线特征介绍

权美香

2019 年 10 月 15 日

1 Line Representation

我们使用两种形式的线特征表示法:”plucker coordinate” 和”orthonormal representation”。orthonormal representation 用于优化，plucker coordinate 用来做 line initialization, transformation，projection 和 endpoint trimming.

1.1 Plucker Line Coordinate

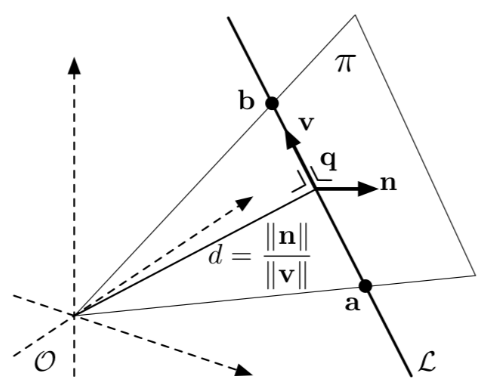

图 1: plucker line coordinate

给定 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的两个 3D 端点 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$，该条直线的 plucker coordinate 为:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ \mathbf{b} - \mathbf{a} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 表示原点与直线 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 构成的平面的法向量，从而确定直线所在的平面。$\boldsymbol{v}$ 表示直线 $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ 的方向向量，从而决定直线在该平面的方向。该直线与原点的距离则为：

$$\begin{aligned} d &= \frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{ab}\|}{\|\mathbf{ab}\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\|}{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|} \\ &= \frac{\|\mathbf{n}\|}{\|\mathbf{v}\|} \end{aligned} \tag{2}$$

从而，可以根据 plucker line coordinate 唯一确定空间上的一条直线。plucker coordinate 有 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ 的约束，从而不能直接用于传统的优化方法。

1.2 Orthonormal Representation

三维空间的直线是 4 个自由度，但是 plucker coordinate 是 6 个自由度。在图优化里，额外的自由度将导致计算代价的增加和系统的不稳定。而且由于 plucker coordinate 的参数间存在如上的约束，从而在优化时使用 4 个参数的 orthonormal representation 来表示线特征。从线的 plucker coordinate，我们获得其 orthonormal representation $(\mathbf{U}, \mathbf{W}) \in SO(3) \times SO(2)$ 为：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = [\mathbf{n}|\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} & \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{v}\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\mathbf{n}\| & 0 \\ 0 & \|\mathbf{v}\| \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \|\mathbf{n}\| & 0 \\ 0 & \|\mathbf{v}\| \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中 $\mathbf{U} \in SO(3)$，$\omega_1 = \frac{\|\mathbf{n}\|}{\sqrt{\|\mathbf{n}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2}}$，$\omega_2 = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\sqrt{\|\mathbf{n}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2}}$，$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega_1 & -\omega_2 \\ \omega_2 & \omega_1 \end{bmatrix} \in SO(2)$. 从而，我们可用 $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{Log}(\mathbf{U}) \in \mathbb{R}^3$ 和 $\theta = acos(\omega_1) \in \mathbb{R}^1$ 来表示直线的待优化的参数 $\mathbf{p}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}, \theta)$，且以左乘的形式更新 orthonormal representation 为 $\mathbf{U} \leftarrow \mathrm{Exp}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{U}$，$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{R}(\theta)\mathbf{W}$. 从 orthonormal representation 转换为线的 plucker coordinate 为：

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \omega_1 \mathbf{u}_1 \\ \omega_2 \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \tag{4}$$

其中 $\mathbf{u}_i$ 是 $\mathbf{U}$ 的第 i 列。

2 Initialization

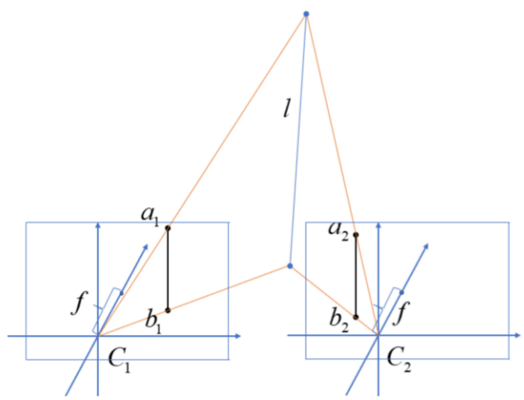

图 2: line initialization

2.1 plane construction

给定 camera center $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^3$ 和相平面上直线的两个端点的 homogeneous normalized image coordinates $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^3$, $\bar{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$，我们可以计算出包含这三个点的平面 $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^4$ 为：

