Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEBIOM/MEFT

1º Teste (VB) - 11 de Novembro de 2017 - 9:00 às 10:30

Resolução

Problema 1 Calcule, se existirem (finitos ou infinitos), os seguintes limites:

RESOLUÇÃO:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen}(x^2) \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to 0} x \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2}) = 0$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cosh x}{[x - \operatorname{sen}(\sqrt{x} - x^2)]^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cosh x}{x^2} \frac{1}{[1 - \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x}-x^2)}{x}]^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2} = +\infty$

(c) $\lim_{x\to 0} \left[\ln\left(2 + x^2\right)\right]^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln[\ln(2+x^2)]}{x^2}} = \lim_{t\to -\infty} e^t = 0$ (Como $\ln 2 < 1, \ln(\ln 2) < 0$).

Problema 2 Considere a função $f :]-\infty, 3] \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}[(x-2)^2] & \text{se } 3 \geq x > 2 \\ \\ (x-2)e^{-1/(x-2)^2} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

a) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 2$.

RESOLUÇÃO:

(1) à direita de 2: $\lim_{x\to 2^+} \operatorname{arcsen}[(x-2)^2] = \operatorname{arcsen}(0) = 0$ e

(2) à esquerda de 2: $\lim_{x\to 2^-} (x-2)e^{-1/(x-2)^2} = \lim_{t\to 0^-} te^{-1/t^2} = (0)(0) = 0$

Temos portanto que $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ e f é prolongável por continuidade a $x = 0$.

b) Designando por g esse prolongamento, estude g quanto à diferenciabilidade.

RESOLUÇÃO: É claro que g é diferenciável quando $x \neq 2$ e $x < 3$, porque nesses casos g resulta da composição e produto de funções diferenciáveis. Note-se que g NÃO é diferenciável em $x = 3$, porque a função arcsen não é diferenciável nos extremos do seu intervalo de definição. Relativamente ao ponto $x = 2$, temos que verificar as derivadas laterais de g (usamos a regra de Cauchy em (1)):

(1) <u>à direita de 2</u>: $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{\operatorname{arcsen}[(x-2)^2]}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{2(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \dfrac{0}{1} = 0$ e

(2) <u>à esquerda de 2</u>: $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)e^{-1/(x-2)^2}}{x-2} = \lim_{t\to 0^-} e^{-1/t^2} = 0$

Temos assim que $g'(2) = 0$ e g é diferenciável em $x = 2$. A função g é portanto diferenciável em $]-\infty$

c) Mostre que g restringida ao intervalo $I =]-\infty, 2[$ tem inversa $h = g^{-1}$ definida e diferenciável no intervalo $J = g(I)$. Determine J e calcule $h'(t)$ no ponto $t = -1/e$.

<u>RESOLUÇÃO:</u>

Para $x < 2$, $g'(x) = e^{-\frac{1}{(x-2)^2}} + \dfrac{2(x-2)e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}}{(x-2)^3} = e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}\left(1 + \dfrac{2}{(x-2)^2}\right) > 0$

A função g é por isso estritamente crescente, donde injectiva, em $I =]-\infty, 2[$, pelo que tem uma inversa contínua $h : J \to I$. Para determinar J, basta-nos calcular

$$\lim_{x\to 2}(x-2)e^{-\frac{1}{(x-2)^2}} = 0 \text{ e } \lim_{x\to -\infty}(x-2)e^{-\frac{1}{(x-2)^2}} = -\infty$$

Concluímos pelo teorema de Bolzano que $J = g(I) =]-\infty, 0[$. A inversa h é diferenciável em J porque $g'(x) \neq 0$ para $x \in I$ e, para $x = h(t) = h(-1/e)$, temos

$x = h(-\dfrac{1}{e}) \Leftrightarrow g(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{(x-2)^2}} = -\dfrac{1}{e} = -e^{-1} \Leftrightarrow x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1$

A regra da derivada da inversa conduz imediatamente a

$$h'(t) = \frac{1}{g'(h(t))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{e^{-\frac{1}{(1-2)^2}}\left(1 + \frac{2}{(1-2)^2}\right)} = \frac{e}{3}$$

Problema 3 Calcule as derivadas das seguintes funções:

<u>RESOLUÇÃO:</u>

(a) $f'(x) = 3^{\tan(x^3+1)}(\ln 3)(\sec^2(x^3+1))(3x^2)$

(b) $g'(x) = 2\cos\left(\dfrac{1}{(2+\operatorname{sen}^3 x)^{\frac{1}{2}}}\right)\left(-\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{(2+\operatorname{sen}^3 x)^{\frac{1}{2}}}\right)\right)\left(-\dfrac{3\operatorname{sen}^2 x\cos x}{2(2+\operatorname{sen}^3 x)^{\frac{3}{2}}}\right)$

(c) $h'(x) = x^{\arctan x}(\arctan x \ln x)' = x^{\arctan x}\left(\dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{\arctan x}{x}\right)$

Problema 4 Seja $f(x) = \ln(\cosh x)$ e p_n o polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto $a = 0$.

