Capítulo 4. Variáveis aleatórias e distribuições contínuas

Conceição Amado, Ana Pires e M. Rosário Oliveira

4.1 Variáveis aleatórias contínuas. Função densidade de probabilidade

- Recordar: **Tipos de Variáveis Aleatórias**

Seja D_X o conjunto
(numerável) de pontos de descontinuidade da função de distribuição:

- A v.a. X diz-se **discreta** quando $P(X \in D_X) = 1$ CAP. 3
- A v.a. X diz-se **contínua** quando $D_X = \emptyset$. CAP. 4
- A v.a. X diz-se **mista** quando $D_X \neq \emptyset$ e $P(X \in D_X) < 1$.

Exemplos:

T - v.a que indica o tempo de vida de um determinado equipamento

X - v.a que indica a intensidade da corrente em determinado ponto de um circuito

Y - v.a. que representa a resistência mecânica de uma peça

Nota: há v.a. discretas que tomam um número tão elevado de valores que é mais conveniente tratá-las como contínuas (p.ex., o valor do saldo contabilístico de uma conta bancária seleccionada ao acaso).

4.1 Variáveis aleatórias contínuas. Função densidade de probabilidade

Definição: Seja X uma v.a. e $F_X(x)$ a sua função de distribuição. A v.a X diz-se **contínua** se $F_X(x)$ for absolutamente contínua, i.e, sse existe uma função **não negativa**, $f_X(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, tal que, para todo o $x \in \mathbb{R}$ se tem:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

À função $f_X(x)$ chama-se **função de densidade** de probabilidade, (f.d.p.), ou apenas função de densidade.

A função densidade $f_X(x)$ da v.a. continua X, satisfaz:

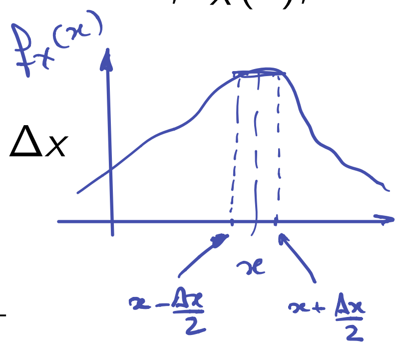
1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

2. $f_X(x) = \dfrac{d\,F_X(x)}{dx}$.

Como descrever uma v.a. contínua?

- Informalmente dizemos que uma variável aleatória é contínua se o conjunto dos seus valores possíveis contiver um intervalo de números reais e nenhum desses valores puder ser observado repetidamente.
- Como se pode ver o método usado para as v.a. discretas (lista dos valores possíveis de X e respectivas probabilidades) não é aplicável, pois é impossível elaborar uma lista desses valores!
- O termo densidade lembra "a quantidade de massa por unidade de comprimento, de superfície ou de volume". Neste caso podemos dizer que $f_X(x)$ indica a probabilidade por unidade de comprimento "na vizinhança do ponto x". Ou seja, a função de densidade, $f_X(x)$, pode ser vista como a

$$P\left(x - \frac{\Delta x}{2} < X < x + \frac{\Delta x}{2}\right) \simeq f_X(x)\,\Delta x$$



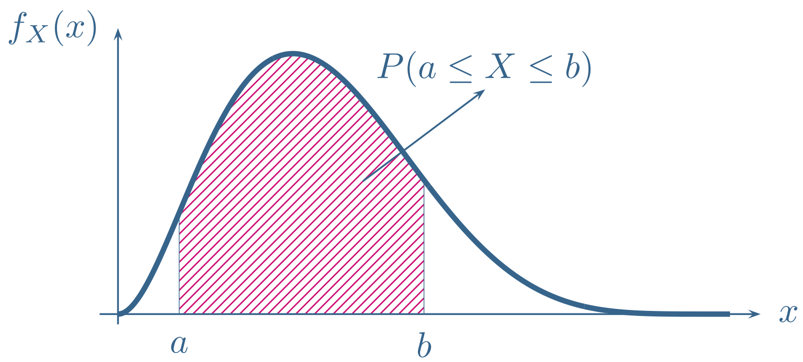
ou

$$f_X(x) \simeq \frac{P\left(x - \frac{\Delta x}{2} < X < x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

para cada intervalo de comprimento pequeno Δx.

