Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática

Matemática Computacional - LEMat, MEBiol, MEBiom, MEFT, MEQ
Segundo Teste - Versão B - 18/12/2019

Duração: 1 hora e 30 minutos
Apresente todos os cálculos e justifique todas as respostas.

1. [1.5] Considere o sistema

$$\begin{aligned} 2x_3^3 + x_2 - 2x_1 &= \theta \\ e^{x_1} + x_2^2 &= 3 \\ -x_2 + x_1 + x_3^2 &= 4, \quad \theta > 0 \end{aligned}$$

Tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 1)^\top$ obtenha uma iterada pelo método de Newton. Mostre que $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty \geq 2$, para todo $\theta > 0$.

2. Considere o conjunto de nós $\mathcal{X} = \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ e a função $F(x) = \frac{1}{2+\sin(x)}$.

   (a) [1.5] Obtenha um valor aproximado de $F(3.2)$ por interpolação quadrática e justifique a escolha dos nós de $\mathcal{X}$ que utilizou.

   (b) [1.0] Calcule uma estimativa do erro da aproximação anterior, através da fórmula de erro de interpolação, e compare com o valor exacto do erro de interpolação.

   (c) [1.5] Utilizando a regra de Simpson com todos nós de $\mathcal{X}$, calcule um valor aproximado de $\int_0^{2\pi} F(x)dx$.

   (d) [1.5] Encontre o valor de β tal que

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} [\beta - F(x)]^2 < \sum_{x\in\mathcal{X}} [b - F(x)]^2 , \quad \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{\beta\}.$$

3. [1.5] Seja $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n \leq b$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Mostre que existe um único conjunto de números reais $\mu_0, ..., \mu_n$ tais que

$$\int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \mu_i f(x_i)$$

onde $p_n(x)$ é o polinómio com grau $\leq n$ interpolador da função f nos pontos $(x_0, f(x_0))$, ..., $(x_n, f(x_n))$.

4. [1.5] Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y(t) + (2 - y(t))y'(t) = 2e^t, \quad y(2) = 0$$

Efectuando apenas um passo do método de Heun obtenha um valor aproximado de $y(2.2)$.

Formulário

Métodos Iterativos para Sistemas não-lineares: Método de Newton

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)} \qquad \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Interpolação Polinomial de Lagrange: $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, \ell_i(x), \quad \ell_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Interpolação Polinomial de Newton com diferenças divididas:

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i](x - x_0)\cdots(x - x_{i-1}), \quad f[x_j] = f(x_j), \;\; j = 0, 1, ..., n$$

$$f[x_j, ..., x_{j+k}] = \frac{f[x_{j+1}, ..., x_{j+k}] - f[x_j, ..., x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}, \;\; j = 0, 1, ..., n-k, \;\; k = 1, ..., n$$

Erro de interpolação: $e_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \quad \xi \in \mathrm{int}(x_0, \ldots, x_n, x), \quad f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\eta)}{k!}$

Método dos Mínimos Quadrados

$$(\phi_i, \phi_j) = \sum_{k=0}^{m} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k), \quad (\phi_i, f) = \sum_{k=0}^{m} \phi_i(x_k) f(x_k), \quad \begin{bmatrix} (\phi_0, \phi_0) & \ldots & (\phi_0, \phi_m) \\ \vdots & & \vdots \\ (\phi_m, \phi_0) & \ldots & (\phi_m, \phi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0, f) \\ \vdots \\ (\phi_m, f) \end{bmatrix}$$

Integração Numérica

Regra dos trapézios:

$$T_n(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right], \quad E_n^T(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \;\; \xi \in (a, b)$$

Regra de Simpson:

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right], \quad E_n^S(f) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \;\; \xi \in (a, b)$$

Métodos numéricos para equações diferenciais

Heun : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))\right]$

Resolução

1. A primeira iterada é obtida da seguinte forma

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}), \qquad \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}.$$

Tem-se

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_3^3 + x_2 - 2x_1 - \theta \\ e^{x_1} + x_2^2 - 3 \\ -x_2 + x_1 + x_3^2 - 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 6x_3^2 \\ e^{x_1} & 2x_2 & 0 \\ 1 & -1 & 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Com $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,1)^\top$, obtemos

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \theta - 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ (\theta-1)/4 \\ (\theta+3)/8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ (\theta-1)/4 \\ (\theta+11)/8 \end{bmatrix}.$$

Para a diferença entre as duas primeiras iteradas:

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \|\Delta\mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \max\{|2|, |(\theta-1)/4|, |(\theta+11)/8|\} \geq 2, \ \forall\theta \geq 0.$$

2. É conveniente construir a seguinte tabela

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\frac{\pi}{2} = 1.57079...$	$\pi = 3.14159...$	$\frac{3\pi}{2} = 4.71238...$	$2\pi = 6.28318...$
$F(x_i) = \frac{1}{2+\sin(x_i)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

