Eixos Principais da deformação
[Principal strain axes]

Antes de mais, notemos que S_{ij} é simétrico i.e, $S_{ij} = S_{ji}$. Assim, pode ser diagonalizado em qualquer ponto. Isto é, num dado ponto podemos escolher coordenadas de tal forma que as únicas componentes não zero são $S_{11}, S_{22}, S_{33} \equiv S_1, S_2, S_3$. Os eixos destas coordenadas são os eixos principais, e as componentes são os valores principais.

Como exemplo, tomemos $S_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

Para encontrar os eixos principais temos que

- Encontrar os valores próprios λ : $\boxed{\mathrm{Det}\left[S - \lambda I\right] = 0}$

$\Rightarrow \lambda = 2, 5, -5$

- Construir os vectores próprios $\boxed{(S - \lambda I)\, v = 0}$

$\Rightarrow v_1 = (1,0,0) \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1) \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,-1,2)$

E portanto a matriz das deformações no novo sistema é

$$\tilde{S} = 2 v_1 v_1 + 5 v_2 v_2 - 5 v_3 v_3$$

Esta matriz é calculada, claro, usando a matriz de transformação

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \text{ i.e, } \quad P^{-1} S P = \tilde{S}$$

Notem que $\mathrm{Tr}\, S = \mathrm{Tr}\, \tilde{S} = 2$

$\mathrm{Det}\, S = \mathrm{Det}\, \tilde{S} = -50$

Para deformações em 2-D podemos fazer transformações arbitrárias e representá-las no "círculo de Mohr"

• Quando S_{ij} é diagonal

$$dl'^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + 2 S_{ik} dx_i dx_k$$
$$= dx_1^2 [1 + 2S_{11}] + dx_2^2 [1 + 2S_{22}] + dx_3^2 [1 + 2S_{33}]$$

Isto é, nestas coordenadas

$$dx_i'^2 = dx_i^2 [1 + 2S_i] \Rightarrow dx_i' \sim dx_i (1 + S_j \delta_{ij})$$

logo, o elemento de volume $\boxed{dV' = dV(1 + \underbrace{S_{ii}}_{= \frac{\delta V}{V}})}$

Já vimos que $S_{ii} = Tr[S]$ é um invariante e que está relacionado com o deslocamento normal, que provoca expansão ou contração no material. Assim, é natural separar S_{ij} da seguinte forma

$$S_{ik} = S_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} S_{ll} + \frac{1}{3}\delta_{ik} S_{ll}$$

$$\equiv \underbrace{\Sigma_{ij}}_{\text{Cisalhamento}} + \underbrace{\frac{1}{3}\theta\,\delta_{ik}}_{\text{Expansão}}$$

Já vimos que $\theta = \frac{\delta V}{V}$ dá-nos a expansão ou contracção de material.

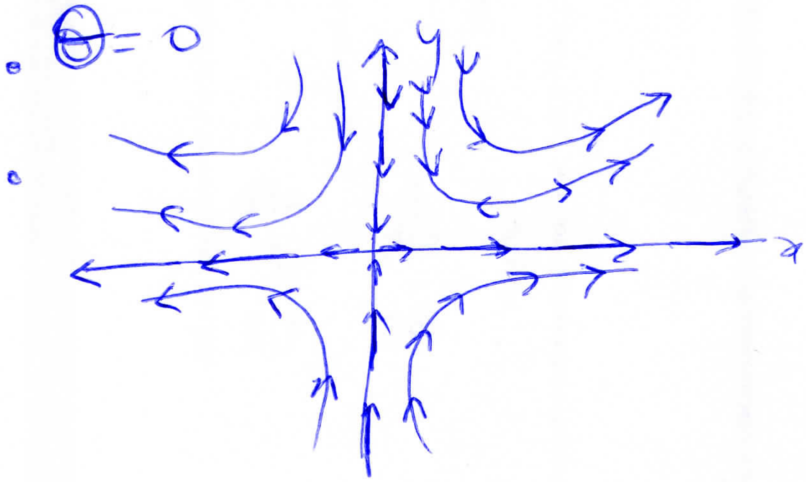
Note-se que $\Sigma_{ii} = 0$ por construção

Exemplo 1.

$$\vec{\xi} = x\,\vec{e_x} - y\,\vec{e_y}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Theta = 0$



