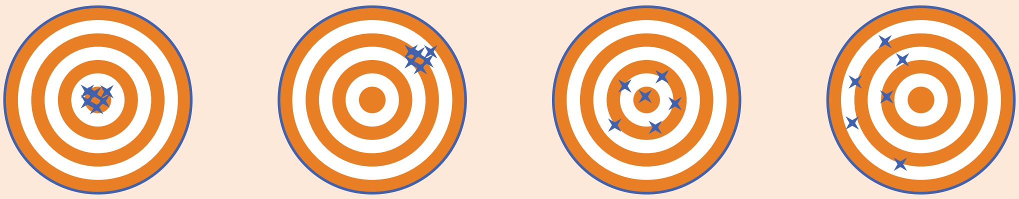
ERROS E INCERTEZAS EXPERIMENTAIS

Precisão e Exactidão

Na linguagem coloquial os termos **precisão** e **exactidão**[1] usam-se como sinónimos, mas no método científico experimental traduzem conceitos muito diferentes. Pode existir uma medida Exacta e não Precisa, ou outra Precisa mas não Exacta (ver ilustração em baixo). O grande mérito de um experimentalista será obter simultaneamente a melhor Precisão e a melhor Exactidão possíveis.

A **precisão** de uma série de medições é o grau da concordância entre determinações repetidas. A **exactidão** é tanto maior quanto menor for a distância entre a medida (ou a média de determinações repetidas) e um valor "verdadeiro", "nominal", "tomado como referência" ou "aceite". A esta distância damos o nome de **erro experimental**.



Alta Exactidão
Alta Precisão

Baixa Exactidão
Alta Precisão

Alta Exactidão
Baixa Precisão

Baixa Exactidão
Baixa Precisão

Note-se que, numa actividade experimental, em regra geral, o valor verdadeiro das grandezas não é conhecido *a priori,* pelo que naturalmente também não é possível calcular o valor do erro. Nas actividades laboratoriais de LIFE existem algumas excepções em que este valor "verdadeiro/referência" é conhecido com grande Precisão/Exatidão (e.g Razão da Carga/Massa do Electrão, Velocidade da Luz, etc). Outras há em que não se conhece o valor verdadeiro (e.g. Carga de uma gota de óleo electrizada, Temperatura da Sala, Índice de refração do prisma para λ=600 nm, etc).

[1] *Precision and Accuracy*

Erros Sistemáticos e Aleatórios

Existem duas grandes contribuições para o **erro experimental**, uma de natureza **sistemática** e outra **aleatória.**

Os **erros sistemáticos** conduzem em geral a valores sistematicamente desviados (para valores superiores ou inferiores) do valor da grandeza a medir, contribuindo para uma menor **exatidão**. Resultam de más condições de calibração dos instrumentos de medida, do uso destes instrumentos em condições diferentes das que são recomendadas, de leituras sistematicamente incorrectas do observador (e.g. paralaxe) e da utilização de um método físico que não é adequado à descrição da experiência. Estes erros devem ser corrigidos e minimizados sempre que possível. Só a comparação dos resultados obtidos com outros instrumentos de referência (**calibração)** pode elucidar se esses erros foram suficientemente reduzidos.

Os **erros aleatórios** resultam das flutuações aleatórias que se observam nos resultados obtidos para diferentes leituras e pioram a **precisão.** Podem ser originados por falta de sensibilidade dos instrumentos e do observador, por leituras incorrectas (mas não sistemáticas), por ruído (vibrações mecânicas ou eléctricas), pelos processos estatísticos intrínsecos ao fenómeno observado (por exemplo declínio radioactivo). A análise estatística das flutuações está fora do âmbito da LIFE, mas importa referir que, habitualmente, considera-se o valor médio dos erros aleatórios como zero. Isto é importante pois, ao repetirem-se as medições e fazendo a média aos N resultados, os erros aleatórios compensam-se, reduzindo-se assim a contribuição aleatória. Os erros aleatórios podem e devem ser sempre caracterizados, mas dado o seu carácter estocástico, não podem ser eliminados totalmente, pelo que qualquer medição tem associada uma **Incerteza experimental**[2]**.**

ERROS SISTEMÁTICOS
menor exactidão

- más condições de calibração dos instrumentos de medida
- uso destes instrumentos em condições diferentes das que são recomendadas
- leituras sistematicamente incorrectas do observador (e.g. paralaxe)
- utilização de um método físico que não é adequado à descrição da experiência.

