Projekt 1B: Fjädringssystem

Projektet görs i grupper om två. En skriftlig rapport lämnas in senast 13/10, och kamraträttning/återkoppling sker under övningen 15/10 kl 8-10. En reviderad rapport lämnas sedan in för rättning senast 18/10. Projektet innehåller två kategorier av uppgifter. För uppgifter i Kategori 1 måste fullständig lösning ges i skriftlig rapport. För uppgifter i kategori 2 räcker att kod och plottar finns i appendix och att dessa uppgifter diskuteras muntligt vid kamratåterkopplingen.
För uppdelning av uppgifter i kategori 1 och 2 samt bedömning, se slutet av detta dokument.

Bakgrund

Projekt 1A handlade om styrning av ett fordon med hjul. Här ska ni undersöka en annan viktig komponent hos hjuldrivna fordon, nämligen fjädringssystemet. Ett fjädringssystem är ett system som innehåller fjädrar och stötdämpare som kopplar samman ett fordon med dess hjul. Fjädringssystemet tillåter att hjulen och bilchassit rör sig relativt varandra och har som uppgift att bidra till både god väghållning och till att göra färden bekväm. För att designa ett fjädringssystem som hanterar båda dessa uppgifter på ett tillfredställande sätt behöver man hitta en kompromiss då uppgifterna till stor del är motstridiga. Förenklat uttryckt ger hård fjädring goda väghållningsegenskaper medan mjuk fjädring ger hög komfort.

Matematisk beskrivning av ett fjädringssystem

En enkel modell av ett fjädringssystem för en bil visas i figur 1. Modellen kallas för en quarter car-modell eftersom det är ett fjädringssystemet för ett hjul kopplat till en fjärdedel av bilens chassi. Modellen kan göras mer komplex genom att ta med flera hjul och en större del av chassit i så kallade half car-(två hjul) eller full car-(fyra hjul) modeller.

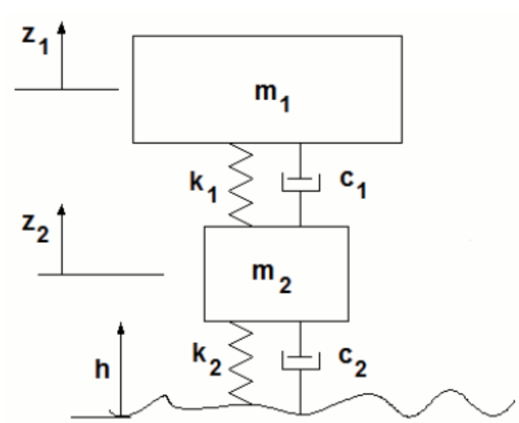

Figure 1: Fjädringssystem i en quarter car modell.

I figur 1 motsvarar m_1 massan för chassi-delen och m_2 massan för hjulet, k_1 och k_2 är fjäderkonstanter och c_1 och c_2 är dämpningskonstanter. h är vägunderlagets vertikala position och z_1 och z_2 motsvarar förflyttning av de två fjädrarna.

På en bil tillhör fjäderkonstanten k_2 den fjäder som har kontakt med vägen via hjulet och fjäderkonstanten k_1 den fjäder som är kopplad till bilkupén.
Rörelseekvationer för quarter car-systemet ges av de ordinära differentialekvationerna (ODE) för z_1 och z_2,

$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{z}_1 + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k_1(z_1 - z_2) = 0,\\
&m_2\ddot{z}_2 + c_1(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{h}) + k_1(z_2 - z_1) + k_2(z_2 - h) = 0,
\end{aligned}
$$

där vi använt notationen $\frac{d}{dt}z_1 = \dot{z}_1$, $\frac{d^2}{dt^2}z_1 = \ddot{z}_1$. Rörelseekvationerna kan också skrivas på matris-vektor-form,

$$
\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}, \tag{1}
$$

där koordinaterna och deras tidsderivator är

$$
\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix},
$$

och systemmatriserna är

$$
\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 h + c_2\dot{h} \end{bmatrix}.
$$

$\boldsymbol{M}$ kallas massmatrisen, $\boldsymbol{C}$ dämpningsmatrisen, $\boldsymbol{K}$ styvhetsmatrisen och $\boldsymbol{F}$ kraftvektorn. Notera att vägunderlagets påverkan i systemet kommer in genom kraftvektorn $\boldsymbol{F}$.

