Data: 14 de Junho 2021 (15h00)
Duração: 1h30/3h00 (+5'/10' tol.)
Docentes: Hugo Terças e Pedro Cosme

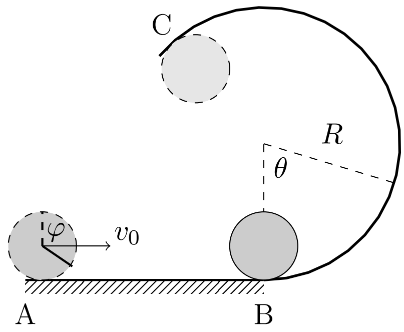
# Mecânica Analítica

MEFT 2020/21

**EXAME**

Teste I: Questões 1 e 2 | Teste II: Questões 3 e 4. As cotações duplicam no caso de teste. Não se enerve: antes de começar a resolver, respire, tenha calma. Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente todos os cálculos que efectuar.

**Questão 1. [5 val]** *Atingiu, mestre? Atingiu?* — Uma esfera de massa $M$, raio $a$ e momento de inércia $I = (2/5)Ma^2$ é lançada do ponto A, sem rotação e com velocidade $v_0$. Devido ao atrito, a esfera desliza até ao ponto B, a partir do qual rola sem deslizar sobre uma calha circular de raio $R > a$. Denote por $\varphi$ o ângulo de rotação sobre o eixo da esfera e $\theta$ o ângulo que parametriza a calha. Tome por $g$ a aceleração da gravidade.




a) [1.0 val] No troço AB, o atrito é descrito pelo potencial de Rayleigh $\mathcal{F} = \mu Mg(\dot{X} - a\dot{\varphi})$, onde $\mu$ é o coeficiente de atrito cinético e $X$ é a coordenada generalizada do centro de massa da esfera. Mostre que o Lagrangeano que descreve o movimento neste troço é dado por

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, X, \dot{X}) = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{5}Ma^2\dot{\varphi}^2,$$

e determine os momentos generalizados, discutindo a sua conservação.

b) [1.0 val] Sem recorrer aos multiplicadores de Lagrange, mostre que a velocidade com que a esfera atinge o ponto B é dada por

$$v_B = \frac{5}{7}v_0.$$

c) [1.0 val] Considere, agora, o movimento na calha. Obtenha a ligação relevante para este problema, $f(\varphi, \theta)$, e mostre que o Lagrangeano que descreve o movimento no troço BC é dado por

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{7}{10}M(R-a)^2\dot{\theta}^2 + Mg(R-a)\cos\theta.$$

d) [1.0 val] Promova a coordenada radial $r$ da calha a grau de liberdade. Faça uso do método dos multiplicadores de Lagrange e defina uma função $f(r; R, a)$ apropriada para mostrar que o módulo da força generalizada segundo a direcção radial é dado por

$$Q_r = \frac{7}{5}M(R-a)\dot{\theta}^2 + Mg\cos\theta.$$

e) [1.0 val] Determine o valor mínimo da velocidade no ponto B para que a esfera atinja o ponto C.

**Questão 2. [5 val]** *Uma carga de trabalhos.*— Como seguramente sabem do electromagnetismo, um fio muito longo carregado positivamente produz um potencial electrostático $\sim \log(a/r)$, onde $r$ é o raio de um ponto do espaço ao fio e $a$ é uma distância de referência (na qual o potencial se anula). Assim, uma carga de teste que se passeie na vizinhança do fio mover-se-á sob a acção de um potencial $V(r) = V_0 \log(r/a)$. Assuma que o fio e a carga de teste possuem massas $m_1$ e $m_2$, respectivamente. Por simplicidade, considere que o movimento ocorre no plano $(r, \theta)$ e despreze a acção da gravidade.

a) [1.0 val] Mostre, justificando, que o Lagrangeano do sistema se pode escrever na forma

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V_0 \log\left(\frac{r}{a}\right),$$

determinando as quantidades $\vec{R}$, $M$ e $\mu$. Comente sobre o limite $m_1 \gg m_2$.

b) [0.75 val] Identifique as coordenadas cíclicas e determine os momentos generalizados conservados. Justique.

c) [1.0 val] Escreva a equação do movimento em termos de um potencial efectivo. Represente-o graficamente para $V_0 < 0$ e $V_0 > 0$ e obtenha o(s) ponto(s) de equilíbrio do sistema, classificando-os quanto à estabilidade.

d) [1.25 val] Considere o caso $V_0 > 0$. Mostre que existe uma órbita estável e que as perturbações a esta orbita oscilam com a frequência

$$\Omega = \beta\omega_0,$$

onde $\omega_0$ é uma frequência angular da órbita de equilíbrio. Determine o factor numérico $\beta$ e explique-o à luz do teorema de Bertrand.

e) [1.0 val] Determine a frequência de precessão desta órbita e indique se esta precessa no mesmo sentido (ou no sentido oposto) da órbita de equilíbrio.

