Matemática Computacional
MEBiol, MEBiom e MEFT
Aula 11 - Resolução numérica de sistemas lineares

Ana Leonor Silvestre

Instituto Superior Técnico, $1^{\underline{o}}$ *Semestre, 2020/2021*

Sumário da Aula 10

Cap. 3 - Resolução numérica de sistemas lineares

Métodos iterativos para sistemas lineares. Condição suficiente de convergência.

Convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel em sistemas com matriz de diagonal dominante.

Raio espetral de uma matriz. Condição necessária e suficiente de convergência.

Definição

Sejam $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ e $d \in \mathbb{R}^N$ tais que

$$Ax = b \iff x = Cx + d.$$

Neste caso, diz-se que o método iterativo

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

é *consistente com o sistema linear* $Ax = b$. A matriz C chama-se matriz de iteração do método.

Exemplo

Consideremos o sistema linear com solução única

$$\begin{aligned}
&4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\\
&-2x_1 + 10x_2 - 0.5x_3 = 2\\
&x_1 - 0.5x_2 + 2x_3 = 3
\end{aligned}$$

e o método de Jacobi para este sistema

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 0.25 + 0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)}\\
x_2^{(k+1)} &= 0.2 + 0.2x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)}\\
x_3^{(k+1)} &= 1.5 - 0.5x_1^{(k)} + 0.25x_2^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Exemplo

A matriz de iteração do método de Jacobi (matriz C)

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0.25 + 0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 0.2 + 0.2x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 1.5 - 0.5x_1^{(k)} + 0.25x_2^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

é

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.05 \\ -0.5 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

e o vetor d é

$$d_J = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Método de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = C_J x^{(k)} + d_J, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Forma matricial e matriz de iteração dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

Para tal, considera-se as matrizes L_A, D_A, $U_A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ que são a parte triangular estritamente inferior de A, a parte diagonal de A e a parte triangular estritamente superior de A, respetivamente, ou seja,

$$(L_A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i > j, \\ 0,\ i \leq j \end{cases} \qquad (D_A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i = j, \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$$

$$(U_A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i < j, \\ 0,\ i \geq j \end{cases}$$

A matriz de iteração do método de Jacobi é dada por

$$\boxed{C_J = -D_A^{-1}(L_A + U_A)}$$

ou ainda

$$C_J = -D_A^{-1}(A - D_A) = I - D_A^{-1}A.$$

Forma matricial e matriz de iteração dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

Quanto ao método de Gauss-Seidel, tem-se

$$x^{(k+1)} = D_A^{-1}[b - L_A x(k+1) - U_A x^{(k)}]$$

$$\iff (L_A + D_A)x^{(k+1)} = b - U_A x^{(k)}$$

$$\iff x^{(k+1)} = (L_A + D_A)^{-1} b - (L_A + D_A)^{-1} U_A x^{(k)}$$

pelo que

$$\boxed{C_{GS} = -(L_A + D_A)^{-1} U_A}$$

ou ainda

$$C_{GS} = -(L_A + D_A)^{-1}(A - (L_A + D_A)) = I - (L_A + D_A)^{-1} A.$$

Outras formas de obter métodos iterativos para sistemas lineares

Sistema de equações lineares $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e $b \in \mathbb{R}^N$.
Decomposição aditiva da matriz A:

$$A = M_A + N_A$$

onde M_A se supõe não singular e facilmente invertível, por exemplo, diagonal, tridiagonal, triangular,...
Podemos escrever

$$Ax = b \iff M_A x = -N_A x + b$$
$$\iff x = -M_A^{-1} N_A x + M_A^{-1} b$$
$$\iff x = Cx + d$$

onde

$$C := -M_A^{-1} N_A = -M_A^{-1}(A - M_A) = I - M_A^{-1} A$$
$$d := M_A^{-1} b.$$

Condições suficientes de convergência em termos da matriz de iteração (matriz C)

