

Sistemas Não-Lineares e Caos

Alexandre Barbosa^{1*}, Camila Costa², Francisco Pais³, Francisca Góis⁴

Laboratório de Física Experimental Avançada

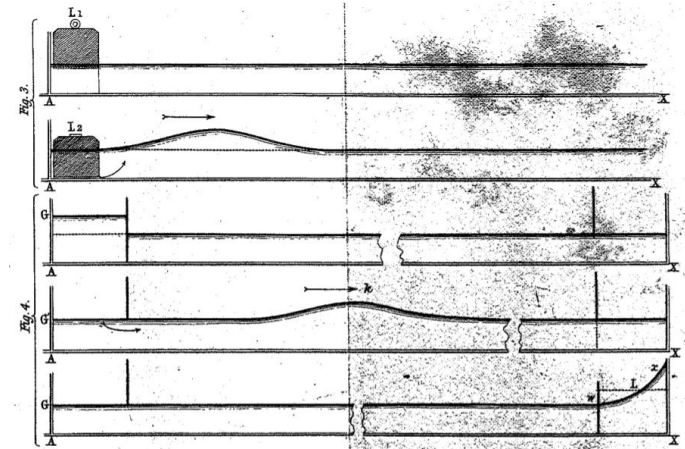
Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica

Solitões

Os solitões são fenômenos ondulatórios que:

- são localizados
- mantêm a forma, mesmo quando colidem com outros (*partículas*)
- não dissipam energia

No laboratório são perturbações ao nível da água e resultam de um balanço de dissipação/não-linearidade.



J. Scott Russel, "Report on Waves", 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 311-390 (1845)

Aproximações e solução KdV

Número de Ursell

- Ondas infinitesimais $\frac{\eta}{L} = \frac{A}{4B} \ll 1$
 - Ondas largas e pouco profundas $\varepsilon_2 = \left(\frac{h}{L}\right)^2 = \frac{h^2}{4B^2} \ll 1$
 - Perturbações menores altura água $\varepsilon_1 = \frac{\eta}{h} = \frac{A}{2h} \ll 1$
- $$U = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{2AB^2}{h^3} \sim 1$$

Equação KdV

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \frac{v_0}{h} \eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{v_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

que tem como solução $\eta(x, t) = \text{sech}^2\left(\frac{x - ct}{L}\right)$

Objetivos

- Comparar com as previsões de KdV medições de

- número de solitões $N = 1 + \text{int}\left(\frac{S}{\pi}\right)$ onde $S = \sqrt{\frac{3\eta}{2h} \frac{L}{h}}$

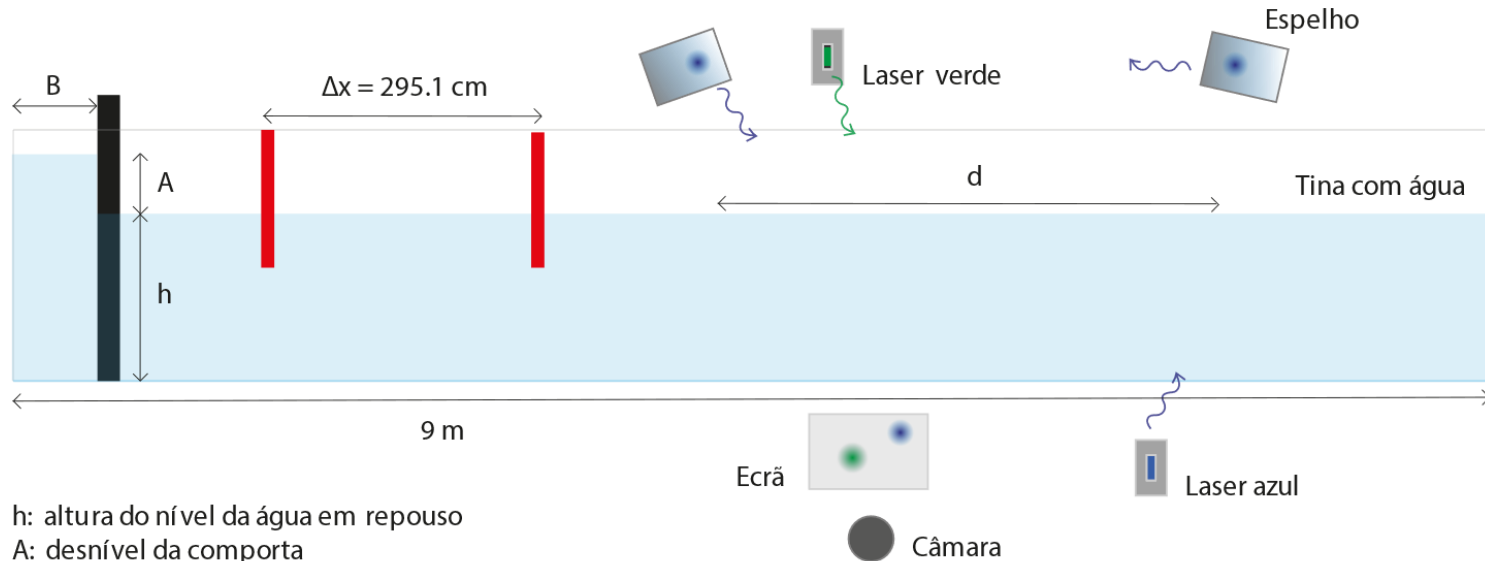
- amplitude $\eta = \frac{A}{2}$

- velocidade $v = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{\eta}{2h}\right)$

por observação direta e por reflexão de lasers na superfície da água

- Estabelecer os limites da teoria KdV, em função de $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e U

Montagem Experimental



- h : altura do nível da água em repouso
 A : desnível da comporta
 B : comprimento da comporta
 d : distância entre lasers
 Δx : distância percorrida entre registos de tempo

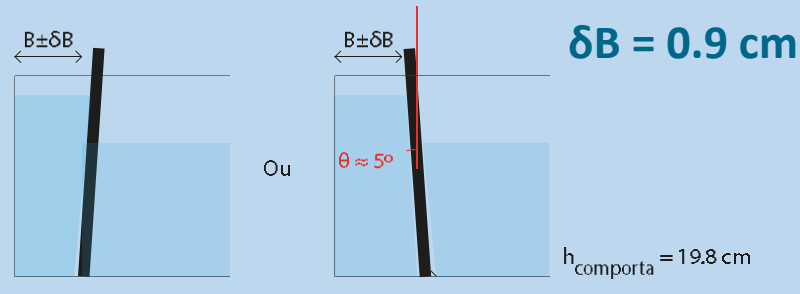
Incertezas Experimentais

δh

7 medições de h ao longo da tina
maior desvio à média: $\delta h = 0.5 \text{ cm}$

δB

$$\delta B = \tan \theta \frac{h_{\text{comporta}}}{2} \approx \theta \frac{h_{\text{comporta}}}{2}$$



δA

3 medições dentro da comporta
maior desvio à média: $\delta A = 0.2 \text{ cm}$

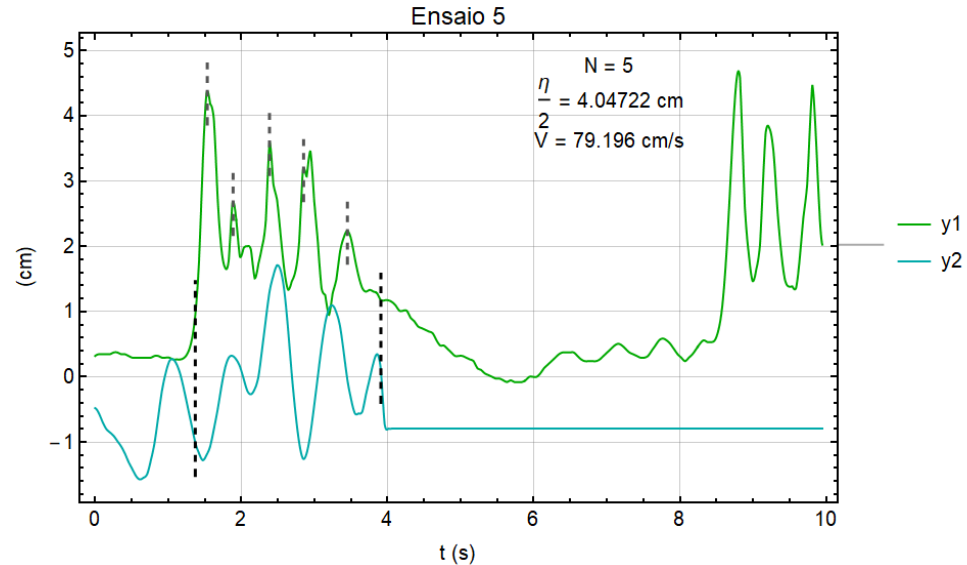
δt

10 ensaios tempo de reação
dobro do tempo de reação: $\delta t = 0.5 \text{ s}$

Análise de Dados - Cinéris

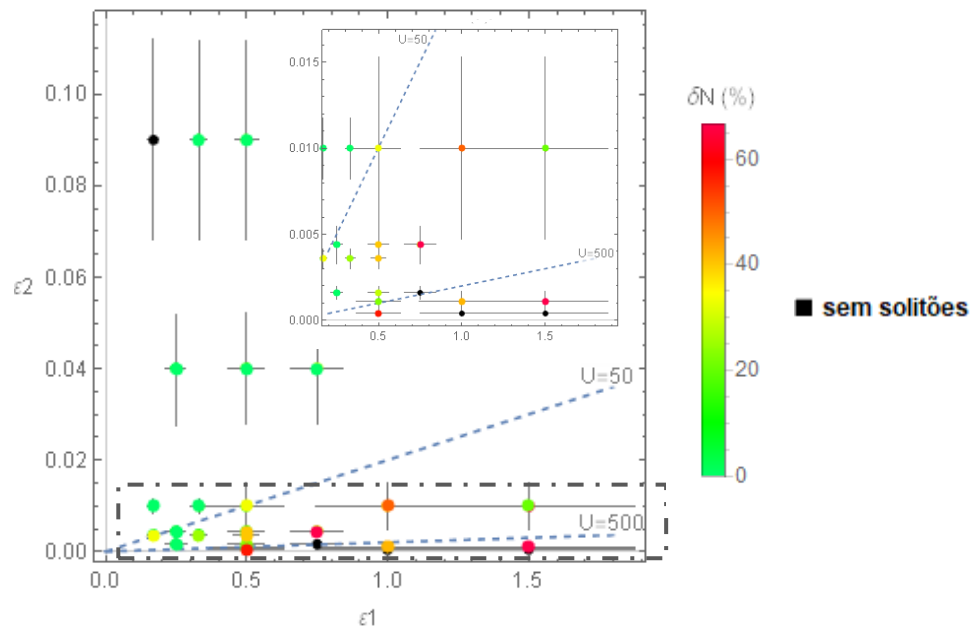
Criámos um notebook para calcular:

- **Número de Solitões:** picos de amplitude superior a um *threshold* (70 % da amplitude máxima)
- **Amplitude:** diferença entre máximo do primeiro pico e pontos iniciais
- **Velocidade:** tempo entre o movimento dos lasers azul e verde.

