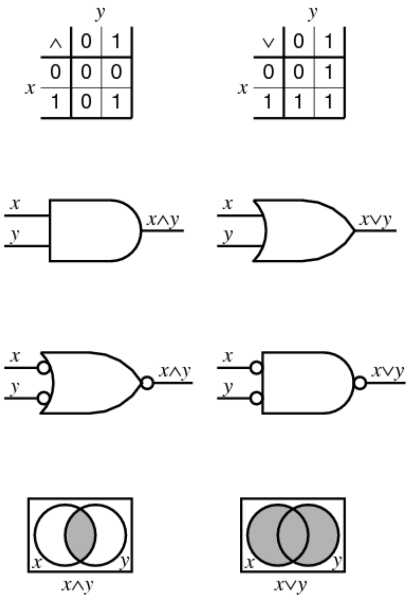
TÉCNICO LISBOA

Sistemas Digitais (SD)

Álgebra de Boole



Aula Anterior

- **Na aula anterior:**
  - Sistemas de numeração
    - Base 10
    - Base 2
    - Base 8 e 16
  - Operações aritméticas básicas
  - Mudança de sistema de numeração
  - Códigos

Planeamento

SEMANA	TEÓRICA 1	TEÓRICA 2	PROBLEMAS/LABORATÓRIO
17/Fev a 21/Fev	Introdução	Sistemas de Numeração	
24/Fev a 28/Fev	CARNAVAL	Álgebra de Boole	P0
02/Mar a 06/Mar	Elementos de Tecnologia	Funções Lógicas	VHDL
9/Mar a 13/Mar	Minimização de Funções	Minimização de Funções	L0
16/Mar a 20/Mar	Def. Circuito Combinatório; Análise Temporal	Circuitos Combinatórios	P1
23/Mar a 27/Mar	Circuitos Combinatórios	Circuitos Combinatórios	**L1**
30/Mar a 03/Abr	Circuitos Sequenciais: Latches	Circuitos Sequenciais: Flip-Flops	P2
06/Abr a 10/Abr	FÉRIAS DA PÁSCOA	FÉRIAS DA PÁSCOA	FÉRIAS DA PÁSCOA
13/Abr a 17/Abr	Caracterização Temporal	Registos	L2
20/Abr a 24/Abr	Contadores	Circuitos Sequenciais Síncronos	P3
27/Abr a 01/Mai	Síntese de Circuitos Sequenciais Síncronos	Síntese de Circuitos Sequenciais Síncronos	L3
04/Mai a 08/Mai	Exercícios **Teste 1**	Memórias	P4
11/Mai a 15/Mai	Máq. Estado Microprogramadas: Circuito de Dados e Circuito de Controlo	Máq. Estado Microprogramadas: Microprograma	L4
18/Mai a 22/Mai	Circuitos de Controlo, Transferência e Processamento de Dados de um Processador	Lógica Programável	P5
25/Mai a 29/Mai	P6	P6	L5

TÉCNICO LISBOA

Sumário

- **Tema da aula de hoje:**
  - Álgebra de Boole
    - Operações básicas
    - Propriedades
    - Portas Lógicas
  - Leis de DeMorgan
    - Simplificação algébrica

- **Bibliografia:**
  - **M. Mano, C. Kime**: Secções 2.1 a 2.2
  - **G. Arroz, J. Monteiro, A. Oliveira**: Secção 2.1

Álgebra de Boole

- **A lógica como um sistema binário:**
  - Em 1854, George Boole, Professor de Matemática da Universidade de Cork, Irlanda, publicou o livro

    "An Investigation on The Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities" .

  - Este trabalho, mais tarde refinado por Jevons (1869, 1890), Peirce (1880), Schröder (1890) e Huntingdon (1904), considera um sistema lógico binário, i.e., com dois objectos que se podem designar por:

sim-não, **verdadeiro-falso**, *ou ainda* **1-0**

Álgebra de Boole

- **Operações Básicas:**
  - Boole define ainda três operações básicas: AND, OR, NOT.
  - Considere-se duas variáveis booleanas: x,y ∈ {0,1},

    i.e., x,y ∈ {*falso*,*verdadeiro*}

AND (Produto lógico)		
X	**Y**	**X · Y**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **E (AND)** Y for verdadeiro

OR (Soma lógica)		
X	**Y**	**X+Y**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **OU (OR)** Y for verdadeiro

NOT (Complemento)	
X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Negação **(NOT)** da afirmação.

