Mecânica Analítica

Capítulo 0: Introdução ao Cálculo Tensorial

H. Terças

Instituto Superior Técnico
(Departamento de Física)

TÉCNICO LISBOA

TÉCNICO LISBOA

Nestas notas de apoio, pretendemos introduzir as noções fundamentais do **cálculo tensorial** necessárias que estarão na base das ferramentas da Mecânica Analítica (e, na verdade, de toda a física clássica e moderna), reunindo os principais conceitos e respectivas propriedades.

0.1 Vectores contravariantes

Dada uma base de um espaço vectorial, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, define-se vector (ou 'campo vectorial') como

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{e}_i .$$

A mudança para uma nova base $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'\}$ é feita recorrendo à transformação linear $\vec{v}' = \mathbf{A} \cdot \vec{v}$, ou explicitamente

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} . \tag{1}$$

Usaremos a **convenção de Einstein** (soma sobre índices repetidos)

$$v_\mu' = \left(\sum_\nu \right) A_{\mu\nu} v_\nu \equiv A_{\mu\nu} v_\nu . \tag{2}$$

Questão: Qual a forma da matriz $\mathbf{A}$? Para a determinarmos, necessitamos recorrer à **matriz mudança de base**, $\mathbf{\Lambda}$

$$\mathcal{B} \xRightarrow{\mathbf{\Lambda}} \mathcal{B}'$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vdots \\ \vec{e}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\vec{e}'_1, \vec{e}_1) & \cdots & P(\vec{e}'_1, \vec{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(\vec{e}'_1, \vec{e}_n) & \cdots & P(\vec{e}'_n, \vec{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

onde os elementos da matrix $\mathbf{\Lambda}$ correspondem à projecção dos versores "novos" nos "antigos", i.e.[1]

$$\Lambda_{\mu\nu} = P(\vec{e}'_\mu, \vec{e}_\nu),$$

(que pode não corresponder ao simples produto interno - ex. espaços curvos). De forma compacta, e na notação de Einstein

$$\vec{e}'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}\vec{e}_\nu.$$

[1] Em espaços euclideanos, $P(\vec{e}'_\mu, \vec{e}_\nu) = \vec{e}'_\mu \cdot \vec{e}_\nu$.

TÉCNICO LISBOA

Como sabemos da Álgebra Linear, a matriz $\mathbf{A}$ deve conter os "antigos" elementos da base $\{\vec{e}_\nu\}$, expressos em termos dos "novos" elementos $\{\vec{e}'_\mu\}$, i.e.

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\vec{e}_1, \vec{e}'_1) & \cdots & P(\vec{e}_1, \vec{e}'_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(\vec{e}_n, \vec{e}'_1) & \cdots & P(\vec{e}_n, \vec{e}'_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \tag{4}$$

ou seja, $\vec{v}' = \mathbf{A} \cdot \vec{v} = \left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \vec{v}$, o que nos permite concluir

$$A_{\mu\nu} = \left(\Lambda^{-1}_{\mu\nu}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Os vectores que se transformam de acordo com a Eq. (2) chamam-se **contravariantes** e identificam-se com o índice superscrito, i.e

$$\boxed{x'^\mu = A^\mu_\nu x^\nu, \quad \text{onde} \quad A^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \left(\Lambda^{-1}_{\mu\nu}\right)^{\mathrm{T}}.} \tag{5}$$

- Exemplo: Transformação de escala em $\mathbb{R}^2$

Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a base usual de $\mathbb{R}^2$, na qual o contravector $\vec{v} = v^\mu$ se escreve

$$v^\mu = (\alpha, \beta).$$

Defina-se $\mathcal{B}' = \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\} = \{2\vec{e}_1, \frac{1}{2}\vec{e}_2\}$. Assim,

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A} = \left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando a regra de transformação contravariante da Eq. (5), temos

$$v'^\mu = A^\mu_\nu v^\nu = \left(\frac{\alpha}{2}, 2\beta\right).$$

Os elementos do contravector v^μ **contraem** quando os elementos da base **dilatam** (daí se chamarem componentes “contravariantes”).

0.2 Formas-1 ou covectores

Outro objecto matemático de importância no cálculo tensorial é a **forma-1**, construído a partir de um escalar, $f(x^\mu)$, na seguinte forma

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \vec{e}^\mu .$$

Questão: Como é que este objecto se transforma numa mudança de coordenadas? Definamos $w_\mu \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$. Então,

$$w'_\mu = \frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \left(A^{-1}\right)^{\mu \mathrm{T}}_{\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = \left(A^{-1}\right)^{\nu}_{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu},$$

onde usámos a propriedade

$$\left(A^{-1}\right)^{\mu \mathrm{T}}_{\nu} = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right)^{-1\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\right)^{-1} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}.$$