Ex 1.b

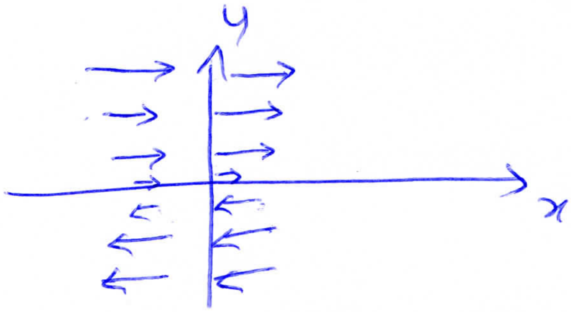
$$\vec{\xi} = F(x,y)\,\vec{e_x} + G(x,y)\,\vec{e_y}$$

Ver que

$$S_{xy} = S_{yx}$$

Exemplo 2. [TPC]

$$\xi = \varepsilon\, y\, \vec{e_x} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon/2 & 0 \\ \varepsilon/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Exemplo 3. Considere o tensor de deformação [TPC]

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule Θ e Σ_{ij}. Transforme Σ_{ij} para obter componentes diagonais nulas.

R: $$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0.00 & 4.8 & 7.87 \\ 4.8 & 0.00 & 9.49 \\ 7.87 & 9.49 & 0.00 \end{bmatrix}$$

A Tensão

A reacção de sólidos a um sistema de forças exteriores é determinada pela tensão, ou por um conjunto de tensões, em cada ponto. Dado uma superfície A, e uma força $\vec{F}(A)$ aplicada nela, definimos o vector tensão como

$$\vec{T} = \lim_{A \to 0} \frac{\vec{F}}{A}$$

E trabalhamos com o pressuposto, válido experimentalmente, de que este limite existe.

É importante percebermos duas facetas:

i. $\vec{T}$ é um vector, portanto necessita de 3 componentes para ser especificado.

ii. A deve ser especificado, mas na definição acima é arbitrário

Dado o que foi dito, é razoável antecipar que a descrição de um corpo sob forças exteriores requer 9 componentes: 3 superfícies ortogonais entre si, e as correspondentes tensões em cada uma.

Aparece assim o conceito de tensor das tensões

① Tensor de stress ou das tensões [stress tensor]

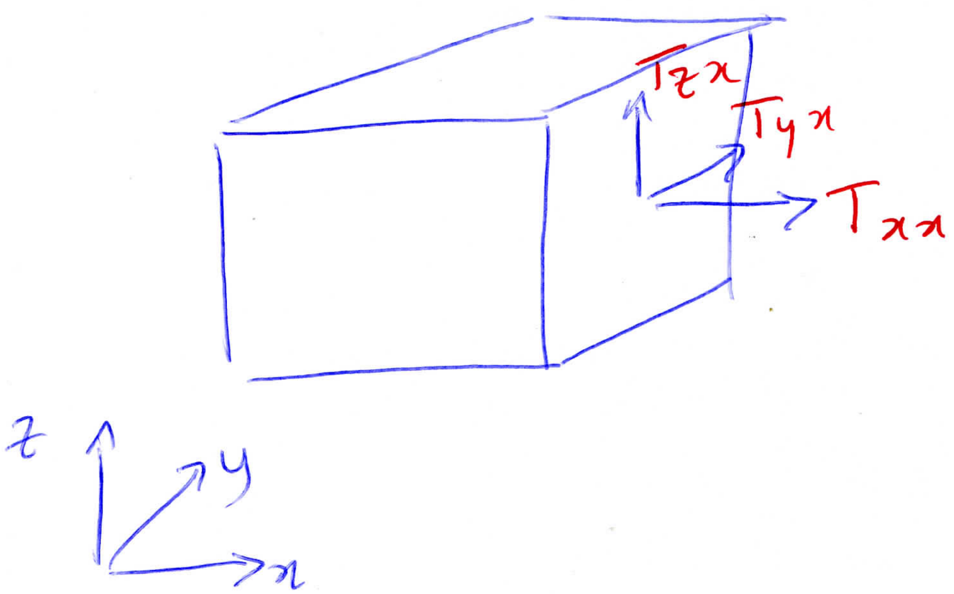
já discutimos brevemente tensões, normal e de cisalhamento. Agora, necessitamos de tornar a discussão geral. Para isso, introduzimos a força por área

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\vec{F}}{\Delta A} = T\vec{n} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{F} = T\, d\vec{A}}$$

o Tensor T "mistura" todas as combinações possíveis da força e elemento de área.
Em componentes,