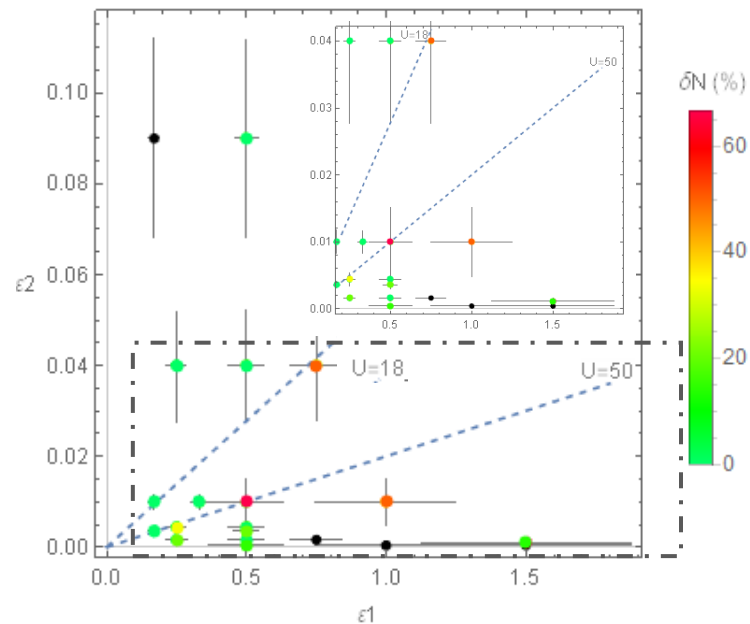


Desvios à Teoria KdV – Número Solitões (ϵ_1, ϵ_2)

Observação Direta

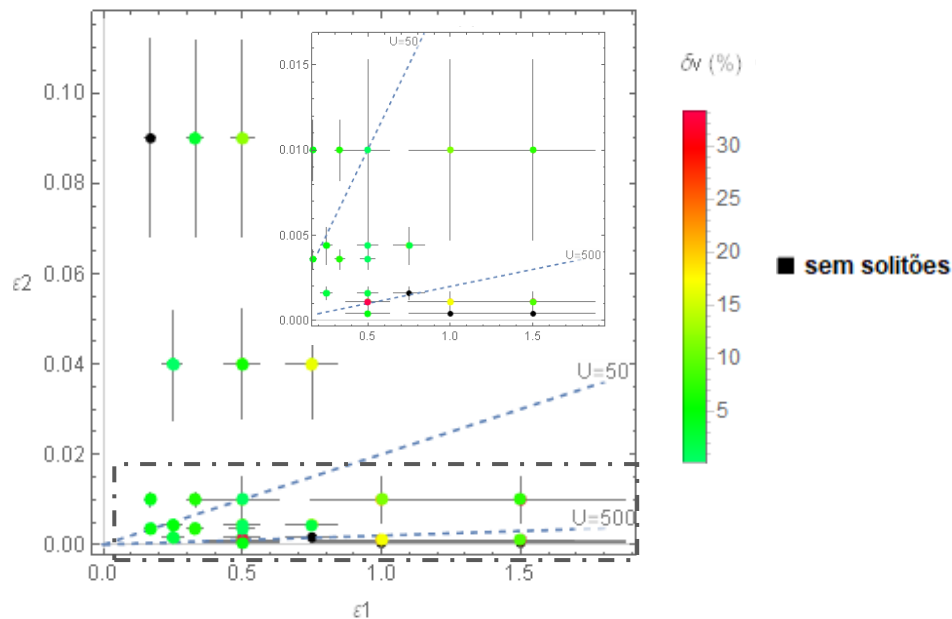


Reflexão Lasers

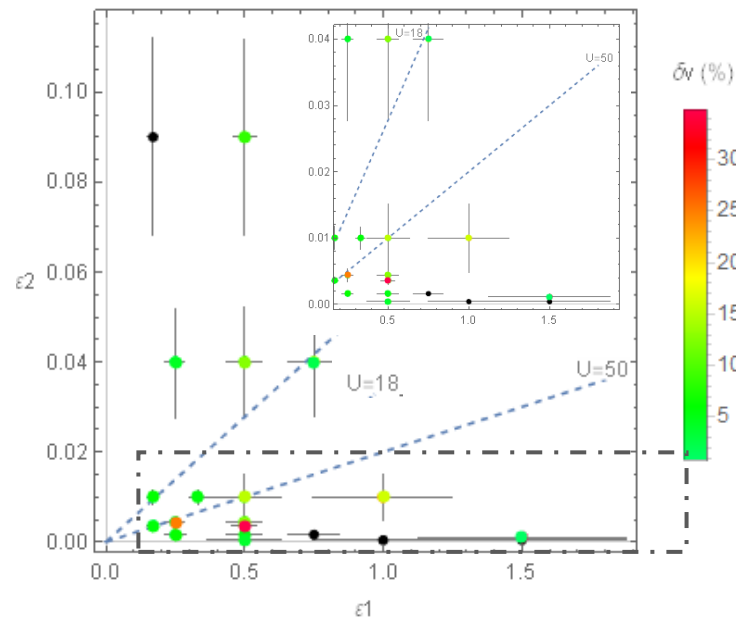


Desvios à Teoria KdV – Velocidade ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$)

Observação Direta

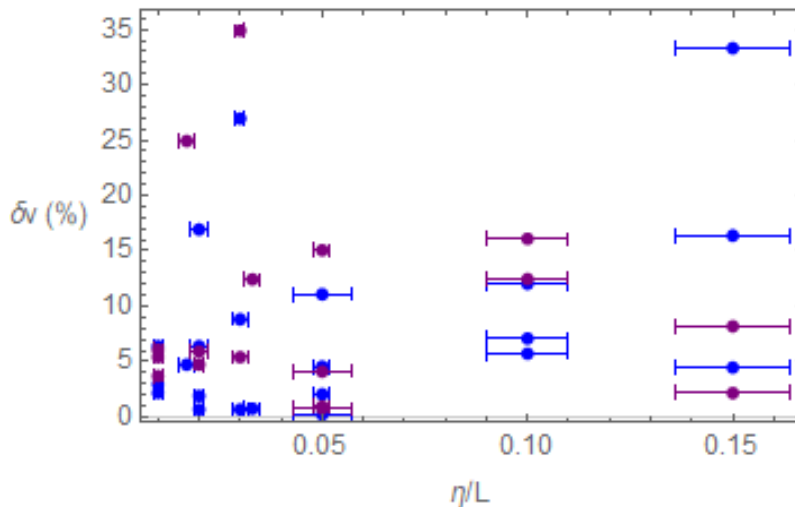
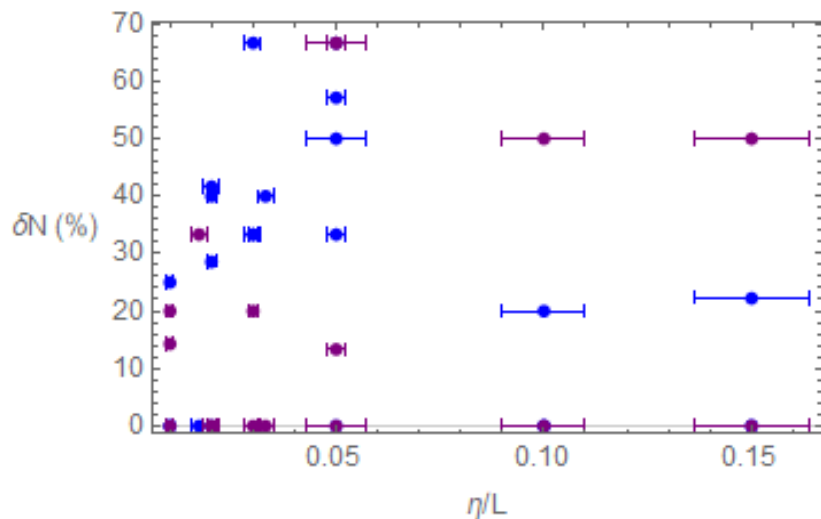


Reflexão Lasers



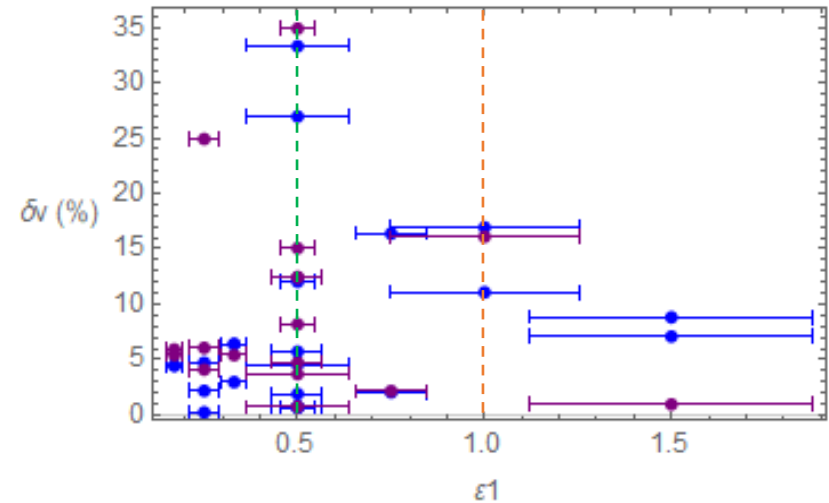
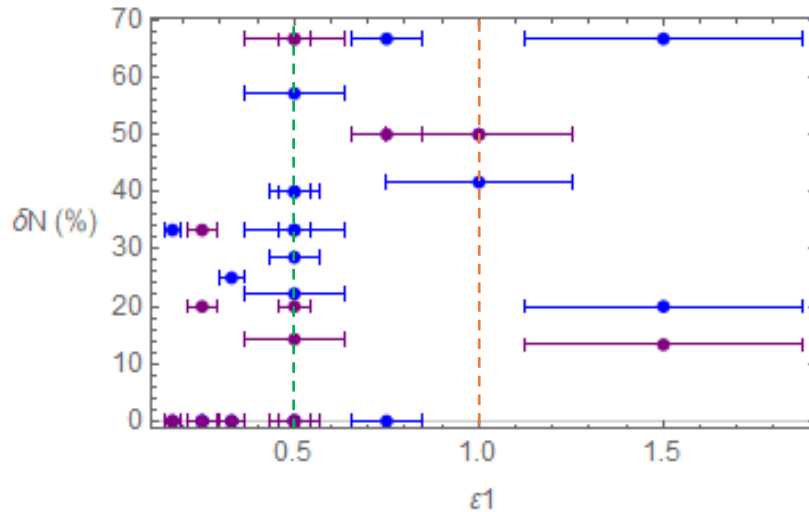
Desvios à Teoria KdV em função de η/L

- Observação Direta
- Cinéris



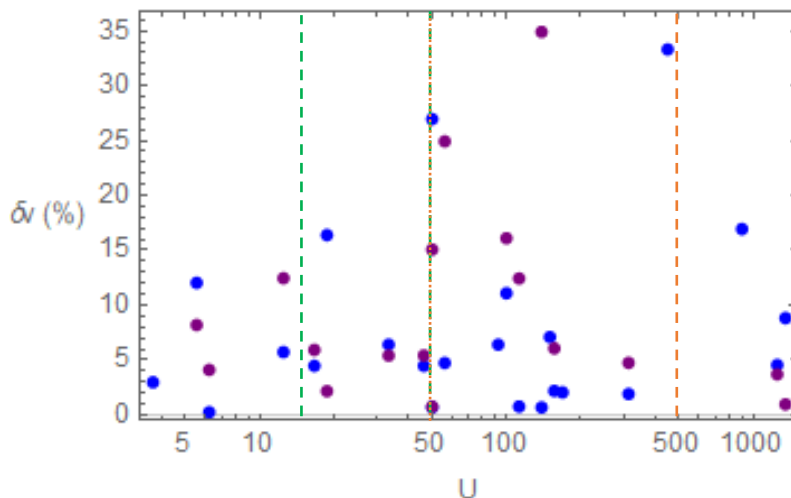
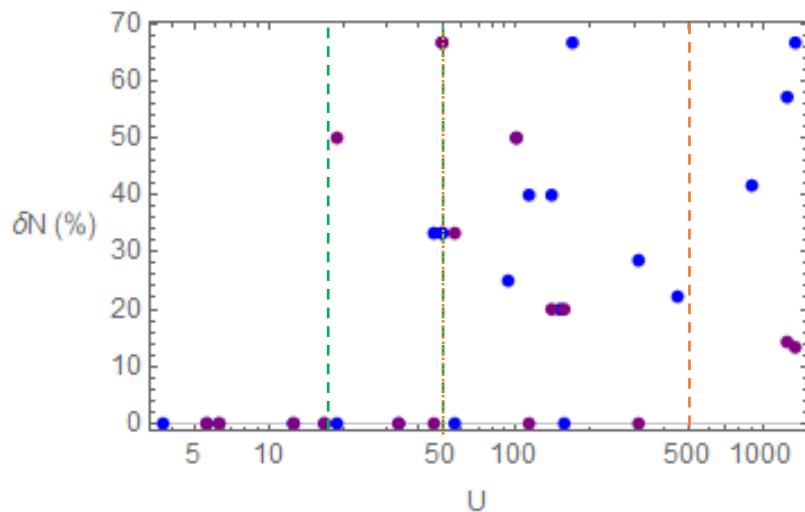
Desvios à Teoria KdV em função de ε_1

