Mecânica Analítica

Capítulo 9: Sistemas contínuos e introdução à teoria de campo

(Parte II)

H. Terças

Instituto Superior Técnico
(Departamento de Física)

Na parte I deste capítulo, percorremos algumas das propriedades de teorias de campo **escalares reais** (campo da corda vibrante, φ), **escalares complexos** (campo de Klein-Gordon, ψ) e **vectoriais** (campo EM, A_μ). Recordermos os seus Lagrangeanos

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_t\varphi, \partial_x\varphi) = \frac{1}{2}\mu(\partial_t\varphi)^2 - \frac{1}{2}Y(\partial_x\varphi)^2$$

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\psi^*) = \partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi$$

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu.$$

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi$$

$$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + j^\mu A_\mu .$$

Pretendemos construir uma teoria onde j_μ seja dado pelos campos carregados de Klein-Gordon ψ, i.e. um protótipo de uma **teoria electrodinâmica escalar**

Atenção: O nosso objectivo consiste apenas em ilustrar as técnicas da teoria clássica de campo, e não em estudar a fenomenologia de electrodinâmica (farão isso na UC de ECLA).

Como vimos, umas das consequências da invariância para o grupo $U(1)$ era a existência de uma corrente de Nöther no Lagrangeano de KG

$$j^\mu = -i\left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*\right).$$

Se calhar é tentador construir uma teoria naïve (campos EM + correntes) na seguinte forma[1]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{naive}} &= \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_{\text{int.}} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi - ieA_\mu \left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*\right).\end{aligned}$$

Pretendemos, contudo, que esta teoria seja uma **teoria padrão**, i.e. que seja invariante para as transformações

$$\psi \to \tilde{\psi} = e^{i\lambda}\psi, \quad A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

[1] Juntamos a constante e no termo $\mathcal{L}_{\text{int.}}$ por razões dimensionais.

Vemos claramente que $\mathcal{L}_{\text{naive}}$ satisfaz as seguintes propriedades

- É simétrico para o grupo $U(1)$ (i.e para a transformação $\psi \to \tilde{\psi}$);
- $\mathcal{L}_{\text{EM}}$ é invariante padrão e $\mathcal{L}_{\psi}$ também;
- $\mathcal{L}_{\text{int.}}$ **não é** invariante padrão, uma vez que $\partial_\mu j^\mu \neq 0$.

Esta última propriedade não é tão óbvia, mas surge porque a equação do movimento para ψ já não é a equação de Klein-Gordon. Na verdade, variando o Lagrangeano para o campo ψ^* temos

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = -ie\partial^\mu\left(\psi A_\mu\right),$$

o que assinala explicitamente que a equação do movimento **não tem simetria padrão**. Isto estraga completamente a nossa teoria descrita por $\mathcal{L}_{\text{naive}}$!

Uma solução possível é permitir que ψ participe na transformação!

A participação do campo ψ na relação de transformação padrão pode ser promovida recorrendo ao **acoplamento mínimo**

$$\partial_\mu \psi \to D_\mu \psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi, \quad \partial_\mu \psi^* \to D_\mu \psi^* = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi^*.$$

Assim, um novo Lagrangeano pode ser escrito na forma

$$\mathcal{L}_{\text{novo}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu \psi^* D^\mu \psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi.$$

Escrevendo explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{novo}} &= -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi - ieA_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*) \\ &+ 2e^2 A_\mu A^\mu \psi^*\psi \\ &= \mathcal{L}_{\text{naive}} + 2e^2 A_\mu A^\mu \psi^*\psi. \end{aligned}$$

Vemos claramente, então, que $\mathcal{L}_{\text{int}} \neq j^\mu A_\mu$.

