# Cálculo Diferencial e Integral I

Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

1º Exame - 12 de Janeiro de 2008 - 13h00m

**Solução**

**Problema 1** (0,5 val.) Seja $f(x) = \log(\,3 - |x-2|\,) + \sqrt{3-x}$.

(a) Determine o domínio de $f$.

Resolução: As condições a satisfazer são:

$$3 - |x-2| > 0 \text{ e } 3 - x \geq 0 \Longleftrightarrow |x-2| < 3 \text{ e } x \leq 3 \Longleftrightarrow -1 < x < 5 \text{ e } x \leq 3$$

Concluímos que $Df = ]-1, 3]$

(b) Determine, se existirem, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo de $Df$.

Resolução: É claro que máximo = supremo = 3, ínfimo = -1, mínimo não existe.

**Problema 2** (1,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = xe^{-x}$.

(a) Determine os intervalos de monotonia de $f$.

Resolução: $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. O sinal de $f'(x)$ é o sinal de $1-x$, porque a exponencial é sempre positiva, e portanto,

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Concluímos que:

- $f$ é crescente no intervalo $]-\infty, 1]$, e
- $f$ é decrescente no intervalo $[1, +\infty[$.

(b) Estude a concavidade de $f$.

Resolução: $f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. O sinal de $f''(x)$ é o sinal de $x-2$, porque a exponencial é sempre positiva, e portanto,

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2, f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2, f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Concluímos que:

- $f$ tem a concavidade para baixo (como $-x^2$) no intervalo $]-\infty, 2]$, e
- $f$ tem a concavidade para cima (como $x^2$) no intervalo $[2, +\infty[$.
- Notamos que $f$ tem um ponto de inflexão em $x = 2$.

(c) Determine as assímptotas do gráfico de $f$, se existirem.

RESOLUÇÃO: $f$ é contínua em $\mathbb{R}$, e portanto certamente não tem assímptotas verticais. Para determinar outras assímptotas, calculamos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty, \text{ e}$$

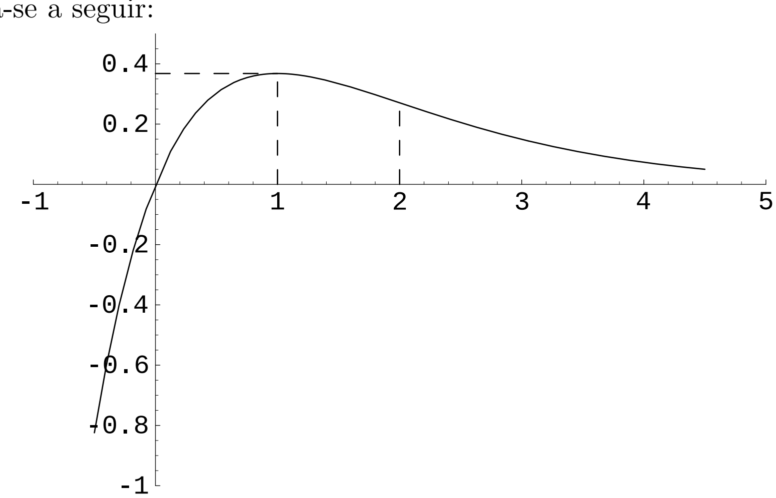
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

Concluímos que $f$ não tem assímptota à esquerda, e a assímptota à direita, se existir, é uma recta horizontal. Notamos finalmente que a recta $y = 0$ é uma assímptota horizontal à direita de $f$ porque (pela regra de Cauchy)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(d) Determine os extremos de $f$, se existirem, e esboce o gráfico de $f$.

RESOLUÇÃO: É claro de (a) que $f$ tem um máximo absoluto em $x = 1$. O gráfico de $f$ apresenta-se a seguir:




**Problema 3** (0,5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{se} \quad x \geq 0 \\ b \operatorname{sen} x + 2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) Determine as constantes $a$ e $b$ para as quais $f$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução: A função $f$ é certamente contínua em qualquer $x \neq 0$. Observamos que $f(0) = a$, e calculamos os limites laterais em 0:

- À direita de 0: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + a = a$, e
- À esquerda de 0: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} b \operatorname{sen} x + 2 = 2$.

A função $f$ é contínua em $x = 0$ (e portanto em $\mathbb{R}$) se e só se

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0),$$

ou seja, se e só se $a = 2$. O valor de $b$ é inteiramente arbitrário.

