

Sistemas Digitais (SD)

Minimização de Funções Booleanas



	YZ			
	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

	AB			
	00	01	11	10
10	1	1		1
11	1	1		1
01	1	1		1
00	1	1		

■ Na aula anterior:

- ▶ Minimização algébrica
- ▶ Minimização de Karnaugh:
 - Representação de funções de n variáveis:
 - Quadros de 3 e 4 variáveis;
 - Quadros de n variáveis;
 - Agrupamentos de uns e zeros:
 - Eixos de simetria;
 - Implicantes e implicados;
 - Implicantes e implicados primos;
 - Implicantes e implicados primos essenciais.



SEMANA	TEÓRICA 1	TEÓRICA 2	PROBLEMAS/LABORATÓRIO
17/Fev a 21/Fev	Introdução	Sistemas de Numeração	
24/Fev a 28/Fev	CARNAVAL	Álgebra de Boole	P0
02/Mar a 06/Mar	Elementos de Tecnologia	Funções Lógicas	VHDL
9/Mar a 13/Mar	Minimização de Funções	Minimização de Funções	L0
16/Mar a 20/Mar	Def. Circuito Combinatório; Análise Temporal	Circuitos Combinatórios	P1
23/Mar a 27/Mar	Circuitos Combinatórios	Circuitos Combinatórios	L1
30/Mar a 03/Abr	Circuitos Sequenciais: Latches	Circuitos Sequenciais: Flip-Flops	P2
06/Abr a 10/Abr	FÉRIAS DA PÁSCOA	FÉRIAS DA PÁSCOA	FÉRIAS DA PÁSCOA
13/Abr a 17/Abr	Caracterização Temporal	Registos	L2
20/Abr a 24/Abr	Contadores	Circuitos Sequenciais Síncronos	P3
27/Abr a 01/Mai	Síntese de Circuitos Sequenciais Síncronos	Síntese de Circuitos Sequenciais Síncronos	L3
04/Mai a 08/Mai	Exercícios	Memórias	P4
11/Mai a 15/Mai	Máq. Estado Microprogramadas: Circuito de Dados e Circuito de Controlo	Máq. Estado Microprogramadas: Microprograma	L4
18/Mai a 22/Mai	Circuitos de Controlo, Transferência e Processamento de Dados de um Processador	Lógica Programável	P5
25/Mai a 29/Mai	P6	P6	L5

Teste 1

■ Tema da aula de hoje:

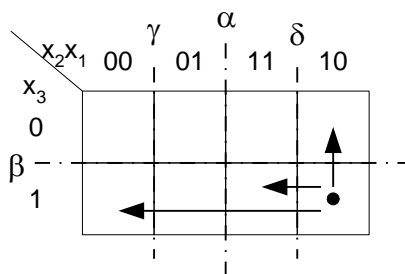
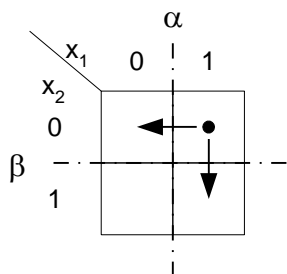
- ▶ Minimização de Karnaugh:
 - Agrupamentos de uns e zeros:
 - Eixos de simetria;
 - Implicantes e implicados;
 - Implicantes e implicados primos;
 - Implicantes e implicados primos essenciais.
 - Método de minimização de Karnaugh
 - Algoritmo de minimização
 - Forma normal/mínima disjuntiva
 - Forma normal/mínima conjuntiva
 - Funções incompletamente especificadas

□ Bibliografia:

