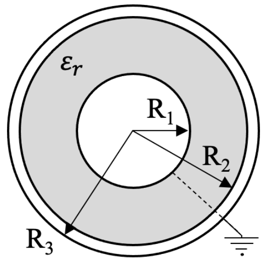
TÉCNICO LISBOA

Proposta de Resolução do **1º Teste de Eletromagnetismo**
MEFT
Prof. Pedro Abreu
28 de junho de 2021

Versão: 1{2} **Duração do Teste: 1h 30m** $\varepsilon_0 = 8{,}854\text{x}10^{-12}$ F/m, $\mu_0=4\pi.10^{-7}$ N/A^2

Por determinação do Conselho Pedagógico, informamos que só serão cotadas as respostas que contribuam de forma significativa para os resultados ou demonstrações pedidas.



(4,0) **1)** Considere o sistema da figura, em que o condutor 1, esférico e de raio $R_1 = 5\{2\}$ cm, é rodeado por material dielétrico de constante dielétrica (relativa) $\varepsilon_r = 8\{4\}$ e por um condutor 2, uma coroa esférica de raio interior $R_2 = 10\{4\}$ cm e raio exterior $R_3 = 12\{5\}$ cm. Admita que o potencial elétrico no infinito é nulo.
O condutor 1 (interior) está ligado à Terra e o condutor 2 tem carga $Q_2 = 50\{10\}$ nC.

[1,0] **a)** Calcule o campo elétrico em todo o espaço em função da carga Q_1 no condutor interior;
[R: *Usando o Teorema de Gauss para o campo de deslocamento elétrico que, dada a simetria esférica é radial e de intensidade só dependente de* r, *podemos calcular o fluxo que sai de uma superfície esférica de raio* r *como sendo* $\iint \vec{D}\cdot\vec{n}dS = Q_{int} \Leftrightarrow D(r)\cdot 4\pi r^2 = Q_{int} \Leftrightarrow D(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2}$.
Para $r < R_1$ *temos o campo elétrico nulo, admitindo que estamos no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático, tal como para* $R_2 < r < R_3$.
Para $R_1 < r < R_2, Q_{int} = Q_1$ *e* $\vec{E} = \frac{Q_1}{32\{16\}\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$.
Para $r > R_3$,$Q_{int} = Q_1 + Q_2$, *e* $\vec{E} = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ *ou* $\vec{E} = \frac{Q_1+5\{1\}\times10^{-8}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ (V/m) .]

[1,0] **b)** Calcule a carga Q_1 e o potencial elétrico V_2 do condutor 2;
[R: *Como o potencial no infinito é nulo, o potencial elétrico em* $r = R_3$ *é dado por*
$\phi_3 = 0 + \int_{R_3}^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{R_3}^{\infty}\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot dr\vec{e}_r = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$ *que é o mesmo do potencial em* $r = R_2, \phi_2$.
O potencial elétrico em $r = R_1$ *é por sua vez* $\phi_1 = \phi_2 + \int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$, *pois está ligado à Terra.*
Temos então $0 = \phi_1 = \phi_2 + \int_{R_1}^{R_2}\frac{Q_1}{32\{16\}\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} + \frac{Q_1}{32\{16\}\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \Leftrightarrow$
$Q_1\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{8\{4\}R_1}-\frac{1}{8\{4\}R_2}\right) = -\frac{Q_2}{R_3} \Leftrightarrow Q_1 = -\frac{Q_2}{1+\frac{R_3}{8\{4\}R_1}-\frac{R_3}{8\{4\}R_2}} = -\frac{5\{1\}\times10^{-8}\text{ C}}{1+\frac{12}{40}\left\{\frac{5}{8}\right\}-\frac{12}{80}\left\{\frac{5}{16}\right\}} = -43{,}48\{-7{,}62\}$ nC.
O potencial elétrico do condutor 2 é então $V_2 = \phi_2 - \phi_1 = \phi_2 = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = 488\{428\}$ V.]

[1,0] **c)** Calcule a capacidade do sistema;
[R: *Para calcular a capacidade do sistema, podemos colocar as cargas que forem mais convenientes. Neste caso, escolhemos* $Q_1 > 0, Q_2 = -Q_1$, *obtendo a diferença de potencial elétrico como sendo* $V = \int_{R_1}^{R_2}\frac{Q_1}{32\{16\}\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q_1}{32\{16\}\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \Leftrightarrow C = \frac{Q_1}{V} = \frac{32\{16\}\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1} = 89\{17{,}8\}$ pF.]

