3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

14.DEZ.2019

Cursos: FÍSICA, MATEMÁTICA

Nome: EXEMPLO DE RESOLUÇÃO

Número:__________ Curso:__________

JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS

1. Seja $C=\{(1,1,-1,1,1),(0,1,0,1,0),(1,0,0,-1,1)\}$ e $\mathbb{R}^5$ com o produto interno canónico.

(a) Calcule uma base ortonormal do subespaço linear de $\mathbb{R}^5$ gerado por C e determine $\dim C^{\perp}$.

(b) Calcule o ponto de $C^{\perp}$ mais próximo de $\mathbf{a}=(1,1,1,1,1)$.

(c) Determine uma equação cartesiana do plano paralelo a $C^{\perp}$ que passa no ponto $\mathbf{a}$ da alínea (b).

2. Considere $f_{a,b,c,d}\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big)=ax_1y_1+x_1y_2+bx_2y_1+2x_2y_2+cx_1y_3+dx_3y_1+x_3y_3$.

(a) Determine o conjunto P dos $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tais que $f_{a,b,c,d}$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcule o coseno do ângulo entre $(0,1,0)$ e $(1,0,1)$ no produto interno $f_{2,1,1,1}$.

3. Considere as matrizes (com $a\in\mathbb{R}$):

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 2 & a\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1 & 7\\ -1 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & -2 & 2 & 3a+2\\ -4 & 1 & 4 & -3 & -6a-7\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix} X & X^3\\ -I_n & X^2\end{bmatrix}.$$

Calcule: (a) $\det A$. (b) $\det B$ em função de $\det A$. (c) $\det C$ em função de $\det X$, para X matriz $n\times n$.

4. Para cada alínea, determine com $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ e, em cada caso, também com $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, se a transformação linear $T:\mathbb{K}^4\to\mathbb{K}^4$ tem ou não representação matricial diagonal numa base apropriada de $\mathbb{K}^4$ (não calcule a base); se sim, determine uma representação diagonal; se não, determine uma forma canónica de Jordan.

(a) $T(x,y,z,w)=(2x-y,x+2y,-x+2y+z-w,2x+y+z+w)$. (b) $T(x,y,z,w)=(2x-y,x+2y,2y+z+w,2x+z+w)$.

(c) $T(x,y,z,w)=(2x+z,2y-z,2z,0)$. (d) $T(x,y,z,w)=(2x+y+z,2y-z,2z,0)$.

5. Para cada matriz A seguinte calcule os valores próprios e respectivas multiplicidades algébrica e geométrica, e uma matriz não singular S tal que $J=S^{-1}AS$ é diagonal ou uma forma canónica de Jordan não diagonal e indique a correspondente matriz J.

$$\text{(a)}\quad A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 6 & 0 & 1\end{bmatrix}.\qquad \text{(b)}\quad A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ \frac12 & 0 & 3 & \frac12\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

6. Relacione os valores próprios de BC e CB para B matriz $m\times n$ e C matriz $n\times m$ com componentes escalares nos casos: (1) $m=n$, (2) $m>n$. Obtenha, para cada caso, uma igualdade que relacione os polinómios característicos respectivos p_{BC} e p_{CB}.

1.(a) Aplica-se o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores $v_1=(0,1,0,1,0)$, $v_2=(1,0,0,-1,1)$, $v_3=(1,1,-1,1,1)$.

$u_1=v_1$, $u_2=v_2-\frac{u_1 \cdot v_2}{\|u_1\|^2}u_1=(1,0,0,-1,1)-\frac{-1}{2}(0,1,0,1,0)=\frac{1}{2}(2,1,0,-1,2)$.

$u_3=v_3-\frac{u_1 \cdot v_3}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{u_2 \cdot v_3}{\|u_2\|^2}u_2=(1,1,-1,1,1)-\frac{2}{2}(0,1,0,1,0)-\frac{2}{5}(2,1,0,-1,2)=\frac{1}{5}(1,-2,-5,2,1)$.

