Mecânica Analítica

2020-2021

Série 8

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

Nesta série, ilustramos alguns aspectos do formalismo Hamiltoniano e dos parêntesis de Poisson.

$\star\star$ **Problema 1. Multiplicadores de Lagrange.** Tal como no formalismo Lagrangeano, no formalismo Hamiltoniano também é possível introduzir os multiplicadores indeterminados de Lagrange no tratamento do constrangimento entre graus de liberdade.

a) Parta do Lagrangeano contendo k ligações holónomas do tipo $f_k(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$ e obtenha o Hamiltoniano correspondente.

> Assumindo $m < n$ ligações, o Lagrangeano com multiplicadores de Lagrange escreve-se
>
> $$L^\lambda = L + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k.$$
>
> Usando a transformação de Legendre, temos
>
> $$H = p_i \dot{q}_i - L^\lambda = p_i \dot{q}_i - L - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k.$$
>
> Cada um dos p_i's é obtido a partir da inversão da relação $p_i = \dfrac{\partial L^\lambda}{\partial \dot{q}_i}$, com $i = \{1, ..., n\}$, transformando a ligação $f_k(q_i, \dot{q}_i, t)$ em ligações do tipo $g_k(q_i, p_i, t)$

b) Escreva as equações de Hamilton para esse problema.

> Começamos por fazer a observação que a transformação de Legendre permite escrever
>
> $$H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(q_i, p_i, t)$$
>
> $$\underbrace{H(q_i, p_i, t) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(q_i, p_i, t)}_{H^\lambda(q_i, p_i, t)} = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

Por construção, o novo Hamiltoniano tem de satisfazer as equações de Hamilton,

$$\frac{\partial H^\lambda}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H^\lambda}{\partial q_i} = -\dot{p}_i,$$

de onde resulta

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i. \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i.$$

Neste último passo, assumimos, por simplicidade, que $\lambda_k =$ constantes.

c) Considere o pêndulo simples de massa m e haste ℓ. Use o formalismo desenvolvido para obter a força de reacção na haste.

O Hamiltoniano do problema é $H(\theta, p_\theta) = \dfrac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell\cos\theta$. A tensão na haste pode ser determinada promovendo o comprimento da haste a grau de liberdade, $\ell \to r$, através de uma ligação do tipo $g(r) = r - \ell$. O Hamiltoniano correspondente vem, então

$$H^\lambda(\theta, p_\theta, r, p_r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_r^2}{2m} - mgr\cos\theta + \lambda g(r).$$

Das equações de Hamilton para a variável r, temos

$$-\dot{p}_r = \frac{\partial H}{\partial r} + \lambda\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} - mg\cos\theta + \lambda$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} + \lambda\cancel{\frac{\partial g}{\partial p_r}} = \frac{p_r}{m}.$$

A imposição da ligação implica $\dot{r} = p_r/m = 0$, pelo que retiramos

$$\lambda = mg\cos\theta + \frac{p_\theta^2}{m\ell^3} = Q_r^\lambda.$$

d) Considere, agora, uma massa m segura por uma corda de comprimento ℓ no plano. No referencial em rotação, use o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar a frequência máxima de rotação do sistema, ω_c, sabendo que a corda parte quando a tensão igualar o valor crítico Q_c.

Usemos coordenadas polares (r, θ). O Hamiltoniano no referencial em rotação é $H(\theta, p_\theta) = \dfrac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{L}$, onde $\mathbf{L} = (\mathbf{r}\times\mathbf{p}) = m\ell^2\omega\mathbf{e}_z = p_\theta\mathbf{e}_z$. Promovendo ℓ a grau de liberdade, $\ell \to r$, através da ligação $g(r) = r - \ell$, temos

$$H^\lambda(\theta, p_\theta, r, p_r) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_r^2}{2m} - \omega p_\theta + \lambda g(r).$$

Repetindo o procedimento da alínea anterior, retiramos imediatamente que $Q_r^\lambda = \lambda\dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{p_\theta^2}{mr^3}$. Da equação para θ, retiramos

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H^\lambda}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} - \omega.$$

Fazendo $r = \ell$, a atendendo a que no referencia em rotação temos $\dot{\theta} = 0$, temos $Q_r^\lambda = m\ell\omega^2$. Assim, o valor crítico ω_c é dado por

$$\omega_c = \sqrt{\frac{Q_c}{m\ell}}.$$

⋆⋆ **Problema 2. Momento angular.** O momento angular de uma partícula é dado por $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

a) Tendo em conta os parênteses de Poisson fundamentais,

$$[r_i, r_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [r_i, p_j] = \delta_{ij},$$

calcule $[r_i, L_j]$ e $[p_i, L_j]$.

