Problema 1

a) São forças internas que estão envolvidas no disparo da bala. Logo $\frac{d\vec{P}_{ext}}{dt}=0$

Assim $\vec{P}_i = 0 \Rightarrow \vec{P}_f = 0$, logo $m_{esp}\cdot v_{esp} + m_b\cdot v_{bala} = 0$

$$v_{esp} = -\frac{m_b\cdot v_{bala}}{m_{esp}} = \frac{0{,}006\cdot 800}{5} = -0{,}96\,m/s\,[\vec{e}_x]$$

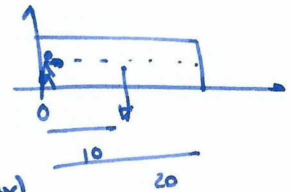
b) Pelo teorema do impulso, $F\Delta t = m\Delta v$.

A força média exercida sobre o espingarda é $F = \frac{5\times(0-(-0{,}96))}{0{,}15} = 32N\,[\vec{e}_x]$

Pelo que a força média exercida sobre o ombro (por acção-reacção) é $\vec{F}_{ombro} = -32\,\vec{e}_x\,[N]$

c) Na direcção $\vec{e}_x$ não actuam quaisquer forças exteriores ao sistema, logo como inicialmente a velocidade do centro de massa é nula, a posição x do CM não se altera.

$x_{CM\,i} = x_{CM\,f}$ $x_{CM_i} = \frac{(m_H+m_{esp}+m_b)\cdot 0 + m_{vagão}\cdot 10}{m_H+m_{esp}+m_b+m_{vagão}}$



e após a chegada da bala à parede oposta.

$$x_{CM\,f} = \frac{(m_H+m_{esp})x + m_{vagão}(10+x) + m_b(20+x)}{m_H+m_{esp}+m_b+m_{vagão}}$$

Vindo que $x = -0{,}7\,mm$. Logo o vagão recuou 0,7 mm!

Problema 2

a) Sobre o corpo é exercida uma força central, pelo que $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$.
Em coordenadas polares o momento angular é $\vec{L} = m\,r^2\dot{\theta}\,\vec{e}_\perp$ pelo que

$\vec{L}_i = m\cdot r_0^2\cdot\frac{v_0}{r_0}\,\vec{e}_\perp$ e $\vec{L}_f = m\,(r_0-3t)^2\cdot\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\perp$ vindo $\dot{\theta}(t) = \frac{1{,}6}{(0{,}8-3t)^2}$ rad/s

Quando $r \to \frac{r_0}{60}$ vem que $v_\theta = 120\,m/s$ pelo que $\vec{v}_f = -3\,\vec{e}_r + 120\,\vec{e}_\theta\,[m/s]$

b) Em coordenadas polares temos que $\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{L} = cte$ (como vimos acima)

$F_r = -F$ (no sentido $-\vec{e}_r$). Logo (como $\ddot{r} = 0$, já que $\dot{r} = cte = -3\,m/s$) vem

$$-F = -m\,(r_0 - 3t)\cdot\frac{1{,}6^2}{(0{,}8-3t)^4} = -\frac{0{,}18}{(0{,}8-3t)^3}\,N$$

c)

Agora já não estamos numa situação de força central pelo que o momento angular já não se conserva. No entanto, a tensão do cabo exerce sempre em todos os instantes uma força que é perpendicular aos deslocamentos do corpo $\Rightarrow$ trabalho executado sobre o corpo é nulo, pelo que a sua energia cinética permanece constante. Assim $|\vec{v}_A| = |\vec{v}_i| = 2\,m/s$.

Problema 3

a) A roda encontra-se exclusivamente submetida à força elástica que actua no seu centro de massa (para além do peso e Reação normal que tem resultante nula). Assim não pode ganhar movimento de rolamento, e por conservação da energia

$E_i = E_f$

$\frac{1}{2} k (l - l_0)^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \Rightarrow v_{CM} = -8{,}16$ m/s $[\vec{e}_x]$

b) Na colisão inelástica com a superfície dentada aparece uma força que actua aproximadamente ao nível do chão. Nesse ponto a força elástica é nula ($l = l_0$). Assim, tomando como ponto de referência o chão no local da colisão (ponto A), temos que $\vec{\tau}_A = 0$ e há conservação do momento angular em torno de A, $L_{A_i} = L_{A_f}$

$\vec{e}_\perp$ $\vec{L}_{A_i} = m|v_{CM}| R \, \vec{e}_\perp$ $\quad \vec{L}_{A_f} = I_A \omega_A \vec{e}_\perp$ em que pelo teorema dos eixos paralelos temos que

$I_A = I_{CM} + mR^2 = 1{,}8 mR^2$

Logo $\cancel{m} \cdot 8{,}16 \cdot \cancel{R} = 1{,}8 \cancel{m} R^{\cancel{2}} \cdot \omega_A$

