



Experiência de Thomson. Determinação experimental da relação q/m do electrão

1 OBJECTIVO DO TRABALHO

Pretende-se com este trabalho determinar a relação entre a carga e a massa (q/m) do electrão. Para esse fim, vamos estudar a deflexão de um feixe de raios catódicos sob o efeito simultâneo de um campo eléctrico e de um campo magnético.

Os raios catódicos foram descobertos em 1879 por William Crookes (1832–1919), mas foi Sir J. J. Thomson¹ (1856–1940) que, em 1897, relatou as experiências por si realizadas e que permitiram determinar o valor daquela relação. Além disso, estas experiências provaram que os raios catódicos são constituídos por partículas de carga negativa, desde então designadas por electrões. Neste trabalho iremos reproduzir aproximadamente a experiência de Thomson.

2 INTRODUÇÃO TEÓRICA

2.1 Conceitos necessários:

1. Força eléctrica. Campo eléctrico (Electrostático).
2. Potencial eléctrico. Equipotencial. Energia potencial eléctrica.
3. Condutores e dieléctricos. Condensador plano.
4. Efeitos da corrente eléctrica estacionária criada por uma espira.
5. Força de Lorentz e Laplace.

2.2 Campo electrostático

Define-se como sendo o campo eléctrico criado por uma distribuição de cargas que *não evolui no tempo*. Considere-se por exemplo o par de cargas q_1 e q_2 imersas no vácuo, à distância r_{12} , e situadas respetivamente em P_1 e P_2 , conforme ilustrado na Fig. 1. A força eléctrica que sofre q_1 no ponto P_1 devido a q_2 em P_2 à distância r_{12} é

$$\vec{F}_{P_1, q_1}(q_2, r_{12}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{r, P_1} = -\vec{F}_{P_2, q_2}(q_1, r_{12}) \quad (1)$$

em que ϵ_0 é designada por constante dieléctrica ou permitividade eléctrica do vazio ($\epsilon_0 \simeq 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m) e \vec{u}_{r, P_1} é o *versor* da distância r_{12} no ponto P_1 (vector unitário)

¹Prémio Nobel da Física de 1906, em reconhecimento dos seus trabalhos teóricos e experimentais na condução da electricidade em gases.

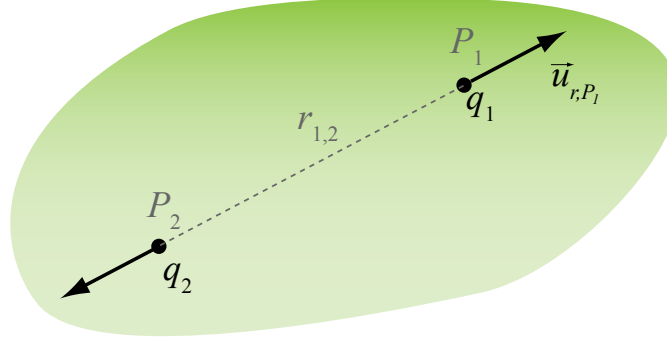


Figura 1: Definição dos termos para a geometria de duas cargas.

dirigido de P_2 para P_1 , ver figura).

Define-se campo eléctrico \vec{E} num ponto P , criado por uma carga q_1 à distância r , como a força eléctrica que se exerce em P devido à carga q_1 sobre uma carga de prova ou teste, suposta unitária e positiva:

$$\vec{E}_P(q_1, r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{r,P} \quad (2)$$

As linhas de força eléctrica geradas por q_1 são radiais e dirigidas para o exterior, se $q_1 > 0$, ou para a origem, se $q_1 < 0$. Se se colocasse em P a carga q , a força eléctrica a que esta carga ficaria submetida devido a q_1 seria $\vec{F}_{P,q}(q_1, r) = q\vec{E}$, ou mais simplesmente:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (3)$$

A expressão “campo eléctrico” também define a região do espaço onde se fazem sentir as acções eléctricas.

