

Mecânica Analítica

2020-2021

Série 4

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

Nesta série, ilustramos alguns aspectos os principais potenciais centrais

★ **Problema 1. Potencial efectivo.** Considere uma partícula de massa m que se pode mover no espaço sob a acção de um potencial central $V(\mathbf{r}) = V(r)$.

a) Determine as quantidades conservadas neste sistema.

- O Lagrangeano escreve-se como $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$. Como θ é uma variável cíclica

$$L \neq L(\theta) \Rightarrow \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \ell_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{const.}$$

- $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Pela identidade de Beltrami,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L \right) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \text{const.}$$

b) Mostre que a equação do movimento se pode escrever na forma

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(V + \frac{1}{2} \frac{\ell_\theta^2}{mr^2} \right).$$

Isto quer dizer que a dinâmica de uma partícula num potencial central é equivalente ao problema unidimensional de uma partícula no potencial efectivo $V_{\text{ef.}}(r) = V(r) + \ell_\theta^2/(2mr^2)$.

- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$. Usando a conservação do momento angular para eliminar $\dot{\theta}$, vem

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\ell_\theta^2}{mr^3} = -\frac{d}{dr} \underbrace{\left(V + \frac{1}{2} \frac{\ell_\theta^2}{mr^2} \right)}_{V_{\text{ef.}}(r)}.$$

c) Introduza a variável $u = 1/r$ e obtenha a equação polar das órbitas

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -m \frac{r^2}{\ell_\theta^2} F(r),$$

onde $F(r) = -dV/dr$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{r^2 \dot{\theta}} = -\frac{m\dot{r}}{\ell_\theta} \\ \bullet \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} &= -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{m\dot{r}}{\ell_\theta} \right) = \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{dt} \left(-\frac{m\dot{r}}{\ell_\theta} \right) = \frac{mr^2}{\ell_\theta} \left(-\frac{m\ddot{r}}{\ell_\theta} \right) = -\frac{m^2 r^2 \ddot{r}}{\ell_\theta^2}. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever $\ddot{r} = -\frac{\ell_\theta^2 u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}$, o que conduz a

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{\ell_\theta^2 u^2} F \left(\frac{1}{u} \right),$$

o que corresponde ao pretendido fazendo $r = 1/u$.

d) Verifique a condição de órbita circular para forças centrais do tipo $F(r) = -k/r^2$. Este é o caso da força gravítica.

• A equação das órbitas pode ser escrita de forma compacta como $\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = A(r)$. Para órbitas circulares, $dr/d\theta = 0$. Automaticamente vemos que o potencial $V(r) \sim 1/r$ ($F(r) \sim 1/r^2$) contém órbitas circulares,

$$\frac{1}{r_0} = A(r) = -\frac{mr^2}{\ell_\theta^2} F(r) \rightarrow F(r) \sim \frac{1}{r^2}.$$

e) Para que tipo de força obtemos órbitas não confinadas do tipo $r(\theta) = ke^{\alpha\theta}$ (com $k\alpha > 0$)? Dê um exemplo físico onde isso se possa verificar.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{e^{-\alpha\theta}}{k} \right) = -\frac{\alpha}{r}, \\ \bullet \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\alpha^2}{r}. \text{ Então,} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{r} + \frac{1}{r} \right) = A(r) \Rightarrow F(r) \sim \frac{1}{r^3}.$$

f) É possível inferir algumas propriedades das órbitas comparando a energia mecânica E com o potencial efectivo $V_{\text{ef.}}(r)$. Para tal, consideramos o caso particular da lei da gravitação universal de Newton,

$$V_{\text{ef.}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell_\theta^2}{2mr^2}.$$

Considere os quatro casos possíveis e descreva as órbitas correspondentes.

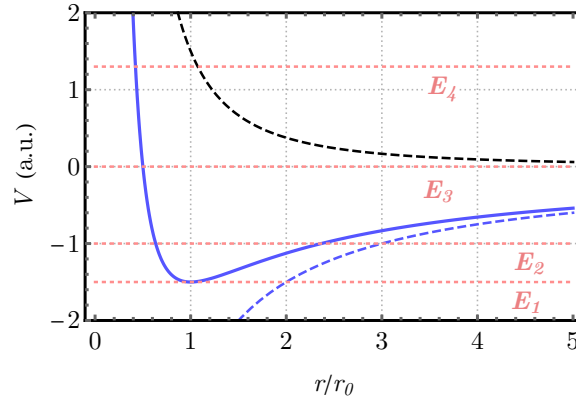


Figure 1: Barreira centrífuga (curva tracejada a preto), $V(r) = -k/r$ (curva tracejada a azul) e correspondente potencial efectivo (curva cheia a azul).