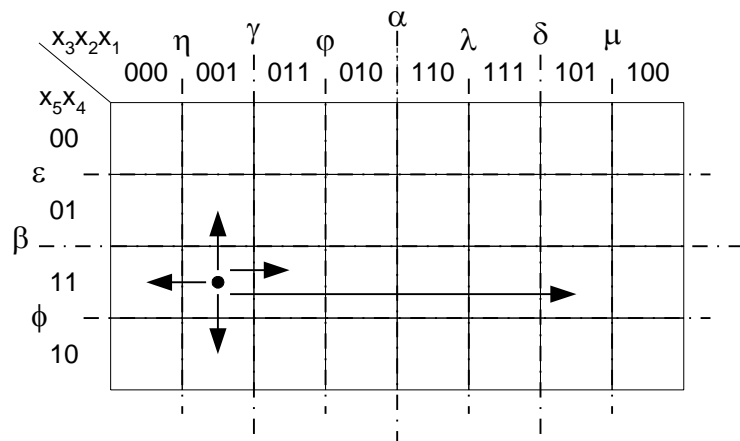
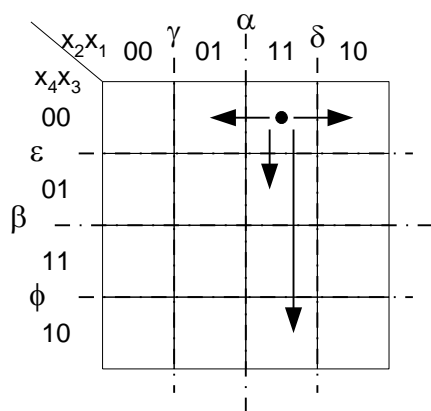
- M. Mano, C. Kime: Secções 2.4 e 2.5
- G. Arroz, J. Monteiro, A. Oliveira: Secção 2.3

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS

► Eixos de Simetria:



2 **quadrados** dizem-se **adjacentes** em termos lógicos quando apenas uma variável lógica altera o seu valor na representação desses quadrados.

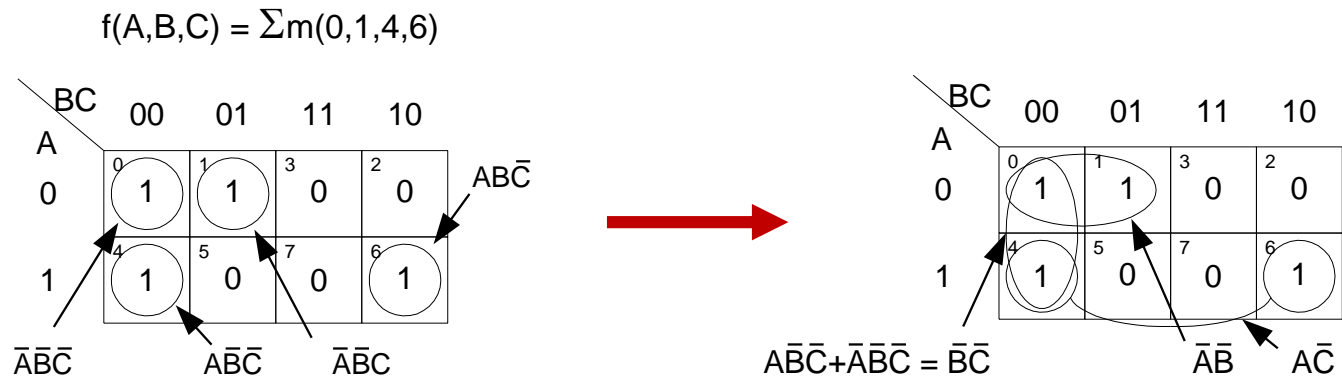


Num quadro de N variáveis, para cada quadrado existem sempre N outros adjacentes

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- Um **termo de produto** diz-se um **implicante** da função sse essa função assume 1 para todos os mintermos que o constituem.

