Instituto Superior Técnico • Departamento de Matemática

Matemática Computacional - LEMat, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEQ
Primeiro Teste - Versão A - 11/11/2019, 19:00

Duração: 1 hora e 30 minutos
Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas.

1. Pretende-se calcular $y = 2^{1-x}$ para $x \approx 1$.

   (a) [1.0] Verifique que este problema é bem condicionado.

   (b) [1.5] Considere o algoritmo
   $$y_1 = 1 - x, \qquad y_2 = 2^{y_1}$$
   para o cálculo de y. Será um algoritmo numericamente estável quando $x \approx 1$?

2. Considere a equação $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ e $z > 0$, a sua única raiz real.

   (a) [1.5] Qual ou quais das seguintes iteradas iniciais
   $$x_0 = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_0 = 2, \quad x_0 = 3$$
   garantem que o método de Newton converge para z?

   (b) [1.0] Partindo de $x_0 = 3$, calcule a iterada x_2 do método de Newton e majore o erro $|z - x_2|$.

   (c) [1.5] Sem efetuar mais iterações, determine o número de algarismos significativos da iterada x_5 do método de Newton.

   (d) [1.0] Mostre que o método iterativo
   $$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} + \frac{3}{x_n^2} \tag{1}$$
   pode ser utilizado para obter boas aproximações para z. Qual dos métodos converge mais rapidamente: o método de Newton ou o método (1)?

3. Considere um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ em que
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

   (a) [1.0] Será que existe algum valor de a tal que a matriz $\mathbf{A}$ tenha a diagonal estritamente dominante por linhas ou por colunas?

   (b) [1.5] Determine todos os valores de a tais que o método de Jacobi (aplicado diretamente ao sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) é convergente.

Resolução

1. (a) Seja $F(x) := 2^{1-x}$. O número de condição de F é dado por

$$p_F(x) = \frac{xF'(x)}{F(x)} = \frac{-x\ln(2)2^{1-x}}{2^{1-x}} = -\ln(2)x.$$

Nas condições enunciadas, $|p_F(x)| = \ln(2)x \approx \ln(2)$, pelo que o problema é bem condicionado.

(b) Para o algoritmo

$$y_1 = 1 - x, \qquad y_2 = 2^{y_1}$$

tem-se

$$\delta_{\tilde{y_1}} \approx \frac{-x}{1-x}\delta_{\tilde{x}} + \delta_{arr_1},$$
$$\delta_{\tilde{y_2}} \approx \ln(2)y_1\delta_{\tilde{y_1}} + \delta_{arr_2}.$$

Então

$$\delta_{F_{\mathbb{F}}(\tilde{x})} \approx \ln(2)(1-x)\left(\frac{-x}{1-x}\delta_{\tilde{x}} + \delta_{arr_1}\right) + \delta_{arr_2} = -\ln(2)x\delta_{\tilde{x}} + \ln(2)(1-x)\delta_{arr_1} + \delta_{arr_2}$$

e o algoritmo é numericamente estável para $x \approx 1$.

2. No que se segue, iremos considerar $f(x) := x^3 - 2x^2 + x - 3$.

(a) Começamos por notar que

$$f(0) = -3,\ f(1) = -3,\ f(2) = -1,\ f(3) = 9 > 0$$

pelo que $z \in [2, 3]$. Tem-se

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad f''(x) = 6x - 4,$$

$$f''(x) \geq f''(2) = 8 > 0,\ f'(x) \geq f'(2) = 5 > 0,\ \forall x \in [2, 3],$$

e

$$\left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right| = \frac{1}{5} < 1, \quad \left|\frac{f(3)}{f'(3)}\right| = \frac{9}{16} < 1,$$

donde se conclui que o método de Newton é convergente qualquer que seja $x_0 \in [2, 3]$, em particular, com $x_0 = 2$ e $x_0 = 3$.

Como $f'(1) = 0$, $x_0 = 1$ não pode ser iterada inicial no método de Newton.

Partindo de $x_0 = 0$, obtemos

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = -f(0)/f'(0) = 3$$

e já mostrámos que há convergência a partir de $x_1 = 3$.

