Algumas propriedades físicas são caracterizadas por um número (normalmente real). Por exemplo a temperatura, cor ou massa. chamamos a estas quantidades físicas "escalares". Quando o escalar está definido em diferentes posições como a temperatura, dizemos que é um campo escalar $\psi(x^i)$

Um escalar é o mesmo em todas as coordenadas. se mudarmos de coordenadas $x^i = (x, y, z)$ ou (r, θ, ϕ) para $x'^i = (x', y', z')$ então

$$\psi(x^i) = \psi(x'^i(x^i))$$

Podemos tomar um campo escalar e construir uma quantidade que depende da direção, por exemplo o gradiente...

Vectores:

- Um vector é um objecto geométrico caracterizado por uma direcção e uma magnitude. Apesar de ser independente das coordenadas que escolhemos para o representar, em termos práticos é útil escolher uma representação.

Escolhamos uma base de 3 vectores unitários, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, ortogonais: $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

δ^{ij}

Podemos escrever

$$\vec{V} = V_1\vec{e_1} + V_2\vec{e_2} + V_3\vec{e_3} = \sum V_i^{i}\vec{e_i} \equiv V_i^{i}\vec{e_i} = V_j^{j} e_j$$

indice mudo

Esta* é a convenção de Einstein, que vamos adoptar.*

- Podemos fazer operações entre vectores, como por exemplo combiná-los num escalar. O produto interno faz isto,

$$\vec{V}\cdot\vec{U} = V_i\vec{e_i}\,u_j\vec{e_j} = V_i u_j\,\vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = V_i u_j \delta_{ij} \quad (1)$$

δ^{ij}

$$= V_i u_j$$

A magnitude de um vector $V^2 = \vec{V}\cdot\vec{V} = V_j V_j$

* Na convenção de Relatividade Geral, um indice nunca pode ocorrer mais do que 2 vezes e nunca na mesma posição (em baixo ou em cima). Não vamos respeitar o segundo ponto.

~~Mud~~

Mudemos de coordenadas e base ortonormal

$$\vec{v} = v_i \vec{e}_i \Rightarrow v_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i$$

$$= v_j' \vec{e}_j'$$

$$\Rightarrow v_i = v_j' \vec{e}_j' \cdot \vec{e}_i = a_{ij} v_j' \text{, com}$$

$$\boxed{a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j'}$$

Então,

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = a_{ij} v_j' \vec{e}_i \cdot a_{\ell m} u_m' \vec{e}_\ell \quad (2)$$

- Usando (1) e (2) é possível provar que

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \qquad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \qquad a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0$$

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \qquad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0$$

- Calcule a ~~[illegible]~~ matriz a_{ij} para a transformação de coordenadas cartesianas para esféricas e verifique as propriedades acima

Na realidade, as condições acima resumem a ortogonalidade da matriz [a], que pode ser escrita como a seguinte importante relação

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$$

Um vector pode, na realidade, também ser definido pela forma como se transforma sob uma rotação das coordenadas,

$v_i = a_{ij} v'_j$, ou invertendo

$v'_i = a_{ji} v_j$

Exemplo: cartesianas para polares

$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$

$\vec{e_r} = \vec{e_x}\cos\theta + \vec{e_y}\,\text{sen}\,\theta$

$\vec{e_\theta} = -\vec{e_x}\,\text{sen}\,\theta + \vec{e_y}\cos\theta$

$(x,y) \rightarrow (r,\theta)$

$a_{11} = \vec{e_1}\cdot\vec{e_1'} = \vec{e_x}\cdot\vec{e_r} = \cos\theta$

$a_{12} = \vec{e_1}\cdot\vec{e_2'} = \vec{e_x}\cdot\vec{e_\theta} = -\text{sen}\,\theta$

$a_{21} = \vec{e_2}\cdot\vec{e_1'} = \vec{e_y}\cdot\vec{e_r} = \text{sen}\,\theta$

$a_{22} = \vec{e_2}\cdot\vec{e_2'} = \vec{e_y}\cdot\vec{e_\theta} = \cos\theta$

Assim, para um vector $\vec{v}$

$v_r = a_{11} v_x + a_{21} v_y = \cos\theta\, v_x + \text{sen}\,\theta\, v_y$

$v_\theta = a_{12} v_x + a_{22} v_y = -\text{sen}\,\theta\, v_x + \cos\theta\, v_y$

ou $v_i = a_{ij} v_j'$, que leva a

$$v_x = a_{11} v_r + a_{12} v_\theta = \cos\theta\, v_r - \operatorname{sen}\theta\, v_\theta$$

$$v_y = a_{21} v_r + a_{22} v_\theta = \operatorname{sen}\theta\, v_r + \cos\theta\, v_\theta$$

Tensores

Um tensor de ordem (ou rank) N é uma função de N vectores. Como veremos é um objecto que transforma vectores em vectores, e pode ser definido pelas suas propriedades sob uma transformação de coordenadas. Podemos pensar na representação de tensores como uma matriz 3x3 [para vectores em 3 dimensões e tensores de ordem 2], caracterizada por $3^2 = 9$ números.

Um tensor de ordem N tem (N+1) invariantes associados aos valores próprios λ_i de

$$p(\lambda) = \det[T - \lambda I]$$

são os invariantes que caracterizam o objecto, tal como a direcção e magnitude caracterizam um vector. Os invariante são

$$I_1 = T_r[T] = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[[T_r(T)]^2 - T_r(T^2)\right] = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$$

$$I_3 = \det[T] = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$