- Observação Direta
- Cinéris



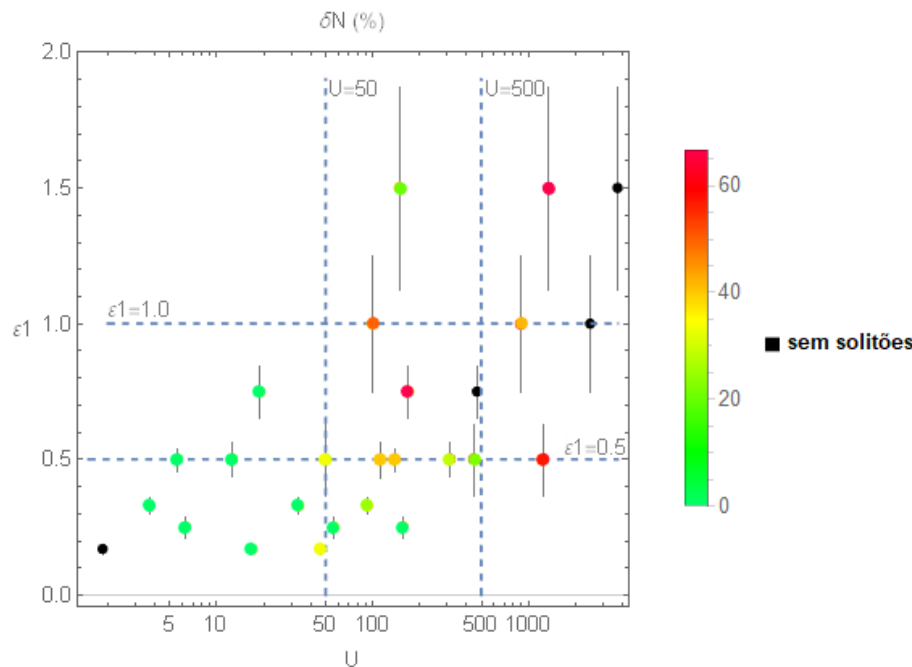
Desvios à Teoria KdV em função de U

- Observação Direta
- Cinéris

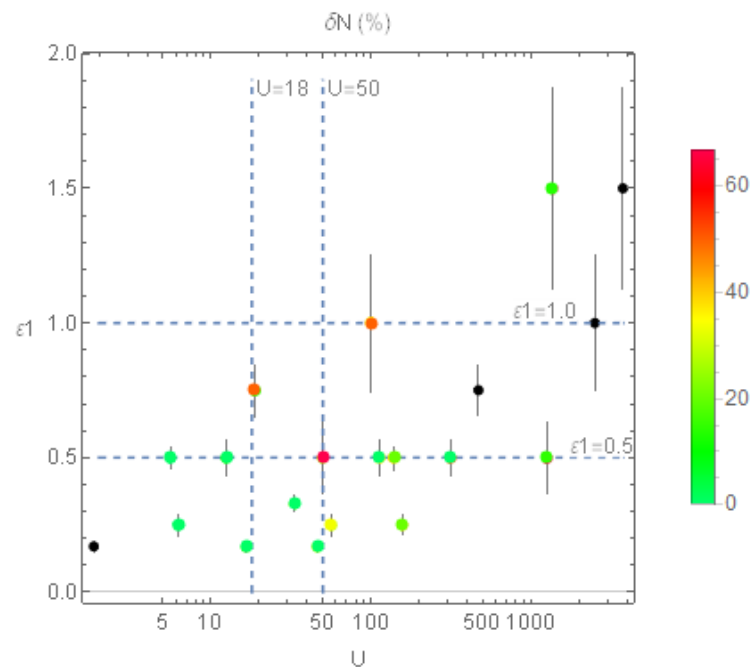


Desvios à Teoria KdV – Número de Solitões (U, ϵ_1)

Observação Direta

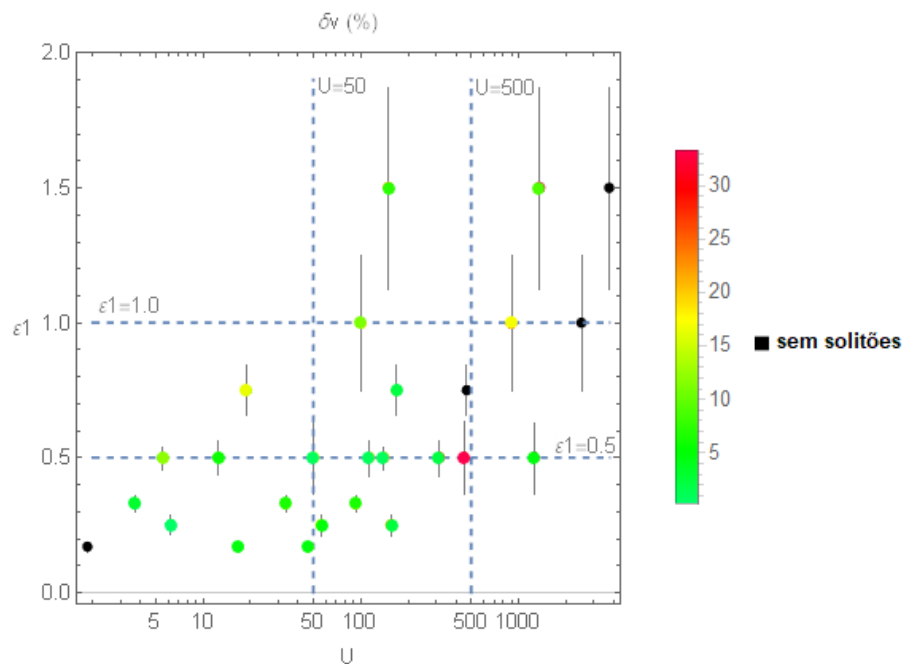


Reflexão Lasers

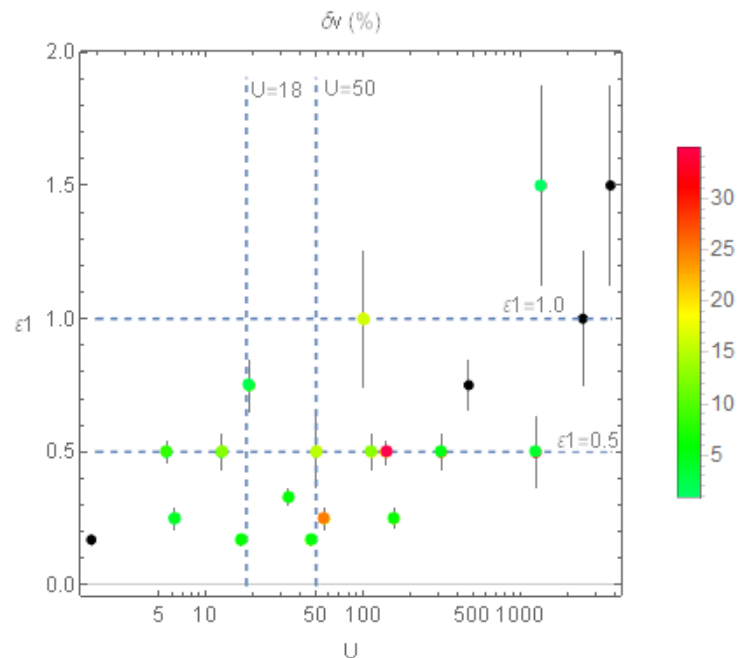


Desvios à Teoria KdV – Velocidade (U, ϵ_1)

Observação Direta



Reflexão Lasers



Região de Validade KdV

Região de Validade (Desvios < 30%)

Observação Direta

- $U < 50$
- $\varepsilon_1 < 0.5$

Reflexão Lasers

- $U < 18$
- $\varepsilon_1 < 0.5$

Região Crítica (Desvios > 30% Solitões ✓)

Observação Direta

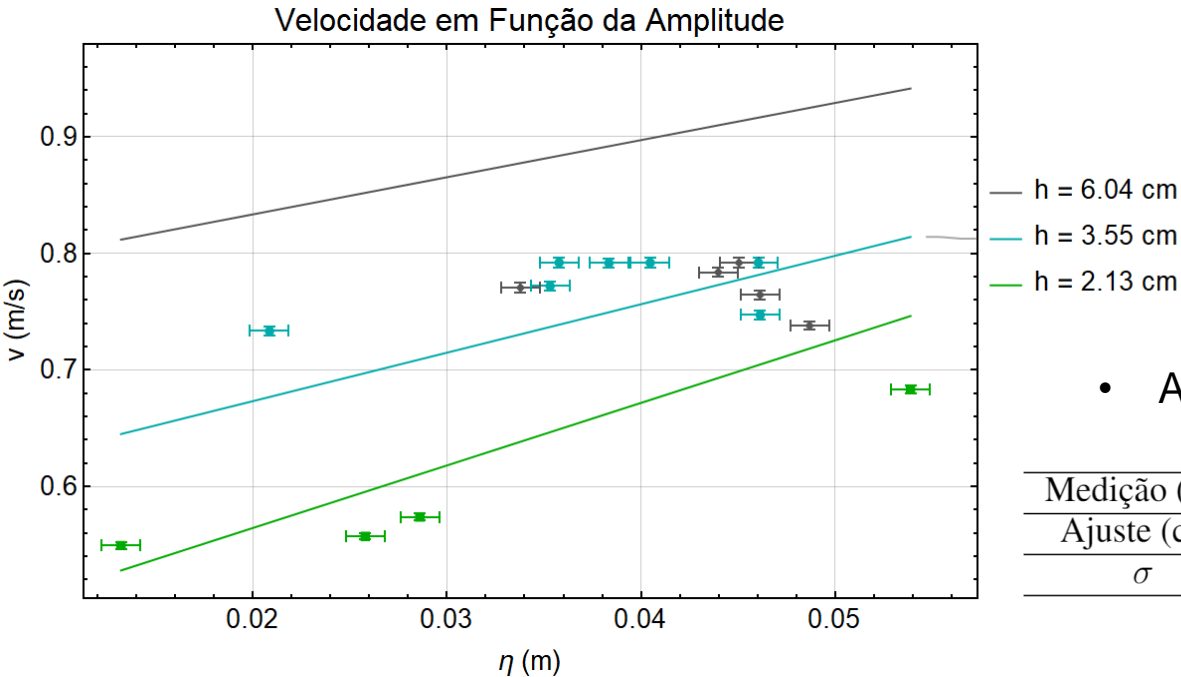
- $50 < U < 500$
- $0.5 < \varepsilon_1 < 1.0$

Reflexão Lasers

- $18 < U < 50$
- $0.5 < \varepsilon_1 < 1.0$

Os valores de ε_2 e η/L explorados estão dentro dos limites da teoria KdV, dada a geometria da montagem, logo pouco afetam a validade da teoria.

Amplitude e Velocidade



As retas esperadas para cada h seguem a relação

$$v = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{\eta}{2h} \right)$$

- Ajustes com h livre resultam em

Medição (cm)	2.13 ± 0.16	3.55 ± 0.20	6.04 ± 0.20
Ajuste (cm)	3.35 ± 0.04	3.95 ± 0.09	4.44 ± 0.20
σ	30.5	4.44	-8

Conclusões

- A teoria KdV descreve bem o número e velocidade dos solitões formados para $\varepsilon_1 < 0.5$ e $U < 18$
- A amplitude dos solitões não é bem descrita pela teoria KdV
- A execução da experiência podia ser melhorada com uma comporta mais estanque e rígida e uma tina e/ou bancada mais nivelada
- Com uma tina mais alta, poderíamos explorar valores de ε_2 maiores, dentro dos limites que estabelecemos para U

Caos em Sistemas Não-Lineares

Os **sistemas não lineares** são muitas vezes **muito sensíveis às condições iniciais**, o que os torna imprevisíveis e levam a um **comportamento caótico**.

Apesar da complexidade destes sistemas, há **comportamentos universais** como a **duplicação de período** no caminho para o caos ao variar um parâmetro externo.

