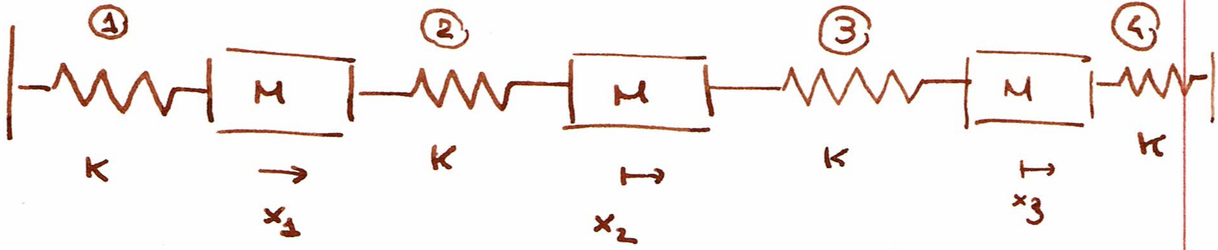
Semana 4

Problema 1



Eqs movimento:

$$M \ddot{x}_1 = \overbrace{-Kx_1}^{\text{mola } 1} \overbrace{- K(x_1 - x_2)}^{\text{mola } 2}$$

$$M \ddot{x}_2 = \overbrace{-K(x_2 - x_1)}^{\text{mola } 2} \overbrace{- K(x_2 - x_3)}^{\text{mola } 3}$$

$$M \ddot{x}_3 = \overbrace{-K(x_3 - x_2)}^{\text{mola } 3} \overbrace{- K x_3}^{\text{mola } 4}$$

Em notação matricial:

$$\ddot{Z} = - M^{-1} K Z \qquad Z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$M = m \, \mathbb{1}_{3\times 3}$$

$$M^{-1} K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \omega_0^2 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

As frequências normais são determinadas pelos ~~modos próprios~~ valores próprios da matriz $M^{-1}K$

Estes podem ser calculados por qualquer método vindo de Algebra Linear. Omitindo por agora ω_0^2:

$$(2-\lambda)\det\begin{pmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] - (2-\lambda) = 0 \iff$$

$$\iff (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 2\right] = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 2 \ \vee\ \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \iff$$

$$\iff \lambda = 2 \ \vee\ \lambda = 2 \pm \sqrt{2}$$

Logo as frequências normais são

$$\omega_1 = \sqrt{2}\,\omega_0;\quad \omega_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,\omega_0;\quad \omega_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\omega_0$$

Os modos normais correspondem aos vetores próprios de cada uma das frequências normais:

→ $\underline{\omega_1}$ ($\lambda = 2$):

$$\begin{pmatrix}2-2 & -1 & 0\\ -1 & 2-2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Logo, $v_{\omega_1} = (1, 0, -1)$

Esquema:

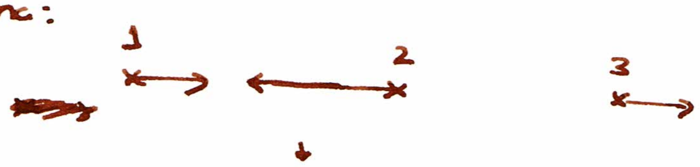
Massa do meio parada e as ~~restantes~~ das pontas a oscilar em oposição de fase.

→ $\omega_2 \; (\lambda = 2 + \sqrt{2})$:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo $v_{\omega_2} = (1, -\sqrt{2}, 1)$

Esquema:



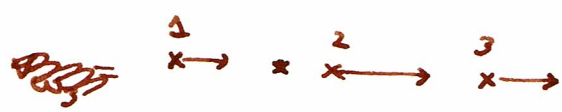
Reparem na seta maior

corpos das pontas a oscilarem com a mesma amplitude e em fase e o do meio com maior amplitude e em oposição de fase em relação ao das pontas.

→ $\omega_3 \; (\lambda = 2 - \sqrt{2})$:

$$V_{\omega_3} = (1, \sqrt{2}, 1)$$

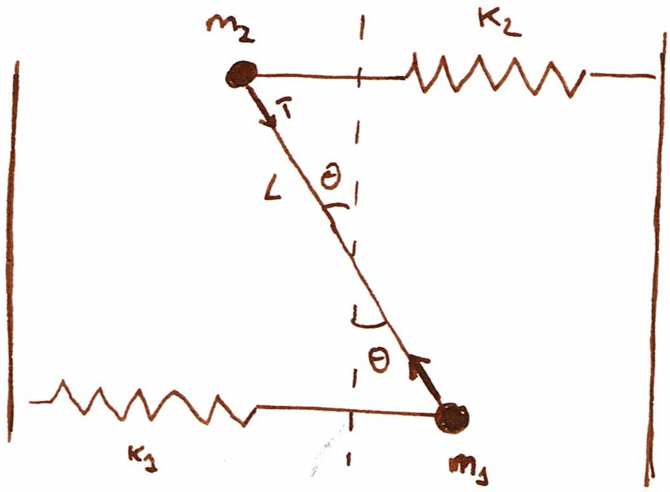
Esquema



Todos os corpos a oscilarem em fase com os das pontas a oscilar com a mesma amplitude e o do meio com maior amplitude.

