Problema 1

$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial K}$ → velocidade a que o pacote de ondas (informação) se propaga

$v_f = \frac{\omega}{K}$ → velocidade a que a fase de uma frequência da onda se propaga.

$v_g = v_f$ quando a relação de dispersão é linear sem ordenada na origem, i.e. $\omega(K) = mK$

Isto acontece quando a reta tangente ao gráfico ~~[illegible]~~ atravessa a origem do referencial o que acontece para:

~~[illegible]~~

$K = 2.0\ m^{-1}$, $\omega = 1.5 \times 10^4 /s$

$K =$ ~~[illegible]~~ $4.5\ m^{-1}$, $\omega = 6.0 \times 10^4 /s$

O pulso propaga-se à velocidade de grupo. O máximo da velocidade de grupo ocorre no ponto de inflexão

$K = 3.5\ m^{-1} \Rightarrow \omega = 4 \times 10^4\ s^{-1}$ onde

$$v_g = \left.\frac{\partial \omega}{\partial K}\right|_{max} = \frac{5.5 - 2.5}{4 - 3} \times 10^4\ \frac{m}{s} \approx 3 \times 10^4\ m \cdot s^{-1}$$

Em ~~[illegible]~~ $\omega = \omega_0 = 1 \times 10^4\ s^{-1}$

$$v_f = \frac{\omega}{K} \to +\infty$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial K} \to 0$$

Logo o meio oscila de forma conjunta mas o pulso não é transmitido através dele.

Problema 2

Substituindo a solução $\rho(x,t) = A e^{-i(\omega t - kx)}$ na equação das ondas para o plasma:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \omega_p^2 \rho$$

$$\Downarrow$$

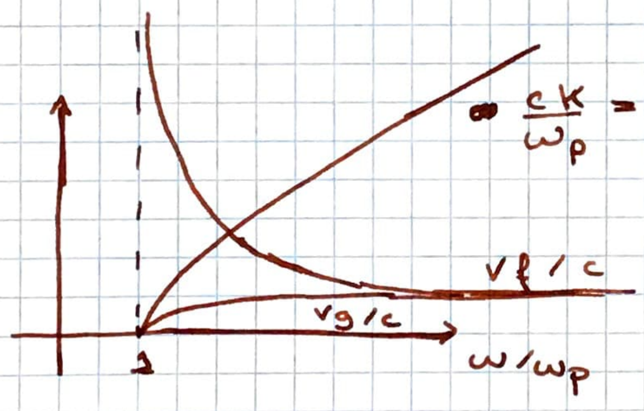
$$-\omega^2 = -c^2 k^2 - \omega_p^2 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{c^2k^2 + \omega_p^2}$$

que é equivalente a $k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{c^2k^2}} = \frac{c}{\underbrace{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}}$$

o que é que isto parece?

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2 k}{\omega(k)} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$



$$\frac{ck}{\omega_p} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1}$$

Quando $\omega \to \infty$

$v_f \approx v_g \approx c$

Para $\omega < \omega_p$ o número de onda torna-se imaginário com módulo $\varkappa = |k| = \frac{1}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ e a onda torna-se numa onda estacionária fortemente atenuada à medida que penetra no plasma

$$A e^{-i\omega t} \underbrace{e^{-\varkappa x}}_{\text{supressão exponencial}}$$

Para perceber o porquê disto teríamos que estudar o plasma microscopicamente: cadeira de ECLA

Problema 3

Para $x<0$, $v_-^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$, $v_- = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Para $x>0$, $v_+^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$, $v_+ = \sqrt{\frac{T/2}{\mu/2}} = v_-$

A continuidade da função de onda implica que

$$\psi\Big|_{x=0^-} = \psi\Big|_{x=0^+}$$

Já o facto de o anel não possuir massa implica que a resultante das forças que nele atua tem de se anular

$$\underbrace{T \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=0^-}}_{\text{força à esquerda}} - \underbrace{\frac{T}{2} \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=0^+}}_{\text{força à direita}} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{x=0^-} = \frac{1}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x}\Big|_{x=0^+}$$

