# Probabilidades e Estatística

**LEAN, LEE, LEGI, LEMat, LERC, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEMec, MEQ**

2º semestre – 2012/2013
20/04/2013 – 11:00

Duração: 90 minutos **1º teste B**

**Justifique convenientemente todas as respostas!**

| **Grupo I** | 10 valores |
|---|---|

**1.** Uma empresa financeira desenvolveu um modelo de forma a prever, sob determinadas condições macroeconómicas, a ocorrência de recessões económicas. O modelo faz previsões correctas quando ocorre recessão em 80% dos casos, mas faz previsões incorrectas quando não ocorre recessão em 10% dos casos. Dados históricos mostram que a probabilidade de ocorrência de recessão económica, nas condições de uso do modelo, é de 0.2. Supondo verificadas as condições de uso do modelo, calcule:

(a) A probabilidade de ocorrer recessão económica, sabendo que o modelo prevê a ocorrência desta. (3.0)

Sejam $R =$"ocorre uma recessão" e $PR =$"previsão de recessão". Tem-se $P(R) = 0.2$, $P(PR|R) = 0.8$ e $P(PR|\bar{R}) = 0.1$.
$P(R|PR) = \frac{P(PR|R)P(R)}{P(PR|R)P(R)+P(PR|\bar{R})P(\bar{R})} = \frac{0.8\times 0.2}{0.8\times 0.2+0.1\times(1-0.2)} = \frac{2}{3}$.

(b) A probabilidade de ocorrer recessão económica ou o modelo prever a ocorrência de recessão económica. (1.5)

$P(R\cup PR) = P(R)+P(PR)-P(R\cap PR) = P(R)+P(PR\cap\overline{R}) = P(R)+P(PR|\bar{R})P(\bar{R}) = 0.2+0.1\times 0.8 = 0.28.$

**2.** Um serviço de atendimento permanente recebe chamadas telefónicas segundo um processo de Poisson com valor esperado de 3 chamadas por minuto.

(a) Sabendo que num período de 10 minutos foram recebidas chamadas, qual é a probabilidade de nesse período o serviço receber no máximo 25 chamadas? (2.5)

Sendo $X_t =$"número de chamadas recebidas em $t$ minutos" tem-se $X_t \sim Poi(\lambda t)$, onde $\lambda = E[X_1] = 3$.
$P(X_{10} \le 25|X_{10} > 0) = \frac{P(0<X_{10}\le 25)}{P(X_{10}>0)} = \frac{F_{Poi(30)}(25)-F_{Poi(30)}(0)}{1-F_{Poi(30)}(0)} = \frac{0.2084-0}{1-0} = 0.2084.$

(b) Considere períodos consecutivos de 10 minutos e que cada período é considerado atípico se o serviço receber mais de 40 chamadas no período. Determine o valor esperado e o desvio padrão do número de períodos de 10 minutos a observar até que se encontre um período atípico. (3.0)

Seja $Y =$"número de períodos de 10 minutos a observar até que se encontre um período atípico". Uma vez que os períodos são disjuntos, $Y$ representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli, ou seja, $Y \sim Geo(p)$, com $p = P(X_{10} > 40) = 1 - F_{Poi(30)}(40) = 0.0323$.
$E[Y] = \frac{1}{p} = 30.9598$
$\sqrt{Var[Y]} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = 30.456.$

| **Grupo II** | 10 valores |
|---|---|

**1.** Um avião de médio curso pode transportar até 100 passageiros e respectivas bagagens. Para cumprir as regras de segurança, o peso total atribuído aos passageiros e suas bagagens não deve ultrapassar 9.3 toneladas.

(a) Assumindo que: (3.0)

– o valor esperado do peso de um passageiro é 70 Kg com desvio padrão de 10 Kg;

– o valor esperado do peso da bagagem de um passageiro é 20 Kg com desvio padrão de 5 Kg;

e que todos os pesos em causa são independentes entre si, determine aproximadamente a probabilidade de o aparelho com a lotação completa (100 passageiros) não poder levantar voo devido a excesso de peso.

