28 Abr Osc Ord

Ondas progressivas (e ondas estacionárias)

nós vimos que um sistema infinito com invariância translacional tinha soluções complexas

$$\underbrace{e^{\pm ikx} \qquad e^{\pm i\omega t}}$$

onde ω e k estão relacionados pela relação de dispersão

soluções físicas são reais

tomar a parte real de cada um dos fatores

$$\mathrm{Re}\{A e^{ikx} + B e^{-ikx}\}\ \mathrm{Re}\{C e^{i\omega t} + D e^{-i\omega t}\}$$

uma forma possível $\sin kx \cos \omega t$

Desta forma

$\psi \propto \sin kx \cos \omega t$

a variação no tempo e variação no espaço são independentes

$\longrightarrow$ ondas estacionárias

existem nodos (pontos onde a oscilação é sempre nula)

e anti-nodos (" " " " é máxima)

Podemos construir soluções reais (ou seja físicas) a partir de

$$e^{\pm ikx} \quad e^{\pm i\omega t}$$

de outra forma tomando a parte real do produto.

Por exemplo:

$$\psi(x,t) = e^{ikx - i\omega t} + e^{-ikx + i\omega t}$$

$$= e^{i(kx - \omega t)} + e^{-i(kx - \omega t)}$$

$$\propto \cos(kx - \omega t)$$

Então

$$\psi(x,t) = \cos(kx - \omega t)$$

onda progressiva

evolução espacial e temporal estão ligadas

onda que se propaga

NÃO É O SISTEMA QUE ESTÁ A VIAJAR

para uma onda: os elementos da onda vão para outras localizações
✗

olhar para um ponto x tal que $\psi(x,t)$ é
um dado valor:

$\rightarrow$ este ponto prosseguirá na direção 'x'
com velocidade constante

$$v_\phi = \frac{\omega(k)}{k}$$

exemplo

$$\psi(0,0) = \cos(0) = 1$$

(x, t)

aumentar t

$$kx - \omega t = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\omega t}{k} = v_\phi t}$$

relação entre ondas progressivas e estacionárias

$$\cos(kx-\omega t) = \operatorname{Re}\left\{ e^{ikx}\, e^{-i\omega t} \right\}$$

viaja para a direita

$$\cos(kx+\omega t) = \operatorname{Re}\left\{ e^{-ikx}\, e^{-i\omega t} \right\}$$

viaja para esq.

$$\underbrace{\cos kx \,\cos \omega t}_{\text{onda estacionária}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[e^{ikx}\, e^{-i\omega t} + e^{-ikx}\, e^{i\omega t} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underset{\text{onda prog}}{\cos(kx-\omega t)} + \underset{\text{onda prog.}}{\cos(kx+\omega t)} \right]$$

onda estacionária = sobreposição de 2 ondas progressivas (idênticas) a viajar em sentidos opostos.

O recíproco também é verdade:

$$\underbrace{\cos(kx - \omega t)}_{\text{onda progressiva}} = \cos kx \cos \omega t + \sin kx \sin \omega t$$

ondas estacionárias

$$\cos kx \cos \omega t + \cos(kx - \pi/2)\cos(\omega t - \pi/2)$$

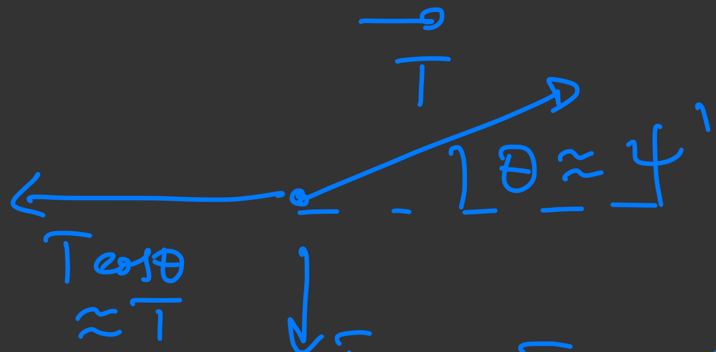
Força, Potência e Impedância

Para gerar uma cond. fronteira oscilatória (origem de uma onda progressiva) é necessário a ~~ação~~ de uma força na extremidade da corda

