Mecânica Analítica

2020-2021

Série 3

Responsável: Hugo Terças

Nesta série, concluímos o estudo dos multiplicadores de Lagrange e iniciamos os potenciais centrais

$\star\star$ **Problema 1.** Partindo do princípio de Hamilton, mostre que para $L = L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$, as equações de Euler-Lagrange se escrevem[1]

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} = 0.$$

Usando a definição $S = \int_{t_a}^{t_b} L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)dt$, aplicamos a condição de estacionariedade δS,

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \int_{t_a}^{t_b} \delta L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i}_{\text{A}} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \ddot{q}_i}_{\text{B}} \right) dt = 0.$$

Integramos o segundo e o terceiro termos por partes para obter

$$\text{A}: \qquad \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \, dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\cancel{\delta q_i}\right]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) dt,$$

$$\text{B}: \qquad \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \ddot{q}_i \, dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\cancel{\delta \dot{q}_i}\right]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) dt = -\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\cancel{\delta q_i}\right]_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\delta q_i\right) dt.$$

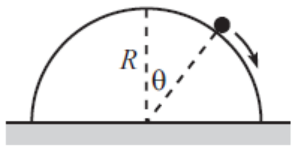
Finalmente, substituindo na condição de estacionaridade, podemos escrever

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}\right] \delta q_i dt = 0.$$

Como as variações δq_i são infinitesimais e independentes, a única forma da derivada variacional da acção cancelar univocamente é impondo a equação de Euler-Lagrange descrita no enunciado.

[1] Esta forma das equações de Euler-Lagrange não são uma mera formalidade. Na verdade, elas são bastante recorrentes em teoria de campo.

⋆ **Problema 2. Forças de constrangimento na calote esférica.** Considere uma calote esférica de raio R. Do seu topo, uma partícula pontual de massa m parte, do repouso, podendo deslizar, sem atrito, até a abandonar.



a) Identifique os graus de liberdade do sistema e obtenha o respectivo Lagrangeano.

> 1 grau de liberdade efectivo: 2 graus de liberdade, (r, θ), -1 ligação, $(r = R)$. A energia cinética é $T = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2$ e $V = mgR\cos\theta$, pelo que se tem
>
> $$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta.$$

b) Escreva as equações do movimento.

> Só temos uma equação do movimento,
>
> $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$
>
> $$\Leftrightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0.$$

c) Assuma que a partícula e a calote interagem entre si através de um potencial $V(\mathbf{r})$. Identifique a forma desse potencial e obtenha a força de constrangimento. Para isso, promova a coordenada radial (constrangida) a grau de liberdade e imponha a restrição *a posteriori*. Interprete fisicamente.

> Consideremos o novo Lagrangeano, onde $R \to r$ é promovido a grau de liberdade.
>
> $$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\cos\theta - V(r).$$
>
> Agora temos duas equações de Euler-Lagrange,
>
> $$r: \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$
>
> $$\Leftrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + \frac{\partial V}{\partial r} = 0.$$
>
> Segundo θ,
>
> $$\theta: \qquad mr^2\ddot{\theta} - mgr\sin\theta = 0.$$
>
> Impondo a restrição, $r = R$, de onde resulta $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, obtemos
>
> $$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2,$$
>
> o que corresponde à força de restrição que mantém a partícula sobre a calote. Repare que o mesmo resultado seria obtido caso usasse o método dos multiplicadores de Lagrange, onde $Q_r^\lambda = \lambda\partial_r f$, com $f(r) = R - r$, designaria a força generalizada.

d) Determine a altura crítica h_c a que a partícula abandona a calote.

A condição de abandono da calote é $Q_r = 0$, o que fornece a condição $\cos\theta_c = (R/g)\dot{\theta}_c^2$. Para obtermos o valor de $\dot{\theta}_c$, multiplicamos a equação do movimento para θ por $\dot{\theta}$ para obter

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\cos\theta = c,$$

onde c é uma constante. Se a massa partir do repouso, podemos então dizer que $c = g/R$, pelo que

$$\dot{\theta}_c^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta_c).$$

Juntando o resultado das duas equações, obtemos, finalmente,

$$\cos\theta_c = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_c \simeq 47.9.$$

$\star\star\star$ **Problema 3. O poço de Evel Knivel.** [2]. Evel Knivel foi um motociclista americano que ficou famoso pelas suas proezas acrobáticas. Foi considerado um dos mais aclamados duplos do cinema americano entre as décadas de 70 e 80, tendo feito mais de 75 saltos sobre motociclos e somado mais de 433 fracturas ósseas. Numa das suas proezas, Evel punha-se à prova no conhecido *poço da morte*.

