TÉCNICO LISBOA

Óptica Geométrica

Construções Geométricas em Lentes Delgadas (aproximação paraxial)

1 Objectivos

A óptica geométrica, ou óptica de raios, é uma abordagem que consiste em descrever a propagação da luz através de raios. Um raio é um modelo simplificado, na forma de uma linha, que descreve o caminho percorrido pela luz entre duas superfícies. Para descrever a propagação de um feixe de luz através de um sistema, utilizamos um conjunto de raios, que se propagam utilizando o método do *traçado de raios*. A óptica geométrica é particularmente útil na descrição de sistemas e instrumentos ópticos, e é válida desde que os objectos envolvidos sejam muito maiores que o comprimento de onda da luz ($\sim 0,4$ a $0,7\,\mu$m).

Neste trabalho pretende-se estudar vários aspectos da luz do ponto de vista da óptica geométrica, tais como a reflexão e refracção em superfícies ópticas, a polarização, lentes delgadas e associações de lentes. Iremos estudar a formação de imagens reais e virtuais, e verificar como estas dependem das distâncias envolvidas no sistema óptico. Este estudo servirá de base à compreensão do funcionamento dos instrumentos ópticos como o microscópio e o telescópio.

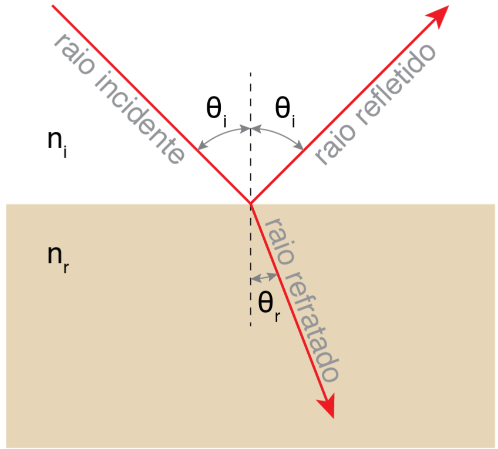
2 Traçado de raios

Em óptica geométrica, a luz é representada por raios. Esta simplificação é suficiente para explicar fenómenos como a reflexão e a refracção da luz quando esta muda de meio óptico. O comportamento dos raios obedece a algumas regras simples:

1. Num meio uniforme, como o ar ou um vidro, um raio é uma linha recta
2. Um meio óptico é caracterizado por uma quantidade $n \geq 1$, chamada índice de refracção
3. Na fronteira entre dois meios, um raio pode ser reflectido e/ou refractado, verificando-se o seguinte
   - o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência, relativamente à normal à superfície
   - o ângulo de refracção θ_r e o ângulo de incidência θ_i têm a seguinte relação:

$$n_i \sin\theta_i = n_r \sin\theta_r \tag{1}$$

designada Lei de Snell-Descartes, em que n_i e n_r são respectivamente os índices de refracção do meio de incidência e do meio de refracção (ver Figura).



2.1 Reflexão, refracção e polarização

A eficiência com que um feixe luminoso é reflectido ou emitido numa fronteira entre dois meios de índices de refracção n_1 e n_2 depende, entre outros, do ângulo de incidência e da polarização da luz. A figura em baixo mostra como varia a reflectividade de uma superfície de vidro em função do ângulo de incidência, para polarizações horizontal e vertical (admitindo que o plano de incidência e reflexão é horizontal). Para um ângulo específico, designado ângulo de Brewster e dado por $\theta_B = \arctan(n_2/n_1)$, a componente horizontal da polarização não é reflectida, pelo que a luz reflectida fica com polarização vertical. Esta é uma forma de criar luz polarizada a partir de uma fonte não polarizada.

A figura ilustra também a geometria dos raios luminosos numa separação entre dois meios, no caso de incidência em ângulo de Brewster. Como se pode apreciar, nessa configuração o raio reflectido e o raio refractado fazem entre si um ângulo de 90°.

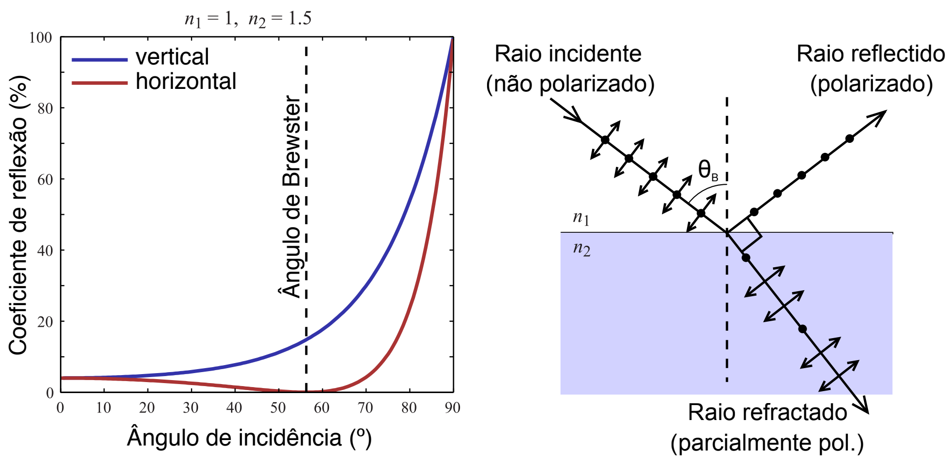


Figura 1: Reflectividade vs. ângulo de incidência e direcção de polarização (esq.) e geometria para ângulo de Brewster (dir.).