Finalmente, com $\Lambda^\nu_\mu = \left(A^{-1}\right)^{\nu}_{\mu}$, temos

$$w'_\mu = \Lambda^\nu_\mu w_\nu .$$

TÉCNICO LISBOA

- Exemplo: (Ainda) a transformação de escala $\mathbb{R}^2$

Vejamos o exemplo anterior para este caso, com a mudança de base $\mathcal{B}' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\} = \{2\vec{e}_1, \frac{1}{2}\vec{e}_2\}$.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{A} = \left(\mathbf{\Lambda}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seja ainda $\vec{\nabla} f = (\partial_x f, \partial_y f) = (\alpha, \beta)$ o gradiente de f num determinado ponto (x, y) do plano.

$$\vec{\nabla}' f = \left(\frac{\partial f}{\partial x'}, \frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial (x/2)}, \frac{\partial f}{\partial (2y)}\right) = \left(2\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

de onde se usou $(x', y') = (x/2, 2y)$ (como consequência de $x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$). Se escrevermos $\vec{\nabla} f = w_{\mu} \vec{e}^{\mu}$, temos

$$\therefore w'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} w_{\nu} = (A^{-1})^{\nu}_{\mu} w_{\nu}.$$

w_{μ} é a componente de um vector **covariante**, ou um **co-vector**.

Por forma a distinguirmos contravectores e covectores, usamos a seguinte notação com índices subidos e descidos

$$\begin{cases} v^\mu & : & \text{vector contravariante (ou vector)} \\ w_\mu & : & \text{vector covariante (ou co-vector)} \end{cases}$$

De uma forma geral, se v^μ designar a componente de um vector num determinado espaço vectorial, v_μ designa a sua componente no **espaço dual**

$$\vec{v} = v^\mu \vec{e}_\mu = v_\mu \vec{\epsilon}^{\ \mu},$$

tal que

$$\vec{e}_\mu \cdot \vec{\epsilon}^{\ \nu} = \delta_\mu^\nu.$$

Índices covariantes contraem com índices covariantes

$$\begin{cases} v^\mu & = & A_\nu^\mu v^\nu \\ \\ v_\mu & = & \left[\left(A^{-1}\right)_\nu^\mu\right]^{\mathrm{T}} v_\nu = \left(A^{-1}\right)_\mu^\nu v_\nu \end{cases}$$

Algumas propriedades interessantes do produto

- "A norma $||\vec{w}|| = w_\mu w^\mu$ é um invariante **(escalar)**"

$$w'_\mu w'^\mu = \left(A^{-1}\right)^\alpha_\mu w_\alpha A^\mu_\beta w^\beta = \left(A^{-1}\right)^\alpha_\mu A^\mu_\beta w_\alpha w^\beta = \delta^\alpha_\beta w_\alpha w^\beta = w_\alpha w^\alpha \quad \checkmark$$

- "O produto interno (covariante) definido como $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a^\mu b_\mu$ é invariante **(escalar)**

$$a'^\mu b'_\mu = A^\mu_\alpha a^\alpha \left(A^{-1}\right)^\beta_\mu b_\beta = \delta^\beta_\alpha a^\alpha b^\beta = a^\alpha b_\alpha = a_\beta b^\beta .$$

- "O produto interno (usual) definido como $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a^\mu b^\mu$ não é invariante **(pseudo-escalar)**

$$a'^\mu b'\mu = A^\mu_\alpha a^\alpha A^\mu_\beta a^\beta = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^\alpha_\mu A^\mu_\beta a^\alpha a^\beta \neq a^\alpha a^\alpha .$$

A última igualdade só se satisfaz caso $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{-1}$ (é circunstancial).

0.3 Tensor da métrica

Comecemos por determinar a invariância do **produto interno generalizado** definido por $s_g = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_g = w_\mu w_\nu a^\mu b^\nu$

$$s'_g = w'_\mu w'_\nu a'^\mu a'^\nu = \left(A^{-1}\right)^\alpha_\mu w_\alpha \left(A^{-1}\right)^\beta_\nu w_\beta A^\mu_\rho a^\rho A^\nu_\sigma b^\sigma .$$

Contraindo os índices contra- e covariantes do mesmo nome,

$$s'_g = \delta^\alpha_\rho \delta^\beta_\sigma w_\alpha w_\beta a^\rho b^\sigma = w_\alpha w_\beta a^\alpha b^\beta = s_g .$$

O caso de interesse é obtido para o caso de $w_\mu = \vec{e}_\mu$, levando à definição do **tensor da métrica**

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \otimes \vec{e}_\nu = [e_1, ..., e_n].[e_1, ..., e_n]^{\mathrm{T}} .$$

O tensor da métrica é simétrico,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} .$$

TÉCNICO LISBOA

- Exemplo 1 : Métrica cartesiana de $\mathbb{R}^2$. Com $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, onde $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$, temos

$$\mathbf{g} = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}.$$

- Exemplo 1 : Métrica alternativa de $\mathbb{R}^2$. Com $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, onde $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (\cos\theta, 1)$, temos

$$\mathbf{g} = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}.$$

A métrica transforma-se como um **tensor**,

$$g'_{\mu\nu} = \vec{e}'_{\mu} \otimes \vec{e}'_{\nu} = \left(A^{-1}\right)_{\mu}^{\alpha} \left(A^{-1}\right)_{\nu}^{\beta} \vec{e}_{\alpha} \otimes \vec{e}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}$$