Constantes de Feigenbaum

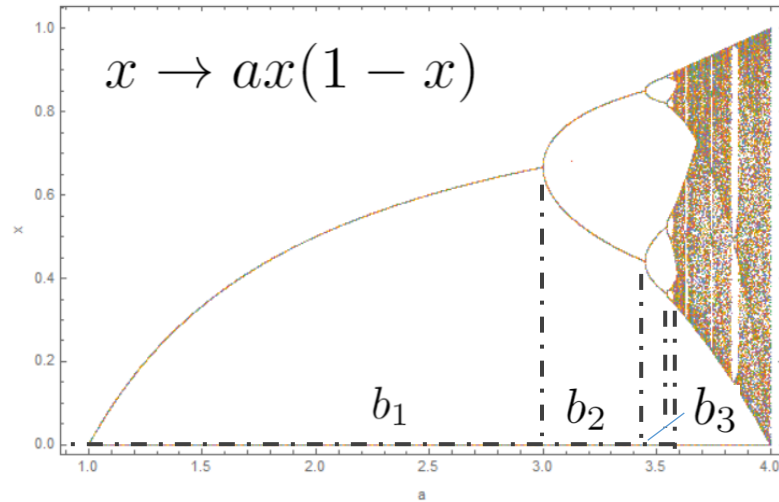
As razões de convergência de cada intervalo de bifurcação são universais

$$\delta = 4.6692016 \dots$$

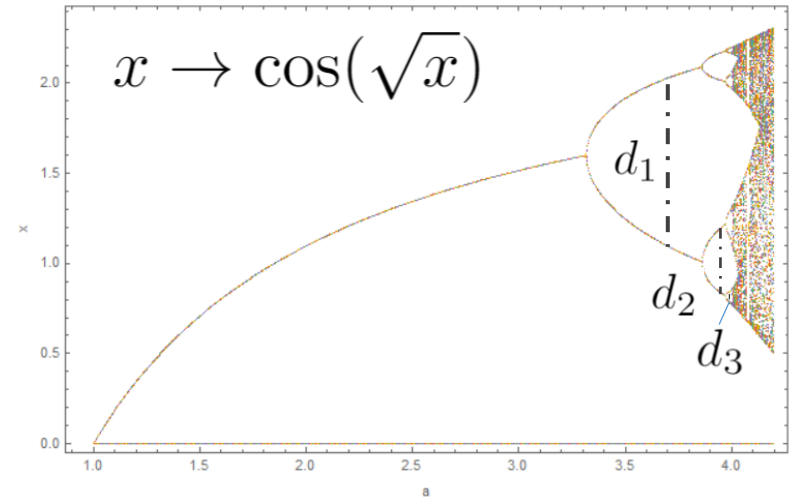
$$\alpha = 2.5029078 \dots$$

Diagrama de Bifurcações

A partir de um mapa de bifurcações, é possível **estimar** as **constantes de Feigenbaum**.



$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n+1} - b_n}$$



$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}}$$

Objetivos

Usando um **circuito RLC** com um diodo *varicap*, modelar caos e

- Construir um **mapa de bifurcações** variando a tensão de *offset*
- Obter um **mapa de intervalo** e o **itinerário** entre pontos fixos
- Obter aproximações das **constantes de Feigenbaum**, através de
 - trajetórias
 - frequências espectrais

e comparar com simulações numéricas, em que obtivemos

$$\delta = 4.66920$$

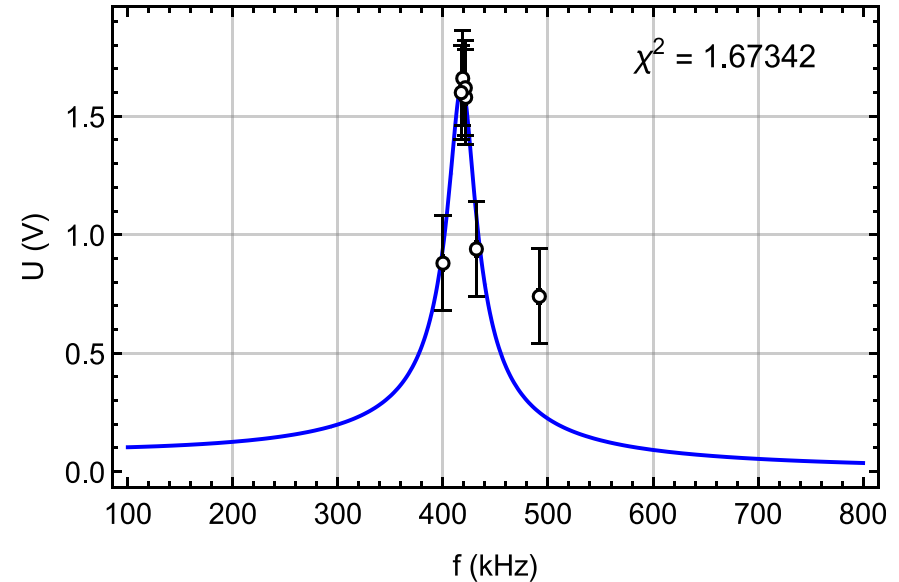
$$\alpha = 2.50291 \dots$$

Frequência de Ressonância

$$U(f) = \frac{U_0 f_0^2}{\sqrt{(f^2 - f_0^2)^2 + 4f^2 \gamma^2}}$$

com $\gamma = \frac{R}{2\pi 2L}$ e $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Parâmetro	Valor
U_0 (V)	0.097 ± 0.022
f_0 (kHz)	418.3 ± 3.1
γ (kHz)	12.4 ± 3.2



Duplicação de Período e Caos

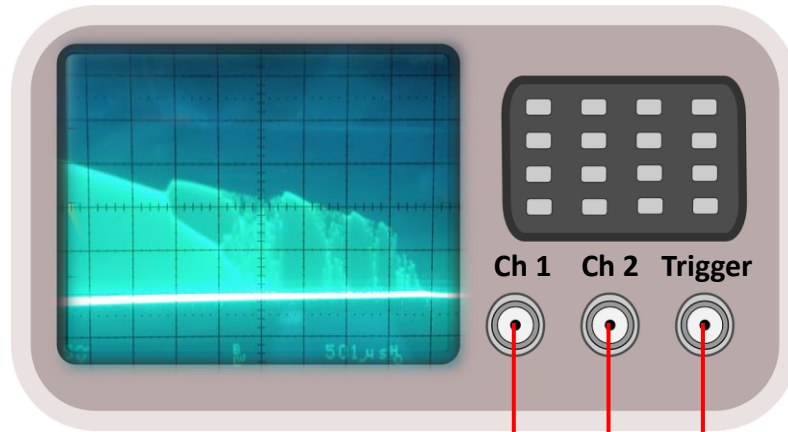
Aumentando a tensão de *offset*, observamos a **sequência de períodos**

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \text{Caos} \rightarrow 3 \rightarrow \text{Caos} \rightarrow 5$
 $\rightarrow \text{Caos} \rightarrow 6 \rightarrow \text{Caos} \rightarrow 12 \rightarrow \text{Caos} \rightarrow 3 \rightarrow \text{Caos} \rightarrow 2 \rightarrow 1$

para uma frequência $f = (390.50 \pm 0.02) \text{ KHz}$, perto da ressonância.

Mapa de Bifurcações

Ao varrer a tensão de *offset* com uma onda triangular de baixa frequência, conseguimos ver no osciloscópio um mapa de bifurcações e **janelas de estabilidade dentro do caos**.



Gerador Sinusoidal
Alta Frequência

Saída Díodo

Gerador Onda Triangular Baixa
Frequência

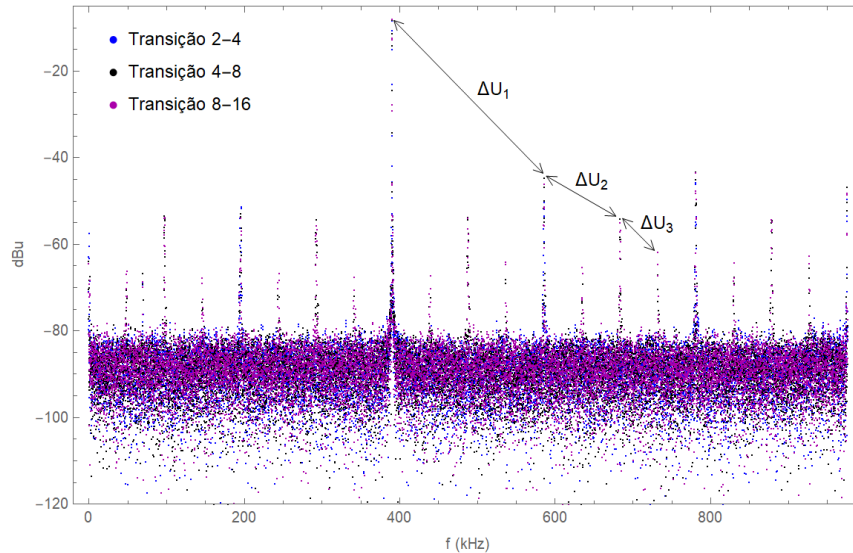
Determinação das Constantes de Feigenbaum

Método 1 Offset na Bifurcação das Trajetórias (Osciloscópio Modo XY)

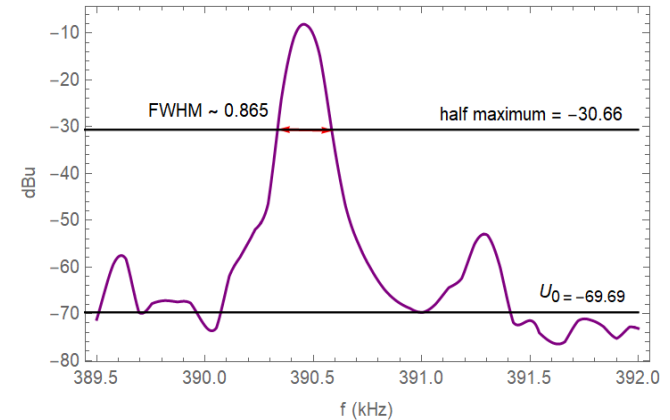
Período	δ	Desvio (%)	Desvio (σ)
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$	3.21 ± 0.18	31.2	-8.0
$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16$	7.94 ± 1.75	70.0	1.87

onde
$$\sigma_{\delta} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta b_n}}{\Delta b_{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta b_{n+1}} \Delta b_n}{\Delta b_{n+1}}\right)^2}$$

Método 2 Análise das Frequências Espectrais (Picoscope)

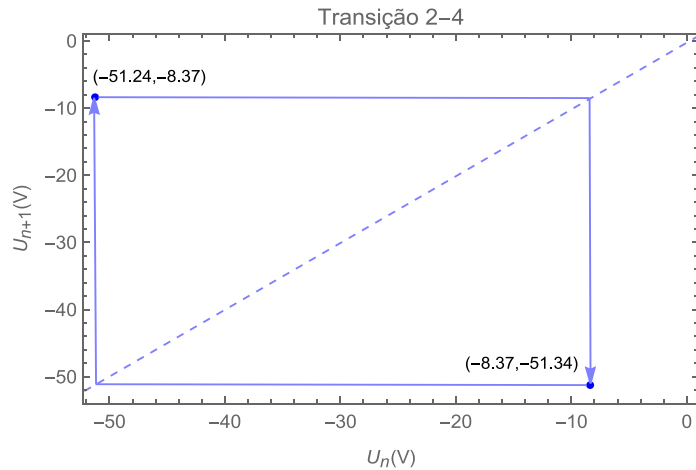


Estimativa da Incerteza: $\delta_f \sim 0.37$ kHz

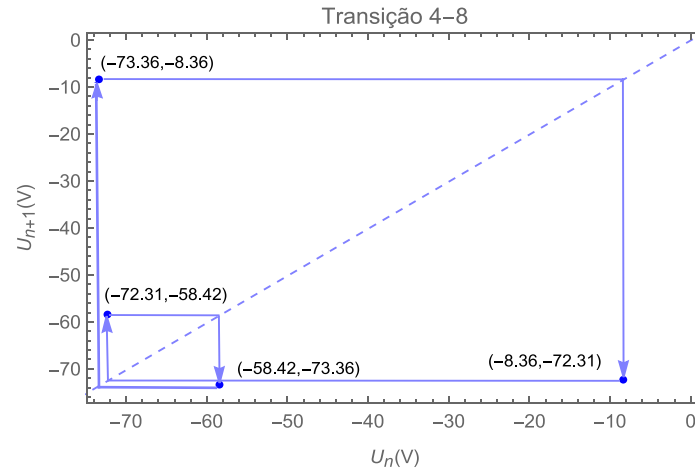


Transição	α	δ_α (%; σ)	δ	δ_δ (%; σ)
2→4	2.46 ± 0.62	1.6; 0.02	3.98 ± 1.48	14.7; 0.34
4→8	1.80 ± 0.63	33.0; 0.41		