A figura seguinte ilustra como se pode polarizar a luz emitida por uma fonte não polarizada através de um simples filtro polarizador (ou *polaroide*). Orientando o ângulo do filtro relativamente à direcção dos raios luminosos, é possível definir a direcção de polarização.

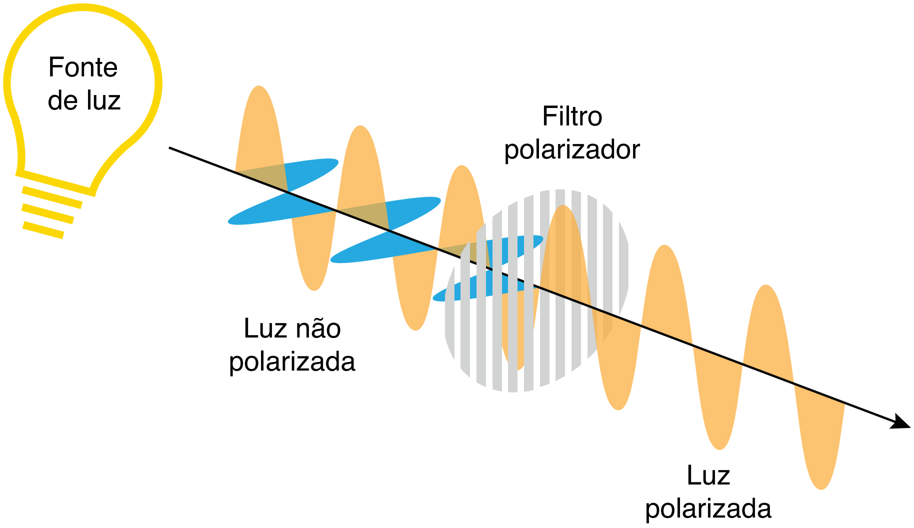


Figura 2: Obtenção de luz polarizada (verticalmente, no caso da imagem) através de um filtro polarizador.

3 Construções geométricas em lentes delgadas (aproximação paraxial)

Uma das principais aplicações da óptica geométrica consiste no estudo da formação de imagens: dado um objecto numa dada posição, como desenhar um sistema óptico que permita transferir uma imagem desse objecto para uma posição diferente? É um problema que tem aplicações desde o olho humano até ao desenho de lentes e fibras ópticas.

Um *objecto* iluminado uniformemente é considerado como uma fonte de raios, emitidos em todas as direcções. Podemos escolher um conjunto adequado de raios e traçar o seu percurso através do sistema, até encontrar o correspondente ponto na *imagem*. Por convenção, desenha-se o sistema óptico em torno de um eixo, que coincide com o seu eixo geométrico, e os raios propagam-se da esquerda para a direita.

3.1 Aproximações

Utilizaremos as duas seguintes aproximações comuns, que facilitam grandemente os cálculos a efectuar:

Lentes delgadas – uma lente é considerada *delgada* quando a sua espessura d é desprezável face à sua distância focal f.

Aproximação paraxial – admitimos que todos os raios envolvidos são *paraxiais*, isto é, (i) situam-se próximo do eixo óptico e (ii) o ângulo α que fazem com esse eixo permite utilizar as aproximações $\sin\alpha \approx \alpha$ e $\tan\alpha \approx \alpha$, tipicamente válidas para $\alpha \lesssim 5°$.

3.2 Convenções

A Figura 4 ilustra os principais parâmetros envolvidos no traçado de raios através de uma lente simples.

- O objecto AB fica (por definição) do lado esquerdo da lente, a uma distância $d_O > 0$ desta; caso o objecto esteja do lado direito, temos $d_O < 0$ (que é o caso do ”objecto virtual” abordado mais à frente)
- A imagem $A'B'$ está do lado direito da lente, a uma distância $d_I > 0$ desta; ; caso a imagem esteja do lado esquerdo, temos $d_I < 0$
- F_0 é a distância focal do lado do objecto, F_I é a distância focal do lado da imagem. No caso de uma lente fina, ambas são iguais a f, e marcam-se para auxiliar no traçado.

O raios ópticos que emergem de um dado objecto atravessam a lente e dão origem a uma imagem. As imagens dizem-se *reais* quando os raios de luz passam de facto na posição da imagem, isto é, raios que saem do plano do objecto convergem no plano da imagem; e dizem-se *virtuais* quando os raios não passam na imagem, mas esta é visível através da lente. As imagens reais podem ser projectadas num alvo, as virtuais não. Um bom exemplo é considerar a imagem de uma lâmpada brilhante: ao passar a mão pelo plano da imagem, se estar for real sente-se o calor, mas se for virtual parecerá apenas ”flutuar” no espaço.

De seguida vamos analisar a formação de imagens para lentes convergentes ($f > 0$) e divergentes ($f < 0$) em função da posição relativa do objecto e do foco da lente, e derivar relações úteis para lentes delgadas.

