Data: 04 de Maio 2021 (18h30)
Duração: 1h30 (+5' tol. + 10' subm.)
Docentes: Hugo Terças e Pedro Cosme

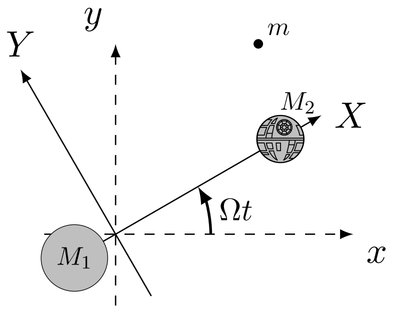
Mecânica Analítica

MEFT 2020/21

TESTE I

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente todos os cálculos que efectuar.

Questão 1. [10 val] *Problema de três corpos restrito* — Comece por considerar um sistema de duas massas que, interagindo graviticamente, descrevem órbitas circulares em torno do seu baricentro (centro de massa) com frequência angular Ω. Suponha agora que, num determinado momento, se introduz um terceiro corpo de massa $m \ll M_1, M_2$. Neste tipo de problema a três corpos é conveniente estudarmos o sistema num referencial em rotação (dito referencial *sinódico*) centrado no baricentro (vamos considerá-lo próximo de M_1) e em que o eixo X é dirigido para a segunda massa M_2 tal como ilustrado na figura.



a) [2 val] Argumente que o Langrangeano para a massa m pode ser escrito, nas coordenadas do referencial inercial (x, y), como

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right] - m\phi(x \cos \Omega t - y \sin \Omega t, x \sin \Omega t + y \cos \Omega t, z)$$

b) [2 val] Relembre o teorema de Nöther. Num sistema invariante para transformações

$$Q_i(\epsilon, t) = q_i(t) + \epsilon \eta_i(t), \quad \tau(\epsilon, t) = t + \epsilon \psi(t).$$

a quantidade

$$\mathcal{J}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i \psi - \eta_i) - \psi L$$

é conservada. Recorrendo ao teorema de Nöther e sabendo que sistema em análise é invariante para translações no tempo ($\psi(t) = 1$) e rotações no plano xy em simultâneo. Mostre que o *Integral de Jacobi*,

$$C_J = \frac{m}{2} \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right] + m\phi - m\Omega(x\dot{y} - y\dot{x}) = E - \Omega L_z,$$

é uma quantidade conservada. Disserte sobre a existência, ou não, de outras quantidades conservadas, abordando a conexão entre as invariancias de translação temporal e a rotação neste sistema.

c) [1 val] Mostre que no referencial sinódico o Lagrangeno se escreve:

$$L(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, Z, \dot{Z}) = \frac{1}{2}m\left[(\dot{X} - \Omega Y)^2 + (\dot{Y} + \Omega X)^2 + \dot{Z}^2\right] - m\phi(X, Y, Z).$$

(*Sugestão: Utilize as transformações de velocidades para referenciais em rotação.*)

d) [3 val] Determinar analiticamente os pontos de equilíbrio deste sistema (os famosos cinco pontos de Lagrange) é uma tarefa complicada. Procuremos dois deles num regime em que $M_2 \ll M_1$, na proximidade da massa secundária. Em unidades normalizadas ($G = 1$, $M_1 = 1 - \mu$ e $M_2 = \mu$), a distância entre as massas M_1 e M_2 é igual a um. Pode demonstar-se que, em termos de novas coordenadas auxiliares definidas a partir do corpo secundário, $\xi = X - (1+\mu)$ e $\eta = Y$ (que resultam de definir $X_1 = -\mu$ e $X_2 = 1 + \mu$), as equações de movimento podem ser aproximadas pelas equações de Hill,

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{\partial U_{\rm H}}{\partial \xi},$$
$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \frac{\partial U_{\rm H}}{\partial \eta},$$

com $U_{\rm H} = \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{\mu}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$.

(i) Determine os pontos de equilíbrio do pseudo-potencial de Hill com $\eta = 0$ e $\xi \neq 0$. Estes são os pontos de Lagrange L_1 e L_2.

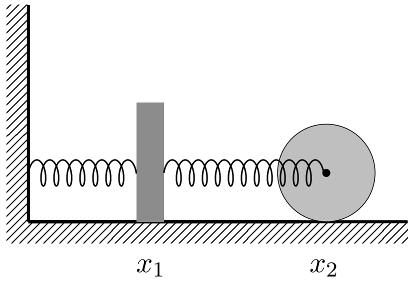
(ii) Obtenha a matriz Hessiana de $U_{\rm H}$ e mostre que os pontos L_1 e L_2 são pontos de sela.

e) [2 val] Determine as frequências próprias da aproximação de Hill fazendo uma perturbação em torno dos pontos de Lagrange, $\xi = \xi_0 + \xi'$ e $\eta = 0 + \eta'$, sabendo que, na vizinhança de ambos os pontos L_1 e L_2, se tem

$$\left.\frac{\partial U_{\rm H}}{\partial \xi}\right|_0 \simeq 9\xi' \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial U_{\rm H}}{\partial \eta}\right|_0 \simeq 3\eta'.$$

Comente o resultado à luz da alínea anterior.

Questão 2. [10 val] *Rola, mas não deslizes!* — Considere um disco de massa m_d e raio R, com momento de inércia I em relação ao seu centro de massa. O disco rola, sem deslizar, sobre a superfície horizontal e encontra-se ligado a uma barra de massa m através de uma mola. Esta, por sua vez, também se encontra ligada à origem através de uma mola e considera-se que mantém sempre a sua posição vertical, conforme representado na figura ao lado. Assumimos que as molas são iguais, de constante elástica k e comprimento natural ℓ, e designemos x_1 e x_2 as posições da barra e do centro de massa do disco, respectivamente.



a) [2 val] Mostre que o Lagrangeano do sistema é dado por,

$$L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\mathcal{M}\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k\left(x_1 - \ell\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(x_2 - x_1 - \ell\right)^2,$$

determinando explicitamente a constante $\mathcal{M}$. Que quantidade(s) se conserva(m)?

b) [2 val] Determine o(s) ponto(s) de equilíbrio e classifique-os quanto às sua estabilidade.

c) [2 val] Recorra ao formalismo das pequenas oscilações para mostrar que as frequências próprias de vibração do sistema são dadas por

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{1 + 2\eta \pm \sqrt{1 + 4\eta^2}}{2\eta},$$

onde $\omega_0^2 = k/m$ e $\eta = \mathcal{M}/m$. Discuta fisicamente os modos próprios (não precisa calcular os vectores próprios).

d) [2 val] Usando o métodos dos multiplicadores de Lagrange, mostre que (o módulo) da força de ligação que assegura a condição de não-delizamento é

$$Q_x^\lambda = \frac{Im}{R^2\mathcal{M}}\omega_0^2\left(x_1 - x_2 + \ell\right).$$

e) [2 val] Considere agora a situação onde a mola mais à esquerda é removida (i.e. assuma que a barra apenas se encontra ligada ao disco). Construa o problema do potencial central equivalente definindo $\xi = x_2 - x_1$ e $X = (mx_1 + \mathcal{M}x_2)/(m + \mathcal{M})$, mostrando que existe uma quantidade nova que agora é conservada. Conclua mostrando que, caso o sistema parta do repouso, a velocidade angular do disco é dada por

$$\dot{\varphi} = -\frac{m}{\mathcal{M}}\frac{\dot{x}_1}{R}.$$