Matemática Computacional

(LEMat, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEQ)

Departamento de Matemática - Instituto Superior Técnico

1º Teste

12 de Novembro de 2018 (19h00-20h30)

1.[1.0] Considere a subtracção no método de Newton $x_n - y_n$, onde $y_n = f(x_n)/f'(x_n)$. Sendo $f(x) = 0$, analise o condicionamento nessa subtracção, quando $x_n \to x \neq 0$.

2. Considere a sucessão definida por $t_{n+1} = \sin(\cos(t_n))$, com $t_0 = 0$.

a)[1.5] Mostre que a sucessão converge para um valor $s \in [0, 1]$ tal que $\arcsin(s) = \cos(s)$.

b)[1.5] Determine n tal que o erro relativo de t_n seja inferior a 10^{-15}.

3. Pretende-se resolver a equação $x^3 = a^2 x + b$, para valores de $a \geq b > 0$.

a)[1.5] Mostre que há só uma raiz $z \in [a, a+1]$, e que o Método de Newton converge para z, considerando uma iterada inicial apropriada.

b)[1.0] Para $x_0 = a$, calcule x_1 pelo método de Newton. Com $a \geq 5$, $b = 1$, majore o erro absoluto.

c)[1.0] Para $x_0 = a = 5$, $b = 1$, calcule x_n pelo método de Newton tal que $|z - x_n| \leq 10^{-8}$.

4. Considere o sistema de 6 equações e 6 incógnitas:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + 9x_6 = 1 \\ x_{k-1} + 8x_k + x_{k+1} = 1 \qquad (k = 2, 3, 4, 5) \\ 9x_1 - x_3 + x_6 = 1 \end{cases}$$

a)[1.0] Mostre que é possível aproximar a solução $\mathbf{x}$ do sistema utilizando o Método de Gauss-Seidel aplicado a um sistema equivalente.

b)[1.5] Começando com iterada inicial nula, no método de Jacobi, obtenha n tal que

$$||\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}||_\infty < 2^{-12}.$$

Resolução

1. O mau condicionamento de $x_n - y_n$ só ocorre se $x_n \approx y_n$ mas como $x_n - y_n \to x \neq 0$ não há cancelamento subtractivo. Mais precisamente,

$$\delta_{\tilde{x}_n - \tilde{y}_n} = \frac{x_n}{x_n - y_n}\delta_{\tilde{x}_n} - \frac{y_n}{x_n - y_n}\delta_{\tilde{y}_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}}\delta_{\tilde{x}_n} - \frac{y_n}{x_{n+1}}\delta_{\tilde{y}_n} \approx \delta_{\tilde{x}_n}$$

porque

$$\frac{y_n}{x_{n+1}} \to \frac{0}{x} = 0,\ \frac{x_n}{x_{n+1}} \to \frac{x}{x} = 1,\ \text{se } x \neq 0.$$

2. (a) Verifiquemos as condições do Teorema do ponto fixo para $g(t) := \sin(\cos(t))$ no intervalo $[0, 1]$. Tem-se

$$g'(t) = -\sin(t)\cos(\cos(t)) \leq 0,\ \forall t \in [0, 1]$$

$$g''(t) = -\cos(t)\cos(\cos(t)) - \sin(t)^2 \sin(\cos(t)) < 0,\ \forall t \in [0, 1].$$

(i) Como g é decrescente em $[0, 1]$,

$$0 < \sin(\cos(1)) \leq g(t) \leq \sin(\cos(0)) = \sin(1) < 1,\ \forall t \in [0, 1],$$

pelo que $g([0, 1]) \subseteq [0, 1]$,
(ii) Como $|g'|$ é crescente em $[0, 1]$ temos

$$\max_{t \in [0,1]} |g'(t)| = |\sin(1)\cos(\cos(1))| \leq 0.722 < 1,\ \forall t \in [0, 1].$$

Conclui-se da existência e unicidade de $z \in [0, 1]$ tal que

$$z = g(z) \Leftrightarrow z = \sin(\cos(z) \Leftrightarrow \arcsin(z) = \cos(z)$$

e da convergência $t_n \to z$.

(b) Usamos $L = 0.722$. De $|e_n| \leq L^n |e_0|$ segue que

$$|\delta_{e_n}| \leq L^n |\delta_{e_0}| \leq 0.722^n |z - 0|/|z| = 0.722^n < 10^{-15}$$

quando

$$n\ \log(0.722) < -15 \log 10 \Leftrightarrow n > -15 \log 10 / \log(0.722) = 106.04..$$

ou seja, podemos tomar $n = 107$.