<u>na horizontal</u>: força para manter a corda esticada: para pequenas oscilações esta força é constante e igual à tensão da corda

⟶ (...)

na vertical: para acoplamento com a força devido à tensão da corda



$f_0 = -T\sin\theta \approx -T\theta \approx -Ty'$

$\boxed{x=0}$

$$f_0 = -T \frac{\partial}{\partial x} y(x,t)\Big|_{x=0}$$

$\boxed{x=L}$

$$f_L = T \frac{\partial}{\partial x} y(x,t)\Big|_{x=L}$$

logo, a potência: $(\vec{F}\cdot\vec{v})$ na posição $x=0$

$$P(t) = -T \frac{\partial}{\partial x} y(x,t)\Big|_{x=0} \frac{\partial}{\partial t} y(0,t)$$

(notem que potência não é linear no deslocamento logo temos que usar diretamente a forma <u>real</u> do $y(x,t)$)

→ onda estacionária (e na ausência de dissipação)

força e a velocidade estão desfasadas de $\pi/2$ no tempo

$\psi(x,t) \propto \sin\omega t \Rightarrow f \propto \sin\omega t$

$\Rightarrow v \propto \cos\omega t$

desf. de $\pi/2$

$\Rightarrow P(t) \propto \sin\omega t \cos\omega t = \frac{1}{2}\sin 2\omega t$

integrando em meio período $T/2$

$$\int_0^{T/2} \sin 2\omega t = 0$$

s/ dissipação potência média $= 0$

onda progressiva

$$\psi(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$$

$$F:\quad \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) = -A\,k\,\sin(kx-\omega t)$$

$$v:\quad \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = A\omega\,\sin(kx-\omega t)$$

$$\boxed{F \propto v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) = -\frac{k}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

(parecido c/ eq. das ondas)

Se $\psi(x,t) = A\cos(kx+\omega t)$

então

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) = +\,{}^{k}\!/_{\omega}\,\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

a eq. das ondas é de 2ª ordem nas derivadas

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = {}^{k}\!/_{\omega}\,{}^{\partial^2}\!/_{\partial t^2}\,\psi(x,t)$$

para incluir ambas as possibilidades do sentido $\longrightarrow$ da propagação

$\longleftarrow$

$$\hat{f}_0 = -T \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) \Big|_{x=0} = \frac{Tk}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \psi(0,t)$$

$\propto$

$x=0$

z impedenza

$$\hat{f}_L = T \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) \Big|_{x=L} = -\frac{Tk}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \psi(L,t)$$

$$z = \frac{Tk}{\omega} = \sqrt{\rho T}$$

per una corda

$$k/\omega = \sqrt{\rho/T}$$

misura della potenza necessaria per produrre onde progressive

Potência necessária em $x=0$

$$P_0 = Z\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,0)\right)}_{f}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,0)\right)}_{v}$$

$$= Z\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,0)\right)^2 = Z\left(-A\omega\sin(kx-\omega t)\right)^2$$

$$= ZA^2\omega^2\sin^2\omega t$$

$$T = 1/f = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\langle P_0\rangle = \frac{\int_0^{T/2} dt\, ZA^2\omega^2\sin^2\omega t}{\int_0^{T/2} dt} = \frac{ZA^2\omega^2}{2}$$

Se calcularmos em $x=L$

$$P_L = \dots = -2A^2\omega^2\cos^2\omega t$$

ou seja a potência dada em $x=0$ é dispendida em $x=L$

Nesta onda $\longleftarrow$ sinal da potência troca relativamente a onda $\longrightarrow$

em geral

$$P_L \neq -P_0$$ só sendo ~~ig~~ iguais em média (meio período)

Se comprimento da corda for $\neq$ de múltiplo inteiro de comp. de onda então a energia contida na corda varia ao longo do tempo