Probabilidades e Estatística

LEIC-A, LEIC-T, LEGM, MA, MEMec

2º semestre – 2015/2016
09/06/2016 – **11:00**

Duração: 90 minutos **2º teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I	10 valores

1. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população X com parâmetro θ, $\theta > 0$, possuindo função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

pelo que $E[X] = \frac{\theta}{\theta+1}$ e $E[X^2] = \frac{\theta}{\theta+2}$.

(a) Determine o estimador de máxima verosimilhança do parâmetro θ. (3.0)

- **F.d.p. de X**

  $$f_X(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Parâmetro desconhecido**

  $\theta, \quad \theta > 0$

- **Amostra**

  $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ amostra de dimensão n proveniente da população X

- **Obtenção do estimador de MV de θ**

  Passo 1 — Função de verosimilhança

  $$\begin{aligned} L(\theta|\underline{x}) &= f_{\underline{X}}(\underline{x}) \overset{X_i\, indep}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \overset{X_i \sim X}{=} \prod_{i=1}^n f_X(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\theta x_i^{\theta-1}\right) \\ &= \theta^n \times \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}, \quad \theta > 0 \end{aligned}$$

  Passo 2 — Função de log-verosimilhança

  $$\ln L(\theta|\underline{x}) = n\ln(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln(x_i) \quad [\text{ onde } \sum_{i=1}^n \ln(x_i) < 0 \text{ já que } x_i \in (0,1),\ i = 1, \ldots, n.]$$

  Passo 3 — Maximização

  A estimativa de MV de θ é doravante representada por $\hat\theta$ e atente-se que $\hat\theta = argmax_\theta L(\theta|\underline{x}) = argmax_\theta \ln L(\theta|\underline{x})$. Neste caso em particular:

  $$\hat\theta \ : \ \begin{cases} \left.\frac{d\ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta}\right|_{\theta=\hat\theta} = 0 & \text{(ponto de estacionaridade)} \\ \left.\frac{d^2\ln L(\theta|\underline{x})}{d\theta^2}\right|_{\theta=\hat\theta} < 0 & \text{(ponto de máximo)} \end{cases}$$

  $$\begin{cases} \frac{n}{\hat\theta} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0 \\ -\frac{n}{\hat\theta^2} < 0 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} \hat\theta = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)} \\ -\frac{n}{\hat\theta^2} = -\frac{[\sum_{i=1}^n \ln(x_i)]^2}{n} < 0 & \text{proposição verdadeira pois } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- **Passo 4 — Estimador de MV de θ**

$$\hat{\lambda} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)}$$

(b) Tendo em vista a estimação do valor esperado de X, compare a eficiência do estimador $\bar{X}$ relativamente ao estimador $T = 2X_1 - X_n$. (1.5)

- **Parâmetro desconhecido**
  $\mu = E(X)$

- **Estimador de $\mu = E(X)$**
  $\bar{X}$

- **Erro quadrático médio de $\bar{X}$**

$$\begin{aligned}
EQM_\mu(\bar{X}) &= V(\bar{X}) + \left[bias_\mu(\bar{X})\right]^2 \\
&= V(\bar{X}) + \left[E(\bar{X}) - \mu\right]^2 \\
&\overset{X_i \sim_{i.i.d.} X}{=} \frac{V(X)}{n} + [E(X) - E(X)]^2 \\
&= \frac{V(X)}{n}
\end{aligned}$$

[onde $V(X) = \frac{\theta}{\theta+2} - \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^2 = \frac{\theta}{(\theta+2)(\theta+1)^2}$.]

