MECÂNICA QUÂNTICA I

LEFT, 3º Ano – 2021/2022

Docentes: Filipe Joaquim, João Penedo, Bernardo Gonçalves

Série 5: Momento angular e spin

Momento angular orbital:

Problema 5.1 – Determine os valores próprios de $\hat{L}^2$ e $\hat{L}_z$ para os estados descritos pelas seguintes funções de onda:

(a) $Y_{2,1}(\theta,\phi)$.

(b) $Y_{3,-2}(\theta,\phi)$.

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}[Y_{3,3}(\theta,\phi)+Y_{3,-3}(\theta,\phi)]$.

(d) $Y_{4,0}(\theta,\phi)$.

Respostas: (a) $6\hbar^2, \hbar$ (b) $12\hbar^2, -2\hbar$ (c) $12\hbar^2$, não é estado próprio de $\hat{L}_z$ (d) $20\hbar^2, 0$.

Problema 5.2 – Considere um sistema inicialmente no estado descrito pela função de onda:

$$\psi(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,Y_{1,-1}(\theta,\phi)+\sqrt{\frac{3}{5}}\,Y_{1,0}(\theta,\phi)+\frac{1}{\sqrt{5}}\,Y_{1,1}(\theta,\phi)$$

(a) Determine o valor esperado de $\hat{L}_+$.

(b) Se L_z for medido, que valores se podem obter e com que probabilidades?

(c) Se ao medir-se L_z se obtiver $-\hbar$, determine as incertezas $\Delta L_{x,y}$ e o produto $\Delta L_x \Delta L_y$.

Respostas: (a) $2\sqrt{6}\hbar/5$ (b) $P(L_z=-1)=1/5$, $P(L_z=0)=3/5$, $(L_z=1)=1/5$ (c) $\Delta L_x=\Delta L_y=\hbar/\sqrt{2}$, $\Delta L_x \Delta L_y=\hbar^2/2$.

Problema 5.3 – Considere uma partícula cuja função de onda é dada por:

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} + \sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{xz}{r^2}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(a) Determine $\hat{L}^2|\psi\rangle$ e $\hat{L}_z|\psi\rangle$. Qual o momento angular total da partícula?

(b) Determine $\hat{L}_+|\psi\rangle$ e $\langle\psi\,|\hat{L}_+|\psi\rangle$.

(c) Se L_z for medido, qual a probabilidade de o resultado dar $0, \hbar$ e $-\hbar$?

Respostas: (a) $\hat{L}^2|\psi\rangle = 6\hbar^2|\psi\rangle$, $\hat{L}_z|\psi\rangle = -\hbar\sqrt{\frac{2}{5}}(|2,-1\rangle + |2,1\rangle)$, $\sqrt{6}\hbar$; (b) $\hat{L}_+|\psi\rangle = \hbar\sqrt{\frac{6}{5}}|2,1\rangle + \hbar\sqrt{\frac{2}{5}}(\sqrt{6}\,|2,0\rangle - 2|2,2\rangle)$, $\langle\psi\,|\hat{L}_+|\psi\rangle = 0$; (c) $P(L_z = 0) = 1/5$, $(L_z = \hbar) = 2/5$, $(L_z = -\hbar) = 2/5$.

Problema 5.4 – Considere uma partícula escalar cuja função de onda é dada por:

$$\psi(x,y,z) = C\,(2z + y + x)e^{-\alpha r}\ ,$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e C, α são constantes reais.

(a) Qual o momento angular total da partícula?

(b) Qual o valor esperado da componente z do momento angular total?

(c) Se L_Z fosse medido, qual a probabilidade de o resultado dar $\hbar$?

Respostas: (a) $\sqrt{2}\hbar$ (b) 0 (c) 1/6.