Podemos observar que a nova teoria, construída **dinamicamente**,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \psi^* D^\mu \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi,$$

é invariante para as duas transformações $\psi \to \tilde{\psi}$ e $A_\mu \to \tilde{A}_\mu$. Além disso, as equações do movimento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_\beta F^{\beta\alpha} = \mu_0 J^\alpha,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_\beta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \psi^*)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(D_\beta D^\beta + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0,$$

onde a corrente é agora dada por

$$J^\alpha = -ie \left(\psi^* D^\alpha \psi - \psi D^\alpha \psi^* \right).$$

As equações estão acopladas! A densidade de corrente que age como fonte nas equações de Maxwell só existe na presença de campos EM!

As teorias construídas com o acoplamento mínimo, do tipo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \psi^* D^\mu \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi^* \psi,$$

são teorias padrão!

- $D_\mu = d_\mu + ieA_\mu$ acopla os campos físicos ψ e os campos de gauge A_μ;
- O acoplamento mínimo torna a teoria simétrica às transformações de gauge.
- Pode demonstrar-se que a nova corrente conservada J^α é a corrente de Nöther resultante da simetria de gauge.

Simetrias globais e simetrias locais

Outra propriedade interessante do acoplamento mínimo é a sua relação com as **simetrias globais** e **simetrias locais**.

Consideremos o Lagrangeano de Klein-Gordon,

$$\mathcal{L}_\psi = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi.$$

Como já vimos, $\mathcal{L}_\psi$ é simétrico para transformações de padrão globais

$$\psi \to \tilde{\psi} = e^{-i\lambda}\psi.$$

Vejamos o que acontece no caso de transformações de padrão locais

$$\psi \to \tilde{\psi} = e^{-ie\alpha(x)}\psi.$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}_\psi} &= \partial_\mu \tilde{\psi}^* \partial^\mu \tilde{\psi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\tilde{\psi}^*\tilde{\psi} \\ &= \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2} - e^2\partial_\mu\alpha\partial^\mu\alpha\right)\psi^*\psi \neq \mathcal{L}_\psi\end{aligned}$$

TÉCNICO LISBOA

Contudo, podemos introduzir uma transformação de padrão do tipo

$$A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

e, em seguida, recorrer ao acoplamento mínimo

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu + ie\tilde{A}_\mu\right)\psi, \quad D_\mu \psi^* = \left(\partial_\mu - ie\tilde{A}_\mu\right)\psi$$

para garantirmos a factorização das derivadas, i.e.

$$D_\mu \tilde{\psi} = (\partial_\mu + ie\tilde{A}_\mu)\left(e^{-ie\alpha}\psi\right) = \left(\partial_\mu \psi + \underbrace{ie\tilde{A}_\mu\psi - ie\partial_\mu\alpha\psi}_{ieA_\mu\psi}\right)e^{-ie\alpha} = e^{-ie\alpha}D_\mu\psi,$$

e $D^\mu \tilde{\psi}^* = e^{ie\alpha}D^\mu\psi^*$. Usando esta prescrição,

$$\tilde{\mathcal{L}}_\psi = D_\mu\tilde{\psi}^* D^\mu\tilde{\psi} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\tilde{\psi}^*\tilde{\psi} = D_\mu\psi^* D^\mu\psi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi^*\psi = \mathcal{L}_\psi$$

$\therefore$ O acoplamento mínimo transforma simetrias **locais** em simetrias **globais**.

Quebra espontânea de simetria

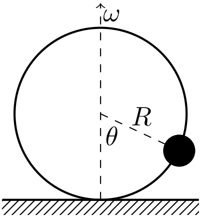
Até aqui, temo-nos referidos a teorias que preservam um certo número de simetrias (discretas, contínuas, de padrão). Para essas, o Lagrangeano permanece invariante sob a acção das transformações executadas.

Por razões que passaremos a ilustrar, algumas teoria sofrem uma quebra de simetria nos valores que o campo pode assumir. Este processo recebe o nome de **quebra espontânea de simetria** (QES).

