Mecânica Analítica

Capítulo 2: Princípio de Hamilton

H. Terças

Instituto Superior Técnico
(Departamento de Física)

2.1 Cálculo variacional

Neste capítulo, procedemos a uma nova formulação (mais abstracta e elegante) da mecânica Lagrangeana. É baseada nos métodos do **cálculo das variações**, que passamos a apresentar.

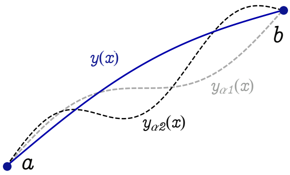
Seja $F = F[y(x), y'(x), x]$ um funcional (i.e. uma função diferenciável que admite como variáveis funções - também estas diferenciáveis). Definamos o seu integral na forma

$$I = \int_a^b F[y(x), y'(x), x] dx.$$

A quantidade I representa uma determinada grandeza física (exemplo: a energia, o preço, a tensão superficial, a temperatura, a humidade...) que pretendemos que seja **extrema** (máximo ou mínimo). Por outras palavras, pretendemos determinar as funções $y(x)$ e $y'(x)$ tornam I **estacionária**.

Designe-se por $y_\alpha(x)$ uma família de funções de parâmetro α construída a partir da função de interesse $y(x)$,

$$y_\alpha(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$$



que satisfazem a **condição de extremos fixos**, $\eta(a) = \eta(b) = 0$. A condição de estacionariedade é, então, aquela que correspondem a variações nulas de I sob a acção da variação de α, i.e. se a **derivada variacional** for nula

$$\delta I \equiv \left.\frac{dI}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0.$$

Usando a definição[1], e notando que $\delta y = \left.\frac{dy_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}, \delta y' = \left.\frac{dy'_\alpha}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx \tag{1}$$

[1]Nota: Neste processo, x é um parâmetro

Integrando por partes o segundo membro da Eq. (1), temos

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \; dx = \cancel{\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_a^b} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y \; dx,$$

onde o primeiro termo se anula pela condição de extremo fixo $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Assim,

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y \, dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \frac{dy_\alpha}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} dx = 0.$$

Embora a variação δy seja nula nos extremos, ela é arbitrária no intervalo $]a, b[$. O integral é nulo, portanto, se

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.}$$

A equação anterior expressa a condição de mínimo de I através de uma equação diferencial para as suas variáveis $y(x)$ e $y'(x)$.

Tal condição é uma das ferramentas fundamentais do cálculo variacional, permitindo investigar uma série de problemas de optimização.

Para uma discussão interessante deste tema com problemas que podem interessar a um/a jovem físico/a, eu aconselho as notas públicas de Riccardo Cristoferi, da Universidade de Radboud (Holanda).

Para os amantes da matemática e dos seus formalismo, uma boa referência é o livro An Introduction To The Calculus Of Variations, de Charles Fox. De resto, *google is your best friend*...

- Exemplo 1: Distância mínima no plano. Para a determinar, comecemos pelo elemento infinitesimal de distância no plano,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) \Rightarrow ds = \pm \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx.$$

Escolhendo o sinal positivo por razões óbvias, podemos escrever

$$S = \int_a^b ds = \int_a^b \overbrace{\sqrt{1 + y'(x)^2}}^{F[y(x), y'(x), x]} \, dx.$$

Assim, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = m,$$

onde m é uma constante. Tomando o quadrado e integrando, obtemos facilmente a equação da recta, $y(x) = mx + b$. ☻

- Exemplo 2: A geodésica. Qual a distância mínima entre dois pontos num espaço curvo? A questão é em tudo semelhante ao exemplo anterior, com a única diferença (importante) de que o intervalo infinitesimal agora envolve da métrica,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau^2 \Rightarrow ds = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau,$$

onde τ é um parâmetro da curva $x^\mu(\tau)$. Repetindo o processo,

$$S = \int_a^b ds = \int_a^b \overbrace{\sqrt{g_{\mu\nu} x'^\mu(\tau) x'^\nu(\tau)}}^{F[x(\tau), x'(\tau), \tau]} d\tau.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial x'^\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} x'^\mu x'^\nu - \frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} \left(x'^\nu \delta_{\mu\alpha} + x'^\mu \delta_{\nu\alpha} \right) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} x'^\mu x'^\nu - \frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\nu} x'^\nu + g_{\mu\alpha} x'^\mu\right) = 0,$$

onde usamos o facto de que $g_{\mu\nu}$ depende de x^α mas não das velocidades x'^α. Temos de trabalhar o segundo termo