- **Outro estimador de $\mu = E(X)$**
  $T = 2X_1 - X_n$

- **Erro quadrático médio de T**

$$\begin{aligned}
EQM_\mu(T) &= V(T) + \left[bias_\mu(T)\right]^2 \\
&= V(T) + \left[E(T) - \mu\right]^2 \\
&= V(2X_1 - X_n) + [E(2X_1 - X_n) - E(X)]^2 \\
&\overset{X_i \sim_{i.i.d.} X}{=} 5\,V(X) + [E(X) - E(X)]^2 \\
&= 5\,V(X)
\end{aligned}$$

- **Eficiência do estimador $\bar{X}$ relativamente ao estimador $T = \frac{X_1 + X_{10}}{2}$**

$$\begin{aligned}
e_\mu(\bar{X}, T) &= \frac{EQM_\mu(T)}{EQM_\mu(\bar{X})} \\
&= \frac{5\,V(X)}{\frac{V(X)}{n}} \\
&= 5\,n
\end{aligned}$$

- **Comentário**
  Tendo em conta que $n \in \mathbb{N}$, temos $e_\mu(\bar{X}, T) = 5\,n > 1$ (i.e., $EQM_\mu(T) > EQM_\mu(\bar{X})$), pelo que pode afirmar-se que $\bar{X}$ é um estimador mais eficiente que $T = 2X_1 - X_n$ no que respeita à estimação de $\mu = E(X)$.

2. O limite de resistência à tração de cabos individuais de determinado tipo produzidos numa fábrica por cada um de dois métodos, A e B, possui distribuição normal em ambos os casos. Da experiência acumulada, sabe-se que o valor esperado do limite de resistência à tração de cabos produzidos pelo método tradicional A é igual a 1800 lb. Para avaliar a viabilidade de passar a usar o método B no fabrico desse tipo de cabos, um engenheiro de materiais realizou ensaios de tração que envolveram 25 cabos produzidos pelo método B, selecionados ao acaso, tendo obtido valores com média e variância amostrais de 1806.3 lb e 71.24 lb^2, respetivamente.

(a) Obtenha um intervalo de confiança a 95% para o desvio padrão do limite de resistência à tração de (2.5) cabos individuais produzidos pelo método B.

- **V.a. de interesse**
  X = limite de resistência à tração (LRT) de cabo produzido de acordo com o método B

- **Situação**
  $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2)$
  μ desconhecido
  σ^2 DESCONHECIDO

- **Obtenção do IC para σ**

  Passo 1 — Selecção da v.a. fulcral para σ

$$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

uma vez que é suposto determinar um IC para a variância de uma população normal, com valor esperado desconhecido.

Passo 2 — Obtenção dos quantis de probabilidade
Ao ter-se em consideração que $n = 25$ e $(1-\alpha) \times 100\% = 95\%$, far-se-á uso dos quantis

$$(a_\alpha, b_\alpha) \quad : \quad \begin{cases} P(a_\alpha \le Z \le b_\alpha) = 1-\alpha \\ P(Z < a_\alpha) = P(Z > b_\alpha) = \alpha/2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(\alpha/2) = F^{-1}_{\chi^2_{(24)}}(0.025) \stackrel{tabela/calc.}{=} 12.40 \\ b_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(1-\alpha/2) = F^{-1}_{\chi^2_{(24)}}(0.975) \stackrel{tabela/calc.}{=} 39.36. \end{cases}$$

Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \le Z \le b_\alpha$

$$P(a_\alpha \le Z \le b_\alpha) = 1-\alpha$$

$$P\left[a_\alpha \le \tfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le b_\alpha\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\tfrac{1}{b_\alpha} \le \tfrac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \le \tfrac{1}{a_\alpha}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\sqrt{\tfrac{(n-1)S^2}{b_\alpha}} \le \sigma \le \sqrt{\tfrac{(n-1)S^2}{a_\alpha}}\right] = 1-\alpha$$

Passo 4 — Concretização
Atendendo ao par de quantis acima e ao facto de

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(1-\alpha/2)}}, \sqrt{\frac{(n-1)\,s^2}{F^{-1}_{\chi^2_{(n-1)}}(\alpha/2)}}\right]$$

$$s^2 = 71.24,$$

segue-se:

$$\begin{aligned} IC_{90\%}(\sigma) &= \left[\sqrt{\frac{(25-1)\times 71.24}{39.36}}, \sqrt{\frac{(25-1)\times 71.24}{12.40}}\right] \\ &\simeq [\sqrt{43.439}, \sqrt{137.884}] \\ &\simeq [6.590, 11.742]. \end{aligned}$$

