Oscilações e Ondas

19 Nov

N osciladores acoplados

$$j = 1, \dots, N$$

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -\sum_{k=1}^{N} K_{jk} x_k$$

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = -KX$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad X(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[b_\alpha A^\alpha \cos(\omega_\alpha t) + c_\alpha A^\alpha \sin(\omega_\alpha t) \right]$$

A^α são os modos normais [vectores próprios de $-M^{-1}K$]

b_α e c_α são coeficientes a determinar a partir das cond. iniciais

Condições iniciais

$$x(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[b_\alpha A^\alpha \cos(\omega_\alpha t) + c_\alpha A^\alpha \sin(\omega_\alpha t) \right]$$

$$x(0) = \sum_\alpha b_\alpha A^\alpha$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{3N} \end{pmatrix} = b_1 A^1 + b_2 A^2 + \dots$$

vector

posições (relativas ao equilíbrio) em $t=0$

$$\dot{x}(0) \equiv \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_\alpha c_\alpha \omega_\alpha A^\alpha$$

velocidades em $t=0$

Relação entre coordenadas normais e condições iniciais.

A nossa primeira forma de resolver o problema dos 2 pêndulos foi encontrando combinações lineares de coordenadas que oscilam com uma frequência única

sol. geral: $x(t) = b A^1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + c A^2 \cos(\omega_2 t - \theta_2)$

$$x(t) = b A^1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + c A^2 \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

$$\downarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

modos normais:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2 soluções

$$x_1(t) = b \cos(\omega_1 t - \theta_1) + c \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

$$x_2(t) = b \cos(\omega_1 t - \theta_1) - c \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

$\longrightarrow$ de onde

coordenadas normais

$$\begin{cases} X^1(t) \equiv x_1(t) + x_2(t) = 2b \cos(\omega_1 t - \theta_1) \\ X^2(t) \equiv x_1(t) - x_2(t) = 2c \cos(\omega_2 t - \theta_2) \end{cases}$$

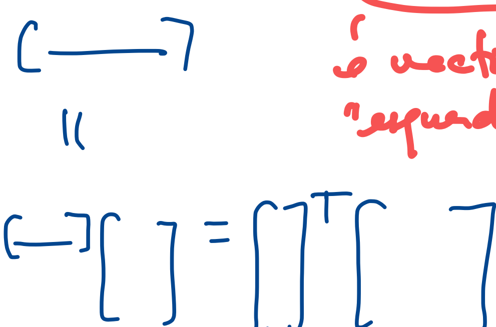
Isto permite estabelecer a ligação às coord. iniciais de uma forma bastante simples.

Construir, a partir de cada modo normal A^α (freq ω_α), um vector linha

$$B^\alpha = A^{\alpha T}\,\Pi$$

é vector próprio "esquerdo" de $\Pi^{-1}K$

$$\boxed{B^\alpha \Pi^{-1} K = \omega_\alpha^2 B^\alpha}$$



compare-se com

$$\Pi^{-1} K A^\alpha = \omega_\alpha^2 A^\alpha$$

$$B^\alpha = A^{\alpha T}\Pi$$

$$\boxed{B^\alpha \Pi^{-1} K = \omega_\alpha^2 B^\alpha}$$

$$\boxed{K\Pi^{-1} A^\alpha = \omega_\alpha^2 A^\alpha}$$

transpose

$$\underbrace{(K\Pi^{-1}A^\alpha)^T}_{A^{\alpha T} K^T (\Pi^{-1})^T} = \omega_\alpha^2 A^{T\alpha}$$

$$(\Pi^{-1})^T = \Pi^{-1}$$

"symmetric"

$$K = K^T$$

$$A^{\alpha T} K \Pi^{-1} = \omega_\alpha^2 A^{\alpha T}$$

$$\Pi \quad \Pi$$

$$A^{\alpha T} K = \omega_\alpha^2 A^{\alpha T}\Pi$$

$$B^\alpha$$

$$A^{\alpha T}\Pi\,\Pi^{-1} K = \omega_\alpha^2 B^\alpha$$

$$B^\alpha$$

$$B^\alpha M^{-1} K = \omega_\alpha^2 B^\alpha$$

$$\longrightarrow \quad x^\alpha = B^\alpha \cdot X = \sum_j b^\alpha_j x_j$$

$\downarrow$ comb. lineal de coordenadas

$\downarrow$ coord. normal (oscila con freq. única ω_α)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = B^\alpha \frac{d^2 X}{dt^2} = -B^\alpha M^{-1} K X = -B^\alpha \omega_\alpha^2 X$$

$$= -\omega_\alpha^2 x^\alpha \quad ✓$$

Os vectores B^α, a partir dos quais se constroem as coord. normais, têm a mesma informação que os modos normais

→ ajuda a fixar b_α e c_α a partir das cond. iniciais

$X^\beta = B^\beta X$ ⟶ coordenada normal que oscile com freq. ω_β

$X^\beta = B^\beta X(t) \propto e^{\pm i\omega_\beta t}$

na solução geral (soma sobre modos normais)

$$X(t) = \sum_\alpha b_\alpha A^\alpha \cos(\omega_\alpha t) + c_\alpha A^\alpha \sin(\omega_\alpha t)$$

só os termos com $\alpha=\beta$ é que oscilam c/ freq. ω_β.

logo $B^\beta A^\alpha = A^{\beta T} \Pi A^\alpha = 0$, $\beta \neq \alpha$

(ver nota sobre modos degenerados)

logo

$$X(0) = \sum_\alpha b_\alpha A^\alpha$$

$$\longrightarrow B^\beta X(0) = \sum_\alpha b_\alpha B^\beta A^\alpha$$

$$= b_\beta B^\beta A^\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{b_\alpha = \frac{B^\alpha X(0)}{B^\alpha A^\alpha}}$$

coeficientes a partir dos modos normais e $X(0)$

Fazendo também para as velocidades

$$\dot{x}(0) = \sum_\alpha \omega_\alpha c_\alpha A^\alpha$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega_\alpha c_\alpha = \frac{1}{B^\alpha A^\alpha}\,\dot{x}(0)}$$

[relacionam cond. iniciais na base – coord. normais – em que tudo é diagonal]

Oscilações forçadas (e ressonância) em sistemas acoplados

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \Gamma \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t)/m$$

1 grau de liberdade

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t) + \underbrace{\Gamma}_{\text{matriz}} \frac{d}{dt}X(t) + \underbrace{M^{-1}K}_{\text{matriz}} X(t) = \underbrace{M^{-1}\overbrace{F(t)}^{\text{vector}}}_{\text{todas as comp. c/ mesma freq.}}$$

[fica como problema....]