2.3 Potencial eléctrico

O campo eléctrico e a força eléctrica, que são entidades vectoriais, podem também ser calculadas a partir de uma entidade capaz de descrever o campo mas de natureza escalar, o potencial eléctrico V . Para a situação referida acima, o potencial eléctrico criado no ponto P à distância r da carga q_1 é calculado por:

$$V_P(q_1, r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4)$$

No caso de uma distribuição de n cargas eléctricas q_i à distância r_i do ponto P onde se pretende calcular o campo eléctrico e o potencial, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{E}_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i,P} \right) \\ V_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{r_i} \right) \end{aligned}$$

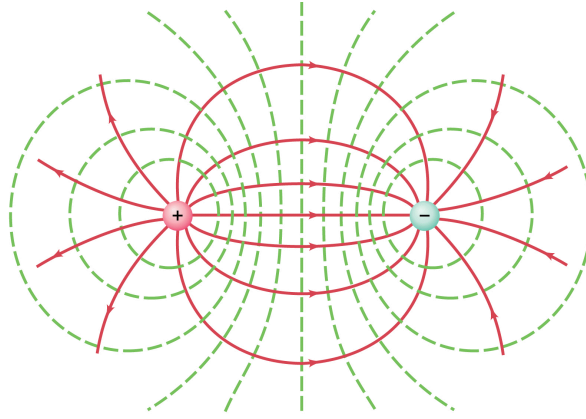


Figura 2: Linhas de força (a vermelho) e superfícies equipotenciais (a verde) de duas cargas simétricas.

Recorde-se que se se considera uma única carga q_1 positiva, as linhas de força eléctricas são radiais e dirigidas para o exterior. Essas linhas de força são perpendiculares às *superfícies equipotenciais*, que são esféricas ($r = \text{c.}^{\text{te}}$ na equação 4) e concêntricas com as cargas. Atendendo a (4) para dois raios r_1 e r_2 tal que $r_2 > r_1$ temos $V(r_2) < V(r_1)$, e portanto as linhas de força dirigem-se para os potenciais decrescentes.

Considere-se agora o caso de duas cargas $q_1 > 0$ e $q_2 < 0$. Enquanto estiverem muito afastadas uma da outra, produzem campos radiais, respetivamente divergindo e convergindo. Se forem colocadas suficientemente próximas, as linhas de força vão sofrer a influência de ambas as cargas. Nesse caso, há uma única linha de força que é linear, dirigida de q_1 para q_2 . Todas as outras, que na vizinhança próxima de cada carga são radiais, acabam por infletir, dirigindo-se de q_1 para q_2 . A figura das linhas de força tem simetria de revolução em torno do eixo que contém q_1 e q_2 e é esquematicamente a indicada na figura 2. Se o valor absoluto das duas cargas for o mesmo a figura é simétrica em relação ao plano mediatriz das cargas q_1 e q_2 ².

Se se calcular a diferença de potencial entre dois pontos infinitamente próximos P e $P + dP$ devida a uma carga q_1 à distância r e $r + dr$ respetivamente, a variação elementar do potencial V será:

$$\begin{aligned} dV &= V_{P+dP} - V_P = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{r+dr} - \frac{1}{r} \right) \\ &\approx \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{dr}{r^2} \right) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (5)$$

Esta quantidade representa o trabalho elementar (energia) associado ao deslocamento da carga teste ($q_t = 1 \text{ C}$), de P para $P + dP$. Para $q_1 > 0$, \vec{E} e $d\vec{r}$ são paralelos e $dV < 0$. Isto significa que não será necessário fornecer energia para realizar esse transporte. De facto, afastar a carga teste da carga q_1 (i.e. ir de P para $P + dP$) leva a uma configuração de cargas (q_1 e q_t) energeticamente mais favorável³.

²Para mais exemplos ver <http://www.flashphysics.org/electricField.html>

³Recorde-se que para um campo conservativo o trabalho realizado (que não depende do percurso mas só dos pontos inicial e final) tem um valor simétrico da variação de energia potencial.