Cálculo de probabilidades

- $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f_X(x)dx, \quad \forall_{a,b \in \mathbb{R}:\ a \leq b}$



- Tem-se ainda que:
$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \displaystyle\int_a^b f_X(x)dx, \quad \forall_{a,b \in \mathbb{R}:\ a \leq b}$

- $P(X = x) = \displaystyle\int_x^x f_X(t)dt = 0, \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$

Função de distribuição e propriedades

Definição: A função de distribuição (ou função de distribuição acumulada) de uma v.a. contínua, X, é

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \qquad \text{com } x \in \mathbb{R}$$

Notas:

- As propriedades da função distribuição da v.a. X contínua são semelhantes às dadas no Capítulo 3, a única alteração é que, agora, esta função é contínua quer à direita quer à esquerda.
- $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) =$
  $= \int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a), \quad \forall_{a,b \in \mathbb{R}:\ a \leq b}.$

Exemplo 4.1: Seja X uma v.a. contínua e considere ainda a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} k\left(4x - 2x^2\right), & 0 < x < 2 \\ 0, & c.c. \end{cases},$$

onde k é uma constante desconhecida.

a) Determine o valor de k de modo a que $f(x)$ seja a f.d.p. da v.a. X. Para que $f(x)$ seja uma f.d.p. então:

1. $f(x) \geq 0, \quad , \forall_x \quad \Leftrightarrow k > 0$
2. Uma vez que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$ então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} k(4x - 2x^2)\,dx + \int_{2}^{+\infty} 0\,dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3}k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{8}$$

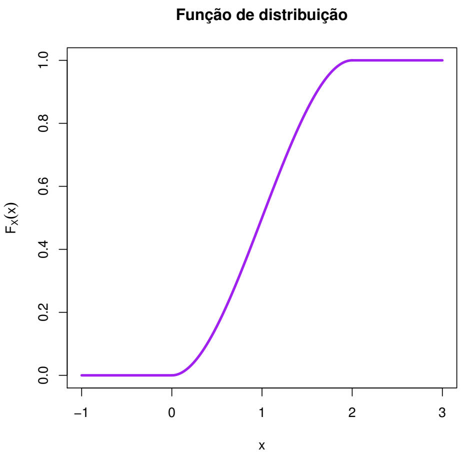
Exemplo 4.1 (cont.) $\boxed{\text{TPC}}$

b) Determine a função de distribuição de X.

$x < 0$: $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$

$0 \leq x < 2$: $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_0^x \frac{3}{8}(4t - 2t^2)\, dt = \frac{3}{8}\left[\frac{4t^2}{2} - \frac{2t^3}{3}\right]_0^x = \frac{1}{8}(6x^2 - 2x^3)$

$x \geq 2$: $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_0^2 \frac{3}{8}(4t - 2t^2)\, dt + \int_2^x 0\, dt = 1$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}(3x^2 - x^3), & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Exemplo 4.2: Considere uma v.a. X que indica o tempo de vida (em milhares de horas) de uma componente electrónica e a seguinte função :

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-\frac{x}{5}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

onde k é uma constante desconhecida.

a) Determine o valor de k de modo a que $f(x)$ seja a f.d.p. da v.a. X. Se $f(x)$ é uma f.d.p. então terá de satisfazer:

