Cálculo Diferencial e Integral I/MEEC
2011/2012
Resolução do 2º Teste

Problema 1 (2,0 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} \qquad (b)\ g(x) = x\log x \qquad (c)\ h(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}$$

Resolução:

(a) $u = x^2+1, du = 2xdx : \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}du = \frac{3}{4}u^{2/3} = \frac{3}{4}\left(x^2+1\right)^{2/3}$

(b) $u' = x, v = \log x : \displaystyle\int x\log x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\arctan u = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Problema 2 (2,0 val.) Calcule a área da região do plano delimitada pelas curvas

$$y = x^3 - 2x^2 - 2x \text{ e } y = -x^2.$$

A área da região em causa é superior, igual ou inferior a 3?

Resolução:

$$x^3 - 2x^2 - 2x = -x^2 \iff x^3 - x^2 - 2x = 0 \iff x(x^2 - x - 2) = 0 \iff x(x-2)(x+1) = 0$$

As duas curvas intersectam-se portanto em $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$. Como a parábola está voltada para baixo, temos certamente que a cúbica está sobre a parábola para $x > 2$, sob a parábola entre 0 e 2, e sobre a parábola entre -1 e 0. A área A é portanto dada por

$$A = \int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)dx + \int_{0}^{2}(-x^3 + x^2 + 2x)dx$$

Com $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 = \int(x^3 - x^2 - 2x)dx$, temos então

$$A = F(0) - F(-1) - F(2) + F(0) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{16}{4} + \frac{8}{3} + 4 = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} > 3$$

Problema 3 (1,5 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt[3]{1+k^2}} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{3^k(k!)^2} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2-n}$$

Resolução:

(a) SIMPLESMENTE CONVERGENTE:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+k^2}}$ é divergente, por comparação com $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$, ou seja,

$$\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{1+k^2}}}{\frac{1}{k^{2/3}}} \to 1 \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \text{ diverge, quando } \alpha \leq 1$$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt[3]{1+k^2}}$ é convergente, pelo critério de Leibniz, ou seja,

$$\text{A série é alternada e } \frac{1}{\sqrt[3]{1+k^2}} \searrow 0$$

Problema 4 (1,5 val.) Calcule os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{3x^2 + x \operatorname{sen} x} \qquad (b)\ \lim_{x\to 1^+} \operatorname{sen}(x-1)\log(x-1) \qquad (c)\ \lim_{x\to+\infty} (1+\operatorname{sen}(1/x))^x$$

RESOLUÇÃO:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{3x^2 + x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2xe^{x^2}}{6x + \operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2}}{6 + 2\cos x - x \operatorname{sen} x} = -\frac{1}{4}$

(b) $\lim_{x\to 1^+} \operatorname{sen}(x-1)\log(x-1) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log t}{1/\operatorname{sen}(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-\cos t/\operatorname{sen}^2(t)} = -\lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t\cos t} = -\lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = 0$

(c) $(1+\operatorname{sen}(1/x))^x = e^{x\log(1+\operatorname{sen}(1/x))}$ e temos

$$\lim_{x\to+\infty} x\log(1+\operatorname{sen}(1/x)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log(1+\operatorname{sen} t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t} = 1$$

Concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} (1+\operatorname{sen}(1/x))^x = \lim_{t\to 0^+} e^{\log(1+\operatorname{sen} t)/t} = e$$

Problema 5 (2,0 val.) Diga se $f'(0) > 1$, $f'(0) < 1$ ou $f'(0) = 1$, em cada um dos seguintes casos:

$$(a)\ f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad (b)\ f(x) = (x+1)^{\tan x} \qquad (c)\ f(x) = \operatorname{arcsen}^2(\frac{1}{2}e^{3x})$$

RESOLUÇÃO:

(a) $f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}, f'(0) = \frac{(1+1)^2 - (1-1)^2}{(1+1)^2} = 1$

(b) $f(x) = e^{\tan x \log(x+1)}, f'(x) = e^{\tan x\log(x+1)}\left(\sec^2 x\log(x+1) + \frac{\tan x}{x+1}\right), f'(0) = 0 < 1$

(c) $f'(x) = 2\operatorname{arcsen}(\frac{1}{2}e^{3x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}e^{3x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}e^{3x} \cdot 3, f'(0) = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{2})\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}3 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} < 1$

Problema 6 (1,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x\left(1 - e^{-x^4}\right)$.

(a) Determine a série de Maclaurin de f, i.e., a série de Taylor de f em $a = 0$. Qual é o menor valor de n para o qual $f^{(n)}(0) > 0$?

RESOLUÇÃO:

- Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, temos $e^{-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{4n}$
- Segue-se que $1 - e^{-x^4} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{4n}$ e $x\left(1 - e^{-x^4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^{4n+1}$
- O 1º termo da série com coeficiente $\neq 0$ é $\frac{(-1)^1}{1!} x^{4+1} = x^5$. Segue-se que $f^{(5)}(0) = 120 \neq 0$ e $f^{(n)}(0) = 0$ para $n < 5$.

(b) Para que valores de x é que a série de Maclaurin de f é igual à função f?

RESOLUÇÃO:

A série de Maclaurin de e^x tem raio de convergência $R = \infty$. Portanto a série indicada converge para f para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(c) Mostre que $0 < \frac{1}{32} - f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{1000}$.

RESOLUÇÃO:

A série $f(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n! 2^{4n+1}}$ é alternada e $\frac{1}{n! 2^{4n+1}} \searrow 0$.

Escrevendo $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n+1}}{n! 2^{4n+1}}$, temos então

$$S_1 > f(1/2) > S_2 \text{ donde } S_1 - S_2 > S_1 - f(1/2) > 0$$

Como $S_1 = 1/32$ e $S_2 - S_1 = \frac{1}{2 \times 2^9} = \frac{1}{1.024} < \frac{1}{1000}$, é evidente que

$$0 < \frac{1}{32} - f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{1000}$$