Mecânica Analítica

2020-2021

Série 8

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

Nesta série, ilustramos alguns aspectos do formalismo Hamiltoniano e dos parêntesis de Poisson.

⋆⋆ **Problema 1. Multiplicadores de Lagrange.** Tal como no formalismo Lagrangeano, no formalismo Hamiltoniano também é possível introduzir os multiplicadores indeterminados de Lagrange no tratamento do constrangimento entre graus de liberdade.

a) Parta do Lagrangeano contendo k ligações do tipo $f_k(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$ e obtenha o Hamiltoniano correspondente.

b) Escreva as equações de Hamilton para esse problema.

c) Considere o pêndulo simples de massa m e haste ℓ. Use o formalismo desenvolvido para obter a força de reacção na haste.

d) Considere, agora, uma massa m segura por uma corda de comprimento ℓ no plano. No referencial em rotação, use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar a frequência máxima de rotação do sistema, ω_c, sabendo que a corda parte quando a tensão igualar o valor crítico Q_c.

⋆⋆ **Problema 2. Momento angular.** O momento angular de uma partícula é dado por $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$.

a) Tendo em conta os parênteses de Poisson fundamentais,

$$[r_i, r_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [r_i, p_j] = \delta ij,$$

calcule $[r_i, L_j]$ e $[p_i, L_j]$.

b) Mostre que $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$ e que $[L_i, \mathbf{L}^2] = 0$.

c) Os parêntesis de Poisson do momento angular definem uma álgebra de Lie (não-comutativa) de factor de estrutra ϵ_{ijk}. Os elementos L_k geram um grupo. Obtenha o grupo gerado por L_z.

d) Aproveite para mostrar que o grupo gerado por L_z é um grupo de simetria do Hamiltoniano do problema dos potenciais centrais.

$\star\star$ **Problema 3. Operadores de criação e destruição.** Considere um oscilador harmónico unidimensional cujo Hamiltoniano é dado

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \ ,$$

em que m é a massa e ω é a frequência de oscilação. Definamos a quantidade complexa

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left(\frac{p}{m\omega} + iq \right) \ ,$$

com a^* designando a correspondente complexa conjugada.

a) Exprima o Hamiltoniano em termos de a e a^*.

b) Calcule os parêntesis de Poisson $[a, a^*]$, $[a, H]$ e $[a^*, H]$. Interprete fisicamente os resultados obtidos.

c) Escreva a equação do movimento em termos das quantidades a e a^* e encontre a solução.

$\star$ **Problema 4. Movimento uniformemente acelerado.** O movimento de uma partícula de massa m sujeita a uma aceleração a constante a uma dimensão é descrito, como sabe, por

$$x = x_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{at^2}{2} \ , \quad p = p_0 + mat \ .$$

Mostre que a transformação das variáveis $(p_0, x_0) \to (p, x)$ é canónica:

a) através de um teste envolvendo parêntesis de Poisson;

b) através da determinação de uma função geradora (para $t \neq 0$) do tipo $\mathcal{F}_1(x, x_0, t)$.