Para uma onda a incidir a partir de $x<0$ temos

$$\psi \sim \begin{cases} \underbrace{e^{ikx}}_{\text{incidente}} + \underbrace{R e^{-ikx}}_{\text{refletida}}, & x<0 \\ \underbrace{T e^{ikx}}_{\text{transmitida}}, & x>0 \end{cases}$$

Os k's em $x<0$ e $x>0$ são os mesmos, para a mesma frequência, porque $v_- = v_+$ (estou a escrever tudo a menos de uma amplitude constante)

Substituindo nas condições fronteira chegamos a

$$\begin{cases} 1 + R = \tau \\ \\ 1 - R = \tau/2 \end{cases} \iff \begin{cases} R = 1/3 \\ \\ \tau = 4/3 \end{cases}$$

Logo as ondas refletidas em $x=0$ têm a mesma fase

Para uma onda a incidir em $x = L$, a condição fronteira implica que $\psi(x=L) = 0$ logo uma onda incidente do tipo

$$\propto e^{iK(x-L)} + R e^{-iK(x-L)}$$

faço uma translação do modo a que a onda incidente tenha uma fase simples de analisar

Logo $\psi(x=L) = 0 \Rightarrow 1 + R = 0 \iff \underbrace{R = -1}$

a onda refletida vem desfasada de π

Para tempos $t \leq 2L\sqrt{\mu/T}$ o pulso transmitido ainda não refletiu na parede em $x=L$ e voltou a $x=0$ por isso para

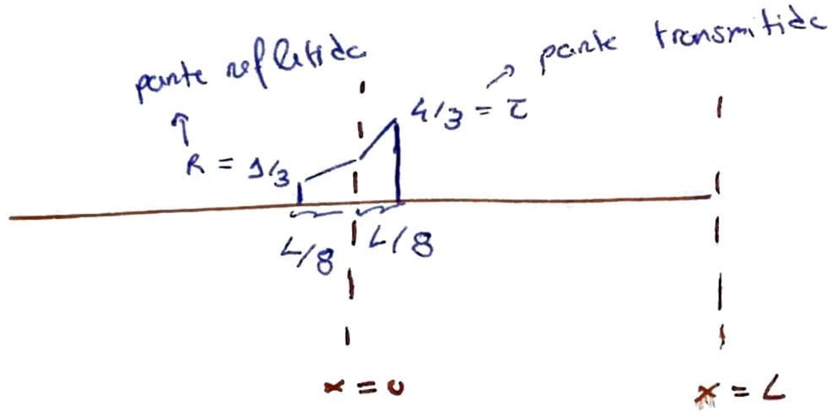
$$x<0, \quad \psi = f_1(x/v - t) + \overset{\text{coeficiente de reflexão}}{\frac{1}{3}} \underbrace{f_1(-x/v - t)}$$

pulso da mesma forma que o pulso incidente a viajar na direção oposta

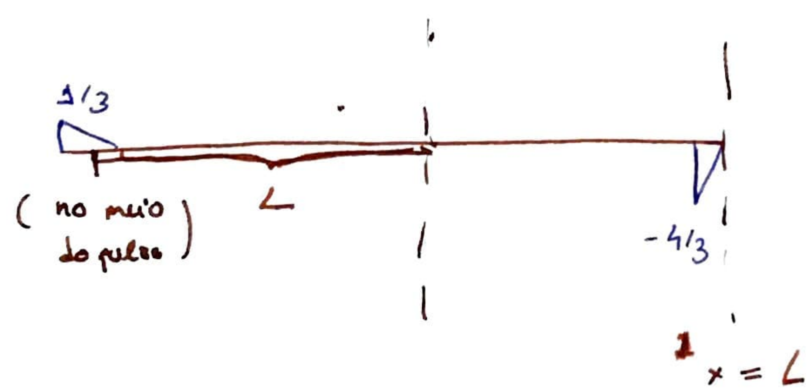
$x>0, \ \psi = \frac{4}{3} f_1(x/v - t) - \underbrace{\frac{4}{3} f_1\left(-\frac{x}{v} - t\right)}_{\text{reflexão na parede em } x = L}$

coeficiente de transmissão de $x<0$ para $x>0$

Em $t = L\frac{\mu}{T} = L/v$ metade do pulso já atravessou $x = 0$ e a outra parte ainda está a viajar para a direita



