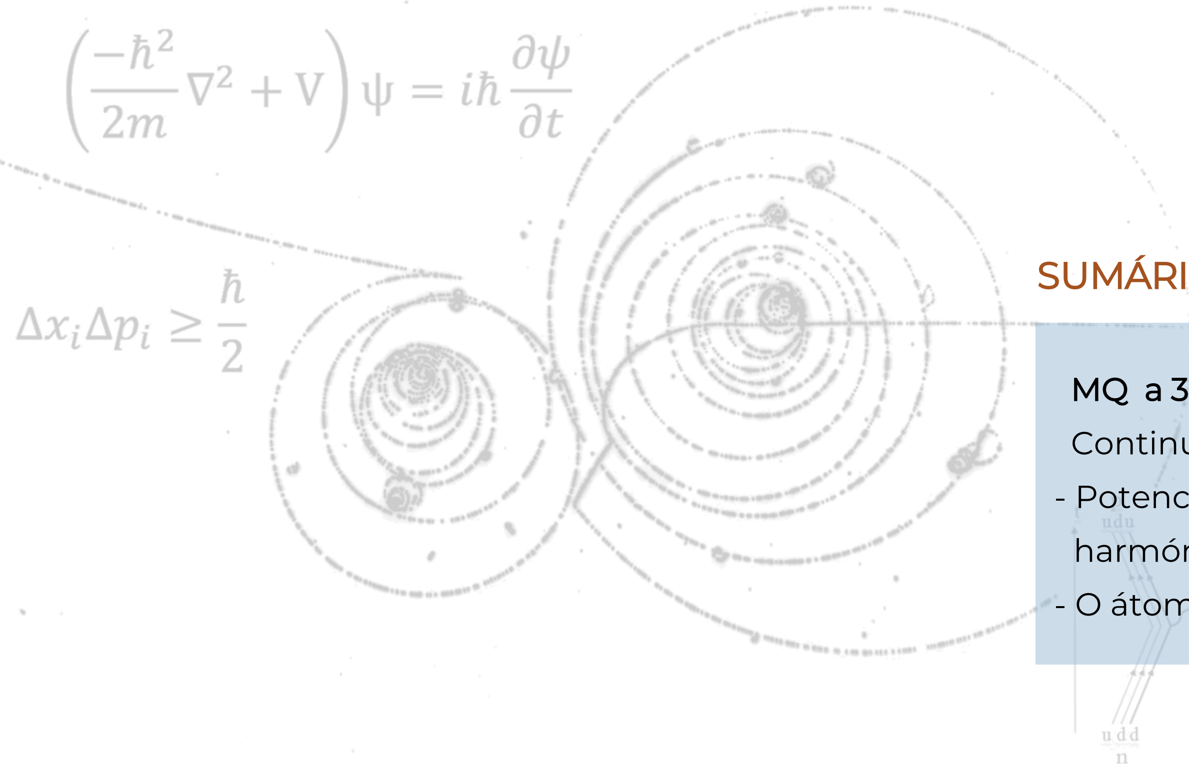
MECÂNICA QUÂNTICA I

LEFT – 3º ANO, 1º Sem (P1). (2021/2022)



SUMÁRIO:

MQ a 3-D (Griff. 4.1-4.2, Gas. 8)

Continuação da aula anterior:

- Potenciais centrais: Poço finito esférico, oscilador harmónico.
- O átomo de H.

