TÉCNICO LISBOA

Data: 12 de Fevereiro de 2021
Duração: 1 h 30' (teste) ; 3 h (exame)
Professor responsável: Vasco Guerra

TERMODINÂMICA FÍSICA

2^o Exame / 1^o Teste / 2^o Teste

1^o exame (cotado para 40): grupos 1 a 7
1^o teste (cotado para 20): grupos 1 a 4
2^o teste (cotado para 20): grupos 5 a 7

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente detalhadamente todos os cálculos que efectuar.

1. [5 val.] Uma bomba de calor é usada para aquecer uma casa no inverno e depois funciona como máquina frigorífica para a arrefecer no verão. A temperatura no interior da casa deve ser de 20 ^{o}C no inverno e 25 ^{o}C no verão. Estima-se que taxa de transferência de calor através das paredes e do tecto seja de 2400 kJ por hora e por grau de diferença entre a temperatura interior e exterior.

   (a) [1.5 val.] Se no inverno a temperatura no exterior for de 0 ^{o}C, qual a potência mínima que a bomba de calor deve ter?

   (b) [1.0 val.] Calcule o C.O.P. da bomba de calor nessas condições.

   (c) [1.5 val.] Para a potência calculada anteriormente, qual a temperatura máxima que pode haver no exterior no verão, para se conseguir manter a casa a 25 ^{o}C?

   (d) [1.0 val.] Calcule a eficiência da máquina frigorífica nessas condições.

2. [5 val.] Os ciclos dos motores de combustão interna não são bem descritos pelos ciclos de Otto e Diesel idealizados. As variações de pressão num ciclo real são melhor aproximadas por um *ciclo dual*, que consiste: *i*) compressão adiabática $1 \to 2$ de V_1 para V_2; *ii*) entrada de calor a volume constante $2 \to 3$; *iii)* entrada de calor a pressão constante $3 \to 4$; *v*) expansão adiabática $4 \to 5$ até ao volume inicial V_1; rejeição de calor a volume constante $5 \to 1$. Considere que todas as transformações são reversíveis e que o sistema se comporta como um gás ideal diatómico. Considere que no início do ciclo a temperatura é $T_1 = 300$ K e a pressão é $P_1 = 0.1$ MPa, a taxa de compressão é $V_1/V_2 = 18$, o aquecimento a volume constante aumenta a pressão de um factor 1.5 ($P_3/P_2 = 1.5$), e o aquecimento a pressão constante aumenta o volume dum factor 1.2 ($V_4/V_3 = 1.2$).

   (a) [1.5 val.] Represente esquematicamente o ciclo nos diagramas P$-$V e T$-$S.

   (b) [2.0 val.] Determine as temperaturas e as pressões em cada um dos pontos 1-5.

   (c) [1.5 val.] Calcule o rendimento do motor e compare com o que se obtém de um motor de Carnot funcionando entre as duas temperaturas extremas.

3. [6 val.] Um corpo de capacidade calorífica C_A à temperatura T_A é posto em contacto com um corpo de capacidade calorífica C_B à temperatura $T_B < T_A$. As capacidades caloríficas são constantes positivas, independentes da temperatura.

   (a) [1.0 val.] Determine a temperatura final de equilíbrio.

   (b) [1.0 val.] Determine a variação de entropia do processo, ΔS.

   (c) [1.5 val.] Indique, justificando, se esta variação pode ser nula ou negativa. Demonstre o resultado, calculando o valor mínimo de ΔS.

   [Sugestão: escreva a expressão que obteve para a entropia em função de $x = T_A/T_B$ e obtenha o valor de x que minimiza ΔS.]

   (d) [1.0 val.] Repita a alínea 3b para o caso em que substitui o corpo B por uma fonte de calor à temperatura T_B.

   (e) [1.5 val.] Obtenha o resultado da alínea 3d a partir do limite apropriado da expressão obtida em 3b.

   [Sugestão: para o termo correspondente a ΔS_B, utilize a variável $z = C_A/C_B$ e expanda o argumento do logaritmo à primeira ordem em z]

4. [4 val.] Sistemas magnéticos simples podem ser descritos por duas variáveis de estado independentes. As variáveis de estado relevantes são o campo magnético H, a magnetização M e a temperatura T. A equação de estado é então uma relação genérica da forma $f(M, H, T) = 0$. A energia interna é uma função de estado, que pode então ser escrita em função de quaisquer duas variáveis de estado independentes.

   Um exemplo particular de um sistema magnético é o paramagneto de Curie, definido por uma equação de estado da forma $M = \frac{aH}{T}$, onde a é uma constante. A capacidade calorífica a magnetização constante é dada por $C_M = bT$, onde b é uma constante e C_M se define da forma usual, $(dQ)_M = C_M dT$. De modo análogo, pode-se definir uma capacidada calorífica a campo magnético constante por $(dQ)_H = C_H dT$.

   (a) [1.0 val.] Represente as isotérmicas da equação de estado num gráfico M-H e as curvas de campo magnético H constantes num gráfico M-T (represente em cada gráfico duas curvas, correspondentes a T ou H constantes, indicando a relação de ordem entre os dois valores de T ou H).

