DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Complementos de Cálculo Diferencial e Integral

8ª Ficha de trabalho - 2º Semestre 2014/2015

1. Calcule o integral
$$\int\int_D e^{3y-2\sqrt{y^3}}\,dxdy$$
onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x+1 \leqslant 1 \ \wedge \ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$.

2. Sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ e considere o conjunto (região delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$)
$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$$
   (a) Escreva o integral $\iint_S f(x,y)\,dxdy$ usando a mudança de variáveis $(x,y) = g(\rho,\theta)$ definida por
$$\begin{cases} x = \rho\, a\cos\theta \\ y = \rho\, b \operatorname{sen}\theta \end{cases}.$$
   (b) Calcule a área de S.
   (c) Calcule $\iint_S f(x,y)\,dxdy$ quando $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se} \quad a\,y > b\,|x| \\ 0 & \text{se} \quad a\,y \leqslant b\,|x| \end{cases}.$

3. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis tais que $0 \leqslant g \leqslant f$. Calcule o volume da região
$$R = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ a \leqslant x \leqslant b \ \wedge\ g(x) \leqslant \sqrt{y^2+z^2} \leqslant f(x)\right\}$$
e utilize esse resultado para calcular o volume do sólido
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 \leqslant \sqrt{y^2+z^2} \leqslant 1 - x^2\right\}.$$

4. Considere-se $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado de $\mathbb{R}^2$, $h > 0$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação afim, ou seja,
$$T(p,q) = (p_0, q_0) + A(p,q)$$
onde $A(p,q)$ é uma transformação linear. Defina-se
$$D_\theta = \left\{((1-\theta)(p,q) + \theta T(p,q)) \in \mathbb{R}^2 :\ (p,q) \in D_0\ \right\}$$
e
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in D_\theta \ \wedge\ z = \theta h \ \wedge\ \theta \in [0,1]\ \right\}.$$
   (a) Relacione as áreas de D_0 e D_1.
   (b) Interprete geometricamente o sólido S.
   (c) Calcule o volume de S em termos da área de D_0 e do traço e determinante de A.
   (d) Concretize as alíneas anteriores no caso em que T é uma função constante.