PONTOS FIXOS E TEOREMA DE CONTRACÇÃO
a propósito de soluções de equações

(leitura facultativa)

Luis T. Magalhães

IST

27.MAR.2017

Soluções de equações e pontos fixos de funções associadas

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y} \quad \iff \quad \mathbf{Q_y}(\mathbf{x})=\mathbf{x} \quad \text{, com } \mathbf{Q_y}(\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{y}$$

($\mathbf{x}$ é solução da equação $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}$ se e só se é ponto fixo da função $\mathbf{Q_y}$)

Uma função que contrai distâncias num conjunto fechado tem um único ponto fixo no conjunto, que é o limite de sucessões obtidas por aplicação sucessiva da função a partir de um ponto qualquer, o que também dá um método para cálculo computacional da função inversa. A ideia aplica-se em condições mais gerais (*e.g.* em dimensão infinita para equações diferenciais ou integrais) para obter existência e unicidade de soluções de equações e calculá-las aproximadamente.

Como o limite é desconhecido, precisamos de poder decidir que uma sucessão converge comparando termos da sucessão em vez de os comparar com o limite.

Sucessões de Cauchy

Chama-se **sucessão de Cauchy** em $\mathbb{R}^n$ a $\{\mathbf{u}_k\}\subset\mathbb{R}^n$ tal que
$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}} : k,m>N \Rightarrow \|\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_m\|<\varepsilon$. (análogo em espaços métricos)

$\{\mathbf{u}_j\}\subset\mathbb{R}^n$ **converge** $\Leftrightarrow$ $\{\mathbf{u}_j\}$ **é sucessão de Cauchy**.

Dem. ($\Rightarrow$) Se $\mathbf{u}_j\to\mathbf{b}$, é $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}} : k,m>N \Rightarrow \|\mathbf{u}_k-\mathbf{b}\|, \|\mathbf{u}_m-\mathbf{b}\|<\varepsilon$.
Da desigualdade triangular, $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}} : k,m>N \Rightarrow \|\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_m\|<2\varepsilon$;
logo, $\{\mathbf{u}_j\}$ é sucessão de Cauchy.

($\Leftarrow$) (em $\mathbb{R}$) Se $\{u_j\}$ é sucessão de Cauchy, $\exists_{N\in\mathbb{N}} : k,m>N \Rightarrow \|\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_m\|<1$. Da desigualdade triangular, $k,m>N \Rightarrow |u_m|\leq|u_m-u_k|+|u_k|<1+|u_k|$.
Logo, $|u_j|\leq\max\{|u_1|,\ldots,|u_{N+1}|,1+|u_{N+1}|\}\ \forall j\in\mathbb{N}$. Portanto, a sucessão $\{u_j\}\subset\mathbb{R}$ é limitada. Do axioma do supremo para n^os reais, existem $s_j=\inf\{u_k : k\geq j\}$, $S_j=\sup\{u_k : k\geq j\}$. As sucessões $\{s_j\}$, $\{S_j\}$ são limitadas e são, resp., crescente e decrescente. Logo, têm, resp., supremo s^* e ínfimo S^*, que são os resp. limites; logo, tendo em conta que $\{u_j\}$ é sucessão de Cauchy, obtém-se $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}} : j>N \Rightarrow |s_j-s^*|, |S_j-S^*|, |S_j-s_j|<\varepsilon$, e da desiguldade triangular, $S^*-s^*<3\varepsilon$. Como $\varepsilon>0$ é arbitrário, $u_j\to S^*=s^*$.

(em $\mathbb{R}^n$, $n>1$) Aplica-se o precedente a cada componente e usa-se a equivalência das normas $\|\ \|$ e $\|\ \|_\infty$. *Q.E.D.*

Espaços completos

O resultado precedente falha em $\mathbb{Q}$.

Diz-se que um espaço linear normado V é um **espaço completo** se todas as sucessões de Cauchy em V convergem (análogo em espaços métricos).

Portanto, $\mathbb{R}$ com a norma de valor absoluto é um espaço normado completo e $\mathbb{Q}$ não é; $\mathbb{R}^n$ com a norma canónica é um espaço espaço normado completo e $\mathbb{Q}^n$ não é.

Assim como se pode completar $\mathbb{Q}$ com o menor espaço completo que o contém (que é $\mathbb{R}$, e este até é um método básico de construção dos nºs reais a partir de racionais), pode-se provar que todo espaço normado (ou métrico) pode ser completado.

Teorema de Contracção

Chama-se **contracção** em $S \subset \mathbb{R}^n$ a uma função $\mathbf{Q} : S \to S$ tal que $\exists_{\lambda \in [0,1[} : \|\mathbf{Q}(\mathbf{y}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})\| \leq \lambda \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$.

