Mecânica Analítica

2020-2021

Série 1

Responsável: Hugo Terças

Nesta série, exploramos os conceitos de ligação e alguns exemplos de problemas de cálculo variacional.

$\star$ **Problema 1. O disco que não desliza.** Considere um disco de raio a que rola, sem deslizar, sobre a superfície de uma mesa. Seja θ o ângulo definido entre o eixo de rotação e o eixo do x, e φ o ângulo de rotação em relação ao eixo do disco.

a) Mostre que as equações de ligação podem ser escritas na forma diferencial

$$g_i(x_j)dx_i = 0,$$

onde $x_i = \{x, y, \theta, \varphi\}$.

> O módulo da velocidade do disco (pense no ponto de contacto) é dado por $v = a\dot{\varphi}$ e, em relação aos eixos podemos escrever
>
> $$\begin{aligned} \dot{x} &= v \sin\theta \\ \dot{y} &= -v\cos\theta \end{aligned}$$
>
> combinando estas expressões chegamos a
>
> $$\begin{aligned} dx - a\sin\theta d\varphi = 0 &\Rightarrow g_x = 1, g_y = 0, g_\theta = 0, g_\varphi = -a\sin\theta \\ dy + a\cos\theta d\varphi = 0 &\Rightarrow g_x = 0, g_y = 1, g_\theta = 0, g_\varphi = a\cos\theta \end{aligned}$$

b) Uma ligação deste tipo será holónoma se uma função integranda do tipo $f(\{x_i\}) = 0$ existir para cada ligação, tornando g_i num diferencial exacto. Como sabe, tal acontece se

$$\frac{\partial(fg_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(fg_j)}{\partial x_i}.$$

Mostre que não existe nenhuma função f que satisfaça esta condição para quaisquer dos constrangimentos g_i. Conclua se a ligação é holónoma ou não-holónoma.

Procuramos uma função integranda f tal que

$$g_i dx_i = df \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$$

portanto a igualdade dada pode ser escrita

$$\frac{\partial (f g_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial (f g_j)}{\partial x_i} \iff g_i \frac{\partial f}{\partial x_j} + f \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = g_j \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \iff$$

$$\iff \cancel{g_i g_j} + f \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \cancel{g_j g_i} + f \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$$

Ora, por exemplo, para a primeira equação

$$\frac{\partial g_\varphi}{\partial \theta} = -a \cos\theta \text{ mas } \frac{\partial g_\theta}{\partial \varphi} = 0$$

e de forma semelhante para os restantes casos. Portanto, não se podem escrever estas ligações com um factor integrante f e, consequentemente estas ligações são não-holónomas.

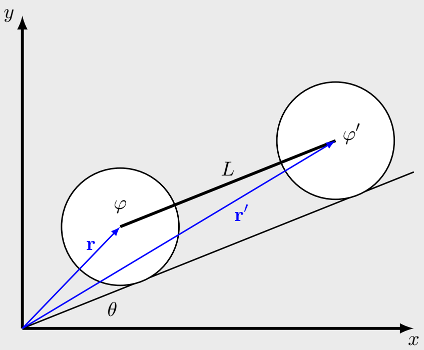
⋆⋆ **Problema 2. Duas rodas ligadas.** Considere duas rodas de raio a cujos eixos estão ligados através de uma barra de comprimento L, assumindo que as duas rodas podem girar de forma independente. Assuma, ainda, que o conjunto rola, sem deslizar, num plano de inclinação θ.

a) Denominando φ e φ' os ângulos de rotação de cada uma das rodas, mostre que existem duas equações de ligação não-holónomas que escrevem na forma

$$\cos\theta dx + \sin\theta dy = 0,$$

$$\sin\theta dx - \cos\theta dy = \frac{a}{2}\left(d\varphi + d\varphi'\right),$$

onde (x, y) são as coordenadas do ponto médio da barra.



Comecemos por definir os infinitésimos de deslocamento $d\mathbf{r}$ (para a roda mais próxima da origem) e $d\mathbf{r}'$ (para a mais afastada)

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= a d\varphi (\sin\theta \hat{\mathbf{x}} - \cos\theta \hat{\mathbf{y}}) \\ d\mathbf{r}' &= a d\varphi' (\sin\theta \hat{\mathbf{x}} - \cos\theta \hat{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

