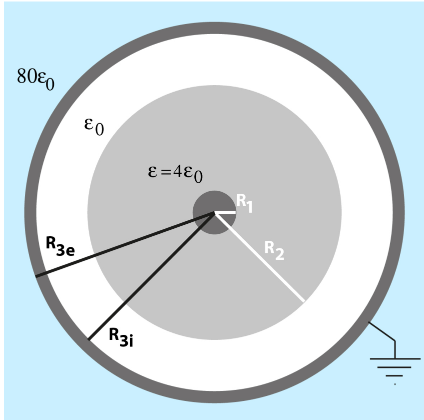
Proposta de Resolução do **1º Teste de Eletromagnetismo**
MEFT
Prof. Pedro Abreu
27 de abril de 2021

Versão: 1{2} **Duração do Teste: 1h 30m** $\varepsilon_0 = 8{,}854\text{x}10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N/A^2

Por determinação do Conselho Pedagógico, informamos que só serão cotadas as respostas que contribuam de forma significativa para os resultados ou demonstrações pedidos.



(4,0) **1)** Considere o sistema hipotético de **simetria cilíndrica** indicado na figura, imerso em água. No centro está um condutor cilíndrico muito comprido e de raio $R_1 = 0{,}1\{0{,}2\}$ m, rodeado por uma camada de espessura $R_2 - R_1 = 0{,}5\{0{,}8\}$ m, cilíndrica e de constante dielétrica $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, por ar com constante dielétrica ε_0, e por uma coroa cilíndrica oca condutora, de raios interior $R_{3i} = 0{,}99\{1{,}95\}$ m e $R_{3e} = 1{,}0\{2{,}0\}$ m (espessura de $1\{5\}$ cm). Note que o condutor exterior está **ligado à Terra** ($V_e = 0$ V) e que o condutor 1 (interior) está **isolado**. Considere ainda que o condutor 1 tem densidade linear de carga elétrica $\lambda_1 = +50\{100\}$ nC/m.

[1,0] **a)** Calcule o campo elétrico **E** em todos os pontos do espaço, em função da distância R ao eixo dos cilindros (*sug.: use o Teorema de Gauss*);
[R: *Por termos meios dielétricos diferentes, comecemos por calcular o campo de deslocamento elétrico $\vec{D}$. Considerando a simetria cilíndrica e o sistema ser muito comprido, podemos começar por notar que $\vec{D}$ só pode depender da distância R ao eixo longitudinal dos cilindros e tem de ser perpendicular a este eixo. Considerando uma superfície de Pedro cilíndrica coaxial com os cilindros e de raio genérico R, fechada em duas tampas e de comprimento l, podemos calcular o fluxo do campo de deslocamento elétrico para fora desta superfície como sendo $\Phi = \iint_{S_P} \vec{D}\cdot\vec{n}dS$. A superfície foi escolhida de forma a que $D(R) = |\vec{D}(R)|$ seja constante na superfície lateral e $\vec{D}\cdot\vec{n}$ seja zero nas tampas. Temos então $\Phi = 0 + D(R)\cdot 2\pi R l + 0 = Q_{\text{int}}$. Ora, para $R_1 < R < R_{3i}$ temos carga total interior dada por $Q_{\text{int}} = \lambda_1 l \Leftrightarrow D(R) = \frac{\lambda_1}{2\pi R}$. Podemos agora calcular o campo elétrico em todo o espaço. Dentro dos condutores em equilíbrio eletrostático, $R < R_1$ ou $R_{3i} < R < R_{3e}$, temos $\vec{E} = 0$. Para $R > R_{3e}$, temos $\vec{E} = 0$ pois o condutor exterior está ligado à terra e não há mais cargas até $R \to \infty$. Finalmente, para $R_1 < R < R_2$: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{4\varepsilon_0} = \frac{\lambda_1}{8\pi\varepsilon_0 R}\vec{e}_R \cong \frac{225}{R}\left\{\frac{450}{R}\right\}\vec{e}_R$(V/m), e para $R_2 < R < R_{3i}$: $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{e}_R \cong \frac{900}{R}\left\{\frac{1800}{R}\right\}\vec{e}_R$(V/m).*]