$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\nu} x'^\nu + g_{\mu\alpha} x'^\mu\right) = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} x'^\beta x'^\nu + g_{\alpha\nu} x''^\nu + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} x'^\beta x'^\mu + g_{\alpha\mu} x''^\mu.$$

Os termos proporcionais a x'' são iguais (os dois índices mudos estão contraídos), podendo escrever-se como $2 g_{\alpha\nu} x''^\nu$. Assim, temos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} x'^\mu x'^\nu - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} x'^\beta x'^\nu - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} x'^\beta x'^\mu - 2 g_{\alpha\nu} x''^\nu = 0.$$

Trocando os índices mudos $\nu \leftrightarrow \beta$, $\mu \leftrightarrow \nu$ e $\mu \leftrightarrow \beta$ no primeiro, segundo e terceiro termos, respectivamente, e colocando $x'^{\beta}x'^{\mu}$ em evidência, temos

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right)}_{\Gamma_{\alpha\beta\mu}} x'^{\beta}x'^{\mu} + g_{\alpha\nu}x''^{\nu} = 0.$$

Finalmente, multiplicando tudo por $g^{\nu\alpha} = g^{\nu\alpha}$, temos a **equação da geodésica**

$$x''^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\beta}x'^{\mu}x'^{\beta} = 0,$$

onde $\Gamma^{\nu}_{\mu\beta}$ é o símbolo de Christofel[2]

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} = g^{\nu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\alpha}\left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right).$$

[2] Chama-se "símbolo" Christofel pois não se transforma como um tensor.

2.2 O Princípio de Hamilton

Como pudemos perceber, o método variacional resultam em equações que são formalmente equivalentes às equações de Euler-Lagrange, determinadas no Capítulo 1 através do Princípio dos trabalhos virtuais de D'Alembert.

Neste momento, estamos em condições de construir as bases da Mecânica de uma forma mais abstracta e sofisticada, com recurso a um princípio variacional: o **Princípio de Hamilton**. De acordo com este, a trajectória de um determinado sistema físico (descrita pelas coordenadas generalizadas $q_i(t)$) é tal que a **acção é mínima**. Matematicamente, o princípio de Hamilton estabelece que a condição de extremo,

$$\delta S = \delta \int_a^b L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0,$$

implica, por hipótese, uma condição de mínimo. Por esta razão, é também conhecido como **Princípio da Acção Mínima**.

Seguindo a derivação feita no ponto 2.1, calculamos a derivada variacional de S para a família de trajectórias $q_{i,\alpha} = q_i + \alpha\eta_i$ (e, portanto, $\delta q_i = \left.\frac{dq_i}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \eta_i$) na forma

$$\delta S = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt = 0.$$

Integrando por partes e usando a condição de extremos fixos, $\delta q_i(a) = \delta q_i(b)$, juntamente com o facto de que as coordenadas generalizadas q_i são independentes, obtemos as equações de Euler-Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.}$$

O interessante em relação a esta formulação é dupla

- O princípio de Hamilton é compatível com o princípio de d'Alembert
- É automaticamente válido para Lagrangeano generalizados, $L \neq T + V$.

Podemos recuperar, de forma imediata, a invariância para a adição de derivadas totais

$$L' = L + \frac{dF}{dt}.$$

Usando a definição de acção,

$$\delta S' = \delta S + \delta \int_a^b \frac{dF}{dt} dt = \delta S + \delta \left[F(b) - F(a) \right] = \delta S.$$

$\therefore$ A adição de uma derivada total ao Lagrangeano adiciona uma constante espúria à acção (as equações de E-L ficam invariantes).

2.3 Multiplicadores de Lagrange

Até a este ponto, assumimos que as n coordenadas generalizadas $q_i(t)$ são todas independentes entre si. É este facto que nos permite isolar cada um dos pré-factores que multiplicam δq_i na derivada variacional de S (resultando em cada uma das n eqs. do movimento).