Em $t = 2L\frac{\mu}{T} = \frac{2L}{v}$ o pulso transmitido já refletiu na parede em $x = L$ e o pulso refletido em $x = 0$ já viajou para a esquerda até $x = -L$

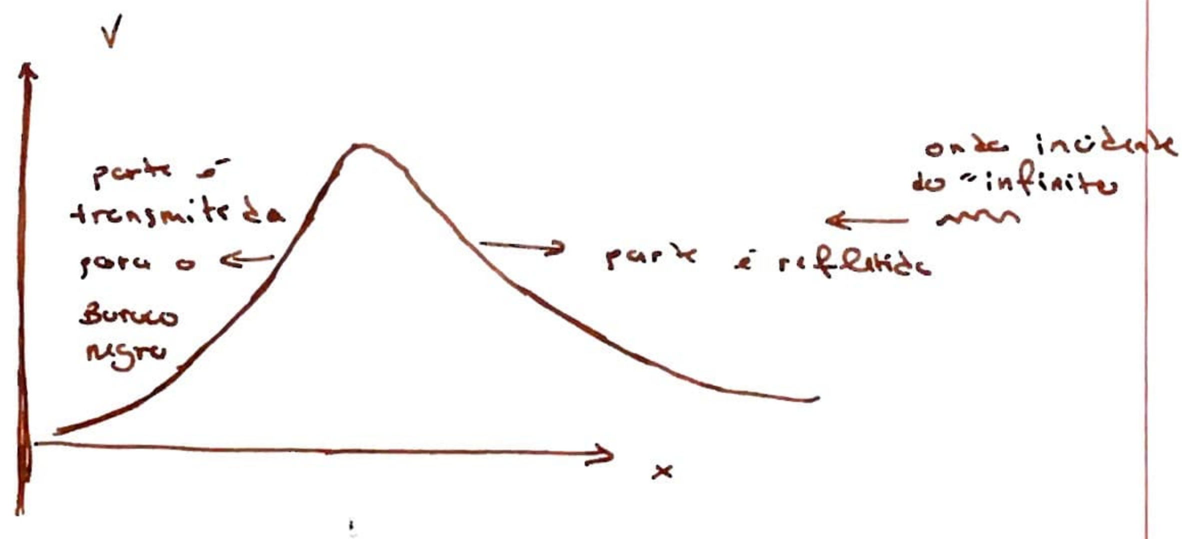


Problema 4

$$"c^2" \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + V(\omega, x)\, \varphi = 0$$

para que as unidades sejam consistentes temos que incluir uma velocidade neste termo. Neste problema, seguindo o standard de Física "mais avançada", fixamos a velocidade de propagação da onda em 1 de modo a facilitar os cálculos (não usem este truque nos restantes problemas da cadeira).

Esta situação é em tudo semelhante a um problema de "scattering" semelhante aos que temos analisado excepto que neste caso o scattering não ocorre apenas num ponto mas ao longo de toda a região onde $V(\omega, x)$ é não nulo. A forma de $V(\omega, x)$ é algo do género



NOTA: Não é preciso um buraco negro para que isto aconteça. Basta que haja um potencial (neste caso gravitacional) uma onda que incide nele é parcialmente refletida e parcialmente transmitida.

Fazendo $\psi(x,t) = e^{-i\omega t}\psi(x,\omega)$ (que no fundo corresponde a um transformada de Fourier), reescrevemos a equação das ondas como

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \underbrace{(V(\omega,x)+\omega^2)}_{\tilde{V}(\omega,x)}\psi = 0$$

Esta equação é conhecida como equação de Schrödinger independente do tempo

<u>NOTA</u>: Em Mecânica Quântica irão analisar muitos destes problemas com potenciais $\tilde{V}(\omega,x)$ simples. Ao descreverem ~~as~~ partículas como ondas (dualidade onda-partícula) vêm agora que parte da "partícula" pode ser transmitida ao incidir sobre um potencial $\Rightarrow$ <u>efeito de túnel</u>. Irão aprender técnicas específicas para calcular os coeficientes de transmissão nestes casos.

