
NOTAS HISTÓRICAS RESUMIDAS
sobre
ÁLGEBRA LINEAR

Luis T. Magalhães

Outubro de 2016

Departamento de Matemática • IST • Lisboa

*“The high technology so celebrated today is
essentially a mathematical technology”*

— Edward David, President Exxon R&D 1977-86
formerly US President Science Advisor 1970-1973

Notas Históricas Resumidas sobre Álgebra Linear

O termo “**Álgebra Linear**” só apareceu em 1918 e apenas se difundiu alar-gadamente depois de¹ 1931.

O conceito de **espaço linear**, apesar de ter sido explicitado sob o nome “sistema linear” em 1888, com base em ideias essencialmente de 1840 e 1844, e do termo “espaço linear” ter aparecido em 1901, só se difundiu depois de 1932 (quase 1 século depois das ideias terem sido apresentadas pela 1ª vez), na sequência da publicação do livro de S. Banach *Théorie des opérateurs linéaires*, pela evidência da força unificadora do conceito e das consequências em qualquer dimensão, inclusivamente infinita².

¹O termo “Álgebra Linear” apareceu pela 1ª vez no livro de H. Weyl *Raum, Zeit, Materie* (“Espaço, Tempo, Matéria”) em 1918, mas só se começou a expandir a partir de 1931 com a difusão do 2º volume do influente livro de B.L. van der Waerden *Moderne Algebra* que incluiu um capítulo intitulado “Álgebra Linear”. Weyl, Hermann (1885-1955). van der Waerden, Bartel Leendert (1903-1996).

²Em 1840 Hermann Grassman (1809-1877) publicou um trabalho sobre marés com ideias que tinha desenvolvido em 1832 em que considerou a representação de espaço baseada numa noção razoavelmente próxima do conceito geométrico actual de vector a que chamou “Teoria da Extensão Linear” e relacionou as operações algébricas associadas com segmentos orientados. Em 1844 H. Grassmann publicou um livro com aspectos algébricos fundamentais para o conceito de vector em qualquer dimensão finita intitulado *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, que traduzido livremente é “Lições sobre Extensão Linear, um Novo Ramo da Matemática”, e com subtítulo também traduzido livremente “apresentado pela explicação de aplicações a outros ramos da matemática, assim como de estática, mecânica, teoria do magnetismo e cristalografia”. Estes trabalhos não encontraram seguidores na altura e não tiveram impacto. Desiludido com as suas propostas terem sido praticamente ignoradas H. Grassman publicou em 1862 uma versão completamente revista do livro de 1844 em que incluiu uma lista das propriedades fundamentais de operações semelhantes às da axiomática de espaço linear usada actualmente, mas também sem impacto significativo. Em 1888 estas propriedades foram formuladas em axiomática por Giuseppe Peano (1858-1932) do que chamou “Sistema Linear” num livro intitulado *Calcolo Geometrico secondo l’Ausdehnungslehre di H. Grassmann*. Este conceito de “Sistema Linear” foi pouco utilizado e por poucas pessoas: em 1896 por Cesare Burali-Forti (1861-1931), em 1909 e 1912 por C. Burali-Forti e Roberto Marcolongo (1862-1943), em 1897 e 1901 por Salvatore Pincherle (1853-1936), que cunhou o termo “espaço linear” em 1901, em 1918 por H. Weyl (embora com um axioma excluindo dimensão infinita), em 1922 por Hans Hahn (1879-1934), Norbert Wiener (1894-1964) e Stefan Banach

A própria ideia de **vector**³ evoluiu em 4 fases, em que foi principalmente considerado no quadro de:

- (1) Plano complexo e segmentos orientados no plano (1799-1843);
- (2) Quaterniões (1843-1881/93);
- (3) Álgebra e Análise Vectorial (1881/93-1931);
- (4) Espaços Lineares (1932-).

Portanto, decorreram três períodos sucessivos, de aproximadamente 45 anos cada, até se estabelecer o quadro de Espaços Lineares há cerca de 85 anos, mas só quase 1 século depois das correspondentes ideias terem sido apresentadas pela 1ª vez em 1840 e de ter havido sucessivas insistências que não tiveram impacto significativo.