Usamos agora o facto de que a existência de uma barra de comprimento L implica a seguinte ralação em $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ e a posição do centro de massa (x, y)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \left(x - \frac{L}{2}\cos\theta, y - \frac{L}{2}\sin\theta\right) \\ \mathbf{r}' &= \left(x + \frac{L}{2}\cos\theta, y + \frac{L}{2}\sin\theta\right) \end{aligned}$$

igualando componente a componente

$$
\begin{align}
dx + \frac{L}{2}\sin\theta d\theta &= ad\varphi\sin\theta \tag{1}\\
dx - \frac{L}{2}\sin\theta d\theta &= ad\varphi'\sin\theta \tag{2}\\
dy - \frac{L}{2}\cos\theta d\theta &= -ad\varphi\cos\theta \tag{3}\\
dy + \frac{L}{2}\cos\theta d\theta &= -ad\varphi'\cos\theta \tag{4}
\end{align}
$$

multiplicando (1) por $\cos\theta$ e (3) por $\sin\theta$ e somando, obtemos

$$
\begin{aligned}
dx\cos\theta + \cancel{\frac{L}{2}\sin\theta\cos\theta d\theta} + dy\sin\theta - \cancel{\frac{L}{2}\cos\theta\sin\theta d\theta} =\\
= \cancel{ad\varphi\sin\theta\cos\theta - ad\varphi\cos\theta\sin\theta} \iff\\
\iff \cos\theta dx + \sin\theta dy = 0
\end{aligned}
$$

somando agora (1) e (2) e da mesma forma (3) e (4) chegamos a

$$
\begin{align}
2dx &= a\sin\theta(d\varphi + d\varphi') \tag{5}\\
2dy &= -a\cos\theta(d\varphi + d\varphi') \tag{6}
\end{align}
$$

que multiplicando, respectivamente, por $\sin\theta$ e $-\cos\theta$

$$
\begin{align}
2\sin\theta dx &= a\sin^2\theta(d\varphi + d\varphi') \tag{7}\\
-2\cos\theta dy &= a\cos^2\theta(d\varphi + d\varphi') \tag{8}
\end{align}
$$

somando obtemos o que nos era pedido

$$\sin\theta dx - \cos\theta dy = \frac{a}{2}(d\varphi + d\varphi')$$

b) Obtenha ainda a ligação holónoma de equação

$$\theta = C - \frac{a}{L}\left(\varphi + \varphi'\right),$$

onde C é uma constante.

Para obtermos a equação holónoma façamos (1)-(2), i.e.

$$dx + \frac{L}{2}\sin\theta d\theta - dx + \frac{L}{2}\sin\theta d\theta = ad\varphi\sin\theta - ad\varphi'\sin\theta \iff$$
$$\iff L\sin\theta d\theta = a\sin\theta(d\varphi - d\varphi') \iff$$
$$\iff d\theta = \frac{a}{L}\theta(d\varphi - d\varphi') \iff$$
$$\iff \theta = \frac{a}{L}\theta(\varphi - \varphi') + c$$

⋆ **Problema 3. Partícula livre.** Determine as equações do movimento de uma partícula livre, a duas dimensões, em coordenadas polares, a partir das equações de Euler-Lagrange.

O lagrangeano de uma partícula livre é $L = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ em coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2$$

e portanto $L = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2)$. Assim, as equações de Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mr\dot{\theta}^2 - m\ddot{r} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \\ mr^2\dot{\theta} = const. \end{cases}$$

Conservação do momento angular!

⋆ **Problema 4. Força central.** Considere uma partícula a mover-se no plano (x, y), sujeita a uma força que está dirigida para a origem do referencial $O = (0, 0)$ e cuja magnitude é proporcional à distância, $F = -k\sqrt{x^2 + y^2}$ (com $k > 0$). Escreva o Lagrangiano e determine as equações do movimento:

(a) Em coordenadas cartesianas;

$$\mathbf{F} = -k\sqrt{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{r}} \iff \frac{\partial V}{\partial r} = -kr \iff V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -kx - m\ddot{x} = 0 \\ -ky - m\ddot{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y(t) = y_0\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

(b) Em coordenadas hiperbólicas definidas como:

$$2xy = \mu, \quad x^2 - y^2 = \lambda.$$

Repetindo o exercício para as coordenadas hiperbólicas

$$\begin{cases} \mu^2 = 4x^2y^2 \\ x^2 - y^2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{2} \end{cases}$$

escolhendo o ramo positivo das soluções obtêm-se as derivadas

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\dot{\lambda} + (\lambda\dot{\lambda} + \mu\dot{\mu})/\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{\sqrt{2\lambda + 2\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}} \\ \dot{y} = -\dfrac{\dot{\lambda} + (\lambda\dot{\lambda} + \mu\dot{\mu})/\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{\sqrt{2\lambda + 2\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}} \end{cases}$$

Para construir o lagrangeano interessam-nos termos para escrever a aenergia cinética $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ e a distância à origem $(x^2 + y^2)$

$$\begin{cases} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dfrac{1}{4}\dfrac{\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\lambda^2+\mu^2} \end{cases}$$

e portanto

$$L = \frac{1}{8}m\frac{\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} - \frac{1}{2}k\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$$

