深蓝学院
shenlanxueyuan.com

激光的前端配准算法-二

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人

597457483@qq.com

帧间匹配算法

帧间匹配算法

- 1、高斯牛顿优化方法
- 2、NDT方法
- 3、相关匹配方法及分支定界加速

帧间匹配算法

帧间匹配算法

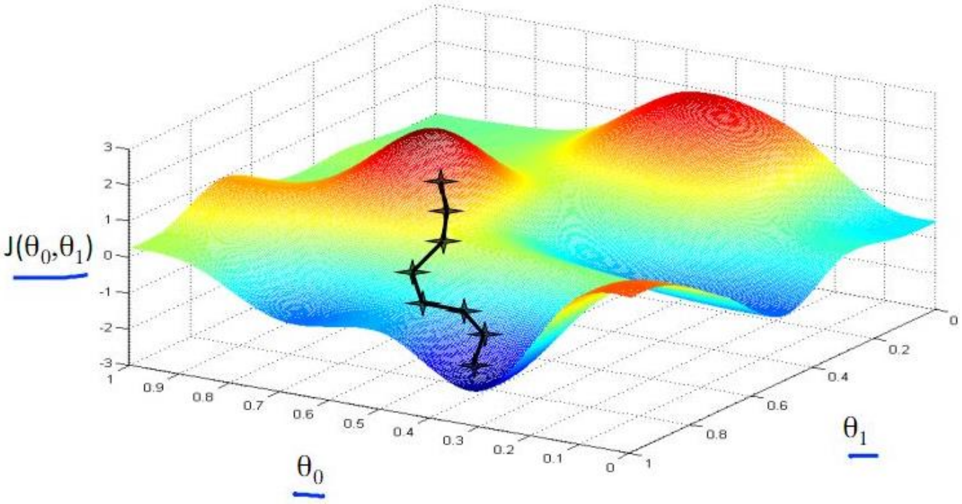
1、高斯牛顿优化方法

2、NDT方法

3、相关匹配方法及分支定界加速

基于优化的方法(Optimization-based Method)

示意图



梯度下降示意图

数学描述

- 给定一个目标函数，把激光的帧间匹配问题转换为求解目标函数的极值问题：

$$E(T) = arg\min_{T} \sum [1 - M(S_i(T))]^2$$

$$T = (T_x, T_y, T_\theta)$$

$S_i(T)$表示把激光点i用T进行转换之后的坐标

$M(x)$表示得到坐标x的地图占用概率

基于优化的方法(Optimization-based Method)

优化方法的求解

$$E(T) = arg\min_{T} \sum [1 - M(S_i(T))]^2$$

$p_i = (p_{ix}, p_{iy})$表示第i个激光点的坐标

$$S_i(T) = \begin{bmatrix} \cos T_\theta & -\sin T_\theta & T_x \\ \sin T_\theta & \cos T_\theta & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$M(S_i(T))$为非线性函数，因此进行一阶泰勒展开，得：

$$E(T + \Delta T) = arg\min_{T} \sum \left[1 - M(S_i(T)) - \nabla M(S_i(T)) \frac{\partial S_i(T)}{\partial T} \Delta T\right]^2$$

对于线性系统，求其对ΔT的导数，并令其等于0：

$$\sum \left[\nabla M(S_i(T)) \frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T \left[1 - M(S_i(T)) - \nabla M(S_i(T)) \frac{\partial S_i(T)}{\partial T} \Delta T\right] = 0$$

求解上式即可得到ΔT

令$T = T + \Delta T$，不断进行迭代即可

基于优化的方法(Optimization-based Method)

优化方法的求解

$$\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[1-M(S_i(T))-\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right]=0$$

展开得：

$$\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T[1-M(S_i(T))]=\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right]$$

等式两边同时乘以H^{-1}：

$$\Delta T=H^{-1}\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T[1-M(S_i(T))]$$

$$H=\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\Delta T\right]$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

