Matemática Computacional
MEBiol, MEBiom e MEFT
Aula 9 - Resolução numérica de sistemas de equações

Ana Leonor Silvestre

Instituto Superior Técnico, $1^{\underline{o}}$ *Semestre, 2020/2021*

Sumário da Aula 9

Cap. 3 - Resolução de Sistemas Lineares

- Normas matriciais.
- Influência dos erros de arredondamento/perturbações nos dados na resolução de sistemas lineares.
- Condicionamento de sistemas lineares.

Normas e espaços normados

Norma e espaço normado

$\mathbb{K}$ é um corpo de escalares, que será sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$

Definição

Uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ diz-se uma **norma** sobre E se

(i) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$,

(ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$,

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$.

Um espaço vetorial onde está definida uma norma diz-se um **espaço normado**, sendo habitual escrever $(E, \|\cdot\|)$.

Exemplos de normas sobre $\mathbb{R}^N$ (**normas vetoriais**)

(i) Normas$-p$ (para $p \geq 1$) $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ A norma $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ está associada ao produto interno $(x,y) := \sum_{i=1}^N x_i y_i = x \cdot y$, ou seja,

$$\|x\|^2 = (x,x).$$

É válida a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|(x,y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^N).$$

(ii) Norma do máximo $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$.

(iii) Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^N$ e $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ uma matriz não-singular. Então $x \mapsto \|Ax\|$ define uma norma em $\mathbb{R}^N$.

Normas equivalentes

Definição

Diz-se que duas normas sobre o espaço E, $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$, são equivalentes se

$$\exists\, \underline{C}, \overline{C} > 0 \;:\; \underline{C}\|x\|_* \leq \|x\| \leq \overline{C}\|x\|_*,\ \forall x \in E.$$

Teorema

Num espaço de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.

Para $E = \mathbb{R}^N$ são válidas:

1. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{N}\|x\|_\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$, para qualquer $p \geq 1$;
2. $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{N}\|x\|_2,\ \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Noção de convergência

Definição

Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Sejam $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de E e $x \in E$. Diz-se que a sucessão converge para x, e escrevemos $x^{(n)} \to x$, se

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0,$$

ou seja, se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : \ n > p \Rightarrow \|x^{(n)} - x\| < \varepsilon.$$

Nota: Quando referirmos a convergência de uma sucessão num espaço de dimensão finita, não é necessário indicar nenhuma norma em particular.

Noções de erros

Definição

Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado e sejam $x, \tilde{x} \in E$. Se $x \approx \tilde{x}$, define-se

- Erro de $\tilde{x}$ em relação a x: $e_{\tilde{x}} = x - \tilde{x}$;
- Erro absoluto de $\tilde{x}$: $\|e_{\tilde{x}}\| = \|x - \tilde{x}\|$;
- Erro relativo de $\tilde{x}$: $\|\delta_{\tilde{x}}\| = \|x - \tilde{x}\| / \|x\|$ $(x \neq 0)$;
- Erro relativo percentual de $\tilde{x}$: $100\% \|\delta_{\tilde{x}}\|$ $(x \neq 0)$.

Normas matriciais

Normas matriciais. Norma de Frobenius

Exemplo *Norma de Frobenius*, ou *norma de Schur*:

$$\|A\|_{Fb} = \left(\sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (A \in \mathbb{R}^{N\times N},\ A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{N}).$$

Seja $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ a matriz identidade.
Para a norma de Frobenius tem-se

$$\|\mathbb{I}\|_{Fb} = \left(\sum_{i,j=1}^{N} |\delta_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{N} 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{N}.$$

O valor desta norma aumenta à medida que a dimensão do espaço de matrizes aumenta.

Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1.00001 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_{Fr} = \sqrt{1 + 1 + (-2)^2 + 1.00001^2} = 2.64576$$

$$B = \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\|B\|_{Fr} = \sqrt{4854} = 98.5292$$

Normas matriciais

Definição

Uma norma $\|\cdot\|_M$ em $\mathbb{R}^{N\times N}$ diz-se *compatível* com a norma vetorial $\|\cdot\|_V$ em $\mathbb{R}^N$ se

$$\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \|x\|_V, \ \forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}, \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Definição

Uma norma $\|\cdot\|_M$ em $\mathbb{R}^{N\times N}$ diz-se *regular* se

$$\|AB\|_M \leq \|A\|_M \|B\|_M, \ \forall A, \ B \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Exemplo A norma de Frobenius é regular e compatível com a norma-2 vetorial.

Norma matricial induzida por uma norma vetorial

Sendo $\|\cdot\|_V$ uma norma vetorial, a função $\|\cdot\|_M : \mathbb{R}^{N\times N} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|A\|_M = \sup_{x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V}$$

satisfaz todas as condições da definição de norma.

Definição

A norma $\|\cdot\|_M : \mathbb{R}^{N\times N} \to \mathbb{R}$ acima definida diz-se a *norma matricial induzida pela norma vetorial* $\|\cdot\|_V$.

Tem-se

$$\|A\|_M = \sup_{x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \|A\frac{x}{\|x\|_V}\|_V = \max_{x\in\mathbb{R}^N,\, \|x\|_V=1} \|Ax\|_V.$$

Norma matricial induzida por uma norma vetorial

- Qualquer norma matricial induzida é regular e compatível com a norma vetorial que lhe dá origem.

- Seja $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ a matriz identidade. Tem-se $\|\mathbb{I}\| = 1$ em qualquer norma matricial induzida.

- Para a norma de Frobenius tem-se $\|\mathbb{I}\|_{Fb} = \sqrt{N}$, pelo que esta norma não é induzida por nenhuma norma vetorial. Além disso, o valor da norma $\|\mathbb{I}\|_{Fb} = \sqrt{N}$ aumenta à medida que a dimensão do espaço de matrizes aumenta.

Como calcular as normas matriciais induzidas $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$?

É possível deduzir fórmulas mais simples para as normas matriciais induzidas, envolvendo cálculos diretos com as entradas a_{ij} $(i, j = 1, ..., N)$ da matriz A?

No caso das normas $\|A\|_1$ e $\|A\|_\infty$, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, tem-se

- $$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|,$$

  ou seja, é uma *norma por colunas*;

- $$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|,$$

  tratando-se de uma *norma matricial por linhas*.

Exemplos

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & 1.00001 \end{array}\right]$$

$$\|A\|_1 = \max\{1+1, |-2| + 1.00001\} = 3.00001$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + |-2|, 1 + 1.00001\} = 3$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\|B\|_1 = \|B\|_\infty = \max\{82, 136, 35, 21\} = 136$$

Relações entre normas matriciais e raio espetral

Definição

Se $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ designa o *espetro* de A, ou seja, o conjunto de todos os valores próprios da matriz A. Ao número $\varrho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$ chama-se raio espetral de A.

A primeira relação entre normas matriciais e raio espetral envolve a norma $\|\cdot\|_2$:

$$\|A\|_2 = (\varrho(A^*A))^{\frac{1}{2}}\,,\ \forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Relações entre normas matriciais e raio espetral

O raio espetral pode ser entendido como o *ínfimo de todas as normas matriciais induzidas*, de acordo com os seguintes resultados:

(i) Qualquer que seja a norma matricial induzida $\|\cdot\|$, tem-se

$$\varrho(A) \leq \|A\|, \forall A \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

(ii) Para cada $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ e cada $\varepsilon > 0$, existe uma norma matricial induzida $\|\cdot\|$ tal que

$$\|A\| \leq \varrho(A) + \varepsilon.$$

Fórmula de Gelfand: seja $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Para qualquer norma matricial induzida $\|\cdot\|$, tem-se

$$\varrho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Influência dos erros de arredondamento/perturbações nos dados na resolução de sistemas lineares. Exemplos

Exemplo 1

O sistema linear (muito simples)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1.00001\, x_2 = 2.00001 \end{cases}$$

tem solução (única) $x = [1 \quad 1]^T$.

