Mecânica Analítica

2020-2021

Série 7

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

Nesta série, concluímos o formalismo Hamiltoniano e ilustramos as transformações canónicas

$\star\star$ **Problema 1. Referenciais em rotação.** Considere um disco opaco no plano xOy a rodar em torno do eixo dos z's com velocidade angular constante ω. Seja m a massa de uma partícula que se encontre em movimento em cima do disco.

a) Escreva o Lagrangeano desta partícula em coordenadas cartesianas.

Sejam (x, y) as coordenadas de uma partícula num referencial inercial, e (X, Y) as coordenadas resultantes de uma rotação de um ângulo θ.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Calculando as derivadas temporais,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix},$$

ou seja, como já tínhamos visto, $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \omega \times \mathbf{R}$. Assim,

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\mathbf{R}} + \omega \times \mathbf{R}\right)^2 - V(X, Y) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}^2 + \underbrace{m\dot{\mathbf{R}} \cdot (\omega \times \mathbf{R})}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\omega^2 R^2}_{\text{centrif.}} - V(X, Y).$$

Vemos a aparição de dois potenciais "fictícios" (não-inerciais),

$$V_{\text{Coriolis}} = -m\dot{\mathbf{R}} \cdot (\omega \times \mathbf{R}) \quad \text{e} \quad V_{\text{centrf.}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2.$$

Nota: As forças fictícias aparecem <u>posteriormente</u> nas equações do movimento!

b) Determine o Hamiltoniano correspondente. Justifique se se trata ou não da energia mecânica do sistema.

Pela transformação de Legendre

$$\begin{aligned} H(X,Y,P_X,P_Y) &= \dot{X}P_X + \dot{Y}P_Y - L(X,\dot{X},Y,\dot{Y}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}-\mathbf{a}\right)^T \mathbf{T}^{-1}\left(\mathbf{P}-\mathbf{a}\right) - L_0 \end{aligned} .$$

Identificando $\mathbf{a} = m\omega \times \mathbf{R}$ e $L_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 - V(X,Y)$, temos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - m\omega\times\mathbf{R}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + V(X,Y) \\ &= \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(X,Y) - \mathbf{P}\cdot(\omega\times\mathbf{R}) \end{aligned} .$$

O último termo pode ser ainda escrito na forma $\epsilon_{ijk}P_i\omega_jR_k = -\epsilon_{jik}P_jR_k\omega_i = \epsilon_{ijk}\omega_iP_jR_k = \omega\cdot(\mathbf{R}\times\mathbf{P})$, o que resulta em

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(X,Y) - \omega\cdot\mathbf{L}.$$

Como vemos, no referencial em rotação, $H \neq T+V$. Contudo, este é conservado, uma vez que $H \neq H(t)$.

c) Obtenha as equações do movimento do oscilador harmónico de potencial $V(r) = \frac{1}{2}k(r-\ell)^2$ no referencial em rotação.

Pelas equações de Hamilton, temos[a]

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\partial(\omega\cdot\mathbf{L})}{\partial\mathbf{R}}, \quad \dot{\mathbf{R}} = \frac{\partial H}{\partial\mathbf{P}} = \frac{\mathbf{P}}{m} - \frac{\partial(\omega\cdot\mathbf{L})}{\partial\mathbf{P}}$$

- $V(r) = V(R) = \frac{1}{2}k(R-\ell)^2$, calculamos formalmente $\frac{\partial V}{\partial\mathbf{R}} = k(R-\ell)\frac{\partial R}{\partial\mathbf{R}}$, que se decompõe nas suas componentes X e Y.
- $\frac{\partial(\omega\cdot\mathbf{L})}{\partial\mathbf{R}} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial(\omega_iP_jR_k)}{\partial R_\ell} = \epsilon_{ijk}\omega_iP_j\delta_{k\ell} = \epsilon_{ij\ell}\omega_iP_j = -\epsilon_{i\ell j}\omega_iP_j = \epsilon_{\ell ij}\omega_iP_j = \omega\times\mathbf{P}$. Assim, temos

$$\underbrace{\dot{\mathbf{P}} + \omega\times\mathbf{P}}_{\dot{\mathbf{P}}_{\text{inercial}}} = -k(R-\ell)\frac{\partial R}{\partial\mathbf{R}}$$

Fica como exercício decompor a equação do movimento em componentes, P_X e P_Y. Da mesma forma,

$$\dot{\mathbf{R}} + \omega\times\mathbf{R} = \frac{\mathbf{P}}{m}.$$

[a] Nota bem: na mudança de referencial, o módulo do vector não varia, uma vez que a matriz de rotação tem determinante $= 1$, pelo que $r = R$.