优化方法的求解

$$\Delta T = H^{-1}\sum\left[\nabla M(S_i(T))\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}\right]^T[1-M(S_i(T))]$$

$$S_i(T)=\begin{bmatrix}\cos T_\theta & -\sin T_\theta & T_x\\ \sin T_\theta & \cos T_\theta & T_y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{ix}\\ p_{iy}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$S_i(T)=\begin{bmatrix}\cos T_\theta * p_{ix} - \sin T_\theta * p_{iy} + T_x\\ \sin T_\theta * p_{ix} + \cos T_\theta * p_{iy} + T_y\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial S_i(T)}{\partial T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin T_\theta * p_{ix} - \cos T_\theta * p_{iy}\\ 0 & 1 & \cos T_\theta * p_{ix} - \sin T_\theta * p_{iy}\end{bmatrix}$$

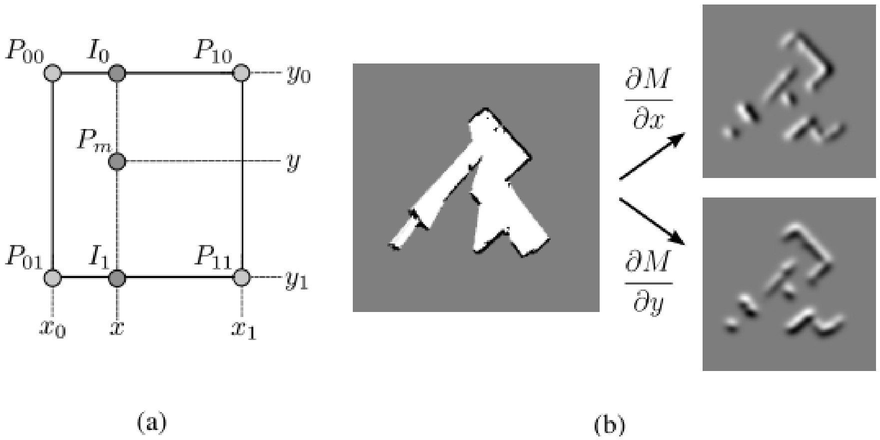
ΔT表达式中所有的量都已经知道，除了$\nabla M(S_i(T))$

$S_i(T)$表示地图坐标点，$\nabla M(S_i(T))$表示地图的导数

$\nabla M(S_i(T))$的求解需要对地图进行插值

基于优化的方法(Optimization-based Method)

地图双线性插值



地图插值示意图

- 拉格朗日插值法
- X,Y两个方向进行插值
- 一维线性插值的推广

基于优化的方法(Optimization-based Method)

拉格朗日插值方法——一维线性插值

- 插值的定义

设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，且存在已知点：

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

处的函数值$y_i=f(x_i)$,若存在n次多项式：

$$L_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

使得值$L_n(x_i)=y_i$成立,则称$L_n(x)$为$f(x)$的插值多项式。

可以证明：$L_n(x)$存在且唯一

- 拉格朗日插值方法

实现上述插值的一种方法

主要特点为把插值多项式表示成基函数的线性组合：

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)y_i$$

基函数$l_i(x)$满足以下条件：

$$l_i(x_k)=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

拉格朗日插值方法—基函数构造

基函数$l_i(x)$在除x_i以外的所有插值点都为0，即点$(x_0, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$都是$l_i(x)$的解，

$$l_i(x) = c(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(x - x_n)$$

显然$l_i(x)$满足上述条件。同时$l_i(x_i) = 1$，因此：

$$l_i(x_i) = c(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n) = 1$$

因此：

$$c = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n)} \qquad l_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^{n} \frac{x - x_k}{(x_i - x_k)}$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

拉格朗日插值方法—双线性插值

设平面中有四个点:

$$Z_1 = f(x_0, y_0), Z_2 = f(x_1, y_0)$$
$$Z_3 = f(x_1, y_1), Z_4 = f(x_0, y_1)$$

令:

$$\mathrm{u} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad \mathrm{v} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

