Limite de entrega: 20/04/2021 (20h00)
(via Projectos Fénix)
Docentes: Hugo Terças e Pedro Cosme

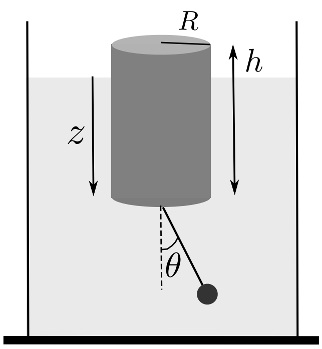
Mecânica Analítica

MEFT 2020/21

Avaliação Contínua – Ficha I

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente todos os cálculos que efectuar. A submissão deve ser feita no Fénix (`Estudante » Submeter » Projetos`).

Questão 1. [10 val] Considere uma bóia cilíndrica de raio R e altura h, com densidade ρ, que se encontra a flutuar à superfície de um tanque que contém um fluido de densidade ρ_f. Na base da bóia, existe um pêndulo de massa m e comprimento ℓ que pode oscilar livremente no plano. Considere que a bóia apenas se movimenta segundo a vertical e, até referido o contrário, assuma que a massa do pêndulo é pontual e o atrito entre os diferentes corpos e o fluido é desprezado.



a) [2 val] Mostre que um Lagrangeano possível do problema pode ser escrito na seguinte forma

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{z}^2+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2-m\ell\dot{z}\dot{\theta}\sin\theta+(M+m)gz-\frac{\pi}{2}\rho_\mathrm{f}gR^2z^2+mg\ell\cos\theta,$$

onde $M=\pi hR^2\rho$.

b) [2 val] Escreva as equações do movimento e determine os pontos de equilíbrio, classificando-os quanto à estabilidade.

c) [2 val] Recorra ao métodos dos multiplicadores de Lagrange para determinar a tensão na haste do pêndulo.

d) [2 val] Considere as seguintes perturbações da forma $z=z_0+\xi$ e $\theta=\theta_0+\delta$, onde (z_0,θ_0) corresponde ao ponto de equilíbrio estável que obteve em b). Mostre que, em primeira order nas perturbações, se tem

$$\ddot{\xi}+\omega_1^2\xi=0,\qquad \ddot{\delta}+\omega_2^2\delta=0.$$

Determine as frequências ω_1 e ω_2 e comente fisicamente o movimento que acabou de obter.

e) [2 val] Considere o caso $m=0$. Obtenha o potencial efectivo $V_\mathrm{ef}(z)$ e represente-o graficamente para os casos $\rho>\rho_\mathrm{f}$ e $\rho<\rho_\mathrm{f}$. Disserte sobre a estabilidade e dinâmica deste sistema.

Questão 2. [5 val] Como já sabemos, o formalismo Lagrangeano fornece-nos relações estreitas entre as simetrias de um sistema e as leis de conservação. Um dos grandes triunfos deste formalismo é o celebrado Teorema de Nöther, que dita que para simetria existe uma quantidade conservada. Nas aulas, demonstrámos uma versão fraca desse teorema. Aqui, convidamo-vos a apreciá-lo em todo o seu esplendor.

a) [1 val] Comecemos por uma versão fraca deste teorema. Considere um Lagrangeano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ e seja

$$q_i(\epsilon, t) = q_i(t) + \epsilon\eta_i(t)$$

uma transformação contínua de parâmetro ϵ. Mostre que a *condição de simetria* é equivalente à relação

$$\delta L \equiv \left.\frac{dL}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0.$$

b) [2 val] Assuma a condição de simetria anterior. Mostre que, nesse caso, a quantidade conservada (a *carga de Nöther*) é dada por

$$\mathcal{I}(q_i\dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\eta_i.$$

c) [2 val] A versão forte deste teorema trata de igual forma as transformações nas coordenadas e nos parâmetros[1], ou seja, é formulada com base na família de transformações contínuas do tipo

$$q_i(\epsilon, t) = q_i(t) + \epsilon\eta_i(t), \quad \tau(\epsilon, t) = t + \epsilon\psi(t).$$

Mostre que, caso a acção S associada a L seja invariante para esta família de transformações, então a quantidade genérica

$$\mathcal{J}(q_i\dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_i\psi - \eta_i) - \psi L$$

é conservada. Discuta a relação com a identidade de Beltrami e com a conservação de quantidades físicas que entenda relevantes.