<u>Pergunta</u>: Tendo em conta a configuração dos modos normais, faz sentido que $\omega_2 > \omega_3$?

Problema 2



Vamos ignorar variações verticais na posição das massas já que estas serão de 2ª ordem para pequenos deslocamentos em relação à posição de equilíbrio.

Eqs. Movimento

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -K_1 x_1 - T\,\text{sen}\,\theta \\ m_2 \ddot{x}_2 = -K_2 x_2 + T\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$m_1 = 2m$

$m_2 = m$

$K_1 = 2K$

$K_2 = K$

$T = 2KL$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{x_1 - x_2}{L}$ ← ignoramos variações no comprimento da corda porque $\Leftrightarrow$ serão de 2ª ordem

$$\begin{cases} \cancel{2}m\ddot{x}_1 = -\cancel{2}K x_1 - \cancel{2}K\cancel{L}\dfrac{(x_1 - x_2)}{\cancel{L}} \\ m\ddot{x}_2 = -K x_2 + 2K\cancel{L}\dfrac{(x_1 - x_2)}{\cancel{L}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -2\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x \\ \ddot{x}_2 = 2\omega_0^2 x_1 - 3\omega_0^2 x_2 \end{cases}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Novamente, a frequência dos modos normais é determinada pelos valores próprios do sistema

$$\ddot{Z} = - M^{-1} K Z$$

$$M^{-1} K = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Fatorizando ω_0^2 por agora:

$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \lambda = 4 \lor \lambda = 1$

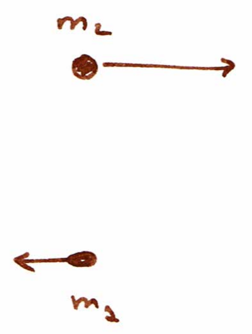
Logo as frequências são

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \omega_0^2 \\ \omega_2^2 = 4\omega_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \\ \omega_2 = 2\omega_0 \end{cases}$$

Os modos normais são descritos pelos vetores próprios

ω_2:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\omega_2} = (1, -2)$$



m_1 e m_2 em oposição de fase, com o deslocamento de m_2 a ser o dobro de m_1 (faz sentido?) e frequência ω_2

ω_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad V_{\omega_1} = (1, 1)$$

m_1 e m_2 em fase com deslocamento com a mesma amplitude e frequência ω_1.

Problema 3

Os modos próprios do ~~oscilador harmónico~~ pêndulo gravítico acoplado são dados por

$$\begin{cases} \omega_1^2 = g/l \\ x_1 = x_2 = a_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) = a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_2^2 = \dfrac{g}{l} + \dfrac{2K}{m} \\ x_1 = -x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2) = a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t) \end{cases}$$

Qualquer solução do sistema ~~é determi~~ pode ser escrita como uma combinação linear dos modos normais do sistema (numa linguagem da Álgebra Linear, os modos normais do sistema formam uma <u>base completa</u> das soluções do sistema; conseguem perceber porquê?)

Solução Geral:

$$\begin{cases} x_1 = \underbrace{a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t)}_{1^{\circ} \text{ modo normal}} + \underbrace{a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t)}_{2^{\circ} \text{ modo normal}} \\ x_2 = a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t) - a_2 \cos(\omega_2 t) - b_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t) \end{cases}$$

condições iniciais:

$$\begin{cases} x_1(t=0) = d \quad , \quad \dot{x}_1(t=0) = 0 \\ x_2(t=0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

Logo

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = d \\ a_1 - a_2 = 0 \\ b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = \frac{d}{2} \\ b_1 = b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{d}{2}\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right) \\ x_2(t) = \frac{d}{2}\left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

usando relações trigonométricas

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = d \cos(\Omega t) \cos(\omega t) & \Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ x_2(t) = d \operatorname{sen}(\Omega t) \operatorname{sen}(\omega t) & \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \end{cases}$$

Perguntas: Qual o gráfico desta função?

como se dá a transferência de energia entre os blocos? (ver exemplo 4.1.1 do livro)