1. $\alpha = \frac{1}{L}\frac{dL}{dT}$

a) Se L variar pouco na dilatação, $dL = \alpha L dT \approx \alpha L_i dT$

$dL \approx \alpha L_i dT \longrightarrow \Delta L \simeq \alpha L_i \Delta T$, onde $\Delta L = L_f - L_i$, $\Delta T = T_f - T_i$

$L_f - L_i \simeq \alpha L_i (T_f - T_i)$, $L_f \simeq L_i + \alpha L_i (T_f - T_i) = L_i [1 + \alpha \underbrace{(T_f - T_i)}_{\Delta T}]$

b) $\frac{dL}{L} = \alpha dT$, $\int_i^f \frac{dL}{L} = \int_i^f \alpha dT$, $\ln\left(\frac{L_f}{L_i}\right) = \alpha (T_f - T_i)$

$L_f = L_i \exp[\alpha (T_f - T_i)] = L_i \exp(\alpha \Delta T)$

c) Para x pequeno, $e^x \simeq 1 + x \rightarrow L_f \simeq L_i [1 + \alpha \Delta T]$, onde o parâmetro pequeno é $\alpha \Delta T \ll$

É este o significado de "α pequeno".

d) i) $\alpha = 2 \times 10^{-5}\ K^{-1}$, $L_i = 1\,m$

$L_f(\text{exato}) = 1 \times \exp(2 \times 10^{-5} \times 100) \simeq 1{,}002002$

$L_f(\text{aprox}) = 1 \times (1 + 2 \times 10^{-5} \times 100) = 1{,}002$

$L_f(\text{exato}) - L_f(\text{aprox}) \simeq 2 \times 10^{-6}$; Erro relativo $= \frac{L_f(\text{exato}) - L_f(\text{aprox})}{L_f(\text{exato})} \times 100 \simeq 2 \times 10^{-4}$;

ii) $\alpha = 2 \times 10^{-2}\ K^{-1}$

$L_f(\text{exato}) = 1 \times \exp(2 \times 10^{-2} \times 100) = e^2 \simeq 7{,}389$

$L_f(\text{aprox}) = 1 \times (1 + 2 \times 10^{-2} \times 100) = 3$

$L_f(\text{exato}) - L_f(\text{aprox}) \simeq 4{,}389$ (!)

Erro relativo : $\frac{L(\text{exato}) - L(\text{aprox})}{L(\text{exato})} \times 100 \simeq 59\%$

Ou:

a) $L_f \approx L_i + \left.\frac{dL}{dT}\right|_{T=T_i} (T_f - T_i)$, considerando $L = L(T)$ e expandindo em torno de $T = T_i$

$$\frac{dL}{dT} = \alpha L \rightarrow \left.\frac{dL}{dT}\right|_{T=T_i} = \alpha L_i \rightarrow L_f \approx L_i + \alpha L_i \Delta T$$
$$= L_i (1 + \alpha \Delta T).$$

$(L(T = T_i) = L_i)$

b)

$$\frac{dL}{dT} = \alpha L \rightarrow L(T) = C e^{\alpha T}$$

$T = T_i$, $L = L_i$ $\Rightarrow$ $L_i = C e^{\alpha T_i}$, $C = L_i e^{-\alpha T_i}$

$$L(T) = \underbrace{L_i e^{-\alpha T_i}}_{C} e^{\alpha T} = L_i e^{\alpha (T - T_i)} = L_i e^{\alpha \Delta T}$$

2.