⋆⋆ **Problema 2. Relatividade restrita.** Considere um sistema relativista a uma dimensão no plano (x,t), sob o efeito de um potencial $V(x)$.

a) Escreva um Lagrangeano para o sistema e obtenha as equações formais do movimento.

> Consideremos o caso da partícula livre, para começar. Um "bom" Lagrangeano para sistemas relativistas pode ser construído a partir do intervalo, que é um dos seus invariantes. Recorrendo ao princípio de Hamilton,
>
> $$\delta \int \alpha ds = 0,$$
>
> onde α é uma constante a determinar. Usando $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 = c^2dt^2(1 - \dot{x}^2/c^2)$, vem
>
> $$\delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\alpha c \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}}_{L}\, dt = 0.$$
>
> No limite não-relativista, $\dot{x} \ll c$,
>
> $$L \simeq \alpha c \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{2c^2} + ...\right),$$
>
> o que implica que $\alpha = -mc$. Assim,
>
> $$L(x,\dot{x}) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} - V(x).$$
>
> A equação do movimento é
>
> $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\gamma m \dot{x}) = -\frac{\partial V}{\partial x},}$$
>
> onde $\gamma = (1 - \dot{x}^2/c^2)^{-1/2}$ é o factor relativista.

b) Obtenha o Hamiltoniano respectivo e interprete-o fisicamente.

> Pela transformação de Legendre, $H(p,x) = p\dot{x} - L(x,\dot{x})$. Usando $p = \gamma m \dot{x}$, ou seja, $\dot{x} = p/(m\gamma)$, temos
>
> $$H = \frac{p^2}{\gamma m} + \frac{mc^2}{\gamma} + V = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V(x) = \mathcal{E} + V(x).$$
>
> O termo $\mathcal{E} = \sqrt{T^2 + E_0^2}$ contém a energia em repouso $E_0 = mc^2$.

c) Considere o caso em que a partícula é submetido a uma aceleração constante, $V(x) = -max$. Mostre que o movimento é hiperbólico no plano (x,t).

> Vamos à equação do movimento obtida na alínea a)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\cancel{m}\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}}\right)=\cancel{m}a.$$

Uma primeira integração resulta em

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}}=at+v_0 \Leftrightarrow \dot{x}=\frac{(at+v_0)}{\sqrt{c^2+(at+v_0)^2}}.$$

Finalmente, uma segunda integração leva a $x-x_0=\frac{c}{a}\left(\sqrt{c^2+(at+v_0)^2}-\sqrt{c^2+v_0^2}\right)$. Elevando ao quadrado, e tomando $x_0=v_0=0$ (sem perda de generalidade), obtemos a equação da hipérbole

$$\left(x+\frac{c^2}{a}\right)^2-c^2t^2=\frac{c^4}{a^2}.$$

$\star\star$ **Problema 3. Oscilador anarmónico.** Considere um sistema físico uni-dimensional (um oscilador não-harmónico) cujo Lagrangeano é dado por:

$$L(x,\dot{x})=\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}\omega^2x^2-\alpha x^3+\beta x\dot{x},$$

onde α e β são constantes.

a) Escreva o Hamiltoniano do sistema.

