Mecânica Analítica

Capítulo 8: Formalismo de Hamilton-Jacobi

H. Terças

Instituto Superior Técnico
(Departamento de Física)

TÉCNICO LISBOA

TÉCNICO LISBOA

8.1 Função principal de Hamilton

Como vimos, as transformações canónicas $(q_i, p_i) \to (Q_i, P_i)$ podem ser empregadas para determinar a evolução temporal de um determinado sistema físico. As duas formas seguintes são as mais relevantes:

- Transformar num sistema de coordenadas onde $(Q_i,\ P_i)$ são **cíclicas**, resultando em equações do movimento triviais;
- Transformar (q_i, p_i) em novas coordenadas que são os seus valores iniciais, (q_{i0}, p_{i0}) (ver problema 4, série 8).

$$q_i = q_i(q_{i0}, p_{i0}, t), \quad p_i = p_i(q_{i0}, p_{i0}, t).$$

Neste capítulo, vamos construir de forma sistemática esta última classe de transformações

Uma forma automática de garantir equações do movimento triviais é construindo novos Hamiltonianos $K(Q_i, P_i) = 0$, tais que

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0.$$

Como vimos, K obtém-se a partir de $H(q_i, p_i)$ na forma $K = H + \dfrac{\partial F}{\partial t}$, o que então implica

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

É conveniente escolher F que dependa das antigas coordenadas q_i e dos novos momentos conservados P_i, ou seja

$$F = P_i Q_i + F_2(q_i, P_i, t).$$

Recorrendo às relações de transformação canónica (ver tabela do §7),

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i},$$

pelo que a equação de transformação vem

$$\boxed{H\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0.}$$

A equação anterior é conhecida como **equação de Hamilton-Jacobi**.

Trata-se de uma equação diferencial parcial de $(n+1)$ variáveis $\{q_1, \ldots, q_n; t\}$, e costuma-se designar-se por S a **função principal de Hamilton**

$$F_2 \equiv S = S(q_1, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}; t),$$

onde α_i são $(n+1)$ constantes de integração.

Como S não figura explicitamente na equação de Hamilton-Jacobi, (apenas através das suas derivadas parciais $\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ e $\dfrac{\partial S}{\partial t}$, então $S + \alpha$ também é solução.

$\therefore$ A constante aditiva α pode assumir o valor de um das $(n+1)$ constantes de integração, pelo que

$$S = S(q_i, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n; t).$$

Desta transformação, resulta

$$P_i = \alpha_i, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},$$

juntamente com

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \equiv \beta_i,$$

onde α_i e β_i são constantes (fixadas por condições iniciais).

A solução original do problema pode ser formalmente dada através das relações

$$q_j = q_j(\alpha_i, \beta_i, t), \qquad p_j = p_j(\alpha_i, \beta_i, t).$$

Vejamos o significado físico da função principal de Hamilton.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Usando a relação de transformação, $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ e a equação de Hamilton-Jacobi,temos

$$\frac{dS}{dt} = p_i \dot{q}_i - H = L,$$

o que nos mostra que S é a **acção**

$$\boxed{S = \int L dt + S_0}$$

Quando o Hamiltoniano não depende explicitamente do tempo[1], podemos escrever S em termos da **função característica** $W(q_i, \alpha_i)$

$$S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - at.$$

Podemos inferir sobre o seu significado físico de forma semelhante ao que fizémos com a função S,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_i}\dot{q}_i.$$

Com $p_i = \dfrac{\partial W}{\partial q_i}$, obtemos

$$\frac{dW}{dt} = p_i\dot{q}_i, \quad \Longrightarrow \quad W = \int p_i\dot{q}_i dt = \int p_i dq_i,$$

o que corresponde à acção abreviada.

[1] Recorde: a equação de Hamilton-Jacobi escreve-se $H + \partial_t S = 0$

- Exemplo 1: O oscilador harmónico.