Problema 5.5 – Considere os estados próprios do momento angular $|\ell m\rangle$. Mostre que

$$\hat{\Pi}\,|\ell m\rangle = (-1)^{\ell}\,|\ell m\rangle,$$

onde $\hat{\Pi}$ é o operador paridade. O que conclui sobre a paridade dos estados de uma partícula sujeita a um potencial central?

Problema 5.6 **(Regras de selecção de paridade)** – Suponha que $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são estados próprios de paridade ε_α e ε_β, respectivamente:

$$\hat{\Pi}|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha\,|\alpha\rangle \quad , \quad \hat{\Pi}|\beta\rangle = \varepsilon_\beta\,|\beta\rangle\,.$$

Seja $\hat{A}$ um operador Hermítico. Mostre que:

(a) Se $[\hat{A},\hat{\Pi}] = 0$, então $\langle\alpha\,|\hat{A}|\beta\rangle \neq 0$ se $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = 1$.

(b) Se $\{\hat{A},\hat{\Pi}\} = 0$, então $\langle\alpha\,|\hat{A}|\beta\rangle \neq 0$ se $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = -1$.

Problema 5.7 – Mostre que os elementos de matriz $\langle\ell' m'|z|\ell m\rangle$ só não se anulam entre estados com $m' = m$ e $\ell' + \ell = 2k+1$, $k = 0,1,\ldots$

Problema 5.8 – Considere uma partícula com momento angular $j = 1$. Encontre a representação matricial para a componente de $\vec{J}$ ao longo de uma direção arbitrária $\vec{n}$.

Respostas: $\vec{n}.\vec{J} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta & 0 \\ e^{i\varphi}\sin\theta & 0 & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ 0 & e^{i\varphi}\sin\theta & -\sqrt{2}\cos\theta \end{pmatrix}$.

Problema 5.9 – Determine os níveis de energia de uma partícula que está constrangida a mover-se numa superfície esférica de raio R.

Respostas: $E_l = \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1), l = 0,1,2,3,\ldots$

Problema 5.10 – Considere o modelo para uma molécula diatómica em que os dois átomos estão separados de uma distância constante R. Determine os níveis de energia rotacionais desta molécula.

Respostas: $E_l = \frac{\hbar^2}{2\mu r^2}l(l+1)$.

Spin:

Problema 5.11 – O Hamiltoniano de um sistema com spin 1 é dado por

$$\hat{H} = A\hat{S}_z^2 + B\ (\ \hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2\ ),$$

com A e B reais. Determine os estados próprios normalizados deste sistema e os respectivos valores próprios.

Respostas: Valores próprios: $E_1 = 0, E_2 = (A+B)\hbar^2, E_3 = (A-B)\hbar^2$; Estados próprios: $|1\rangle = |1{,}0\rangle$, $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1{,}1\rangle + |1,-1\rangle]$, $|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|1{,}1\rangle - |1,-1\rangle]$.

Problema 5.12

(a) Encontre os valores próprios e estados próprios do spin de um electrão na direcção de um vector unitário $\vec{n}$ pertencente ao plano xz.

(b) Supondo que o sistema se encontra no estado correspondente ao maior valor próprio do spin na direcção $\vec{n}$, determine a probabilidade de se medir $S_z = +\hbar/2$.

Respostas: **(a)** Valores próprios: $\lambda = \pm\hbar/2$; Estados próprios: $|+\rangle_n = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$, $|-\rangle_n = -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-\rangle$; (b) $P = \cos^2\frac{\theta}{2}$.

Problema 5.13

(a) Encontre os valores próprios e estados próprios do spin de um electrão na direcção de um vector unitário $\vec{n}$ arbitrária.

(b) Determine a probabilidade de se medir $S_z = -\hbar/2$, supondo que o sistema se encontra no estado correspondente ao menor valor próprio do spin na direcção $\vec{n}$.

(c) Assumindo que os estados próprios de spin determinados na alínea (a) correspondem a $t = 0$, determine os estados próprios para qualquer instante de tempo t.

