Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2011/2012

2º Teste

Versão A (Cursos: LEAN, MEAer, MEEC, MEMec)

Versão B (Cursos: LEIC)

17 de Dezembro de 2011, 10h,

Duração: 1h 30m

[1,5 val.] 1. a) Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos(2t)}{1+2x}, \qquad x(0) = 0.$$

Determine a solução do problema na forma explícita e indique o seu intervalo máximo de existência.

[1,0 val.] (b) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' = \left(\frac{2x}{1+2x^2}\right) y + x.$$

Resolução:

(a) A equação diferencial escreve-se na forma

$$f(x)\frac{dx}{dt} = g(t)$$

com $f(x) = 1 + 2x$ e $g(t) = \cos(2t)$. Trata-se de uma equação separável com solução geral dada por

$$P\left[1+2x\right] = P\left[\cos(2t)\right] + C \Leftrightarrow x + x^2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + C$$

onde C é uma constante real. Da condição inicial $x(0) = 0$ decorre o valor $C = 0$ e a forma implícita da solução do problema de valor inicial

$$x^2 + x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) = 0.$$

Consequentemente a forma explícita da solução do problema é

$$x(t) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+2\operatorname{sen}(2t)}, \qquad \text{para } t \in I,$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $0 \in I$. O intervalo máximo de existência da solução I_{max} é determinado por

$$1 + 2\operatorname{sen}(2t) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2t) > -\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi < 2t < \tfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

e portanto $I_{max} =]-\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}[$.

(b) A equação dada é linear com factor integrante $\mu = \mu(x)$ tal que

$$y' = \left(\frac{2x}{1+2x^2}\right) y + x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\mu(x)y(x)\right) = \mu(x)x.$$

Assim temos

$$\mu(x) = e^{P\left[-2x/(1+2x^2)\right]} = e^{-(1/2)\log(1+2x^2)} = (1+2x^2)^{-1/2}$$

e para a solução geral da equação diferencial

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\mu(x)}\left(C + P\left[\mu(x)x\right]\right) = (1+2x^2)^{1/2}\left(C + P\left[x(1+2x^2)^{-1/2}\right]\right) \\ &= \tfrac{1}{2} + x^2 + C\sqrt{1+2x^2} \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}$.

2. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] a) Verifique que

$$e^{At} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2t & 2t^2 & 1 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] b) Determine a solução do problema

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + B(t) \quad , \quad \mathbf{X}(0) = (0,1,0) \quad , \quad B(t) = (6te^{3t}, 0, 1)$$

Resolução:

(a) Denominando as colunas da matriz dada por $X_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, e atendendo à unicidade de solução do (PVI)$_i$

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} \qquad , \qquad \mathbf{X}(0) = e_i$$

(em que e_i, $i = 1,\ 2,\ 3$ são os vectores da base de $\mathbb{R}^3$), para que a matriz dada seja e^{At} é suficiente mostrar que a função $X_i(t)$ é solução do respectivo (PVI)$_i$. É fácil de verificar que $X_1(0) = (1,0,0)$, $X_2(0) = (0,1,0)$ e $X_3(0) = (0,0,1)$ pelo que as colunas da matriz dada verificam as respectivas condições iniciais. Por outro lado

$$\frac{d}{dt}\left(e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix}\right) = e^{3t}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6t+2 \end{bmatrix} \quad , \quad AX_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2+6t \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(e^{3t}\begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t^2 \end{bmatrix}\right) = e^{3t}\begin{bmatrix} 6t+2 \\ 3 \\ 6t^2+4t \end{bmatrix} \quad , \quad AX_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} e^{3t}\begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t^2 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} 6t+2 \\ 3 \\ 4t+6t^2 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad AX_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

pelo que $X_i(t)$ verificam a equação diferencial. Conclui-se que a matriz dada é e^{At}.

