TEOREMAS DE FUNÇÃO INVERSA E FUNÇÃO IMPLÍCITA
a propósito de soluções de equações

Luis T. Magalhães

IST

26.MAR.2018

Se $\mathbf{f}: S \to \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}$ é diferenciável em S, $D\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a} \in S$ e $J\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$, então existe $X \subset S$ aberto com $\mathbf{a} \in X$ tal que:
(1) **a restrição $\mathbf{f}_{|X}$ tem inversa $\mathbf{f}^{-1}$;**
(2) **$Y = \mathbf{f}(X)$ é aberto;**
(3) **$\mathbf{f}^{-1}$ é diferenciável em Y, $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1}$ c/ $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in Y$;**
(4) **$\mathbf{f}$ é C^m $(m \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathbf{f}^{-1}$ é C^m.**

Dem. (1) $\exists_{R>0}: \mathbf{f}_{|\overline{X}}, X = B_R(\mathbf{a}), \overline{X} \subset S$, tem inversa contínua em $\mathbf{f}(\overline{X})$ e $J\mathbf{f} \neq 0$

Sem perda de generalidade $\mathbf{a} = 0, \mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0, D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = I_n$ (translação no domínio e no espaço de chegada para $(\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{a}))$ passar para origem, e composição de $[\mathbf{f}'(\mathbf{a})]^{-1}$ com $\mathbf{f}$). Prova-se que $\exists_{R>0} : \mathbf{f}_{|B_R(\mathbf{a})}$ é injectiva. Com $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é

$$\mathbf{G}(\mathbf{a}) = 0\,, \qquad D\mathbf{G}(\mathbf{a}) = 0\,, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})\,.$$

Aplicando T. de Lagrange e desigualdade de Cauchy-Schwarz a cada componente, para alguns $\mathbf{c}_k$ no segmento de recta de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ é

$$|G_k(\mathbf{y}) - G_k(\mathbf{x})| = |\nabla G_k(\mathbf{c}_k) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})| \leq \|\nabla G_k(\mathbf{c}_k)\| \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Como $\mathbf{G}$ é diferenciável em S, ∇G_k é contínua em $\mathbf{a}$ e $\nabla G_k(\mathbf{a}) = 0$,
$\exists_{R_k>0}: \|\nabla G_k(\mathbf{z})\| < \frac{1}{2n}, \mathbf{z} \in B_{R_k}(\mathbf{a}), k = 1, \ldots, n$; com $R = \min\{R_1, \ldots, R_n\}$, é
$\|\mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})\| \leq n \|\mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B_R(\mathbf{a})}$. Portanto,

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B_R(\mathbf{a})} \Rightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x}\,.$$

Logo, $\exists_{R>0}$: $\mathbf{f}$ é injectiva em $\overline{B_R(\mathbf{a})}$; logo, também em $X = B_R(\mathbf{a})$.

Para $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{f}\big(\overline{X}\big)$, com $\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{v}=\mathbf{f}(\mathbf{y})$, é

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = \big\|[\mathbf{G}(\mathbf{y})+\mathbf{f}(\mathbf{y})]-[\mathbf{G}(\mathbf{x})+\mathbf{f}(\mathbf{x})]\big\| \le \tfrac{1}{2}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|+\|\mathbf{f}(\mathbf{y})-\mathbf{f}\big(\mathbf{x}\big)\|\,,$$

pelo que $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\le 2\|\mathbf{f}(\mathbf{y})-\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$, e

$$\|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{v})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \le 2\|\mathbf{f}(\mathbf{y})-\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = 2\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|\,;$$

logo, $\mathbf{f}^{-1}$ é contínua em $\mathbf{f}\big(\overline{X}\big)$.

Como $J\mathbf{f}(\mathbf{a})=\det D\mathbf{f}(\mathbf{a})\neq 0$, e $D\mathbf{f}$ e det são contínuas, pode-se tomar $R>0$ menor se necessário de modo a ser $J\mathbf{f}=\det D\mathbf{f}\neq 0$ em X.

(2) $\exists\ X\subset S$ aberto com $\mathbf{a}\in X$, $\mathbf{f}_{|X}$ tem inversa $\mathbf{f}^{-1}$ e $Y=\mathbf{f}(X)$ é aberto.

