DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

LEAN, LEIC-A, LEIC-T, LEMat, LETI, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

1º semestre – 2015/2016
14/11/2015 – 11:00

Duração: 90 minutos **1º teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I	10 valores

1. Numa fábrica há três máquinas, M_1, M_2 e M_3, que produzem o mesmo tipo de peça. As máquinas M_1 e M_2 contribuem, respetivamente, com 50% e 30% da produção global da fábrica. Cada peça produzida pelas máquinas M_1, M_2 e M_3 possui defeitos com probabilidade 0.05, 0.08 e 0.1, respetivamente.

(a) Calcule a probabilidade de que uma peça escolhida ao acaso da produção da fábrica não possua qualquer defeito. (2.0)

Sejam M_i =“uma peça escolhida ao acaso é fabricada pela máquina i”, $i = 1,2,3$, e D =“uma peça escolhida ao acaso tem defeitos”.
Tem-se $P(M_1) = 0.5$, $P(M_2) = 0.3$, $P(M_3) = 1 - P(M_1) - P(M_2) = 0.2$, $P(D \mid M_1) = 0.05$, $P(D \mid M_2) = 0.08$, $= P(D \mid M_3) = 0.1$.
$P(\overline{D}) = \sum_{i=1}^{3} P(\overline{D} \mid M_i)P(M_i) = \sum_{i=1}^{3} (1 - P(D \mid M_i))P(M_i) = 0.931$.

(b) Sabendo que uma peça escolhida ao acaso da produção da fábrica possui defeitos, calcule a probabilidade de que tenha sido produzida pela máquina M_1. (1.5)

$P(M_1 \mid D) = \dfrac{P(D \mid M_1)P(M_1)}{P(D)} \approx 0.3623$.

2. O número de defeitos no painel interior de determinado tipo de automóveis segue uma distribuição de Poisson com valor esperado 0.7. Assuma que os números de defeitos em paineis interiores de diferentes automóveis desse tipo são independentes.

(a) Sabendo que o painel interior de um desses automóveis tem defeitos, calcule a probabilidade de o número de defeitos nesse painel ser inferior a 3. (2.0)

Seja X =“número de defeitos em um painel”, sendo que $X \sim Poi(0.7)$.
$P(X < 3 \mid X > 0) = \dfrac{P(0 < X < 3)}{P(X > 0)} = \dfrac{F_X(2) - F_X(0)}{1 - F_X(0)} \approx 0.9323$.

(b) Num lote com 20 automóveis desse tipo, qual é a probabilidade de haver mais que 2 automóveis com defeitos no painel interior? (2.0)

Seja Y =“número de automóveis com defeitos no painel em 20 automóveis”. Como Y representa o número de sucessos em 20 realizações independentes de uma prova de Bernoulli, tem-se que $Y \sim Bi(n = 20, p)$ com $p = P(X > 0) \approx 0.5034$.
$P(Y > 2) = 1 - F_Y(2) \approx 0.9998$.

(c) Qual é a probabilidade de ser necessário inspecionar pelo menos 3 automóveis desse tipo para que se encontre um automóvel com defeitos no seu painel interior? Qual é o valor esperado do número de automóveis que é necessário inspecionar até encontrar o primeiro com defeitos no painel interior? (2.5)

Seja Z =“número de automóveis inspecionados até surgir o primeiro com defeitos no painel”. Como Z representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli até ao primeiro sucesso, tem-se que $Z \sim Geo(p = 0.5034)$.
$P(Z \geq 3) = 1 - F_Z(2) \approx 0.2431$.
$E[Z] = \dfrac{1}{p} \approx 1.99$ inspeções.

Grupo II	10 valores

1. Admita que o tempo de espera, em minutos, para atendimento de utentes num balcão de informações é uma variável aleatória com distribuição exponencial. Sabe-se ainda que a probabilidade de um utente ter que esperar mais de 2 minutos no balcão de informações é igual a $e^{-\frac{2}{3}}$.

(a) Justifique que o desvio padrão do tempo de espera no balcão de informações até ao atendimento de um utente é igual a 3 minutos. (0.5)

Seja X =“tempo de espera, em minutos, para atendimento de utentes num balcão de informações”, sendo que $X \sim Exp(\lambda)$.
$P(X > 2) = e^{-2/3} \iff \int_2^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = e^{-2/3} \iff e^{-2\lambda} = e^{-2/3} \iff \lambda = 1/3$. Logo, $\sqrt{Var[X]} = \frac{1}{\lambda} = 3$.

(b) Determine o tempo mediano de espera de um utente para atendimento no balcão de informações. (1.5)

$F_X(q) = 1/2 \iff \int_0^q 1/3 e^{-x/3}\, dx = 1/2 \iff e^{-q/3} = 1/2 \iff q = 3\log(2) \approx 2.079$ minutos.

(c) Calcule a probabilidade aproximada de o tempo total de espera de 100 utentes do balcão de informações, escolhidos ao acaso, exceder 4 horas e meia. (3.0)

Seja S =“tempo total de espera de 100 utentes” com $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, em que X_i representa o tempo de espera do $i^{\underline{o}}$ utente. Admitindo que os tempos de espera de diferentes utentes são independentes, e uma vez que S é a soma de um número suficientemente grande de variáveis aleatórias, tem-se pelo T.L.C. que

$$\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

$E[S] = E[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100E[X] = 300$ e $Var[S] = Var[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100Var[X] = 900$
Então, $P(S > 270) \overset{TLC}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{270-300}{\sqrt{900}}\right) \approx 0.8413$.

2. Considere o par aleatório discreto (X, Y) com função de probabilidade conjunta dada por:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.5	0.0	0.1
1	0.0	0.3	0.1

(a) Calcule $P(X^2 + Y \le 2)$. (1.0)

$P(X^2 + Y \le 2) = P(X + Y \le 2) = 1 - P(X + Y > 2) = 1 - f_{X,Y}(1,2) = 0.9$ uma vez que, neste caso, $X = X^2$.

(b) Calcule $E[Y|X = 1]$. (1.5)

$$f_{Y|X=1}(y) = \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = \begin{cases} 3/4, & y = 1 \\ 1/4, & y = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$, uma vez que $f_X(1) = \sum_y f_{X,Y}(1,y) = 0.4$.

$E[Y|X = 1] = \sum_{y=1}^{2} y f_{Y|X=1}(y) = 5/4$.

(c) Calcule o valor do coeficiente de correlação linear entre X e Y. (2.5)

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5, & y = 0 \\ 0.3, & y = 1 \\ 0.2, & y = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$E[Y] = \sum_y y f_Y(y) = 0.7$, $E[Y^2] = \sum_y y^2 f_Y(y) = 1.1 \implies Var[Y] = 0.61$

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) \begin{cases} 0.6, & x = 0 \\ 0.4, & x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \iff Y \sim Ber(0.4)$$

$E[X] = 0.4$ e $Var[X] = 0.24$

$E[XY] = \sum_x \sum_y xy f_{X,Y}(x,y) = 0.5$, $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0.22$

$$Corr[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} \approx 0.5750.$$