$T_H = 1.0\,K \qquad C_H = aT^3 \quad , \quad a = 128\times10^{-3}\ J/K^4$

$T_S < T_H \qquad C_S = bT^{-2} \quad , \quad b = 150\times10^{-3}\ J/K$

a) $Q_H + Q_S = 0 \qquad ; \quad T_f = 0{,}5\ K$

Calor cedido pelo hélio quando arrefece até 0,5 K (considerado < 0):

$$Q_H = \int_{T_H}^{T_f} C_H\,dT = \int_{T_H}^{T_f} aT^3\,dT = \frac{a}{4}\,T^4\Big|_{T=T_H}^{T=T_f} = \frac{a}{4}\left(T_f^4 - T_H^4\right)$$

Substituindo valores, $Q_H = \frac{a}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 1\right] = \frac{a}{4}\left[\frac{1}{16} - 1\right] =$

$$= -\frac{15\,a}{64}$$

Calor recebido pelo sal quando aquece até 0,5 K (considerado positivo):

$$Q_S = \int_{T_S}^{T_f} C_S\,dT = \int_{T_S}^{T_f} \frac{b}{T^2}\,dT = -b\left[\frac{1}{T}\right]_{T_S}^{T_f} =$$

$$= -b\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_S}\right) = -2b + \frac{b}{T_S}$$

$$-2b + b\,T_S^{-1} - \frac{15}{64}a = 0 \quad ; \quad T_S^{-1} = 2 + \frac{15}{64}\,\frac{a}{b} = 2 + \frac{15}{64}\times\frac{128}{15} = 4\,K^{-1}$$

$$T_S = \frac{1}{4} = 0{,}25\,K$$

b) $\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_S$

$$\Delta S_H = \int_{T_H}^{T_f} \frac{dQ}{T} = \int_{T_H}^{T_f} C_H\,\frac{dT}{T} = \int_{T_H}^{T_f} aT^3\,\frac{dT}{T} = a\,\frac{T^3}{3}\Big|_{T_H}^{T_f} = \frac{a}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1\right] = -\frac{7}{24}\,a\ J/K$$

$$\simeq -0{,}037\ J/K$$

$$\Delta S_S = \int_{T_S}^{T_F} \frac{dQ}{T} = \int_{T_S}^{4} \frac{C_S\, dT}{T} = \int_{T_S}^{4} \frac{b}{T^2}\frac{dT}{T} = -\frac{b}{2}\frac{1}{T^2}\Big|_{T_S}^{T_f} = -\frac{b}{2}\left(\frac{1}{T_f^2} - \frac{1}{T_S^2}\right)$$

$$= -\frac{b}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}\right] = -\frac{b}{2}\left[4 - 16\right] = +b\,\frac{12}{2} = 6b$$

$$= 0{,}090\ J/K$$

$$\Delta S = 6b - \frac{7}{24}a = 6 \times 15 \times 10^{-3} - \frac{7}{24} \times 128 \times 10^{-3}$$

$$\simeq 0{,}090 - 0{,}037 = 0{,}053\ J/K > 0$$

3.

a) 1ª lei: $dU = dQ - dW$

transformação reversível: $dQ = TdS$, $dW = PdV$

$$dU = TdS - PdV \quad ; \quad dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}\,dV$$

Gás ideal: $dU = nC_v dT$; $PV = nRT \rightarrow T = \frac{PV}{nR}$; $dT = \frac{1}{nR}PdV + \frac{1}{nR}VdP$

$$dS = nC_v\frac{dT}{T} + \frac{P}{T}\,dV = n\,C_v\,\underbrace{\frac{nR}{PV}}_{1/T}\cdot\underbrace{\frac{1}{nR}\left(PdV + VdP\right)}_{dT} + \underbrace{\frac{nR}{V}}_{(P/T)}dV$$

$$= nC_v\left[\frac{PdV}{PV} + \frac{VdP}{PV}\right] + nR\frac{dV}{V} = n\left(C_v + R\right)\frac{dV}{V} + nC_v\frac{dP}{P}$$

$$= nC_p\frac{dV}{V} + nC_v\frac{dP}{P} = nC_v\left[\frac{C_p}{C_v}\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P}\right] = nC_v\left[\gamma\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P}\right]$$

