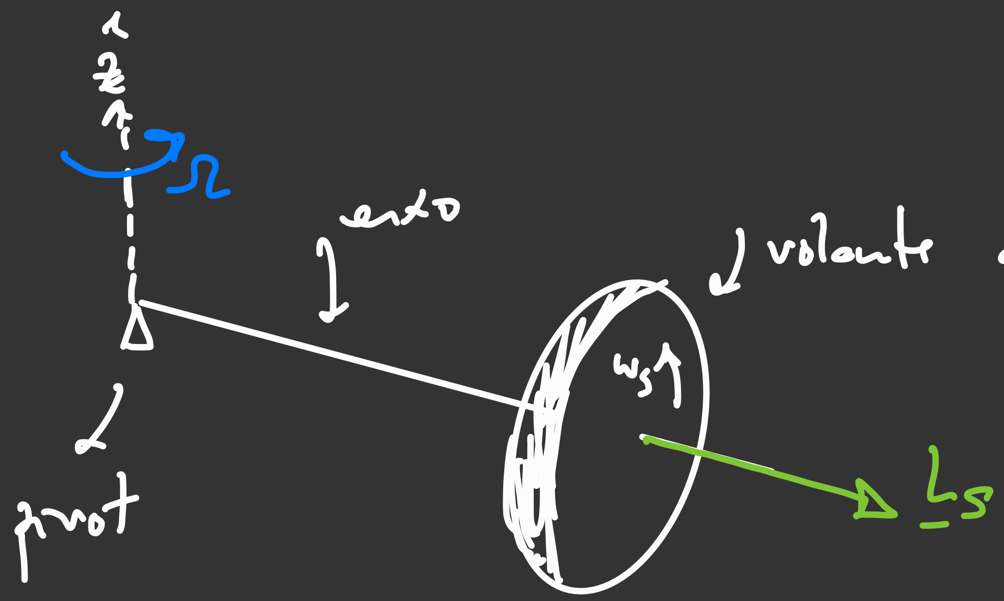
26 Mai Osc Oud

6. Giroscópio e giro-bússola



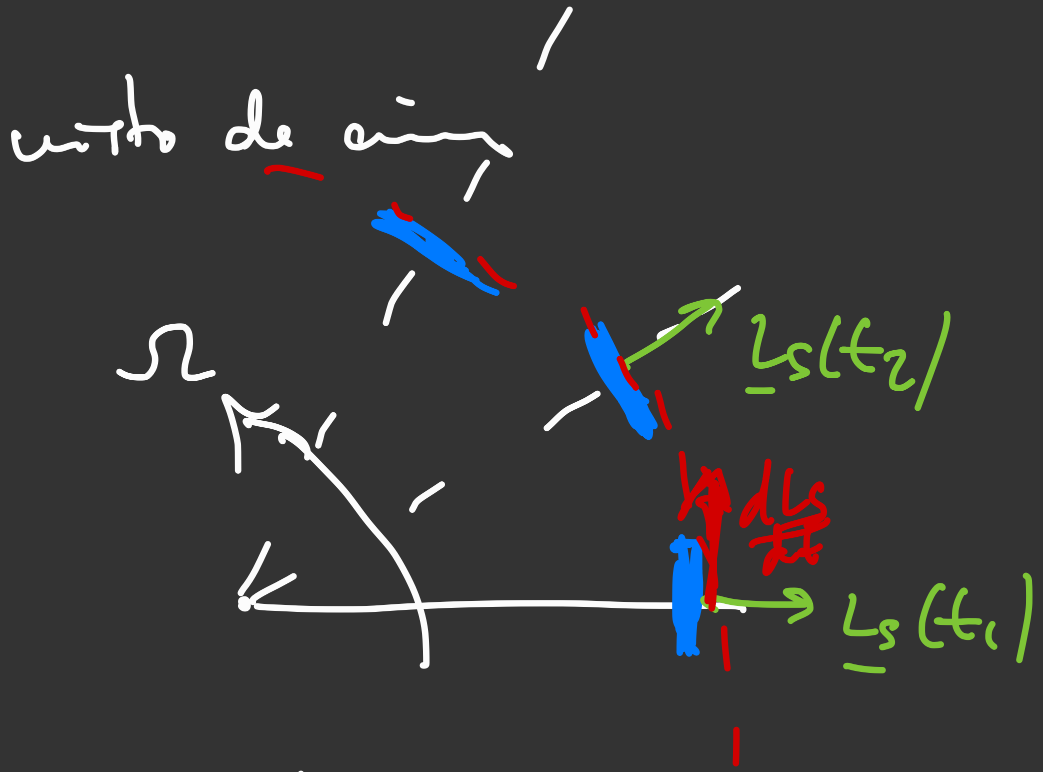
com o eixo fixo, o momento angular do giroscópio $\underline{L}_s$ é inteiramente devido à rotação (spin) do volante e é na direção do eixo e tem magnitude

$$L_s = I_s\,\omega_s$$

momento de inércia do volante em torno do seu eixo de rotação

quando em precessão há também um componente
de momento angular orbital na direcção $\hat{z}$.
Para precessão uniforme, este momento angular
é constante em direcção e magnitude e logo
não tem efeitos dinâmicos e pode ser ignorado