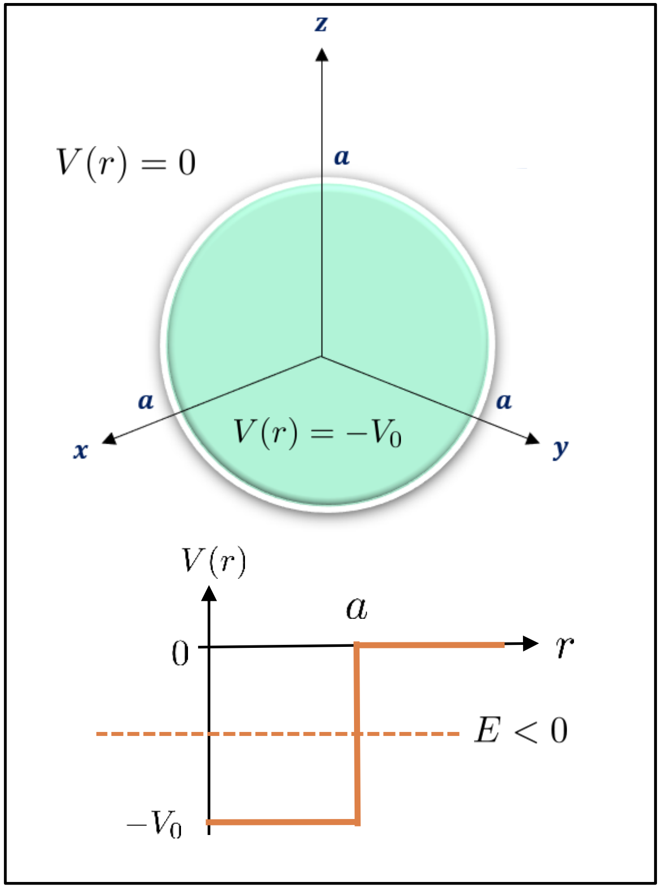
DF
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
TÉCNICO LISBOA

Filipe Rafael Joaquim

Centro de Física Teórica de Partículas (CFTP) – DF -IST

filipe.joaquim@tecnico.ulisboa.pt , Ext: 3704 , Gab. 4-8.3

EQ. DE SCHRÖDINGER A 3D – Poço finito esférico



$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Estamos interessados no caso com $\ell = 0$

→ $r \leq a,\ u(r) = A\sin(kr)$, $k \equiv \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$

→ Para $r \geq a$: $\dfrac{d^2u}{dr^2} = -\dfrac{2m}{\hbar^2}Eu = \kappa^2 u,\ \ \kappa \equiv \sqrt{-2mE}/\hbar$

Temos então que: $u(r) = \cancel{Ce^{\kappa r}} + De^{-\kappa r}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Continuidade de } u \text{ em } a\ : A\sin(ka) = De^{-\kappa a} \\ \text{Continuidade de } u' \text{ em } a : Ak\cos(ka) = -D\kappa e^{-\kappa a} \end{array}}$$

Equação transcendental: $\dfrac{1}{k}\tan(ka) = -\dfrac{1}{\kappa}$

$$ka \equiv z; \quad \frac{\kappa}{k} = \frac{\sqrt{2mV_0a^2/\hbar^2 - z^2}}{z}$$

→ $z_0 \equiv \dfrac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}a.$ $\boxed{-\cot z = \sqrt{(z_0/z)^2 - 1}.}$ Não há estados ligados se $z_0 < \pi/2$.

O estado fundamental ocorre para $\frac{\pi}{2} < z_0 < \pi$ → $\boxed{\dfrac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} < (E_0 + V_0) < \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}}$

EQ. DE SCHRÖDINGER A 3D – Oscilador harmónico (again)

POTENCIAL DO OH EM COORDENADAS ESFÉRICAS: $V(r) = \frac{1}{2}M\omega^2 r^2$

Equação radial: $$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left[\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2Mr^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2\right]u(r) = Eu(r)$$

Vamos ver dois limites interessantes:

$$r \to 0: \quad -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2Mr^2}u(r) = 0 \longrightarrow u(r) = \cancel{Ar^{-\ell}} + Br^{\ell+1}$$

$$r \to \infty: \text{(limite assintótico)} \quad -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 u(r) = 0 \longrightarrow u(r) = D\,e^{-M\omega r^2/2\hbar}$$

Combinando os dois limites: $u(r) = f(r) r^{l+1} e^{-M\omega r^2/2\hbar}$

Substituindo na eq. radial: $$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2\left(\frac{l+1}{r} - \frac{M\omega}{\hbar}r\right)\frac{df(r)}{dr} + \left[\frac{2ME}{\hbar^2} - (2l+3)\frac{M\omega}{\hbar}\right]f(r) = 0$$

Expansão em série: $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_n r^n + \cdots$

Substituindo na eq. diferencial para $f(r)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n(n-1)a_n r^{n-2} + 2\left(\frac{l+1}{r} - \frac{M\omega}{\hbar} r\right) n a_n r^{n-1} + \left[\frac{2ME}{\hbar^2} - (2l+3)\frac{M\omega}{\hbar}\right] a_n r^n \right\} = 0$$

Agrupando os termos comuns:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ n(n+2l+1)a_n r^{n-2} + \left[-\frac{2M\omega}{\hbar} n + \frac{2ME}{\hbar^2} - (2l+3)\frac{M\omega}{\hbar}\right] a_n r^n \right\} = 0}$$

Para que esta equação se verifique os coeficientes de todas as potências de r têm que se anular.