Considere que Evel e a sua motoreta (massa total m) circulam na superfície de um parabolóide, obtido por revolução em torno do eixo zz, e de abertura a.

a) Mostre que o Lagrangeano do sistema se pode escrever como

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz,$$

onde ρ é a distância de um ponto do parabolóide ao eixo zz e φ o ângulo polar.

Usando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), temos

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right).$$

O potencial é simplesmente $V = mgz$. Assim, $L(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}) = T - V$ reproduz o Lagrangeano pedido. Note que neste ponto ainda não introduzimos a equação de ligação $f(\rho, z)$.

b) Como sabe, as equações de Euler-Lagrange só são válidas para coordenadas generalizadas independentes. Para as obter, temos de eliminar algumas coordenadas escrevendo as equações de ligação. Obtenha essa(s) equação(ões).

Ora, como Evel se desloca à superfície de um parabolóide de revolução de abertura a ($az = \rho^2$), podemos usar a equação de ligação $f(\rho, z) = az - \rho^2 = 0$ para eliminar um

[2] Podia ser o *poço da morte*, mas, felizmente para Evel, não foi o caso.

dos graus de liberdade. Eliminemos z. Assim, o Lagrangeano vem

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, \rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2} m \left[\rho^2 \dot{\varphi}^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2} \right) \dot{\rho}^2 \right] - \frac{m}{a} g \rho^2.$$

c) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para este problema. Mostre que, para velocidades angulares constantes, $\dot{\varphi} = \omega_0$, se tem

$$\lambda = -\frac{1}{2} m \omega_0^2.$$

Qual o seu significado físico?

Promovamos ρ a grau de liberdade. Para tal, voltemos ao Lagrangeano da alínea a), com o multiplicador de Lagrange associado à ligação

$$L^\lambda = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - mgz + \lambda f(\rho, z).$$

Como a restrição envolve as coordenadas ρ e z, basta-nos escrever as suas equações correspondentes,

$$\begin{aligned} \rho : \qquad & \frac{d}{dt} \frac{\partial L^\lambda}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L^\lambda}{\partial \rho} = 0 \\ & \Leftrightarrow m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 - \underbrace{\lambda \frac{\partial f}{\partial \rho}}_{Q_\rho^\lambda} = 0, \\ z : \qquad & \frac{d}{dt} \frac{\partial L^\lambda}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L^\lambda}{\partial z} = 0 \\ & \Leftrightarrow m\ddot{z} + mg - \underbrace{\lambda \frac{\partial f}{\partial z}}_{Q_z^\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Para o caso da órbita circular $\ddot{z} = \ddot{\rho} = 0$ e $\dot{\varphi} = \omega_0$, as eqs. equação dizem-nos que $\omega_0 = \sqrt{2g/a}$ e $\lambda = -m\omega_0^2/2 = -mg/a$. As componentes da força generalizada de constrangimento, portanto, são

$$Q_\rho^\lambda = \lambda \left. \frac{\partial f}{\partial \rho} \right|_{\rho = \rho_0} = m\omega_0^2 \rho_0, \quad Q_z^\lambda = \lambda \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\rho = z_0} = -\frac{1}{2} m a \omega_0^2, \quad Q_\varphi^\lambda = 0.$$

Repare que os sinais estão trocados, se compararmos com o que esperaríamos para as componentes das forças *à la* Newton. Isto pode ser corrigido escolhendo $-\lambda$ no Lagrangeano.

d) Vamos estudar quão estável é o movimento de Evel. Para tal, consideremos perturbações nas coordenadas do tipo $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $z = z_0 + \delta z$ e $\dot{\varphi} = \omega_0 + \delta\dot{\varphi}$. Escreva as equações de Euler-Lagrange em primeira ordem nas perturbações e mostre que Evel está limitado (sorte dele!) a pequenas oscilações de frequência angular

$$\Omega = \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{2\omega_0^2\rho_0^2}{ag}}}.$$