[1,0] **d)** Calcule as cargas de polarização nas superfícies de separação dos diferentes meios.
[R: *Só temos 2 superfícies com cargas de polarização não nulas: em* $r = R_1$ *e em* $r = R_2$.
Em $r = R_1$, *temos* $Q_1' = 4\pi R_1^2\sigma_1' = 4\pi R_1^2\vec{P}\cdot\vec{n}_{ext} = 4\pi R_1^2(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}\cdot\vec{n}_{ext} = -(\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{Q_1}{8\{4\}\varepsilon_0} \Leftrightarrow$
$Q_1' = -\frac{(\varepsilon_r-1)Q_1}{\varepsilon_r} = 38{,}04\{5{,}71\}$ nC .
Em $r = R_2$, *temos* $Q_2' = (\varepsilon-\varepsilon_0)\frac{Q_1}{8\{4\}\varepsilon_0} = -Q_1' = -38{,}04\{-5{,}71\}$ nC .]

(3,0) **2)** Duas coroas esféricas condutoras e concêntricas, de raios $a = 0{,}2\{0{,}5\}$ m e $b = 0{,}5\{1{,}0\}$ m, estão separadas por um material com condutividade elétrica $\sigma = 2{,}17\{2{,}5\}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$.

[1,5] **a)** Calcule a resistência elétrica entre as coroas esféricas. Qual a resistência se $b \to \infty$?
[R: *Para calcular a resistência, escolhemos um caminho radial entre* a *e* b *, obtendo* $R = \int_a^b \frac{1}{\sigma S(r)} dr$*, sendo* $S(r)$ *a área da superfície esférica (perpendicular ao caminho). Temos então*
$R = \int_a^b \frac{1}{\sigma 4\pi r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right] = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab} = \frac{0{,}5-0{,}2\{1{,}0-0{,}5\}}{4\pi\cdot 2{,}17\{2{,}5\}\cdot 0{,}1\{0{,}5\}} = 0{,}110\{0{,}032\}\ \Omega.$
Para $b \to \infty$*, temos* $R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{a} - 0\right] = \frac{1}{4\pi\sigma a} = \frac{1}{4\pi\cdot 2{,}17\{2{,}5\}\cdot 0{,}2\{0{,}5\}} = 0{,}183\{0{,}0637\}\ \Omega.$]

[0,5] **b)** Se numa dada altura existir uma diferença de potencial elétrico $V = 10\{50\}$ V, calcule a corrente que flui nesse instante de uma coroa para a outra.
[R: $I = \frac{V}{R} = \frac{10\{50\}}{0{,}11\{0{,}032\}} = 90{,}9\{1571\}$ A .]

[1,0] **c)** Suponha agora que coloca duas esferas de raios $a = 0{,}2\{0{,}5\}$ m imersas num meio líquido, de condutividade elétrica σ_L desconhecida, muito longe uma da outra, sujeitas a uma diferença de potencial elétrico $V = 10\{100\}$ V, e que mede uma corrente $I = 2\{4\}$ A. Calcule a condutividade σ_L.
[R: *Comecemos por notar que, como as esferas estão muito longe uma da outra, a resistência elétrica para a corrente sair de cada esfera foi calculada na alínea a) na condição* $b \to \infty$*. A corrente que sai de uma esfera entra na outra esfera, pelo que as resistências elétricas das esferas podem ser associadas em série, obtendo* $R_T = R_1 + R_2 = 2R_{b\to\infty} = \frac{2}{4\pi\sigma_L a} = \frac{1}{2\pi\sigma_L a}$*. Por outro lado, esta resistência total tem de ser* $R_T = \frac{V}{I}$*. Concluímos assim que* $\frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma_L a}$ *e que*
$\sigma_L = \frac{I}{2\pi a V} = \frac{2\{4\}}{2\pi\cdot 0{,}2\{0{,}5\}\cdot 10\{100\}} = 0{,}159\{0{,}0127\}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$.]

(3,0) **3)** Um fio com 0,001{0,01} m de diâmetro transporta uma corrente $I = 10\{20\}$ A. Envolvendo o fio temos uma camada de espessura $R_e - R_i = 0{,}0495\{0{,}495\}$ m, que transporta a corrente de retorno $I = 10\{20\}$ A (no sentido oposto), feita em cobre (condutividade elétrica $\sigma = 6 \times 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, permeabilidade magnética μ_0, densidade de eletrões de condução $n_e = 8{,}5 \times 10^{28}/\mathrm{m}^3$, carga do eletrão $e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C).