$H=p\dot{x}-L$, onde $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\dot{x}+\beta x$, ou seja, $\dot{x}=p-\beta x$. Substituindo, obtemos, após alguma álgebra

$$H(x,p)=\frac{(p-\beta x)^2}{2}+\frac{1}{2}\omega^2x^2+\alpha x^3.$$

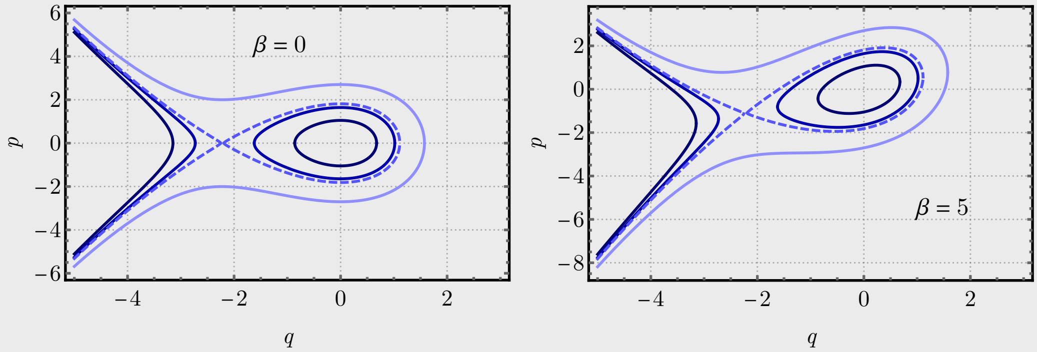
b) Indique, justificando, se o Hamiltoniano é ou não conservado e se coincide ou não com a energia total do sistema.

$H\neq H(t)$, pelo que é conservado. Contudo, se $V=\frac{1}{2}\omega^2x^2+\alpha x^3$, vemos que o termo $(p-\beta x)^2/2\neq p^2/2m$, pelo que $H\neq T+V$.

c) Construa o espaço de fases do oscilador harmónico e discuta-o fisicamente.

Como $H=h=$ constante, então podemos inverter a relação para escrever

$$p=\beta x\pm\sqrt{2h-\omega^2x^2-2\alpha x^3}.$$



Vemos imediatamente a existência de pontos de equilíbrio no sistema,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x \equiv x_1 = 0 \vee x \equiv x_2 = -\frac{\omega^2}{3\alpha}.$$

x_1 é um ponto de equilíbrio estável, ao passo que x_2 é um ponto de equilíbrio instável (ponto onde as curvas da separatriz se cruzam). A separatriz é obtida pela condição

$$h_s = V(x_2) = \frac{1}{54}\frac{\omega^6}{\alpha^2}.$$

Assim, para $h < h_s$, as curvas são fechadas para x suficientemente próximos de x_0; abertos na vizinhança de $x < x_2$. Para $h > h_s$, todas as órbitas são abertas, independentemente das condições iniciais.

$\star\star$ **Problema 4. Parêntesis de Poisson.** Mostre, partindo da definição de parênteses de Poisson, as propriedades algébricas verificadas por funções (com segunda derivada contínua) u, v e w de coordenadas canónicas:

a) $[uv, w] = u[v, w] + [u, w]v$

Usaremos a definição de parêntesis de Poisson

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}.$$

$$\begin{aligned}
u[v, w] + v[u, w] &= u\left(\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial q}\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial q}\right) \\
&= \left(u\frac{\partial v}{\partial q} + v\frac{\partial u}{\partial q}\right)\frac{\partial w}{\partial p} - \left(u\frac{\partial v}{\partial p} + v\frac{\partial u}{\partial p}\right)\frac{\partial w}{\partial q} \\
&= \frac{\partial (uv)}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial q} - \frac{\partial (uv)}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial q} = [uv, w] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

b) $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$

$$\begin{aligned}
[u,[v,w]] &= \frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial q\partial p}\frac{\partial w}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\frac{\partial w}{\partial q}-\frac{\partial^2 w}{\partial q\partial p}\frac{\partial v}{\partial p}\right)\\
&- \frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial q^2}\frac{\partial w}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial^2 w}{\partial p\partial q}-\frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q}\frac{\partial w}{\partial q}-\frac{\partial^2 w}{\partial q^2}\frac{\partial v}{\partial p}\right)
\end{aligned}$$