Há duas maneiras de resolvermos este ponto: ou usamos os três graus de liberdade e juntamos as forças generalizadas Q_z^λ, Q_ρ^λ e Q_φ^λ (e, nesse caso, introduzimos perturbações nos multiplicadores de Lagrange, $\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda$), ou introduzimos a ligação à priori e usamos o Lagrangeano da alínea b). Por uma questão de simplicidade, seguiremos esta última via. Considerando o Lagrangeano da alínea b), as equações do movimento são

$$\rho : \qquad \rho\left(a^2\dot{\varphi}^2 - 4\dot{\rho}^2 - 2ag\right) - \ddot{\rho}\left(a^2 + 4\rho^2\right) = 0,$$

$$\varphi : \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\varphi}\right) = 0 \Rightarrow \ell_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} = c.$$

Retiramos c da condição de equilíbrio, $c = m\rho_0^2\omega_0$. A conservação do momento angular permite-nos eliminar $\dot{\varphi}$ na equação radial,

$$\rho\left(4\dot{\rho}^2 + 2ag\right) - a^2\frac{\ell_\varphi^2}{m^2\rho^3} + \ddot{\rho}\left(a^2 + 4\rho^2\right) = 0.$$

Introduzindo a perturbação $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ ($\dot{\rho} = \delta\dot{\rho}$), linearizamos a equação do movimento para obter

$$\underbrace{-a^2\frac{\ell_\varphi^2}{m^2\rho_0^3} + 2ag\rho_0}_{=0 \text{ (equil.)}} + \delta\rho\left(2ag + 3a^2\frac{\ell_\varphi^2}{m^2\rho_0^4}\right) + \delta\ddot{\rho}\left(a^2 + 4\rho_0^2\right) + \mathcal{O}(\delta\rho^2) = 0.$$

Simplificamos um pouco, fazendo $\ell_\varphi = m\rho^2\omega_0$ e dividindo tudo por a^2, para finalmente obter

$$\delta\ddot{\rho} + \underbrace{\frac{4\omega_0^2}{1 + 4\rho_0^2/a^2}}_{\Omega^2}\delta\rho = 0,$$

o que corresponde a um movimento harmónico de frequência angular Ω (uma manipulação final é necessária envolvendo a relação $\omega_0^2 = 2g/a$ para obtermos o resultado na mesma forma que está no enunciado, mas não é necessário).

⋆⋆ **Problema 4. O pêndulo móvel.** Considere um pêndulo simples, composto por uma massa m suspensa numa haste indeformável de comprimento ℓ e de massa desprezável, cujo ponto de suporte é uma massa M que se pode deslocar horizontalmente.

a) Escolha θ (o ângulo que o pêndulo faz com a vertical) e X (a posição horizontal da massa M em relação à origem) como coordenadas generalizadas. Escreva um Lagrangeano simpático para o sistema.

Sejam $(X+\ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$ e $(X,0)$ as coordenadas das massas m e M, respectivamente. Se $V = mgy = -mg\ell\cos\theta$ for o potencial, temos

$$L(\theta,\dot\theta,X,\dot X) = \frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot\theta^2 + 2\ell\dot X\dot\theta\cos\theta\right) + \frac{1}{2}(m+M)\dot X^2 + mg\ell\cos\theta.$$

b) Obtenha as equações do movimento do sistema.

$$X: \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot X} - \frac{\partial L}{\partial X} = 0$$

$$\Leftrightarrow m\ell\ddot\theta\cos\theta - m\ell\sin\theta\dot\theta^2 + (m+M)\ddot X = 0,$$

$$\theta: \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow m\ell^2\ddot\theta + m\ddot X\ell\cos\theta + mg\ell\sin\theta = 0$$

c) Considere o caso em que a massa M se desloca com velocidade constante. Mostre que o Lagrangeano resultante é equivalente (ou seja, resulta nas mesmas equações do movimento) ao caso do pêndulo simples standard (com ponto de suspensão fixo). Discuta o resultado.

Neste caso, podemos tomar $\dot X = v_0$ e $\ddot X = 0$. Assim, a equação para θ fornece

$$\ddot\theta + \omega_0^2\sin\theta = 0.$$

Isto acontece porque o Lagrangeano é invariante para a transformação de Galileu, $X' = X + v_0 t$.

d) Considere agora o caso em que a massa M se desloca com aceleração constante. Quantos graus de liberdade tem o sistema? Mostre que neste caso o Lagrangeano não é equivalente ao de um pêndulo simples standard. Qual a origem do novo ingrediente? Escreva as equações do movimento.