1. $f(x) \geq 0, \quad , \forall_x \quad \Leftrightarrow k > 0$
2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} ke^{-\frac{x}{5}}\,dx = 1$$

$$5\,k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{5}$$

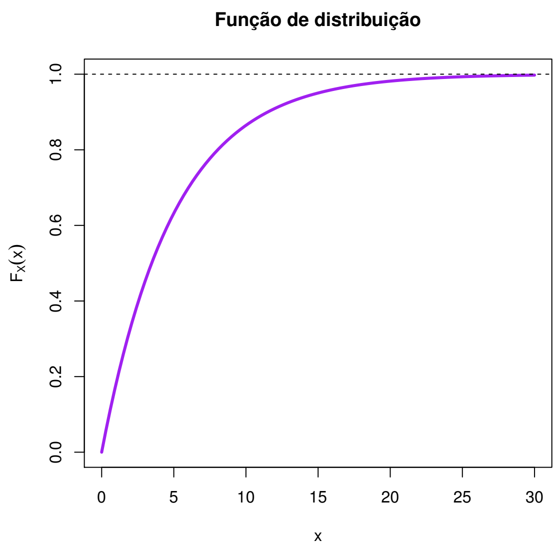
Exemplo 4.2 (cont.)

b) Determine a função de distribuição de X.

$$x < 0: \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

$$x \geq 0: \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{5}(e^{-\frac{t}{5}})\,dt = -5\frac{1}{5}\left[e^{-\frac{t}{5}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{5}}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x/5}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Exemplo 4.2 (cont.)

c) Determine a $P(X > 70|X > 60)$.

$$P\left(X > 70|X > 60\right) = \frac{P\left(X > 70 \wedge X > 60\right)}{P\left(X > 60\right)} = \frac{P\left(X > 70\right)}{P\left(X > 60\right)} =$$

$$= \frac{\int_{70}^{+\infty} 1/5e^{-x/5}dx}{\int_{60}^{+\infty} 1/5e^{-x/5}dx} = e^{-\frac{70}{5}+\frac{60}{5}} = e^{-2}$$

ou

$$P\left(X > 70|X > 60\right) = \frac{P\left(X > 70 \wedge X > 60\right)}{P\left(X > 60\right)} = \frac{P\left(X > 70\right)}{P\left(X > 60\right)} =$$

$$= \frac{1 - P\left(X \leq 70\right)}{1 - P\left(X \leq 60\right)} = \frac{1 - F_X(70)}{1 - F_X(60)} = \frac{e^{-\frac{70}{5}}}{e^{-\frac{60}{5}}} = e^{-2}$$

4.2 Valor esperado, variância e algumas das suas propriedades. Moda e quantis

O valor esperado e a variância são definidos de forma semelhante ao que foi feito para o caso discreto (ver Secção 3.3), com as devidas adaptações (somatório $\longrightarrow$ integral).

Definições: Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade $f_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
O valor esperado de X é

$$E(X) = \mu_X = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x) dx$$

A variância de X é

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2\, f_X(x) dx$$

O desvio padrão de X é $\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$

4.2 (cont.)

Notar ainda que:

Teorema:

$$E\left[h(X)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, f_X(x) dx,$$

onde $h(.)$ é uma função de X mensurável.

Mantêm-se as interpretações e as propriedades (Cap. 3)

Recordar algumas:

- $E\left(a\,X + b\right) = a\,E(X) + b, \qquad \forall_{a,b \in \mathbb{R}}$
- $V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$
- $V\left(a\,X + b\right) = a^2\,V(X), \qquad \forall_{a,b \in \mathbb{R}}$

Outras medidas de localização: Moda

Definição: **Moda** de uma v.a. contínua, X, com f.d.p, $f_X(x)$, representa-se por μ_{od} ou mo_X e é o valor, ou valores, onde a função densidade de probabilidade é máxima

