{\partial t} = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial^2 t} - \nabla_x^2 P' - \rho_0 \nabla_x^2 \phi' = 0$$

Obtenemos entonces:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial^2 t} - \nabla_x^2 P' - 4\pi G \rho_0 \rho' = 0$$

donde, si consideramos que las inestabilidades son de tipo sinusoidal,  $A \cos(kx - \omega t)$ , y, además tenemos en cuenta que son adiabáticas, es decir, cumplen la siguiente relación:

$$\rho' = \rho_0 A_\rho \cos(kx - \omega t)$$

$$P' = P_0 A_P \cos(kx - \omega t)$$

$$v' = A_v \cos(kx - \omega t)$$

Al ser perturbaciones adiabáticas, se cumple que  $A_P = \gamma A_\rho$ . Sustituyendo este tipo de solución en la relación anterior:

$$-\omega^2 \rho' + k^2 P' - 4\pi G \rho_0 \rho' = 0 \longrightarrow -\omega^2 \rho' + \frac{P_0 \gamma}{\rho_0} k^2 \rho' - 4\pi G \rho_0 \rho' = 0$$

Por último, teniendo en cuenta que  $cs^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$  obtenemos la relación de dispersión.

$$-\omega^2 \rho' + cs^2 k^2 \rho' - 4\pi G \rho_0 \rho' = 0$$

$$\boxed{\omega^2 = cs^2 k^2 - 4\pi G \rho_0} \quad (1)$$

Vamos a analizar esta relación:

Para el caso de  $cs^2 k^2 > 4\pi G \rho_0$  tenemos que la frecuencia de oscilación de la perturbación siempre es real, lo cual no introduce ningún cambio a nuestra perturbación. Seguimos teniendo perturbaciones sinusoidales.

$$\omega^2 > 0 ; e^{i(kx - \omega t)} \longrightarrow \sim \text{~~~~~}$$

Si, por otro lado, tenemos en cuenta el caso  $cs^2 k^2 < 4\pi G \rho_0$  encontramos una frecuencia de oscilación imaginaria. Esto hace que nuestra perturbación obtenga un carácter exponencial y tienda a infinito.

$$\omega^2 < 0 ; e^{i(kx - \omega t)} = e^{ikx} e^{\omega t} \longrightarrow \text{~~~~~}$$

Es decir, cuando  $\omega^2 > 0$  las perturbaciones producidas en la nube de gas no dejarán de ser sinusoidales, mientras que cuando  $\omega^2 < 0$  el término de gravedad será mayor que el término de la presión interna y la inestabilidad perderá su carácter lineal, haciendo que, tanto la densidad como la presión se vayan a infinito. Es decir, la nube colapsará por efecto gravitatorio.

Es posible establecer a partir de aquí una relación de estabilidad entre la presión y la densidad, la cual nos indique para qué valores de presión y densidad la nube colapsará o no. Este criterio es conocido como el criterio de estabilidad de Jeans.

$$cs^2k^2 = 4\pi G\rho \longrightarrow \frac{\gamma P_0}{\rho_0}k^2 = 4\pi G\rho_0$$

$$\boxed{P_0 = \frac{4\pi G\rho_0^2}{\gamma k^2}} \quad (2)$$

Cuando la presión de la nube de gas sea mayor que  $\frac{4\pi G\rho_0^2}{\gamma k^2}$  entonces superará la presión ejercida por la gravedad de la nube y no colapsará. En caso contrario, la presión interna de la nube no será capaz de soportar la gravedad y acabará colapsando.

## Solving Poisson equation

A la hora de realizar un análisis numérico, la implementación de la gravedad a las ecuaciones de los fluidos puede llegar a ser complicada. La naturaleza elíptica de la ecuación de Poisson implica que cada punto de la solución está influenciado por todos los puntos del dominio. Resolverla de forma numérica requiere una dificultad computacional bastante alta.

Sin embargo, cuando nos enfrentamos a problemas con condiciones periódicas, como es este el caso, el espacio de Fourier puede resolernos muchas de las dificultades mencionadas anteriormente de una manera muy simple.