$\underline{L}_s$ é <u>sempre</u> na direcção do eixo do giroscópio;
em precessão o eixo roda logo $\underline{L}_s$ vai
mudar



A velocidade angular de precessão Ω é

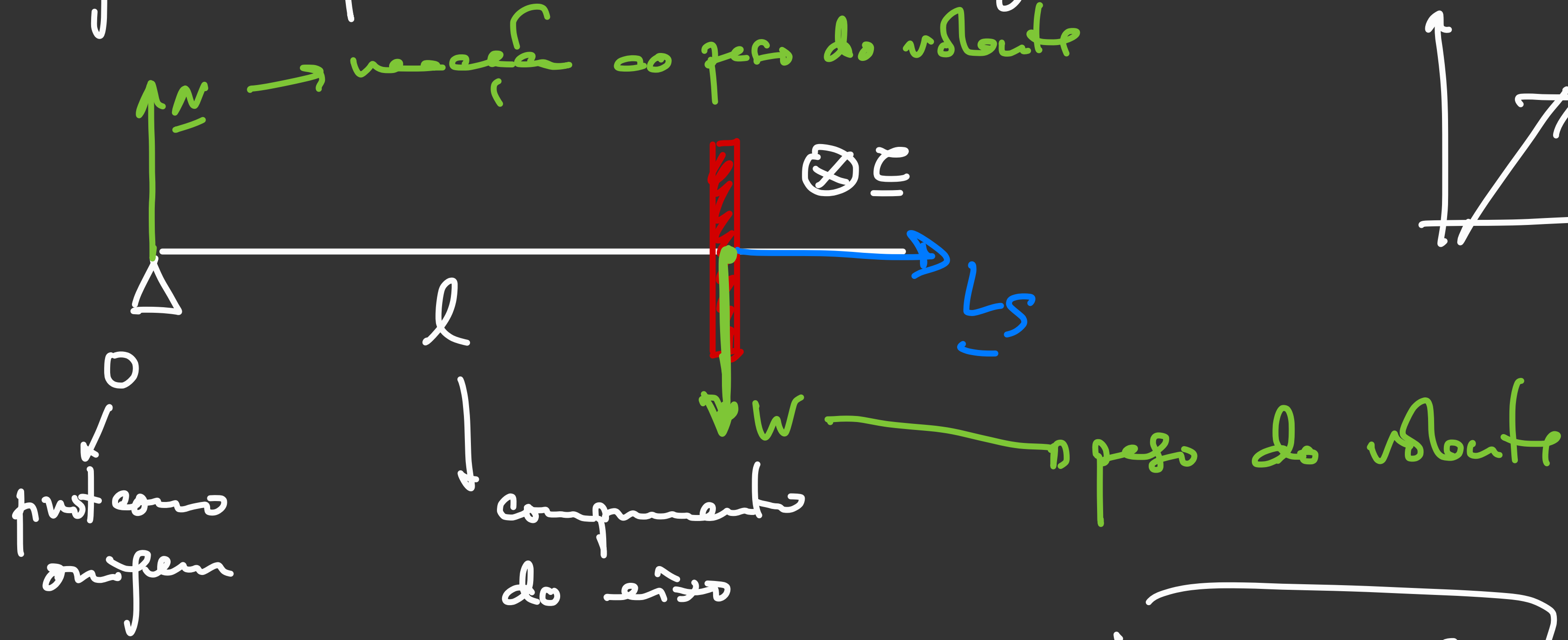
$$\left|\frac{d\underline{L}_s}{dt}\right| = \Omega L_s$$

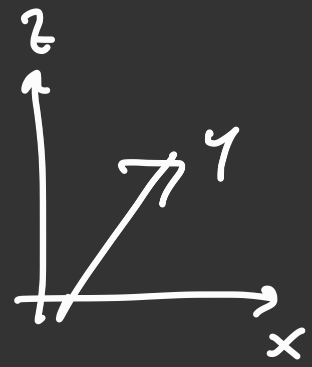
direção tangencial ao círculo no plano xy descrito por $\underline{L}_s$

