Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEFT

1º Teste (VA) - 10 de Novembro de 2018 - 9:00 às 10:30

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4,5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2+x^3)}{x}$ (b) $g(x) = \ln(1+\sqrt{1+\tan^2 x})$ (c) $h(x) = (\arctan(2x+1))^x$

Problema 2 (4,5 val.) Calcule, se existirem (finitos ou infinitos), os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{\cosh x - 1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2+\cos x^3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[1+\operatorname{sen}(x^2)/3\right]^{1/(\cos x - 1)}$

Problema 3 (3 val.) Seja $f(x) = \operatorname{senh} x$ e p_n o polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto $a = 0$.

(a) Calcule p_4.
(b) Mostre que $0 < f(x) - p_n(x)$ para qualquer $x > 0$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$.
(c) Mostre que $0 < f(x) - p_4(x) < 1/50$ quando $0 < x < 1$.

Problema 4 (4 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - xe^{-x^2} & \text{se } x \leq 0 \\ 2 - x^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.
(b) Determine os intervalos de monotonia de f, a concavidade do seu gráfico e, se existirem, as suas assímptotas.
(c) Esboce o gráfico de f.
(d) Mostre que f restringida ao intervalo $I =]1, +\infty[$ tem inversa $g = f^{-1}$ definida e diferenciável no intervalo $J = g(I)$. Determine J e calcule $g'(t)$ no ponto $t = -2$.

Problema 5 (4 val.) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

(a) Prove que se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, $f(0) > \alpha$ e $a \leq 0$ então f tem máximo em $[a, +\infty[$.
(b) Prove que se $f(x) = g(x)$ tem 2 soluções então a equação $f'(x) = g'(x)$ tem solução.
(c) Prove que se f' é crescente em $\mathbb{R}$ então $g(x) = f(x)/x$ tem limite (finito ou infinito) quando $x \to +\infty$.
(d) Supondo que $f^{(3)}$ existe em $V_\delta(0)$ e $(f(x)-2+x^2)/x^3 \to 4$ quando $x \to 0$, determine o polinómio de Taylor de f de ordem 3 no ponto $a = 0$.

Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEFT

1º Teste (VB) - 10 de Novembro de 2018 - 9:00 às 10:30

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4,5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = x\ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2})$ (b) $g(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x^3 - 1)}$ (c) $h(x) = x^{\arctan(e^x)}$

Problema 2 (4,5 val.) Calcule, se existirem (finitos ou infinitos), os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x} - 1 + 2x - 2x^2}{x \operatorname{sen} x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x \operatorname{sen} x^2 + 1}{e^{x+1}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$

Problema 3 (3 val.) Seja $f(x) = \cosh x$ e p_n o polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto $a = 0$.

(a) Calcule p_5.
(b) Mostre que $0 < f(x) - p_n(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e qualquer $n \in \mathbb{N}$.
(c) Mostre que $0 < f(x) - p_5(x) < 1/300$ quando $0 < x < 1$.

Problema 4 (4 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^x & \text{se } x > 0 \\ 1 + xe^{-x^2} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.
(b) Determine os intervalos de monotonia de f, a concavidade do seu gráfico e, se existirem, as suas assímptotas.
(c) Esboce o gráfico de f.
(d) Mostre que f restringida ao intervalo $I =]1, +\infty[$ tem inversa $g = f^{-1}$ definida e diferenciável no intervalo $J = g(I)$. Determine J e calcule $g'(t)$ no ponto $t = 4$.

Problema 5 (4 val.) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

(a) Prove que se $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$, $f(0) < \beta$ e $b \geq 0$ então f tem mínimo em $] - \infty, b]$.
(b) Prove que se $f'(x) \neq g'(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ então a equação $f(x) = g(x)$ tem no máximo uma solução em $\mathbb{R}$.
(c) Prove que se f' é decrescente em $\mathbb{R}$ então $g(x) = f(x)/x$ tem limite (finito ou infinito) quando $x \to +\infty$.
(d) Supondo que $f^{(3)}$ existe em $] - 1, 1[$ e $(f(x) - 3 + 2x^2)/x^3 \to 3$ quando $x \to 0$, determine o polinómio de Taylor de f de ordem 3 no ponto $a = 0$.