TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2016/2017

1º Teste — Versão A

(Cursos: MEBiol, MEQ)

5 de Novembro de 2016, 11h

1. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$ por $u(x,y) = x\alpha(y) - x^3y$, em que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.

[1,0 val.] (a) Determine a forma geral de $\alpha(y)$ de modo a que u seja a parte real duma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

[1,0 val.] (b) Considerando $\alpha(y) = y^3$, determine a função f, holomorfa em $\mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(\mathrm{i}) = 0$.

[1,0 val.] (c) Sendo f a função da alínea anterior, calcule o valor de

$$\oint_{|z|=2016} \frac{f(z)\operatorname{sen} z}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz \ ,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

(a) Para qualquer função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $C^2(\mathbb{R})$, a função $u(x,y)$ é de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ em todo o seu domínio $\mathbb{R}^2$, o qual é obviamente simplesmente conexo. Então, nesse caso, é condição necessária e suficiente para que u seja a parte real duma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que u seja harmónica, ou seja, que $\Delta u = 0$. Portanto:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \Leftrightarrow \quad x(\alpha''(y) - 6y) = 0,$$

concluindo-se, para que a igualdade se verifique para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, que só poderá ser $\alpha''(y) = 6y$, ou seja, $\alpha'(y) = 3y^2 + A$ e $\alpha(y) = y^3 + Ay + B$, com $A, B \in \mathbb{R}$ quaisquer.

(b) Com $\alpha(y) = y^3$ tem-se $u(x,y) = xy^3 - x^3y$. A função harmónica conjugada de $u(x,y)$, que designaremos por $v(x,y)$, representa a parte imaginária de f de modo a que seja uma função holomorfa em todo o $\mathbb{C}$. Por serem, respectivamente, a parte real e imaginária de uma função inteira, u e v terão então de verificar as equações de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$. Assim, para todo (x,y), tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = y^3 - 3x^2y \quad \Leftrightarrow \quad v(x,y) = \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + c(x).$$

Substituindo na outra equação

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad -3xy^2 + c'(x) = -3xy^2 + x^3 \quad \Leftrightarrow \quad c'(x) = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad c(x) = \frac{x^4}{4} + k,$$

com $k \in \mathbb{R}$. Pelo que se conclui que a forma geral do conjugado harmónico de u é

$$v(x,y) = \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{4} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, para determinar a constante k, observa-se que $f(\mathrm{i}) = 0$ implica que $v(0,1) = 0$ pelo que $k = -\frac{1}{4}$. Então

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = \left(xy^3 - x^3y\right) + \mathrm{i}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right).$$

(c) Atendendo a que:

- a curva $\gamma = \{|z| = 2016 : z \in \mathbb{C}\}$ percorrida uma vez, é uma curva de Jordan;
- $\mathrm{i} \in \operatorname{int}\gamma$;
- as funções $f(z)$ e $\operatorname{sen} z$ são inteiras, donde o produto $f(z)\operatorname{sen} z$ também o é;

estamos nas condições de aplicar a fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada, pelo que temos

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=2016} \frac{f(z)\operatorname{sen} z}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz &= 2\pi\mathrm{i}(f(z)\operatorname{sen} z)'_{|z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\Big(f'(\mathrm{i})\operatorname{sen}\mathrm{i} + f(\mathrm{i})\cos\mathrm{i}\Big) \\
&= -2\pi\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)_{|z=\mathrm{i}} \operatorname{senh} 1,
\end{aligned}$$

porque, pela alínea anterior, $f(\mathrm{i}) = 0$ e $\operatorname{sen}\mathrm{i} = \mathrm{i}\operatorname{senh} 1$. Observe-se que não era sequer necessário ter obtido a função harmónica conjugada v, na alínea b) anterior, visto que pelas equações de Cauchy-Riemann a derivada complexa pode ser obtida exclusivamente a partir das derivadas parciais de u

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = (y^3 - 3x^2y) - \mathrm{i}(3xy^2 - x^3),$$

donde $f'(\mathrm{i}) = 1$ e assim

$$\oint_{|z|=2016} \frac{f(z)\operatorname{sen} z}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz = -2\pi\operatorname{senh} 1.$$

2. Seja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(x + \mathrm{i}y) = 2xy + \mathrm{i}(x^2 - y^2)$.

[1,0 val.] (a) Determine, justificando, se g tem primitiva em $\mathbb{C}$.

