Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
1º Teste (V1) - 13 de Novembro de 2010 - 9h00m

Resolução

Problema 1 (1,0 val.) Seja $f(x) = \log(\, x^2 - |x-2|\,) + \sqrt{2-x^2}$.

(a) Determine o domínio de f, que designamos Df.

Resolução: $Df = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x-2| > 0 \text{ e } 2 - x^2 \geq 0\}$. Temos

- $2 - x^2 \geq 0 \iff |x| \leq \sqrt{2} \iff x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
- Para resolver a desigualdade $x^2 - |x-2| > 0$, ou $x^2 > |x-2|$, notamos que $x^2 - |x-2| = 0$ quando $x^2 = \pm(x-2)$. A equação $x^2 = x - 2$ não tem soluções reais, e $x^2 = -x + 2$ quando $x = (-1 \pm \sqrt{9})/2 = (-1 \pm 3)/2 = 1$ ou -2. A desigualdade $x^2 > |x-2|$ é satisfeita quando x é "grande" e não é satisfeita quando $x = 0$, pelo que só podemos ter

$$x^2 > |x-2| \iff x < -2 \text{ ou } x > 1 \iff x \in]-\infty, -2[\cup]1, \infty[.$$

Concluímos que

$$Df = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap (]-\infty, -2[\cup]1, \infty[) =]1, \sqrt{2}]$$

(b) Determine, se existirem, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo de Df.

$$\max Df = \sup Df = \sqrt{2}, \inf Df = 1, \ \min Df \text{ não existe.}$$

Problema 2 (1,5 val.) Demonstre por indução que a seguinte identidade é válida para qualquer natural n.

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Resolução: Com $P(n) =$ "$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$", notamos que

- $P(1)$ é verdadeira: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$
- $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = 2(n+1) - 1 + \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2n + 1 + n^2 = (n+1)^2$

Problema 3 (2,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para $x \neq 0$ por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se} \quad x > 0 \\ (a-x)(x+2) & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) Determine a constante a sabendo que f é contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (a-x)(x+2) = a,$$

donde obtemos $a = 0$.

(b) A função f tem derivada em $x = 0$?

Resolução: Passamos a calcular os dois limites laterais:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} te^{-t} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x(x+2)}{x} = -2$$

Segue-se que $f'(0)$ não existe, ou seja, f não tem derivada em $x = 0$.

(c) Determine a imagem $f(\mathbb{R})$.

Resolução: É conveniente considerar separadamente os casos $x \geq 0$ e $x \leq 0$:

- $x \geq 0$: $f(x) = e^{-1/x}$. É claro que f é crescente para $x \geq 0$ e portanto $0 \leq f(x) < \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
- $x \leq 0$: $f(x) = -x(x+2)$. O gráfico de f é uma parábola virada para baixo com vértice em $x = -1$. Temos $f(-1) = 1$, e portanto temos para $x \leq 0$ que $-\infty < f(x) \leq 1$.

Concluímos que $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1]$.

Problema 4 (2,0 val.) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-2x}{x^2} \qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \qquad (c)\ \lim_{x\to-\infty} e^x \arctan(\operatorname{sen} x)$$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1-2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}-2}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x}}{2} = 2$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1$, porque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

c) Como $-\pi/2 \leq \arctan(u) \leq \pi/2$ para qualquer $u \in \mathbb{R}$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, temos

$$-\pi/2e^x \leq e^x \arctan(\operatorname{sen} x) \leq \pi/2e^x \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x \arctan(\operatorname{sen} x) = 0$$

Problema 5 (2,0 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = (\cos(\log x))^3 \qquad (b)\ g(x) = \frac{(1+x^2)\tan x}{1+2x} \qquad (c)\ h(x) = x^{\operatorname{sen} x}$$

Resolução:

a) $f'(x) = -3\,(\cos(\log x))^2 \operatorname{sen}(\log x)\,\dfrac{1}{x}$

b) $g'(x) = \dfrac{(2x\tan x + (1+x^2)\sec^2 x)(1+2x) - 2(1+x^2)\tan x}{(1+2x)^2}$

c) $h'(x) = \left(e^{\log x \operatorname{sen} x}\right)' = e^{\log x \operatorname{sen} x}(\log x \operatorname{sen} x)' = x^{\operatorname{sen} x}(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} + \log x \cos x)$

Problema 6 (1,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável estritamente crescente. Na tabela seguinte estão indicados alguns valores de f e f':

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1/2	2	3	5	$6\frac{3}{4}$	7	9
$f'(x)$	1/3	3	2/3	3/2	1/3	1	2

(a) Calcule a derivada de $h(x) = f(x)^2 \cos x + f(e^{2x})$ no ponto $x = 0$.
(b) Mostre que existe $c \in [0,6]$ tal que $f'(c) < 1/3$.
(c) A equação $f(x) = x + \sqrt{8}$ tem soluções $x \in [0,6]$?
(d) Seja g a função inversa de f. Determine x tal que $g'(x) = 2/3$.

Resolução:

a) $h'(x) = 2f(x)f'(x)\cos x - f(x)^2 \operatorname{sen} x + f'(e^{2x})2e^{2x}$, portanto
$$h'(0) = 2f(0)f'(0) + f'(1)2 = 2(\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) + (3)(2) = \frac{19}{3}$$

b) Pelo teorema de Lagrange, existe $c \in]4,5[\subset [0,6]$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(5) - f(4)}{5-4} = f(5) - f(4) = 7 - (6 + \frac{3}{4}) = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

c) Tomamos $h(x) = f(x) - (x + \sqrt{8})$ e observamos que h é uma função contínua. Notamos também que, como $2 < \sqrt{8} < 3$,
$$h(0) = f(0) - \sqrt{8} = \frac{1}{2} - \sqrt{8} < 0 \text{ e } h(6) = f(6) - 6 - \sqrt{8} = 9 - 6 - \sqrt{8} = 3 - \sqrt{8} > 0$$
Pelo teorema do valor intermédio, segue-se que a equação $h(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]0,6[$.

d) Sabemos que $g'(x) = 1/f'(g(x))$ e temos portanto

x	1/2	2	3	5	$6\frac{3}{4}$	7	9
$g(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$g'(x)$	3	1/3	3/2	2/3	3	1	1/2

Em particular, $g'(5) = 2/3$.