Neste caso, tomamos $\ddot X = a_0$. Isto resulta numa equação de ligação do tipo $f(X;t) = X - X_0 - v_0 t - a_0 t^2/2$ (ligação holónoma reónoma), o que restringe a variável X. Assim sendo, ficamos com um grau de liberdade. Como determinámos a equação para θ de forma independente de X, podemos substituir a ligação directamente na equação do movimento,

$$\ddot\theta + \frac{a_0}{\ell}\cos\theta + \omega_0^2\sin\theta = 0.$$

Isto reflecte o facto de que os referenciais acelerados não são inerciais.

e) Ainda no mesmo caso da alínea d), determine a força na direcção r utilizando o método dos multiplicadores indeterminados de Lagrange. A que corresponde o termo não presente no caso standard?

Este é um caso em que temos duas ligações. Promovamos X e r a graus de liberdade, e introduzamos as ligações $f_1(X;t) = X - a_0 t^2/2$ ($v_0 = X_0 = 0$, por simplicidade) e $f_2(r) = r - \ell$.

$$L^\lambda[X, \dot{X}, \theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}] = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2r\dot{X}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{X}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + mgr\cos\theta + \sum_{k=1}^{2} \lambda_k f_k.$$

Para este problema, teríamos 3 equações com mais duas $3 + 2 = 5$ incógnitas, que completaríamos com as duas equações de ligação f_1 e f_2. Podem tentar fazer esse caso para exercício, mas aqui podemos ser económicos: como apenas nos é pedido a força generalizada segundo a direcção radial r, podemos reduzir, a priori, o número de graus de liberdade. Assim, usamos apenas uma ligação e fazemos $f(r) = \ell - r$ para escrever

$$L^\lambda[\theta, \dot{\theta}, r, \dot{r}] = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2r\dot{X}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{X}\sin\theta\right) + \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + mgr\cos\theta + \lambda f.$$

Em relação ao Lagrangeano anterior, podemos dizer que X é “despromovido" de coordenada generalizada a parâmetro. Da equação para r, resulta

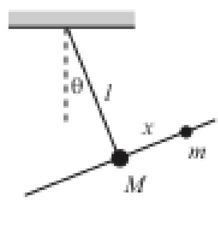
$$-\lambda\frac{\partial f}{\partial r} + m\ddot{r} + mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2 + m\ddot{X}\sin\theta = 0.$$

Usando agora $\ddot{X} = a_0$ e $\ddot{r} = 0$, temos

$$Q_r^\lambda = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = mg\cos\theta + mr\dot{\theta}^2 + ma_0\sin\theta.$$

Existe, portanto, um termo extra na tensão da haste devido à aceleração imposta ao sistema.

⋆⋆ **Problema 5. O plano oscilante.** Considere uma massa M fixa no vértice que faz um ângulo recto entre uma barra (sem massa) de comprimento ℓ e uma barra muito longa, também sem massa. Nesta última, um berlinde de massa m pode deslizar, sem atrito. O sistema pode rodar no plano definido pelas duas barras, sendo θ o ângulo com a vertical. Assuma que o berlinde de massa m pode penetrar a massa M.



a) Identifique os graus de liberdade do sistema e obtenha o respectivo Lagrangeano.

Dois graus de liberdade: θ e x. Assumindo que o berlinde pode penetrar a massa M, temos, e observando que tem as coordenadas relevantes são $(x,y)_M = (\ell\sin\theta, -\ell\cos\theta)$ e $(x,y)_m = (x\cos\theta + \ell\sin\theta, x\sin\theta - \ell\cos\theta)$, temos

$$T = \frac{1}{2}M(\ell^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\left[(\dot{x} + \ell\dot{\theta})^2 + x^2\dot{\theta}^2\right]$$

e $V = -Mg\ell\cos\theta - mg(\ell\cos\theta - x\sin\theta)$. Assim, temos

$$L(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}M\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left[(\dot{x} + \ell\dot{\theta})^2 + x^2\dot{\theta}^2\right] + Mg\ell\cos\theta + mg(\ell\cos\theta - x\sin\theta).$$

b) Determine as equações do movimento.