Teorema

Se $\|C\| < 1$ para alguma norma matricial induzida, então

1. Existe um e um só $z \in \mathbb{R}^N$ tal que $z = Cz + d$, ou seja, o sistema $Ax = b$ tem uma única solução;
2. O método do ponto fixo $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$, $k \in \mathbb{N}_0$, converge para z, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$;
3. São válidas as seguintes majorações para os erros $z - x^{(k)}$:

$$\|z - x^{(k)}\| \leq \|C\|^k \|z - x^{(0)}\|,$$

$$\|z - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

$$\|z - x^{(k+1)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|, \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Demonstração

Aplica-se o Teorema do ponto fixo de Banach com

$$X = \mathbb{R}^N$$

e

$$G(x) := Cx + d.$$

É óbvio que $G(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathbb{R}^N$ e a condição de contratividade é fácil de estabelecer:

$$\|G(x) - G(y)\| = \|C(x - y)\| \leq \|C\|\|x - y\|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N$$

Assim, se $L := \|C\| < 1$ são satisfeitas as hipóteses do Teorema do ponto fixo.

Exemplo

A matriz de iteração do método de Jacobi

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0.25 + 0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 0.2 + 0.2x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 1.5 - 0.5x_1^{(k)} + 0.25x_2^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

é dada por:

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.05 \\ -0.5 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se, por exemplo,

$$\|C_J\|_\infty = \max\{0.75, 0.25\} = 0.75 < 1,$$

pelo que o método de Jacobi converge qualquer que seja a iterada inicial.

Exemplo

O método de Jacobi

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0.25 + 0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 0.2 + 0.2x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 1.5 - 0.5x_1^{(k)} + 0.25x_2^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

com iterada inicial $x^{(0)} = [1\ 0\ 0]^\mathsf{T}$ dá

$$x^{(1)} = [0.25,\ 0.4,\ 1]^\mathsf{T}$$

pelo que

$$\|z - x^{(k)}\|_\infty \le 4 \times 0.75^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Condições de convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel em termos da matriz A

- Os algoritmos dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel não requerem explicitamente as respetivas matrizes de iteração, uma vez que as entradas da matriz A e as componentes do vetor b são usados diretamente no algoritmo para obter as sucessivas iteradas dos métodos.
- Pretendemos deduzir condições que permitam assegurar a convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel analisando diretamente a matriz A.

Sistemas com matriz de diagonal estritamente dominante

Começamos por tentar perceber o que significa a condição

$$\|C_J\|_\infty < 1$$

em termos de propriedades da matriz A.
É fácil ver que

$$(C_J)_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}},\ i \neq j, \\ 0,\ i = j \end{cases}$$

pelo que

$$\|C_J\|_\infty < 1 \iff \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^{N} |c_{ij}| < 1$$

$$\iff \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1,\ \forall i \in \{1, ..., N\}$$

ou seja, se a matriz A satisfaz

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{N} |a_{ij}|,\ \forall i \in \{1, ..., N\}.$$

Sistemas com matriz de diagonal estritamente dominante

Definição

Diz-se que $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ tem diagonal estritamente dominante por linhas (resp. por colunas) se

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{N} |a_{ij}|, \forall i \in \{1, ..., N\}$$

$$(\text{resp. } |a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^{N} |a_{ij}|, \forall j \in \{1, ..., N\}).$$

Teorema

Seja $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com diagonal principal estritamente dominante por linhas ou por colunas. Então A é não singular e os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel são convergentes para a solução do sistema $Ax = b$, qualquer que seja a iterada inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$.

Sistemas com matriz de diagonal estritamente dominante

Exemplo

No sistema

$$\begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 10x_2 - 0.5x_3 = 2 \\ x_1 - 0.5x_2 + 2x_3 = 3 \end{array}$$

a matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

tem diagonal estritamente dominante por linhas e por colunas (é simétrica):

$$4 > |-2| + 1, \; 10 > |-2| + |-0.5|, \; 2 > 1 + |-0.5|.$$

Exemplo

Aplicando o método de Jacobi ao sistema linear equivalente

$$\begin{array}{l} x_1 - 0.5x_2 + 2x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - 0.5x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{array} \iff \begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 10x_2 - 0.5x_3 = 2 \\ x_1 - 0.5x_2 + 2x_3 = 3 \end{array}$$

