Mecânica Analítica

Capítulo 5: Oscilações

H. Terças

Instituto Superior Técnico
(Departamento de Física)

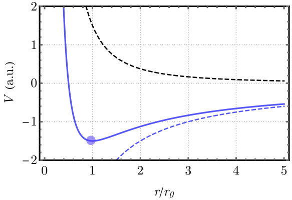
TÉCNICO LISBOA

O equilíbrio de um sistema é caracterizado por

$$Q_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\bigg|_{q_{i0}} = 0.$$

A q_{i0} dá-se o nome de **ponto de equilíbrio**.

- Exemplo 1: Potencial efectivo da gravitação $V(r) = -\dfrac{k}{r}$



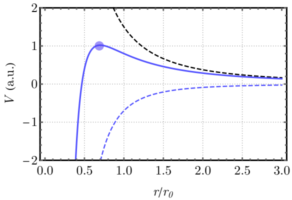
Equilíbrio **estável**: $\left(\dfrac{\partial V_{\text{ef.}}}{\partial r}\right)\bigg|_{r_0} = 0, \quad \boxed{\left(\dfrac{\partial^2 V_{\text{ef.}}}{\partial r^2}\right)\bigg|_{r_0} > 0}$

O equilíbrio de um sistema é caracterizado por

$$Q_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)\bigg|_{q_{i0}} = 0.$$

A q_{i0} dá-se o nome de **ponto de equilíbrio**.

- Exemplo 2: Potencial efectivo dipolar $V(r) = -\dfrac{k'}{r^3}$



Equilíbrio **instável**: $\left(\dfrac{\partial V_{\text{ef.}}}{\partial r}\right)\bigg|_{r_0} = 0,\ \boxed{\left(\dfrac{\partial^2 V_{\text{ef.}}}{\partial r^2}\right)\bigg|_{r_0} < 0}$

Estamos interessados em desvios ao equilíbrio,

$$q_i = q_{i0} + \eta_i.$$

Para n coordenadas generalizadas, o potencial pode ser escrito como (soma nos índices repetidos!)

$$V(q_1, ..., q_n) = V(q_{0i}, ..., q_{0n}) + \cancel{\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0} \eta_i + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0}_{V_{ij}} \eta_i \eta_j + ...,$$

onde $f_0 = f(q_{10}, ...q_{n0})$.

$$\boxed{V \simeq V_0 + \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j}$$

A energia cinética é uma função quadrática das velocidades (mesmo para sistemas acoplados, i.e. com "termos cruzados")

$$T = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_i = \cancel{T_0} + \frac{1}{2} m_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j .$$

Quanto à matriz de massa $m_{ij} = m_{ij}(q_1, ..., q_n)$,

$$m_{ij}(q_1, ..., q_n) = m_{ij}(q_{01}, ..., q_{0n}) + \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right)_0 \eta_k + ...$$

T é quadrática nos $\dot{\eta}_i$'s, portanto o único termo que conservamos da expansão é $m_{ij}(q_{01}, ..., q_{0n}) \equiv T_{ij}$

$$\boxed{T \simeq \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j} .$$

Assim, o Lagrangeano para **pequenas oscilações** é

$$L = T - V = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

- Equações de Euler-Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \eta_k} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} T_{ij} \underbrace{\frac{\partial \dot{\eta}_i}{\partial \dot{\eta}_k}}_{\delta_{ik}} \dot{\eta}_j + \frac{1}{2} T_{ij} \underbrace{\frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{\eta}_k}}_{\delta_{jk}} \dot{\eta}_i\right) + \frac{1}{2} V_{ij} \underbrace{\frac{\partial \eta_i}{\partial \eta_k}}_{\delta_{ik}} \eta_j + \frac{1}{2} V_{ij} \underbrace{\frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_k}}_{\delta_{jk}} \eta_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(T_{kj} \dot{\eta}_k\right) + V_{kj} \eta_k = 0.$$

Como $T_{kj} = T_{jk}$, $V_{kj} = V_{jk}$ (tensores simétricos),

$$\boxed{T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = 0}$$

Equação geral do movimento para pequenas oscilações:

$$T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0.$$

- Solução geral da equação: $\eta_i = \mathrm{Re}\left[a_i e^{-i\omega t}\right]$

$$\left(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}\right) a_j = 0.$$

A solução não trivial implica

$$\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = 0.$$

Problema de **valores próprios**

$$\boxed{\mathbf{V} \cdot \vec{a} = \omega^2 \mathbf{T} \cdot \vec{a}}$$

$\therefore$ $\vec{a}$'s são os **vectores próprios** (obtidos determinando $N(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T})$), associados a cada **valor próprio** ω^2.

