Mecânica Analítica

2020-2021

Série 6

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

Nesta série, estudamos as oscilações forçadas e ilustramos os principais aspectos do formalismo Hamiltoniano.

$\star\star$ **Problema 1. O pêndulo invertido.** Considere um pêndulo de massa m e haste de comprimento ℓ, suportado num ponto de massa desprezável que se pode deslocar verticalmente.

a) Mostre que a equação do movimento para θ é

$$\ddot{\theta} + \frac{\ddot{Y}}{\ell}\sin\theta + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0.$$

b) Considere agora que a massa executa o movimento oscilatório $Y(t) = A\cos(\Omega t)$. Linearize o problema em torno dos pontos de equilíbrio $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$ para obter a equação de Mathieu

$$\ddot{\theta} \pm \omega_0^2\left[1 \pm \epsilon\cos(\Omega t)\right]\theta = 0, \quad (\omega_0 = \sqrt{g/\ell}).$$

c) Na aula teórica, procurando soluções do tipo $\theta(t+T) = e^{\mu T}\theta(t)$ (onde τ é o período), vimos que as oscilações perto do ponto $\theta_0 = 0$ são instáveis ($\mu > 0$) se

$$\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) < \frac{\Omega}{\omega_0} < \left(2 + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

Pretendemos perceber o que acontece genericamente (qualquer ângulo) para o caso $\Omega \gg \omega_0$. Para tal, separemos a solução numa parte lenta e numa parte rápida, $\theta = \varphi + \delta$, de tal forma que a componente rápida seja a parte forçada da equação de Mathieu, $\delta = (A/\ell)\cos(\Omega t)\sin(\varphi)$. Desprezando os termos $\mathcal{O}(\delta^2)$, e fazendo uma média sobre a parte rápida, mostre que a equação para a parte lenta se obtém

$$\ddot{\varphi} \simeq -\left(\omega_0^2\sin\varphi + \frac{1}{2}\frac{A^2\Omega^2}{\ell^2}\sin\varphi\cos\varphi\right).$$

d) Mostre que os ângulos $\pi/2 < \varphi < \pi$ podem ser estabilizados neste regime e determine a frequência ω das pequenas oscilações δ.

$\star$ **Problema 2. Transformações de Legendre.** Seja $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ um Lagrangeano de um determinano sistema de n graus de liberdade. Definimos o Hamiltoniano $H = H(q_i, p_i, t)$ através de uma transformação de Legendre do tipo

$$H(q_i, p_i, t) = p_i\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

a) Obtenha as equações do movimento em termos das coordenadas q_i e p_i.

b) Usando o método variacional, e impondo a condição de extremo para a variação$-\delta$,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0$$

mostre que as mesmas equações do movimento poderiam ser obtidas. Verifica-se, assim, a consistência entre as equações de Hamilton e o princípio variacional de Hamilton.

c) Considere a transformação de Legendre do tipo

$$K(\dot{q}_i, \dot{p}_i, t) = \dot{p}_i q_i - L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Que equações de movimento obteria neste caso? Para um sistema com n graus de liberdade, de quantas condições iniciais necessita para integrar as equaçõs do movimento?

$\star$ **Problema 3. O pêndulo revisitado.** Considere um pêndulo simples com haste indeformável de comprimento ℓ, que pode movimentar-se sob a acção da gravidade. Considere θ como sendo o ângulo que a haste faz com a vertical. Um Lagrangeano do sistema é dado por

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m g \ell \cos\theta.$$

a) Construa o Hamiltoniano correspondente a este sistema e obtenha as equações do movimento.

b) Justifique se o Hamiltoniano é, ou não, conservado e se corresponde, ou não, à energia mecânica do sistema.

c) Construa o *espaço de fases*[1] (p_θ, θ) e descreva qualitativamente o movimento em função da energia E.

d) Estude a estabilidade perto do pontos de equilíbrio e perceba como retirar essa informação directamente do espaço das fases, i.e. sem ter de resolver as equações do movimento.

$\star\star$ **Problema 4. O potencial central revisitado.** Considere o problema do potencial central no plano (r, θ), cujo Lagrangeano é

$$L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(r).$$

a) Obtenha o Hamiltoniano do sistema, $H = H(r, p_r, \theta, p_\theta)$.

b) Identifique a(s) coordenada(s) cíclica e obtenha o problema reduzido.

c) Construa o espaço de fases (p_r, r) para o potencial $V(r) = -k/r$. Descreva qualitativamente todos os tipos de órbitas que encontra.

d) Repita o procedimento anterior para o potencial

$$V(r) = -\frac{k_1}{r} - k_2 r^2$$

e mostre que a separatriz é finita, fechando-se num raio r_c.

[1] Também conhecido como "retrato de fases".