Repete-se o procedimento trocando $u \leftrightarrow v$, $v \leftrightarrow w$ e $w \leftrightarrow u$. Somando,

$$\begin{aligned}
[u,[v,w]]+[v,[w,u]] &= \frac{\partial w}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial^2 v}{\partial q\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial^2 u}{\partial q\partial p}\right)\\
&- \frac{\partial w}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial q^2}\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial^2 u}{\partial p\partial q}-\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial^2 v}{\partial p\partial q}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial^2 v}{\partial q^2}\right)\\
&= -[w,[u,v]] \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

c) Utilizando os parêntesis de Poisson, mostre que para o oscilador harmónico unidimensional (q,p) existe uma quantidade conservada u dada por

$$u(q,p,t)=\ln(p+im\omega q)-i\omega t, \quad \text{onde} \quad \omega=\sqrt{k/m}.$$

Como sabemos, sendo $u=u(q,p,t)$ uma função de estado,

$$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}+[u,H].$$

- $\dfrac{\partial u}{\partial t}=-i\omega$;
- $[u,H]=\dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial H}{\partial p}-\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial H}{\partial q}=\dfrac{im\omega}{p+im\omega q}\dfrac{p}{m}-\dfrac{m\omega^2 q}{p+im\omega q}=i\omega.$

$\therefore\ \dot{u}=-i\omega+i\omega=0.$

d) Mostre que para um sistema unidimensional descrito pelo Hamiltoniano

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2}-\frac{1}{2q^2},$$

a quantidade $D=pq/2-Ht$ é uma constante do movimento.

$$\dot{D}=\frac{\partial D}{\partial t}+[D,H]=-H+\frac{p}{2}p-\frac{q}{2}\frac{1}{q^3}=-H+\left(\frac{p^2}{2}-\frac{1}{2q^2}\right)=-H+H=0 \quad \blacksquare$$

⋆⋆ **Problema 5. Transformações canónicas.** Considere a transformação dada por

$$q_i = \alpha Q_i + \beta\sigma_{ij}P_j\,,$$
$$p_i = \alpha P_i - \beta\sigma_{ij}Q_j\,,$$

onde α e β são constantes, $i, j = 1, 2$ e σ_{ij} é tal que $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ e $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$.

a) Determine, pelo método que julgar mais apropriado, a relação a que α e β têm de obedecer para que a transformação seja canónica.

Para ser canónica, a transformação deve satisfazer os parêntesis de Poisson fundamentais

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}.$$

Impondo estas condições,

$$\begin{aligned}
[q_i, q_j] &= [\alpha Q_i + \beta\sigma_{ik}P_k, \alpha Q_j + \beta\sigma_{j\ell}P_\ell] \\
&= \alpha^2\cancel{[Q_i, Q_j]} + \beta^2\sigma_{ik}\sigma_{j\ell}\cancel{[P_k, P_\ell]} + \alpha\beta\left(\sigma_{ik}\underbrace{[P_k, Q_j]}_{-\delta_{kj}} + \sigma_{j\ell}\underbrace{[Q_i, P_\ell]}_{\delta_{i\ell}}\right) \\
&= \alpha\beta\left(-\sigma_{ik}\delta_{kj} + \sigma_{j\ell}\delta_{i\ell}\right) = \alpha\beta(-\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) = 0. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Repetindo o cálculo para $[p_i, p_j]$, verificaríamos a mesma igualdade. Finalmente,

$$\begin{aligned}
[q_i, p_j] &= [\alpha Q_i + \beta\sigma_{ik}P_k, \alpha P_j - \beta\sigma_{j\ell}Q_\ell] \\
&= \alpha^2[Q_i, P_j] - \beta^2\sigma_{ik}\sigma_{j\ell}[P_k, Q_\ell] \\
&= \alpha^2\delta_{ij} + \beta^2\sigma_{ik}\sigma_{j\ell}\delta_{k\ell} = \alpha^2\delta_{ij} + \beta^2\sigma_{ik}\sigma_{kj} = (\alpha^2 + \beta^2)\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = 1$. Uma forma alternativa de resolver este problema, era recorrendo à condição simplética, $\mathbf{MJM}^T = \mathbf{J}$, onde $M_{ij} = \dfrac{\partial\eta_i}{\partial\zeta_j}$ ($\eta_i = \{q_i, p_i\}$, $\zeta_i = \{Q_i, P_i\}$).

b) Um sistema com 2 graus de liberdade é descrito pelo Lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right).$$

Escreva o Hamiltoniano correspondente.