Låt höjden av vägunderlaget beskrivas av funktionen

$$
h(t) = \begin{cases} \frac{H}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi v t}{L}\right)\right), & t \le L/v, \\ 0, & t > L/v, \end{cases} \tag{2}
$$

vilket beskriver ett gupp med höjd H och längd L.
Parametrar till ekvation (1) återfinns i tabell 1.

parameter	värde [enhet]
m_1	460 [kg]
m_2	60 [kg]
$k_{1,ref}$	5500 [kg/s^2]
$k_{2,ref}$	130000 [kg/s^2]
c_1	300 [kg/s]
c_2	1300 [kg/s]
v	60/3.6 [m/s]
H	0.2 [m]
L	1 [m]

Table 1: Parametrar till rörelseekvationerna (1).

Numerisk lösning av ODE: tidsintegrering

U1: Skriv om rörelseekvationerna (1) som ett första ordningens system i tiden på formen

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}(t), \tag{3}$$

där $\boldsymbol{v} = [z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2]^T$ är vektorn som innehåller de okända variablerna.

U2:

a) Skriv en funktion `roadprofile.m` som innehåller beskrivningen av guppet från (2). Skriv även en funktion `quartercar.m` som innehåller systemet från **U1** och använder den första funktionen. Dessa två funktioner testas med obligatoriska uppgifter i Matlab Grader.

Ni ska nu lösa problemet numeriskt genom att integrera i tiden. Kopiera först de två funktioner ni skrivit i Matlab Grader i **U2a)** och spara dem i varsin m-fil med namnen `roadprofile.m` och `quartercar.m`. Skriv sedan en kod som använder de två funktionerna och löser problemet numeriskt med

b) Framåt Euler.

c) Matlabs inbyggda funktion `ode45`.

Antag att de vertikala hastigheterna och positionerna är noll initialt. Använd parametrarna i tabellen, med $k_1 = k_{1,ref}$ och $k_2 = k_{2,ref}$. Ni kan själva välja sluttid för simuleringarna, men tänk på att sluttiden bör vara betydligt längre än tiden det tar att köra över guppet för att effekten på fjädringssystemet ska synas ordentligt.

i) Plotta den numeriska lösningen för z_1 och z_2 som funktion av tiden då du använt `ode45` med relativ tolerens 10^{-6}. Vad blir det maximala utslaget för z_1 och z_2 och vad innebär det för passagerarna?

ii) Bifoga en plot som innehåller tidstegen för `ode45`. Hur stora är tidstegen för `ode45` och hur förändras de med tiden? Förklara förändringarna i tidsstegen över tid genom att studera plottarna för den numeriska lösningen och tidsstegen. (Kom ihåg parametern `Refine` som du vill ändra beroende på om du vill ha en snygg plot eller se hur stora tidssteg som använts).

iii) Jämför lösningarna för Eulers metod med $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ och $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ med lösningen med `ode45` (plotta lösningarna för z_2 i samma figur) och kommentera.

Styva problem: stabilitet, noggrannhet och implicita metoder

För att bibehålla ett fast väggrepp som samtidigt inte leder till en alltför skakig färd för passagerarna vill man typiskt ha hård fjädring (dvs en stor fjäderkonstant) vid hjulen och mjuk fjädring (liten fjäderkonstant) vid bilkupén. Detta kan leda till en god kompromiss för de egenskaper fjädringssystemet bör ha. För de matematiska ekvationerna leder stor variation i fjäderkonstanterna till ett så kallat styvt system, som är mer utfordrande att lösa numeriskt jämfört med ett icke-styvt problem. Styva system kännetecknas av att olika komponenter i systemet förändras på olika tidsskalor. En komponent som varierar långsamt kanske behöver lösas för en lång tid medan en annan innehåller snabba variationer under en kortare tid och att det sedan inte händer så mycket. Här ska ni studera hur olika numeriska metoder för tidsintegrering beter sig beroende på problemets egenskaper samt val av tidssteg.

U3: i) Antag att systemmatrisen A i systemet från **U1** är diagonaliserbar och att egenvärdena är $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Härled stabilitetsvillkoret för framåt Euler, och uttryck det på formen

$$\Delta t \leq \Delta t_{max} = \min_{1 \leq k \leq 4} F(\lambda_k).$$

ii) Beräkna stabilitetsvillkoret för Euler framåt för systemet när parametrar från tabell 1 används, dvs ta fram ett numeriskt värde på Δt_{max}. Hur stort blir det maximala tidsteget Δt_{max} för vilket stabilitetsvillkoret uppfylls? Uppfyller $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ som användes i **U2** iii) stabilitetsvillkoret?

iii) Kör koden ni skrev i **U2 b)** med $\Delta t = \alpha \Delta t_{max}$ för $\alpha = 0.9, 1, 1.1, 1.5$. Vad händer? Bifoga plottar.

iv) Låt oss nu betrakta ett styvare system, med hårdare fjädring vid hjulet. Välj $k_2 = 100 k_{2,ref}$ och räkna ut det nya maximala tidsteget Δt_{max}. Kör koden med $\Delta t = 0.1 \Delta t_{max}$ och bifoga en plot över z_1 och z_2 som funktion av tiden med Δt tydligt angivet.

