Cálculo Diferencial e Integral I

MEEC, MEAmbi

1º Exame - 24 de Junho de 2009 - 13h00m

Solução

Problema 1 (0,5 val.) Seja $f(x) = \log(x^3 - x^2 - 2x)$.

(a) Determine o domínio de f.

Resolução: Como apenas os reais positivos têm logaritmo real, o domínio de f é o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 - 2x > 0\}$. O polinómio $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$ é cúbico, e $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$. As raízes de $p(x)$ são -1, 0 e 2 e deve ser claro que

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 - 2x > 0\} =]-1, 0[\cup]2, +\infty[.$$

(b) Determine, se existirem, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo do domínio de f.

Resolução: D não tem supremo, nem máximo nem mínimo, e o seu ínfimo é -1.

Problema 2 (1,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = (x+1)e^x$.

(a) Determine os intervalos de monotonia de f.

Resolução: $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. Notamos que $f'(x) = 0$ apenas quando $x = -2$, e temos $f'(x) < 0$ quando $x < -2$ e $f'(x) > 0$ quando $x > -2$. Concluímos que

- f é decrescente no intervalo $]-\infty, -2]$ e
- f é crescente no intervalo $[-2, +\infty[$.

(b) Estude a concavidade de f.

Resolução: $f''(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$. Notamos que $f''(x) = 0$ apenas quando $x = -3$, e temos $f''(x) < 0$ quando $x < -3$ e $f''(x) > 0$ quando $x > -3$. Concluímos que

- f tem concavidade para cima ($\cup$) no intervalo $]-\infty, -3[$ e
- f tem concavidade para baixo ($\cap$) no intervalo $]-3, +\infty[$.

(c) Determine as assímptotas do gráfico de f, se existirem.

Resolução: É evidente que não existem assímptotas verticais. Para verificar a existência de assímptotas à direita e à esquerda, notamos que

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 + 1/x)e^x = +\infty$ e
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} (1 + 1/x)e^x = 0.$

Concluímos que NÃO EXISTE assímptota à direita. Para confirmar que existe assímptota à esquerda com declive $m = 0$, basta calcular

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Concluímos que a recta $y = 0$ (o eixo dos xx) É assímptota à esquerda.

(d) Determine os extremos de f, se existirem, e esboce o gráfico de f.

RESOLUÇÃO: É claro da alínea a) que f tem um mínimo (absoluto) em $x = -2$, e não tem máximos relativos ou absolutos. Notamos que $f(-2) = -e^{-2} \approx -1/9$. Outras observações úteis para esboçar o gráfico são:

- f tem uma inflexão em $x = -3$, onde $f(-3) = -2e^{-3} \approx -2/27$.
- Não existe assímptota à direita, e $f(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$.
- Existe assímptota à esquerda, que é $y = 0$.
- Temos $f(x) = 0$ apenas quando $x = -1$, sendo $f(x) > 0$ para $x > -1$ e $f(x) < 0$ para $x < -1$.

Problema 3 (0,5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2\log(x) & \text{se} \quad x > 0 \\ e^{ax} + b & \text{se} \quad x \le 0 \end{cases}$$

(a) Determine as constantes a e b para as quais f é contínua em $\mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO: Calculamos os limites laterais em $x = 0$, usando no primeiro caso a regra de Cauchy:

- $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x^2\log(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{x^{-2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$
- $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} e^{ax} + b = 1 + b$

f é contínua em $x = 0$ se e só se $b = -1$, independentemente do valor de a.

(b) Determine as constantes a e b para as quais f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO: As funções diferenciáveis são contínuas e portanto temos necessariamente $b = -1$. Para determinar o valor de a, calculamos as derivadas laterais em $x = 0$, usando mais uma vez a regra de Cauchy:

- $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2\log(x)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{x^{-1}} = \lim_{x\to0^+} -x = 0$
- $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^-}\frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x\to0^-} ae^{ax} = a$

f é diferenciável em $x = 0$ se e só se $b = -1$ e $a = 0$.

