DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Complementos de Cálculo Diferencial e Integral

1ª Ficha de trabalho - 2º Semestre 2014/2015

1. Em $\mathbb{R}^n$ considere as normas definidas para cada $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \ , \qquad \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \qquad \text{e} \qquad \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \ ,$$

e os conjuntos

$$B_s(r) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{v}\|_s < r\}$$

com $s \in \{1, 2, \infty\}$ e $r \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Descreva geometricamente os conjuntos $B_s(r)$ nos casos $n = 2$ e $n = 3$.

   (b) Mostre que

$$B_1(r) \subset B_2(r) \subset B_\infty(r) .$$

   (c) Para cada s e s' em $\{1, 2, \infty\}$, determine o maior real α e o menor β tais que

$$\alpha \|\mathbf{v}\|_s \leqslant \|\mathbf{v}\|_{s'} \leqslant \beta \|\mathbf{v}\|_s .$$

2. Mostre que existem sucessões de conjuntos não vazios $A_n \subset \mathbb{R}$ tais que

$$A_{n+1} \subset A_n \quad \text{e} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$$

e que satisfazem ainda uma das seguintes condições

   (a) Todos A_n são fechados.

   (b) Todos A_n são limitados.

3. Mostre que qualquer conjunto aberto de $\mathbb{R}$ é a união enumerável de intervalos abertos.

4. Chama-se conjunto ternário de Cantor ao subconjunto C de $[0, 1]$ obtido retirando a este intervalo o intervalo aberto do meio obtido dividindo-o em três subintervalos de igual comprimento e assim sucessivamente para cada um dos subintervalos obtidos em cada iteração.

   (a) Prove que C é fechado e não vazio.

   (b) Determine o interior, a fronteira e o exterior de C.

   (c) Prove que $C' = C$.

   (d) Prove que C está contido no complementar de uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos com soma de comprimentos (no sentido das séries) igual a 1.

   (e) Prove que C é o conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}$ com (pelo menos) uma representação em base 3 em que intervêm apenas os algarismos 0 e 2, ou seja

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} \quad \text{com} \quad a_n \in \{0, 2\} .$$

   (f) Determine uma sobrejecção de C em $[0, 1]$.

   (g) Determine uma sobrejecção de C em $[0, 1]^2$.