Dois graus de liberdade $\Rightarrow$ duas equações do movimento:

$$\theta: \qquad \ell\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\sin\theta - x\dot{\theta}^2 = 0$$

$$x: \qquad M\ell^e\ddot{\theta} + m\ell(\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}) + mx^2\ddot{\theta} + 2mx\dot{x}\dot{\theta} + (M+m)g\ell\sin\theta + mgx\cos\theta = 0$$

c) Determine os modos próprios de vibração do sistema no limite das pequenas oscilações.

O limite das pequenas oscilações é obtido para $\theta \ll 1$ e $x \ll \ell$. Assim, linearizando perto dos pontos de equilíbrio $(x, \theta) = (0, 0)$ temos

$$\theta: \qquad (\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}) + g\theta = 0,$$
$$x: \qquad M\ell(\ell\ddot{\theta} + g\theta) + m\ell(\ell\ddot{\theta} + \ddot{x}) + mg\ell\theta + mgx = 0.$$

Podemos simplificar um pouco mais estas equações (por exemplo, substituindo $g\theta$ por $-(\ell\ddot{\theta} + \ddot{x})$ na primeira equação e $-\ddot{x}$ por $(\ell\ddot{\theta} + g\theta)$ na segunda) e escrever

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta + \frac{\ddot{x}}{\ell} = 0,$$
$$\ddot{x} - \frac{mg}{M\ell}x = 0.$$

Escrevendo o problema na forma matricial $A \cdot X = 0$, onde $X = (\theta, x)^T$, e testando soluções exponenciais, obtemos um modo normal para $x = 0$ que corresponde à oscilação do pêndulo de massa $(m + M)$ à frequência $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Contudo, para a solução $x(t) = x_0\cosh(\omega_1 t + \varphi)$, com $\omega_1 = \sqrt{mg/M\ell}$ implica que $\theta(t) = \theta_0\cosh(\omega_1 t + \varphi)$. Este segundo modo é instável, i.e. cresce no tempo. Passado algum tempo, a aproximação linear deixa de fazer sentido aqui. Estamos perante um caso em que a solução numérica é necessária para compreendermos o comportamento completo do sistema.

d) Perceba o que aconteceria se as massas m e M fossem impenetráveis. Que alterações ocorreriam nas alíneas a), b) e c)?

Se as massas fossem impenetráveis, teríamos de introduzir uma condição de restrição. Neste caso, a condição seria <u>não-holónoma</u>, $f(x) = x \geq 0$. Em alternativa, introduziríamos um potencial de esferas rígidas $V(x > 0) = 0$ e $V(x = 0) = \infty$. Neste último caso, teríamos de ter cuidado ao interpretar a força generalizada que nos apareceria.

$\star$ **Problema 6. Uma simples barreira centrífuga.** Considere uma mola de constante elástica k e comprimento natural ℓ_0, ligada a uma massa m que se pode mover no plano.

a) Quantos graus de liberdade tem este sistema? Justifique.

Existem 2 graus de liberdade (r, θ). Apesar de existir um potencial central, $V(r) \sim r^2$, a este ponto não podemos impor restrições aos graus de liberdade do sistema. <u>NOTA BEM:</u> Redução do número de equações do movimento devido a integrais do movimento $\neq$ redução do número de graus de liberdade devido a ligações!

b) Escreva o Lagrangeano deste sistema em coordenadas generalizadas e determine as quantidades conservadas. Justifique.

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2.$$

Como o Lagrangeano não depende da coordenada angular, $\partial_\theta L = 0$, existe conservação do momento angular

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = \frac{d}{dt} \left(m r^2 \dot{\theta} \right) = 0,$$

reflectindo a conservação do momento angular. Para além disso, como L não depende explicitamente do tempo, a identidade de Beltrami diz-nos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} - L = \text{constante}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m \left(r^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2}_{T+V} = \text{constante},$$

significando a conservação da energia mecânica do sistema.

$\star\star$ **Problema 7. A mesa furada.** Considere uma massa m unida a outra massa M por um fio inextensível de comprimento ℓ_0. A massa M é colocada sob a acção da gravidade (movimento vertical), ao passo que a massa m pode movimentar-se no plano horizontal.

a) Quantos graus de liberdade tem este sistema? Justifique.

Tem dois (2) graus de liberdade (3 − 1 ligação).

b) Escreva o Lagrangeano deste sistema em coordenadas generalizadas e determine as quantidades conservadas.

