week2

Problems 4-7 Monge Array

a

充分性：由定义即可得到

必要性：

由 $A[i,j]+A[i+1,j+1]\le A[i,j+1]+A[i+1,j]$ 可得

$A[i,j]-A[i,j+1]\le A[i+1,j]-A[i+1,j+1]$

故$f_j(i)=A[i,j]-A[i,j+1]$ 关于i递增, 则有 $\forall 1\le i<k\le m$, 有 $f_j(i)\le f_j(k)$ 成立, 即 $A[i,j]+A[k,j+1]\le A[i,j+1]+A[k,j]$

同理对 $\forall 1\le j<l\le n$, 有 $A[i,j]+A[i+1,l]\le A[i,l]+A[i+1,j]$

综合上述两个式子可得 $A[i,j]+A[k,l]\le A[i,l]+A[k,j]$

b

答案不唯一，修改
$\begin{matrix}23 & 22\\ 6 & 7\end{matrix}$ 中的数使其满足a中条件即可，如：

$$\begin{matrix}37 & 23 & \mathbf{25} & 32\\ 21 & 6 & 7 & 10\\ 53 & 34 & 30 & 31\\ 32 & 13 & 9 & 6\\ 43 & 21 & 15 & 8\end{matrix}$$

c

假设 $\exists a,b,1\le a<b\le m$, 使得 $f(a)>f(b)$

由f定义有: $A[a,f(b)]>A[a,f(a)]$ 与 $A[b,f(b)]\le A[b,f(a)]$

可得 $A[b,f(a)]+A[a,f(b)]>A[a,f(a)]+A[b,f(b)]$, 与Monge Array 的定义矛盾

d

已知 $f(2), f(4), ..., f(2k)$, 求奇数行的 $f(2i+1)$, 查找时只需要检查 $f(2i), f(2i+2)$ 之间的数字，最多需要 $f(2i+2)-f(2i)+1$ 步, 总时间为:

$$
\begin{aligned}
T(m,n) &= \sum_{i=0}^{m/2}(f(2i+2)-f(2i)+1) \\
&= f(m)-f(0)+m/2 \\
&= n+m/2 \\
&= O(m+n)
\end{aligned}
$$

e

假设 $T(m,n)=O(m+n)\leq cm+dn$, 则:

$$
\begin{aligned}
T(m) &= T(m/2)+T(m,n) \\
&\leq T(m/2)+cm+dn \\
&\leq cm+dn+cm/2+dn+... \\
&= \sum_{i=0}^{lg\,m-1}\frac{cm}{2^i}+\sum_{i=0}^{lg\,m-1}dn \\
&= 2cm+dn\,lg\,m \\
&= O(n\,lg\,m+m)
\end{aligned}
$$