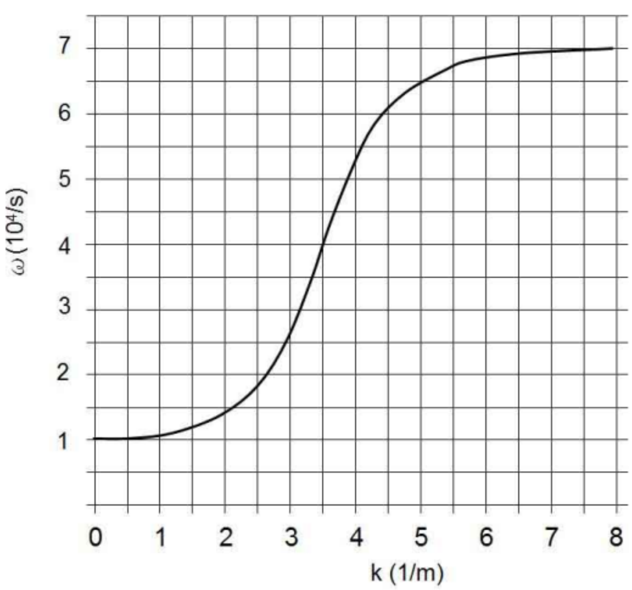
Problema 1

A figura mostra a curva de dispersão para um certo meio

- Para que frequência(s) angular(es) ω é que a velocidade de fase e a velocidade de grupo são iguais?
- Que frequência angular permite transmitir um pulso à maior velocidade possivel? Qual o valor desta velocidade
- Qual é a resposta do meio se o excitar a $\omega = \omega_0 = 1 \times 10^{-4} s^{-1}$?



Problema 2

A flutuação da densidade de cargas num plasma, $\rho(x,t)$, satisfaz a seguinte equação das ondas

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \omega_p^2 \rho \,, \tag{1}$$

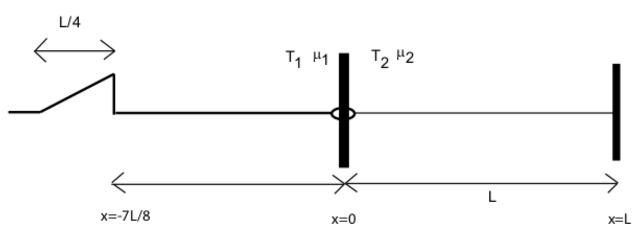
onde c é a velocidade da luz e ω_p é um parametro fixo conhecido como a frequência de plasma.

- Encontre relação de dispersão $\omega(k)$ para ondas progressivas da forma $\rho(x,t) = Ae^{-i(\omega t - kx)}$
- Encontre a relação inversa $k(\omega)$. Esboce um gráfico de $k(\omega)$, da velocidade de fase e da velocidade de grupo.
- O que acontece para $\omega < \omega_p$?

Problema 3

Considere duas cordas de densidade de massa $\mu_1 = \mu$ e $\mu_2 = \mu/2$ e tensões $T_1 = T$ e $T_2 = T/2$ ligadas por um anel sem massa em x=0. O anel pode-se mover ao longo de uma vara sem atrito. A corda à esquerda do anel pode ser tomada como infinita e a corda à direita do anel está fixa a uma parede em $x = L$. Inicialmente, um pulso triangular de largura $L/4$ move-se ao longo da corda 1 da esquerda para a direita. Em $t = 0$, a frente do pulso está em $x = -7L/8$ como ilustrado na Figura.

- Obtenha equações de onda em ambos os lados do anel e especifique as condições fronteira em $x = 0$.
- Espera ondas refletidas em $x = 0$ e $x = L$? A onda refletida tem a mesma fase que a onda incidente em $x = 0$ e $x = L$?
- Assuma que o pulso incidente é da forma $f_1(x, t) = f_1(x/v_1 - t)$. Encontre a forma do pulso transmitido e refletido em $x = 0$ e $x = L$. Considere apenas tempos $t \leq 2L\sqrt{\frac{\mu}{T}}$.
- Faça um esboço da deformação da corda em $t = L\frac{\mu}{T}$ e $t = 2L\frac{\mu}{T}$.



Problema 4

Uma onda $\psi(x, t)$ a propagar-se em torno de um buraco negro em rotação interage com o seu potencial gravítico. A equação das ondas a que obedece é dada por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + V(\omega, x)\,\psi = 0\,, \tag{2}$$

onde $V(\omega, x)$ representa o potencial gravítico sentido por uma onda de frequência ω. O buraco negro está em $x \to x_+$ e um observador na Terra está em $x \to +\infty$.

- Reescreva a equação das ondas no domínio das frequências fazendo $\psi(x, t) = e^{-i\omega t}\psi(x, \omega)$ e obtenha

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \tilde{V}\left(\omega, x\right)\psi = 0\,. \tag{3}$$

A forma específica de $\tilde{V}\left(\omega, x\right)$ é algo complicada mas o seu comportamento assimptotico é dado

$$\tilde{V} \sim \omega^2\,,\; x \to +\infty \tag{4}$$

$$\tilde{V} \sim \left(\omega - m\Omega_H\right)^2\,,\; x \to x_+ \tag{5}$$

onde m é um numero natural e Ω_H é a frequência angular com que o buraco negro gira.

- Descreva o comportamento assimptótico (em $x \to +\infty$ e $x \to x_+$) da solução ψ que corresponde a uma onda incidente de frequência ω a partir de $+\infty$.
- Mostre que a quantidade $W = \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}$ é constante em x e calcule-a explicitamente.
- Sabendo que "nada pode sair de um buraco negro", calcule o coeficiente de reflexão de uma onda incidente a partir de $+\infty$ em função do coeficiente de transmissão. Interprete o resultado.