1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR **16.OUT.2019**

Cursos: FÍSICA, MATEMÁTICA

Nome: EXEMPLO DE RESOLUÇÃO

Número:________________ Curso:________________

JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS

1. Considere

$$A_{a,b} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 1 \\ 1 \\ c \end{bmatrix}, \qquad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcule para que valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ o sistema de equações $A_{a,b}\mathbf{x} = \mathbf{b}_c$, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$, tem: (1) solução única, (2) infinitas soluções, (3) nenhuma solução.

(b) Determine todas as soluções com componentes reais de $A_{1,0}\mathbf{x} = \mathbf{b}_0$.

(c) Calcule a característica e bases dos espaços das colunas, das linhas e nulo de $A_{1,0}$.

(d) Para que valores $a, b \in \mathbb{R}$ a matriz $A_{a,b}$ é não singular? Determine a inversa de $A_{-1,2}$.

2. Considere o conjunto S_f das funções y definidas em $]0, +\infty[$ com valores em $\mathbb{R}$ tais que $t^2 y''(t) - 2y(t) = f(t)$, para f uma função definida em $]0, +\infty[$ com valores em $\mathbb{R}$.

(a) Determine para que funções f o conjunto S_f é um espaço linear real com a adição e a multiplicação usuais definidas ponto a ponto.

(b) Determine uma base de S_0 (Sugestão: Identifique as funções $y \in S_0$ da forma $y(t) = t^2 z(t)$) e calcule a solução geral de $t^2 y''(t) - 2y(t) = t$ para $t > 0$.

RESPOSTAS (pode usar o espaço abaixo e no verso e/ou as folhas A4 necessárias).

1. (a)

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & a-2 & 1 & 1 & 0 & 1-2c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 2c \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 1 & 3-a & 0 & (2-a)(1-c)+1-2c \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 & (1-a)(1-c)-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 2c \end{array}\right].$$

(1) Solução única $\Leftrightarrow a \neq 1$ e $b \neq 0$ (5 pivots em matriz 5x5).

(2) Infinitas soluções $\Leftrightarrow$ ($a=1$ ou $b=0$) e $c=0$ (linhas de coeficientes 0 com termos independentes 0)

(3) Nenhuma solução $\Leftrightarrow$ ($a=1$ ou $b=0$) e $c \neq 0$ (linhas de coeficientes 0 com termos independentes $\neq 0$).

(b) De (a) com $a=1$, $b=c=0$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Com $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ e incógnitas livres x_4, x_5, a solução geral é $x = (x_4 - 1, 1 - x_4, 2 - 2x_4, x_4, x_5)$, com $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

(c) rank $A_{1,0} = 3$. (3 pivots em (b))

Base de $\mathcal{R}(A_{1,0}) = \{(1,1,2,1,-1), (1,1,1,2,-1), (0,0,1,0,0)\}$.

Base de $\mathcal{R}(A^t_{1,0}) = \{(1,1,0,0,0), (0,1,0,1,0), (0,0,1,2,0)\}$

Base de $\mathcal{N}(A_{1,0}) = \{(0,0,0,1,0), (-1,1,2,0,1)\}$.

Base do espaço das colunas $\mathcal{R}(A_{1,0})$: colunas de $A_{1,0}$ correspondentes a pivots.

Base do espaço das linhas $\mathcal{R}(A^t_{1,0})$: linhas não nulas da matriz de coeficientes em (b)

Base do espaço nulo $\mathcal{N}(A_{1,0})$: soluções com ($x_4=1, x_5=0$) e ($x_4=0, x_5=1$).

1. (d) De (a), $A_{a,b}$ é não-singular $\Leftrightarrow$ $a \neq 1$ e $b \neq 0$.

$A_{-1,2} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{bmatrix}$, com $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$X^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Z^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, $Z^{-1}(YX^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(A_{-1,2})^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ -Z^{-1}YX^{-1} & Z^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Para S_f ser espaço linear tem de conter a função $y=0$; logo, $f=0$.

$y_1, y_2 \in S_0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 y_1'' - 2y_1 = 0 \\ t^2 y_2'' - 2y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t^2(y_1+y_2)'' - 2(y_1+y_2) = 0 \Rightarrow y_1+y_2 \in S_0$,

$y \in S_0, c \in \mathbb{R} \Rightarrow t^2 y'' - 2y = 0$ e $t^2(cy)'' - 2(cy) = 0 \Rightarrow cy \in S_0$.

Como $S_0 \subset \mathbb{R}^{]0,+\infty[}$ que é um espaço linear real com as operações usuais de funções, $0 \in S_0$ e S_0 é fechado em relação à adição e à multiplicação por números reais,

S_f é espaço linear $\Leftrightarrow$ $f=0$.

(b) $y \in S_0$ e $y(t) = t^a$ $\Leftrightarrow$ $[a(a-1) - 2]t^a = 0 \ \forall t>0 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow a = 2$ ou $a = -1$.

logo, $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são soluções e $y_1, y_2 \in S_0$.

Se $y \in S_0$ e $y(t) = t^2 x(t)$, como

$y'(t) = 2t\,x(t) + t^2 x'(t)$, $y''(t) = [t^2 x''(t) + 4t x'(t) + \underbrace{(2-2)x(t)}_{=0}]t^2 \ \forall t>0$

é $\frac{x''}{x'} = -\frac{4}{t}$ e, portanto, $x'(t) = c_1 t^{-4}$, $x(t) = -\frac{c_1}{3}t^{-3} + c_2$,

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes. Logo $y(t) = t^2\left(-\frac{c_1}{3}t^{-3} + c_2\right) = c_2 t^2 - \frac{c_1}{3}t^{-1}$.

Portanto, $S_0 = \mathcal{L}(\{y_1, y_2\})$ e como y_1, y_2 são linearmente independentes $\{y_1, y_2\}$ é uma base de S_0.

$y_p(t) = -\frac{1}{2}t$ é solução particular de $t^2 y''(t) - 2y(t) = t$ para $t>0$.

Logo, a solução geral de $t^2 y''(t) - 2y(t) = t$, $t>0$ é

$y(t) = c_1 t^2 + c_2 \frac{1}{t} - \frac{1}{2}t$, $t>0$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.