PB8.1 Na base formada pelos vectores

$$\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1),\ \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1),\ \mathbf{v}_3 = (1, 1, -1),$$

a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine bases dos subespaços $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{R}(T)$.

b) Resolva a equação $T(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$

PB8.2 Designe-se por S o subespaço das matrizes simétricas 2×2, i.e.

$$S = \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^t \right\}.$$

Considere-se $T : S \to S$ a transformação linear definida por

$$T(\mathbf{A}) = \mathbf{AB} + \mathbf{BA},\ \text{onde } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base para S e indique a matriz que, nessa base, representa T.

b) Calcule uma base do $\mathcal{N}(T)$ e justifique que T não é injectiva nem sobrejectiva.

c) Resolva em S, a equação $T(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$.

PB8.3 Considere a transformação linear $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ (onde $\mathbb{P}_n$ é o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a n) definida pela fórmula

$$T(p(t)) = t\ (p(t) + p(1-t))$$

a) Indique uma base para o espaço imagem de T.

b) Determine o conjunto S dos polinómios que são soluções da equação $T(p(t)) = t^2 - t^3$.