Matemática Computacional

MEBiol, MEBiom, MEFT, MEQ, MEM

2º Teste

Duração: 60 minutos 17/12/2020 – 19:00

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas.

1. Considere a função f dada pela tabela

x	1	1.5	2	3
$f(x)$	1	a	3	7

(a) [1.5] Seja g a função da forma

$$g(x) = C_1 + C_2(x-2)^3$$

que melhor aproxima f, no sentido dos mínimos quadrados, nos pontos $1, 2$ e 3. Determine b sabendo que $g(b) = 5$.

(b) [1.5] Supondo que f é um polinómio de segundo grau, determine o valor de a e $f[1, 1.5, 2]$.

(c) [1.5] Calcule aproximações de

$$\mathscr{I} = \int_1^3 (f(x) - x)\,dx$$

com base nos valores da tabela e utilizando:

i) a regra dos trapézios composta;

ii) a regra de Simpson.

(d) [1.5] Supondo de novo que f é um polinómio de segundo grau, calcule o erro absoluto de cada uma das aproximações de $\mathscr{I}$ obtidas na alínea anterior.

2. Considere o problema de valor inicial

$$y'(x) = y(x) - x^2 + 2, \qquad y(0) = 0.$$

Para aproximar a solução, pretende-se utilizar um método numérico, com a seguinte fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + h(y_i - x_i^2 + 2) + h^2(\alpha x_i^2 - x_i + \beta y_i + \gamma), \tag{1}$$

onde α, β e γ são números reais.

(a) [1.5] Determine α, β e γ de modo a que o método (1) coincida com um dos métodos estudados. Diga, justificando, de que método se trata.

(b) [1.0] Efetuando apenas um passo do método (1) obtenha um valor aproximado de $y(h)$. Se não resolveu a alínea anterior, assuma que $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

(c) [1.5] Sabendo que a solução do problema de valor inicial considerado é um polinómio de segundo grau, diga justificando qual é o erro do resultado obtido na alínea anterior.

RESOLUÇÃO

1.

(a) De acordo com o enunciado, as funções de base para o método dos mínimos quadrados são:

$$\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = (x-2)^3.$$

Calculemos os produtos internos para a construção do sistema normal:

$$(\phi_0, \phi_0) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$(\phi_0, \phi_1) = -1 + 0 + 1 = 0,$$

$$(\phi_1, \phi_1) = 1 + 0 + 1 = 2,$$

$$(f, \phi_0) = 1 + 3 + 7 = 11,$$

$$(f, \phi_1) = 1 \times (-1) + 3 \times 0 + 7 \times 1 = 6.$$

Logo, o sistema normal tem a forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, resolvendo o sistema, obtém-se

$$C_1 = 11/3, \qquad C_2 = 6/2 = 3.$$

e, portanto, a função de ajustamento é

$$g(x) = 11/3 + 3(x-2)^3.$$

Agora, é necessário resolver a equação $g(b) = 5$:

$$g(b) = 11/3 + 3(b-2)^3 = 5 \iff 3(b-2)^3 = 4/3 \iff (b-2)^3 = 4/9 \iff b = 2 + \sqrt[3]{4/9}.$$

(b) Se f é um polinómio de segundo grau, então a sua segunda derivada é constante, e todas as diferenças divididas de segunda ordem são iguais entre si. Podemos usar este facto para determinar a.

Diferenças de primeira ordem:

$$f[1, 1.5] = \frac{a-1}{1.5-1} = 2a - 2; \quad f[1.5, 2] = \frac{3-a}{2-1.5} = 6 - 2a; \quad f[2, 3] = \frac{7-3}{3-2} = 4.$$

Diferenças de segunda ordem ordem:

$$f[1, 1.5, 2] = \frac{f[1.5, 2] - f[1, 1.5]}{2-1} = 8 - 4a; \quad f[1.5, 2, 3] = \frac{f[2, 3] - f[1.5, 2]}{3-1.5} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}a.$$

Logo, a pode ser determinado a partir da equação:

$$8 - 4a = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}a.$$

Resolvendo obtém-se que $a = 7/4$.

Finalmente, para obter $f[1, 1.5, 2]$ usa-se a fórmula das diferenças divididas e o valor de a:

$$f[1, 1.5, 2] = \frac{f[1.5, 2] - f[1, 1.5]}{2-1} = 8 - 4a = 8 - 7 = 1.$$

(c) Em ambos os casos, temos $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$. Logo, $h = 1$.

(i) Regra dos trapézios composta:

$$T_2(f) = \frac{h}{2}\big((f(1)-1) + 2(f(2)-2) + (f(3)-3)\big) = \frac{1}{2}(0+2+4) = 3.$$

(ii) Regra de Simpson simples:

$$S(f) = \frac{h}{3}\big((f(1)-1) + 4(f(2)-2) + (f(3)-3)\big) = \frac{1}{3}(0+4+4) = \frac{8}{3}.$$

(d) Sendo f um polinómio de segundo grau, então a regra de Simpson é exata, ou seja

$$I(f) = S(f) = \frac{8}{3},$$

logo o erro desta aproximação é $E_S(f) = 0$ (o erro absoluto também é zero, claro).

Em relação à regra dos trapézios, o seu erro absoluto é:

$$|E_{T_2}(f)| = |I(f) - T_2(f)| = \left|\frac{8}{3} - 3\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}.$$

2.

(a) Da fórmula apresentada deduz-se que se trata de um método de segunda ordem. Suponhamos que se trata do método de Taylor. Necessitamos das derivadas parciais de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) = -2x_i, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) = 1.$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) f(x_i, y_i) = -2x_i + y_i - x_i^2 + 2.$$

Da igualdade

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) f(x_i, y_i)\right) = \frac{1}{2}\left(-2x_i + y_i - x_i^2 + 2\right) = -x_i + \alpha x_i^2 + \beta y_i + \gamma$$

resulta que

$$\alpha x_i^2 = -x_i^2/2, \quad \beta y_i = y_i/2, \quad \gamma = 1.$$

Logo, a fórmula proposta corresponde ao método de Taylor de segunda ordem, desde que seja $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$.

(b) Efetuando um passo do método de Taylor de segunda ordem, ou seja, o método (1) com $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, dá:

$$y(h) = y(x_1) \approx y_1 = y_0 + h(y_0 - x_0^2 + 2) + h^2(-x_0 + \alpha x_0^2 + \beta y_0 + \gamma) = 2h + \gamma h^2 = 2h + h^2,$$

uma vez que $x_0 = y_0 = 0$.

(c) O método de Taylor de segunda ordem é exato quando a solução do problema de valor inicial é um polinómio de segundo grau, já que $y^{(3)} \equiv 0$ permite obter sucessivamente os valores exatos $y(x_1)$, $y(x_2)$, ..., nos pontos $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, a partir do valor exato para $y(x_0)$:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) \\ &= y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)) f(x_i, y(x_i))\right] \end{aligned}$$

Portanto, neste caso o erro é 0, ou seja, tem-se $y(h) = y_1 = 2h + h^2$.