Da integração da equação das órbitas para o potencial $V(r) = -k/r$ obtemos a equação das cónicas

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} [1 - \epsilon \cos(\theta - \theta_0)],$$

onde $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell_\theta^2}{mk^2}}$ designa a excentricidade.

- $\epsilon = 0$, $E = E_1 \rightarrow$ órbita circular,
- $\epsilon < 1$, $E = E_2 \rightarrow$ órbita elíptica,
- $\epsilon = 1$, $E = E_3 \rightarrow$ órbita parabólica,
- $\epsilon > 1$, $E = E_4 \rightarrow$ órbita hiperbólica.

★ **Problema 2. Órbitas abertas ou fechadas?** Considere uma massa m no plano ligada a uma mola de constante elástica k e comprimento natural ℓ .

a) Represente graficamente o potencial efectivo e obtenha o(s) ponto(s) de equilíbrio do sistema.

- Condição de equilíbrio: $\frac{d}{dr} V_{\text{ef.}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell_\theta^2}{mr_0^3} = k(r_0 - \ell) \Leftrightarrow r_0 = \frac{k/m}{k/m - \dot{\theta}^2} \ell$. Note a condição de ressonância $\dot{\theta} = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, que implica $r_0 \rightarrow \infty$.

b) Estude a forma do potencial efectivo e observe que, no caso geral, obtemos sempre órbitas limitadas, isto é, que existem r_- e r_+ tais que $r_- \leq r \leq r_+$. Mostre que para $\ell = 0$ essas órbitas são sempre elípticas.

Em relação à primeira observação, é fácil de concluir a existência de órbitas limitadas olhando para a equação da energia

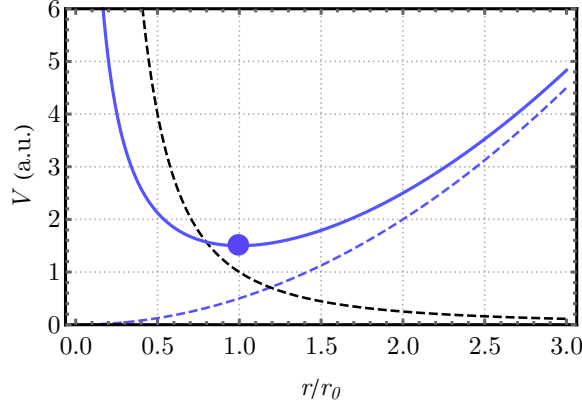


Figure 2: Barreira centrífuga (curva tracejada a preto), $V(r) = \frac{1}{2}k(r - \ell)^2$ (curva tracejada a azul) e correspondente potencial efectivo (curva cheia a azul).

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell)^2.$$

Nos extremos, $\dot{r} = 0$, pelo que temos duas soluções. Em geral, a expressão de r_\pm é complicada (convença-se de que assim é...). Quanto ao estudo da órbita para $\ell = 0$, temos dois métodos:

- Método 1: resolver a equação polar da órbita $r(\theta)$.

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\ell_\theta}{r^2 \sqrt{2m(E - kr) - \frac{\ell_\theta^2}{2mr^2}}}.$$

Usando $x = r^2$, $dx = 2rdr$, vem

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{mkx^2/\ell_\theta^2 + 2mEx/\ell_\theta^2 - 1}}.$$

Integrais elípticas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \left[\frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}} \right],$$

o que resulta em

$$\theta(r) = \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\frac{2mE}{\ell_\theta^2} r^2 - 1}{r^2 \sqrt{mE^2/\ell_\theta^2 + mk/\ell_\theta^2}} \right] + \theta_0.$$

Definindo $\epsilon = \sqrt{1 + \ell_\theta^2/(mE^2)}$ e $r_0^2 = \ell_\theta^2/(mE)$, temos ($\theta_0 = 0$)

$$\frac{r_0^2}{r^2} = 1 + \epsilon \cos(2\theta) \implies \boxed{r = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \epsilon \cos(2\theta)}}}.$$

- Método 2: trabalhar em coordenadas cartesianas (x, y) . O Lagrangeano deste sistema é

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2).$$

Das equações de Euler-Lagrange,

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

$$m\ddot{y} + ky = 0.$$

Usando $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$, $y(t) = b \cos(\omega_0 t + \beta)$, e definindo $\varphi = \omega_0 t + \alpha$ e $\delta = \beta - \alpha$, podemos escrever $(x/a)^2 = \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$, $(y/b)^2 = \cos^2 \varphi \cos^2 \delta + \sin^2 \varphi \sin^2 \delta + 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \delta \sin \delta$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \delta = \sin^2 \delta.$$

- c) Considere o caso particular da órbita circular. Para que valores da frequência angular $\dot{\theta} = \omega_0$ obtemos órbitas fechadas para os pequenos desvios?

