Prof. Vitor Cardoso (responsável)
Prof. Pedro Pereira (práticas)

Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica (LEFT)
Física dos Meios Contínuos
Teste II (20/04/2022)

Duração: 45 minutos

Justifique cuidadosamente todas as respostas e raciocínios
Exprima as unidades no sistema S.I. no final de cada resposta
Não é permitido o uso de formulários ou calculadoras

Problema 1 O vetor de Lamb, dado por $\mathbf{l} = \mathbf{v} \times \omega$, onde $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ é a vorticidade, é de extrema importância em diversos fenómenos complexos envolvendo turbulência. Existem dois tipos de escoamento onde este é zero - no escoamento potencial e no escoamento de Beltrami. O escoamento de Beltrami é caraterizado pela seguinte definição da vorticidade

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \alpha(x, y, z, t)\mathbf{v}$$

sendo α uma função escalar diferente de zero em toda a parte.

a) (2.0 val.) Mostre que o escoamento de um fluido homogéneo e incompressível é descrito pela condição

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

onde $\mathbf{v}$ é a velocidade do escoamento.

R: A equção da continuidade é

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \partial_t \rho + \nabla \rho \cdot \mathbf{v} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0\,.$$

O fluido é homogéneo e incompressivel, o que implica ρ constante em toda a parte, logo $\partial_t \rho = 0$ e $\nabla \rho = 0$. + eq continuidade leva a $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

b) (1.0 val.) Parta da definição de escoamento potencial e vorticidade e mostre que o vetor de Lamb é nulo em ambos os casos. Explique a diferença entre os dois casos.

R: Escoamento potencial: vorticidade é zero pela identidade do rotacional de um campo irrotacional, logo o vetor de Lamb também. Beltrami: vorticidade é paralela à velocidade. Produto externo de 2 vetores paralelos é zero.

c) (2.0 val.) Mostre que, para um fluido homogéneo e incompressível em escoamento de Beltrami estacionário, a função escalar α é conservada numa linha de corrente.

R: A divergência nos dois lados da equaçao do enunciado

$$\nabla \cdot \omega = \alpha \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha$$

usando o resultado de a) e o facto de ω ser um campo solenoidal

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha$$

em escoamento estacionario derivada total corresponde a $\mathbf{v} \cdot \nabla$ logo

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

como a função de Bernoulli, α é constante em linhas de corrente.

d) (1.0 val.) Mostre que

$$\mathbf{v} = (B \sin y + C \cos z, C \sin z + A \cos x, A \sin x + B \cos y)$$

corresponde a um escoamento de Beltrami. Determine α.

R:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = (-B \sin y - C \cos z, -C \sin z - A \cos x, -A \sin x - B \cos y) = -\mathbf{v}$$

$\alpha = -1$

Problema 2 Considere um escoamento potencial estacionário de um fluido com densidade ρ, dentro de um cilindro infinito de raio R. A fonte do escoamento está localizada na origem e o potencial escalar só depende da coordenada radial (em coordenadas cilíndricas) $\phi = \phi(r)$. Ignore efeitos da gravidade.

a) (3.0 val.) Determine a velocidade de escomento de um fluido homogéneo e incompressível neste escoamento potencial. A velocidade do escoamento em R é V.

R:

$$v = \nabla\phi$$

$$\nabla \cdot v = \nabla^2\phi = 0$$

O Laplaciano em coordenadas cilindricas, num escoamento com simetria cilindrica é simplesmente

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\phi) = \partial_r^2\phi + \frac{1}{r}\partial_r\phi = 0 \implies \partial_r\phi = \frac{A}{r}\,,$$

pelo que

$$\phi = A\log r + B$$

Ora, $\nabla = \partial_r$ em coordenadas cilindricas, logo podemos inverter o potencial para calcular a velocidade v,

$$\mathbf{v} = \nabla\phi = \frac{A}{r}\mathbf{e}_r$$

$$v(R) = V \implies \frac{A}{R} = V \implies A = VR$$

hence

$$\mathbf{v} = V\left(\frac{R}{r}\right)$$

b) (4.0 val.) Mostre que a pressão neste escoamento é dada por

$$P = P_R + \frac{V^2\rho}{2}\left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)$$

onde P_R é a pressão em $r = R$.