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right) \equiv E.$$

Fazendo $p = \dfrac{\partial S}{\partial q}$, a equação de Hamilton-Jacobi vem

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Uma vez que $S = W - \alpha t$, podemos escrever a versão independente do tempo da equação,

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = \alpha.$$

A constante de integração pode ser identificada com a energia do sistema, $\alpha = E$.

- Exemplo 1: O oscilador harmónico.

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2\omega^2 q^2\right] = \alpha.$$

A equação pode ser imediatamente integrada,

$$W = \sqrt{2m\alpha}\int\sqrt{1-\frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}\,dq,$$

e, portanto,

$$S = \sqrt{2m\alpha}\int\sqrt{1-\frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}}\,dq - Et.$$

Assim, da relação de transformação $Q = \partial_p S$,

$$Q \equiv \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\int\frac{dq}{\sqrt{1-m\omega^2 q^2/(2\alpha)}} - t$$

- Exemplo 1: O oscilador harmónico.

$$t+\beta = \frac{1}{\omega}\arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}\right).$$

Invertendo a relação, e definindo $\delta = \beta\omega$

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\sin(\omega t+\delta).$$

Formalmente, a solução para p vem

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} = \sqrt{2m\alpha\left(1-\sin^2(\omega t+\delta)\right)},$$

ou seja

$$p = \sqrt{2m\alpha}\cos(\omega t+\delta) = m\dot{q}.$$

- Exemplo 1: O oscilador harmónico.

A relação entre as constantes α e β devem estar relacionadas com q_0 e p_0. Tomando os quadrados de $q(t)$ e $p(t)$ em $t = 0$

$$2m\alpha = p_0^2 + m^2\omega^2 q_0^2,$$

o que reflecte, obviamente, a conservação da energia mecânica. Da mesma forma,

$$\tan\delta = m\omega\frac{q_0}{p_0}.$$

Podemos, finalmente, calcular explicitamente S,

$$S = 2\alpha\int\cos^2(\omega t+\delta)dt - \alpha t = 2\alpha\int\left(\cos^2(\omega t+\delta) - \frac{1}{2}\right)dt.$$

- Exemplo 1: O oscilador harmónico.

$$S = 2\alpha \int \cos^2(\omega t + \delta) dt - \alpha t = 2\alpha \int \left(\cos^2(\omega t + \delta) - \frac{1}{2}\right) dt.$$

Com o Lagrangeano definido como

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(m\dot{q}^2 - m^2\omega^2 q^2\right) \\ &= \alpha\left(\cos^2(\omega t + \delta) - \sin^2(\omega t + \delta)\right) \\ &= 2\alpha\left(\cos^2(\omega t + \delta) - \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

vemos claramente que[2]

$$S = \int L dt.$$

[2] Note que esta última relação só é possível mediante determinação de $q(t)$ e $p(t)$.

- Exemplo 2: O oscilador bi-dimensional assimétrico.

$$H(x, p_x, y, p_y) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + m^2\omega_x^2 x^2 + m^2\omega_y^2 y^2\right).$$

Como as coordenadas e os momentos separam-se, podemos procurar por soluções do tipo[3]

$$S(x, y, \alpha, \alpha_y, t) = W_x(x, \alpha) + W_y(y, \alpha_y) - \alpha t.$$

Assim, a equação de Hamilton-Jacobi escreve-se na forma

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_y}{\partial y}\right)^2 + m^2\omega_x^2 x^2 + m^2\omega_y^2 y^2\right] = \alpha,$$

o que fornece

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_y}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\omega_y^2 y^2 = \alpha_y,$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\omega_x^2 x^2 = \alpha - \alpha_y = \alpha_x,$$

[3]Notação: usam-se as constantes α e α_y para aproveitar o facto de que $E = \alpha$ é uma primeira constante.

- Exemplo 2: O oscilador bi-dimensional assimétrico.