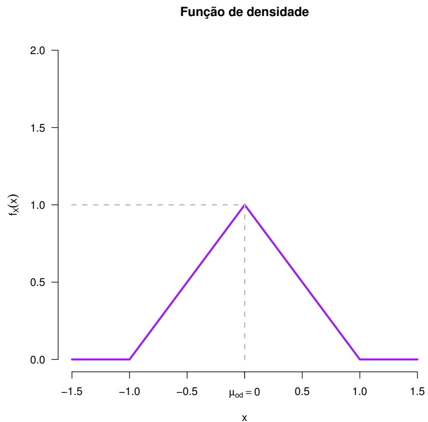
$$\mu_{od} = \text{moda de X} : \quad \mathrm{f_X}(\mu_{\mathrm{od}}) = \max_{\mathrm{x}} \mathrm{f_X}(\mathrm{x})$$

ou equivalente:

$$\mu_{od} = \arg\max_{x} f_X(x)$$

Exemplo:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases}$$



Outras medidas de localização: Mediana

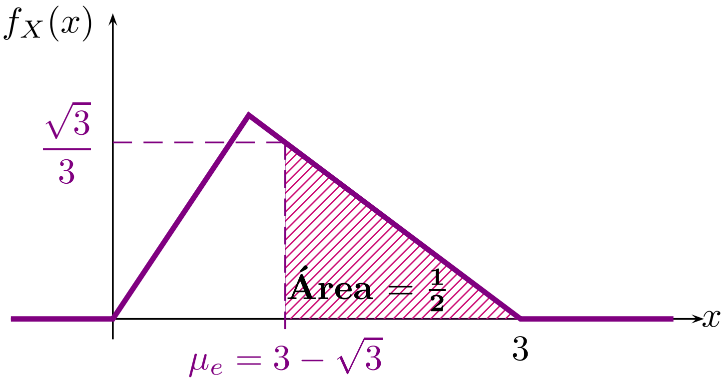
Definição: **Mediana** de uma v.a. contínua X, com f.d.p, $f_X(x)$, representa-se por μ_e ou me_X, e é um ponto central em termos de probabilidade, ou seja, tal que $P(X \leq \mu_e) = P(X \geq \mu_e)$

$$\mu_e: \quad P(X \leq \mu_e) = P(X \geq \mu_e) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad F_X(\mu_e) = \frac{1}{2}$$

Observação:

A equação $F_X(\mu_e) = \frac{1}{2}$ tem pelo menos uma solução. Se $F_X(x)$ for invertível em $]0,1[$ então a solução é única e pode ser escrita como $\mu_e = F_X^{-1}(1/2)$.

Exemplo:



Outras medidas de localização: Quantis

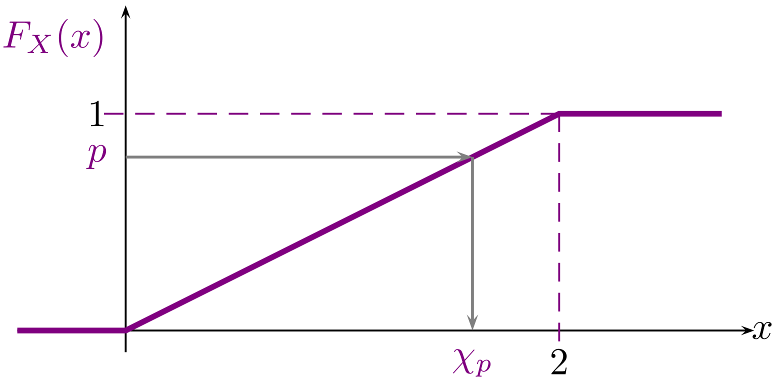
Generalização da ideia de mediana:

Definição: Quantil de ordem p $(0 < p < 1)$ de uma v.a. contínua X, com f.d.p., $f_X(x)$, representa-se por, χ_p, e satisfaz

$$\chi_p : \quad P(X \leq \chi_p) = p.$$

Se F for invertível em $]0, 1[$ então $\chi_p = F_X^{-1}(p)$.