- Coeficiente de r^{-2} $(n = 0)$: $0 \cdot (2l+1)a_0 = 0$
- Coeficiente de r^{-1} $(n = 1)$: $1 \cdot (2l+2)a_1 = 0$ mas ℓ é positivo, logo $a_1 = 0$

$$\longrightarrow \sum_{n=0} \left\{ (n+2)(n+2l+3)a_{n+2} + \left[\frac{2ME}{\hbar^2} - \frac{M\omega}{\hbar}(2n+2l+3)\right] a_n \right\} r^n = 0$$

EQ. DE SCHRÖDINGER A 3D – Oscilador harmónico (again)

Fórmula de recorrência para os coeficientes da expansão:

$$(n+2)(n+2l+3)a_{n+2} = \left[\frac{-2ME}{\hbar^2} + \frac{M\omega}{\hbar}(2n+2l+3)\right] a_n$$

Todo os coeficientes de ordem ímpar anulam-se porque $a_1 = 0$

$$\boxed{f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} r^{2n} = \sum_{n'=0,2,4,\cdots}^{\infty} a_{n'} r^{n'}}$$

$\longrightarrow$ Só potências pares. Todos os coeficientes a_{2n} para $n \geq 1$ são proporcionais a a_0.

Quando $n \to \infty$, $f(r)$ diverge como e^{r^2}. Isto quer dizer que a expansão tem que terminar para um certo n'. Então, $f(r)$ é polinomial. Então, temos que $a_{n'+2} = 0$, o que dá:

$$2\frac{M}{\hbar^2}E_{n'l} - \frac{M\omega}{\hbar}(2n'+2l+3) = 0 \longrightarrow E_{n'l} = \left(n' + l + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$

Definindo: $n = n' + l = 2N + l$ com $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$ temos:

$$\boxed{E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),}$$

Função de onda:

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = r^l f(r) Y_{lm}(\theta,\varphi) e^{-M\omega r^2/2\hbar}$$

EQ. DE SCHRÖDINGER A 3D – Oscilador harmónico (again)

$$n = n' + l = 2N + l$$

n	E_n	$N l$	m	g_n
0	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	0 0	0	1
1	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	0 1	$\pm 1, 0$	3
2	$\frac{7}{2}\hbar\,\omega$	1 0	0	6
		0 2	$\pm 2, \pm 1, 0$	
3	$\frac{9}{2}\hbar\omega$	1 1	$\pm 1, 0$	10
		0 3	$\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$	

Degenerescência:

$$\boxed{g_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).}$$

Para o estado fundamental:

$$\psi_{000}(r,\theta,\varphi) = R_{00}(r)Y_{00}(\theta,\varphi)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\sqrt{\pi}}}\left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^{3/4} e^{-M\omega r^2/2\hbar}\, Y_{00}(\theta,\varphi)$$

$$\psi_{11m}(r,\theta,\varphi) = R_{11}(r)Y_{1m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{8}{3\sqrt{\pi}}}\left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^{5/4} r e^{-M\omega r^2/2\hbar}\, Y_{1m}(\theta,\varphi)$$

Em notação de Dirac podemos escrever os estados como:

$$\boxed{|n,\ell,m\rangle \longrightarrow \psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = \langle\vec{r}\,|\,n,\ell,m\rangle}$$

Potencial δ a 3D: $V(r) = -V_0\delta(r-a)$. Temos $u_0(r) = rR_0(r)$

Para $\ell = 0$: $\dfrac{\partial^2 u_0(r)}{\partial r^2} + \left[\dfrac{2mV_0}{\hbar^2}\delta(r-a) - k^2\right]u_0(r) = 0\,,\ k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$

