

TERMODINÂMICA E ESTRUTURA DA MATÉRIA

2º Teste

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente detalhadamente todos os cálculos que efectuar.

1. [7 val]

- (a) [2 val] Partindo da definição da energia livre de Helmholtz, obtenha a relação de Maxwell $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$
- (b) Um gás de N partículas obedece à equação de estado $P(V - Nb) = Nk_B T$. O número de partículas mantém-se fixo.
- [1 val] Descreva as diferenças entre esta equação de estado e do gás ideal e indique qualitativamente o seu significado físico.
 - [2 val] Mostre que a energia interna U depende apenas da temperatura.
[Sugestão: considere $S = S(T, V)$ e calcule dU]
 - [2 val] Mostre que a equação de estado se pode escrever na forma de uma expansão de virial, $\frac{PV}{Nk_B T} = 1 + B_2(T)\frac{Nb}{V} + \dots$ e calcule $B_2(T)$. Comente o resultado, em particular o sinal de $B_2(T)$.

2. [6 val] Um fio condutor cilíndrico de condutividade térmica κ , raio R e resistividade ρ transporta um corrente eléctrica I uniformemente distribuída na secção. A densidade de corrente é então $j = I/\pi R^2$.

- (a) [4 val] Suponha que a superfície do condutor ése encontra à temperatura T_0 , imposta por arrefecimento a água. Sabendo que a potência gerada (quantidade de calor por unidade de tempo) no interior duma superfície cilíndrica de raio r , por unidade de comprimento, é dada por $\frac{dQ}{dt}(r) = j^2 \rho \pi r^2$, mostre que o perfil de temperatura no interior do condutor é dado por

$$T(r) = T_0 + \frac{\rho I^2}{4\pi^2 R^4 \kappa} (R^2 - r^2) .$$

- (b) [2 val] Suponha agora que o fio está em contacto com o ar (ou seja, sem arrefecimento forçado por água). A temperatura do ar exterior é T_{ar} . Sabendo que o coeficiente de convecção entre a superfície exterior do condutor e o ambiente é h_{ar} , determine a temperatura na superfície do condutor.

3. [7 val] Um sistema é formado por duas partículas idênticas, cada uma das quais pode ocupar um de três estados, cujas energias satisfazem $\epsilon_1 = 0 < \epsilon_2 < \epsilon_3$. As partículas não interagem entre si.

- (a) [1 val] Represente todos os estados de duas partículas acessíveis aos sistema, indicando a energia de cada estado, supondo que se trata de fermiões. Utilize a notação (n_1, n_2, n_3) para identificar cada estado, onde n_i é o número de ocupação do estado i . Indique que estado está ocupado quando $T = 0$.
- (b) [1 val] Repita a alínea anterior, supondo que se trata de bósons.
- (c) [1 val] Escreva a função de partição do conjunto canónico para cada um dos sistemas de duas partículas, supondo que e encontram à temperatura T .
- (d) [2 val] Mantendo apenas os dois termos dominantes da função de partição, mostre que a energia interna do sistema é aproximadamente dada por $U_F \simeq \epsilon_2 + (\epsilon_3 - \epsilon_2) \exp \left[-\frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{kT} \right]$ e $U_B \simeq \epsilon_2 \exp \left[-\frac{\epsilon_2}{kT} \right]$, respectivamente para os sistemas de Fermi e de Bose. Em que limite deve ser válida esta aproximação?
- [Nota: em coerência com a aproximação sugerida, deve manter apenas dois termos no cálculo da energia interna.
- Sugestão: para o cálculo de U_F negligencie os termos em $\left[\exp \left(-\frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{kT} \right) \right]^2$.
- (e) [2 val] Calcule a capacidade calorífica a partir do resultado da alínea anterior, indicando os respectivos zeros e máximos. Comente o resultado.

- Constantes e factores de conversão

$$k_B = 1,38 \times 10^{23} \text{ J/K} \quad ; \quad R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} \quad ; \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2$$