Exemplo 1

Consideremos uma pequena perturbação nos dados:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1.00001\, x_2 = 2 \end{cases}$$

ou seja, o vetor $b = [2 \quad 2.00001]^T$ foi arredondado para $\tilde{b} = [2 \quad 2]^T$.

O erro relativo percentual deste arredondamento pode ser dado por

$$100\% \|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty = 100\% \frac{\|[0 \quad 0.00001]^T\|_\infty}{\|[2 \quad 2.00001]^T\|_\infty}$$

$$= 100\% \frac{0.00001}{2.00001} \approx 0.0005\%$$

Exemplo 1

O sistema perturbado

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1.00001\, x_2 = 2 \end{cases}$$

tem solução $\tilde{x} = [2 \quad 0]^T$, muito diferente de $x = [1 \quad 1]^T$.

Tem-se

$$100\% \|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty = 100\% \frac{\|[-1 \quad 1]^T\|_\infty}{\|[1 \quad 1]^T\|_\infty} = 100\%$$

Exemplo 1

Se considerarmos agora uma pequena perturbação na matriz do sistema, temos que o novo sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1\, x_2 = 2.00001 \end{cases}$$

não tem solução (a matriz do sistema ficou singular).
Note-se que, sendo A a matriz do sistema original e $\tilde{A}$ a matriz deste sistema, tem-se

$$100\% \|\delta_{\tilde{A}}\|_\infty = 100\% \frac{\left\| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.00001 \end{bmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.00001 \end{bmatrix} \right\|_\infty} \approx 0.0005\%$$

mas a naturaza da matriz foi completamente alterada pelo arredondamento efetuado.

Exemplo 1

Se considerarmos agora as seguintes pequenas perturbações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1\, x_2 = 2 \end{cases}$$

este sistema tem um número infinito de soluções.

Também neste caso, pequenas perturbações nos dados do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 1.00001\, x_2 = 2.00001 \end{cases}$$

produziram grandes perturbações no resultado.

Exemplo 2

O sistema linear

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 7\,x_2 + 8\,x_3 + 7\,x_4 = 32 \\ 7\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 + 5\,x_4 = 23 \\ 8\,x_1 + 6\,x_2 + 10\,x_3 + 9\,x_4 = 33 \\ 7\,x_1 + 5\,x_2 + 9\,x_3 + 10\,x_4 = 31 \end{cases}$$

tem solução $x = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$.

Exemplo 2

Consideremos uma pequena perturbação no sistema

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 7\,x_2 + 8\,x_3 + 7\,x_4 = 32.1 \\ 7\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 + 5\,x_4 = 22.9 \\ 8\,x_1 + 6\,x_2 + 10\,x_3 + 9\,x_4 = 33.1 \\ 7\,x_1 + 5\,x_2 + 9\,x_3 + 10\,x_4 = 30.9 \end{cases}$$

ou seja, o vetor $b = [32 \quad 23 \quad 33 \quad 31]^T$ foi substituído por $\tilde{b} = [32.1 \quad 22.9 \quad 33.1 \quad 30.9]^T$.

O erro relativo percentual de $\tilde{b}$ é

$$\begin{aligned} 100\% \|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty &= 100\% \frac{\|[-0.1 \quad 0.1 \quad -0.1 \quad 0.1]^T\|_\infty}{\|[32 \quad 23 \quad 33 \quad 31]^T\|_\infty} \\ &= 100\% \frac{0.1}{33} \approx 0.30303\% \end{aligned}$$

