Beräkningsuppgift

Z14: Samuel Bengtsson, Simon Sjöling, Filip Wramdemark

February 24, 2021

A1:

Utifrån lägevektorn i $\boldsymbol{O_{\xi\eta z}}$ så bildas följande lägevektor i $\boldsymbol{O_{xyz}}$ med trigonometri:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t)\cos(\omega_0 t) \\ \xi(t)\sin(\omega_0 t) \\ f(\xi(t)) \end{pmatrix}$$

Vid derivering av lägevektorn fås:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} -\omega_0\xi(t)\sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)\dot{\xi(t)} \\ \omega_0\xi(t)\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\dot{\xi(t)} \\ \dot{f}(\xi(t))\dot{\xi}(t) \end{pmatrix}$$

Derivering av hastighetsvektorn ger accelerationen:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} -\omega_0^2\xi(t)\cos(\omega_0 t) - 2\omega_0\sin(\omega_0 t)\dot{\xi}(t) + \cos(\omega_0 t)\ddot{\xi}(t) \\ -\omega_0^2\xi(t)\sin(\omega_0 t) + 2\omega_0\cos(\omega_0 t)\dot{\xi}(t) + \sin(\omega_0 t)\ddot{\xi}(t) \\ f'(\xi(t))\ddot{\xi}(t) + f''(\xi(t))\dot{\xi}(t)^2 \end{pmatrix}$$

A2:

Tangentvektorn längs med röret erhålls genom att derivera lägevektorn av bollen med avseende på ξ:

$$\boldsymbol{T} = \frac{d}{d\xi}\boldsymbol{r}(t) = \frac{d}{d\xi}\begin{pmatrix} \xi(t)\cos(\omega_0 t) \\ \xi(t)\sin(\omega_0 t) \\ f(\xi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) \\ f'(\xi(t)) \end{pmatrix}$$

Utifrån detta tecknas enhetsvektorn $\boldsymbol{e}_s$ längs med röret som:

$$\boldsymbol{e}_s = \frac{e_x\cos(\omega_0 t) + e_y\sin(\omega_0 t) + e_z f'(\xi(t))}{\sqrt{\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) + f'(\xi(t))^2}}$$

Följande likhet ställs upp:

$$\sum \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_s = m\ddot{r}(t)\cdot\boldsymbol{e}_s$$

Vänsterledet i likheten ger:

$$\sum \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_s = \frac{-gmf'(\xi(t))}{\sqrt{\left(f'(\xi(t))\right)^2 + 1}}$$

Högerledet i likheten ger:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \boldsymbol{e}_s = \frac{m\left(-\omega_0^2\xi(t) + \left(f'(\xi(t))\right)^2 \ddot{\xi}(t) + f'(\xi(t))f''(\xi(t))\dot{\xi}(t)^2 + \ddot{\xi}(t)\right)}{\sqrt{\left(f'(\xi(t))\right)^2 + 1}}$$

Då längden av $\boldsymbol{e}_s$ finns i täljaren i båda uttryck samt att m är en genmensam faktor så kan dessa stryckas och därmed kan likheten tecknas som:

$$gf'(\xi(t)) = \omega_0^2\xi(t) - f'(\xi(t))^2\ddot{\xi}(t) - f'(\xi(t))f''(\xi(t))\dot{\xi}(t)^2 - \ddot{\xi}(t)$$

Python-kod:

```
from sympy import *
import numpy as np

# Symbolisk beräkning av differential ekvationen.
def calc_diff():

    # A1

    # Definerar variabler och funktioner
    t, omega, m, g = symbols("t, , m, g")
    xi, f = symbols(", f", cls=Function)
    xi_t = xi(t)
    f_xi = f(xi_t)

    # Lägeverktorn defineras
    x = xi_t * cos(omega*t)
    y = xi_t * sin(omega*t)
    z = f_xi

    r = np.array([x,y,z])

    ...
```

```python
# Hastighet utvinns genom derivering av lägevektorn.
v = np.array([
    diff(x, t).simplify(),
    diff(y, t).simplify(),
    diff(z, t).simplify()
])

# Accelerationen utvinns genom dervering av lägevektorn 2 ggr.
a = np.array([
    diff(x, t, t).simplify(),
    diff(y, t, t).simplify(),
    diff(z, t, t).simplify()
])


# A2

# Tangentvektorn fås genom att derivera r med avseende på xi(t).
T = np.array([
    x.diff(xi_t),
    y.diff(xi_t),
    z.diff(xi_t)
])

# Enhetsvektorn längsmed
e_s = T / sqrt(np.sum(T**2))

# Vänsterledet.
VL = np.dot(m*a, e_s)

# Summan av krafterna på massan.
F = np.array([0,0,-m*g])

# Högerledet.
HL = np.dot(F, e_s).simplify()

# Deklarerar likheten.
diffEq = Eq(VL, HL)

return diffEq
```