Probabilidades e Estatística

LEE, LEGI, LEGM, LEIC-A, LEIC-T, LERC, LMAC, MEBiom, MEC, MEFT

1º Semestre 2012/2013 | **1º Teste A**

2012/11/17 – 09:00 | **Justifique convenientemente todas as respostas!** | Duração: 90 min

Grupo I — 10 valores

1. Um cliente de uma dada empresa combina a compra de uma remessa de 30 parafusos com a condição de devolvê-la se ao testar uma amostra de 3 parafusos, escolhidos ao acaso e sem reposição, não encontrar pelo menos dois em boas condições. É sabido que na encomenda remetida vão efectivamente 25 parafusos em boas condições, sendo os restantes defeituosos.

(a) Calcule a probabilidade de a encomenda ser devolvida e obtenha o desvio padrão do número de parafusos defeituosos existentes na amostra testada. (3.0)

Solução: 0.0640 e 0.6228.

(b) Determine a probabilidade de o 2º parafuso extraído ser defeituoso e verifique se esse valor coincide com o que se obteria caso a seleção da amostra de parafusos fosse feita com reposição. (2.0)

Solução: 1/6 sendo igual ao que se obteria com reposição.

2. Estudos feitos permitiram concluir que o número de doentes transportados diariamente para cada hospital, de um dado agrupamento de unidades de saúde, poderia ser modelado por uma lei de probabilidade de Poisson, independentemente de dia para dia.

(a) Sabendo que são iguais as probabilidades de serem transportados no mesmo dia apenas um doente e dois doentes para um dos hospitais, calcule a probabilidade de haver exactamente 3 doentes a transportar para esse hospital num certo dia em que é sabido ser transportado pelo menos um doente para o mesmo hospital. (2.5)

Solução: 0.2087.

(b) Determine a probabilidade de durante uma semana (7 dias) haver no máximo um dia em que não são transportados doentes para um outro hospital, considerando que são transportados em média 2 doentes por dia para esse hospital. (2.5)

Solução: 0.7573.

Grupo II — 10 valores

1. Seja (X, Y) um par aleatório com função de probabilidade conjunta explicitada incompletamente na tabela

$X \backslash Y$	-1	1	2
-2	0.1	a	0.1
0	b	0.1	0.1
2	0.2	0.1	0.1

e tal que a função de distribuição de X, F_X, verifica $F_X(x) = 0.2$, para $-2 \leq x < 0$.

(a) Obtenha os valores de a e b. (1.0)

Solução: $a = 0$ e $b = 0.2$.

(b) Determine a mediana e o desvio padrão de X quando Y toma o valor 2. (2.0)

Solução: 0 e 1.6330.

(c) Calcule a covariância entre X e Y. O que pode concluir quanto à independência entre X e Y? (2.0)
Nota: caso não tenha respondido à alínea a), considere $b = 0.1$.

Solução: $\text{Cov}[X, Y] = -0.12 \neq 0$ logo X e Y são variáveis aleatórias dependentes.

2. Sabe-se que o diâmetro (exterior) de um eixo produzido por uma empresa é uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio 10 cm e desvio padrão 0.02 cm. Um eixo satisfaz as especificações (da empresa) se o seu diâmetro diferir em valor absoluto do respectivo valor esperado de, no máximo, 0.05 cm. Um eixo que verifique as especificações é vendido pela empresa com um lucro de 5 euros; caso contrário, vem a ser devolvido à empresa, causando-lhe um prejuízo de 1 euro.

(a) Calcule o valor esperado e a variância do lucro que um eixo, escolhido ao acaso, dará à empresa. (2.5)

Solução: 4.9255 e 0.4415.

(b) Determine a probabilidade (aproximada) de a empresa ter um lucro total superior a 500 euros num lote de 100 eixos, selecionados aleatória e independentemente da produção. (2.5)

Nota: se não respondeu à alínea a), considere que os valores aí pedidos são, respectivamente, 4.9 e 0.44.

Solução: Pelo TLC, o resultado aproximado é 0.1311.