Probabilidades e Estatística

LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEEC, MEMec, MEQ

1º Semestre 2012/2013 | **1º Teste B**
2012/11/17 – 11:00 | **Justifique convenientemente todas as respostas!** | Duração: 90 min

Grupo I — 10 valores

1. Suponha que A e B são acontecimentos, associados à mesma experiência aleatória, tais que $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$ e $P(B) = p$. Qual é o valor de p caso A e B sejam mutuamente exclusivos? E caso A e B sejam independentes? (2.0)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0.7 = 0.4 + p - P(A \cap B)$.
Se os acontecimentos são independentes, ou seja, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ então $0.7 = 0.4 + p - 0.4p \Leftrightarrow p = 1/2$.
Se os acontecimentos são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$ então $0.7 = 0.4 + p \Leftrightarrow p = 3/10$.

2. O fornecedor de sementes F_1 atesta que a probabilidade de germinação de cada uma das suas sementes é 0.95, enquanto que o fornecedor F_2 garante que a probabilidade de cada uma das suas sementes não germinar é 0.1. Um agricultor adquiriu um pacote de sementes de F_1 e outro de F_2, contendo 50 e 30 sementes, respectivamente. Tendo havido germinação de uma semente, escolhida ao acaso entre as compradas pelo agricultor, qual é a probabilidade de ela ser proveniente do fornecedor F_2? (3.0)

Definam-se os acontecimentos F_i="a semente escolhida é proveniente do fornecedor i", com $i = 1,2$, e G="a semente escolhida germina". Temos que $P(F_1) = 5/8$, $P(F_2) = 3/8$, $P(G \mid F_1) = 0.95$ e $P(\bar{G} \mid F_2) = 0.1$.
Pelo teorema de Bayes temos que

$$P(F_2 \mid G) = \frac{P(G \mid F_2)P(F_2)}{P(G \mid F_1)P(F_1) + P(G \mid F_2)P(F_2)} = \frac{(1-0.1)\times 3/8}{0.95 \times 5/8 + (1-0.1)\times 3/8} \approx 0.3624.$$

3. Suponha que o número de mensagens de correio electrónico recebidas diariamente pela Joana segue uma lei de probabilidade de Poisson, independentemente de dia para dia, com valor esperado igual a 3. Para controlar o tempo gasto na leitura de correio electrónico, a Joana estabeleceu a regra de consultar a sua caixa de correio electrónico apenas uma vez por dia, à meia-noite.

(a) Sabendo que a Joana recebeu alguma mensagem de correio electrónico num certo dia, calcule a probabilidade de ela ter recebido de três a seis mensagens de correio electrónico nesse dia. (2.5)

Seja X ="número de mensagens recebidas diariamente pela Joana". Temos que $X \sim Poi(\lambda)$, com $E[X] = \lambda = 3$.

$$P(3 \le X \le 6 \mid X > 0) = \frac{P(3 \le X \le 6,\ X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{P(3 \le X \le 6)}{1 - P(X = 0)} = \frac{F_X(6) - F_X(2)}{1 - f_X(0)} \approx \frac{0.9655 - 0.4232}{0.9502} \approx 0.5718.$$

(b) Quais são o desvio padrão e a mediana do número de dias que decorrem até que a Joana leia alguma mensagem de correio electrónico? (2.5)

Seja Y ="número de dias até que a Joana leia alguma mensagem". Como Y representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli até ser obtido o primeiro sucesso, então $Y \sim Geo(p)$ em que $p = P(X > 0) = 1 - e^{-3} \approx 0.9502$.
$\mathrm{DP}[Y] = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} \approx 0.2349$.
A mediana ($Q_{0.5}$) deve satisfazer $P(Y \le Q_{0.5}) \ge 0.5$ e $P(Y \ge Q_{0.5}) \ge 0.5$. Temos então que $P(Y \le 1) = P(Y = 1) = 0.95$, $P(Y \ge 1) = 1$ e $P(Y \ge y) = P(Y \ge 2) = 0.05$, $\forall y \in]1,2[$. Logo, $Q_{0.5} = 1$.

