Data: 14 de Junho 2021 (15h00)
Duração: 1h30/3h00 (+5'/10' tol.)
Docentes: Hugo Terças e Pedro Cosme

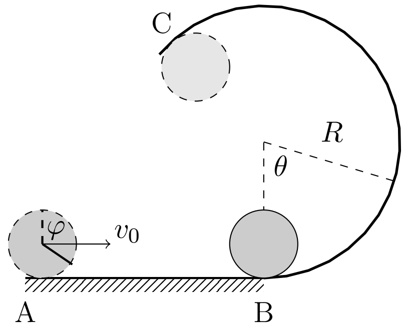
Mecânica Analítica

MEFT 2020/21

EXAME

(Resolução Sumária)

Teste I: Questões 1 e 2 | Teste II: Questões 3 e 4. As cotações duplicam no caso de teste. Não se enerve: antes de começar a resolver, respire, tenha calma. Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente todos os cálculos que efectuar.



Questão 1. [5 val] *Atingiu, mestre? Atingiu?* — Uma esfera de massa M, raio a e momento de inércia $I = (2/5)Ma^2$ é lançada do ponto A, sem rotação e com velocidade v_0. Devido ao atrito, a esfera desliza até ao ponto B, a partir do qual rola sem deslizar sobre uma calha circular de raio $R > a$. Denote por φ o ângulo de rotação sobre o eixo da esfera e θ o ângulo que parametriza a calha. Tome por g a aceleração da gravidade.

a) [1.0 val] No troço AB, o atrito é descrito pelo potencial de Rayleigh $\mathcal{F} = \mu Mg(\dot{X} - a\dot{\varphi})$, onde μ é o coeficiente de atrito cinético e X é a coordenada generalizada do centro de massa da esfera. Mostre que o Lagrangeano que descreve o movimento neste troço é dado por

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, X, \dot{X}) = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{5}Ma^2\dot{\varphi}^2,$$

e determine os momentos generalizados, discutindo a sua conservação.

A energia cinética da esfera é dada por $T = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$. Como $I = \frac{2}{5}Ma^2$, fica imediatamente demonstrada a forma do Lagrangeano, visto que não existem termos potenciais. Os momentos generalizados são

$$p_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M\dot{X}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2}{5}Ma^2\dot{\varphi} = I\dot{\varphi}.$$

Neste caso, não são conservados, uma vez que o potencial de Rayleigh modifica as equações do movimento,

$$\dot{p}_X = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{X}} = -\mu Mg, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu Mga.$$

b) [1.0 val] Sem recorrer aos multiplicadores de Lagrange, mostre que a velocidade com que a esfera atinge o ponto B é dada por

$$v_B = \frac{5}{7}v_0.$$

Das equações de Euler-Lagrange, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} + \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0$, com $q_i = (X, \varphi)$, obtemos

$$\ddot{X} = -\mu g, \quad \frac{2}{5}a\ddot{\varphi} = \mu g,$$

que, após integração, fornecem

$$\dot{X} = v_0 - \mu g t, \quad \dot{\varphi} = \cancel{\omega_0} + \frac{5\mu g}{2a}t.$$

No ponto B, o vínculo é estabelecido e o cilindro deixa de rolar, $\dot{X} = a\dot{\varphi}$ e, portanto, pelo que retiramos, após igualarmos as equações, que $t_B = \dfrac{2v_0}{7\mu g}$. Assim,

$$v_B \equiv \dot{X}(t_B) = \frac{5}{7}v_0.$$

c) [1.0 val] Considere, agora, o movimento na calha. Obtenha a ligação relevante para este problema, $f(\varphi, \theta)$, e mostre que o Lagrangeano que descreve o movimento no troço BC é dado por

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{7}{10}M(R-a)^2\dot{\theta}^2 + Mg(R-a)\cos\theta.$$

A partir do ponto B, o sistema rola sem deslizar. Assim, o centro de massa rola à mesma velocidade que o ponto de contacto, $(R-a)\dot{\theta} = a\dot{\varphi}$, o que conduz à ligação $f(\theta, \varphi) = (R-a)\theta - a\varphi - c = 0$. Usando $c = 0$, a energia cinética de rotação em torno do centro de massa é dada por

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{5}Ma^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{5}; (R-a)^2\dot{\theta}^2.$$

Além disso, temos que o centro de massa tem de coordenadas $(x, y) = [(R-a)\sin\theta, -(R-a)\cos\theta)]$ e, portanto a energia de cinética de translação é da forma