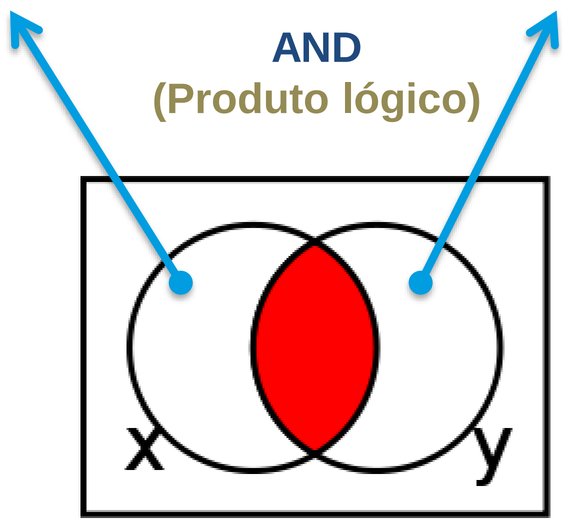
Álgebra de Boole

Operações Básicas:

- Boole define ainda três operações básicas: AND, OR, NOT.
- Considere-se duas variáveis booleanas: x,y $\in$ {0,1},

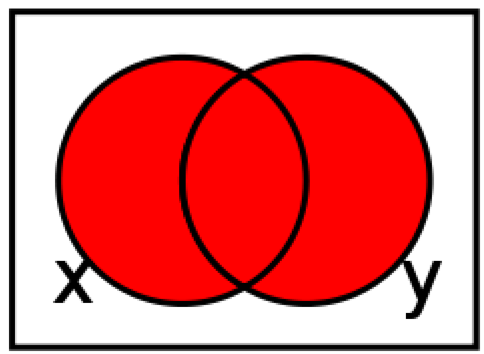
  i.e., x,y $\in$ {*falso*,*verdadeiro*}

AND
(Produto lógico)



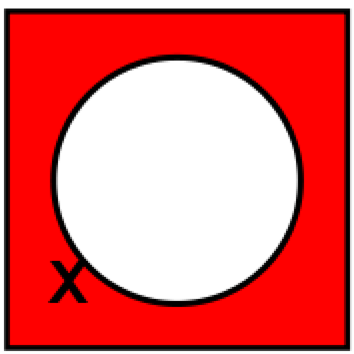
O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **E (AND)** Y for verdadeiro

OR
(Soma lógica)



O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **OU (OR)** Y for verdadeiro

NOT
(Complemento)



Negação **(NOT)** da afirmação.

Álgebra de Boole binária:

- A extensão ao trabalho de George Boole por Jevons (1869, 1890), Peirce (1880), Schröder (1890) e Huntingdon (1904), define:

Uma **Álgebra de Boole binária** é um sistema algébrico B_2 = (A={0,1}, . ,+, ¬) formado por um conjunto gerador A e por duas operações binárias, . , +, designadas por produto lógico e soma lógica, e por uma operação designada por complemento, tal que:

Propriedade de Fecho: $\forall_{x,y \in A} (x \cdot y \in A) \wedge (x + y \in A) \wedge (\bar{x} \in A)$

O resultado da aplicação de uma ou mais operações básicas sobre o conjunto gerador A, é um valor binário pertencente ao espaço do conjunto gerador A.

Álgebra de Boole

- **Propriedades básicas:**

  Considere-se as variáveis booleanas: x,y,z $\in$ A

Identidade	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Idempotência	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Aniquilação	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Opostos	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Comutatividade	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Associatividade	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Distributividade	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$
DeMorgan	$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$
Adjacência	$x \cdot y + x \cdot \overline{y} = x$	$(x + y) \cdot (x + \overline{y}) = x$

Álgebra de Boole

- **Princípio da dualidade:**
  - Qualquer expressão válida numa álgebra de Boole tem uma expressão dual, também válida nessa álgebra, que se obtém por troca do símbolo operatório + com o símbolo operatório • e do limite universal 0 com o limite universal 1.