3.3 Objecto e imagem - focos conjugados e ampliação transversal

Considere de novo a Fig. 4. Cada ponto do objecto em d_O tem um único ponto correspondente na imagem em d_I. Isto implica que, caso colocássemos o objecto em d_I, a imagem seria formada em d_O. Chama-se a estas posições *focos conjugados*. Pela semelhança de triângulos temos as seguintes relações entre as dimensões do objecto e da imagem:

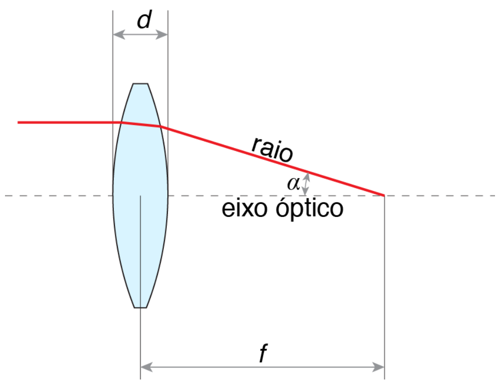


Figura 3: Definições utilizadas: f – distância focal, $d << f$ – espessura da lente delgada, α – ângulo entre o raio e o eixo óptico.

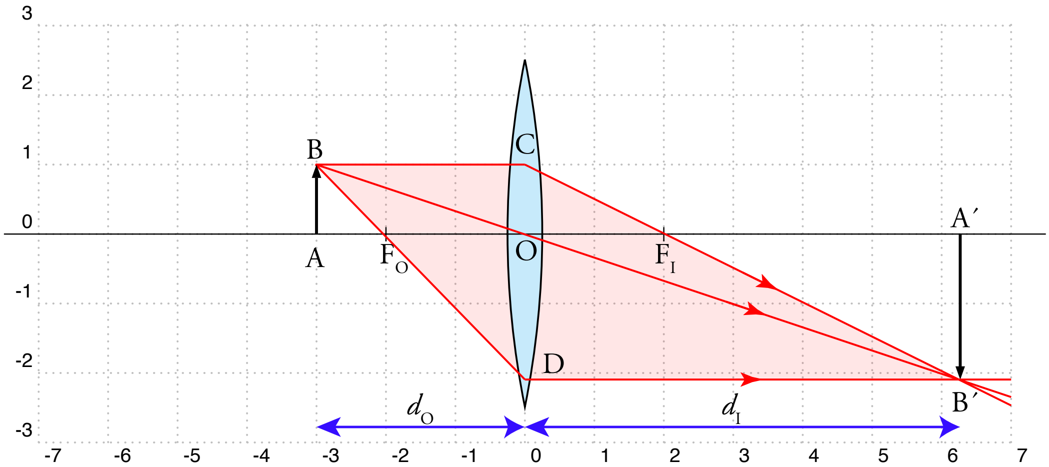


Figura 4: Convenções utilizadas para formação de imagens por lentes.

$$\Delta ABF_O \sim \Delta ODF_O \rightarrow AB/A'B' = AF_O/F_O0 \rightarrow AB/A'B' = \frac{d_O - f}{f} \tag{2}$$

$$\Delta ABO \sim \Delta A'B'O \rightarrow AB/A'B' = AO/OA' \ \rightarrow AB/A'B' = d_O/d_I \tag{3}$$

$$\Delta COF_I \sim \Delta A'B'F_I \rightarrow AB/A'B' = OF_I/F_IA' \rightarrow AB/A'B' = \frac{f}{d_I - f} \tag{4}$$

Das expressões (2) e (4) obtemos a equação dos focos conjugados:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{d_O} + \frac{1}{d_I}} \tag{5}$$

Uma forma alternativa e muitas vezes conveniente de exprimir esta relação consiste em utilizar as distâncias do objecto e da imagem aos respectivos focos. Designando estas distâncias por $x_O = AF_O$ e $x_I = A'F_I$, tem-se $d_O = f + x_O$ e $d_I = f + x_I$. Substituindo na expressão acima, obtém-se a chamada formulação de Newton para a equação dos focos conjugados:

$$\boxed{x_O x_I = f^2} \tag{6}$$

Por outro lado, sendo AB e $A'B'$ respectivamente as dimensões lineares transversais do objecto e da imagem, usamos a igualdade (3) para definir a *ampliação transversal* A como:

$$\boxed{A = \frac{A'B'}{AB} = \frac{d_I}{d_O}} \tag{7}$$

A imagem é *direita* se $A < 0$ e *invertida* se $A > 0$. Podemos usar estas duas equações para, dados f e d_O, determinar as seguintes expressões para a posição da imagem d_I e a respectiva ampliação A:

$$A = \frac{1}{\frac{d_O}{f} - 1} \tag{8}$$

$$d_I = d_O A \tag{9}$$

Como exemplo, temos no caso da Fig. 4: $d_O > f \rightarrow A > 0\,; d_I > 0$. A imagem resultante é *real* e *invertida.*

3.4 Lente convergente ($f > 0$) – Imagem real

Este caso verifica-se para $d_O > f$, a imagem é real é pode ser projectada. A imagem é menor ($A < 1$) que o objecto se $d_O > 2f$ ou maior ($A > 1$) se $2f > d_O > 0$. Um exemplo do primeiro caso é uma máquina fotográfica: a imagem é posicionada no sensor da câmara, e é (tipicamente) menor que o objecto fotografado. Verifica-se $\boxed{0 < A \leq 1}$ pois

$$\infty > d_O \geq 2f \quad \rightarrow \quad f < d_I \leq 2f \quad \rightarrow \quad 0 < A \leq 1 \tag{10}$$