- $m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{\ell_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 \right)$. Definindo $r = r_0 + \xi$,

$$m\ddot{\xi} - \underbrace{\frac{\ell_\theta^2}{mr_0^3} + k(r_0 - \ell_0)}_{=0} + k\xi - \frac{3\ell_\theta^2}{mr_0^4}\xi = 0$$

$$\ddot{\xi} + \underbrace{\left(4\omega_0^2 + \frac{k\ell}{mr_0} \right)}_{\Omega^2} \xi = 0.$$

Com exceção do caso $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ (resonância), obteremos órbitas fechadas caso $\Omega/\omega_0 \in \mathbb{Q}$. Para o caso especial $\ell = 0$, esta condição é sempre satisfeita, consistentemente com o teorema de Bertrand. Note que $V(r) \sim (r - \ell)^2 = r^2 + 2\ell r + \ell^2$ não é o potencial $\sim r^2$.

*** **Problema 3. Teorema do virial.** Uma propriedade importante dos potenciais centrais pode ser deduzida como um caso particular de um teorema mais geral em física estatística – o *teorema do virial de Clausius*. Este difere, em carácter, dos teoremas discutidos até aqui, tendo uma natureza estatística, i.e. envolve médias temporais de várias quantidades mecânicas.

Considere um sistema genérico composto por N partículas de massa m , com posições \mathbf{r}_i e sujeitas a forças \mathbf{F}_i (não necessariamente conservativas).

- a) Mostre que a energia cinética média, $\langle T \rangle$, pode ser dada por

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle,$$

onde $\langle . \rangle$ representa a média temporal tomada num intervalo de tempo τ , que escolhemos ser muito maior do que qualquer tempo característico do sistema.

- Definamos a acção do sistema, $S = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$.

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i (\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i (m_i \dot{\mathbf{r}}_i)) = 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i.$$

- Seja τ o tempo de equilíbrio do sistema.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dS}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \left(2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right) dt.$$

- Para os sistemas de interesse, ao final de um determinado tempo $|S(\tau) - S(0)| \leq M$, pelo que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{M}{\tau} = 0 = \left\langle 2T + \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle \Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle.$$

- b) Parta do teorema da equipartição da energia, $\langle T \rangle = 3Nk_B\Theta/2$ (Θ é a temperatura), para obter a equação dos gases ideais

$$PV = Nk_B\Theta.$$

- $d\mathbf{F}_i = -P_i d\mathbf{A}$. Para um gás ideal, não existem interacções entre as partículas (forças de pressão).

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \int_{\partial V} P_i d\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle \simeq -\frac{1}{2} P \int_{\partial V} dA \hat{n} \cdot \mathbf{r}.$$

- Teorema da divergência:

$$\int_{\partial V} dA \hat{n} \cdot \mathbf{r} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} dV = 3V \Rightarrow \langle \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \rangle = -3PV.$$

- Teorema da equipartição da energia: $\langle T \rangle = \frac{3}{2} Nk_B\Theta$.

- c) Assuma, agora, que o sistema evolui apenas sob o efeito de forças centrais. Mostre que, para potenciais do tipo $V = V_0 r^{n+1}$, o teorema do virial pode ser escrito na forma

$$\langle T \rangle = \frac{n+1}{2} \langle V \rangle.$$

Concretize para o caso da força electrostática (ou da força da gravidade).

- $\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_i \nabla_i V \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle \simeq \frac{N}{2} \left\langle \nabla V \cdot \mathbf{r} \right\rangle_1 = \frac{N}{2} \left\langle \frac{\partial V}{\partial r} r \right\rangle_1$, onde $\langle \cdot \rangle_1$ representa a média sobre uma partícula.

- $V = V_0 r^{n+1} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} r = (n+1)V$.

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} N(n+1) \langle V \rangle_1 = \frac{n+1}{2} \langle V \rangle.$$

Para o caso do potencial gravítico, $n = -2$, obtemos o resultado conhecido

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle.$$

🎵 **Problema 4. ‘Another One Bites The Dust’.** No sistema solar, existe uma distribuição mais ou menos uniforme de poeiras (com excepção do que se passa na cintura de asteróides!). Nesse caso, um potencial $U_2(r)$ soma-se à usual atracção gravitacional $V(r) = -k/r$.

