Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEFT

2º Teste (VA) - 6 de Janeiro de 2020 - 9:00 às 10:30

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = x^2 \operatorname{senh} x \quad (b)\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \tan(1+\sqrt{x}) \quad (c)\ h(x) = \frac{x+7}{(x-1)(x^2+2x+5)}$$

Problema 2 (4 val.) Considere as funções $f(x) = \dfrac{6}{3+x^2}$ e $g(x) = 7 - 2x^2$.

Sendo $A = \{(x,y) : 0 < y < f(x)\}$ e $B = \{(x,y) : 0 < y < g(x)\}$, calcule a área do conjunto $A \cup B$.

Problema 3 (4,5 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1-k}{\sqrt{3+k^5}} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^2 e^k}{(2k)!} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [1/k - \ln(1+1/k)]$$

Problema 4 (4 val.) Neste grupo, definimos $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-9)^k \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)(2k+1)!}$.

(a) Determine o domínio de convergência da série, e especifique a parte desse domínio onde a série é absolutamente convergente.

(b) Mostre que f tem um ponto de estacionaridade em $x = 0$ e classifique-o.

(c) Justifique que f é integrável em $I = [0,1]$ e calcule o integral de f em I com erro inferior a $1/100$. Diga se o seu resultado é uma aproximação por defeito ou por excesso do valor exacto.

(d) Calcule f' e determine em particular $f'(\sqrt{\pi})$.

Problema 5 (3 val.) Responda às seguintes questões:

(a) Sendo $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = s > 0$, prove que o raio de convergência de $\sum_n a_n x^n$ é $1/s$.

(b) Seja $f(x) = 1$ quando $1/2^{2n} < x < 1/2^{2n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$, e $f(x) = 0$ caso contrário. Mostre que f é Riemann-integrável em $[0,1]$ e calcule o respectivo integral.

(c) Mostre que $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \operatorname{sen}(nx)$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

(d) Continuando a alínea anterior, calcule $g'(0)$.

Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEFT

2º Teste (VB) - 6 de Janeiro de 2020 - 9:00 às 10:30

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = x\sec^2 x \qquad (b)\ g(x) = \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}} \qquad (c)\ h(x) = \frac{x+3}{(x+2)(x^2+4x+5)}$$

Problema 2 (4 val.) Considere as funções $f(x) = \dfrac{2}{1+3x^2}$ e $g(x) = 3 - 6x^2$.

Sendo $A = \{(x,y) : 0 < y < f(x)\}$ e $B = \{(x,y) : 0 < y < g(x)\}$, calcule a área do conjunto $A \cup B$.

Problema 3 (4,5 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1+k^2}{\sqrt{2+k^5}} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(k!)^2e^{2k}}{(2k)!} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k[1/k - \operatorname{sen}(1/k)]$$

Problema 4 (4 val.) Neste grupo, definimos $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-4)^k\frac{x^{k+1}}{(k+1)(2k)!}$.

(a) Determine o domínio de convergência da série, e especifique a parte desse domínio onde a série é absolutamente convergente.
(b) Mostre que f tem um ponto de estacionaridade em $x = 0$ e classifique-o.
(c) Justifique que f é integrável em $I = [0,1]$ e calcule o integral de f em I com erro inferior a $1/10$. Diga se o seu resultado é uma aproximação por defeito ou por excesso do valor exacto.
(d) Calcule f' e determine em particular $f'(\pi^2)$.

Problema 5 (3 val.) Responda às seguintes questões:

(a) Mostre que $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\operatorname{sen}(nx)$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.
(b) Continuando a alínea anterior, calcule $g'(0)$.
(c) Sendo $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = s > 0$, prove que o raio de convergência de $\sum_n a_n x^n$ é $1/s$.
(d) Seja $f(x) = 1$ quando $1/2^{2n} < x < 1/2^{2n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$, e $f(x) = 0$ caso contrário. Mostre que f é Riemann-integrável em $[0,1]$ e calcule o respectivo integral.