Sejam $X_i$ ="peso do passageiro $i$" e $Y_i$ ="peso da bagagem do passageiro $i$", $i = 1,\ldots,100$, e $T = \sum_{i=1}^{100}(X_i + Y_i)$ ="peso total dos 100 passageiros e respectiva bagagem". Como $T$ é a soma de um número suficientemente grande de variáveis aleatórias independentes então, pelo teorema do limite central tem-se

$$Z = \frac{T - E[T]}{\sqrt{Var[T]}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

$E[T] = E[\sum_{i=1}^{100}(X_i + Y_i)] = \sum_{i=1}^{100}(E[X_i] + E[Y_i]) = 100(E[X] + E[Y]) = 9000$ e
$Var[T] = Var[\sum_{i=1}^{100}(X_i + Y_i)] = \sum_{i=1}^{100}(Var[X_i] + Var[Y_i]) = 100(Var[X] + Var[Y]) = 12500$
$P(T > 9300) = 1 - P\left(Z \leq \frac{9300-9000}{\sqrt{12500}}\right) \approx 1 - \Phi(2.68) = 0.0037.$

(b) Determine de modo exacto a probabilidade pedida na alínea (a) considerando que os pesos, quer de cada passageiro, quer da sua bagagem, têm distribuição normal. (1.0)

A probabilidade calculada em (a) é agora o resultado exacto pois a soma de variáveis aleatórias normais e independentes tem ainda uma distribuição normal.

**2.** Considere o par aleatório $(X_1, X_2)$ cuja função de probabilidade conjunta está representada sumariamente na seguinte tabela:

| $X_1 \backslash X_2$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/16 | 5/16 | 1/8 |
| 1 | 3/16 | 3/16 | 1/8 |

(a) Verifique que $X_i \sim Binomial(i, 1/2)$, para $i = 1,2$. (1.5)

$$P(X_1 = x) = \sum_{y=0}^{2} P(X_1 = x, X_2 = y) = \begin{cases} 1/2, & x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \iff X_1 \sim Ber(1/2) \equiv Binomial(1, 1/2)$$

$$P(X_2 = y) = \sum_{x=0}^{1} P(X_1 = x, X_2 = y) = \begin{cases} 1/4, & y = 0 \text{ ou } y = 2 \\ 1/2, & y = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} \binom{2}{y}\frac{1}{4}, & y = 0,1,2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \iff$$

$\iff X_2 \sim Binomial(2, 1/2)$

(b) Determine o valor esperado de $X_2$ condicionalmente a $X_1 = 1$. Com base nesse valor, o que pode concluir quanto à independência entre $X_1$ e $X_2$? (2.0)

$$P(X_2 = y | X_1 = 1) = \frac{P(X_1=1, X_2=y)}{P(X_1=1)} = \begin{cases} 3/8, & y = 0 \text{ ou } y = 1 \\ 1/4, & y = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$E[X_2|X_1 = 1] = \sum_{y=0}^{2} yP(X_2 = y|X_1 = 1) = 7/8 \neq 1 = E[X_2] \implies X_1$ e $X_2$ não são variáveis aleatórias independentes.

(c) Calcule o coeficiente de correlação de $(X_1, X_2)$ e comente o valor obtido. (2.5)

Tendo em conta (a) tem-se $E[X_1] = 1/2$, $Var[X_1] = 1/4$, $E[X_2] = 1$ e $Var[X_2] = 1/2$.
$E[X_1X_2] = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2} xyP(X_1 = x, X_2 = y) = 3/16 + 1/4 = 7/16$
$Corr[X_1, X_2] = \frac{E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2]}{\sqrt{Var[X_1]Var[X_2]}} = -0.1768.$
$Corr[X_1, X_2] \neq 0$ confirma que as variáveis são dependentes. Como $Corr[X_1, X_2] < 0$ conclui-se que as variáveis estão negativamente associadas. No entanto, essa associação é fraca uma vez que o valor de $|Corr[X_1, X_2]|$ é pequeno.