- a) Assuma que a distribuição de poeira é uniforme e tem densidade de massa ρ . Use a equação de Poisson $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$ para mostrar que o potencial $U_2 = m\Phi$ que devido às poeiras é dado por¹

$$U_2(r) = \frac{1}{2} \alpha r^2.$$

Determine a constante α .

- Aceleração da gravidade: $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$. Assim,

$$\int_V \nabla^2 \Phi \, dV = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV = \int_V 4\pi G \rho \, dV.$$

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = - \int_V 4\pi G \rho \, dV$$

$$g \times 4\pi r^2 = -4\pi G \underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}_{M_{\text{int}}} \Rightarrow g = -\frac{4}{3}\pi r G \rho.$$

- $\mathbf{F}_2(r) = m\mathbf{g} = -m\nabla \Phi \Rightarrow U_2(r) = m\Phi = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{4}{3}\pi G m \rho}_{\alpha} r^2.$

- b) Mostre que o período de uma órbita circular de raio r_0 é aproximadamente dado por

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{\alpha \tau_0^2}{8\pi^2 m} \right),$$

onde $\tau_0 = 2\pi r_0^{3/2} \sqrt{m/k}$ é o período da órbita na ausência de poeiras.

¹Pense de forma análoga ao cálculo do potencial electrostático - ou do campo eléctrico - para uma distribuição de cargas de densidade ρ .

- $m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{\ell_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} + \frac{1}{2}\alpha r^2 \right)$. Da condição de órbita circular ($\dot{r} = 0$) vem

$$\frac{\ell_\theta^2}{mr_0^3} - \frac{k}{r_0^2} - \alpha r_0 = 0.$$

Usando $\ell_\theta = mr_0^2\omega = 2\pi mr_0^2/\tau$, temos

$$4\pi^2 m \frac{r_0}{\tau^2} - \frac{k}{r_0^2} - \alpha r_0 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{k}{mr_0^3} + \frac{\alpha}{m} \right) = \underbrace{\frac{1}{4\pi^2} \frac{k}{mr_0^3}}_{1/\tau_0^2} \left(1 + \frac{\alpha r_0^3}{k} \right).$$

Assim, temos

$$\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{\alpha \tau_0^2}{4\pi^2 m} \right)^{-1/2} \simeq \tau_0 \left(1 - \frac{\alpha \tau_0^2}{8\pi^2 m} \right),$$

onde assumimos que $(\sqrt{\alpha/m})\tau_0 \ll 1$.

- c) Determine a frequência angular das órbitas resultantes de pequenas perturbações em torno do equilíbrio.

- $r = r_0 + \xi$. Da equação do movimento, vem

$$m\ddot{\xi} = \underbrace{\frac{\ell_\theta^2}{mr_0^3} - \frac{k}{r_0^2} - \alpha r_0}_{=0} - \frac{3\ell_\theta^2}{mr_0^4}\xi + \frac{2k}{r_0^3}\xi - \alpha\xi$$

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{3\ell_\theta^2}{m^2 r_0^4} + \frac{\alpha}{m} - \frac{2k}{mr_0^3} \right) \xi = 0.$$

A solução é $\xi(t) = A \cos(\Omega t + \varphi)$, onde $\Omega = \omega \sqrt{1 + \frac{3\alpha}{m\omega^2}}$ e $\omega = 2\pi/\tau$.

- d) Mostre que órbitas quasi-circulares podem ser aproximadas por órbitas elípticas que precessam. Determine o período desta precessão e conclua se esta precessão ocorre no mesmo sentido (ou no sentido oposto) da velocidade angular orbital.

- $u(\theta) = u_0 + A \cos \beta\theta$, onde

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f} \frac{df}{dr} \Big|_{r=r_0} = \frac{k/(mr_0^3) + 4\alpha/m}{k/(mr_0^3) + \alpha/m} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} > 1.$$

- $r = \frac{r_0}{1 + A \cos \beta\theta}$. Para $\beta = \text{constante}$, isto corresponde a uma elipse que precessa (ver figura 3).

