Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais
1^{o} Semestre de 2011/2012
1^{o} Teste - Versão A

(CURSOS: LEAN, LEIC-A, MEAER, MEEC, MEMEC)

5 de Novembro de 2011, 10h,

Duração: 1h 30m

1. Considere a função $u(x,y) = x\alpha(y) + x^3$ onde $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2.

   (a) Determine todas as funções α tais que $u(x,y)$ é a parte real de uma função analítica em $\mathbb{C}$.

   (b) Para $\alpha(y) = -3y^2 + y$, e f uma função analítica com $\mathrm{Re}(f) = u$, calcule $f''(1+i)$.

   Resolução:

   (a) u é a parte real de uma função analítica em $\mathbb{C}$ sse é uma função harmónica, isto é, se $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$. Temos

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\alpha''(y)$$

   portanto u é harmónica sse

   $$x(\alpha''(y) + 6) = 0 \Leftrightarrow \alpha''(y) = -6 \Leftrightarrow \alpha'(y) = -6y + A \Leftrightarrow \alpha(y) = -3y^2 + Ay + B,$$

   onde A, B são números reais arbitrários.

   (b) A derivada de uma função complexa calcula-se derivando em ordem a x logo se $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ for uma função analítica, temos

   $$f''(x+iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y).$$

   As equações de Cauchy-Riemann garantem que

   $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\alpha'(y) = 6y - 1$$

   e portanto

   $$f''(1+i) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,1) - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(1,1) = 6 + 5i.$$

2. Calcule o integral
$$\int_\gamma z^2 + e^z \, dz$$
onde γ é o caminho definido pela expressão $\gamma(t) = i\pi e^{i\pi t}$ com $0 \leq t \leq 1$.

Resolução: Uma vez que
$$\frac{z^3}{3} + e^z$$
é uma primitiva para a função integranda, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos
$$\int_\gamma z^2 + e^z \, dz = \frac{z^3}{3} + e^z \Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = \frac{z^3}{3} + e^z \Big|_{i\pi}^{-i\pi} = \frac{2i\pi^3}{3}.$$

3. Considere a função $f \colon \mathbb{C} \setminus \{0, 2i\} \to \mathbb{C}$ definida pela expressão
$$f(z) = \frac{1}{z(z-2i)}$$

(a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent de $f(z)$ na região $|z - 2i| > 2$.

(b) Indique, justificando, a região de convergência do desenvolvimento de Taylor da função $f(z)$ em torno de $z_0 = 1 + i$.

Resolução:

(a) Pela fórmula para a soma de uma série geométrica temos
$$\begin{aligned}
\frac{1}{z(z-2i)} &= \frac{1}{z-2i} \frac{1}{2i + (z-2i)} \\
&= \frac{1}{(z-2i)^2} \frac{1}{1 + \frac{2i}{z-2i}} \\
&= \frac{1}{(z-2i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2i)^n}{(z-2i)^n} \quad \text{para} \quad \left| -\frac{2i}{z-2i} \right| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2i)^n}{(z-2i)^{n+2}} \text{ para } |z-2i| > 2.
\end{aligned}$$

(b) A série de Taylor de $f(z)$ em torno de $1+i$ converge no maior disco aberto centrado em $1+i$ contido no domínio de analiticidade de $f(z)$. O domínio de analiticidade de f é $\mathbb{C} \setminus \{0, 2i\}$ e $|1+i-0| = \sqrt{2}$, $|1+i-2| = \sqrt{2}$ logo a série converge em
$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z - 1 - i| < \sqrt{2}\}.$$

Uma vez que existem pontos na fronteira deste disco (0 e $2i$) nos quais $f(z)$ tende para infinito conclui-se que o raio de convergência da série de Taylor em $1+i$ não pode exceder $\sqrt{2}$ (pois a soma de uma série de potências é contínua no interior do disco de convergência).

Assim a região de convergência da série de Taylor é exactamente

$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z - 1 - i| < \sqrt{2}\}.$$

4. Para $z \in \mathbb{C}$, considere a função definida pela seguinte expressão

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{z} - \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} + (z-i)^2 e^{\frac{1}{z-i}}$$

   (a) Classifique as singularidades de $f(z)$ e calcule os respectivos resíduos.

   (b) Calcule o integral $\oint_{|z-\frac{1}{2}|=2} f(z)\, dz$ em que a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução:

(a) As singularidades de $f(z)$ são $0, 1, i$ e as soluções da equação

$$\operatorname{sen}(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \pi z = k\pi \Leftrightarrow z = k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, o conjunto das singularidades é $\{i\} \cup \mathbb{Z}$.

Podemos escrever $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + f_4(z)$ com $f_1(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$, $f_2(z) = \frac{1}{z}$, $f_3(z) = -\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ e $f_4(z) = (z-i)^2 e^{\frac{1}{z-i}}$.