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\theta}^2.$$

Assim, a energia cinética $T = T_{\text{rot}} + T_{\text{trans}}$ é dada

$$T = \frac{7}{10}M(R-a)^2\dot{\theta}^2.$$

Finalmente, como $V = Mgy = -Mg(R-a)\cos\theta$, obtemos o resultado pretendido fazendo $L = T - V$.

d) [1.0 val] Promova a coordenada radial r da calha a grau de liberdade. Faça uso do método dos multiplicadores de Lagrange e defina uma função $f(r; R, a)$ apropriada para mostrar que o <u>módulo</u> da força generalizada segundo a direcção radial é dado por

$$Q_r = \frac{7}{5}M(R-a)\dot{\theta}^2 + Mg\cos\theta.$$

Para o efeito, promovemos a coordenada radial a grau de liberdade, fazendo uso da ligação $f(r; R, a) = r - (R - a)$. Neste processo, não precisamos de desfazer o vínculo entre θ e φ, pelo que o Lagrangeano constrangido pode ser obtido directamente do Lagrangeano da alínea c) fazendo $(x, y) = (r \sin\theta, -r\cos\theta)$,

$$L^\lambda(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{7}{10} M r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + M g r \cos\theta + \lambda f(r; R, a),$$

onde os dois primeiros termos resultam da soma das energia cinética de translação mais rotação na condição de não-deslizamento. As equações de Euler-Lagrange fornecem

$$r : \quad M\ddot{r} - \frac{7}{5} M r \dot{\theta}^2 - M g \cos\theta = \lambda.$$

Fazendo uso da ligação, $r = (R - a)$ e $\ddot{r} = 0$, o que implica

$$Q_r = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = -\left[\frac{7}{5} M (R - a) \dot{\theta}^2 + M g \cos\theta\right],$$

cujo módulo é exactamente o pretendido.

e) [1.0 val] Determine o valor mínimo da velocidade no ponto B para que a esfera atinja o ponto C.

Para atingir o ponto C, a esfera tem de chegar ao ponto de altura máxima ($\theta = \pi$) com uma velocidade mínima tal que a força de ligação seja nula. Da alínea anterior, retiramos a condição

$$Q_r(\theta = \pi) = 0 \Longrightarrow \dot{\theta}_c^2 = \frac{5g}{7(R - a)}.$$

Como a energia se conserva (identidade de Beltrami, $\partial_t L = 0$),

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - L = \frac{7}{10} M (R - a)^2 \dot{\theta}^2 - M g (R - a) \cos\theta = \text{const.},$$

obtemos

$$\frac{7}{10} M \overbrace{(R - a)^2 \dot{\theta}_{\min}^2}^{v_{\min}^2} - M g (R - a) = \frac{3}{2} M g (R - a) \Longrightarrow v_{\min} = v_B = \sqrt{\frac{25}{7} g (R - a)}.$$

Questão 2. [5 val] *Uma carga de trabalhos.*— Como seguramente sabem do electromagnetismo, um fio muito longo carregado positivamente produz um potencial electrostático $\sim \log(a/r)$, onde r é o raio de um ponto do espaço ao fio e a é uma distância de referência (na qual o potencial se anula). Assim, uma carga de teste que se passeie na vizinhança do fio mover-se-á sob a acção de um potencial $V(r) = V_0 \log(r/a)$. Assuma que o fio e a carga de teste possuem massas m_1 e m_2, respectivamente. Por simplicidade, considere que o movimento ocorre no plano (r, θ) e despreze a acção da gravidade.

a) [1.0 val] Mostre, justificando, que o Lagrangeano do sistema se pode escrever na forma

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V_0 \log\left(\frac{r}{a}\right),$$

determinando as quantidades $\vec{R}$, M e μ. Comente sobre o limite $m_1 \gg m_2$.