- $\omega_{\text{prec}} = \Omega - \omega = \omega \left(\sqrt{1 + \frac{3\alpha}{m\omega^2}} - 1 \right) \simeq \frac{3\alpha}{2m\omega}.$

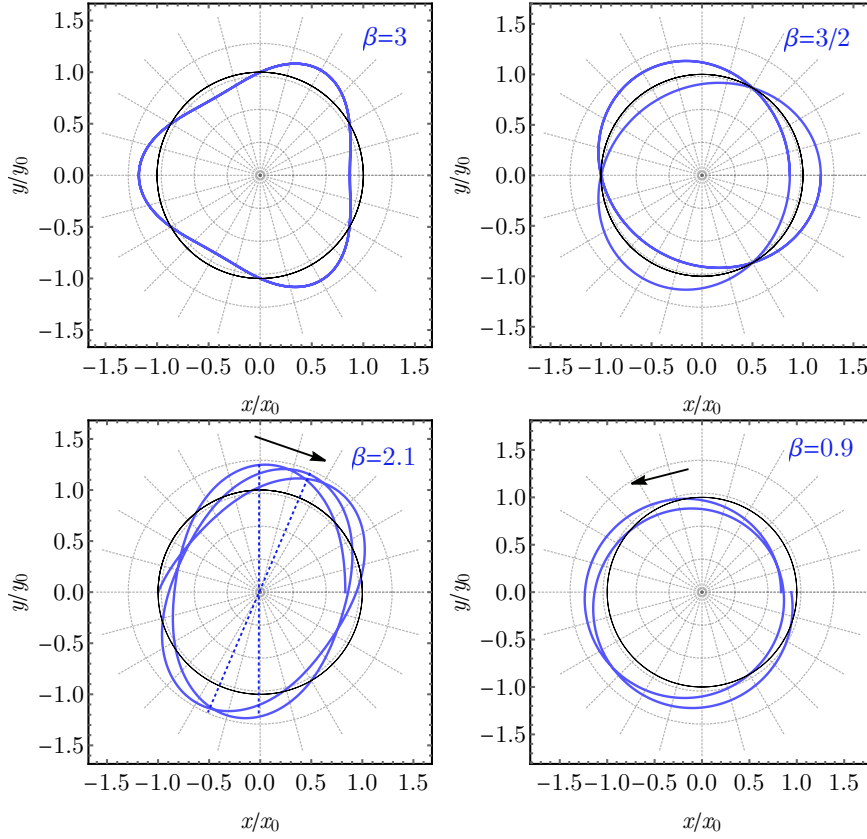


Figure 3: Órbitas quasi-circulares. Órbitas fechadas para β racional; órbitas abertas que precessam. Para $\beta < 1$ ($\beta > 1$), a precessão ocorre no mesmo sentido (sentido oposto) ao da velocidade angular.

- $\Delta\theta = \frac{2\pi}{\beta} - 2\pi = 2\pi \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) = -2\pi \frac{\omega_{\text{prec}}}{\omega} = -\frac{3\pi\alpha}{m\omega^2} < 0$. A partícula precessa no sentido oposto ao da velocidade angular da órbita.

★★ **Problema 5. Potencial de Yukawa.** No contexto das interações electrofracas, Yukawa percebeu que os portadores da interacção - os *piões* - eram partículas com massa (ao contrário do caso electromagnético, onde os portadores - os fotões - não têm massa). Isto resultaria num potencial da forma

$$V(r) = -\frac{k}{r} e^{-r/a}.$$

Ao contrário do potencial $1/r$, o potencial de Yukawa tem alcance finito, definido pela distância característica a . Classicamente, em sistemas em que os efeitos de blindagem são importantes (por exemplo, devido ao movimento térmico dos electrões, os iões num plasma interagem através de um potencial “blindado”), este potencial também aparece.

- a) Obtenha a equação para o movimento radial e represente graficamente o potencial efectivo. Discuta a natureza qualitativa das órbitas em função da sua energia e do momento angular.

