Matemática Computacional
MEBiol, MEBiom e MEFT
Aula 8 - Resolução numérica de equações não lineares

Ana Leonor Silvestre

Instituto Superior Técnico, $1^{\underline{o}}$ Semestre, 2020/2021

Sumário da Aula 8

Cap.2 - Resolução numérica de equações não lineares

Convergência monótona e alternada no método do ponto fixo.

Classificação de pontos fixos (ponto fixo atrator, ponto fixo neutro, ponto fixo repulsor). Relação com a convergência do método do ponto fixo (convergência local e divergência). Exemplos.

Ordem e coeficiente assintótico de convergência dos métodos iterativos estudados.

Teorema

Seja $g \in C^1([a,b])$ nas condições do Teorema do Ponto Fixo.

1. Se $0 \leq g'(x) < 1$, para todo $x \in [a,b]$, então a convergência do método do ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$ é monótona;
2. Se $-1 < g'(x) \leq 0$, para todo $x \in [a,b]$, então a convergência é alternada (em torno de z) e tem-se

$$|z - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|.$$

Equação $\sin(x) - \exp(-x) = 0$, $z \in [0.5, 0.7]$

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \sin(x_n) + \exp(-x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

$$g'(x) = 1 - \cos(x) - \exp(-x) < 0,\ \forall x \in [0.5, 0.7]$$

Com iterada inicial $x_0 = 0.5$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.627105 \\ x_2 &= 0.574438 \\ x_3 &= 0.594096 \\ &\cdots \\ x_{11} &= 0.588536 \\ x_{12} &= 0.588532 \end{aligned}$$

Confirma-se a convergência alternada!

$$|z - x_{12}| \leq \frac{1}{2}|x_{12} - x_{11}| = 0.2 \times 10^{-5} < 0.5 \times 10^{-5}.$$

x_{12} tem 5 algarismos significativos

Classificação de pontos fixos

Definição Seja z um ponto fixo de uma função g

$$z = g(z)$$

e suponhamos que g é diferenciável numa vizinhança de z.

- Ponto fixo atrator: $|g'(z)| < 1$
- Ponto fixo superatrator: $g'(z) = 0$
- Ponto fixo neutro: $|g'(z)| = 1$
- Ponto fixo repulsor: $|g'(z)| > 1$

Relação com a convergência do método do ponto fixo: convergência local $\approx$ ponto fixo atrator

Teorema

Seja z um ponto fixo da função g, e suponhamos que g é continuamente diferenciável numa vizinhaça de z.
Se z é ponto fixo *atrator* então o método do ponto fixo

$$x_{n+1} = g(x_n),\, n = 0, 1, ...$$

é *localmente convergente* para z, ou seja,
existe $\delta > 0$ tal que a sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge para x, qualquer que seja $x_0 \in [z-\delta, z+\delta]$.

Demonstração:

Sendo $|g'(z)| < 1$, existem constantes $0 \leq L < 1$ e $\delta > 0$ tais que

$$|g'(x)| \leq L, \forall x \in [z-\delta, z+\delta] =: I_\delta(z)$$

ou seja, g é contrativa no intervalo $I_\delta(z)$.

Vamos ver que $g(I_\delta(z)) \subseteq I_\delta(z)$. Convém notar que o intervalo pode ser descrito por

$$I_\delta = \{y \in \mathbb{R} : |y-z| \leq \delta\}.$$

Seja $x \in I_\delta$. Tem-se

$$|g(x) - z| = |g(x) - g(z)| \leq L|x-z| < |x-z| \leq \delta, \forall x \in I_\delta(z).$$

Agora aplica-se o Teorema do ponto fixo no intervalo $I_\delta(z)$.

Relação com a convergência do método do ponto fixo: não convergência $\approx$ ponto fixo repulsor

Teorema

Seja z um ponto fixo da função g, a qual é continuamente diferenciável numa vizinhaça de z. Se z é ponto fixo *repulsor* então o método do ponto fixo

$$x_{n+1} = g(x_n),\, n = 0, 1, ...$$

não pode convergir para z, a menos que, $x_0 = z$.

Demonstração:

Suponhamos que existia $x_0 \neq z$ tal que $x_n \to z$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : |x_n - z| < \varepsilon, \forall n \geq m.$$

Como g' é contínua numa vizinhaça de z e $|g'(z)| > 1$:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \ |g'(x)| > 1, \forall x \in I_{\varepsilon_0}(z).$$

Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - z| < \varepsilon_0$ para $n \geq m_0$. Tem-se

$$|x_{n+1} - z| = |g(z) - g(x_n)| = |g'(\alpha_n)||x_n - z| > |x_n - z|, \forall n \geq m_0$$

e portanto, $|x_n - z| > |x_{m_0} - z|, \forall n > m_0$, o que contradiz a hipótese de convergência.

Ponto fixo neutro

Exemplo $g(x) := e^x - 1$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$

A sucessão $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ converge para 0 quando $x_0 \in]-\infty, 0]$.

Se $x_0 \in]0, \infty[$ tem-se $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Conclusão: Quando um ponto fixo $z = g(z)$ é neutro, existem sucessões geradas por g que convergem para z e outras que não convergem (mesmo que x_0 esteja muito próximo de z).