No processo de quebra espontânea de simetria, o campo ψ adquire valores médios $\langle\psi\rangle \neq 0$ ainda que a teoria seja simétrica. Por outras palavras, o **Lagrangeano é simétrico**, mas as suas **soluções não**.

Antes de avançarmos para as teorias de campo, vejamos um exemplo de QES num sistema discreto (cf. ficha 2)

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right) + mgR\cos\theta.$$



A equação
do movimento para θ pode ser escrito na forma

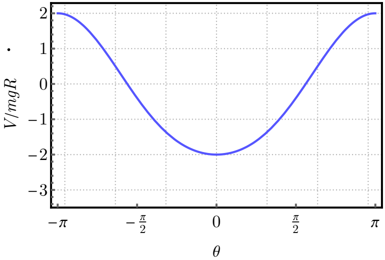
$$mR\ddot{\theta} = -\frac{\partial V_{\text{ef.}}}{\partial\theta},$$

onde

$$V_{\text{ef}}(\theta) = -\frac{1}{2}mR\left(2g\cos\theta + R\omega^2\sin^2\theta\right).$$

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\right) + mgR\cos\theta .$$

$$V_{\text{ef}}(\theta) = -\frac{1}{2} mR\left(2g\cos\theta + R\omega^2\sin^2\theta\right) .$$



Transição de fase

$\omega = \omega_c = \sqrt{g/R}$.

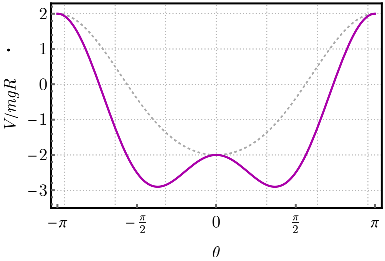
- $\omega < \omega_c,\qquad \theta_0 = 0$

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right) + mgR \cos \theta .$$

$$V_{\text{ef}}(\theta) = -\frac{1}{2} m R \left(2g \cos \theta + R \omega^2 \sin^2 \theta \right) .$$

Transição de fase
$\omega = \omega_c = \sqrt{g/R}$.

- $\omega > \omega_c$, $\theta_0 = \pm \arccos\left(-\frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)$



$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right) + m g R \cos \theta .$$

$$V_{\mathrm{ef}}(\theta) = -\frac{1}{2} m R \left(2g \cos \theta + R \omega^2 \sin^2 \theta \right) .$$

Transição de fase $\omega = \omega_c = \sqrt{g/R}$.

- $\omega > \omega_c$, $\theta_0 = \pm \arccos \left(-\frac{\omega_{\mathrm{c}}^2}{\omega^2} \right)$

O Lagrangeano não perde simetria por se variar o valor de ω. Contudo, os pontos de equilíbrio θ_0 admitem soluções assimétricas. Trata-se de um protótipo de **queda espontânea de simetria**.

Um exemplo no contínuo: considere a corda de uma guitarra, cujo deslocamento é dado pelo campo $\varphi(x,t)$, condicionada por transpositores. Matematicamente, corresponde a um potencial $V(\varphi)$ que devemos incluir no Lagrangeano[2]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - V(\varphi).$$

- Caso A:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\lambda\varphi^2.$$

O **valor esperado** $\varphi_0 = \langle\varphi\rangle$ do campo é dado por

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right|_{\varphi_0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_0 = 0.$$

[2] Assumimos que o transpositor não impõe condições fronteira nulas em $\varphi(x,t)$.

Um exemplo no contínuo: considere a corda de uma guitarra, cujo deslocamento é dado pelo campo $\varphi(x,t)$, condicionada por transpositores. Matematicamente, corresponde a um potencial $V(\varphi)$ que devemos incluir no Lagrangeano[3]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - V(\varphi).$$

- Caso B:

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}\lambda\varphi^2 + \frac{1}{4}\beta\varphi^4.$$

O **valor esperado** $\varphi_0 = \langle\varphi\rangle$ do campo é dado por

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right|_{\varphi_0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_0 = \left(0, \pm\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\right).$$

[3] Assumimos que o transpositor não impõe condições fronteira nulas em $\varphi(x,t)$.

