EletroMagnetismo

MEFT 2020-2021

Prof. Pedro Abreu

pedro.t.abreu@técnico.ulisboa.pt

18ª Aula

Equações de Maxwell (e equações associadas);
Equações de Maxwell em meios condutores: atenuação;
Energia e campo eletromagnético;
Vetor de Poynting e Teorema de Poynting;

VI. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS:

Equação de ondas e ondas eletromagnéticas planas;
Propriedades de uma onda eletromagnética;
Vetor de Poynting e fluxo de energia numa onda e.m. plana;
Intensidade numa onda eletromagnética.

Um navegador tem ainda mais viva a impressão de que o oceano é feito de ondas do que é feito de água

Sir Arthur S. Eddington [1882–1944]

Equações de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} = \sigma \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) \times \vec{n} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)_{\parallel} = \vec{K} \times \vec{n} \end{cases}$$

Com as relações constitutivas:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right)$$

Meios LHI: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E}$

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_E)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \mu = \mu_0(1 + \chi_M)$$

...e nos condutores: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Equação de continuidade: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\vec{K} \cdot \vec{n} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$

Força de Lorentz:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Equações de Maxwell no vazio

$\boldsymbol{\rho = 0}$ $\boldsymbol{\sigma = 0}$ $\vec{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{0}$ $\vec{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{\varepsilon_r \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1}$ $\boldsymbol{\mu_r \equiv \frac{\mu}{\mu_0} = 1}$

$\vec{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{\varepsilon_0}\vec{\boldsymbol{E}}$ $\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\mu_0}\vec{\boldsymbol{H}}$ e

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

e como $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E}$ e

$$\vec{\nabla}\times\left(-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

temos $-\nabla^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ ou

$$\boxed{\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{E}} \qquad \boxed{\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{B}}$$

Equação das Ondas: $\boxed{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\nabla^2\psi}$ $\Rightarrow$ ONDAS E.M. c/ $v = c \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

$\boldsymbol{c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}}$

18ª Aula Teórica, 6ªF, 7/Maio/2021, 15h00 #40

(após 3 slides...)

- Ondas e.m. num meio condutor ($\rho = 0$)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E} \qquad (\sigma \equiv \text{condut. elétrica} \geq 0)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \sigma\vec{E} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2\vec{E} = \underbrace{\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\text{termo de atenuação}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

↳ termo de atenuação

⇒ Vai existir uma atenuação exponencial da onda no meio.

- Energia e campo eletromagnético

Densidades de energia $u_E = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$, $u_M = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{E})}_{-\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}} - \vec{E}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{H})}_{\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

$$= -\underbrace{\mu_0\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\cdot\vec{H})} - \vec{E}\cdot\vec{J} - \varepsilon_0\underbrace{\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\vec{E})}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}_{u_E} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}_{u_M}\Big) - \vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(u_{EM}) = \vec{\nabla}\cdot(\underbrace{\vec{E}\times\vec{H}}_{\text{VETOR DE POYNTING } \vec{\Sigma}\ \boxed{\vec{S}}}) + \vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$\vec{\Sigma} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}$$

para fora!

$$-\frac{d}{dt}\left(\iiint_{Vol.} u_{EM}\, dv\right) = \overbrace{\iint_{S=\partial Vol.}\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}\, dS}^{\text{Fluxo do vetor de Poynting}} + \iiint_{Vol.}\vec{E}\cdot\vec{J}\, dv$$

A ENERGIA (EM) QUE DIMINUI (COM O TEMPO) NO VOLUME Vol. (POR UNIDADE DE TEMPO) = FLUXO DO VETOR DE POYNTING (p/ fora do Vol.) POR UNIDADE DE TEMPO + ENERGIA DADA ÀS CARGAS PELO CAMPO $\vec{E}$ POR UNIDADE DE TEMPO