De uma forma geral, um tensor de grau n satisfaz

$$\boxed{T'_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x'^{\mu_n}} T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \qquad (6)}$$

Contudo, há quantidades com carácter tensorial (i.e. que "se parecem" com tensores) mas não se transformam de acordo com a regra anterior. Exemplos triviais são o símbolo de Kronecker que temos utilizado, $\delta_{\mu\nu}$, ou o símbolo de Levi-Civita, $\epsilon_{\mu\nu\alpha}$. Um exemplo menos trivial é

$$M_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} a^{\alpha}.$$

A transformação de $M_{\mu\nu}$ não é da forma da Eq. (6),

$$M'_{\mu\nu} = \epsilon'_{\mu\nu\alpha} a'^{\alpha} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} A^{\alpha}_{\beta} a^{\beta} \neq \left(A^{-1}\right)_{\mu}^{\alpha} \left(A^{-1}\right)_{\nu}^{\beta} M_{\alpha\beta}$$

TÉCNICO LISBOA

- Exercício: Usar a regra de transformação de tensores para determinar a métrica em **coordenadas polares**.

  Partimos da métrica em coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^2$, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. As coordenadas "antigas" e "novas" escrevem-se então

$$x^\mu = (x, y), \quad x'^\mu = (r, \theta),$$

  satisfazendo as transformações $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Da Eq. (6), temos então

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'^\nu}.$$

  Explicitamente,

$$g_{rr} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} = 1, \quad g_{r\theta} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} = 0 = g_{\theta r}$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta} = r^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

Podemos, ainda, utilizar a métrica para **transformar covectores em contravectores**, i.e. para “subir” e “descer” índices. Para tal, observemos a seguinte transformação

$$g'_{\mu\nu}a'^{\mu} = (A^{-1})^{\alpha}_{\mu}(A^{-1})^{\beta}_{\nu}g_{\alpha\beta}A^{\mu}_{\rho}a^{\rho} = (A^{-1})^{\beta}_{\nu}g_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{\rho}a^{\rho} = (A^{-1})^{\beta}_{\nu}g_{\alpha\beta}a^{\alpha},$$

que é a de um vector covariante se o último termo for um covector. Assim,

$$a_{\alpha} = g_{\alpha\beta}a^{\beta}.$$

A mesma propriedade se pode aplicar a tensores, desde que se conserve o número de índices covariantes e contravariantes **não contraídos** em ambos os membros da equação

$$\omega^{\nu}_{\mu} = g^{\nu\alpha}\omega_{\mu\alpha}, \quad \omega^{\mu\nu} = g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\omega_{\alpha\beta}.$$

0.4 O símbolo de Levi-Civita

O **símbolo de Levi-Civita** $\epsilon_{\alpha\beta\mu}$, com $\mu = \{1,2,3\}$ é definido da seguinte forma

$$\epsilon_{\alpha\beta\mu} = \begin{cases} 1, & \text{para uma permutação } \underline{\text{par}} \text{ dos índices } 123 \\ -1, & \text{para uma permutação } \underline{\text{ímpar}} \text{ dos índices } 123 \\ 0, & \text{se pelo menos dois índices forem repetidos} \end{cases}$$

Algumas propriedades úteis:

$$\begin{cases} \epsilon_{\alpha\mu\nu}\epsilon_{\alpha\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \\ \epsilon_{\alpha\beta\nu}\epsilon_{\alpha\beta\mu} = \delta_{\nu\mu}\left(\delta_{\alpha\alpha} + \delta_{\beta\beta}\right) = 2\delta_{\nu\mu} \\ \epsilon_{\alpha\beta\nu}\epsilon_{\alpha\beta\nu} = 6 \end{cases}$$

TÉCNICO LISBOA

O símbolo de Levi-Civita é útil para o cálculo vectorial. Por exemplo, o produto externo:[2]

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b},$$

que em componentes se escreve

$$c_\mu = \epsilon_{\mu\alpha\beta} a_\alpha b_\beta.$$

Para termos uma ideia explícita, a componente 1 (ou x) do vector c é

$$c_1 = \epsilon_{1\alpha\beta} a_\alpha b_\beta = \underbrace{\epsilon_{123}}_{=1} a_2 b_3 + \underbrace{\epsilon_{132}}_{=-1} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2.$$

- Exercício: Mostre que $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = 0.$

$$\left[\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)\right] = \partial_\mu \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)_\mu = \partial_\mu \epsilon_{\mu\alpha\beta} \partial_\alpha a_\beta = \epsilon_{\mu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha a_\beta.$$

Como o termo $\partial_\mu \partial_\alpha$ é simétrico, podemos trocar os índices α e β. Mas como $\epsilon_{\mu\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\beta\alpha}$, a igualdade só é satisfeita se for identicamente nula.

[2] Consideremos espaços ortonormados, $x_\mu = x^\mu$.