Obtém-se uma base ortonormada de $\mathcal{L}(C)$ dividindo os vectores pelas normas

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0), \frac{1}{\sqrt{10}}(2,1,0,-1,2), \frac{1}{\sqrt{35}}(1,-2,-5,2,1)\right\}$. $\mathbb{R}^5=\mathcal{L}(C)\oplus C^\perp$, logo $\dim C^\perp=5-3=2$

(b) Esse ponto é a projecção ortogonal de $\underline{a}$ sobre $C^\perp$, logo $\underline{a}$ menos a projecção ortogonal de $\underline{a}$ sobre C: $a-\frac{u_1 \cdot a}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{u_2 \cdot a}{\|u_2\|^2}u_2-\frac{u_3 \cdot a}{\|u_3\|^2}u_3=$

$=(1,1,1,1,1)-\frac{2}{2}(0,1,0,1,0)-\frac{4}{10}(2,1,0,-1,2)-\frac{-3}{35}(1,-2,-5,2,1)=\frac{1}{35}(10,-20,20,20,10)=$

$=\frac{2}{7}(1,-2,2,2,1)$.

(c) A equação cartesiana é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-1 \\ x_2-1 \\ x_3-1 \\ x_4-1 \\ x_5-1 \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4+x_5=3 \\ x_2+x_4=2 \\ x_1-x_4+x_5=1 \end{cases}$, $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$.

2.(a) $\langle x,y\rangle=f_{a,b,c,d}(x,y)=y^tAx$, com $A=\begin{bmatrix} a & b & d \\ 1 & 2 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}$, é produto interno se e só se A é simetrica e definida positiva. Logo, $b=1$, $d=c$ e $a>0$, $\det\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=2a-1>0$, $\det\begin{bmatrix} a & 1 & c \\ 1 & 2 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}=2a-2c^2-1>0$.

Logo, $P=\{(a,1,c,c): 2a-1>c^2,\ a,c\in\mathbb{R}\}$.

(b) $\cos\theta=\frac{\langle(0,1,0),(1,0,1)\rangle}{\|(0,1,0)\|\,\|(1,0,1)\|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+2+1}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

3.(a) Com eliminação de Gauss (e troca de sinal c/ cada troca de par de linhas):

$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -3 \end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}=21(a-4)$.

(b) B obtém-se de A multiplicando a 5ª coluna por 3 e subtraindo ao resultado a 3ª coluna, e depois multiplicando a 4ª linha por 2 e subtraindo ao resultado à 5ª linha. Logo, $\det B=3\det A$.

(c) Se X é não singular, $\det C=\det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -X^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & X^3 \\ 0 & 2X^2 \end{bmatrix}\right)=(\det I_n)^2(\det X)\det(2X$

$=(\det X)\,2^n(\det X)^2=2^n(\det X)^3$.

Se X é singular, $\det X=0$ e $\operatorname{rank} X<n$. Logo, $\operatorname{rank}[X\ X^2]=\operatorname{rank}(X[I_n X])$
$\leq \operatorname{rank} X<n$.

Portanto, as linhas de $[X\ X^2]$ são linearmente dependentes e $\det C=0$.

Em conclusão $\det C=2^n(\det X)^3$ para toda matriz $n\times n$ X.

4. Seja A a representação matricial de T na base canónica de $\mathbb{K}^4$:

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Como A é triangular por blocos, o polinómio característico é $\det(A-\lambda I_4)=\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}-\lambda I_2\right)\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}-\lambda I_2\right)$.

Se $a,b\in\mathbb{R}$, $0=\det\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}-\lambda I_2\right)=(a-\lambda)^2+b^2 \Leftrightarrow \lambda=a\pm ib$. Logo, os valores próprios de A são $2\pm i$ e $1\pm i$. São 4 valores próprios distintos, pelo que vectores próprios associados a cada um deles são linearmente independentes e formam uma base de $\mathbb{C}^4$.

Portanto, T tem representação matricial diagonal $\operatorname{diag}(2+i,2-i,1+i,1-i)$ se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, T não tem valores próprios e não tem representação matricial diagonal.

