1º teste de Mecânica e Relatividade, MEFT, 23 de Novembro de 2019

1.

a) Em coordenadas polares

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{e}_\theta$$

Como $\dot{\theta} = \omega = 2$ rad/s,

$\dot{r} = v = 0{,}5$ m/s,

e em $t=0$, $r=0$ $(r = 0{,}5t)$

$$\vec{a} = -2t\,\vec{e}_r + 2\,\vec{e}_\theta \;[\mathrm{m/s^2}]$$

b) A única força que atua entre o automóvel e a plataforma é a força de atrito. No instante antes de derrapar atinge o valor máximo

$|F_a| = \mu |R_N| = \mu mg = \mu P$

Como $|a| = \sqrt{4t^2 + 4}$

Vira $m|a| = |F_a|$

isto é $\frac{P}{g}\sqrt{4t^2+4} = \mu P \Rightarrow t = 1{,}97$ s

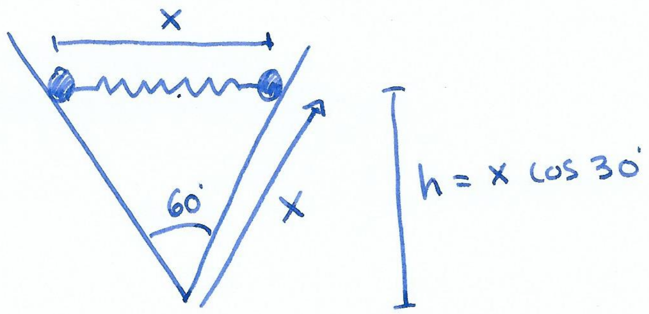
c) Para $t = 1{,}97$ s, $r = 0{,}5 \cdot 1{,}97 \simeq 1$ m

$\theta = \omega t = 2 \times 1{,}97 = 3{,}93$ rad (225°)

$\vec{F}_r = m \cdot \vec{a}_r = 1020 \times (-2 \cdot 1{,}97)\,\vec{e}_r = -4020$ N

$\vec{F}_\theta = m \cdot \vec{a}_\theta = 1020 \times 2\,\vec{e}_\theta = 2040$ N

2.



Como o triangulo é equilatero, $l = x$.

a) $U_p = U_{pot\ grav\ m_1} + U_{pot\ grav\ m_2} + U_{pot\ elástica\ mola}$

$$= mg\,x\cos 30 + mg\,x\cos 30 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

$$= 2mg\,x\cos 30 + \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

b) x_{eq} é tal que $\frac{dU}{dx}=0$

como $\frac{dU}{dx} = 2mg\cos 30 + k(x-l_0)$

Vem

$$2mg\cos 30 + k(x_{eq}-l_0)=0 \Rightarrow x_{eq} = l_0 - \frac{2mg\cos 30}{k}$$
$$= 0{,}66\ m$$

Como $\frac{d^2U}{dx^2} = k = 25 > 0$, é um ponto e equilíbrio estável.

c) Como todas as forças que atuam no sistema são conservativas ou realizam trabalho nulo temos

$$E = E_{cin} + U_{pot} = cte$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 2mgx\cos 30 + \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$$

Pelo que como $\frac{dE}{dt}=0$ (sistema tem energia constante)

e $\frac{dE}{dt} = 2m\dot{x}\ddot{x} + 2mg\dot{x}\cos 30 + k\dot{x}(x-l_0) = 0$

teremos $(2m)\ddot{x} + (k)x = kl_0 - 2mg\cos 30$

d) A frequência angular w_0 de oscilação deste sistema é (da equação anterior)

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}} = 5\ rad/s$$

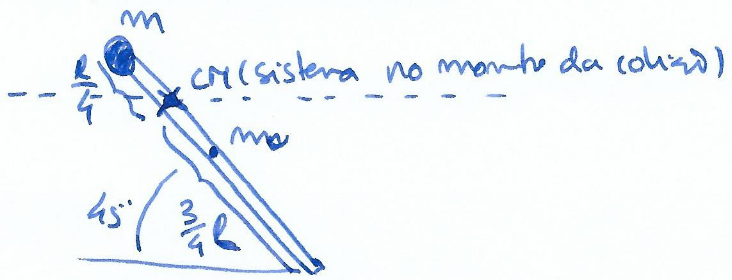
3

a) Como as únicas forças que atuam no sistema são internas, $\frac{d\vec{p}_{sist}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{p}_{sist}=cte$ pelo que a velocidade do centro de massa antes e depois da colisão é a mesma.