Usando a definição de momento angular, $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$ temos

$$[r_i, L_j] = [r_i, \epsilon_{jk\ell} r_k p_\ell] = \epsilon_{jk\ell}[r_i, r_k p_\ell].$$

Usando a propriedade $[A, BC] = [A, B]C + [A, C]B$, temos

$$[r_i, L_j] = \epsilon_{jk\ell} \left(\cancel{[r_i, r_k]} p_\ell + [r_i, p_\ell] r_k \right) = \epsilon_{jk\ell} \delta_{i\ell} r_k = \epsilon_{jki} r_k = \epsilon_{ijk} r_k.$$

Procedemos de forma similar para a segunda identidade,

$$[p_i, L_j] = \epsilon_{jk\ell} \left([p_i, r_k] p_\ell + \cancel{[p_i, p_\ell]} r_k \right) = -\epsilon_{jk\ell} \delta_{ik} p_\ell = -\epsilon_{ji\ell} p_\ell = \epsilon_{ij\ell} p_\ell \equiv \epsilon_{ijk} p_k,$$

onde, neste último passo, apenas trocámos o nome to índice mudo, $\ell \to k$ (só por questões estéticas).

b) Mostre que $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$ e que $[L_i, \mathbf{L}^2] = 0$.

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= [\epsilon_{ik\ell} r_k p_\ell, L_j] = \epsilon_{ik\ell} \left(\underbrace{[r_k, L_j]}_{\epsilon_{kjn} r_n} p_\ell + \underbrace{[p_\ell, L_j]}_{\epsilon_{\ell jm} p_m} r_k \right) \\
&= -\left(\epsilon_{ki\ell} \epsilon_{kjn}\right) r_n p_\ell + \left(\epsilon_{ik\ell} \epsilon_{jm\ell}\right) p_m r_k \\
&= -\left(\delta_{ij} \delta_{\ell n} - \delta_{in} \delta_{\ell j}\right) r_n p_\ell + \left(\delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kj}\right) p_m r_k \\
&= \cancel{-r_n p_n \delta_{ij}} + r_i p_j + \cancel{r_k p_k \delta_{ij}} - p_i r_j = r_i p_j - r_j p_i.
\end{aligned}$$

O último termo é igual a $\epsilon_{ijk} L_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m} r_\ell p_m = r_i p_j - r_j p_i$. Por fim,

$$[L_i, \mathbf{L}^2] = [L_i, L_j L_j] = 2[L_i, L_j]L_j = 2\underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{anti-sim.}}\underbrace{L_k L_j}_{\text{sim.}} = 0.$$

c) Os parêntesis de Poisson do momento angular definem uma álgebra de Lie (não-comutativa) de factor de estrutra ϵ_{ijk}. Os elementos L_k geram um grupo. Obtenha o grupo gerado por L_z.

Sejam $L_k = \{L_x, L_y, L_z\}$, $r_i = \{x, y, z\}$ e $p_i = \{p_x, p_y, p_z\}$. O momento angular L_z é

$$L_z = \epsilon_{3ij} r_i p_j = \epsilon_{312} r_1 p_2 + \epsilon_{321} r_2 p_1 = x p_y - y p_x,$$

como, aliás, já sabíamos. O grupo gerado por L_z, são as matrizes de parâmetro θ que se obtém por exponenciação da transformação canónica infinitesimal (TCI) produzida pelos seus parêntesis de Poisson. Matematicamente, seja x a TCI de parâmetro $d\theta$ (rotação infinitesimal)

$$dx = d\theta[x, L_z].$$

A rotação finita (i.e. o grupo de parâmetro θ) será obtido por exponenciação,

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + \theta[x, L_z]_0 + \frac{\theta^2}{2!}[[x, L_z], L_z]_0 + \frac{\theta^3}{3!}[[[x, L_z], L_z], L_z]_0 + \ldots \\
&= x_0 - y_0\theta - x_0\frac{\theta^2}{2!} + y_0\frac{\theta^3}{3!} + x_0\frac{\theta^4}{4!} + \ldots \\
&= x_0 \sum_{\ell_0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{\theta^{2\ell}}{(2\ell)!} - y_0 \sum_{\ell_0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{\theta^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\
&= x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta.
\end{aligned}$$

Repetindo o processo para a coordenada y, teríamos $y = x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta$. Assim, o grupo gerado por L_z, o grupo SO(2), é um grupo de Lie representado pelas matrizes

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

d) Aproveite para mostrar que o grupo gerado por L_z é um grupo de simetria do Hamiltoniano do problema dos potenciais centrais.

Com uma ligeira mudança de notação,

$$H(r, L_r, \theta, L_z) = \frac{L_r^2}{2m^2} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r),$$

$$[L_z, H] = \left[L_z, \frac{L_r^2}{2m^2} + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r)\right] = \frac{1}{2m}[L_z, L_r^2] + \frac{1}{2m}[L_z, \mathbf{L}_z^2] + \frac{1}{2m}[L_z, V(r)].$$

O primeiro termo é nulo (verificar!), e o segundo também, como vimos no Problema 2. Quanto ao terceiro termo

$$[L_z, V(r)] \equiv [p_\theta, V(r)] = \frac{\partial p_\theta}{\partial p_r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial p_\theta}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial p_r} + \frac{\partial p_\theta}{\partial \theta}\frac{\partial V}{\partial p_\theta} - \frac{\partial p_\theta}{\partial p_\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

Como $[L_z, H] = 0$ (o que, na verdade, só expressa a conservação do momento angular), as TCIs geradas por L_z são simétricas para H.

