深蓝学院
shenlanxueyuan.com

传感器数据处理I：轮式里程计运动模型及标定

主讲人 曾书格

越凡创新技术负责人

597457483@qq.com

课程内容

轮式里程计模型

- 1、两轮差分底盘的运动学模型
- 2、航迹推算(Dead Reckoning)

轮式里程计标定

- 1、线性最小二乘的基本原理
- 2、线性最小二乘的直线拟合
- 3、线性最小二乘在里程计标定中的应用

里程计模型

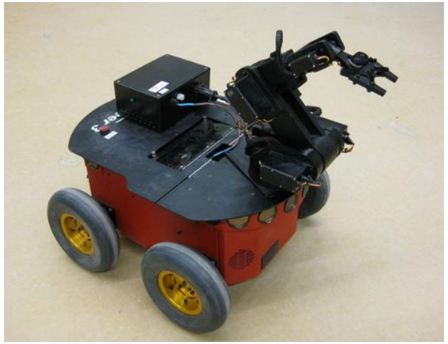
轮式里程计模型

1、两轮差分底盘的运动学模型

2、航迹推算(Dead Reckoning)

两轮差速底盘的运动学模型

应用实例

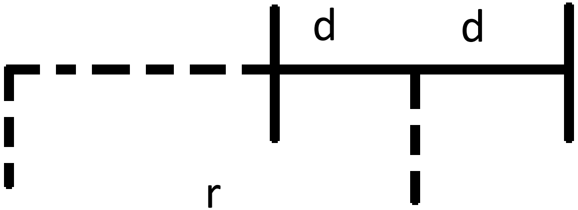


优点

- 结构简单
- 便宜(2个电机)
- 模型简单

两轮差速底盘的运动学模型

差分模型



运动解算

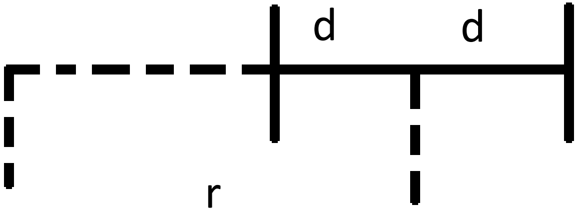
- v,ω为底盘中心的线速度和角速度
- v_R和v_L两轮的线速度， ω_R和ω_L为两轮的角速度
- d为轮子离底盘中心的距离，b为两轮之间的距离

$$v=\frac{v_R+v_L}{2}=\frac{\omega_R\cdot r_R+\omega_L\cdot r_L}{2}\qquad \omega=\frac{v_R\text{-}v_L}{2d}=\frac{\omega_R\cdot r_R-\omega_L\cdot r_L}{2d}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{r_L}{2} & \frac{r_R}{2} \\ -\frac{r_L}{b} & \frac{r_R}{b} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}=J\cdot\begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}}$$