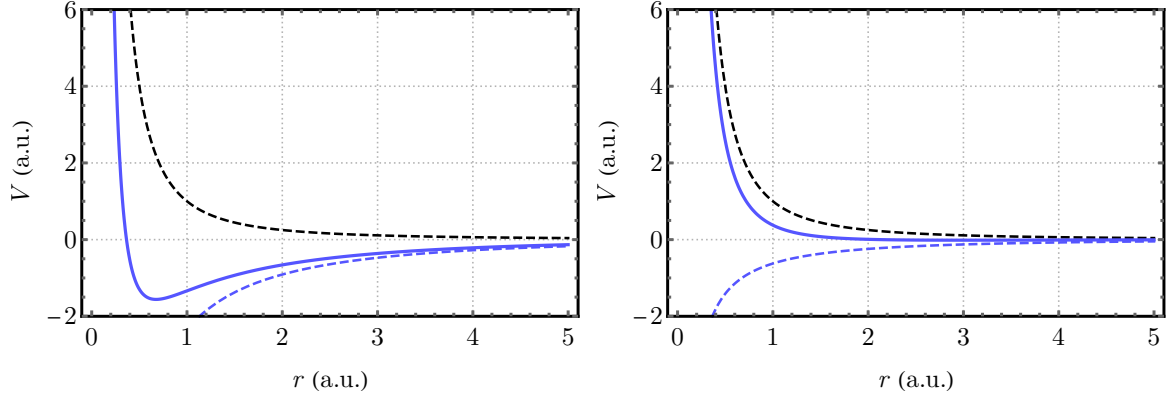


Figure 4: Barreira centrífuga (curva tracejada a preto), $V(r) = -\frac{k}{r}e^{-r/a}$ (curva tracejada a azul) e correspondente potencial efectivo (curva cheia a azul). As situações à esquerda e à direita são obtidas para valores baixos e elevados do momento angular, respectivamente.

Da equação do movimento radial, temos

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{\ell_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}e^{-r/a} \right) = \frac{\ell_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2} \left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-r/a}.$$

- $\frac{\ell_\theta^2}{mr_0^3} - \frac{k}{r_0^2} \left(1 + \frac{r_0}{a} \right) e^{-r_0/a} = 0$. A condição de órbita circular $\dot{r} = 0$ e $\dot{\theta} = \omega_0$ é dada por

$$\omega_0^2 = \frac{1}{r_0^3} \frac{k}{m} \left(1 + \frac{r_0}{a} \right) e^{-r_0/a}$$

- b) Mostre que para órbitas quasi-circulares (i.e. obtidas por perturbação da órbita circular), o ângulo apsidal sofre, por cada revolução, um avanço de $\pi r_0/a$, onde r_0 é raio de equilíbrio.

- $r = r_0 + \xi$,

$$m\ddot{\xi} = \frac{\ell_\theta^2}{m(r_0 + \xi)^3} - \frac{k}{(r_0 + \xi)^2} \left(1 + \frac{r_0 + \xi}{a} \right) e^{-(r_0 + \xi)/a}.$$

Expandindo em primeira ordem a ξ ,

$$\ddot{\xi} = \underbrace{\frac{\ell_\theta^2}{m^2 r_0^3} - \frac{k}{m r_0^2} \left(1 + \frac{r_0}{a} \right) e^{-r_0/a}}_{=0} + \left[-3 \frac{\ell_\theta^2}{m^2 r_0^4} + 2 \frac{k}{m r_0^3} \left(1 + \frac{r_0}{a} + \frac{r_0^2}{2a^2} \right) e^{-r_0/a} \right] \xi.$$

Usando o resultado da alínea a) para simplificar

$$\ddot{\xi} + \underbrace{\left(\omega_0^2 - \frac{k}{m a^2 r_0} e^{-r_0/a} \right)}_{\Omega^2} \xi = 0.$$

- $u(\theta) = u_0 + A \cos(\beta\theta)$, onde

$$\beta^2 = 3 + \frac{r}{f} \left. \frac{df}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{1 + r_0/a - r_0^2/a^2}{1 + r_0/a}$$

é o número de oscilações após uma revolução.

- $\Delta\theta = \frac{2\pi}{\beta} - 2\pi = 2\pi \left(\sqrt{\frac{1 + r_0/a}{1 + r_0/a - r_0^2/a^2}} - 1 \right) \simeq \pi \frac{r_0}{a}.$

*** **Problema 6. Secção eficaz.** Consideremos o problema da difusão em potenciais centrais $V(r)$ repulsivos.

- a) Mostre que a conservação do número de partículas (# part. incidentes = # part. difundidas) resulta na seguinte secção eficaz diferencial

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|.$$

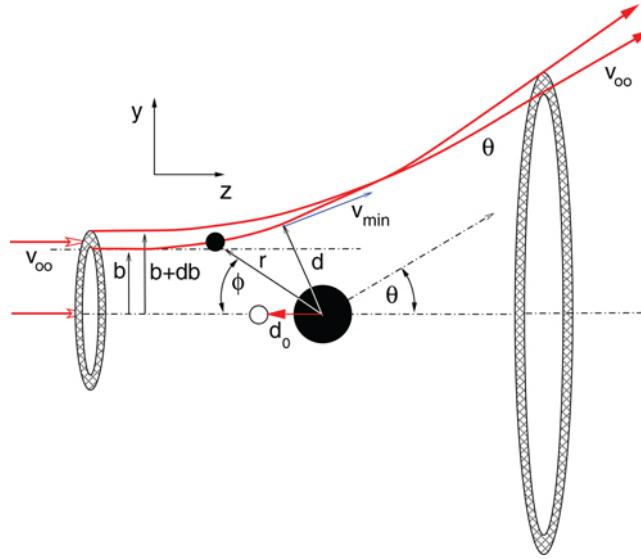


Figure 5: Esquema de um processo de difusão num potencial central repulsivo. À variação infinitesimal da área de impacto bdb corresponde uma secção eficaz diferencial $\sigma(\theta)$.