Para comprobar la veracidad de esto, vamos a realizar un pequeño cálculo. Partiendo de una densidad  $\rho(x)$  y usando el espacio de Fourier llegamos a que:

$$\nabla_x^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4\pi G\rho \longrightarrow \mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] = \mathcal{F} [4\pi G\rho]$$

$$(i\omega)^2 \tilde{\phi} = 4\pi G\tilde{\rho} \longrightarrow \tilde{\phi} = \frac{4\pi G\tilde{\rho}}{(i\omega)^2}$$

$$\phi = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{4\pi G\tilde{\rho}}{(i\omega)^2} \right]$$

donde  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{\phi}$  son las magnitudes correspondientes en el espacio de fourier.

Las derivadas en el espacio de Fourier, como acabamos de ver, pasan de ser un costoso cálculo a una simple multiplicación, es por ello que realizar derivadas usando

este método computacionalmente soluciona muchos problemas.

Si suponemos ahora que  $\rho(x) = 1 + A \cos(x)$ , y calculamos el potencial gravitatorio numéricamente usando el análisis de Fourier:

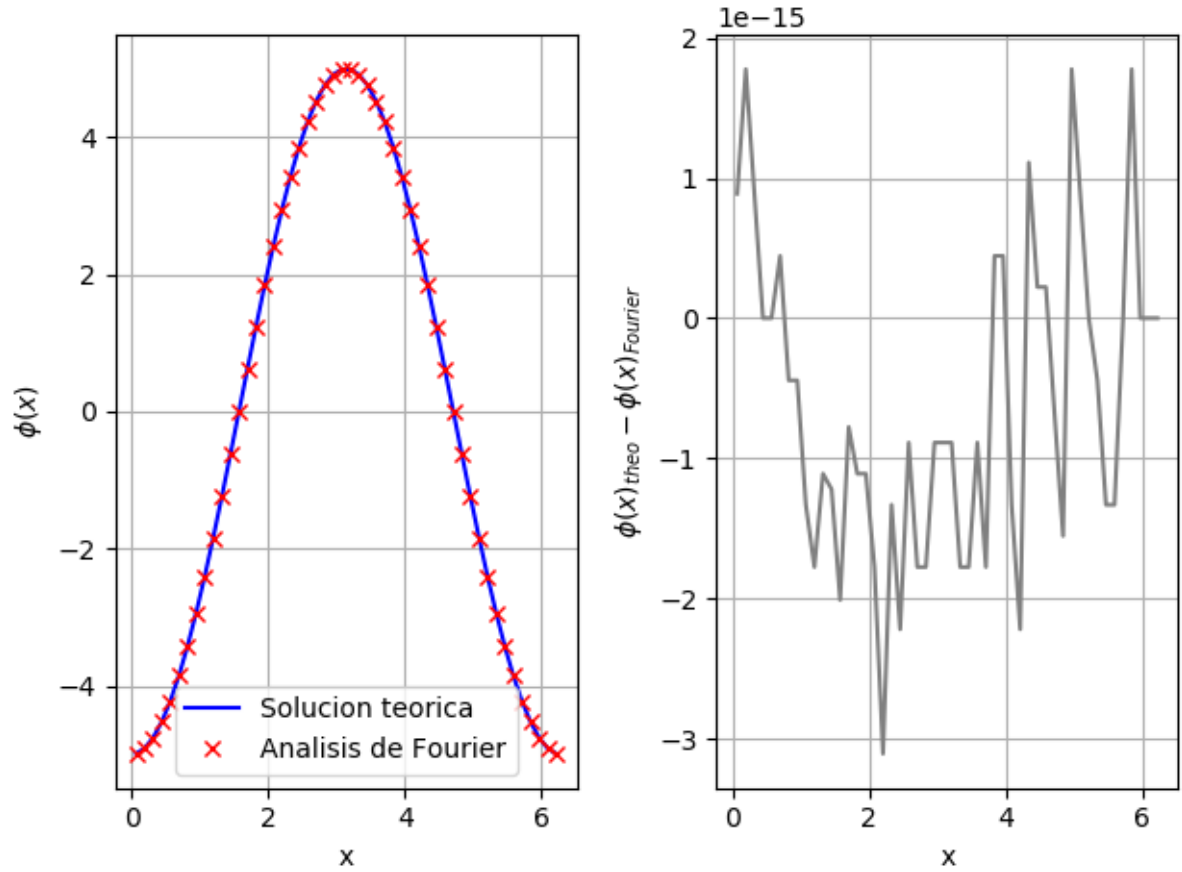


Figure (1) Resolución de la ecuación de Poisson mediante el espacio de Fourier. En la gráfica de la izquierda representado en rojo tenemos la solución calculada de manera numérica junto a la solución analítica en azul. La gráfica de la derecha indica la el error cometido al resolver la derivada numéricamente con el método de Fourier.

