Problema 1 (4,5 val.) Calcule, se existirem (finitos ou infinitos), os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2 - x^2}{x^6}\qquad (b)\ \lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{\operatorname{sen} x}\qquad (c)\ \lim_{x\to+\infty}(\log x)^{1/x^2}$$

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2 - x^2}{x^6} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\operatorname{sen} x}{6x} = -\frac{1}{6}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{4^x\log 4 - 2^x\log 2}{\cos x} = \log 4 - \log 2$

(c) $(\log x)^{1/x^2} = e^{\frac{\log(\log x)}{x^2}}$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2\log x} = 0$, logo

$\lim_{x\to+\infty}(\log x)^{1/x^2} = e^0 = 1$

Problema 2 (4 val.) A função f está definida para $x\neq 0$ por

$$f(x) = x^3e^{1/x}$$

(a) Diga se f pode ser prolongada por continuidade, mesmo que apenas lateral, ao ponto 0, e caso afirmativo determine as derivadas laterais que existam no ponto 0. Designamos por g o prolongamento por continuidade, mesmo que apenas lateral, ao ponto 0, de f.

(b) Determine os intervalos de monotonia e concavidade de g e, caso existam, os extremos, inflexões e assímptotas de g.

(c) Esboce o gráfico de g e determine o conjunto $g(\mathbb{R}^+)$.

(a) $\lim_{x\to 0^+} x^3e^{1/x} = \lim_{t\to+\infty} e^t/t^3 = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} x^3e^{1/x} = \lim_{t\to-\infty} e^t/t^3 = 0.$

Concluímos que f pode ser prolongada por continuidade à *esquerda* de 0, tomando $g(0) = 0$, mas não à direita, onde existe uma *assímptota vertical.* A derivada lateral à esquerda é dada por

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} x^3e^{1/x}/x = \lim_{t\to-\infty} e^t/t^2 = 0.$$

(b) Sendo $x\neq 0$, temos $g'(x) = f'(x) = 3x^2e^{1/x} - x^3e^{1/x}/x^2 = (3x^2-x)e^{1/x} = x(3x-1)e^{1/x}$. A exponencial é positiva no seu domínio, pelo que o sinal da derivada é o da parábola $y = x(3x-1) = 3x^2-x$, e muda portanto em $x=0$ e em $x = 1/3$. Como g é contínua à esquerda em $x=0$, os intervalos de monotonia de g são os seguintes:

(1) g é crescente em $]-\infty, 0]$, decrescente em $]0, 1/3]$, e crescente em $[1/3, +\infty[$

Ainda para $x\neq 0$, temos

$$g''(x) = (6x-1)e^{1/x} - x(3x-1)e^{1/x}/x^2 = (6x-4+1/x)e^{1/x} = \frac{6x^2-4x+1}{x}e^{1/x}$$

A quadrática $6x^2-4x+1$ nunca muda de sinal, pelo que o sinal algébrico de g'' é o sinal de x. Temos assim que

(2) g é côncava em $]-\infty, 0]$ e convexa em $]0, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

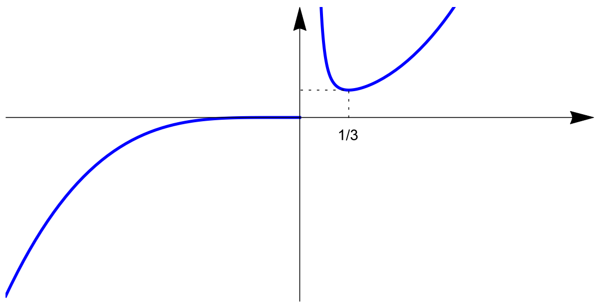
Notamos ainda que $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)/x = +\infty$, donde se segue que

(3) g não tem extremos absolutos nem assímptotas oblíquas ou horizontais.

Em termos de extremos, temos apenas que

(4) g tem um mínimo local em $x = 1/3$, onde $g(1/3) = e^3/27$.

(c) Segue-se de (1) e (4) que $g(\mathbb{R}^+) = [e^3/27, +\infty[$. O gráfico de g esboça-se abaixo



Problema 3 (4,5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \tan\left(x^2 + 3x + 1\right)$ $\quad$ (b) $g(x) = x^{\operatorname{sen}^2 x}$ $\quad$ (c) $h(x) = \log\left(\arctan(e^{2x})\right)$

(a) $f'(x) = (2x + 3)\sec^2\left(x^2 + 3x + 1\right)$

(b) $g'(x) = x^{\operatorname{sen}^2 x}(\log x \cdot \operatorname{sen}^2 x)' = x^{\operatorname{sen}^2 x}(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x} + \log x \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x)$