As ideias centrais da Álgebra Linear são relativamente recentes: valor próprio cerca de 1826, vector entre 1840 e 1885, independência linear, base, dimensão, produtos interno, externo e exterior, transformação linear em 1844, álgebra de matrizes em 1853, forma canónica de Jordan⁴ em 1870, regressão linear em 1887, tensor em 1892-1900, formas diferenciais em 1899, aplicação de cadeias de matrizes com componentes inteiras no início da topologia algébrica em 1899-1900, dimensão infinita e espectro de formas quadráticas limitadas em 1904, cadeias de Markov em 1906, processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e sistemas ortonormais completos em 1907, teoria de Perron-Frobenius para valores e vectores próprios de matrizes não negativas em 1907-08, teoria espectral de operadores lineares contínuos em espaços de Hilbert⁵ a partir de 1913, transformação de Radon em 1917, forma geral da desigualdade de Cauchy-Schwarz⁶ em 1929, teoria espectral de operadores lineares ilimitados e computação de valores e vectores próprios a partir de 1929, método das potências (o 1º método de computação de valores próprios) em 1929, espaço linear⁷ em 1932, caracterização de normas compatíveis com produtos internos pela Lei do Paralelogramo, matrizes de oscilação e matróides em 1935, grupos de transformações lineares clássicos

(1892-1945), independentemente, em axiomáticas de espaços normados sem relação com a axiomática de G. Peano (só notada em 1925 por Maurice Fréchet (1878-1973)) e em 1927 por John von Neumann (1903-1957) na definição de espaço de Hilbert (Hilbert, David (1862-1943).), também sem referir a axiomática de G. Peano.

³O termo “vector” foi utilizado em inglês pela 1ª vez em 1846 por William Rowan Hamilton (1805-1865) no contexto de quaterniões, e tem raízes na utilização do termo em francês por Joseph Jérôme Lalande, (1732-1807) em 1776 na expressão “raio vector”, para o segmento de recta orientado do Sol ao centro da Terra (com base etimológica na palavra latina *vectus* que significa transportar).

⁴Jordan, Camille (1838-1922).

⁵Embora os espaços de Hilbert só fossem definidos em 1927, por J. von Neumann.

⁶Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857). Schwarz, Hermann (1843-1921).

⁷Com o livro *Théorie des opérateurs linéaires* de S. Banach em 1932, embora com raízes nos trabalhos referidos na penúltima nota de pé de página anterior que tiveram pouco seguimento: em 1844, 1862 (H. Grassmann), 1888 (G. Peano), 1918 (H. Weyl), 1922 (H. Hahn, N. Wiener, S. Banach) e 1927 (J. von Neumann).

em 1939, fórmula de Gelfand⁸ para o raio espectral de operadores limitados em 1941, distribuições sobretudo em 1944-51 (depois de um início sem continuação em 1936), interpolação com *splines* em 1946, factorização triangular de matrizes associada a resolução de sistemas de equações lineares em 1947, semigrupos fortemente contínuos de operadores em espaços de dimensão infinita sobretudo a partir de 1948, valores próprios complexos de matrizes não negativas em 1950, computação de decomposições de valores singulares em 1954 (melhorada em 1970), fórmula do traço de operadores de classe de traço em espaços de Hilbert como série dos valores próprios em 1959, algoritmo *QR* para computação de valores e vectores próprios em 1961, métodos sucessivamente mais eficientes em n° de operações para computação de produtos de matrizes aplicados a eliminação de Gauss⁹ e inversão de matrizes com início em 1969 e várias melhorias, a última em 2014.

Encontram-se na Antiguidade as raízes da resolução de sistemas de equações lineares entre os secs. XIX e XVII antes de Cristo (AC) na Babilónia, no sec. XVII AC no Egipto e no sec. III AC na China (inclusivamente com um método que é essencialmente o de eliminação de Gauss e a consideração de determinantes). No sec. V AC surgiu na Grécia a ideia geométrica de área de uma região plana baseada no princípio de exaustão como limite de áreas de polígonos contidos na região, que é a base da definição de **integral** simples de funções reais de variável real que define uma transformação linear no conjunto das funções integráveis num intervalo de números reais, e no sec. III AC, também na Grécia, surgiu a ideia geométrica de “**linearização**” ou aproximação linear por **tangentes** a curvas. A fórmula da área de um triângulo em termos dos comprimentos dos lados, conhecida por fórmula de Heron¹⁰, intimamente ligada a Álgebra Linear e considerada o 1º resultado de **Geometria de Distância**, foi publicada na Grécia no sec. I, embora pareça que Arquimedes¹¹ a conhecia dois séculos antes.

Só a partir de 1630 aparecem novos alicerces da Álgebra Linear, com a ideia de **invariância das leis do movimento de corpos com mudanças de referenciais** a moverem-se com velocidade relativa constante devida a Galileio¹² em 1632, as **coordenadas cartesianas** do plano em 1637 independentemente por R. Descartes¹³ e P. Fermat¹⁴ (que também as considerou para o espaço tridimensional), a introdução de **modelos lineares na mecânica** iniciada com a **Lei de Hooke**¹⁵ para a elasticidade linear

⁸Gelfand, Israel (1913-2009).