则对应的四个点的坐标变为:

$$(x_0, y_0) = (0,0) \quad (x_1, y_0) = (1,0)$$

$$(x_1, y_1) = (1,1) \quad (x_0, y_1) = (0,1)$$

构造基函数:

$$l_1(u, v) = (1 - u)(1 - v)$$

$$l_2(u, v) = u(1 - v)$$

$$l_3(u, v) = uv$$

$$l_4(u, v) = (1 - u)v$$

插值函数为:

$$L_4(u, v) = Z_1 l_1(u, v) + Z_2 l_2(u, v) + Z_3 l_3(u, v) + Z_4 l_4(u, v)$$

基于优化的方法(Optimization-based Method)

地图插值

插值函数:

$$L_4(u,v)=Z_1l_1(u,v)+Z_2l_2(u,v)\\+Z_3l_3(u,v)+Z_4l_4(u,v)$$

把(u,v)替换回(x,y)可得:

$$L(x,y)=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}M(P_{11})+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}M(P_{01})\right)+\frac{y_1-y}{y_1-y_0}\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}M(P_{10})+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}M(P_{00})\right)$$

x的偏导数:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}(M(P_{11})-M(P_{01}))+\frac{y_1-y}{y_1-y_0}(M(P_{10})-M(P_{00}))$$

y的偏导数:

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}(M(P_{11})-M(P_{10}))+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}(M(P_{01})-M(P_{00}))$$

帧间匹配算法

帧间匹配算法

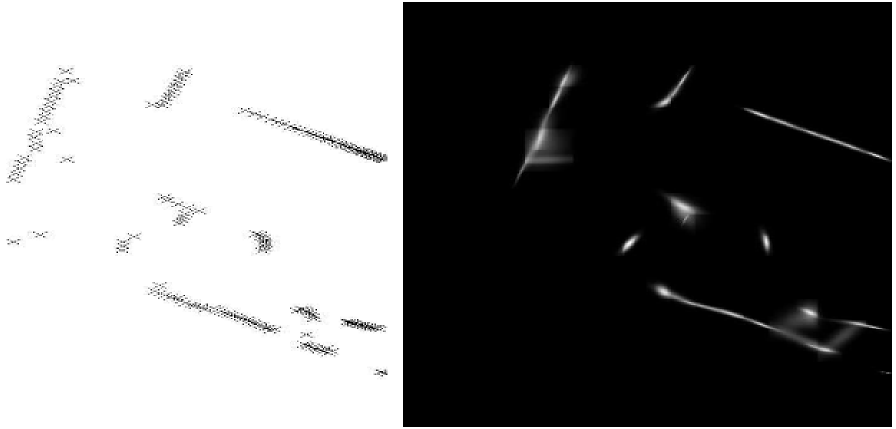
1、高斯牛顿优化方法

2、NDT方法

3、相关匹配方法及分支定界加速

NDT方法

示意图



NDT方法示意图

基本思想

- 把空间用cell进行划分。
- 用高斯分布去替代势场，形成一个天然分段连续的势场。
- 在得到连续的势场之后，直接用牛顿方法进行迭代即可。
- 势场连续，不受离散化带来的影响。

NDT方法

数学描述

$T=(t_x,t_y,t_\theta)$表示需要

$\mathrm{x}_i=(x,y)^\wedge T$表示激光点坐标

$$T(\mathrm{x}_i)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_i \\ y_i\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t_x \\ t_y\end{pmatrix}$$

q_i,Σ_i表示点x_i对应的高斯分布的均值和方差

- 当前帧激光点i的得分为：

$$\mathrm{x}_i^{'}=T(\mathrm{x}_i)$$

$$score_i=-\exp\left(-\frac{(\mathrm{x}_i^{'}-\mathrm{q}_i)^T\Sigma_i^{-1}(\mathrm{x}_i^{'}-\mathrm{q}_i)}{2}\right)$$