Seja $\vec{a}_\ell$ um dos vectores próprios do problema ($\lambda_\ell = \omega_\ell^2$)

$$\mathbf{V}\cdot\vec{a}_\ell = \lambda_\ell \mathbf{T}\cdot\vec{a}_\ell \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_\ell^\dagger \cdot \mathbf{V} = \lambda_\ell^* \vec{a}_\ell^\dagger \cdot \mathbf{T},$$

onde $\vec{a}_\ell^\dagger = \vec{a}_\ell^{T*}$ (vector adjunto). Multiplicando por $\vec{a}_\ell$ e $\vec{a}_\ell^\dagger$ e subtraindo,

$$(\lambda_\ell - \lambda_\ell^*)\underbrace{\vec{a}_\ell^\dagger\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{a}_\ell}_{c_\ell} = 0 \Rightarrow c_\ell \in \mathbb{R}.$$

Fazendo a decomposição $\vec{a}_\ell = \vec{\alpha}_\ell + i\vec{\beta}_\ell$,

$$c_\ell = \vec{\alpha}_\ell^T\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{\alpha}_\ell + \vec{\beta}_\ell^T\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{\beta}_\ell + i\underbrace{\left(\vec{\alpha}_\ell^T\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{\beta}_\ell - \vec{\beta}_\ell^T\cdot\mathbf{T}\cdot\vec{\alpha}_\ell\right)}_{=0,\quad (T_{ij}=T_{ji})}.$$

A matriz $\mathbf{T}$ é definia positiva, $c_\ell \geq 0$.

$$\boxed{\lambda_\ell = \lambda_\ell^*}^{1}$$

A energia cinética pode então escreve-se $T = \dfrac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^T\cdot\mathbf{T}\cdot\dot{\vec{\eta}}$

[1]**Nota:** Embora $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$, isto não implica que ω seja real ($\omega = \pm\sqrt{\lambda_\ell}$!)

Voltemos à relação usando o facto de $\mathbf{T}$ ser definida positiva,

$$\mathbf{V} \cdot \vec{a}_\ell = \lambda_\ell \mathbf{T} \cdot \vec{a}_\ell \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_k^T \cdot \mathbf{V} = \lambda_k^* \vec{a}_k^T \cdot \mathbf{T}.$$

Multiplicando por $\vec{a}_k^T$ e $\vec{a}_\ell$ e subtraindo,

$$(\lambda_k - \lambda_\ell) \underbrace{\vec{a}_\ell^T \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{a}_k}_{c_{\ell k} = c_{k\ell}} = 0.$$

Na ausência de **degenerescência**, $\lambda_k \neq \lambda_\ell$ para $k \neq \ell$, $c_{\ell k} = 0$. Genericamente,

$$c_{\ell k} = \delta_{\ell k}.$$

Isto permite-nos fixar as componentes dos vectores próprios

$$\vec{a}_k^T \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{a}_\ell = \mathbb{I}\delta_{k\ell} \Rightarrow a_{i;k} T_{ij} a_{j;\ell} = \delta_{ij}\delta_{k\ell}{}^2.$$

Para um mesmo vector,

$$\boxed{\vec{a}_\ell^T \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{a}_\ell = 1}$$

[2] (k, ℓ): índice de vector próprio; (i, j): índice de componente de cada vector

Assumindo que temos n vectores próprios $\vec{a}_k$ **linearmente independentes**, construímos a matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix},$$

satisfazendo, por construção, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$ (unitária). Esta matrix permite diagonalizar o tensor de energia cinética

$$\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbb{I}.$$

Regressando à equação dos valores próprios do problema,

$$\mathbf{V} \cdot \vec{a}_k = \underbrace{\boldsymbol{\lambda}_k}_{\lambda_k \mathbb{I}} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{a}_k \qquad \text{(componentes: } V_{ij} a_{j;k} = T_{im} a_{m;k} \lambda_{k\ell} \delta_{k\ell}\text{)}$$

$$\mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{V}\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{T}\mathbf{A}}_{\mathbb{I}} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}$$

$$\boxed{\det\left(\mathbf{V} - \lambda \mathbb{I}\right) = 0}$$

- Exemplo: Dois graus de liberdade acoplados

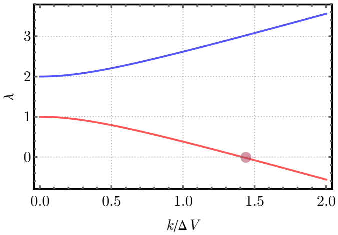
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_i^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}V_{ij}x_i x_j$$

Da transformação de congruência (diagonalização),

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \lambda & \kappa \\ \kappa & V_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \kappa \equiv V_{12} = V_{21}.$$

Valores próprios:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(V_{11} + V_{22} \pm \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4\kappa^2}\right)$$



- Exemplo: Dois graus de liberdade acoplados

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_i^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}V_{ij}x_i x_j$$

Vectores próprios: $\vec{a}_\pm$, dadas por

$$\mathrm{N}\left(\mathbf{V} - \lambda_\pm \mathbb{I}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_{11} - \lambda_\pm & \kappa \\ \kappa & V_{22} - \lambda_\pm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,\pm} \\ a_{2,\pm} \end{bmatrix} = 0$$

Assumindo $\kappa \ll \Delta$, com $\Delta = |V_{11} - V_{22}|$ (por comodidade)

$$\vec{a}_+ = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\kappa^2}{2\Delta^2} \\ \dfrac{\kappa}{\Delta} - \dfrac{\kappa^3}{2\Delta^3} \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_- = \begin{bmatrix} -\dfrac{\kappa}{\Delta} + \dfrac{\kappa^3}{2\Delta^3} \\ 1 - \dfrac{\kappa^2}{2\Delta^2} \end{bmatrix}$$

Ortogonalidade: $\vec{a}_+ \cdot \vec{a}_- = 0$.

