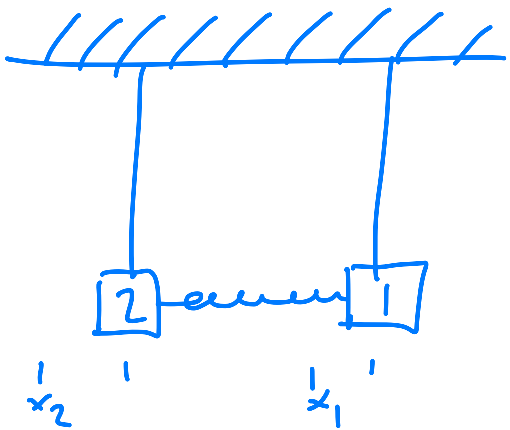
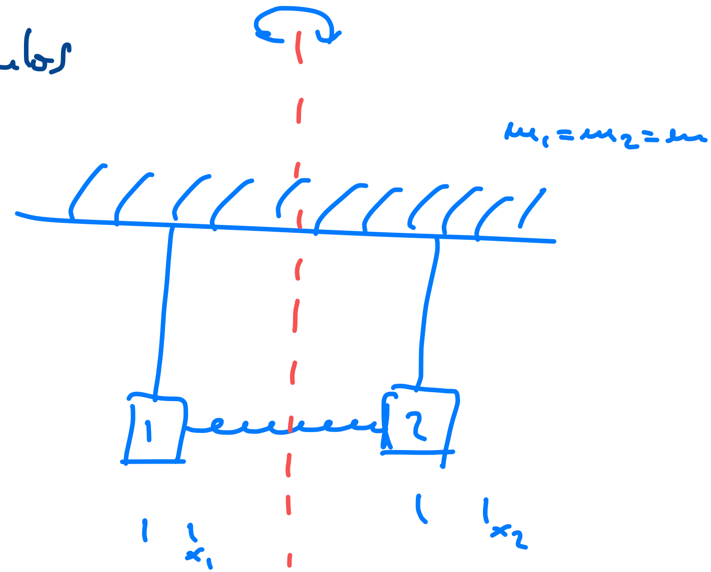
24 Mar Osc Ord

# Simetrias

→ de volta aos pêndulos

reflexão




Simetria

$x_1 \longrightarrow -x_2$

$x_2 \longrightarrow -x_1$

} modo normal

verificar vas eqs. do ensov

$$m \frac{d^2x_1}{dt^2} = -K_{11}x_1 - K_{12}x_2$$

$K_{12} = K_{21}$

$$-m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -K_{11}(-x_2) - K_{12}(-x_1)$$

$x_1 \longrightarrow -x_2$

$x_2 \longrightarrow -x_1$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\cancel{K_{11}}x_2 - \cancel{K_{12}}x_1$$

$K_{22}$ $K_{21}$

$$m \frac{d^2x_2}{dt^2} = -K_{21}x_1 - K_{22}x_2$$

$\boxed{\text{se } m_1 = m_2, \; K_{11} = K_{22}}$

✓

$$\Rightarrow m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -K_{21}x_1 - K_{22}x_2$$

In una forma elegante:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{simmetria}} \tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} -x_2(t) \\ -x_1(t) \end{pmatrix}$$

soluzione $\qquad\qquad$ tb è soluzione

definisco una matrice di simmetria $S$ tale che

$$\boxed{\tilde{x}(t) = S\, x(t)}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

o sistema ser simétrico para $S'$ é o mesmo que dizer que

$$\Pi S' = S' \Pi$$

$$K S' = S' K$$

$S'$ (simetria) comuta com as matrizes $\Pi$ e $K$

ou seja,

$$S' \Pi \frac{d^2}{dt^2} x(t) = - S' K x(t)$$

$$\Pi S' \frac{d^2}{dt^2} x(t) = - K \underbrace{S x(t)}_{\tilde{x}} \Rightarrow \Pi \frac{d^2}{dt} \tilde{x}(t) = - K \tilde{x}(t)$$

indep. do tempo

resultado para usar mais tarde

$$\Pi S = S \Pi \iff \underbrace{\Pi^{-1}\Pi}_{1} S\, \Pi^{-1} = \Pi^{-1} S \underbrace{\Pi\, \Pi^{-1}}_{1}$$

$$\iff S\Pi^{-1} = \Pi^{-1} S$$

$$KS = SK \iff \Pi^{-1} K S = \Pi^{-1} S K = S \Pi^{-1} K$$

$$\iff (\Pi^{-1}K)S = S(\Pi^{-1}K)$$

$(\Pi^{-1}K)$ e $S$ comutam $\longrightarrow$ têm os mesmos vectores próprios

Como é que isto ajuda na determinação de modos normais?