O Lagrangeano do sistema é

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - V\left(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|\right).$$

Definindo a coordenada do centro de massa $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ e a coordenada relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, podemos escrever

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}.$$

Assim,

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r).$$

Identificando $M = m_1 + m_2 =$, $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ e usando coordenadas polares, $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, obtemos o resultado pretendido. No limite $m_1 \gg m_2$, $M \simeq m_1$, $\vec{R} \simeq \vec{r}_1$ e $\mu \simeq m_2$, o que significa que o centro de massa é determinado aproximadamente pela posição do fio e a massa reduzida corresponde à massa da carga.

b) [0.75 val] Identifique as coordenadas cíclicas e determine os momentos generalizados conservados. Justique.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad M\dot{\vec{R}} \equiv \vec{p}_{\mathrm{CM}} = \text{constante},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\theta}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu r^2\dot{\theta} = p_\theta = \text{constante}.$$

Existe conservação do momento linear do centro de massa e do momento angular do binário das massas em relação ao centro de massa.

c) [1.0 val] Escreva a equação do movimento em termos de um potencial efectivo. Represente-o graficamente para $V_0 < 0$ e $V_0 > 0$ e obtenha o(s) ponto(s) de equilíbrio do sistema, classificando-os quanto à estabilidade.

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r)\right) = -\frac{\partial V_{\text{ef}}(r)}{\partial r}.$$

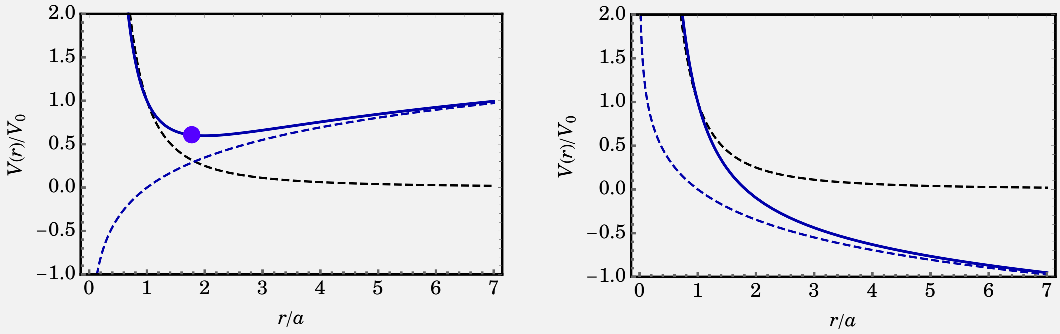
Com $V(r) = V_0 \log(r/a)$, temos

$$V_{\text{ef.}}(r) = \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V_0 \log\left(\frac{r}{a}\right).$$

O ponto de equilíbrio é obtido pela condição

$$\left.\frac{\partial V_{\text{ef.}}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_0 = \sqrt{\frac{V_0}{\mu\omega_0^2}}, \quad (V_0 > 0)$$

usando o facto de que, em equilíbrio, $p_\theta = \mu r_0^2 \omega_0$.



Como podemos observar, apenas para o caso $V_0 > 0$ (à esquerda) se obtém um ponto de equilíbrio, que vemos claramente ser estável.

$$\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef.}}(r)}{\partial r^2}\right|_{r=r_0} = \frac{3p_\theta^2}{\mu r_0^4} - \frac{V_0}{r_0^2} = 2\frac{V_0}{r_0^2} > 0.$$

d) [1.25 val] Considere o caso $V_0 > 0$. Mostre que existe uma órbita estável e que as perturbações a esta orbita oscilam com a frequência

$$\Omega = \beta\omega_0,$$

onde ω_0 é uma frequência angular da órbita de equilíbrio. Determine o factor numérico β e explique-o à luz do teorema de Bertrand.

Fazendo $r = r_0 + \xi$, temos

$$\mu\ddot{\xi} = -\cancel{\left.\frac{\partial V_{\text{ef.}}}{\partial r}\right|_{r_0}} - \left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef.}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} \xi + \ldots,$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\xi} + \frac{1}{\mu}\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef.}}}{\partial r^2}\right|_{r_0} \xi = 0,$$

pelo que $\Omega = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left.\frac{\partial^2 V_{\text{ef.}}}{\partial r^2}\right|_{r_0}} = \sqrt{\frac{3p_\theta^2}{\mu^2 r_0^4} - \frac{V_0}{\mu r_0^2}} = \sqrt{3\omega_0^2 - \omega_0^2} = \sqrt{2}\omega_0$. Uma vez que $\beta = \Omega/\omega_0 = \sqrt{2}$ é um número irracional, então as órbitas perturbadas não são fechadas. Este resultado é compatível com o teorema de Bertrand, uma vez que $V(r) \sim \log(r)$ não está nas condições para as quais órbitas fechadas são garantidas.

e) [1.0 val] Determine a frequência de precessão desta órbita e indique se esta precessa no mesmo sentido (ou no sentido oposto) da órbita de equilíbrio.