Para que $\underline{L}_s$ varie tem que existir um torque (momento de uma força) no giroscópio

$$\left[\ \underline{\tau} = \frac{d\underline{L}}{dt}\ \right]$$

para simplificar vamos considerar que o eixo do giroscópio está na horizontal





$$\boxed{\underline{\tau} = \underline{r} \times \underline{F}}$$

$\underline{N}$ não contribui para o torque ($\underline{r} = 0$)

o torque devido ao peso ($\underline{W} \perp \underline{r}$) tem magnitude

$$\tau = l W$$

e aponta para dentro do ecrã paralelo a $\frac{d\underline{L}_s}{dt}$

Neste cálculo:

$$\underbrace{\left|\frac{d\underline{L}_s}{dt}\right|}_{\Omega L_s} = \underbrace{\tau}_{l w}$$

todas estas contas poderiam ter sido feitas tomando como origem o CM do volante

binário devido à reacção normal

$$\Rightarrow \quad \Omega = \frac{l w}{L_s}$$

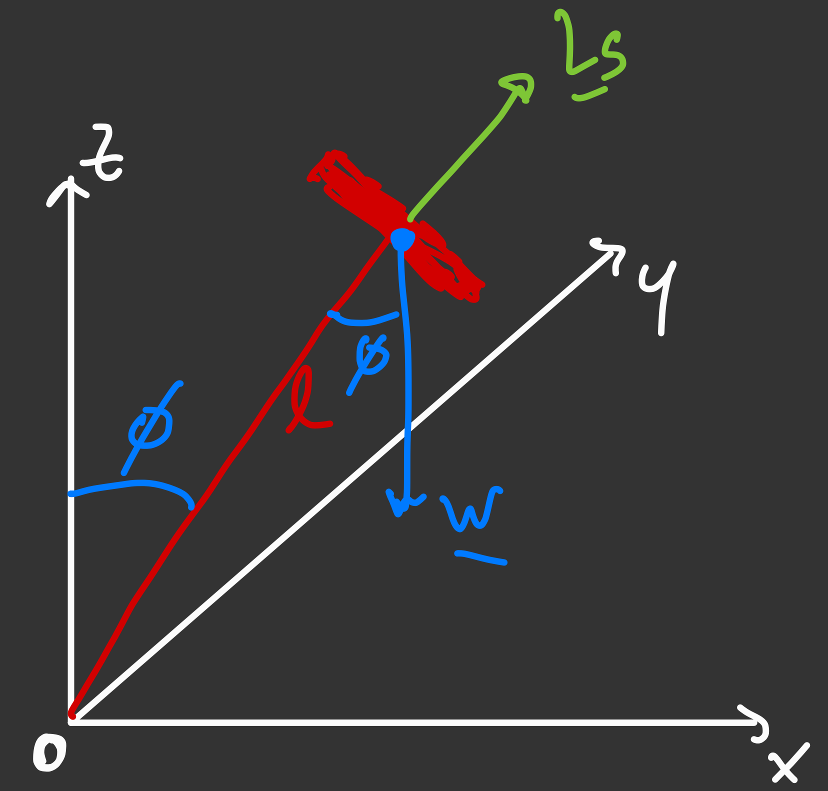
$L_s = I_s \omega_s$

$$\Rightarrow \quad \Omega = \frac{l w}{I_s \omega_s}$$

vel. de precessão

caso um pouco mais geral

(eixo do giroscópio faz ângulo ϕ com a vertical)



a componente de $\underline{L_s}$ no plano $\hat{x}O\hat{y}$ vai precessar enquanto que a componente de $\underline{L_s}$ em $\hat{z}$ é constante

no plano $\hat{x}O\hat{y}$

$$\boxed{L_s \sin\phi}$$

o binário do peso (pivot como origem) é exclusivamente devido ao peso e é horizontal com magnitude $|\underline{r}\times\underline{F}|$

$$\tau = \ell w \sin\phi$$

e aponta para dentro

↳ ângulo entre $\underline{\ell}$ e $\underline{w}$

e logo

$$\left|\frac{d\underline{L_s}}{dt}\right| = \Omega L_s \sin\phi$$

logo

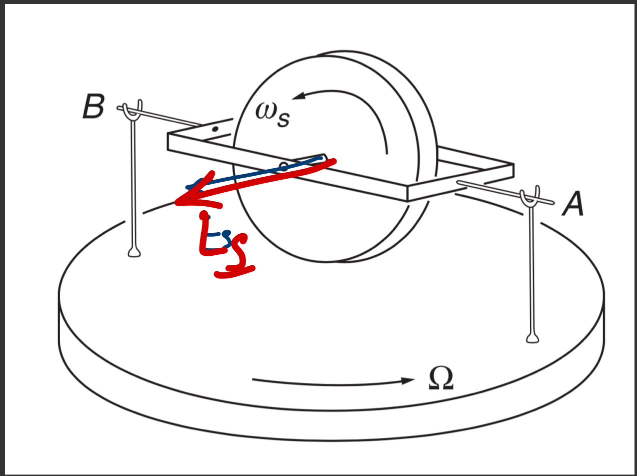
$$\left|\frac{dL_s}{dt}\right| = |\tau|$$