Um exemplo do segundo caso é um projetor de cinema ou de imagem de computador: a imagem é posicionada num écran, e é maior que o objecto (película ou chip). Verifica-se $\boxed{1 \leq A < \infty}$ pois

$$f < d_O \leq 2f \quad \rightarrow \quad \infty > d_I \geq 2f \quad \rightarrow \quad \infty > A \geq 1 \tag{11}$$

3.5 Lente convergente ($f > 0$) – Imagem virtual

Este caso verifica-se quando $d_O < f$, por exemplo quando utilizamos uma lupa para ver objectos com um tamanho aumentado, e está esquematizada na Fig. 5. Dependendo da posição d_O, verificam-se as seguintes relações

$$0 < d_O \leq \frac{f}{2} \qquad 0 > d_I \geq -f \qquad -1 > A \geq -2 \tag{12}$$

$$\frac{f}{2} \leq d_O < f \qquad -f \geq d_I > -\infty \qquad -2 > A > -\infty \tag{13}$$

Repare-se que resulta $d_I < 0$ (a imagem está do mesmo lado que o objecto) e $A < 0$ pelo que a imagem é (*i*) virtual e (*ii*) direita, para um observador colocado à direita da lente.

3.6 Lente divergente ($f < 0$)

Considere-se a situação representada na Fig. 6, que mostra uma lente divergente ($f < 0$) e um objecto AB ($d_O > 0$). Note-se que, no caso da lente divergente, os pontos F_O e F_I trocam de posição. Nesta configuração a imagem resultante $A'B'$ é sempre *virtual* e *direita* com $d_I < 0$ (imagem do mesmo lado do objeto), pois

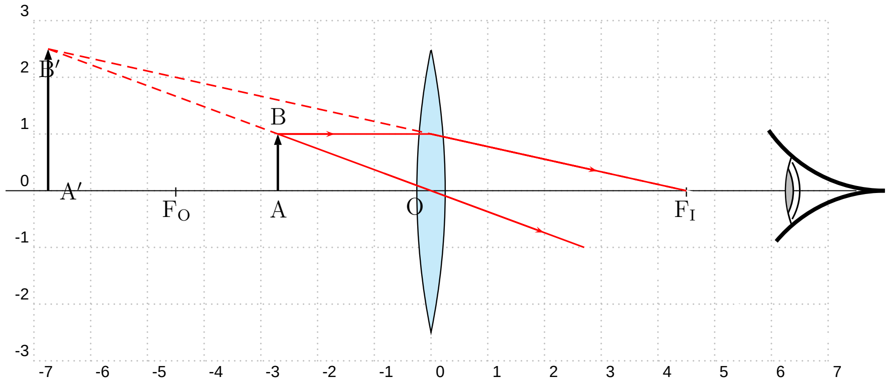


Figura 5: Formação de imagem virtual com uma lente convergente.

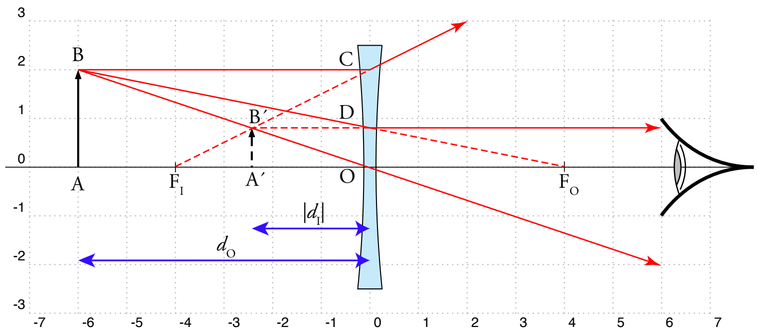


Figura 6: Formação de imagem virtual com uma lente divergente.

$$f < 0; \quad d_O > 0 \quad \rightarrow \quad A < 0; \quad d_I < 0$$

Podemos verificar que a equação (5) se mantém válida neste caso, recorrendo à semelhança de triângulos:

$$\Delta ABO \sim \Delta A'B'O \rightarrow AB/A'B' = \frac{d_0}{d_I} \qquad \rightarrow \; -\infty < A < 0 \tag{14}$$

$$\Delta ABF_0 \sim \Delta ODF_O \rightarrow \frac{d_0 + |f|}{|f|} = AB/A'B' \;\rightarrow\; \frac{d_0 + |f|}{|f|} = \frac{d_0}{d_I} \tag{15}$$

$$\Delta F_I OC \sim \Delta F_I A'B' \rightarrow \frac{|f|}{|f| - |d_I|} = AB/A'B' \rightarrow \frac{|f|}{|f| - |d_I|} = \frac{d_0}{|d_I|} \tag{16}$$

Nestas expressões, que descrevem distâncias, foi necessário utilizar os valores em módulo de f e de d_I, que são ambos negativos. Fazendo agora as substituições $|f| \rightarrow -f$ e $|d_I| \rightarrow -d_I$ recupera-se a equação dos focos conjugados.

4 Objetos virtuais ($d_O < 0$)

Em determinadas situações, podemos lidar com ”objectos virtuais” – isto é, os raios ópticos têm origem não num objecto sólido, mas num plano do espaço, e estamos interessados em estudar a sua propagação a partir desse plano e a formação da imagem correspondente. Um exemplo típico consiste em estudar a formação da imagem de uma imagem primária. Nestes casos, o objecto virtual é identificado a tracejado no diagrama de raios, como ilustrado nos exemplos em baixo.