(b) Determine as constantes $a$ e $b$ para as quais $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Resolução: A função $f$ é certamente diferenciável em qualquer $x \neq 0$, e é necessário que seja contínua em $x = 0$ para que possa ser também diferenciável em $x = 0$. Pela alínea anterior, concluímos que $a = 2$, e em particular, $f(0) = 2$. Temos

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x},$$

e passamos a calcular os dois limites laterais correspondentes, a saber:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ e } \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{b \operatorname{sen}(x)}{x} = b.$$

A função $f$ é diferenciável em $x = 0$ (e portanto em $\mathbb{R}$) se e só se $a = 2$ e $b = 1$.

**Problema 4** (0,5 val.) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} \qquad\qquad (b)\ \lim_{x \to 0} x e^{1/x}$$

Resolução: Calculamos o limite em (a) usando a regra de Cauchy:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + x^2} = 1.$$

Para determinar o limite em (b), notamos que

$$\lim_{x \to 0^+} x e^{1/x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}, \text{ e } \lim_{x \to 0^-} x e^{1/x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

Como temos pela regra de Cauchy que

$$\lim_{x \to 0^+} x e^{1/x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty,$$

concluímos que $\lim_{x\to 0} xe^{1/x}$ não existe, porque como acabámos de ver

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = +\infty \neq \lim_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0.$$

**Problema 5** (1 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = (\operatorname{sen}(e^x))^3 \qquad (b)\ g(x) = \int_1^{x^3} \cos(t^4)\,dt \qquad (c)\ h(x) = x^{\operatorname{sen}(x)}$$

RESOLUÇÃO:

(a) Temos $f(x) = u^3$, onde $u = \operatorname{sen}(v)$ e $v = e^x$. Concluímos que

$$f'(x) = 3u^2 \cdot \cos(v) \cdot e^x = 3 \cdot (\operatorname{sen}(e^x))^2 \cdot \cos(e^x) \cdot e^x$$

(b) Temos $g(x) = \displaystyle\int_1^u \cos(t^4)\,dt$, onde $u = x^3$. Concluímos que

$$g'(x) = \cos(u^4) \cdot 3x^2 = \cos(x^{12}) \cdot 3x^2$$

(c) Temos

$$h(x) = x^{\operatorname{sen}(x)} = e^{\log(x)\operatorname{sen}(x)}, \text{ donde } y = e^u, u = \log(x)\operatorname{sen}(x).$$

Concluímos que

$$h'(x) = e^u \cdot (\frac{1}{x}\operatorname{sen}(x) + \log(x)\cos(x)) = x^{\operatorname{sen}(x)} \cdot (\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} + \log(x)\cos(x)).$$

**Problema 6** (1,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \frac{\cos(\log x)}{x} \qquad (b)\ g(x) = x^5 \log x \qquad (c)\ h(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

(d) Calcule o integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$. O integral é superior ou inferior a $\log(\sqrt{2})$?

RESOLUÇÃO:

(a) Usamos a substituição $u = \log(x)$, $du = \frac{dx}{x}$, para obter:

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x}dx = \int \cos(u)du = \operatorname{sen}(u) = \operatorname{sen}(\log(x)).$$

(b) Primitivamos por partes, com $f'(x) = x^5$ e $g(x) = \log(x)$, para obter:

$$\int x^5 \log x dx = \frac{x^6}{6}\log(x) - \int \frac{x^6}{6}\frac{1}{x}dx = \frac{x^6}{6}\log(x) - \int \frac{x^5}{6}dx = \frac{x^6}{6}\log(x) - \frac{x^6}{36}.$$

(c) Como $h$ é uma função racional própria, e o denominador só tem factores irredutíveis do 1º grau, sem repetições, temos:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}, \text{ donde } 1 = A(x+1) + Bx.$$

Tomando $x = -1$ obtemos $1 = -B$, e com $x = 0$ temos $1 = A$. Segue-se que:

$$\int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx = \log(|x|) - \log(|x+1|) = \log(|\frac{x}{x+1}|).$$

(d) Pela regra de Barrow,

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx = \log(|\frac{2}{2+1}|) - \log(|\frac{1}{1+1}|) = \log(|\frac{2}{3}|) - \log(|\frac{1}{2}|) = \log(\frac{2/3}{1/2}) = \log(\frac{4}{3})$$

Como $\frac{4}{3} = 1,333\cdots < \sqrt{2}$, é claro que

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx = \log(\frac{4}{3}) < \log(\sqrt{2}).$$

**Problema 7** (1 val.) Calcule a área da região do plano delimitada pelas curvas

$$y = (x-2)^2 \text{ e } y = x.$$

A área da região em causa é superior ou inferior a 4?