Respostas: **(a)** Valores próprios: $\lambda = \pm\hbar/2$; Estados próprios: $|+\rangle_n = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$, $|-\rangle_n = -\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|-\rangle$; (b) $P = \cos^2\frac{\theta}{2}$; (c) $|+(t)\rangle_n = e^{-\frac{iE+t}{\hbar}}\cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + e^{i(\varphi - \frac{E-t}{\hbar})}\sin\frac{\theta}{2}|-\rangle$, $|-(t)\rangle_n = -\,e^{-\frac{iE+t}{\hbar}}\sin\frac{\theta}{2}|+\rangle + e^{i(\varphi - \frac{E-t}{\hbar})}\cos\frac{\theta}{2}|-\rangle$.

Problema 5.14 – Considere uma partícula de spin $s = 3/2$.

(a) Encontre as matrizes que representam os operadores $\hat{S}_z$, $\hat{S}_x$,$\hat{S}_y$,$\hat{S}_x^2$ e $\hat{S}_y^2$ na base dos estados próprios de $\hat{S}^2$ e $\hat{S}_z$.

(b) Encontre os níveis de energia desta partícula quando o Hamiltoniano é dado por:

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_0}{\hbar^2}\,(\,\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2\,) - \frac{\epsilon_0}{\hbar}\,\hat{S}_z\ .$$

(c) Se o sistema estiver inicialmente no estado $|\psi_0\rangle = (1{,}0{,}0{,}0)^T$, descreva o estado do sistema para qualquer instante t.

Respostas: (a) $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} i \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $E_1 = -\frac{5}{2}\epsilon_0$, $E_2 = -\frac{3}{2}\epsilon_0, E_3 = \frac{3}{2}\epsilon_0, E_4 = \frac{5}{2}\epsilon_0$; $|1\rangle = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}, 0{,}1{,}0\right)^T$, $|2\rangle = \frac{1}{2}\left(0, -\sqrt{3}, 0{,}1\right)^T$, $|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(\sqrt{3}, 0{,}3{,}0\right)^T$, $|4\rangle = \frac{1}{2}\left(0{,}1{,}0, \sqrt{3}\right)^T$ (c) $|\psi(t)\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\sqrt{3}, 0{,}1{,}0\right)^T \exp\left(\frac{5i\epsilon_0 t}{\hbar}\right) + \frac{1}{2\sqrt{12}}\left(\sqrt{3}, 0{,}3{,}0\right)^T \exp\left(-\frac{3i\epsilon_0 t}{\hbar}\right)$.

Problema 5.15 – Considere um electrão sujeito a um campo magnético uniforme orientado segundo o eixo dos z. Encontre as equações de Heisenberg para S_x, S_y e S_z e resolva-as para obter $S_x(t), S_y(t)$ e $S_z(t)$. Determine os valores esperados destes operadores sabendo que para t=0 o electrão se encontra no estado correspondente a $S_n = \hbar/2$, onde $\hat{S}_n$ é a projecção do spin numa direcção arbitrária $\vec{n}$.

Respostas: $S_x(t) = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos(\varphi + \omega t)\,, S_y(t) = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\sin(\varphi + \omega t)\,, S_z(t) = \frac{\hbar}{2}\cos\theta$, onde $\omega = eB_0/m_e c$.

Problema 5.16 – Uma partícula de spin ½ com momento magnético $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{S}$ é sujeita a um campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_x$ $(B_0 > 0)$. Em $t = 0$, tem-se $s_z = 1/2$. Determine a probabilidade de se ter $s_y = \pm 1/2$ para $t > 0$.

Respostas: $P(s_y = +1/2) = \frac{1}{2}(1 + \sin 2\omega t)$, $P(s_y = -1/2) = \frac{1}{2}(1 - \sin 2\omega t)$, onde $\omega = \mu_0 B_0/2$.