Procedendo de forma análoga, i.e. fazendo uso das relações de transformação após integração das EDPs, $p_i = \dfrac{\partial W_i}{\partial q_i}$ e $q_i = \dfrac{\partial W_i}{\partial \alpha_i}$, obtemos

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2}}\sin(\omega_x t + \delta_x),$$

$$y = \sqrt{\frac{2\alpha_y}{m\omega_y^2}}\sin(\omega_y t + \delta_y),$$

$$p_x = \sqrt{2m\alpha_x}\cos(\omega_x t + \delta_x),$$

$$p_y = \sqrt{2m\alpha_y}\cos(\omega_y t + \delta_y).$$

A energia mecânica é $E = \alpha_x + \alpha_y = \alpha$.

- Exemplo 2: O oscilador bi-dimensional assimétrico.

Procedendo de forma análoga, i.e. fazendo uso das relações de transformação após integração das EDPs, $p_i = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}$ e $q_i = \frac{\partial W_i}{\partial \alpha_i}$, obtemos

$$x = \sqrt{\frac{2\alpha_x}{m\omega_x^2}} \sin(\omega_x t + \delta_x),$$

$$y = \sqrt{\frac{2\alpha_y}{m\omega_y^2}} \sin(\omega_y t + \delta_y),$$

$$p_x = \sqrt{2m\alpha_x} \cos(\omega_x t + \delta_x),$$

$$p_y = \sqrt{2m\alpha_y} \cos(\omega_y t + \delta_y).$$

A energia mecânica é $E = \alpha_x + \alpha_y = \alpha$.

- Exemplo 3: O oscilador bi-dimensional simétrico.

$$H = E = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + m^2\omega^2 r^2\right).$$

A função principal de Hamilton é

$$S(r, \theta, \alpha, \alpha_\theta) = W_r(r, \alpha) + W_\theta(\theta, \alpha_\theta) - \alpha t.$$

Como θ é coordenada cíclica,

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \alpha_\theta,$$

podemos escrever

$$S(r, \theta, \alpha, \alpha_\theta) = W_r(r, \alpha) + \theta\alpha_\theta - \alpha t.$$

- Exemplo 3: O oscilador bi-dimensional simétrico.

A equação de Hamilton-Jacobi então escreve-se[4]

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = 0.$$

A solução do problema obtém-se integrado a EDP e obter $W_r(r,\alpha)$, juntamente com as relações de transformação

$$p_r = \frac{\partial W_r}{\partial r}, \quad r = \frac{\partial W_r}{\partial \alpha}, \quad p_\theta = \alpha_\theta$$

[4]Nota: $H + \partial_t S = 0$.

8.2 Função característica de Hamilton

Como vimos, a equação de Hamilton-Jacobi fica mais transparente quando H é conservado,

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Longrightarrow S(q_i, t) = W(q_i) - \alpha_1 t,$$

ou seja, com $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i} = \dfrac{\partial W}{\partial q_i}$, vem

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1 .$$

As novas coordenadas são

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i},$$

onde α_i são constantes. O novo Hamiltoniano é $K(Q_i, P_i) = \alpha_1$. A função W tem propriedades de transformação distinta das de S!.

$\therefore$ W gera uma transformação canónica tal que as novas coordenadas (Q_i, P_i) são todas cíclicas! Com $K(Q_i, P_i) = \alpha_1$, as equações do movimento fornecem

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \delta_{1i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0,$$

de onde vem imediatamente

$$P_i = \alpha_i, \qquad Q_i = \delta_{1i} t + \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}.$$

$\therefore$ A única coordenada que não é constante do movimento é $Q_1 = \alpha_1 t + \beta_1$. Temos n constantes de integração, sendo que uma delas é apenas umas constante aditiva, α_1 (que nós escolhemos como coincidente com o valor que H toma ao ser conservado – em geral, uma energia.)

Escolha:

As constantes $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ são escolhidas como os momentos conservados P_i.