No caso de uma diferença finita de potencial, isto é de uma diferença de potencial entre dois pontos P e Q , ter-se-á que somar um número infinito de contribuições infinitesimais $dV_i = -\vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i$ no intervalo de P a Q :

$$V_Q - V_P = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n dV_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \underbrace{(-\vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i)}_{\overline{PQ}} \rightarrow \int -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (6)$$

$$V_P - V_Q = \int_{PQ} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

e porque \vec{E} (campo electrostático) é um campo conservativo, este integral não vai depender do percurso mas apenas dos pontos extremos, i.e.

$$V_P - V_Q = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

No caso particular de E ser homogéneo (por exemplo no interior de um condensador plano) na região onde se situam os pontos P e Q , afastados de uma distância D , obtém-se

$$V_P - V_Q = \vec{E} \cdot \vec{PQ} = E \cdot D \quad (7)$$

Para se compreender o significado físico de V_P , imagine-se que Q é um ponto infinitamente afastado da região em que se faz sentir o campo eléctrico \vec{E} . Nesse ponto, $r \rightarrow \infty$ e $V_Q = 0$, obtendo-se $V_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r}$, que permite a seguinte interpretação:

O potencial eléctrico V_P é a energia necessária para transportar a carga-teste, sob acção de \vec{E} , desde o ponto P até uma distância suficientemente grande tal que o campo eléctrico não se faça sentir.

Assim, V tem sempre o significado de uma diferença de potencial.

2.4 Energia electrostática

A energia associada a uma configuração de cargas q_1 e q_2 , à distância r , é dada por:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = q_1 V_1 = q_2 V_2 = \frac{q_1 V_1 + q_2 V_2}{2} \quad (8)$$

em que V_1 é o potencial no ponto P_1 criado pela carga q_2 , e V_2 é o potencial no ponto P_2 criado pela carga q_1 .

Recordando a definição do potencial criado por n cargas eléctricas, podemos generalizar a equação (8) na seguinte forma:

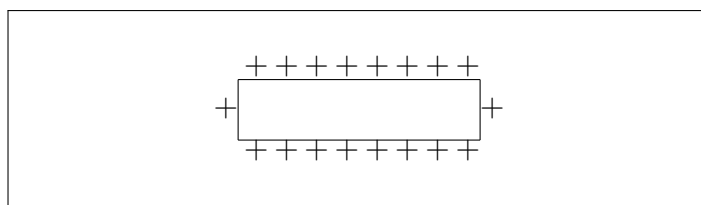
$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j \neq i}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad (9)$$

que corresponde à energia necessária para criar a distribuição de cargas q_i . A energia W_E é uma energia potencial porque está associada às posições que as diferentes cargas ocupam, podendo ser recuperada se as cargas se afastarem umas das outras até distâncias $r \rightarrow \infty$.

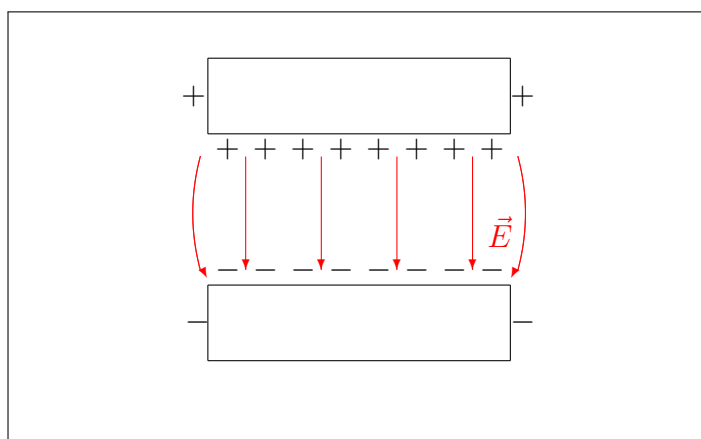
2.5 Condutores eléctricos e dieléctricos. Condensador plano

Um material é um *condutor eléctrico ideal* se as cargas eléctricas do mesmo sinal em excesso (que o carregam) são livres de se movimentarem no seu interior e à sua superfície. Quando pelo contrário isso não acontece, estamos perante um *dieléctrico*.

