DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Complementos de Cálculo Diferencial e Integral

10ª Ficha de trabalho - 2º Semestre 2014/2015

1. Seja $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^n$ um caminho diferenciável. Mostre que se $a \in I$ é um ponto de acumulação do conjunto $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{v})$ para algum $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, então $\mathbf{g}'(a) = 0$.

2. Seja $\mathbf{g} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ um caminho fechado de classe C^1. Mostre que existe $t_0 \in]\alpha, \beta[$ tal que
$$\langle \mathbf{g}(t_0), \mathbf{g}'(t_0) \rangle = 0.$$

3. Seja $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^n$ um caminho regular. Mostre que se existem uma recta $L \in \mathbb{R}^n$ e uma sequência de números distintos $t_k \to a$ tais que $\mathbf{g}(t_k) \in L$, então L é a recta tangente a $\mathbf{g}$ no ponto $\mathbf{g}(a)$.

4. Seja $\mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^n$ um caminho regular. Mostre que uma recta $L \in \mathbb{R}^n$ contendo o ponto $\mathbf{g}(a)$ é a recta tangente a $\mathbf{g}$ nesse ponto se e só se
$$\lim_{t \to a} \frac{d(\mathbf{g}(t), L)}{\|\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(a)\|} = 0.$$

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com as seguintes propriedades:
$0 \leqslant f(t) \leqslant 1$, $f(t) = f(t+2)$ para qualquer t e
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3} \\ 1 & \text{se } \ \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}.$$
Defina-se $\mathbf{g}(t) = (x(t), y(t))$ onde
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f\left(3^{2n-1} t\right) \quad \text{e} \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f\left(3^{2n} t\right).$$
Prove que $\mathbf{g}$ é contínua e $\mathbf{g}([0,1]) = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$.
Ou seja, a curva parametrizada pelo caminho $\mathbf{g}$ é o quadrado $[0,1]^2$.

Sugestão: Cada $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ tem a forma
$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1} \quad \text{e} \quad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n}$$
onde $a_n \in \{0, 1\}$. Se
$$t_0 = \sum_{s=1}^{\infty} 3^{-s-1} (2 a_s),$$
mostre que $f\left(3^k t_0\right) = a_k$ e portanto $\mathbf{g}(t_0) = (x_0, y_0)$.