Equações de Fresnel, verificação experimental.

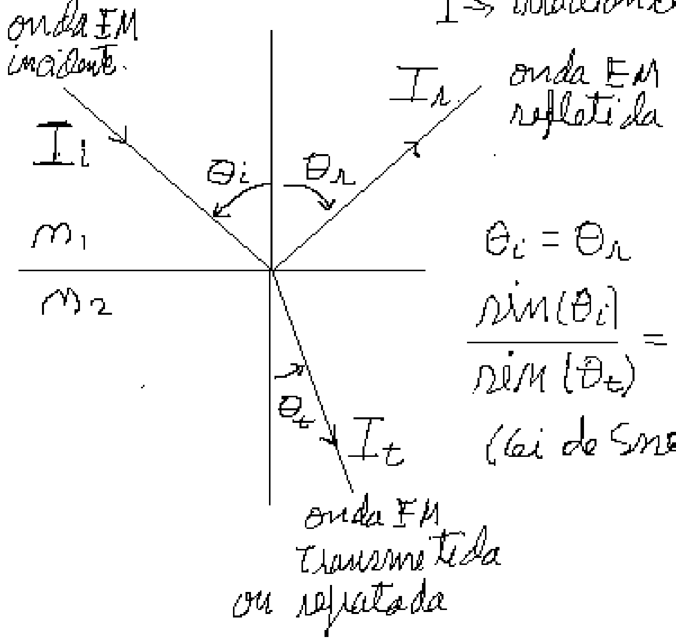
LET 2021

Reflexão e refração de ondas eletromagnéticas

$I \rightarrow$ irradiância

$I = \langle |\vec{S}| \rangle$, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ $\quad [I] = [S] = W\,m^{-2}$

Vetor de Pointing



$\theta_i = \theta_r$

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \frac{n_2}{n_1}$$

(Lei de Snell)

$I_r(I_i) = ?$

$I_t(I_i) = ?$

onda EM:

Equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ , \ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ , \ \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Equações constitutivas:

$\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$

Equação de ondas:

$$\nabla \times \nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \mu \vec{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Com $\vec{J} = 0$ $\rightarrow$ (meio não condutor) $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot E) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\varepsilon\vec{E} = \rho$

Com $\rho = 0$ (meio não eletrizado) $\rightarrow$ $\underline{\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$ $\rightarrow$ Equação de ondas p/ meio isótropo não condutor e não eletrizado.

Eq. Ondas admite soluções do Tipo: $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{K}\cdot\vec{r})}$, verifiquemos em que condições.

Eq. de ondas EM:

$$\nabla^2 E - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$\downarrow$

$$(-ik_x)^2 \vec{E} + (-ik_y)^2 \vec{E} + (-ik_z)^2 \vec{E} - \varepsilon\mu (i\omega)^2 \vec{E} = 0$$

$$(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \varepsilon\mu\omega^2)\,\vec{E} = 0$$

$$-k^2 + \varepsilon\mu\omega^2 = 0$$

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega$$

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu}\,k v$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v} \quad , \; n = \frac{c}{v} \, ,$$

$$k = n\frac{\omega}{c} = n k_0 \qquad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = n\frac{2\pi}{\lambda_0}$$

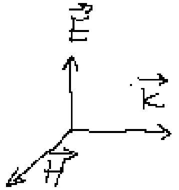
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Relação entre $\vec{E}$ e $\vec{H}$: $\quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu(i\omega)\vec{H}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ -ik_x & -ik_y & -ik_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i\vec{k}\times\vec{E}$$

$$-i\vec{k}\times\vec{E} = -i\mu\omega\vec{H} \rightarrow \vec{k}\times\vec{E} = \mu\omega\vec{H} \Rightarrow$$



$$\rightarrow H = \frac{k}{\mu\omega} E$$

Teste de solução tipo onda plana: $\quad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}(-ik_x)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = (-ik_x)^2 \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = (-ik_x)^1 \vec{E}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = (i\omega)^2 \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = (i\omega)^2 \vec{E}$$

$$\phi = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} \qquad \frac{d\phi}{dt} = 0 = \omega - \vec{k}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\omega = \vec{k}\cdot\vec{v} \rightarrow \omega = kv$$

$$\omega = kv$$

Relação entre $\vec{k}$ e $\vec{E}$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{\varepsilon}\vec{D}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \quad \left(\text{meio não eletrizado}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = E_{0x}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}(-ik_x) + E_{0y}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}(-ik_y) + E_{0z}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}(-ik_z) =$$

$$= -i(E_x k_x + E_y k_y + E_z k_z) = -i(\vec{k}\cdot\vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{k}\perp\vec{E}$$