Resolução: As linhas de equações $y = (x-2)^2$ e $y = x$ intersectam-se nos pontos com abcissa $x$, onde $x = (x-2)^2$. Temos

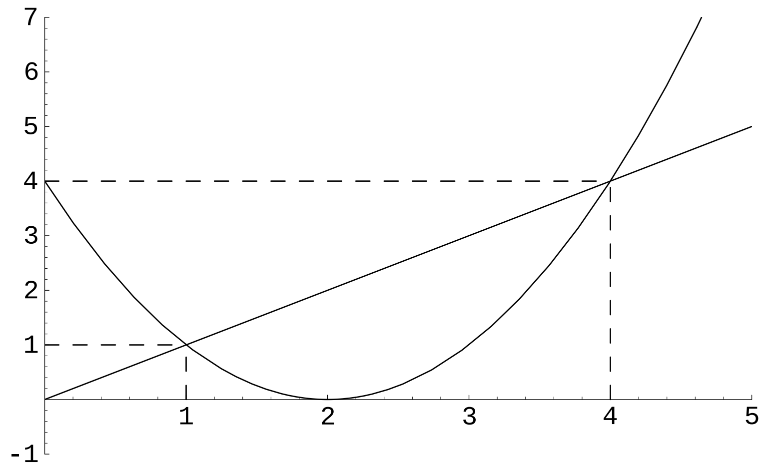
$$x = (x-2)^2 \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Os pontos de intersecção são portanto em $x = 1$ e em $x = 4$. A recta está por cima da parábola no intervalo $[1,4]$, e a área em questão $A$ é dada por:

$$A = \int_1^4 x - (x^2 - 4x + 4)dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)dx = (-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x)|_1^4 =$$

$$= (-\frac{4^3}{3} + \frac{5 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot 4) - (-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4) =$$

$$-\frac{64}{3} + 40 - 16 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 = -\frac{63}{3} + 28 - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} = 5 - \frac{1}{2} > 4$$




**Problema 8** (1 val.) Considere a usual função trigonométrica *secante*, dada por

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Para efeitos desta questão, suponha que $x$ pertence ao intervalo $I = [0, \pi/2[$.

(a) Mostre que sec é injectiva no intervalo $I$, e mostre que a imagem $\sec(I)$ é o intervalo $J = [1, +\infty[$.

RESOLUÇÃO: A função coseno é contínua e estritamente decrescente no intervalo $[0, \pi/2]$, onde diminui de $1 = \cos(0)$ para $0 = \cos(\pi/2)$. A função secante é portanto contínua e estritamente crescente no intervalo $[0, \pi/2[$. Como $\sec(0) = 1$ e $\lim_{x\to\pi/2} \sec(x) = +\infty$ segue-se do teorema do valor intermédio que $\sec(I) = [1, +\infty[= J$.

(b) Sendo arcsec a função inversa de sec definida no intervalo $J$, calcule a derivada de arcsec nos pontos onde essa derivada existe.

RESOLUÇÃO: Sabemos que a função inversa $\text{arcsec} : J \to I$ é diferenciável no ponto $x \in J$ se e só se a função $\sec : I \to J$ é diferenciável em $\theta = \text{arcsec}(x)$, e $\sec'(\theta) \neq 0$. Neste caso, temos:

$$\text{arcsec}'(x) = \frac{1}{\sec'(\theta)}, \text{ onde}$$

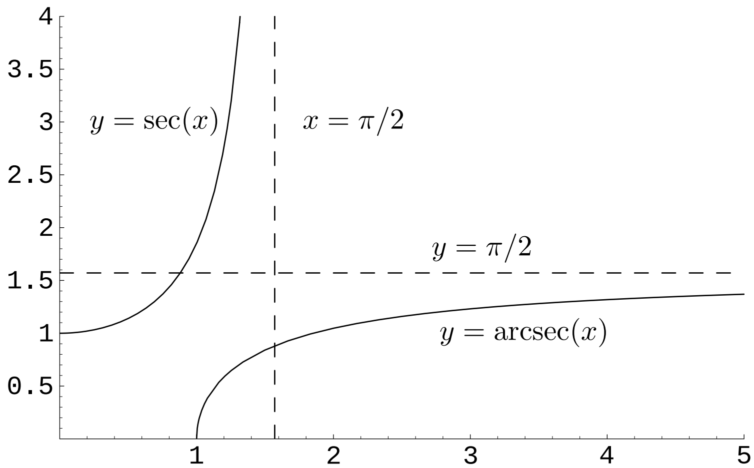
$$\sec'(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \sec(\theta)\tan(\theta) = \sec(\theta)\sqrt{\sec^2(\theta) - 1}$$

Como $\theta = \text{arcsec}(x)$ temos $x = \sec(\theta)$, e portanto

$$\text{arcsec}'(x) = \frac{1}{\sec'(\theta)} = \frac{1}{\sec(\theta)\sqrt{\sec^2(\theta)-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(c) Esboce o gráfico de arcsec.