- 因此匹配的目标函数：

$$\min\sum score_i$$

令$q=\mathrm{x}_i^{'}-q_i$，则：

$$score_i=-\exp\left(-\frac{\mathrm{q}^T\Sigma^{-1}\mathrm{q}}{2}\right)$$

- 目标函数并没有取误差的平方。
- 不对score()函数进行线性化。
- 本式中可以直接求解Hessian矩阵。

NDT方法

牛顿方法

- 假设目标函数为:

$$\min f(x)$$

- 等价于:

$$g(x) = f'(x) = 0$$

- 进行泰勒展开，取一阶进行:

$$g(x+\Delta x) = g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x}\Delta x = 0$$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x}\Delta x = -g(x)$$

$$x = x + \Delta x$$

- 显然等价于:

$$H\Delta x = -J$$

- 因此，用牛顿法进行迭代求解时，关键是要计算目标函数f(x)的Hessian矩阵和Jacobian矩阵。

- 同时，如果:

$$f(x) = \sum f_i(x)$$

- 则:

$$J = \sum J_i$$
$$H = \sum H_i$$

NDT方法

NDT求解

- 显然：

$$f_i = score_i = -\exp(-\frac{q^T\Sigma^{-1}q}{2})$$

- 因此：

$$J_i = \frac{\partial f_i}{\partial T} = -\exp(-\frac{q^T\Sigma^{-1}q}{2})(-q^T\Sigma^{-1}\frac{\partial q}{\partial T})$$

$$q = x_i' - q_i = T(x_i) - q_i$$

$$\frac{\partial q}{\partial T} = \frac{\partial T(x_i)}{\partial T}$$

- 对于Hessia矩阵来说：

$$H_i = \frac{\partial J_i}{\partial T} = -\exp(-\frac{q^T\Sigma^{-1}q}{2})(-q^T\Sigma^{-1}\frac{\partial q}{\partial T})(-q^T\Sigma^{-1}\frac{\partial q}{\partial T})$$
$$+ -\exp(-\frac{q^T\Sigma^{-1}q}{2})(-\frac{\partial q^T}{\partial T}\Sigma^{-1}\frac{\partial q}{\partial T})$$
$$+ -\exp(-\frac{q^T\Sigma^{-1}q}{2})(-q^T\Sigma^{-1}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2})$$

- 显然：

$$\frac{\partial T(x_i)}{\partial T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_i\sin\theta - y_i\cos\theta \\ 0 & 1 & x_i\cos\theta - y_i\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$T(x_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\partial T(x_i)}{\partial T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_i\sin\theta - y_i\cos\theta \\ 0 & 1 & x_i\cos\theta - y_i\sin\theta \end{pmatrix}$$

NDT方法

算法流程

- 对环境进行cell分割，并且构造高斯分布。
- 根据初始解把当前帧的激光点转换到参考帧中，并确定在哪一个cell中。
- 用上述介绍的方法进行迭代求解。

帧间匹配算法

帧间匹配算法

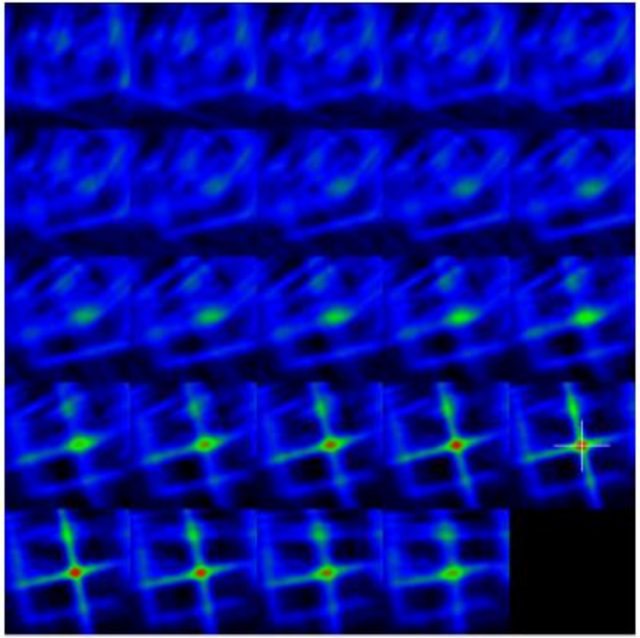
1、高斯牛顿优化方法

2、NDT方法

3、相关匹配方法及分支定界加速

相关方法(Correlation-based Method)

