深蓝学院
shenlanxueyuan.com

激光的前端配准算法一

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人

597457483@qq.com

课程内容

帧间匹配算法

1、ICP匹配方法

2、PL-ICP匹配方法

3、NICP匹配方法

4、IMLS-ICP匹配方法

课程内容

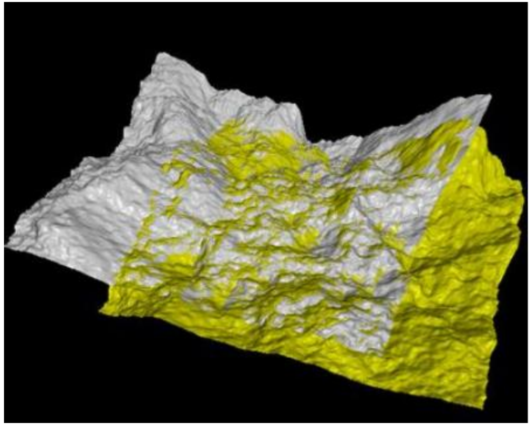
帧间匹配算法

- 1、ICP匹配方法
- 2、PL-ICP匹配方法
- 3、NICP匹配方法
- 4、IMLS-ICP匹配方法

ICP(Iterative Cloest Point)方法介绍

目的

ICP方法是最通用的用来求解两个点云集合转换关系的方法。



数学描述

- 给定两个点云集合:

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{N_x}\}$$

x_i和p_i表示点云坐标

$$P = \{p_1, p_2, \cdots, p_{N_p}\}$$

N_x和N_p表示点云的数量

- 求解旋转矩阵R和平移向量t，使得下式最小:

$$E(R,t) = \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\|x_i - Rp_i - t\|^2$$

ICP方法介绍

已知对应点的求解方法

$$u_x = \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} x_i \qquad u_p = \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} p_i$$

u_x表示点云集合X的几何中心　　u_p表示点云集合P的几何中心

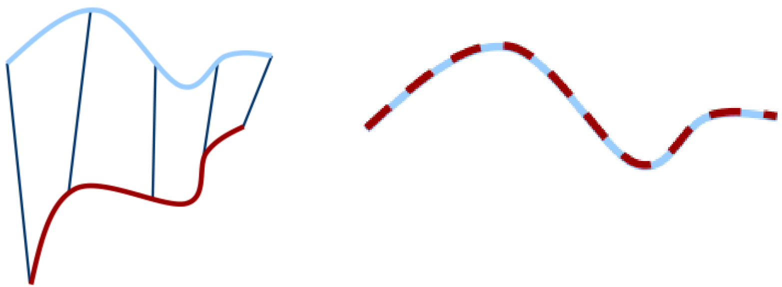
去中心化 $\begin{cases} X' = \{x_i - u_x\} = \{x_i'\} \\ p' = \{p_i - u_p\} = \{p_i'\} \end{cases}$

$$W = \sum_{i=1}^{N_p} x_i' p_i'^T = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} V^T$$

则ICP的解为：

$$R = VU^T$$

$$t = u_x - Ru_p$$



ICP方法介绍

已知对应点的求解方法—证明

$$E(R,t)=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\|x_i-Rp_i-t\|^2$$

$$E(R,t)=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-Rp_i-t-u_x+Ru_p+u_x-Ru_p\right\|^2$$

$$=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)+(u_x-Ru_p-t)\right\|^2$$

$$\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2+\left\|u_x-Ru_p-t)\right\|^2$$

$$+2\left(x_i-u_x-R\left(p_i-u_p\right)\right)^T(u_x-Ru_p-t))$$

$$=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2+\left\|u_x-Ru_p-t)\right\|^2$$