Nota que a transformação $\mu \leftrightarrow \lambda$ deixa o lagrageano invariante.
Calculemos então a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \iff \\ &\quad \iff -\frac{1}{2}k\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} - \frac{1}{8}m\lambda\frac{\dot{\lambda}^2+\dot{\mu}^2}{(\lambda^2+\mu^2)^{3/2}} - \frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{\lambda}}{4\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right] = 0 \iff \\ &\quad \iff -\frac{1}{2}\omega^2\lambda(\lambda^2+\mu^2) - \frac{\lambda}{8}(\dot{\lambda}^2+\dot{\mu}^2) - (\lambda^2+\mu^2)^{3/2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{\lambda}}{4\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right] = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

podemos agora usar a propriedada da isotropia $\mu \leftrightarrow \lambda$ para obter directamente a equação segundo μ

$$-\frac{1}{2}\omega^2\mu(\lambda^2+\mu^2) - \frac{\mu}{8}(\dot{\lambda}^2+\dot{\mu}^2) - (\lambda^2+\mu^2)^{3/2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{\mu}}{4\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right] = 0$$

⋆ **Problema 5. Coordenadas solidárias.** Em cosmologia, é comum introduzir-se as *coordenadas comóveis*, por forma a que as coordenadas de partículas que se afastam devido à expansão do Universo não dependam explicitamente do tempo, ou seja,

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{r}',$$

onde $\mathbf{r}(t)$ são as coordenadas inerciais e $\mathbf{r}'$ as coordenadas comóveis. Determine a equação do movimento para uma partícula a propagar-se neste sistema de coordenadas quando sujeita a um potencial $V(\mathbf{r}') = m\Phi(\mathbf{r}')$.

Comecemos por escrever o lagrangeano deste sistema nas coordenadas comóveis

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - m\Phi(\mathbf{r}') =$$
$$= \frac{1}{2}m\left[\frac{d}{dt}a(t)\mathbf{r}'\right]^2 - m\Phi(\mathbf{r}') =$$
$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{a}\mathbf{r}' + a\dot{\mathbf{r}}'\right]^2 - m\Phi(\mathbf{r}')$$

Passando às equações de movimento

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}'} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}'} = 0 \iff \cancel{m}\left(\dot{a}\mathbf{r}' + a\dot{\mathbf{r}}'\right)\dot{a} - \cancel{m}\boldsymbol{\nabla}'\Phi(\mathbf{r}') - \frac{d}{dt}\left(\cancel{m}\left(\dot{a}\mathbf{r}' + a\dot{\mathbf{r}}'\right)a\right) = 0 \iff$$
$$\iff \cancel{\dot{a}^2\mathbf{r}' + a\dot{a}\dot{\mathbf{r}}'} - \left(\ddot{a}\mathbf{r}' + \dot{a}\dot{\mathbf{r}}' + \dot{a}\dot{\mathbf{r}}' + a\ddot{\mathbf{r}}'\right)a - \cancel{\left(\dot{a}^2\mathbf{r}' + a\dot{a}\dot{\mathbf{r}}'\right)} - \boldsymbol{\nabla}'\Phi(\mathbf{r}') = 0 \iff$$
$$\iff \boldsymbol{\nabla}'\Phi(\mathbf{r}') + a\left(\ddot{a}\mathbf{r}' + 2\dot{a}\dot{\mathbf{r}}' + a\ddot{\mathbf{r}}'\right) = 0$$

ora isto é equivalente a

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi \Rightarrow \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

⋆ **Problema 6. O pêndulo simples.** Considere um pêndulo de massa m, ligado por um fio (sem massa) de comprimento ℓ a um ponto de rotação. Quais são as equações do movimento do pêndulo para pequenas oscilações? Resolva este problema pelo formalismo de Newton e convença-se de qual dos métodos prefere.

Pelo formalismo lagrangeano

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\theta$$

temos portanto um único grau de liberdade

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \iff -mg\ell\sin\theta - \frac{d}{dt}m\ell^2\dot{\theta} = 0 \iff \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

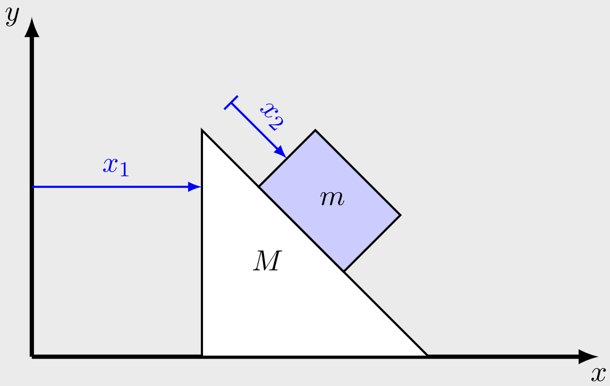
Usando agora o formalismo de Newton, sabemos que $\mathbf{T} + \mathbf{P} = m\mathbf{a}$

$$\begin{cases} |\mathbf{T}| = mg\cos\theta \\ mg\sin\theta = -ma_z \iff g\sin\theta = -\dfrac{d^2s}{dt^2} = \ell\ddot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