Graficamente:



2.º quartil = mediana

1.º quartil: $\quad \chi_{1/4} : \quad F_X(\chi_{1/4}) = 1/4 \quad ou \quad \chi_{1/4} = F_X^{-1}(1/4)$

3.º quartil: $\quad \chi_{3/4} : \quad F_X(\chi_{3/4}) = 3/4 \quad ou \quad \chi_{3/4} = F_X^{-1}(3/4)$

4.3 Distribuição uniforme contínua

Definição: Uma v.a. X contínua tem distribuição uniforme contínua (ou rectangular) no intervalo $[a, b]$ se a sua f.d.p. é da forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

abreviadamente, $X \sim Unif(a, b)$

A função de distribuição, valor médio e variância são, respectivamente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases}$$

$$\mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_X^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

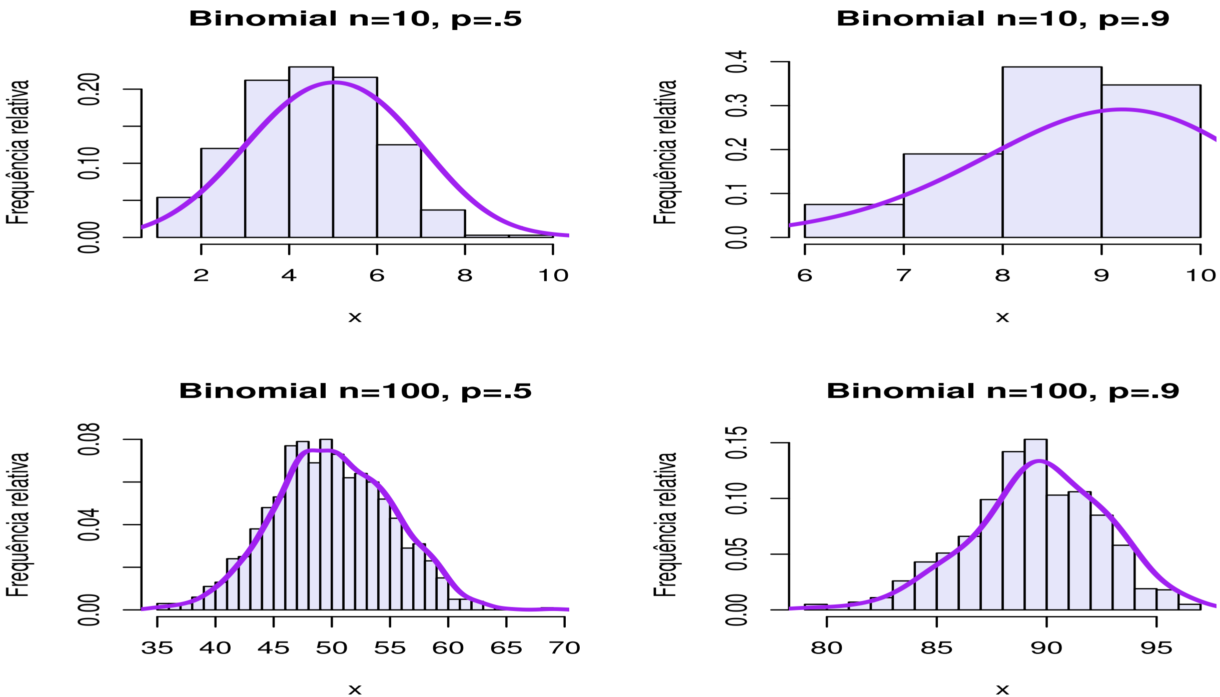
4.3 (cont.)

Exemplo 4.3 Seja $X \sim Unif(-2, 2)$ determine a $P\left(|X-1| > \dfrac{1}{2}\right)$.
Resolução: (na aula)

4.4 Distribuição normal

Factos sobre a distribuição normal:

- A distribuição normal apareceu pela primeira vez (embora sem nome) num trabalho de **De Moivre** em 1733, como um "limite" da distribuição binomial quando $n \to \infty$. [Simular]



4.4 Distribuição normal

- O resultado de De Moivre (aproximação normal da distribuição binomial) permaneceu praticamente desconhecido durante os 80 anos seguintes, até que em 1812 **Laplace** o generalizou e publicou no livro "*Théorie analytique des probabilités*" (este resultado é conhecido como Teorema de De Moivre-Laplace).
- Independentemente, esta distribuição foi estudada por **Gauss** (1809) e utilizada para modelar erros de medição em astronomia.
- O termo "distribuição normal" (típica, habitual) só apareceu muito mais tarde (cerca de 1875). É também conhecida como distribuição Gaussiana, ou de Gauss, ou ainda de Laplace-Gauss.
- Verifica-se que é uma boa aproximação para muitos fenómenos naturais (físicos, biológicos, psicológicos. . .) e não só (económicos, sociais. . .).
- É de importância fundamental em estatística indutiva.

