5 Mai Oso Ond

Pulsos em ondas

para relação de dispersão lineares $[\omega \propto k]$

$$\omega^2 = v^2 k^2$$

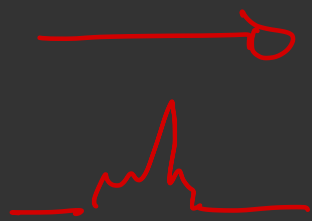
[para uma onda $\quad \omega^2 = T/\rho \, k^2$]

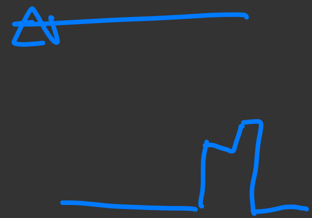
Podemos notar que a relação de dispersão implica a equação das ondas

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x,t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t)$$

a sol. geral da equação das ondas pode ser escrita como

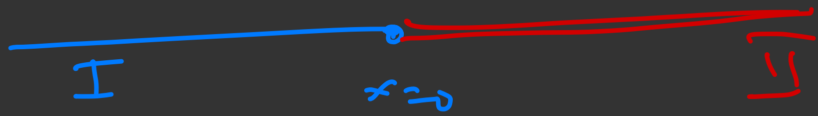
$$\psi(x,t) = g(x-vt) + h(x+vt)$$





ou seja como a soma de 2 pulsos de formas arbitrárias

→ é fácil verificar por substituição que este $\psi(x,t)$ satisfaz a eq. das ondas na aula passada vimos que para 2 cordas semi-infinitas ligadas em $x=0$ por um anel c/ movimento livre na direção $\perp$ à corda, os coefs de reflexão e transmissão



$$R = \frac{Z_I - Z_{II}}{Z_I + Z_{II}} \qquad \tau = \frac{2 Z_I}{Z_I + Z_{II}}$$

a impedância é

$$Z_i = \sqrt{\rho_i T_i} = T_i \sqrt{\frac{\rho_i}{T_i}} = T_i \, k_i/\omega = T_i/v_i$$

vamos assumir a inexistência do pulso incidente pelo direito para simplificar a discussão vamos assumir a mesma tensão nas 2 semi-cordas ($T_I = T_{II}$) e re-escrever R e τ em termos da velocidade

$$R = \frac{v_{II} - v_I}{v_{II} + v_I} \qquad \tau = \frac{2 v_{II}}{v_I + v_{II}}$$

podemos escrever a solução

$$\psi_I(x,t) = \underbrace{g_I(t - x/v_I)}_{\text{incidente}} + \underbrace{h_I(t + x/v_I)}_{\text{refletido}}$$

$$\psi_{II}(x,t) = \underbrace{g_{II}(t - x/v_{II})}_{\text{transmitido}}$$

as condições fronteira em $\underline{\underline{x=0}}$ implicam

$$h_I(t) = R\, g_I(t)$$

$$g_{II}(t) = \tau\, g_I(t)$$

do ponto de vista matemático estas relações são válidas sempre que o argumento das funções seja o mesmo

$$h_I(\xi) = R\, g_I(\xi)$$

$$g_{II}(\xi) = \tau\, g_I(\xi)$$

$\underline{g_I}$ $\xi \to t - x/v_I$

$\underline{h_I}$ $\xi \to t + x/v_I$

$g_I \quad \xi \to t - x/v_I$

$h_I \quad \xi \to t + x/v_I$

para isto fazer sentido x e t não podem ser os mesmos em g_I e h_I

$g_I \quad \xi = t_g - x_g/v_I$ $\qquad$ $h_I \quad \xi = t_h + x_h/v_I$

para um instante fixo $t = t_g = t_h$

$\Rightarrow x_h = -x_g$

deslocamento associado com h_I num instante t (para qq x) está relacionado com o deslocamento associado com g_I nesse mesmo instante para posições simétricas

$t = t_g = t_h \quad x = -x_h = x_g$

$$\Rightarrow \underbrace{h_I\left(t + \frac{-x}{v_I}\right)}_{\text{pulso refletido}} = R\, g_I\left(t - x/v_I\right)$$

