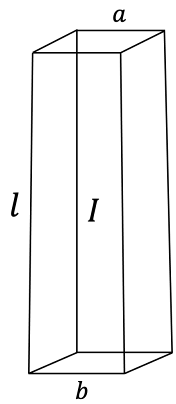
Proposta de resolução do **1º Teste de Eletromagnetismo**
MEFT
Prof. Pedro Abreu
13 de julho de 2021

Versão: 1{2} **Duração do Teste: 1h 30m** $\varepsilon_0 = 8{,}854\text{x}10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N/A^2

Por determinação do Conselho Pedagógico, informamos que só serão cotadas as respostas que contribuam de forma significativa para os resultados ou demonstrações pedidas.



(3,0) **1)** Uma resistência elétrica, constituída por um material de condutividade elétrica $\sigma = 5{,}97\{3{,}8\} \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, possui uma forma piramidal de base quadrada e de altura $l = 2\{4\}$ m, em que o topo superior possui um lado $a = 0{,}1\{0{,}2\}$ m e a base inferior um lado $b = 0{,}12\{0{,}22\}$ m. A inclinação do cone é pequena ($b \approx a$ face a l), pelo que se pode considerar a densidade de corrente sempre paralela ao eixo do cone. A figura não está à escala!
Sabendo que a resistência é percorrida por uma corrente $I = 5\{4\}$ A, calcule

[1,0] **a)** a densidade de corrente elétrica ao longo do condutor;
[R: *Seja o sentido da corrente de baixo para cima, definindo assim também o eixo* $\vec{e}_z$. *A densidade de corrente varia com* z, *pois a área da secção transversal varia com* z *e a corrente total assume-se uniforme na secção transversal. A área da secção transversal é* $S(z) = \left(b - \frac{b-a}{l}z\right)^2$ *e a densidade de corrente elétrica é assim* $\vec{J} = \frac{I}{S(z)}\vec{e}_z = \frac{I}{\left(b-\frac{b-a}{l}z\right)^2}\vec{e}_z = \frac{1}{(0{,}054\{0{,}11\}-4{,}47\{2{,}5\}\times 10^{-3}z)^2}\vec{e}_z$ (A/m^2).]

[0,5] **b)** o campo elétrico ao longo do condutor;
[R: $\vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{J} = \frac{1}{5{,}97\{3{,}8\}\times 10^7(0{,}054\{0{,}11\}-4{,}47\{2{,}5\}\times 10^{-3}z)^2}\vec{e}_z = \frac{1}{(414\{679\}-34{,}5\{15{,}4\}z)^2}\vec{e}_z$(V/m).]

[1,0] **c)** a resistência elétrica do condutor; particularize o resultado para um condutor na forma de um paralelepípedo ($b = a$);
[R: $R = \int_0^l \frac{dz}{\sigma S(z)} = \int_0^l \frac{dz}{\sigma\left(b-\frac{b-a}{l}z\right)^2} = \frac{l}{\sigma(b-a)}\left(\frac{1}{b-\frac{b-a}{l}z}\bigg|_0^l\right) = \frac{l}{\sigma(b-a)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = \frac{l}{\sigma ab} = 2{,}79\{2{,}39\}\ \mu\Omega$ *;*
para o caso particular $b = a$, *temos* $R = \frac{1}{\sigma a^2} = 3{,}35\{2{,}63\}\ \mu\Omega$.]

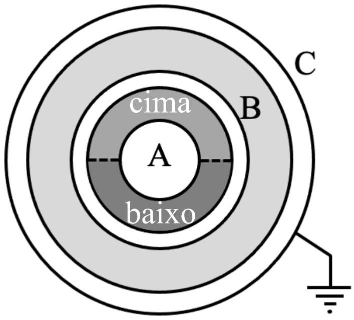
[0,5] **d)** a tensão elétrica entre a base e o topo.
[R: $V = RI = 14{,}0\{9{,}6\}\ \mu\text{V}$.]