两轮差速底盘的运动学模型

差分模型



运动解算

- 圆弧运动
- 欠驱动系统：运动耦合
- r底盘中心圆弧运动的半径

$$\frac{v_L}{r-d} = \frac{v_R}{r+d}$$

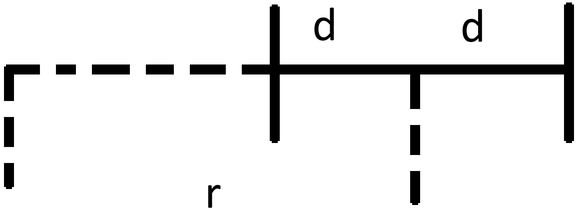
$$v_L(\mathrm{r}+d) = v_R(r-d)$$

$$(v_R - v_L)\mathrm{r} = (v_R + v_L)\mathrm{d}$$

$$\mathrm{r} = \frac{(v_R + v_L)\mathrm{d}}{(v_R - v_L)}$$

两轮差速底盘的运动学模型

差分模型



运动解算

- 圆弧运动
- 欠驱动系统：运动耦合
- r底盘中心圆弧运动的半径

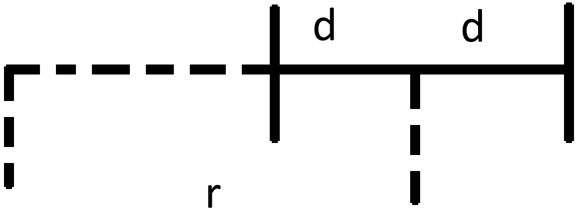
$$\omega = \frac{v_R}{r + d}$$

$$\mathrm{r} + \mathrm{d} = \frac{(v_R + v_L)\mathrm{d}}{(v_R - v_L)} + \frac{(v_R - v_L)d}{(v_R - v_L)} = 2\frac{v_R d}{(v_R - v_L)}$$

$$\omega = \frac{(v_R - v_L)}{2d}$$

两轮差速底盘的运动学模型

差分模型



运动解算

- 圆弧运动
- 欠驱动系统：运动耦合
- r底盘中心圆弧运动的半径

$$\mathrm{v} = \omega * \mathrm{r} = \frac{(v_R - v_L)}{2d}\frac{(v_R + v_L)\mathrm{d}}{(v_R - v_L)} = \frac{v_R + v_L}{2}$$

$$\mathrm{v} = \frac{v_R + v_L}{2}$$

里程计模型

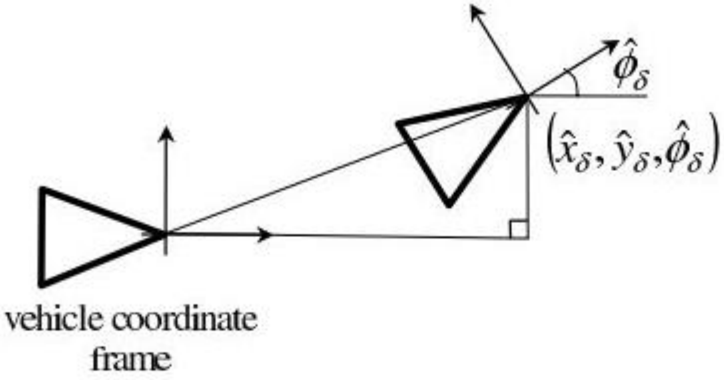
轮式里程计模型

1、两轮差分底盘的运动学模型

2、航迹推算(Dead Reckoning)

航迹推算

示意图



递推公式

- (x, y, θ)为当前位姿--世界坐标系
- $(dx, dy, d\theta)$为运动增量--车体坐标系

增量从车体转换到世界坐标系：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{bmatrix}$$

加入噪声：

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx + \varepsilon_x \\ dy + \varepsilon_y \\ d\theta + \varepsilon_\theta \end{bmatrix}}$$

课程内容

轮式里程计标定

1、线性最小二乘的基本原理

2、线性最小二乘的直线拟合

3、线性最小二乘在里程计标定中的应用

线性最小二乘

线性方程组Ax=b

- A为$m \times n$的矩阵。
- x为$n \times 1$的向量

m表示约束个数，n表示自变量个数。

- 当m=n时，适定方程组，方程组有唯一解
- 当m<n时，欠定方程组，方程组有无穷多解
- 当m>n时，超定方程组，方程组有通常无解

最小二乘解

- 绝大多数情况为m>n，超定方程组
- 多数约束自相矛盾，无解！
- 无解但是有最小二乘解
- 通解: $x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$