Problema 4 (0,5 val.) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to0}\frac{1-e^{x^2}}{1-\cos 2x} \qquad\qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\arctan(e^{1/x^2})$$

RESOLUÇÃO: Calculamos o limite em a) usando a regra de Cauchy. O limite em b) é quase imediato.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2xe^{x^2}}{2\,\mathrm{sen}\,2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\mathrm{sen}\,2x}\frac{-e^{x^2}}{2} = (1)\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \arctan(e^{1/x^2}) = \arctan(e^0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Problema 5 (1,5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \frac{x\,\mathrm{sen}(\log x)}{1+x^2} \qquad (b)\ g(x) = \int_1^{x^2} e^{t^2}\,dt \qquad (c)\ h(x) = \left(2-x^3\right)^{e^x}$$

RESOLUÇÃO:

(a) $f'(x) = \frac{[\mathrm{sen}(\log x) - \cos(\log x)](1+x^2) - 2x^2\,\mathrm{sen}(\log x)}{(1+x^2)^2}$

(b) $g'(x) = e^{(x^2)^2}2x = e^{x^4}2x$

(c) $h(x) = e^{e^x \log\left(2-x^3\right)}$ e $h'(x) = e^{e^x \log\left(2-x^3\right)}\frac{-3x^2}{2-x^3} = -3x^2\left(2-x^3\right)^{e^x-1}$

Problema 6 (1,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \frac{\cos x}{1+\mathrm{sen}\,x} \qquad (b)\ g(x) = \mathrm{arcsen}\,x \qquad (c)\ h(x) = \frac{1}{(1+x^2)(x+1)}$$

RESOLUÇÃO:

(a) $\int \frac{\cos x}{1+\mathrm{sen}\,x}dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| = \log(|1+\mathrm{sen}\,x|)$ (substituição: $u = 1+\mathrm{sen}\,x$)

(b) $\int \mathrm{arcsen}\,x dx = x\,\mathrm{arcsen}\,x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ (partes: $u = \mathrm{arcsen}\,x, dv = dx$. Para calcular o integral à direita, usamos agora a substituição $w = 1-x^2$:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dw}{2\sqrt{w}} = -\sqrt{w} = -\sqrt{1-x^2}$$

Temos assim $\int \mathrm{arcsen}\,x dx = x\,\mathrm{arcsen}\,x + \sqrt{1-x^2}$.

(c) $\frac{1}{(1+x^2)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A+Ax^2+Bx^2+Bx+Cx+C}{(1+x^2)(x+1)} =$

$\frac{(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)}{(1+x^2)(x+1)}$ donde $\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$ e $A=C=1/2, B=-1/2$.

Temos assim

$$\int \frac{1}{(1+x^2)(x+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(|x+1|) - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(|x+1|) - \frac{1}{4}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan x.$$

(d) Calcule o integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}dx$. O integral é superior ou inferior a 1?

RESOLUÇÃO:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}dx = \log(1+\operatorname{sen} x)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = \log 2 < 1 \text{ (porque } e > 2)$$

Problema 7 (1 val.) Calcule a área da região do plano delimitada pelas linhas

$$y = x(x^2-1) \text{ e } y = 3x.$$

A área da região em causa é superior ou inferior a 6?

RESOLUÇÃO: Temos $x(x^2-1) = 3x$ quando $x = 0$ e quando $x^2 - 1 = 3$, ou seja, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$. As linhas intersectam-se portanto em $x = -2, x = 0$ e $x = 2$. A recta está por cima da cúbica quando $0 < x < 2$, e a figura é simétrica em relação à origem, pelo que a área pedida é

$$A = \int_0^2 [3x - x(x^2-1)]dx + \int_{-2}^0 [x(x^2-1) - 3x]dx = 2\int_0^2 (4x - x^3)dx =$$

$$= 2\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_{x=0}^{x=2} = 2(8-4) = 8 > 6\right.$$

Problema 8 (1 val.) Considere a usual função hiperbólica dada por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que senh é injectiva em $\mathbb{R}$, e mostre que a imagem $\operatorname{senh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO: Verificamos primeiro que $\operatorname{senh}'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Concluímos assim que senh é uma função *estritamente crescente* em $\mathbb{R}$, e portanto INJECTIVA. Por outro lado, calculamos

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{senh} x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$ e
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty.$

Como senh é contínua, segue-se do teorema do Valor Intermédio que assume qualquer valor entre $-\infty$ e $+\infty$, i.e., é uma função SOBREJECTIVA, ou seja, $\operatorname{senh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(b) Sendo argsenh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função inversa de senh, e sabendo que a derivada de senh em $x = \log 2$ é igual a $5/4$, qual é a derivada de argsenh em $x = 3/4$?

