PB9.1 Considere a base ordenada $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ formada pelos vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,0) \ , \quad \mathbf{v}_2 = (2,1,0) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = (5,0,1) \ .$$

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que é representada na base $\mathcal{B}$ pela matriz

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

1. Indique **uma base** para cada um dos seguintes subespaços:

a) espaço das colunas da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.

b) espaço nulo da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.

c) núcleo da transformação T .

Indique também o valor da dimensão do contradomínio de T.

2. Considere o vector $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^3$ com coordenadas na base $\mathcal{B}$ dadas por $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$.

a) Determine $\mathbf{w}$.

b) Indique o conjunto de soluções S da equação linear $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$.

c) Indique a solução $\mathbf{u}$ da equação linear $T(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$ que tem a primeira componente nula.

3. Além da base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ definida acima, considere a base ordenada $\mathcal{D} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ formada pelos vectores

$$\mathbf{u}_1 = (1,0) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = (5,1) .$$

e seja $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a única transformação linear tal que

$$S(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \ , \quad \text{e} \quad S(\mathbf{u}_2) = \mathbf{v}_2 .$$

a) Indique uma base para a imagem de S.

b) Indique a matriz $[S]_{\mathcal{BD}}$ que representa S nas bases $\mathcal{D}$ e $\mathcal{B}$.

c) Para as aplicações T e S acima definidas considere a aplicação composta $T \circ S$ e determine a matriz $[T \circ S]_{\mathcal{BD}}$ que a representa nas bases $\mathcal{D}$ e $\mathcal{B}$.

PB9.2 Considere, no espaço vectorial $\mathbb{P}_1$ dos polinómios reais de grau menor ou igual a um, o produto interno definido pela expressão:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = 2\,p(0)\ q(0) + 2\,p(0)\ q(1) + \alpha\,p(1)\ q(0) + 5\,p(1)\ q(1)$$

para certo valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Determine o valor de α.

b) Mostre que a expressão acima define de facto um produto interno em $\mathbb{P}_1$.

c) Para o produto interno considerado calcule a norma de $p(t) = 3t - 3$.