(reflexão direita-esquerda com o pulso incidente)

$$|R| \leq 1 \qquad R = \frac{v_{II} - v_I}{v_{II} + v_I}$$

- Se $v_{II} < v_I$ (em geral $Z_I < Z_{II}$)

$R < 0 \longrightarrow$ o pulso ~~re~~ refletido fica de pernas para o ar

• Se $v_{II} < v_{I}$ (em geral $Z_I < Z_{II}$)

$R < 0 \longrightarrow$ o pulso ~~re~~ refletido fica de pernas para o ar

caso especial $Z_{II} \to \infty$

$\Rightarrow v_{II} \to 0$

(extremo fixo para corda I)

pulso refletido tem a mesma amplitude que incidente mas sinal contrário

• se $v_{II} > v_I$ $\quad (Z_{II} < Z_I)$

$R > 0$ pulso reflectido c/ a mesma polaridade que o incidente

caso especial $\quad Z_{II} \to 0$

$\Rightarrow v_{II} \to \infty$

(extremo livre)

Propagação de um pulso (corda semi-infinita)

cond. fronteira

$x=0$ onde gero o pulso

$x=\infty$: ausência de ~~onda~~ pulso

$$\psi(x,t) = f\left(t - x/v\right)$$

<u>exemplo</u>

$$f(\xi) = \begin{cases} 1-|\xi| , & |\xi| \leq 1 \\ 0 , & |\xi| > 1 \end{cases}$$

<u>em Mathematica</u>: sinal propaga-se e <u>mantém a forma</u>

Um meio onde sinais se propagam sem distorsão (mantendo a sua forma) diz-se <u>não dispersivo</u>

Equivalente a ter relação de <u>dispersão linear</u>

$$\omega^2 = v^2 k^2$$

É possível fazer um tratamento mais geral (aplicável a qualquer relação de dispersão).

Decompor $f(t)$ [o pulso] nas suas componentes de Fourier (cada tem uma freq. fixa)

→ resolver (≡ freq. oscilação forçada) para cada freq.
→ onde frequência

→ somar as soluções (com os pesos dados pelos coef. de Fourier) para recuperar a solução

Para um pulso arbitrário a distribuição de frequências é (em geral) contínua:

série de Fourier $\longrightarrow$ integral de Fourier

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \longrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, C(\omega) e^{-i\omega t}$$

$\omega \in (-\infty, \infty)$

isto porque $e^{+i\omega t}$

ω aqui é real porque a gente imaginando lá no a limites que $\xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$

note $f(t)$ é real [deformação da onda]

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; c(\omega)\, e^{-i\omega t}$$

"

$$f^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; c^*(\omega)\, e^{i\omega t}$$

mud variáveis $\omega \to -\omega$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; c^*(-\omega)\, e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{c^*(-\omega) = c(\omega)}$$

com isto é simples encontrar a solução para cada valor de ω (osc. forçado) usando que não existe pulso

$$0 \longleftarrow +\infty$$

cada freq. dá origem a uma onda progressiva (da osc. forçado em $x=0$) $\longrightarrow$

$$e^{-i\omega t} \longrightarrow e^{-i\omega t}\, e^{ikx}$$

a sol. completa é a comb. linear das soluções

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, C(\omega)\, e^{-i\omega t} \longrightarrow \psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, C(\omega)\, e^{-i\omega t + ikx}$$

relacionados

$k(\omega)$ pela rel. dispersão

qq que ele seja

teste de sanidade → recuperar o resultado do princípio da aula p/ relações de dispersão lineares (meios não dispersivos)

$$k^2 = \frac{1}{v^2}\omega^2 \longrightarrow k = \omega/v$$

sinal é determinado pela cond. fronteira no ∞ (ausência de pulso $\leftarrow x$)

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, C(\omega)\, e^{-i\omega t + i\frac{\omega}{v}x}$$

$$\Rightarrow \psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, C(\omega) \, e^{-i\omega(t - x/v)}$$

→ todas as componentes propagam-se c/ a mesma velocidade v

⇒ Sinal mantém a sua forma

pulsos tb são chamados "pacotes de ondas"

soma de ondas harmónicas