4.4 Distribuição normal

Definição: Uma v.a. contínua X tem distribuição normal de parâmetros μ, com $\mu \in \mathbb{R}$, e σ^2, com $\sigma > 0$, se a sua f.d.p. é da forma

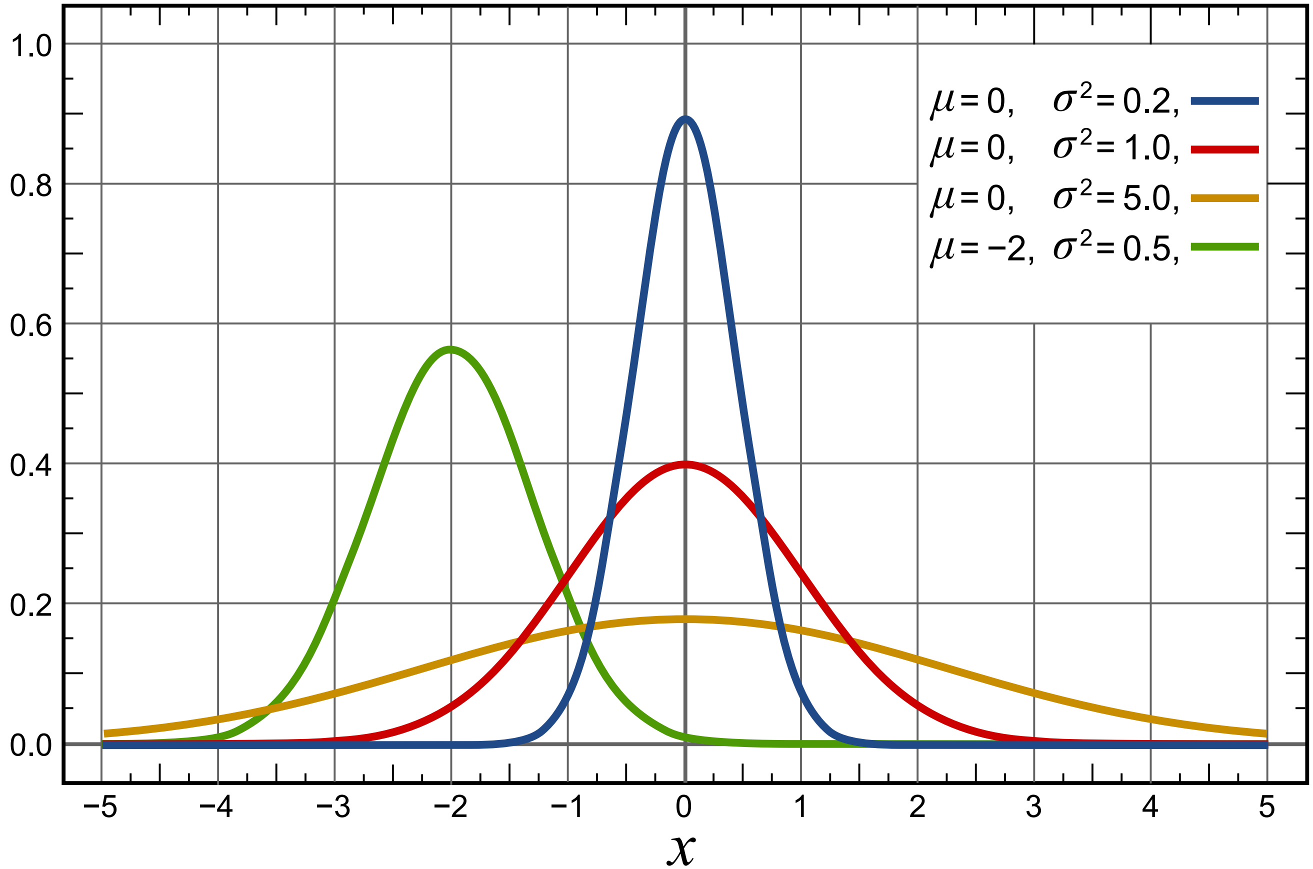
$$f_X(x) = f_X(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}$$

