Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2012/2013

1º Teste — Versão A

(CURSOS: LEGM, LEMAT, MEAER, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEEC, MEQ)

3 de Novembro de 2012, 8h

Duração: 1h 30m

1. Considere a função $u(x,y) = \alpha^3 x^3 - 3\alpha x y^2 + e^y \operatorname{sen} x$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

[1,0 val.] (a) Determine todos os valores de α para os quais u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val.] (b) Considerando $\alpha = 1$, determine a função analítica $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$.

[1,0 val.] (c) Sendo f a função determinada na alínea anterior, calcule

$$\oint_\gamma \frac{f(z) + f'(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz\ ,$$

onde γ é o caminho parametrizado por $\gamma(t) = \mathrm{i} - e^{\mathrm{i}t}$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Resolução:

(a) A função u é harmónica se é de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e satisfaz $\Delta u = 0$.
Mas u é obviamente $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x(\alpha^3 - \alpha),$$

donde $\Delta u = 0$ em todo o $\mathbb{R}^2$ se e só se $\alpha^3 - \alpha = 0$. As soluções são, portanto, $\alpha = 0, 1, -1$.

(b) Sendo $\mathbb{R}^2$ um domínio simplesmente conexo e u harmónica, temos condições suficientes para a existência de conjugados harmónicos de u em todo o $\mathbb{R}^2$. Existe, portanto, uma função harmónica $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ e satisfaz a condição imposta em $z = \mathrm{i}$.
Escrevendo então as equações de Cauchy-Riemann, que necessariamente tais fuções u e v têm que satisfazer em todo o $\mathbb{R}^2$, obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - e^y \operatorname{sen} x, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + e^y \cos x. \end{cases}$$

Integrando agora a primeira destas, parcialmente, em ordem à variável x obtém-se

$$v(x,y) = 3x^2 y + e^y \cos x + \beta(y),$$

onde $\beta(y)$ é uma função exclusivamente da variável y. Só nos resta determinar esta função β, pelo que de seguida substitui-se este v, agora obtido, na segunda equação de Cauchy-Riemann atrás. E derivando então v em ordem a y ficamos com a equação

$$3x^2 + e^y \cos x + \beta'(y) = 3x^2 - 3y^2 + e^y \cos x,$$

donde

$$\beta'(y) = -3y^2 \Rightarrow \beta(y) = -y^3 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

A função f genérica, holomorfa em $\mathbb{C}$, que satisfaz $\mathrm{Re}(f) = u$ é então dada por

$$f(x + \mathrm{i}y) = (x^3 - 3xy^2 + e^y \operatorname{sen} x) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + e^y \cos x + C),$$

pelo que para satisfazer a condição $f(\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}$, ou seja, $u = 0$ e $v = 2$ em $(x, y) = (0, 1)$, obriga a que se tenha $C = 3 - e$.

(c) Observe-se que a parametrização dada percorre a circunferência de raio 1, centrada em i, no sentido positvo, e que a função $g(z) = f(z) + f'(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$. Portanto, pela fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada, este integral é igual a

$$2\pi\mathrm{i}\frac{d}{dz}(f(z) + f'(z))|_{z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}(f'(\mathrm{i}) + f''(\mathrm{i})).$$

Resta calcular a primeira e segunda derivadas de $f(x+\mathrm{i}y) = u(x, y)+\mathrm{i}v(x, y)$, determinado na alínea anterior. Sabemos que uma (das quatro possíveis) maneiras de obter $f'(z)$ a partir das componentes u e v, real e imaginária, de f é

