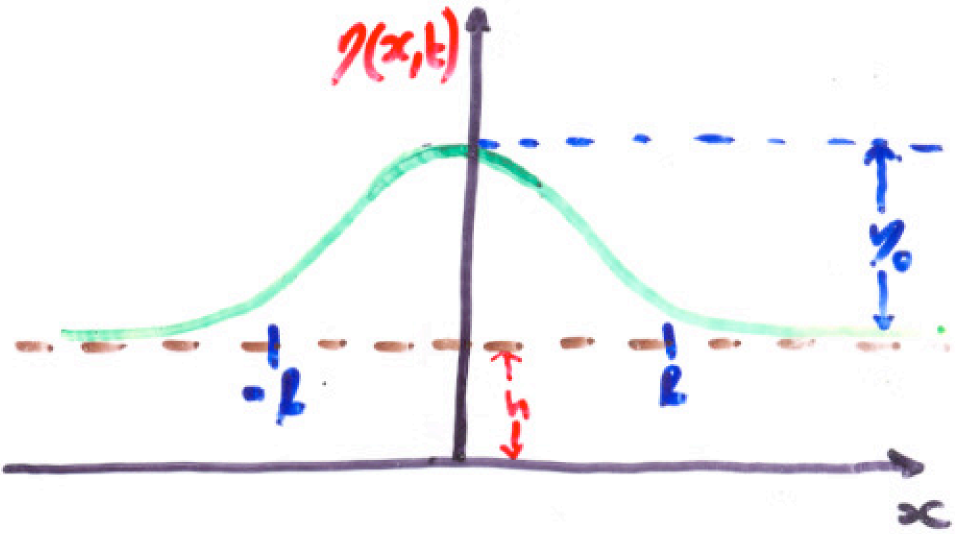
SOLITÕES

Ondas não lineares que durante a propagação mantêm a sua identidade – forma e velocidade

ondas sem dispersão nem dissipação de energia

ondas solitárias que se comportam como partículas

1ª observação experimental:
Scott Russel – 1834



$\eta(x,t)$, l , h

Matematicamente estas ondas são traduzidas por uma equação não linear – Korteveg e de Vries – KdV

A equação KdV é estabelecida sob as seguintes hipóteses:

- o líquido é $\begin{cases} \text{homogéneo} \\ \text{incompressível} \\ \text{sem viscosidade} \\ \text{sem tensões superficiais} \end{cases}$

- forças $\begin{cases} \text{gravidade} \\ \text{pressão atmosférica} \end{cases}$

o movimento do líquido sob estas forças é irrotacional $\text{rot}\, \vec{v} = 0$

– equação de continuidade da densidade da água (ρ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\text{div}(\rho v) = 0}_{\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho \,+\, \rho\, \text{div}\,\vec{v}} \qquad (1)$$

densidade $\rho = \text{cte} \Rightarrow \dfrac{d\rho}{dt} = 0$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \rho_t + \vec{v}\cdot \text{grad}\,\rho = 0 \qquad (2)$$

$(1) + (2) \Rightarrow \rho\, \text{div}\, \underbrace{\vec{v}}_{\text{grad}\,\phi} = 0 \rightarrow \text{Lap}\,\phi = 0$

- altura da superfície da água

$$y_s(x,t) = h + \eta(x,t)$$

$$\underbrace{\frac{dy_s}{dt}}_{v_y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x_s}{\partial t}}_{v_x}$$

c/ $\vec{v} = \text{grad}\, \phi$

$$\Rightarrow \phi_y^s = \eta_t + \eta_x \phi_x^s$$

1ª condição fronteira não linear

- Lei de Newton para a unidade de volume:

$$\vec{F} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= -\rho g \vec{u}_y - \overrightarrow{\text{grad}\, p}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}\, p} - g\vec{u}_y$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \vec{v}_t + \vec{v} \cdot \text{grad}\, \vec{v}$$

$$= \vec{v}_t + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}^2) - \vec{v} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{v})}_{=0}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \text{grad}\left(-\frac{p}{\rho}\right) + \text{grad}\,(-gy)$$

$$= \text{grad}\, \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{grad}\left[\frac{1}{2}(\text{grad}\, \phi)^2\right]$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\text{grad}\, \phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gy = 0$$

aplicando

$$\phi_t + \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{P}{\rho} + gy = 0$$