ERROS ALEATÓRIOS
menor precisão

- falta de sensibilidade dos instrumentos e do observador
- leituras incorrectas (mas não sistemáticas)
- ruído (vibrações mecânicas ou eléctricas)
- processos estatísticos intrínsecos ao fenómeno observado (e.g. declínio radioactivo).

Em conclusão, podemos resumir todos estes conceitos nestes pontos:

[2] *Experimental uncertainty*

1. Toda a medição experimental é sujeita a um erro experimental. Só por grande coincidência o valor numérico obtido pela medição é igual ao valor verdadeiro da grandeza.
2. Antes da experiência devemos identificar e corrigir os erros sistemáticos de todas as grandezas directas e das constantes utilizadas, de modo a minimizar os erros sistemáticos e aumentar a exactidão. No final, a comparação do valor médio obtido com o valor da mesma grandeza tabelado, nas mesmas condições físicas (ou proveniente de outras experiências), permite estimar o **desvio à exactidão** do valor obtido, que pode ser estimado em percentagem como

$$\text{desvio}(\%) = \left|\frac{\text{valor}_{\text{conhecido}} - \text{valor}_{\text{medido}}}{\text{valor}_{\text{conhecido}}}\right| \cdot 100$$ *Desvio à exactidão* (1)

3. Porque existem sempre erros aleatórios, toda a medição é afectada de uma incerteza, que indica o grau de Precisão. Obrigatoriamente em todos os resultados tem de apresentar sempre o valor *mais provável* da grandeza, **mais** a respectiva estimativa numérica da Incerteza. Exemplo: $\text{Vel\_Som}_{ar} = 343.5 \pm 0.6$ m/s
4. Quando se calculam grandezas indirectas a partir das medições directas, utilizando as equações físicas, as incertezas **propagam-se,** gerando uma incerteza do resultado final.

Veremos nas próximas secções como se pode, de uma forma simplificada, calcular e representar os valores mais prováveis para as grandezas directas e indirectas e as respectivas Incertezas.

Incerteza nas Grandezas Directas

A repetição de uma medição da variável *x* nas mesmas condições experimentais conduz a uma distribuição aleatória de resultados em torno de um **valor médio** $\bar{x}$ (média aritmética), que pode ser considerado como o **melhor valor** obtido nesta medida. Num grande número de situações, esta repetição realizada *N* vezes nas mesmas condições experimentais conduz a um valor médio que se aproxima do "verdadeiro" valor da grandeza à medida que *N* aumenta.

Para N grande (e.g. $N \gg 10$) pode calcular-se o **desvio padrão** *s*, que exprime a dispersão dos resultados e o *melhor* valor para a **incerteza do valor médio** *u,* é dado pelo **desvio padrão da média**, $u = s/\sqrt{N}$, também chamado "erro padrão" ou "erro padrão da média".

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$ *Desvio padrão* (2)

$$u = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$ *Incerteza do valor médio* (3)

O resultado final neste caso (para um número elevado de determinações nas mesmas condições experimentais) deve apresentar-se como: $\bar{x} \pm u$.

Mas se o número de determinações N nas mesmas condições experimentais é pequeno (tipicamente $1 < N < 5$), a análise estatística perde significado e a incerteza deve ser então ser estimada usando um **majorante** Δx, que será o maior desvio em relação à média. O resultado final neste caso pode apresentar-se como $x \pm \Delta x$ (**incerteza absoluta**) ou na forma $\Delta x / \bar{x}$, em percentagem (**incerteza relativa**).

Importante: em qualquer caso, se a incerteza calculada for *menor* do que a incerteza intrínseca do Instrumento (e.g. resolução da escala), a estimativa deve ser substituída por esta última.