Por vezes, pode ser desejável escolher outras constantes do movimento (resultantes de transformações nos momentos $P_i \to \tilde{P}_i$), ou seja

$$\gamma_i = \gamma_i(\alpha_i).$$

Desta forma, a equação de Hamilton vem

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = v_i,$$

onde v_i é uma certa função de γ_i. Neste caso, **todas** as coordenadas têm a mesma dependência temporal

$$Q_i = v_i t + \beta_i.$$

A construção sistemática das equações de Hamilton-Jacobi para a funções principal S e característica W é feita na forma

1. Escolha do Hamiltoniano

$$H(q_i, p_i, t) \;\Big|\; H(q_i, p_i) = \text{constante}$$

2. Transformações canónicas apropriadas

$$\text{Variáveis } Q_i = \beta_i \text{ e } P_i = \alpha_i \;\Big|\; \text{Variáveis } P_i = \alpha_i$$

3. Novos Hamiltonianos K

$$K = 0 \;\Big|\; K = H(P_i) = \alpha_1$$

4. Novas equações do movimento

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \;\Bigg|\; \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = v_i, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

5. Novas soluções das equações do movimento

$$Q_i = \beta_i, \quad P_i = \gamma_i \;\Big|\; Q_i = v_i t + \beta_i, \quad P_i = \gamma_i$$

6. Definição da funções principal e característica

$$S(q_i, P_i, t) \;\Big|\; W(q_i, P_i)$$

7. Equações de Hamilton-Jacobi

$$\underbrace{H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}_{n \text{ non-trivial constants } \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}} \;\Bigg|\; \underbrace{H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) - \alpha_1 = 0}_{n \text{ non-trivial constants} = n \text{ integration } \{\alpha_2, \ldots, \alpha_n\} + \alpha_1}$$

8. Novos momentos $P_i = \gamma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$S = S(q_i, \gamma_i, t) \;\Big|\; W = W(q_i, \gamma_i)$$

9. Transformação no problema original

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \quad \Big| \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial \gamma_i} = \beta_i \quad \Big| \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = v_i t + \beta_i$$

$\therefore$ O problema pode ser resolvido para as coordenadas q_i em termos das $2n$ constantes β_i, γ_i (que, por sua vez, são obtidas recorrendo às condições iniciais).

Como é claro, quando o Hamiltoniano não depende explicitamente do tempo ($H = \alpha_1$), ambos os métodos são equivalentes

$$S(q_i, P_i, t) = W(q_i, P_i) - \alpha_1 t$$

8.3 Variáveis cíclicas

Uma coordenada q_i diz-se **separável** quando S (ou W) pode ser dividida em dois termos, na forma

$$S(\{q_i\};\{\alpha_i\};t) = S_1(q_1;\{\alpha_i\};t) + S'(q_2,\ldots,q_n;\{\alpha_i\};t).$$

Neste caso, a equação de Hamilton-Jacobi pode ser dividida em duas equações para S_1 e S'. De uma forma geral, se todas as m coordenadas forem separáveis

$$S = \sum_{i=1}^{m} S_i(q_i;\{\alpha_i\};t) + S'(q_{m+1},\ldots,q_n;\{\alpha_i\};t).$$

Se todas as coordenadas forem separáveis, teremos $m = n$ equações do tipo[5]

$$H_i\left(q_j,\frac{\partial S_j}{\partial q_j};\{\alpha_i\};t\right) + \frac{\partial S_i}{\partial t} = 0.$$

[5] Nota: Para $H_i = \alpha_i$, $S_i = W_i - \alpha_i t$, e o cálculo procede para os W_i's.

No caso de um problema separável,

$$H_i\left(q_j, \frac{\partial S_j}{\partial q_j}; \{\alpha_i\}; t\right) + \frac{\partial S_i}{\partial t} = 0.$$

as constantes α_i são chamadas de **constantes de separação**.

NOTA: Nem todas as funções H_i são necessariamente Hamiltonianos; os α_i's pode ser energias, quadrados de momento angular, ou outra quantidade qualquer (depende da natureza de q_i).