(3,0) **2)** Considere um solenoide de comprimento $l = 2\{4\}$ m, secção circular de raio $R = 0{,}05\{0{,}1\}$ m, com $N = 2000\{4000\}$ espiras transportando uma corrente $I = 4\{5\}$ A.
Usando as aproximações que achar convenientes,

[1,0] **a)** Calcule o campo magnético no interior do solenoide, longe das extremidades;
[R: *Como $l \gg R$, podemos assumir a aproximação do solenoide infinito, no interior do solenoide e longe das extremidades. Usamos a lei de Ampère para uma linha fechada, constituída por 4 segmentos de recta paralelos formando um rectângulo, sendo um dos lados de tamanho L coincidente com o eixo do solenoide (eixo $\vec{e}_z$), e o lado oposto fora do solenoide, por ex^o^ à distância $d = 2R$. A corrente que atravessa a superfície delimitada por este rectângulo é nLI, em que $n = \frac{2000\{4000\}}{2\{4\}} = 1000\ \text{espiras/m}$ é a densidade linear de espiras. A lei de Ampère diz-nos então que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 nLI \Leftrightarrow B_I \cdot L + 0 + B_E \cdot L + 0 = \mu_0 nLI \Leftrightarrow B_I + B_E = \mu_0 nI$, pois o campo $\vec{B}$ é paralelo ao eixo do solenoide, e não depende da coordenada z enquanto estivermos longe das extremidades. Por outro lado, usando o mesmo rectângulo mas com o lado exterior a uma distância maior, por ex^o^ $d' = 4R$, a lei de Ampère diz-nos que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 nLI \Leftrightarrow B_I \cdot L + B_E' \cdot L = \mu_0 nLI \Leftrightarrow B_I + B_E' = \mu_0 nI$. Assumindo ainda que no infinito o campo deve ser nulo, concluímos assim que $B_E = B_E' = 0$, e que $B_I = \mu_0 nI$. Usando agora o rectângulo inicial, mas em que o lado interior não esteja no eixo do solenoide, mas a uma distância $R/2$ deste, temos $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 nLI \Leftrightarrow B_I' \cdot L + B_E \cdot L = \mu_0 nLI \Leftrightarrow B_I' = B_I = \mu_0 nI$. Concluímos finalmente que, longe das extremidades, o campo magnético no interior do solenoide é uniforme e dado por* $\vec{B} = \mu_0 nI\vec{e}_z = \mu_0 1000 \cdot 4\{5\}\vec{e}_z = 5{,}03\{6{,}28\}\, \vec{e}_z\ (m\text{T})$.]

[1,0] **b)** Calcule o coeficiente de auto-indução do solenoide;
[R: *O coeficiente de auto-indução é dado pela expressão $L = \frac{\Phi}{I}$ sendo $\Phi = N\Phi_1$ e Φ_1 o fluxo que atravessa uma espira (ou a secção circular do solenoide). Temos então, usando a aproximação do solenoide infinito,* $L = \frac{N}{I}\iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS \Leftrightarrow L = \frac{N}{I} \cdot \mu_0 nI \cdot \pi R^2 = \mu_0 n^2 l\pi R^2 = 19{,}7\{158\}$ mH.]

[1,0] **c)** Estime a intensidade do campo magnético no eixo do solenoide numa das extremidades, justificando a sua resposta (*sugestão: tire partido da aproximação realizada e da simetria do sistema*).
[R: *Para calcular o campo magnético numa das extremidades, em que já não podemos assumir a aproximação do solenoide infinito, notamos que, se tivéssemos um solenoide igual colado ao solenoide original, a aproximação do solenoide infinito era válida e estaríamos no centro desse novo solenoide com o dobro do comprimento, onde o campo magnético seria $\vec{B} = \mu_0 nI\vec{e}_z$. Ora este campo também é a soma da contribuição do solenoide do lado esquerdo, com a contribuição do solenoide do lado direito, que tem de ser igual dada a simetria. Temos então que $2B_{extremo} = \mu_0 nI$ ou que* $B_{extremo} = \frac{\mu_0 nI}{2} = \frac{5{,}03\{6{,}28\}}{2} = 2{,}51\{3{,}14\}\ (m\text{T})$.]