- Ângulo sólido infinitesimal: $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$
- Parâmetro de impacto: $\ell_\theta = \ell_\theta^\infty = mv_0 b = b\sqrt{2mE}$.
- Se I for a intensidade de partículas ($I = N/A$), temos por conservação do número de partículas

$$2\pi I b |db| = 2\pi I \sigma(\theta) \sin \theta |d\theta| \Rightarrow \sigma(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right|.$$

- b) Parta da equação das órbitas integrada, $\theta(r)$, para mostrar a seguinte relação entre o parâmetro de impacto de b e o ângulo de difusão θ

$$\theta(b) = \pi - 2b \int_0^{u_m} \frac{b du}{\sqrt{1 - V(u)/E - b^2 u^2}},$$

onde $u = 1/r$.

- Seja $\tilde{\theta} = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2m(E - V(r'))/\ell_\theta^2 - 1/r'^2}} + \theta_0$ um ângulo genérico.
- Ψ : ângulo que o raio mínimo r_m faz com o centro do potencial.

$$\theta = \pi - 2\Psi.$$

Tomando $r_0 = +\infty$ e $\theta_0 = \pi$, podemos obter

$$\Psi = \int_{r_m}^\infty \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2m(E - V(r'))/\ell_\theta^2 - 1/r'^2}}.$$

- $\theta(b) = \pi - 2 \int_{r_m}^\infty \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2m(E - V(r'))/\ell_\theta^2 - 1/r'^2}} = \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{b du}{\sqrt{1 - V(u)/E - b^2 u^2}}.$

- c) Considere o potencial $V(r) = k/r^n$, com $\{k, n\} > 0$. Para energias muito elevadas, o ângulo de difusão deve ser pequeno (porquê?). Mostre que, nesse limite, se tem

$$\theta \simeq c + \frac{E_c}{E}.$$

Determine a constante E_c .

- $\frac{1}{\sqrt{1 - ku^n/E - b^2 u^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1 - b^2 u^2}} + \frac{1}{E} \frac{ku^n}{2(1 - b^2 u^2)^{3/2}}.$
- $$\theta \simeq \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{b du}{\sqrt{1 - b^2 u^2}} - \underbrace{\int_0^{u_m} \frac{ku^n du}{(1 - b^2 u^2)^{3/2}}}_{E_c} \frac{1}{E}.$$

- d) Mostre que, para $n = 2$, se tem

$$\sigma(\theta) = \frac{k}{\pi E} \frac{1 - x}{x^2(2 - x)^2 \sin(\pi x)}, \quad \text{onde } x = \theta/\pi.$$

- Mudança de variável: $\zeta = u\sqrt{\frac{k}{E} + b^2}$.

$$\theta(b) = \pi - \frac{2b}{\sqrt{k/E + b^2}} \arcsin \left(u_m \sqrt{k/E + b^2} \right).$$

- Conservação da energia: $E_m = E_\infty \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} \left(\dot{r}_m + r^2 \dot{\theta}_m^2 \right) + \frac{k}{r^n} \Rightarrow u_m = \frac{1}{\sqrt{k/E + b^2}}$.
- $\theta(b) = \pi \left(1 - \frac{b}{\sqrt{k/E + b^2}} \right)$. Definindo $x = \theta/\pi$ por conveniência

$$b^2 = \frac{k}{E} \frac{(1-x)^2}{x(2-x)}$$

$$d b = -\frac{k}{E} \frac{(1-x)}{x^2(2-x)^2} dx.$$

Usando a definição de secção eficaz, chega-se ao resultado pretendido.

e) Considere agora o potencial de “esfera mole” (em oposição à esfera rígida) dado por

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq R, \\ 0, & r > R \end{cases},$$

onde R é o raio da esfera que cria o potencial. Mostre que

$$\sigma(\theta) = \frac{n^2 R^2}{4 \cos(\theta/2)} \frac{(n \cos(\theta/2) - 1) (n - \cos(\theta/2))}{(1 + n^2 - 2n \cos(\theta/2))^2},$$

onde $n = \sqrt{1 + V_0/E}$ é o índice de refração de uma esfera de raio R . Isto explica porque é que podemos usar a mecânica de partículas para explicar o problema de difusão da luz (arco-íris): no limite da óptica geométrica, a luz pode ser descrita como raios (partículas). Por isso a descrição Newtoniana da difusão de corresponde à de Huygens feita para ondas (óptica de Fourier). Na verdade, este resultado tem implicações profundas na questão da dualidade onda-partícula, uma das ideias precursoras da mecânica quântica.