帧间匹配似然场



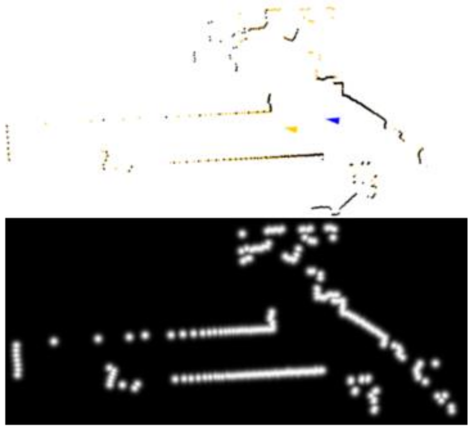
似然场示意图

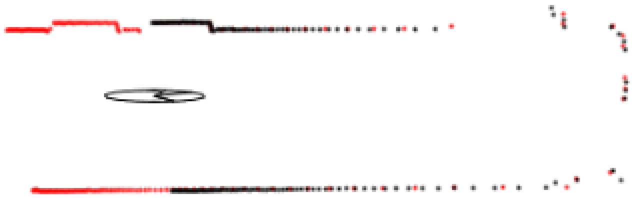
- 高度非凸，存在很多的局部极值
- 对初值非常敏感
- 进行暴力匹配，排除初值影响
- 通过加速策略，降低计算量
- 计算位姿匹配方差

相关方法(Correlation-based Method)

算法流程

- 1. 构造似然场
- 2. 在指定的搜索空间内，进行搜索，计算每一个位姿的得分
- 3. 根据步骤2中位姿的得分，计算本次位姿匹配的方差





相关方法(Correlation-based Method)

位姿搜索

- 1. 暴力搜索

三层for循环(x,y,θ)枚举每一个位姿，
分别计算每一个位姿的得分，计算量巨大。
因为激光雷达数据在每一个位姿都要重新投影，
投影需要计算sin和cos函数。

- 2. 预先投影搜索

把暴力搜索中的三层for循环(x,y,θ)交换一下顺序，
最外层对θ进行搜索，这样内层x,y的投影变成的加法，
需要计算sin和cos函数的位姿数从$n_x n_y n_\theta$降为n_θ 。
能极大的加速算法的运行速度

- 3. 多分辨率搜索

(1)构造粗分辨率(25cm)和
细分辨率(2.5cm)两个似然场

(2)首先在粗分辨率似然场上进行搜索，
获取最优位姿

(3)把粗分辨率最优位姿对应的栅格进行
细分辨率划分，然后再进行细分辨率
搜索，再次得到最优位姿。

(4)粗分辨率地图的栅格的似然值为对应
的细分辨率地图对应空间的所有栅格的
最大值

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界算法

- 常用的树形搜索剪枝算法
- 求解整数规划问题
- 解的数量为有限个
- 把最优解求解问题转换为树形搜索问题，根节点表示整个解空间，叶子节点表示最优解，中间的节点表示解空间的某一部分子空间。

- 分枝：即根节点表示整个解空间空间，深度为1的节点表示解空间的子空间，深度为2的节点表示深度1空间的子空间，这样层层划分，直到划分到真实解，也就是叶子节点为止。
- 定界：对于搜索树种的每一个节点，确定以该节点为根节点的子树的界。对于最小值问题，确定下界；对于最大值问题，确定上界。(SLAM中为上界)

