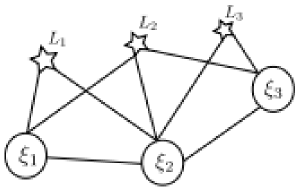
作业

❶ 某时刻，SLAM 系统中相机和路标点的观测关系如下图所示，其中 ξ 表示相机姿态，L 表示观测到的路标点。当路标点 L 表示在世界坐标系下时，第 k 个路标被第 i 时刻的相机观测到，重投影误差为 $\mathbf{r}(\xi_i, L_k)$。另外，相邻相机之间存在运动约束，如 IMU 或者轮速计等约束。



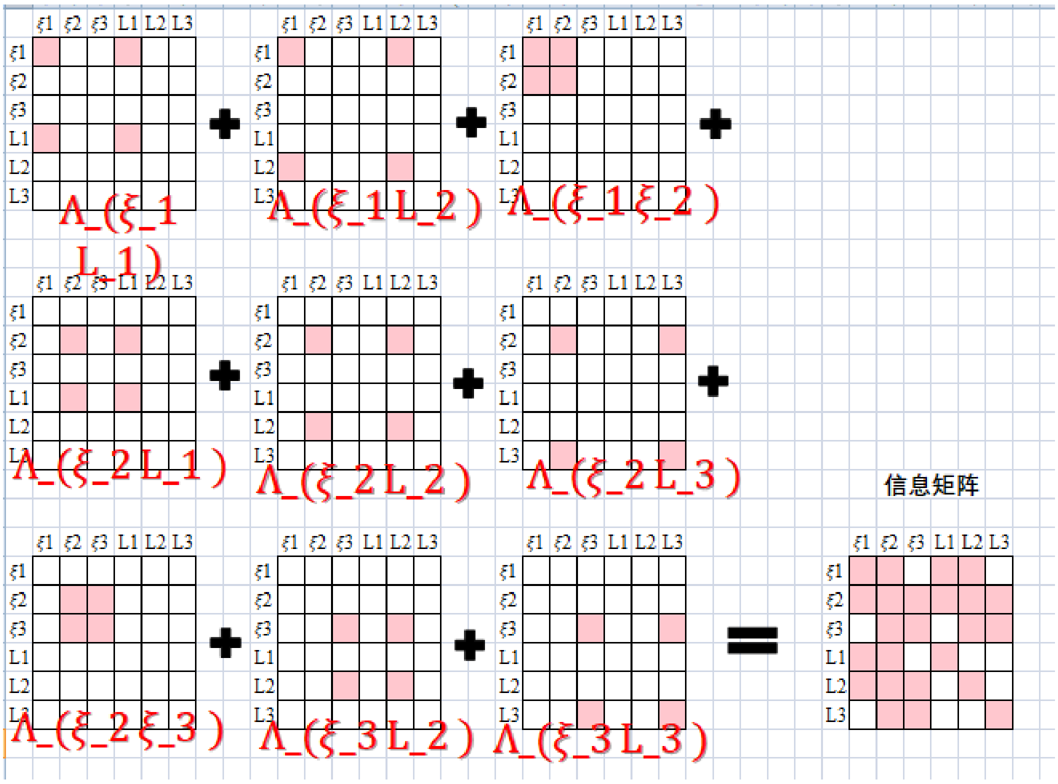
1 请绘制上述系统的信息矩阵 $\mathbf{\Lambda}$.
2 请绘制相机 ξ_1 被 marg 以后的信息矩阵 $\mathbf{\Lambda}'$.

1，信息矩阵的绘制：

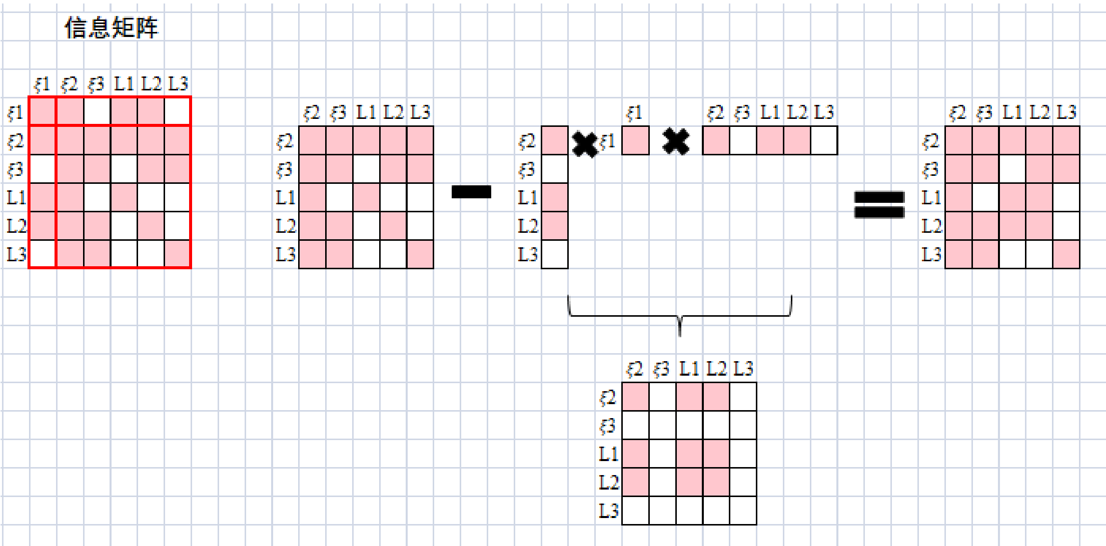
由图可知，图中一共有 6 个状态量，分别是$L_1 L_2 L_3 \xi_1 \xi_2 \xi_3$，残差关系为：