4.1 Lente convergente

A Fig. 7 representa um objecto virtual ($d_O < 0$, à direita da lente) e a correspondente imagem. A imagem resultante é real ($d_I > 0$, também à direita) e direita ($A < 0$), verificando-se

$$d_O < 0; \qquad f > 0 \quad \rightarrow \quad A < 0$$
$$\frac{d_I}{-|d_O|} = \frac{f}{-|d_O| - f}$$

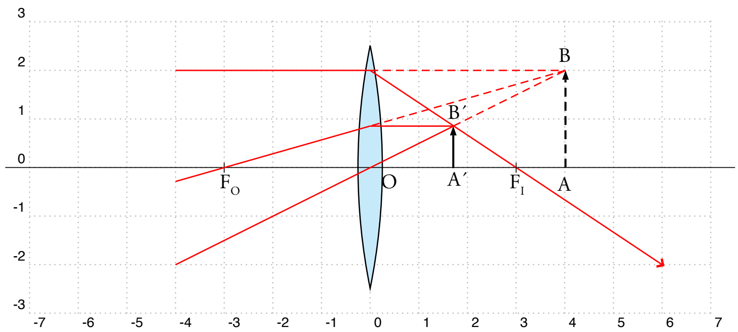


Figura 7: Lente convergente com objecto virtual e imagem real.

4.2 Lente divergente – Imagem virtual

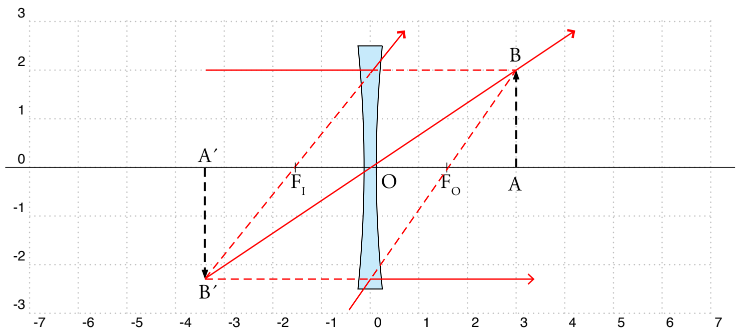


Figura 8: Lente divergente com objecto virtual e imagem virtual.

A Fig. 8 representa um objecto virtual ($d_O < 0$, à direita da lente) para uma lente divergente ($f < 0$) e a correspondente imagem. Na situação da figura, o objecto está à direita do foco F_O: $|d_O| > |f|$. Verifica-se assim:

$$d_O < 0 \qquad f < 0$$
$$\frac{d_I}{|d_O|} = \frac{|f|}{|d_O| - |f|}$$

A imagem resultante é também virtual $d_I < 0$, à esquerda da lente) e invertida ($A > 0$), verificando-se as seguintes relações em função da distância:

$$|d_O| = \begin{cases} |d_O| = |f| : & |d_I| \to \infty, \quad A \to \infty, \\ |f| < |d_O| < 2|f| : & |d_I| > |d_O|, \quad A > 1, \\ |d_O| = 2|f| : & |d_I| = |d_O|, \quad A = 1, \\ |d_O| > 2|f| : & |d_I| < |d_O|, \quad 0 < A < 1. \end{cases} \tag{17}$$

4.3 Lente divergente - Imagem real

A Fig. 9 representa um objecto virtual ($d_O < 0$, à direita da lente) para uma lente divergente ($f < 0$) e a correspondente imagem. Na situação da figura, o objecto está à esquerda do foco F_O: $|d_O| < |f|$. Verifica-se assim:

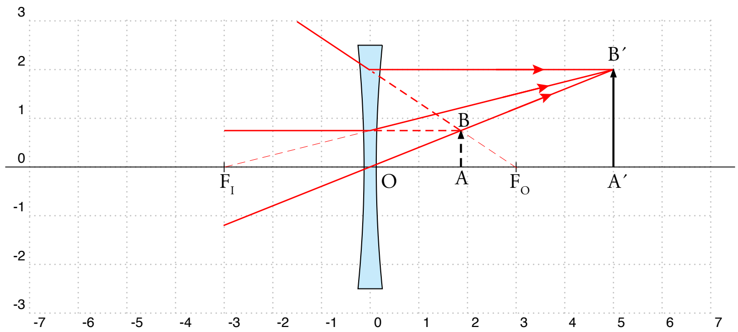


Figura 9: Lente divergente com objecto virtual e imagem real.

$$d_O < 0 \qquad f < 0$$
$$\frac{d_I}{|d_O|} = \frac{|f|}{|f| - |d_O|} \quad \to \quad A = \frac{d_I}{d_O} = \frac{f}{d_O - f} < 0$$

A imagem resultante é agora real ($d_I > 0$, à direita da lente) e direita ($A < 0$), verificando-se as seguintes relações em função da distância:

$$|d_O| = \begin{cases} |d_O| \to |f| : & |d_I| \to \infty, \quad A \to -\infty, \\ |d_O| = |f|/2 : & |d_I| = f, \quad A = -2, \\ |d_O| = 0 : & |d_I| = 0, \quad A = -1. \end{cases} \tag{18}$$

5 Associação de lentes delgadas

Para duas lentes delgadas de distâncias focais f_1 e f_2 afastadas de D (para $D \ll f_1, f_2$) pode calcular-se a distância focal equivalente do conjunto através de:

$$\boxed{\frac{1}{f_{equiv}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{D}{f_1 f_2}} \tag{19}$$

A dificuldade na determinação da distância focal equivalente f_{equiv} é a medição das distâncias d_O e d_I (que são diferentes das distância do objecto e da imagem às superfícies das lentes ou aos seus planos médios).