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x},$$

e, portanto, por repetição desta fórmula

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{i}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Note-se que, no entanto, pela equação de Cauchy-Riemann $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ seria possível calcular qualquer destas duas fórmulas
sem recurso ao conhecimento de v. Por outras palavras, a resolução da alínea anterior é, na realidade, totalmente irrelevante para a actual.
Assim, tem-se

$$f'(x + \mathrm{i}y) = (3x^2 - 3y^2 + e^y \cos x) + \mathrm{i}(6xy - e^y \operatorname{sen} x),$$

e

$$f''(x + \mathrm{i}y) = (6x - e^y \operatorname{sen} x) + \mathrm{i}(6y - e^y \cos x),$$

donde, calculando em $z = \mathrm{i}$, se obtém

$$f'(\mathrm{i}) = e - 3 \qquad \text{e} \qquad f''(\mathrm{i}) = (6 - e)\mathrm{i},$$

e daqui o resultado do integral

$$2\pi\mathrm{i}(e - 3 + \mathrm{i}(6 - e)) = 2\pi\mathrm{i}(e - 3) - 2\pi(6 - e).$$

2. Considere a função f definida em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1/2, \mathrm{i}, 5\}$ por:

$$f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z(2z + 1)^2} + e^{\frac{1}{z-\mathrm{i}}} + \frac{\mathrm{i}z}{(z - 5)^4}.$$

[1,0 val.] (a) Determine e classifique as singularidades de f.

[1,5 val.] (b) Calcule:

$$\oint_{|z|=3} f(z)\, dz\ ,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

(a) Escrevemos $f(z) = f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)$, onde se considerou $f_1(z) = \frac{e^{iz}}{z(2z+1)^2}$, $f_2(z) = e^{\frac{1}{z-i}}$ e $f_3(z) = \frac{iz}{(z-5)^4}$.

As singularidades de f_1 são todas as soluções da equação $z(2z+1)^2 = 0$, ou seja, $z = 0$ e $z = -1/2$. Note que $f_2 + f_3$ é analítica em qualquer uma das singularidades de f_1, sendo que por isso $f_2 + f_3$ não contribui para a parte principal da série de Laurent de f válida junto a cada uma das suas singularidades de f_1.

A singularidade $z = 0$ é um polo simples de f_1 e de f, pois o limite

$$\lim_{z\to 0} z f_1(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^{iz}}{(2z+1)^2} = 1, \tag{1}$$

é diferente de 0 ou ∞.

Da mesma forma, como

$$\lim_{z\to -\frac{1}{2}} (z+1/2)^2 f_1(z) = \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{(z+1/2)^2\, e^{iz}}{4z(z+1/2)^2} = \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{4z} = -\frac{e^{-i/2}}{2},$$

então $z = -1/2$ é um polo de ordem 2.

No que diz respeito à função $f_2(z) = e^{\frac{1}{z-i}}$, ela tem apenas a singularidade $z = i$. Desenvolvendo f_2 em série de Laurent em torno de i (basta usar a série de Taylor da função exponencial em potências de $\frac{1}{z-i}$), obtém-se:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(z-i)^n} = 1 + \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2!(z-i)^2} + \frac{1}{2!(z-i)^3} + \cdots \tag{2}$$

(válida para $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$). Como a parte principal da série anterior tem uma infinidade de termos, conclui-se então que $z = i$ é singularidade essencial de f_2. Como $f_1 + f_3$ é analítica em $z = i$, então este ponto é singularidade essencial de f.

Quanto à função $f_3(z) = \frac{iz}{(z-5)^4}$, ela tem apenas a singularidade $z = 5$. Trata-se de um polo de ordem 4 de f_3, pois:

$$\lim_{z\to 5} (z-5)^4 f_3(z) = \lim_{z\to 5} iz = 5i.$$

Como $f_1 + f_2$ é analítica em $z = 5$, conclui-se que $z = 5$ é um polo de ordem 4 de f.

