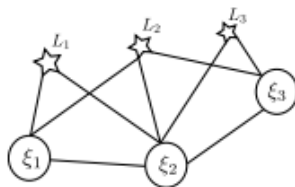❶ 某时刻，SLAM 系统中相机和路标点的观测关系如下图所示，其中 $\xi$ 表示相机姿态，$L$ 表示观测到的路标点。当路标点 $L$ 表示在世界坐标系下时，第 $k$ 个路标被第 $i$ 时刻的相机观测到，重投影误差为 $\mathbf{r}(\xi_i, L_k)$。另外，相邻相机之间存在运动约束，如 IMU 或者轮速计等约束。
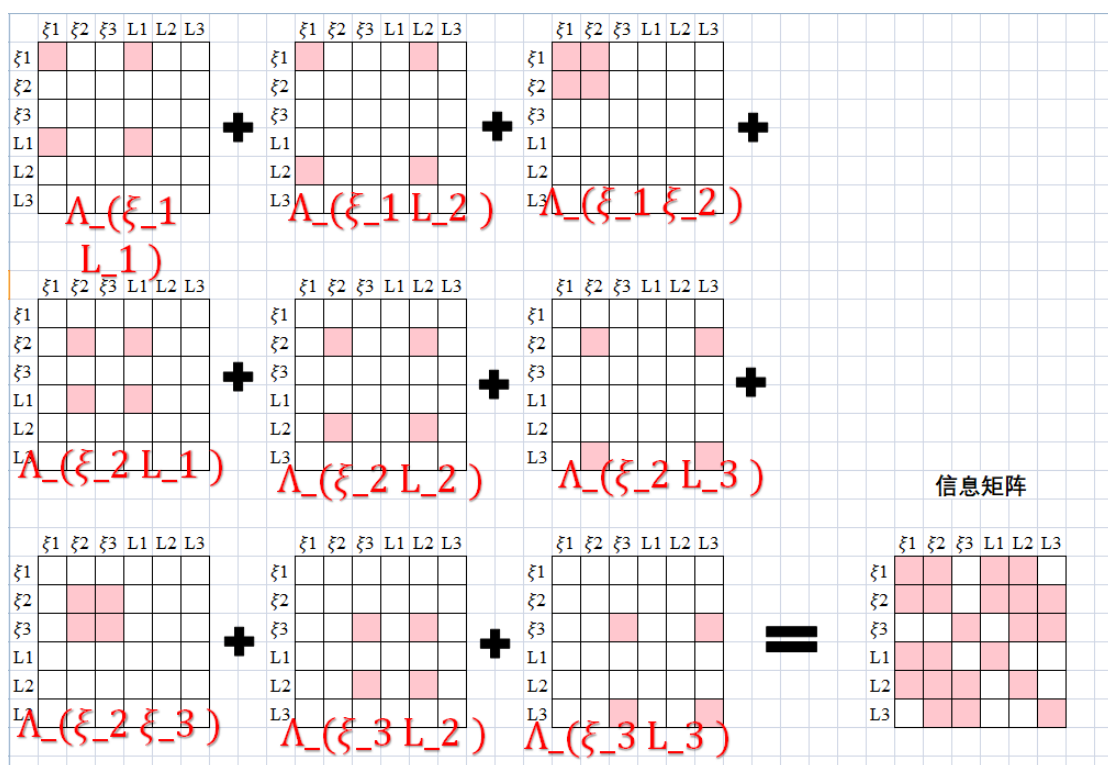


1. 请绘制上述系统的信息矩阵 $\mathbf{\Lambda}$.
2. 请绘制相机 $\xi_1$ 被 marg 以后的信息矩阵 $\mathbf{\Lambda}'$.
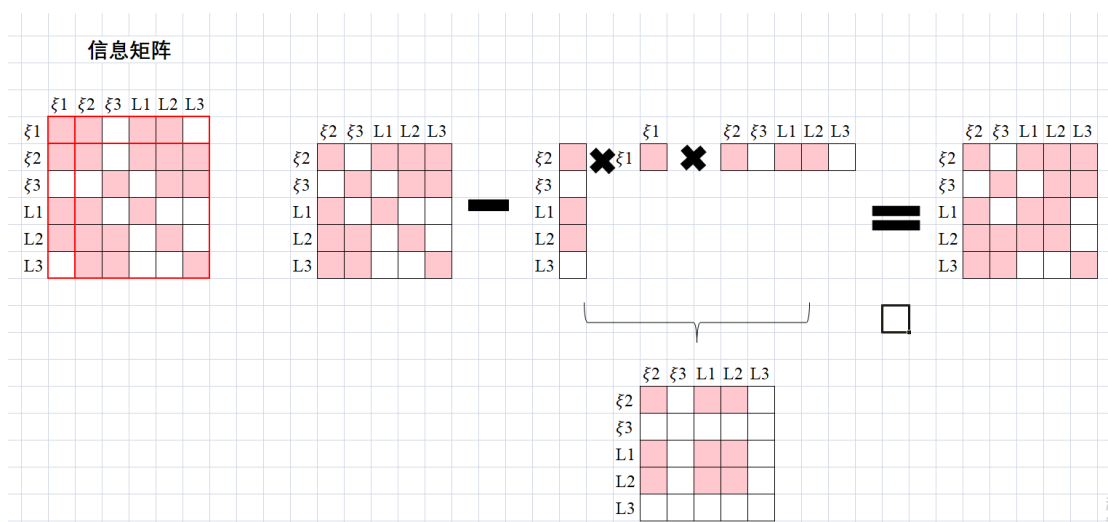
1、信息矩阵的绘制：