[1]Em física, as trajectórias são variedades-1, i.e. curvas em $\mathbb{R}^n$. Pode parecer trivial, portanto, que só tenhamos um parâmetro (o tempo), mas em problemas mais abstractos as "trajectórias" podem ser variedades de dimensão $k \leq n$. Agora imagine o alcance do Teorema de Nöther no universo do Cálculo Variacional...

Questão 3. [5 val] Os potenciais centrais são realmente centrais em Física e têm a capacidade de produzir coisas giríssimas. Uma delas é o resultado descrito no Teorema de Bertrand, que nos diz que de todos os potenciais capazes de suportar órbitas estáveis, apenas o potencial harmónico ($\sim r^2$) e o potencial da gravitação universal de Newton ($\sim 1/r$) descrevem órbitas fechadas. Matematicamente, para $V(r) = kr^{n+1}$, apenas os valores $n = 1$ e $n = -2$ contêm órbitas fechadas. Embora possa parecer espantoso à primeira vista, este resultado tem tanto de singelo como de belo.

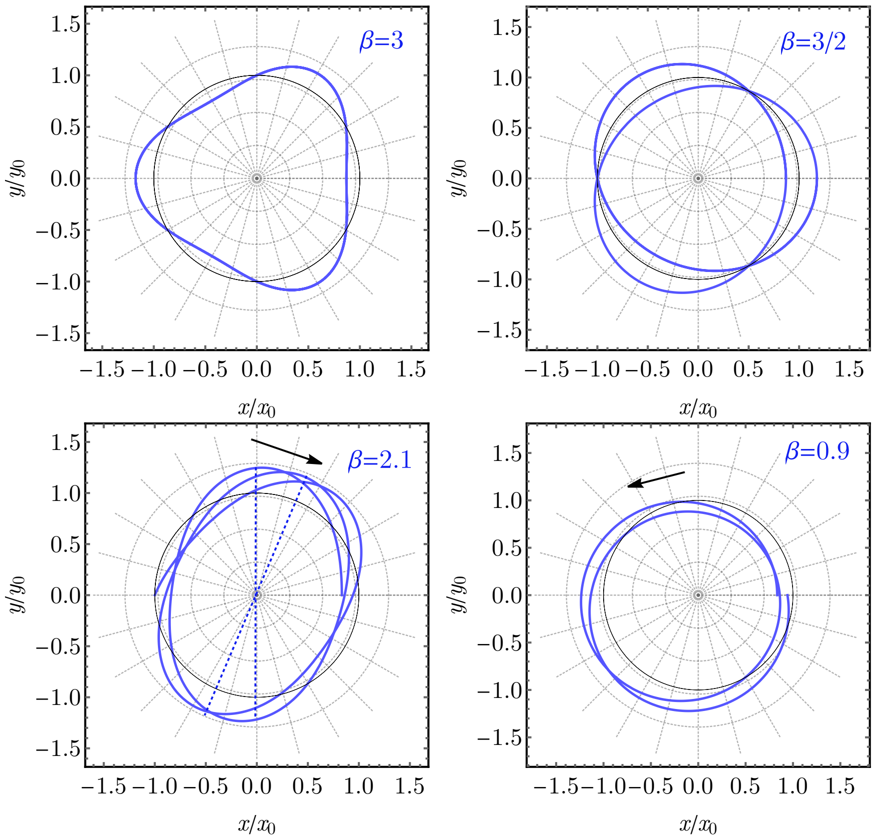


Figure 1: Órbitas quasi-circulares. Órbitas fechadas para β racional; órbitas abertas que precessam. Para $\beta < 1$ ($\beta > 1$), a precessão ocorre no mesmo sentido (sentido oposto) ao da velocidade angular.