Como desse ponto em diante a roda tem movimento de rolamento sem deslizamento devido aos dentes, $\omega_A = \frac{v'_{CM}}{R}$ e portanto $v'_{CM} = -4{,}54$ m/s $.[\vec{e}_x]$.

c) Neste percurso volta a existir conservação de energia. (F_A tem trabalho nulo porque é aplicada num ponto de deslocamento nulo e $F_{elástica}$ é conservativa). Logo

$E_i = E_f \quad E_i = \frac{1}{2} m v'^2_{CM} + \frac{1}{2} I_{CM} \cdot \omega'^2$ com $\omega' = \frac{v'_{CM}}{R}$

e $E_f = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2$ com $l < l_0$. Vem portanto

$$\frac{1}{2} k (l - l_0)^2 = \frac{1}{2} m v'^2_{CM} + \frac{1}{2} 0{,}8 \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{v'^2_{CM}}{R^2}$$

com $l = \underline{0{,}35\,m}$! (distância mínima).

Problema 4

a) No sistema de forças centrais temos que

$\vec{e}_r \; | \; \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G \frac{M_{Terra}\, m}{r}$

$\vec{e}_\theta \; | \; \mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \longrightarrow \vec{L} = cte$ (no sistema de forças centrais $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$!) $\Rightarrow L = cte$

Com $\mu = \frac{M_{Terra}\, m}{M_{Terra} + m} \approx m$ (logo o CM vai coincidir com o centro da Terra).

vindo aproximadamente

$\cancel{m}(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G \frac{M_{Terra} \cdot \cancel{m}}{r}$ e para órbita circular,

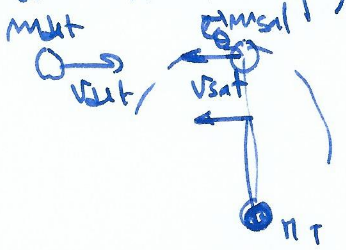
$\boxed{r^3 \dot{\theta}^2 = G M_{Terra}}$ pelo que para $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ com $T = 12 \times 3600$ s

obtemos que $r = 2{,}66 \times 10^7$ m. Logo $h = r - R_T = 2 \times 10^7$ m.

b) $E = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m r^2 \dot\theta^2 - G \frac{M_{Terra}\, m}{r}$

Substituindo os valores de r e $\dot\theta$ da alínea a) obtemos $E = -1{,}35\times10^{10}$ J.

c) A colisão entre o detrito e o satélite é completamente inelástica, vindo por conservação do momento linear (só atuam forças internas, dt colisão ≈ 0)



$m_{sat}\cdot v_{sat}\,\vec{e}_\theta = -m_{det}\cdot v_{det}\,\vec{e}_\theta + m_{sat}\cdot v'_{sat}\,\vec{e}_\theta$

Depois da colisão:

Logo $v'_{sat} = 3{,}74$ Km/s

A órbita passa a uma órbita elíptica sendo este um ponto extremo da órbita (r_{max}). Vem portanto que o ponto a menor distância que passa do centro da terra tem a mesmo potencial efectivo.

$U_{eff}(r_{max}) = U_{eff}(r_{min})$

$$\frac{L^2}{2m\, r_{max}^2} - G\frac{Mm}{r_{max}} = \frac{L^2}{2m\, r_{min}^2} - G\frac{Mm}{r_{min}}$$

Vindo que $|L| = m\, r_{max}\cdot v'_{sat}$ se tem $r_{min} = 2{,}32\times10^7$ m

Problema 5

a) A energia do sistema é igual à soma da energia do fotão e da energia da partícula em repouso

$$E_{sist_{lab}} = p_{fot}c + m_p\cdot c^2 = 4\times10^{-19}\cdot 3\times10^8 + 1{,}67\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2$$
$$= 2{,}69\times10^{-10}\ \text{J}$$

b) Recorrendo ao invariante relativista temos que

$$E_{sist_{lab}}^2 - P_{sist_{lab}}^2c^2 = E_{sist_{CM}}^2 - P_{sist_{CM}}^2c^2$$

e como no referencial do centro de massa, $P_{sist_{CM}} = 0$ temos que

$$E_{sist_{CM}} = \sqrt{E_{sist_{lab}}^2 - P_{sist_{lab}}^2c^2} = 2{,}41\times10^{-10}\ \text{J}$$

c) A velocidade do CM (do sistema como um todo) vem de

$$v_{CM_{lab}} = \frac{P_{sist\,lab}\cdot c^2}{E_{sist\,lab}} = 1{,}33\times10^8\ \text{m/s} \qquad (\beta = 0{,}45)$$