[1,0 val.] (b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma g(z)\,dz$, em que γ é o segmento de recta de 0 a $-1 + \mathrm{i}$.

Resolução:

(a) Se g tivesse primitiva em $\mathbb{C}$, g seria necessariamente inteira, ou seja, holomorfa em todo o $\mathbb{C}$. De facto, essa primitiva teria derivada - igual a g - em todos os pontos de $\mathbb{C}$, portanto seria inteira e, consequentemente, infinitamente diferenciável. Donde a função original g teria também que ser infinitamente diferenciável em todo o $\mathbb{C}$.

Mas, pelas equações de Cauchy-Riemann para g, tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -2y \\ 2x = -2x, \end{cases}$$

donde se verifica que são satisfeitas apenas no ponto $(x, y) = (0, 0)$. Conclui-se assim que g não é holomorfa em ponto nenhum e portanto não tem primitiva em $\mathbb{C}$.

(b) Não havendo primitiva, o integral de g só pode ser calculado pela definição. Uma parametrização para o segmento de recta de 0 a $-1 + \mathrm{i}$ é $\gamma(t) = -t + \mathrm{i}t$, com $t \in [0, 1]$. Assim,

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_0^1 g(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^1 (-2t^2)(-1+\mathrm{i})dt = 2(1-\mathrm{i})\int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}(1-\mathrm{i}).$$

3. Considere a função complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \cos(z - \mathrm{i}) + \frac{1}{z(z - 2\mathrm{i})}$$

[1,0 val.] (a) Determine todos os desenvolvimentos possíveis em séries de potências de $(z - \mathrm{i})$ indicando cada uma das regiões onde esses desenvolvimentos são válidos.

[0,5 val.] (b) Utilize os resultados da alínea anterior para obter os valores de

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^3}\,dz \quad \text{e} \quad \oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{3}{2}} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^3}\,dz.$$

[1,0 val.] (c) Classifique as singularidades da função g definida por $g(z) = \frac{f(z)}{(z-2\mathrm{i})^4}$. Justifique a sua resposta.

Resolução:

(a) Escreva-se $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, com

$$f_1(z) = \cos(z - \mathrm{i}), \quad f_2(z) = \frac{1}{z(z - 2\mathrm{i})}.$$

A função f_1 é holomorfa em todo o $\mathbb{C}$, pelo que tem um único desenvolvimento em potências de $(z - \mathrm{i})$ válido para todo o $z \in \mathbb{C}$: a sua série de Taylor centrada em $z_0 = \mathrm{i}$

$$\cos(z - \mathrm{i}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-\mathrm{i})^{2n}}{(2n)!}.$$

Já a função f_2 tem singularidades em 0 e $2\mathrm{i}$, ambas à distância unitária do centro de desenvolvimento em série de potências, $z_0 = \mathrm{i}$. Assim, teremos uma série de Taylor de f_2 centrada em $z_0 = \mathrm{i}$, com raio de convergência 1, ou seja, para $|z - \mathrm{i}| < 1$, onde f_2 é holomorfa; e teremos uma série de Laurent no anel $1 < |z - \mathrm{i}| < \infty$, a região para além das singularidades 0 e $2\mathrm{i}$.

Para escrever estas duas séries, começamos por simplifcar f_2, como soma de fracções elementares

$$\frac{1}{z(z-2\mathrm{i})} = \frac{1/2\mathrm{i}}{z - 2\mathrm{i}} - \frac{1/2\mathrm{i}}{z},$$

e representam-se agora $1/z-2\mathrm{i}$ e $1/z$ como séries geométricas, de razão adequada. Assim, na região $|z-\mathrm{i}|<1$ faz-se

$$\frac{1/2\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{-\mathrm{i}+(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\mathrm{i})^n}{\mathrm{i}^n},$$

a qual converge em $\left|\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|<1\Leftrightarrow|z-\mathrm{i}|<1$, e

$$-\frac{1/2\mathrm{i}}{z}=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{\mathrm{i}+(z-\mathrm{i})}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\mathrm{i})^n}{\mathrm{i}^n},$$

que converge também em $\left|-\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right|<1\Leftrightarrow|z-\mathrm{i}|<1$. Portanto, a série de Taylor de f centrada em $z_0=\mathrm{i}$, válida em $|z-\mathrm{i}|<1$ é dada por:

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\mathrm{i})^{2n}}{(2n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\mathrm{i})^n}{\mathrm{i}^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\mathrm{i})^n}{\mathrm{i}^n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^n}{(2n)!}+(-1)^n\Big)(z-\mathrm{i})^{2n}.\end{aligned}$$

Na região $|z-\mathrm{i}|>1$ temos agora apenas que escrever $\frac{1}{z(z-2\mathrm{i})}=\frac{1/2\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}-\frac{1/2\mathrm{i}}{z}$ como série de Laurent

$$\frac{1/2\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{(z-\mathrm{i})-\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}\frac{1}{1-\left(\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{n-1}}{(z-\mathrm{i})^{n+1}},$$

a qual converge em $\left|\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right|<1\Leftrightarrow|z-\mathrm{i}|>1$, e

$$-\frac{1/2\mathrm{i}}{z}=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{1}{(z-\mathrm{i})+\mathrm{i}}=-\frac{1}{2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}\frac{1}{1-\left(-\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{i}^{n-1}}{(z-\mathrm{i})^{n+1}},$$

que converge também em $\left|-\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right|<1\Leftrightarrow|z-\mathrm{i}|>1$. Portanto, a série de Laurent de f centrada em $z_0=\mathrm{i}$, válida em $|z-\mathrm{i}|>1$ é dada por:

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\mathrm{i})^{2n}}{(2n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{n-1}}{(z-\mathrm{i})^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{i}^{n-1}}{(z-\mathrm{i})^{n+1}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-\mathrm{i})^{2n+2}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-\mathrm{i})^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

(b) Ambos os integrais correspondem ao termo a_2 da parte regular duma série de Laurent em potências de $(z-\mathrm{i})$, residindo a diferença apenas no facto dos caminhos, num e noutro caso, estarem abaixo ou acima do raio 1.

No caso da curva $|z-\mathrm{i}|=1/2$, está-se abaixo do raio 1, pelo que a série em questão é a de Taylor, válida na bola $|z-\mathrm{i}|<1$ e como nessa região f até é holomorfa, este integral corresponde mesmo à segunda derivada $f''(\mathrm{i})$. Assim,

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{2}}\frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^3}\,dz=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}f''(\mathrm{i})=2\pi\mathrm{i}\,a_2.$$

Portanto, examinando a série de Taylor determinada na alínea anterior em $|z-\mathrm{i}|<1$ observa-se que o coeficiente a_2, correspondente à potência $(z-\mathrm{i})^2$, se obtém para $n=1$ valendo $a_2=-\frac{1}{2!}-1=-\frac{3}{2}$ e assim

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^3}\,dz=-3\pi\mathrm{i}.$$

Já no caso da curva $|z-\mathrm{i}|=3/2$, está-se acima do raio 1, pelo que a série em questão é a de Laurent, válida na bola $|z-\mathrm{i}|>1$. Aí o coeficiente a_2 da parte regular da série não pode ser relacionado com derivadas de f, mas o integral é na mesma dado por $2\pi\mathrm{i}a_2$. De novo, para a potência $(z-\mathrm{i})^2$ tem-se $n=1$ na série de Laurent em $|z-\mathrm{i}|>1$, da alínea anterior, valendo $a_2=-\frac{1}{2!}=-\frac{1}{2}$ e assim

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=\frac{3}{2}} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^3}\,dz=-\pi\mathrm{i}.$$

(c) Para determinar o valor deste integral aplicamos o teorema dos resíduos, determinando as singularidades isoladas de f no interior da circunferência de raio 4 centrada na origem.