à superfície onde se considera $P=0$,

e diferenciando em x:

$$\underbrace{\frac{\partial \phi_t^s}{\partial x}}_{v_{xt}^s} + v_x^s \frac{\partial v_x^s}{\partial x} + v_y^s \frac{\partial v_y^s}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

2ª condição fronteira não linear

Considerando ondas lineares, obtem-se condições fronteiras lineares

pondo: $\begin{cases} y^s = h \\ \text{não considerando os termos quadráticos} \\ \text{da 2ª c.f.} \end{cases}$

$$\begin{cases} v_y^s = \eta_t \\ v_{x_t}^s = -g\eta_x \end{cases}$$

sendo $\begin{cases} v_x^s = \dfrac{\partial \phi^s}{\partial x} = f - \frac{1}{2} y^{s\,2} f_{xx} + \cdots \\ v_y^s = \dfrac{\partial \phi^s}{\partial y} = -y^s f_x + \frac{1}{6} y^{s\,3} f_{xxx} + \cdots \end{cases}$ c/ $f = \dfrac{\partial \phi_0(x,t)}{\partial x}$

e como $a/h \ll 1$ e $h/\ell \ll 1$

$$\begin{cases} -h f_x = \eta_t \\ f_t = -g\eta_x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -h f_{xt} = \eta_{tt} \\ f_{tx} = -g\eta_{xx} \end{cases}$$

$$\boxed{\eta_{tt} - gh\,\eta_{xx} = 0}$$ eq. linear

solução: $\eta = A\, e^{i(kx-\omega t)}$ c/ $\omega = c_0 k$, $c_0 = \sqrt{gh}$

considerando:

1. ondas infinitesimais

$$\frac{\eta}{l} << 1$$

de relação de dispersão

$$\omega^2 = kg \tanh(kh)$$

2. ondas largas e de pouca profundidade

$$\left(\frac{h}{l}\right)^2 << 1 \qquad = \varepsilon_2$$

3. Perturbação mais pequena que o nível de água

$$\frac{\eta}{h} << 1 \qquad = \varepsilon_1$$

2+3 → número de Ursell

$$\mathcal{U} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \simeq 1$$

com $\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{A}{2} \\ l = 2B \end{array} \right. \rightarrow \mathcal{U} = \frac{2AB^2}{h^3} \sim 1$

se tem que kh é pequeno

Do desenvolvimento

$$\omega = c_0 \left[k - \frac{h^2}{6} k^3 + \dots \right] \qquad c_0 = \sqrt{gh}$$

só o 1º termo não é desprezável:

$$\omega = c_0 k \rightarrow \text{relação não dispersiva}$$

se kh é um pouco maior → inclusão do termo k^3 → ondas dispersivas

Nas condições 1 + 2 + 3, a equação KdV se escreve:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \underbrace{\frac{3c_0}{2h}\,\eta\,\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\text{termo não linear}} + \underbrace{\frac{c_0 h^2}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}}_{\text{Termo dispersivo}} = 0$$

De um balanço entre estes dois termos tem-se como solução eq. do solitão

$$\eta(x,t) = \eta_0 \, \mathrm{sech}^2\left(\frac{x - ct}{L}\right)$$

c/ velocidade:

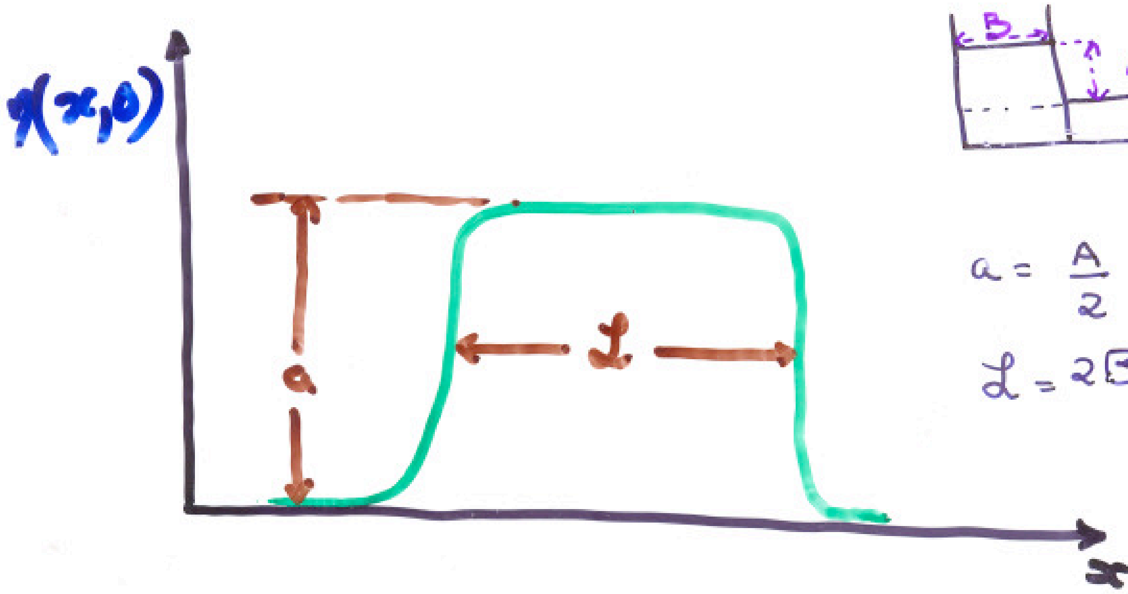
$$c = c_0\left(1 + \frac{\eta_0}{2h}\right)$$

