

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Teste — Semana 6 — 28 de Outubro de 2020

(CURSOS: LMAC, MEFT)

[5,0 val]

1. Calcule, ou prove que não existe,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sinh |z|}{z}.$$

2. Considere a função $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$, considerando, para a raiz quadrada, o ramo com $\text{Arg} \in [0, 2\pi[$.

[4,0 val]

- a) Estude f quanto à continuidade.

[5,0 val]

- b) Indique em que pontos f é holomorfa e determine a derivada nesses pontos.

[6,0 val]

3. Mostre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{i}{z}}}{z^2 - iz + 2} dz \right| \leq \frac{\pi R e^{\frac{1}{R}}}{(R-1)(R-2)},$$

em que γ é a semi-circunferência de raio R , com $R > 2$, centrada na origem, e percorrida no sentido positivo de $z = R$ a $z = -R$.