Verificação que $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ é uma onda plana: encontrar lugar geométrico dos pontos tal que $\vec{E}(0,\vec{r}) = \vec{E}_0$:

$\vec{E}(0,\vec{r}) = \vec{E}_0\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = 2m\pi \rightarrow k_x x + k_y y + k_z z = 2m\pi \rightarrow$ equação de família de planos $\perp$ a $\vec{k}$

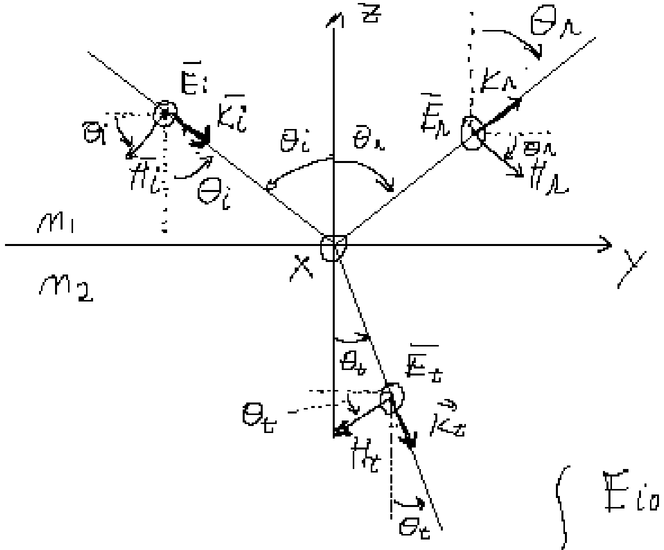
Verificação: $\vec{k}\cdot\vec{r}_1 = 2m\pi$, $\vec{k}\cdot\vec{r}_2 = 2m\pi$ $\quad \vec{k}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rightarrow$ vetor do plano

Equações de Fresnel:

Condições fronteira dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$: $E_{tangencial\,1} = E_{tangencial\,2}$, $H_{tangencial\,1} = H_{tangencial\,2}$

$H = \frac{k}{\mu\omega} E$

Polarização S ($\vec{E} \perp$ plano de incidência)



Em $z=0$ podemos escrever:
$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ -H_i\cos\theta_i + H_r\cos\theta_r = -H_t\cos\theta_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{i0}\, e^{i(\omega_i t - k_{iy} y)} + E_{r0}\, e^{i(\omega_r t - k_{ry} y)} = E_{t0}\, e^{i(\omega_t t - k_{ty} y)} \\ -\cos\theta_i H_{i0}\, e^{i(\omega_i t - k_{iy} y)} + \cos\theta_r H_{r0}\, e^{i(\omega_r t - k_{ry} y)} = -\cos\theta_t H_{t0}\, e^{i(\omega_t t - k_{ty} y)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t \\ k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} \end{cases}$$

$k_i \sin\theta_i = k_r \sin\theta_r = k_t \sin\theta_t$

$n_1 k_0 \sin\theta_i = n_1 k_0 \sin\theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r$

$n_1 k_0 \sin\theta_i = n_2 k_0 \sin\theta_t$

lei de Snell $\rightarrow n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$