Uma abordagem preferível consiste em usar a equação (5) separadamente para cada uma das lentes, e considerar que a *primeira imagem* (real ou virtual) irá constituir-se como o *objecto* para a segunda lente. Neste caso, as regras descritas acima para o traçado de raios de lentes individuais aplicam-se consecutivamente:

1. A partir da posição do objecto AB e do tipo da primeira lente L_1, determina-se a posição da imagem intermédia $A'B'$
2. A partir da posição da imagem intermédia (agora tomada como objecto da segunda lente) e do tipo da segunda lente L_2, determina-se a posição da imagem final $A''B''$

Vamos aplicar este método para várias combinações de lentes convergentes e divergentes.

5.1 Lente convergente - lente convergente

A figura 10 representa duas lentes convergentes, L_1 e L_2, de distâncias focais f_1 e f_2 respectivamente, separadas de uma distância D. O objecto (real) AB situa-se à esquerda de L_1, e tem uma imagem $A'B'$ por intermédio de L_1. Esta imagem constitui-se como objecto virtual para L_2, resultando no final a imagem $A''B''$. Esta é a montagem mais simples de um **telescópio**, a partir do qual se podem obter grandes ampliações.

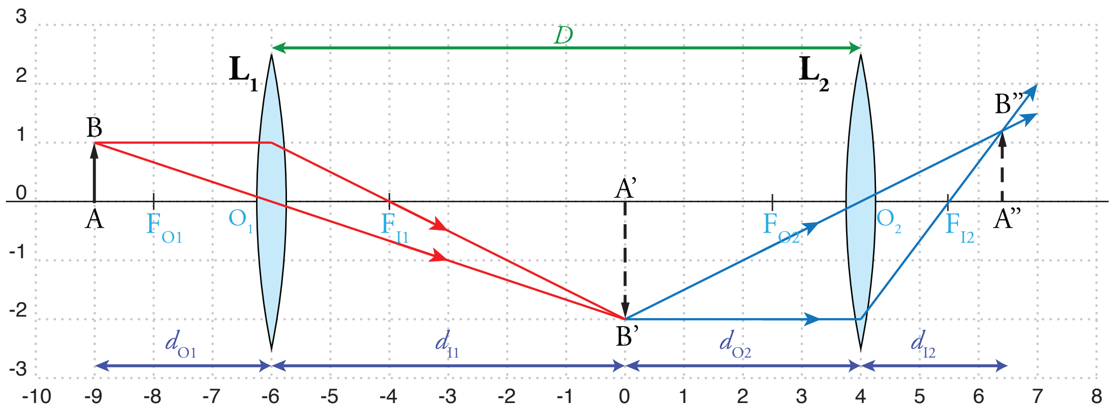


Figura 10: Sistema de duas lentes convergentes, com objecto intermédio real.

Apliquemos as equações de lentes individuais para cada caso:

$$|d_O| = \begin{cases} \frac{1}{d_{O_1}} + \frac{1}{d_{I_1}} = \frac{1}{f_1} & d_{O_1} = AO_1 \quad d_{I_1} = O_1A' \quad f_1 = O_1F_{O_1} = O_1\,F_{I_1} \\ \frac{1}{d_{O_2}} + \frac{1}{d_{I_2}} = \frac{1}{f_2} & d_{O_2} = A'O_2 \quad d_{I_2} = O_2\,A'' \quad f_2 = F_{O_2}\,O_2 = O_2\,F_{I_2} \\ O_1\,O_2 = D = d_{I_1} + d_{O_2} & \end{cases} \tag{20}$$

Estas três expressões permitem calcular o valor de uma das incógnitas, conhecidos os valores das outras. Por exemplo, uma aplicação comum desta montagem consiste em determinar o valor de uma distância focal desconhecida f_2, conhecidos os valores de f_1, d_{O_1}, d_{I_2} e D.

As mesmas expressões aplicam-se para o caso de uma imagem obtida por uma lente L_1 que passa a ser um "objecto" virtual para L_2, isto é, em que $d_{O2} < 0$, situação ilustrada na Fig. 11.

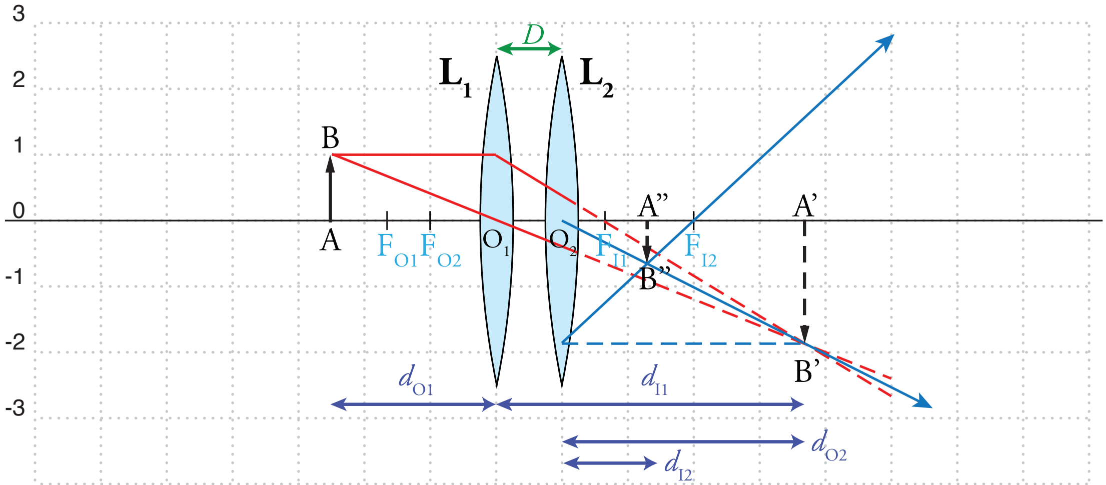


Figura 11: Duas lentes convergentes, com objecto intermédio virtual.