Um exemplo no contínuo: considere a corda de uma guitarra, cujo deslocamento é dado pelo campo $\varphi(x,t)$, condicionada por transpositores. Matematicamente, corresponde a um potencial $V(\varphi)$ que devemos incluir no Lagrangeano[4]

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right|_{\varphi_0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\varphi_0 = \left(0, \pm\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\right)}$$

As soluções do campo $\varphi(x,t)$ não preservam a simetria discreta $\mathbb{Z}_2$, $\varphi \to -\varphi$). Contudo, o Lagrangeano é simétrico para a transformação.
Quebra espontânea da simetria $\mathbb{Z}_2$.

[4]Assumimos que o transpositor não impõe condições fronteira nulas em $\varphi(x,t)$.

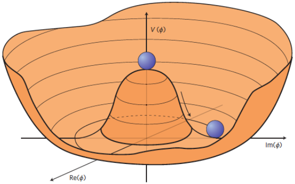
Consideremos, agora, o caso da *teoria* ψ^4, dada por[5]

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* - V(\psi),$$

onde $V(\psi) = -\frac{1}{2}\lambda|\psi|^2 + \frac{1}{4}\beta|\psi|^4$ é o potencial de **chapéu mexicano**.

Esta teoria possui a simetria $U(1)$

$$\psi \to \tilde{\psi} = e^{i\alpha}\psi.$$



O **máximo local** do potencial situa-se em $\psi_{\max} = 0$ e o **mínimo global** é dado pela família de soluções sobre o círculo de raio

$$|\psi_{\min}| = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}.$$

Podemos parametrizar esta última solução como $\psi_{\min} = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} e^{i\theta}$.

[5] Pode ser vista como a teoria de KG + potencial de interacção

Analisemos, agora, a simetria de cada uma das soluções para o grupo $U(1)$.

$$\tilde{\psi}_{\max} = e^{i\alpha}\psi_{\max} = 0 = \psi_{\max}. \checkmark$$

$$\tilde{\psi}_{\min} = e^{i\alpha}\psi_{\min} = e^{i(\theta+\alpha)}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} \neq \psi_{\min} \times$$

A solução $\psi_{\min}$ tem menos simetria do que a solução $\psi_{\max}$.

O potencial de chapéu mexicano conduz à quebra espontânea da simetria $U(1)$.

9.7 Teorema de Goldstone

Existe um resultado genérico que relaciona a quebra espontânea de simetria e a emergência de novos campos. Para ilustrar o mecanismo, voltemos à teoria ψ^4

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial\psi, \partial\psi^*) = \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* + \frac{1}{2}\lambda|\psi|^2 - \frac{1}{4}\beta|\psi|^4.$$

Escrevamos o campo na forma de Moivre[6],

$$\psi = \rho e^{i\theta}.$$

Nestes termos, a teoria escreve-se

$$\mathcal{L}(\rho, \theta, \partial\rho, \partial\theta) = \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho - \rho^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + \frac{1}{2}\lambda\rho^2 - \frac{1}{4}\beta\rho^4.$$

[6] Também conhecida na literatura como “transformação de Madelung”.

A equação do movimento para cada um dos campos ρ e θ é

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \rho)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\Box + \lambda)\,\rho - \beta\rho^3 - 2\rho\partial_\nu\theta\partial^\nu\theta = 0.$$

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \theta)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_\nu\left(\rho^2\partial^\nu\theta\right) = 0.$$