[0,5] **b)** Calcule o potencial elétrico do condutor 1 (interior);
[R: $\phi_1 = \phi_1 - 0 = \phi_1 - \phi_e = \int_{R_1}^{R_{3i}} \vec{E}\cdot d\vec{R} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{R} + \int_{R_2}^{R_{3i}} \vec{E}\cdot d\vec{R} \Leftrightarrow$
$\phi_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda_1}{8\pi\varepsilon_0 R}\vec{e}_R\cdot d\vec{R} + \int_{R_2}^{R_{3i}} \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{e}_R\cdot d\vec{R} = \frac{\lambda_1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\log\frac{R_2}{R_1} + 4\log\frac{R_{3i}}{R_2}\right) \cong 854\{1926\}$ V .]

[0,5] **c)** Calcule as densidades superficiais de cargas elétricas nas superfícies de separação (livres e de polarização);

[R: *Comecemos pelas cargas de polarização. Como os meios são homogéneos, não há densidades de cargas de polarização em volume. Só há em superfície, dadas por* $\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{n}_{\mathrm{ext}}$ *, com* $\vec{P} = \varepsilon_0\chi_E\vec{E} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$ *. Assim só temos densidades de cargas de polarização em* $R = R_1(R_1^+)$ *e* $R = R_2(R_2^-)$*, dadas respetivamente por* $\sigma_1' = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\lambda_1}{8\pi\varepsilon_0 R_1}\vec{e}_r\cdot\vec{n}_{\mathrm{ext}}$ *e* $\sigma_2' = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\lambda_1}{8\pi\varepsilon_0 R_2}\vec{e}_r\cdot\vec{n}_{\mathrm{ext}}$*. Nas outras superfícies* $\varepsilon = \varepsilon_0$ *ou* $\vec{E} = 0$ *. Note-se que* $\vec{n}_{\mathrm{ext}} = -\vec{e}_R$ *em* R_1^+ *e* $\vec{n}_{\mathrm{ext}} = +\vec{e}_R$ *em* R_2^- *pelo que* $\sigma_1' \cong -57\{-57\}\ \mathrm{nC/m^2}$ *e* $\sigma_2' \cong +9{,}95\{11{,}94\}\ \mathrm{nC/m^2}$.

Para as cargas livres, usamos a propriedade $\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)\cdot\vec{n} = \sigma$ *na transição entre superfícies, sendo* σ *a densidade de cargas livres nesse ponto da superfície (igual em toda a superfície devido à simetria cilíndrica).*

Temos então em $R = R_1 : \sigma_1 = D(R\to R_1^+) - 0 = \frac{\lambda_1}{2\pi R_1} = \frac{50\{100\}}{0{,}2\{0{,}4\}\pi} = 79{,}6\{79{,}6\}\ \mathrm{nC/m^2}$ *e em* $R = R_{3i} : \sigma_{3i} = 0 - D(R\to R_{3i}^-) = -\frac{\lambda_1}{2\pi R_{3i}} = -\frac{50\{100\}}{0{,}99\{1{,}95\}\pi} = -8{,}04\{-8{,}16\}\ \mathrm{nC/m^2}$.

Nas outras superfícies ($R = R_2, R = R_{3e}$)*, note-se que temos* $\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)\cdot\vec{n} = 0$ *ou* $\vec{D}_2 = \vec{D}_1 = 0$*, pelo que nessas transições temos* $\sigma = 0$.]

[0,5] **d)** Calcule a energia eletrostática do sistema por unidade de comprimento;

[R: *A energia eletrostática por unidade de comprimento é* $\frac{W}{l} = \frac{1}{2}\frac{Q}{l}V = \frac{1}{2}\lambda_1\phi_1 \cong 21{,}4\{96{,}3\}\ \mu\mathrm{J/m}$.]

[0,5] **e)** Calcule a capacidade do sistema por unidade de comprimento;

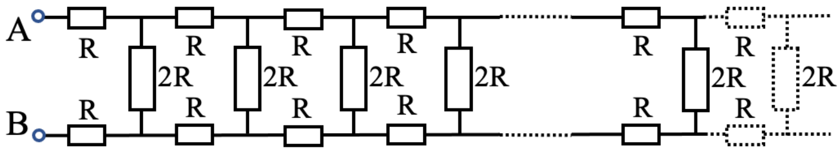
[R: *A capacidade por unidade de comprimento é* $\frac{C}{l} = \frac{Q}{lV} = \frac{\lambda_1}{\phi_1} \cong 58{,}5\{51{,}9\}\ \mathrm{pF/m}$.]