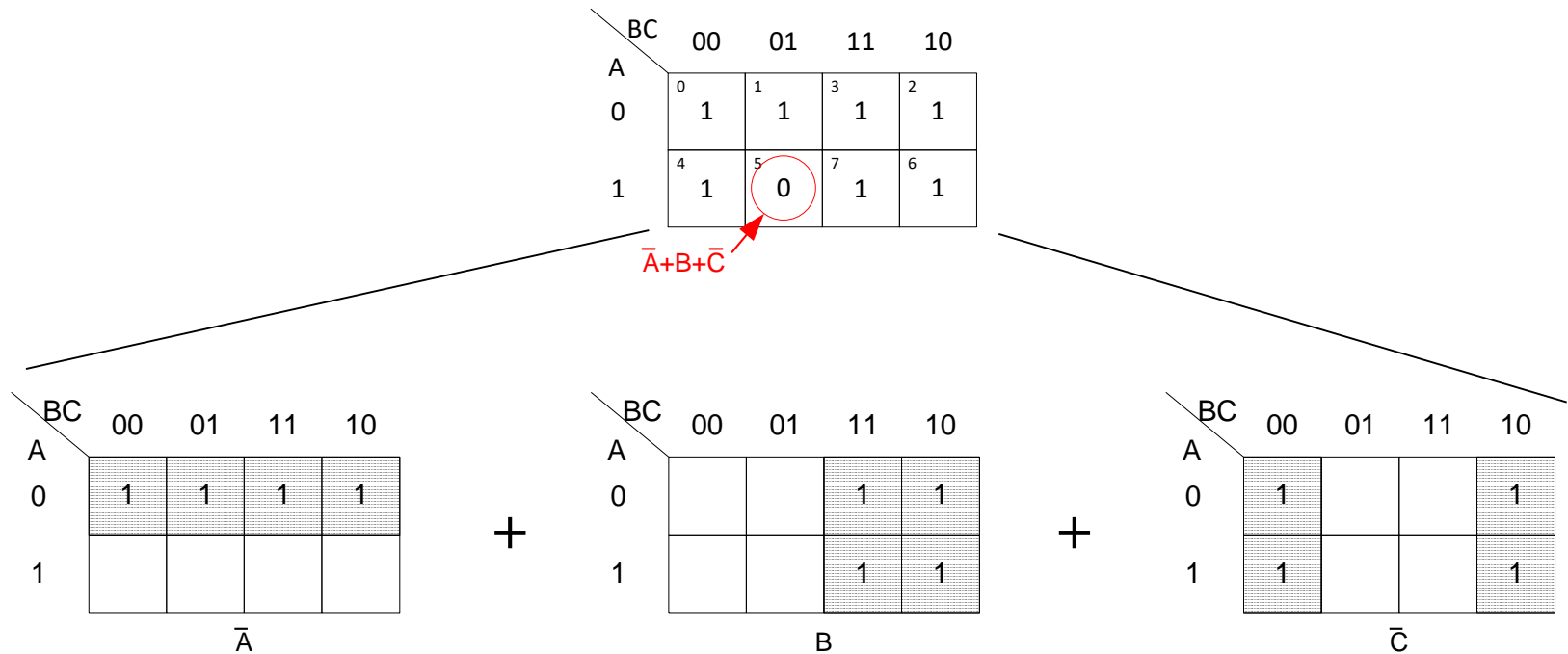
Exemplos:



Agrupamentos de 2^n quadrados correspondem à eliminação de n literais

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

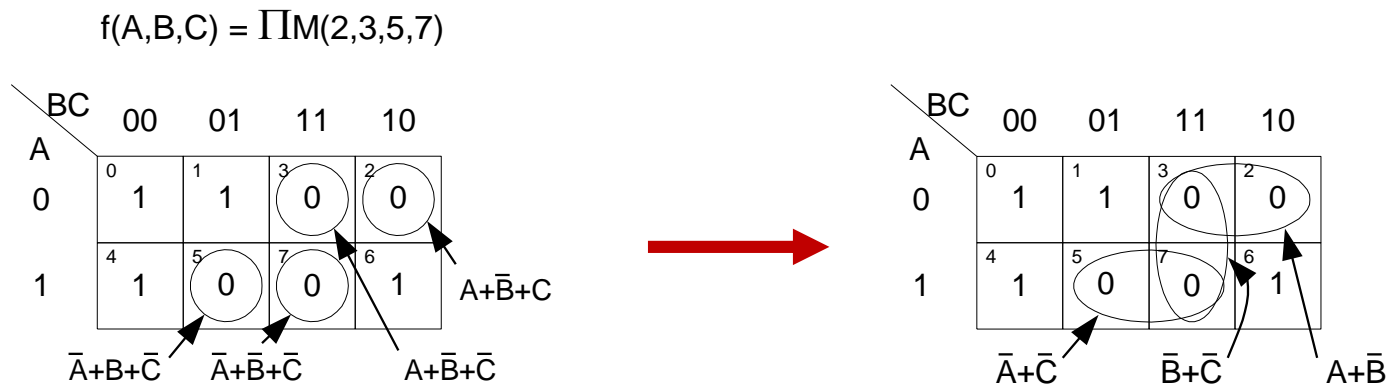
► Exemplos da representação de **Maxtermos**:



■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- Um **termo de soma** diz-se um **implicado** da função sse essa função assume 0 para todos os maxtermos que o constituem.