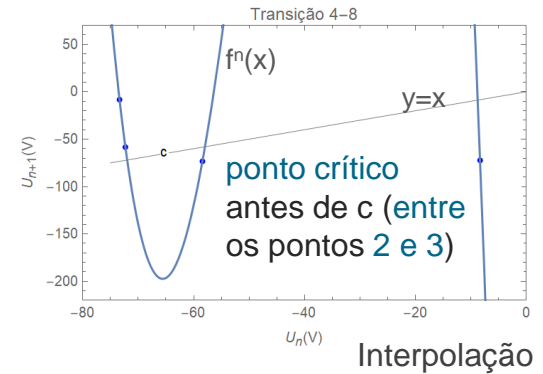
Mapas de Intervalo e Itinerários



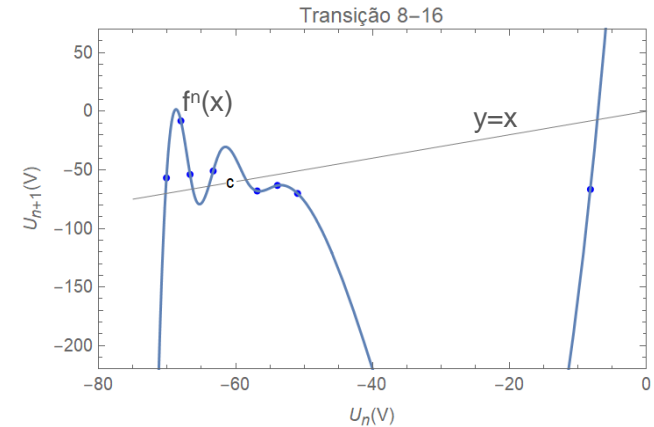
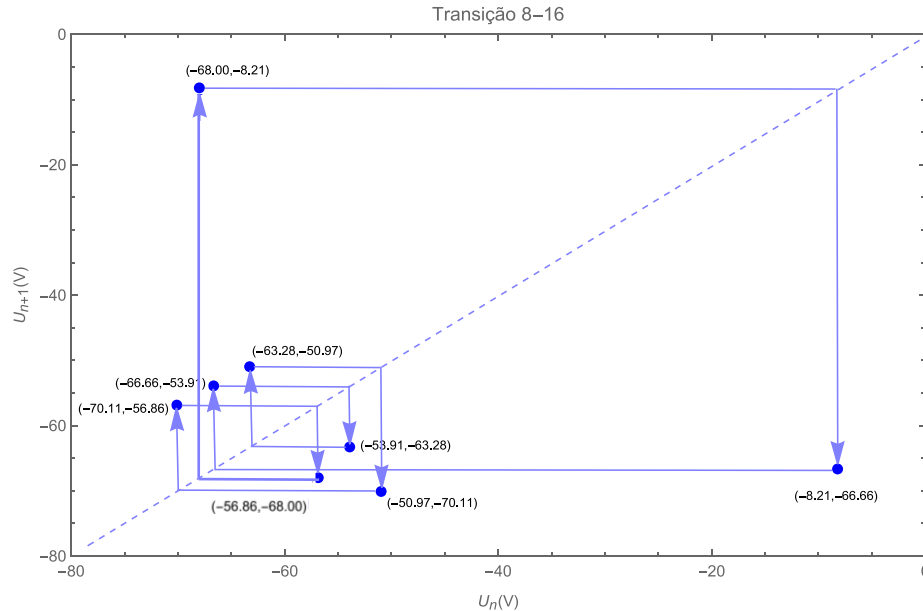
RL



RRLR



Mapas de Intervalo – Período 8



RRRRLRLR

O ponto crítico está antes de c
(entre os pontos 4 e 5)

Conclusões

- Um circuito RLC com diodo *varicap* permite modelar caos e caracterizá-lo.
- Observámos a **duplicação de período** no caminho para o caos e **janelas de estabilidade** dentro do caos.
- A análise das **frequências espectrais** permite determinar com **maior precisão** e exatidão as **constantes de Feigenbaum**, em comparação com as trajetórias.
- Usando o Cinéris, ao filmar o osciloscópio enquanto se aumenta o *offset*, poderíamos obter o diagrama de bifurcações (ou então gravar o que vimos).

Bibliografia

- Além da disponibilizada na página da cadeira:

David Tong (2005), *TASI Lectures on Solitons*, damtp.cam.ac.uk/user/tong/tasi.html

Haidar Esseili (2018), *Calculating the Feigenbaum Constants In A Nonlinear RLD Circuit*, physics.wooster.edu/JrIS/Files/Web_Article_Esseili.pdf

Keith Briggs (2001), *Feigenbaum Scaling in Discrete Dynamical Systems*, Tese de Doutoramento, Universidade de Melbourne, keithbriggs.info/documents/Keith_Briggs_PhD.pdf

- Com mais cuidado, aquilo que fizemos não é muito diferente de trabalhos que deram origem a publicações em revistas internacionais de boa qualidade:

Hanias, Michael et al. (2009). *Period Doubling, Feigenbaum Constant and Time Series Prediction in an Experimental Chaotic RLD Circuit*. Chaos, Solitons & Fractals.



TÉCNICO LISBOA

Solitões

No Parque das Nações, muitas crianças divertem-se a observar solitões. Quando o “vulcão” entra em erupção, formam-se solitões - mantêm a forma mesmo depois de serem refletidos!



Ensaaios Solitões

27 Ensaaios, passo uniforme

- $h = 2, 4, 6$ cm
- $A = 2, 4, 6$ cm
- $B = 10, 30, 50$ cm

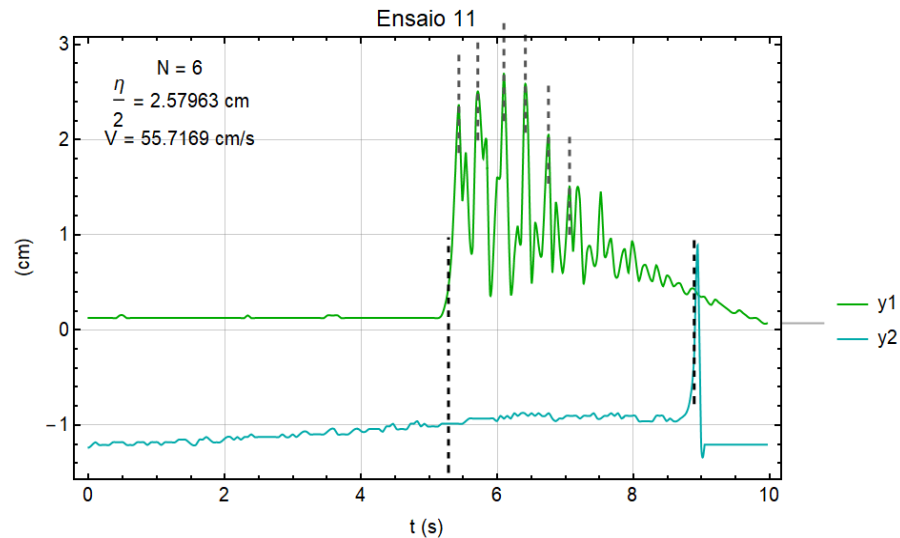
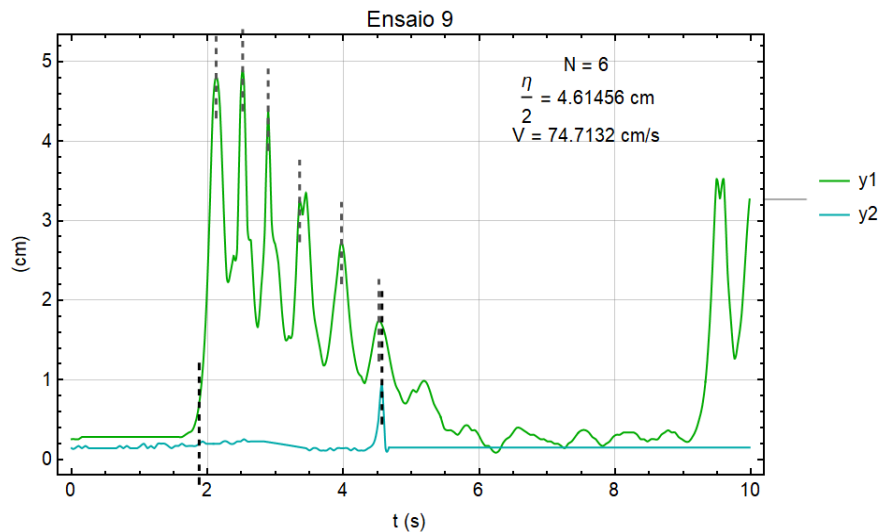
9 ensaios $U < 50$

12 ensaios $50 < U < 500$

6 ensaios $U > 500$

h (cm)	A (cm)	B (cm)	a (cm)	L (cm)	S	N	v (cm/s)	ϵ_1	ϵ_2	U
2	2	10	1	20	8.66	3	55.34	0.5	0.01	50
		30		60	25.98	9	55.34	0.5	0.0011	450
		50		100	43.3	14	55.34	0.5	0.0004	1250
	4	10	2	20	12.25	4	66.41	1	0.01	100
		30		60	36.74	12	66.41	1	0.0011	900
		50		100	61.24	20	66.41	1	0.0004	2500
	6	10	3	20	15	5	77.48	1.5	0.01	150
		30		60	45	15	77.48	1.5	0.0011	1350
		50		100	75	24	77.48	1.5	0.0004	3750
4	2	10	1	20	3.06	1	70.44	0.25	0.04	6.25
		30		60	9.19	3	70.44	0.25	0.0044	56.25
		50		100	15.31	5	70.44	0.25	0.0016	156.25
	4	10	2	20	4.33	2	78.26	0.5	0.04	12.5
		30		60	12.99	5	78.26	0.5	0.0044	112.5
		50		100	21.65	7	78.26	0.5	0.0016	312.5
	6	10	3	20	5.3	2	86.09	0.75	0.04	18.75
		30		60	15.91	6	86.09	0.75	0.0044	168.75
		50		100	26.52	9	86.09	0.75	0.0016	468.75
6	2	10	1	20	1.67	1	83.07	0.167	0.09	1.85
		30		60	5	2	83.07	0.167	0.01	16.67
		50		100	8.33	3	83.07	0.167	0.0036	46.3
	4	10	2	20	2.36	1	89.46	0.333	0.09	3.7
		30		60	7.07	3	89.46	0.333	0.01	33.33
		50		100	11.79	4	89.46	0.333	0.0036	92.59
	6	10	3	20	2.89	1	95.85	0.5	0.09	5.56
		30		60	8.66	3	95.85	0.5	0.01	50
		50		100	14.43	5	95.85	0.5	0.0036	138.89

Análise de Dados - Cinéris



Programa de Contagem de Solitões

Para um conjunto de pontos $\{t_i, x_i\}_{i=1}^N$

$$\Delta = \text{Max}[\{x_i\}_{i=1}^N] - \text{Min}[\{x_i\}_{i=1}^N]$$

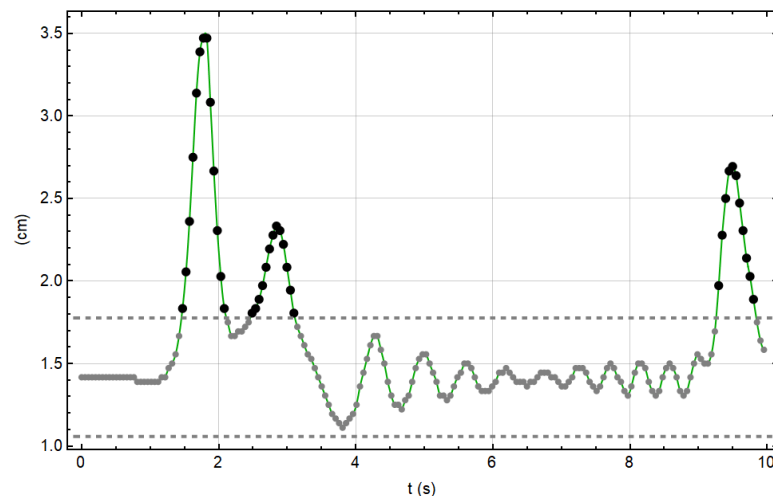
- Cálculo da **amplitude de oscilação** e do **nível inicial** da água:

$$\mu = \text{Mean}[\{x_i\}_{i=1}^k]$$

- Escolhe-se uma **tolerância** de aceitação e percorrem-se os dados, procurando conjuntos de pontos que satisfaçam:

$$|x_i - \mu| \geq (1 - \text{tol})\Delta$$

- Em cada um desses conjuntos, procuram-se zonas onde o sinal da derivada mude de + para - e procuram-se os máximos nessas zonas.