(b) A gestora da fábrica afirma que o valor esperado do limite de resistência à tração de cabos produzidos pelo método B é igual ao dos produzidos pelo método A. Considera que a opinião da gestora é suportada pelos dados ao nível de significância de 5%? (3.0)

- **Hipóteses**
  $H_0 : \mu = \mu_0 = 1800$
  $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- **N.s.**
  $\alpha_0 = 5\%$
- **Estatística de teste**

  $$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim_{H_0} t_{(n-1)}$$

  pois pretendemos efectuar um teste sobre o valor esperado de uma população normal, com variância desconhecida.
- **Região de rejeição de** H_0 (para valores da estatística de teste)
  Tratando-se de um teste bilateral ($H_1 : \mu \neq \mu_0$), a região de rejeição de H_0 (para valores da estatística de teste) é do tipo $W = (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$, onde $c : P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0) = \alpha_0$, i.e.,

  $$\begin{aligned} c \quad : \quad & P(T \in W \mid H_0) = \alpha_0 \\ & 2 \times \left[1 - F_{t_{(n-1)}}(c)\right] = \alpha_0 \\ & c = F^{-1}_{t_{(n-1)}}(1 - \alpha_0/2) \\ & c = F^{-1}_{t_{(24)}}(0.975) \\ & c \overset{tabela/calc.}{=} 2.064. \end{aligned}$$

- **Decisão**
  Uma vez que

  $$\begin{aligned} & n = 25 \\ & \bar{x} = 1806.3 \\ & s = \sqrt{71.24} \end{aligned}$$

  o valor observado da estatística de teste é igual a

  $$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{1806.3 - 1800}{\sqrt{\frac{71.24}{25}}} \\ &\simeq 3.732. \end{aligned}$$

  Como $t \simeq 3.732 \in W = (-\infty, -2.064) \cup (2.064, +\infty)$, devemos rejeitar H_0 ao n.s. $\alpha_0 = 5\%$ [ou a qualquer n.s. superior a $\alpha_0 = 5\%$].

Grupo II	10 valores

1. Um modelo genérico especifica que as plantas de certa espécie se distribuem entre quatro categorias (1,2,3,4) de acordo com as seguintes proporções: $p_1 = 0.656$, $p_2 = p_3 = 0.093$ e $p_4 = 0.158$. Selecionadas ao acaso 197 plantas dessa espécie, obtiveram-se as seguintes frequências observadas: $o_1 = 125$, $o_2 = 18$, $o_3 = 20$ e $o_4 = 34$. Averigúe, aplicando um teste apropriado, se tal modelo genérico é consistente com este conjunto de dados. Decida com base no valor-p. (4.0)

- **V.a. de interesse e f.p.**
  X = categoria da planta

  $$p_i = \begin{cases} P(X = i), & i = 1,2,3,4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Hipóteses**

  $H_0 : p_i = p_i^0, \quad$ onde $\quad p_1^0 = 0.656, \quad p_2^0 = 0.093, \quad p_3^0 = 0.093, \quad p_4^0 = 0.158$

  $H_1 : p_i \neq p_i^0$, para algum i

- **Estatística de teste**

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\sim}_{H_0} \chi^2_{(k-\beta-1)},$$

  onde:

  k = No. de classes = 4 (categorias)

  O_i = Frequência absoluta observável da classe i

  E_i = Frequência absoluta esperada, sob H_0, da classe i

  β = No. de parâmetros a estimar = 0 [dado que a distribuição conjecturada em H_0 está completamente especificada, i.e., H_0 é uma hipótese simples.]

- **Região de rejeição de** H_0 (para valores de T)

  Ao efectuarmos um teste de ajustamento do qui-quadrado a região de rejeição de H_0 é um intervalo à direita $W = (c, +\infty)$.