Teorema de Contracção: Toda contracção Q num conjunto fechado $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}^n$ tem um único ponto fixo em F.

Dem. Verifica-se $\|\mathbf{Q}^k(\mathbf{y}) - \mathbf{Q}^k(\mathbf{x})\| \leq \lambda^k \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, com $\lambda \in [0, 1[$.
Com $\mathbf{x}_0 \in F$ arbitrário considera-se a sucessão com termos $\mathbf{x}_k = \mathbf{Q}^k(\mathbf{x}_0)$. É

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+m}\| &= \|\mathbf{Q}^k(\mathbf{x}_0) - \mathbf{Q}^{k+m}(\mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{Q}^k(\mathbf{x}_0) - \mathbf{Q}^k(\mathbf{Q}^m(\mathbf{x}_0))\| \\
&\leq \lambda^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{Q}^m(\mathbf{x}_0)\| = \lambda^k \left\| \sum_{j=1}^m \left[\mathbf{Q}^j(\mathbf{x}_0) - \mathbf{Q}^{j-1}(\mathbf{x}_0)\right] \right\| \\
&\leq \lambda^k \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j \left\|\mathbf{Q}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\right\| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \left\|\mathbf{Q}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\right\| .
\end{aligned}$$

Como $\lambda^k \to 0$ quando $k \to +\infty$, $\{\mathbf{x}_k\}$ é uma sucessão de Cauchy; logo, convergente, $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$, e, como F é fechado, é $\mathbf{x}^* \in F$.

Como $\mathbf{Q}$ é contínua, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_k) \to \mathbf{Q}(\mathbf{x}^*)$, mas $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{Q}^{k+1}(\mathbf{x}_0) \to \mathbf{x}^*$, pelo que $\mathbf{Q}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. Logo, $\exists$ ponto fixo em F.
Se $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_1^*) = \mathbf{x}_1^*$ e $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_2^*) = \mathbf{x}_2^*$, é $\|\mathbf{x}_1^* - \mathbf{x}_2^*\| = \|\mathbf{Q}(\mathbf{x}_1^*) - \mathbf{Q}(\mathbf{x}_2^*)\| \leq \lambda \|\mathbf{x}_1^* - \mathbf{x}_2^*\|$.
Como $\lambda \in [0, 1[$, é $\|\mathbf{x}_1^* - \mathbf{x}_2^*\| = 0$ e, portanto, $\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_2^*$. *Q.E.D.*

(A convergência é exponencial! Tanto mais rápida quanto λ for menor. É válido o resultado análogo em espaços métricos completos. Aplica-se em espaços de funções para equações diferenciais, integrais ou outras).

Teorema de contracção

Aplicação a resolução computacional de equações escalares: Método de Newton-Raphson

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **é** C^2**,** $f'(x)\neq 0\,,|f(x)\,f''(x)|<(f'(x))^2$ **para** $x\in[a,b]$**, então** $f(x)=0$ **tem solução única em** $[a,b]$**, que é o limite da sucessão definida por** $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ **, com** $x_0\in[a,b]$ **qualquer.**

Dem. Define-se $Q(x)=x-[f'(x)]^{-1}f(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Verifica-se

$$|Q'(x)|=\left|1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right|=\left|1-1+\frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2}\right|<1\,.$$

Do T. de Lagrange, $|Q(y)-Q(x)|=|Q'(c)||y-x|$, para algum c entre x e y. Como Q' é contínua em $[a,b]$ pois Q é C^2, do T. de Weierstrass tem máximo em $[a,b]$, que, portanto, é um $\lambda<1$; logo, Q é uma contracção em $[a,b]$. O T. da Contracção garante que $\exists$ um único ponto fixo de Q em $[a,b]$.

Como as soluções da equação $f(x)=0$ são os pontos fixos de Q, obtém-se que $\exists$ uma única solução da equação, que é o limite da sucessão $\{Q^k(x_0)\}$ qualquer que seja $x_0\in[a,b]$. *Q.E.D.*

Teorema de contracção
Aplicação a resolução computacional de equações escalares: Método de Newton-Raphson – Exemplo

Se $f(x)=\cos x-x$, é $f'(x)=-(\sin x+1)$ e $f''(x)=-\cos x$, pelo que $(f')^2(x)=(\sin x+1)^2>1$ para $x\in[0,1]$ e $|f(x)\,f''(x)|=|(\cos x-x)\cos x|\leq|\cos x-x|<1$ para $x\in[\delta,1]$, $0<\delta<1$.
Logo, f satisfaz a hipótese do resultado acima em $[\delta,1]$.
Existe uma única solução de $\cos x-x=0$ em $[\delta,1]$ com $\delta<\frac{\pi}{6}$ e é o limite da sucessão definida por $x_{k+1}=x_k+\frac{\cos x_k-x_k}{\sin x_k+1}$, com $x_0\in[0,1]$ arbitrário.

