

# 基于图优化(Graph-based) 激光SLAM方法



**主讲人 曾书格**

越凡创新技术负责人  
电子科技大学硕士





### Graph-based SLAM



1、Graph-based SLAM



2、非线性最小二乘原理



3、非线性最小二乘在SLAM中的应用



4、cartographer介绍



## Graph-based SLAM



1、Graph-based SLAM



2、非线性最小二乘原理



3、非线性最小二乘在SLAM中的应用



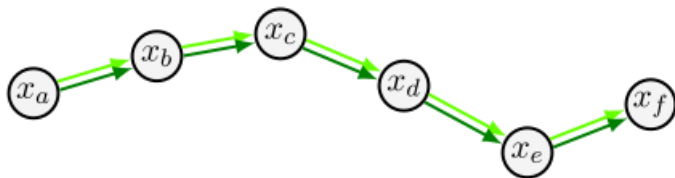
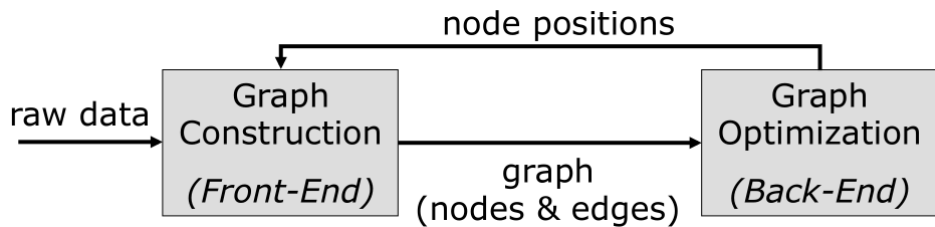
4、cartographer介绍



# Graph-based SLAM



## 数学概念



- 用一个图(Graph)来表示SLAM问题
- 图中的节点来表示机器人的位姿
- 两个节点之间的边表示两个位姿的空间约束
- Graph-based SLAM: 构建图, 并且找到一个最优的配置(各节点的位姿), 让预测与观测的误差最小



### Graph-based SLAM



1、Graph-based SLAM



2、非线性最小二乘原理



3、非线性最小二乘在SLAM中的应用



4、cartographer介绍



# 非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)



## 解决的问题

- 给定一个可以系统，其状态方程由 $f(x) = z$ 描述。其中：

$x$ 为该系统的状态向量—即需要估计的值

$f(x)$ 是一个非线性的映射函数

状态向量 $x$ ，可以通过非线性函数 $f(x)$ 映射得到 $z$

$z$ 表示系统的观测值，可以通过传感器进行直接观测

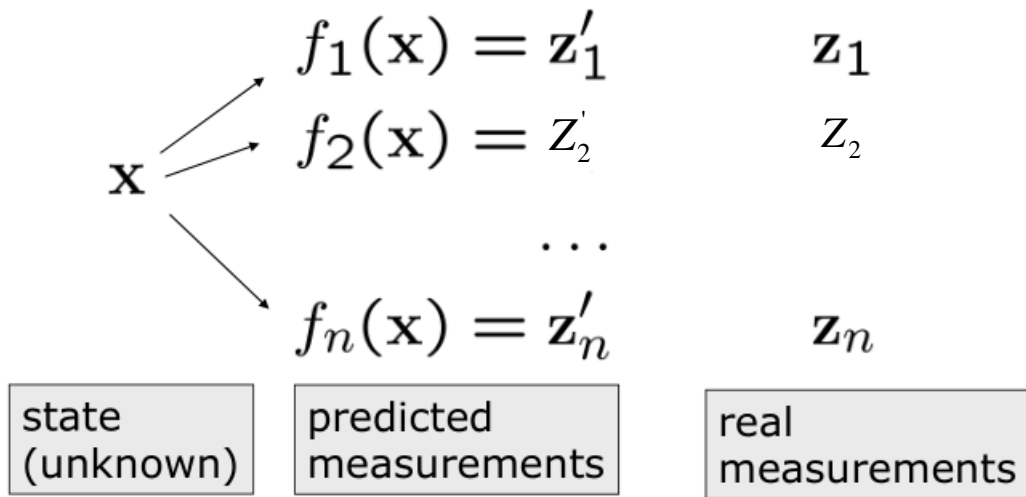
- 给定该系统的 $n$ 个混有噪声的观测值 $(z_1, \dots, z_n)$ ，估计状态向量 $x$ ，使得其经过 $f(x)$ 映射之后的预测值和观测值的误差最小
- 和线性最小二乘基本相同，只是状态方程 $f(x)$ 是一个非线性函数