$\vec{\Sigma}$ = FLUXO DE ENERGIA NO CAMPO ELETROMAGNÉTICO (POR UNIDADE DE ÁREA E POR UNIDADE DE TEMPO) NA DIREÇÃO E SENTIDO DE $\vec{\Sigma}$

$$[\vec{\Sigma}] = W/m^2 = J/(m^2\cdot s)$$

VI. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \simeq 3\times 10^8\, m/s \equiv c \qquad c^2\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \qquad \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

$$c \equiv 299\,792\,458\ m/s$$

$1\,m$ = distância viajada em $\frac{1\,s}{299\,792\,458}$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\vec{B})$$
$(\vec{B})$

$$\longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$
μ ε

$$\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{r} \pm \vec{v} t)$$
$$\vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{r} \pm \vec{v} t)$$

$\Rightarrow$ SOLUÇÕES + SIMPLES: ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS

seja $\vec{e}_z$ a direção e sentido de propagação da onda

$$A(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_k(k) e^{i(-kz+\omega t)} dk$$

$\omega = k \cdot v$ $\quad$ $\therefore$ $-kz+\omega t \sim \underline{z - vt}$

Onda monocromática $\Rightarrow$ ω só 1 e bem definido

$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(-\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t + \delta)$ $\quad$ $\omega = 2\pi f$

$\vec{k} = k \cdot \vec{e}_k$

$\vec{e}_k$ = direção e sentido de propagação

$k = n^{\circ}$ ondas $= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ $\quad$ $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \lambda f$

PLANA $\Rightarrow$ frente de onda é um plano $\perp$ à direção de propagação

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(-\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t + \delta)}$$
$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(-\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t + \delta)}$$

$\left(\begin{array}{l} \vec{E}_{real} = Re[\vec{E}] \\ \vec{B} \;\; " \;\; = Re[\vec{B}] \end{array} \right)$

(ou $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$)

PROPREEDADES DE ONDAS E.M. NO VAZIO:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -i\vec{k}\cdot\vec{E}_0 e^{i(-\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)} = 0 \Rightarrow \vec{E}\perp\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = -i\vec{k}\cdot\vec{B}_0 e^{i(-\ldots)} = 0 \Rightarrow \vec{B}\perp\vec{k}$$

$\Rightarrow$ ONDAS TRANSVERSAIS

$$-\vec{\nabla}\times\vec{E} = +i\,\underbrace{\vec{k}\times\vec{E}_0 e^{i(\ldots)}} = +\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \underbrace{i\omega\vec{B}_0 e^{i(\ldots)}}$$

$$\underbrace{\vec{k}\times\vec{E}} = \omega\vec{B} \Rightarrow \vec{B}\perp\vec{E}$$

$$|\vec{k}\times\vec{E}| = k|\vec{E}| = \omega|\vec{B}|$$

$$|\vec{E}| = \frac{\omega}{k}|\vec{B}| = v|\vec{B}| \quad \left(\begin{array}{c}\text{NO VAZIO}\\ |\vec{E}|=c|\vec{B}|\end{array}\right)$$

$$\left(\text{"}\vec{F} = q(\underbrace{\vec{E}}_{\sim vB} + \underbrace{\vec{v}\times\vec{B}}_{\sim vB})\text{"}\right)$$

- $$\vec{\Sigma} = \frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu}\underbrace{\vec{E}_0\times\vec{B}_0} e^{2i(\ldots)} = \underbrace{\frac{1}{\mu}E_0B_0}_{u_{EM}\cdot v}\vec{e}_k\cdot[e^{2i(\ldots)}]$$

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2 + \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu} \qquad E_0 = vB_0$$

$$\vec{\Sigma} = v\cdot u_{EM}\vec{e}_k$$

- INTENSIDADE NUMA ONDA E.M.

$$I \equiv \langle|\vec{\Sigma}|\rangle = \frac{E_0B_0}{\mu}\underbrace{\langle|e^{2i(\ldots)}|\rangle}_{\langle\cos^2(\ldots)\rangle = \langle\text{sen}^2(\ldots)\rangle = 1/2}$$