$\gamma = C_p/C_v$

$$\Delta S = \int_i^f dS = nC_v\left\{\int_i^f \gamma\frac{dV}{V} + \int_i^f\frac{dP}{P}\right\} = nC_v\left\{\gamma\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) + \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)\right\}$$

$$= nC_v\ln\left[\frac{P_f V_f^{\gamma}}{P_i V_i^{\gamma}}\right]$$

c) Transformação adiabática reversível: $dS = \frac{dQ_R}{T} = \frac{dQ}{T} = 0$

$dQ = 0$

$$\Delta S = 0 \quad , \quad \ln\left[\frac{P_f V_f^{\gamma}}{P_i V_i^{\gamma}}\right] = 0 \Rightarrow P_f V_f^{\gamma} = P_i V_i^{\gamma};$$

$PV^{\gamma} =$ constante.

b) A expressão é válida para qualquer transformação $i \rightarrow f$, reversível ou irreversível, pois S é uma função de estado! $\Delta S = S_f - S_i$ só depende dos estados i e f e não da forma como se passa de i a f.

d) A expressão $PV^{\gamma} = \text{cte}$ não é válida para transformações adiabáticas irreversíveis, pois nesse caso, apesar de $dQ=0$, $dS = \frac{dQ_R}{T} > \frac{dQ}{T} = 0$.

4. $V_A = 2\ell = 2 \times 10^{-3}\ m^3$

$P_A = 10^5\ Pa$

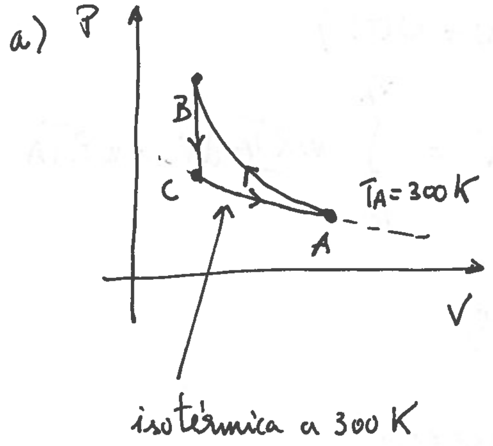
$T_A = 300\ K$

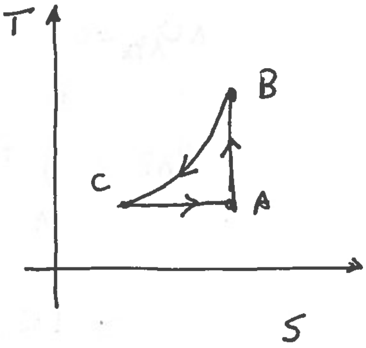
$V_B = 1\ell = 10^{-3}\ m^3$

$V_C = V_B$; $T_C = 300\ K$

AB adiabática

a)





b) i) $Q_{AB} = 0$ (adiabática) ; $\Delta S_{AB} = 0$

$$\left[P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma} \qquad P_B = P_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} = P_A\ 2^{\gamma} \right]$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3} \quad \left(\text{gás monoatómico, } C_V = \frac{3}{2}R \ ; \ C_P = \frac{3}{2}R \right).$$

$$T_A V_A^{\gamma - 1} = T_B V_B^{\gamma-1} \ ; \ T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_A\ 2^{\gamma-1} = T_A\ 2^{2/3} \simeq 476{,}2\ K$$

$$\Delta U_{AB} = n C_V (T_B - T_A) \ ; \ P_A V_A = n R T_A \ , \ n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = \frac{10^5 \times 2 \times 10^{-3}}{8{,}314 \times 300} \simeq 0{,}08\ mo$$

$$= \underbrace{\frac{P_A V_A}{\cancel{R} T_A} \frac{3}{2} \cancel{R}}_{\frac{10^5 \times 2\times 10^{-3}}{300} \times \frac{3}{2} = 1} (T_B - T_A) = 1 \times (476{,}2 - 300) = 176{,}2\ J$$