A frequência de precessão é definida como $\omega_{\text{prec}} = \Omega - \omega = \left(\sqrt{2} - 1\right)\omega_0$. Após uma revolução, o ângulo apsidal encontra-se no ponto

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\beta} - 2\pi = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) 2\pi < 0,$$

i.e. está atrasado em relação à orbita não-perturbada. Portanto, podemos concluir que a precessão ocorre no sentido oposto ao movimento da órbita não perturbada.

Questão 3. [5 val] *Transformações canónicas.* — Um certo sistema é descrito pelo Lagrangeano

$$L(q,\dot{q},t) = a\frac{\dot{q}^2}{4} - \frac{q^2}{2} + a\dot{q}qt$$

onde a é uma constante.

a) [1.25 val] Mostre que o mesmo sistema é regido pelo Hamiltoniano

$$H(q,p,t) = \frac{1}{2}q^2 + at^2q^2 - 2tpq + \frac{1}{a}p^2,$$

e justifique se é, ou não, conservado.

Aplicando a transformação de Legendre, $H(q,p,t) = p\dot{q} - L(q,\dot{q},t)$, e sabendo que

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{a}{2}\dot{q} + aqt \quad \Longrightarrow \dot{q} = \frac{2p}{a} - 2qt,$$

obtemos

$$H = p\left(\frac{a}{2}\dot{q} + aqt\right) - \frac{a}{4}\left(\frac{2p}{a} - 2qt\right)^2 + \frac{q^2}{2} - aqt\left(\frac{2p}{a} - 2qt\right),$$

que após simplificação resulta no resultado pretendido. Uma vez que $H = H(t)$, o Hamiltoniano não é conservado,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = 2atq^2 - 2pq \neq 0.$$

b) [1.25 val] Considere a função geradora

$$F = \frac{1}{2}atq^2 - qP,$$

que define uma transformação $(p,q) \mapsto (P,Q)$. Determine as novas coordenadas Q e P. Discorra brevemente sobre a conveniência de se aplicar uma transformação canónica no Hamiltoniano dado.

Uma vez que a função geradora indicada é função de q e P, então $F = F_2(q,P)$. Portanto, das relações de transformação, obtemos

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = -q, \quad p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = atq - P.$$

Da última relação, obtemos $P = atq - p$. Uma das vantagens das transformações canónicas é a simplificação do problema original, que pretendemos ser reductível a um outro (equivalente) cujas equações sejam de fácil resolução. Em particular, as transformações canónicas apropriadas têm o poder de transformar problemas com dependência explícita no tempo noutros sem dependência temporal.

c) [1.0 val] Verifique, recorrendo aos parênteses de Poisson, que a transformação é canónica. Explique sucintamente a que outro método poderia recorrer para testar esta mesma hipótese.

Para que a transformação seja canónica, deve verificar a álgebra dos parênteses de Poisson

$$[Q,Q]=0,\quad [P,P]=0,\quad [Q,P]=1.$$

Verifiquemos, então, partindo das relações para esta transformação, se assim é:

$$[Q,Q]=[-q,-q]=[q,q]=0 \quad \checkmark$$

$$[P,P]=[atq-p,atq-p]=-at[q,p]-a^2t^2\cancel{[q,q]}-at[p,q]+\cancel{[-p,-p]}=0, \quad \checkmark$$

onde se usou $[q,p]=1$ e $[a,b]=-[b,a]$. Finalmente,

$$[Q,P]=[-q,atq-p]=-at\cancel{[q,q]}+[q,p]=1 \quad \checkmark.$$

Poderíamos, igualmente, verificar a canonicidade desta transformação testando a condição simplética $\mathbf{M}.\mathbf{J}.\mathbf{M}^{\mathrm{T}}=\mathbf{J}$, onde $M_{ij}=\dfrac{\partial\zeta_i}{\partial\zeta_j}$, com $\zeta_i=(Q,P)$ e $\eta_i=(q,p)$, e $\mathbf{J}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$.

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ at & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{M}.\mathbf{J}.\mathbf{M}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ at & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & at\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad \checkmark.$$

d) [1.5 val] Obtenha o novo Hamiltoniano $K(Q,P)$ e resolva as equações do movimento para as novas coordenadas Q e P. Recorrendo à transformação que determinou, apresente explicitamente as soluções de $q(t)$ e $p(t)$.

