TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2014/2015

1º Teste — Versão A

(Cursos: LEMat, MEAmbi, MEBiol, MEQ)

1 de Novembro de 2014, 11h

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $u(x, y) = e^{ax}\cos(by)$, com a, b constantes reais.

[1,0 val.] (a) Determine os valores de a e b de modo a que u seja a parte real duma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

[1,0 val.] (b) Considerando $a = -b = 2$, determine a função inteira, f, tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(\mathrm{i}\pi) = 1$.

[1,0 val.] (c) Calcule o valor de

$$\oint_{|z|=2014} \left(\frac{f(z)}{z - \mathrm{i}\pi}\right)^2 dz \ ,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

(a) Para quaisquer valores a e b a função $u(x, y)$ é de classe C^2 (na verdade C^∞) em todo o seu domínio $\mathbb{R}^2$, o qual é obviamente simplesmente conexo. Então, nesse caso, é condição necessária e suficiente para que u seja a parte real duma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que u seja harmónica, ou seja, que $\Delta u = 0$. Portanto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2)e^{ax}\cos(by) = 0,$$

concluindo-se, como $e^{ax}\cos(by)$ não se anula em todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que só pode ser então $a^2 - b^2 = 0$, ou seja, $a = \pm b$.

(b) Com $a = -b = 2$ tem-se $u(x, y) = e^{2x}\cos(-2y) = e^{2x}\cos(2y)$, porque o coseno é uma função par.

Uma resposta imediata consistiria em observar que $e^{2x}\cos(2y) = \operatorname{Re}(e^{2z})$ e que $f(z) = e^{2z}$ satisfaz $f(\mathrm{i}\pi) = e^{2\pi \mathrm{i}} = 1$, donde, pelo facto da resposta ser única, $f(z) = e^{2z}$ é então a solução.

Uma resolução mais longa consiste em determinar a função harmónica conjugada de $u(x, y)$, que denotaremos por $v(x, y)$, e que representa a parte imaginária de f de modo a que seja uma função holomorfa em todo o $\mathbb{C}$. Por serem, respectivamente, a parte real e imaginária de uma função inteira, u e v terão então de verificar as condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$. Assim, para todo (x, y), tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos(2y) \quad \Leftrightarrow \quad v(x, y) = e^{2x}\operatorname{sen}(2y) + c(x)$$

Substituindo na outra equação

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{2x}\operatorname{sen}(2y) + c'(x) = 2e^{2x}\operatorname{sen}(2y) \quad \Leftrightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c(x) = c \in \mathbb{R}.$$

pelo que se conclui que

$$v(x,y) = e^{2x}\operatorname{sen}(2y) + c \qquad , \qquad c \in \mathbb{R}$$

Para determinar a constante c, atenda-se que $f(\mathrm{i}\pi) = 1$ implica que $v(0,\pi) = 0$ pelo que $c = 0$. Então

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = e^{2x}\cos(2y) + \mathrm{i}e^{2x}\operatorname{sen}(2y) = e^{2z} \ .$$

(c) Atendendo a que:

- a curva $\gamma = \{|z| = 2014 \ : \ z \in \mathbb{C}\}$ percorrida uma vez, é uma curva de Jordan;
- $\pi\mathrm{i} \in \operatorname{int}\gamma$;
- a função $f(z)$ é inteira, donde $(f(z))^2$ também o é;

estamos nas condições de aplicar a fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada, pelo que temos

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2014}\left(\frac{f(z)}{z-\mathrm{i}\pi}\right)^2 dz &= 2\pi\mathrm{i}(f(z)^2)'_{|z=\mathrm{i}\pi} = 2\pi\mathrm{i}\Big(2f(z)f'(z)\Big)_{|z=\mathrm{i}\pi} \\ &= 2\pi\mathrm{i}\Big(2f(\mathrm{i}\pi)\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)_{|z=\mathrm{i}\pi}\Big)\end{aligned}$$