⋆⋆ **Problema 7. Caixa numa rampa móvel.** Considere uma caixa de massa m, deslizando, sem atrito, sobre a hipotenusa de uma rampa de massa M que faz um ângulo θ com a vertical. Assuma que a rampa também desliza sem atrito sobre a superfície da mesa.

(a) Defina as coordenadas generalizadas necessárias ao problema.

Definam-se as coordenadas generalizadas x_1 e x_2 como indicado no esquema seguinte



(b) Obtenha o Lagrangeano do sistema e escreva as equações do movimento.

$$L = T - V = T_m + T_M - V_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2 + 2\dot{x_1}\dot{x_2}\cos\theta\right)\frac{1}{2}M\dot{x_1}^2 + mgx_2\sin\theta$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x_1}} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x_2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[(M+m)\dot{x_1} + \dot{x_2}m\cos\theta\right] = 0 \\ \cancel{m}g\sin\theta - (\cancel{m}\ddot{x}_2 + \cancel{m}\ddot{x}_1\cos\theta) = 0 \end{cases}$$

(c) Identifique a(s) quantidade(s) conservada(s).

Da alínia anterior constatamos que $(M+m)\dot{x_1}+\dot{x_2}m\cos\theta$ é uma quantidade conservada, de facto corresponde à componente segundo x do momento do centro de massa. Isto permite-nos escrever

$$(M+m)\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 m\cos\theta = 0 \iff \ddot{x}_1 = -\frac{m}{m+M}\ddot{x}_2\cos\theta \tag{10}$$

(d) Determine a aceleração de cada uma das caixas.

Substituindo a quantidade conservada obtida anteriormente nas outra equações do movimento, leva a

$$g\sin\theta = \ddot{x}_2\left(1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\theta\right) \tag{11}$$

desta forma, as acelerações são então

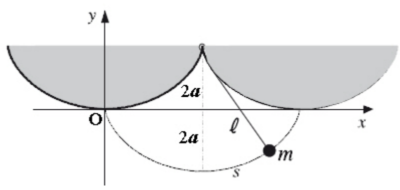
$$\ddot{x}_2 = g\frac{\sin\theta}{1 - \frac{m}{m+M}\cos^2\theta}$$

$$\ddot{x}_1 = -g\frac{\sin\theta}{\frac{m+M}{m} - \cos^2\theta}$$

$\star\star\star$ **O pêndulo de Huygens.** O pêndulo ciclóide foi inventado por Christian Huygens, um dos mais reputados relojoeiros do séc. XVII. A ideia principal era eliminar o assincronismo introduzido pelas engrenagens dos relógios. Assim, Huygens fez com que um pêndulo de massa m e comprimento $\ell = 4a$ se movimenta-se sobre uma ciclóide (ver Figura).

a) Comece por considerar a parametrização seguinte para a curva ciclóide,

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(\cos\theta - 1),$$



onde θ $(\theta/2)$ é o ângulo que parametriza a ciclóide (que o pêndulo faz com a vertical). Use a segunda Lei de Newton para mostrar que o pêndulo ciclóide obedece à seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\theta}{2} + \omega^2\cos\frac{\theta}{2} = 0,$$

onde $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Compare com a equação diferencial obtida para o pêndulo simples no problema anterior. O que é que podemos concluir imediatamente?

b) Faça uso do método variacional, i.e. expresse o elemento infinitesimal, para determinar a porção enrolada do pêndulo, $\lambda(\theta)$, e obtenha

$$\lambda(\theta) = \ell\left[1 - \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\right].$$

De seguida, escreva a equação para as coordenadas da massa m, X e Y, tendo em conta a fracção não enrolada do pêndulo tem comprimento $\ell - \lambda(\theta)$. Deverá, assim, obter

$$X = x + (\ell - \lambda)\cos\varphi, \quad Y = y + (\ell - \lambda)\sin\varphi,$$

onde φ é uma quantidade auxiliar definida como $\tan\varphi = dy/dx$.

c) Partindo do resultado anterior, defina o elemento de tempo $dt = d\theta/\dot{\theta}$ (prove!) e mostre que o período do pêndulo de Huygens é robusto a flutuações de ângulo, i.e., que o seu período é independente da amplitude de oscilação

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Não é fascinante?