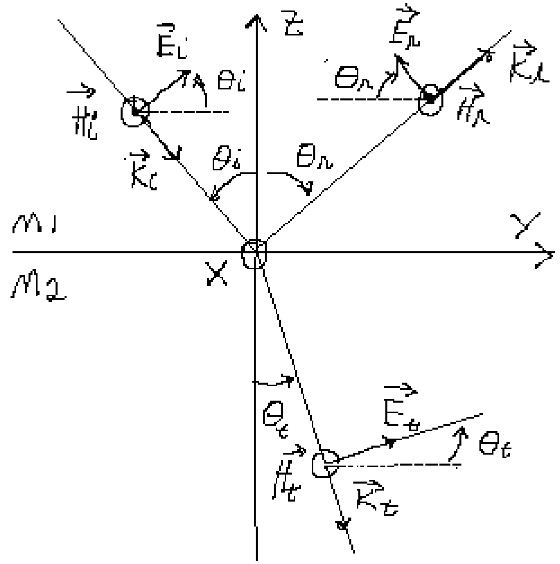
$$\begin{cases} E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ -\cos\theta_i \frac{k_i}{\mu_i\omega} E_{i0} + \cos\theta_r \frac{k_r}{\mu_i\omega} E_{r0} = -\cos\theta_t \frac{k_t}{\mu_t\omega} E_{t0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ -\cos\theta_i \dfrac{k_i}{\mu_i \omega} E_{i0} + \cos\theta_r \dfrac{k_r}{\mu_r \omega} E_{r0} = -\cos\theta_t \dfrac{k_t}{\mu_t \omega} E_{t0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ (E_{i0} - E_{r0}) \cos\theta_i \, n_1 \dfrac{k_0}{\mu_1} = E_{t0} \cos\theta_t \dfrac{n_2}{\mu_2} k_0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{E_{r0}}{E_{i0}} = \dfrac{\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_i - \frac{n_2}{\mu_2}\cos\theta_t}{\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_i + \frac{n_2}{\mu_2}\cos\theta_t} \\ \dfrac{E_{t0}}{E_{i0}} = \dfrac{2\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_i}{\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_1 + \frac{n_2}{\mu_2}\cos\theta_t} \end{cases}\right\}$$ equações de Fresnel para a polarização S

Equações de Fresnel (polarização P):



Condições fronteira dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$

$E_{\text{tangencial } 1} = E_{\text{tangencial } 2}$

$H_{\text{tangencial } 1} = H_{\text{tangencial } 2}$

Em $z=0$ podemos escrever:

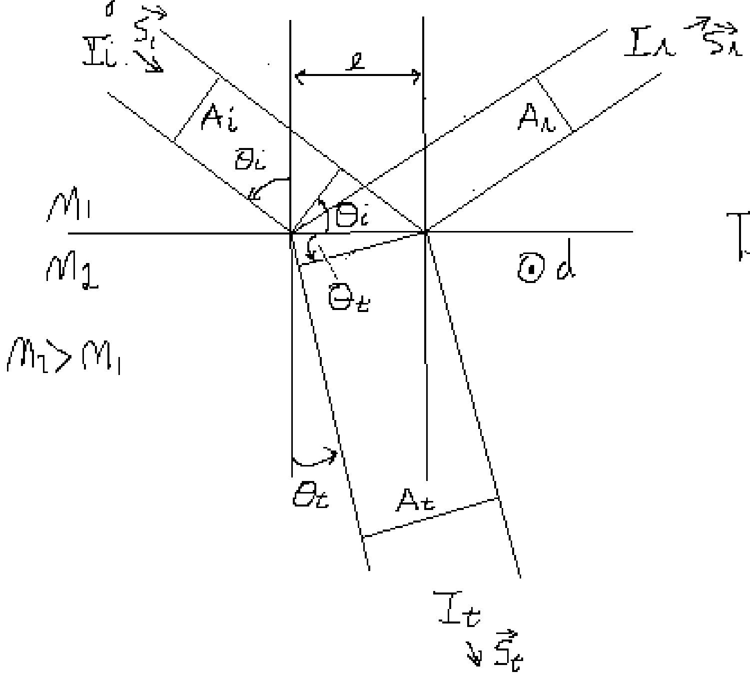
$$\begin{cases} H_i + H_r = H_t \\ E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_r = E_t \cos\theta_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{k_i}{\mu_1 \omega} E_i + \dfrac{k_r}{\mu_1 \omega} E_r = \dfrac{k_t}{\mu_2 \omega} E_t \\ E_i \cos\theta_i - E_r \cos\theta_r = E_t \cos\theta_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{n_1 k_0}{\mu_1}(E_{i0} + E_{r0}) = \dfrac{n_2 k_0}{\mu_2} E_{t0} \\ E_{i0} \cos\theta_i - E_{r0} \cos\theta_1 = E_{t0} \cos\theta_t \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{E_{r0}}{E_{i0}} = \dfrac{\frac{n_2}{\mu_2}\cos\theta_i - \frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_t}{\frac{n_2}{\mu_2}\cos\theta_i + \frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_t} \\ \dfrac{E_{t0}}{E_{i0}} = \dfrac{2\frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_i}{\frac{n_2}{\mu_2}\cos\theta_i + \frac{n_1}{\mu_1}\cos\theta_t} \end{cases}\right\}$$ equações de Fresnel polarização P

