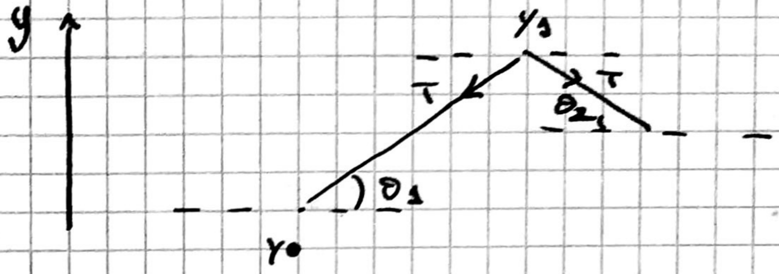
1

Avaliação 3

a) Começamos por derivar a força resultante a atuar numa missanga



$$\theta_1 \approx \frac{y_1 - y_0}{a} \qquad \theta_2 \approx \frac{y_1 - y_2}{a}$$ (para pequenos deslocamentos em y)

$$T_y \approx -T\,\text{sen}\,\theta_1 - T\,\text{sen}\,\theta_2 \approx$$

para ângulos pequenos

$$\approx -T\theta_1 - T\theta_2 = T\,\frac{y_0 + y_2 - 2y_1}{a}$$

Tomando y_0, chegamos às equações do movimento

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = T\,\dfrac{y_2 - y_1}{a} \\[2em] m\ddot{y}_2 = T\,\dfrac{y_1 - y_2}{a} \end{cases}$$

2.5

b) O sistema é invariante para a troca $1 \leftrightarrow 2$ logo a matriz de simetria do problema é dada por

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ e como $S^2 = \mathbb{1}_{2\times 2}$ concluimos

0.5

que os valores próprios da matriz de simetria são ± 1 com vectores próprios:

$\lambda = 1$, $v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ [redacted]

$\lambda = -1$, $v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ [redacted]

~~Por~~ Sabemos também que a matriz de simetria comuta com a matriz $M^{-1}K$ da equação do movimento e por isso as frequências normais associadas a cada modo normal podem ser calculadas através de

$$M^{-1} K \, v_+ = \omega_+^2 \, v_+$$
$$M^{-1} K \, v_- = \omega_-^2 \, v_-$$

Isto porque como as matrizes comutam os seus modos próprios são idênticos. [redacted] 1.5

Substituindo e fazendo a álgebra concluimos que:

$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\omega_+ = \omega_0 = \sqrt{\frac{T}{ma}}$ (corpos em fase e com a mesma amplitude de oscilação)

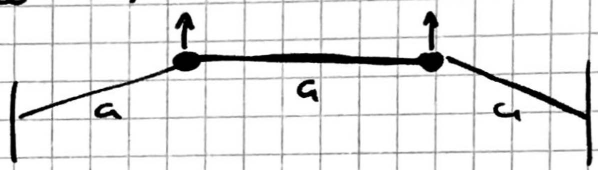
$v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\omega_- = \sqrt{3}\,\omega_0$

(corpos em ~~fa~~ oposição de fase e com a mesma amplitude de oscilação)

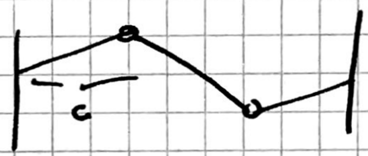
[redacted] 5.0

Representação esquemática (b.5) ③

Modo "+" $\omega_+ = \omega_0$



Modo "-" $\omega_- = \omega_0$



Resolução alternativa:

Escrever a matriz $M^{-1}K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \omega_0^2$

com $\ddot{x} = -M^{-1}Kx$ e resolver diretamente para os seus vetores próprios / modos normais.

c) O extremo direito move-se de acordo com $y(t) = \Delta\cos(\omega_d t)$

As equações do movimento tornam-se

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = T\dfrac{y_2 - 2y_1}{a} \\ m\ddot{y}_2 = T\dfrac{y_1 + \Delta\cos(\omega_d t) - 2y_2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 = \omega_0^2(y_2 - 2y_1) \\ \ddot{y}_2 = \omega_0^2(y_1 + \Delta\cos(\omega_d t) - 2y_2) \end{cases}$$

A solução estacionária é do tipo

$$\begin{cases} y_1 = A_1 \cos\omega_d t \\ y_2 = A_2 \cos\omega_d t \end{cases}$$ a oscilar à mesma frequência da força externa

Substituindo nas equações do movimento e resolvendo para as amplitudes chegamos a

$$\begin{cases} |A_1| = \dfrac{\Delta \omega_0^4}{|3\omega_0^4 - 4\omega_0^2\omega_d^2 + \omega_d^4|} \\[2ex] |A_2| = \dfrac{\Delta \omega_0^2\, |2\omega_0^2 - \omega_d^2|}{|3\omega_0^4 - 4\omega_0^2\omega_d^2 + \omega_d^4|} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |A_1| = \dfrac{\Delta \omega_0^4}{|(\omega_d^2 - \underbrace{\omega_0^2}_{\omega_+^2})(\omega_d^2 - \underbrace{3\omega_0^2}_{\omega_-^2})|} \\[2ex] |A_2| = \dfrac{\Delta \omega_0^4\, |2\omega_0^2 - \omega_d^2|}{|(\omega_d^2 - \underbrace{\omega_0^2}_{\omega_+^2})(\omega_d^2 - \underbrace{3\omega_0^2}_{\omega_-^2})|} \end{cases}$$ 7.5

Quando a frequência externa ω_d se aproxima de uma frequência própria do sistema, a amplitude do movimento diverge, ~~[illegible]~~ ou seja, ocorre uma ressonância. 2.0

Para além disso, quando $\omega_d \to \infty$, $|A_1|, |A_2| \to 0$ ~~[illegible]~~, ou seja, a frequência externa é demasiado alta para que o sistema consiga responder. 0.5