$\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2$只跟R有关

当已知R时可以通过u_x-Ru_p-t求解得到t

转换为最小化函数：

$$E(R,t)=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2$$

ICP方法介绍

已知对应点的求解方法—证明

$$\min E(R,t)=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\left\|x_i-u_x-R(p_i-u_p)\right\|^2$$

$$=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}\|x_i'-Rp_i'\|^2=\frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p}x_i'^T x_i'+p_i'^T R^T R p_i'-2x_i'^T R p_i'$$

$$=\sum_{i=1}^{N_p}-2x_i'^T R p_i'$$

$$\max \sum_{i=1}^{N_p} x_i'^T R p_i' = \sum_{i=1}^{N_p} \mathrm{Trace}(R x_i' p_i'^T) = Trace(RH)$$

$$H=\sum_{i=1}^{N_p} x_i' p_i'^T$$

已知对应点的求解方法—证明

- 假设矩阵A为正定对称矩阵，则对于任意的正交矩阵B，都有:

$$Trace(A) \geq Trace(BA)$$

$$H = U\Lambda V^T \qquad X = VU^T\text{--正交矩阵}$$

$$XH = VU^T U\Lambda V^T = V\Lambda V^T\text{--正定对称}$$

则:

$$Trace(XH) \geq Trace(BXH)$$

- B是任意的正交矩阵，X也是一个正交矩阵，因此BX可以取遍所有的正交矩阵。

- 显然BX也包括了需要求解的旋转矩阵R，因此:

$$Trace(RH) \leq Trace(XH)$$

- 当R=X时，等式成立，因此:

$$R = X = VU^T$$

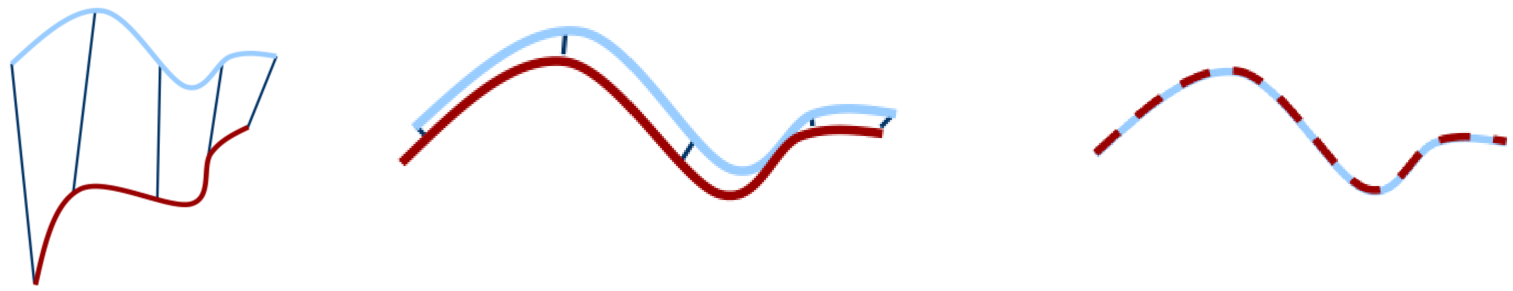
ICP方法介绍

未知对应点的求解方法

- 实际中，不知道对应点匹配
- 不能一步到位计算出R和t
- 进行迭代计算
- EM算法的一个特例

算法流程：

- 寻找对应点
- 根据对应点，计算R和t
- 对点云进行转换，计算误差
- 不断迭代，直至误差小于某一个值



课程内容

帧间匹配算法

1、ICP匹配方法

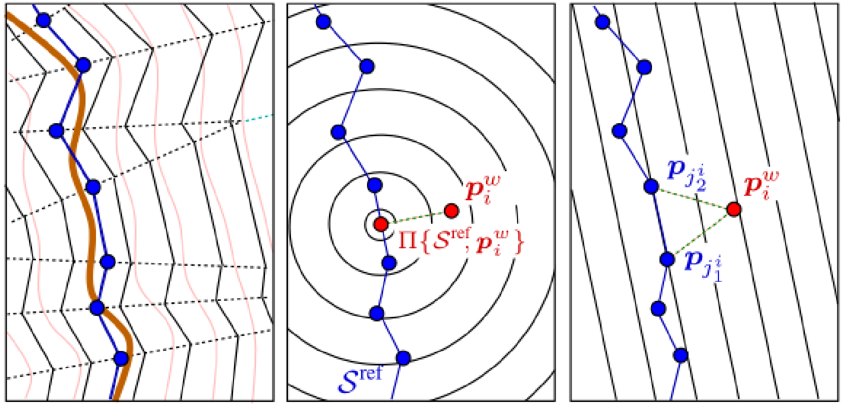
2、PL-ICP匹配方法

3、NICP匹配方法

4、IMLS-ICP匹配方法

PL-ICP方法介绍

示意图



(a) Distance to curve and to polyline (b) Point-to-point metric (c) Point-to-line metric