a) [1 val] Comece por mostrar que, para um potencial genérico $V(r)$, se tem

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = J(u), \quad J(u) = -\frac{m}{\ell_\theta^2}\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{m}{\ell_\theta^2 u^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

onde $u = 1/r$.

b) [1 val] Argumente que, para órbitas circulares, se pode escrever $u_0 = J(u_0)$. Expanda $J(u)$ em primeira ordem em $U = u - u_0$ e mostre que

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} + \beta^2 U = 0, \quad \text{onde} \quad \beta^2 = 1 - \left.\frac{dJ}{du}\right|_{u_0}.$$

Aproveite para mostrar que, se $V(r) = kr^{n+1}$, então a condição de órbita estável é $n > -3$.

c) [1 val] Obtenha a solução da equação e argumente que órbitas fechadas correspondem a valores de β racionais, explique ainda porque razão $\beta > 1$ leva a precessão apsidal no sentido contrário ao da velocidade angular (talvez seja útil olhar para a Figura 1). Uma vez que compreendeu isto, argumente que o ângulo apsidal satisfaz

$$\theta_A = \frac{\pi}{\beta}.$$

d) [1 val] Proceda à expansão de $J(u)$ até à terceira ordem em U e mostra que a equação das órbitas resulta em

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} + \beta^2 U = \frac{1}{2}J''(u_0)U^2 + \frac{1}{6}J'''(u_0)U^3.$$

Sim, esta equação é um bocadinho não-linear, mas não panique! A gente vai lá... Comece por observar o seguinte: se a nova equação envolve segundas e terceiras derivadas em $J(u)$, então, se calhar, até é razoável tentar como solução uma combinação de harmónicas até à terceira ordem. Teste, então, o seguinte

$$U = a_0 + a_1 \cos\beta\theta + a_2\cos(2\beta\theta) + a_2\cos(3\beta\theta).$$

Agora, pensemos: as amplitudes a_0 e a_2 têm de ser menores do que a_1, uma vez que se anulam mais rapidamente do que a_1 quando a órbita se aproxima da circularidade (se está perdido/a, pense no que fez nas alíneas b) e c)). Além disso, como se trata de uma expansão, a_3 tem de ser inferior a todos os termos (é o termo de maior ordem). Isto permite-nos desprezar todos os termos proporcionais a $\cos(3\beta\theta)$ no termo U^2 e manter apenas os termos até primeira ordem em U^3. Posto isto, faça uso de identidades trigonométricas (e use o Mathematica - seja bom/a para si!) para mostrar que

$$a_0 = \frac{J''(u_0)}{4\beta^2}a_1^2, \quad a_2 = -\frac{J''(u_0)}{12\beta^2}a_1^2, \quad \frac{2a_0a_1 + a_1a_2}{2}J''(u_0) + \frac{J'''(u_0)}{8}a_1^3 = 0,$$
$$a_3 = -\frac{1}{8\beta^2}\left(\frac{a_1a_2}{2}J''(u_0) + \frac{a_1^3}{24}J'''(u_0)\right).$$

e) [1 val] Volte à equação que obteve para β na alínea b) e interprete-a como uma equação diferencial para f. Como para órbitas fechadas se tem β constante, mostre que

$$f(r) = -\frac{k}{r^{3-\beta^2}}.$$

Pronto, agora tem tudo para concluir a sua demonstração. Expresse este último resultado em termos da função auxiliar $J(u)$, substitua as suas derivadas onde tem de ser e mostre o belíssimo teorema de Bertrand, i.e., que só existem órbitas fechadas se

$$\beta^2(1-\beta^2)(4-\beta^2) = 0,$$

ou seja, ainda, se

$$V = -\frac{k}{r} \quad \text{ou} \quad V(r) = kr^2.$$

Não é maravilhoso?