O comportamento

$$\begin{cases} \tilde{V} \sim \omega^2 , & x \to +\infty \\ \tilde{V} \sim (\omega - m\Omega_H)^2 , & x \to x_+ \end{cases}$$

Implica que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \omega^2\psi = 0 , & x \to +\infty \\ \cancel{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (\omega - m\Omega_H)^2 \psi = 0 \quad x \to x_+} \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (\omega - m\Omega_H)^2\psi = 0 , & x \to x_+ \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\psi \sim \begin{cases} \underbrace{e^{-i\omega x}}_{\text{onda incidente}} + \underbrace{R\, e^{i\omega x}}_{\text{onda refletida}} , & x \to +\infty \\ T_{in}\, e^{-i(\omega - m\Omega_H)x} + T_{out}\, e^{i(\omega - m\Omega_H)x} , & x \to x_+ \end{cases}$$

ou seja uma onda incidente de amplitude 1 a partir do "infinito", $e^{-i\omega x}$, é refletida com amplitude R, transmitida para o buraco negro com amplitude T_{in} e refletida deste com amplitude T_{out}. Contudo, para um Buraco negro, nada pode ser enviado a partir dele e por isso temos que impor $T_{out} = 0$ de modo a que não possamos receber informação a partir do interior do Buraco negro. Logo temos que

$$\psi \sim \begin{cases} e^{-i\omega x} + R e^{i\omega x}, & x \to +\infty \\ T_{in} e^{-i(\omega - m\Omega_H)x}, & x \to x_+ \end{cases}$$

"a menos de uma constante multiplicativa"

Definindo a quantidade

$$W = \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(chama-se a isto o Wronskiano e aparece na teoria de equações diferenciais que irão aprender no próximo semestre)

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \cancel{\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi^*}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \psi^*}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}} + \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} =$$

substituindo a equação de Schrödinger Independente do tempo

$$= -\psi \cdot \tilde{V} \psi^* + \psi^* \cdot \tilde{V} \psi =$$

$$= \tilde{V} (\psi \psi^* - \psi \psi^*) = 0$$

Logo W é constante em x

Podemos calcular esta quantidade explicitamente nos limites $x \to +\infty$ e $x \to x_+$

$$W \sim \begin{cases} 2i\omega(1-|R|^2), & x \to +\infty \\ 2i(\omega - m\Omega_H)|T_{in}|^2, & x \to x_+ \end{cases}$$

E como W é constante em x temos que

$$\cancel{2i}\omega(1-|R|^2) = \cancel{2i}(\omega - m\Omega_H)|T_{in}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |R|^2 = 1 - \frac{1}{\omega}(\omega - m\Omega_H)|T_{in}|^2$$

Lembrando que a energia de uma onda é proporcional à sua amplitude, isto significa que para

$\omega < m\Omega_H \Rightarrow |R|^2 > 1$, ou seja a onda é refletida com maior amplitude/energia do que foi enviada. De onde vem este excesso de energia? Só poderá vir da energia armazenada na rotação do Buraco Negro, que irá decrescer (sendo este efeito de 2ª ordem). Reparem que quando $m\Omega_H = 0$ (o Buraco Negro não roda), $|T_{in}|^2 = 1 - |R|^2$ que é apenas a conservação de energia.

A este fenómeno de extração de energia chama-se <u>superradiância</u> e é um dos "hot topics" em Gravitação. Na verdade, este fenómeno é muito mais geral e ocorre para qualquer onda acoplada a uma determinada interação que seja refletida de um objeto em rotação (e.g. uma onda eletromagnética a refletir num cilindro condutor).

<u>Pergunta</u>: o que acontece se pusermos um espelho à volta de um Buraco Negro a rodar?