Do que já sabemos do comportamento da função de onda (para $E < 0$):

$$u_0(r) = \begin{cases} Ae^{kr} + Be^{-kr}, & 0 < r < a \\ Ce^{-kr}, & r > a. \end{cases} \xrightarrow{u_0(0)=0} B = -A$$

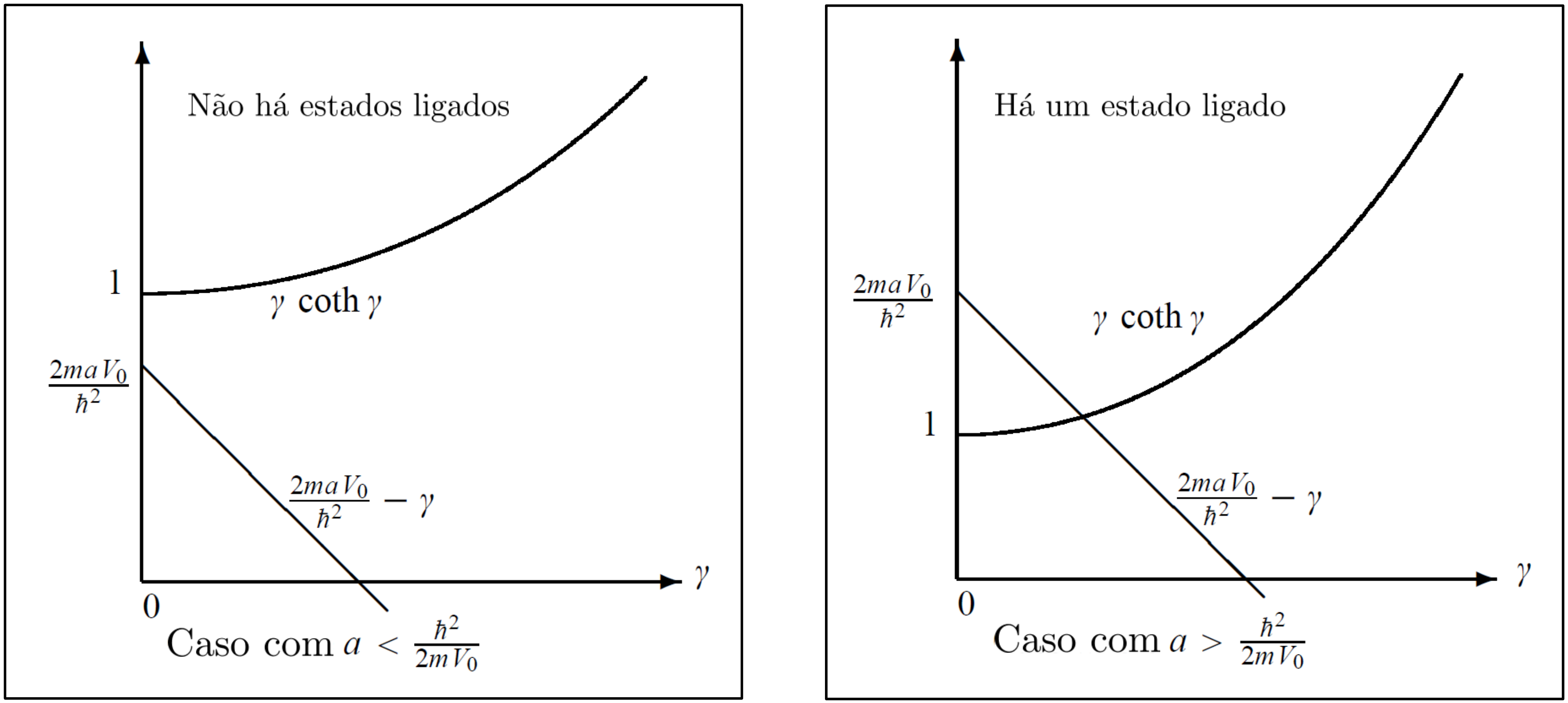
Temos então, de uma forma mais simples: $u_0(r) = \begin{cases} D\sinh kr \ , & 0 < r < a \\ Ce^{-kr}, & r > a. \end{cases}$