Se $x(t) = A' \cos(\omega_1 t)$ for um modo normal

então

$$\tilde{x}(t) = S\, x(t)$$ por simetria também

é uma solução com a mesma dependência temporal (mesma frequência) $\longrightarrow$ logo $\tilde{x}(t)$ é proporcional a $x(t)$

$$\tilde{x}(t) \propto A' \cos(\omega_1 t)$$

$$\Rightarrow S A' \cancel{\cos(\omega_1 t)} \propto A' \cancel{\cos(\omega_1 t)}$$

$\Rightarrow \quad S A' \propto A'$ os modos normais tb são vectores próprios de $S$

Por sanidade vamos verificar q/ as soluções que conhecemos para os pêndulos acoplados

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$SA^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -A^1$$

vector próprio de S com valor próprio $-1$

$$SA^2 = \dots = A^2$$

vector próprio de S com valor próprio $+1$

Agora a gente interessante

vetores próprios da matriz de simetria (se todos os valores próprios forem diferentes)

muito mais simples que $\Pi^{-1}K$

SÃO os modos normais do sistema

para os "nossos" sistemas sempre verdade

Se $A^n$ são os vetores próprios de $S$ com valores próprios $\beta_n$, então

$$SA^n = \beta_n A^n, \quad \text{com } \beta_n \neq \beta_m \text{ para } n \neq m$$

então $A^n$ são os modos normais

Dois simples problemas

(encontrar valores e vetores próprios)

$$\boxed{S A^n = \beta_n A^n}$$

simétrica

de que

$$\boxed{M^{-1} K A^n = \omega_n^2 A^n}$$

Ainda melhor: os valores próprios / $\beta_n$ podem ser determinados sem calcular o determinante recorrendo apenas às simetrias

Como? (exemplo) ↳ simetria de reflexão nos pêndulos acoplados.

aplicação 2 vezes volta ao início

$$S'S' = \mathbb{1} \Rightarrow S'^2 = \mathbb{1}$$

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo

$$S A^u = \beta_u A^u \implies \underbrace{S\, S}_{S^2 = 1\!\!1} A^u = S \beta_u A^u$$

$$\implies A^u = \beta_u \underbrace{S A^u}_{\beta_u A^u} = \beta_u^2 A^u$$

$$\implies \beta_u^2 = 1 \implies \boxed{\beta_u = \pm 1}$$

# Resumo

(1) determinar vals. próprios de $S$ a partir de

$$SA^n = \beta_n A^n$$

por aplicação repetida de $S$

$$\boxed{\beta_n}$$

(2) determinar $A^n$ (que são os modos normais) a partir de

$$SA^n = \beta_n A^n$$

$$\boxed{A^n}$$

(3) subst. os $A^n$ em

$$M^{-1} K A^n = \omega_n^2 A^n$$

para determinar os $\omega_n^2$

$$\boxed{\omega_n}$$

Exemplo (cão trivial)

[ livro pg. 100 ]

