Matemática Computacional
MEBiol, MEBiom e MEFT
Aula 10 - Resolução numérica de sistemas lineares

Ana Leonor Silvestre

Instituto Superior Técnico, 1º *Semestre, 2020/2021*

Sumário da Aula 10

Cap. 3 - Resolução numérica de sistemas lineares

Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel: algoritmos.

Métodos iterativos para sistemas lineares. Condição suficiente de convergência.

Método de Jacobi - Exemplo

Consideremos o sistema linear com solução única

$$\begin{aligned}
&4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\\
&-2x_1 + 10x_2 - 0.5x_3 = 2\\
&x_1 - 0.5x_2 + 2x_3 = 3
\end{aligned}$$

Escreve-se este sistema na forma equivalente

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.25 + 0.5x_2 - 0.25x_3\\
x_2 &= 0.2 + 0.2x_1 + 0.05x_3\\
x_3 &= 1.5 - 0.5x_1 + 0.25x_2
\end{aligned}$$

O método de Jacobi para este sistema é o processo iterativo

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 0.25 + 0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)}\\
x_2^{(k+1)} &= 0.2 + 0.2x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)}\\
x_3^{(k+1)} &= 1.5 - 0.5x_1^{(k)} + 0.25x_2^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Exemplo

Tomando a iterada inicial $x^{(0)} = [1\ 0\ 0]^\mathsf{T}$ obtém-se

$$\begin{aligned}
x^{(1)} &= [0.25,\ 0.2 + 0.2,\ 1.5 - 0.5]^\mathsf{T} = [0.25,\ 0.4,\ 1]^\mathsf{T} \\
x^{(2)} &= [0.25 + 0.5 \times 0.4 - 0.25,\ 0.2 + 0.2 \times 0.25 + 0.05, \\
&\qquad 1.5 - 0.5 \times 0.25 + 0.25 \times 0.4]^\mathsf{T} \\
&= [0.2,\ 0.3,\ 1.475]^\mathsf{T} \\
x^{(3)} &= [0.03125,\ 0.31375,\ 1.475]^\mathsf{T} \\
x^{(4)} &= [0.038125,\ 0.28,\ 1.5628125]^\mathsf{T}
\end{aligned}$$

Será que esta sucessão converge para a solução exata do sistema?

Método de Jacobi - Algoritmo

Sistema linear $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e $b \in \mathbb{R}^N$, em que

$$a_{ii} \neq 0, \; i = 1, ..., N.$$

$$Ax = b \iff \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, ..., N \iff$$

$$a_{ii} x_i = b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{N} a_{ij} x_j, \quad i = 1, ..., N \iff$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{N} a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, ..., N$$

Método de Jacobi - Algoritmo

A partir das igualdades

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{N} a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, ..., N,$$

definimos uma sucessão $\left\{ x^{(k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}^N$ de aproximações da solução do sistema $Ax = b$ através de

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{N} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, ..., N, \;\; k = 0, 1, ...$$

Esta é a forma computacional do *método de Jacobi*, um dos métodos iterativos mais simples, e que apesar de ser lento, voltou a ser popular devido às possibilidades computacionais que oferece em termos de processamento paralelo.

Método de Gauss-Seidel - Exemplo

Consideremos novamente o sistema

$$\begin{aligned}
&4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\\
&-2x_1 + 10x_2 - 0.5x_3 = 2\\
&x_1 - 0.5x_2 + 2x_3 = 3
\end{aligned}$$

que se pode escrever na forma equivalente

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.25 + 0.5x_2 - 0.25x_3\\
x_2 &= 0.2 + 0.2x_1 + 0.05x_3\\
x_3 &= 1.5 - 0.5x_1 + 0.25x_2
\end{aligned}$$

O método de Gauss-Seidel para este sistema escreve-se

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 0.25 + 0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)}\\
x_2^{(k+1)} &= 0.2 + 0.2x_1^{(k+1)} + 0.05x_3^{(k)}\\
x_3^{(k+1)} &= 1.5 - 0.5x_1^{(k+1)} + 0.25x_2^{(k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel - Exemplo

Tomando a iterada inicial $x^{(0)} = [1\ 0\ 0]^\mathsf{T}$ (usada no método de Jacobi), obtém-se sucessivamente

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= [0.25,\ 0.25,\ 1.4375]^\mathsf{T}\\
x^{(2)} &= [0.015625,\ 0.275,\ 1.5609375]^\mathsf{T}\\
x^{(3)} &= [-0.002734375,\ 0.2775,\ 1.5707421875]^\mathsf{T}\\
x^{(4)} &= [-0.003935546875,\ 0.27775,\ 1.5714052734375]^\mathsf{T}
\end{aligned}
$$

Será que há convergência para a solução exata do sistema?