Em algumas situações, podemos estar interessados em generalizar o princípio de Hamilton para coordenadas ligadas, i.e. que se relacionam através de uma equação de ligação.

A estratégia é, então, a seguinte:

- Promover as coordenadas ligadas q_k a grau de liberdade
- Adicionar os constrangimentos $f_k(q_i)$ ao Lagrangeano recorrendo a **multiplicadores indeterminados** (multiplicadores de Lagrange).
- Determinar as equações do movimento e concretizar a ligação (i.e. tomar $f_k(q_i) = 0$) e determinar os respectivos multiplicadores.

Consideremos, então $n+m$ coordenadas, tais que as primeiras $i=(1,...,n)$ são independentes (e, portanto, graus de liberdade) e as últimas $k=(n+1,...,m)$ são ligadas de acordo com as ligações holónomas do tipo

$$f_k(q_i,\dot{q}_i,t)=0.$$

Promovamos as m coordenadas ligadas a grau de liberdade, por um momento. Nesse caso, a função de ligação pode tomar qualquer valor não-nulo (por outras palavras: podemos entender graus de liberdade como coordenadas ligadas para as quais não conhecemos as ligações f_k). Assim, definamos o seguinte Lagrangeano constrangido

$$\underbrace{L^\lambda(q_i,\dot{q}_i,t)}_{n+m}=L(q_i,\dot{q}_i,t)+\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k f_k(q_i,\dot{q}_i,t).$$

Continuamos a invocar o princípio da acção mínima,

$$\delta S^\lambda=\int_a^b\left(\delta L+\delta\sum_{k=n+1}^{m}\lambda_k f_k\right)dt=0.$$

O primeiro termo é o habitual (voltamos a introduzir o símbolo de soma para clareza)

$$\int_a^b \delta L \; dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$
$$= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \; dt.$$

O segundo termo, apesar de diferente, é do mesmo tipo (condição de extremos fixos, $\delta q_k(a) = \delta q_k(b) = 0$)

$$\int_a^b \delta \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k f_k \; dt = \int_a^b \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial(\lambda_k f_k)}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial(\lambda_k f_k)}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt$$
$$= \int_a^b \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial(\lambda_k f_k)}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\lambda_k f_k)}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \; dt$$

É de notar que agora temos duas somas que percorrem os índices $i = (1, ..., n)$ e $j = (1, ..., n, n+1, ..., m) = (\{i\}, ..., m)$. É aqui que entra, de facto, a promoção a grau de liberdade das coordenadas ligadas: $\sum_{i=1}^{n} \to \sum_{j=1}^{m}$, e a informação da ligação estará exclusivamente estabelecida assim que voltarmos a fixar $f_k = 0$. Podemos, então, colocar δq_j em evidência

$$\delta S^\lambda = 0 = \int_a^b \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{\partial(\lambda_k f_k)}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(\lambda_k f_k)}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j .$$

Após esta “promoção” a grau de liberdade das m coordenadas ligadas, podemos então invocar a independência dos δq_j, tal que

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^\lambda ,$$

Onde definimos a força generalizada de ligação

$$Q_j^\lambda = \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{\partial(\lambda_k f_k)}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(\lambda_k f_k)}{\partial \dot{q}_j} \right) .$$

Aqui fica claro que λ_k gera a informação sobre as forças de ligação no sistema, que aparecem como consequência da restrição das coordenadas (como veremos, λ_k tem muitas vezes unidades físicas de força).

Na maioria dos casos de interesse, $\lambda_k = \lambda_k(t)$ (quando muito; na verdade assistido quase sempre ao caso $\lambda_k = \mathrm{const}$. A dependência no tempo só vem se for produzida externamente)

$$Q_j^\lambda = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(\lambda_k f_k)}{\partial \dot{q}_j}.$$

- Exemplo 1: A conta no aro. Consideremos uma conta de massa m num aro de raio R. Qual é a força que mantém a conta a uma distância fixa $r = R$?