线性最小二乘

最小二乘的求解—线性空间的角度

- Ax表示矩阵A的列向量张成的线性空间S

$$Ax=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \cdot x_3$$

- 无解：$Ax=b$对于任意的x均不成立，即b不在S中

- 最小二乘解：S中，离b最近的向量

向量b在线性空间S中的投影

线性最小二乘

最小二乘的求解—线性空间的角度

- 设Ax^*为向量b在空间S中的投影，显然$(b-Ax^*)$垂直于空间S。
- $(b-Ax^*)$跟矩阵A的每一个列向量都垂直

设：

$$A=[a_1,a_2,\cdots a_n]$$

a_i表示矩阵A的第i个列向量

则：

$$a_i^T(b-Ax^*)=0$$

可得：

$$A^T(b-Ax^*)=0$$

$$A^Tb=A^T\mathrm{A}x^*$$

$$\boxed{x^*=(A^TA)^{-1}A^Tb}$$

课程内容

轮式里程计标定

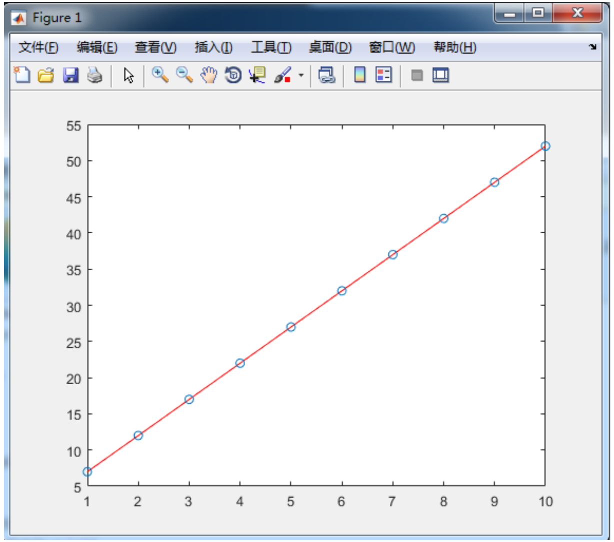
1、线性最小二乘的基本原理

2、线性最小二乘的直线拟合

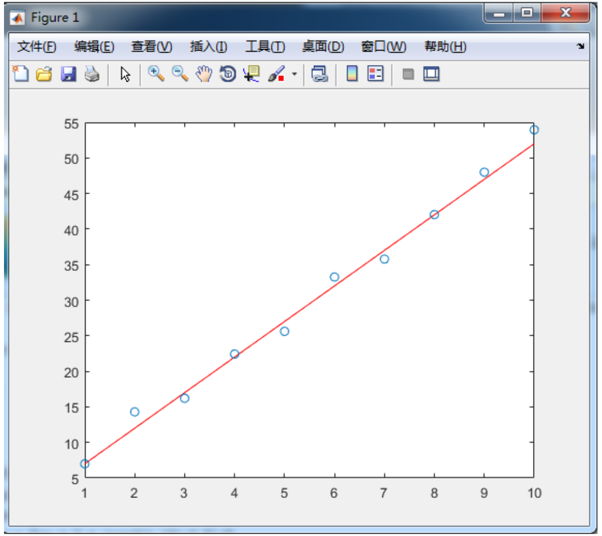
3、线性最小二乘在里程计标定中的应用

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



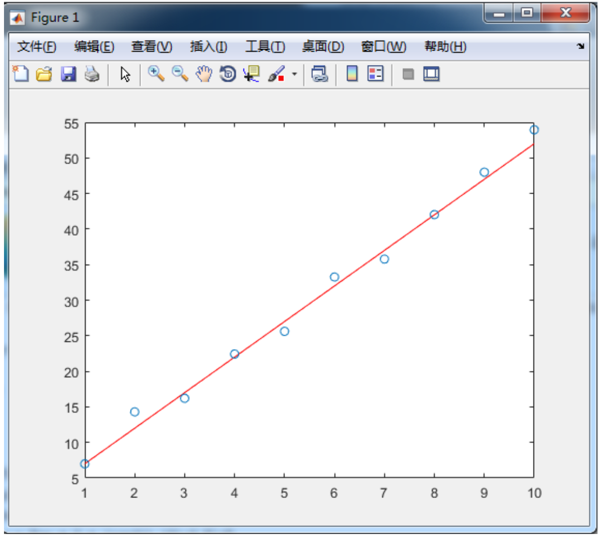
- 理想情况



- 混入采样噪声

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



- 混入采样噪声

- 采样数据：

x=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

y = (6.9918 , 14.2987, 16.2019, 22.4263, 25.6191, 33.2563, 35.7755, 42.0298, 47.9954, 53.9545)