⁹Gauss, Carl Friedrich (1777-1855).

¹⁰Heron de Alexandria (c. 10 – c. 70 AC).

¹¹Arquimedes de Siracusa (c. 287 AC - c. 212 AC).

¹²Galilei, Galileo (1564-1642).

¹³Descartes, René (1596-1650).

¹⁴Fermat, Pierre (1601-1665).

¹⁵Hooke, Robert (1635-1703).

unidimensional em 1660, a descoberta de **determinantes** para resolução de sistemas de equações lineares em 1683 e a ligação de determinantes com volumes de paralelepípedos em 1773, a descrição de um método sistemático para resolução de sistemas de equações lineares (o método de eliminação de Gauss já iniciado no sec. III AC na China) incluída em notas de I. Newton¹⁶ de 1670 que só foram publicadas¹⁷ postumamente em 1707, a **2ª Lei de Newton do movimento** e a noção de Newton de **sobreposição de forças** segundo a diagonal de um paralelogramo *c.* 1687, a resolução de **equações diferenciais lineares** por sobreposição de soluções e separação de variáveis a partir de 1743.

O desenvolvimento da **Álgebra Linear** esteve sempre intimamente ligado a aplicações em muitas áreas e foi crescendo com o tempo: mecânica e atracção gravitacional a partir do sec. XVII; grafos a partir do sec. XVIII; análise de Fourier¹⁸ em propagação de ondas e do calor a partir do início do sec. XIX; elasticidade e dinâmica de fluidos principalmente a partir de 1822; electromagnetismo e circuitos eléctricos a partir de 1826; cristalografia a partir de 1850; difusão de substâncias a partir de 1855; estabilidade de sistemas modelados por equações diferenciais lineares iniciada com “governadores” de controlo da velocidade de máquinas de vapor rotativas em 1868 e que se desenvolveu até hoje no âmbito de sistemas dinâmicos e sistemas de controlo; difusão de impulsos em axónios de neurónios em 1874-1909; análise de dados em componentes principais em 1901; relatividade a partir de 1904; termodinâmica de cristais em 1912-13; economia a partir de 1918; mecânica quântica a partir de 1925; determinação da estrutura de cristais por difracção de raios-X a partir de 1931; oscilações em sistemas mecânicos aplicando matrizes de oscilação a partir de 1935.

Dada a ubiquidade de aplicações na revolução tecnológica que domina a actualidade – a das Tecnologias de Informação e Comunicação – cujo progresso em muitos aspectos tem assentado em novos desenvolvimentos de **Álgebra Linear**, é indicado referir algumas das principais aplicações nesta área separadamente:

- métodos computacionais e análise de dados sobretudo a partir de meados do sec. XX com o acesso a computadores digitais¹⁹ com grande

¹⁶Newton, Isaac (1642-1727).

¹⁷Com o título “*Arithmetica Universalis*”.

¹⁸Fourier, Jean-Baptiste Joseph (1768-1830).

¹⁹Duas das utilizações iniciais de computadores digitais em modelação matemática foram a de detonação da bomba de hidrogénio por J. von Neumann que foi a 1ª aplicação do 1º computador digital electrónico – o *ENIAC* – em Dezembro de 1945, e a de resolução de sistemas de equações associadas ao modelo de *input-output* para a economia dos EUA segmentada em 500 sectores por Wassily Wassilyovitch Leontief (1906-1999) que foi uma das 1ªs aplicações do 2º computador digital com hardware para operações com vírgula flutuante – o *Harvard Mark II* – em 1948. W.W. Leontief foi laureado com o Prémio Nobel da Economia em 1973 pelo desenvolvimento do método de *input-output* e a sua aplicação a problemas económicos importantes.