TÉCNICO LISBOA

- Exemplo: Dois graus de liberdade acoplados

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_i^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}V_{ij}x_i x_j$$

Vectores próprios: $\vec{a}_\pm$, dados por

$$\mathrm{N}\left(\mathbf{V} - \lambda_\pm \mathbb{I}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} V_{11} - \lambda_\pm & \kappa \\ \kappa & V_{22} - \lambda_\pm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,\pm} \\ a_{2,\pm} \end{bmatrix} = 0$$

A matriz de congruência $\mathbf{A}$, por fim, escreve-se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\kappa^2}{2\Delta^2} & -\dfrac{\kappa}{\Delta} + \dfrac{\kappa^3}{2\Delta^3} \\ \dfrac{\kappa}{\Delta} - \dfrac{\kappa^3}{2\Delta^3} & 1 - \dfrac{\kappa^2}{2\Delta^2} \end{bmatrix}.$$

Da discussão anterior, vemos que as soluções gerais são combinações de vários **modos** (soma nos índices repetidos!)

$$\eta_i = \mathrm{Re}[a_i e^{-i\omega t}] = \mathrm{Re}[C_k a_{i;k} e^{-i\omega_k t}] = f_k a_{i;k} \cos(\omega_k t + \delta_k).$$ [3]

Podemos definir coordenadas **normais**

$$\eta_i = a_{i;k}\zeta_k \quad (\text{matricialmente: } \vec{\eta} = \mathbf{A}\cdot\vec{\zeta}_i)$$

O potencial então escreve-se

$$V = \frac{1}{2}\vec{\eta}^T\cdot\mathbf{V}\cdot\vec{\eta} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}\cdot\vec{\zeta}\right)^T\cdot\mathbf{AV}\cdot\vec{\zeta} = \frac{1}{2}\vec{\zeta}^T\mathbf{A}^T\mathbf{VA}\cdot\zeta.$$

Usando $\mathbf{A}^T\mathbf{VA} = \boldsymbol{\lambda} = \lambda\mathbb{I}$,

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\omega_k^2\zeta_k^2}$$

Para a energia cinética,

$$T = \frac{1}{2}\dot{\vec{\zeta}}^T\cdot\overbrace{\mathbf{A}^T\mathbf{TA}}^{\mathbb{I}}\cdot\dot{\vec{\zeta}} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\dot{\zeta}_k\dot{\zeta}_k}$$

[3] (k,ℓ): índice de vector próprio; (i,j): índice de componente de cada vector

Da discussão anterior, vemos que as soluções gerais são combinações de vários **modos** (soma nos índices repetidos!)

$$\eta_i = \mathrm{Re}[a_i e^{-i\omega t}] = \mathrm{Re}[C_k a_{i;k} e^{-i\omega_k t}] = f_k a_{i;k} \cos(\omega_k t + \delta_k).^{4}$$

Em termos das coordenadas **normais**, temos então

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\zeta}_k^2 + \omega_k^2 \zeta_k^2\right),$$

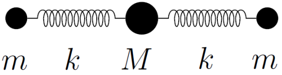
cujas equações do movimento resultam em

$$\ddot{\zeta}_k + \omega_k^2 \zeta_k = 0.$$

$\therefore$ As coordenadas normais diagonalizam $\mathbf{T}$ e $\mathbf{V}$ simultaneamente.

[4] (k, ℓ): índice de vector próprio; (i, j): índice de componente de cada vector

- Exemplo: A molécula tri-atómica.

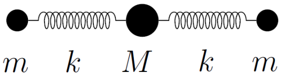


O potencial é $V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - \ell)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_3 - x_2 - \ell\right)^2$. Definindo $\eta_i = x_i - x_{0i}$, com a condição de equilíbrio

$$x_{02} - x_{01} = \ell = x_{03} - x_{02},$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k\left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_3 - \eta_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3\right) \end{aligned}$$

- Exemplo: A molécula tri-atómica.

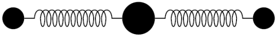


O potencial é $V = \dfrac{1}{2}k(x_2 - x_1 - \ell)^2 + \dfrac{1}{2}k\left(x_3 - x_2 - \ell\right)^2$. Definindo $\eta_i = x_i - x_{0i}$, com a condição de equilíbrio

$$x_{02} - x_{01} = \ell = x_{03} - x_{02},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & -2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

- Exemplo: A molécula tri-atómica.



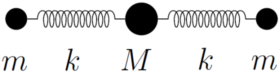
Quanto à energia cinética,

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2\right) + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2.$$

Em forma matricial,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

- Exemplo: A molécula tri-atómica.