Exemplo:

x • 1 = x é a expressão dual de **x + 0 = x**

Álgebra de Boole

Outros teoremas:

Considere-se as variáveis booleanas: x,y,z ∈ A

Dupla negação	$\overline{\overline{x}} = x$	
Absorção	$x \cdot (x + y) = x$	$x + x \cdot y = x$
Consenso	$x \cdot y + y \cdot z + \overline{x} \cdot z = x \cdot y + \overline{x} \cdot z$	$(x + y) \cdot (y + z) \cdot (\overline{x} + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z)$
	$(x + y) \cdot (\overline{x} + z) = x \cdot z + \overline{x} \cdot y$	$x \cdot y + \overline{x} \cdot z = (x + z) \cdot (\overline{x} + y)$
	$x \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot z = x \cdot y + x \cdot z$	$(x + y) \cdot (x + \overline{y} + z) = (x + y) \cdot (x + z)$

Álgebra de Boole

Demonstração das leis de DeMorgan

$$\overline{x+y} = \overline{x}.\overline{y}$$

$$\overline{x.y} = \overline{x}+\overline{y}$$

Verificação por Tabelas da Verdade

x	y	$x+y$	$\overline{x+y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}\cdot\overline{y}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

- Generalização para n variáveis:

$$\overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \overline{x}_1 . \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$$

$$\overline{x_1 . x_1 \ldots x_n} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \ldots + \overline{x}_n$$

Álgebra de Boole

- **Aplicação sucessiva das leis de DeMorgan**

Exemplo:

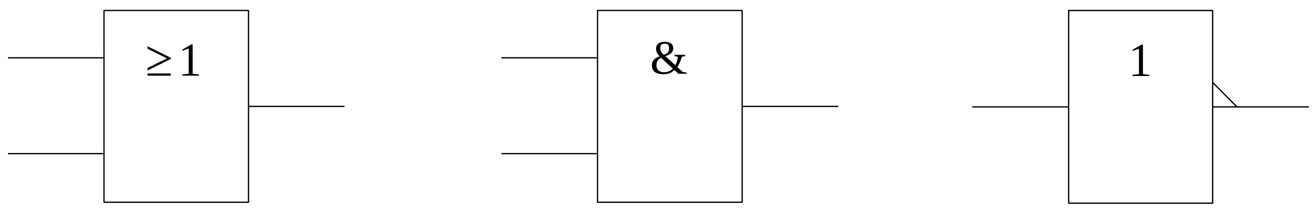
$$
\begin{aligned}
\overline{a\,.\left(b+z\,.\left(x+\overline{a}\right)\right)} &= \overline{a}+\overline{\left(b+z\,.\left(x+\overline{a}\right)\right)} \\
&= \overline{a}+\left(\overline{b}\,.\,\overline{\left(z\,.\left(x+\overline{a}\right)\right)}\right) \\
&= \overline{a}+\left(\overline{b}\,.\left(\overline{z}+\overline{\left(x+\overline{a}\right)}\right)\right) \\
&= \overline{a}+\left(\overline{b}\,.\left(\overline{z}+\left(\overline{x}\,.\,a\right)\right)\right) \\
&= \overline{a}+\overline{b}\,.\left(\overline{z}+\overline{x}\,.\,a\right)
\end{aligned}
$$

Álgebra de Boole

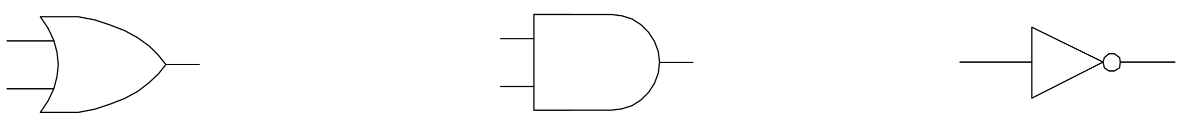
Portas Lógicas:

- Na prática os sistemas digitais baseiam-se na Álgebra de Boole, sendo implementados a partir de um conjunto de portas lógicas base.

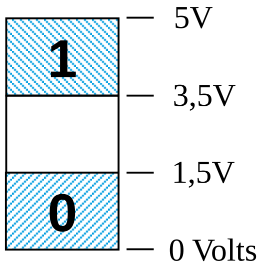
Simbologia (IEC 617):



OR **AND** **NOT**



- Nas tecnologias mais comuns, o circuito lógico distingue 2 intervalos distintos de tensão, os quais são interpretados como ‘um’ ou ‘zero’



Álgebra de Boole

Função Booleana (exemplo):

$$f = \bar{a}\,b + c$$

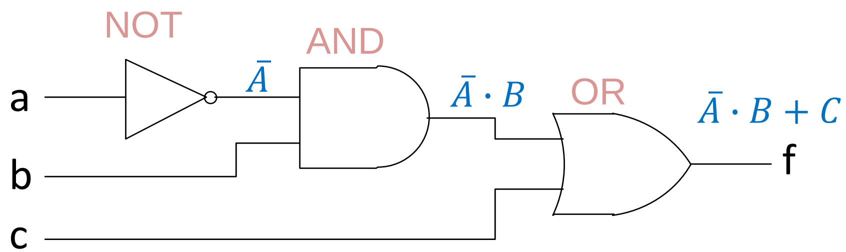
$\bar{a}\,b$ e **c** são os **termos** da função.