PL-ICP方法示意图

基本思想

- 激光点是对实际环境中曲面的离散采样
- 重要的不是激光点，而是隐藏在激光点中的曲面
- 最好的误差尺度为当前激光点到实际曲面的距离；关键的问题在于如何恢复曲面
- PL-ICP的答案：用分段线性的方法来对实际曲面进行近似，从而定义当前帧激光点到曲面的距离

PL-ICP方法介绍

数学描述

- ICP的目标函数:

$$\min_{\boldsymbol{q}} \sum_i \left\| \boldsymbol{p}_i \oplus \boldsymbol{q} - \Pi\{\mathcal{S}^{\mathrm{ref}}, \boldsymbol{p}_i \oplus \boldsymbol{q}\} \right\|^2$$

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{t}, \theta)$$

$$(\boldsymbol{p} \oplus (\boldsymbol{t}, \theta) \triangleq \mathbf{R}(\theta)\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t})$$

S^{ref}表示参考激光帧生成的曲面

$\Pi\{S^{ref}, p_i\}$表示激光点p_i在曲面上的投影

- 给定初始解,进行迭代:

$$\min_{\boldsymbol{q}_{k+1}} \sum_i \left\| \boldsymbol{p}_i \oplus \boldsymbol{q}_{k+1} - \Pi\{\mathcal{S}^{\mathrm{ref}}, \boldsymbol{p}_i \oplus \boldsymbol{q}_k\} \right\|^2$$

- PL-ICP的目标函数:

$$\min_{\boldsymbol{q}_{k+1}} \sum_i \left(\boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}} \left[\boldsymbol{p}_i \oplus \boldsymbol{q}_{k+1} - \Pi\{\mathcal{S}^{\mathrm{ref}}, \boldsymbol{p}_i \oplus \boldsymbol{q}_k\} \right] \right)^2$$

n_i表示曲面对应点的法向量

PL-ICP的目标函数实际上表示点到曲面的距离，即点到直线的距离

PL-ICP方法求解

已知数据

- 参考激光帧y_{t-1}
- 当前激光帧y_t
- 参考激光帧生成的曲面S^{ref}
- 初始解q_0

待求数据

- 两帧激光之间的相对位姿关系q^*

算法流程

- 1. 把当前帧的数据根据初始位姿投影到参考帧坐标系下。
- 2. 对于当前帧的点i，在参考帧中找到最近的两个点(j_1, j_2)。
- 3. 计算直线误差，并去除误差过大的点。
- 4. 最小化误差函数:

$$\sum_i \left(\boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}} \left[\mathbf{R}(\theta_{k+1}) \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{t}_{k+1} - \boldsymbol{p}_{j_1^i} \right] \right)^2$$

PL-ICP方法介绍

跟ICP的区别

- 1. 误差函数的形式不同，ICP对点对点的距离作为误差，PL-ICP为点到线的距离作为误差；PL-ICP的误差形式更符号实际情况。

- 2. 收敛速度不同，ICP为一阶收敛，PL-ICP为二阶收敛。

$$\|\boldsymbol{q}_k - \boldsymbol{q}_\infty\| < c\left\|\boldsymbol{q}_{k-1} - \boldsymbol{q}_\infty\right\| \qquad \|\boldsymbol{q}_k - \boldsymbol{q}_\infty\|^2 < c\left\|\boldsymbol{q}_{k-1} - \boldsymbol{q}_\infty\right\|^2$$

