Mecânica Analítica

2020-2021

Série 9

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

Nesta série, ilustramos alguns aspectos do formalismo de Hamilton-Jacobi.

$\star\star$ **Problema 1. Equação de Hamilton-Jacobi.** Como vimos, a equação de Hamilton-Jacobi obtém-se requerendo que S seja uma função do tipo $F_2(q_i, P_i, t)$, gerando uma transformação canónica tal que $K(Q_i, P_i) = 0$. Em termos das coordenadas Q_i e P_i, as equações do movimento são triviais. Uma vez determinada a função principal de Hamilton S, a solução para o problema original na base q_i, p_i decorre simplesmente das relações de transformação. O formalismo de Hamilton-Jacobi surge, portanto, como uma forma elegante e sofisticada de resolver problemas mecânicos (mas não necessariamente mais simples!).

a) Parta da definição $S = \int L dt$ para obter a equação de Hamilton-Jacobi.

A ideia é usarmos a transformada de Legendre inversa, relacionando L com H:

$$dS = Ldt = (p_i \dot{q}_i - H)dt = p_i dq_i - H dt.$$

Uma vez que, em princípio, $S = S(q_i, P_i, t)$, vem que

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt = p_i dq_i - H dt.$$

Daqui vem que $\dfrac{\partial S}{\partial P_i} = 0$ e $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$, pelo que $S = S(q_i, t)$ e satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

b) A solução desta equação é formalmente escrita na forma

$$S = S(q_i, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, t),$$

onde as $(n+1)$ constantes α_i resultam das integrações nas n coordenadas q_i e no tempo. Obtenha a equação de Hamilton-Jacobi em termos da função característica $W = W(q_i, \alpha_i)$ caso o Hamiltoniano seja independente do tempo.

Para $H \neq H(t)$, a equação de Hamilton-Jacobi pode ser escrita na forma

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = h_0,$$

ou seja $S(q_i, \alpha_i, t) = -h_0 t + W(q_i, \alpha_i)$. Por comodidade, podemos escolher h_0 como sendo uma das constantes de integração, $h_0 = \alpha_1$. Assim,

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) - \alpha_1 = 0.$$

Podemos observar que $W(q_i, \alpha_i)$ é compatível com as relações de transformação pretendidas para este formalismo, $\dot{Q}_i = 0$ e $\dot{P}_i = 0$ (uma vez que $K = 0$)

$$P_i = \alpha_i, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \beta_i.$$

c) Obtenha um significado físico para a função característica de Hamilton, W.

Para obtermos o significado físico de W, calculamos o seu diferencial (ou a derivada temporal total), na esperança de podermos relacionar com algo que já conhecemos:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \cancel{d\alpha_i} = p_i dq_i.$$

Assim, $W = \int p_i dq_i$, o que corresponde à acção abreviada.

$\star\star$ **Problema 2. A partícula livre.** Para avançarmos na compreensão do significado físico de S, consideremos uma partícula livre dada pelo Hamiltoniano

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m}.$$

a) Obtenha a equação de Hamilton-Jacobi correspondente.

Uma vez que, pela relação de transformação canónica, temos que $p = \dfrac{\partial S}{\partial x}$, podemos escrever

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

b) Obtenha a solução para a função característica $W(x, \alpha)$.

Uma vez que $H \neq H(t)$, $H = E$ é uma constante. Assim, $S(x, \alpha, t) = W(x, \alpha) - Et$ e

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = E \Leftrightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = 2mE \equiv \alpha^2,$$

cuja solução é $W(x,\alpha) = \alpha x + x_0$. Da mesma forma,

$$S(x,\alpha,t) = \alpha x + x_0 - \frac{\alpha^2}{2m}t.$$

Como x_0 é uma constante irrelevante, podemos ignorá-la.

c) Expresse S na forma de uma função geradora do tipo $F_2(x,P,t)$.

Uma vez que S é desenhado por forma a que

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \frac{\alpha^2}{2m} = \frac{p^2}{2m},$$

de onde se tem $p = \alpha$. Assim, $S(x,\alpha,t) = F_2(x,P,t)$ se

$$S(x,P,t) = Px - \frac{P^2}{2m}t.$$

d) Obtenha as equações do movimento e perceba, mais uma vez, que a evolução temporal é uma transformação canónica no formalismo de Hamilton-Jacobi.