Exemplos:

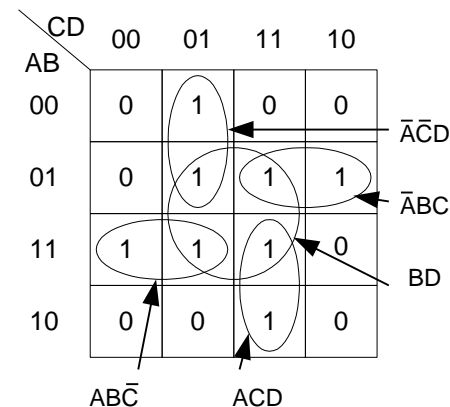
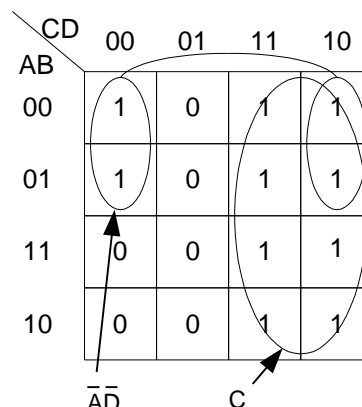
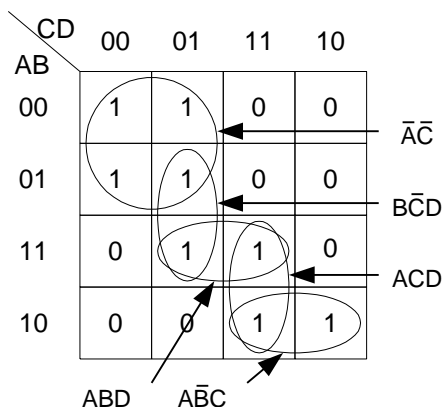
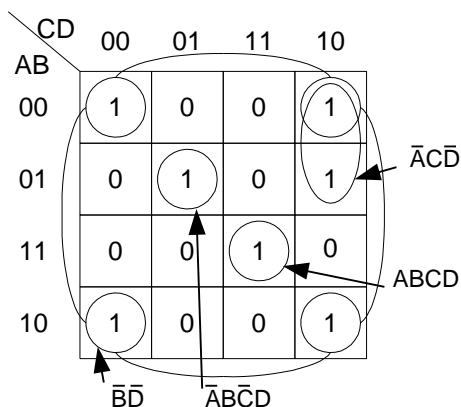


Agrupamentos de 2^n quadrados correspondem à eliminação de n literais

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

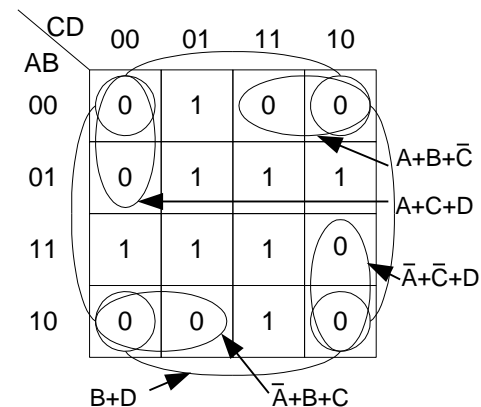
- Um **termo de produto** diz-se um **implicante primo** se a remoção de um qualquer literal, desse termo de produto, resulta num termo de produto que não é um implicante da função.

Exemplos:

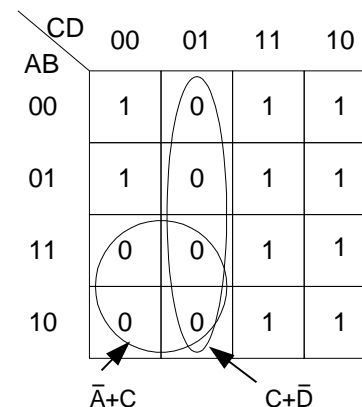
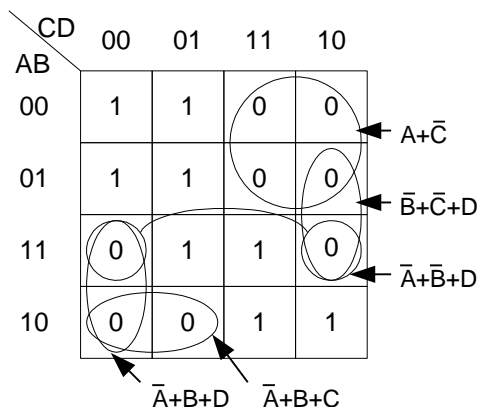
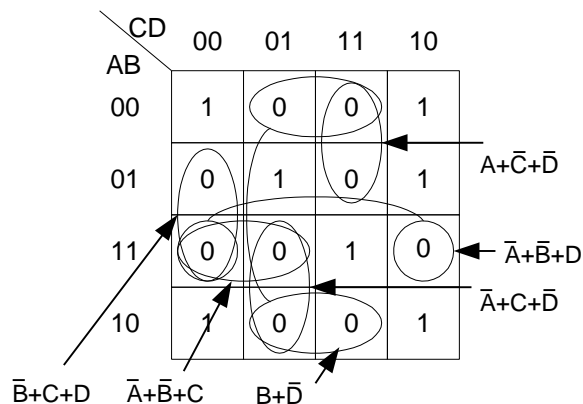


■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- Um **termo de soma** diz-se um **implicado primo** se a remoção de um qualquer literal, desse termo de soma, resulta num termo de soma que não é um implicado da função.



Exemplos:



■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- Um implicante primo de uma função diz-se **implicante primo essencial** se contém pelo menos um mintermo não contido em nenhum outro implicante primo.

Exemplos:

Implicantes Primos

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

$\bar{A}\bar{C}D$ (grouping 01, 11 in row 00)
 $\bar{A}BC$ (grouping 01, 11 in row 01)
 BD (grouping 11, 10 in column 11)
 ABC (grouping 00, 01 in row 11)
 ACD (grouping 01, 11 in column 10)

Implicantes Primos Essenciais

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

$\bar{A}\bar{C}D$ (grouping 01, 11 in row 00)
 $\bar{A}BC$ (grouping 01, 11 in row 01)
 BD (grouping 11, 10 in column 11)
 ABC (grouping 00, 01 in row 11)
 ACD (grouping 01, 11 in column 10)

Implicantes Primos

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

$\bar{A}\bar{C}D$ (grouping 00, 01 in row 00)
 $\bar{A}BC$ (grouping 01, 11 in row 01)
 BD (grouping 11, 10 in column 11)
 ABC (grouping 00, 01 in row 11)
 ACD (grouping 01, 11 in column 10)

Implicantes Primos Essenciais

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

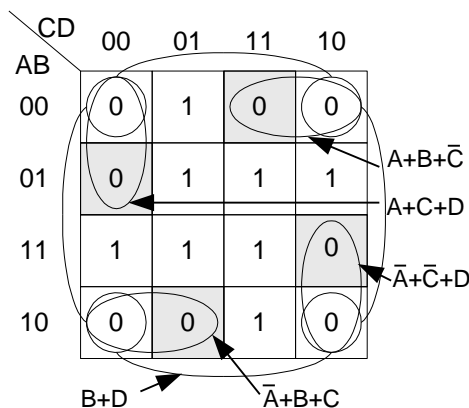
$\bar{A}\bar{C}D$ (grouping 00, 01 in row 00)
 $\bar{A}BC$ (grouping 01, 11 in row 01)
 BD (grouping 11, 10 in column 11)
 ABC (grouping 00, 01 in row 11)
 ACD (grouping 01, 11 in column 10)

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

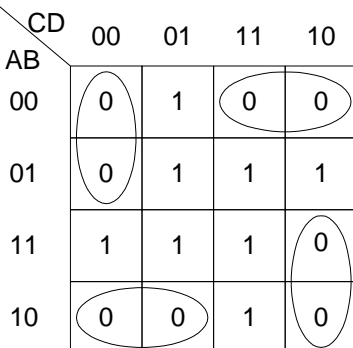
- Um implicado primo de uma função diz-se **implicado primo essencial** se contém pelo menos um maxtermo não contido em nenhum outro implicado primo.