O novo Hamiltoniano é dado por $K(Q,P)=H(q,p)+\dfrac{\partial F}{\partial t}$. Usando o facto de que $p^2=(aqt-P)^2$ e $q=-Q$, eliminamos q e p no Hamiltoniano "antigo" $H(q,p)$ e obtemos

$$K(Q,P)=\frac{P^2}{a}+\frac{1+a}{2}Q^2.$$

As equações do movimento são

$$\dot{P}=-\frac{\partial K}{\partial Q}=(1+a)Q,\quad \dot{Q}=\frac{\partial K}{\partial P}=\frac{2P}{a}\quad\Longrightarrow \ddot{Q}+\frac{2(1+a)}{a}Q=0,$$

que correspondem às de um oscilador harmónico de frequência $\omega=\sqrt{2(1+a)/a}$. As soluções gerais são $Q(t)=A\cos(\omega t+\delta)$, $\quad P(t)=B\sin(\omega t+\delta)$, onde δ é uma fase, o que fornece imediatamente

$$q(t)=-A\cos(\omega t+\delta),\quad p(t)=aqt-B\sin(\omega t+\delta).$$

Questão 4. [5 val] *Um campo muito clássico.* — Pode estudar-se o comportamento de um fluido irrotacional de densidade ρ e campo de velocidade $\vec{u} \equiv (\partial_x \varphi)\, \vec{e}_x$ recorrendo à densidade lagrangeana

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \partial_x \rho, \varphi, \dot{\varphi}, \partial_x \varphi) = \rho \left(\dot{\varphi} + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 \right) - U(\rho),$$

em que $U(\rho)$ represenda a densidade de energia interna do fluido.

a) [1.0 val] Mostre que as equações de Euler–Lagrange para os campos potencial de velocidade (φ) e densidade (ρ) são

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \partial_x \varphi) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0.$$

Lembrando que a energia interna se relaciona com a pressão (p) segundo $\dfrac{\partial U}{\partial \rho} = -\dfrac{p}{\rho}$, interprete fisicamente as equações que acabou de obter. Que leis da hidrodinâmica representam?

> As equações de Euler-Lagrange para os campos ρ e ϕ são as seguintes:
>
> $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} - \partial_t \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \rho)}} - \partial_x \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \rho)}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0,$$
>
> $$\cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \varphi)} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \partial_x \varphi) = 0.$$
>
> A primeira equação pode ainda escrever-se como
>
> $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = 0,$$
>
> que nada mais é do que a lei de Bernoulli, $\dfrac{1}{2}\rho u^2 + p = -\rho \dot{\varphi} \equiv \epsilon$, que representa o balanço entre a energia cinética e a pressão. A segunda equação é a celebrada equação da continuidade, que representa a conservação da massa de fluido escoada
>
> $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0,$$
>
> onde $j = \rho u$ é a densidade de corrente.

b) [1.5 val] Calcule o tensor energia-momento, a partir da densidade lagrangeana, discutindo o seu significado físico e o de cada uma das suas componentes no contexto do problema. *(Sugestão:*

Tabela 1: Relações de transformação para os quatro tipo de funções geradoras F_k.

$F_1(q_i, Q_i, t)$	$F_2(q_i, P_i, t)$	$F_3(p_i, Q_i, t)$	$F_4(p_i, P_i, t)$
$p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i}$	$p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i}$	$q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i}$
$P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i}$
$K = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t}$	$K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}$	$K = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t}$	$K = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t}$
$\dfrac{\partial p_i}{\partial Q_i} = -\dfrac{\partial P_i}{\partial q_i}$	$\dfrac{\partial p_i}{\partial P_i} = \dfrac{\partial Q_i}{\partial q_i}$	$\dfrac{\partial q_i}{\partial Q_i} = \dfrac{\partial P_i}{\partial p_i}$	$\dfrac{\partial Q_i}{\partial p_i} = -\dfrac{\partial q_i}{\partial P_i}$

ser-lhe-á proveitoso recorrer a alguma(s) relação(ões) que obteve anteriormente para simplificar o tensor.)