  A ligação que temos de usar é, neste caso, $f(r) = r - R$. Promovemos r a grau de liberdade,

$$L^{\lambda}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta + \lambda f(r).$$

  Da equação de Euler-Lagrange para a coordenada radial,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda \Longleftrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \lambda.$$

  O valor de λ é agora fixado fazendo uso da equação de ligação, $r = R$, $\ddot{r} = 0$, o que resulta em

$$Q_r^{\lambda} = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = -\left(mgR\cos\theta + mR\dot{\theta}^2\right).$$

- Exemplo 2: O disco que rola sem deslizar. Consideremos um disco de raio R que rola, sem deslizar, por uma rampa de inclinação φ.

$$g(\dot{X},\dot{\theta}) = R\dot{\theta} - \dot{X} = 0 \Longrightarrow f(X,\theta) = R\theta - X + c = 0$$

Promovendo X e θ a graus de liberdade,

$$L^{\lambda}(X,\dot{X},\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right) + mgX\sin\varphi + \lambda f(r).$$

Das equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \lambda R \Longleftrightarrow mR\ddot{\theta} = \lambda$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} = -\lambda \Longleftrightarrow m\ddot{X} - mg\sin\varphi = -\lambda$$

Usando agora que $R\ddot{\theta} = \ddot{X}$, vem $2\lambda = mg\sin\varphi$, pelo que

$$Q_{\theta}^{\lambda} = \lambda\frac{\partial f}{\partial\theta} = \frac{1}{2}mgR\sin\varphi, \quad Q_{X}^{\lambda} = \lambda\frac{\partial f}{\partial X} = -\frac{1}{2}mg\sin\varphi$$

2.4 Simetria e conservação

No capítulo anterior, deparámo-nos com algumas invariâncias contidas nas equações do movimento. Estamos em condições de poder estabelecer, de forma genérica, a relação entre **simetria** e leis de **conservação**.

Comecemos pela mais óbvia. Seja q_i uma coordenada da qual o Lagrangeano não depende explicitamente, i.e. $L = L(\dot{q}_i, t)$ apenas. Neste caso, q_i diz-se **coordenada cíclica** e satisfaz

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

$\therefore$ O **momento canónico** p_i é conservado

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \mathrm{constante}.$$

- Exemplo 1: Conservação do momento linear. Seja x a coordenada que descreve o movimento unidimensional de uma partícula livre

$$L(\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Neste caso, x é uma variável cíclica (o Lagrangeano é simétrico para translações). Assim,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{const}.$$

- Exemplo 2: Conservação do momento angular. Sejam (r, θ) as coordenadas que descrevem o movimento de uma partícula no plano, sob a acção de um potencial $V(r)$

$$L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r).$$

Neste caso, θ é uma variável cíclica (o Lagrangeano é simétrico para rotações). Assim,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} = m \left(\vec{r} \times \vec{v} \right)_z = \text{const}.$$

Conservação da energia

A conservação da energia mecânica está associada à simetria temporal. Contudo, o tempo não entra no formalismo como uma coordenada, mas sim como **parâmetro**. Ainda assim, dizemos que o Lagrangeano é simétrico para translações no tempo sse

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Comecemos por determinar, portanto, a derivada total do Lagrangeano

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i. \\
&= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \\
&= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right),
\end{aligned}$$

onde usámos a eq. de Euler-Lagrange no segundo passo.

Separando os termos nas derivadas totais e parciais, a última equação vem

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Se o Lagrangeano for simétrico para o tempo, então

Identidade de Beltrami

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = 0.$$

$\therefore$ A quantidade

$$h(q_i, \dot{q}_i) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

é conservada. Para Lagrangeanos do tipo $L = T(\dot{q}_i^2) - V(q_i)$, h representa a energia mecânica do sistema

$$h(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i^2) + V(q_i).$$

TÉCNICO LISBOA

É importante notar que o **funcional de energia**

$$h(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

nem sempre corresponde à energia mecânica do sistema. Embora a identidade de Beltrami assegure a sua conservação sempre que o Lagrangeano não dependa explicitamente do tempo, h só corresponderá à energia mecânica $(h = T + V)$ para algumas situações. Na prática, para a maioria dos casos em que $L = T - V$; quase nunca para **problemas paramétricos**, i.e. para sistemas que são actuados externamente através, onde há controle de um ou vários parâmetros da teoria.

