

Grupo I

10 valores

1. Considere dois acontecimentos arbitrários, A e B , associados à mesma experiência aleatória. Será que a dupla desigualdade $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ é necessariamente verdadeira? (1.5)

Solução: É.

2. Um novo teste de diagnóstico de uma doença infecciosa fornece resultados correctos 99% das vezes quando aplicado a indivíduos infectados e apenas 90% das vezes quando aplicado a indivíduos não infectados. Sabendo que 0.5% dos indivíduos da população estão infectados e que o teste aplicado a um indivíduo, escolhido ao acaso da população, indicou que ele está infectado, calcule a probabilidade desse indivíduo estar efectivamente infectado. (3.0)

Solução: 0.0474

3. O número diário de participações recebidas por uma companhia de seguros relativas a um certo tipo de acidentes (X) segue uma distribuição de Poisson de valor esperado 1.2.

- (a) Sabendo que num dado dia houve pelo menos uma participação desse tipo de acidentes à companhia de seguros, calcule a probabilidade de que nesse dia a companhia tenha recebido quando muito três participações desse tipo de acidentes. (2.0)

Solução: 0.9517

- (b) Determine a mediana de X . (1.0)

Solução: 1

- (c) Calcule a probabilidade de, num conjunto de 10 dias, haver no máximo dois dias sem participações desse tipo de acidentes à companhia, supondo independentes os números de participações em dias distintos. (2.5)

Solução: 0.3796 (0.3828 com $p = 0.3$)**Grupo II**

10 valores

1. A procura semanal de gasolina num determinado posto de gasolina, em dezenas de milhares de litros, é uma variável aleatória X com $E[X^2] = 25/6$ e função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

- (a) Calcule a probabilidade de a procura de gasolina nesse posto numa semana ultrapassar 16 mil litros. (1.0)

Solução: 0.82

- (b) Sendo o posto abastecido no início de cada semana, qual é a quantidade mínima de gasolina com que o posto deve ficar no início da semana de modo a que não falte gasolina nesse posto em pelo menos 92% das semanas? (1.5)

Solução: 2.6

- (c) Determine a probabilidade (aproximada) de a procura anual (52 semanas) de gasolina no posto ser superior a 110 dezenas de milhares de litros. (3.5)

Solução: 0.0208

2. Considere o par aleatório (X, Y) , onde X (resp. Y) denota o número de defeitos do tipo A (resp. B) por peça produzida por uma máquina, cuja função de probabilidade conjunta está representada sumariamente na seguinte tabela:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.90	0.04	0.01
1	0.02	0.02	0.01

- (a) Determine a covariância entre X e Y . Comente o resultado obtido.

(2.0)

Solução: $Cov[X, Y] = 0.035 > 0$ indica que há uma associação linear positiva entre X e Y .

- (b) Determine o valor esperado e o desvio padrão da diferença entre os números de defeitos do tipo B e do tipo A, numa peça escolhida ao acaso da produção da máquina.

(2.0)

Solução: 0.05 e 0.3279