-
- capacidade de cálculo que progressivamente revolucionaram engenharia, física, matemática e muitas outras áreas e profissões;
 - códigos de detecção e correcção de erros em comunicação, armazenamento e computação digitais essenciais para sistemas digitais (*e.g.* os actuais telemóveis, *compact discs*, *DVDs*, *Blue-ray discs*, *Digital Video Broadcasting*, comunicação com satélites) principalmente depois de 1949;
 - amostragem e filtragem de sinais sobretudo a partir de 1949;
 - aplicação de *splines* em *design* digital na indústria aeronáutica, automóvel e naval, e Projecto Assistido por Computador (*Computer Aided Design (CAD)*) a partir de 1960;
 - sistemas de controlo lineares sobretudo a partir de 1960;
 - optimização com sinais de banda ou duração limitada em 1961;
 - reconhecimento de padrões e aprendizagem por máquinas a partir de 1963;
 - análise digital de sinais e aplicação de matróides em optimização combinatória a partir de 1965;
 - *Fast Fourier Transform (FFT)* em 1965;
 - análise de redes sociais sobretudo a partir de 1970 (iniciada *c.* 1930);
 - *Fast Walsh Transform (FWT)* em 1968;
 - Gráfica Computacional sobretudo a partir de 1970;
 - Tomografia Computadorizada médica a partir de 1971 (concebida em 1956) mas também com outras aplicações como caracterização de minérios, ambiental e de processos (*e.g.* em refinarias de petróleo, petroquímica, e produção de polímeros);
 - telecomunicações desde finais do sec. XIX com propagação de ondas electromagnéticas, a partir da década de 1930 quanto a sistemas e sinais, a partir de 1985 com incidência em comunicações móveis baseadas em séries de Fourier com funções de Walsh (que permitiram a criação do *GPS* (1995), das redes de comunicação móvel de 3ª e 4ª geração para telemóveis (2000) e das normas *JPEG* e *MP3* para compressão de fotografia e áudio digitais (1992) e *MPEG* (2003));
 - descrição gráfica de páginas e fontes tipográficas na indústria de publicação com computadores e de interfaces gráficas em sistemas operativos de computadores pessoais a partir de 1984;
 - determinação de conformação de biomoléculas a partir de dados de Ressonância Magnética Nuclear (RMN) em 1984-87;
 - reconhecimento, transformação e animação digitais de faces humanas a partir de 1987;
 - filmes digitais principalmente a partir de 1991;
 - hierarquização de páginas na Internet aplicada a motores de procura e à indústria publicitária a partir de 1996;
 - classificação de dados e aprendizagem por máquina sobretudo a partir de 1992;

- hierarquização de páginas na *Web* com o algoritmo *PageRank* que esteve na base da criação da *Google* em 1996;
- métodos de teoria de grafos e outros em análise de redes sociais, ligações em páginas da *Web*, distribuição de energia eléctrica, citações de artigos científicos em 1998-99;
- localização de sensores em grandes redes sem fios a partir de 2001;
- análise de grandes quantidades de dados (*Big Data*), sobretudo a partir de 2010 (em áreas diversas como meteorologia, genómica, física de partículas, sinais cerebrais, comunicações, geoposicionamento, redes de sensores, transacções financeiras).

* * *

O período de criação da Álgebra Linear anterior ao amplo reconhecimento desta área com especificidade própria decorreu até cerca de 1932, quando as noções básicas da teoria da extensão linear proposta em 1840 foram finalmente aceites como definição de espaço linear como quadro geral para a Álgebra Linear. Nele podemos distinguir o período antes de propostas de um tal quadro geral e da clarificação da própria noção de vector (até 1840) e o período de quase um século que se seguiu até à ampla aceitação da noção de Espaço Linear a partir de 1932.

Seguiu-se um curto período de cerca de duas décadas, até meados do sec. XX, em que se verificou a transição da Álgebra Linear não ser quase ensinada de forma sistemática até ser prevalecente nos 1^{os} anos de ensino universitário em engenharia, física, matemática e outras áreas, uma evolução rápida impulsionada por múltiplas importantes aplicações nas áreas referidas e também em biologia, economia e sociologia, e sobretudo pela constatação da grande eficácia e do forte poder unificador dos métodos de Álgebra Linear evidenciado em problemas em dimensão infinita a partir do início do sec. XX. Neste período pontuaram os livros especialmente influentes de B.L. van der Waerden *Moderne Algebra* publicado na Alemanha em 1930-31 e nos EUA em 1949-50, de Garrett Birkhoff e Saunders Mac Lane *A Survey of Modern Algebra*²⁰ em 1941, e de Paul Halmos *Finite Dimensional Vector Spaces*²¹ em 1942, que tiveram um papel determinante na generalização do ensino da Álgebra Linear em cursos universitários.

O período depois de meados do sec. XX é marcado pelos efeitos das Tecnologias de Informação e Comunicação e da disseminação progressiva de computadores digitais, com avanços em métodos computacionais de Álgebra Linear e o desenvolvimento de aplicações que tiveram um impacto social e económico impressionantes e que prossegue intensamente hoje em dia.

²⁰Birkhoff, Garret (1911-1996). Mac Lane, Saunders (1909-2005).

²¹Halmos, Paul (1916-2006).