4(b) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Como em (a), $\det(A-\lambda I_4)=\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}-\lambda I_2\right)\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}-\lambda I_2\right)$.
De (a), os valores próprios de A são $2\pm i$ e as soluções de $0=\lambda^2-\operatorname{tr}\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\lambda+\det\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\lambda^2-2\lambda$, ou seja 0 e 2. São 4 valores próprios distintos. Pela mesma razão de (a) T tem representação matricial diagonal, e.g. $\operatorname{diag}(2+i,2-i,2,0)$ em alguma base de $\mathbb{C}^4$ se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, T só tem 2 valores próprios (2 e 0) cada com multiplicidade algébrica 1, pelo que T não tem representação matricial diagonal.

(c) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Como A é triangular superior, os valores próprios são os elementos na diagonal principal com multiplicidade algébrica = nº de vezes que ocorrem, ou seja são $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=0$ com $ma(2)=3$ e $ma(0)=1$.

$A-2I_4=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$. Logo, $mg(2)=nul(A-2I_4)=2$. Formas canónicas de Jordan J de A têm 2 blocos de Jordan associados a $\lambda_1=2$, pelo que uma forma canónica de Jordan de A é $\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},[2],[0]\right)$ e, portanto, T não tem representação matricial diagonal em qualquer base de $\mathbb{K}^4$, com $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

(d) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Pela mesma razão de (c) os valores próprios são $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=0$, com $ma(2)=3$ e $ma(0)=1$.

$A-2I_4=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$. Logo, $mg(2)=nul(A-2I_4)=1$ e formas canónicas de Jordan de A têm 1 bloco de Jordan associado a $\lambda_1=2$, e.g. $J=\operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},[0]\right)$. Portanto T não tem rep. matricial diagonal em qualquer base de $\mathbb{K}^4$, com $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

5(a) Como A é triangular superior por blocos, o polinómio característico é
$\det(A-\lambda I_5)=\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -2\\ 3 & -3\end{bmatrix}-\lambda I_2\right)\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 6 & 0 & 1\end{bmatrix}-\lambda I_3\right)$. Os valores próprios da 1ª matriz no lado direito da igualdade são os zeros de $\lambda^2-\lambda-6=0$, ou seja $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}$, i.e. $\lambda_1=3$ e $\lambda_2=-2$, ambos com m.a. 1; os valores próprios da 2ª matriz são os elementos na diagonal principal porque é triangular, e como não se repetem têm m.a. 1. Logo, os valores próprios de A são $\lambda_1=3,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1,\lambda_4=1$ e $ma(3)=2$, $ma(-2)=ma(-1)=ma(1)=1$. Portanto A é diagonalizável se e só se $mg(3)=2$.

$A-3I_5=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -4 & 0\\ 2 & -2 & 6 & 0 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{de Gauss}]{\text{operações de elim.}}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 6 & -8 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Logo $mg(3)=nul(A-3I_5)=2$. A é diagonalizável em $J=\operatorname{diag}(3,3,-2,-1,1)$.

Uma base de $N(A-3I_5)$ dá vectores próprios associados a $\lambda_1=3$ linearmente independentes que, em conjunto com 1 vector próprio de cada um dos outros valores próprios, que são distintos, formam uma base de $\mathbb{R}^5$. Uma base do $N(A-3I_5)$ é $\{(-8,-4,\frac{4}{3},1,0),(0,0,\frac{1}{3},0,1)\}$. É imediato de A que $(0,0,0,1,0)$ é vector próprio associado a $\lambda_3=-1$ e $(0,0,0,0,1)$ é vector próprio associado a $\lambda_4=1$. Logo, resta determinar um vector próprio associado a $\lambda_2=-2$.