Grupo II	10 valores

1. Admita que a distribuição do peso individual de utilizadores de um elevador, com carga nominal de 350 kg e possuindo indicador de excesso de peso, é uma variável aleatória com distribuição normal de média 75 kg e desvio padrão 15 kg.

(a) Se entrarem ao acaso quatro indivíduos nesse elevador, qual é a probabilidade de o elevador não indicar excesso de peso? (2.5)

Seja $T = \sum_{i=1}^{4} X_i$ em que X_i ="peso do i-ésimo indivíduo que entra no elevador", $i = 1,\ldots,4$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $X_i \sim N(\mu = 75, \sigma^2 = 15^2)$. Neste contexto, $T \sim N(E[T], Var[T])$ com $E[T] = 4E[X] = 300$ e $Var[T] = 4Var[X] = 900$.
$P(T \leq 350) = F_T(350) = 0.9522 \left(= \Phi\left(\frac{350-300}{30}\right) \approx \Phi(1.67)\right)$.

(b) Na construção de um novo elevador para a mesma população de utilizadores, qual deve ser a respectiva carga nominal a especificar para garantir, com probabilidade de 99.5%, que o peso de quatro pessoas escolhidas ao acaso da população de utilizadores não ultrapasse essa carga? (1.5)

Pretende-se t tal que $P(T \leq t) = 0.995$.
$P(T \leq t) = F_T(t) = 0.995 \Leftrightarrow t = F_T^{-1}(0.995) = 377.2749$.
Alternativamente, $t = 300 + 30 \times \Phi^{-1}(0.995) = 300 + 30 \times 2.5758$.

2. Considere o par aleatório (X, Y), onde X (resp. Y) denota o número de defeitos do tipo A (resp. B) por peça produzida por uma máquina, cuja função de probabilidade conjunta está representada sumariamente na seguinte tabela:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.90	0.04	0.01
1	0.02	0.02	0.01

(a) Obtenha as funções de probabilidade marginais de X e Y, bem como a probabilidade de uma peça produzida pela máquina possuir defeitos do tipo B. (2.0)

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.95, & x = 0 \\ 0.05, & x = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \implies X \sim Ber(0.05),$$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.92, & y = 0 \\ 0.06, & y = 1 \\ 0.02, & y = 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

$P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 0.08$.

(b) Determine o valor esperado e a variância do número de defeitos do tipo B apresentados por uma peça com um defeito do tipo A. (2.0)

$$f_{Y|X=1}(y) = \frac{f_{X,Y}(1,y)}{f_X(1)} = \begin{cases} 2/5, & y = 0,\ 1 \\ 1/5, & y = 2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

$E[Y \mid X = 1] = \sum_y y f_{Y|X=1}(y) = 4/5$, $E[Y^2 \mid X = 1] = \sum_y y^2 f_{Y|X=1}(y) = 6/5$.
$Var[Y \mid X = 1] = E[Y^2 \mid X = 1] - E^2[Y \mid X = 1] = 14/25$.

(c) Calcule a função de probabilidade e o valor esperado do número total de defeitos dos tipos A e B existentes numa peça escolhida ao acaso. (2.0)

$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = \sum_x x f_X(x) + \sum_y y f_Y(y) = 0.05 + 0.1 = 0.15.$

$$P(X+Y=k) = \sum_{\{(x,y):x+y=k\}} P(X=x, Y=y) = \begin{cases} P(X=0, Y=0), & k=0 \\ P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=0), & k=1 \\ P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1), & k=2 \\ P(X=1, Y=2), & k=3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} 0.9, & k=0 \\ 0.06, & k=1 \\ 0.03, & k=2 \\ 0.01, & k=3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$