## 非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)



### 示意图



- $x$ 为机器人的位置
- $f(x)$ 为传感器的观测模型  
(似然场模块或者重投影模型)
- $z$ 为传感器的观测值，激光数据或者图像特征点。
- 找到最优的 $x$ ，让预测和观测的误差最小。



## 非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)



### 误差函数

- 目标为最小化预测和观测的差，因此误差即为预测和观测的差：

$$e_i(x) = f_i(x) - z_i$$

- 假设误差服从高斯分布，因此其对应的信息矩阵为 $\Omega_i$ ，因此该观测值误差的平方定义为：

$$E_i(x) = e_i(x)^T \Sigma_i e_i(x)$$

- 因此，非线性最小二乘的目标函数为：

$$F(x) = \sum E_i(x) = \sum e_i(x)^T \Sigma_i e_i(x)$$

$$\min_x F(x)$$





## 非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)



### 解决的问题

- 目标函数：

$$\min_x F(x)$$

- 直接想法：求 $F(x)$ 关于变量 $x$ 的导数，令其等于0，求解方程既可。
- 对于线性问题，该方法可以正确，但是对于非线性问题不正确。
- $F(x)$ 为关于 $x$ 的非线性方程，能否把其化为关于 $x$ 的线性方程。

线性化：泰勒展开



## 非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)



### 线性化

- $F(x)$ 是关于 $x$ 的非线性函数的原因是，误差函数函数 $e_i(x)$ 是一个非线性函数。因此直接对误差函数 $e_i(x)$ 进行线性化即可：

$$e_i(x + \Delta x) = e_i(x) + J_i(x)\Delta x$$

- 其中 $J$ 为映射函数对状态向量 $x$ 的导数，称之为Jacobian矩阵。

$$J_i(x) = \left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right)$$

- 因此函数 $F(x)$ 的可化解为：

$$F(x + \Delta x) = \sum e_i(x + \Delta x)^T \Omega_i e_i(x + \Delta x)$$



## 非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)



### 线性化

- $F(x)$ 的化解:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= \sum e_i^T(x + \Delta x) \Sigma_i e_i(x + \Delta x) \\ &= \sum (e_i(x) + J_i \Delta x)^T \Sigma_i (e_i(x) + J_i \Delta x) \\ &= \sum e_i^T \Sigma_i e_i + e_i^T \Sigma_i J_i \Delta x + \Delta x^T J_i^T \Sigma_i e_i + \Delta x^T J_i^T \Sigma_i J_i \Delta x \\ &= \sum e_i^T \Sigma_i e_i + 2e_i^T \Sigma_i J_i \Delta x + \Delta x^T J_i^T \Sigma_i J_i \Delta x \\ &= \sum c_i + 2b_i^T \Delta x + \Delta x^T H_i \Delta x \end{aligned}$$



## 非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)



### 线性化

- $F(x)$ 的化解:

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= \sum c_i + 2b_i^T \Delta x + \Delta x^T H_i \Delta x \\ &= \sum c_i + 2 \sum b_i^T \Delta x + \Delta x^T \sum H_i \Delta x \\ &= c + 2b^T + \Delta x^T H \Delta x \end{aligned}$$

- $F(x + \Delta x)$ 为关于变量 $\Delta x$ 的二次函数
- $F(x + \Delta x)$ 的极值可通过令其关于 $\Delta x$ 的导数等于0求解得到



