Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEBIOM/MEFT

2º Teste (VA) - 28 de Janeiro de 2020 - 9:30 às 11:00

Instruções

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta.
- Não pode ter calculadoras ou telemóveis ligados e/ou visíveis.
- Antes de começar:
  - Identifique com o nome e número **a primeira página** do seu caderno de respostas.
  - Preencha nesta folha o seu nome, número e a sala onde está.
  - Numere todas as páginas do caderno de respostas, **frente e verso**.
  - Coloque o seu documento de identificação em cima da mesa de trabalho.
- Sair da sala de exame: Só pode abandonar a sala de exame se entregar o exame, ou desistir. Em ambos os casos, só o poderá fazer ao fim dos primeiros 30 minutos, e deve sempre entregar esta folha de instruções.
- Se desistir: Entregue apenas esta folha de instruções, assinada, e com a indicação que desistiu.

pergunta	classificação	cotação
1 a, b, c		4
2		4
3 a, b, c		4
4 a, b, c		4
5 a, b, c, d		4
total		20

Nome: ____

Número: ____________________

Sala: ______________________

Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEBIOM/MEFT

2º Teste (VA) - 28 de Janeiro de 2020 - 9:30 às 11:00

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = e^{2x} \operatorname{sen}(3x+1)$ (b) $g(x) = \operatorname{senh}(2+\cos x) \operatorname{sen} x$ (c) $h(x) = \dfrac{3x^2+7x-2}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

Problema 2 (4 val.) Considere as funções

$$f(x) = 1/\sqrt{3x} \text{ e } g(x) = 1/\sqrt{2-2x^2}$$

Sendo $A = \{(x,y) : 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < f(x)\}$ e $B = \{(x,y) : 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < g(x)\}$, calcule a área do conjunto $A \cup B$.

Problema 3 (4 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a) \ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k k^2}{5^k \sqrt{k+1}} \qquad (b) \ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)! 10^k}{(3k)!} \qquad (c) \ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt{k}(1-\cos(1/k))$$

Problema 4 (4 val.) Neste grupo, definimos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1/4)^k \frac{x^{2k}}{2k(2k-1)}.$$

(a) Determine o domínio de convergência da série, e especifique a parte desse domínio onde a série é absolutamente convergente.
(b) Diga se f tem um extremo em $x = 0$ e caso afirmativo classifique-o.
(c) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ com error inferior a 0,004.

Problema 5 (4 val.) Demonstre as seguintes afirmações.

(a) Se f é a função característica do conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, i.e., $f(x) = 1$ para $x \in A$ e $f(x) = 0$ quando $x \notin A$, então f é integrável em $[0,1]$.
(b) Se $\limsup |a_{n+1}/a_n| = \alpha < 1$ então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.
(c) Se $f_n(x) = \arctan(x^2/\sqrt{n})$ então a sucessão f_n converge pontualmente para qualquer $x \in \mathbb{R}$ mas não converge uniformemente em $\mathbb{R}$.
(d) A equação diferencial $y' + e^{x^2} y = \operatorname{sen} x$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$ tal que $y(0) = 1$.

Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEBIOM/MEFT

2º Teste (VB) - 28 de Janeiro de 2020 - 9:30 às 11:00

Instruções

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta.
- Não pode ter calculadoras ou telemóveis ligados e/ou visíveis.
- Antes de começar:
  - Identifique com o nome e número **a primeira página** do seu caderno de respostas.
  - Preencha nesta folha o seu nome, número e a sala onde está.
  - Numere todas as páginas do caderno de respostas, **frente e verso**.
  - Coloque o seu documento de identificação em cima da mesa de trabalho.
- Sair da sala de exame: Só pode abandonar a sala de exame se entregar o exame, ou desistir. Em ambos os casos, só o poderá fazer ao fim dos primeiros 30 minutos, e deve sempre entregar esta folha de instruções.
- Se desistir: Entregue apenas esta folha de instruções, assinada, e com a indicação que desistiu.

pergunta	classificação	cotação
1 a, b, c		4
2		4
3 a, b, c		4
4 a, b, c		4
5 a, b, c, d		4
total		20

Nome: ____

Número: ____________________

Sala: _______________________

Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEBIOM/MEFT

2º Teste (VB) - 28 de Janeiro de 2020 - 9:30 às 11:00

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = e^{2x}\operatorname{sen}(3x+1) \quad (b)\ g(x) = \operatorname{senh}(2+\cos x)\operatorname{sen} x \quad (c)\ h(x) = \frac{3x^2+7x-2}{(x-1)(x^2+2x+1)}$$

Problema 2 (4 val.) Considere as funções

$$f(x) = 1/\sqrt{3x} \text{ e } g(x) = 1/\sqrt{2-2x^2}$$

Sendo $A = \{(x,y) : 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < f(x)\}$ e $B = \{(x,y) : 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < g(x)\}$, calcule a área do conjunto $A \cup B$.

Problema 3 (4 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3^k k^2}{5^k\sqrt{k+1}} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k)!10^k}{(3k)!} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sqrt{k}(1-\cos(1/k))$$

Problema 4 (4 val.) Neste grupo, definimos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1/4)^k\frac{x^{2k}}{2k(2k-1)}.$$

(a) Determine o domínio de convergência da série, e especifique a parte desse domínio onde a série é absolutamente convergente.
(b) Diga se f tem um extremo em $x = 0$ e caso afirmativo classifique-o.
(c) Calcule $\int_0^1 f(x)dx$ com error inferior a 0,004.

Problema 5 (4 val.) Demonstre as seguintes afirmações.

(a) Se f é a função característica do conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, i.e., $f(x) = 1$ para $x \in A$ e $f(x) = 0$ quando $x \notin A$, então f é integrável em $[0,1]$.
(b) Se $\limsup |a_{n+1}/a_n| = \alpha < 1$ então a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.
(c) Se $f_n(x) = \arctan(x^2/\sqrt{n})$ então a sucessão f_n converge pontualmente para qualquer $x \in \mathbb{R}$ mas não converge uniformemente em $\mathbb{R}$.
(d) A equação diferencial $y' + e^{x^2}y = \operatorname{sen} x$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$ tal que $y(0) = 1$.