- 假设直线方程：y = ax + b，带入数据可得

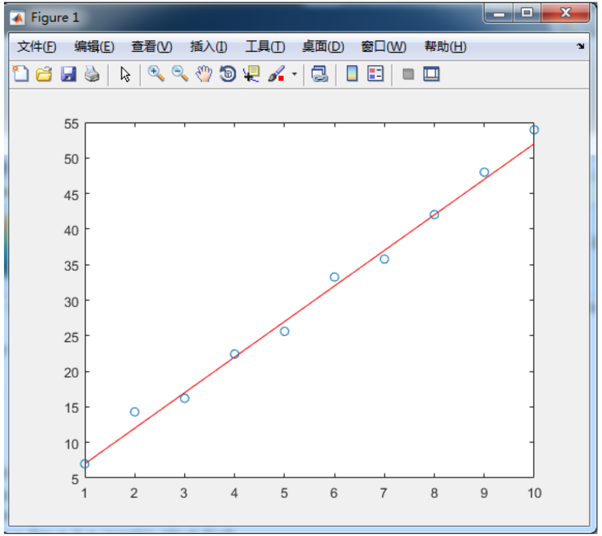
$$
\begin{aligned}
ax_1 + b &= y_1 \\
ax_2 + b &= y_2 \\
&\vdots \\
ax_n + b &= y_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

$$
Ax = b
$$

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



- 混入采样噪声

$$A^TA = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \\ 1 & 1 & \cdots 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}$$

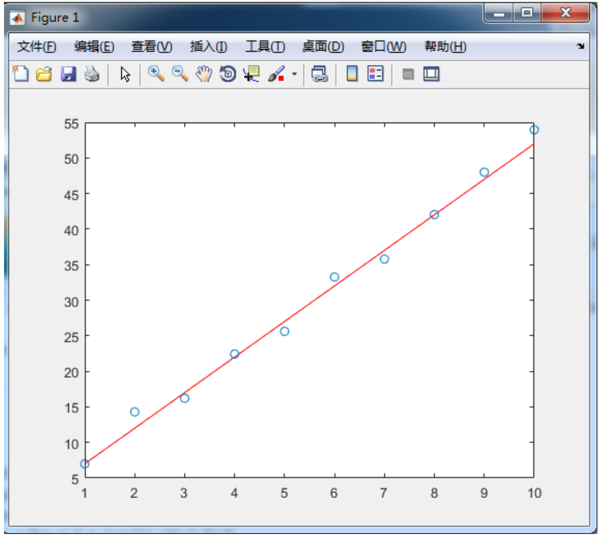
$$(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-n}{B} & \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{B} \\ \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{B} & \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{B} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{n\sum x_iy_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \\ \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_iy_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} \end{bmatrix}$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



- 混入采样噪声

- 代入数据可得：

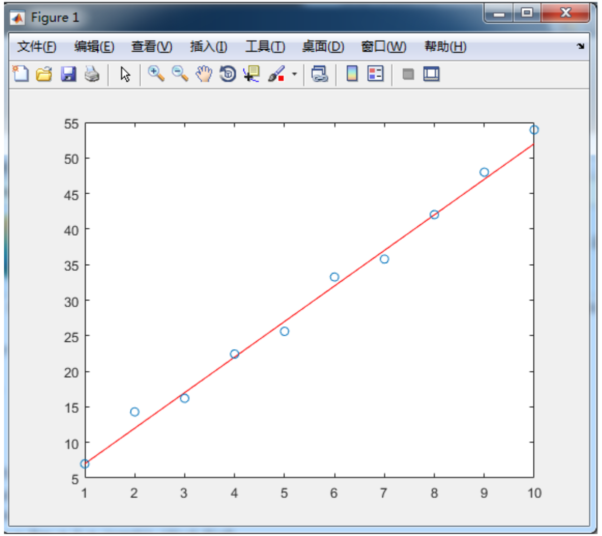
$$\sum x_i^2 = 385$$
$$\sum x_i = 55$$
$$\sum x_i y_i = 2059.7039$$
$$\sum y_i = 298.5494$$