(a) Escolhem-se os nós que estão mais perto de 3.2 por forma a minimizar o erro de interpolação. Pela fórmula de Newton com diferenças divididas,

x_i	$F(x_i)$		
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{3}$		
		$\frac{1}{3\pi} = 0.106103$	
π	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3\pi^2} = 0.0675475$
		$\frac{1}{\pi} = 0.3183099$	
$\frac{3\pi}{2}$	1		

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f[\pi/2] + f[\pi/2,\pi](x - \frac{\pi}{2}) + f[\pi/2,\pi,3\pi/2](x-\pi)(x-\frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3\pi}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{2}{3\pi^2}(x-\pi)(x-\frac{\pi}{2}) \\ &= 0.333333 + 0.106103(x - \tfrac{\pi}{2}) + 0.0675475(x-\pi)(x-\tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Então $F(3.2) \approx p_2(3.2) = 0.5126240461$.

(b) Pela fórmula de erro de interpolação, existe $\xi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ tal que

$$|e_2(3.2)| = \left| \frac{F^{(3)}(\xi)}{3!}(3.2 - \frac{\pi}{2})(3.2-\pi)(3.2 - \frac{3\pi}{2}) \right|.$$

Por cálculo sucessivos, obtemos

$$\begin{aligned} F^{(3)}(x) &= \frac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^2} - \frac{6\cos^3(x)}{(\sin(x)+2)^4} - \frac{6\sin(x)\cos(x)}{(\sin(x)+2)^3} \\ &= \frac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^2} - \frac{6\cos^3(x)}{(\sin(x)+2)^4} - \frac{3\sin(2x)}{(\sin(x)+2)^3} \end{aligned}$$

que pode ser majorada por

$$|F^{(3)}(x)| \leq \frac{6}{1^4} + \frac{1}{1^2} + \frac{3}{1^3} = 10, \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Então o erro absoluto de $p_2(3.2)$ é majorado por

$$|e_2(3.2)| \leq \frac{10}{6}|(3.2 - \frac{\pi}{2})(3.2 - \pi)(3.2 - \frac{3\pi}{2})| = 0.2398584982.$$

Para o erro exato tem-se $|e_2(3.2)| = 0.00240824$, que é aproximadamente 100 vezes mais pequeno que o majorante calculado.

(c) Os 5 pontos tabelados são igualmente espaçados com $h = \pi/2$. A aproximação do integral pela regra de Simpson é dada por

$$\begin{aligned} S_4(f) &= \frac{\pi}{6}\left[F(0) + F(2\pi) + 4(F(\pi/2) + F(3\pi/2)) + 2F(\pi)\right] \\ &= \frac{\pi}{6}\left[1/2 + 1/2 + 4(1/3 + 1) + 2(1/2)\right] = \frac{11\pi}{9} = 3.839724354. \end{aligned}$$

(d) Trata-se de uma aplicação do método dos mínimos quadrados, havendo apenas uma função de base a considerar neste ajustamento: $\phi_0(x) := 1$. O sistema normal fica reduzido a uma só equação:

$$\alpha \sum_{i=0}^{4} 1^2 = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{2 + \sin(x_i)} \Leftrightarrow 5\alpha = \frac{17}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{17}{30} = 0.566666667.$$

3. Basta notar que, usando a base de Lagrange para $\mathcal{P}_n$, a unicidade do polinómio interpolador e da sua representação na base de Lagrange, se pode escrever

$$\int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx$$

donde $\mu_i = \int_a^b \ell_i(x)dx$, $i = 0, ..., n$.

Em alternativa, sendo $Q(f) := \sum_{i=0}^{n} \mu_i f(x_i)$ uma regra de quadratura com grau pelo menos n, onde os coeficientes μ_i, $i = 0, ..., n$, podem ser determinados de forma única pelo método dos coeficientes indeterminados, tem-se

$$\int_a^b p_n(x)dx = Q(p_n) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i p_n(x_i)$$

já que p_n é de grau $\leq n$ e Q é exata para polinómios de grau $\leq n$. Usando as condições de interpolação $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, ..., n$, obtém-se então

$$\int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \mu_i f(x_i).$$

4. A equação escreve-se na forma

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(1) = 0,$$

com $f(t, y) := \frac{2e^t - y}{2 - y}$. Para efetuar apenas um passo e aproximar $y(2.2)$, tomamos $h = 0.2$. Tem-se então

$$f(2, 0) = \frac{2e^2 - 0}{2 - 0} = e^2$$

$$\begin{aligned} y(2.2) = y(t_1) \approx y_1 &= 0 + \tfrac{0.2}{2}\left[f(2, 0) + f(2.2, 0 + 0.2f(2, 0))\right] \\ &= 0.1\left[e^2 + f(2.2, 0.2e^2)\right] \\ &= 0.1\left(e^2 + \tfrac{2e^{2.2} - 0.2e^2}{2 - 0.2e^2}\right) \approx 3.912511862. \end{aligned}$$