(b) As singularidades de f contidas no interior da curva $|z| = 3$ são $z = 0$, $z = -1/2$ e $z = i$. Note que a singularidade $z = 5$ está no exterior da curva. Assim, pelo teorema dos resíduos:

$$\oint_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi i\Big(\mathrm{R}es(f,0) + \mathrm{R}es(f,-1/2) + \mathrm{R}es(f,i)\Big) \tag{3}$$

Utilizando o valor do limite (1), calculado na alínea (a), concluímos que:

$$\mathrm{Res}\,(f,0) = 1 = \mathrm{Res}\,(f_1,0) = 1.$$

Vimos na alínea a) que $z = -1/2$ é um polo de ordem 2 de f_1. Como $z = -1/2$ não é singularidade de f_2+f_3, então:

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}es(f,-1/2) &= \mathrm{R}es(f_1,-1/2) = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\Big((z+1/2)^2 f_1(z)\Big)' = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}z}}{4z}\right)' \\
&= \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{4\mathrm{i}ze^{\mathrm{i}z}-4e^{\mathrm{i}z}}{16z^2} = \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{(\mathrm{i}z-1)e^{\mathrm{i}z}}{4z^2} = -(\mathrm{i}/2+1)e^{-\mathrm{i}/2} \\
&= -\frac{1}{2}(\mathrm{i}+2)\Big(\cos(-\tfrac{1}{2})+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-\tfrac{1}{2})\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\mathrm{sen}(-\tfrac{1}{2})-2\cos(-\tfrac{1}{2})-\mathrm{i}\Big(\cos(-\tfrac{1}{2})+2\,\mathrm{sen}(-\tfrac{1}{2})\Big)\Bigg)
\end{aligned}$$

Por outro lado, recorrendo à série de Laurent de $f_2(z)$ (equação (2)) e à definição de resíduo:

$$\mathrm{R}es(f,i) = \mathrm{R}es(f_1,i) = a_{-1} = 1.$$

Substituindo os valores dos resíduos acima calculados na equação (3), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=3} f(z)\,dz &= 2\pi\mathrm{i}\left(2+\frac{1}{2}\Big(\mathrm{sen}(-\tfrac{1}{2})-2\cos(-\tfrac{1}{2})-\mathrm{i}\Big(\cos(-\tfrac{1}{2})+2\,\mathrm{sen}(-\tfrac{1}{2})\Big)\Big)\right) \\
&= \pi\Big(\cos(-\tfrac{1}{2})+2\,\mathrm{sen}(-\tfrac{1}{2})+\mathrm{i}\Big(4+\mathrm{sen}(-\tfrac{1}{2})-2\cos(-\tfrac{1}{2})\Big)\Big)
\end{aligned}$$

[1,5 val.] 3. Determine o valor de

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{4\mathrm{i}\theta}}{5+4\cos\theta}\,d\theta\,.$$

e aproveite para deduzir o valor de

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(4\theta)}{5+4\cos\theta}\,d\theta \quad , \quad b = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{sen}(4\theta)}{5+4\cos\theta}\,d\theta\,.$$

Resolução:

Dado que $\theta\in\mathbb{R}$, tem-se

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$$

e assim

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{4\mathrm{i}\theta}}{5+4\Big(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\Big)}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(e^{\mathrm{i}\theta})^4}{5+2\Big(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}\Big)}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(e^{\mathrm{i}\theta})^4}{\Big[5+2\Big(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}\Big)\Big]}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}}\,d\theta$$

Fazendo $z=e^{\mathrm{i}\theta}$, para $\theta\in[-\pi,\pi]$ tem-se $|z|=1$ percorrida uma vez em sentido directo. Assim

$$I = \oint_{|z|=1}\frac{z^4}{5+2(z+z^{-1})}\frac{dz}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z^4}{2z^2+5z+2}dz$$

Note-se que estamos nas condições do Teorema dos Resíduos

- $z\in\mathbb{C} : |z|=1$ é uma curva de Jordan, regular, percorrida em sentido directo;
- $f(z)=\frac{z^4}{2z^2+5z+2}$ é uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus\{z\ :\ 2z^2+5z+2=0\} = \mathbb{C}\setminus\{-2\ ,\ -\frac{1}{2}\}$. Assim, f é analítica em $D\setminus\{-\frac{1}{2}\}$ para (por exemplo) $D=\{z\ :\ |z|\leq\frac{3}{2}\}$.

