Mecânica Analítica

2020-2021

Série 0

Responsável: Hugo Terças

O objectivo desta série de exercícios consiste numa primeira exposição ao cálculo tensorial e suas aplicações

Problema 1. Transformação de tensores. Usando a propriedade de transformação de vectores contravariantes, $x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, onde $A^{\alpha}_{\beta} = \dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$ (a definição de A é arbitrária, sendo que escolhemos A^{-1} para designar a matriz de transformação dos vectores da base), verifique as seguintes propriedades:

a) $\omega'_{\mu\nu} = (A^{-1})^{\alpha}_{\mu}(A^{-1})^{\beta}_{\nu}\omega_{\alpha\beta}$

b) A contracção de um vector contravariante com um vector covariante é um invariante, i.e. $a'^{\mu} b'_{\mu} = a^{\nu} b_{\nu}$

c) O produto interno usual só é invariante em espaços ortornormados, i.e $a'^{\mu} y'^{\mu} = a^{\nu} y^{\nu}$ sse $A^T = A^{-1}$.

d) O produto interno generalizado $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = t_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu}$ é invariante e mantém a comutatividade se $t_{\mu\nu}$ for um tensor simétrico.

e) Os tensores $s_{\mu\nu} = u_{\mu} w_{\nu} + u_{\nu} w_{\mu}$ e $a_{\mu\nu} = u_{\mu} w_{\nu} - u_{\nu} w_{\mu}$ são respectivamente simétrico e anti-simétrico.

f) A contracção do símbolo de Levi-Civita com um tensor simétrico é nulo, $\epsilon_{\mu\nu\alpha} s_{\nu\alpha} = 0$.

g) Recorrendo ao tensor de Levi-Civita, mostre a seguinte (muito útil!) identidade vectorial: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

h) Repita o procedimento para se convencer de que $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = 0$ e $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) = 0$, para quaisquer f e $\boldsymbol{u}$[1].

i) Com alguma paciência, parta da definição do tensor de Levi-Civita para demonstrar $\epsilon_{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\mu\rho\beta} = \delta_{\nu\rho}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\nu\beta}\delta_{\alpha\rho}$.

Problema 2. Tensor da métrica. Considere o tensor da métrica definido por $g_{\mu\nu} = \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}} \dfrac{\partial x_{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}$.

[1] Não invente! Seja simpático e assuma que f e $\mathbf{u}$ estão bem definidos no seu domínio. Deixemos as patologias para os matemáticos...

a) Parta da definição para mostrar que o tensor da métrica em coordenadas polares (r, θ) se escreve

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

Porque razão é diagonal?

b) Partindo da métrica euclidiana, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1)$, faça uso da regra de transformação dos tensores para chegar ao resultado do ponto a).

c) Verifique a seguinte propriedade de contracção da métrica, $g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = \delta^\alpha_\nu$.

d) Mostre que a métrica é um tensor definido positivo, i.e. que o produto interno por ela definido satisfaz $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$.

e) Use a propriedade da conversão de índices covariantes em índices contravariantes para determinar a forma dos tensores $g^{\mu\nu}$ e g^μ_ν.

f) Seja $x_\mu = (r, \theta)$ um covector em coordenadas polares. Determine x^μ.

Problema 3. Curvas em espaços curvos. Considere um sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) de métrica $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$. Considere uma curva ℓ parametrizada por $t \in]0, \infty]$ da seguinte forma

$$r = t \qquad \theta = \arcsin\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \phi = \sqrt{t^2 - 1}.$$

Mostre que o segmento de curva $t \in [1, 2]$ tem comprimento $s = \sqrt{6}$.