(c) $h'(x) = \dfrac{1}{\arctan\left(e^{2x}\right)} \cdot \dfrac{1}{1 + e^{4x}} \cdot 2e^{2x}$

Problema 4 (3,5 val.) Considere a função dada por $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ e seja $f^{(k)}$ a sua derivada de ordem k.

a) Determine o domínio de f.

b) Mostre por indução que $f^{(k)}(x) = (-1)^k(k-1)!\left[\dfrac{1}{(x-1)^k} - \dfrac{1}{(x+1)^k}\right]$ para $k \in \mathbb{N}$.

c) Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 da função f em $a = 0$.

d) Sendo p o polinómio referido na alínea anterior, determine se a diferença $f(1/3) - p(1/3)$ é positiva ou negativa.

(a) O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1+x}{1-x} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (1+x)(1-x) > 0\} =]-1, +1[$

(b) • Para $k = 1$, e notando que $f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$, temos

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = -\left[\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)}\right]$$

• Supondo que $f^{(k)}(x) = (-1)^k(k-1)!\left[\dfrac{1}{(x-1)^k} - \dfrac{1}{(x+1)^k}\right]$, temos então

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k(k-1)!\left[\frac{-k}{(x-1)^{k+1}} - \frac{-k}{(x+1)^{k+1}}\right] = (-1)^{k+1}k!\left[\frac{1}{(x-1)^{k+1}} - \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right]$$

(c) $p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = 2x + \frac{2}{3}x^3$

(d) Existe $0 < c < 1/3$ tal que $f(1/3) = p(1/3) + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$. Notamos que

$$\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(c-1)^4} - \frac{1}{(c+1)^4}\right) > 0, \text{ porque } (c+1)^4 > (c-1)^4$$

Segue-se que $f(1/3) > p(1/3)$

Problema 5 (3,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Para cada uma das seguintes afirmações, diga se a afirmação é verdadeira ou falsa, e justifique a sua resposta com uma demonstração ou um exemplo.

(a) f é contínua em $\mathbb{R}$.

Verdadeiro: Seja $a \in \mathbb{R}$ e defina-se $E(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$, donde se segue que $E(x) \to 0$ quando $x \to a$, por definição de $f'(a)$. Temos então

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + (x - a)E(x) \to 0 \text{ quando } x \to a$$

(b) Se f' tem limite quando $x \to a$ então f' é contínua em a.

Verdadeiro: Temos a provar o seguinte:

$$\text{Se } \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha \text{ e } \lim_{t\to a} f'(t) = \beta \text{ então } \alpha = \beta$$

Esta igualdade segue-se do teorema de Lagrange, segundo o qual

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(t), \text{ onde } t \text{ está entre } a \text{ e } x$$

É claro que $t \to a$ quando $x \to a$, pelo que se os dois limites existem então $\alpha = \beta$

(c) Se $f'(0) = 0$ e $f''(0)$ existe então $\dfrac{f(x) - f(0)}{x^2} \to f''(0)/2$ quando $x \to 0$.

Verdadeiro: Análogo ao anterior, mas requer usar o teorema de Cauchy:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x^2} = \frac{f'(t)}{2t} = \frac{1}{2}\frac{f'(t) - f'(0)}{t} \to \frac{1}{2}f''(0)$$

(d) Se $f'(0) > 0$ então f é crescente numa vizinhança de 0. SUGESTÃO: Considere uma modificação apropriada da função dada por $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ para $x \neq 0$.

Falso: Consideramos a função $g(x) = x + x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ para $x \neq 0$, com $g(0) = 0$. Temos

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + x \operatorname{sen}(1/x^2)\right) = 1 > 0$$

Por outro lado, quando $x \neq 0$ temos

$$g'(x) = 1 + 2x - \frac{2}{x}\cos(1/x^2)$$

A função g não é monótona em qualquer vizinhança da origem. Para o verificar, consideramos os pontos onde $\cos(1/x^2) = \pm 1$, i.e., os pontos onde $1/x^2 = 2n\pi$ ou $1/x^2 = (2n+1)\pi$. Designamos estes pontos como se segue:

$$\frac{1}{a_n^2} = 2n\pi, a_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \text{ e } \frac{1}{b_n^2} = (2n+1)\pi, b_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$$

É claro que $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$, mas temos igualmente

$$g'(a_n) = 1 + 2a_n - 2/a_n \to -\infty \text{ e } g'(b_n) = 1 + 2b_n + 2/b_n \to +\infty$$

Concluímos que qualquer vizinhança da origem contém pontos onde $g'(x) < 0$ e pontos onde $g'(x) > 0$. Portanto g não pode ser monótona em nenhuma vizinhança da origem.