Combinando os dois tensores, a equação secular é

$$\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = \begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0,$$

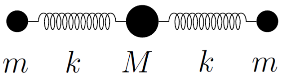
conduzindo ao seguinte polinómio característico

$$\omega^2 \left(k - \omega^2 m\right) \left[k(2m + M) - \omega^2 M m\right] = 0.$$

Soluções:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

- Exemplo: A molécula tri-atómica.



- modo normal "nulo": $\omega_1 = 0$

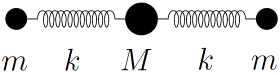
$$\ddot{\zeta}_1 = 0.$$

Corresponde a uma translação do sistema sem custo de energia, expressando a conservação do **momento linear do centro de massa**!

Podemos eliminar o **modo normal nulo** fixando o centro de massa

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0$$

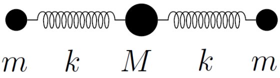
- Exemplo: A molécula tri-atómica.



- vectores próprios $\vec{a}_k \in \mathrm{N}(\mathbf{V} - \omega^{\mathbf{T}})$

$$\mathrm{N}\left(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k - m\omega_k^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega_k^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1;k} \\ a_{2;k} \\ a_{3;k} \end{bmatrix} = 0$$

- Exemplo: A molécula tri-atómica.



- vector próprio $\vec{a}_1$ $(\omega_1 = 0)$: $\Longrightarrow \quad \Longrightarrow \quad \Longrightarrow$

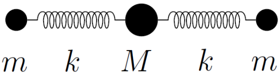
$$\vec{a}_1 = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Recorrendo à condição de normalização $\vec{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{a}_1 = 1$,

$$m(a_{1;1}^2 + a_{2;1}^2) + M a_{3;1}^2 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{2m+M}}.$$

Fica definida a **primeira coluna** da matriz $\mathbf{A}$.

- Exemplo: A molécula tri-atómica.



- vector próprio $\vec{a}_2$ $(\omega_2 = \sqrt{k/m})$: $\Longleftarrow \quad \bullet \quad \Longrightarrow$

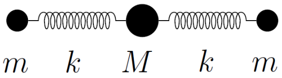
$$\vec{a}_2 = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Recorrendo à condição de normalização $\vec{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{a}_1 = 1$,

$$m(a_{1;2}^2 + a_{2;2}^2) + M a_{3;2}^2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

Fica definida a **segunda coluna** da matriz $\mathbf{A}$.

- Exemplo: A molécula tri-atómica.



- vector próprio $\vec{a}_3$ $\left(\omega_3 = \sqrt{(k/m)\,(1+2m/M)}\ \right)$: $\Longleftarrow \quad \Rightarrow \quad \Longleftarrow$

$a_{1;3} = a_{3;3}$ (...)

$$\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2m\,(1+2m/M)}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{2M\,(2+M/m)}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2m\,(1+2m/M)}} \end{bmatrix}.$$

Fica definida a **terceira coluna** da matriz $\mathbf{A}$.

- Exemplo: A molécula tri-atómica.

Os **modos normais** $\zeta_k = A^T_{k\ell}\eta_\ell$ descrevem a dinâmica das vibrações

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{m}{2m+M}}\left(\eta_1 + \sqrt{\frac{M}{m}}\eta_2 + \eta_3\right)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\eta_1 - \eta_3\right)$$

$$\zeta_3 = \sqrt{\frac{M}{2m+M}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1+\eta_3) - \sqrt{\frac{2m}{M}}\eta_2\right)$$

No caso de existirem **forças exteriores**, necessitamos de introduzir forças generalizadas. No formalismo das pequenas oscilações, $q_i = q_{01} + \eta_i$

$$Q_i = \vec{F}_j^{\,\text{ext}} \cdot \frac{\partial \vec{r_j}}{\partial q_i} = \vec{F}_j^{\,\text{ext}} \cdot \frac{\partial \vec{r_j}}{\partial \eta_i}.$$

Para o Lagrangeano para pequenas oscilações $L = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$, temos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = Q_k \quad \Longrightarrow T_{ik} \ddot{\eta}_k + V_{ik} \eta_k = Q_k.$$

Usando as coordenadas normais $\zeta_i = A_{ji} \eta_j$[5]

$$\boxed{\ddot{\zeta}_i + \omega_i^2 \zeta_i = A_{ji} Q_j \equiv \mathcal{Q}_i}$$

[5]Recorde-se: $A_{ji} = A_{ij}^T$, com A_{ij} sendo a matriz dos vectores próprios.

Na maior parte dos casos de interesse, $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{0i} e^{-i\Omega_i t}$. É natural pensar que o sistema seguirá a frequência imposta exteriormente, Ω_i, mais um factor de fase[6]. Assim,

$$\zeta_i(t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{B}_i e^{-i(\Omega_i t + \delta_i)}\right].$$

Inserindo na equação do movimento, obtemos a **amplitude**

$$\mathcal{B}_i e^{-i(\Omega_i t + \delta_i)} = \frac{\mathcal{Q}_{0i} e^{-i\Omega_i t}}{\omega_i^2 - \Omega_i^2} \quad \Longrightarrow \delta_i = 0.$$

Em termos das coordenadas generalizadas,

$$\eta_i(t) = A_{ij}\zeta_j(t) = \frac{Q_{0i}}{\omega_i^2 - \Omega_i^2} \cos(\Omega_i t).$$

Ressonância: $\Omega_i \to \omega_i \quad \Longrightarrow \eta_i(t) \to \infty$

[6] Na verdade, em ACED verão que a solução corresponde à soma da soluções homogénea e particular...