[1,0] **f)** Suponha que se abriu um orifício muito pequeno no condutor exterior, sem prejuízo da simetria cilíndrica e que a água, de constante dielétrica $\varepsilon = 80\varepsilon_0$, substituiu a camada que tinha ar. Determine a variação de energia eletrostática por unidade de comprimento (do "Universo") e a nova capacidade do sistema.

[R: *Como o condutor 1 (interior) está isolado, esta substituição deu-se a carga constante. Podemos começar por calcular a nova capacidade por unidade de comprimento,* C'/l *e depois calcular a variação de energia eletrostática por unidade de comprimento como sendo* $\frac{\Delta W}{l} = \frac{W'}{l} - \frac{W}{l} = \frac{\lambda_1^2}{2(C'/l)} - \frac{W}{l}$.

A nova capacidade por unidade de comprimento é $\frac{C'}{l} = \frac{\lambda_1}{\phi_1'}$*, com* $\phi_1' = \int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot d\vec{R} + \int_{R_2}^{R_{3i}}\vec{E}\cdot d\vec{R} = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4}\log\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{80}\log\frac{R_{3i}}{R_2}\right) \cong 409\{739\}\ \mathrm{V}$ *, pelo que* $\frac{C'}{l} \cong 0{,}122\{0{,}135\}\ \mathrm{nF/m}$ *e* $\frac{\Delta W}{l} \cong (10{,}2\{37{,}0\} - 21{,}4\{96{,}3\})\ \mu\mathrm{J/m} \cong -11{,}2\{-59{,}3\}\ \mu\mathrm{J/m}$.]

[2,0] **2)** Considere o conjunto "infinito" de resistências ligadas em "escada" como na figura. Calcule a resistência equivalente entre os pontos A e B, para o valor $R = 2\{4\}\,\Omega$. (*Sug.: note a invariância do sistema se retirar o bloco de 3 resistências da esquerda*)



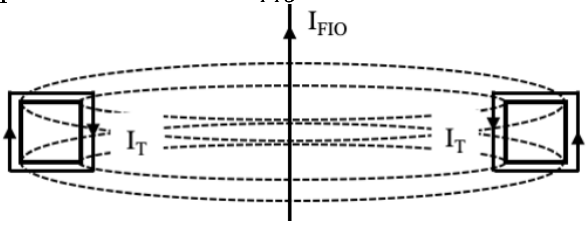
[R: *Se juntarmos um bloco de 3 resistências aos pontos A e B, a resistência equivalente entre os novos extremos A' e B', tem de ser igual à resistência equivalente entre A e B sem esse bloco,* R_{AB}. *Isto é, temos* $R_{A'B'} = R + 2R||R_{AB} + R = R_{AB}$, *representando* $2R||R_{AB}$ *a resistência equivalente da associação em paralelo entre o ramo* $2R$ *e a resistência equivalente* R_{AB}. *Temos então a equação*

$R_{AB} = 2R + \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R_{AB}}\right)^{-1} = 2R + \frac{2RR_{AB}}{2R+R_{AB}} \Leftrightarrow R_{AB}(2R + R_{AB}) = 2R(2R + R_{AB}) + 2RR_{AB}$ *ou*

$R_{AB}^2 + 2RR_{AB} - 4R^2 - 2RR_{AB} - 2RR_{AB} = 0 \Leftrightarrow R_{AB}^2 - 2RR_{AB} - 4R^2 = 0$ *ou usando a fórmula resolvente reduzida* $\left[x^2 + 2kx + c = 0 \Leftrightarrow x = -k \pm \sqrt{k^2 - c}\right]$ *temos*

$R_{AB} = R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2} = \left(1 + \sqrt{5}\right)R \cong 6{,}47\{12{,}94\}\,\Omega$.]

