Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEFT

1º Teste (R) (VA) - 28 de Janeiro de 2020 - 8:00 às 9:30

Instruções

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta.
- Não pode ter calculadoras ou telemóveis ligados e/ou visíveis.
- Antes de começar:
  - Identifique com o nome e número **a primeira página** do seu caderno de respostas.
  - Preencha nesta folha o seu nome, número e a sala onde está.
  - Numere todas as páginas do caderno de respostas, **frente e verso**.
  - Coloque o seu documento de identificação em cima da mesa de trabalho.
- Sair da sala de exame: Só pode abandonar a sala de exame se entregar o exame, ou desistir. Em ambos os casos, só o poderá fazer ao fim dos primeiros 30 minutos, e deve sempre entregar esta folha de instruções.
- Se desistir: Entregue apenas esta folha de instruções, assinada, e com a indicação que desistiu.

pergunta	classificação	cotação
1 a, b, c		4
2 a, b, c		4
3 a, b, c		4
4 a, b, c		4
5 a, b, c, d		4
total		20

Nome: ____

Número: __________________

Sala: _____________________

Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEFT

1^{o} Teste (R) (VA) - 28 de Janeiro de 2020 - 8:00 às 9:30

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4 val.) Calcule, se existirem (finitos ou infinitos), os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty} x(\pi - 2\arctan x) \quad (b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x^2 + \ln x}{x2^x + x^4 + x^2\ln x} \quad (c)\ \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(\tan x))^{2\operatorname{sen} x}$$

Problema 2 (4 val.) Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^{7/2}\operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x > 0 \\ e^{-1/x^2} + \cosh x - 1 + x - x^2/2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$ e determine f'.
(b) Sendo g o prolongamento por continuidade de f a $\mathbb{R}$, diga se $g'(0)$ e $g''(0)$ existem.
(c) Determine se g tem um ponto de inflexão em $x = 0$.

Problema 3 (4 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = e^{\sqrt{1+\arctan x}} \qquad (b)\ g(x) = \ln(2 + \operatorname{sen}^2(1+3x)) \qquad (c)\ h(x) = (\sec(x^2))^{\ln x}$$

Problema 4 (4 val.) Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $f^{(2)}(x) = \ln(1+x^2)$ e, designando por p_n o seu polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto $a = 0$, temos $p_1(x) = 1 + 5x$.

(a) Calcule p_4.
(b) Mostre que $f(x) - p_2(x) > 0$ quando $|x| < 1$.
(c) Sendo $g(x) = (f(x) - 1 - 5x)/x^2$ para $x \neq 0$ e $g(0) = 0$, calcule $g^{(4)}(0)$.

Problema 5 (4 val.) No que se segue, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função pelo menos diferenciável em $\mathbb{R}$. Mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras.

(a) Se f' é crescente e $f(0) = 0$ então $g(x) = f(x)/x$ é crescente.
(b) Se f é de classe C^2 em $\mathbb{R}$ e $f'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ então a inversa f^{-1} é também de classe C^2 em $\mathbb{R}$.
(c) Se $f^{(3)}(0) = 12$, $f^{(2)}(0) = 6$, $f^{(1)}(0) = 3$ e $f(0) = 0$ então $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3x - 3x^2}{x^3} = 2$.
(d) Se f é uma função par de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ então o respectivo polinómio de Taylor de ordem $2n$ em $a = 0$ é da forma $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$.

Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEFT

1º Teste (R) (VB) - 28 de Janeiro de 2020 - 8:00 às 9:30

Instruções

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta.
- Não pode ter calculadoras ou telemóveis ligados e/ou visíveis.
- Antes de começar:
  - Identifique com o nome e número **a primeira página** do seu caderno de respostas.
  - Preencha nesta folha o seu nome, número e a sala onde está.
  - Numere todas as páginas do caderno de respostas, **frente e verso**.
  - Coloque o seu documento de identificação em cima da mesa de trabalho.
- Sair da sala de exame: Só pode abandonar a sala de exame se entregar o exame, ou desistir. Em ambos os casos, só o poderá fazer ao fim dos primeiros 30 minutos, e deve sempre entregar esta folha de instruções.
- Se desistir: Entregue apenas esta folha de instruções, assinada, e com a indicação que desistiu.

pergunta	classificação	cotação
1 a, b, c		4
2 a, b, c		4
3 a, b, c		4
4 a, b, c		4
5 a, b, c, d		4
total		20

Nome: ____

Número: __________________

Sala: _____________________

Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEFT

1º Teste (R) (VB) - 28 de Janeiro de 2020 - 8:00 às 9:30

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4 val.) Calcule, se existirem (finitos ou infinitos), os seguintes limites:

$(a)\ \lim_{x\to+\infty} x(\pi - 2\arctan x)$ $(b)\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + x^2 + \ln x}{x2^x + x^4 + x^2 \ln x}$ $(c)\ \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen}(\tan x))^{2\operatorname{sen} x}$

Problema 2 (4 val.) Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^{7/2}\operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x > 0 \\ e^{-1/x^2} + \cosh x - 1 + x - x^2/2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$ e determine f'.
(b) Sendo g o prolongamento por continuidade de f a $\mathbb{R}$, diga se $g'(0)$ e $g''(0)$ existem.
(c) Determine se g tem um ponto de inflexão em $x = 0$.

Problema 3 (4 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$(a)\ f(x) = e^{\sqrt{1+\arctan x}}$ $(b)\ g(x) = \ln(2 + \operatorname{sen}^2(1 + 3x))$ $(c)\ h(x) = (\sec(x^2))^{\ln x}$

Problema 4 (4 val.) Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $f^{(2)}(x) = \ln(1 + x^2)$ e, designando por p_n o seu polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto $a = 0$, temos $p_1(x) = 1 + 5x$.

(a) Calcule p_4.
(b) Mostre que $f(x) - p_2(x) > 0$ quando $|x| < 1$.
(c) Sendo $g(x) = (f(x) - 1 - 5x)/x^2$ para $x \neq 0$ e $g(0) = 0$, calcule $g^{(4)}(0)$.

Problema 5 (4 val.) No que se segue, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função pelo menos diferenciável em $\mathbb{R}$. Mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras.

(a) Se f' é crescente e $f(0) = 0$ então $g(x) = f(x)/x$ é crescente.
(b) Se f é de classe C^2 em $\mathbb{R}$ e $f'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ então a inversa f^{-1} é também de classe C^2 em $\mathbb{R}$.
(c) Se $f^{(3)}(0) = 12$, $f^{(2)}(0) = 6$, $f^{(1)}(0) = 3$ e $f(0) = 0$ então $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 3x - 3x^2}{x^3} = 2$.
(d) Se f é uma função par de classe C^∞ em $\mathbb{R}$ então o respectivo polinómio de Taylor de ordem $2n$ em $a = 0$ é da forma $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$.