Uma forma de evitar a "explosão" das solução é introduzir o efeito da **dissipação**. Para potenciais de Rayleigh quadráticos,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \simeq \frac{1}{2}\mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j .$$

As equações de Euler-Lagrange escrevem-se, então,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} - \frac{\partial L}{\partial \eta_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\eta}_k} = Q_k ,$$

$$\Leftrightarrow T_{ki}\ddot{\eta}_i + V_{ki}\eta_i + \mathcal{F}_{ki}\dot{\eta}_i = Q_{0k}e^{-i\Omega_k t} .$$

Procurando soluções do tipo $\eta_i(t) = \mathrm{Re}\left[B_i e^{-i\Omega_i t+\delta_i}\right]$, vem

$$\left(V_{ki} - \Omega_i^2 T_{ki} - i\Omega_i \mathcal{F}_{ki}\right)\eta_i = Q_k .$$

Em geral, esta equação é complicada (i.e. não podemos diagonalizar $\mathbf{V}$, $\mathbf{T}$ e $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ simultâneamente (c.f. Goldstein, §6.5)

$$\left(V_{ki} - \Omega_i^2 T_{ki} - i\Omega_i \mathcal{F}_{ki}\right)\eta_i = Q_k.$$

Em alguns casos, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ e $\mathbf{T}$ são diagonalizáveis simultaneamente.

- $\mathcal{F}_{ij} = \gamma m_{ij} = 2\gamma T_{ij}$

Definindo a contracção $\mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_j = 2\gamma_i\dot{\eta}_i$ (sem soma no índice i), a equação do movimento vem

$$\left[V_{ki} - (\Omega_i^2 - 2i\gamma_i\Omega_k)T_{ki}\right]\eta_i = Q_k.$$

Em termos das coordernadas normais, $\eta_i = A_{ji}\zeta_j$, (sem soma em k)

$$\left(\omega_k^2 - \Omega_k^2 + 2i\gamma_k\Omega_k\right)\zeta_k = \mathcal{Q}_k.$$

Explicitamente, $\mathcal{Q}_k = \mathcal{Q}_{0k} e^{-i\Omega_k t}, \quad \zeta_k(t) = \mathrm{Re}\left[\mathcal{B}_k e^{-i(\Omega_k t + \delta_k)}\right]$, pelo que

$$\left(\omega_k^2 - \Omega_k^2 + 2i\gamma_k\Omega_k\right)\mathcal{B}_k = \mathcal{Q}_{0k} e^{i\delta_k},$$

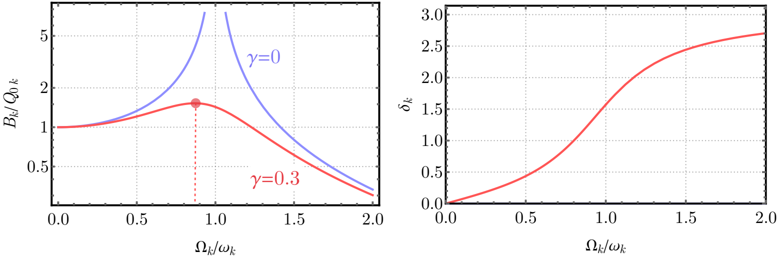
$$\begin{cases} \left(\omega_k^2 - \Omega_k^2\right)\mathcal{B}_k = \mathcal{Q}_{0k}\cos(\delta_k) \\ \\ 2\gamma_k\Omega_k\mathcal{B}_k = \mathcal{Q}_{0k}\sin(\delta_k) \end{cases}$$

A **amplitude** e a **fase** de um determinado modo k são, portanto,

$$\boxed{\mathcal{B}_k = \frac{\mathcal{Q}_{0k}}{\sqrt{(\omega_k^2 - \Omega_k^2)^2 + 4\gamma_k^2\Omega_k^2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\tan\delta_k = \frac{2\gamma_k\Omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_k^2}}.$$

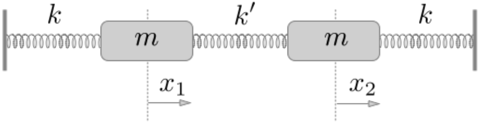
A **amplitude** e a **fase** de um determinado modo k são, portanto,

$$\boxed{\mathcal{B}_k = \frac{\mathcal{Q}_{0k}}{\sqrt{(\omega_k^2 - \Omega_k^2)^2 + 4\gamma_k^2\Omega_k^2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\tan\delta_k = \frac{2\gamma_k\Omega_k}{\omega_k^2 - \Omega_k^2}}.$$



A amplitude máxima ocorre para a frequência $\Omega_{k,\max} = \sqrt{\omega_k^2 - 2\gamma_k^2}$.