Com X de (1), como ∂X é limitado e fechado e, da injectividade em $\overline{X}$, $\mathbf{f}$ não assume o valor $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ em ∂X, do T. de Weierstrass, $\mathbf{x}\mapsto\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})\|$ tem mínimo $d>0$ em ∂X. Seja $Y=B_{\frac{d}{2}}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n:\|\mathbf{y}-\mathbf{f}(\mathbf{a})\|<\frac{d}{2}\}$. Para $\mathbf{y}\in Y$, do T. de Weierstrass, $h_{\mathbf{y}}:\overline{X}\to\mathbb{R}$, $h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})=\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}\|^2$, tem mínimo,que não é em $\mathbf{z}\in\partial X$, pois $h_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})\ge\big(\|\mathbf{f}(\mathbf{z})-\mathbf{f}(\mathbf{a})\|-\|\mathbf{f}(\mathbf{a})-\mathbf{y}\|\big)^2\ge(d-\frac{d}{2})^2=(d/2)^2>\|\mathbf{f}(\mathbf{a})-\mathbf{y}\|^2=h_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})$; logo, o mínimo é num ponto $\mathbf{x}\in X$ e como $h_{\mathbf{y}}$ é diferenciável em X, é $\nabla h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})=0$. Como $h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})=\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}\big)\cdot\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}\big)$, é $\nabla h_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})=2D\mathbf{f}(\mathbf{x})\,[\,\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{y}\,]$. Como $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é não singular para $\mathbf{x}\in X$, é $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}$. Logo, $\mathbf{f}^{-1}(Y)\subset X$. Como $\mathbf{f}$ é contínua e Y é aberto, $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ é aberto relat. a X. Como X é aberto em $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}^{-1}(Y)$ também é.

Redefinindo $X=\mathbf{f}^{-1}(Y)$, X, Y são abertos, $\mathbf{a}\in X$ e $Y=\mathbf{f}(X)$.

Teorema da Função Inversa (cont. da prova)

(3) $\mathbf{f}^{-1}$ é diferenciável em Y e $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})=[D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1}$ c/ $\mathbf{x}=\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y}\in Y$.

Como $\mathbf{f}$ é diferenciável em $S\supset X$, se $\mathbf{x},\mathbf{z}\in X$ e $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{w}=\mathbf{f}(\mathbf{z})$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{z})-\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})](\mathbf{z}-\mathbf{x}) + \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|\, E_{\mathbf{f}}\big(\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{x}\big)\,, \quad E_{\mathbf{f}}\big(\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{x}\big)\to 0\,, \quad \mathbf{z}\to\mathbf{x}\,.$$

Como $J\mathbf{f}\neq 0$ em $\overline{B_R(0)}\supset X$, $D\mathbf{f}$ é não singular em X. Com $A=[D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1}$, multiplicando a equação anterior à esquerda por A,

$$A(\mathbf{w}-\mathbf{y}) = AA^{-1}(\mathbf{z}-\mathbf{x})+\|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|\, A\, E_{\mathbf{f}}\big(\mathbf{x},\mathbf{z}-\mathbf{x}\big),$$
$$= \big(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{w})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\big)+\|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{w})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\|\, A\, E_{\mathbf{f}}\big(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}),\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{w})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\big),$$

que equivale a $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{w})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = A(\mathbf{w}-\mathbf{y})+\|\mathbf{w}-\mathbf{y}\|E_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y},\mathbf{w}-\mathbf{y})$, com

$$E_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y},\mathbf{w}-\mathbf{y}) = -\,\frac{\|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{w})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{w}-\mathbf{y}\|}\; A\, E_{\mathbf{f}}\big(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}),\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{w})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\big)\,.$$

Da desigual. no final de (1), $\frac{\|\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{w})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{w}-\mathbf{y}\|}\leq 2$ e $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{w})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\to 0$,
pelo que $E_{\mathbf{f}}\big(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}),\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{w})-\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})\big)\to 0$, quando $\mathbf{w}\to\mathbf{y}$;
logo, $E_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y},\mathbf{w}-\mathbf{y})\to 0$ quando $\mathbf{w}\to\mathbf{y}$, pelo que $\mathbf{f}^{-1}$ é diferenciável em $\mathbf{y}\in Y$.