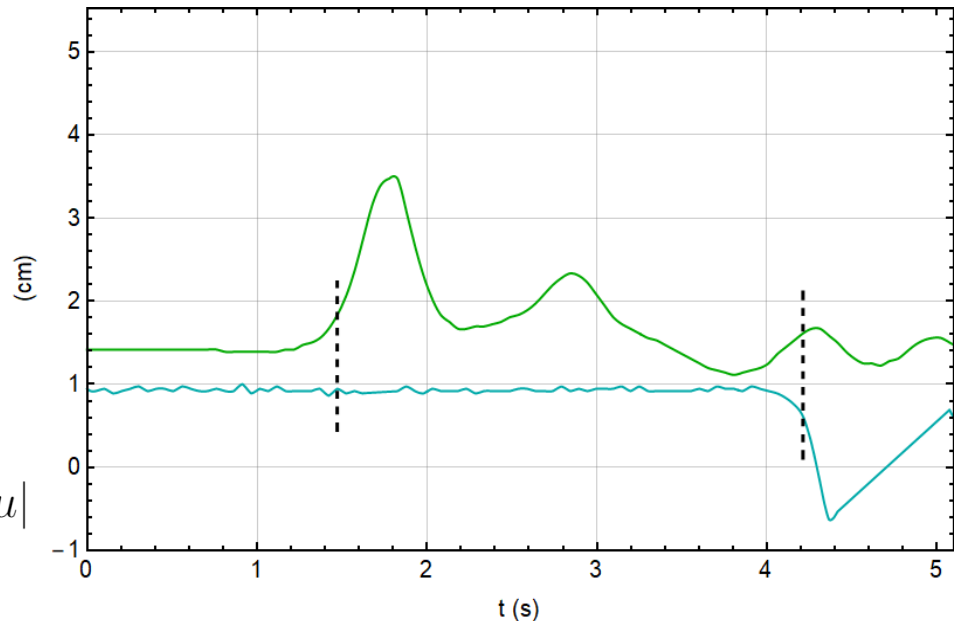


Programas de Cálculo da Velocidade e Amplitude

Velocidade: Procuram-se as primeiras zonas de grande oscilação da água para os dois lasers. Sabendo a distância entre lasers, é então possível calcular a velocidade. Havendo dados em que o laser azul desaparece, considera-se que as oscilações começaram no último ponto disponível.

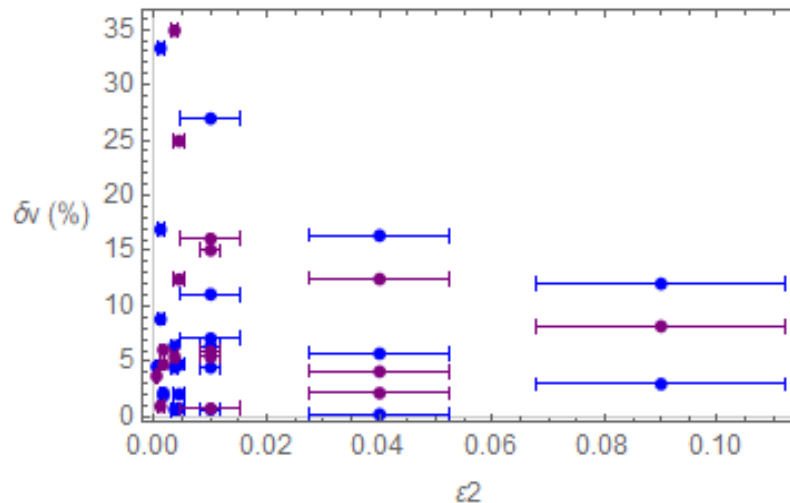
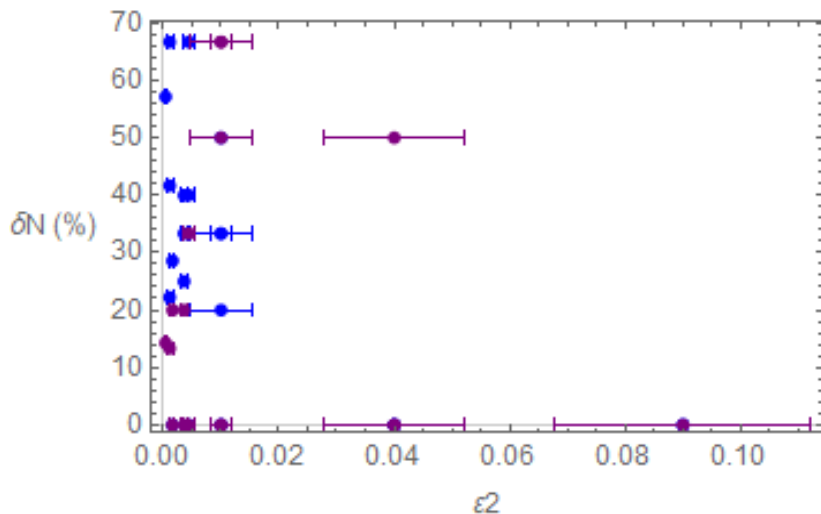
Amplitude: Sabendo a posição dos solitões, basta tomar a maior das amplitudes e subtrair o nível inicial da água.

$$v = \frac{L}{\tau_2 - \tau_1} \quad \frac{\eta}{2} = |\text{Max}[\{y_1(t_i)\}_{i=1}^{N_s}] - \mu|$$



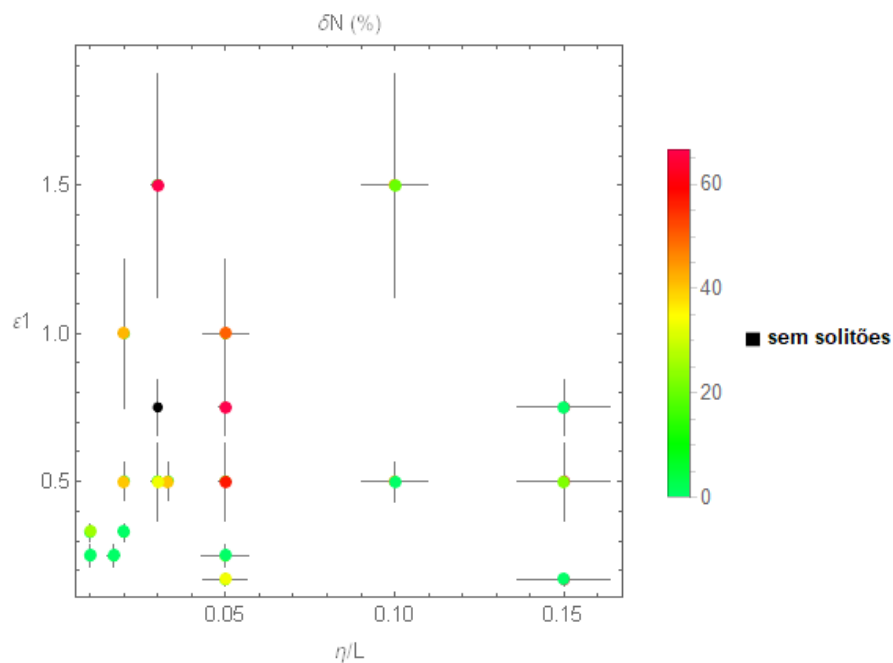
Desvios à Teoria KdV em função de ϵ^2

- Observação Direta
- Cinéris

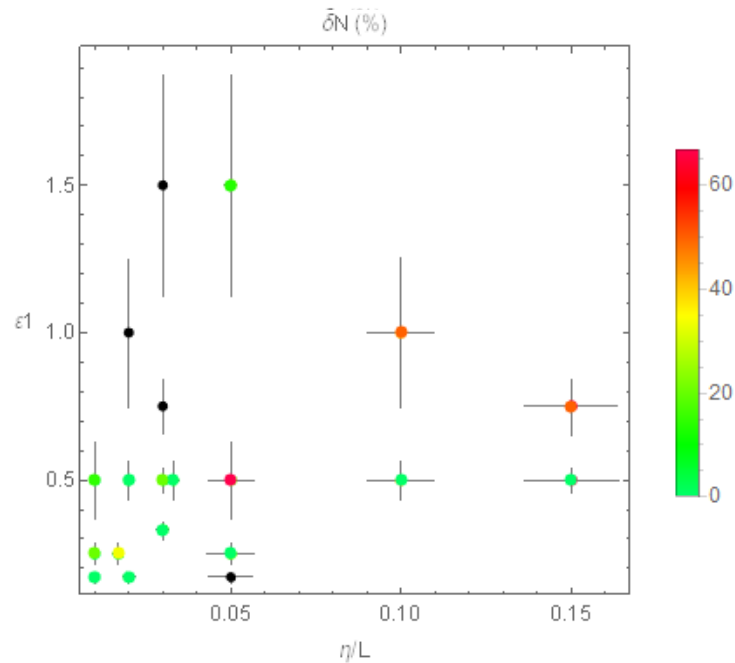


Desvios à Teoria KdV – Número de solitões ($\eta/L, \varepsilon_1$)

Observação Direta

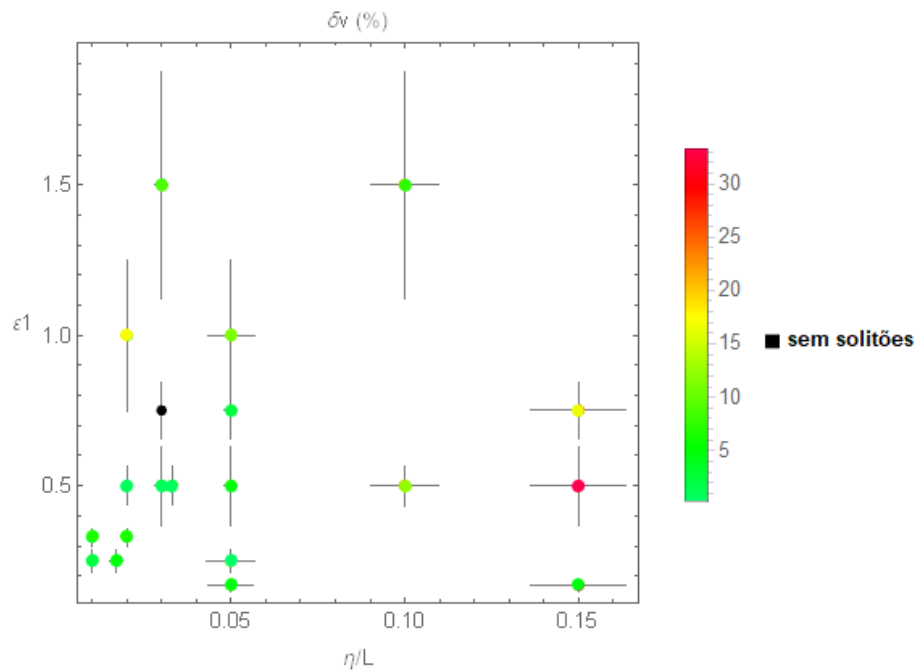


Reflexão Lasers

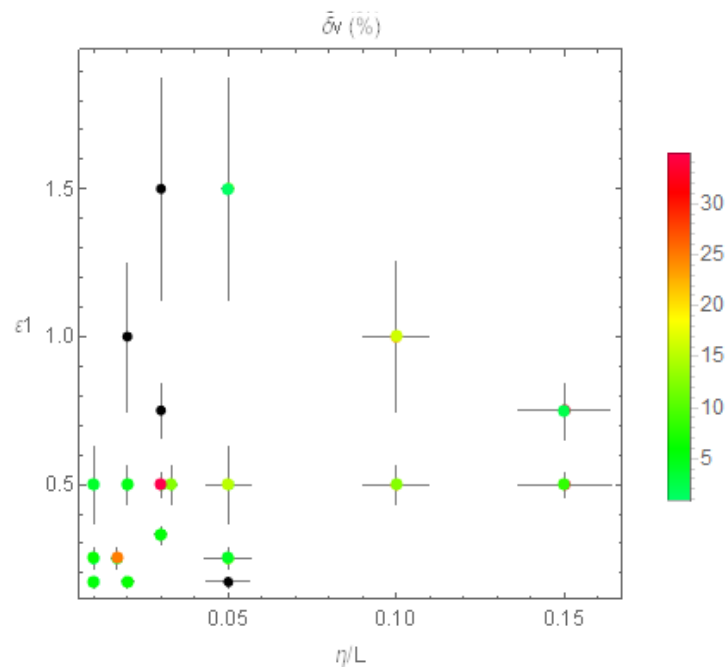


Desvios à Teoria KdV – Velocidade ($\eta/L, \varepsilon_1$)

