Complementos de Cálculo Diferencial e Integral

11ª Ficha de trabalho - 2º Semestre 2014/2015

1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 - x + y$$
com
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, xyz = 1 \, \wedge \, x > 0 \wedge y > 0 \, \wedge \, z > 0 \right\}.$$

2. Determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, restrita à esfera unitária $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = 1$ e mostre como daí se obtém a desigualdade de Cauchy -Schwarz.

3. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução que resulta da rotação em torno do terceiro eixo coordenado Oz de uma curva C seccionalmente regular situada no semiplano $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$.

   (a) Mostre que a área desta superfície é dada pela expressão
   $$vol_2(S) = 2\pi \int_C x \, ds.$$

   (b) No caso $C = \{(x, 0, f(x)) : x \in I\}$ para certa função diferenciável f definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, mostre que a expressão acima se pode escrever
   $$vol_2(S) = 2\pi \int_I x \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

   (c) No caso $C = \{(h(z), 0, z) : z \in J\}$ para certa função diferenciável h definida num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, mostre que a expressão acima se pode escrever
   $$vol_2(S) = 2\pi \int_J h(z) \sqrt{1 + (h'(z))^2} \, dz.$$

   (d) Calcule a área da superfície de um toro de raios $R \geqslant r > 0$.

4. Considere a seguinte função definida em $I =]0, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}^3$,
$$g(t, s) = \left(t^3 \cos \frac{1}{t}, t^3 \operatorname{sen} \frac{1}{t}, t + s\right),$$
e o conjunto $S = g(I)$.

   (a) Descreva geométricamente S e justifique que é uma $2-$variedade.

   (b) Calcule a área de S.