5.2 Lente convergente - lente divergente

O outro sistema de lente dupla de interesse é o caso em que temos uma lente convergente e uma divergente separadas de D, ilustrado na Fig. 12, em que L_1 é convergente e L_2 é divergente. A lente L_1 produz uma imagem intermédia $A'B'$ real e invertida, que é o objecto (real) de L_2. Uma vez que a segunda lente é divergente, a sua imagem $A''B''$ (a imagem final) é sempre virtual e invertida.

A figura 13 ilustra a situação em que $A'B'$ está numa posição à direita de L_2: é uma imagem real (de L_1) mas um objecto virtual (de L_2), já que $d_{O2} < 0$. A imagem $A''B''$ resultante é real e invertida.

Por fim, se nesta montagem permutarmos L_1 e L_2 (Fig. 14), obtém-se também uma imagem real $A''\,B''$, desde que a distância $d_{O1} = A\,O_1$ seja idêntica. Em qualquer destas situações, pode sempre calcular-se $f_2 < 0$ usando o conjunto das três equações (20).

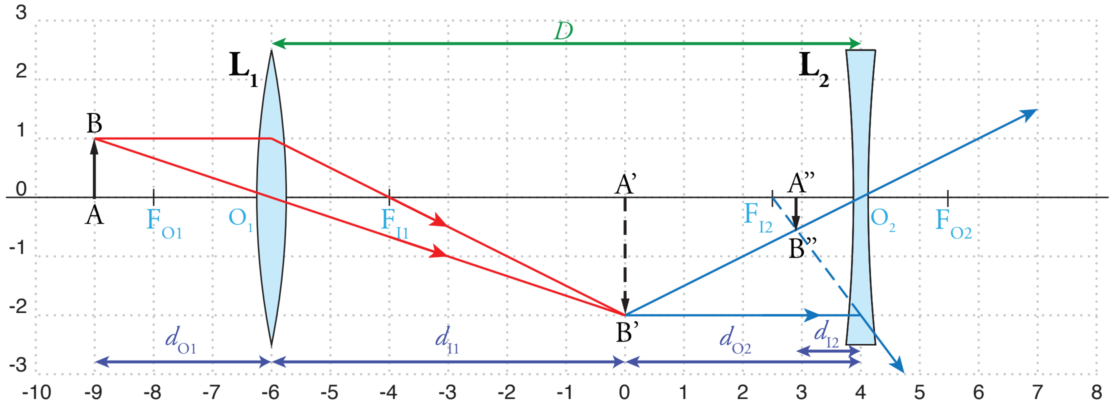


Figura 12: Sistema de lente convergente e divergente com objecto intermédio real: a imagem final é virtual e invertida.

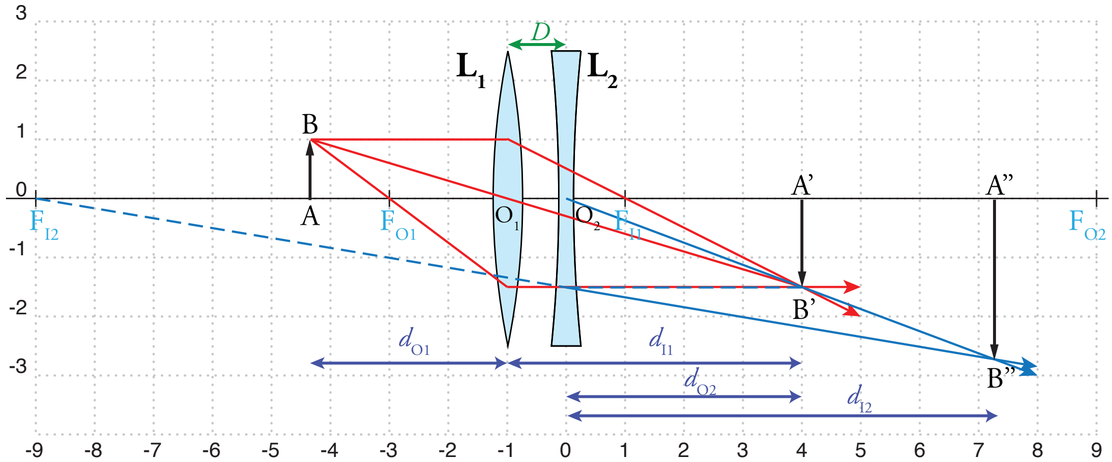


Figura 13: Sistema de lente convergente e divergente com objecto intermédio virtual: a imagem final é real e invertida.