Observação Direta

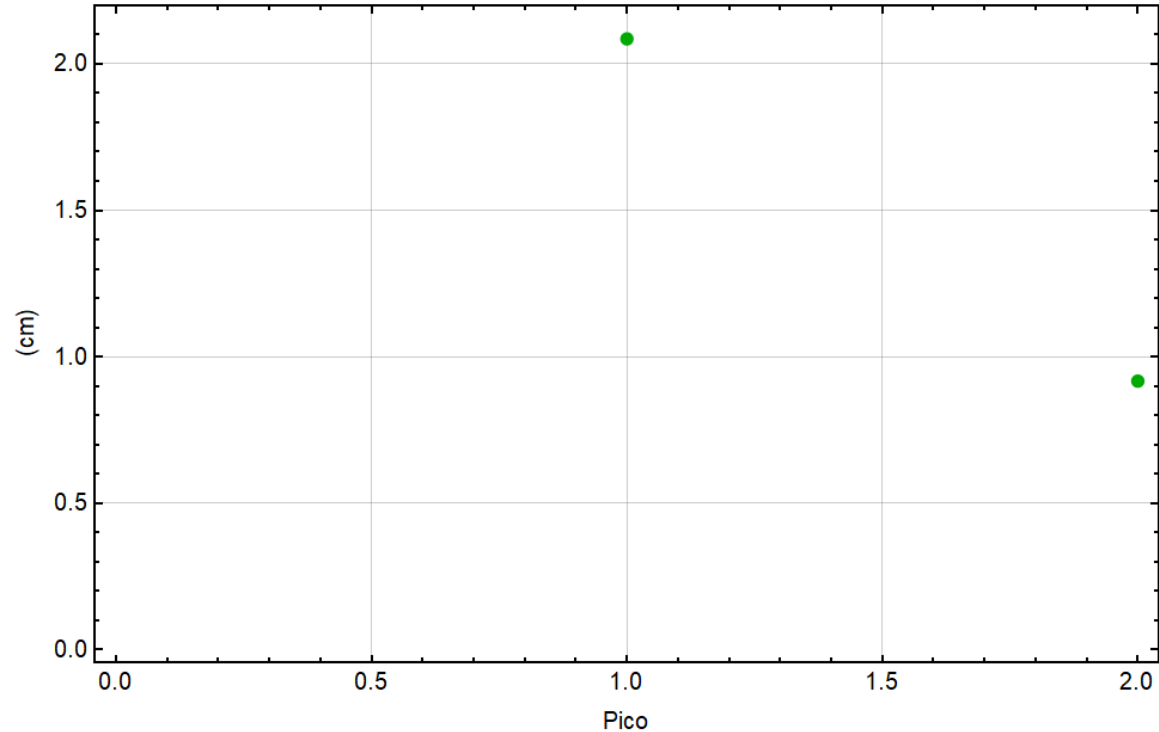


Reflexão Lasers



Relação entre Amplitudes

Tendência geral observada:
amplitude diminui em
solitões sucessivos -
existência de dissipação de
energia.

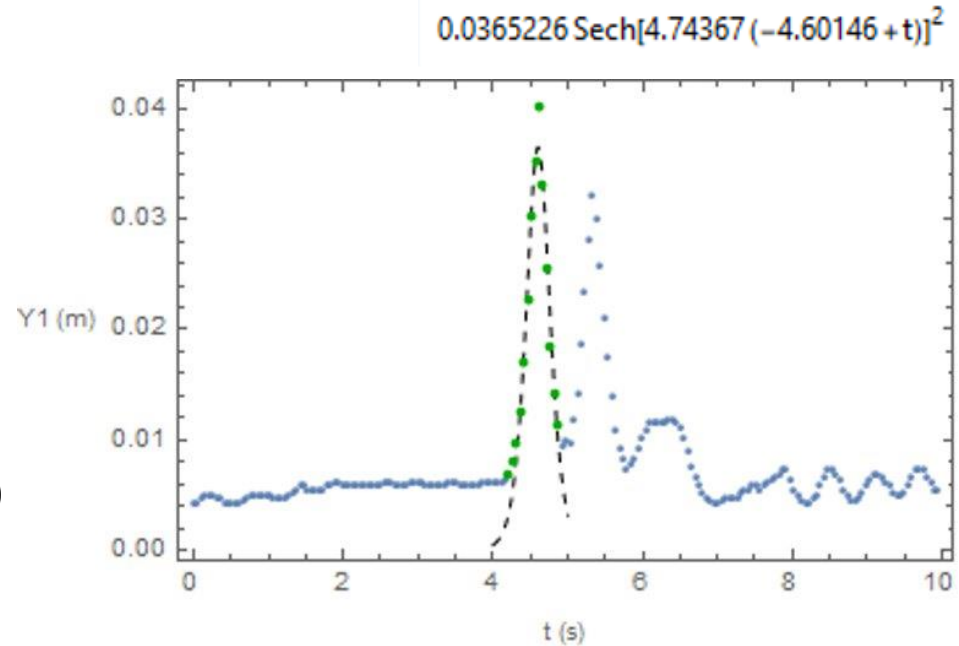


Ajuste à Solução KdV

Ajuste a uma função da forma

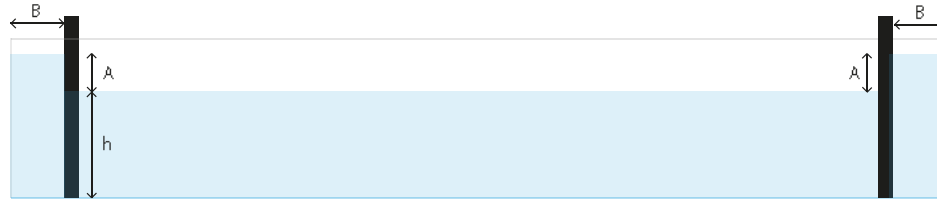
$$\eta(x, t) = \text{sech}^2\left(\frac{x - ct}{L}\right)$$

para um ensaio (2) dentro das condições da teoria ($U = 12.5$, $\varepsilon_1 = 0.5$)



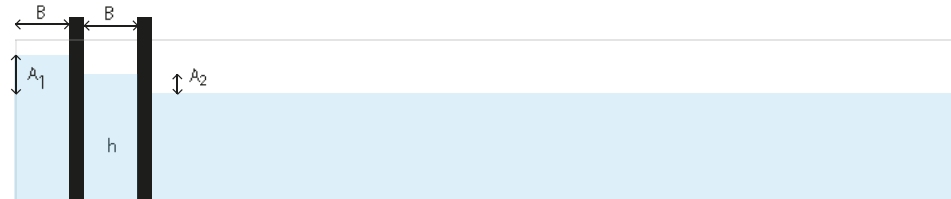
Colisões e Ultrapassagens

- Colisões



- A forma dos solitões manteve-se após a colisão

- Ultrapassagens



- $A_1 > A_2$ para $v_1 > v_2$. Os ensaios foram inconclusivos.

Determinação Numérica Constantes Feigenbaum

We consider the sequence of polynomials in a defined by

$$\begin{aligned}b_k(a) &= a - [b_{k-1}(a)]^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\b_0(a) &= 0.\end{aligned}$$

The following property makes these polynomials useful for our purposes.

Lemma 3 *Let $k = 2^n$. Then f_a has a superstable k -cycle iff $b_k(a) = 0$.*

Calcular δ

Encontrar zeros do polinómio $b_{2^n}(a)$ usando o método de Newton

$$a_i^0 = a_{i-1} + \frac{a_{i-1} - a_{i-2}}{\delta_{i-1}}, \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

$$a_i^{j+1} = a_i^j - \frac{b_{2^j}(a_i^j)}{b'_{2^j}(a_i^j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$b'_k(a) = 1 - 2b'_{k-1}(a)b_{k-1}(a), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_i = \lim_{j \rightarrow \infty} a_i^j$$

$$\delta_i = \frac{a_{i-1} - a_{i-2}}{a_i - a_{i-1}}$$

$$\delta = \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i$$

Calcular α

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b'_{i+1}(a_{i+1})}{b'_i(a_i)} = \delta/\alpha.$$

Determinação Numérica Constantes Feigenbaum

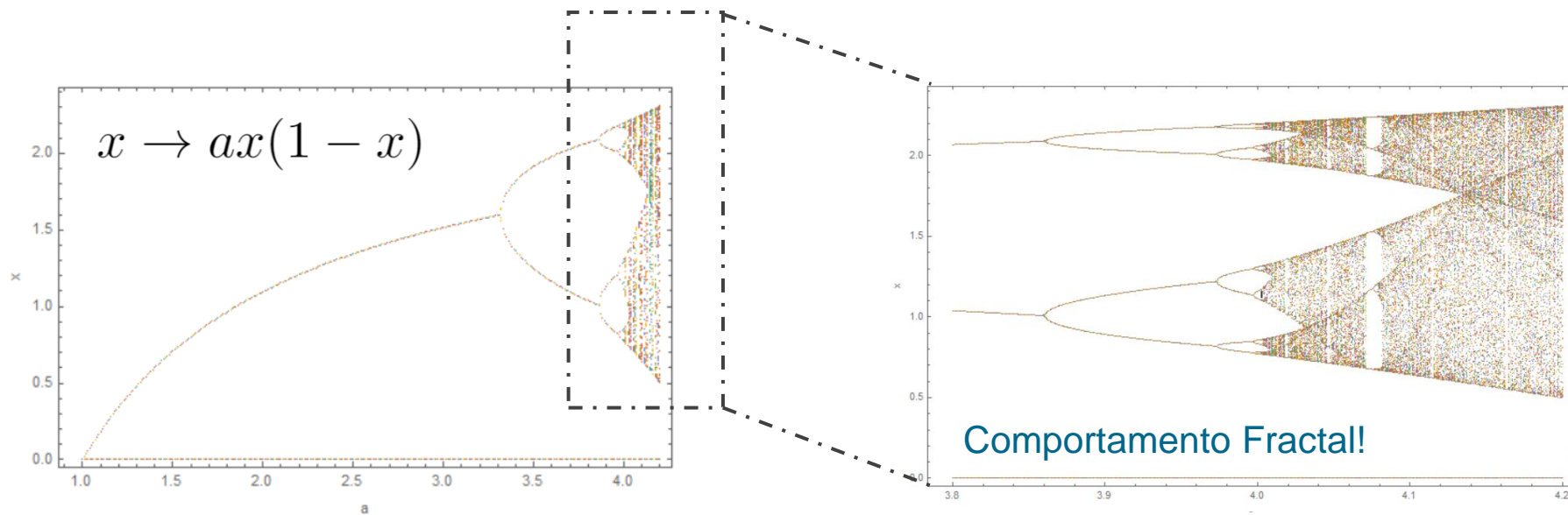
Ao fim de 10 iterações, obtemos 5 algarismos certos para as constantes de Feigenbaum

O *notebook* de Mathematica com o código usado para a determinação das constantes e para o *plot* dos mapas de bifurcação de diferentes funções pode ser descarregado [aqui](#)

Iteração	α	δ
1	1.0	3.0
2	1.85603	3.21851
3	2.39488	4.38568
4	2.47533	4.60095
5	2.49740	4.65513
6	2.50168	4.66611
7	2.50265	4.66855
8	2.50285	4.66906
9	2.50290	4.66917
10	2.50291	4.6692

Diagrama de Bifurcações

Alguns dos regimes aperiódicos são ergódicos. Após período 3, todos são possíveis.



Porque é que há Caos num Circuito RLD?

A capacidade do díodo *varicap* depende da tensão aos seus terminais.

Uma vez que ao ser excitado por uma onda sinusoidal, *alterna entre bias* positivo e negativo.

Se o sinal tiver frequência elevada, *não há tempo para se atingir equilíbrio* e a *resposta* do díodo *depende do estado anterior*, induzindo um comportamento caótico.

