TPC INICIAL
CDI-I/LMAC/MEFT 2019-20

Exercício 1. *A Joana diz ao António e à Maria que faz anos numa das seguintes datas:*

- *15, 16 ou 19 de maio, ou*
- *17 ou 18 de junho, ou*
- *14 ou 16 de julho, ou*
- *14, 15 ou 17 de agosto.*

A Joana diz depois o mês em que faz anos apenas ao António e o dia em que faz anos apenas à Maria. Imediatamente a seguir,

- *O António declara que nem ele nem a Maria sabem quando a Joana faz anos,*
- *A Maria declara que, então, ela já o sabe,*
- *O António declara que, então, ele também já o sabe.*

E o leitor, também já sabe em que dia faz anos a Joana? E se a Maria tivesse dito que continuava a não saber, o que diria o António?

Exercício 2. *Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique as suas respostas.*([1])

$$
\begin{array}{llll}
a) & \forall\, n \in \mathbb{N} & \dfrac{n+5}{3} \geq 3 & \\
b) & \forall\, n \in \mathbb{N} & 2/3 < \dfrac{2n+1}{3n} \leq 1 & \\
c) & \exists\, n \in \mathbb{N} & \dfrac{n+5}{3} \geq 3 & \\
d) & \forall\, n \in \mathbb{N} & n \text{ é par } \Longleftrightarrow n^2 \text{ é par} & \\
e) & \forall\, x \in \mathbb{R} & \exists\, y \in \mathbb{R} & y > x \\
f) & \exists\, y \in \mathbb{R} & \forall\, x \in \mathbb{R} & y > x
\end{array}
$$

Exercício 3. *Escreva utilizando apenas símbolos matemáticos:*

a) Qualquer potência par de qualquer real x é um número não negativo

[1] $\mathbb{N}$ é o conjunto dos naturais, ou seja, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ e $\mathbb{R}$ é o conjunto dos reais.

b) a distância entre o real x *e* -1 *é menor do que* $\sqrt{3}$

Exercício 4. *Neste exercício, suponha sempre subentendido o quantificador* $\forall x \in \mathbb{R}$. *Determine se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa. Justifique.*

a) $x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$

b) $|2x+3| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < -1$

c) $|x^2 - 3x + 2| > 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \quad ou \quad x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

d) $|x^2 - 3x + 2| > 1 \Rightarrow x < 1 \quad ou \quad x > 2$

e) $|2x+1| > 3 \;\Rightarrow\; |x| > 1$

f) $x^2 < -1 \Rightarrow 1 > 0$

g) $x^6 + \sqrt{x^2+3} + 10 \geq 10 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1/2$

Exercício 5. *Escreva a negação de cada uma das seguintes proposições:*

a) $\exists x \in \mathbb{R} \qquad x^2 + 3 \leq 7 \quad e \quad |x+1| < 1$

b) $\forall x \in]-1, +\infty[\qquad \log(x+1) > 0 \;\Rightarrow\; x > -1/2$

c) $\exists\, x \in \mathbb{R}\, \forall\, y \in \mathbb{R} \qquad x + y > 1$

Exercício 6. *Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique as suas respostas.*

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |1 + \operatorname{sen}(2x+5)| + 3 > 2$

b) $\forall\, x > 0 \quad |\log x + 1| > -x$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad x = \sqrt{x^2}$

d) *a recta* $y = 2x - 1$ *é tangente à parábola* $y = x^2$

Exercício 7. *Escreva a negação de cada uma das seguintes proposições:*

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad x > 1 \;\Rightarrow\; |2x+1| > 3$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \log(x^2+1) > 0$

c) $\exists\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \qquad xy = x$

Exercício 8. *Suponha que* $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções. Escreva utilizando apenas símbolos matemáticos:*

a) f *é crescente em* $[0, +\infty[$.

b) g *é par.*

c) h é periódica, com período 2π.
d) f é injectiva.
e) g é sobrejectiva.
f) h é a inversa de f.

Exercício 9. *Determine se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas, e justifique as suas respostas. Interprete as suas conclusões geometricamente.*

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad x > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < 1$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad x^2 > x$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y+2)^2 < 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \neq \emptyset$

Exercício 10. *Determine se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \qquad x^2 + y^2 < 1 \Longrightarrow (x-2)^2 + y^2 \leq 4$$

Interprete geometricamente a sua resposta

Exercício 11. *Mostre que:*

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2x + 1| > 1\} =]-\infty, 0[\; \cup \;]2, +\infty[$

b) $(x+1)\,|(x-3)\,(x+1/2)| > 0 \;\Leftrightarrow\; \big(x > -1 \quad e \quad x \neq 3 \quad e \quad x \neq -\tfrac{1}{2}\big)$

c) $\dfrac{\log x\,(|2x+1| - 3)}{x^2+1} > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in\,]0, +\infty[\, \setminus \{1\}$

Exercício 12. *Diga se a seguinte observação é verdadeira: Sabendo que a recta tangente ao gráfico de $y = \ln x$ no ponto $x = 1, y = 0$ tem declive 1, podemos concluir que*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

Sugestão: Este limite também pode ser escrito como

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1.$$

Exercício 13. *Determine todas as funções y que satisfazem a equação diferencial $y' = xy$, com $y(0) = 1$. Sugestão: Calcule a derivada da função $u = ye^{-\frac{x^2}{2}}$.*

Exercício 14. *Mostre com um argumento inteiramente geométrico que, quando* $0 < |x| < \pi/2$,

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$$

Sugestão: Considere o triângulo rectângulo com vértices em $(\cos x, \operatorname{sen} x)$, $(1, 0)$ *e* $(\cos x, 0)$. *Recorde que o comprimento de um arco da circunferência unitária é o respectivo ângulo ao centro em radianos.*