Ora, pelo estudo das singularidades de f realizado na alínea anterior, conclui-se que apenas $z_0=0,\pi\mathrm{i},-\pi\mathrm{i}$ se encontram no interior da curva. Os correspondentes resíduos também já foram determinados na alínea anterior, sendo de salientar que em $z_0=0$ o resíduo é nulo apesar de se tratar duma singularidade essencial de f. Assim,

$$\oint_{|z|=4} f(z)dz=2\pi\mathrm{i}\big(\operatorname{Res}(f,-\pi\mathrm{i})+\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,\pi\mathrm{i})\big)=$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{i}\frac{\operatorname{senh}(-\pi)}{2}+0+\mathrm{i}\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{2}\right)=0.$$

[0,8 val.] 4. (a) Mostre que

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta=-\mathrm{i}\oint_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z(z^2+4z+1)}dz.$$

[0,7 val.] (b) Use a alínea anterior para calcular o valor do integral

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta.$$

Resolução:

(a) Usando a fórmula de Euler temos, para $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\cos(\theta)=\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2},$$

donde

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta)}{2+\cos(\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}}{2+\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}}{2+\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}}d\theta.$$

A função $e^{\mathrm{i}\theta}$, com $\theta\in[0,2\pi]$ pode ser interpretada como uma parametrização da circunferência de raio 1 centrada na origem, percorrida uma vez no sentido positivo, e desse modo o integral real pode também assim ser interpretado como o integral complexo $\oint_{|z|=1} f(z)dz$, da função

$$f(z) = \frac{\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}} \frac{1}{\mathrm{i}z} = -\mathrm{i}\frac{z^2+1}{z(z^2+4z+1)}.$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\, d\theta = -\mathrm{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(z^2+4z+1)} dz.$$

(b) Basta então aplicar o teorema dos resíduos (ou alternativamente, a fórmula integral de Cauchy) ao cálculo do integral em torno da circunferência unitária em torno da origem.

Para isso, começa-se por observar, usando a fórmula resolvente para o polinómio de segundo grau no denominador, que as singularidades desta função f são $z = 0$ e $z = -2 \pm \sqrt{3}$. Obviamente só $z_0 = 0$ e $z_0 = -2+\sqrt{3}$ interessam visto serem as únicas que estão situadas no interior da circunferência unitária de integração. O denominador da função pode portanto ser factorizado como:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})},$$

e quer-se, deste modo, determinar o valor do integral

$$-\mathrm{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})} dz.$$

Os pontos $z_0 = 0$ e $z_0 = -2+\sqrt{3}$ são claramente pólos simples, portanto usando o teorema dos resíduos ou a fórmula integral de Cauchy, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2+\cos\theta}\, d\theta &= -\mathrm{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})} dz \\ &= 2\pi \left[\frac{z^2+1}{(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})}_{|z=0} + \frac{z^2+1}{z(z+2+\sqrt{3})}_{|z=-2+\sqrt{3}} \right] = 2\pi\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

[1,0 val.] 5. Suponha que f e g são funções inteiras tais que $f(x+\mathrm{i}0) = g(x+\mathrm{i}0)$, para todo o $x \in [-1,1]$. Mostre que, necessariamente, $f(z) = g(z)$, para todo o $z \in \mathbb{C}$.

Resolução:

Como estamos a assumir que f e g são ambas inteiras, então são válidos os desenvolvimentos em série de MacLaurin das duas funções, com raio de convergência infinito, ou seja, para todo o $z \in \mathbb{C}$ tem-se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad \text{e} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Basta, portanto, mostrar que todas as derivadas de f e g na origem são iguais, para concluir que as suas séries de MacLaurin serão iguais e, consequentemente, as funções em todo o $z \in \mathbb{C}$.

Mas, por hipótese, temos que $f(x+\mathrm{i}0) = g(x+\mathrm{i}0)$ num intervalo em torno de $x = 0$ e as derivadas (complexas) de f e g na origem podem ser obtidas apenas com recurso a derivadas parciais em x, donde

$$f(0) = g(0), \qquad f'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0) = g'(0),$$

$$f''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + \mathrm{i}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0) = g''(0),$$

e para qualquer n,

$$f^{(n)}(0) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0,0) + \mathrm{i}\frac{\partial^n v}{\partial x^n}(0,0) = \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(0) = g^{(n)}(0).$$

Concluimos assim que todas as derivadas de f e g coincidem na origem, pelo que as suas séries de MacLaurin são iguais e portanto as próprias funções também.