$$r = \begin{bmatrix} r(\xi_1, L_1) \\ r(\xi_1, L_2) \\ r(\xi_1, \xi_2) \\ r(\xi_2, L_1) \\ r(\xi_2, L_2) \\ r(\xi_2, L_3) \\ r(\xi_2, \xi_3) \\ r(\xi_3, L_2) \\ r(\xi_3, L_3) \end{bmatrix}$$

这样绘制出来的信息矩阵为：



2，在 marg 了ξ_1之后会



❷ 阅读《Relationship between the Hessian and Covariance Matrix for Gaussian Random Variables》. 证明信息矩阵和协方差的逆之间的关系。

证明$\mathrm{H}(\theta) = \Sigma_{\theta}^{-1}$

$$H(\theta^*) = \left[\frac{\partial}{\partial\theta_l}\left(\frac{\partial J(\theta)}{\partial\theta_l}\right)\right]_{\theta=\theta^*}$$

$$\approx \frac{1}{\Delta\theta_l}\left[\frac{\partial J(\theta)}{\partial\theta_l}\bigg|_{\theta=\theta^*+\frac{\Delta\theta_l}{2}} - \frac{\partial J(\theta)}{\partial\theta_l}\bigg|_{\theta=\theta^*-\frac{\Delta\theta_l}{2}}\right]$$

$$\approx \frac{1}{\Delta\theta_l}\left[\frac{J(\Delta\theta_l+\theta^*) - J(\theta^*)}{\Delta\theta_l} - \frac{J(\theta^*) - J(\theta^*-\Delta\theta_l)}{\Delta\theta_l}\right]$$

$$= \frac{J(\theta^*+\Delta\theta_l) + J(\theta^*-\Delta\theta_l) - 2J(\theta^*)}{(\Delta\theta_l)^2}$$

$$\because \cancel{J(\theta)}\ P(\theta) = (2\pi\Sigma_\theta)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\theta-\theta^*)^T\Sigma_\theta^{-1}(\theta-\theta^*)\right]$$

$$J(\theta) = -\ln P(\theta) = \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \left(\frac{1}{2}\right)\ln\Sigma_\theta + \frac{(\theta-\theta^*)^2}{2\Sigma_\theta}$$

$$\cancel{\therefore 上式 = \frac{1}{(\Delta\theta)^2}\left\{\left[\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\Sigma_\theta + \frac{(\theta-\theta^*)^2}{2\Sigma_\theta}\right]\right\}}$$

为了避免冲突. θ^* 用均值 μ 符号代替.

$$\therefore 原式 = \frac{1}{(\Delta\theta)^2}\left\{\left[\frac{1}{2}\cancel{\ln(2\pi)} - \frac{1}{2}\cancel{\ln\Sigma_\theta} + \frac{(\theta^*+\Delta\theta_l-\mu)^2}{2\Sigma_\theta}\right] + \left[\frac{1}{2}\cancel{\ln(2\pi)} - \frac{1}{2}\cancel{\ln\Sigma_\theta} + \frac{(\theta^*-\Delta\theta_l-\mu)^2}{2\Sigma_\theta}\right] - 2\left[\frac{1}{2}\cancel{\ln(2\pi)} - \frac{1}{2}\cancel{\ln\Sigma_\theta} + \frac{(\theta^*-\mu)^2}{2\Sigma_\theta}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{(\Delta\theta_l)^2}\left[\frac{(\theta^*-\mu+\Delta\theta_l)^2 + (\theta^*-\mu-\Delta\theta_l)^2 - 2(\theta^*-\mu)^2}{2\Sigma_\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{(\Delta\theta_l)^2}\cdot\frac{(\Delta\theta_l)^2}{\Sigma_\theta}$$

$$= \Sigma_\theta^{-1}$$

证毕

❸ 请补充作业代码中单目 Bundle Adjustment 信息矩阵的计算，并输出正确的结果。正确的结果为：奇异值最后 7 维接近于 0，表明零空间的维度为 7.

```
H.block(i * 6, i * 6, 6, 6) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Ti;
/// 请补充完整作业信息矩阵块的计算
H.block(j * 3 + 6 * poseNums, j * 3 + 6 * poseNums, 3, 3) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Pj;
H.block(j * 3 + 6 * poseNums, i * 6, 3, 6) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Ti;
H.block(i * 6, j * 3 + 6 * poseNums, 6, 3) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Pj;
```

5.03151e-16

4.9776e-16

4.38462e-16

3.95833e-16

8.88772e-17

4.41471e-17