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = \frac{2059.7039 * 10 - 298.5494 * 55}{385 * 10 - 55 * 55} = 5.063$$

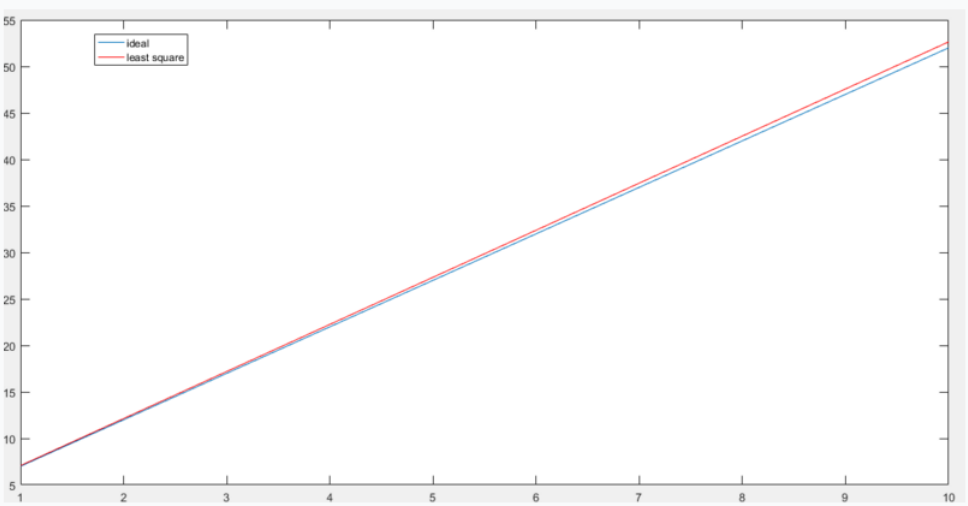
$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i y_i \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i} = \frac{385 * 298.5494 - 2059.7039 * 55}{385 * 10 - 55 * 55} = 2.009$$

线性最小二乘

直线拟合—y=5x+2



- 混入采样噪声



- 拟合对比

课程内容

轮式里程计标定

1、线性最小二乘的基本原理

2、线性最小二乘的直线拟合

3、线性最小二乘在里程计标定中的应用

里程计标定

直接线性方法

- 通用性强
- 实现简单
- 精度不高

基于模型的方法

- 精度高
- 实现复杂
- 特异性高

里程计标定

直接线性方法

- 用激光雷达的scan-match数据作为真值u_i^*
- 里程计测量得到的数据为u_i
- 假设成线性关系$u_i^* = X * u_i$

其中：

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

对于每一组数据，可得：

$$u_{ix} * x_{11} + u_{iy} * x_{12} + u_{i\theta} * x_{13} = u_{ix}^*$$

$$u_{ix} * x_{21} + u_{iy} * x_{22} + u_{i\theta} * x_{23} = u_{iy}^*$$

$$u_{ix} * x_{31} + u_{iy} * x_{32} + u_{i\theta} * x_{33} = u_{i\theta}^*$$

$$\begin{bmatrix} u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{ix} & u_{iy} & u_{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ix}^* \\ u_{iy}^* \\ u_{i\theta}^* \end{bmatrix}$$

$$A_i \vec{X} = b_i$$

$$A = \begin{matrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{matrix} \qquad b = \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \qquad \vec{X} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

里程计标定

基于模型的方法

- 运动学模型

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_L}{2} & \frac{r_R}{2} \\ -\frac{r_L}{b} & \frac{r_R}{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \omega_L \\ \omega_R \end{pmatrix}$$