- Começemos por reparar que a situação física interessante é para $b \leq R$. Caso contrário, a partícula passa pelo potencial sem interagir. Da conservação da energia vem

$$E = E_{u_m} \Leftrightarrow 1 + \frac{V_0}{E} - b^2 u_m^2 = 0 \Rightarrow u_m = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{E + V_0}{E}}.$$

- Contudo, a integração é de $[r_m, +\infty[$ ($[0, u_m]$), pelo que separamos nas contribuições fora e dentro da esfera de raio R :

$$\theta = \pi - 2 \underbrace{\int_0^{1/R} \frac{bdu}{\sqrt{1-b^2u^2}}}_{\arcsin(b/R)} - 2 \underbrace{\int_{1/R}^{u_m} \frac{bdu}{\sqrt{1+V_0/E-b^2u^2}}}_{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{b/R}{\sqrt{1+V_0/E}}\right)}.$$

- $\frac{\theta(b)}{2} = \arcsin\left(\frac{b}{nR}\right) - \arcsin\left(\frac{b}{R}\right)$, onde $n = \sqrt{1+V_0/E}$ é o índice de refração.
- Usando $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$, e sabendo que $\cos[\arcsin(x)] = \sqrt{1-x^2}$,

$$\sin(\theta/2) = \frac{b}{R} \sqrt{1 - \frac{b^2}{n^2 R^2}} - \frac{b}{nR} \sqrt{1 - \frac{b^2}{R^2}}.$$

Finalmente, com a paciência de Jó, obteríamos

$$b^2 = \frac{n^2 R^2 \sin^2(\theta/2)}{1 + n^2 - 2n \cos(\theta/2)},$$

o que nos levaria depois ao resultado pretendido.

*** **As leis de Kepler.** Johannes Kepler foi um físico-matemático que ficou imortalizado pelas suas descobertas em mecânica celeste. Em particular, no séc. XVII, formulou três leis universais que decorrem da observação do movimento dos astros que orbitam torno do Sol. Neste desafio, vamos tentar obtê-las.

- a) Lei das áreas. Parta da conservação do momento angular em potenciais centrais para demonstrar que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\ell_\theta}{2m} = \text{const.},$$

i.e. que áreas iguais são “varridas” em intervalos de tempo iguais.

- b) Lei das órbitas. Usando a definição de energia mecânica, mostre que da eq. do movimento para uma partícula num potencial central se obtém, após integração,

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2(E - V_{\text{ef.}}(r))}{m}}.$$

Faça a escolha acertada para o sinal e utilize esta relação para obter

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\ell_\theta}{r^2 \sqrt{2m(E - V_{\text{ef.}}(r))}}.$$

A discussão do tipo de órbitas feita por Kepler faz sentido para potenciais gravíticos. Assim, no que se segue, consideramos $V(r) \sim -k/r$. Faça uso da mudança de variável $u = 1/r$ na expressão anterior para obter

$$\frac{d\theta(u)}{du} = \frac{\alpha}{\epsilon} \frac{1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha u - 1}{\epsilon}\right)^2}},$$

com $\alpha = \ell_\theta^2/(mk)$ e $\epsilon = \sqrt{1 + 2E\ell_\theta^2/(mk^2)}$. Faça uma mudança de variável apropriada (não dizemos qual, mas pense numa relação trigonométrica!) para finalmente obtermos a famosa 1ª Lei de Kepler

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta.$$

Como podemos agora observar, as quantidades ϵ e α representam a excentricidade e o *latus rectum* da órbita, respectivamente. Indique a que valores de ϵ correspondem órbitas elípticas, hiperbólicas, parabólicas e circulares. Aproveite este resultado para demonstrar que, no caso de órbitas planetárias, os semi-eixos maiores e menores são dados por

$$a \equiv \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{\alpha}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

- c) Lei dos períodos. Mostre, partindo da lei das áreas obtida acima, que no caso do movimento planetário se obtém a famosa 3ª Lei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3.$$