Observe-se que não era sequer necessário ter obtido a função harmónica conjugada v, na alínea b) anterior, visto que pelas equações de Cauchy-Riemann a derivada complexa pode ser obtida exclusivamente a partir das derivadas parciais de u

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{2x}\cos(2y) + \mathrm{i}2e^{2x}\operatorname{sen}(2y) = 2e^{2z},$$

donde

$$\oint_{|z|=2014}\left(\frac{f(z)}{z-\mathrm{i}\pi}\right)^2 dz = 2\pi\mathrm{i}(2\cdot 1\cdot 2e^{2\pi\mathrm{i}}) = 8\pi\mathrm{i}.$$

2. Seja $f : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \cos(z+\mathrm{i}) + \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-1}$.

[1,0 val.] (a) Determine, justificando, o valor do integral $\displaystyle\int_\gamma \big[f'(z) + \operatorname{sen}(z+\mathrm{i})\big]\, dz$, ao longo da curva γ parametrizada por $\gamma(t) = t^2 - \mathrm{i}t^5$, com $0 \le t \le 1$.

[1,0 val.] (b) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno do ponto $z_0 = -\mathrm{i}$ indicando o domínio de validade do desenvolvimento.

Resolução:

(a) Basta aplicar o teorema fundamental do cálculo. Uma primitiva da função integranda, em todo o seu domínio $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, é obviamente

$$F(z) = f(z) - \cos(z+\mathrm{i}) = \frac{z+\mathrm{i}}{z-1},$$

e como a curva está contida neste domínio, sabemos que o que integral é igual à diferença da primitiva entre o ponto final $\gamma(1) = 1 - \mathrm{i}$ e o ponto inicial $\gamma(0) = 0$, da curva. Donde

$$\int_\gamma \big[f'(z) + \operatorname{sen}(z+\mathrm{i})\big]\, dz = F(1-\mathrm{i}) - F(0) = \mathrm{i} + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}.$$

(b) A série de Taylor centrada em $-\mathrm{i}$ corresponde à (única) série de potências de $(z+\mathrm{i})$ que, como se sabe pelo teorema de Taylor, representa f na maior bola centrada em $-\mathrm{i}$ e contida no domínio de holomorfia de f. Ora, atendendo a que f tem uma singularidade (não removível - um pólo simples) em $z=1$, conclui-se imediatamente que o domínio de validade do desenvolvimento será exactamente o círculo de convergência da série de Taylor, centrado em $-\mathrm{i}$, com raio $|-\mathrm{i}-1| = \sqrt{2}$.

Começando pelo coseno, sabemos que $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, donde

$$\cos(z+\mathrm{i}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+\mathrm{i})^{2n}}{(2n)!},$$

é precisamente a representação de $\cos(z+\mathrm{i})$ centrada em $-\mathrm{i}$ (com raio de convergência infinito).

Para o termo $\frac{z+\mathrm{i}}{z-1}$ usaremos a representação através duma série geométrica, notando que o numerador já é ele próprio uma potência (unitária) de $(z+\mathrm{i})$, pelo que basta desenvolver $\frac{1}{z-1}$. Assim,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z+\mathrm{i}-\mathrm{i}-1} = -\frac{1}{1+\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1-\frac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}}\right) = -\frac{1}{1+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+\mathrm{i})^n}{(1+\mathrm{i})^{n+1}},$$

válida para $\left|\frac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+\mathrm{i}| < \sqrt{2}$.

Tem-se por fim, então,

$$\begin{aligned} f(z) = \cos(z+\mathrm{i}) + \frac{z+\mathrm{i}}{z-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+\mathrm{i})^{2n}}{(2n)!} - (z+\mathrm{i})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+\mathrm{i})^n}{(1+\mathrm{i})^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+\mathrm{i})^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

válida no círculo de raio $\sqrt{2}$ centrado em $-\mathrm{i}$.

