DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

# *Análise Complexa e Equações Diferenciais*

## 1º Semestre 2018/2019

### 1º Teste — Versão A

(CURSOS: MEQ, MEAMBI, MEEC, MEMEC, LEAN, MEM, MEC )

3 de Novembro de 2018, 11h – 12h30

1. Considere $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $v(x,y) = e^{-2y}\operatorname{sen}(2x) + \alpha x^3 + \beta y$, onde $\alpha$ e $\beta$ são constantes reais.

[1,0 val] (a) Determine os valores de $\alpha$ e $\beta$ para os quais $v$ é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val] (b) Para $\alpha = \beta = 0$, determine a função inteira $f = u + iv$ que verifica $f(0) = 1$.

[1,0 val] (c) Calcule

$$\oint_{|z|=2018} \frac{(z-\mathrm{i})^2 f(z)}{z^2}\, dz \ ,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

**Solução:**

(a) Dado que $v$ é de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^2$ e que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6\alpha x \,,$$

$v$ será harmónica em $\mathbb{R}^2$ para qualquer valor de $\beta$ e para $\alpha = 0$.

(b) Para $\alpha = \beta = 0$, pela alínea anterior, $v$ é harmónica em $\mathbb{R}^2$ (que é simplesmente conexo) e assim é a parte imaginária de uma função inteira. Denominando por $f = u + \mathrm{i}v$, tem-se que $u$ será determinada por $v$, a menos de uma constante, pelas condições de Cauchy-Riemann. Como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = e^{-2y}\cos(2x) + c(x)\,,$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad c'(x) = 0\,.$$

Tem-se então que

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = e^{-2y}\cos(2x) + c + \mathrm{i}e^{-2y}\operatorname{sen}(2x) \quad , \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Impondo que $f(0) = 1$ (o que implica $u(0,0) = 1$ e $v(0.0) = 0$) resulta que $c = 0\cdot$

(c) Atendendo a que estamos nas condições da fórmula integral de Cauchy (existe um aberto $D \subset \mathbb{C}$. que contém a curva de Jordan $\{z : |z| = 2018\}$ percorrida uma vez em sentido directo, $g(z) = (z-\mathrm{i})^2 f(z)$ é analítica em $D$, $0$ pertence à região interior à curva), tem-se que

$$\oint_{|z|=2018} \frac{(z-\mathrm{i})^2 f(z)}{z^2}\, dz = 2\pi\mathrm{i}\Big[(z-\mathrm{i})^2 f(z)\Big]'\Big|_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}\Big[-2\mathrm{i}f(0) - f'(0)\Big] = 8\pi \ .$$

[1,0 val] 2. Calcule o integral

$$\int_\gamma \log \bar{z}\, dz$$

onde o caminho $\gamma$ é a semi-circunferência $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, percorrida de $z = 1$ para $z = -1$ e, para $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\log w = \log |w| + \mathrm{i} \arg w$, com $0 \leq \arg w < 2\pi$.

**Solução:** Parametrizamos a semi-circunferência por $\alpha(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta}$ com $\theta \in [0, \pi]$. Como a função $\log \bar{z}$ é evidentemente não holomorfa, ela não poderá ter primitiva e portanto o integral só pode ser calculado pela definição.

Assim

$$\int_\gamma \log \bar{z}\, dz = \int_0^\pi \log(\overline{e^{\mathrm{i}\theta}}) \mathrm{i} e^{\mathrm{i}\theta} d\theta.$$

Mas $\overline{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta}$ e como $-\theta \in [-\pi, 0]$, enquanto que o ramo do logaritmo satisfaz $\arg \in [0, 2\pi]$, temos que

$$\log(\overline{e^{\mathrm{i}\theta}}) = \log(e^{-\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{i}(2\pi - \theta),$$

donde

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \log(\overline{e^{\mathrm{i}\theta}}) \mathrm{i} e^{\mathrm{i}\theta} d\theta &= \int_0^\pi \mathrm{i}(2\pi - \theta) \mathrm{i} e^{\mathrm{i}\theta} d\theta = \\ &= \int_0^\pi (\theta - 2\pi) e^{\mathrm{i}\theta} d\theta = \Big[ -\mathrm{i}(\theta - 2\pi) e^{\mathrm{i}\theta} + e^{\mathrm{i}\theta} \Big]_0^\pi = \\ &= \mathrm{i}\pi e^{\mathrm{i}\pi} + e^{\mathrm{i}\pi} - 2\pi\mathrm{i} - 1 = -2 - 3\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

[1,5 val] 3. Determine a série de Maclaurin da função $f(z) = \dfrac{z^3}{5 + z}$ e o respectivo domínio de validade. Aproveite o resultado para calcular $f^{(10)}(0)$.

**Solução:** Como a função $f$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-5\}$, tendo um pólo simples em $z = -5$, podemos imediatamente antecipar que a região de convergência da série de Maclaurin será a bola centrada em $z_0 = 0$ de raio $5$.

Com efeito, expandindo a função $\frac{1}{5+z}$ como uma série geométrica, temos

$$\frac{1}{5+z} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 + (z/5)} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{z}{5} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} z^n,$$

a qual é válida na região $| - \frac{z}{5}| < 1 \Leftrightarrow |z| < 5$, como previsto. Por fim, temos então o desenvolvimento de Maclaurin de $f$,

$$\frac{z^3}{5+z} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} z^{n+3},$$

válido para $|z| < 5$.

