DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

# Complementos de Cálculo Diferencial e Integral

## 6ª Ficha de trabalho - 2º Semestre 2014/2015

1. Para cada uma das seguintes funções determine os extremos locais, indicando se são ou não extremos absolutos.

   (a) $f(x,y) = x^3 - xy^2 - x^2 + y^2$

   (b) $g(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$.

   (c) $h(x,y) = x^6 + y^6 + x^3y^3 + 1$.

2. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, e $f : D \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e injectiva. Prove que a função inversa $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}^n$ é contínua.

3. Considere a função $f : [1,2] \times [0, 2\pi[ \to \{(x,y) : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ definida por $f(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$.

   (a) Justifique que $f$ é bijectiva e contínua.

   (b) A sua função inversa $f^{-1} : \{(x,y) : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} \to [1,2] \times [0, 2\pi[$ é contínua?

4. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ tal que $g(1) = 1$ e $g'(1) = 2$. Defina-se $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ através de:
$$\varphi(x,y) = (\, x\, g(y) \ , \ y\, g(x)\,)$$

   (a) Mostre que $\varphi$ é localmente invertível numa vizinhança do ponto $(1,1)$.

   (b) Considere uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável e uma função $H$ definida por $H = F \circ \psi$, onde $\psi$ é a inversa local de $\varphi$ referida na alínea anterior. Justifique que $H$ é diferenciável e calcule $D_1 H(1,1)$ em termos das derivadas parciais de $F$.

5. Mostre que o sistema
$$\begin{cases} e^{xy} - u + \log(x+v) = 1 \\ x^2 + y^3 + u^2 - v^3 = 0 \end{cases}$$
numa vizinhança de do ponto $(0,1,0,1)$ define implicitamente $(u,v)$ como função $(x,y)$. Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,1)$.

6. As funções $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são definidas por
$$f(x,y,z) = (x + y + z + \operatorname{sen}(xyz), xyz + \operatorname{sen}(x+y+z)) \quad \text{e} \quad g(u,v) = 1 - e^{u-2v}$$

   (a) Mostre que a equação $g \circ f(x,y,z) = 0$ define implicitamente numa vizinhança de $\left(0, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ uma função $y = \alpha(x,z)$ diferenciável em $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.