→ pequenos polígonos (o problema é linear) apenas no plano do papel

→ todos os ângulos e lados são iguais

→ lâminas espaçadas por 60°

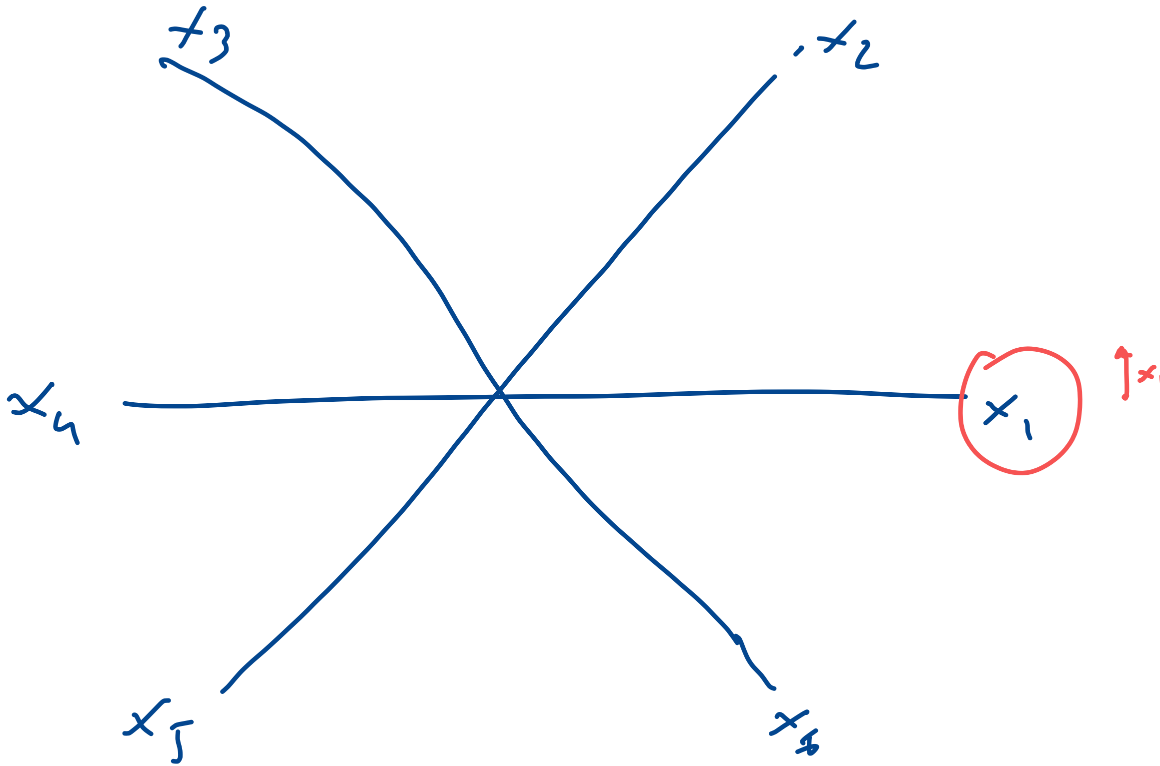
# Escrever eqs. do movimento

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = 1/m\, \mathbb{1} \qquad K = \begin{pmatrix} E & -B & -C & -D & -C & -B \\ -B & E & -B & -C & -D & -C \\ -C & -B & E & -B & -C & -D \\ -D & -C & -B & E & -B & -C \\ -C & -D & -C & -B & E & -B \\ -B & -C & -D & -C & -B & E \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d^2X}{dt^2} = -M^{-1} K X}$$

estrutura é determinada pela simetria

NÃO É FÁCIL



$x_3$
$x_2$
$x_4$
$x_1$
$x_5$
$x_6$

rotação por $60^\circ$ não altera nada

$\Rightarrow$ simetria do sistema

$\downarrow$

mud. cíclica de variáveis

$$x_1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow x_3 \longrightarrow x_4 \longrightarrow x_5 \longrightarrow x_6 \longrightarrow x_1$$

$$x \longrightarrow Sx$$

logo

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & 1\to 2 & & & & \end{array} \\ S = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$6 \to 1$

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

logo,

$$SA = \beta A$$

$$S^5(SA) = S^5(\beta A)$$

$$\Rightarrow S^6 A = \beta S^5 A$$

$$\Rightarrow \mathbb{1} A = \beta S^4 (\overbrace{SA}^{\beta A})$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \beta^6 A}$$

6 rotações de 60° são a identidade

$$S^6 = \mathbb{1}$$

$$SSSSSSx = x$$

$$\boxed{\beta^6 = 1}$$

6 raízes complexas

$$\beta = \beta_k = e^{i 2\pi k/6}$$

etiqueta

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Para cada $k$ tenho um modo normal!

$$SA^k = \beta_k A^k$$

↓ modo normal 'k'

$$\begin{pmatrix} A_2^k \\ A_3^k \\ A_4^k \\ A_5^k \\ A_6^k \\ A_1^k \end{pmatrix} = \beta_k \begin{pmatrix} A_1^k \\ A_2^k \\ A_3^k \\ A_4^k \\ A_5^k \\ A_6^k \end{pmatrix}$$

$A_1^k \to$ componente

uma comp. de um vector próprio é arbitrária

→ escolher $A_1^k = 1$

$$\boxed{A_j^k = (\beta_k)^{j-1}} \Leftarrow \begin{cases} A_1^k = 1 \\ A_2^k = \beta_k A_1^k = \beta_k \\ A_3^k = \beta_k A_2^k = \beta_k^2 \\ \vdots \end{cases}$$

ou seja, os modos normais para $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$

$$\begin{pmatrix} A_1^k \\ A_2^k \\ A_3^k \\ A_4^k \\ A_5^k \\ A_6^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2ik\pi/6} \\ e^{4ik\pi/6} \\ e^{6ik\pi/6} \\ e^{8ik\pi/6} \\ e^{10ik\pi/6} \end{pmatrix}$$