[1,0] **a)** Calcule o campo magnético em todo o espaço;
[R: *Podemos usar a Lei de Ampère numa linha circular num plano perpendicular ao eixo do sistema (o eixo do fio), centrada num ponto do eixo. Dada a simetria do sistema, o campo magnético será tangente à linha e de intensidade constante ao longo desta linha, pelo que* $\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$, *sendo* r *a distância ao eixo do sistema do ponto onde estamos a calcular o campo (o raio do círculo delimitado pela linha considerada). Por outro lado, a corrente que atravessa este círculo,* I_{int}, *depende do valor de* r, *sendo nula para* $r > R_e$ *e para* $r = 0$. *Temos então* $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\varphi$, *e*
$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{int} \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{int}}{2\pi r}$.
Para $0 < r < R_i = \frac{0{,}001\{0{,}01\}}{2}$ m, *temos* $I_{int} = J_{fio}\pi r^2 = \frac{I\pi r^2}{\pi R_i^2}$, *e* $B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_i^2} = 8{,}0\{0{,}16\}\, r$ (T).
Para $R_i < r < R_e$, *temos* $I_{int} = I - J_{\text{camada}}\pi(r^2 - R_i^2) = I - \frac{I}{\pi(R_e^2 - R_i^2)}\pi(r^2 - R_i^2) = \frac{R_e^2 - r^2}{(R_e^2 - R_i^2)} I$, *pelo que* $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{R_e^2 - r^2}{(R_e^2 - R_i^2)} I = 800\{16\}\frac{0{,}0025\{0{,}25\} - r^2}{r}$ (μT) .
Para $r > R_e$, $I_{int} = I - I = 0$ *e* $B(r) = 0$.]

[0,5] **b)** Calcule a velocidade de deriva dos eletrões no condutor exterior;
[R: *a densidade de corrente é uma medida da velocidade de deriva das cargas elétricas, dada por* $j = \rho v = nev$, *pelo que, no condutor exterior temos*
$v = \frac{j_{\text{camada}}}{ne} = \frac{I}{ne\pi(R_e^2 - R_i^2)} = 93{,}6\{1{,}87\} \times 10^{-9}\mathrm{m/s}$.]

[0,5] **c)** Calcule a força magnética que se faz sentir sobre um eletrão de condução no condutor exterior, em função da distância ao eixo (intensidade, direção, sentido);
[R: *A força magnética será simplesmente* $\vec{F}_M = -e(\vec{v} \times \vec{B}) = e\frac{I}{ne\pi(R_e^2 - R_i^2)}\frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{R_e^2 - r^2}{(R_e^2 - R_i^2)} I\vec{e}_r$, *sendo* $\vec{e}_r$ *o versor perpendicular ao eixo do fio.*
Temos então $\vec{F}_M = 1{,}198 \times 10^{-29}\{4{,}794 \times 10^{-33}\}\frac{0{,}0025\{0{,}25\} - r^2}{r}\ \vec{e}_r$ (N) .]

[0,5] **d)** Devido à força magnética da alínea anterior, os eletrões vão-se deslocar (ligeiramente) na direção radial até atingirem o equilíbrio, mantendo então apenas a deslocação paralela ao eixo. Calcule o campo elétrico criado por esta assimetria na direção radial após atingido este equilíbrio, em função da distância ao eixo (despreze as alterações na distribuição da corrente elétrica no condutor exterior).
[R: *O movimento perpendicular ao eixo termina quando as forças se equilibrarem,*
$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = 7{,}49 \times 10^{-11}\{3{,}00 \times 10^{-14}\}\frac{0{,}0025\{0{,}25\} - r^2}{r}\ \vec{e}_r$(V/m).]

[0,5] **e)** Calcule a pequena diferença de potencial elétrico na direção radial entre as fronteiras interior e exterior do condutor exterior.
[R: *A diferença de potencial elétrico é simplesmente o integral de linha ao longo do percurso radial:*
$V = \phi(R_i) - \phi(R_e) = \int_{R_i}^{R_e} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Leftrightarrow$
$V = 7{,}49 \times 10^{-11}\{3{,}00 \times 10^{-14}\}\left[0{,}0025\{0{,}25\}\log\left(\frac{R_e}{R_i}\right) + \frac{R_i^2 - R_e^2}{2}\right] = 76{,}8\{3{,}08\} \times 10^{-14}$ V.]