Usando a forma matricial $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{q}} + L_0$, onde $L_0 = -\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)$ e $T_{ij} = \delta_{ij}$ (i.e. $\mathbf{T} = \mathbb{I}$),

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{p} - L_0 = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right).$$

c) Resolva a dinâmica do sistema em (b), ou seja obtenha q_1, q_2, p_1, p_2 como funções do tempo e condições iniciais, no caso em que se verifica $Q_2 = P_2 = 0$.

Começamos por anular Q_2 e P_2 nas relações de transformação em a),

$$q_1 = \alpha Q_1, \quad q_2 = \beta P_1, \quad p_1 = \alpha P_2 = \frac{\alpha}{\beta} q_2, \quad p_2 = -\beta Q_1 = -\frac{\alpha}{\beta} q_1.$$

Assim, basta resolver para q_1 e p_1 e relacionar depois. Pelas equações de Hamilton,

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = p_1, \quad p_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -q_1.$$

$\therefore\ \ddot{q}_1 + q_1 = 0 \implies q_1(t) = A\cos(t+\varphi)$ e $p_1(t) = -A\sin(t+\varphi)$. Assim, $q_2(t) = -(\alpha/\beta)A\sin(t+\varphi)$ e $p_2(t) = -(\alpha/\beta)A\cos(t+\varphi)$.

$\star$ **Problema 6. Função geradora F_4.** Considere a seguinte transformação:

$$Q = p + iaq\,, \qquad P = \frac{p - iaq}{2ia}.$$

a) Mostre que a transformação é canónica e encontre uma função geradora estilo F_4.

$$[Q,Q] = 0 = [P,P], \quad [Q,P] = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{ia}{2ia} - \frac{-ia}{2ia} = 1. \quad \checkmark$$

A relação de transformação canónica impõe

$$p\dot{q} - H(q,p) = P\dot{Q} - K + \frac{dF}{dt}.$$

Para função geradora do tipo $F = qp - QP + F_4(p,P,t)$, as equações de transformação são

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}.$$

Assim, da primeira relação, extraímos $p = 2iaP + iaq$, ou seja $q = \dfrac{p - 2iaP}{ia}$. Assim,

$$-\frac{\partial F_4}{\partial p} = \frac{p - 2iaP}{ia} \Leftrightarrow \frac{\partial F_4}{\partial p} = -\frac{p}{ia} + 2P,$$

de onde se retira $F_4 = -\dfrac{p^2}{2ia} + 2Pp + f(P)$, onde a função $f(P)$ é uma constante de integração da primitivação parcial. Da segunda relação de transformação,

$$\frac{\partial f}{\partial P} = \frac{\cancel{ia}(p - 2iaP)}{\cancel{ia}} = -2iaP \Leftrightarrow f(P) = -iaP^2 + c.$$

$$\boxed{\therefore F_4(p,P) = -\frac{p^2}{2ia} + 2Pp - iaP^2 + c.}$$

b) Use a transformação para resolver o problema do oscilador harmónico a uma dimensão (considere $a^2 = km$, onde k é a constante da mola).

Da relação de transformação, $Q = p + iaq$ e $P = -\dfrac{p - iaq}{2ia}$, o que fornece

$$QP = \frac{1}{2ia}\left(p^2 + a^2q^2\right).$$

Assim, temos imediatamente

$$K(Q,P) = \frac{ia}{m}QP = i\omega QP.$$

Das equações do movimento, $\dot{Q} = \dfrac{\partial K}{\partial P} = i\omega Q$ e $\dot{P} = -\dfrac{\partial K}{\partial Q} = -i\omega P$, de onde se obtém imediatamente

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t}, \quad P(t) = P_0 e^{-i\omega t}.$$