Refletância e Transmitância na superfície de refração entre dois meios LHI não condutores



Reflectância: $R \equiv \frac{P_r}{P_i} = \frac{A_r I_r}{A_i I_i} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\langle|\vec{S}_r|\rangle}{\langle|\vec{S}_i|\rangle} = \frac{\langle|\vec{E}_r \times \vec{H}_r|\rangle}{\langle|\vec{E}_i \times \vec{H}_i|\rangle} = \frac{\langle E_r H_r\rangle}{\langle E_i H_i\rangle} = \left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)^2$

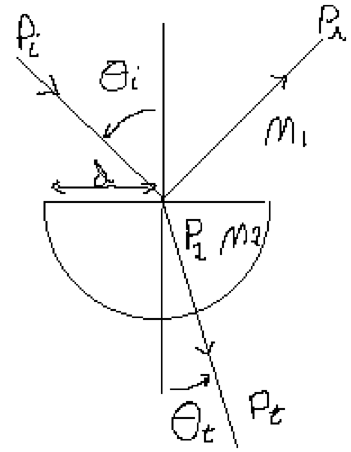
Transmitância: $T \equiv \frac{P_t}{P_i} = \frac{A_t I_t}{A_i I_i} = \frac{d\,l \cos\theta_t \, I_t}{d\,l \cos\theta_i \, I_t} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{I_t}{I_i} = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{\langle E_t H_t\rangle}{\langle E_i H_i\rangle} \Rightarrow$

$$T = \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_{t0}}{E_{i0}}\right)^2 \qquad T + R = 1 \rightarrow \text{Conservação da energia}$$

Lei de Lambert-Beer: $I(d) = I_0 e^{-\alpha d}$
(meio com perdas)

Experiência laboratorial:

I



$R_T = \frac{P_r}{P_i} = R_{12}(\theta_i)$

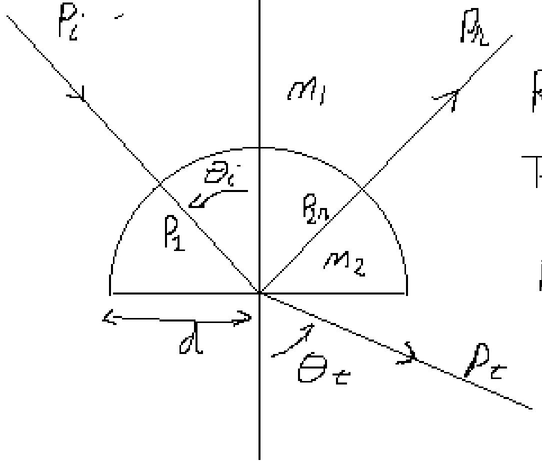
$T_T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{P_t}{P_2} \times \frac{P_2}{P_i} = T_{21}(0) \times T_{12}(\theta_i)$

$R_T + T_T < 1$ $\qquad T_{12}(0) = T_{21}(0) = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}\Big|_{\mu_1 = \mu_2}$