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界算法

Algorithm 2 Generic branch and bound

```
best_score ← −∞
𝒞 ← 𝒞_0
while 𝒞 ≠ ∅ do
    Select a node c ∈ 𝒞 and remove it from the set.
    if c is a leaf node then
        if score(c) > best_score then
            solution ← n
            best_score ← score(c)
        end if
    else
        if score(c) > best_score then
            Branch: Split c into nodes 𝒞_c.
            𝒞 ← 𝒞 ∪ 𝒞_c
        else
            Bound.
        end if
    end if
end while
return best_score and solution when set.
```

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界在相关方法的加速作用

- 搜索树中的节点表示一个正方形的索索范围:$(c_x, c_y, c_\theta, c_h)$

$$\overline{\overline{\mathcal{W}}}_c = \left(\left\{ (j_x, j_y) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{array}{l} c_x \le j_x < c_x + 2^{c_h} \\ c_y \le j_y < c_y + 2^{c_h} \end{array} \right\} \times \{c_\theta\} \right)$$

- 分枝：对于节点$(c_x, c_y, c_\theta, c_h)$，分枝为4个子节点，四个子节点为：

$$\mathcal{C}_c = \left(\left(\{c_x, c_x + 2^{c_h - 1}\} \times \{c_y, c_y + 2^{c_h - 1}\} \times c_\theta \right) \cap \overline{\mathcal{W}} \right) \times \{c_h - 1\}.$$

- 定界：构造得分函数，使得得分函数对于节点l的打分，是以节点l为根节点的子树的上界：

$$\begin{aligned} score(c) &= \sum_{k=1}^{K} \max_{j \in \overline{\overline{\mathcal{W}}}_c} M_{\text{nearest}}(T_{\xi_j} h_k) \\ &\ge \sum_{k=1}^{K} \max_{j \in \overline{\mathcal{W}}_c} M_{\text{nearest}}(T_{\xi_j} h_k) \\ &\ge \max_{j \in \overline{\mathcal{W}}_c} \sum_{k=1}^{K} M_{\text{nearest}}(T_{\xi_j} h_k). \end{aligned}$$

$$\overline{\mathcal{W}}_c = \overline{\overline{\mathcal{W}}}_c \cap \overline{\mathcal{W}}.$$

相关方法(Correlation-based Method)

分枝定界在相关方法的加速作用

Algorithm 2 Generic branch and bound

$best\_score \leftarrow -\infty$
$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}_0$
while $\mathcal{C} \neq \emptyset$ **do**
    Select a node $c \in \mathcal{C}$ and remove it from the set.
    if c is a leaf node **then**
        if $score(c) > best\_score$ **then**
            $solution \leftarrow n$
            $best\_score \leftarrow score(c)$
        end if
    else
        if $score(c) > best\_score$ **then**
            Branch: Split c into nodes $\mathcal{C}_c$.
            $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_c$
        else
            Bound.
        end if
    end if
end while
return $best\_score$ and $solution$ when set.

Algorithm 3 DFS branch and bound scan matcher for (BBS)

$best\_score \leftarrow score\_threshold$
Compute and memorize a score for each element in $\mathcal{C}_0$.
Initialize a stack $\mathcal{C}$ with $\mathcal{C}_0$ sorted by score, the maximum score at the top.
while $\mathcal{C}$ is not empty **do**
    Pop c from the stack $\mathcal{C}$.
    if $score(c) > best\_score$ **then**
        if c is a leaf node **then**
            $match \leftarrow \xi_c$
            $best\_score \leftarrow score(c)$
        else
            Branch: Split c into nodes $\mathcal{C}_c$.
            Compute and memorize a score for each element in $\mathcal{C}_c$.
            Push $\mathcal{C}_c$ onto the stack $\mathcal{C}$, sorted by score, the maximum score last.
        end if
    end if
end while
return $best\_score$ and $match$ when set.

参考资料

[1]A Flexble and Scalable SLAM System with Full 3D Motion Estimation

[2] The Normal Distributions Transform： A New Approach to Laser Scan Matching

[3] Real-Time Correlative Scan Matching

[4] Real-Time Loop Closure in 2D LIDAR SLAM

作业

详细见作业说明

感谢各位聆听!

Thanks for Listening