(4) Com a fórmula de Cramer inversão de matrizes, como $J\mathbf{f}\neq 0$ em X
$\mathbf{f}$ é $C^m \Rightarrow D\mathbf{f}$ é $C^{m-1}\Rightarrow [D\mathbf{f}]^{-1}=\frac{1}{J\mathbf{f}}(\mathrm{cof}\, D\mathbf{f})^t$ é $C^{m-1}\Rightarrow \mathbf{f}^{-1}$ é C^m, em X.

Q.E.D.

Aplicação aberta
Corolário do Teorema da Função Inversa

Preimagens de conjuntos abertos por uma função contínua são conjuntos abertos relativamente ao domínio da função (caracterização topológica de funções contínuas), mas as imagens de conjuntos abertos por funções contínuas podem ser conjuntos abertos, fechados ou nem abertos nem fechados. Com o T. da Função Inversa podem-se obter condições simples para imagens de conjuntos abertos serem abertos.

Chama-se **aplicação aberta** a uma função tal que imagens de conjuntos abertos relat. ao domínio são conjuntos abertos relat. ao contradomínio.

Uma função $\mathbf{f}: S \to \mathbb{R}^n$, com $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto, C^1 e com $J\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0 \ \forall \mathbf{x} \in S$ é uma aplicação aberta.

Dem. Se $U \subset S$ é aberto e $\mathbf{a} \in U$, do T. da Função Inversa $\exists_{Y \subset \mathbf{f}(U)}: Y$ é aberto e $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in Y$. Logo, $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \operatorname{int} \mathbf{f}(U)$, e $\mathbf{f}(U) = \operatorname{int} \mathbf{f}(U)$. *Q.E.D.*

Exemplo: $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{f}(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$.
A função $\mathbf{f}$ é C^∞ em $\mathbb{R}^2$ pois cada componente é o produto de composições de funções contínuas (exponencial, seno e coseno) com as transformações lineares $(\mathbf{x},\mathbf{y})\mapsto\mathbf{x}$, $(\mathbf{x},\mathbf{y})\mapsto\mathbf{y}$, que também são contínuas.

$$D\mathbf{f}(x,y)=e^x\begin{bmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{bmatrix},\quad J\mathbf{f}(x,y)=e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y)=e^{2x}>0\,.$$

As hipóteses do Teorema da Função Inversa verificam-se em $\mathbb{R}^2$, pelo que $\mathbf{f}$ é localmente invertível na vizinhança de qualquer ponto. Com $(u,v)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$, a inversa local é C^∞ e tem matriz jacobiana

$$D\mathbf{f}^{-1}(u,v)=[D\mathbf{f}(x,y)]^{-1}=e^{-x}\begin{bmatrix}\cos y & \sin y\\ -\sin y & \cos y\end{bmatrix}=\frac{1}{u^2+v^2}\begin{bmatrix}u & v\\ -v & u\end{bmatrix}.$$

$\mathbf{f}(x,y)=\mathbf{f}(x,y+2\pi)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; logo, $\mathbf{f}$ não é injectiva; o contradomínio é $\mathbf{f}\big(\mathbb{R}^2\big)=\mathbf{f}\big(\mathbb{R}\times[2k\pi,2(k+1)\pi[\big)=\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, $k\in\mathbb{Z}$. Não existe inversa global e os conjuntos abertos conexos máximos em que $\mathbf{f}$ tem inversa são $X=\mathbb{R}\times]a,a+2\pi[$, $a\in\mathbb{R}$. $\mathbf{f}\big(\mathbb{R}^2\big)=\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ é completamente coberto um nº infinito numerável de vezes por imagens de pontos de $\mathbb{R}^2$ por $\mathbf{f}$.
(Em contraste, se $f:I\to\mathbb{R}$, com I intervalo em $\mathbb{R}$, e $f'(x)\neq 0$, para $x\in I$, é estritamente crescente/decrescente e, portanto, tem inversa em I).

Os teoremas da Função Inversa e da Função Implícita são equivalentes. Aqui prova-se o 2º a partir do 1º, mas poderia ser ao contrário.

Pretendem-se condições que garantam que uma equação $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ tem infinitas soluções dadas por $\mathbf{y}$ em função de $\mathbf{x}$ (as incógnitas livres).