Continuidade da função em a: $D\sinh ka = Ce^{-ka}$

Descontinuidade da derivada: $\lim_{\varepsilon\to 0}\left[u_0'(a+\varepsilon) - u_0'(a-\varepsilon)\right] + \dfrac{2mV_0}{\hbar^2}u_0(a) = 0$

$$-kCe^{-ka} - kD\cosh ka + \frac{2mV_0}{\hbar^2}Ce^{-ka} = 0 \longrightarrow -k\sinh ka - k\cosh ka + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\sinh ka = 0$$

Definimos: $\gamma = ka$ → **Eq. transcendental:** $\boxed{\gamma \coth \gamma = \frac{2mV_0}{\hbar^2} a - \gamma}$



$$R_0(r) = u_0(r)/r = \begin{cases} (D/r)\sinh kr, & 0 < r < a \\ (C/r)e^{-kr}, & r > a. \end{cases}$$

Normalização:

$$1 = \int_0^\infty r^2 R_0^2(r)\,dr = D^2 \int_0^a \sinh^2 kr\,dr + C^2 \int_a^\infty e^{-2kr}\,dr =$$

$$\frac{D^2}{2}\int_0^a [\cosh 2kr - 1]\,dr + \frac{C^2}{2k}e^{-2ka} = D^2\left[\frac{1}{4k}\sinh 2ka - \frac{a}{2}\right] + \frac{C^2}{2k}e^{-2ka}$$

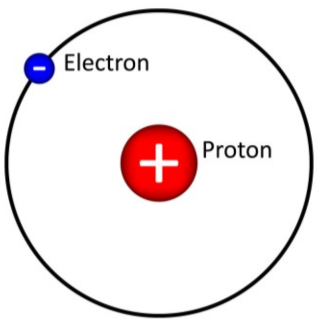
$$\xrightarrow{Ce^{-ka} = D\sinh ka} \quad 1 = D^2\left[\frac{1}{4k}\sinh 2ka - \frac{a}{2}\right] + \frac{D^2}{2k}\sinh^2 ka = D^2\left[\frac{\sinh 2ka + 2\sinh^2 ka}{4k} - \frac{a}{2}\right]$$

$$\boxed{\psi_{n00}(r) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi\sinh 2ka + 2\pi\sinh^2 ka - 2\pi ak}} \begin{cases} (1/r)\sinh(kr), & 0 < r < a, \\ (1/r)\sinh(ka)e^{-k(r-a)}, & r > a. \end{cases}}$$

O ÁTOMO DE HIDROGÉNIO

Eq. radial: $$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[V(r)-E\right]R=\ell\left(\ell+1\right)R$$

Mudança de variável: $u(r)\equiv r\,R(r)$



Potencial de Coulomb: $$V(r)=-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Eq. radial para o átomo de H: $$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2u}{dr^2}+\left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}+\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\ell\left(\ell+1\right)}{r^2}\right]u=Eu$$

Vamos seguir o método descrito no Griff. 4.2.1

$$\frac{1}{\kappa^2}\frac{d^2u}{dr^2}=\left[1-\frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}\frac{1}{(\kappa r)}+\frac{\ell\left(\ell+1\right)}{(\kappa r)^2}\right]u \longrightarrow \kappa\equiv\frac{\sqrt{-2m_eE}}{\hbar}$$

Para simplificar notação: $\rho\equiv\kappa r,\quad \rho_0\equiv\dfrac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}$ $\longrightarrow$ $$\frac{d^2u}{d\rho^2}=\left[1-\frac{\rho_0}{\rho}+\frac{\ell\left(\ell+1\right)}{\rho^2}\right]u$$

Tal como no caso do oscilador harmónico, vamos ver os limites:

$\boxed{\rho \to 0:}$ $$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} u \longrightarrow u(\rho) = C\rho^{\ell+1} + \cancel{D\rho^{-\ell}}$$

$\boxed{\begin{array}{c}\rho \to \infty: \\ \text{(limite assintótico)}\end{array}}$ $$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = u \longrightarrow u(\rho) = Ae^{-\rho} + \cancel{Be^{\rho}}$$

$$u(\rho) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho} v(\rho)$$

Eq. para a função $v(\rho)$: $\rho \frac{d^2 v}{d\rho^2} + 2(\ell + 1 - \rho)\frac{dv}{d\rho} + [\rho_0 - 2(\ell+1)]v = 0$