A análise do significado físico de h requer algum cuidado e devemos fazê-la sempre no contexto específico de cada problema. Não conheço - confesso - nenhum critério geral para garantir a correspondência unívoca entre h e a energia mecânica de um sistema. Vejamos exemplos.

- Exemplo 1.1: A conta no aro que gira rigidamente. Considere uma conta de massa m no aro de raio R. Suponhamos que o aro é colocado a girar a uma velocidade constante $\dot{\varphi} = \omega$.

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 \theta \right) + mgR \cos \theta.$$

Como $L \neq L(t)$, então, pela identidade de Beltrami,

$$\begin{aligned} h(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L \\ &= \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 - R^2 \omega^2 \sin^2 \theta \right) - mgR \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \omega^2 \sin^2 \theta \right) - mgR \cos \theta - mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Neste caso, $h = T + V - mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta = \text{const.} \neq T + V$. Tal acontece porque $\dot{\varphi} = \omega$ esconde uma ligação holónoma reónoma, $f(t, \varphi) = \varphi - \omega t$.

- Exemplo 1.2: A conta no aro que gira livremente. Permitamos, agora, que o aro gire livremente sobre o seu eixo. Como costumamos dizer, promovamos φ a grau de liberdade.

$$L(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + mgR \cos \theta.$$

Mais uma vez, como $\partial_t L = 0$,

$$\begin{aligned} h(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L \\ &= \frac{1}{2} m \left(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) - mgR \cos \theta. \end{aligned}$$

Neste caso, $h = T + V = \text{const.}$

A diferença importante é que, no caso da rotação livre, a ligação holónoma reónoma equivale a transformar o problema num referencial em rotação (que, como sabemos, é não inercial, não gozando, portanto, das mesmas propriedades de conservação).

Vejamos, agora, como a questão das transformações de coordenadas afectam a nossa percepção da conservação da energia mecânica.

- Exemplo 2.1: Atrito sem Rayleigh. Em alguns casos, é possível descrever atrito sem recorrer aos potenciais de Rayleigh. Consideremos o seguinte Lagrangeano:

  $$L(q, \dot{q}, t) = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right).$$

  A equação do movimento produz

  $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Longleftrightarrow \ddot{q} + \gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (\omega_0 = \sqrt{k/m}),$$

  que reconhecemos como a equação do oscilador harmónico amortecido.

  $$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -\gamma e^{\gamma}t\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2\right) = -\gamma L,$$

  onde $h = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = e^{\gamma t}(T + V) \neq T + V$. Não há conservação de h (e h não é a energia mecânica do sistema).

- Exemplo 2.2: Atrito sem Rayleigh + transformação. Revisitemos o exemplo anterior com a transformação $s = e^{\gamma/2t} q$.

$$L(s, \dot{s}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{s}^2 + \frac{\gamma^2 s^2}{4} - \gamma s \dot{s} \right) - \frac{1}{2} k s^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{s} - \frac{\gamma}{2} s \right)^2 - \frac{1}{2} k s^2.$$

Neste referencial, a equação do movimento é

$$\ddot{s} + \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right) s = 0,$$

onde identificamos a frequência de $\mathrm{Re}\, q(t)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$. Já a energia vem, desta vez, conservada

$$h(s, \dot{s}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \dot{s} - L = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 s^2 = T(\dot{s}^2) + V(s).$$

☺☺☺

Teorema de Nöther

Fechamos este capítulo com um resultado geral sobre as simetrias e as leis de conservação. É um dos triunfos do Princípio de Hamilton (e, portanto, do cálculo variacional) que tem tanto de abstracto como de poderoso.

Para isso, comecemos por distinguir **transformações discretas** de **transformações contínuas**. As últimas são caracterizadas pela existência de um parâmetro ϵ que as torna diferenciáveis. Em oposição, as primeiras são todas aquelas que não verificam esta propriedade.

O **Teorema de Nöether** diz-nos, em suma, que "para cada simetria contínua do Lagrangeano, existe uma quantidade conservada associada". Vejamos como o formulamos matematicamente e como é que podemos extrair as leis de conservação a partir da identificação das simetrias.

