Probleme 2 – [illegible]

A parte mais importante da resolução deste problema é a justificação de poder ser tratado com o formalismo desenvolvido nas aulas.

O sistema encontra-se em equilíbrio quando as massas são todas equidistantes. Tomamos então como coordenadas desvios relativos a esse equilíbrio. Ou seja a coordenada da massa j é a diferença das suas distâncias à massa j+1 e j-1. Note-se que assim as coordenadas não estão "presas" a uma referência absoluta no qual

$$X_j = |\xi_{j+1} - \xi_j| - |\xi_j - \xi_{j-1}|$$

$\xi_j$: posição no qual da massa m

O sistema é simétrico para rotações por múltiplos de $\pi/6$ $(30^\circ)$, ou seja pela mudança cíclica de coordenadas

$$\xi_1 \longrightarrow \xi_2 \longrightarrow \xi_3 \longrightarrow \xi_4 \longrightarrow \xi_5 \longrightarrow \xi_6 \longrightarrow \xi_1$$

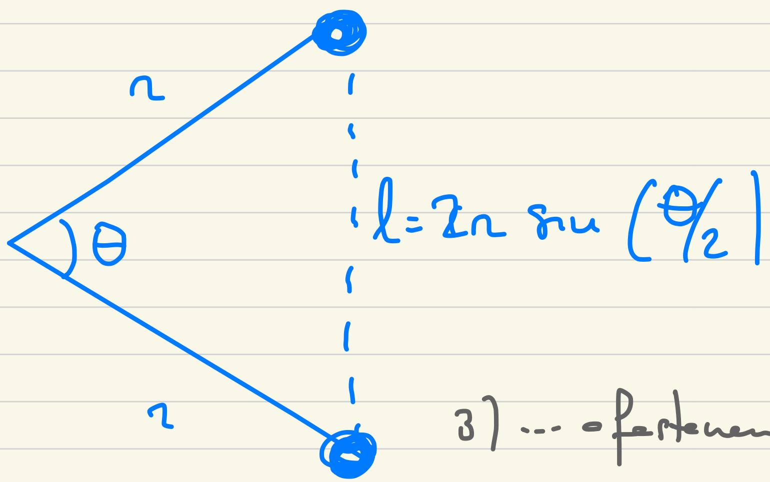
que implica

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow X_4 \longrightarrow X_5 \longrightarrow X_6 \longrightarrow X_1$$

Matricialmente podemos escrever esta simetria com

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como as molas ligam as massas pelo caminho mais curto (recta) enquanto que as massas se deslocam apenas ao longo do anel (arco de circunferência) é necessário verificar a linearidade do sistema [a compressão/elongamento não é a diferença de ~~posição~~ entre as massas; para podermos resolver o sistema temos que justificar que são, para pequenos deslocamentos relativos, proporcionais]. A distância entre 2 massas (extensão da mola entre elas) é $l = 2r \sin\theta/2$ onde




$\theta r$ é a separação é a separação ao longo do arco de raio $r$

1) no eq. $\theta = \pi/3 \Rightarrow l_0 = r$

2) se as massas se aproximarem por uma distância $\delta r$ (ao longo do arco)

$$\Delta l^- = l - l_0 = 2r\sin\left(\pi/6 - \delta/2\right) - r$$

para $\delta \ll \pi/3$

$$\simeq 2r\left(\sin\pi/6 - 1/2\cos\pi/6 \cdot \delta\right) - r$$
$$\simeq -\sqrt{3}/2\, \delta r$$

3) ... afastarem por $\delta r$

$$\Delta l^+ = \ldots$$
$$= \sqrt{3}/2\, \delta r$$

Após esta justificação feita apenas notar, existem apenas acoplamentos com os primeiros vizinhos [massas 'j-2' e 'j+2' não influenciam a massa 'j'] e que os termos diagonais da matriz dos acoplamentos têm o dobro do valor, e sinal contrário, aos acoplamentos aos primeiros vizinhos.

A matriz dos acoplamentos fica:

$$K = \begin{pmatrix} 2B & -B & 0 & 0 & 0 & -B \\ -B & 2B & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 2B & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & 2B & -B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B & 2B & -B \\ -B & 0 & 0 & 0 & -B & 2B \end{pmatrix}$$

A determinação dos modos normais e freq. é idêntica ao feito nas aulas:

1) encontrar, por simetria, vetores próprios de S.
são dados pela eq. (4.51) no livro

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2ik\pi/6} \\ e^{4ik\pi/6} \\ e^{6ik\pi/6} \\ e^{8ik\pi/6} \\ e^{10ik\pi/6} \end{pmatrix} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

2) a relação de dispersão (as freq.) é obtida fazendo $\Pi^{-1} K A^k = \omega_k^2 A^k$
que com a forma de $K$ fica

$$\omega_k^2 = 1/m \left( 2B - B \left( \underbrace{e^{2ik\pi/6} + e^{10ik\pi/6}}_{2\cos k\pi/3} \right) \right)$$

...

$$\omega_k^2 = \frac{2B}{m}\left(1 - \cos k\pi/3\right)$$

como $\omega_1 = \omega_5$ e $\omega_2 = \omega_4$ os modos $A_1$ e $A_5 = A_1^*$

