Mecânica Analítica

2020-2021

Série 2

Responsável: Hugo Terças

O objectivo desta série de exercícios consiste numa primeira exposição ao cálculo variacional e às suas aplicações a problemas clássicos na matemática e na física.

$\star\star$ **Problema 1. Princípio da acção mínima.** Considere a quantidade $I[y(x)]$ que é dada como um funcional de uma função $y(x)$,

$$I[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx.$$

a) Mostre que a condição de estacionariedade, i.e. $\delta I = 0$, com extremos fixos $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ implica

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

b) Mostre que as equações de Euler-Lagrange são invariantes para a adição de derivadas totais,

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{dF}{dT},$$

se $F = F(q_i, t)$.

c) Seja $f_\alpha = f_\alpha(q_i, \dot{q}_i; t) = 0$ uma ligação semi-holónoma. Mostre que a condição de extermos condicionados com multiplicadores de Lagrange λ_α implica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^\lambda.$$

Determine a forma das forças generalizadas de constrangimento Q_j^λ.

$\star$ **Problema 2. Geodésica no plano.** Usando cálculo variacional, determine a geodésica (curva que minimiza a distância entre dois pontos) no plano.

$\star\star$ **Problema 3. Lei de Snell.** Considere um raio de luz a propagar-se no plano (x, y), atravessando uma descontinuidade localizada na recta $y = 0$, dividindo dois meios onde as velocidades de propagação são diferentes, v_1 e v_2, mas constantes.

a) Determine a trajectória que minimiza o *tempo* de deslocamento entre um ponto A localizado no meio 1 ($y < 0$) e um ponto B localizado no meio 2 ($y > 0$). Qual é a lei física que se obtém?

b) O que acontece se as velocidades não forem constantes? Apresente o resultado na forma diferencial.

c) Nas condições da alínea anterior, suponha que a velocidade de propagação de cada meio segue uma lei da forma $v_i(y) = v_{0i} + \alpha_i y$. Qual é a trajectória descrita pelo raio de luz? O que pode dizer quanto ao interface ($y = 0$)?

$\star$ **Problema 4. A catenária**. Considere dois postes de electricidade separados de uma distância L, unidos por um cabo que toca os dois postes à altura h. Pretendemos determinar a função $y(x)$ que descreve a curva formada pelo cabo, a famosa *catenária*.

a) Comece por demonstrar que a equação de Euler-Lagrange para este problema fornece

$$1 + y'^2 - yy'' = 0.$$

b) A equação diferencial anterior é de difícil resolução. Para resolvermos o problema inicial, reparamos que o funcional $F[x, y(x), y'(x)]$ não depende explicitamente de x. Nestas condições, use a equação de Euler-Lagrange para demonstrar a *identidade de Beltrami*[1]

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = C,$$

onde C é uma constante.

c) Use o resultado anterior para finalmente obter a equação da catenária,

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a} + b\right).$$

Expresse as constantes a e b em função de L e de h.

$\star$ **Problema 5. Um sistema, vários Lagrangeanos.** Um sistema uni-dimensional de uma partícula de massa m é descrito pelo Lagrangeano

$$L = \frac{1}{12} m^2 \dot{x}^4 + m\dot{x}^2 V - V^2\,,$$

onde $V = V(x)$ é um potencial.

a) Obtenha a equação do movimento da partícula.

b) Caracterize fisicamente o sistema descrito por L.

c) Escreva um Lagrangiano L' (mais simples do que L) que descreva o mesmo sistema físico.

$\star$ **Problema 6. O pêndulo deformável.** Considere um pêndulo simples onde uma massa m está suspensa numa haste de comprimento l. Quando o pêndulo é posto em movimento (em $t = 0$) o comprimento da haste é variado de forma constante no tempo

$$\frac{dl}{dt} = \alpha = \text{constante}\,.$$

O ponto de suspensão é mantido fixo.

[1]Como vimos nas aulas teóricas, em contextos de problemas mecânicos esta identidade expressa a convervação de energia.

a) Quantos graus de liberdade tem este sistema? Quais?

b) Escreva as ligações a que está sujeito o sistema e indique o tipo de ligação e o número de ligações.

c) Escreva o Lagrangeano do sistema escolhendo coordenada(s) generalizada(s) que tenham em conta a(s) ligação(ões) presente(s) no sistema.

d) Escreva, mas não resolva, as equações do movimento.

e) Mostre que, para $\alpha = 0$, o Lagrangeano se reduz ao do pêndulo simples habitual.

f) Utilizando o método dos multiplicadores indeterminados de Lagrange, determine a força de tensão na haste.

g) Mostre que:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dE}{dt},$$

onde θ é o ângulo entre a vertical e a haste e E é a energia total do sistema. O que pode concluir sobre a conservação da energia total deste sistema?

$\star\star\star$ **A braquistócrona**. Em 1696, Bernoulli (que, reza a história, já possuia a solução!) desafiou a comunidade científica a determinar qual a trajectória que minizava o tempo (e não a distância) entre dois pontos A e B situados a duas alturas diferentes, na presença de gravidade. A curva recebe hoje o nome de *braquistócrona.*

Que aquele que consiga solucionar este problema conquiste o prémio que prometemos. Este prémio não é ouro nem prata (...) mas antes as honras, os elogios e os aplausos; (...) exaltaremos, pública e privadamente, por palavra e por carta, a perspicácia do nosso grande Apollo.

Ao desafio responderam vários cientistas, tais como Leibniz, Jacob, Newton e l'Hôpital.

a) Comece por mostrar que o problema variacional da braquistócrona se pode escrever na forma

$$T[y(x)] = \int_A^B \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx.$$

b) Use a idenditade de Beltrami para obter a equação diferencial

$$y(1+y'^2) = 2a,$$

onde a é uma constante arbitrária. De seguida, assumindo que a trajectória começa no ponto $y = 0$, tente uma solução do tipo $y = a(1-\cos\theta)$ para obter as equações paramétricas do *ciclóide*

$$y(\theta) = a(1-\cos\theta), \quad x(\theta) = a(\theta - \sin\theta).$$