23 Abn Osc Ond

Série de Fourier

· extremos fixos $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{\ell}}_{\text{modos normais}}$$

coeficientes

$$c_n = 2/\ell \int_0^\ell dx \quad \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, \psi(x)$$

· extremo livre

fixo em $x=0$

$\psi(0,t)=0$

livre em $x=\ell$

⇓

força em $x=\ell$ nula transversa

⇓

cond. horizontal em $x=\ell$

⇓

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)\right|_{x=\ell}=0$$

para os modos normais

$A_n(0)=0$ $\qquad$ $A_n'(\ell)=0$

$A_n(x)\propto \sin k_n x$ → $k_n\cos(k_n\ell)=0$

$\Rightarrow k_n\ell=\pi/2+n\pi \qquad n=0,1,2,\dots$

$k_{n'}\ell=\pi/2+(n'-1)\pi \qquad n'=1,2,\dots$

$$k_n = \frac{\pi}{2l}(2n+1) \qquad n = 0, 1, \dots$$

$$A_n(x) \propto \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right)$$

Série Fourier

$$\Rightarrow \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right)$$

$$c_n = 2/l \int_0^{\infty} dx \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right)$$

Oscilações longitudinais → Som

(caso contínuo)

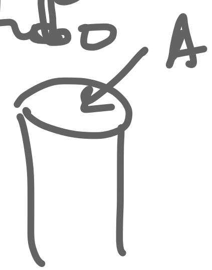
problema a 3D $\xrightarrow{\text{simplificação}}$ mov. do ar num tubo a 1D

(ondas estacionárias num tubo)

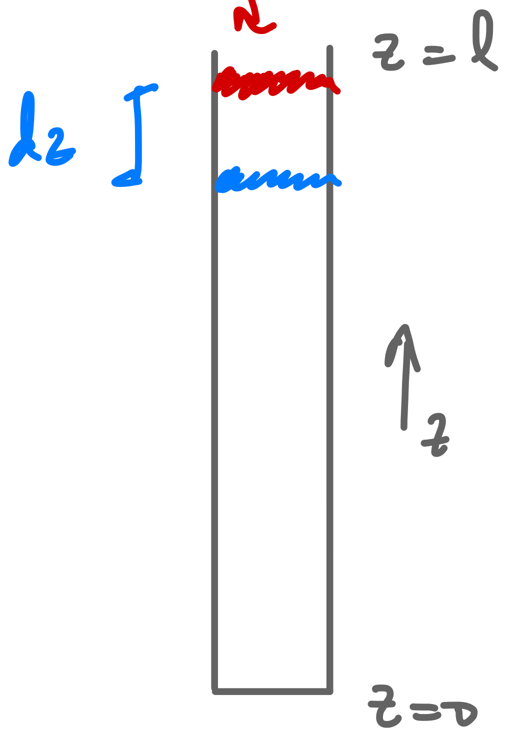
só há mov. na direcção z

• densidade de massa linear no tubo

$\rho_l = \rho A$ → secção eficaz do tubo A



densidade de massa (por volume)



pistão no topo do tubo

↓

ar no tubo ≡ mola

f = 0 no pistão

$p_{in} = p_{out}$ (= p_{atm})

deslocamento dz do pistão

$-dV = A\,dz$

variação de volume do ar no tubo

Se o movimento do pistão for lento (T = const)

$pV = nRT$

$$\Delta p \sim \frac{1}{\Delta V}$$

não é este o caso que nos interessa

→ para uma onda sonora o mov. do ar é rápido

→ não há tempo para trocas de calor

T aumenta (pistão fez trabalho) ← volume diminui adiabaticamente ← variação adiabática do volume

p aumenta mais rapidamente que 1/V

↓ pressão

$$\Rightarrow p \propto V^{-\gamma}$$

$\gamma > 0$ → depende das prop. do gás no tubo

$$\boxed{p \propto V^{-\gamma}}$$

$\gamma > 0$

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{\text{calor específico a } p \text{ const}}{\text{'' \quad '' \quad a } V \text{ const}}$$

$\gamma_{air} \simeq 1.40$

$\log$

$$\boxed{\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}} \Rightarrow dp = -\gamma p \frac{dV}{V}$$

$dV = -A\,dz$

$V/A = \ell$

$$= +\gamma p \frac{A}{V} dz = \frac{\gamma p}{\ell} dz$$

$p \simeq p_0$ $(= p_{atm})$

$$dp \simeq \frac{\gamma p_0}{\ell} dz$$

Força

$$dF = A\,dp = \frac{\gamma A^2 p_0}{V}\,dz = \frac{\gamma A p_0}{\ell}\,dz$$

$$dF \propto dz \longrightarrow \text{lei de Hooke}$$

$$\frac{\gamma A p_0}{\ell} = K$$

é constante de uma "mola" por unidade de comp.

$$\boxed{"K\ell" = \gamma A p_0}$$

para uma mola

massiva

com uma onda em gás escreve a relação de

dispersão

$$\omega^2 = \frac{K_l}{\rho_L} k^2 = \underbrace{\frac{\gamma p_0}{\rho}}_{v^2} k^2$$

$$= v_{som}^2 k^2$$

$$v_{som}^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho}$$

no ar (T, p normais)

$v_{som} \simeq 332 \text{ m s}^{-1}$

deslocamento do ar descrito por $\psi(z,t)$ (dentro do tubo)

cond. fronteira:

$$\begin{cases} \psi(0,t) = 0 & \text{(tubo fechado)} \\ \left.\dfrac{\partial \psi(z,t)}{\partial z}\right|_{z=l} = 0 & \text{(tubo aberto)} \end{cases}$$

logo

$$\psi_n(z,t) = \sin(k_n z)\cos(\omega_n t)$$

(pressão adicional $\propto -\frac{\partial}{\partial z}\psi$)

$$k = \frac{(n+1/2)\pi}{l} \qquad \underbrace{\omega = vk}_{}$$

som

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$n = 0$: freq. fundamental : $\omega = \dfrac{v\pi}{2l}$ $\quad f = \dfrac{v}{4l}$

freq. linear