$\star\star$ **Problema 3. Operadores de criação e destruição.** Considere um oscilador harmónico unidimensional cujo Hamiltoniano é dado

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \ ,$$

em que m é a massa e ω é a frequência de oscilação. Definamos a quantidade complexa

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\frac{p}{m\omega} + iq\right) \ ,$$

com a^* designando a correspondente complexa conjugada.

a) Exprima o Hamiltoniano em termos de a e a^*.

Multiplicando a pelo seu complexo conjugado, $a*$,

$$a^*a = \frac{m\omega}{2}\left(\frac{p^2}{m^2\omega^2} + q^2\right) = \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{1}{2}m\omega q^2,$$

de onde se conclui que $H = \omega a^* a = \omega |a|^2$.

b) Calcule os parêntesis de Poisson $[a, a^*]$, $[a, H]$ e $[a^*, H]$. Interprete fisicamente os resultados obtidos.

$$[a, a^*] = \frac{m\omega}{2}[\frac{p}{m\omega} + iq, \frac{p}{m\omega} - iq] = \frac{1}{2}[p, -iq] + \frac{1}{2}[iq, p] = i,$$

$$[a, H] = \omega[a, aa^*] = \cancel{\omega[a, a]}a^* + \omega[a, a^*]a = i\omega a,$$

$$[a^*, H] = [a, H^*]^* = [a, H]^* = -i\omega a^*,$$

onde se usou o facto de H ser real, i.e. $H^* = H$.

c) Escreva a equação do movimento em termos das quantidades a e a^* e encontre a solução.

Utilizamos os parênteses de Poisson para obter a equação do movimento para a,

$$\dot{a} = [a, H] = i\omega a,$$

o que implica $a(t) = a_0 e^{i\omega t}$ e, portanto, $a^*(t) = a_0^* e^{-i\omega t}$. Invertendo a relação, obtemos

$$q(t) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{m\omega}}\,(a(t) - a^*(t)) = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\,(a_0 - a_0^*)\sin(\omega t) = 2i\mathrm{Im}\underbrace{\left[\sqrt{\frac{2}{m\omega}}a_0\right]}_{q_0}\sin(\omega t).$$

$$p(t) = \frac{\sqrt{2m\omega}}{2}\,(a(t) + a^*(t)) = \sqrt{2m\omega}(a_0 + a_0^*)\cos(\omega t) = \underbrace{2\mathrm{Re}\left[\sqrt{2m\omega}a_0\right]}_{p_0}\cos(\omega t).$$

Tomando a parte real, podemos ainda observar que $p(t) = m\dot{q}(t)$, como é suposto.

⋆ **Problema 4. Movimento uniformemente acelerado.** O movimento de uma partícula de massa m sujeita a uma aceleração a constante a uma dimensão é descrito, como sabe, por

$$x = x_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{at^2}{2}\ , \quad p = p_0 + mat\ .$$

Mostre que a transformação das variáveis $(p_0, x_0) \to (p, x)$ é canónica:

a) através de um teste envolvendo parêntesis de Poisson;

Sabendo que x_0 e p_0 satisfazem os parêntesis de Poisson fundamentais, $[x_0, x_0] = [p_0, p_0] = 0$ e $[x_0, p_0] = 1$, vejamos se o mesmo acontece para x e p após a evolução temporal:

$$[x, p] = [x_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{at^2}{2}, p_0 + mat] = [x_0, p_0] + \frac{t}{m}[p_0, p_0] = 1\checkmark$$

É fácil verificar que os restantes dois se verificam trivialmente, $[x, x] = [p, p] = 0$.

b) através da determinação de uma função geradora (para $t \neq 0$) do tipo $F_1(x, x_0, t)$.

Usando uma função geradora do tipo $F_1(q_i, Q_i, t)$, com $q_1 \equiv x_0$, $Q_1 \equiv x$, $p_1 \equiv p_0$ e $P_1 \equiv p$ ($q_2, Q_2, ...; p_2, P_2, ... = 0$, pois só temos um grau de liberdade!) a relação de transformação é (ver tabela dada na aula teórica)

$$p_0 = \frac{\partial F_1}{\partial x_0}, \quad p = -\frac{\partial F_1}{\partial x}.$$

Integrando a primeira equação, $F_1(x_0, x, t) = p_0 x_0 + f(x, t)$, onde $f(x, t)$ resulta como constante de integração parcial. Para a determinarmos, usamos a segunda equação,

$$p = p_0 + mat = -\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \Longrightarrow f(x, t) = -x(p_0 + mat) + c.$$

$$\boxed{F_1(x_0, x, t) = p_0 x_0 - x(p_0 + mat) + c}$$