4.1. Prove que se $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo compacto e $f,g: I \to \mathbb{R}$ são integráveis à Riemann, então fg também o é.

4.3. Considere o quadrado $Q=[-1,1]\times[-1,1]$ e seja $f: Q \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x^2+y^2=1/n+1/m \text{ , com } n \text{ e } m \text{ naturais} \\ x^2+y^2 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

Diga se f é integrável em Q. Justifique a resposta.

4.4. Sejam $f_i:[a_i,b_i] \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$, funções integráveis à Riemann. Prove que o produto $p(x_1,\dots,x_n)=f_1(x_1)\dots f_n(x_n)$ é integrável à Riemann no intervalo $I=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ e que $\int_I p = \left(\int_I f_1\right) \dots \left(\int_I f_n\right)$.

6.1. Determine se os limites dados existem ou não e, em caso afirmativo, calcule-os:

a) $\lim_{k\to+\infty} \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|)} \operatorname{sen}^k(x+y)\, dx\, dy$.

b) $\lim_{k\to+\infty} \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(|x|+|y|+\cos^k(xy))} dx dy$.

c) $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t/k}/\sqrt{t}\, dt$.

d) $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} \cos^k(1/(kx))\, dx$.

e) $\lim_{k\to+\infty} \int\int_A [1+\operatorname{sen}^k(1/(x^2+y^2))]\, dx\, dy$, onde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1\}$.

6.2. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, se } \|(x,y)\|<1 \\ 2 & \text{, se } \|(x,y)\|=1 \\ (x^2+y^2)^{-3}\operatorname{sen}(xy) & \text{, se } \|(x,y)\|>1 \text{ .} \end{cases}$$

Prove que f é integrável e calcule $\lim_{k\to+\infty} \int\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^k\, dx\, dy$.

6.3. Considere a sucessão de funções definidas em $\mathbb{R}^2$ por

$$g_k(x,y) = (x^2+y^2)^{k/2}/[1+(x^2+y^2)^{(k+3)/2}] \text{ .}$$

a) Determine se $\lim_{k\to+\infty} \int\int_{\mathbb{R}^2} g_k(x,y)\, dx\, dy$ existe ou não.

b) Averigue se o resultado da alínea anterior pode ser alterado modificando os valores das funções g_k no conjunto $A=\cup_{j=1}^{\infty}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=j^2\}$.

6.4. Calcule os integrais seguintes:

a) $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx)/n^2\, dx$.

b) $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x/[n^\alpha(1+nx^2)]\, dx$, $\alpha>1/2$.

7.1. Determine se as funções dadas são ou não integráveis nos seus domínios:

a) $f(x)=1-e^{-1/x^2}$, definida no intervalo $[1,+\infty)$.

b) $f(x)=\mathrm{sen}(x)/x$, definida no intervalo $[1,+\infty)$.

c) $f(x)=\mathrm{sen}^2(1/x)/\sqrt{x}$, definida no intervalo $(0,+\infty)$.

d) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x) - 1$, definida no intervalo $[1,+\infty)$.

e) $f(x)=1/[(|x|+1)x^{1/3}]$, definida no intervalo $(-\infty,+\infty)$.

f) $f(x,y)=e^{-|x-y|}/(1+|x-y|^2)$, definida em $\mathbb{R}^2$.

9.3. Seja $f\in L((0,+\infty))$ com $f(x)\geq 0$ para $x\in\mathbb{R}$. Prove que a função $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)\,dx$ é diferenciável em $(0,+\infty)$ e calcule a sua derivada.

11.12. Determine se as funções dadas são ou não integráveis nos seus domínios e, nos casos afirmativos, calcule os integrais:

a) $f(x,y,z)=1/(x^2+z^2)^{1/2}$, definida no conjunto $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+z^2\leq 1,\ 0\leq y\leq z\}$.

b) $f(x,y,z)=z(x^2+y^2)^{\alpha}$, definida no conjunto $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x^2+y^2)z^2\leq 1,\ x^2+y^2<1,\ z>0\}$, com $\alpha\in\mathbb{R}$.

c) $f(x,y,z)=(y^2+z^2)^{\alpha}$, definida no conjunto $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \mathrm{sen}(y^2+z^2)z^2\leq x\leq y^2+z^2\leq 1\}$, com $\alpha\in\mathbb{R}$.

d) $f:A\to\mathbb{R}$ com $f(x,y,z)=|x||y|(x^2+y^2)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ e $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 8(x^2+y^2)\leq z\leq (x^2+y^2)^{1/4}\}$.

e) $f(x,y,z) = [x^2/(x^2+y^2)]^{1/2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ se $x^2+y^2\notin\mathbb{Q}$ e

$f(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ se $x^2+y^2\in\mathbb{Q}$, definida em $\mathbb{R}^3$.