$A_2$ e $A_4 = A_2^*$

devem ser combinados

$A_1 + A_5 \propto Re(A_1)$

$i(A_1 - A_5) \propto Im(A_1)$

...

em modos reais

Notamos também que $\omega_0^2 = 0$, ou seja que

$A^0 = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$ não é um modo oscilatório

correspondendo ao deslocamento de todas as massas ao

Explicitamente

(e/normalización arbitraria)

$$A^{1} \equiv A^{1} + A^{5} \qquad A^{5} \equiv i(A^{1} - A^{5})$$

$$A^{2} \equiv A^{2} + A^{4} \qquad A^{4} \equiv i(A^{2} - A^{4})$$

$$A^{0} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$$

$$A^{1} = (2, 1, -1, -2, -1, 1)^T \qquad A^{5} = (0, 1, 1, 0, -1, -1)^T$$

$$A^{2} = (2, -1, -1, 2, -1, -1)^T \qquad A^{4} = (0, 1, -1, 0, 1, -1)^T$$

$$A^{3} = (1, -1, 1, -1, 1, -1)^T$$

longo do anel, ou seja mov. circular uniforme de todas as massas sem alteração das distâncias entre elas.

A segunda alínea do problema fornece uma condição inicial

$$x(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sem desvios em relação ao equilíbrio

$$\dot{x}(t=0) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ v \\ 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

sentido anti-horário definido como positivo

A forma mais simples de escrever a sol. é perceber que modos normais são excitados por dife cond. iniciais ou equivalentemente, decompor as cond. iniciais em coord normais.

Sol. geral é da forma

$$x(t) = \sum_{k=1}^{5} b_k A^k \cos \omega_k t + c_k A^k \sin \omega_k t + \underbrace{(b_0 + c_0 t) A^0}_{\text{mov. ao longo do ano}}$$

os coef. podem determinar-se de $\left( B^k = A^{k^T} \Pi = m A^{k^T} \right)$

$$b_k = \frac{B^k x(0)}{B^k A^k} \qquad \omega_k c_k = \frac{1}{B^k A^k} B^k \dot{x}(0) \quad k \neq 0$$

$$c_0 = \frac{1}{B^0 A^0} B^0 \dot{x}(0)$$

$\boxed{b_k}$

$$x(0) = 0 \Rightarrow B^k x(0) = 0 \Rightarrow e_k = 0 \quad \forall_k$$

$\boxed{e_k}$

$$e_0 : \quad B^0 \dot{x}(0) = m(1,1,1,1,1,1) \cdot (\sigma,0,\sigma,0,\sigma,0)$$

$$= 3\sigma m$$

$$B^0 A^0 = 6m$$

$$\Rightarrow \quad e_0 = \sigma/2$$

$$e_1 : \quad B^1 \dot{x}(0) = m(2,1,-1,-2,-1,1) \cdot (\quad\text{———}\quad)$$

$$= m(2\sigma - \sigma - \sigma) = 0$$

$$e_2 : \quad B^2 \dot{x}(0) = m(2,-1,-1,2,-1,-1) \cdot (\quad\text{———}\quad)$$

$$= m(2\sigma - \sigma - \sigma) = 0$$

$c_3$: $\quad B^3 \dot{x}(0) = m(1,-1,1,-1,1,-1) \cdot ( \longrightarrow )$

$$= m(\sigma+\sigma+\sigma) = 3\sigma m$$

$$B^3 A^3 = m\,6$$

$$\omega_3 c_3 = \sigma/2 \Rightarrow c_3 = \sigma/2 \; 1/\omega_3$$

$$c_4 = 0$$

$$c_5 = 0$$

Schnelle fries

$$x(t) = \sigma/2 \left[ \frac{1}{\omega_3} A^3 \sin \omega_3 t + A^0 t \right]$$

ou seja $\left( A^3 = (1,-1,1,-1,1,-1) \right)$

a sobreposição de uma oscilação em que cada massa está em oposição de fase com os seus primeiros vizinhos com uma rotação a vel. constante de todo o sistema

Podemos notar o seguinte

$$\dot{x}(t) = v/2 \left[ A^3 \cos \omega_3 t + A^0 \right] \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$t=0$ $\quad \dot{x}(0) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ v \\ 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $t = T/4$ $\quad \dot{x}(T/4) = \begin{pmatrix} v/2 \\ v/2 \\ v/2 \\ v/2 \\ v/2 \\ v/2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $t = T/2$ $\quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \\ v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$

Durante o primeiro quarto de período as massas inicialmente em mov. diminuem a sua velocidade para metade sendo que as massas inicialmente em repouso aumentam a sua velocidade para $v/2$.

Em $t = T/4$ todas as massas se deslocam c/ a mesma velocidade

O processo continua até que em $T/2$ são as massas inicialmente em repouso que têm vel. $v$ máxima enquanto que as outras estão em repouso. A partir daqui, as massas agora em repouso vai acelerar até $v$ (ao fim de um período)

Metade das massas puxam as outras até pararem, sendo então empurradas por aquelas que tinham puxado.