- 3. PL-ICP的求解精度高于ICP，特别是在结构化环境中。

- 4. PL-ICP对初始值更敏感。不单独使用，与里程计、CSM等一起使用

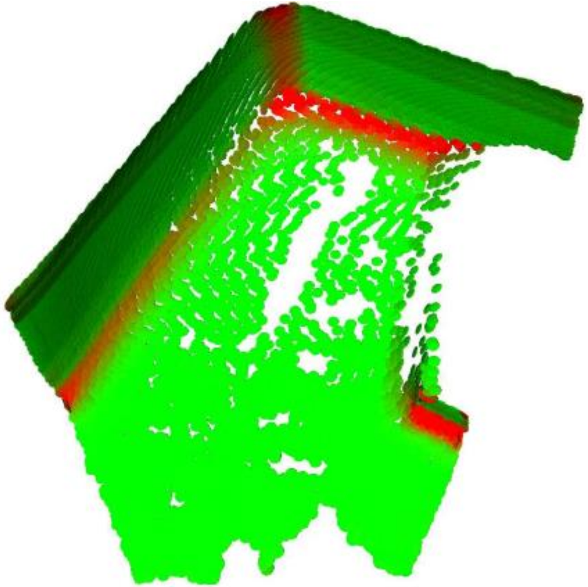
课程内容

帧间匹配算法

- 1、ICP匹配方法
- 2、PL-ICP匹配方法
- **3、NICP匹配方法**
- 4、IMLS-ICP匹配方法

NICP(Normal ICP)匹配方法

NICP特征示意图



NICP特征示意图

基本思想

- 替换原始ICP方法中的对应点匹配(point correspondences)方法
- 充分利用实际曲面的特征来对错误的点匹配进行滤除，主要的特征为法向量和曲率。
- 误差项除了考虑对应点的欧式距离之外，同时还考虑对应点法向量的角度差。

NICP(Normal ICP)匹配方法

数学描述

- p_i表示激光点的坐标
- n_i表示对应的法向量
- σ_i表示对应的曲率
- $\tilde{p}_i=(p_i,n_i)^T$表示拓展的点
- T表示欧式变换矩阵
- $\oplus$表示对于$\tilde{p}_i$的操作符

$$T\oplus\tilde{p}_i=\begin{pmatrix} Rp_i+t \\ Rn_i \end{pmatrix}$$

- 误差函数的定义为：

$$\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T})=\left(\tilde{\mathbf{p}}_i^{\mathrm{c}}-\mathbf{T}\oplus\tilde{\mathbf{p}}_j^{\mathrm{r}}\right)$$

- 目标函数的定义为：

$$\sum_{\mathcal{C}}\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T})^T\tilde{\mathbf{\Omega}}_{ij}\mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T}).$$

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}_{ij}=\begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}_i^{\mathrm{s}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_i^{\mathrm{n}} \end{pmatrix}$$

NICP(Normal ICP)匹配方法

法向量和曲率的计算

- 找到点p_i周围半径R范围内的所有点V_i

$$\mu_i^s = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|}\sum_{\mathbf{p}_j\in\mathcal{V}_i}\mathbf{p}_i$$

$$\Sigma_i^s = \frac{1}{|\mathcal{V}_i|}\sum_{\mathbf{p}_j\in\mathcal{V}_i}(\mathbf{p}_i-\mu_i)^T(\mathbf{p}_i-\mu_i)$$

$$\Sigma_i^s = R\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}R^T$$

- 曲率的定义：

$$\sigma_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

- 法向量的定义：最小特征值对应的特征向量。

NICP(Normal ICP)匹配方法

点匹配规则

- 如果没有well define的法向量，则拒绝。
- 两点间的距离大于阈值，则拒绝。

$$\|\mathbf{p}_i^{\mathrm{c}} - \mathbf{T} \oplus \mathbf{p}_j^{\mathrm{r}}\| > \epsilon_d$$

- 两点的曲率之差距大于阈值，则拒绝。

$$|\log \sigma_i^{\mathrm{c}} - \log \sigma_j^{\mathrm{r}}| > \epsilon_\sigma$$

- 两点的法向量角度之差大于阈值，则拒绝。

$$\mathbf{n}_i^{\mathrm{c}} \cdot \mathbf{T} \oplus \mathbf{n}_j^{\mathrm{r}} < \epsilon_n$$

NICP(Normal ICP)匹配方法

目标函数的求解

- 目标函数的定义为:

$$\sum_{\mathcal{C}} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T})^T \tilde{\mathbf{\Omega}}_{ij} \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{T}).$$

- 非线性最小二乘问题，通过LM方法进行求解。

$$(\mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{\Delta T} = \mathbf{b}.$$

$$H = \sum J_i^T J_i$$

$$J_{\mathrm{i}} = \frac{\partial e_{ij}(T)}{\partial T} \qquad \mathbf{T} \leftarrow \mathbf{\Delta T} \oplus \mathbf{T}$$

- 当迭代过程收敛即得到需要的解。
- 由于在寻找点匹配的过程中，考虑了环境曲面的法向量和曲率，因此可以提前排除一些明显是错误的匹配。
- 在误差定义中，除了考虑欧式距离之外，还考虑了法向量之间的距离，因此具有更加准确的角度。
- 在开源领域，效果最好的ICP匹配方法。