(4,0) **3)** Considere o sistema da figura, representando três **condutores A**, **B** e **C**, de simetria **CILÍNDRICA**. O **condutor A**, maciço e de raio $R_A = 0{,}05\{0{,}1\}$ m, está rodeado por 2 meios LHI* de constantes dielétricas respetivamente iguais a $\varepsilon_{\text{cima}} = 4\{3\}\varepsilon_0$ e $\varepsilon_{\text{baixo}} = 8\{6\}\varepsilon_0$, com formas semi-cilíndricas, por uma coroa cilíndrica **B condutora** de raio interior $R_{BI} = 0{,}10\{0{,}30\}$ m e raio exterior $R_{BE} = 0{,}12\{0{,}32\}$ m, por um meio com constante dielétrica $\varepsilon_3 = 2\{4\}\varepsilon_0$ e por uma coroa cilíndrica **C condutora** de raios interior $R_{CI} = 0{,}20\{0{,}50\}$ m e raio exterior $R_{CE} = 0{,}25\{0{,}55\}$ m. A coroa cilíndrica condutora **C está ligada à Terra** (potencial 0 V). O condutor **A** tem uma densidade de carga (livre) $\lambda_A = 10\{20\}$ nC/m e o condutor **B não está carregado**. (…!)

[1,0] **a)** Calcule o campo elétrico em todo o espaço (*tenha em atenção a continuidade do campo elétrico*);
[R: *Estando o condutor exterior ligado à Terra e não havendo mais cargas entre os cilindros e o infinito, onde o campo é nulo, podemos assumir que o campo é nulo para* $r > R_{CE}$. *Como no interior dos condutores em equilíbrio eletrostático também temos campo elétrico nulo, podemos escrever que* $\vec{E} = 0$ *para* $r > R_{CI}, R_{BE} > r > R_{BI},$ *e* $r < R_A$. *Para calcular o campo nas outras regiões, usamos a simetria do sistema para afirmar que o campo elétrico só pode ter componente perpendicular ao eixo axial dos cilindros,* $\vec{E} = E(r)\vec{e}_R$, *e usamos T.Gauss para* $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, *numa superfície cilíndrica fechada de comprimento* l *e raio* r *(distância ao eixo dos cilindros):* $\oiint \vec{D}\cdot\vec{n}dS = Q_{\text{int}}$. *Para* $R_{BE} < r < R_{CI}$, *em que o meio é homogéneo, a carga interior é apenas* $Q_{\text{int}} = Q_A$, *pois* $Q_B = 0$. *Temos* $D(R)\cdot 2\pi rl = Q_A = \lambda_A l \Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\lambda_A}{2\{4\}\varepsilon_0\cdot 2\pi r}\vec{e}_z = \frac{10\{20\}\times 10^{-9}}{4\{8\}\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_R \cong \frac{90\{90\}}{r}\vec{e}_R$ (V/m) . *Para* $R_A < r < R_{BI}$, *o meio não é homogéneo, mas separado em dois meios iguais com a superfície de separação perpendicular ao eixo dos cilindros. Ora, como o campo elétrico é tangencial a esta superfície, tem de ser contínuo, isto é, temos de ter à distância* r *os campos iguais,* $E_{\text{cima}} = E_{\text{baixo}} = E(R)$, *o que implica para o campo de deslocamento elétrico que* $D_{\text{cima}} = \varepsilon_{\text{cima}}E(R) = \frac{\varepsilon_{\text{cima}}}{\varepsilon_{\text{baixo}}}D_{\text{baixo}}$.
A expressão para o teorema de Gauss permite-nos afirmar que $\oiint \vec{D}\cdot\vec{n}dS = Q_{\text{int}} = \lambda_A l \Leftrightarrow$ $D_{cima}\pi rl + D_{baixo}\pi rl = \lambda_A l \Leftrightarrow \varepsilon_{cima}E(r)\pi rl + \varepsilon_{baixo}E(r)\pi rl = \lambda_A l$, *obtendo então para o campo elétrico a expressão* $\vec{E} = \frac{\lambda_A}{(\varepsilon_{cima}+\varepsilon_{baixo})\pi r}\vec{e}_R = \frac{10\{20\}\times 10^{-9}}{12\{9\}\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_R \cong \frac{30\{80\}}{r}\vec{e}_R$ (V/m) . *Resumindo, temos:* $\vec{E} = E(R)\vec{e}_R = 0$, *excepto em* $R_A < r < R_{BI}$: $E(R) = \frac{30\{80\}}{r}$ *e* $R_{BE} < r < R_{CI}$: $E(R) = \frac{90\{90\}}{r}\left(\frac{V}{m}\right)$.]