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \ ; \ W_{AB} = Q_{AB} - \Delta U_{AB} = -176{,}2\ J$$

ii) BC $\quad W_{BC} = 0$; $Q_{BC} = n C_V \Delta T = n \frac{3}{2} R (T_C - T_B) \simeq 0{,}08 \times \frac{3}{2} \times 8{,}314 (-176{,}2)$

$$= -175{,}8\ J$$

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} = -175{,}8\ J$$

$$\Delta S_{BC} = n C_V \int^{T_C} \frac{dT}{T} = n \frac{3}{2} R \ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) \simeq 0{,}08 \times \frac{3}{2} \times 8{,}314 \times \ln\left(\frac{300}{476{,}2}\right) \simeq -0{,}469\ J/K$$

• CA

$\Delta U_{CA} = 0 \quad (U = U(T))$

$$W_{CA} = \int_C^A P\,dV = \int_{V_C}^{V_A} \frac{nRT_A}{V}\,dV = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) \simeq 0{,}08 \times 8{,}314 \times 300 \times \ln(2)$$

$$\simeq 138{,}3 \text{ J}$$

$$Q_{CA} = W_{CA} = 138{,}3 \text{ J}$$

$$\Delta S_{CA} = \frac{Q_{CA}}{T_A} = nR\ln(2) \simeq 0{,}08 \times 8{,}314 \times \ln(2) \simeq 0{,}46 \text{ J/K}$$

—"—

	ΔU [J]	Q [J]	W [J]	ΔS [J/K]
AB	176,2	0	−176,2	0
BC	−175,8	−175,8	0	−0,46
CA	0	138,3	138,3	0,46
Ciclo	0,4	−37,5	−37,9	0

têm que ser iguais

$\Delta U_{ciclo} = 0$, função de estado!

Na verdade este valor tem que dar zero! A diferença vem de erros de arredondamento.

Em BC:

$$\Delta U_{BC} = \frac{3}{2} nR\,(T_C - T_B)$$

$$\frac{3}{2} nR = \frac{3}{2}\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{3}{2} \times \frac{10^5 \times 2 \times 10^{-3}}{3 \times 10^2} = 1 \quad !$$

$$\Delta U_{BC} = 1 \times (-176{,}2) = -176{,}2 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = -176{,}2 \text{ J}.$$

	ΔU [J]	Q [J]	W [J]	ΔS [J/K]
AB	176,2	0	−176,2	0
BC	−176,2	−176,2	0	−0,46
CA	0	138,3	138,3	0,46
Ciclo	0	−37,9	−37,9	0

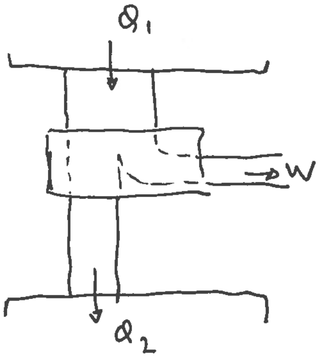
c) $\varepsilon = \dfrac{Q_2}{W} = \dfrac{Q_{CA}}{|W|} = \dfrac{138,3}{37,9} \simeq 3,65$

$$\varepsilon_{Carnot} = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{300}{476,2 - 300} = 1,70$$

Se fosse motor: $\eta = \dfrac{W}{Q_1} = \dfrac{37,9}{176,2} \simeq 0,215 \rightarrow 21,5\ \%$

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{476,2} = 0,370 \rightarrow 37,0\%$$

A eficiência é máxima para um dado ciclo quando todas as transformações são reversíveis. Mas... com infinitas fontes (processo BC) conseguimos ter uma eficiência superior à da máquina de Carnot! (Mas não o rendimento de um motor) (operando entre as mesmas temperaturas extremas).



Um bom motor tem um rácio $\dfrac{W}{Q_1}$ elevado, ou seja, $\dfrac{Q_2}{W}$ pequeno.

Mas um bom frigorífico deve ter um rácio $\dfrac{Q_2}{W}$ (com as setas no sentido inverso) elevado.