Vemos en la figura 1 como el uso de esta técnica, siempre que tengamos condiciones periódicas es bastante acertado a la hora de calcular el potencial. Los errores de truncamiento cometidos son despreciables.

## Gravity

Una vez que sabemos cómo calcular numéricamente el potencial gravitatorio es posible acoplarlo a las ecuaciones de los fluidos de una forma sencilla utilizando el método del "*operator splitting*". Este esquema consiste en resolver las ecuaciones de los fluidos sin gravedad y luego añadirle el término correspondiente a la gravedad en el mismo paso. Es decir, la idea es resolver las magnitudes en  $n + 1$  sin gravedad y luego añadir el término correspondiente al paso  $n + 1$ .

Para resolver las ecuaciones de los fluidos, sin el término de gravedad, utilizaremos un esquema de Lax-Wendroff-Ritchmyer, el cual consiste en dos subpasos temporales, en primero en  $n + 1/2$  y el segundo en  $n + 1$ . En el espacio, el paso medio cambia la posición de los puntos  $\Delta x/2$  y usa derivadas *centered*. Una vez resueltas las ecuaciones en este paso, implementamos la fuerza gravitatoria. Para esto, resolveremos la ecuación de Poisson en el espacio de Fourier y luego derivaremos el potencial para llegar a la gravedad<sup>2</sup>, ya que  $\vec{g} = -\nabla\phi$ . Como hemos comentado, el esquema utilizado para resolver las ecuaciones de los fluidos hace uso de una derivada *centered*, por lo cual, derivaremos el potencial para llegar a la gravedad utilizando esa misma elección. El siguiente esquema muestra más visualmente los pasos seguidos.

$$\begin{aligned}\bar{u}_{i+1/2}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(u_{i+1}^n - f_i^n)] \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ f(\bar{u}_{i+1/2}^{n+1/2}) - f(\bar{u}_{i-1/2}^{n+1/2}) \right] \\ g_i^{n+1} &= \frac{\bar{g}(u_{i+1}^{n+1}) - \bar{g}(u_{i-1}^{n+1})}{2\Delta x} \\ u_i^{n+1} &= u_i^{n+1} + g_i^{n+1} \Delta t\end{aligned}$$

Donde  $\bar{g}_i^{n+1}$  se refiere al término perteneciente al potencial gravitatorio calculado mediante el método de fourier.

Hemos establecido un valor de la

---

<sup>2</sup>Este procedimiento es puramente con fines ilustrativos, ya que una manera más óptima y directa de resolver este esquema sería a través de la resolución de la gravedad a partir de la densidad con un análisis de Fourier directamente sin necesidad de resolver el potencial y luego derivarlo.

## Stability criterion

Una vez que tenemos el esquema preparado, establecemos una perturbación inicial de la forma  $\rho = \rho_0[1 + 10^{-4} \cos(x)]$ , con  $\rho_0 = 1$ . Es posible realizar un análisis del criterio de estabilidad al que llegamos en el primer apartado. Para ello, fijaremos el valor de la densidad en  $\rho_0 = 1$  y cambiaremos el valor de la presión,  $P_0$  alrededor del valor de equilibrio<sup>3</sup> que estimamos en la ecuación 2.