O tensor energia-momento é formalmente dado por

$$T^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi_i)}\partial_\mu \psi_i - \mathcal{L}\delta^{\nu}_{\mu},$$

onde $\mu, \nu = (x, t)$ e i é o índice de campo $\psi_1 = \rho$, $\psi_2 = \varphi$. Como podemos observar, temos duas somas (nos campos e nos índices de espaço-tempo). Finalmente, observamos que ρ só contribui para o segundo termo, uma vez que $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \rho)} = 0$. Explicitamente, temos então

$$T^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\dot{\varphi} - \mathcal{L} = \rho\dot{\varphi} - \rho\left(\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2\right) + U(\rho) = -\frac{1}{2}\rho u^2 + U(\rho);$$

$$T^1_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \varphi)}\partial_x\varphi - \mathcal{L} = \rho(\partial_x\varphi)^2 - \rho\left(\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2\right) + U(\rho) = \frac{1}{2}\rho u^2 - \rho\dot{\varphi} + U(\rho);$$

$$T^1_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \varphi)}\dot{\varphi} = \rho\dot{\varphi}\partial_x\varphi, \quad T^0_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\partial_x\varphi = \rho\partial_x\varphi = \rho u,$$

onde podemos claramente identificar o último com a densidade de corrente. Usando a equação de Euler-Lagrange para φ, sabemos que $\rho\dot{\varphi} = -\dfrac{1}{2}\rho(\partial_x\varphi)^2 - p = -\epsilon$, pelo que podemos escrever $T^1_0 = -\epsilon u$, o que é uma corrente de densidade de energia. Finalmente, o último termo pode escrever-se na forma $T^1_1 = \rho u^2 + p + U$, o que descreve uma densidade de energia total (energia interna + cinética).

c) [1.25 val] Pode demonstrar-se que a densidade lagrangeana é invariante para uma translação infinitesimal no espaço, $\delta\varphi = \partial_x\varphi$. Determine a corrente de Nöther j^μ associada a esta simetria. Discuta sucintamente a que quantidade física corresponde a sua conservação.

A corrente de Nöther associada a esta simetria (simetria para translações) é dada por $j^\mu = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\delta\varphi$, cujas componentes são, explicitamente

$$j^\mu = (j^t, j^x) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\partial_x\varphi, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \varphi)}\partial_x\varphi\right) = \left(\rho u, \rho u^2\right).$$

A conservação desta corrente, $\partial_\mu j^\mu$ diz-nos que

$$\partial_t j^t + \partial_x j^x = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} = 0,$$

que podemos simplificar para escrever

$$u \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x}\right)}_{=0,\ \text{eq. continuidade}} + \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \rho\frac{Du}{Dt} = 0,$$

onde $D/Dt = \partial_t + u\partial_x$ é a derivada material (curiosidade, apenas). Representa, portanto, a conservação da densidade de corrente de energia.

d) [1.25 val] Tomando a derivada espacial da equação de evolução do campo φ e assumindo que o fluido é politrópico, i.e. $p = C\rho^n$, obtem-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\partial_x\varphi) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t}(\partial_x\varphi) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\partial_x\varphi)^2 + \frac{\partial}{\partial x}(C\rho^{n-1}) = 0.$$

Linearize estas equações, recorrendo a $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$ e $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1(x,t)$ e mostre que a relação de dispersão do problema é

$$\omega = c_s k, \quad \text{com} \quad c_s^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho_0}.$$

Linearizando as equações, i.e. mantendo apenas termos de primeira ordem nas perturbações φ_1 e ρ_1, obtemos

$$\cancel{\frac{\partial \rho_0}{\partial t}} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 \partial_x \varphi_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_1 \cancel{\partial_x \varphi_0})}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial(\rho_1 \partial_x \varphi_1)}{\partial x}}_{\mathcal{O}(\delta^2)\simeq 0} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,$$

definindo $u_1 = \partial_x \varphi_1$. Da mesma forma, para a segunda equação

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(\partial_x \varphi_1)^2}_{\mathcal{O}(\delta^2)\simeq 0} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\cancel{C\rho_0^n} + Cn\rho_0^{n-2}\rho_1\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u_1}{\partial t} + Cn\rho_0^{n-2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0.$$

Fazendo $\rho_1 = \tilde{\rho}_1 e^{ikx - i\omega t}$ e $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 e^{ikx - i\omega t}$, obtemos a seguinte equação secular

$$\begin{bmatrix} -i\omega & ik\rho_0 \\ ikCn\rho_0^{n-2} & -i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_1 \\ \tilde{u}_1 \end{bmatrix} = 0.$$

Finalmente, para que as soluções sejam não triviais, o determinante da matriz deve ser nulo,

$$-\omega^2 + \underbrace{Cn\rho_0^{n-1}}_{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho_0}} k^2 = 0,$$

o que conduz ao resultado pretendido, $\omega = c_s k$. Trata-se, portanto, de uma relação de dispersão acústica, que descreve a propagação de ondas de compressão no fluido com velocidade do som c_s.