(4,0) **3)** Um toroide com **secção quadrada** de lado $a = 0{,}1\{0{,}2\}$ m e raio médio $R = 10\{5\}$ m, tem $1000\{5000\}$ espiras que transportam uma corrente $I_T = 10\{4\}$ A (ver figura do corte transversal). No centro do toroide temos um fio condutor "infinito", que transporta uma corrente $I_{FIO} = 10000\{20000\}$ A. **Note os sentidos das correntes**.



[1,0] **a)** Calcule o campo magnético em todo o espaço (devido aos dois condutores);
[R: *Usemos a Lei de Ampère para o campo magnético que, dada a simetria do sistema, só depende da distância* r *ao fio, usando uma linha circular centrada no fio:*
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}}$ *, sendo* I_{int} *a corrente interior que atravessa o círculo plano de raio r.*
Temos então, para $z < -\frac{a}{2}$, $z > +\frac{a}{2}$ ***ou*** $r < R - a$, $I_{\text{int}} = I_{\text{FIO}} = 10\,000\,\{20\,000\}$ A *e* $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_{\text{FIO}}}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \frac{2\{4\}}{r}\vec{e}_\varphi(\text{mT})$ *;*
para $-\frac{a}{2} < z < +\frac{a}{2}$ *e* $R - a < r < R + a$, $I_{\text{int}} = I_{FIO} - N_T I_T = 0$, *pelo que* $\vec{B}(r) = 0$.
Finalmente, para
$-\frac{a}{2} < z < +\frac{a}{2}$ *e* $r > R + a$, $I_{\text{int}} = I_{\text{FIO}} - N_T I_T + N_T I_T = I_{\text{FIO}}$ *e* $\vec{B}(r)$ *volta a ser*
$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I_{\text{FIO}}}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \frac{2\{4\}}{r}\vec{e}_\varphi(\text{mT})$.]

[1,0] **b)** Calcule o coeficiente L_T de auto-indução do toroide;
[R: *O coeficiente de auto-indução do toroide é dado por* $L_T = \frac{\Phi_T}{I_T}$ *sendo* $\Phi_T = N_T \iint \vec{B}_T \cdot \vec{n} dS$ *através da secção do toroide. Como* $R \gg a$, *podemos assumir que o campo do toroide, dado na alínea anterior para* $9{,}95\{4{,}9\}$ m $< r <$ $10{,}05\{5{,}1\}$ m *considerando a corrente no fio como nula, é aproximadamente constante e igual a* $B_T(r) = \frac{2\{4\}}{10\{5\}}(\text{mT})$ *(note-se que é* $\vec{B}_T(r) = -\frac{2\{4\}}{r}\vec{e}_\varphi(\text{mT})$, *pois o versor* $\vec{e}_\varphi$ *foi definido na alínea anterior pelo campo do fio).*
O fluxo é então simplesmente
$\Phi_T = N_T \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = N_T B_T(R) \cdot a^2 = 1000\{5000\} \cdot \frac{2\{4\} \times 10^{-3}}{10\{5\}} \cdot 0{,}1^2\{0{,}2^2\}$ *e*
$L_T = \frac{\Phi_T}{I_T} = \frac{2\{160\}\,\text{mH}}{10\{4\}} = 0{,}2\{40\}$ mH .]

[1,0] **c)** Calcule o coeficiente M de indução mútua entre o fio e o toroide;
[R: *Como a expressão do campo do fio é a mesma da do campo do toroide, o fluxo vai ser o mesmo, e o coeficiente de indução Mútua é* $M = \frac{\Phi_T}{I_{\text{FIO}}} = L_T \frac{I_T}{I_{\text{FIO}}} = 0{,}2\{40\}\,\text{mH} \cdot \frac{10\{4\}}{10000\{20000\}} = 0{,}2\{8\}$ μH .]

[1,0] **d)** Suponha que substitui o fio por um solenóide, muito comprido e de raio $R' = 1$ m, com 1000{5000} espiras que transportam uma corrente $I = 10\{4\}$ A, com o eixo do solenóide no local do fio. Calcule o coeficiente de indução mútua entre o solenóide e o toroide nesta nova configuração.
[R: *M=0, pois nesta nova configuração, o campo criado pelo solenóide que substituiu o fio é nulo fora do solenóide, pelo que este campo na zona do toróide vai ser sempre nulo e o coeficiente de indução mútua também vai ser zero.*]