Incerteza nas Grandezas Indirectas

Para uma grandeza indirecta $F(X, Y, Z, \ldots)$ sendo $X, Y, Z, \ldots$ grandezas medidas directas, com Incertezas que foram estimadas pelas equações acima como sendo u_X , u_Y e u_Z pode estimar-se a incerteza u_F da grandeza F a partir das respectivas derivadas parciais:

$$u_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial X} u_X\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Y} u_Y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z} u_X\right)^2 \cdots} \qquad (4)$$

Quando não é possível fazer uma análise estatística ($1 < N < 4$), um majorante do erro da grandeza indirecta ΔF é calculável a partir de:

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial X}\right| \Delta X + \left|\frac{\partial F}{\partial Y}\right| \Delta Y + \left|\frac{\partial F}{\partial Z}\right| \Delta Z \qquad (5)$$

onde $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z,$ são as incertezas estimadas através dos majorantes dos erros das variáveis correspondentes. As derivadas deverão ser calculadas por majoração.

Caso particular: para uma função racional (por ex. $F(X, Y, Z) = cte \cdot X^a Y^b Z^c$, com a, b, c inteiros) o majorante do erro relativo é a *soma* dos majorantes dos erros relativos das variáveis multiplicados pelos expoentes em valor absoluto:

$$\frac{\Delta F}{F} = a \cdot \frac{\Delta X}{X} + b \cdot \frac{\Delta Y}{Y} + c \cdot \frac{\Delta Z}{Z} \qquad (6)$$

Representação de Resultados da Medição de Grandezas

Os resultados das medições devem ser apresentados com uma Incerteza que, em regra geral, deve ter apenas *um ou dois* algarismos significativos. Por sua vez, o valor mais provável deve usar as mesmas casas decimais, arredondando-se o algarismo mais à direita[3]. Nunca esquecer também as **unidades físicas** da grandeza medida, de preferência no Sistema Internacional (SI).

Bons Exemplos	R = 0.185±0.030 m
	Temp = 297.0±0.5 K
	v = 344.3±0.4 m s^{-1}
	B = (5.92±0.08) 10^{-4} T
	q/m = (1.77±0.07) 10^{11} C kg^{-1}
	e = 0.050±0.001 mm ou e = 50±1 μm
Maus Exemplos	B = (5.9297887668888668898±0.08) 10^{-4} T
	Temp = 297 ± 0.0005
	q/m = (1.8±0.07789) 10^{11} C kg^{-1}

Algarismos Significativos

Com excepção do caso em que todos os números envolvidos são inteiros, não é possível representar o valor de uma grandeza com exactidão ilimitada. Diz-se que uma representação de um número tem *n* algarismos significativos quando se admite um erro na casa decimal seguinte. Por exemplo:

1/7 = 0,14 tem dois algarismos significativos

1/30 = 0,0333 tem três algarismos significativos

Note-se que a posição da vírgula não afecta o número de a.s.

<u>Regras</u>

Algarismos zero à esquerda não contam para o total de a.s. – exemplo: 0,00044 (2 a.s.)

Algarismos zero à direita contam para o total de a.s. – exemplo: 12,00 (4 a.s.)

Algarismos 1–9 e zeros entre eles são sempre a.s. – exemplo: 1203,4 (5 a.s.)

Potências de dez são ambíguas, e devem ser representadas usando notação decimal – exemplo: 800 é ambíguo, $8,00\times10^2$ é correcto (3 a.s.)

As constantes têm um número arbitrário de a.s.

<u>Soma e subtracção</u>

O resultado deve manter o número de casas decimais do operando com o *menor número de casas decimais* – exemplo: 105,4 + 0,2869 + 34,27 = 139,9569 = 140,0 i.e. $1,400 \times 10^2$

[3] Nota: É relativamente complexo utilizar os programas as folhas de cálculo (e.g. *Excel*) para apresentar resultados científicos neste formato.

Multiplicação e divisão

O resultado deve manter o número de casas decimais do operando com o *menor número de algarismos significativos* – exemplo: 7,3 × 8,4 = 61,32 = 61,3

Raízes quadradas

O número de a.s. é igual ao de partida – exemplo: √92 = 9,59166 = 9,6

Incertezas nas Representações Gráficas. Ajuste Linear

A análise de resultados é frequentemente facilitada se se usarem representações gráficas das leis matemáticas que supostamente descrevem os fenómenos físicos em observação. O ajuste é particularmente simples se se tratar de uma lei linear, onde se pode fazer um ajuste visual.

