

Duração: 90 minutos

2º teste C

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Um fabricante de borrifadores de sistemas anti-incêndio afirma que estes são desenhados para serem automaticamente ativados quando a temperatura atinge ou excede os 65°C . Assuma que a temperatura de ativação dos borrifadores, X , pode ser considerada como tendo distribuição normal. Foram recolhidas 25 observações referentes a essa temperatura, tendo-se obtido: $\sum_{i=1}^{25} x_i = 1675$ e $\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 112279$.

- (a) Teste a hipótese do desvio padrão de X ser igual a 1, ao nível de significância de 0.01. (2.5)

Solução: $q_o = 54 \in \mathbb{R} \setminus [9.886, 45, 56] \Rightarrow$ rejeita-se H_0 para $\alpha = 0.01$

- (b) Calcule o intervalo de confiança bilateral ao nível 0.90 para o valor esperado da temperatura de ativação dos borrifadores. Comente o interesse prático deste intervalo face ao problema em causa. (2.5)

Solução: $[66.4867, 67.5133]$. Um intervalo de confiança bilateral não serve para testar uma hipótese com $H_0 : \mu \geq 65$.

2. Seja p a proporção de moedas não portuguesas de um euro a circular em Portugal. De acordo com um jornal económico essa proporção é de 0.2. Uma amostra de 1000 moedas de um euro foi selecionada ao acaso em Portugal e nessa amostra verificou-se que havia 160 moedas espanholas, 80 francesas, 60 italianas e as restantes eram portuguesas.

- (a) Efetuando um teste adequado, diga se a amostra é consistente com a afirmação referida pelo jornal ao nível de significância de 6%. (3.5)

Solução: $z_0 = 7.9 \in \mathbb{R} \setminus [-1.8808, 1.808] \Rightarrow$ rejeita-se H_0 para $\alpha = 0.06$

- (b) Calcule o valor-p do teste e comente o valor obtido. (1.5)

Solução: valor-p ≈ 0

Grupo II

10 valores

1. Registou-se o número de peças chegadas a uma máquina de inspeção ótica em 100 períodos consecutivos de 5 minutos, tendo-se obtido a seguinte tabela de frequências:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------------|----|----|----|----|
| Freq. absoluta | 33 | 32 | 20 | 15 |

- (a) Seja X a variável aleatória que representa o número de peças que chegam à referida máquina em períodos de 5 minutos. Admitindo que X tem distribuição de Poisson, deduza a estimativa de máxima verosimilhança do seu valor esperado. (2.5)

Solução: $\hat{\lambda} = 1.17$

- (b) Teste a hipótese de X ter de facto distribuição de Poisson, ao nível de significância de 5%. (3.5)

Solução: $q_o = 9.29 \in [7.815, +\infty] \Rightarrow$ rejeita-se H_0 para $\alpha = 0.05$

2. Nalguns aparelhos eletrónicos são usados cristais de determinados compostos, sendo importante a sua dimensão. Num estudo laboratorial, 14 amostras de cristais do mesmo tamanho inicial foram consideradas, tendo posteriormente sido deixadas em cultura, com vista ao seu crescimento. Para cada amostra foi recolhida informação sobre o peso (Y) do cristal (em gramas) e o período de tempo (x , em horas) usado para o crescimento do cristal.

Considere:

$$\bar{x} = 15, \quad \bar{y} = 7.6, \quad \sum_{i=1}^{14} (x_i - \bar{x})^2 = 910, \quad \sum_{i=1}^{14} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 458.12, \quad \sum_{i=1}^{14} (y_i - \bar{y})^2 = 244.16.$$

- (a) Assumindo as hipóteses necessárias, construa um intervalo de confiança a 95% para o declive da reta de regressão de Y em x . O que pode concluir sobre a qualidade do ajustamento do modelo de regressão aos dados? (3.0)

Solução: Admite-se que $Y_i = Y | x = x_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, 14$, são variáveis aleatórias não correlacionadas.

$$IC_{0.95}(\beta_1) = [0.4267, 0.5802]$$

Como $0 \notin IC_{0.95}(\beta_1)$ então pode-se rejeitar a hipótese $H_0 : \beta_1 = 0$ ao n. s. de 0.05, ou seja, a variável x contribui para explicar a variabilidade de Y no quadro do MRLS adotado.

- (b) Calcule o coeficiente de determinação do modelo de regressão e comente, relacionando com a conclusão obtida na alínea anterior. (1.0)

Solução: $R^2 = 0.9446$. Verifica-se que 94.46% da variabilidade observada em Y é explicada pela sua relação com x estabelecida pelo MRLS, o que evidencia o bom ajustamento do modelo aos dados. Este resultado reforça a conclusão da alínea anterior.