Como f_1, f_2 e f_3 são diferenciáveis numa vizinhança de i, a parte singular (ou principal) do desenvolvimento de Laurent de f válido perto de i coincide com a parte singular do desenvolvimento de Laurent de $f_4(z)$. Temos

$$f_4(z) = (z-i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-i)^{n-2}}, \text{ para } z \neq i,$$

donde se conclui que i é uma singularidade essencial (há infinitos termos correspondentes a potências com expoente negativo). O resíduo é o coeficiente da potência $\frac{1}{z-i}$ que na série acima corresponde ao índice $n = 3$. Vemos assim que

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \operatorname{Res}(f_4, 0) = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade apenas de $f_2(z)$ e $f_3(z)$. Aplicando duas vezes a regra de Cauchy para calcular o limite temos

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 0} f_2(z) + f_3(z) &= \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} - \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi z) - \pi z}{z \operatorname{sen}(\pi z)} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{\pi \cos(\pi z) - \pi}{\operatorname{sen}(\pi z) + \pi z \cos(\pi z)} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{-\pi^2 \operatorname{sen}(\pi z)}{2\pi \cos(\pi z) - \pi^2 z \operatorname{sen}(\pi z)} = 0,
\end{aligned}$$

donde 0 é uma singularidade removível de $f_2(z)+f_3(z)$ e portanto de $f(z)$. Em particular, $\operatorname{Res}(f,0)=0$.

Os pontos $z_0=k$, são pólos simples de $f_3(z)$ uma vez que

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to k}(z-k)f_3(z) &= \lim_{z\to k} -\frac{\pi(z-k)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\\
&= \lim_{z\to k} -\frac{\pi}{\pi\cos(\pi z)}\\
&= (-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

onde, no cálculo do limite, usámos a regra de Cauchy. O limite anterior mostra ainda que $\operatorname{Res}(f_3,k)=(-1)^{k+1}$ para $k\in\mathbb{Z}$.

Se $k\notin\{0,1\}$ então $f_3(z)$ é o único termo que tem uma singularidade em k e portanto $z_0=k$ é um pólo simples de $f(z)$ com

$$\operatorname{Res}(f(z),k)=\operatorname{Res}(f_3(z),k)=(-1)^{k+1}\quad (k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\})$$

Se $z_0=1$, $f_1(z)$ tem um pólo de ordem 3 em z_0. Como f_3 tem um pólo simples e f_2 e f_4 são diferenciáveis, conclui-se que $f(z)$ tem também um pólo de ordem 3 em $z_0=1$ e

$$\operatorname{Res}(f(z),1)=\operatorname{Res}(f_1(z),1)+\operatorname{Res}(f_3(z),1)=0+1=1.$$

(b) Pelo Teorema dos Resíduos, temos

$$\begin{aligned}
\oint_{|z-\frac{1}{2}|=2} f(z)\,dz &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,-1)+\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,1)+\operatorname{Res}(f,2)+\operatorname{Res}(f,i)\right)\\
&= 2\pi i\left(1+0+1-1+\frac{1}{3!}\right)=\frac{7\pi i}{3}.
\end{aligned}$$

5. Use o Teorema dos Resíduos para calcular o integral

$$\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta.$$

Resolução: Uma vez que $\cos\theta$ é uma função par, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}\\
&= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\frac{dz}{iz}\\
&= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4z+1}dz,
\end{aligned}$$

em que a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo. Uma vez que

$$z^2+4z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=-2\pm\sqrt{3},$$

a única singularidade da função integranda no interior da circunferência é $z=-2+\sqrt{3}$. Como

$$\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}(z+2-\sqrt{3})\frac{1}{z^2+4z+1}=\lim_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

a singularidade é um pólo de ordem 1 com resíduo $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Pelo Teorema dos Resíduos conclui-se finalmente que

$$\int_0^\pi \frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta=\frac{1}{i}2\pi i\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

6. Seja f uma função analítica em $\mathbb{C}$. Supondo que existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Im}(f(z))<M$ para todo o $z\in\mathbb{C}$, mostre que f é constante. *Sugestão: Considere a função* $e^{-if(z)}$.

   Resolução: A função $e^{-if(z)}$ é também analítica em $\mathbb{C}$. Uma vez que

$$\left|e^{-if(z)}\right|=\left|e^{-i\,\mathrm{Re}\,f(z)+\mathrm{Im}\,f(z)}\right|=e^{\mathrm{Im}\,f(z)}\le e^M \text{ para todo o } z\in\mathbb{C}$$

   vemos que $e^{-if(z)}$ é limitada. O Teorema de Liouville garante então que $e^{-if(z)}$ é constante.

   Sendo $e^{-if(z)}=A$, e escrevendo $\log$ para o ramo principal do logaritmo temos para cada $z\in\mathbb{C}$, que $-if(z)=\log A+2k\pi i$ para algum $k\in\mathbb{Z}$. Uma vez que f é contínua, k é independente de z e portanto f é constante.