Expansão em série: $v(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \rho^j$. Depois de substituir na eq. acima (ver Griff):

Relação de recorrência

$$(j+1)c_{j+1} + 2(\ell+1)(j+1)c_{j+1} - 2jc_j + [\rho_0 - 2(\ell+1)]c_j = 0$$

$$c_{j+1} = \left\{\frac{2(j+\ell+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2\ell+2)}\right\} c_j$$

Pensando da mesma forma como para o caso do OH, temos que:

$$\boxed{v(\rho) = c_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \rho^j = c_0 e^{2\rho} \longrightarrow u(\rho) = c_0 \rho^{l+1} e^{\rho}}$$

De novo esta função diverge, logo a expansão tem que parar para um certo N' de tal modo que:

$$c_{N-1} \neq 0\,,\ c_N = 0$$

$$c_{j+1} = \left\{ \frac{2(j+\ell+1) - \rho_0}{(j+1)(j+2\ell+2)} \right\} c_j \xrightarrow{c_{N-1} \neq 0\,,\ c_N = 0} 2(N+\ell) - \rho_0 = 0$$

$$\text{Definindo } n = N + \ell \text{ temos que } \rho_0 = 2n \longrightarrow \rho_0 \equiv \frac{m_e e^2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 \kappa}$$

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = -\frac{m_e e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 \rho_0^2}$$

$$\boxed{E_n = -\left[\frac{m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \right] \frac{1}{n^2} = \frac{E_1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.}$$

$$\kappa = \left(\frac{m_e e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \longrightarrow \boxed{a \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0.529 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}}$$

RAIO DE BOHR

$$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = R_{n\ell}(r)\, Y_\ell^m(\theta,\phi) \xrightarrow{u(r) \equiv r\,R(r)} R_{n\ell}(r) = \frac{1}{r}\rho^{\ell+1}e^{-\rho}v(\rho)$$

ESTADO FUNDAMENTAL

$$\boxed{E_1 = -\left[\frac{m_e}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right] = -13.6\ \text{eV}.}$$

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = R_{10}(r)Y_0^0(\theta,\phi)$$

$$R_{10}(r) = \frac{c_0}{a}e^{-r/a}$$

Normalização: $$\int_0^\infty |R_{10}|^2 r^2\,dr = \frac{|c_0|^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-2r/a}\,r^2\,dr = |c_0|^2\,\frac{a}{4} = 1$$

Finalmente, a função de onda do estado fundamental para o átomo de H:

$$\boxed{\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}.}$$

Tendo em conta que $n = N + \ell$, então $\ell = 0, 1, 2, ..., n-1$.

As funções de onda para o átomo de H convenientemente normalizadas são:

$$\int \psi_{n\ell m}^*\,\psi_{n'\ell'm'}\,r^2\,dr\,d\Omega = \delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

- Podemos escrever $v(\rho) = L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}(2\rho)$ onde $L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}$ são os polinómios de Laguerre

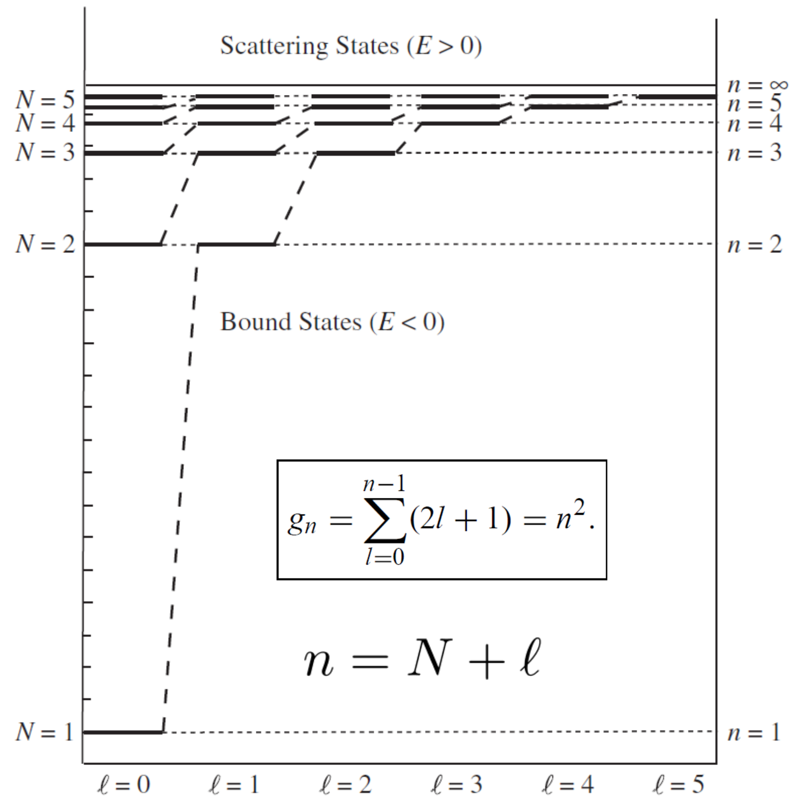
Expressão em função dos Polinómios de Laguerre