Resolução: Note-se que $\operatorname{senh}(\log 2) = \dfrac{e^{\log 2} - e^{-\log 2}}{2} = \dfrac{2 - 1/2}{2} = 3/4$. Portanto,

$$\operatorname{argsenh}'(3/4) = \frac{1}{\operatorname{senh}'(\log 2)} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}.$$

(c) Calcule a derivada de argsenh nos pontos onde essa derivada existe.

Resolução: Como $senh'x = \cosh x \neq 0$ para qualquer x, temos sempre

$$\operatorname{argsenh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}'(\operatorname{argsenh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsenh} x)}$$

Por outro lado, e com $u = \operatorname{argsenh} x$, temos $\cosh^2 u = 1 + \operatorname{senh}^2 u = 1 + x^2$. Como $\cosh u > 0$ concluímos que $\cosh u = \sqrt{1 + x^2}$ e portanto

$$\operatorname{argsenh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsenh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Problema 9 (1 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + k + 1}{k^3 + 5} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Resolução:

(a) A série converge absolutamente, pelo critério da razão:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!(2k)!}{(2k+2)!k!} = \frac{k+1}{(2k+2)(2k+1)} \to 0 < 1$$

(b) A série diverge, por comparação com a série harmónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, que é divergente:

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{(k^2 + k + 1)k}{k^3 + 5} = \frac{k^3 + k^2 + k}{k^3 + 5} = \frac{1 + 1/k + 1/k^2}{1 + 5/k^3} \to 1 \neq 0$$

(c) A série converge, porque é alternada, e $1/\sqrt{k} \searrow 0$. A série não é absolutamente convergente, e é portanto simplesmente convergente, porque

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}} \text{ é uma série de Dirichlet divergente, já que } 1/2 < 1.$$

Problema 10 (0,5 val.) Determine a série de Taylor no ponto $a = 0$ das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \operatorname{sen} x^2 \qquad (b)\ g(x) = \frac{1}{1 - x} \qquad (c)\ u(x) = \int_0^x \log(1 - t^2)\,dt$$

Resolução:

(a) Como $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\operatorname{sen} x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

(b) Trata-se da usual série geométrica, válida para $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

(c) Recordamos da série geométrica que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \Rightarrow \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

Temos assim que

$$\log(1-t^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-t^2)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n} \text{ e portanto}$$

$$\int_0^x \log(1-t^2)dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{t^{2n}}{n}dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$$

Problema 11 (0,5 val.) Considere a função f definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n^3}, \text{ para } |x| < 1.$$

(a) Calcule o polinómio de Taylor de f na origem de ordem 6, que designamos por p_6.

Resolução: O polinómio de Taylor de f na origem de ordem 6 é a soma parcial da correspondente série de Taylor, que resulta de truncar a série no termo com x^6. É assim óbvio que

$$p_6(x) = \sum_{n=1}^{3}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n^3} = \frac{x^2}{1^3} - \frac{x^4}{2^3} + \frac{x^6}{3^3} = x^2 - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{27}$$

(b) Temos $|f(x) - p_6(x)| < 0,02$ quando $|x| < 1$? Qual é o sinal algébrico da diferença $f(x) - p_6(x)$ quando $|x| < 1$?

Resolução: A série é alternada, e quando $|x| < 1$ é claro que $\frac{x^{2n}}{n^3} \searrow 0$. Como o termo correspondente a $n = 4$ tem sinal negativo, temos

$$\sum_{n=1}^{4}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n^3} < f(x) < \sum_{n=1}^{3}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n^3} \text{ ou seja}$$

$$p_6(x) - \frac{x^8}{4^3} < f(x) < p_6(x) \text{ donde}$$

$$f(x) - p_6(x) < 0 \text{ e } |f(x) - p_6(x)| < \frac{x^8}{4^3} < \frac{1}{64} < \frac{1}{50} = 0,02$$