Método de Gauss-Seidel - Algoritmo

O método de Gauss-Seidel, utiliza as componentes mais atualizadas à medida que estas vão sendo calculadas

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{(k)} \right),$$

$$i = 1, ..., N, \;\; k = 0, 1, ...$$

Métodos iterativos para sistemas lineares

Sistema de equações lineares $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ e $b \in \mathbb{R}^N$.
Decomposição aditiva da matriz A:

$$A = M_A + N_A$$

onde M_A se supõe <u>não singular</u> e <u>facilmente invertível</u>, por exemplo, diagonal, tridiagonal, triangular,...
Podemos escrever

$$Ax = b \iff M_A x = -N_A x + b$$

$$\iff x = -M_A^{-1} N_A x + M_A^{-1} b$$

$$\iff x = Cx + d$$

onde

$$C := -M_A^{-1} N_A = -M_A^{-1}(A - M_A) = I - M_A^{-1} A$$

$$d := M_A^{-1} b.$$

Definição

Sejam $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ e $d \in \mathbb{R}^N$ tais que

$$Ax = b \iff x = Cx + d.$$

Neste caso, diz-se que o método iterativo

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

é *consistente com o sistema linear* $Ax = b$. A matriz C chama-se matriz de iteração do método.

Exemplo

Consideremos o sistema linear com solução única

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\
-2x_1 + 10x_2 - 0.5x_3 = 2 \\
x_1 - 0.5x_2 + 2x_3 = 3
\end{aligned}
$$

e o método de Jacobi para este sistema

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 0.25 + 0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= 0.2 + 0.2x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)} \\
x_3^{(k+1)} &= 1.5 - 0.5x_1^{(k)} + 0.25x_2^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Exemplo

A matriz de iteração do método de Jacobi (matriz C)

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= 0.25 + 0.5x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k)} \\
x_2^{(k+1)} &= 0.2 + 0.2x_1^{(k)} + 0.05x_3^{(k)} \\
x_3^{(k+1)} &= 1.5 - 0.5x_1^{(k)} + 0.25x_2^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

é

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.25 \\ 0.2 & 0 & 0.05 \\ -0.5 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

e o vetor d é

$$d_J = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Método de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = C_J x^{(k)} + d_J, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Forma matricial e matriz de iteração dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

Para tal, considera-se as matrizes L_A, D_A, $U_A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ que são a parte triangular estritamente inferior de A, a parte diagonal de A e a parte triangular estritamente superior de A, respetivamente, ou seja,

$$(L_A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i > j, \\ 0,\ i \leq j \end{cases} \qquad (D_A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i = j, \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$$

$$(U_A)_{ij} = \begin{cases} a_{ij},\ i < j, \\ 0,\ i \geq j \end{cases}$$

A matriz de iteração do método de Jacobi é dada por

$$\boxed{C_J = -D_A^{-1}(L_A + U_A)}$$

ou ainda

$$C_J = -D_A^{-1}(A - D_A) = I - D_A^{-1}A.$$

Forma matricial e matriz de iteração dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

Quanto ao método de Gauss-Seidel, tem-se

$$x^{(k+1)} = D_A^{-1}[b - L_A x(k+1) - U_A x^{(k)}]$$

$$\iff (L_A + D_A)x^{(k+1)} = b - U_A x^{(k)}$$

$$\iff x^{(k+1)} = (L_A + D_A)^{-1} b - (L_A + D_A)^{-1} U_A x^{(k)}$$

pelo que

$$\boxed{C_{GS} = -(L_A + D_A)^{-1} U_A}$$

ou ainda

$$C_{GS} = -(L_A + D_A)^{-1}(A - (L_A + D_A)) = I - (L_A + D_A)^{-1} A.$$

Condições suficientes de convergência em termos da matriz de iteração (matriz C)

Teorema

Se $\|C\| < 1$ para alguma norma matricial induzida, então

1. Existe um e um só $z \in \mathbb{R}^N$ tal que $z = Cz + d$, ou seja, o sistema $Ax = b$ tem uma única solução;
2. O método do ponto fixo $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$, $k \in \mathbb{N}_0$, converge para z, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^N$;
3. São válidas as seguintes majorações para os erros $z - x^{(k)}$:

$$\|z - x^{(k)}\| \leq \|C\|^k \|z - x^{(0)}\|,$$

$$\|z - x^{(k)}\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

$$\|z - x^{(k+1)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|, \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Demonstração

Aplica-se o Teorema do ponto fixo com

$$X = \mathbb{R}^N$$

e

$$G(x) := Cx + d.$$

É óbvio que $G(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathbb{R}^N$ e a condição de contratividade é fácil de estabelecer:

$$\|G(x) - G(y)\| = \|C(x - y)\| \leq \|C\|\|x - y\|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N$$

Assim, se $L := \|C\| < 1$ são satisfeitas as hipóteses do Teorema do ponto fixo.