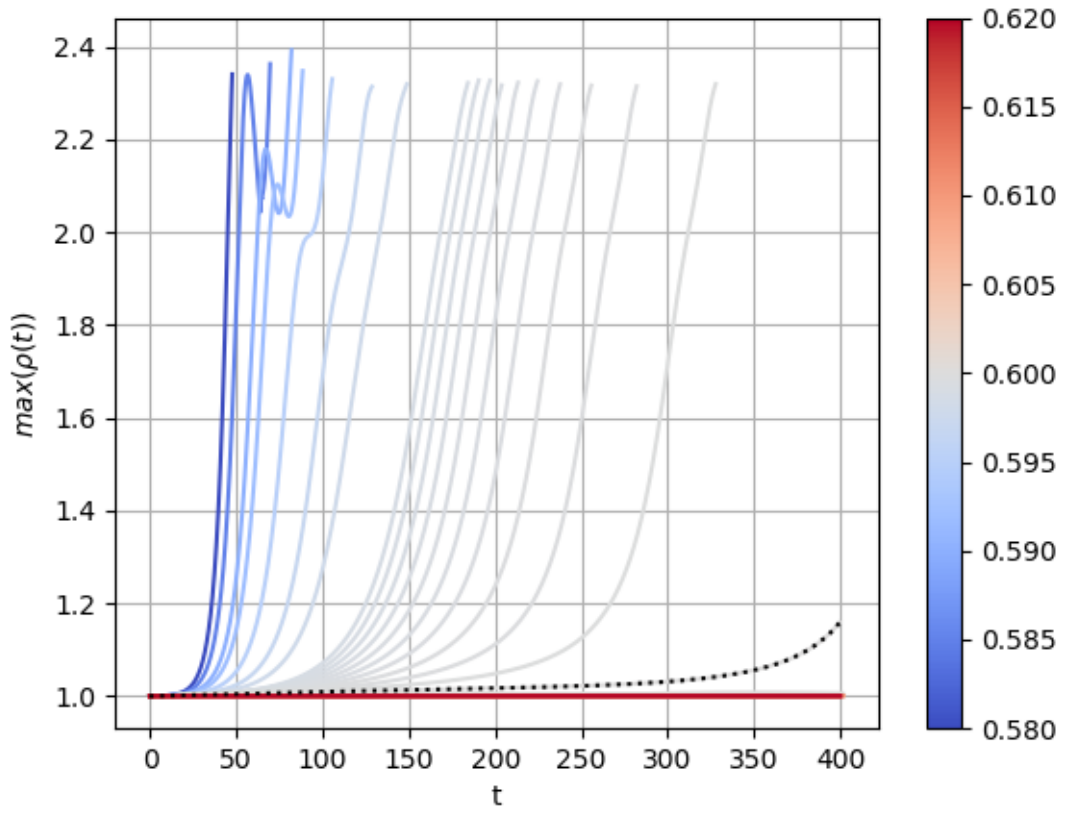


Figure (2) Análisis de la amplitud máxima de la densidad en cada paso de tiempo. Cada línea corresponde a un valor de  $P_0$  distinto (dados por la barra de la derecha) y una densidad fija de  $\rho_0 = 1$ . La línea punteada en negro se refiere al valor de  $P_0$  que corresponde con la ecuación 2 para  $\rho_0 = 1$ .

---

<sup>3</sup>En todo momento hemos establecido  $4\pi G = 1$  por simplicidad.

En la figura 2 vemos como el primer valor de  $P_0$  para el cual la nube colapsa con una  $\rho_0 = 1$ , se corresponde con el valor teórico que obtenemos utilizando la ecuación 2. Es posible comprobar como existe una región "prohibida" donde la densidad nunca llega. Existen dos saltos bastante claros, el primer salto se corresponde al llegar al valor exacto de la presión de Jeans, es decir, cuando la curva coincide con la teórica. Tras esto, vemos como existe un salto aún mayor hasta el nuevo valor de la presión. Cabe decir que hemos cogido un incremento en presiones de 0.0001 para los valores más cercanos a la presión de Jeans. Es fácil ver como, en la región inestable, a medida que el valor de la presión se aleja del valor de Jeans, la separación entre curvas es cada vez más pequeña.

Por último, vamos a realizar un análisis lagrangiano. Para ello, hemos escogido una serie de puntos al azar dentro de nuestro dominio y hemos calculado su velocidad correspondiente en cada paso temporal. Es posible comprobar como, para el caso el cual la nube colapsa, los puntos pertenecientes a las regiones donde la densidad se vuelve cada vez mayor se acercan entre ellos mientras que los puntos en los que la densidad tiende a cero se escapan de la región, alejándose entre ellos. Es decir, En las regiones en las cuales tenemos un pozo de potencial, todos los puntos se acercan al pozo de potencial gravitatorio, lo cual deriva en un aumento de la densidad. Al contrario pasa cuando tenemos una región en la cual desaparecen los puntos, dejandola sin densidad y haciendo que tienda a cero. Si realizamos el mismo análisis lagrangiano en términos de la presión, es posible ver como las partículas se acercan cada vez más provocando un aumento en la presión, la cual tiende a infinito mientras que en las zonas en las que las partículas se alejan la presión tiende a cero<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Podemos ver de manera más gráfica este hecho pinchando en [colapso.gif](#) 