DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Matemática Computacional

MEBiol, MEBiom, MEFT, MEQ, MEM

2º Teste

Duração: 1 hora + 10 minutos

13/1/2021 – 11:30

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas.

1. Considere a função $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da qual são conhecidos os valores apresentados na tabela

t	0	1	2
$u(t)$	0	1	0

e cuja segunda derivada satisfaz

$$-\frac{5}{2} < u''(t) \le 0, \; \forall t \in [0,2].$$

(a)[1.5] Utilizando interpolação linear com nós apropriados, calcule um valor aproximado para $u(1.75)$.

(b)[1.5] Seja $s(t) := 1 - |t-1|$. Mostre que

$$0 \le u(t) - s(t) < \frac{5}{16}, \; \forall t \in [0,2].$$

(c)[1.5] Determine $a, b \in \mathbb{R}$ que minimizam a soma

$$\mathscr{S} = \sum_{k=0}^{2} \left[a + bk^2 - u(k)\right]^2.$$

(d)[1.5] Suponha que aplica a regra dos trapézios com nós $t_k = k/10$, $k = 0, 1, \ldots, 20$, ao integral

$$\mathscr{I} = \int_0^2 u(t)\,dt.$$

Determine um majorante do erro absoluto da aproximação assim obtida para $\mathscr{I}$.

2.[2.0] Sabe-se que existem $\alpha \in (0,1)$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que, qualquer que seja a função $f \in C^4([-1,1])$, é válida a igualdade

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(-\alpha) + f(\alpha) + \beta f^{(4)}(\xi),$$

onde $\xi \in (-1,1)$ depende apenas de f. Determine os valores de α e β.

(*Sugestão: Recorde o método dos coeficientes indeterminados.*)

3.[2.0] Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \ln(y(x)^2 + 1) + x, \;\; x > 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Para o passo $h = 1$, obtenha um valor aproximado de $y(2)$, usando o método do ponto médio.

RESOLUÇÃO

1.

(a) Os nós de interpolação apropriados são $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, já que $1 < 1.75 < 2$. O polinómio interpolador com base nestes nós é

$$p(t) = u(t_0)\ell_0(t) + u(t_1)\ell_1(t) = \ell_0(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1} = \frac{t-2}{1-2} = 2-t$$

e

$$u(1.75) \approx p(1.75) = 2 - 1.75 = 0.25.$$

(b) Começamos por notar que

$$s(t) = 1 - |t-1| = \begin{cases} 1 + (t-1),\ t < 1 \\ 1 - (t-1),\ t \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} t,\ t < 1 \\ 2-t,\ t \geq 1 \end{cases}$$

e que $s(0) = 0$, $s(1) = 1$ e $s(2) = 1$. Assim, a função s corresponde a interpolação linear de u em $[0,1]$ e a interpolação linear de u em $[1,2]$.

Pela fórmula de erro de interpolação, tem-se

$$u(t) - s(t) = \begin{cases} \dfrac{u''(\xi_1)}{2} t(t-1),\ t \in [0,1], \quad (\xi_1 \in (0,1)) \\ \dfrac{u''(\xi_2)}{2} (t-1)(t-2),\ t \in [1,2], \quad (\xi_1 \in (1,2)). \end{cases}$$

Tem-se

$$-\frac{5}{2} < u''(t) \leq 0,\ \forall t \in [0,2], \quad t(t-1) \leq 0,\ \forall t \in [0,1], \quad (t-1)(t-2) \leq 0,\ \forall t \in [1,2],$$

donde

$$u(t) - s(t) \geq 0,$$

$$u(t) - s(t) \leq \frac{\max_{\tau\in[0,1]} |u''(\tau)|}{2} \max_{\tau\in[0,1]} |\tau(\tau-1)| < \frac{5/2}{2} |1/2(1/2-1)| = 5/16,\ \forall t \in [0,1],$$

$$u(t) - s(t) \leq \frac{\max_{\tau\in[1,2]} |u''(\tau)|}{2} \max_{\tau\in[1,2]} |(\tau-1)(\tau-2)| < \frac{5/2}{2} |(3/2-1)(3/2-2)| = 5/16,\ \forall t \in [1,2].$$

(c) Trata-se de ajustar uma função da forma $g(x) = a + bx^2$ aos pontos tabelados pelo método dos mínimos quadrados. As funções de base são: $\phi_1(x) = 1, \phi_2(x) = x^2$. Calculemos os produtos internos para a construção do sistema normal:

$$\begin{aligned} (\phi_1,\phi_2) &= 1+1+1 = 3, \\ (\phi_1,\phi_2) &= 0+1+4 = 5, \\ (\phi_2,\phi_2) &= 0+1+16 = 17, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (u,\phi_1) &= 0+1+0 = 1, \\ (u,\phi_2) &= 0+1+0 = 1. \end{aligned}$$

Logo, o sistema normal tem a forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e a sua solução é

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{3\times 17 - 5\times 5} \begin{bmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/13 \\ -1/13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.461538 \\ -0.0769231 \end{bmatrix}.$$

Assim, a função de ajustamento é $g(x) = 6/13 - x^2/13$.

(d) Os nós $t_k = k/10$, $k = 0, 1, ..., 20$ são uma partição do intervalo $[0, 2]$ com espaçamento constante $h = 1/10$. Aplicando a fórmula de erro da regra dos trapézios, obtém-se a estimativa

$$|\mathscr{I} - T_{20}(u)| \leq \frac{2 \times (1/10)^2}{12} \max_{t \in [0,2]} |u''(t)| \leq \frac{1}{600} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{240} = 0.00416667.$$

2. Substituindo a função f na igualdade dada por $f(x) := x^2$ e $f(x) := x^4$, obtém-se

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} x^2 dx = (-\alpha)^2 + \alpha^2 \\ \int_{-1}^{1} x^4 dx = (-\alpha)^4 + \alpha^4 + 4!\beta \end{cases} \iff \begin{cases} 2/3 = 2\alpha^2 \\ 2/5 = 2\alpha^4 + 24\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 = 1/3 \\ \beta = 1/60 - 1/12\alpha^4 \end{cases}$$

donde

$$\alpha = 1/\sqrt{3}, \qquad \beta = 1/135.$$

Observação: no caso de $f(x) := 1$, ambos os membros da igualdade ficam iguais a 2; no caso de $f(x) := x$ e $f(x) := x^3$, ambos os membros da igualdade ficam iguais a 0. Portanto, no total, o sistema correspondente ao método dos coeficientes indeterminados tem apenas duas equações.

3. Seja $f(x, y) := \ln(y^2 + 1) + x$. Neste caso, o método do ponto médio escreve-se

$$\begin{cases} x_i = ih, \ i = 0, 1, ... \\ y_0 = 0, \\ f_i = \ln(y_i^2 + 1) + x_i, \\ y_{i+1} = y_i + h\left[\ln((y_i + h/2 f_i)^2 + 1) + x_i + h/2\right], \ i = 0, 1, ... \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(x) = \ln(y(x)^2 + 1) + x, \ \ x > 0, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Para o passo $h = 1$, obtemos, a partir de $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$:

$$f_0 = \ln(1) = 0, \quad y_1 = 0.5.$$

Sendo $x_1 = 1$ e $y_1 = 0.5$, podemos calcular:

$$f_1 = \ln(0.5^2 + 1) + 1 = 1.22314, \quad y_2 = 0.5 + \left[\ln((0.5 + 0.5 \times 1.22314)^2 + 1) + 1 + 0.5\right] = 2.8045.$$

Assim,

$$y(2) = y(x_2) \approx y_2 = 2.8045.$$