Transformadas de Legendre: exemplo simples

- Se $f = f(x)$, a função $g = g(y)$, $g = f - xy$, com $y = \frac{df}{dx}$ tem a mesma informação que f (é possível reconstruir f a partir de g), se f' tiver inversa (i.e., f for côncava). A reconstrução faz-se a partir de $g = f + xy$, com $x = -\frac{dg}{dy}$.

- Exemplo: $f(x) = x^2$; $y = f'(x) = 2x$

$y(x) = 2x$; f' tem inversa: $x(y) = \frac{y}{2}$

$$g = f - xy \quad ; \quad g(y) = f[x(y)] - x(y)\,y$$

$$\left(g = f - x\frac{df}{dx}\right) \qquad = f\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{y}{2}\,y = \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{2} = -\frac{y^2}{4}$$

—||—

reconstrução de f a partir de g:

$$f = g - y\frac{dg}{dy} = g + xy$$

$$x = -\frac{dg}{dy} = +\frac{y}{2} \quad \rightarrow \quad y(x) = 2x$$

$$f(x) = g[y(x)] + x\,y(x) = g(2x) + x(2x) = -\frac{4x^2}{4} + 2x^2 = x^2$$