Exemplo 2

No entanto, o sistema perturbado tem solução

$$\tilde{x} = [9.2 \quad -12.6 \quad 4.5 \quad -1.1]^T$$

muito diferente de

$$x = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T.$$

Com efeito, para o erro relativo percentual desta perturbação tem-se

$$\begin{aligned} 100\% \|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty &= 100\% \frac{\|[-8.2 \quad 13.6 \quad -3.5 \quad 2.1]^T\|_\infty}{\|[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T\|_\infty} \\ &= 1360\% \end{aligned}$$

Exemplo 2

Consideremos agora uma pequena perturbação na matriz do sistema

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 7\,x_2 + 8.1\,x_3 + 7.2\,x_4 = 32 \\ 7.08\,x_1 + 5.04\,x_2 + 6\,x_3 + 5\,x_4 = 23 \\ 8\,x_1 + 5.98\,x_2 + 9.89\,x_3 + 9\,x_4 = 33 \\ 6.99\,x_1 + 5\,x_2 + 9\,x_3 + 9.98\,x_4 = 31 \end{cases}$$

O erro relativo percentual de $\tilde{A}$ pode ser dado por

$$\begin{aligned} 100\% \|\delta_{\tilde{A}}\|_\infty &= 100\% \frac{\max\{0.3, 0.12, 0.13, 0.03\}}{\max\{32, 23, 33, 31\}} \\ &= 100\% \frac{0.3}{33} \approx 0.9\% \end{aligned}$$

Exemplo 2

O sistema perturbado tem solução

$$\tilde{x} = [-81 \qquad 137 \qquad -34 \qquad 22]^T$$

muito diferente de

$$x = [1 \qquad 1 \qquad 1 \qquad 1]^T.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} 100\% \|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty &= 100\% \frac{\|[82 \qquad -136 \qquad 35 \qquad -21]^T\|_\infty}{\|[1 \qquad 1 \qquad 1 \qquad 1]^T\|_\infty} \\ &= 13600\% \end{aligned}$$

Como explicar estes fenómenos?

Condicionamento de sistemas lineares

Condicionamento de sistemas lineares

Teorema

Na resolução do sistema linear $Ax = b$, se $\|\delta_{\tilde{A}}\| < 1/cond(A)$, então tem-se

$$\|\delta_{\tilde{x}}\| \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\|\delta_{\tilde{A}}\|} \left(\|\delta_{\tilde{A}}\| + \|\delta_{\tilde{b}}\|\right)$$

onde $cond(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$.

Em particular, quando $\delta_{\tilde{A}} = 0$, temos

$$\|\delta_{\tilde{x}}\| \leq cond(A)\|\delta_{\tilde{b}}\|.$$

Assim, para matrizes A cujo número de condição seja elevado, um pequeno erro relativo no vector b pode provocar um grande erro relativo na solução do sistema. Se o número de condição for baixo (nunca será inferior a 1...) podemos concluir acerca do bom condicionamento da resolução do sistema.

Condicionamento de sistemas lineares

Para o Exemplo 1, tem-se

$$\|A\|_\infty = \max\{2, 2.00001\} = 2.00001$$

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} 100001 & -100000 \\ -100000 & 100000 \end{bmatrix} \right\|_\infty \\ &= \max\{200001, 200000\} = 200001\end{aligned}$$

$$cond(A) = 2.00001 \times 200001 = 400004 \approx 4 \times 10^5$$

pelo que, quando $\delta_{\tilde{A}} = 0$,

$$\|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty \leq 400004\|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty.$$

Isto significa que os erros relativos em b podem ser ampliados 400004 vezes.

Condicionamento de sistemas lineares

Para o Exemplo 2:

$$\|A\|_\infty = 33$$

$$\begin{aligned}\|A^{-1}\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \\ &= \max\{82, 136, 35, 21\} = 136\end{aligned}$$

$$cond(A) = 33 \times 136 = 4488$$

donde

$$\|\delta_{\tilde{x}}\|_\infty \leq 4488 \|\delta_{\tilde{b}}\|_\infty$$

quando $\delta_{\tilde{A}} = 0$. Logo, os erros relativos em b podem ser ampliados 4488 vezes.