abreviadamente, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Para esta distribuição, o valor esperado[1] e variância são, respectivamente:
$E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$

[1] $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x;\mu,\sigma)dx$ pode ser calculado recorrendo à transformação $z = (x-\mu)/\sigma$. Idem para $E(X^2)$.

Exemplos de densidades normais:



4.4 Distribuição normal

Teorema: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y = a\,X + b$, em que a e b são constantes ($a \neq 0$) então

$$Y \sim N(a\,\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Demonstração:

O que se pretende mostrar é que

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}\right]$$

mais conveniente é começar por manipular a função de distribuição e a seguir derivar para obter a função de densidade (este procedimento é geral quando o objectivo é obter a distribuição de uma v.a. que é função de outra com distribuição conhecida). Assim:

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(aX \leq y - b) =$

$$= \begin{cases} P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right), & se \quad a > 0 \\ P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right), & se \quad a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & se \quad a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & se \quad a < 0 \end{cases}$$

logo

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & se \quad a > 0 \\ \frac{d}{dy}\left[1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right], & se \quad a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & se \quad a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & se \quad a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

agora é fácil verificar que

$$\frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\left(\frac{y-b}{a} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

coincide com a expressão de $f_Y(y)$ do *slide* anterior. Ou seja, uma transformação linear de uma v.a. Normal altera os parâmetros (obviamente de acordo com as regras que já conhecíamos) mas não altera o tipo de distribuição.

Caso Especial: Quando $a = \frac{1}{\sigma}$ e $b = -\frac{\mu}{\sigma}$, vem

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

À distribuição $N(0, 1)$ denomina-se:

Normal padrão

Normal standard

Normal reduzida

- Como se pode verificar, é fácil transformar qualquer variável aleatória Normal numa Normal padrão.
- Assim, para muitos cálculos podemos usar apenas uma distribuição Normal (escolhemos a mais simples: **Normal padrão**)

Cálculo de Probabilidades com a distribuição Normal

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = $$
$$= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

onde, $\Phi(x) \;\equiv\; P(Z \leq z) = \underbrace{\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt}_{?}$

é a função de distribuição da Normal padrão, i.e $Z \sim N(0,1)$.
Mas...

...$e^{-t^2/2}$ não tem primitiva elementar, o valor do integral só pode ser obtido por métodos numéricos.

Cálculo de Probabilidades com a distribuição Normal

- Programas em computador ou calculadora
(não é necessário usar a normal padrão)

- Tabelas
(é necessário usar a normal padrão). Também está tabelada a função de distribuição inversa da Normal padrão:
$\Phi^{-1}(p), p \in [0, 1]$.

(ver).

Observações:

– $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \ \forall_{x \in \mathbb{R}}$, devido à simetria da f.d.p..

– $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

4.4 - Exemplo

Exercício: A empresa ACME fabrica um tipo de lâmpada de xénon cuja duração média é de 300 dias, com um desvio padrão de 50 dias. O engenheiro responsável pelo departamento de qualidade acredita que a vida útil daquelas lâmpadas é normalmente distribuída. Para decidir qual a duração que deve ser anunciada como garantida, ele pretende calcular os seguintes valores:

(a) A probabilidade de uma lâmpada ter uma vida útil superior a um ano.

(b) O tempo de vida útil que é excedido por 95% daquelas lâmpadas.

