Mecânica Analítica

2020-2021

Série 9

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

Nesta série, ilustramos alguns aspectos do formalismo de Hamilton-Jacobi.

⋆⋆ **Problema 1. Equação de Hamilton-Jacobi.** Como vimos, a equação de Hamilton-Jacobi obtém-se requerendo que S seja uma função do tipo $F_2(q_i, P_i, t)$, gerando uma transformação canónica tal que $K(Q_i, P_i) = 0$. Em termos das coordenadas Q_i e P_i, as equações do movimento são triviais. Uma vez determinada a função principal de Hamilton S, a solução para o problema original na base q_i, p_i decorre simplesmente das relações de transformação. O formalismo de Hamilton-Jacobi surge, portanto, como uma forma elegante e sofisticada de resolver problemas mecânicos (mas não necessariamente mais simples!).

a) Parta da definição $S = \displaystyle\int L dt$ para obter a equação de Hamilton-Jacobi.

b) A solução desta equação é formalmente escrita na forma

$$S = S(q_i, \ldots, q_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, t),$$

onde as $(n + 1)$ constantes α_i resultam das integrações nas n coordenadas q_i e no tempo. Obtenha a equação de Hamilton-Jacobi em termos da função característica $W = W(q_i, \alpha_i)$ caso o Hamiltoniano seja independente do tempo.

c) Obtenha um significado físico para a função característica de Hamilton, W.

⋆⋆ **Problema 2. A partícula livre.** Para avançarmos na compreensão do significado físico de S, consideremos uma partícula livre dada pelo Hamiltoniano

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m}.$$

a) Obtenha a equação de Hamilton-Jacobi correspondente.

b) Obtenha a solução para a função característica $W(x, \alpha)$.

c) Expresse S na forma de uma função geradora do tipo $F_2(x, P, t)$.

d) Obtenha as equações do movimento e perceba, mais uma vez, que a evolução temporal é uma transformação canónica no formalismo de Hamilton-Jacobi.

⋆⋆⋆ **Problema 3. O oscilador harmónico amortecido.** Considere um oscilador amortecido cuja equação do movimento é

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \gamma \dot{q} = 0.$$

a) Obtenha um Lagrangeano dependente do tempo que descreva este movimento.

b) Obtenha o Hamiltoniano correspondente.

c) Mostre que existe uma transformação canónica que torna o problema independente do tempo.

d) Mostre que a transformação é canónica sem recorrer aos parênteses de Poisson.

e) Obtenha o novo Hamiltoniano $K(Q, P)$ recorrendo a uma transformação do tipo $F_2(q, P, t)$.

f) Obtenha uma quantidade conservada no sistema original partindo da observação que $K(Q, P)$ é conservado.

g) Obtenha a equação de Hamilton-Jacobi associada ao novo Hamiltoniano $K(Q, P)$ e resolva o movimento.

⋆⋆ **Problema 4. O átomo de Bohr.** Recorrendo às variáveis acção–ângulo podemos chegzr a um importante resultado do dealbar da mecânica quântica e da compreensão do átomo de hidrogénio.

Comecemos por considerar o hamiltoniano a que está sujeito o electrão no átomo, num sistema de coordenadas esférico

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) - \frac{k}{r}$$

a) Mostre que as variáveis acção $J = \oint p_i dq_i$ para este problema se escrevem:

$$J_\varphi = 2\pi\alpha_\varphi$$

$$J_\theta = \oint \sqrt{\alpha_\theta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\theta}} d\theta$$

$$J_r = \oint \sqrt{2mE + 2m\frac{k}{r} - \frac{\alpha_\theta^2}{r^2}} dr$$

b) Integrando as expressões da alínea anterior chegue ao hamiltoniano

$$H(J_r, J_\varphi, J_\theta) = \frac{-2\pi^2 m k^2}{(J_r + J_\varphi + J_\theta)^2}$$

c) Proceda agora a uma transformação canónica $(J_i, w_i) \to (\bar{J}_i, \bar{w}_i)$, obtendo o Hamiltoniano nestas novas coordenadas, através da função geradora

$$F_2(\bar{J}_i, w_i) = (w_\varphi - w_\theta)\bar{J}_1 + (w_\theta - w_r)\bar{J}_2 + w_r\bar{J}_3$$

d) *Hipótese quântica* – Admita agora que a acção $\bar{J}_3$ se encontra quantizada, i.e. pode apenas tomar valores discretos, $\bar{J}_3 = nh \quad n \in \mathbb{N}$ em que h é a constante de Planck. Mostre que, a energia do electrão no átomo de Bohr, também ela quantizada, se torna

$$E = -\frac{E_0}{n^2} \quad E_0 = \frac{2\pi^2 m e^4}{(4\pi\varepsilon_0 h)^2}$$