[1,0] **b)** Calcule o potencial elétrico em todo o espaço;
[R: *Como o campo elétrico no exterior é nulo e o condutor C está ligado à Terra, o potencial é nulo para* $r \geq R_{CI}$.
Para $R_{BE} \leq r \leq R_{CI}$, $\phi(r) = \int_r^{R_{CI}}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \phi_C = \int_r^{R_{CI}}\frac{90\{90\}}{r}dr + 0 = 90\{90\}\log\frac{0{,}2\{0{,}5\}}{r}$ (V),
obtendo para $R_{BI} \leq r \leq R_{BE}$: $\phi(r) = \phi_B = \phi(r = R_{BE}) = 90\{90\}\log\frac{0{,}2\{0{,}5\}}{0{,}12\{0{,}32\}} \cong 46{,}0\{40{,}2\}$ (V);
para $R_A \leq r \leq R_{BI}$, $\phi(r) = \int_r^{R_{BI}}\vec{E}\cdot d\vec{l} + \phi_B = \int_r^{R_{BI}}\frac{30\{80\}}{r}dr + 46{,}0\{40.2\}$, *ou*
$\phi(r) = 30\{80\}\log\frac{R_{BI}}{r} + 46{,}0\{40{,}2\} = 30\{80\}\log\frac{0{,}10\{0{,}30\}}{r} + 46{,}0\{40{,}2\}$ (V), *obtendo para*
$r \leq R_A$: $\phi(r) = \phi_A = \phi(r = R_A) = 30\{80\}\log\frac{0{,}10\{0{,}30\}}{0{,}05\{0{,}10\}} + 46{,}0\{40{,}2\} = 66{,}8\{128\}$ (V) .]

[1,0] **c)** Calcule a capacidade do sistema por unidade de comprimento;
[R: $C = Q/V = Q_A/(\phi_A - \phi_C) \Leftrightarrow C/l = \lambda_A/\phi_A = 10\{20\}$ nC$/66{,}8\{128\} = 150\{156\}$ pF.]

[1,0] **d)** Calcule as densidades **superficiais** de carga (**livre, σ**) nas superfícies de separação entre os meios.
[R: *Só existem cargas livres nas superfícies dos condutores A, B e C. Para cada superfície podemos usar a descontinuidade* $\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot\vec{n} = \sigma$, *com* $\vec{D}_{2(1)}\cdot\vec{n} = D(R_X^{+(-)})$ *para a superfície em* R_X. *Temos assim, em* nC/m^2, $\sigma_{CE} = 0$, $\sigma_{CI} = \varepsilon_3\frac{90}{R_{CI}} = -7{,}96\{-6{,}37\}$, $\sigma_{BE} = \varepsilon_3\frac{90}{R_{BE}} = 13{,}3\{9{,}95\}$ nC/m^2 . *Em* R_{BI} *e* R_A, *temos de separar as cargas nas calotes de cima das de baixo,* $\sigma_{BI_{cima}} = -\varepsilon_{cima}E(R_{BI}^-) = -10{,}6\{-7{,}1\}$ *e* $\sigma_{BI_{baixo}} = -\varepsilon_{baixo}E(R_{BI}^-) = -21{,}2\{-14{,}2\}$, $\sigma_{A_{cima}} = \varepsilon_{cima}E(R_A^+) = 21{,}25\{21{,}25\}$, $\sigma_{A_{baixo}} = \varepsilon_{baixo}E(R_A^+) = 42{,}5\{42{,}5\}$.]