

Duração: 90 minutos

2º teste

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Admita que o tempo de vida em centenas de horas, X , de um novo tipo de lâmpadas de longa duração segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ , $\lambda > 0$, desconhecido. Com o objetivo de estimar λ , registaram-se as durações $(x_1, x_2, \dots, x_{12})$ de 12 lâmpadas desse tipo, tendo-se obtido $\sum_{i=1}^{12} x_i = 480$. Com base na amostra obtida:

- (a) Determine a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro λ .

(3.0)

Solução: $1/40$

- (b) Calcule a estimativa de máxima verosimilhança da probabilidade de uma lâmpada desse tipo durar mais de 40 centenas de horas.

(1.5)

Solução: 0.3679

2. Numa sondagem aleatória a 300 habitantes da Grande Lisboa que utilizam o automóvel para ir de casa para o emprego, constatou-se que, entre os mesmos, 100 tencionam passar a utilizar o metropolitano quando este chegar à sua zona de residência. Com base nos resultados desta sondagem:

- (a) Deduza um intervalo de confiança a aproximadamente 95% para a proporção populacional, p , de habitantes da Grande Lisboa que tencionam passar a utilizar o metropolitano quando este chegar à sua zona de residência.

(3.0)

Solução: $IC_{\approx 0.95}(p) = [0.2780, 0.3867]$

- (b) Quantos habitantes adicionais devemos sondar para estarmos confiantes a aproximadamente 90% que a margem de erro de estimação de p seja menor que 3%?

(2.5)

Solução: 369 (ou 452 para $\bar{x} = 1/2$)

Grupo II

10 valores

1. As garrafas de um certo refrigerante devem ter um conteúdo de 200 ml (quantidade nominal). Observadas ao acaso 100 garrafas, mediu-se o desvio dos seus conteúdos em relação à quantidade nominal e obteve-se:

Desvio (ml)	$] - 5, -3]$	$] - 3, 0]$	$] 0, 3]$	$] 3, 5]$
Frequência absoluta	6	45	44	5

Teste ao nível de significância de 1%, a hipótese de que os desvios face à quantidade nominal possuem distribuição normal com valor esperado nulo e desvio padrão 2 ml.

(4.0)

Solução: $q_0 = 0.5676$ e valor- $p = 0.9038$. Não se rejeita H_0 ao nível de significância de 1%.

2. É esperado que o custo de manutenção de um certo tipo de máquinas aumente com a respetiva idade. Para estudar o efeito da idade de uma máquina, x , no seu custo de manutenção, foram registados os custos de manutenção no último ano em centenas de euros, Y , para 12 máquinas desse tipo. Admitindo a validade do modelo de regressão linear simples e sabendo que foram obtidos os seguintes resultados:

x_i (em anos)	1.0	1.5	2.0	3.0	3.0	3.5	4.0	4.0	5.0	5.0	6.0	7.0
y_i (em centenas de euros)	22	20	22	21	23	25	24	27	25	27	26	29

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 45, \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 204.5, \sum_{i=1}^{12} y_i = 291, \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 7139, \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 1138.5.$$

- (a) Determine a equação da reta de regressão de mínimos quadrados. (1.5)

Solução: $\hat{E}[Y | x] = 19.2937 + 1.3217x$, $x \in [1, 7]$

- (b) Calcule a estimativa pontual do custo esperado de manutenção de uma máquina no seu 5º ano de funcionamento. É correto utilizar o mesmo procedimento aplicado ao 10º ano de funcionamento de uma máquina? Justifique. (1.5)

Solução: $\hat{E}[Y | x = 5] = 25.9021$. Para $x = 10$ o valor que se pode obter seria uma extrapolação uma vez que o modelo foi ajustado para $x \in [1, 7]$.

- (c) Teste a hipótese de que o incremento anual no valor esperado do custo anual de manutenção de uma máquina é igual a 100 euros. Decida com base no valor-p. (3.0)

Solução: $t_0 = 1.3669$ e valor-p = 0.2016. Não se rejeita $H_0 : \beta_1 = 1$ aos níveis de significância habituais $([0.01, 0.1])$.