Com $x_0=\frac{\pi}{4}\approx 0,785398$, $\quad f(x_0)\approx -0,07829=7,8x10^{-2}$

$x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}\approx 0,739536$, $\quad f(x_1)\approx 7,5x10^{-4}$

$x_2\approx 0,73908518$, $\quad f(x_2)\approx -7,5x10^{-8}$

$x_3\approx 0,73908513321516$, $\quad f(x_3)\approx -6,7x10^{-16}$

(apenas em 3 iterações obtém-se uma solução aproximada da equação em que o valor de f é $<10^{-15}$ e com 4 iterações este resíduo é $<10^{-31}$)

Teorema da Função Inversa: Se $\mathbf{f}: S \to \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$, f é diferenciável em S, $D\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{a} \in S$ e $J\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$, então existe $X \subset S$ aberto com $\mathbf{a} \in X$ tal que:
(1) **a restrição $\mathbf{f}_{|X}$ tem inversa $\mathbf{f}^{-1}$;**
(2) **$Y = \mathbf{f}(X)$ é aberto;**
(3) **$\mathbf{f}^{-1}$ é diferenciável em Y, $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1}$ c/ $\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in Y$;**
(4) **f é C^m $(m \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mathbf{f}^{-1}$ é C^m.**

Prova alternativa[1] de (2) com o T. de Contracção, supondo sem perda de generalidade $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0$, $D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = I_n$, e provado, com $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e o T. de Lagrange que $\exists_{R>0} : \overline{B_R(0)} \subset S$ tal que $\mathbf{f}$ é injectiva em $\overline{B_R(0)}$, $\|\mathbf{G}(\mathbf{y}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})\| \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{B_R(0)}$, $J\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$ para $\mathbf{x} \in \overline{B_R(0)}$:

[1] Vide slides "Teoremas de Função Inversa e Função Implícita – a propósito de soluções de equações", Luis T. Magalhães, IST, 26.MAR.2017.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{Q}_\mathbf{y}(\mathbf{x})=\mathbf{x}\,,\ \text{com } \mathbf{Q}_\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}-\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x})+\mathbf{y}\,.$$

Verifica-se para $\mathbf{y}\in B_{\frac{R}{2}}(0)$ e $\mathbf{x},\mathbf{z}\in\overline{B_R(0)}$ que

$$\|\mathbf{Q}_\mathbf{y}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{G}(\mathbf{x})+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{G}(\mathbf{x})-\mathbf{G}(0)\|+\|\mathbf{y}\| \le \tfrac{1}{2}\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\| < \tfrac{R}{2}+\tfrac{R}{2} = R$$

$$\|\mathbf{Q}_\mathbf{y}(\mathbf{z})-\mathbf{Q}_\mathbf{y}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{G}(\mathbf{z})-\mathbf{G}(\mathbf{x})\| \le \tfrac{1}{2}\|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|\,.$$

Logo, $\forall_{\mathbf{y}\in B_{\frac{R}{2}}(0)}$: $\mathbf{Q}_\mathbf{y}$ é contracção em $\overline{B_R(0)}$; do T. de Contracção, $\exists$ ponto fixo único $\mathbf{x}^*(\mathbf{y})$ de $\mathbf{Q}_\mathbf{y}$ em $\overline{B_R(0)}$; é $\|\mathbf{x}^*(\mathbf{y})\|=\|\mathbf{Q}_\mathbf{y}(\mathbf{x}^*(\mathbf{y}))\|<R$; logo, $\mathbf{x}^*(\mathbf{y})\in B_R(0)$. Com $X=\mathbf{f}^{-1}[B_{\frac{R}{2}}(0)]\cap B_R(0)$, é $\mathbf{f}(X)=Y=B_{\frac{R}{2}}(0)$ e $0\in X$. Como $\mathbf{f}$ é contínua, $\mathbf{f}^{-1}\left[B_{\frac{R}{2}}(0)\right]$ é aberto; portanto, X é a intersecção de 2 conjuntos abertos, e $X, Y=B_{\frac{R}{2}}(0)$ são abertos. *Q.E.D.*

Como a prova se baseia no T. de Contracção, fundamenta um método de computação aproximada da inversa local. Além disso, com poucos argumentos adicionais, permite obter um T. da Função Inversa e um associado T. da Função Implícita em espaços lineares de dimensão infinita normados completos, para funções $\mathbf{f}$ C^k ($k\ge 1$) com derivada $D\mathbf{f}$ com inversa limitada, que têm aplicações, *e.g.*, a eq. diferenciais ou outras eq. funcionais, e a bifurcações.