PRODUTOS INTERNOS EM ESPAÇOS LINEARES DE DIMENSÃO FINITA

Matrizes de Gram

e

matrizes definidas positivas

Num espaço euclidiano V chama-se **matriz de Gram** de vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ a $G = \left[\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle\right]_{i,j=1}^{k,k}$.

Diz-se que uma matriz quadrada A é **simétrica** se $A = A^t$; diz-se que é **hermitiana** se é complexa e $A = A^*$ ($A^* = \overline{A}^t$, chama-se **adjunta** de A).

Matrizes de Gram são **simétricas** em esp. lineares reais e **hermitianas** em esp. lineares complexos.

Uma matriz $n \times n$ A com componentes em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, respect., simétrica ou hermitiana, diz-se:
(1) **definida positiva** se $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} > 0$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$;
(2) **semidefinida positiva** se $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} \geq 0$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$;
(3) **definida negativa** se $-A$ é definida positiva;
(4) **semidefinida negativa** se $-A$ é semidefinida positiva;
(5) **indefinida** se $\mathbf{x}^* A \mathbf{x}$ assume valores > 0 e < 0.

Matrizes de Gram são **definidas positivas** se e só se os vectores são lin. independentes.

Dem. $\mathbf{x}^* G \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{k} \overline{x_i} x_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{v}_j, \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{v}_i \rangle = \| \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{v}_j \|^2 = 0$ para algum $\mathbf{x} \neq 0$ se e só se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ lin. dependentes. *Q.E.D.*

PRODUTOS INTERNOS EM DIMENSÃO FINITA

Matrizes de Gram, hermitianas, definidas positivas

Os produtos internos em espaços lineares de dimensão finita V são $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = Y^*GX$, com X, Y matrizes coluna com as componentes de, respect., $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ numa base de V, e G simétrica ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitiana ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), e definida positiva; G é matriz de Gram da base.

Dem. Seja $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ uma base de V.

Se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = Y^*GX$ é produto interno, $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{e_i}^t G \mathbf{e_j} = g_{ij}$;
logo, G é a matriz de Gram da base.
Portanto, G é simétrica ou hermitiana, e definida positiva.

Se G é hermitiana e definida positiva, então $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto Y^*GX$ satisfaz:
(1) linearidade em $\mathbf{x}$ com $\mathbf{y}$ fixo.
(2) simetria hermitiana $\left(X^*GY = (X^*GY)^t = Y^t G^t \overline{X} = \overline{Y^* G^* X} = \overline{Y^* GX} \right)$
a 1ª porque é 1×1, a 4ª porque $G^* = G$.
(3) positividade, pois G é definida positiva. Logo, é produto interno.
Como início, G é a matriz de Gram da base neste produto interno. *Q.E.D.*

Matriz G $n\times n$ real ou complexa, respect. simétrica ou hermitiana. G é definida positiva se e só se é regular e com eliminação de Gauss (sem troca de linhas) obtêm-se n pivots >0 (G é não singular)

Dem. $\Rightarrow$ Se G é hermitiana e definida positiva, com matrizes coluna X_k com todas as componentes $=0$ excepto as 1ªs k, é $X_k^* G X_k > 0$ para $X_k \neq 0$. Logo $\mathcal{N}(G_k) = \{0\}$ e G_k é não singular. Logo, G é regular.

Eliminação de Gauss dá factorização triangular $G = LDU$ com n pivots.
$G^* = (LDU)^* = U^* D^* L^*$. Unicidade dá $L = U^*, D = D^*, U = L^*$.
Com $Y = UX$ é $Y^* = X^* U^*$.
Logo, $Y^* D Y = X^* U^* D U X = X^* L D U X = X^* G X > 0$ se $X \neq 0 \Leftrightarrow Y \neq 0$ pois U é não singular. Logo, $d_{jj} = \mathbf{e_j}^t D \mathbf{e_j} > 0$.

$\Leftarrow$ Se G é simétrica ou hermitiana, regular e com eliminação de Gauss obtêm-se n pivots >0, então como antes $X^* G X = Y^* D Y$.
Como $d_{jj} > 0$, é $Y^* D Y = \sum_{j=1}^n |y_j|^2 d_{jj} > 0$ se $Y \neq 0 \Leftrightarrow X \neq 0$.
Portanto, G é definida positiva. *Q.E.D.*

Matriz G $n \times n$ real ou complexa, respect. simétrica ou hermitiana. G é definida negativa se e só se é regular e com eliminação de Gauss (sem troca de linhas) obtêm-se n pivots < 0 (G é não singular)

Dem. Precedente aplicado a $-A$. *Q.E.D.*

Pode-se provar que:

Se G $n \times n$ real ou complexa, respect., simétrica ou hermitiana, então:

1. G é semidefinida positiva (respect. negativa) se e só se os $k < n$ pivots obtidos por eliminação de Gauss são > 0 (respect. < 0).
2. G é indefinida se tem pivots > 0 e pivots < 0.