$$\boxed{\psi_{n\ell m} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-\ell-1)!}{2n\,(n+\ell)!}}\, e^{-r/na} \left(\frac{2r}{na}\right)^{\ell} \left[L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}(2r/na)\right] Y^m_\ell(\theta,\phi).}$$

$L^0_0(x) = 1$	$L^2_0(x) = 1$
$L^0_1(x) = -x+1$	$L^2_1(x) = -x+3$
$L^0_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$	$L^2_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$
$L^1_0(x) = 1$	$L^3_0(x) = 1$
$L^1_1(x) = -x+2$	$L^3_1(x) = -x+4$
$L^1_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3$	$L^3_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 10$

O grau de degenerescência de cada nível n é $g_n = n^2$.

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = 2\sum_{l=0}^{n-1} l + \sum_{l=0}^{n-1} 1 = n(n-1) + n = n^2.$$



$$R_{10} = 2a^{-3/2}\exp(-r/a)$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)\exp(-r/2a)$$

$$R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)\exp(-r/2a)$$

$$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{r}{a}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\exp(-r/3a)$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)\exp(-r/3a)$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\exp(-r/3a)$$

$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1-\frac{3}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2-\frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)\exp(-r/4a)$$

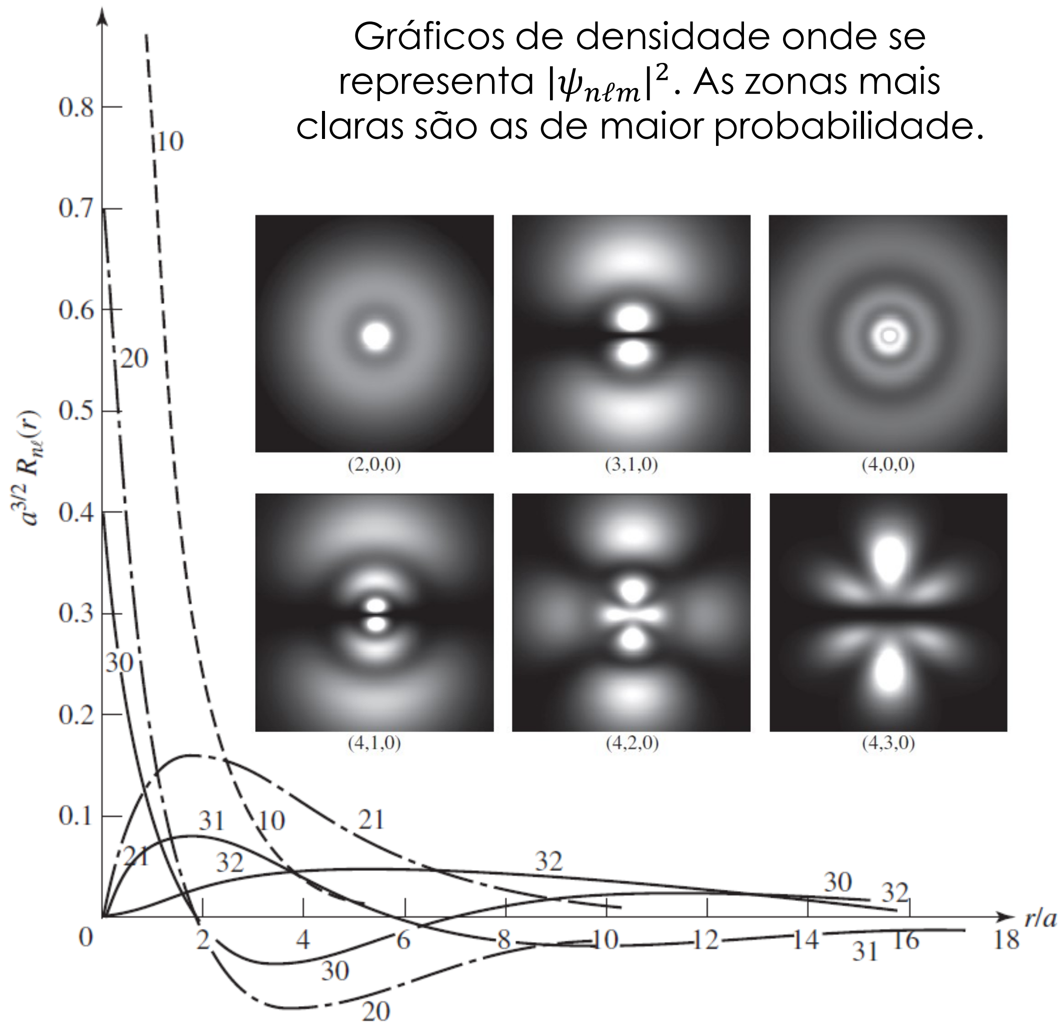
$$R_{41} = \frac{5}{16\sqrt{15}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{r}{a}+\frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\left(\frac{r}{a}\right)\exp(-r/4a)$$