$$\Rightarrow \Omega L_s \cancel{\sin\phi} = l \cancel{\sin\phi}\, w$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{l w}{I_s \omega_s}}$$

indep. do ângulo entre eixo do giroscópio e eixo de precessão

Girobússola



$\Omega = \text{const}$

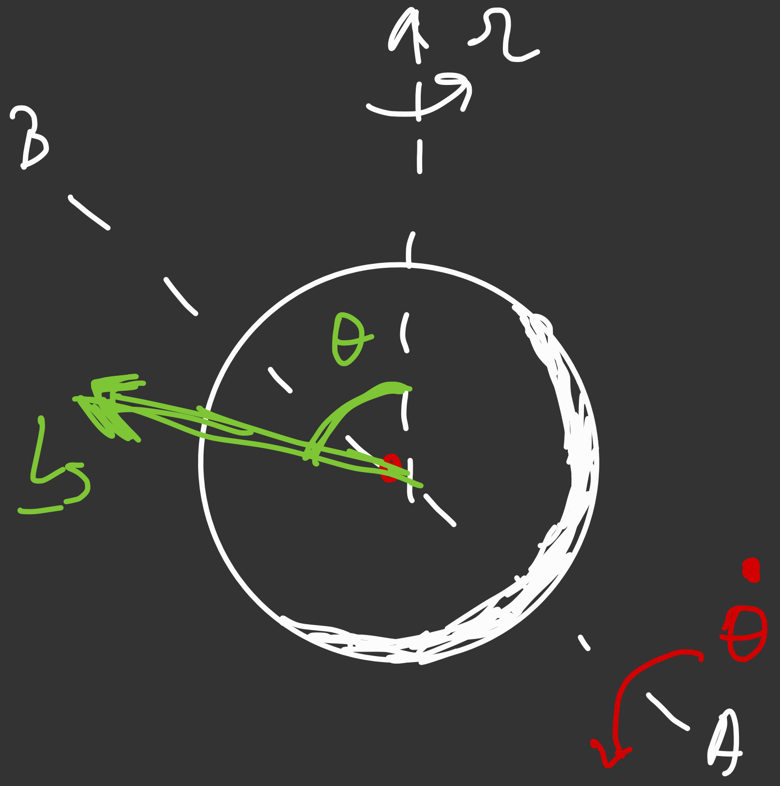
$\underline{L}_s = I_s \omega_s$

- momento angular adicional devido à rotação em torno de $\hat{z}$
- tb pode existir outra componente de momento angular devido à rotação em torno do $\overline{AB}$

O torque resultante na direção $\overline{AB}$ tem que ser nulo porque este eixo está pivotado

$$\Rightarrow \frac{dL_h}{dt} = 0$$

ou seja as várias contribuições para este torque têm que se cancelar



quando a direcção de L_s varia (porque há rotação em torno de AB), ou seja θ varia, tem-se um comp. de momento angular no plano horizontal

$$L_h = I_\perp \dot{\theta}$$

momento de inércia do volante relativo a $\overline{AB}$

$$\left.\frac{dL_h}{dt}\right|^{(1)} = I_\perp \ddot{\theta}$$

- a direcção de $\underline{L}_S$ muda também devido à rotação do sistema (Ω)
  - → a comp. de $\underline{L}_S$ no plano horizontal é $L_S \sin\theta$ e logo a sua variação devido à rotação Ω é (o mesmo que no giroscópio)

$$\left.\frac{dL_h}{dt}\right|^{(2)} = \Omega L_S \sin\theta$$

Tudo junto

$$\frac{dL_h}{dt} = I_\perp \ddot{\theta} + \Omega L_S \sin\theta$$

$$\parallel$$

$$0 \quad \text{porque o sistema está pivotado}$$

fica

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{L_S\Omega}{I_\perp}\right)\sin\theta = 0$$

eq. de um pêndulo

pequenos ângulos $\sin\theta \approx \theta$

($\underline{L}_S$ está suficientemente perto da vertical)

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{L_S\Omega}{I_\perp}\right)\theta = 0$$

oscilador harmónico

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 \sin\beta t \qquad \beta = \sqrt{\frac{L_S\Omega}{I_\perp}} = \sqrt{\frac{\omega_S\Omega I_S}{I_\perp}}$$

<u>ou seja</u> : posição do eixo do giroscópio vai oscilar em torno do eixo de rotação do sistema como um todo (Ω)

aplicação usual: excesso atrito

$\longrightarrow$ amplitude de oscilação $\longrightarrow 0$

(fim da oscilação)

$\Longrightarrow$ eixo spin $\parallel \hat{z}$

$\hookrightarrow$ eixo de rotação do sistema como um todo