Agora basta-nos usar as relações de transformação para uma função geradora do tipo $F_2(x,P,t)$:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = P, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P} = x - \frac{P}{m}t \equiv x - vt.$$

Assim sendo, Q e P são os valores iniciais para $p = mv$ e x.

$\star\star\star$ **Problema 3. O oscilador harmónico amortecido.** Considere um oscilador amortecido cuja equação do movimento é

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \gamma \dot{q} = 0.$$

a) Obtenha um Lagrangeano dependente do tempo que descreva este movimento.

O Lagrangeano do oscilador harmónico sem atrito é $L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 - \omega_0^2 q^2\right)$. Como sabemos, no caso do movimento com atrito a energia decresce exponencialmente no tempo. Tentemos um Lagrageano do tipo

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{m}{2}e^{-at}\left(\dot{q}^2 - \omega_0^2 q^2\right).$$

Usando as equações de Euler-Lagrange, vemos que obtemos a equação do movimento descrita no enunciado se $a = -\gamma$.

b) Obtenha o Hamiltoniano correspondente.

Usando a transformação de Legendre,

$$H(q,p,t) = p\dot{q} - L(q,\dot{q},t), \quad \text{onde} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}e^{\gamma t},$$

de onde resulta $\dot{q} = (p/m)e^{-\gamma t}$. Usando esta última relação para eliminar $\dot{q}$, temos

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m}e^{-\gamma t} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2}e^{\gamma t}.$$

c) Mostre que existe uma transformação canónica que torna o problema independente do tempo.

Vejamos a forma das equações do movimento,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}e^{-\gamma t}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega_0^2 q e^{\gamma t}.$$

Por inspecção, podemos perceber que a transformação $(q,p) \to (Q,P)$ da forma

$$Q = qe^{\gamma t/2}, \quad P = pe^{-\gamma t/2}$$

resulta numa quantidade $\mathcal{A}$ independente do tempo[a].

$$\mathcal{A}(Q,P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 Q^2.$$

[**Nota:** Repare que as variáveis (Q,P) não satisfazem as equações de Hamilton para $\mathcal{A}$ (e daí termos mudado o nome de propósito!) Se forem canónicas, hão-de satisfazer equações de Hamilton para um novo Hamiltoniano $K(Q,P)$, como ficará aparente a seguir]. Falta apenas demonstrar que esta transformação é canónica. Uma maneira de o fazer, é verificar que satisfazem os parênteses de Poisson fundamentais

$$[Q,Q] = [q,q]e^{-\gamma t} = 0, \quad [P,P] = [p,p]e^{\gamma t} = 0, \quad [Q,P] = [qe^{-\gamma t/2}, pe^{\gamma t/2}] = [q,p] = 1\checkmark.$$

[a] Atenção: o novo Hamiltoniano $K(Q,P)$ não resulta da substituição directa de Q e P em H. Para isso, precisamos de recorrer à função geradora!

d) Mostre que a transformação é canónica sem recorrer aos parênteses de Poisson.

Se a transformação é canónica, então as novas variáveis têm de satisfazer as equações do movimento para um novo Hamiltoniano $K(Q,P)$,

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}.$$

Assim,

$$\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} = \frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q} = \frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} = -\frac{\partial \dot{P}}{\partial P}.$$

Usando a definição,

$$\dot{Q} = \underbrace{\dot{q}}_{\frac{\partial H}{\partial p}} e^{\gamma t/2} + \frac{\gamma}{2} q e^{\gamma t/2} = \frac{P}{m} + \frac{\gamma}{2} Q,$$

$$\dot{P} = \underbrace{\dot{p}}_{-\frac{\partial H}{\partial q}} e^{-\gamma t/2} - \frac{\gamma}{2} p e^{-\gamma t/2} = -\frac{m}{2}\omega_0^2 Q - \frac{\gamma}{2} P.$$

Usando a condição deduzida acima,

$$\boxed{\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} = \frac{\gamma}{2} = -\frac{\partial \dot{P}}{\partial P}}$$

e) Obtenha o novo Hamiltoniano $K(Q, P)$ recorrendo a uma transformação do tipo $F_2(q, P, t)$.