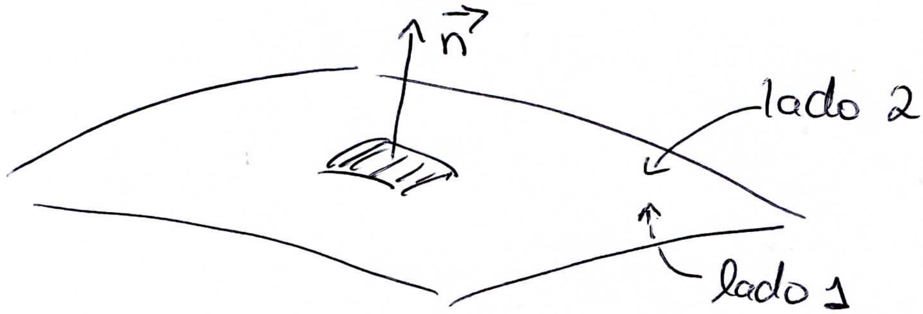
$$\boxed{F_i = T_{ij}\, dA_j} \Rightarrow \begin{cases} F_x = T_{xx} dA_x + T_{xy} dA_y + T_{xz} dA_z \\ F_y = T_{yx} dA_x + T_{yy} dA_y + T_{yz} dA_z \\ F_z = T_{zx} dA_x + T_{zy} dA_y + T_{zz} dA_z \end{cases}$$

Por exemplo, consideremos um cubo de área unitária, e desenhemos as forças



Nota:

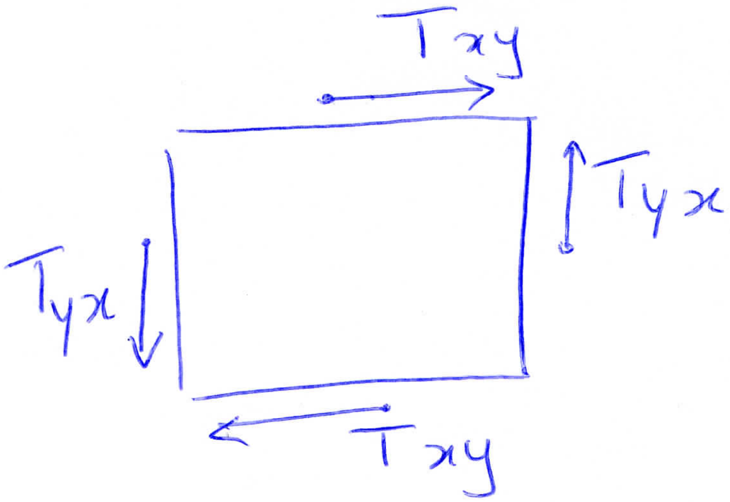
Nós não especificamos onde é que a força actua! Estas são forças que actuam sobre superfícies, por isso definamos as convenções:



Consideremos uma superfície como na figura, de lados 1 e 2. Tomamos a normal de 1 para 2 como $\vec{n}$ e $T\,d\vec{A} = T_{ij}\, dA_j$ como a força no lado 2 devido ao lado 1. Com esta convenção

$T\, dA > 0$ significa que o lado 1 empurra o lado 2, que é a situação mais comum.

Visto de cima



- As forças anulam-se, mas o momento apenas se anula se

$$T_{yx} = T_{xy} \quad \text{ou em geral} \quad \boxed{T_{ij} = T_{ji}}$$

- Para um fluido não viscoso, incapaz de exercer forças de cisalhamento,

$T_{ij} = P\,\delta_{ij}$, P é a pressão

- Podemos usar agora a lei de Gauss e a lei de Newton para um pedaço do objecto

A lei de Newton diz-nos que*

$\frac{dp}{dt} = F$, escrevemos o lado esquerdo

$$\frac{d}{dt}\int_V G\,dV = -\int_{\partial V} T \cdot d\vec{A} + F_{ext}$$

Com G a densidade do momento

* Note-se que T é a força exercida sobre o meio circundante, daí o sinal negativo.

Podemos usar a lei de Gauss [ou da divergência]

$$\int_V \nabla T \, dV = \int_{\partial V} T \cdot d\vec{A} \quad \text{ou em componentes}$$

$$\int_V \nabla_i T_{ik} \, dV = \int_{\partial V} T_{ij} \, dA_j$$

logo

1. A densidade de força elástica a actuar num corpo é (força por volume)

$$f_{el} = -\nabla T = -\nabla_i T_{ik}$$

2. Na presença de forças externas, ~~f+g~~

$$f + f_{ext} = 0$$ no caso da gravidade

$$\boxed{f_{el} + \rho g = 0}$$

3. Tal como fizemos com o tensor das deformações, podemos decompor o tensor T

$$T_{ij} = P\delta_{ij} + T_{ij}^{cis}, \quad \text{com}$$

$$P = \frac{T_{ll}}{3}$$

T_{ij}^{cis} = componente cisalhamento