$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1-\frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2\exp(-r/4a)$$

$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3\exp(-r/4a)$$

- Número de nodos radiais: $N-1 = n-\ell-1$

Gráficos de densidade onde se representa $|\psi_{n\ell m}|^2$. As zonas mais claras são as de maior probabilidade.



O ÁTOMO DE HIDROGÉNIO

- No cálculo que realizámos desprezámos os efeitos da massa do protão. Resolvendo o problema em função da coordenada do centro de massa e da posição relativa do protão e do eletrão teríamos:

$$m_e \to \mu = \frac{m_e m_p}{me + m_p} \longrightarrow E_n = -\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right)^{-1} \frac{\mathcal{R}}{n^2} \simeq -\left(1 - \frac{m_e}{m_p}\right) \frac{\mathcal{R}}{n^2}$$

$\mathcal{R} = m_e e^4/(2\hbar^2) = 13.6\,\mathrm{eV}$ - Constante de Rydberg

- Para átomos (iões) hidrogenóides com número atómico Z (H, He^+, Li^{2+}, Be^{3+} ...)

$$e^2 \to Ze^2 \longrightarrow E_n = -\frac{m_e(Ze^2)^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{Z^2 E_0}{n^2}$$

Raio de Bohr: $a_0 = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \to a = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Zm_e e^2} = a_0/Z$

Nas funções radiais deve considerar-se $a = a_0/Z$

Valores médios de potências de r:

$$\begin{aligned}
\langle nlm|r^k|nlm\rangle &= \int r^k|\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)|^2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^\infty r^{k+2}|R_{nl}(r)|^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{lm}(\theta,\varphi)\, d\varphi \\
&= \int_0^\infty r^{k+2}|R_{nl}(r)|^2 dr \\
&= \langle nl\mid r^k|nl\rangle.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\langle nl|\, r\, |nl\rangle &= \frac{1}{2}\left[3n^2 - l(l+1)\right]a_0, \\
\langle nl|\, r^2\, |\, nl\rangle &= \frac{1}{2}n^2\left[5n^2+1-3l\,(l+1)\right]a_0^2 \\
\langle nl|r^{-1}|nl\rangle &= \frac{1}{n^2\, a_0}, \\
\langle nl|r^{-2}|nl\rangle &= \frac{2}{n^3(2l\ +1)a_0^2},
\end{aligned}}$$

Não esquecer que todas as integrações são agora feitas a 3-D.

$$\int [\ldots] d\vec{r} = \int [\ldots] r^2 dr d\Omega$$

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\ldots]\, r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$