De uma forma mais sistemática deve usar-se o **método dos mínimos quadrados**, que consiste na determinação analítica de qual a recta $y = a + b \cdot x_i$ que se desvia o menos possível do conjunto de pontos experimentais. Na sua forma mais simples[4], sendo (x_i, y_i) as coordenadas dos N pontos pretende-se determinar (a, b), tal que

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{N} (y_i - y)^2 = \sum_{i=0}^{N} (y_i - a - b \cdot x_i)^2$$

seja mínimo. As condições de estacionariedade desta função $\chi^2 = F(a, b)$, dependente dos dois parâmetros $(a,\ b)$, podem ser descritas como $\frac{\partial(\chi^2)}{\partial a} = 0, \frac{\partial(\chi^2)}{\partial b} = 0$ e $\frac{\partial^2(\chi^2)}{\partial b^2} = 0$. As duas primeiras equações resultam em

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{N} \left(y_i - a - bx_i \right) = 0 \Leftrightarrow \sum y_i - Na - b\sum x_i = 0 \\ &\sum_{i=0}^{N} x_i \left(y_i - a - bx_i \right) = 0 \Leftrightarrow \sum x_i y_i - a\sum x_i - b\sum x_i^2 = 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

A resolução deste sistema de duas equações permite obter os valores de a e b:

$$a = \frac{\left(\sum x_i \right)^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2} \qquad b = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2} \qquad (8)$$

A grande maioria dos programas de cálculo e as calculadoras científicas incorporam estas expressões para calcular os parâmetros de ajuste a e b. Apenas os programas mais avançados para gráficos e análise de dados científicos (e.g *Origin*[5], *Fitteia*[6] ou *Qtiplot*[7]) permitem também calcular as estimativas das incertezas u_a e u_b.

---

[4] Se não se considerarem as incertezas nos pontos experimentais, ou se estas forem da mesma ordem de grandeza para todos os pontos.

[5] *Data analysis and graphing software*. `http://originlab.com/`

Ajuste linear manual

É possível também obter um ajuste linear aproximado fazendo um traçado manual, com o rigor possível. Podemos usar como ponto de partida o ponto médio por onde passa a recta. Tomando a primeira equação de (7) e dividindo por N,

$$\frac{\sum y_i}{N} - a - b\frac{\sum x_i}{N} = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = a + b\bar{x}$$

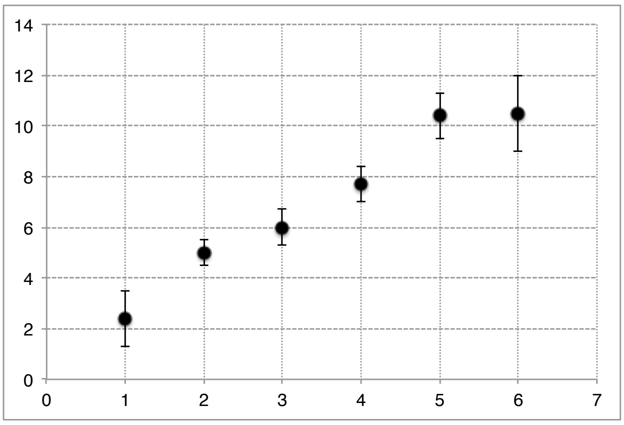
em que $\bar{y}$ e $\bar{x}$ são respectivamente as médias de cada um dos conjuntos de valores. Daqui conclui-se que a recta que corresponde ao melhor ajuste passa pelo ponto médio $(\bar{x}, \bar{y})$.