Soluções: 0.0968 e 217.8 dias

4.5 Distribuição exponencial

Definição: Uma v.a. X diz-se seguir uma distribuição Exponencial de parâmetro $\lambda > 0$ se a sua função de densidade de probabilidade for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

abreviadamente, $X \sim Exp(\lambda)$.

Tem-se ainda

- $\mu_X = E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- $\sigma_X^2 = V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
- $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \lambda > 0$

Integrando por partes vem:

$$\begin{aligned}
E\left(X\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X\left(x\right) dx = \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left\{\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^k + \int_0^k e^{-\lambda x}dx\right\} \\
&= \lim_{k\to+\infty}\left\{-ke^{-\lambda k} + 0 + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^k\right\} \\
&= 0 + \lim_{k\to+\infty}\left\{\frac{e^{-\lambda k}-1}{-\lambda}\right\} = \frac{0-1}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Fazer a demonstração para $V(X)$ e $F_X(x)$.

Propriedade da falta de memória ou amnésia:

Se $X \sim Exp(\lambda), \quad \lambda > 0$ então

$$P(X < t_1 + t_2 | X > t_1) = P(X < t_2), \qquad \forall_{t_1 > 0, t_2 > 0}$$

Demonstração: (na aula)

Observações:

- O facto de esta distribuição não ter memória significa que não é indicada para modelar situações do tipo tempo de vida, em que há desgaste ou envelhecimento.
- A distribuição exponencial é a única distribuição contínua sem memória.
- Existe uma única distribuição discreta sem memória: é a distribuição geométrica.

Teorema: Seja X uma v.a. que indica o n$^{\text{o}}$de ocorrências de um acontecimento por unidade de tempo ou de espaço (comprimento, área, etc) e Y uma outra variável aleatória que representa o tempo ou espaço entre ocorrências sucessivas. Se

$$X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow Y \sim Exp(\lambda)$$

Observações:

- O resultado funciona no sentido inverso, ou seja, se os intervalos de tempo entre ocorrências forem v.a. independentes e identicamente distribuídas $Exp(\lambda)$ então o n.$^{\text{o}}$de ocorrências em t unidades de tempo é $Poisson(\lambda t)$.
- O resultado também é válido para o tempo decorrido até à primeira ocorrência.

4.5 Distribuição exponencial: exemplo

Exemplo: O *call center* de uma empresa de telecomunicações recebe em média 5 chamadas por hora, admitindo-se que as chamadas seguem um processo de Poisson. O gestor do *call center* está agora interessado em conhecer como varia o intervalo de tempo entre chamadas. Pretende nomeadamente saber:

(a) A probabilidade daquele intervalo de tempo ser superior a 20 minutos.

(b) O valor esperado, mediana e desvio padrão dos intervalos de tempo entre chamadas.

Resolução: Definição das variáveis aleatórias:

Seja X_t - v.a. que indica o n.$^{\text{o}}$de chamadas que chegam em t horas,
logo $X_t \sim Poisson(5t)$

e
T - v.a. que indica o intervalo de tempo entre chamadas (em horas),
logo $T \sim Exp(5)$

4.5 Distribuição exponencial: exemplo (cont.)

(a) (20 minutos $=1/3$ horas)

$$P\left(T>\frac{1}{3}\right)=1-P\left(T\leq\frac{1}{3}\right)=1-F_T(1/3)=e^{-5/3}\simeq 0.1888756$$

ou ...

(b) $$E(T)=\int_0^{+\infty}5te^{-5t}dt=\cdots=1/5 \text{ horas}=12 \text{ minutos}$$

$$E(T^2)=\int_0^{+\infty}5t^2e^{-5t}dt=\cdots=2/25 \text{ horas}^2$$

$$V(T)=1/25 \text{ horas}^2$$

$$\sigma_T=1/5 \text{ horas}=12 \text{ minutos}$$

μ_e: $F_T(\mu_e)=0.5 \;\Leftrightarrow\; 1-e^{-5\mu_e}=0.5 \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; \mu_e=-\log(0.5)/5\simeq 0.1386 \text{ horas}\simeq 8.3 \text{ min.}$$