Podemos observar rapidamente que coordenadas **cíclicas** são **separáveis**, mostrando o interesse real deste formalismo. Seja q_1 uma variável cíclica, cujo momento $p_1 = \text{constante} \equiv \gamma$.

$$H\left(q_2, \ldots, q_n; \gamma; \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = \alpha_1.$$

Tentando separar a função característica W na forma

$$W = W_1(q_1, \alpha) + W'(q_2, \ldots, q_n; \alpha),$$

vemos que a equação de Hamilton-Jacobi apenas depende de W', e[6]

$$p_1 \equiv \gamma = \frac{\partial W_1}{\partial q_1} \quad \Longrightarrow \quad W_1 = \gamma q_1,$$

implicando $W = \gamma q_1 + W'$.

[6] Insistimos que o mesmo procedimento pode ser feito para S...

Consideremos uma situação em que s nas n coordenadas são não-cíclicas. Então, a decomposição anterior pode ser feita na forma[7]

$$W(q_1, \ldots q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{s} W_i(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \sum_{i=s+1}^{n} \alpha_i q_i.$$

Ficamos, assim, com s equações de Hamilton-Jacobi para resolver

$$H\left(q_i; \frac{\partial W_i}{\partial q_i}; \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) = \alpha_1, \quad i = \{1, \ldots, s\}.$$

Para saber mais... não existe nenhum critério simples ditando qual a escolha de coordenadas que conduz à separação das equações de Hamilton-Jacobi. Para sistemas de coordenadas ortogonais, o critério de Stäckel sobre condições necessárias e suficientes pode ser útil (c.f. Goldstein, §10.5)

[7] Por consistência de notação, escolhemos os momentos conservados $\gamma_i = \alpha_i$.

- Exemplo 1: o problema de Kepler.

Escolhendo coordenadas polares (r, θ) (movimento no plano),

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r) = \alpha_1,$$

onde a última igualdade decorre da conservação da energia. θ é uma coordenada cíclica, pelo que

$$W = W_1(r) + \alpha_\theta \theta.$$

A equação de Hamilton-Jacobi fornece[8]

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} + 2mV(r) = 2m\alpha_1,$$

cuja solução formal conduz a

$$W = \int \sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}\, dr + \alpha_\theta \theta.$$

[8] Lembre-se: $p_i = \partial_{q_i} W$

Usando a equação do movimento $\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \delta_{i1}$ e a relação de transformação $Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$, temos[9]

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}},$$

e

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\theta} = -\int \frac{\alpha_\theta dr}{\sqrt{2m(\alpha_1 - V) - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}}} + \theta.$$

Esta última equação pode ser expressa na forma usual para a coordenada $u = 1/r$.

$$\boxed{\theta = \beta_2 - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{\alpha_\theta^2}(\alpha_1 - V) - u^2}}}$$

[9] Repare que são as equações que obtivémos no §3.

- Exemplo 2: O potencial central em coordenadas esféricas.

Consideremos o movimento sob a acção do mesmo potencial central $V(r)$ em coordenadas esféricas (r, θ, φ),

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta r^2}\right) + V(r).$$

Podemos começar por separar a função W na forma

$$W = W_r(r) + W_\theta(\theta) + W_\varphi(\varphi),$$

reparando que φ é uma coordenada cíclica, i.e. $W_\varphi = \alpha_\varphi \varphi$, o que conduz a

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right] + 2mV(r) = 2m\alpha_1.$$

TÉCNICO LISBOA

O termo a vermelho depende apenas de θ, pelo que

$$\left[\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right] = \alpha_\theta^2.$$

Assim, a equação de Hamilton-Jacobi que resta resolver vem, então

$$\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2} = 2m(\alpha_1 - V(r)).$$

As constantes de integração α_1, α_θ e α_φ têm significados físicos facilmente identificáveis.

$$\alpha_\theta^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}, \quad \alpha_1 = E.$$

O Hamiltoniano a 3 dimensões pode ser reduzido ao Hamiltoniano do problema no plano

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}\right) + V(r).$$

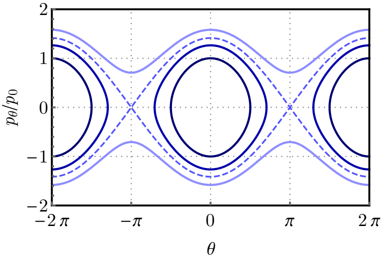
8.4 Variáveis acção-ângulo

Uma classe importante de problemas é aquela que contém **movimentos periódicos** (não necessariamente harmónicos!), como o caso do pêndulo simples.