För explicita metoder och styva system kan stabilitetsvillkoret leda till en skarp begränsning på tidssteget. Ett alternativ är att istället använda en implicit tidsintegreringsmetod. Implicita metoder har generellt mycket goda stabilitetsegenskaper. En nackdel är att ett linjärt ekvationssystem behöver lösas i varje tidssteg. För många styva problem blir det ändå mer effektivt att använda en implicit metod då det går att ta ett mycket större tidssteg jämför med för en explicit metod.
Med en parameter θ och ett tidssteg Δt så kan vi skriva en diskretisering av systemet i (3) som

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{v}^n + \Delta t \left((1-\theta)(A\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}(t_n)) + \theta(A\boldsymbol{v}^{n+1} + \boldsymbol{g}(t_{n+1})) \right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

där index n indikerar en lösning vid tiden $n\Delta t$.
Med $\theta = 0$ så ger detta diskretiseringen med framåt Euler, för $\theta = 1$ bakåt Euler, och för $\theta = 1/2$ så kallas diskretiseringen den implicita trapetsmetoden.
Att en metod är stabil betyder inte att den är noggrann. Både stabilitet och noggrannhet är viktiga egenskaper när man väljer en numerisk metod för tidsintegrering. Ett lämpligt alternativ till att använda en första ordningens implicit metod (som Euler bakåt) med ett litet tidssteg

(nödvändigt för tillräcklig noggrannhet) är att använda en implicit metod med högre noggrannhetsordning. På så sätt går det att ta relativt stora tidssteg även för styva problem utan att kompromissa med noggrannheten.

U4: a) (FRIVILLIG) Gör uppgift U4 a) i Matlab Grader. Det är en förberedelseuppgift för **U4 b)**.

b) Gör en implementation av den implicita trapetsmetoden ($\theta = 1/2$).

i) Använd parametervärden och initialvillkor för det styvare problemet i **U3** iv), så att $k_2 = 100k_{2,ref}$. Kör koden med tidssteget $\Delta t = \alpha \Delta t_{max}$ med det Δt_{max} som beräknats för Euler framåt, för $\alpha = 1, 10, 100$. Vad händer? Stämmer det med teorin?

ii) Vi vill nu göra en konveregensstudie för metoden över intervallet fram till $t = 0.05$ s med $k_2 = 100k_{2,ref}$. Mät normen av felet som det maximala absolutbeloppet av felet i komponenten z_2 över tidsintervallet.

En mycket noggrann numerisk lösning kan användas istället för en exakt (analytisk) lösning för att mäta felen. En sådan *referenslösning* kan skapas med ode45 med en strikt feltolerans (tex relativa och absoluta feltoleransen satt till 10^{-9}). Ändra inparametern `tspan` för att få lösningen i de tidpunkter du vill.

Välj ett Δt_0 för implicita trapetsmetoden. Kör koden med $\Delta t = \alpha \Delta t_0$ för $\alpha = 1, 1/2, 1/4, 1/8$ och beräkna felen och noggrannhetsordningen. Om du inte ser den noggrannhetsordning du förväntar dig: prova att ta ett mindre Δt_0.

Uppgifter: kategori och bedömning

Kategori 1

Följande uppgifter tillhör kategori 1: U1, U3 i-ii, U4 b).
För dessa uppgifter ska fullständig skriftlig rapport lämnas in.

Kategori 2

Resterande obligatoriska uppgifter tillhör kategori 2, dvs U2 b) och c), U3 iii-iv.
I rapporten räcker det för dessa uppgifter att endast ange kort svar med eventuella siffervärden som efterfrågas, samt "Uppgiften diskuteras under kamratåterkoppling. Kod och plottar återfinns i appendix XX", med "XX" korrekt angivet.

Bedömning

Vi gör en helhetsbedömning av rapporten. Alla fyra uppgifterna ska göras och de numeriska metoderna ska i stort sett vara korrekt implementerade (detta visas lättast genom att t ex noggrannhetsordning eller konvergensordning är korrekta). Alla plottar och numeriska värden behöver inte vara helt korrekta för att bli godkänd.

Komplettering

Om rapporten inte bedöms godkänd vid inlämningen ges möjlighet att komplettera enligt kommentarer. Om kamratåterkoppling saknas behöver man lämna in en fullständig rapport även för uppgifter av kategori 2.