Assim, se carregarmos um condutor com uma carga total Q (se $Q > 0$, significa que se retiram electrões ao condutor inicialmente neutro) essas cargas, todas do mesmo sinal, vão acomodar-se logo que se atinja o equilíbrio electrostático, em posições que são o mais afastadas possíveis umas das outras – ou seja, na superfície exterior do condutor, formando uma “folha” de carga. Pode mostrar-se que \vec{E} no interior do condutor é nulo (enquanto que num dieléctrico $\vec{E} \neq \vec{0}$), e que a superfície do condutor é uma *equipotencial*: logo, as linhas de força eléctricas são-lhe perpendiculares. Quando um material é carregado, a velocidade com que essas cargas se transferem de todo o volume do condutor para a superfície depende da sua condutividade. Se se considerar um condutor carregado, com geometria plana (uma placa), a carga vai distribuir-se sobre a superfície (ver ilustração em baixo).



Ao colocar-se em frente uma placa idêntica, mas de carga simétrica, haverá uma redistribuição de carga que produz um campo eléctrico tal como ilustrado em baixo. Na região central, as linhas de força são paralelas entre si e o campo eléctrico é homogéneo. Nas extremidades as linhas de força emergem perpendicularmente à superfície mas encurvam, deixando de ser lineares. Esta geometria e distribuição de carga são características de um *condensador plano*. A diferença de potencial entre as duas placas, afastadas de D , corresponde a $(V_+ - V_-) = E \cdot D$, pois \vec{E} é homogéneo (eq. 7).



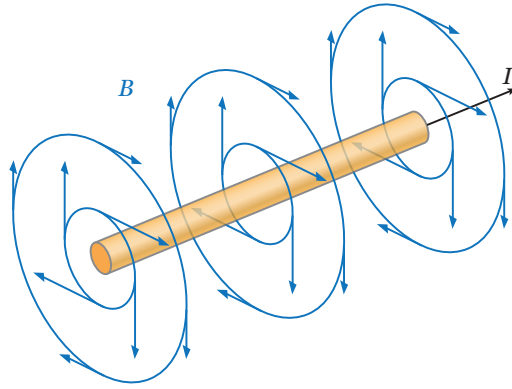
Pode mostrar-se que \vec{E} fica confinado à região entre as placas. Se o condensador fosse infinito (sem extremidades) teríamos três regiões, as duas exteriores ao condensador, onde o campo \vec{E} é nulo, e entre as placas do condensador (também designadas por armaduras), onde o campo seria homogéneo.

2.6 Efeitos da corrente eléctrica estacionária criada por uma espira

A passagem da *corrente eléctrica estacionária* (i.e. cuja intensidade não varia no tempo) por um condutor cria um campo magnético \vec{B} , além de produzir calor por efeito de Joule. As *linhas de força magnética* produzidas por um fio condutor linear são circulares e concêntricas com o condutor (ver figura). O módulo de B num ponto a uma distância r do fio (medida na perpendicular ao fio) é

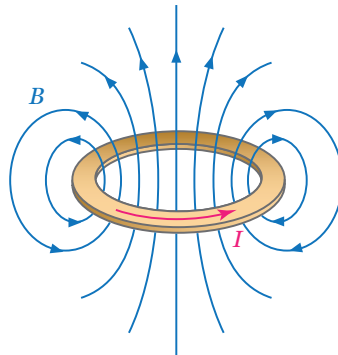
$$|\vec{B}_{\text{fio}}| = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \quad (10)$$

em que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m é a *permeabilidade magnética* do vazio.