3. Considere a função complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{e^{2z}-1} + z^2 \cos\left(\frac{2}{z}\right).$$

[1,5 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f.

[1,0 val.] (b) Obtenha o valor do integral

$$\oint_{|z|=4} f(z)\,dz.$$

Resolução:

(a) Escreva-se $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, com

$$f_1(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{e^{2z}-1}, \quad f_2(z) = z^2 \cos\left(\frac{2}{z}\right).$$

A função f_1 é o quociente de funções holomorfas em todo o $\mathbb{C}$, pelo que é holomorfa excepto nos pontos onde não está definida, ou seja, onde o denominador se anula:

$$e^{2z} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2z = 2k\pi \mathrm{i} \Leftrightarrow z = k\pi \mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Já f_2 só não está definida em $z = 0$, sendo holomorfa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Conclui-se assim que as singularidades de f são $z = k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}$. O caso $k = 0$ é simultaneamente singularidade de f_1 e f_2; para $k \neq 0$, as singularidades são só de f_1 sendo f_2 holomorfa nesses pontos.

Comecemos então pelos pontos $z = k\pi\mathrm{i}$, com $k \neq 0$. Como f_2 é holomorfa nesses pontos, a sua contribuição para as séries de Laurent de f em torno dessas singularidades faz-se apenas na forma de séries de Taylor, pelo que só afectam a parte regular, das potências positivas, enquanto que a parte singular das séries de Laurent de f resultam exclusivamente das correspondentes partes singulares de f_1 nesses pontos. Por isso, a classificação destas singularidades, assim como os seus resíduos, podem ser estudados apenas por f_1

Agora, para $k \neq 0$, $\lim_{z \to k\pi\mathrm{i}} f_1(z) = \infty$, pelo que os pontos são pólos, enquanto que, aplicando a Regra de Cauchy, se conclui que:

$$\lim_{z \to k\pi\mathrm{i}} (z - k\pi\mathrm{i}) \frac{\operatorname{sen} z}{e^{2z} - 1} = \lim_{z \to k\pi\mathrm{i}} \frac{\operatorname{sen} z + (z - k\pi\mathrm{i}) \cos z}{2e^{2z}} = \frac{\operatorname{sen}(k\pi\mathrm{i})}{2} = \mathrm{i}\frac{\operatorname{senh}(k\pi)}{2},$$

donde se conclui que os pontos $z = k\pi\mathrm{i}$, para $k \neq 0$, são então pólos simples de f (e que estes limites são precisamente os seus resíduos nestas singularidades).

Já para $k = 0$,

$$\lim_{z \to 0} f_1(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{e^{2z} - 1} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{2e^{2z}} = \frac{1}{2}$$

e, portanto, conclui-se que $z = 0$ é uma singularidade removível de f_1. Por outro lado, a contribuição de f_2 na mesma singularidade obtém-se expandido a correspondente série de Laurent:

$$\begin{aligned} f_2(z) = z^2 \cos\left(\frac{2}{z}\right) &= z^2 \left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{z}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{2}{z}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{2}{z}\right)^6 + \cdots\right) \\ &= \left(z^2 - \frac{2^2}{2!} + \frac{1}{4!}\frac{2^4}{z^2} - \frac{1}{6!}\frac{2^6}{z^4} + \cdots\right) \end{aligned}$$

A singularidade $z = 0$ é por isso uma singularidade essencial de f_2, e portanto também de f, visto a contribuição de f_1 para a parte singular da série de Laurent de f neste ponto ser inexistente. O resíduo de f em $z = 0$ é nulo, porque é uma singularidade removível de f_1 e na série de Laurent de f_2 não existe termo em $1/z$.

(b) Para determinar o valor deste integral aplicamos o teorema dos resíduos, determinando as singularidades isoladas de f no interior da circunferência de raio 4 centrada na origem.