O passo seguinte consiste em traçar as rectas de maior ($y = a_1 + b_1 x$) e menor ($y = a_2 + b_2 x$) inclinação que, passando por este ponto, melhor se ajustam aos pontos medidos e suas incertezas.. Por fim, a recta do melhor ajuste e o respectivo erro é obtida pela média desta duas rectas, de acordo com

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} \qquad \varepsilon_a = \frac{|a_1 - a_2|}{2} \qquad b = \frac{b_1 + b_2}{2} \qquad \varepsilon_b = \frac{|b_1 - b_2|}{2}$$

Exemplo: Considere-se o conjunto de pontos da tabela abaixo e a sua representação no gráfico.

x	y	ϵ_y
1	2,4	1,1
2	5	0,5
3	6	0,7
4	7,7	0,8
5	10,4	0,9
6	10,5	1,5
Ponto médio: $\bar{x} = 3{,}5$; $\bar{y} = 7{,}0$		



Traçamos duas rectas que passem pelo ponto médio (3,5; 7,0) e que correspondam visualmente (e com bom senso) ao maior e menor declive que contenham os pontos da medição.

---

[6] *Web-cloud-based solution for general purpose function fitting, data plotting, and report writing.* `http://fitter.ist.utl.pt`

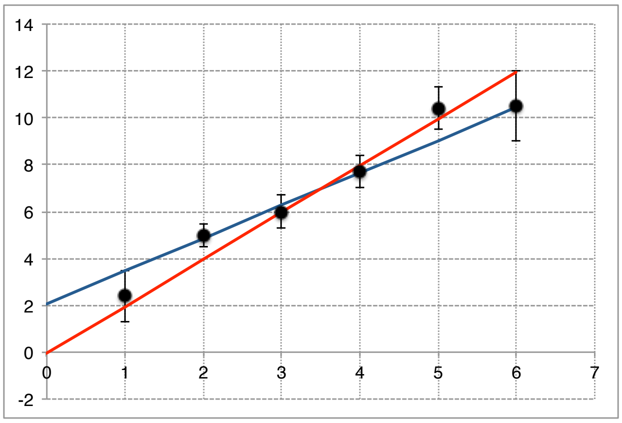
[7] *QtiPlot - Data Analysis and Scientific Visualisation.* `http://www.qtiplot.com`

Recta 1 (a azul):

$$y = 1{,}4x + 2{,}05$$

Recta 2 (a vermelho):

$$y = 2{,}0x - 0{,}05$$



Por fim, calculam-se os coeficientes da recta que bissecta estas duas, dados pelas expressões acima.

Melhor ajuste:

$$a = \frac{2{,}05 + (-0{,}05)}{2} = 1{,}0$$

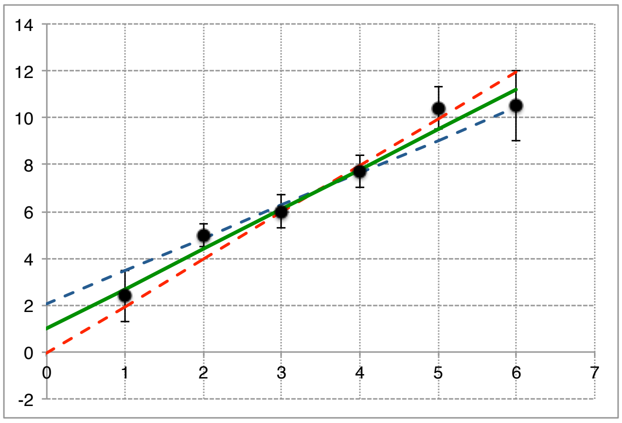
$$\epsilon_a = \frac{|2{,}05 — 0{,}05)}{2} 2 = 1{,}05$$

$$b = \frac{1{,}4 + 2}{2} = 1{,}7$$

$$\epsilon_b = \frac{|1{,}4 - 2|}{2} = 0{,}35$$

Recta final (a verde):

$$y = 1{,}7x + 1{,}0$$



Como comparação, os valores calculados pelo método dos mínimos quadrados dão para a recta o resultado $y = 1{,}67x + 1{,}16$.

Bibliografia

- John R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*, University Science Books; 2nd edition (August 1, 1996)
- V. Thomsen. "Precision and The Terminology of Measurement". *The Physics Teacher*, Vol. 35, pp.15-17, Jan. 1997.
- Ifan Hughes and Thomas Hase, Measurements and their Uncertainties: A practical guide to modern error analysis, Oxford University Press (July 1, 2010)