Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEBIOM/MEFT

1º Teste (VA) - 12 de Novembro de 2016 - 12:00 às 13:30

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4,5 val.) Calcule, se existirem (finitos ou infinitos), os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\ln(\cos x))}{2^{x^2}-1} \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{(\arctan x)^2}{1-\cosh 2x} \qquad (c)\ \lim_{x\to +\infty} \left(1-e^{-1/x^2}\right)^{x^2}$$

Problema 2 (4 val.) A função f está definida para $x \neq 0$ por

$$f(x) = |x|^{3/2} \ln(|x|)$$

(a) Diga se f pode ser prolongada por continuidade ao ponto 0 e, em caso afirmativo, sendo g esse prolongamento por continuidade, determine $g'(0)$, se esta derivada existir.

(b) Determine os intervalos de monotonia e concavidade de f e, caso existam, os extremos, inflexões e assímptotas de f.

(c) Esboce o gráfico de f e determine o conjunto $f(\mathbb{R}^+)$.

Problema 3 (4,5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{2^x}{x^2+1}\right) \qquad (b)\ g(x) = \ln\left(\operatorname{arcsen}(\sqrt{x})\right) \qquad (c)\ h(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$$

Problema 4 (3 val.) Seja $f(x) = \operatorname{senh} x$.

(a) Calcule o polinómio $p(x)$ de grau ≤ 4 tal que $f^{(k)}(0) = p^{(k)}(0)$ para $k \leq 4$.

(b) Conclua que se $x > 0$ então existe $c \in]0, x[$ tal que

$$0 < \frac{f(x)-p(x)}{x^5} < \frac{\cosh(c)}{120}$$

(c) Mostre que $\operatorname{senh}(1/2) = \frac{25}{48} + R$, onde $0 < R < 0,001$ (recorde que $e < 3$).

Problema 5 (4 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Demonstre as seguintes afirmações:

(a) Se f tem limites no infinito então f é limitada em $\mathbb{R}$.

(b) Se f'' existe numa vizinhança de 0, $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0)$ existe e $f'''(0) \neq 0$, então f não tem um extremo em $x = 0$.

(c) Se $f(0) = 0$ então $f(x^2)/x \to 0$ quando $x \to 0$.

(d) Se f' é crescente em $\mathbb{R}$ então a recta tangente ao gráfico de f num qualquer ponto $x = a$ está sob o referido gráfico.