A corda tem comprimento constante, pelo que $z + r = \ell_0$, onde z representa a distância vertical da massa ao tampo da mesa. Assim, $V(z) = -Mgz$ (z “cresce" para baixo do tampo da mesa), pelo que temos imediatamente, escolhendo (r, θ) para coordenadas generalizadas,

$$L(r,\dot r,\theta,\dot\theta)=\frac{1}{2}(m+M)\dot r^2+\frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2+Mg(\ell_0-r).$$

c) Obtenha os pontos de equilíbrio do sistema e caracterize-os. Em condições estes existem?

Escrevendo a equação de Euler-Lagrange para a coordenada r, obtemos

$$(m+M)\ddot r+mr\dot\theta^2=-\frac{\partial V(r)}{\partial r},$$

com $V(r)=Mgr$. Usando a conservação do momento angular, $\ell_\theta=mr^2\dot\theta$, podemos escrever a equação do movimento na forma

$$\ddot r=-\frac{1}{m+M}\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{\ell_\theta^2}{2mr^2}+V(r)\right)}_{V_{\mathrm{ef(r)}}}.$$

A condição de equilíbrio corresponde e determinar o mínimo do potencial efectivo, i.e. $V'_{\mathrm{ef}}(r)\equiv dV_{\mathrm{ef}}/dr=0$. Assim,

$$\frac{\ell_\theta^2}{mr_0^3}-Mg=0\Leftrightarrow\omega_0^2=\frac{M}{m}\frac{g}{r_0}.$$

Isto significa que a órbita que apresenta velocidade angular constante é aquele que tem um raio fixo (movimento circular uniforme).

d) Considere uma pequena perturbação à órbita de equilíbrio, $r=r_0+\xi$. Obtenha a equação para ξ e verifique o teorema de Bertrand.

Fazendo a substituição $r=r_0+\xi$ na equação do movimento, temos

$$\ddot\xi=\frac{1}{m+M}\left(\frac{\ell_\theta^2}{m(r_0+\xi)^3}-Mg\right)$$

$$\Leftrightarrow\ddot\xi=\frac{1}{m+M}\left(\underbrace{\frac{\ell_\theta^2}{mr_0^3}-Mg}_{=0\ \text{(equil.)}}-3\frac{\ell_\theta^2}{mr_0^4}\xi\right)+\mathcal{O}(\xi^2)$$

$$\Leftrightarrow\ddot\xi+\underbrace{\frac{3m}{m+M}\omega_0^2}_{\Omega^2}\xi=0.$$

Uma vez que $\Omega=\sqrt{3m/(m+M)}\omega_0$, observamos que o rácio $\Omega/\omega=\sqrt{3m/(m+M)}$ não é um número racional para valores arbitrários de m/M (e, portanto, o ângulo apsidal $\theta_A=\pi/\sqrt{3m/(m+M)}$ não é um racional de π), pelo que perturbações à órbita circular não resultam em órbitas fechadas. De uma forma geral, isto é esperado pois o potencial $V(r)\sim r$ não satisfaz as condições do teorema de Bertrand. Contudo, se

$$M/m=3k^2-1,$$

onde $k = p/q$ é um racional, então órbitas fechadas podem existir. Isto acontece porque, nesse caso, a barreira centrífuga é criada pela massa m, ao passo que o potencial $V(r)$ é devido à massa M. Assim, podemos ajustar o rácio M/m de tal forma que o potencial efectivo corresponda, <u>localmente</u> (i.e para $r \sim r_0$), àquele do potencial $V(r) \sim 1/r^2$ ou do potencial $V(r) \sim r^2$. Matematicamente, basta que a segunda derivada do potencial efectivo no ponto de equilíbrio, $V''_{\text{ef}}(r_0)$, seja igual a um dos dois casos que satisfaz o teorema de Bertrand. Obviamente, esta discussão só é válida porque estamos a discutir perturbações até à primeira ordem.

