



Duração: 90 minutos

1º teste A

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Sabe-se que 2% das mensagens recebidas na caixa de correio electrónico de um utilizador vêm contaminadas com algum tipo de vírus informático. O programa anti-vírus instalado no computador do utilizador é tal que:

- a probabilidade de detectar a existência de vírus quando uma mensagem tem vírus é 0.99;
- a probabilidade de não detectar a existência de vírus quando uma mensagem não tem vírus é 0.9995.

- (a) Qual é a probabilidade de o programa anti-vírus detectar a existência de vírus numa mensagem recebida pelo utilizador? (2.5)

Sejam V = “uma mensagem recebida está contaminada por algum vírus informático” e D = “o programa anti-vírus detecta a existência de vírus numa mensagem”. Tem-se $P(V) = 0.02$, $P(D | V) = 0.99$ e $P(\bar{D} | \bar{V}) = 0.9995$.

$$P(D) = P(D | V)P(V) + P(D | \bar{V})P(\bar{V}) = P(D | V)P(V) + (1 - P(\bar{D} | \bar{V}))(1 - P(V)) = 0.0203.$$

- (b) Calcule a probabilidade de que uma mensagem tenha vírus sabendo que o programa anti-vírus assinalou essa presença. (2.0)

$$P(V | D) = \frac{P(D \cap V)}{P(D)} = \frac{P(D|V)P(V)}{P(D)} = 0.9758.$$

2. A chegada de autocarros a uma certa paragem é bem modelada por um processo de Poisson com valor esperado de 8 autocarros por hora.

- (a) Calcule a probabilidade de num período de um quarto de hora chegarem pelo menos 3 autocarros à paragem. (1.0)

Seja $X(t)$ = “número de autocarros que chegam à paragem num período de t horas”. Tem-se que $X(t) \sim Poi(\lambda t)$ com $E[X(1)] = \lambda = 8$.

$$\text{Uma vez que } X(0.25) \sim Poi(2), \text{ tem-se } P(X(0.25) \geq 3) = 1 - P(X(0.25) < 3) = 1 - P(X(0.25) \leq 2) = 1 - F_{X(0.25)}(2) = 1 - 0.6767 = 0.3233.$$

- (b) Considerando um conjunto de 5 períodos de um quarto de hora disjuntos, determine a probabilidade de haver no máximo um período em que chegam pelo menos 3 autocarros. (2.5)

Seja Y = “número de períodos em que chegam pelo menos 3 autocarros num conjunto de 5 períodos de um quarto de hora disjuntos”. Como Y representa o número de sucessos (chegada de pelo menos 3 autocarros) em 5 repetições independentes (períodos disjuntos num processo de Poisson) de uma prova de Bernoulli então $Y \sim Bi(5, p)$, com $p = P(X(0.25) \geq 3) = 0.3233$.

$$P(Y \leq 1) = F_Y(1) = 0.4809.$$

- (c) Qual é a probabilidade de o tempo de espera entre dois autocarros consecutivos ser inferior a um quarto de hora? (2.0)

Seja T = “tempo que decorre entre dois autocarros consecutivos, em horas”. Tem-se $T \sim Exp(8)$ e $P(T < 1/4) = \int_0^{1/4} 8e^{-8t} dt = 1 - e^{-2} \approx 0.8647$.

$$\text{Alternativa: } P(T < 1/4) = 1 - P(X(0.25) = 0) = 1 - F_{X(0.25)}(0).$$

1. Uma empresa está a construir uma nova máquina para encher sacos de cimento e considera que o peso de cada saco enchido pela máquina, em Kg, é uma variável aleatória, X , com distribuição uniforme contínua num intervalo $[a, b]$.

- (a) A cimenteira que encomendou a máquina pretende encher sacos com um peso médio de 50 Kg e requer ainda que 90% dos sacos tenham um peso superior a 48 Kg. Determine os valores das constantes a e b que satisfazem estas especificações. (2.0)

$$E[X] = 50 \iff \frac{a+b}{2} = 50 \text{ e } P(X > 48) = 0.9 \iff \int_{48}^b \frac{1}{b-a} dx = 0.9 \iff \frac{b-48}{b-a} = 0.9.$$

$$\begin{cases} a+b=100 \\ 0.9a+0.1b=48 \end{cases} \iff \begin{cases} a=47.5 \\ b=52.5 \end{cases}$$

- (b) Os sacos de cimento irão ser comercializados em lotes de 100 unidades. Calcule aproximadamente o valor da probabilidade de o peso de um lote exceder 5050 Kg, admitindo que os pesos de diferentes sacos são variáveis aleatórias independentes. (3.0)

Nota: se não resolveu a alínea (a) considere que $Var[X] = 25/12$.

Sejam X_i = "peso do i^o saco", $i = 1, \dots, 100$ e $T = \sum_{i=1}^{100} X_i$ = "peso de um lote de 100 sacos".
Temos que $E[T] = E[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} E[X_i] = 100E[X] = 5000$ e $Var[T] = Var[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} Var[X_i] = 100Var[X] = \frac{2500}{12}$, uma vez que as variáveis X_i são independentes e identicamente distribuídas a X . Nestas condições, o teorema do limite central garante que

$$\frac{T - E[T]}{\sqrt{Var[T]}} \underset{d}{\sim} N(0, 1).$$

$$P(T > 5050) = P\left(\frac{T - 5000}{\sqrt{2500/12}} > \frac{5050 - 5000}{\sqrt{2500/12}}\right) \approx 1 - \Phi(\sqrt{12}) = 2.7 \times 10^{-4}.$$

2. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas que representam, respectivamente, o número de erros de sintaxe e de *input/output* num programa elaborado por um perito informático. De um estudo prévio, sabe-se que a função de probabilidade conjunta deste par aleatório é dada por:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.2	0.3	0.1
1	0.1	0.2	0.1

- (a) Determine o valor esperado de X condicionalmente a $Y = 1$. (1.5)

$$f_{X|Y=1}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} 0.6, & x=0 \\ 0.4, & x=1 \end{cases} \iff X|Y=1 \sim Ber(0.4),$$

uma vez que $f_Y(1) = \sum_{x=0}^1 f_{X,Y}(x,1) = 0.5$. $E[X|Y=1] = \sum_{x=0}^1 x f_{X|Y=1}(x) = 0.4$.

- (b) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y e comente o valor obtido. (3.5)

$$Corr[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{0.04}{\sqrt{0.24 \times 0.49}} \approx 0.1166.$$

$$f_X(x) = \sum_{y=0}^2 f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0.6, & x=0 \\ 0.4, & x=1 \end{cases} \iff X \sim Ber(0.4), E[X] = 0.4 \text{ e } Var[X] = 0.24.$$

$$f_Y(y) = \sum_{x=0}^1 f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0.3, & y=0 \\ 0.5, & y=1 \\ 0.2, & y=2 \end{cases} \iff E[Y] = \sum_{y=0}^2 y f_Y(y) = 0.9, E[Y^2] = \sum_{y=0}^2 y^2 f_Y(y) = 1.3$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 0.49$$

$$E[XY] = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=0}^2 xy f_{X,Y}(x, y) = 0.4 \text{ e } Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0.04.$$

Como $Corr[X, Y] > 0$, existe uma associação linear positiva entre X e Y . No entanto, essa associação é fraca uma vez que o valor de $Corr[X, Y]$ é pequeno.