- Exemplo 1: Osciladores acoplados



$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k'(x_1 - x_2)^2$$

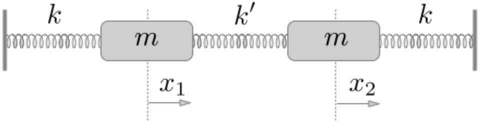
No formalismo das pequenas oscilações,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} k + k' & -k' \\ -k' & k + k' \end{bmatrix}.$$

Valores próprios (usando $x_i = x_{0i}e^{-i\omega t}$):

$$\det(\omega^2\mathbf{T} - \mathbf{V}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \omega^2 - \dfrac{k+k'}{m} & \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{k}{m} & \omega^2 - \dfrac{k+k'}{m} \end{vmatrix} = 0$$

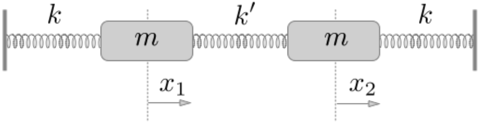
- Exemplo 1: Osciladores acoplados



$$\det(\omega^2\mathbf{T}-\mathbf{V})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \omega^2-\dfrac{k+k'}{m} & \dfrac{k'}{m} \\ \dfrac{k'}{m} & \omega^2-\dfrac{k+k'}{m} \end{vmatrix}=0,$$

$$\boxed{\omega=\omega_+\equiv\sqrt{\frac{k+2k'}{m}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\omega=\omega_-\equiv\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- Exemplo 1: Osciladores acoplados



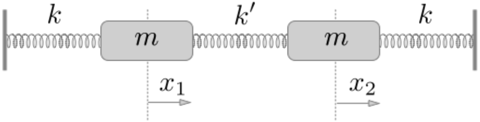
$$\omega = \omega_+ \equiv \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}} \quad \text{e} \quad \omega = \omega_- \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Vectores próprios (normalizados, $\vec{a}_\alpha^T \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{a}_\beta = \mathbb{I}\delta_{\alpha\beta}$):

$$\mathrm{N}\left(\omega_\pm^2 \mathbf{T} - \mathbf{V}\right) \Leftrightarrow \left(\omega_\pm^2 \mathbf{T} - \mathbf{V}\right) \cdot \vec{a}_\pm = 0,$$

$$\boxed{\vec{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

- Exemplo 1: Osciladores acoplados



$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

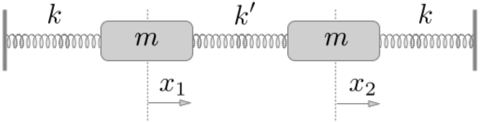
Modos normais: $\zeta_i = A_{ji} x_j$,

$$\boxed{\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)} \quad \text{e} \quad \boxed{\zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)}$$

Solução homogénea: Combinação linear dos modos normais

$$\vec{x}_{\text{hom.}}(t) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\omega_- t} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-i\omega_+ t}.$$

- Exemplo 1: Osciladores acoplados



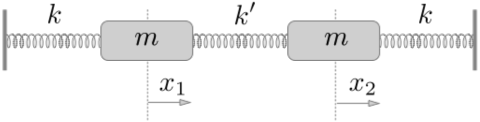
Consideremos agora que o primeiro oscilador é **forçado** ($Q_1 = m\mathcal{A}_0 \cos(\Omega t)$, $Q_2 = 0$)

$$T_{ij}\ddot{x}_j + V_{ij}x_j = Q_i.$$

Usando soluções do tipo $x_i(t) = \mathrm{Re}[B_i e^{-i\Omega t}]$ ($\delta_i = 0$)

$$\begin{cases} \left(-\Omega^2 + \dfrac{k+k'}{m}\right) B_1 - \dfrac{k'}{m} B_2 = \mathcal{A}_0 \\[2ex] -\dfrac{k'}{m} B_1 + \left(-\Omega^2 + \dfrac{k+k'}{m}\right) B_2 = 0 \end{cases}$$

- Exemplo 1: Osciladores acoplados



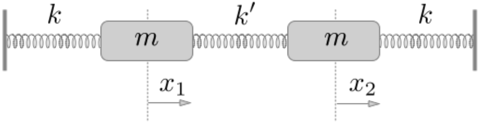
Consideremos agora que o primeiro oscilador é **forçado** $(Q_1 = m\mathcal{A}_0 \cos(\Omega t),\ Q_2 = 0)$

$$T_{ij}\dot{x}_j + V_{ij}x_j = Q_i.$$

Usando soluções do tipo $x_i(t) = \mathrm{Re}[B_i e^{-i\Omega t}]$ $(\delta_i = 0)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Omega^2 - \dfrac{k+k'}{m} & \dfrac{k'}{m} \\ \dfrac{k'}{m} & \Omega^2 - \dfrac{k+k'}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_{\vec{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathcal{A}_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{A}}$$