   (b) Use T e M como variáveis independentes, $U = U(T, M)$. Considerando um sistema magnético simples geral (não necessariamente o paramagneto de Curie):

      i. [1.0 val.] escreva a expressão geral para a diferencial dU (em termos das derivadas parciais e diferenciais relevantes);

      ii. [1.0 val.] sabendo que o trabalho magnético realizado pelo sistema é $dW = -HdM$, utilize a primeira lei para mostrar que $C_M = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M$;

      iii. [1.0 val.] mostre que

$$C_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_M + \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H \left[\left(\frac{\partial U}{\partial M}\right)_T - H\right] ;$$

      [Sugestão: considere $M = M(T, H)$ e expanda dM na expressão de dQ]

5. [7 val.] Considere um cilindro muito comprido, definido pelos raios R_1 e $R_2 > R_1$, de um material de condutividade térmica k, imerso num fluido. A temperatura muito longe do cilindro é T_0, a

temperatura na superfície de raio R_1 é $T_1 > T_0$. Na superfície exterior do cilindro as perdas por convecção são caracterizadas por um coeficiente de convecção h. Determine:

(a) [1.5 val.] a resistência térmica associada às perdas por condução no cilindro;

(b) [1.5 val.] a resistência térmica associada às perdas por convecção na superfície exterior do cilindro;

(c) [1.0 val.] o fluxo de calor através do cilindro, por unidade de comprimento;

(d) [1.0 val.] a temperatura T_2 da superfície exterior do cilindro.

(e) [1.0 val.] Um problema de interesse é escolher a espessura do cilindro de modo a minimizar as perdas de calor, para $T_1 - T_0$ fixo. Mostre que quando $R_2 = k/h$ as perdas de calor são *máximas*.

(f) [1.0 val.] Discuta qualitativamente o resultado da alínea anterior, analisando em particular porque é que em certas condições aumentar o isolamento (aumentar R_2) conduz a *maiores* perdas de calor.

6. [6 val.] A equação de estado de Berthelot pretende descrever um gás não-ideal. Para uma mole, esta equação é dada por

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{TV^2} \ ,$$

onde a e b são constantes que dependem do gás.

(a) [1.5 val.] Descreva qualitativamente o significado dos vários termos da equação e das constantes a e b. Discuta as diferenças entre esta equação e a equação de Van der Waals.

(b) [1.5 val.] Represente esquematicamente as isotérmicas do gás de Berthelot e descreva o que representam.

(c) [1.5 val.] O ponto crítico pode obter-se das condições $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = 0$ e $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$. Mostre que $V_C = 3b$, $T_C = \sqrt{\frac{8a}{27bR}}$ e $P_C = \frac{1}{12b}\sqrt{\frac{2aR}{3b}}$.

(d) [1.5 val.] Compare os valores de $\frac{RT_C}{P_C V_C}$ com os que resultam da equação de Van der Waals, para a qual $V_C = 3b$, $T_C = \frac{8a}{27bR}$ e $P_C = \frac{a}{27b^2}$.

7. [7 val.] Um material paramagnético é um material que pode ser magnetizado na presença de um campo magnético exterior, H. Um exemplo é um cristal de átomos com spin não-nulo, que tendem a alinhar-se na presença do campo magnético. Considere um paramagneto ideal formado por N átomos de spin $\frac{1}{2}$, onde os spins não interagem entre si e respondem isoladamente ao campo exterior. Cada átomo pode estar num de dois estados, correspondentes ao spin alinhado (+) ou anti-alinhado (−) com o campo magnético. As energias desses estados são $E_+ = -\mu H$ e $E_- = +\mu H$, onde μ é uma constante positiva. Considere que o sistema pode ser caracterizado por uma temperatura T. No que se segue, apresente os resultados em termos da variável $x = \mu H / k_B T$.

(a) [1.0 val.] Determine a função de partição (para um único átomo).

(b) [1.5 val.] Obtenha as probabilidades de encontrar um átomo em cada um dos dois estados.

(c) [1.5 val.] Obtenha os limites $T \to 0$ ($x \to +\infty$) e $T \to +\infty$ ($x \to 0$). Comente os resultados.

(d) [1.0 val.] Determine a energia média por átomo e mostre que a energia interna do sistema de N spins é dada por

$$U = -N\mu H \tanh\left(\frac{\mu H}{k_B T}\right) = -N\mu H \tanh x \ .$$

(e) [1.0 val.] Calcule a capacidade calorífica $C_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H$.

(f) [1.0 val.] Obtenha a expressão assimptótica de C_H quando $x = \mu H/k_B T \to 0$ (mantenha apenas o primeiro termo diferente de zero).

- Constantes e factores de conversão

$$\begin{aligned}
k_B = 1,3806 \times 10^{-23}\ \text{J/K} = 8,617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K} \quad &; \quad R = 8,314\ \text{J mol}^{-1}\ \text{K}^{-1} \\
h = 6,626 \times 10^{-34}\ \text{J s} = 4,136 \times 10^{-15}\ \text{eV s} \quad &; \quad c = 2,998 \times 10^{8}\ \text{m/s} \\
N_A = 6,022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \quad &; \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8}\ \text{J m}^{-2}\ \text{s}^{-1}\ \text{K}^{-4} \\
\lambda_f^{H_2O} = 80\ \text{cal/g} = 334,7\ \text{kJ/Kg} \quad &; \quad c_{agua} = 1\ \text{cal g}^{-1}\text{K}^{-1} \\
1\ \text{atm} = 101325\ \text{Pa} \quad &; \quad g = 9,8\ \text{m/s}^2 \\
1\ \text{bar} = 10^5\ \text{Pa} \quad &; \quad 1\ \text{eV} = 1,602 \times 10^{-19}\ \text{J} \\
0\ {}^o\text{C} = 273,15\ \text{K} \quad &; \quad G = 6,67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\text{kg}^{-2} \\
\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad &; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\frac{d}{dx}\tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad &
\end{aligned}$$