$$A+2I_5=\begin{bmatrix}6&-2&0&0&0\\3&-1&0&0&0\\0&0&5&0&0\\-1&1&0&1&0\\2&-2&6&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{eliminação de Gauss}]{\text{operações de}}\begin{bmatrix}-1&1&0&1&0\\0&2&0&3&0\\0&0&5&0&0\\0&0&6&2&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1&1&0&1&0\\0&2&0&3&0\\0&0&5&0&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Um vector próprio associado a $\lambda_2=-2$ é $\left(\frac{3}{4},\frac{9}{4},0,-\frac{3}{2},1\right)$. Logo, $J=S^{-1}AS$ com

$$S=\begin{bmatrix}0&-24&3&0&0\\0&-12&9&0&0\\1/3&4&0&0&0\\0&3&-6&1&0\\1&0&4&0&1\end{bmatrix}.$$

5.(b) A é triangular por blocos triangulares, logo, os valores próprios são os elementos na diagonal principal, ou seja $\lambda=3$ com $ma(3)=4$.

$$A-3I_4=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\1/2&0&0&1/2\\0&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{eliminação de Gauss}]{\text{operações de}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$\mathcal{N}(A-3I_4)=\mathcal{L}(\{(0,0,1,0),(-1,0,0,1)\})$ que também é $\mathcal{R}(A-3I_4)$.

Logo, $mg(3)=2$ e J tem 2 blocos de Jordan. Como $\dim \mathcal{N}(A-3I_4)\cap\mathcal{R}(A-3I_4)=2$, cada bloco de Jordan é 2×2 e $J=\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}\right)$.

Com $v_1=(0,0,1,0)$ e $v_3=(-1,0,0,1)$, as equações $(A-3I_4)v_2=v_1$ e $(A-3I_4)v_4=v_3$ têm soluções $v_2=(1,0,0,1)$ e $v_4(0,1,0,0)$, entre outras. Logo, $J=S^{-1}AS$ com

$$S=\begin{bmatrix}0&1&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}.$$

6. Para $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ é $\begin{bmatrix}\lambda I_n&\lambda C\\B&\lambda I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n&0\\\frac{1}{\lambda}B&I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I_n&\lambda C\\0&\lambda I_m-BC\end{bmatrix}$ e

$\begin{bmatrix}\lambda I_n&C\\\lambda B&\lambda I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n&\frac{1}{\lambda}C\\0&I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I_n-CB&0\\\lambda B&\lambda I_m\end{bmatrix}$. Logo,

$$\lambda^n\det\begin{bmatrix}I_n&C\\B&\lambda I_m\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\lambda I_n&\lambda C\\B&\lambda I_m\end{bmatrix}=(\det I_n)(\det I_m)\det(\lambda I_n)\det(\lambda I_m-BC)$$

$$\lambda^m\det\begin{bmatrix}I_n&C\\B&\lambda I_m\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\lambda I_n&C\\\lambda B&\lambda I_m\end{bmatrix}=(\det I_n)(\det I_m)\det(\lambda I_m)\det(\lambda I_n-CB).$$

Portanto, $\lambda^n(-1)^m p_{BC}(\lambda)=\lambda^m(-1)^n p_{CB}(\lambda)$ para $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Como p_{BC} e p_{CB} são polinómios, a igualdade verifica-se p/ todo $\lambda\in\mathbb{C}$. Pode ser escrita: $p_{BC}(\lambda)=(-\lambda)^{m-n}p_{CB}(\lambda)$. BC e CB têm os mesmos valores próprios $\neq 0$ com as <u>mesmas multiplicidades algébricas</u>.

$\boxed{\text{Nota:}}$ λ, u são valor e vector próprio associados de $BC \iff BCu=\lambda u, u\neq 0 \Rightarrow$ $CBCu=\lambda Cu$, logo, λ é valor próprio de CB associado ao vector próprio Cu se e só se $Cu\neq 0$, e $Cu=0\Rightarrow 0=BCu=\lambda u\Rightarrow\lambda=0$, pelo que os valores próprios $\neq 0$ de BC e CB coincidem; os valores próprios de BC adicionais aos de CB são 0. No caso $m=n$, se B ou C é não singular o resultado é imediato, pois se B é não singular $B^{-1}(BC)B=CB$ pelo que BC e CB são semelhantes e $p_{BC}=p_{CB}$, e analogamente se C é não singular.