A derivada de ordem 10, na origem, pode ser obtida pelo coeficiente da potência de ordem 10 da série de Maclaurin, ou seja, para $n = 7$ na expressão anterior. Assim

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!} = \frac{(-1)^7}{5^{7+1}} \Rightarrow f^{(10)}(0) = \frac{-10!}{5^8}.$$

4. Considere a função $f$ definida no seus domínio por

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{3z^2}{\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2}{z}$$

[1,0 val] (a) Determine e classifique todas as singularidades de $f$.

[1,0 val] (b) Calcule o valor de

$$\oint_\gamma f(z)\,dz$$

onde $\gamma$ é o caminho parametrizado por $z(t) = e^{-\mathrm{i}t}$, com $t \in [0, 2\pi]$.

**Solução:**

(a) Escrevendo

$$f(z) = \underbrace{\frac{\cos z}{z^2\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}}_{f_1(z)} \underbrace{- \frac{3z^2}{\pi^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2}{z}}_{f_2(z)},$$

as singularides (isoladas) de $f$ são $z = 0$ e $z = \frac{\pi}{2}$, sendo $z = 0$ singularidade de $f_1$ e $f_2$ e $z = \frac{\pi}{2}$ singularidade apenas de $f_2$.

Relativamente a $f_1$ temos que $z = \frac{\pi}{2}$ é uma singularidade removível visto que $\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} f_1(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z^2} \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi^2}$. Por outro lado, $z = 0$ é pólo de ordem 2 pois $\lim_{z\to 0} z^2 f_1(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$.

Relativamente a $f_2(z)$, a singularidade $z = 0$ é essencial visto que a série de Laurent de $f_2$ em torno de $z = 0$, que é dada por

$$f_2(z) = -\frac{3z^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3(-1)^{n+1}2^{2n+1}}{\pi^2(2n+1)!}\, z^{1-2n},$$

tem parte principal com uma infinidade de termos.

Em conclusão, $z = \frac{\pi}{2}$ é uma singularidade removível de $f$ e $z = 0$ é uma singularidade essencial de $f$.

(b) O caminho $\gamma$ é um circunferencia de centro na origem e raio $1$, percorrida uma vez no sentido inverso. Como apenas a singularidade $z = 0$ pertence ao interior de $\gamma$ então calculamos somente o resíduo relevante. Utilizando a série de Laurent de $f_2$, temos que $\mathrm{Res}(f_2, 0) = a_{-1} = \frac{3(-1)^2 2^3}{\pi^2 3!} = \frac{4}{\pi^2}$. Como $z = 0$ é um pólo de ordem $2$ de $f_1$, então

$$\mathrm{Res}(f_1, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(z^2 f_1(z)\right) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \frac{\cos z}{z - \frac{\pi}{2}} = \lim_{z\to 0} \frac{(-\,\mathrm{sen}\, z)\left(z - \frac{\pi}{2}\right) - \cos z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

Resulta pois que $\mathrm{Res}(f, 0) = \mathrm{Res}(f_1, 0) + \mathrm{Res}(f_2, 0) = -\frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} = 0$.

Finalmente, pelo teorema dos resíduos:

$$\oint_\gamma f(z)dz = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, 0) = 0.$$

[1,5 val] 5. Utilizando um integral complexo, calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4\theta \, d\theta.$$

**Solução:**

Sendo $\operatorname{sen}\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i = (z - z^{-1})/2i$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^4\theta \, d\theta &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{(2i)^4} \cdot \frac{(z-z^{-1})^4}{iz} \, dz \\
&= \frac{1}{i2^4} \oint_{|z|=1} \frac{z^4}{z^5} \cdot (z - z^{-1})^4 \, dz \\
&= \frac{1}{i2^4} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^4}{z^5} \, dz \\
&= \frac{1}{i2^4} \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5} \left(z^8 - 4z^6 + 6z^4 - 4z^2 + 1\right) \, dz \\
&= \frac{1}{i2^4} \oint_{|z|=1} \left(z^3 - 4z + \frac{6}{z} - \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^5}\right) dz \\
&= \frac{2\pi i \cdot 6}{i2^4} \quad = \quad \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

[1,0 val] 6. Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções holomorfas num ponto $p \in \mathbb{C}$ tais que $z = p$ é um zero de ordem $m$ de $f(z)$ e é um zero de ordem $m+1$ de $g(z)$. Mostre que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, p\right) = (m+1)\frac{f^{(m)}(p)}{g^{(m+1)}(p)}.$$

**Solução:**

Usando as séries de Taylor de $f$ e $g$ em torno do ponto $p$, temos

$$\begin{aligned}
f(z) &= (z-p)^m \left[\frac{f^{(m)}(p)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(p)}{(m+1)!}(z-p) + \cdots\right] \\
g(z) &= (z-p)^{m+1} \left[\frac{g^{(m+1)}(p)}{(m+1)!} + \frac{g^{(m+2)}(p)}{(m+2)!}(z-p) + \cdots\right] \\
\frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{1}{z-p} \cdot \left[\frac{\frac{f^{(m)}(p)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(p)}{(m+1)!}(z-p) + \cdots}{\frac{g^{m+1}(p)}{(m+1)!} + \frac{g^{(m+2)}(p)}{(m+2)!}(z-p) + \cdots}\right].
\end{aligned}$$

Portanto $f/g$ tem um pólo simples em $p$ e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}, p\right) &= \lim_{z \to p} \left[\frac{\frac{f^{(m)}(p)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(p)}{(m+1)!}(z-p) + \cdots}{\frac{g^{m+1}(p)}{(m+1)!} + \frac{g^{(m+2)}(p)}{(m+2)!}(z-p) + \cdots}\right] \\
&= (m+1)\frac{f^{(m)}(p)}{g^{(m+1)}(p)}.
\end{aligned}$$