Alguns exemplos de **transformações discretas** são

- Paridade, $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}[f] = -f$
- Conjugação de carga, $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}[f] \to f^*$ (para variáveis complexas!)
- Inversão do tempo, $\mathcal{T}$: $\mathcal{T}[f(t)] = f(-t)$

As combinações das simetrias $\mathcal{CP}$ e $\mathcal{CPT}$ são pilares fundamentais da física moderna (por exemplo, controlam ou não a adição de novas partículas ao Modelo Standard).

Alguns exemplos de **transformações contínuas** (infinitesimais) são

- Translação: $f(x) \to f(x+\epsilon) = f(x) + \epsilon x$
- Rotação: $f(\vec{x}) \to f(\vec{x} + \epsilon \mathbf{R}(\theta)\vec{x}) = f(\vec{x}) + \epsilon \mathbf{R}(\theta)\vec{x}$
- Dilatação: $f(x) \to f(\epsilon x)$.

Estas últimas transformações dizem-se homogéneas se $f(\epsilon x) = \epsilon^\alpha f(x)$, onde α designa o grau da homogeneidade (só por curiosidade...)

Consideremos, para já, uma classe de transformações contínuas para as coordenadas generalizadas,

$$q_i(t) \to q_i(t, \epsilon) = q_i(t) + \epsilon \eta_i(t).$$

A sua derivada variacional é, portanto, definida da forma usual

$$\delta q_i = \left. \frac{dq_i}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \eta_i.$$

Assumamos que o Lagrangeano é invariante para a transformação acima

$$L(q_i) = L(q_i + \epsilon \eta_i) \Longrightarrow \delta L = \left. \frac{dL}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0.$$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} 0 = \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right). \end{aligned}$$

Para a classe de transformações acima definida, temos então o resultado do Teorema de Nöether na sua forma fraca

Teorema de Nöether

Se $\delta L = 0$, então

$$\mathcal{I}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\eta_i = \text{constante}$$

A forma forte deste teorema é obtido definindo simetrias espacio-temporais, para as quais a seguinte família de transformações contínuas se deve usar

$$q_i(t,\epsilon) = q_i(t) + \epsilon\eta_i(t), \quad \tau(t,\epsilon) = t + \epsilon\psi(t).$$

Neste caso, como t é um parâmetro do Lagrangeano (e não uma coordenada generalizada), as derivadas variacionais devem ser tomadas para a acção S, e não para o Lagrangeano (fica aqui o desafio de pensarmos nesta formulação...)

- Exemplo 1. Conservação do momento linear. Seja

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

. Como sabemos, L é invariante para translações. Na linguagem do teorema de Nöether, a teoria é simétrica para a transformação

$$x(t) \to x(t, \epsilon) = x(t) + \epsilon.$$

Identificando $\eta_x = 1$ na classe de transformações contínua de que faz parte, temos

$$\mathcal{I}(\dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \eta_x = m\dot{x}.$$

É um exemplo trivial, assumamos. Mas o importante é agora estarmos na posse de uma ferramenta que nos permite calcular de forma sistemática quantidades conservadas nos nossos problemas físicos, sem que para isso necessitemos de integrar as equações do movimento.

- Exemplo 2. Conservação do momento angular. Seja

$$L(x,\dot{x},y,\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + V(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Como sabemos, L é invariante para rotações, i.e. para a transformação[3]

$$x_i(t) \to x_i(t,\epsilon) = x_i(t) + \epsilon R_{ij} x_j(t), \quad R_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Identificando $\eta_i = R_{ij} x_j$ na classe de transformações contínua de que faz parte, temos

$$\mathcal{I} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\eta_i = m\dot{x}_i R_{ij} x_j = m\left(-\dot{x}_1 x_2 + \dot{x}_2 x_1\right) = m\left(x\dot{y} - \dot{x}y\right),$$

onde facilmente identificamos $\mathcal{I} = m(\vec{r}\times\vec{v})_z = \ell_\theta$, i.e. a conservação do momento angular segundo z.

[3]Nota: $(x_1, x_2) = (x, y)$, bem entendido...