Adição do momento angular:

Problema 5.17 – Determine os coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes à adição de dois momentos angulares com j_1=1 e j_2=1. Este é um exercício para os mais curiosos. Pode usar como referência o livro *Modern Quantum Mechanics*, de J. J. Sakurai, assim como notas e exemplos que pode encontrar em qualquer pesquisa pela internet.

Respostas: $C^{2,2}_{1,1,1,1} = 1$, $C^{2,1}_{1,1,0,1} = C^{2,1}_{1,1,1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C^{2,0}_{1,1,-1,1} = C^{2,0}_{1,1,1,-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $C^{2,0}_{1,1,0,0} = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $C^{2,-1}_{1,1,-1,0} = C^{2,-1}_{1,1,0,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C^{2,-2}_{1,1,-1,-1} = 1$, $C^{1,1}_{1,1,1,0} = -C^{1,1}_{1,1,0,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C^{1,0}_{1,1,1,-1} = -C^{1,0}_{1,1,-1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C^{1,-1}_{1,1,0,-1} = -C^{1,-1}_{1,1,-1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C^{0,0}_{1,1,1,-1} = C^{0,0}_{1,1,-1,1} = -C^{0,0}_{1,1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Problema 5.18 – Use as propriedades dos operadores de subida e descida do momento angular para obter a decomposição dos estados $|\, j, m_j = \ell - 1/2\rangle$ (onde j é o momento angular total) em função dos estados $|\, \ell\ m_\ell\ ;\ s, m_s\rangle$ onde $s = 1/2$.

Respostas: $\left|\ell + \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\left[\sqrt{2l}\left|\ell, \frac{1}{2}; \ell - 1, \frac{1}{2}\right\rangle + \left|\ell, \frac{1}{2}; \ell, -\frac{1}{2}\right\rangle\right]$;

$\left|\ell - \frac{1}{2}, \ell - \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2l+1}}\left[\sqrt{2l}\left|\ell, \frac{1}{2}; \ell, -\frac{1}{2}\right\rangle - \left|\ell, \frac{1}{2}; \ell - 1, \frac{1}{2}\right\rangle\right]$.

Problema 5.19 – Duas partículas A (spin 1) e B (spin 2) estão em repouso num estado de spin total igual 3 e componente em z igual a 1. Se medirmos S_z para a partícula B, quais os valores que poderemos obter e quais as respectivas probabilidades?

Respostas: $P(S_{B_z} = 2\hbar) = \frac{1}{15}, P(S_{B_z} = \hbar) = \frac{8}{15}, P(S_{B_z} = 0) = \frac{6}{15}$.

Problema 5.20 – Um electrão $|\uparrow\rangle$ encontra-se no estado ψ_{510} do átomo de hidrogénio. Se fizermos uma medida de J^2 do electrão, quais os valores que poderemos obter e com que probabilidades?

Respostas: $P(j = 3/2) = \frac{2}{3}$, $J^2 = \frac{15}{4}\hbar^2$; $P(j = 1/2) = \frac{1}{3}$, $J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$.

Problema 5.21

(a) Determine o spin total de um sistema de três partículas de spin 1/2 e determine os coeficientes de Clebsch-Gordan correspondentes.

(b) Considere um sistema de 3 partículas de spin ½ descrito pelo Hamiltoniano:

$$\hat{H} = E_0\ (\hat{\vec{S}}_1.\hat{\vec{S}}_3 + \hat{\vec{S}}_2.\hat{\vec{S}}_3\ )/\hbar^2.$$

Determine os níveis de energia do sistema e as respectivas degenerescências.

Respostas: **(a)** Com $S_{12} = 0$ e $S_3 = 1/2$: $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle]$, $\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle]$; com $S_{12} = 1$ e $S_3 = 1/2$: $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$, $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}[|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle]$, $\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}[|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle]$, $\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$, $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}[|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle]$, $\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}[|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle]$.