$$H = E = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos\theta.$$

Resolvendo para p_θ, temos

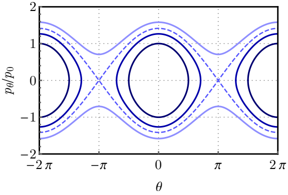
$$p_\theta = \pm\sqrt{2m\ell^2(E + mg\ell\cos\theta)}.$$



Separatriz: $E \equiv E_s = mg\ell$

Sistemas periódicos são caracterizados por dois tipos de movimento

- Libração: $-\pi < \theta < \pi$;
- Rotação: $\theta \in \mathbb{R}$.



Consideremos movimentos descritos por um Hamiltoniano $H = H(q,p)$, é conveniente introduzir-se a **varíavel de acção**

$$J = \oint p dq,$$

onde a integração é feita sobre um período completo (de rotação ou libração).

Em termos da variável de acção (que na verdade tem dimensões de momento angular!), o Hamiltoniano escreve-se

$$H = \alpha_1 = H(J),$$

ao passo que a função característica é

$$W = W(q, J).$$

A coordenada canonicamente conjugada a J recebe o nome de **variável ângulo**

$$w = \frac{\partial W}{\partial J},$$

cuja equação do movimento, então, será

$$\dot{w} = \frac{\partial H}{\partial J} = \nu(J) \Longrightarrow w = \nu t + \beta.$$

Consideremos a variação de w após um período completo do movimento,

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq.$$

Como J é uma constante,

$$\Delta w = \frac{d}{dJ} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \frac{d}{dJ} \oint p dq = 1,$$

o que imediatamente implica $\Delta w = 1 = \nu\tau$, ou seja

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

é uma **frequência**.

O uso das variáveis acção-ângulo (J, w) é extremamente poderoso para extrairmos as frequências de movimentos periódicos!

Vejamos o caso do oscilador harmónico,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \equiv \alpha.$$

$$J = \oint p dq = \oint \sqrt{2m\alpha - m^2\omega^2 q^2} dq.$$

Como sabemos, $q = \sqrt{2\alpha/m\omega^2}\sin(\omega t + \delta) = \sqrt{2\alpha/m\omega^2}\sin\theta$,

$$J = \frac{2\alpha}{\omega}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{2\pi\alpha}{\omega}.$$

Resolvendo para α,

$$\alpha \equiv H = \frac{J\omega}{2\pi}.$$

A frequência é então

$$\boxed{\nu = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

TÉCNICO LISBOA

Este formalismo é especialmente poderoso no caso de **sistemas separáveis**. Como vimos anteriormente (sem convenção da soma sobre índices repetidos!)

$$p_i = \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial q_i},$$

o que fornece p_i como função de q_i e das n constantes de integração

$$p_i = p_i(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Trata-se da equação da órbita projectada no plano (q_i, p_i).

A ideia é construir variáveis acção-ângulo (J, w) para os pares (q_i, p_i) cuja órbita é periódica (mesmo que o movimento total não seja necessariamente períodico).

Para cada par (q_i, p_i) definimos a correspondente varíavel acção[10]

$$J_i = \oint p_i dq_i.$$

Usando a relação de transformação canónica,

$$J_i = \oint \frac{\partial W_i(q_i; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial q_i} dq_i.$$

Como as coordenadas (q_i, p_i) são separáveis, então podemos expressar $\alpha_i = \alpha_i(J_i)$,

$$W = W(q_1, \ldots, q_n; J_1, \ldots, J_n) = \sum_j W_j(q_j; J_i, \ldots, J_n),$$

e, portanto,

$$H = \alpha_1 = H(J_1, \ldots, J_n).$$

[10] Para o caso de q_i cíclica, $p_i = \alpha_i$ e $J = 2\pi p_i$

As variáveis ângulo vêm

$$w_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W_j(q_j; J_1, \ldots, J_n)}{\partial J_i},$$

que satisfazem as equações do movimento

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H(J_1, \ldots, J_n)}{\partial J_i} = \nu_i(J_1, \ldots, J_n) \quad \Longrightarrow \quad w_i = \nu_i t + \beta_i .$$

Nota: As constantes ν_i podem ser identificadas com frequências de um sistema multi-periódico (embora essa conclusão não seja óbvia - c.f. Goldstein, §10.7).