(b) Usando a fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= e^{At}\Big(\mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{-As}B(s)\,ds\Big) \\
&= e^{At}\Big(\mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{-3s}\begin{bmatrix} 1 & -2s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2s & 2s^2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6se^{3s} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds\Big) \\
&= e^{At}\Big(\mathbf{X}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 6s \\ 0 \\ -12s^2 + e^{-3s} \end{bmatrix} ds\Big) \\
&= e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2t & 2t^2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 1 \\ -4t^3 + \frac{1}{3}(1-e^{-3t}) \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} 2t + 3t^2 \\ 1 \\ 2t^3 + 2t^2 + \frac{1}{3}(1-e^{-3t}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

[2,0 val.] 3. **(LEIC)** Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y'' - 3y' + 2y = -t + e^{2t}, \quad y(0) = -\tfrac{3}{4},\, y'(0) = 0.$$

Resolução:

A solução geral da equação é da forma $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$ em que $y_H(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada e $y_P(t)$ é uma solução particular da equação. Para determinar y_H e fazendo $y' = Dy$ tem-se que

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0 \;\Rightarrow\; (D-1)(D-2)y = 0 \;\Rightarrow\; (D-1)y = 0 \text{ ou } (D-2)y = 0$$

pelo que

$$y_H(t) = ae^t + be^{2t} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Para calcular y_P, note-se que a função $B(t) = -t + e^{2t}$ é solução da equação diferencial $D^2(D-2)y = 0$. Aplicando o método dos coeficientes indeterminados

$$(D^2 - 3D + 2)y = -t + e^{2t} \;\Rightarrow\; D^2(D-2)(D-1)(D-2)y = D^2(D-2)[-t + e^{2t}]$$

pelo que y_P será solução da equação homogénea

$$D^2(D-1)(D-2)^2 y = 0$$

A solução geral desta equação é da forma

$$y(t) = a + bt + ce^{2t} + dte^{2t} + fe^t.$$

Comparando com y_H conclui-se que a solução particular é da forma $a + bt + dte^{2t}$. Substituindo na equação inicial temos

$$\begin{aligned}
(D^2 - 3D + 2)(a + bt + dte^{2t}) &= -t + e^{2t} \\
d(2e^{2t} + 2e^{2t} + 4te^{2t}) - 3(b + d(e^{2t} + 2te^{2t})) + 2(a + bt + dte^{2t}) &= -t + e^{2t} \\
2a - 3b + 2bt + de^{2t} &= -t + e^{2t}
\end{aligned}$$

Pelo que $a = -\frac{3}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$ e $d = 1$. A solução geral da equação diferencial é portanto

$$y(t) = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + te^{2t} + ae^t + be^{2t}$$

Substituindo nas condições iniciais $y(0) = -\frac{3}{4},\ y'(0) = 0$ obtemos

$$\begin{cases} -\frac{3}{4} + a + b = -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} + 1 + a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

donde se conclui que a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + te^t + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t}.$$

3. **(LEAN, MEAer, MEEC, MEMec)** Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y'' - y = b(t), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

escolhendo para $b(t)$ **uma e só uma** das seguintes funções. *Note que a cotação deste problema é reduzida em 0,5 val. se optar pela segunda função.*

[2,0 val.] (i) $b(t) = \delta(t-1) - H(t-6)e^{2t}$

[1,5 val.] (ii) $b(t) = 5e^t \operatorname{sen} t$

Resolução:

(i) Escrevendo $Y(s)$ para a transformada de Laplace de $y(t)$ e aplicando a transformada de Laplace à equação obtemos

$$s^2Y(s) - Y(s) = e^{-s} - e^{12}\frac{e^{-6s}}{s-2} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2-1} - e^{12}\frac{e^{-6s}}{(s-2)(s^2-1)}$$

donde

$$Y(s) = \frac{1}{2}e^{-s}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) + e^{12-6s}\left(-\frac{1}{3(s-2)} + \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{6(s+1)}\right).$$

Conclui-se que a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = \frac{1}{2}H(t-1)\left(e^{t-1} - e^{-(t-1)}\right) + e^{12}H(t-6)\left(-\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{6}e^{-t}\right).$$