Calculando o seu valor antes da colisão, temos,

$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_D\cdot\vec{v}_D + m_B\cdot\vec{v}_B}{m_D+m_B} = \frac{0{,}2\times 5\vec{e}_x + 0{,}2\times 0}{0{,}2+0{,}2} = 2{,}5\,\vec{e}_x\ [m/s]$$

b) No momento da colisão



As únicas forças que atuam na colisão inelástica entre a massa/disco m e a barra, são forças de ligação internas ao sistema e por isso do tipo par acção-reacção. Logo em relação ao ponto CM (sistema no momento da colisão) exercem torque nulo. Logo

$$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = ct$$

O momento angular conserva-se e por isso pode ser calculado antes da colisão e nesse momento o seu valor. Escolhendo $\vec{e}_\perp$ como indicado

$$\circlearrowright \vec{e}_\perp$$

$$\vec{L}_i = \vec{r} \times \vec{p} = m_D \cdot v_D \cdot b \cdot \vec{e}_\perp + 0$$

$$= m \cdot v_0 \cdot \frac{l}{4} \cdot \sin 45° \ \vec{e}_\perp = 0,053 \ \vec{e}_\perp \ [kg \, m^2 s^{-1}]$$

e

$$\vec{L}_f = \vec{L}_i$$

c) Energia cinética antes da colisão é apenas a energia do disco, isto é,

$$E_{cin_i} = \frac{1}{2} m_D \cdot v_D^2 = \frac{1}{2} \cdot m v_0^2 = 2,5 \text{ J}.$$

A energia cinética final (do sistema barra ligada ao disco de dimensões desprezáveis é)

$$E_{cinf} = \frac{1}{2} M_{sist} \cdot V_{CM}^2 + \frac{1}{2} \cdot I'_{sist} \cdot \omega'^2$$

É por isso necessário calcular ω', o que podemos fazer a partir do conhecimento do momento angular final do sistema:

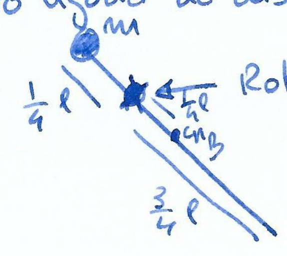
$$\vec{L}_{fsist} = \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM} + I'_{sist} \cdot \omega' \vec{e}_\perp$$

Como $\vec{R}_{CM} \parallel \vec{P}_{CM}$ para o ponto de cálculo escolhido $\Rightarrow \vec{R}_{CM} \times \vec{P}_{CM} = 0$.

Logo $\vec{L}_{fsist} = I'_{sist} \cdot \omega' \vec{e}_\perp$ pelo que $\omega' = \frac{|\vec{L}_{sist}|}{I'_{sist}} = \frac{0,053}{I'_{sist}}$

Isto é, $E_{cinf} = \frac{1}{2} \cdot (2m) \cdot (2,5)^2 + \frac{1}{2} \cdot I'_{sist} \cdot \left(\frac{0,053}{I'_{sist}}\right)^2$

Falta determinar o momento de inércia do sistema em relação ao ponto de rotação da barra ligada ao disco (como se vê na figura).



Rotação em torno deste ponto.

$$I'_{sist} = I'_{barra} + I'_{disco}$$

$$= \Big[\underbrace{\tfrac{1}{12} m_B L^2 + m_B \left(\tfrac{l}{4}\right)^2}_{\text{teo. eixos paralelos}} \Big] + m_D \cdot \left(\tfrac{l}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12} m l^2 + m \frac{l^2}{16} + m \frac{l^2}{16} = \frac{5}{24} m l^2$$

Logo

$$E_{cin\,final} = m (2,5)^2 + \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{5}{24} m l^2} \cdot \left(\frac{0,053^2}{\frac{5}{24} m l^2} \right)^{\cancel{2}}$$

$$E_{cin\,final} = m (2,5)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{0,053^2}{\frac{5}{24} m l^2} = \underline{1,62\ J}$$