- Exmeplo: O problema de Kepler com variáveis acção-ângulo.

Voltamos ao Hamiltoniano em coordenadas esféricas

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta r^2}\right) - \frac{k}{r}.$$

As variáveis acção são

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi = \oint \frac{\partial W}{\partial \varphi} d\varphi = \oint \alpha_\varphi d\varphi,$$

$$J_\theta = \oint p_\theta d\theta = \oint \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^\theta}} d\theta,$$

$$J_r = \oint p_r dr = \oint \frac{\partial W}{\partial r} dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr.$$

O primeiro integral é trivial (coordenada cíclica)

$$J_\varphi = 2\pi\alpha_\varphi = 2\pi p_\varphi.$$

Para avaliar o segundo integral ao longo de "uma volta completa", começamos por definir $\cos a = \alpha_\varphi/\alpha_\theta$[11],

$$J_\theta = \alpha_\theta \oint \sqrt{1 - \cos^2 a \csc^2 \theta} d\theta.$$

É necessário perceber que a é o ângulo polar (latitude), pelo que a integração vai de $-\theta_0$ a θ_0, que é onde o radical se anula ($\sin\theta_0 = \cos a \rightarrow \theta_0 = \pi/2 - a$). Assim,

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \int_0^{\theta_0} \csc\theta \sqrt{\sin^2 a - \cos^2 \theta} d\theta.$$

[11]Nota: $\csc(x) = 1/\sin(x)$

Optando pela substituição $\cos\theta = \sin a \sin\psi$,

$$J_\theta = 4\alpha_\theta \sin^2 a \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\psi}{1-\sin^2 a \sin^2\psi} d\psi .$$

Após uma segunda substituição, $u = \tan\psi$, vem

$$\begin{aligned} J_\theta &= 4\alpha_\theta \sin^2 a \int_0^\infty \frac{du}{(1+u^2)(1+u^2\cos^2 a)} \\ &= 4\alpha_\theta \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-u^2} - \frac{\cos^2 a}{1+u^2\cos^2 a} \right) \\ &= 2\pi\alpha_\theta (1-\cos a) = 2\pi(\alpha_\theta - \alpha_\varphi). \end{aligned}$$

O último integral pode escrever-se na forma

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\theta + J_\varphi)^2}{4\pi^2 r^2}}\, dr,$$

Usando o teorema dos resíduos (c.f. Goldstein §10.8)

$$\mathrm{Res}(r \to 0) = i\,\frac{J_\theta + J_\varphi}{2\pi}, \quad \mathrm{Res}(r \to +\infty) = -\frac{2m}{\sqrt{-E}},$$

vem que

$$J_r = -(J_\theta + J_\varphi) + \pi k \sqrt{\frac{2m}{-E}}.$$

Portanto,

$$H = E = -\frac{2\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\theta + J_\varphi)^2}.$$

O problema é triplamente degenerado,

$$\nu = \frac{\partial H}{\partial J_r} = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial J_\varphi} = \frac{4\pi^2 m k^2}{\left(J_r + J_\theta + J_\varphi\right)^3}.$$

Isto era esperado, pois sabemos que para $E < 0$, as órbitas são fechadas (elipses). O período é

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu} = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}.$$

Comparando as expressões para H e ν, podemos ainda escrever (teorema do Virial)

$$H = \langle T + V \rangle = -\langle T \rangle = -\nu \frac{J_r + J_\theta + J_\varphi}{2},$$

ou seja

$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{1}{2}\nu J}$$