(ii) Uma vez que $((D-1)^2+1)(5e^t \operatorname{sen} t) = 0$, a solução do problema de valor inicial satisfaz a equação homogénea

$$((D-1)^2+1)(D-1)(D+1)y = 0$$

pelo que $y(t)$ é da forma

$$y(t) = c_1e^t \operatorname{sen} t + c_2e^t \cos t + c_3e^t + c_4e^{-t}$$

com $c_i \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação inicial (e notando que os termos correspondentes a c_3 e c_4 são soluções da equação homogénea associada) temos

$$\begin{aligned} (D^2-1)(c_1e^t \operatorname{sen} t + c_2e^t \cos t) &= 5e^t \operatorname{sen} t \\ 2c_1e^t \cos t - 2c_2e^t \operatorname{sen} t - (c_1e^t \operatorname{sen} t + c_2e^t \cos t) &= 5e^t \operatorname{sen} t \\ (-c_1 - 2c_2)e^t \operatorname{sen} t + (2c_1 - c_2)e^t \cos t &= 5e^t \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

pelo que $c_1 = -1,\ c_2 = -2$. A solução geral da equação diferencial é portanto

$$y(t) = -e^t \operatorname{sen} t - 2e^t \cos t + c_3e^t + c_4e^{-t}$$

Substituindo nas condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$ obtemos

$$\begin{cases} -2 + c_3 + c_4 = 0 \\ -1 - 2 + c_3 - c_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = \frac{5}{2} \\ c_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

donde se conclui que a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = -e^t \operatorname{sen} t - 2e^t \cos t + \frac{5}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

4. Considere o seguinte problema de valor inicial e condições na fronteira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 9u \qquad \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = \pi - x & 0 \le x \le \pi; \end{cases}$$

[1,0 val.] (a) Desenvolva $u(x,0)$ numa série de senos em $[0,\pi]$.

[1,5 val.] (b) Resolva formalmente o problema dado.

Resolução:

(a) Os coeficientes da série de senos de $\pi - x$ em $[0,\pi]$ são, para $n = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\operatorname{sen}(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{-(\pi - x)\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right\} \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

Logo,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\operatorname{sen}(nx)$$

(b) Consideremos primeiro soluções da equação diferencial parcial do tipo $u = T(t)X(x)$. Substituindo na equação obtemos $T'X = 9TX'' + 9TX$, ou seja $\frac{T'}{9T} - 1 = \frac{X''}{X} = \sigma$, onde σ é uma constante real dado que o primeiro membro é independente de x e o segundo é independente de t. Logo,

$$\begin{cases} T'(t) - 9(\sigma + 1)T(t) = 0 \\ X''(x) - \sigma X(x) = 0\,. \end{cases}$$

Consoante o sinal da constante σ a equação diferencial de segunda ordem em $X(x)$ tem as soluções

$$X(x) = \begin{cases} ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x} & \text{se } \sigma > 0 \\ a + bx & \text{se } \sigma = 0 \\ a\cos(\sqrt{-\sigma}x) + b\operatorname{sen}(\sqrt{-\sigma}x) & \text{se } \sigma < 0 \end{cases}$$

Pelas condições na fronteira,

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Vejamos o que isto implica para cada um dos casos anteriores:
Caso $\sigma > 0$:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ae^{\sqrt{\sigma}\pi} + be^{-\sqrt{\sigma}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ a(e^{\sqrt{\sigma}\pi} - e^{-\sqrt{\sigma}\pi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X(x) \equiv 0$$

Caso $\sigma = 0$:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X(x) \equiv 0$$

Caso $\sigma < 0$:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a\cos(\pi\sqrt{-\sigma}) + b\,\mathrm{sen}(\pi\sqrt{-\sigma}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b\,\mathrm{sen}(\pi\sqrt{-\sigma}) = 0 \end{cases}$$

e, neste último caso, ou $a = b = 0$, dando novamente a solução $X(x) \equiv 0$, ou $a = 0$ com $\sigma = -n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, e neste caso obtemos as soluções não identicamente nulas $X(x) = a\,\mathrm{sen}(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$. Resolvendo a equação para $T(t)$ com estes valores de σ obtemos $T(t) = ce^{9(1-n^2)t}$. Procuremos então a solução do problema como uma série de funções do tipo $T(t)X(x) = b_n e^{9(1-n^2)t}\,\mathrm{sen}(nx)$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{9(1-n^2)t}\,\mathrm{sen}(nx)\,.$$

