Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

1º semestre – 2013/2014
28/01/2014 – 15:00

Duração: 90 minutos **2º teste C**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I	10 valores

1. Considere uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de uma população X com função de densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x+1}{\theta}}, & x > -1 \\ 0, & x \le -1, \end{cases}$$

onde o parâmetro θ é positivo e desconhecido.

(a) Determine o estimador de máxima verosimilhança do parâmetro θ. (3.0)

Solução: $\bar{X} + 1$

(b) Determine o erro quadrático médio do estimador $T = \bar{X} + 1$ do parâmetro θ, sendo que $E(X) = \theta - 1$ e $E(X^2) = 2\theta(\theta - 1) + 1$. (1.5)

Solução: θ^2 / n

2. Numa recente sondagem a 950 eleitores escolhidos ao acaso de um país em crise prolongada, inquiriu-se se o governo devia ser prontamente demitido, tendo havido 490 respostas a favor de tal acção.

(a) Estime por um intervalo a real proporção de eleitores a favor da pronta demissão do governo, com um grau de confiança de aproximadamente 98%. (3.0)

Solução: $[0.4781, 0.5535]$

(b) Averigue se, ao nível de significância de 2%, os resultados da sondagem não contrariam a tese defendida pelo governo de que é de 49% a verdadeira percentagem dos que defendem a sua pronta demissão. Faça uso de uma estatística de teste adequada, após especificar as hipóteses a testar. (2.5)

Solução: valor-p=0.112>0.02. Não se rejeita $H_0 : p = 0.49$ ao n. s. de 2%.

Grupo II	10 valores

1. Duas máquinas (Máquina i, $i = 1,2$) são usadas para encher garrafões de plástico com água, sendo que o volume introduzido nos garrafões por cada uma das máquinas segue uma distribuição Normal. A medição do volume de água em cada um de 20 garrafões escolhidos aleatoriamente, 10 deles enchidos pela Máquina 1 e os restantes pela Máquina 2, conduziu aos seguintes valores para as médias e desvios padrões corrigidos, em litros, do volume de água dos garrafões enchidos por cada uma das máquinas:

	$\bar{x}_i$	s_i
Máquina 1	5.01	0.0800
Máquina 2	5.03	0.0873

(a) Deduza um intervalo de confiança a 90% para a variância do volume de água dos garrafões enchidos pela Máquina 1. (2.5)

Solução: $[0.0030, 0.0173]$

(b) O engenheiro responsável pelo processo de enchimento pensa que o volume médio de água introduzido nos garrafões pelas máquinas 1 e 2 são iguais. Acha que os dados recolhidos põem em causa o juízo do engenheiro? Admita a igualdade dos desvios padrões do volume introduzido nos garrafões por cada uma das máquinas e efectue a decisão com base no valor-p. (3.0)

Solução: valor-p=0.6. Não se rejeita $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ aos n.s. habituais.

2. Suspeita-se que o tempo até falha de uma máquina (Y), em minutos, esteja relacionado linearmente com a voltagem em que a máquina opera (x), em Volt. Para investigar a relação entre estas variáveis, planeou-se uma experiência com 10 máquinas similares, selecionadas ao acaso, tendo-se obtido:

$$\bar{x} = 116 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 134950 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 2594430 \qquad \bar{y} = 2233.7 \qquad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 49934931$$

Considerando o modelo de regressão linear simples, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots, 10$:

(a) Teste, ao nível de significância de 1%, a hipótese de a voltagem em que a máquina opera não influenciar o tempo até falha, indicando as hipóteses distribucionais que tiver que admitir. (3.5)

Solução: Admitindo que $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$, não correlacionados, temos valor-p=0.0013<0.01 o que leva a rejeitar $H_0 : \beta_1 = 0$ ao n.s. de 1%.

(b) Calcule o coeficiente de determinação do modelo e interprete-o. (1.0)

Solução: $R^2 = 0.70$. 70% da variação observada em Y é explicada pela variável independente sob o MRLS adotado, o que representa um ajustamento do modelo meramente razoável.