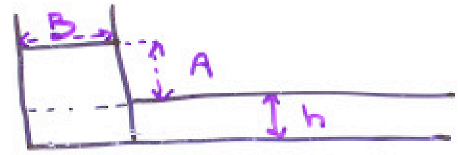
e comprimento característico:

$$L = \sqrt{\frac{4h^3}{3\eta_0}}$$

FORMAÇÃO de solitões numa linha

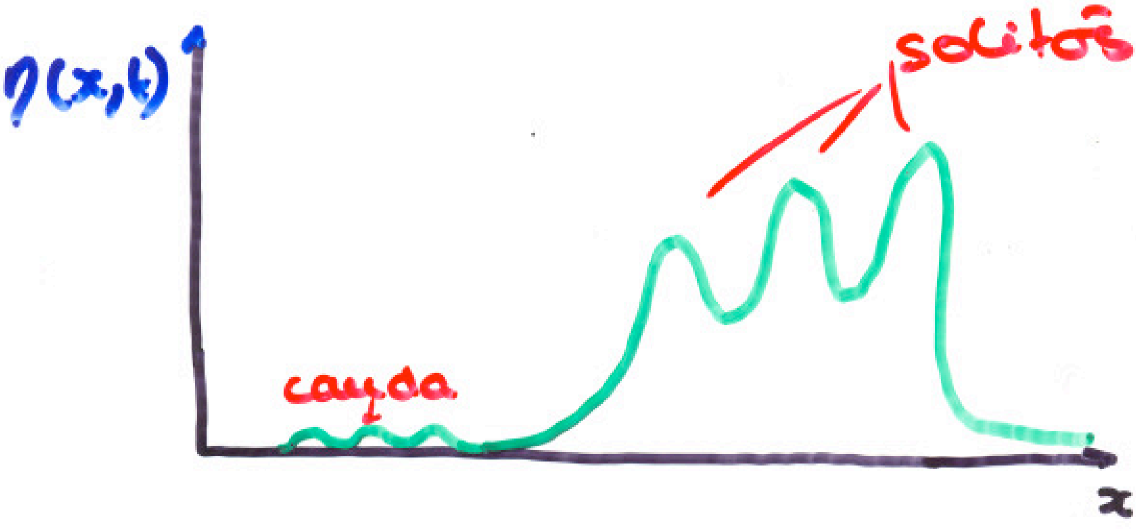
$a, \mathcal{L}, h, \Delta z$





$$a = \frac{A}{2}$$

$$\mathcal{L} = 2B$$



$$N = 1 + \mathrm{Int}\left(\frac{S}{\pi}\right)$$

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2h}}\ \frac{\mathcal{L}}{h}$$

Da eq. K.dV, com a solução

$$\eta(x,t) = \eta_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-ct}{L}\right)$$

$$c = c_0\left(1 + \frac{\eta_0}{2h}\right)$$

$$L = \sqrt{\frac{4h^3}{3\eta_0}}$$

se tem que:

- os solitões de maior amplitude têm maior velocidade

- da colisão de 2 solitões, estes emergem inalteráveis nas suas características

- 2 solitões que se propagam na mesma direcção um de menor amplitude precedido de um de maior amplitude, havendo uma ultrapassagem do 1º pelo 2º