Voltando à equação $\sin(x) - \exp(-x) = 0$...

Será que o método do ponto fixo

$$x_{n+1} = x_n + \sin(x_n) - \exp(-x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

pode ser usado para aproximar a solução $z \in [0.5, 0.7]$?

Com iterada inicial $x_0 = 0.5$, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.372895 \\ x_2 &= 0.0484701 \\ x_3 &= -0.855764 \\ x_4 &= -3.96401 \\ &\cdots \\ x_7 &= \text{Overflow} \end{aligned}$$

Como se explica este resultado?

Equação $\sin(x) - \exp(-x) = 0$

Para $z \in [0.5, 0.7]$ e o método de ponto fixo

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \sin(x_n) - \exp(-x_n),\; n = 0, 1, \ldots$$

tem-se

$$|g'(z)| = 1 + \cos(z) + \exp(-z) > 1$$

logo z é ponto fixo repulsor de g.

Equação $\sin(x) - \exp(-x) = 0$

De acordo com cálculos anteriores, $z \approx 0.588532$. Calculemos alguns termos da sucessão

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n + \sin(x_n) - \exp(-x_n),\ n = 0, 1, ...$$

partindo de $x_0 = 0.588532$ (muito próximo de z):

$0.588532, 0.588531, 0.588529, 0.588523, 0.588509, 0.588475, 0.588395,$
$0.588204, 0.587749, 0.586661, 0.584064, 0.577854, 0.562981, 0.527182,$
$0.440015, 0.221942, -0.358894, -2.14188, -11.4986, -98590.,$
$-1.275074 \times 10^{42817}$, `Overflow`

o que indica a divergência desta sucessão.

Voltando à equação $\sin(x) - \exp(-x) = 0$...

$$\sin(x) - \exp(-x) = 0, \quad z \in [0.5, 0.7]$$

$$x_{n+1} = x_n + \sin(x_n) - \exp(-x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

Com iterada inicial $x_0 = 0.7$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.847632 \\ x_2 &= 1.16892 \\ x_3 &= 1.77855 \\ x_4 &= 2.58816 \\ &\cdots \\ x_9 &= 3.09636 \\ x_{10} &= 3.09636 \end{aligned}$$

Como se explica este resultado?

Equação $\sin(x) - \exp(-x) = 0$

A equação tem uma raiz $w \in [3, 3.1]$, que também é ponto fixo de

$$g(x) = x + \sin(x) - \exp(-x).$$

Para este ponto fixo, tem-se

$$|g'(w)| = 1 + \cos(w) + \exp(-w)$$

$$< 1 + \cos(3) + \exp(-3) = 0.0597946 < 1$$

logo w é ponto fixo atrator de g.

O que aconteceu ao aplicar o método

$$x_{n+1} = x_n + \sin(x_n) - \exp(-x_n),\; n = 0, 1, \dots$$

com iterada inicial 0.7 foi a convergência para a raiz situada no intervalo $[3, 3.1]$!

Equação $\sin(x) - \exp(-x) = 0$

Consideremos novamente a raiz $z \in [0.5, 0.7]$ e o método de ponto fixo

$$x_{n+1} = G(x_n) = x_n - \sin(x_n) + \exp(-x_n),\; n = 0, 1, ...$$

Neste caso, tem-se

$$|G'(z)| = |1 - \cos(z) - \exp(-z)| = 1 - \cos(z) - \exp(-z) < 1$$

logo z é ponto fixo atrator de G e o método do ponto fixo

$$x_{n+1} = G(x_n),\; n = 0, 1, ...$$

converge localmente para z.

Em resumo:

• No caso de um ponto fixo atrator, a correspondente função pode ser usada para iteradora de um método (localmente) convergente.

• Se um ponto fixo é repulsor, a correspondente função não deve ser usada para construir um método iterativo, pois tal método não pode (em geral) convergir para o ponto fixo em causa.

Observação: Sejam z, $w \in [a, b]$ dois pontos fixos consecutivos de $g \in C^1([a, b])$. Se $|g'(z)| < 1$ então $|g'(w)| \geq 1$.

Ponto fixo superatrator

O método de Newton para aproximar a solução z de $f(x) = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, ...$$

é da forma $x_{n+1} = g(x_n)$ com

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Se z é zero simples e f é continuamente diferenciável numa vizinhança de z, tem-se

$$g'(z) = 1 - \frac{f'(z)^2 - f(z)f''(z)}{f'(z)^2} = 0.$$

A convergência (local) está assegurada e será, pelo menos, quadrática (confirmar usando a definição de ordem de convergência).

Ordem e fator assintótico de convergência

Permitem comparar a rapidez de convergência com que diferentes métodos convergem e escolher, para cada problema, o método mais rápido.

Definição Diz-se que uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para z possui

- convergência de ordem 1 (convergência linear) com coeficiente assintótico de convergência $K_\infty \in (0,1)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|} = K_\infty$$

- convergência de ordem $p > 1$, (convergência supralinear) com coeficiente assintótico de convergência $K_\infty > 0$ se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z - x_{n+1}|}{|z - x_n|^p} = K_\infty.$$