Dado que $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}(nx) = \pi - x$, deduzimos que b_n, $n = 1, 2, \ldots$ são os coeficientes da série de senos calculada na alínea anterior pelo que a solução (formal) do problema dado é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} e^{9(1-n^2)t}\,\mathrm{sen}(nx)\,.$$

[1,0 val.] 5. Sendo $y_0 \in [0, 2]$, considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(y-2)\big(t\,\mathrm{sen}^2(t-y) + y^2\big) \quad \text{se } t \in \mathbb{R} \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Mostre que o problema tem solução única, $y(t)$, determinando o seu intervalo máximo de existência e o $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

Resolução:

A função $g(y,t) = y(y-2)\big(t\,\mathrm{sen}^2(t-y) + y^2\big)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, estando por isso nas condições do teorema de Picard-Lindelöf. Desta forma, para todos os t_0 e y_0 em $\mathbb{R}$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y-2)\big(t\,\mathrm{sen}^2(t-y) + y^2\big) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

tem solução única, definida numa vizinhança de t_0. No caso presente, para $t_0 = 0$ e $y_0 \in [0, 2]$, seja $y(t)$ a solução de (1).

Se $y_0 = 0$ (respect. $y_0 = 2$), $y(t) \equiv 0$ (respect. $y(t) \equiv 2$) é a solução de (1) pelo que o intervalo máximo é $\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ (respectiv. $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 2$).

No caso em que $0 < y_0 < 2$ vejamos que $y(t)$ não pode sair do intervalo $]0, 2[$ para $t \geq 0$. Por continuidade da solução, basta provar que não existe $\bar{t} > 0$ tal que $y(\bar{t}\,) = 0$ ou $y(\bar{t}\,) = 2$. Admitindo que a solução do PVI intersecta a recta $y = 0$ em $\bar{t} > 0$, então como $y(t) = 0$ é solução do problema (1) com $t_0 = \bar{t}$ e $y_0 = 0$, tanto $y(t)$ como $\bar{y}(t) \equiv 0$ são soluções desse problema, o que contradiz a unicidade de solução. Identicamente se mostra que a solução do PVI não intersecta a recta $y = 2$. Assim, se $0 \leq y(t) \leq 2$ e $t \geq 0$:

$$y(y-2)\big(t\,\mathrm{sen}^2(t-y) + y^2\big) \leq 0 \Rightarrow y'(t) \leq 0$$

ou seja, $y(t)$ é decrescente sempre que $y_0 \in]0,2[$.

Conclui-se então, por continuidade e monotonia de $y(t)$, que:

$$0 < y(t) < y_0 < 2 \qquad \text{para qualquer} \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

Pelo teorema de extensão de solução, isto implica que $y(t)$ está definida para qualquer $t \geq 0$.

Para determinar o limite no caso em que $0 \leq y_0 < 2$, usamos o teorema de comparação de soluções. Atendendo a que $y(t) < 2$, para $t \geq 0$),

$$t \operatorname{sen}^2(t-y) + y^2 \geq y^2.$$

Como $y(t)\big(y(t)-2\big) \leq 0$,

$$g(y,t) = y(y-2)\big(t \operatorname{sen}^2(t-y) + y^2\big) \leq y(y-2)\, y^2 \leq (y_0-2)y^3$$

A (única) solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = -(2-y_0)u^3 \\ \\ u(0) = y_0 \end{cases}$$

é $u(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1+2y_0^2(2-y_0)t}}$. Note que $2 - y_0 > 0$. Pelo teorema de comparação de soluções, $y(t) \leq \frac{y_0}{\sqrt{1+2y_0^2(2-y_0)t}}$, sendo que $\lim_{t\to+\infty} \frac{y_0}{\sqrt{1+2y_0^2(2-y_0)t}} = 0$. Como:

$$0 < y(t) \leq \frac{y_0}{\sqrt{1+2y_0^2(2-y_0)t}}$$

para $t \geq 0$, resulta que:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$