$T_{Tp} = T_T e^{-\alpha d}$ $\qquad R_{Tp} = R_T$

com perdas

II



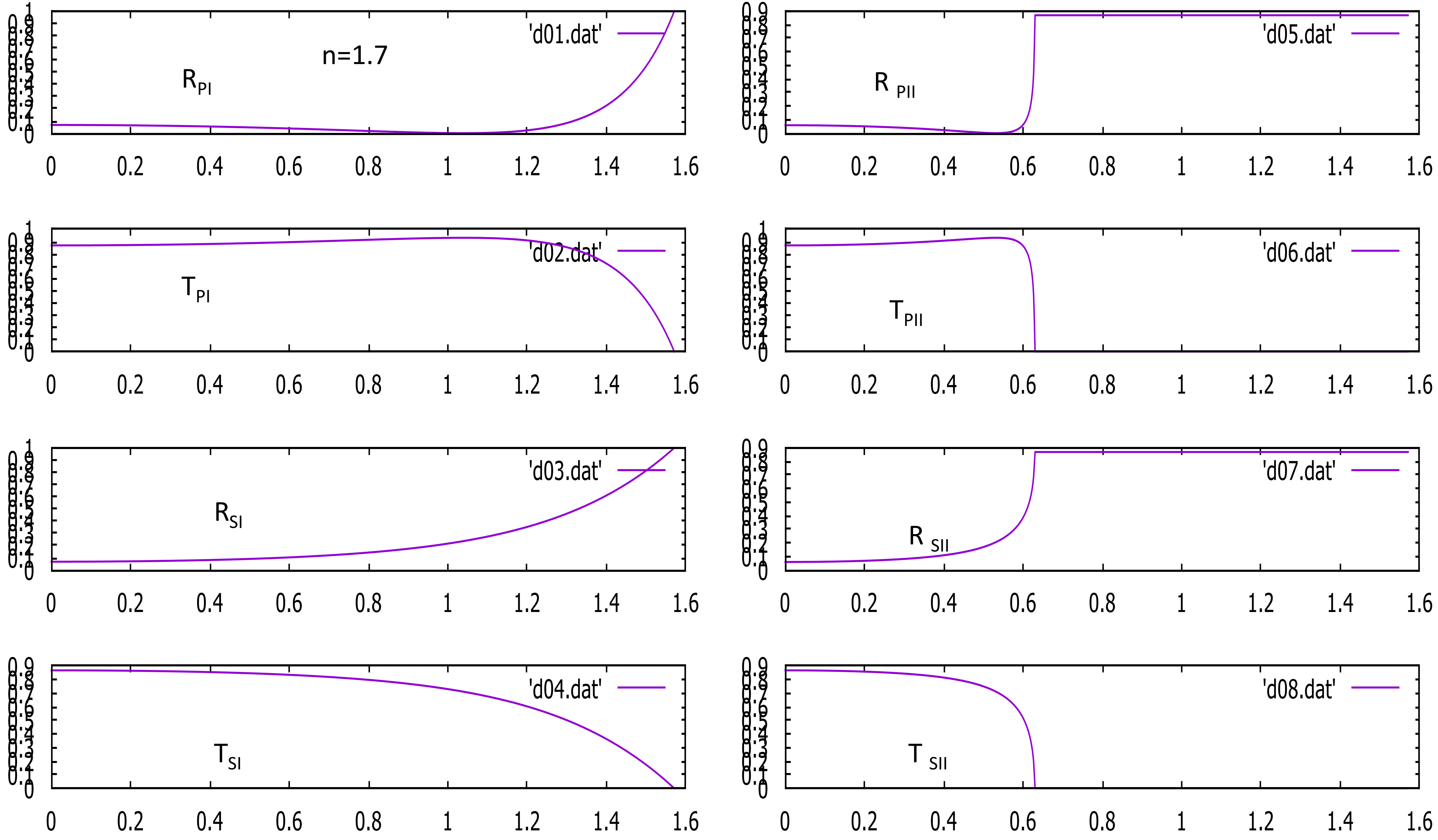
$R_T = \frac{P_r}{P_i} = \frac{P_r}{P_{2r}} \times \frac{P_{2r}}{P_2} \times \frac{P_2}{P_i}$