A transformação canónica do tipo $F_2(q, P, t)$ tem as seguintes relações de transformação (ver tabela nas aulas teóricas)

$$p = Pe^{\gamma t/2} = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = qe^{\gamma t/2} = \frac{\partial F_2}{\partial P},$$

de onde retiramos facilmente que $F_2(q, P, t) = qPe^{\gamma t/2}$. Assim,

$$K(Q, P) = H(q, p) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{A}(Q, P) + \frac{\gamma}{2} qPe^{\gamma t/2}.$$

Eliminando q e p através da transformação canónica,

$$K(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 Q^2 + \frac{\gamma}{2} QP \neq H(Q, P).$$

Aqui fica claro que $K(Q, P)$, que é uma quantidade conservada, não se obtém por mera substituição $(q, p) \to (Q, P)$ no Hamiltoniano original.

♣ A transformação $H(q, p) \to K(Q, P)$ é sempre feita com uma função geradora! ♣

f) Obtenha uma quantidade conservada no sistema original partindo da observação que $K(Q, P)$ é conservado.

Como $K(Q, P)$ é conservado, podemos obter uma quantidade conservada (que não o Hamiltoniano, pelas razões acima apontadas) através da substituição $(Q, P) \to (q, p)$ no Hamiltoniano final,

$$\mathcal{B}(q, p) = \frac{p^2}{2m} e^{-\gamma t} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2 e^{\gamma t} + \frac{\gamma}{2} qp.$$

Podemos verificar mostrando que $d\mathcal{B}/dt = 0$ recorrendo às equações do movimento para q e p. A obtenção desta quantidade conservada não é de todo óbvio recorrendo apenas ao Hamiltoniano original $H(q, p)$.

g) Obtenha a equação de Hamilton-Jacobi associada ao novo Hamiltoniano $K(Q, P)$ e resolva o movimento.

A equação de Hamilton-Jacobi é $K + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$, onde $S = S(Q, \alpha, t)$ é a função principal de Hamilton,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 Q^2 + \frac{\gamma}{2}Q\frac{\partial S}{\partial Q} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Como $K \neq K(t) = E$, fazemos $S(Q, \alpha, t) = W(Q, \alpha) - Et$, tal que

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial Q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 Q^2 + \frac{\gamma}{2}Q\frac{\partial W}{\partial Q} = E.$$

Introduzindo a quantidade $x = \sqrt{m\omega_0}Q$, temos

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + ax\frac{\partial W}{\partial x} + \left(x^2 - b\right) = 0,$$

onde $a = \gamma/\omega_0$ e $b = 2E/\omega_0$. Resolvendo para $\partial_x W$,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{ax}{2} \pm \sqrt{b - \left(1 - \frac{a^2}{4}x^2\right)} \Longrightarrow W = -\frac{ax^2}{4} \pm \int \sqrt{b - \left(1 - \frac{a^2}{4}x^2\right)}dx.$$

- <u>$\gamma < 2\omega_0$</u> : Neste caso, $a < 2$ e, definindo $c = \sqrt{(1 - a^2/4)} > 0$, temos

$$S = W - Et = -\frac{ax^2}{4} - Et \pm \frac{1}{\sqrt{b}}\int \sqrt{1 - \frac{c^2}{b}x^2}dx.$$

  Recorrendo à relação de transformação $\mathcal{Q} = \partial_\alpha S = \partial_E S \equiv \beta$, com $\beta = \text{const.}$,

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \omega_0 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - c^2x^2/b^2}} = -t \pm \frac{1}{c\omega_0}\arcsin\left(\frac{cx}{\sqrt{b}}\right).$$

  Daqui podemos escrever $\arcsin\left(\dfrac{cx}{\sqrt{b}}\right) = \mp c\omega_0(t + \beta) = \omega t + \varphi$, onde

$$\omega = c\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}, \quad \varphi = c\omega_0\beta = \beta\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

  Em termos das variáveis originais, temos $q(t) = A_0 e^{-\gamma t/2}\sin(\omega t + \varphi)$.

- <u>$\gamma = 2\omega_0$</u> : Neste caso, $a = 2$ e $S = -\dfrac{ax^2}{4} - Et \pm \sqrt{b}x$, de onde se tem

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \frac{x}{\omega_0\sqrt{b}} \qquad \Longrightarrow q(t) = (A_0 t + B_0)e^{-\gamma t/2}.$$

- <u>$\gamma > 2\omega_0$</u> : Aqui, temos $a > 2$ e S satisfaz a equação

$$S = -\frac{ax^2}{4} - Et \pm \int \sqrt{b + d^2x^2}dx, \quad d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}.$$

  Repetindo o procedimento, $q(t) = A_0 e^{-\gamma t/2}\sinh(\omega t + \varphi)$, onde $\omega = \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$ e $\varphi = d\omega\beta$.