Matemática Computacional
MEBiol, MEBiom e MEFT
Aula 7 - Resolução numérica de equações não lineares

Ana Leonor Silvestre

Instituto Superior Técnico, $1^{\underline{o}}$ *Semestre, 2020/2021*

Sumário da Aula 7

Cap.2 - Resolução numérica de equações não lineares

Método do ponto fixo: algoritmo, convergência e estimativas de erro.

Pontos fixos de funções e Métodos de ponto fixo

O método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, \ldots$$

pode escrever-se na forma

$$x_{n+1} = g(x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

com a função g definida por $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Se g for contínua num intervalo que contém todas as iteradas do método de Newton e este for convergente, tem-se

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(z)$$

ou seja, a solução z da equação $f(x) = 0$ satisfaz

$$z = g(z).$$

Pontos fixos de funções e Métodos de ponto fixo

Definição Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real. Se $z \in [a,b]$ é tal que $z = g(z)$, então z diz-se um **ponto fixo** de g.

Exemplo Equação $\sin(x) - \exp(-x) = 0$

$$\sin(x) - \exp(-x) = 0 \iff x = x + \sin(x) - \exp(-x)$$

$$\sin(x) - \exp(-x) = 0 \iff x = x - (\sin(x) - \exp(-x))$$

Assim, um zero z da função $f(x) := \sin(x) - \exp(-x)$ é <u>ponto fixo</u> de cada uma das funções

$$g(x) := x + \sin(x) - \exp(-x)$$

e

$$G(x) = x - \sin(x) + \exp(-x).$$

Pontos fixos de funções e Métodos de ponto fixo

Exemplo Seja $z \in [a, b]$ um zero de $f \in C[a, b]$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda(x)f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\lambda(x)f(x) \Leftrightarrow x = x - \lambda(x)f(x)$

onde $\lambda \in C[a, b]$ é uma função que não se anula em $[a, b]$.
Supondo que f' não se anula em $[a, b]$ e escolhendo $\lambda(x) = 1/f'(x)$, obtém-se a equação equivalente

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

donde se pode escrever o método de ponto fixo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \, n = 0, 1, \ldots$$

ou seja, o **método de Newton**.

Pontos fixos de funções e Métodos de ponto fixo

Exemplo Recordamos

$$\sin(x) - \exp(-x) = 0 \iff x = x + \sin(x) - \exp(-x)$$

$$\sin(x) - \exp(-x) = 0 \iff x = x - (\sin(x) - \exp(-x))$$

que sugerem a utilização dos seguintes métodos de ponto fixo para tentar aproximar as raízes da equação $\sin(x) - \exp(-x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n + \sin(x_n) - \exp(-x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

$$x_{n+1} = x_n - \sin(x_n) + \exp(-x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

Como escolher um método de ponto fixo apropriado para uma certa raiz?

Exemplos

$$\sin(x) - \exp(-x) = 0, \quad z \in [0.5, 0.7]$$

$$x_{n+1} = x_n + \sin(x_n) - \exp(-x_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

Com iterada inicial $x_0 = 0.5$:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5 \\ x_1 &= 0.372895 \\ x_2 &= 0.0484701 \\ x_3 &= -0.855764 \\ x_4 &= -3.96401 \\ &\cdots \\ x_7 &= \text{Overflow} \end{aligned}$$

Como se explica este resultado?

Exemplos

$$\sin(x) - \exp(-x) = 0, \quad z \in [0.5, 0.7]$$

$$x_{n+1} = x_n + \sin(x_n) - \exp(-x_n),\ n = 0, 1, ...$$

Com iterada inicial $x_0 = 0.7$:

$x_0 = 0.7$
$x_1 = 0.847632$
$x_2 = 1.16892$
$x_3 = 1.77855$
$x_4 = 2.58816$
$\dots$
$x_9 = 3.09636$
$x_{10} = 3.09636 \qquad \sin(x_{10}) - \exp(-x_{10}) = 3.75059 \times 10^{-6}$

Como se explica este resultado?

Exemplos

$$\sin(x) - \exp(-x) = 0, \quad z \in [0.5, 0.7]$$

$$x_{n+1} = x_n - \sin(x_n) + \exp(-x_n),\ n = 0, 1, ...$$

Com iterada inicial $x_0 = 0.5$:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5 \\ x_1 &= 0.627105 \\ x_2 &= 0.574438 \\ x_3 &= 0.594096 \\ &\cdots \\ x_{11} &= 0.588536 \\ x_{12} &= 0.588532 \end{aligned}$$

Convergência global de um método de ponto fixo

Definição Uma função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-se Lipschitziana em $[a, b]$ se

$$\exists L \geq 0 : |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [a, b].$$

A L chama-se constante de Lipschitz.
Se $L < 1$ a função g diz-se contrativa em $[a, b]$.

Proposição Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se

- $g \in C^1[a, b]$,
- $\exists\, 0 \leq L < 1 : |g'(x)| \leq L, \forall x \in [a, b]$

então g é contrativa em $[a, b]$.