## 非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)



### 求解

- $F(x + \Delta x)$ 的极值可通过令其关于 $\Delta x$ 的导数等于0求解得到:

$$\frac{\partial F(x + \Delta x)}{\partial \Delta x} = 2b + 2H\Delta x = 0$$

$$H\Delta x = -b$$

$$\Delta x^* = -H^{-1}b$$

- 令 $x = x + \Delta x$ , 然后不断迭代, 直至收敛即可。



# 非线性最小二乘(Non-Linear Least Square)



## 流程

- 1.线性化误差函数:

$$e_i(x + \Delta x) = e_i(x) + J_i \Delta x$$

- 2.构建线性系统:

$$b^T = \sum e_i^T \Sigma_i J_i \quad H = \sum J_i^T \Sigma_i J_i \quad H \Delta x = b$$

- 3.求解线性系统:

$$\Delta x^* = -H^{-1}b$$

- 4.更新解，并不断迭代直至收敛:

$$x = x + \Delta x^*$$



### Graph-based SLAM



1、Graph-based SLAM



2、非线性最小二乘原理



3、非线性最小二乘在SLAM中的应用



4、cartographer介绍



# NL Least Square在SLAM中的应用



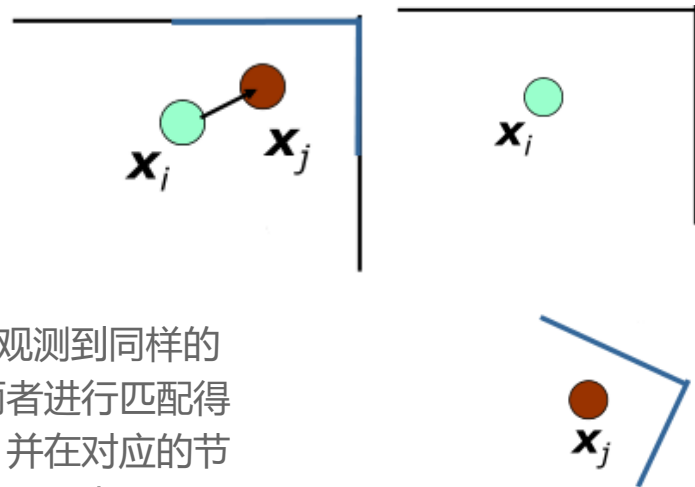
## 图的构建

- 里程计测量：



机器人从节点 $i$ 运动到节点 $i + 1$ ，里程计测量得到此运动信息。并在对应的节点中连上一条边，边为里程计测量值。

- 回环检测：



节点 $i$ 和节点 $j$ 观测到同样的环境信息，两者进行匹配得到相对位姿。并在对应的节点中连一条边，边为匹配的相对位姿。用信息矩阵来描述本次匹配的可靠性



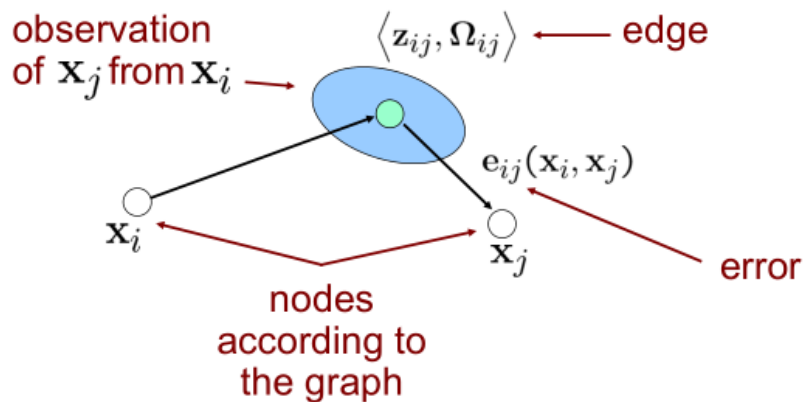


# NL Least Square在SLAM中的应用



## 误差函数

- 误差函数：



- 观测值 $z_{ij} = (dx, dy, d\theta)$ 表示经过匹配计算得到的节点 $x_i$ 和节点 $x_j$ 的相对位姿。节点 $x_j$ 在节点 $x_i$ 坐标系下的坐标。
- 预测值为里程计的测量值，图中 $x_i$ 和 $x_j$ 即为里程计测量得到的坐标，因此预测值 $z'_{ij} = X_i^{-1}X_j$ ，其中 $X_i$ 表示 $x_i$ 对应的转换矩阵。
- 因此误差函数 $e_{ij}(x) = t2v(Z_{ij}^{-1}Z'_{ij})$ 。T2v表示把转换矩阵转换到对应的位姿。

