Mecânica Quântica I

LEFT, 3º ano 2021-2022

Filipe Joaquim, Bernardo Gonçalves, João Penedo

Série 0 - Background matemático

Problema 0.1. (In)dependência linear de funções

Verifique se as seguintes funções são ou não linearmente independentes para $x \in \mathbb{R}$

i) $f(x) = 4\,,\ g(x) = x^2\,,\ h(x) = e^{2x}$.

ii) $f(x) = x\,,\ g(x) = x^2\,,\ h(x) = 2x^3$.

iii) $f(x) = 2x\,,\ g(x) = 8x\,,\ h(x) = 2x^4$.

iv) $f(x) = 2 + x^2\,,\ g(x) = 6 - 2x + 2x^4\,,\ h(x) = 3x^2 + 2x - 2x^4$

Respostas: **(a)** LI **(b)** LI **(c)** LD; $g(x) = 4f(x)$ **(d)** LD; $h(x) = 3f(x) - g(x)$

Problema 0.2. (In)dependência linear de vetores

Verifique se os seguintes vetores são ou não linearmente independentes no espaço Euclidiano tri-dimensional.

i) $\vec{u} = (3, 0, 0)\,,\ \vec{v} = (0, -2, 0)\,,\ \vec{w} = (0, 0, 1)$

ii) $\vec{u} = (4, -6, 0)\,,\ \vec{v} = (-2, 3, 0)$

iii) $\vec{u} = (4, 6, -2)\,,\ \vec{v} = (0, 2, 4)\,,\ \vec{w} = (0, 0, -10)$

iv) $\vec{u} = (1, -2, 3)\,,\ \vec{v} = (-4, 1, 7)\,,\ \vec{w} = (0, 10, 11)\,,\ \vec{z} = (14, 3, -4)$

Respostas: **(a)** LI **(b)** LD; $\vec{v} = -2\vec{u}$ **(c)** LI **(d)** LD; $\vec{z} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$

Problema 0.3. Propriedades de matrizes hermíticas

Tendo em conta que uma matriz M é Hermítica se $M = M^\dagger$:

i) Discuta a Hermiticidade das matrizes $A + A^\dagger$, $i(A + A^\dagger)$, $i(A - A^\dagger)$, onde A é uma matriz complexa geral.

ii) Encontre o adjunto hermitico da função $f(A) = (1 + iA + 4A^2)(1 - 4iA^3)$, onde A é uma matriz complexa geral.

iii) Mostre que os valores próprios de uma matriz hermítica (anti-hermítica) são reais (imaginários puros).

iv) Mostre que os vetores próprios de uma matriz hermítica correspondentes a valores próprios diferentes são ortogonais.

v) Mostre que o comutador de duas matrizes hermíticas é uma matriz anti-hermítica.

vi) Mostre que se duas matrizes hermíticas A e B comutarem, e se A tiver valores próprios todos diferentes, então cada vetor próprio de A é também vetor próprio de B.

Respostas: **(a)**H, AH, H **(b)** $1 - iA^\dagger + 4A^{\dagger 2} + 4iA^{\dagger 3} + 4A^{\dagger 4} + 16iA^{\dagger 5}$

Problema 0.4. Propriedades de transformações unitárias

Considere uma matriz unitária U que verifica $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$, ou seja, $U^\dagger = U^{-1}$.

i) Se A for uma matriz hermítica, mostre que a transformada $A' = UAU^\dagger$ é também hermítica.

ii) Mostre que os valores próprios de $A' = UAU^\dagger$ são os mesmos de A.

iii) Mostre que se $[A, B] = a$, onde a é um número complexo, $[A', B'] = [A, B]$ com $A' = UAU^\dagger$ e $B' = UBU^\dagger$.

iv) Mostre que $(UAU^\dagger)^n = UA^nU^\dagger$.

v) Quais as propriedades que uma matriz G deve ter para que $U = e^{i\varepsilon G}$ seja uma matriz unitária (considere ε real).

vi) Mostre que os valores próprios de uma matriz unitária são numeros complexos de módulo 1, e que, se não houverem valores próprios degenerados, os vetores próprios são ortogonais.

vii) Uma matriz hermítica H de dimensão $n \times n$ pode ser diagonalizada por uma transformação do tipo $UHU^{-1} = D$ onde D é uma matriz diagonal de elementos reais. Mostre que duas matrizes hermíticas H_1 e H_2 são diagonalizadas com a mesma matriz U se comutarem.

Respostas: v) G tem que ser hermítica.

Problema 0.5. Operadores lineares e produtos internos

i) Mostre que se T e S são operadores lineares a atuar em vetores de $\mathbb{C}^n$, então $T + S$ e $T.S$ são também operadores lineares.

ii) Considere o conjunto das funções a uma varável $f(x)$ diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Mostre que o operador diferenciação $\frac{d}{dx}$ é um operador linear.

iii) Considere dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$ com $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$, onde u_i e v_i são números complexos. Mostre que a operação $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i^* v_i$ tem as propriedades de um produto interno em $\mathbb{C}^n$.

iv) Mostre que se $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ para todo o $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, então $\vec{u} = \vec{w}$.

v) Sejam S e T dois operadores lineares. Mostre que se $\langle T\vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle S\vec{v}, \vec{u} \rangle$ para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$, então $S = T$.

vi) Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções complexas de quadrado integrável. Mostre que $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx$ tem as propriedades de um produto interno.

Problema 0.6. Propriedades da função delta de Dirac $\boldsymbol{\delta(x)}$

Dirac definiu a *função* $\delta(x)$ como sendo

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1\,.$$

Note-se que $\delta(x)$ não é uma função no sentido comum da análise matemática, pelo que Dirac a considerou como sendo uma função *imprópria* (ver discussão em *"The Principles of Quantum Mechanics"*, P.A.M. Dirac, p. 58, disponível no separador Material Extra da webpage de MQI). Pode-se, no entanto, definir $\delta(x)$ como sendo o $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta^{(\varepsilon)}(x)$ onde $\delta^{(\varepsilon)}(x)$ podem ser várias funções como, por exemplo:

$$\delta^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & -\varepsilon/2 < x < \varepsilon/2 \\ 0, & |x| > \varepsilon/2 \end{cases} \quad , \; \delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} \; , \; \delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{\varepsilon^2}\right)$$

Outra forma de pensar em $\delta(x)$, é considerá-la como sendo a derivada da função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad .$$

Prove as seguintes propriedades de $\delta(x)$:

i) $\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$ e particularize para $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx$.

ii) $\delta[a(x-x_0)] = \delta(x-x_0)/|a|$ $(a \neq 0)$.

iii) $f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$.

iv) $\delta[g(x)] = \sum_i \dfrac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$ onde $g(x_i) = 0$ e $g'(x_i) \neq 0$.

v) $\delta(x-a)\delta(x-b) = \dfrac{1}{|a-b|}\left[\delta(x-a)+\delta(x-b)\right]$ para $a \neq b$.

vi) $\delta(x^2-a^2) = \dfrac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right]$

vii) $\delta(x-x_0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x_0)}dk$ (Sugestão: use transformadas de Fourier).