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{C}) \times (\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{C}) \\ -\mathbf{C} \cdot (\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}) \end{bmatrix} \tag{5}$$

2.2 line initialization

如图 2，直线 $\boldsymbol{l}$ 在相机 $\mathbf{C}_1$ 和 $\mathbf{C}_2$ 的相平面上的投影为 $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2$。为了计算在世界坐标系下的直线 $\boldsymbol{l}$ 的坐标，我们首先计算每个相平面上的端点在世界坐标系下的 homogeneous normalized image coordinates $\bar{\mathbf{a}}_1$, $\bar{\mathbf{b}}_1$，$\bar{\mathbf{a}}_2$,

$\bar{\mathbf{b}}_2$ 和 camera center $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ 在世界坐标系下的 position。然后我们可通过公式(5)来构建在世界坐标系下的过点 $\mathbf{a}_1\mathbf{C}_1\mathbf{b}_1$ 的平面 $\boldsymbol{\pi}_1$ 和过点 $\mathbf{a}_2\mathbf{C}_2\mathbf{b}_2$ 的平面 $\boldsymbol{\pi}_2$。这两个反投影平面的交线即为直线 $\boldsymbol{l}$，则直线 $\boldsymbol{l}$ 在世界坐标系下的 plucker matrix 为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}}^* &= \boldsymbol{\pi}_1 {\boldsymbol{\pi}_2}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{\pi}_2 {\boldsymbol{\pi}_1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\mathcal{L}}^* &= \begin{bmatrix} [\mathbf{v}]_\times & \mathbf{n} \\ -\mathbf{n}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

从而我们可以从 plucker matrix 里提取出 plucker line coordinate $\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$。

3 Endpoint Trimming

我们使用的所有几何计算都将 3D 直线认为是无限长的直线，但从实际环境中提取出来的直线都存在两个端点。对于已求解的线的 plucker coordinate $\boldsymbol{l}$，为了计算相平面上的端点 $\mathbf{a}_1$ 对应的 3D 直线上的端点 $\mathbf{A}$，首先计算平面 $\mathbf{a}_1\mathbf{C}_1\mathbf{b}_1$ 的法向量：

$$\mathbf{a}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 \tag{7}$$

从而 $\mathbf{e}_1$ 的坐标为 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1$。通过公式(5)构建过点 $\mathbf{e}_1\mathbf{C}_1\mathbf{a}_1$ 的平面 $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{e}_1\mathbf{C}_1\mathbf{a}_1}$，则端点 $\boldsymbol{A}$ 就是 3D 直线 $\boldsymbol{l}$ 与平面 $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{e}_1\mathbf{C}_1\mathbf{a}_1}$ 的交点：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{n}]_\times & \mathbf{v} \\ -\mathbf{v}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{\mathcal{L}} \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{e}_1\mathbf{C}_1\mathbf{a}_1} \end{aligned} \tag{8}$$

对于每个 measurement 计算对应的 3D 直线的端点，且只在计算的新的端点超过当前端点时更新即可。

4 Measurement model

给定世界坐标系下的线的 plucker coordinate $\boldsymbol{\mathcal{L}}_W$，当前帧的位姿 $\mathbf{T}_B^W \in SE(3)$ 和相机-IMU 外参 $\mathbf{T}_C^B \in SE(3)$，我们如下构建线特征的测量模型。

首先我们将 3D 线特征从世界坐标系转到相机坐标系为:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_W^C &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_C^{B\,\mathrm{T}} \mathbf{R}_B^{W\,\mathrm{T}} & -\mathbf{R}_C^{B\,\mathrm{T}} \mathbf{p}_C^B - \mathbf{R}_C^{B\,\mathrm{T}} \mathbf{R}_B^{W\,\mathrm{T}} \mathbf{p}_B^W \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\mathcal{L}}_C &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}_C \\ \mathbf{v}_C \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{CW} \boldsymbol{\mathcal{L}}_W = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_W^C & [\mathbf{p}_W^C]_\times \mathbf{R}_W^C \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_W^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_W \\ \mathbf{v}_W \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

在相机坐标系下，我们假设与相平面上测量的直线上的两个端点 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 对应的直线 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_C$ 上的 3D 端点为 A, B。则 $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{KA}$, $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{KB}$, $\mathbf{n}_C = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\bar{\mathbf{l}} = \bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$，从而，线的投影方程为:

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{l}} &= \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{KA}) \times (\mathbf{KB}) = \det(\mathbf{K})(\mathbf{K}^{-1})^{\mathrm{T}} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \boldsymbol{\mathcal{K}} \mathbf{n}_C \\
\boldsymbol{\mathcal{K}} &= \begin{bmatrix} f_y & 0 & 0 \\ 0 & f_x & 0 \\ -f_y x_0 & -f_x y_0 & f_x f_y \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

从线的投影公式，线的投影方程只和 plucker line coordinate $\boldsymbol{\mathcal{L}}_C$ 的垂直分量 $\mathbf{n}_C$ 相关。给定图像上提取的线段 $\widetilde{\mathbf{l}}$ 的两个端点 $\widetilde{\mathbf{a}} = [u_a, v_a, 1]^{\mathrm{T}}$, $\widetilde{\mathbf{b}} = [u_b, v_b, 1]^{\mathrm{T}}$ 和投影预测得到的直线坐标 $\bar{\mathbf{l}}$，则线的重投影误差为测量的两个端点到投影预测的直线的距离:

$$
\mathbf{e}_l = \begin{bmatrix} \dfrac{\widetilde{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{l}}}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \\ \dfrac{\widetilde{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{l}}}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{11}
$$

5 jacobian of line reprojection error

线特征重投影误差 $\mathbf{e}_l$ 对投影预测直线 $\bar{\mathbf{l}}$ 的雅克比为:

$$
\frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial \bar{\mathbf{l}}} = \frac{1}{l_n} \begin{bmatrix} u_a - \dfrac{l_1 \widetilde{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{l}}}{l_n^2} & v_a - \dfrac{l_2 \widetilde{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{l}}}{l_n^2} & 1 \\ u_b - \dfrac{l_1 \widetilde{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{l}}}{l_n^2} & v_b - \dfrac{l_2 \widetilde{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{l}}}{l_n^2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \tag{12}
$$

其中，$l_n = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$.

由 $\bar{\mathbf{l}} = \boldsymbol{\mathcal{K}}\mathbf{n}_C$, 有:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{l}}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{K}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 6} \tag{13}$$

plucker line coordinate $\boldsymbol{\mathcal{L}}_C$ 对 $\boldsymbol{\mathcal{L}}_W$ 的雅克比为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_C}{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_W} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{CW} \in \mathbb{R}^{6\times 6} \tag{14}$$

plucker line coordinate 对 orthonormal representation 的雅克比为:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_W}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} -[\omega_1 \mathbf{u}_1]_\times & -\omega_2 \mathbf{u}_1 \\ -[\omega_2 \mathbf{u}_2]_\times & -\omega_1 \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 4} \tag{15}$$

plucker line coordinate $\boldsymbol{\mathcal{L}}_C$ 对 $\mathbf{T}_B^W$ 的雅克比为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_C}{\mathbf{T}_B^W} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{n}_C}{\mathbf{R}_B^W} & [\mathbf{R}_W^C \mathbf{v}_W]_\times \mathbf{R}_W^C \\ {\mathbf{R}_C^B}^{\mathrm{T}} [{\mathbf{R}_B^W}^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_W]_\times & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_C}{\mathbf{R}_B^W} &= {\mathbf{R}_C^B}^{\mathrm{T}} [{\mathbf{R}_B^W}^{\mathrm{T}} \mathbf{n}_W]_\times + [\mathbf{p}_W^C]_\times {\mathbf{R}_C^B}^{\mathrm{T}} [{\mathbf{R}_B^W}^{\mathrm{T}} \mathbf{v}_W]_\times + [\mathbf{R}_W^C \mathbf{v}_W]_\times {\mathbf{R}_C^B}^{\mathrm{T}} [{\mathbf{R}_B^W}^{\mathrm{T}} \mathbf{p}_B^W]_\times \in \mathbb{R}^{3\times 3} \end{aligned} \tag{16}$$

plucker line coordinate $\boldsymbol{\mathcal{L}}_C$ 对 $\mathbf{T}_C^B$ 的雅克比为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{L}}_C}{\mathbf{T}_C^B} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{n}_C}{\mathbf{R}_C^B} & [\mathbf{R}_W^C \mathbf{v}_W]_\times {\mathbf{R}_C^B}^{\mathrm{T}} \\ [\mathbf{R}_W^C \mathbf{v}_W]_\times & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_C}{\mathbf{R}_C^B} &= [\mathbf{R}_W^C \mathbf{n}_W]_\times + [\mathbf{p}_W^C]_\times [\mathbf{R}_W^C \mathbf{v}_W]_\times - [\mathbf{R}_W^C \mathbf{v}_W]_\times [\mathbf{p}_W^C]_\times \in \mathbb{R}^{3\times 3} \end{aligned} \tag{17}$$