(b) Com $E_{S_{12},S}$, $E_{0,1/2} = 0\ (d = 2), E_{1,3/2} = \frac{E_0}{2}\ (d = 4), E_{1,1/2} = -\frac{3}{2}E_0\ (d = 2)$.

Problema 5.22 – Uma partícula sujeita a um potencial central tem momento angular orbital $\ell = 2$ e spin $s = 1$. Determine os níveis de energia e degenerescências associados à interação spin-órbita do tipo $\hat{H}_{SO} = A\,\hat{\vec{L}}.\hat{\vec{S}}$, onde A é uma constante.

Respostas: $E_{SO} = \begin{cases} 2A\hbar^2 & (j = 3) \\ -A\hbar^2 & (j = 2) \\ -3A\hbar^2 & (j = 1) \end{cases}$, $d = 2j + 1$.

Problema 5.23 – Duas partículas A e B de spin 1/2 formam um sistema composto. Sabe-se que $S_{A,z} = 1/2$ e $S_{B,x} = 1/2$. Qual a probabilidade de uma medida do spin total do sistema dar zero?

Respostas: $P(S = 0) = \frac{1}{4}$.

Problema 5.24 – Um sistema de duas partículas de spin $s_1 = 3/2$ e $s_2 = 1/2$ é descrito pelo Hamiltoniano $\hat{H} = A\hat{\vec{S}}_1.\hat{\vec{S}}_2$, com A constante. Em t=0, o sistema encontra-se no estado $|s_1, m_{s1}\rangle\,|s_2, m_{s2}\rangle = \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$. Qual o estado do sistema para t>0? Qual a probabilidade de encontrar o sistema no estado $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ para t>0?

Respostas: $t > 0$: $\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{3}{4}\hbar At}|2,1\rangle - \frac{1}{2}e^{i\frac{5}{4}\hbar At}|1,1\rangle$, $P\left(\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, t\right) = \frac{3}{4}\sin^2(A\hbar t)$.

Problema 5.25 – Um átomo de Hidrogénio encontra-se no estado $^2P_{1/2}$ com momento angular total orientado para cima segundo o eixo dos zz.

(a) Qual a probabilidade de encontrar o electrão com spin para baixo?

(b) Determine a função de onda do electrão sabendo que se encontra no estado com n=2.

Respostas: (a) $P = \frac{2}{3}$; (b) $\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{R_{2,1}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -Y_1^0 \\ \sqrt{2}Y_1^1 \end{pmatrix}$.

Problema 5.26 – Dados dois momentos angulares $\hat{\vec{J}}_1$ e $\hat{\vec{J}}_2$ com j_1=1 e j_2=1/2, calcule os coeficientes de Clebsh-Gordan para os estados $|j,m\rangle = |\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle$ e $|j,m\rangle = |\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle$.

Respostas: $C^{3/2,3/2}_{1,1/2;1,1/2} = 1$, $C^{3/2,1/2}_{1,1/2;0,1/2} = \sqrt{2/3}$, $C^{3/2,1/2}_{1,1/2;1,-1/2} = 1/\sqrt{3}$.

Problema 5.27 – As partículas elementares (e também as compostas) são, por vezes, classificadas por um número quântico denominado isospin I, cujas propriedades são as mesmas do spin. Considere as reacções:

$$K^- p \to \Sigma^-\pi^+ , \Sigma^+\pi^- , \Sigma^0\pi^0$$

que ocorrem através de ressonâncias com isospin total bem definido. Tendo em conta que o isospin se conserva e que as partículas acima descritas estão distribuídas pelos estados próprios de isospin da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^0 \\ K^- \end{pmatrix},$$

determine as probabilidades relativas associadas a estes processos quando ocorrem através de uma ressonância com $I = 1$.

Respostas: $P(\Sigma^-\pi^+):P(\Sigma^+\pi^-):P(\Sigma^0\pi^0) = 1:1:0$