No caso de uma espira⁴ circular, é criado um campo magnético cujas linhas de força são curvas fora do seu eixo e lineares apenas ao longo do eixo. Pode provar-se que o campo magnético criado por uma espira de raio r , percorrida por uma corrente de intensidade I , tem linhas de força fechadas⁵, ao contrário das linhas de força eléctricas. Isto coloca em evidência que \vec{B} nos pontos do plano da espira, mas exteriores a esta, é antiparalelo a \vec{B} no eixo da espira (ver figura). O módulo de \vec{B} num ponto do eixo é dado por

$$|\vec{B}_{\text{fig5-espira}}| = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3 \alpha \quad (11)$$



⁴Termo que designa um circuito eléctrico fechado

⁵Mesmo aquelas que só *fecham* no infinito

3 Figuras dos aparelhos da montagem experimental

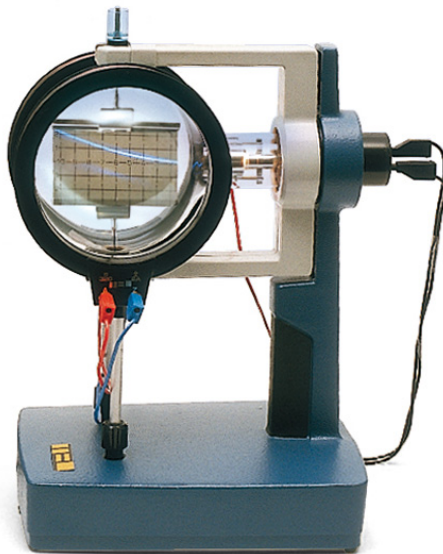


Figura 3: Montagem da Experiência de Thomson com tubo de raios catódicos, suporte e par de bobines de Helmholtz.

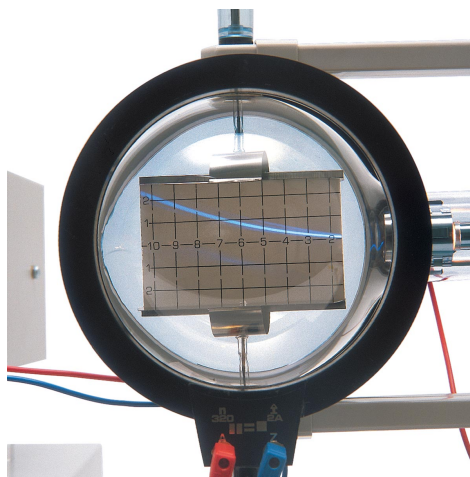


Figura 4: Trajectória dos electrões sujeitos a um campo magnético perpendicular.

4 Procedimento Experimental

Material

- Ampola (tubo) de raios catódicos (TRC), modelo TEL 525.
- Fonte de alimentação do TRC, que inclui alimentação de alta tensão contínua (até 5000 V) aplicada aos eléctrodos (cátodo e ânodo) do TRC e alimentação de baixa tensão (6.3 V AC) para o filamento do TRC.
- Par de bobinas que envolvem a parte esférica do TRC na configuração de Helmholtz (para criar um campo magnético aproximadamente homogêneo na região central entre as bobinas, de raio médio r , e afastadas de r uma da outra).
- Fonte de alimentação de corrente **contínua** (em modo DC) para as bobinas.
- Multímetro (como amperímetro) a instalar em **série** no circuito das bobinas.

O tubo TRC tem um filamento alimentado por 6.3 V (em modo AC). Este filamento emite electrões por efeito termiónico. Entre o ânodo e o cátodo do tubo estabelecem-se diferenças de potencial $(V_+ - V_-) = U_a$. Os electrões são acelerados entre o cátodo e o ânodo e a sua velocidade à saída do ânodo é função de U_a .

Ao entrarem na parte esférica do tubo, os electrões podem ser deflectidos por *campos magnéticos* provocados por correntes que percorrem as bobinas de Helmholtz e/ou por *campos eléctricos* devidos à aplicação de tensão entre duas placas paralelas ligadas aos pontos 1 e 2 do diagrama (Fig. 5).