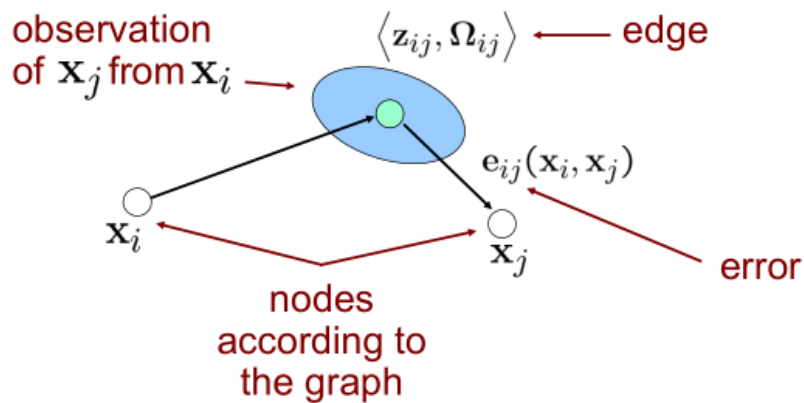


# NL Least Square在SLAM中的应用



## 误差函数

- 误差函数：



- 误差函数的矩阵形式：

$$\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} R_{ij}^T (R_i^T (t_j - t_i) - t_{ij}) \\ \theta_j - \theta_i - \theta_{ij} \end{Bmatrix}$$

- 对应的Jacobian矩阵：

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{bmatrix} -R_{ij}^T R_i^T & R_{ij}^T \frac{\partial R_i^T}{\partial \theta} (t_j - t_i) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j} = \begin{bmatrix} R_{ij}^T R_i^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# NL Least Square在SLAM中的应用



## 误差函数的线性化

- 误差函数：

$$e_{ij}(x + \Delta x) = e_{ij}(x) + J_{ij}\Delta x$$

$$J_{ij} = \frac{\partial e_{ij}(x)}{\partial x}$$

- 因为误差函数只跟 $x_i$ 和 $x_j$ 有关，因此具有下列的性质：

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{ij}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} &= \left( 0 \cdots \frac{\partial e_{ij}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \cdots \frac{\partial e_{ij}(\mathbf{x}_j)}{\partial \mathbf{x}_j} \cdots 0 \right) \\ \mathbf{J}_{ij} &= \left( 0 \cdots \mathbf{A}_{ij} \cdots \mathbf{B}_{ij} \cdots 0 \right) \end{aligned}$$



# NL Least Square在SLAM中的应用



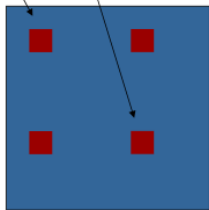
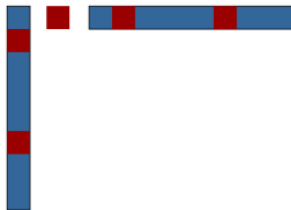
## 误差函数的线性化

- Jacobian矩阵的形式:

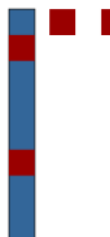
$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & \underbrace{\frac{\partial e(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i}}_{\mathbf{A}_{ij}} & 0 \dots 0 & \underbrace{\frac{\partial e(\mathbf{x}_j)}{\partial \mathbf{x}_j}}_{\mathbf{B}_{ij}} & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

- Jacobian是一个稀疏的向量, 因此其会导致H矩阵的稀疏性:

$$\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{J}_{ij}^T \Omega_{ij} \mathbf{J}_{ij}$$