RESOLUÇÃO: Esboçamos abaixo os gráficos de arcsec (e de sec) nos intervalos em causa, com as respectivas assímptotas:




**Problema 9** (1 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k!} \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+1} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$$

RESOLUÇÃO:

(a) Usamos o critério da razão:

$$a_k = \frac{\sqrt{k}}{k!}, \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!\sqrt{k+1}}{(k+1)!\sqrt{k}} = \frac{1}{k+1}\sqrt{\frac{k+1}{k}} \to 0 \times 1 = 0$$

Concluímos que a série é convergente (e absolutamente convergente, já que é não negativa).

(b) Comparamos a série dada com a série de Dirichlet convergente $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}$:

$$a_k = \frac{\sqrt{k}}{k^2+1}, b_k = \frac{1}{k^{3/2}}, \frac{a_k}{b_k} = \frac{k^{3/2}\sqrt{k}}{(k^2+1} = \frac{k^2}{k^2+1} \to 1$$

Concluímos que a série é convergente (e absolutamente convergente, já que é não negativa).

(c) A série dada é alternada, $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$. Como $|a_k| = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \to 0$ e é decrescente, segue-se do critério de Leibniz que a série converge. Notamos no entanto que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$$

é uma série de Dirichlet divergente, porque $1/3 < 1$, e portanto a série original é simplesmente convergente.

Resolução:

**Problema 10** (1 val.) Determine a série de Taylor no ponto $a = 0$ das seguintes funções:

$(a)$ $f(x) = e^x$  $(b)$ $g(x) = x^2 e^{x^2}$  $(c)$ $u(x) = \dfrac{1}{1-x}$  $(d)$ $v(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

Resolução:

A série de Taylor da função $f$ no ponto $x = 0$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

(a) Se $f(x) = e^x$ então $f^{(n)}(x) = e^x$ e $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. A série de Taylor é portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Recorde-se que na realidade

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}$$

(b) Temos da alínea anterior que

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \text{ donde}$$

$$x^2 e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^2 \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n-1)!}$$

(c) A fórmula usual para a soma de uma série geométrica mostra que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R} \text{ com } |x| < 1.$$

(d) Segue-se da alínea anterior que

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{1-(-x^4)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}.$$

RESOLUÇÃO:

**Problema 11** (0,5 val.) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

.

(a) Determine o raio de convergência desta série, aqui designado $R$.

RESOLUÇÃO: Aplicamos o critério da razão à série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{n}$:

$$a_n = \frac{|x|^{2n}}{n}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n|x|^{n+1}}{(n+1)|x|^n} = \frac{n}{n+1}|x| \to |x|$$

Concluímos que a série é absolutamente convergente se $|x| < 1$, e divergente se $|x| > 1$. O raio de convergência é portanto $R = 1$.

(b) Sendo $f$ a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}, \text{ para } |x| < R,$$

mostre que $f$ tem um mínimo em $x = 0$.

RESOLUÇÃO: A série em causa é a série de Taylor de $f$ em $x = 0$, donde

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n} = x^2 + \cdots = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \cdots$$

Como $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(0) = 2 > 0$, a função $f$ tem um mínimo em $x = 0$.

(c) Calcule a função $f$ (sugestão: calcule primeiro a derivada $f'$).

RESOLUÇÃO: As séries de potências podem ser diferenciadas termo a termo, e portanto

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2nx^{2n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2x^{2n-1}.$$

A série de $f'$ é uma série geométrica, com primeiro termo $a = 2x$, e razão $r = -x^2$, donde

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2x^{2n-1} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Segue-se que (com a substituição $u = 1 + x^2$)

$$f(x) = \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{u} du = \log(u) + C = \log(1+x^2) + C$$

Como $f(0) = C = 0$, concluímos então que

$$f(x) = \log(1+x^2), \text{ para } |x| < R$$