Exemplos:

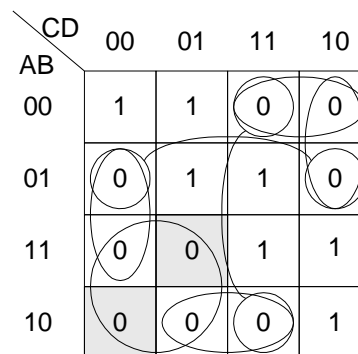
Implicados Primos



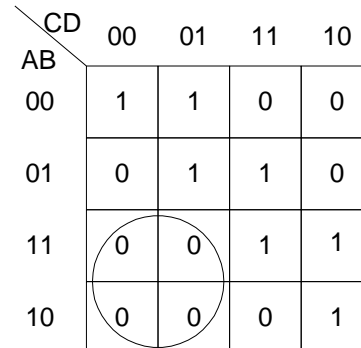
Implicados Primos Essenciais



Implicados Primos



Implicados Primos Essenciais



■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH

► Algoritmo de Minimização:

O procedimento sistemático para a obtenção da expressão simplificada de uma função representada num quadro de Karnaugh corresponde à execução dos seguintes passos:

Passo 1: Identificação de todos os **implicantes/implicados primos essenciais**.

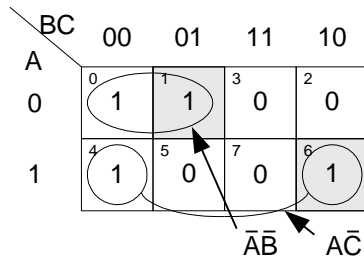
Passo 2: Determinação do **menor conjunto de implicantes/implicados primos** que contenham os mintermos/maxtermos não incluídos nos implicantes/implicados primos essenciais identificados no passo anterior.

Passo 3: **Escrita da expressão simplificada** como soma/produto de todos os termos de produto/soma seleccionados nos passos 1 e 2.

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

- **Forma Normal/Mínima Disjuntiva:** representação algébrica simplificada da função que utiliza apenas implicants primos essenciais e um número mínimo de implicants primos não essenciais.

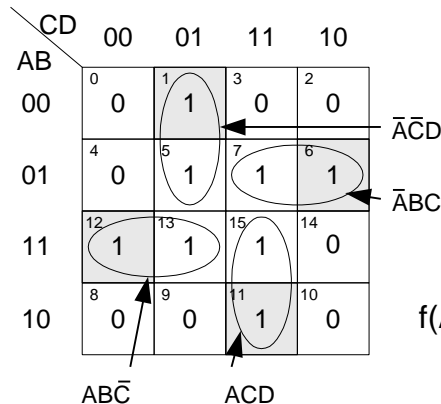
Exemplos:



$$f(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$



$$f(A,B,C) = \bar{A}\bar{B} + A\bar{C}$$



$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABCD + A\bar{B}CD$$



$$f(A,B,C,D) = AB\bar{C} + ACD + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{C}\bar{D}$$

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Exemplos:

$$\begin{aligned} f(A,B,C,D) &= \sum m(0,1,5,7,10,14,15) \\ &= \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}BC\bar{D} \\ &\quad + A\bar{B}C\bar{D} + ABC\bar{D} + ABCD \end{aligned}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

O conjunto de implicants primos essenciais é único.

Soluções alternativas

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BD + ABC + AC\bar{D}$$

O conjunto de implicants primos não essenciais que completam a expressão simplificada oferece várias alternativas.

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{C}D + BCD + AC\bar{D}$$

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Exemplos:

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	0	1	0	1
01	0	1	1	1	0	0	1	0
11	0	1	1	0	0	1	0	0
10	1	1	0	1	0	1	0	0

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	0	1	0	1
01	0	1	1	1	0	0	1	0
11	0	1	1	0	0	1	0	0
10	1	1	0	1	0	1	0	0

Expressão Original:

- 15 Termos de Produto de 5 Literais

Expressão Simplificada:

- 6 Termos de Produto de 4 Literais

- 1 Termo de Produto de 3 Literais

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	0	1	0	1
01	0	1	1	1	0	0	1	0
11	0	1	1	0	0	1	0	0
10	1	1	0	1	0	1	0	0

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

► Forma Normal/Mínima Conjuntiva:

$$\begin{aligned}
 f(A,B,C,D) &= \prod M(2,3,4,6,8,9,11,12,13) \\
 &= (A+B+\bar{C}+D). (A+B+\bar{C}+\bar{D}). (A+\bar{B}+C+D). \\
 &\quad (A+\bar{B}+\bar{C}+D). (\bar{A}+B+C+D). (\bar{A}+B+C+\bar{D}). \\
 &\quad (\bar{A}+B+\bar{C}+D). (\bar{A}+\bar{B}+C+D). (\bar{A}+\bar{B}+C+\bar{D})
 \end{aligned}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

O conjunto de implicados primos essenciais é único.