- **Cálculo das frequências absolutas esperadas sob** H_0

  As frequências absolutas esperadas sob H_0 são dadas por $E_i = n \times p_i^0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ e iguais a

  $E_1 = 197 \times 0.656 = 129.232$

  $E_2 = 197 \times 0.093 = 18.321$

  $E_3 = 197 \times 0.093 = 18.321$

  $E_4 = 197 \times 0.158 = 31.126.$

  [Importa notar que não é necessário fazer qualquer agrupamento de classes uma vez que em pelo menos 80% das classes se verifica $E_i \geq 5$ e $E_i \geq 1$ para todo o i.]

- **Decisão (com base no p-value)**

  No cálculo do valor observado da estatística de teste convém recorrer à seguinte tabela auxiliar:

i	Freq. abs. obs. o_i	Freq. abs. esper. sob H_0 $E_i = n \times p_i^0$	Parcelas valor obs. estat. teste $\frac{(o_i-E_i)^2}{E_i}$
1	125	129.232	$\frac{[125-129.232]^2}{129.232} \simeq 0.145$
2	18	18.321	$\frac{[18-18.321]^2}{18.321} \simeq 0.006$
3	20	18.321	$\frac{[20-18.321]^2}{18.321} \simeq 0.154$
4	34	31.126	$\frac{[34-31.126]^2}{31.126} \simeq 0.265$
	$\sum_{i=1}^4 o_i = n = 197$	$\sum_{i=1}^4 E_i = n = 197$	$t = \sum_{i=1}^4 \frac{(o_i-E_i)^2}{E_i} \simeq 0.57$

  Assim, temos

$$\begin{aligned} t &= \sum_{i=1}^{4} \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i} \\ &\simeq 0.57. \end{aligned}$$

  Uma vez que a região de rejeição de H_0 é para este teste um intervalo à direita temos:

$$\begin{aligned} valor - p &= P(T > t \mid H_0) \\ &= P[T > 0.57 \mid H_0] \\ &\simeq 1 - F_{\chi^2_{(4-1-0)}}(0.57) \\ &\overset{calc.}{\simeq} 0.903265. \end{aligned}$$

Consequentemente, é suposto:

- não rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \le 90.3265\%$, pelo que o modelo genérico é consistente com os dados a qualquer dos níveis usuais de significância (1%, 5% e 10%);
- rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 > 90.3265\%$.

[Em alternativa, poderíamos recorrer às tabelas de quantis da distribuição do qui-quadrado com 2 graus de liberdade e adiantar um intervalo para o *valor-p*:

$$\begin{aligned}
F^{-1}_{\chi^2_{(3)}}(0.075) = 0.472 &< t = 0.57 < 0.584 = F^{-1}_{\chi^2_{(3)}}(0.10)\\
0.075 &< F_{\chi^2_{(3)}}(0.57) < 0.10\\
1-0.10 &< 1-F_{\chi^2_{(3)}}(0.57) < 1-0.075\\
0.90 &< valor-p < 0.925.
\end{aligned}$$

Logo o intervalo para o *valor-p* é $(0.90, 0.925)$ e é suposto:

- não rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \le 90.0\%$, pelo que o modelo genérico é consistente com os dados a qualquer dos níveis usuais de significância (1%, 5% e 10%).
- rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \ge 92.5\%$.]

2. O *Archaeopteryx* é um animal extinto, tendo penas como um pássaro bem como dentes e uma cauda óssea como um réptil. As medições de comprimentos em centímetros do fémur (osso da perna), x, e do úmero (um osso do braço), Y, para dez espécimes fósseis que preservam os dois ossos, conduziram aos seguintes resultados:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{10} x_i = 580, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 35\,080, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 657, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 45\,251, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 39\,829$$

(a) Obtenha as estimativas de minímos quadrados dos parâmetros da reta de regressão linear simples de Y em x e interprete a estimativa do parâmetro β_1 do modelo. (2.0)

- **Estimativas de β_0 e β_1**

  Dado que

  $n = 10$

  $\sum_{i=1}^n x_i = 580$
  $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{580}{10} = 58$
  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 35\,080$
  $\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 = 35\,080 - 10 \times 58^2 = 1\,440$

  $\sum_{i=1}^n y_i = 657$
  $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i = \frac{657}{10} = 65.7$
  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 45\,251$
  $\sum_{i=1}^n y_i^2 - n(\bar{y})^2 = 45\,251 - 10 \times 65.7^2 = 2\,086.1$