**Questão 3. [5 val]** *Transformações canónicas.* — Um certo sistema é descrito pelo Lagrangeano

$$L(q, \dot{q}, t) = a\frac{\dot{q}^2}{4} - \frac{q^2}{2} + a\dot{q}qt$$

onde $a$ é uma constante.

a) [1.25 val] Mostre que o mesmo sistema é regido pelo Hamiltoniano

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2}q^2 + at^2q^2 - 2tpq + \frac{1}{a}p^2,$$

e justifique se é, ou não, conservado.

b) [1.25 val] Considere a função geradora

$$F = \frac{1}{2}atq^2 - qP,$$

que define uma transformação $(p, q) \mapsto (P, Q)$. Determine as novas coordenadas $Q$ e $P$. Discorra brevemente sobre a conveniência de se aplicar uma transformação canónica no Hamiltoniano dado.

c) [1.0 val] Verifique, recorrendo aos parênteses de Poisson, que a transformação é canónica. Explique sucintamente a que outro método poderia recorrer para testar esta mesma hipótese.

d) [1.5 val] Obtenha o novo Hamiltoniano $K(Q, P)$ e resolva as equações do movimento para as novas coordenadas $Q$ e $P$. Recorrendo à transformação que determinou, apresente explicitamente as soluções de $q(t)$ e $p(t)$.

Tabela 1: Relações de transformação para os quatro tipo de funções geradoras $F_k$.

| $F_1(q_i, Q_i, t)$ | $F_2(q_i, P_i, t)$ | $F_3(p_i, Q_i, t)$ | $F_4(p_i, P_i, t)$ |
|---|---|---|---|
| $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$ | $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ | $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$ | $q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$ |
| $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$ | $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$ | $P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$ | $Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$ |
| $K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$ | $K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$ | $K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$ | $K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$ |
| $\frac{\partial p_i}{\partial Q_i} = -\frac{\partial P_i}{\partial q_i}$ | $\frac{\partial p_i}{\partial P_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_i}$ | $\frac{\partial q_i}{\partial Q_i} = \frac{\partial P_i}{\partial p_i}$ | $\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = -\frac{\partial q_i}{\partial P_i}$ |

**Questão 4. [5 val]** *Um campo muito clássico.* — Pode estudar-se o comportamento de um fluido irrotacional de densidade $\rho$ e campo de velocidade $\vec{u} \equiv (\partial_x \varphi)\, \vec{e}_x$ recorrendo à densidade lagrangeana

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \partial_x \rho, \varphi, \dot{\varphi}, \partial_x \varphi) = \rho \left( \dot{\varphi} + \frac{1}{2} \left(\partial_x \varphi\right)^2 \right) - U(\rho),$$

em que $U(\rho)$ representa a densidade de energia interna do fluido.

a) [1.0 val] Mostre que as equações de Euler–Lagrange para os campos potencial de velocidade ($\varphi$) e densidade ($\rho$) são

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \partial_x \varphi) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\partial_x \varphi\right)^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0.$$

Lembrando que a energia interna se relaciona com a pressão ($p$) segundo $\dfrac{\partial U}{\partial \rho} = -\dfrac{p}{\rho}$, interprete fisicamente as equações que acabou de obter. Que leis da hidrodinâmica representam?

b) [1.5 val] Calcule o tensor energia-momento, a partir da densidade lagrangeana, discutindo o seu significado físico e o de cada uma das suas componentes no contexto do problema. *(Sugestão: ser-lhe-á proveitoso recorrer a alguma(s) relação(ões) que obteve anteriormente para simplificar o tensor.)*

c) [1.25 val] Pode demonstrar-se que a densidade lagrangeana é invariante para uma translação infinitesimal no espaço, $\delta\varphi = \partial_x \varphi$. Determine a corrente de Nöther $j^\mu$ associada a esta simetria. Discuta sucintamente a que quantidade física corresponde a sua conservação.

d) [1.25 val] Tomando a derivada espacial da equação de evolução do campo $\varphi$ e assumindo que o fluido é politrópico, i.e. $p = C\rho^n$, obtem-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \partial_x \varphi) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\partial_x \varphi) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\partial_x \varphi\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}(C\rho^{n-1}) = 0.$$

Linearize estas equações, recorrendo a $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ e $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1(x,t)$ e mostre que a relação de dispersão do problema é

$$\omega = c_s k, \quad \text{com} \quad c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho_0}.$$