3. (a) Sendo $f(x) := x^3 - a^2 x - b$, temos

(i) $f(a) = -b < 0$,

$f(a+1) = (a+1)^3 - a^2(a+1) - b = (a+1)(2a+1) - b = 2a^2 + 3a + 1 - b > 0$;

(ii) $f'(x) = 3x^2 - a^2 \geq 3a^2 - a^2 = 2a^2 > 0$ porque $x \geq a$;

(iii) $f''(x) = 6x \geq 6a > 0$.

Assim, conclui-se a existência e unicidade de raiz em $[a, a+1]$ e ainda a convergência do Método de Newton quando $f(x_0) > 0$, portanto basta escolher $x_0 = a + 1$.

(b) Temos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{(-b)}{2a^2} = a + \frac{b}{2a^2}.$$

Como $\min_{[a,a+1]} |f'(x)| = f'(a) = 2a^2$ e

$$f(x_1) = a^3 + 3a^2 \frac{1}{2a^2} + 3a \frac{1}{4a^4} + \frac{1}{8a^6} - a^3 - a^2 \frac{1}{2a^2} - 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4a^3} + \frac{1}{8a^6} = \frac{3}{4a^3} + \frac{1}{8a^6}$$

conclui-se que

$$|e_1| = |z - x_1| \leq \frac{|f(x_1)|}{\min_{[a,a+1]} |f'(x)|} = \frac{\frac{3}{4a^3} + \frac{1}{8a^6}}{2a^2} \leq \frac{\frac{3}{4 \cdot 5^3} + \frac{1}{8 \cdot 5^6}}{2 \cdot 5^2} = 0.00012016$$

pois $a \geq 5$.

(c) Com $x_0 = 5$, tem-se

$$x_1 = 5 + \frac{1}{50} = 5.02$$

$$x_2 = 5.02 - \frac{f(5.02)}{f'(5.02)} = 5.01988126...$$

Quanto ao erro tem-se

$$|e_2| \leq \frac{\max_{x \in [5,6]} |f''(x)|}{2 \min_{x \in [5,6]} |f'(x)|} |e_1|^2 = \frac{6 \times 6}{2 \times 25} 0.00012016^2 = 1.03957 \times 10^{-8}.$$

4. (a) Para obter um sistema com matriz de diagonal estritamente dominante, devemos trocar a primeira e última linha. Neste caso o sistema matricial é definido por

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e como $9 > |-1|+1$, $8 > 1+1$, e $9 > |-1|+1$, a matriz tem a diagonal estritamente dominante e o método de Gauss-Seidel é convergente

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = \frac{1}{9}\left(1 + x_3^{(n)} - x_6^{(n)}\right), \\ x_k^{(n+1)} = \frac{1}{8}\left(1 - x_{k-1}^{(n+1)} - x_{k+1}^{(n)}\right), \ k = 2,3,4,5, \\ x_6^{(n+1)} = \frac{1}{9}\left(1 + x_1^{(n+1)} - x_3^{(n+1)}\right). \end{cases}$$

(b) No caso do método de Jacobi temos

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \tfrac{1}{9}\left(1 + x_3^{(0)} - x_6^{(0)}\right), \\ x_k^{(1)} &= \tfrac{1}{8}\left(1 - x_{k-1}^{(0)} - x_{k+1}^{(0)}\right), k = 2,3,4,5, \\ x_6^{(1)} &= \tfrac{1}{9}\left(1 + x_1^{(0)} - x_3^{(0)}\right), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{x}^{(1)} = (\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9})$ e assim $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \|\mathbf{x}^{(1)}\|_\infty = \frac{1}{8}$. Como

$$\|C\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}, \frac{1}{8}+\frac{1}{8}, \frac{1}{8}+\frac{1}{8}, \frac{1}{8}+\frac{1}{8}, \frac{1}{8}+\frac{1}{8}, \frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right\} = \frac{1}{4}$$

obtém-se

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}\|_\infty \leq \frac{\|C\|_\infty^n}{1 - \|C\|_\infty} ||\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}||_\infty \leq \frac{(\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} \frac{1}{8} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} < 2^{-2n-2}$$

o que permite tomar $n = 5$.