  $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 39\,829$
  $\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y} = 39\,829 - 10 \times 58 \times 65.7 = 1\,723,$

  as estimativas de β_1 e β_0 são, para este modelo de RLS, iguais a:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}\\
&= \frac{1\,723}{1\,440}\\
&\simeq 1.196528
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \times \bar{x} \\
&\simeq 65.7 - 1.196528 \times 58 \\
&= -3.698611
\end{aligned}
$$

- **Interpretação da estimativa de β_1**
  $\hat{\beta}_1 \simeq 1.396226$
  Estima-se que um aumento de um cm no comprimento do fémur esteja associado a um aumento no valor esperado do comprimento do úmero de aproximadamente 1.196528 cm.

(b) Após ter enunciado as hipóteses de trabalho que entender por convenientes, obtenha um intervalo de confiança a 90% para o valor esperado do comprimento do úmero de um espécime fóssil cujo fémur tem 74 cm de comprimento. (4.0)

- **Hipóteses de trabalho**
  $\epsilon_i \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Normal}(0, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n$
  β_0, β_1 e σ^2 DESCONHECIDOS

- **Obtenção do IC para** $E(Y \mid x_0) = \beta_0 + \beta_1 x_0$
  Passo 1 — V.a. fulcral para $E(Y \mid x_0) = \beta_0 + \beta_1 x_0$

$$
Z = \frac{(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) - (\beta_0 + \beta_1 x_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}\right]}} \sim t_{(n-2)}
$$

Passo 2 — Quantis de probabilidade
Já que $(1-\alpha) \times 100\% = 90\%$, temos $\alpha = 0.10$ e lidaremos com os quantis

$$
(a_\alpha, b_\alpha) \quad : \quad \begin{cases} P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1 - \alpha \\ P(Z < a_\alpha) = P(Z > b_\alpha) = \alpha/2. \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} a_\alpha = F^{-1}_{t_{(n-2)}}(\alpha/2) = -F^{-1}_{t_{(10-2)}}(1 - 0.10/2) \overset{tabela/calc.}{=} -1.860 \\ b_\alpha = F^{-1}_{t_{(10-2)}}(1 - 0.10/2) \overset{tabela/calc.}{=} 1.860. \end{cases}
$$

Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$

$$
P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1 - \alpha
$$

$$
P\left[a_\alpha \leq \frac{(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) - (\beta_0 + \beta_1 x_0)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}\right]}} \leq b_\alpha\right] = 1 - \alpha
$$

$$
\begin{aligned}
P\Bigg[(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) - b_\alpha \times \sqrt{\hat{\sigma}^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}\right]} &\leq \beta_0 + \beta_1 x_0 \\
\leq (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) - a_\alpha \times \sqrt{\hat{\sigma}^2 \times \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}\right]}\Bigg] &= 1 - \alpha
\end{aligned}
$$

- **Passo 4 — Concretização**
  Uma vez que a estimativa de σ^2 é igual a

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-2}\left[\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2\right) - (\hat{\beta}_1)^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{10-2}\left(2086.1 - 1.196528^2 \times 1440\right) \\
&\simeq 3.060234
\end{aligned}
$$

e a expressão geral do IC pretendido é

$$
\begin{aligned}
&IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\beta_0+\beta_1 x_0) \\
&= \left[(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_0) \pm F^{-1}_{t_{(n-2)}}(1-\alpha/2) \times \sqrt{\hat{\sigma}^2 \times \left[\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}\right]} \right],
\end{aligned}
$$

temos

$$
\begin{aligned}
&IC_{90\%}(\beta_0+\beta_1\times 74) \\
&= \left[(-3.698611+1.196528\times 74)\pm 1.860\times\sqrt{3.060234\times\left[\frac{1}{10}+\frac{(74-58)^2}{1440}\right]}\right] \\
&= [84.844461 \pm 1.860 \times 0.921990] \\
&= [84.844461 \pm 1.71490] \\
&= [83.129560, 86.559362].
\end{aligned}
$$