Soluções alternativas

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

$$f(A,B,C,D) = (\bar{A}+C). (A+B+\bar{C}). (A+\bar{B}+D). (\bar{A}+B+\bar{D})$$

O conjunto de implicados primos não essenciais que completam a expressão simplificada oferece várias alternativas.

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	1

$$f(A,B,C,D) = (\bar{A}+C). (\bar{B}+C+D). (B+\bar{C}+\bar{D}). (A+\bar{C}+D)$$

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

► Algoritmo de Minimização (Funções Incompletamente Especificadas):

O procedimento sistemático para a obtenção da expressão simplificada de uma função representada num quadro de Karnaugh corresponde execução dos seguintes passos:

Passo 1: Identificação de todos os **implicantes/implicados primos essenciais**.*

Passo 2: Determinação do **menor conjunto de implicantes/implicados primos** que contenham os mintermos/maxtermos não incluídos nos implicantes/implicados primos essenciais identificados no passo anterior.*

Passo 3: **Escrita da expressão simplificada** como soma/produto de todos os termos de produto/soma seleccionados nos passos 1 e 2.

* **Incluindo as indeterminações** sempre que isso permita reduzir o número de literais presentes nesse implicante/implicado.

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

► Funções Incompletamente Especificadas:

Exemplos:

$$f(A,B,C,D) = \sum m(0,1,5,7,10,14,15) + \sum m_d(8,13) \\ = \prod M(2,3,4,6,9,11,12) \cdot \prod M_d(8,13)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 1	1 1	3 0	2 0
01	4 0	5 1	7 1	6 0
11	12 0	13 x	15 1	14 1
10	8 x	9 0	11 0	10 1



CD \ AB	00	01	11	10
00	0 1	1 1	3 0	2 0
01	4 0	5 1	7 1	6 0
11	12 0	13 x	15 1	14 1
10	8 x	9 0	11 0	10 1

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 1	1 1	3 0	2 0
01	4 0	5 1	7 1	6 0
11	12 0	13 x	15 1	14 1
10	8 x	9 0	11 0	10 1

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 1	1 1	3 0	2 0
01	4 0	5 1	7 1	6 0
11	12 0	13 x	15 1	14 1
10	8 x	9 0	11 0	10 1

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 1	1 1	3 0	2 0
01	4 0	5 1	7 1	6 0
11	12 0	13 x	15 1	14 1
10	8 x	9 0	11 0	10 1

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Exemplos:

CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
AB	0	1	3	2	6	7	5	4
00	x	0	0	1	0	1	0	0
01	x	1	1	x	x	1	x	x
11	0	x	x	0	0	1	x	0
10	1	0	0	1	0	1	0	0



CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
AB	0	1	3	2	6	7	5	4
00	x	0	0	1	0	1	0	0
01	x	1	1	x	x	1	x	x
11	0	x	x	0	0	1	x	0
10	1	0	0	1	0	1	0	0

...



CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
AB	0	1	3	2	6	7	5	4
00	x	0	0	1	0	1	0	0
01	x	1	1	x	x	1	x	x
11	0	x	x	0	0	1	x	0
10	1	0	0	1	0	1	0	0



ou

CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
AB	0	1	3	2	6	7	5	4
00	x	0	0	1	0	1	0	0
01	x	1	1	x	x	1	x	x
11	0	x	x	0	0	1	x	0
10	1	0	0	1	0	1	0	0



Próxima Aula

■ Tema da Próxima Aula:

- ▶ Noção de circuito combinatório;
- ▶ Tempo de propagação num circuito;
- ▶ Dispositivos lógicos especiais:
 - Buffer de três estados (*tri-state*);
 - Portas de passagem (*transmission gates*).

Agradecimentos

Algumas páginas desta apresentação resultam da compilação de várias contribuições produzidas por:

- Nuno Roma
- Guilherme Arroz
- Horácio Neto
- Nuno Horta
- Pedro Tomás