$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{J}_{ij}^T \Omega_{ij} \mathbf{e}_{ij}$$





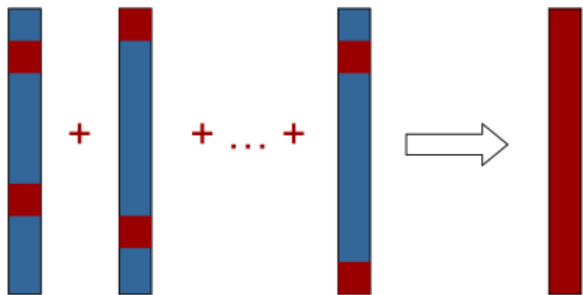
# NL Least Square在SLAM中的应用



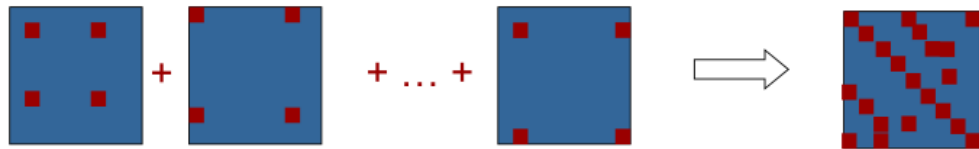
## 误差函数的线性化

- H和b的最终形式:

$$\mathbf{b} = \sum_{ij} \mathbf{b}_{ij}$$



$$\mathbf{H} = \sum_{ij} \mathbf{H}_{ij}$$



- H矩阵为稀疏矩阵，可以利用此特征进行快速求解。



## NL Least Square在SLAM中的应用



### 固定坐标系

- 观测值观测到的值两个位姿之间的相对位姿
- 满足相对位姿约束的解有无穷多组
- 为了让解唯一，必须加入一个约束条件让某一个位姿固定，一般选择第一个位姿，即：

$$\Delta x_1 = 0$$

- 等价于：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## NL Least Square在SLAM中的应用



### 固定坐标系

- 加入的约束为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 求解的线性系统为：

$$H\Delta x = -b$$

- 因此等价于：

$$H_{11} += \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## NL Least Square在SLAM中的应用



### 构建线性系统

- 已知误差项和Jacobian矩阵 $A_{ij}$ 和 $B_{ij}$

- 向量 $b$ 的更新为:

$$b_i^T += e_{ij}^T \Sigma_{ij} A_{ij} \quad b_j^T += e_{ij}^T \Sigma_{ij} B_{ij}$$

- 矩阵 $H$ 的更新为:

$$H_{ii} += A_{ij}^T \Sigma_{ij} A_{ij} \quad H_{ij} += A_{ij}^T \Sigma_{ij} B_{ij}$$

$$H_{ji} += B_{ij}^T \Sigma_{ij} A_{ij} \quad H_{jj} += B_{ij}^T \Sigma_{ij} B_{ij}$$





## NL Least Square在SLAM中的应用



### 求解

- 已知矩阵 $H$ 和向量 $b$

- 求解线性方程组：

$$\Delta x = -H^{-1}b$$

- 不断进行迭代，直至收敛：

$$x = x + \Delta x$$

**optimize(x):**

```
while (!converged)
    (H, b) = buildLinearSystem(x)
    Δx = solveSparse(HΔx = -b)
    x = x + Δx
end
return x
```



### Graph-based SLAM



1、Graph-based SLAM



2、非线性最小二乘原理



3、非线性最小二乘在SLAM中的应用



4、cartographer介绍



## Cartographer介绍



### 特性

- 基于图优化的SLAM算法
- 比较完善的匹配系统，包含建图和定位
- 目前效果最好的开源激光SLAM系统
- 有人在专门的维护，不断增加新的特性



### 代码分析

- 见视频



## 参考资料

[1]G2O:A General Framework for Graph Optimization

[2]A tutorial graph-based slam

[3]Efficient Sparse pose adjustment for 2D mapping

[4] Real-Time Loop Closure in 2D LIDAR SLAM



作业



详细见作业说明



结语

感谢各位聆听!

Thanks for Listening