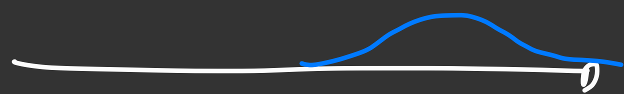
7 Mai Osc Oud

Meios dispersivos

Sempre que ω e k não são linearmente proporcionais (velocidade de dispersão não linear) qualquer pulso (sinal) muda forma durante a propagação e é dispersado (deixa de ser um pulso localizado)

$t = 0$



$t > 0$

como enviar sinais num meio dispersivo

↳ como modulação de um sinal harmónico

$$f(t) = f_s(t)\cos\omega_0 t$$

mesmo para um meio não dispersivo esta ideia é útil porque permite enviar sinais com freq. características muito diferentes daquelas adequadas à propagação eficiente num meio

Rádio AM → sinal é som ($\sim 100\,Hz$)

→ transportado como modulação de amplitude da onda de rádio ($\sim 10^6\,Hz$)

Soma de 2 ondas progressivas c/ freq. e números de onda diferentes

$$\cos(k_+ x - \omega_+ t) + \cos(k_- x - \omega_- t)$$

onde

$$k_\pm = k_0 \pm k_s \qquad \omega_\pm = \omega_0 \pm \omega_s$$

com

$$k_s \ll k_0 \qquad \omega_s \ll \omega_0$$

$$2\cos(k_s x - \omega_s t)\cos(k_0 x - \omega_0 t)$$

$$2\,\underbrace{\cos(k_s x - \omega_s t)}\,\underbrace{\cos(k_0 x - \omega_0 t)}$$

varia lentamente em comparação com

sinal que se propaga com velocidade

$$v_s = \omega_s / k_s$$

onda de transporte

$$v_0 = \omega_0 / k_0$$

em geral

$$v_s \neq v_0$$

no limite

$$k_+ - k_- = 2k_S \longrightarrow 0$$

$$v_S = \frac{\omega_+ - \omega_-}{k_+ - k_-} \longrightarrow \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k=k_0}$$

velocidade de grupo
=
velocidade de propag. do sinal

$\boxed{f(t) : \text{sinal que quero propagar (forma arbitrária)}}$

freq. onda transporte

na vizinhança de ω_0 a relação de dispersão varia lentamente, logo a aprox. linear é boa

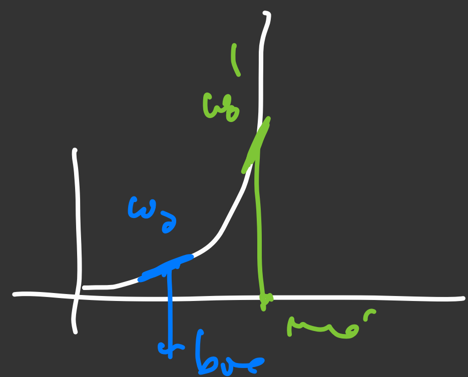
$$\omega = \omega(k) \simeq \underset{\omega(k_0)}{\underset{\shortparallel}{\omega_0}} + (k-k_0)\left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k=k_0} + \dots$$

expandir em Taylor $\omega(k)$ em torno de $k = k_0$

desprezável para

$\omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega$

depende da rel. dispersão e de ω_0



escrever sinal $f(t)$ como modulação de uma onda de freq ω_0: (aqui vou usar notação complexa)

$$f(t)\, e^{-i\omega_0 t}$$

freq. transporte

modulação de amplitude de onda com ω_0 (sinal)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; c(\omega)\, e^{-i\omega t}$$

aqui com $c(\omega) \simeq 0$

$|\omega - \omega_0| > \Delta\omega$

normalmente os termos $(\ldots)$ na série de Taylor são desprezáveis se $\Delta\omega \ll \omega_0$

então

$$\omega = v k + a \qquad a = \omega_0 - v k_0$$

$$k = \frac{\omega}{v} + b \qquad b = k_0 - \omega_0/v$$

$$v = \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k=k_0}$$

Assim (cond. front. que gera o sinal)

$$\psi(0,t) = f(t)\, e^{-i\omega_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, c(\omega)\, e^{-i(\omega+\omega_0)t}$$

mud. de variável

$\omega' = \omega + \omega_0$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, c(\omega' - \omega_0)\, e^{-i\omega' t}$$

$\omega' \to \omega$ (nuova denom.)

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; C(\omega-\omega_0) \underbrace{e^{-i\omega t} \, e^{ikx}}$$

$$e^{-i\omega t + i\left(\omega/v + b\right)x}$$

$$= e^{-i\omega\left(t - x/v\right) + ibx}$$

nuova variabile

$\omega - \omega_0 = \omega' \to \omega$

↳ nuovo nome ω fin

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \; C(\omega') \, e^{-i(\omega'+\omega_0)\left(t - x/v\right) + ibx}$$

$$= e^{-i\omega_0\left(t - x/v\right) + ibx} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; C(\omega) \, e^{-i\omega\left(t - x/v\right)}$$

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, c(\omega) \, e^{-i\omega\xi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, C(\omega) \, e^{-i\omega(t - x/v)}$$

$$= f(t - x/v)$$

logo

$$\psi(x,t) = \underbrace{f(t - x/v)}_{\text{modulação (sinal)}} \, e^{-i\omega_0(t - x/v) + ibx}$$

modulação (sinal)

viaja sem distorção com velocidade v (vel do grupo $v = \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k=k_0}$)

mesma função f apenas com argumento diferente a parte da onda de transporte

$$e^{-i\omega_0\left(t-\cancel{x/v}\right)+i\left(k_0-\cancel{\omega_0/v}\right)x} = e^{-i(\omega_0 t - k_0 x)}$$

ondas de transporte propagam-se com velocidade

$$\omega_0/k_0 = v_\phi$$

velocidade de fase

$$\psi(x,t) = f\left(t - x/v\right) e^{-i\omega_0\left(t - x/v_\phi\right)}$$

Integral de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; C(\omega)\, e^{-i\omega t}$$

para calcular $\psi(x,t)$ para qual antitransformada $f(t)$ num meio dispersivo é necessário calcular $C(\omega)$ para

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; C(\omega)\, e^{-i\omega t + ikx}$$

dado em f. de ω pela rel. disp.

Para calcular $C(\omega)$ tenho que "inverter" o integral de Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, C(\omega) \, e^{-i\omega t}$$

usando ortogonalidade entre diferentes modos normais

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, e^{i(\omega-\omega')t} = \delta(\omega-\omega')$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 \, , & x \neq 0 \end{cases}$$

delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(x) = 1 \; ; \; \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \delta(x-a) f(x) = f(a)$$

projetar o sinal $f(t)$ num modo $e^{i\omega t}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \; f(t)\, e^{i\omega t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, e^{-i\omega' t}\, c(\omega')\right] e^{i\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, c(\omega') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\omega-\omega')t}}_{\delta(\omega-\omega')}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'\, c(\omega')\, \delta(\omega-\omega') = c(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad c(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \; f(t)\, e^{i\omega t}$$

trasf. fourier inversa

Meios dispersivos

- corda com contas
- luz no vidro
- ondas em água profunda (prof. > $\lambda/2$)

$$\omega^2 = g\,k$$

↳ aceleração da grav.