- Exemplo 1: Osciladores acoplados



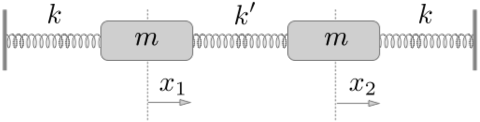
A **solução particular** corresponde à solução de

$$\mathbf{D} \cdot \vec{B} = \vec{\mathcal{A}}.$$

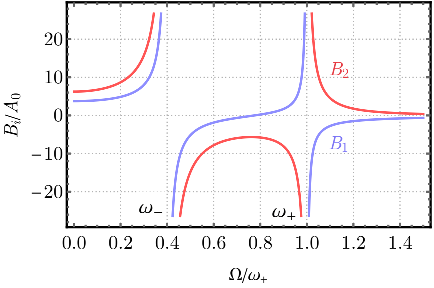
<u>Regra de Cramers:</u> $B_i = \dfrac{\det(\mathbf{D}_i)}{\det(\mathbf{D})}$, onde $\det(\mathbf{D}) = (\Omega^2 - \omega_-^2)(\Omega^2 - \omega_+^2)$ e

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} -\mathcal{A}_0 & \dfrac{k'}{m} \\ 0 & \Omega^2 - \dfrac{k+k'}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \Omega^2 - \dfrac{k+k'}{m} & -\mathcal{A}_0 \\ \dfrac{k'}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

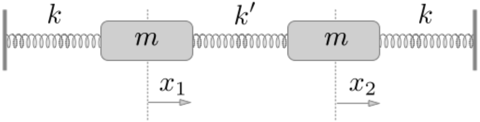
- Exemplo 1: Osciladores acoplados



$$B_1 = \frac{\mathcal{A}_0\left(\frac{k+k'}{m} - \Omega^2\right)}{(\Omega^2 - \omega_-^2)(\Omega^2 - \omega_+^2)}, \quad B_2 = \frac{\mathcal{A}_0\,\frac{k}{m}}{(\Omega^2 - \omega_-^2)(\Omega^2 - \omega_+^2)}$$



- Exemplo 1: Osciladores acoplados

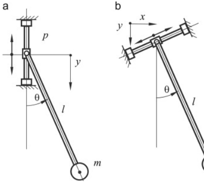


$$B_1 = \frac{\mathcal{A}_0\left(\frac{k+k'}{m} - \Omega^2\right)}{(\Omega^2-\omega_-^2)(\Omega^2-\omega_+^2)}, \quad B_2 = \frac{\mathcal{A}_0\,\frac{k}{m}}{(\Omega^2-\omega_-^2)(\Omega^2-\omega_+^2)}$$

Solução geral do movimento:

$$\vec{x}(t) = \underbrace{\alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{-i\omega_- t} + \beta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-i\omega_+ t}}_{\vec{x}_{\text{hom.}}} + \underbrace{\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}e^{-i\Omega t}}_{\vec{x}_{\text{particular}}}$$

- Exemplo 2: O pêndulo paramétrico



Pêndulo de ponto de suspensão variável, $Y = Y(t)$ (caso a).

$$L(\theta, \dot{\theta}; t) = \frac{1}{2} m \left[\ell^2 \dot{\theta}^2 + \dot{Y}^2 - 2 \dot{Y} \dot{\theta} \ell \sin\theta \right] + mg(\ell \cos\theta + Y).$$

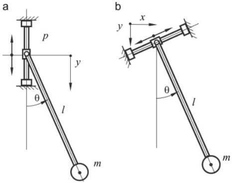
$$\ddot{\theta} - \frac{\ddot{Y}}{\ell} \sin\theta + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0.$$

Para o caso sinusoidal, $Y(t) = Y_0 \cos(\Omega t)$ com $Y_0 \ll \ell$,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \left[1 + \frac{Y_0 \Omega^2}{g} \cos(\Omega t) \right] \sin\theta = 0.$$

TÉCNICO LISBOA

- Exemplo 2: O pêndulo paramétrico



$\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ e $\epsilon = Y_0\Omega^2/g$

Equação de Mathieu

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left[1 + \epsilon\cos(\Omega t)\right]\sin\theta = 0$$

- Exemplo 2: O pêndulo paramétrico

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left[1 + \epsilon \cos(\Omega t)\right] \sin\theta = 0}$$

Questão: Para que valores de Ω e ϵ o ponto $\theta = 0$ é estável? Na vizinhança de $\theta = 0$,

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left[1 + \epsilon \cos(\Omega t)\right] \theta \simeq 0.$$

As soluções a esta equação envolvem a **teoria de Floquet**[7].

