Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral I

MEEC, MEAmbi

2º Exame - 8 de Julho de 2009 - 13h00m

Solução

Problema 1 (0,5 val.) Seja $f(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{1+4x-x^2}}$.

(a) Determine o domínio de f.
(b) Determine, se existirem, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo do domínio de f.

Problema 2 (1,5 val.) Seja $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$.

(a) Determine os intervalos de monotonia de f.
(b) Estude a concavidade de f.
(c) Determine as assímptotas do gráfico de f, se existirem.
(d) Determine os extremos de f, se existirem, e esboce o gráfico de f.

Problema 3 (0,5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x+a) & \text{se} \quad x \geq 0 \\ e^{b \operatorname{sen} x} - 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) Determine as constantes a e b para as quais f é contínua em $\mathbb{R}$.
(b) Determine as constantes a e b para as quais f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Problema 4 (0,5 val.) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$(a) \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-x+2x^2}}{x+2} \qquad\qquad (b) \ \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\operatorname{sen}(x^2)}{x^6}$$

Problema 5 (1,5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$(a) \ f(x) = \frac{e^{x^2}+1}{\operatorname{senh} x} \qquad (b) \ g(x) = \int_{\tan x}^{1} \sqrt{1+t^3}\, dt \qquad (c) \ h(x) = (\log x)^{1/x}$$

Problema 6 (1,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a) \ f(x) = x \operatorname{sen} x \qquad (b) \ g(x) = \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} \qquad (c) \ h(x) = \frac{x}{(x-2)^2(x+1)}$$

(d) Calcule o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{9x}{(x-2)^2(x+1)}dx$. O integral é superior ou inferior a 2?

Virar a página $\longrightarrow$

Problema 7 (1 val.) Calcule a área da região do plano delimitada pelas linhas

$$y = \cos(\pi x) \text{ e } y = 1 - 2x.$$

A área da região em causa é superior ou inferior a 1/6?

Problema 8 (1 val.) Suponha que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Na tabela seguinte estão indicados alguns valores de f, g, f' e g':

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	-1	1	5
1	3	2	-2	2
2	0	1	2	3

(a) A função f é injectiva? A equação $f(x) = g(x)$ tem soluções?

(b) Calcule no ponto $x = 1$ as derivadas de

$$u(x) = f(x)g(x) \text{ e de } v(x) = \frac{1}{g(1+x^2)}.$$

(c) Supondo que a derivada de g nunca se anula, calcule a derivada da função inversa g^{-1} também no ponto $x = 1$.

Problema 9 (1 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k^2+1)}{\sqrt{k^4 + 2k^3 + 1}} \qquad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + \operatorname{sen} k} \qquad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}$$

Problema 10 (0,5 val.) Determine a série de Taylor no ponto $a = 0$ das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = e^{x^2} - 1 \qquad (b)\ g(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (c)\ u(x) = \int_0^x \arctan(t^3)\,dt$$

Problema 11 (0,5 val.) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\log(n+2)}.$$

(a) Determine o raio de convergência (R) da série indicada.

(b) Sendo f a função definida pela série indicada no respectivo intervalo de convergência, verifique que f tem um extremo em $x = 0$, e classifique esse extremo.