Convergência global de um método de ponto fixo

Teorema do ponto fixo num intervalo limitado

Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se

- g é contrativa, com constante de contratividade L,
- $g([a, b]) \subseteq [a, b]$,

então

1. g tem no intervalo $[a, b]$ um e um só ponto fixo, que iremos designar por z,
2. o método do ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ converge para z, qualquer que seja $x_0 \in [a, b]$,
3. são válidas as seguintes majorações de erros

$$|z - x_n| \le L^n |z - x_0|,$$

$$|z - x_n| \le \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|, \; n = 1, 2, \ldots$$

$$|z - x_{n+1}| \le \frac{L}{1 - L} |x_{n+1} - x_n|, \; n = 0, 1, \ldots$$

Demonstração

- Existência e unicidade de ponto fixo

Seja $f(x) := g(x) - x$. Tem-se $f \in C([a,b])$ e

$$g(a) \in [a,b] \Longrightarrow f(a) = g(a) - a \geq 0,$$

$$g(b) \in [a,b] \Longrightarrow f(b) = g(b) - b \leq 0.$$

Pelo Teorema de Bolzano,

$$\exists z \in [a,b] : \ f(z) = 0 \iff g(z) = z.$$

Suponhamos que existiam dois pontos fixos de g, $z, \zeta \in [a,b]$. Então

$$|z - \zeta| = |g(z) - g(\zeta)| \leq L|z - \zeta|$$

$$\Longrightarrow (1 - L)|z - \zeta| \leq 0.$$

Como $1 - L > 0$, conclui-se que $|z - \zeta| \leq 0$, e portanto $z = \zeta$.

Demonstração

Consideremos uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b], \\ x_{n+1} = g(x_n),\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

onde x_0 é arbitrário. A hipótese $g([a,b]) \subseteq [a,b]$ permite concluir que $x_n \in [a,b]$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, quando $x_0 \in [a,b]$.

- Majoração dos erros *a priori*

Como g é uma contração em $[a,b]$, tem-se:

$$|x_{n+1} - z| = |g(x_n) - g(z)| \leq L|x_n - z|, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Esta relação permite mostrar, por indução, que

$$|x_n - z| \leq L^n |z - x_0|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

- Convergência

Uma vez que $0 \leq L < 1$, tem-se

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |x_n - z| \leq |z - x_0| \lim_{n\to\infty} L^n = 0,$$

e, portanto, a sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é convergente para z.

- Restantes fórmulas de majoração dos erros

Começamos por ver que

$$\begin{aligned} |z - x_0| &= |z - x_1 + x_1 - x_0| \leq |z - x_1| + |x_1 - x_0| \\ &= |g(z) - g(x_0)| + |x_1 - x_0| \leq L|z - x_0| + |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

ou seja,

$$|z - x_0| \leq L|z - x_0| + |x_1 - x_0|.$$

Daqui resulta

$$|z - x_0| \leq \frac{1}{1 - L}|x_1 - x_0|.$$

Demonstração

- Outra majoração dos erros *a priori*

Combinando

$$|x_n - z| \leq L^n |z - x_0|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

com

$$|z - x_0| \leq \frac{1}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

resulta em

$$|z - x_n| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|, \; n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

- Majoração dos erros *a posteriori*

Tem-se

$$\begin{aligned} |z - x_{n+1}| &= |g(z) - g(x_n)| \\ &\leq L|z - x_n| \\ &= L|z - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq L|z - x_{n+1}| + L|x_{n+1} - x_n| \end{aligned}$$

Agora basta notar que

$$|z - x_{n+1}| \leq L|z - x_{n+1}| + L|x_{n+1} - x_n|$$

$$\iff |z - x_{n+1}| \leq \frac{L}{1-L}|x_{n+1} - x_n|.$$

Aplicação do resultado teórico

$$\sin(x) - \exp(-x) = 0 \iff x = x + \exp(-x) - \sin(x), \quad z \in [0.5, 0.7]$$

Será que o método do ponto fixo

$$x_{n+1} = x_n + \exp(-x_n) - \sin(x_n)$$

com iteradas iniciais $x_0 \in [0.5, 0.7]$ é convergente para z?

$$g(x) := x + \exp(-x) - \sin(x), \qquad I := [0.5, 0.7]$$

$g \in C^2(I), \quad g'(x) = 1 - \exp(-x) - \cos(x), \quad g''(x) = \exp(-x) + \sin(x)$

- $g''(x) > 0$, $\forall x \in I \implies g'$ é crescente em I
- g' é crescente em I e $g'(0.5) = -0.484113$, $g'(0.7) = -0.261427$

$$\implies g'(x) < 0 \, \forall x \in I$$

Aplicação do resultado teórico

- $L := \max_{x\in I} |g'(x)| = |g'(0.5)| = 0.484113 < 1$,
  ou seja, $\underline{g \text{ é contrativa em } I}$
- $g'(x) < 0,\ \forall x \in I \Longrightarrow g$ é decrescente em I
- g é decrescente em I e
  $g(0.5) = 0.627105 \in I$, $g(0.7) = 0.552368 \in I$
  $$\Longrightarrow g(0.7) \leq g(x) \leq g(0.5),\ \forall x \in I$$
  ou seja, $\underline{g(I) \subseteq I}$

Então a equação $f(x) = 0 \iff x = g(x)$ tem uma e uma única solução $z \in I$ e o método do ponto fixo $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para z $\underline{\text{qualquer que seja a iterada inicial } x_0 \in [0.5, 0.7]}$.