Algumas propriedades das soluções:

1. Periodicidade: Se $\theta(t)$ é solução, $\theta(t+T)$ também o é.
2. Linearidade das soluções: $\theta(t) = A\theta_1(t) + B\theta_2(t)$

Combinando estas propriedades, temos

$$\theta_1(t+T) = \alpha\theta_1(t) + \beta\theta_2(t), \quad \theta_2(t+T) = \gamma\theta_1(t) + \delta\theta_2(t)$$

[7] c.f. Bender and Orszag, pág. 560

- Exemplo 2: O pêndulo paramétrico

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left[1 + \epsilon \cos(\Omega t)\right] \theta \simeq 0.$$

Uma vez que $\theta(t) = A\theta_1(t) + B\theta_2(t)$, temos que

$$\theta(t+T) = A'\theta_1(t) + B'\theta_2(t), \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} \overbrace{\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}}^{\vec{a}}.$$

Escolhendo A e B tal que $\mathbf{M} \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a}$, $\vec{a}' = \lambda \vec{a}$, podemos concluir que

$$\boxed{\theta(t+T) = \lambda \theta(t)}$$

$\therefore$ A estabilidade depende do factor de escala λ, a determinar: Se $\lambda > 0$, a solução diz-se **instável** (a solução "cresce" no tempo)

- Exemplo 2: O pêndulo paramétrico

Definindo $\lambda = e^{\mu T}$, vem

$$\theta(t+T) = e^{\mu T}\theta(t).$$

Podemos escrever em termos de uma função periódica $P(t) = P(t+T)$,

$$\theta(t) = e^{\mu t}P(t).^{8}$$

Isto reduz o problema ao estudo do sinal de μ. Nestas condições, testemos soluções do tipo

$$\theta(t) = a(t)\cos\left[\left(\omega_0 - \frac{\nu}{2}\right)t\right] + b(t)\sin\left[\left(\omega_0 - \frac{\nu}{2}\right)t\right].$$

Antes de substituir directamente...

1. Definimos $\Omega = 2\omega_0 + \nu$ (esperando resonância para $\Omega = 2\omega_0$);
2. Desprezamos termos $\mathcal{O}(\nu^2, \epsilon^2)$;
3. Assumimos que $\dot{a} \sim \nu a$ e $\dot{b} \sim \nu b$.

[8] $\theta(t+T) = e^{\mu(t+T)}P(t+T) = e^{\mu T}e^{\mu t}P(t) = e^{\mu T}\theta(t)$.

- Exemplo 2: O pêndulo paramétrico

Usamos relações trigonométricas do tipo[9]

$$\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\nu}{2}\right)t\right]\cos\left[(2\omega_0+\nu)t\right]=\overbrace{\frac{1}{2}\cos\left[3\left(\omega_0+\frac{\nu}{2}\right)t\right]}^{\sim\epsilon^2}+\frac{1}{2}\cos\left[\left(\omega_0+\frac{\nu}{2}\right)t\right],$$

obtemos, após substituição na equação de Mathieu

$$-\left(2\dot{a}+\nu b+\frac{\epsilon\omega_0}{2}b\right)\omega_0\sin(\varphi)+\left(2\dot{b}-\nu a+\frac{\epsilon\omega_0}{2}a\right)\omega_0\cos(\varphi)=0,$$

onde $\varphi=(\omega_0+\nu/2)t$. Para que a identidade seja satisfeita para todo o t,

$$\left(2\dot{a}+\nu b+\frac{\epsilon\omega_0}{2}b\right)=0,\quad\left(2\dot{b}-\nu a+\frac{\epsilon\omega_0}{2}a\right)=0.$$

[9] $\cos A\cos B=\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]/2$

- Exemplo 2: O pêndulo paramétrico

Se $a(t) = a_0 e^{\mu t}$ e $b(t) = b_0 e^{\mu t}$, $\dot{a} = \mu a$ e $\dot{b} = \mu b$, implicando

$$\begin{vmatrix} \mu & \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{\epsilon}{2}\omega_0\right) \\ -\mu & \frac{1}{2}\left(\nu - \frac{\epsilon}{2}\omega_0\right) \end{vmatrix} = 0,$$

que fornece as soluções

$$\mu^2 = \pm\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\epsilon}{2}\omega_0\right)^2 - \nu^2\right].$$

A situação de instabilidade ocorre para $\mu > 0$, $-\epsilon\omega_0/2 < \nu < \epsilon\omega_0/2$.

Ressonância Paramétrica, em ordem $\mathcal{O}(\epsilon^2, \nu^2)$

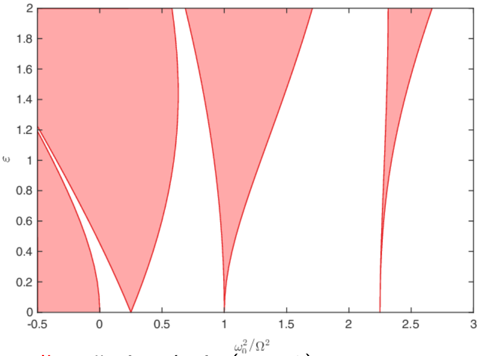
$$\boxed{\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right)\omega_0 < \Omega < \left(2 + \frac{\epsilon}{2}\right)\omega_0}$$

- Exemplo 2: O pêndulo paramétrico

Para o caso genérico, é preciso fazer uma expansão a múltiplas escalas

$$\theta(t) = \theta^{(0)}(t) + \epsilon\theta^{(1)}(t+T) + \epsilon^2\theta^{(2)}(t+2T)...$$

Substituição na eq. de Mathieu conduz ao famoso **determinante de Hill**, que tem de ser truncado a uma determinada ordem.



As regiões a vermelho são instáveis ($\mu > 0$).