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt$$

$$x(t) = \int v(t) \cos(\theta(t)) dt$$

$$y(t) = \int v(t) \sin(\theta(t)) dt$$

- 匀速运动假设

$$\omega(t) = \omega = J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R$$

$$v(t) = v = J_{11}\omega_L + J_{12}\omega_R$$

$$J_{11} = -\frac{b}{2} \cdot J_{21} \qquad J_{12} = \frac{b}{2} \cdot J_{22}$$

$$v(t) = v = \frac{b}{2}(-J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R)$$

- 已知两个轮子的角速度ω_L和ω_R，需要求解两个轮子的半径(r_L和r_R)和两轮之间的距离b.

里程计标定

基于模型的方法

- 假设激光雷达位于车体的正中心
- 激光雷达的匹配值作为观测值
- 里程计的积分值作为预测值
- 通过最小化预测值和观测值的差即可得到里程计的参数
- 里程计的积分值用r_x, r_y, r_θ表示，激光雷达的匹配值用s_x, s_y, s_θ表示。

- 角度积分表达式

$$r_\theta(t) = \int \omega(t)\mathrm{d}t = \int J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R dt$$

$$r_\theta(t) = \begin{pmatrix}\omega_L \cdot \Delta T & \omega_R \cdot \Delta T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_{21} \\ J_{22}\end{pmatrix}$$

- 罗列方程组

$$\begin{bmatrix}\omega_{L0} \cdot \Delta T_0 & \omega_{R0} \cdot \Delta T_0 \\ \omega_{L1} \cdot \Delta T_1 & \omega_{R1} \cdot \Delta T_1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{Ln} \cdot \Delta T_n & \omega_{Rn} \cdot \Delta T_n\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}J_{21} \\ J_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}S_{\theta 0} \\ S_{\theta 1} \\ \vdots \\ S_{\theta n}\end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

里程计标定

基于模型的方法

- 套用线性最小二乘的求解公式：

$$\begin{bmatrix} J_{21} \\ J_{22} \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

- 在已知J_{21}和J_{22}的情况下，里程计的位置积分和参数b呈线性关系，推导过程如下：

$$r_x(t) = \int v(t)\cos(\theta(t))dt$$
$$= \frac{b}{2}(-J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R)\int \cos(\theta(t))dt = c_x b$$

$$r_y(t) = \int v(t)\sin(\theta(t))dt$$
$$= \frac{b}{2}(-J_{21}\omega_L + J_{22}\omega_R)\int \sin(\theta(t))dt = c_y b$$

- 罗列方程组

$$\begin{bmatrix} c_{x0} \\ c_{y0} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{xn} \\ c_{yn} \end{bmatrix} \bullet b = \begin{bmatrix} s_{x0} \\ s_{y0} \\ \vdots \\ \vdots \\ s_{xn} \\ s_{yn} \end{bmatrix}$$

- 求解此方程组，得到参数b。

里程计标定

基于模型的方法

- 已知参数b, J_{21}, J_{22}，可以得到:

$$J_{21} = -\frac{r_L}{b} \qquad J_{22} = \frac{r_R}{b}$$

- 因此，可得:

$$r_L = -J_{21} \cdot b \qquad r_R = J_{22} \cdot b$$

- 两轮直径和轮间距都已知，求解完毕

总结

- 收集n段数据，每段数据包含两个轮子的角速度(ω_L, ω_R)、该段数据持续的时间dt以及激光雷达的匹配值
- 按照上面介绍的公式，计算中间变量J_{21}和J_{22}
- 按照上面介绍的公式，计算轮间距b
- 用轮间距b、J_{21}和J_{22}，计算两个轮子的半径。

参考资料

[1] Simultaneous calibration of odometry and sensor parameters for mobile Robots

作业

详细见作业说明

结语

感谢各位聆听！

Thanks for Listening