R: A equação de Euler escreve-se como,

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho}$$

com a simetria indicada, e nestas coordenadas, temos

$$(V\left(\frac{R}{r}\right)\partial_r)V\left(\frac{R}{r}\right)\mathbf{e}_r = -\frac{\nabla P}{\rho}$$

$$-\rho V^2R^2\frac{1}{r^3}\mathbf{e}_r = -\partial_r P\mathbf{e}_r \implies P = C - \rho V^2R^2\frac{1}{2r^2} = C - \frac{V^2\rho}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$P(R) = P_R = C - \frac{V^2\rho}{2} \implies C = P_R + \frac{V^2\rho}{2}$$

Problema 3 Considere um fluido barotrópico ($P = P(\rho)$) *compressível* de densidade constante ρ_0, em repouso à pressão P_0.

a) (4.0 val.) Linearize as equações de Euler e da continuidade na ausência de gravidade, em regime irrotacional em que a velocidade do fluido $\delta\vec{v} = \nabla\Psi$. Mostre que o potencial Ψ obedece a $c^2\nabla^2\Psi - \partial_t^2\Psi = 0$ e que a flutuação da densidade satisfaz $c^2\nabla^2\delta\rho - \partial_t^2\delta\rho = 0$. Aqui $c^2 = \partial P/\partial\rho$ é a velocidade do som no fluido.

R: A equação da continuidade linearizada é

$$\partial_t\delta\rho + \rho_0\nabla\delta v = 0\,,$$

onde usamos o facto de que $v_0 = 0$. A linearização da equação de Euler dá

$$\partial_t\Psi + \delta P/\rho_0 = 0\,,$$

que pode ser re-escrita como

$$\partial_t\Psi + c^2\delta\rho/\rho_0 = 0\,,$$

Combinando as duas obtemos a equação de onda

$$c^2\nabla^2\Psi - \partial_t^2\Psi = 0\,.$$

Em alternativa, consideremos a equação da continuidade linearizada

$$\partial_t\delta\rho + \rho_0\nabla\delta v = 0\,,$$

juntamente com a equação de Euler linearizada (note que $gradP_0 = 0$),

$$\partial_t\delta v_i = -\frac{1}{\rho_0}\partial_i\delta P\,,$$

Usando a equação de estado $\delta P = c^2\delta\rho$ temos

$$\partial_t\delta v_i + \frac{c^2}{\rho_0}\partial_i\delta\rho = 0\,.$$

Derivando a eq. da continuidade em ordem ao tempo e tirando a divergência da equação de Euler temos finalmente

$$c^2\nabla^2\delta\rho - \partial_t^2\delta\rho = 0\,.$$

b) (3.0 val.) Considere agora a inclusão da gravidade. Repita a alinea anterior e derive a equação que descreve $\delta\rho$. É possível existirem perturbações que crescem exponencialmente no tempo? Que condições devem ser satisfeitas para tal acontecer?

R: A equação de Euler linearizada é agora,

$$\partial_t\delta v_i = -\frac{1}{\rho_0}\partial_i\delta P + \mathrm{grad}\delta\Phi\,,$$

e deve ser usada em conjunto com a equação de Poisson,

$$\nabla^2\delta\Phi = -4\pi G\delta\rho$$

Usando a equação de estado $\delta P = c^2 \delta\rho$ temos

$$\partial_t \delta v_i + \frac{c^2}{\rho_0} \partial_i \delta\rho = 0\,.$$

Repeting o procedimento da alínea anterior, encontramos

$$c^2 \nabla^2 \delta\rho - \partial_t^2 \delta\rho + 4\pi G \rho_0 \delta\rho = 0\,.$$

Para uma pequena flutuação da forma $\delta\rho = e^{-i\omega t + i k_j x_j}$ temos $\omega^2 = c^2 k^2 - 4\pi G \rho_0$. Ou seja, para numeros de ondas suficientemente pequenos, aparece uma instabilidade de Jeans.