Então por aplicação do teorema

$$I = \frac{1}{\mathrm{i}} 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}\big(f, -\frac{1}{2}\big)$$

Escrevendo

$$f(z) = \frac{z^4}{2(z+2)(z+\frac{1}{2})}$$

é fácil de perceber que $-\frac{1}{2}$ é um polo simples e

$$\operatorname{Res}(f, -\frac{1}{2}) = \lim_{z\to -\frac{1}{2}} (z+\frac{1}{2}) f(z) = \frac{1}{48}$$

pelo que

$$I = \frac{\pi}{24}.$$

Finalmente, e sabendo que θ um número real

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(4\theta) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(4\theta)}{5+4\cos\theta}\, d\theta$$

e assim

$$a = \frac{\operatorname{Re}(I)}{\pi} = \frac{1}{24} \qquad , \qquad b = \frac{\operatorname{Im}(I)}{\pi} = 0\ .$$

4. Considere a função $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno de $z = 0$ indicando a região de convergência da série.

[1,0 val.] (b) Seja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira tal que $g(\mathrm{i}z) = g(z)$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Calcule a derivada de ordem 4001 da função $f + g$ no ponto 0.

Resolução:

(a) Temos

$$\begin{aligned}
\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} &= \frac{(z-\mathrm{i})+2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = 1 + \frac{2\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \\
&= 1 - \frac{2}{1-\frac{z}{\mathrm{i}}} = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\mathrm{i}^n} \text{ para } \left|\frac{z}{\mathrm{i}}\right| < 1 \\
&= -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mathrm{i}^n} z^n \text{ para } |z| < 1.
\end{aligned}$$

(b) Recorde-se que se $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é o desenvolvimento de Taylor da função analítica h em $z = 0$, a fórmula de Taylor diz que $h^{(n)}(0) = n! a_n$. Tendo em conta o desenvolvimento achado na alínea anterior, conclui-se que

$$f^{(4001)}(0) = (4001)! \left(-\frac{2}{\mathrm{i}^{4001}}\right) = 2(4001)!\mathrm{i}.$$

Por outro lado se $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é o desenvolvimento de Taylor de $g(z)$ então

$$g(\mathrm{i}z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\mathrm{i}z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{i}^n z^n.$$

Se $g(z) = g(\mathrm{i}z)$, conclui-se da unicidade dos coeficientes no desenvolvimento em série de Taylor que $a_n = a_n \mathrm{i}^n$. Em particular para $n = 4001$ temos $a_{4001} = a_{4001}\mathrm{i}^{4001} = a_{4001}\mathrm{i}$ donde se conclui que $a_{4001} = 0$ e portanto $g^{(4001)}(0) = 0$.
Finalmente $(f+g)^{(4001)}(0) = f^{(4001)}(0) + g^{(4001)}(0) = 2(4001)!\mathrm{i}$.

[1,0 val.] 5. Seja $C_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = R \text{ e } \operatorname{Im}(z) \geq 0 \text{ e } \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$. Mostre que

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{\mathrm{i}z^2}}{z^3} \, dz \right| \leq \frac{\pi}{2R^2}.$$

Resolução: Se $z \in C_R$, z pertence ao primeiro quadrante e portanto z^2 tem a sua parte imaginária $2xy$ maior ou igual a zero. Escrevendo $z^2 = a + ib$ tem-se então $b \geq 0$ e portanto

$$\left| e^{\mathrm{i}z^2} \right| = \left| e^{\mathrm{i}(a+\mathrm{i}b)} \right| = \left| e^{-b+\mathrm{i}a} \right| = e^{-b} \leq 1.$$

Pela desigualdade triangular tem-se então

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz^2}}{z^3} \, dz \right| &\leq \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|}{|z|^3} ds \\ &\leq \int_{C_R} \frac{1}{R^3} ds = \frac{\pi}{2} R \frac{1}{R^3} = \frac{\pi}{2R^2} \end{aligned}$$

conforme pretendido.