由图可知，图中一共有 6 个状态量，分别是 $L_1 L_2 L_3 \xi_1 \xi_2 \xi_3$，残差关系为：

$$
r = \begin{bmatrix}
r(\xi_1, L_1) \\
r(\xi_1, L_2) \\
r(\xi_1, \xi_2) \\
r(\xi_2, L_1) \\
r(\xi_2, L_2) \\
r(\xi_2, L_3) \\
r(\xi_2, \xi_3) \\
r(\xi_3, L_2) \\
r(\xi_3, L_3)
\end{bmatrix}
$$

这样绘制出来的信息矩阵为：

$\Lambda\_(\xi\_1 L\_1)$　$\Lambda\_(\xi\_1 L\_2)$　$\Lambda\_(\xi\_1 \xi\_2)$

$\Lambda\_(\xi\_2 L\_1)$　$\Lambda\_(\xi\_2 L\_2)$　$\Lambda\_(\xi\_2 L\_3)$　信息矩阵

$\Lambda\_(\xi\_2 \xi\_3)$　$\Lambda\_(\xi\_3 L\_2)$　$\Lambda\_(\xi\_3 L\_3)$

2，在 marg 了$\xi_1$之后会



信息矩阵

❷ 阅读 《Relationship between the Hessian and Covariance Matrix for Gaussian Random Variables》．证明信息矩阵和协方差的逆之间的关系。

证明$H(\theta) = \Sigma_\theta^{-1}$

$$H(\theta^*) = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_i}\right)\right]_{\theta=\theta^*}$$

$$\approx \frac{1}{\Delta\theta_i}\left[\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_i}\bigg|_{\theta=\theta^*+\frac{\Delta\theta_i}{2}} - \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta_i}\bigg|_{\theta=\theta^*-\frac{\Delta\theta_i}{2}}\right]$$

$$\approx \frac{1}{\Delta\theta_i}\left[\frac{J(\Delta\theta_i+\theta^*)-J(\theta^*)}{\Delta\theta_i} - \frac{J(\theta^*)-J(\theta^*-\Delta\theta_i)}{\Delta\theta_i}\right]$$

$$= \frac{J(\theta^*+\Delta\theta_i)+J(\theta^*-\Delta\theta_i)-2J(\theta^*)}{(\Delta\theta_i)^2}$$

$$\because J(\theta) = -P(\theta) = (2\pi\Sigma_\theta)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\theta-\theta^*)^T\Sigma_\theta^{-1}(\theta-\theta^*)\right]$$

$$J(\theta) = -\ln P(\theta) = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln\Sigma_\theta + \frac{(\theta-\theta^*)^2}{2\Sigma_\theta}$$

$$\therefore \text{上式} = \frac{1}{(\Delta\theta_i)^2}\left\{\left[\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\Sigma_\theta + \frac{(\theta-\theta^*)^2}{2\Sigma_\theta}\right]\right\}$$

为了避免冲突，$\theta^*$ 用均值 $\mu$ 符号代替。

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{(\Delta\theta_i)^2}\left[\left[\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\Sigma_\theta + \frac{(\theta^*+\Delta\theta_i-\mu)^2}{2\Sigma_\theta}\right] + \left[\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\Sigma_\theta + \frac{(\theta^*-\Delta\theta_i-\mu)^2}{2\Sigma_\theta}\right]\right.$$
$$\left. - 2\left[\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\Sigma_\theta + \frac{(\theta^*-\mu)^2}{2\Sigma_\theta}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{(\Delta\theta_i)^2}\left[\frac{(\theta^*-\mu+\Delta\theta_i)^2 + (\theta^*-\mu-\Delta\theta_i)^2 - 2(\theta^*-\mu)^2}{2\Sigma_\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{(\Delta\theta_i)^2} \cdot \frac{(\Delta\theta_i)^2}{\Sigma_\theta}$$

$$= \Sigma_\theta^{-1}$$

证毕

❸ **请补充作业代码中单目 Bundle Adjustment 信息矩阵的计算，并输出正确的结果。正确的结果为：奇异值最后 7 维接近于 0，表明零空间的维度为 7.**

```
H.block(i * 6, i * 6, 6, 6) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Ti;
/// 请补充完整作业信息矩阵块的计算
H.block(j * 3 + 6 * poseNums, j * 3 + 6 * poseNums, 3, 3) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Pj;
H.block(j * 3 + 6 * poseNums, i * 6, 3, 6) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Ti;
H.block(i * 6, j * 3 + 6 * poseNums, 6, 3) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Pj;
```

5.03151e-16

4.9776e-16

4.38462e-16

3.95833e-16

8.88772e-17

4.41471e-17