O campo de indução magnética B devido às bobinas de Helmholtz é aproximadamente uniforme na região central entre as bobinas, e para uma corrente I é dado por⁶:

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \cdot \frac{\mu_0 n I}{r} = \frac{32\pi n}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{I}{r} \cdot 10^{-7} \text{ Weber/m}^2 \quad \begin{aligned} n &= 320 \text{ espiras} \\ r &= 0.068 \text{ m} \\ r &= d/2 \end{aligned} \quad (12)$$

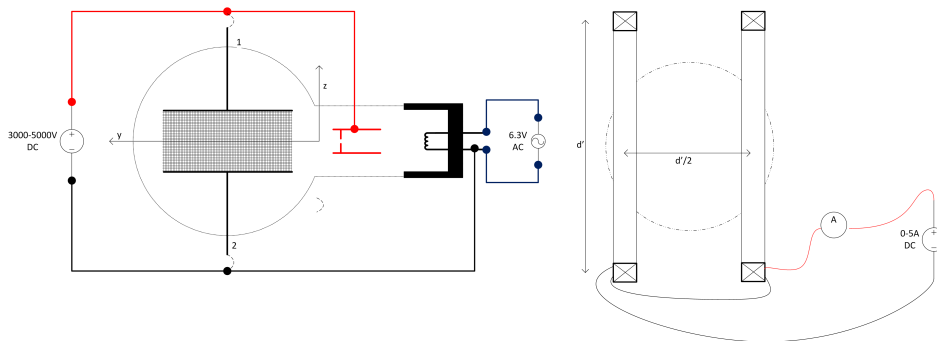


Figura 5: Diagrama do tubo utilizado e geometria das bobinas de Helmholtz

⁶No sistema SI, a unidade de campo magnético é o Tesla (T), sendo $1 \text{ T} = 1 \text{ Weber/m}^2$.

4.1 DETERMINAÇÃO DE q/m POR DEFLEXÃO MAGNÉTICA

4.1.1 Trajectórias de partículas carregadas sujeitas a um campo magnético constante

Quando se aplica uma tensão U_a entre o ânodo e o cátodo (sem aplicar tensão entre os pontos 1 e 2 representados na Fig. 5), pode admitir-se que a velocidade final v dos electrões ao abandonarem o ânodo é dada pela seguinte expressão

$$q U_a = \frac{1}{2} m v^2 \quad (13)$$

em que q é a carga do electrão e m a sua massa.

Ao chegarem à parte esférica do tubo os electrões são deflectidos pelo campo magnético \vec{B} (com $\vec{B} \perp \vec{v}$) e a sua trajectória é circular de raio R , verificando-se:

$$B q v = \frac{m v^2}{R} \quad (14)$$

As trajectórias dos electrões podem ser visualizadas numa escala graduada feita de material fluorescente. A origem do reticulado está situada aproximadamente no início da zona sujeita ao campo \vec{B} . Combinando (13) e (14) obtém-se uma expressão para a relação q/m :

$$\frac{q}{m} = \frac{2 U_a}{B^2 R^2} \quad (15)$$

em que:

U_a – impõe-se e mede-se directamente no voltímetro da fonte.

B – calcula-se para a corrente I a partir da expressão (12).

R – determina-se por leitura no écran fluorescente, das coordenadas de posição y (horizontal) e z (vertical) de pontos do feixe. Por construção do tubo verifica-se:

$$R = \frac{y^2 + z^2}{2z} \quad (16)$$

4.1.2 Modo de proceder

1. Montar os circuitos eléctricos de acordo com a Figura 5 (*não os ligue antes de serem verificados pelo Docente!*).
2. Observe qual é o valor máximo de tensão no gerador de alta tensão que dispõe. Escolha um valor ligeiramente inferior.
3. Ajustar a corrente das bobinas de Helmholtz I_+ de modo a que a circunferência passe por um ponto bem determinado⁷. Calcule R . Inverta o sentido da corrente e determine um novo I_- para o mesmo raio R . Tomando $I_{\text{medio}} = (I_+ + I_-)/2$ calcule o campo magnético B_{medio} . Utilize a semi-diferença, $(I_+ - I_-)/2$, para a estimativa das incertezas δI_{medio} e δB_{medio} .
4. Repita o ponto 2) para quatro novos valores de R .
5. Repetir 1), 2) e 3) e para os mesmos R , para dois valores inferiores de tensão, afastados por exemplo de 500 V entre si.