No caso do campo escalar em $\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=x^2+y^2-1$, $F(x,y)=0$ é a equação cartesiana da circunferência com centro 0 e raio 1 .

A correspondência de x para y não é unívoca em vizinhanças dos pontos $(\pm 1, 0)$, mas é unívoca em vizinhanças suficientemente pequenas dos outros pontos da circunferência, pelo que nestas vizinhanças $F(x,y)=0$ define localmente y como função implícita de x ; nestes pontos $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y\neq 0$, enquanto nos outros dois pontos $\frac{\partial F}{\partial y}(\pm 1, 0)=0$; neste caso, a condição $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$ garante que localmente numa vizinhança de (x,y) a equação define y em função de x .

A variável em relação a que se considera a derivada é a variável dependente para a função implícita considerada .

Analogamente, $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\neq 0$ garante que localmente numa vizinhança de (x,y) a equação define x (a incógnita em relação a que se considera a derivada) em função de y .

Para sistemas de m equações lineares, ou seja se $\mathbf{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é uma transformação linear e A é a resp. representação matricial nas bases canónicas, a situação descrita corresponde a $\operatorname{rank} A=m$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n-m}$, $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$, com $A=[A_{11}\ \ A_{12}]$, $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=A_{11}\mathbf{x}+A_{12}\mathbf{y}-\mathbf{b}$ e A_{12} $m\times m$ não singular; então, $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{b}$ tem solução geral $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ com $\mathbf{y}=A_{12}^{-1}(\mathbf{b}-A_{11}\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n-m}$ ($n-m$ incógnitas livres).
Com derivadas parciais, $A_{12}=\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ é não singular $\Leftrightarrow$ $\det\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\neq 0$.

Para obter o resultado com base na inversa de uma matriz não singular é preciso estender o sistema a um outro equivalente com matriz de coeficientes $n\times n$, o que se pode fazer acrescentando $n-m$ equações independentes que sejam sempre verificadas, *e.g.* $\mathbf{x}=\mathbf{x}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

A matriz de coeficientes é não singular se e só se $\det A_{12}\neq 0$.

Para obter o T. da Função Implícita do T. da Função Inversa no caso em que a função $\mathbf{F}$ pode ser não linear considera-se a extensão análoga da equação $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$, obtida acrescentando a equação $\mathbf{x}=\mathbf{x}$, e aplica-se à equação obtida o Teorema da Função Inversa.

Teorema da Função Implícita

Se $\mathbf{F}: S \to \mathbb{R}^m$, $S \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $m < n$, $\mathbf{F}$ é diferenciável em S, $D\mathbf{F}$ é contínua em $\mathbf{a} \in S$, $\mathbf{a} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$ e $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$, então existe $X \subset S$ aberto com $\mathbf{a} \in X$ e $U \subset \mathbb{R}^{n-m}$ aberto tais que:

(1) $\exists\, \mathbf{f}: U \to \mathbb{R}^m$ **diferenciável:** $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ **p/** $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ **p/** $\mathbf{x} \in U$ **;**

(2) $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big)\right]^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big)\right]$ **para** $\mathbf{x} \in U$ **;**

(3) $\mathbf{F}$ **é** C^k **(**$k \in \mathbb{N}$**)** $\Rightarrow$ $\mathbf{f}$ **é** C^k.

Dem. Aplicação imediata do Teorema da Função Inversa à função $\mathbf{h}: S \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \big(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$, pois $J\mathbf{h} = \det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}$, e $\mathbf{h}$ é diferenciável em S (resp., $D\mathbf{h}$ é contínua em $\mathbf{a}$) se e só se $\mathbf{F}$ é; logo, existe inversa local $\mathbf{h}^{-1}$ e define-se $\mathbf{f}$ por $\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big) = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, 0)$. *Q.E.D.*

Observações:

(a) A fórmula de derivação em (2) também pode ser obtida directamente aplicando a Regra da Cadeia a $\mathbf{F}\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big)$, o que dá

$$\frac{d}{d\mathbf{x}}\left[\mathbf{F}\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big)\right] = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\big(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\big) D\mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

de que é imediata a fórmula em (2).

(b) Nas condições para este T. da Função Implícita podem-se obter a derivadas parciais até ordem m da função definida implicitamente, sem fórmula explícita para esta função, aplicando sucessivamente a Regra da Cadeia.