Assim, apenas $x_0 = 1$ não é uma iterada inicial válida.

(b) Com $x_0 = 3$, obtemos

$$x_1 = 2.4375, \quad x_2 = 2.213032716.$$

O erro de x_2 pode ser majorado da seguinte forma

$$|z - x_2| \leq \frac{|f(x_2)|}{\min_{x\in[2,3]}|f'(x)|} = \frac{|f(x_2)|}{f'(2)} = 0.0512727.$$

(c) Tendo já calculado um majorante do erro da segunda iterada, usamos a majoração

$$|z - x_5| \le \frac{1}{K}(K|z - x_2|)^{2^3} = K^7|z - x_2|^8 \le K^7 \cdot 0.0512727^8.$$

Para calcular K, recordamos as propriedades de monotonia de f' e f'', que permitem facilmente obter

$$K = \frac{\max_{x\in[2,3]} |f''(x)|}{2\min_{x\in[2,3]} |f'(x)|} = \frac{f''(3)}{2f'(2)} = 1.4.$$

Deste valor e da estimativa para $|z - x_5|$ acima resulta

$$|z - x_5| \le 0.503484 \cdot 10^{-9} = 0.0503484 \cdot 10^{-8} \le 0.5 \cdot 10^{-8}.$$

Como pertence a $]2, 3[$, x_5 escreve-se na forma $x_5 = 0.2... \cdot 10^1$ e de

$$|z - x_5| \le 0.5 \cdot 10^{1-9}$$

conclui-se que x_5 terá (pelo menos) 9 algarismos significativos.
Este resultado pode ser melhorado se considerarmos o cálculo de K no intervalo $[2, x_2]$, onde ficam todas as iteradas calculadas a partir de x_2. Tem-se

$$K = \frac{\max_{x\in[2,x_2]} |f''(x)|}{2\min_{x\in[2,x_2]} |f'(x)|} = \frac{f''(x_2)}{2f'(2)} = 0.92782,$$

donde se obtém

$$|z - x_5| \le K^7 \cdot 0.0512727^8 = 0.282706 \cdot 10^{-10} \le 0.5 \cdot 10^{1-11}.$$

Isto permite assegurar <u>11 algarismos significativos</u> em x_5.

(d) Começamos por verificar que a raiz z é ponto fixo de $g(x) := 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 2x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x = 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\ (x \neq 0).$$

Como

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} = \frac{x-6}{x^3}$$

e sabemos que $z \in [2, 3]$, temos

$$|g'(z)| = \frac{6-z}{z^3} \le \frac{6-2}{2^3} = \frac{1}{2} < 1,$$

e portanto, há convergência local do método (1). Dado que $z \neq 6$, tem-se $|g'(z)| \neq 0$ e o método tem convergência linear. O método de Newton converge mais rapidamente pois tem convergência quadrática (neste caso, tem-se $f'(z) \neq 0$ e $f''(z) \neq 0$).

3. (a) Independentemente do valor de a, para a segunda linha e segunda coluna de $\mathbf{A}$ tem-se

$$|2| = |-1| + |1|,$$

pelo que a matriz não tem a diagonal estritamente dominante por linhas nem por colunas.

(b) Para $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a matriz de iteração do método de Jacobi é

$$\mathbf{C}_J = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

e tem-se

$$\det(\lambda I - \mathbf{C}_J) = \lambda^3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2a}\right)\lambda = \lambda\left[\lambda^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2a}\right)\right]$$

O método de Jacobi é convergente se e só se $\varrho(\mathbf{C}_J) < 1$. De

$$\lambda\left[\lambda^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2a}\right)\right] = 0$$

resulta que os valores próprios de $\mathbf{C}_J$ são tais que

$$\lambda = 0 \text{ ou } |\lambda| = \sqrt{\left|\frac{1}{4} + \frac{1}{2a}\right|}$$

pelo que

$$\varrho(\mathbf{C}_J) < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{4} + \frac{1}{2a}\right| < 1 \Leftrightarrow a < -\frac{2}{5} \text{ ou } a > \frac{2}{3}.$$