Fica

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 3 + 0.5x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 0.2 + 0.2x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= 1 - 4x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Iterando a partir de $x^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]^\mathsf{T}$, obtém-se

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= [3, \ 0.4, \ -3]^\mathsf{T}, \\ x^{(2)} &= [9.199999999999999, \ 0.65, \ -10.199999999999999]^\mathsf{T}, \\ x^{(3)} &= [23.724999999999998, \ 1.53, \ -34.5]^\mathsf{T}, \ldots \end{aligned}$$

Parece que não há convergência... Importante: aplicar o método de Jacobi ao sistema em que a matriz tem diagonal dominante.

Condição necessária e suficiente de convergência

Teorema

Sejam $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $d \in \mathbb{R}^N$ e suponhamos que $z = Cz + d$. O método do ponto fixo

$$x^{(n+1)} = Cx^{(n)} + d, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

converge para z, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$, se e só se

$$\varrho(C) < 1.$$

Se $\varrho(C) = 0$ então z é obtido ao fim de um número finito de iterações (no máximo n).

Demonstração

(i) Se $\varrho(C) < 1$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varrho(C) + \varepsilon < 1.$$

Neste caso, existe uma norma matricial induzida $\| \cdot \|$ tal que

$$\|C\| \leq \varrho(C) + \varepsilon < 1$$

e, pelo Teorema anterior, esta condição é suficiente para a existência e unicidade de z e para a convergência do método iterativo.

Demonstração

(ii) Se $\varrho(C) \geq 1$, sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| \geq 1$ e $v \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$ tais que

$$Cv = \lambda v.$$

Os erros $z - x^{(n)}$ satisfazem

$$z - x^{(n)} = C^n(z - x^{(0)}) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Se $v \in \mathbb{R}^N$ e escolhermos $x^{(0)} = z - v$, de

$$z - x^{(n)} = C^n(z - x^{(0)}) = C^n v = \lambda^n v$$

resulta

$$\|z - x^{(n)}\| = |\lambda|^n \|v\| \geq \|v\|, \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

para qualquer norma em $\mathbb{R}^N$. Nesta situação, não há convergência.

Demonstração

(iii) Se $\varrho(C) = 0$ então $\lambda = 0$ é o único valor próprio de C e o polinómio característico de p é dado por

$$p(t) = t^N.$$

Pelo Teorema de Caley-Hamilton, tem-se

$$p(C) = C^N = 0$$

e portanto

$$z - x^{(N)} = C^N(z - x^{(0)}) = 0.$$

Rapidez de convergência dos métodos estudados

Seja

$$x^{(n+1)} = Cx^{(n)} + d, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Como

$$z - x^{(n)} = C^n(z - x^{(0)})$$

e

$$\varrho(C) = \lim_{n\to\infty} \|C^n\|^{\frac{1}{n}},$$

tem-se

$$\|z - x^{(n)}\| \approx \varrho(C)^n \|z - x^{(0)}\|, \text{ para } n \text{ suficientemente grande,}$$

pelo que $\varrho(C)$ pode ser entendido como uma medida da rapidez de convergência dos métodos iterativos da forma $x^{(n+1)} = Cx^{(n)} + d$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Quanto menor for $\varrho(C)$ mais rápida será a convergência.

Exercício

Considere o método iterativo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -9x_1^{(k)} - 5\,x_2^{(k)} + 20 \\ x_2^{(k+1)} = -90\,x_1^{(k+1)} - 59\,x_2^{(k)} + 80, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

O que pode dizer sobre a convergência do método?

Exercício

A matriz de iteração é

$$C = -\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 90 & 59 \end{bmatrix}.$$

Vamos analisar o raio espetral de C:

$$\det(\lambda I - C) = 0 \iff (\lambda + 9)(\lambda + 59) - 450 = 0$$

$$\iff \lambda^2 + 68\lambda + 81 = 0 \iff \lambda = -34 - 5\sqrt{43}, \lambda = -34 + 5\sqrt{43}$$

pelo que

$$\varrho(C) > 1.$$

Assim, não está garantida a convergência para qualquer $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.