⁷Utilize de preferência os maiores valores possíveis para o raio R , de forma a que o feixe se encontre na zona central entre as bobines.

6. Apresente os valores de q/m para os 15 pares de determinações. Calcule a média desses valores, assim como a incerteza da média.
7. Para um dos pares de pontos estime a contribuição relativa das incertezas das grandezas que mediu para a incerteza total. Compare este erro assim calculado com a incerteza calculada a partir dos 15 valores calculados. Apresente para cada raio o valor de q/m assim como o erro associado a cada uma das determinações. Compare e comente os resultados.
8. Apresente um valor final para q/m . Estime a precisão e a exatidão obtida nas determinações que realizou.

4.2 DETERMINAÇÃO DE q/m POR DEFLEXÃO MAGNÉTICA E ELÉCTRICA QUASE COMPENSADA

4.2.1 Situação de equilíbrio entre as interacções eléctrica e magnética

Uma carga q animada de uma velocidade \vec{v} numa região em que existe um campo de indução \vec{B} e um campo eléctrico \vec{E} fica submetida a uma força de Lorentz⁸ \vec{F} dada por:

$$\vec{F} = q \vec{E} + q (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (17)$$

Se as duas forças se equilibrarem – ou seja, se forem de igual módulo e de sentidos opostos – a carga q não é desviada da sua trajectória. No nosso caso, em que $\vec{B} \perp \vec{v}$, a condição de equilíbrio é dada por:

$$|\vec{E}| = v |\vec{B}| \quad (18)$$

4.2.2 Montagem a efectuar

Aproveitando a montagem já efectuada no ponto anterior, ligue agora os terminais 1 e 2 (Fig. 5) à fonte de alta tensão que gera a tensão U_a , produzindo assim na região do écran fluorescente um campo eléctrico. Fazendo com que as bobinas sejam percorridas por uma corrente com intensidade e “sentido” convenientes, podemos obter uma força de origem magnética anti-paralela à provocada pelo campo \vec{E} . Deste modo, a trajectória visualizada no écran será aproximadamente retilínea, sendo a condição de equilíbrio dada por (18):

$$|\vec{E}| = v |\vec{B}| = \frac{U_a}{d} \quad (18a)$$

onde d é a distância entre as placas do écran fluorescente e U_a a tensão entre as mesmas, que é como se disse igual à tensão de aceleração.

A equação (18a) permite-nos calcular a velocidade dos electrões, uma vez que podemos conhecer os valores de todas as outras variáveis aí intervenientes. O conhecimento de v permite-nos calcular q/m tendo em conta que, segundo (13), deverá ser:

$$\frac{q}{m} = \frac{v^2}{2} \frac{1}{U_a} \quad (13a)$$

⁸Se a força for apenas de origem magnética, $\vec{F}_m = q (\vec{v} \times \vec{B})$, pode chamar-se também de *Laplace*

Ou finalmente, por combinação com (18a):

$$\frac{q}{m} = \frac{1}{2} \frac{U_a}{B^2 d^2} \quad (19)$$

4.2.3 Modo de proceder

1. Para cada uma das quatro tensões de trabalho U_a já referidas, aplicadas agora também às placas que produzem o campo eléctrico, determine o valor de B (a partir de I) que conduz ao anulamento das forças de origem eléctrica e magnética.
2. Inverta o sentido dos campos eléctricos e magnéticos e repita a determinação do valor de B .
3. Apresente os valores de q/m . Analise as diferentes contribuições para a incerteza total. Estime o valor da relação carga/massa do electrão, assim como a precisão e a exatidão obtida nas determinações que realizou.
4. Observe a trajectória quando as forças de origem eléctrica e magnética não se compensam. Comente.