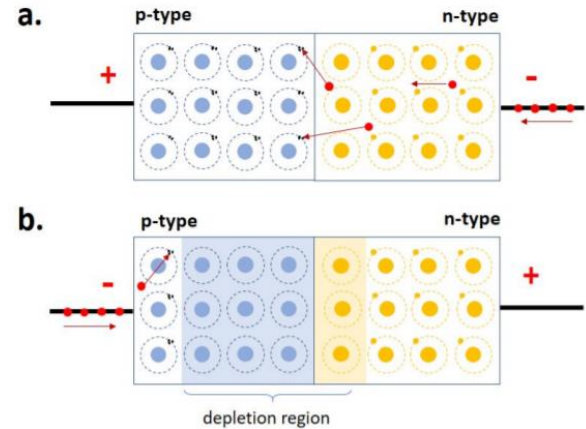


FIG. 4: Schematic of a pn-junction in operation. In (a) forward bias of pn-junction characterized by the depletion region getting smaller, and (b) reverse bias of a pn-junction characterized by the depletion region getting wider.

Haidar Esseili, *Calculating the Feigenbaum Constants In A Nonlinear RLD Circuit*, College of Wooster, 2018

Determinação Constante Feigenbaum - Trajetórias

As tensões correspondentes a cada transição são (estimando a incerteza como sendo da ordem da largura do feixe – diferente quando mudamos de escala no osciloscópio):

Transição	Tensão (V)
1 \rightarrow 2	1.36 ± 0.01
2 \rightarrow 4	0.952 ± 0.002
4 \rightarrow 8	0.825 ± 0.002
8 \rightarrow 16	0.809 ± 0.002

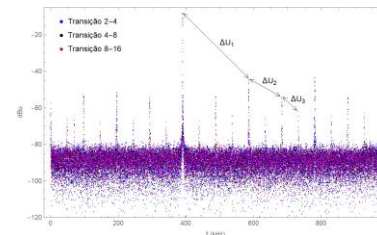
A incerteza na transição é bastante maior, porque é difícil distinguir onde é que ocorre exatamente, pelo que estimamos

$$\Delta b_n \approx 0.03 \text{ V}$$

que é a diferença entre $8 \rightarrow 16$ e a transição seguinte para o caos, que eram próximas o suficiente para a distinção ser difícil (até porque há histerese).

Cálculo de δ e α a partir do espectro (*picoscope*)

1. Para cada transição, escolher uma janela de frequências que (idealmente) só apanhe um período do espectro.
2. Aplicar 'FindPeaks' do Mathematica com uma largura de busca em frequência (~ variância) não nula – facilita o reconhecimento dos picos que queremos, uma vez que os dados são discretos e há muitos "picos fortuitos".
3. Ordenar os picos do maior para o menor e escolher apenas os $N=2^i$ primeiros. Ordená-los de novo por frequência crescente.
4. Calcular **diferenças entre picos** (tensões) de **cada período**: obtém-se α (2 valores foram possíveis porque há 3 períodos).
5. Calcular **diferenças entre frequências** onde ocorrem **bifurcações** (para **períodos sucessivos**): obtém-se δ (1 valor foi possível porque há 3 períodos).



Ensaio 1:

Diferenças entre picos:

Período 2: 42.7317

Período 4: 63.5613, -67.3325, 21.6865

Período 8: -57.9376, 12.2691, -9.12581, 12.1991, -14.455, 9.95416, -6.64715

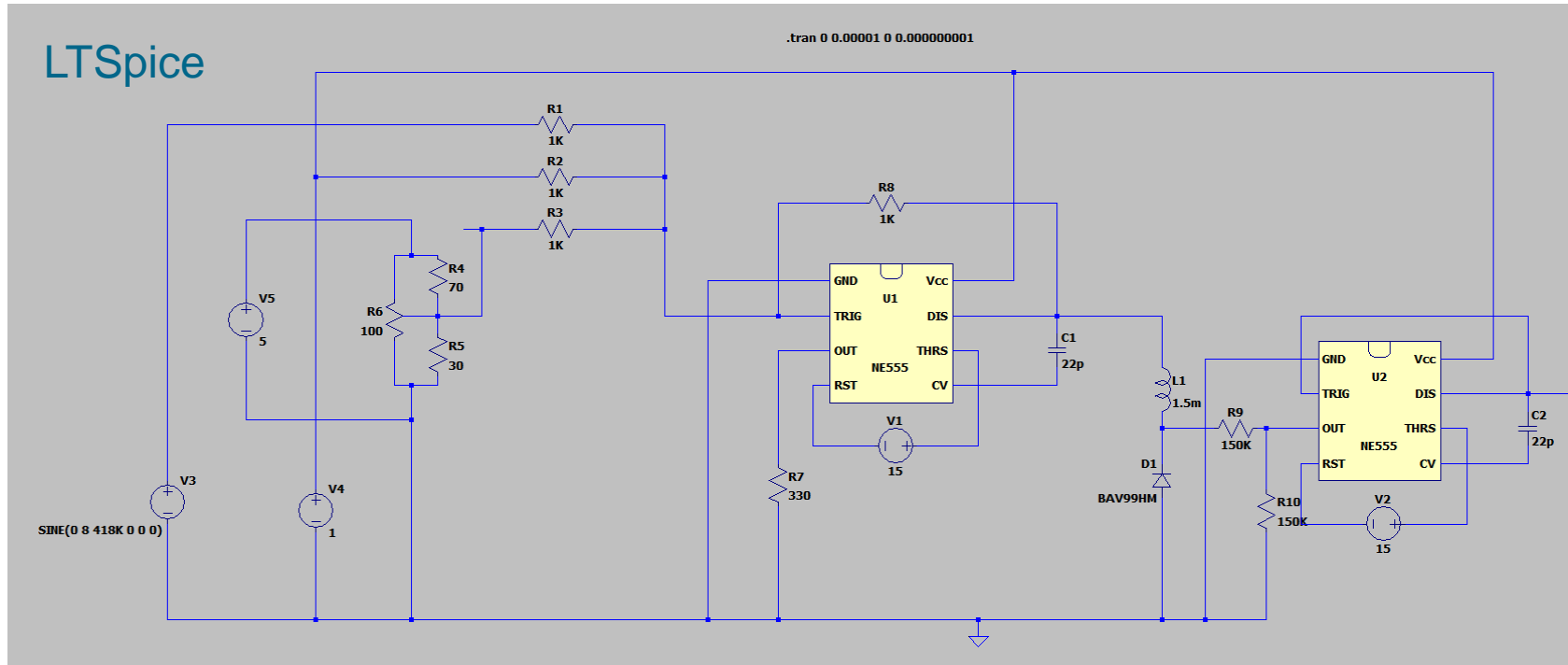
Diferenças entre frequências de bifurcações (kHz):

2→4: 194.371

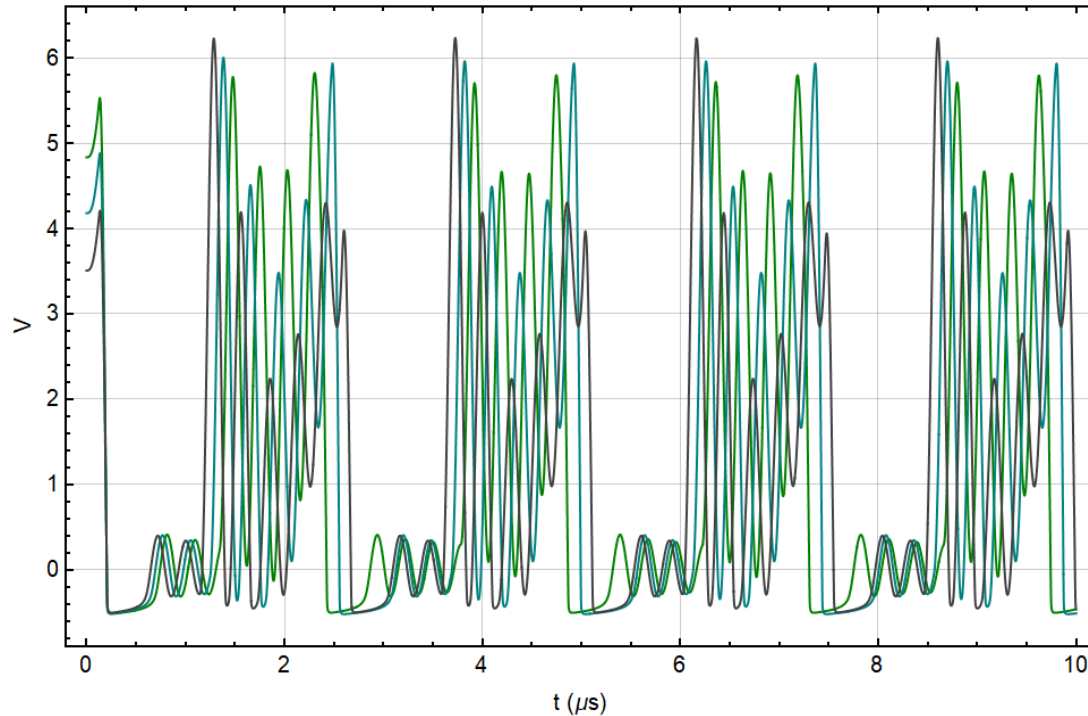
4→8: 48.8162, 47.9817, 49.6507

Ensaio	Transição	α	δ
1	2→4	1.970	3.915
	4→8	2.179	
2	2→4	2.329	4.046
	4→8	1.804	
3	2→4	3.087	3.988
	4→8	1.048	

Simulação do Circuito

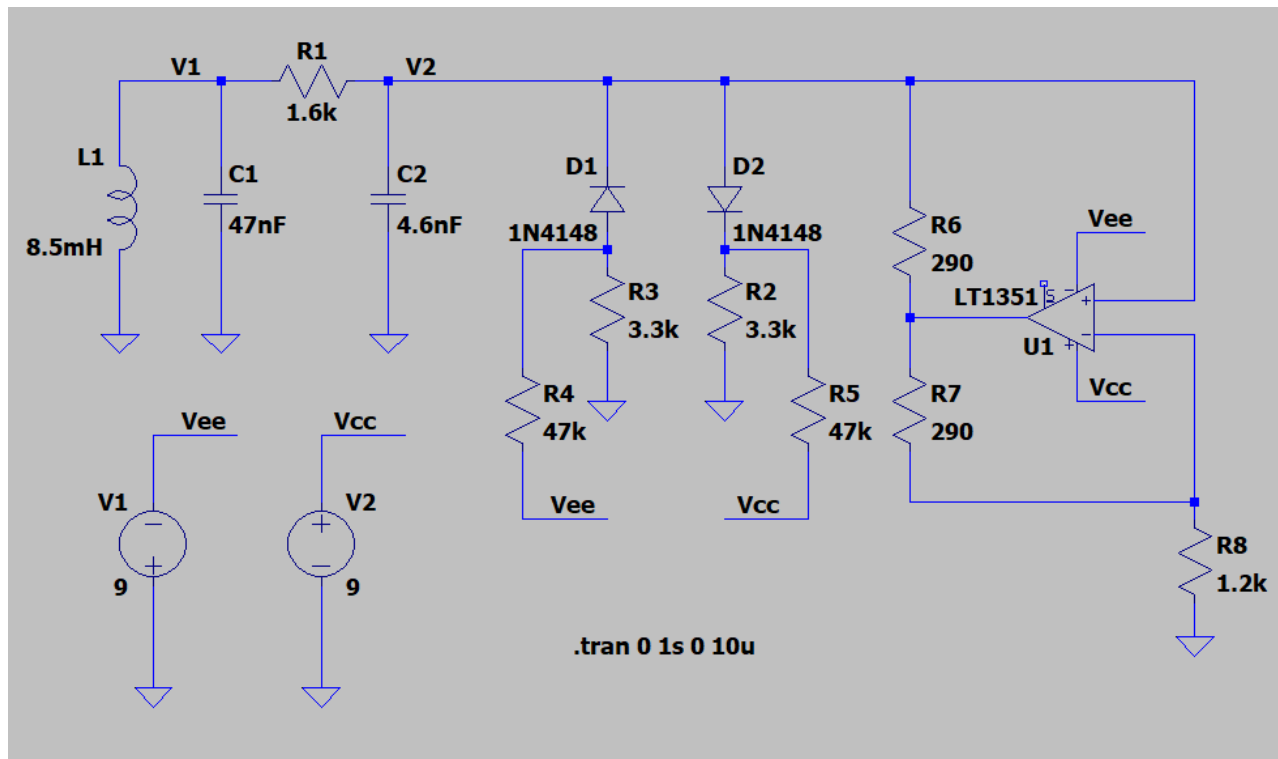


Simulação do Circuito - Resultados



Uma pequena mudança na resistência do potenciômetro resulta na separação de alguns picos e no surgimento de outros!

Circuito Alternativo



Circuito Alternativo – Resultados