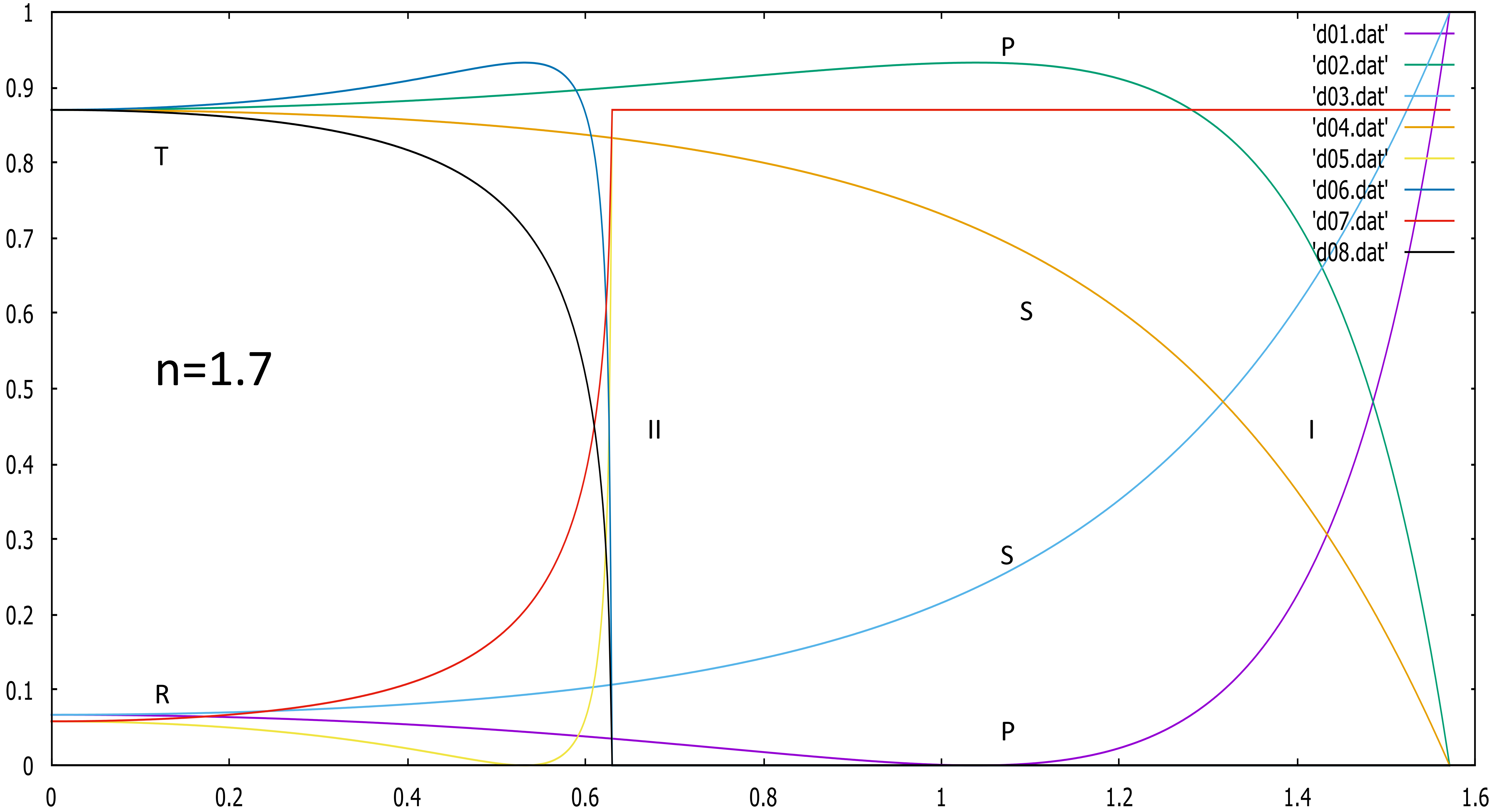
$R_T = T_{21}(0)\, R_{21}(\theta_i)\, T_{12}(0)$

$T_T = \frac{P_t}{P_i} = \frac{P_t}{P_2} \times \frac{P_2}{P_i} = T_{21}(\theta_i) \times T_{12}(0)$

$R_T + T_T < 1$

$$\left.\begin{aligned} R_{Tp} &= R_T e^{-2\alpha d} \\ T_{Tp} &= T_T e^{-\alpha d} \end{aligned}\right\} \text{com perdas}$$


n=1.7
'd01.dat'
R_PI
'd05.dat'
R PII
'd02.dat'
T_PI
'd06.dat'
T_PII
'd03.dat'
R_SI
'd07.dat'
R SII
'd04.dat'
T_SI
'd08.dat'
T SII
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6



'd01.dat'
'd02.dat'
'd03.dat'
'd04.dat'
'd05.dat'
'd06.dat'
'd07.dat'
'd08.dat'
P
T
S
n=1.7
II
I
S
R
P
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

FIM