NICP(Normal ICP)匹配方法

算法流程总结

- 计算参考激光帧和当前激光帧中每一个点的法向量和曲率。

- 根据当前解，把当前激光帧的点转换到参考坐标系中，并且根据欧式距离、法向量、曲率等信息来选择匹配点(也有可能没有匹配点)。

- 根据上面介绍的方法，用LM方法进行迭代求解，迭代收敛即可得到两帧激光数据之间的相对位姿。

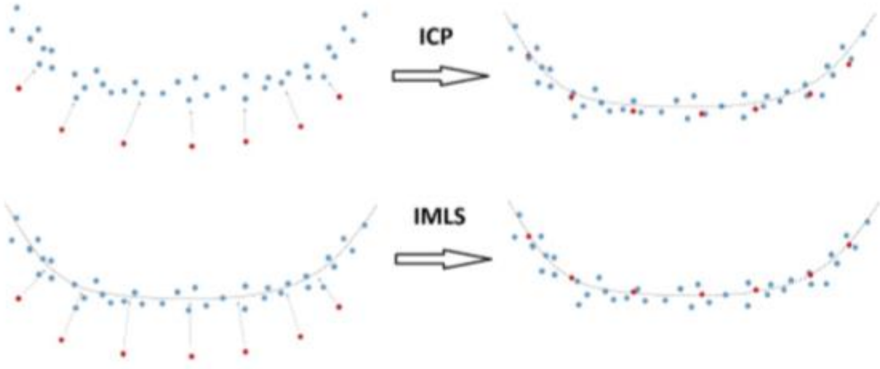
课程内容

帧间匹配算法

- 1、ICP匹配方法
- 2、PL-ICP匹配方法
- 3、NICP匹配方法
- **4、IMLS-ICP匹配方法**

IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

示意图



IMLS-ICP示意图

基本思想

- 选择具有代表性的激光点来进行匹配，既能减少计算量同时又能减少激光点分布不均匀导致的计算结果出现偏移。
- 点云中隐藏着真实的曲面，最好的做法就是能从参考帧点云中把曲面重建出来。
- 曲面重建的越准确，对真实世界描述越准确，匹配的精度就越高。

IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

代表点(Informative Point)的选取

- 具有丰富特征的点，即为结构化的点：具有良好的曲率和法向量的定义。

- 曲率越小的点越好，因为曲率为0代表着直线，代表着最结构化的点，也代表着具有非常好的法向量定义，能够提供足够的约束。

- 选点的时候需要注意选取的激光点的均衡以保证可观性，因为是平面匹配，不存在角度不可观的情况。只需要考虑X方向和Y方向的可观性。要保证两者的约束基本上是一致的，才能让结果不出现偏移。

IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

曲面重建

- 已知点云集合P_k中每一个点p_i的法向量n_i,则P_k中隐藏的曲面为：

$$I^{P_k}(x) = \frac{\sum_{p_i \in P_k} W_i(x)((x - p_i) \cdot \vec{n_i})}{\sum_{p_j \in P_k} W_j(x)}$$

$$W_i(x) = e^{-\|x - p_i\|^2 / h^2}$$

- $I^{P_k}(x) = 0$对应的集合表示曲面。
- 空间中点到曲面的距离，直接代入上述方程即可。
- 证明见参考文献[1]

IMLS(Implicit Moving Least Square)-ICP匹配方法

匹配求解

- 当前帧中一点x_i到曲面的距离为$I^{P_k}(x_i)$
- P_{k}中离点x_i最近的点的法向量为n_i
- 则点x_i在曲面上的投影y_i为：

$$\mathrm{y}_i = x_i - I^{P_k}(x_i) \cdot n_i$$

- 点x_i和点y_i为对应的匹配点：

$$\sum((\mathrm{Rx_i} + \mathrm{t} - \mathrm{y_i}) \cdot \mathrm{n_i})^2$$

参考资料

[1] Provably good moving least square

[2] An ICP variant using a point-to-line metric

[3] NICP:Dense Normal Based Point Cloud Registration

[4] IMLS:SLAM-scan-to-model matching based on 3D data

[5] Geometrically Stable Sampling for the ICP Algorithm

作业

详细见作业说明

感谢各位聆听！

Thanks for Listening