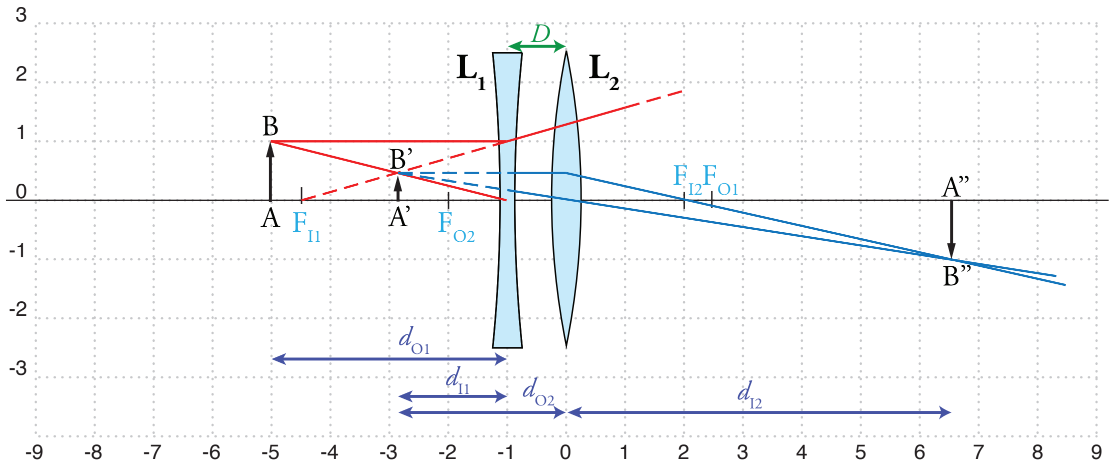


Figura 14: Sistema de lente convergente e divergente.

6 Protocolo Experimental

6.1 Material utilizado

Caixa de óptica equipada com

- calha graduada
- lentes convergentes e divergente
- semi-cilindro de vidro acrílico
- diafragmas
- polaroides
- suportes
- fonte luminosa com lâmpada de incandescência linear

6.2 Procedimento Experimental

6.2.1 Índice de refracção dum vidro acrílico

1. Utilizando a fonte luminosa, obtenha um feixe de luz branca de raios paralelos. Que tipo de lente necessita? (*Sugestão*: Observe a lâmpada que está no interior da fonte e determine que tipo de simetria tem: planar, esférica, cilíndrica...)
2. Com os diafragmas, obtenha um feixe de luz estreito (≈ 1 mm), alinhado com o eixo do transferidor.
3. Faça incidir luz branca na superfície plana do semi-cilindro de vidro acrílico. Observe e obtenha os ângulos de reflexão e de transmissão para vários ângulos do feixe incidente, à esquerda e à direita. Faça medições para pelo menos nove valores diferentes do ângulo de incidência.
4. Determine *a partir do gráfico*, por ajuste, o índice de refracção do vidro acrílico.
5. Repita as medidas e a análise dos resultados, fazendo agora a incidência na superfície cilíndrica.
6. Compare o índice de refracção do vidro acrílico a partir da incidência nas duas faces.
7. Estime também o valor do índice de refracção a partir do ângulo limite de reflexão total.
8. Compare a precisão dos diferentes valores obtidos de n_{vidro}.

6.2.2 Polarização da luz. Ângulo de Brewster

1. Observe o efeito de interposição de dois filtros polarizadores, paralelos ou cruzados, no percurso de um feixe luminoso.
2. Usando a mesma montagem do ponto anterior, polarize o feixe paralelamente ao plano de incidência, orientando o eixo $0° - 180°$ do filtro polarizador na vertical.
3. Para valores do ângulo de incidência próximos do ângulo de Brewster (que pode calcular a partir do índice de refracção e verificar experimentalmente que, para esse valor, os raios reflectido e transmitido fazem 90° entre si) obtenha o intervalo angular em que se extingue praticamente o feixe reflectido.

6.2.3 Distância focal de uma lente convergente ($f \approx 75$ mm)

1. Obtenha um feixe de luz branca de raios paralelos, usando a lente colimadora. Determine a distância focal (d.f.) da lente pelo método directo. Repita a experiência duas vezes, colocando a lente noutra posição relativamente à lente de raios paralelos.
2. Coloque o *objecto* com mira no suporte da calha, iluminando-o directamente com a fonte luminosa. Coloque a mesma lente convergente a uma distância 150 mm $> d_O >$ 75 mm do objeto.
3. Com o écran plano, procure a posição correcta para obter uma *imagem* focada. Utilizando a equação dos focos conjugados, calcule de novo a d.f. da lente.
4. Na folha quadriculada em anexo, desenhe um diagrama com o eixo óptico, o objecto e a lente convergente. Utilizando as aproximações paraxial e das lentes delgadas, desenhe a construção geométrica e obtenha a posição da imagem e a respectiva ampliação.
5. Medindo agora a imagem, determine a ampliação linear. Compare-a com a que podia calcular pelas distância d_O e d_I.
6. Repita a experiência duas vezes, colocando a lente noutras posições relativamente ao objecto.
7. Compare o valor da distância focal com o obtido em a) e estime a precisão envolvida em cada um dos métodos que utilizou.

6.2.4 Distância focal de uma lente divergente ($f \approx -150$ mm)

1. Associe no mesmo suporte a lente divergente com uma convergente ($f \approx 75$ mm), de forma a que o par se comporte como um sistema convergente (com $D \approx 10$ mm). Utilize esta montagem para determinar a distância focal da lente divergente.
2. Repita a montagem para uma diferente distância ao objecto.