⋆⋆ **Problema 8. Um Teorema de Nöther.** Como vimos, o Teorema de Nöther estabelece uma relação geral entre simetrias e leis de conservação. Vejamo-lo formulado na sua versão mais fraca. Para tal, consideremos a seguinte família de transformações contínuas de parâmetro infinitesimal ϵ

$$q'_i = q_i + \epsilon \xi_i(q_i, t),$$

onde ξ_i designam os *geradores das translações.*

a) Mostre que, caso o Lagrangeano seja invariante para a transformação acima, i.e. se $\delta L = \left.\frac{dL}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$, então existe conservação da seguinte quantidade (carga de Nöther)

$$\mathcal{I}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i.$$

Seja $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ um Lagrangeano. Caso se verifique invariância para a transformação, $L(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q'_i, \dot{q}'_i, t')$, então

$$\delta L \equiv \left.\frac{dL}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0.$$

Neste caso, a derivada variacional é

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right).$$

Combinando os resultados anteriores, temos

$$\mathcal{I}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial q'_i}\delta q'_i = \text{constante}.$$

Finalmente, usando o facto de que $\delta q'_i = \xi_i$, obtemos o resultado pretendido (não há problema caso tenha obtido isto com o sinal trocado; é irrelevante).

b) Use o resultado anterior para demonstrar que a conservação do momento linear é uma consequência da simetria para translações. Para tal, recorra à transformação

$$X = x + \epsilon.$$

O Lagrangeano mais genérico que podemos construir satisfazendo a invariância pretendida é

$$L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}^2) + C = L(X, \dot{X}).$$

Assim, tomando $\xi = 1$ no resultado anterior, vem que a quantidade conservada é

$$\mathcal{I}(x, \dot{x}) = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

considerando o caso usual $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

c) Repita o ponto anterior considerando a invariância para rotações no plano (x, y),

$$\left[\begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right] = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\begin{array}{cc} x \cos \epsilon & -y \sin \epsilon \\ x \sin \epsilon & y \cos \epsilon \end{array} \right] \simeq \left[\begin{array}{cc} x & -\epsilon y \\ \epsilon x & y \end{array} \right]$$

para demonstrar a conservação do momento angular segundo a direcção z.

Desta vez, o Lagrangeano mais simétrico que podemos construir é da forma

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = T(\dot{x}^2, \dot{y}^2) + V(x^2 + y^2) = L(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}).$$

Pelo teorema de Nöther,

$$\mathcal{I} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\xi_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\xi_y.$$

Finalmente, reconhecendo que $\xi_x = -y$ e $\xi_y = x$, temos

$$\mathcal{I} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}x = p_y x - p_x y = \ell_z,$$

evidenciando a conservação do momento angular segundo z.

$\star\star$ **Fraco, forte e o polaritão.** Considere um sistema mecânico composto por dois osciladores idênticos de massa m e constante elástica k, e suponha, ainda, que estes se encontram ainda ligados entre si por uma mola de constante elástica k'. O acoplamento entre os dois osciladores pode ser de dois tipos, dependendo do valor de k': fraco ou forte, sendo que o último caso é de particular relevância. Em física de matéria condensada, por exemplo, um mecanismo deste tipo permite o acoplamento de partículas elementares de um determinado sistema (ex. fotão acoplando com um excitão, em semi-condutores), dando origem a *quasi-partículas* (neste caso o *polaritão*). A teoria das quasi-partículas é extremamente bem-sucedida na descrição de efeitos colectivos em matéria condensada (esperem para ver!).

a) Mostre que o Lagrangiano do sistema pode ser escrito na seguinte forma

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k'(x_1 - x_2)^2$$

b) Defina novas coordenadas ξ_1 e ξ_2 (quais?) que transformem o problema num outro onde as molas aparecem desacopladas. Escreva as equações do movimento para estas novas coordenadas e interprete fisicamente o resultado.

c) Regressemos às coordenadas originais $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Escreva as respectivas equações do movimento, resolva-as e obtenha os *batimentos*

$$x_1(t) = A_1\left[\sin(\omega_1 t) + \frac{\omega_1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right], \quad x_2(t) = A_2\left[\sin(\omega_1 t) - \frac{\omega_1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right].$$

Determine ω_1 e ω_2 e interprete fisicamente. Onde é que já vimos isto?

d) Considere a situação em que $k' \ll k$. Expanda ω_2 em primeira ordem no rácio k'/k e represente graficamente $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Observe o aparecimento de um envelope envolvendo uma oscilação no seu interior.

e) Inverta a situação, tomando agora $k' \gg k$. Que tipo de movimento obtemos? A este fenómeno dá-se o nome de acoplamento forte.