Ora, pelo estudo das singularidades de f realizado na alínea anterior, conclui-se que apenas $z_0 = 0, \pi\mathrm{i}, -\pi\mathrm{i}$ se encontram no interior da curva. Os correspondentes resíduos também já foram determinados na alínea anterior, sendo de salientar que em $z_0 = 0$ o resíduo é nulo apesar de se tratar duma singularidade essencial de f. Assim,

$$\oint_{|z|=4} f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\big(\operatorname{Res}(f, -\pi\mathrm{i}) + \operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, \pi\mathrm{i})\big) =$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{i}\frac{\operatorname{senh}(-\pi)}{2} + 0 + \mathrm{i}\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{2}\right) = 0.$$

[1,5 val.] 4. Calcule o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta}\, d\theta \ .$$

Resolução:

Usando a fórmula de Euler temos, para $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2},$$

donde

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}} \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}} d\theta.$$

O integral real pode assim ser interpretado como o integral complexo $\oint_{|z|=1} f(z)dz$, da função

$$f(z) = \frac{1}{3+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{1}{\mathrm{i}z} = \frac{2}{\mathrm{i}(z^2+6z+1)}.$$

Resta agora aplicar o teorema dos resíduos (ou alternativamente, a fórmula integral de Cauchy) ao cálculo do integral em torno da circunferência unitária em torno da origem.

Para isso, começa-se por observar, usando a fórmula resolvente para o polinómio de segundo grau no denominador, que as singularidades desta função f são $z = -3 \pm 2\sqrt{2}$. Obviamente só $z_0 = -3+2\sqrt{2}$ interessa visto ser a única que está situada no interior da circunferência unitária de integração. O denominador da função pode portanto ser factorizado como:

$$f(z) = \frac{2}{\mathrm{i}(z+3+2\sqrt{2})(z+3-2\sqrt{2})},$$

e quer-se, portanto, determinar o valor do integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{2}{\mathrm{i}(z+3+2\sqrt{2})(z+3-2\sqrt{2})} dz.$$

O ponto $z_0 = -3+2\sqrt{2}$ é obviamente um pólo simples, portanto usando o teorema dos resíduos ou a fórmula integral de Cauchy, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta} d\theta = \oint_{|z|=1} & \frac{2}{\mathrm{i}(z+3+2\sqrt{2})(z+3-2\sqrt{2})} dz \\ &= 2\pi\mathrm{i} \left. \frac{2}{\mathrm{i}(z+3+2\sqrt{2})} \right|_{z=-3+2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

[1,0 val.] 5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira, tal que existem $M, R > 0$ e um inteiro $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|f(z)| \leq M|z|^n$, para $|z| > R$. Mostre que então f é um polinómio de grau $\leq n$.

Sugestão: Use a fórmula integral de Cauchy.

Resolução:

A demonstração é praticamente igual à do teorema de Liouville.

Se f é inteira, então admite uma expansão em série de Taylor, em torno da origem $z_0 = 0$, com raio de convergência infinito. Ou seja, f é igual em todo o $\mathbb{C}$ é sua série de MacLaurin:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \cdots$$

Vamos mostrar que, com as condições dadas, todas as derivadas na origem de ordem superior a n são nulas, pelo que esta série de MacLurin se reduz a um polinómio de grau menor ou igual a n.

Assim, seja $k > n$ e considere-se a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem k centrada na origem, numa bola de raio R arbitrário:

$$f^k(0) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz.$$

Estimando, em módulo, este valor

$$|f^k(0)| = \left| \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz \right| \leq \frac{2\pi R k!}{2\pi} \sup_{|z|=R} \left| \frac{f(z)}{z^{k+1}} \right| \leq \frac{2\pi R k!}{2\pi} \frac{MR^n}{R^{k+1}} = \frac{k! M}{R^{k-n}},$$

donde, como R é arbitrário e $k > n$, fazendo $R \to \infty$ se conclui que $f^k(0) = 0$.