Rapidamente observamos que existe invariância para a **transformação de translacção**

$$\theta \to \theta + \alpha.$$

Assim, a equação do movimento para θ nada mais é do que a lei de conservação para a corrente de Nöther associada,

$$\boxed{J_\theta^\nu = \rho^2\partial^\nu\theta}$$

Aplicamos o formalismo das pequenas oscilações com intenção de linearizar a teoria em torno dos pontos de equilíbrio. Escolhamos $\rho_0 = \rho_{\min} = \sqrt{\lambda/\beta}$, tal que

$$\rho = \rho_0 + \xi.$$

Substituindo no Lagrangeano, temos

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \rho_0^2 \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \lambda \xi^2 - \frac{1}{4}\lambda \rho_0^2 + \mathcal{O}(\xi^3).$$

Na vizinhança do mínimo global, existem dois campos ξ e θ. O campo ξ tem **massa** $(m^2 \propto \sqrt{\lambda})$ e θ tem **massa nula**.

$$\boxed{\text{E então? O que é que este resultado tem de genérico?}}$$

Para apreciarmos melhor o que acabou de acontecer, repetimos o mesmo procedimento para o caso de $\lambda < 0$.

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* - \frac{1}{2}\lambda|\psi|^2 - \frac{1}{4}\beta|\psi|^4.$$

Neste caso, o ponto de equilíbrio do potencial é $\psi_0 = 0$, que preserva a simetria $U(1)$. Vejamos o que se passa procedendo à linearização de $\psi = \rho e^{i\theta}$ com

$$\rho = \rho_0 + \xi = \xi.$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \lambda \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3).$$

Apenas o campo ξ de massa $m \propto \sqrt{-\lambda}$. Aparece. O campo θ desapareceu da teoria.

Teorema de Goldstone

Por cada simetria contínua quebrada existe um campo sem massa!

9.8 Mecanismo de Higgs

O teorema de Goldstone em conjunção com a invariância de *gauge* (promovida pelo acoplamento mínimo) resulta num fenómeno extremamente importante, conhecido como **mecanismo de Higgs**.

Consideremos a nossa teoria escalar do electromagnetismo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - D_\mu\psi D^\mu\psi^* - V(\psi),$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + eA_\mu$. A simetria é invariante para o grupo de Poincaré (transformações de Lorentz), para a transformação de padrão[7] e, para já, para o grupo $U(1)$.

Provoquemos a quebra espontânea de simetria $U(1)$ introduzindo o potencial mexicano

$$V(\psi) = -\frac{1}{2}\lambda|\psi|^2 + \frac{1}{4}\beta|\psi|^4, \quad (\lambda, \beta > 0).$$

[7] Recorde: $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda$

Fazendo o uso da parametrização $\psi = \rho e^{i\theta}$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho - \rho^2 \left(\partial_\mu \theta + e A_\mu\right) \left(\partial^\mu \theta + e A^\mu\right) - V(\rho).$$

Os valores esperados para os campos que quebram apenas a simetria $U(1)$, enquanto mantêm todas as outras intactas, são

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}, \quad \theta_0 = \text{constante}, \quad A_\mu^{(0)} = 0.$$

Neste ponto, a simetria $U(1)$ está quebrada. Vamos, então, aplicar o formalismo das pequenas oscilações em torno desta solução

$$\rho = \rho_0 + \xi, \quad \theta = \theta_0 + \alpha$$

A teoria linearizada na vizinhança da solução de simetria mais baixa é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\rho_0^2 e^2 B_\mu B^\mu + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \frac{1}{2}\lambda \xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3, \alpha^3, B_\mu^3),$$

onde $B_\mu = A_\mu + e^{-1}\partial_\mu \alpha$ e $G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. O campo ξ continua com massa $m \propto \sqrt{\lambda}$. A novidade interessante é que o campo de massa nula θ passa a "dar massa" aos campos vectoriais (campos de *gauge*) A_μ do electromagnetismo, cujo valor é

$$m_A = \frac{\hbar}{\sqrt{2}c} e \rho_0.$$

Mecanismo de Higgs

A quebra espontânea de simetria na presença de acoplamento mínimo permite aos campos de *gauge* adquirirem massa.