(a) Calcule p_2.

RESOLUÇÃO: Precisamos de calcular apenas a primeira e segunda derivadas de f:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \ f^{(2)}(x) = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Temos assim:

$$f(0) = \ln 1 = 0, f'(0) = 0 \text{ e } f^{(2)}(0) = 1, \text{ donde } p_2(x) = \frac{x^2}{2}.$$

(b) Mostre que $f(x) = p_2(x) + x^2 E(x)$, onde $E(x) \to 0$ quando $x \to 0$.

RESOLUÇÃO: (usando a regra de Cauchy)

$$\lim_{x\to 0} E(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cosh x) - x^2/2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} - x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cosh^2 x} - 1}{2} = 0$$

(c) Mostre que $-0,5 < f(x) - p_2(x) < 0$ quando $0 < x < 1$.

RESOLUÇÃO:A fórmula de Taylor com resto de Lagrange reduz-se neste caso a

$$f(x) - p_2(x) = R_3(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 \text{ onde } 0 < c < x < 1$$

Como $f^{(3)}(x) = -\dfrac{2\operatorname{senh} x}{\cosh^3 x}$, temos $f(x) - p_2(x) = -\dfrac{2\operatorname{senh} c}{3!\cosh^3 c}x^3 = -\dfrac{\operatorname{senh} c}{3\cosh^3 c}x^3$

Como $c > 0$, temos

$$0 < \frac{\operatorname{senh} c}{\cosh^3 c} = \left(\frac{\operatorname{senh} c}{\cosh c}\right)\left(\frac{1}{\cosh^2 c}\right) < 1$$

É assim evidente que

$$0 > R_3(x) = -\frac{2\operatorname{senh} c}{3!\cosh^3 c}x^3 = -\frac{1}{3}\frac{\operatorname{senh} c}{\cosh^3 c}x^3 > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$$

Problema 5 (4 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, e justifique as suas respostas com base em exemplos ou demonstrações.

(a) A derivada f' não é necessariamente uma função contínua em $\mathbb{R}$.

<u>VERDADEIRO:</u> Um exemplo clássico é o seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x^2), x \neq 0 \\ \\ 0, x = 0 \end{cases}, \; f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2), x \neq 0 \\ \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Neste caso, f é diferenciável em $\mathbb{R}$ mas a derivada f' não é contínua em $x = 0$. Aliás, f' nem sequer é limitada em qualquer vizinhança de 0.

(b) Se $f'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ então f é injectiva.

<u>VERDADEIRO:</u> Se f não é injectiva, i.e., se existem $x < y \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = f(y)$, segue-se do teorema de Rolle que existe $c \in]x, y[$ tal que $f'(c) = 0$.

(c) Se f' é uma função crescente, então qualquer recta tangente ao gráfico de f está sob esse gráfico.

<u>VERDADEIRO:</u> Dado $a \in \mathbb{R}$ e $x \neq a$, temos pelo teorema de Lagrange que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \text{ onde } c \text{ está entre } a \text{ e } x.$$

A recta tangente ao gráfico no ponto $x = a$ tem equação $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ e propomo-nos provar que $f(x) \geq g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Notamos que

- Se $x > a$ temos $c > a$ e $x - a > 0$, donde
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \geq f'(a) = \frac{g(x) - f(a)}{x - a} \Longrightarrow f(x) \geq g(x)$$
- Se $x < a$ temos $c < a$ e $x - a < 0$, donde analogamente
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \leq f'(a) = \frac{g(x) - f(a)}{x - a} \Longrightarrow f(x) \geq g(x)$$

(d) Se $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ existem e são finitos, então $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

<u>VERDADEIRO:</u> Tornamos a usar o teorema de Lagrange. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$ existe $c_x \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1) \; f(x+1) - f(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c_x), \text{ onde } x < c_x < x + 1$$

Notamos agora que

- Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$ então $\lim_{x \to +\infty} f(x+1) - f(x) = 0$, e
- Se $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \beta$ então $\lim_{x \to +\infty} f'(c_x) = \beta$.

Concluímos de (1) que $\beta = 0$.