$\bar{a}$, b e c são os **literais**.

Tabela da Verdade

a	b	c	ā b	f
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Circuito Lógico:

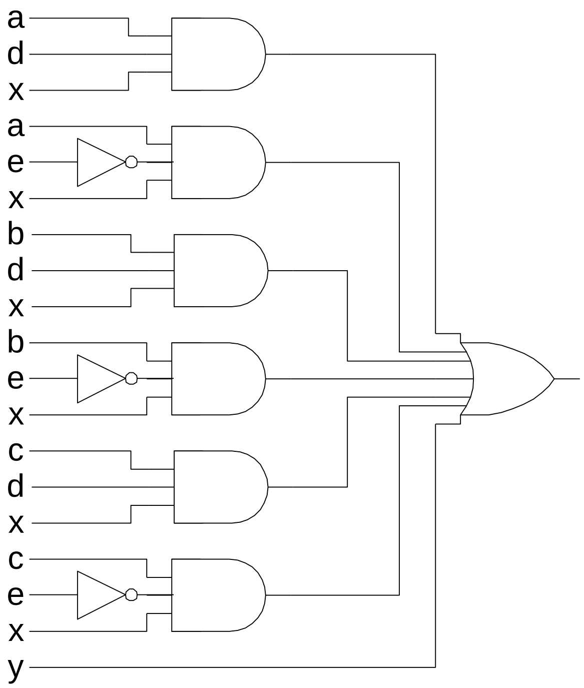


Álgebra de Boole

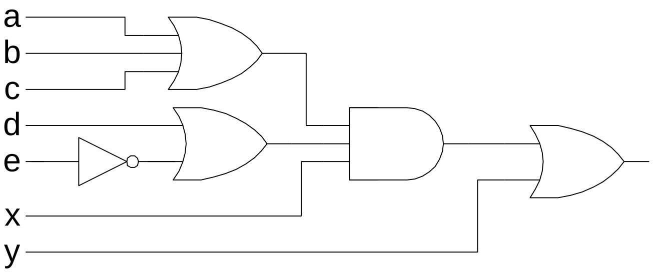
Simplificação algébrica

- Exemplo 1:

$$f = adx + a\bar{e}x + bdx + b\bar{e}x + cdx + c\bar{e}x + y$$
$$= \left(ad + a\bar{e} + bd + b\bar{e} + cd + c\bar{e}\right)x + y$$
$$= \left(\left(a+b+c\right)d + \left(a+b+c\right)\bar{e}\right)x + y$$
$$= \left(\left(a+b+c\right)\left(d+\bar{e}\right)\right)x + y$$
$$= \left(a+b+c\right)\cdot\left(d+\bar{e}\right)\cdot x + y$$



Realização a 2 níveis (soma de produtos)

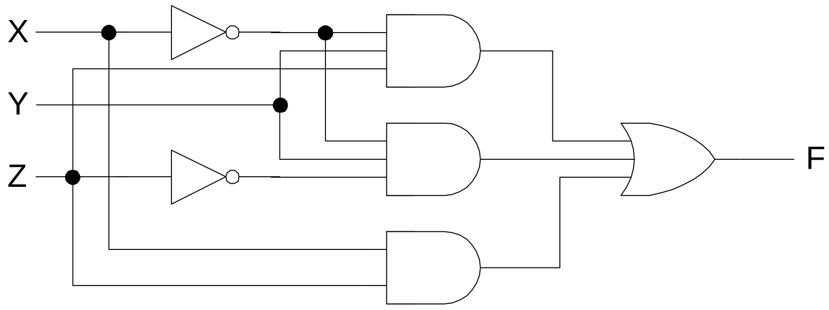


Realização Multinível

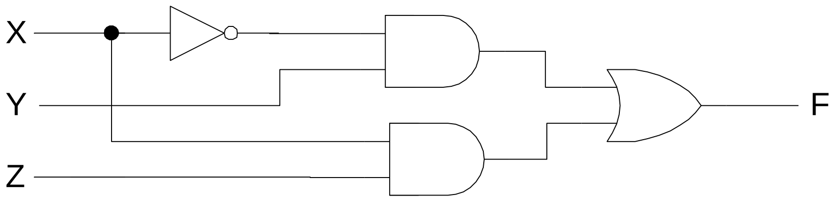
Álgebra de Boole

- **Simplificação algébrica**
  - Exemplo 2:

$$f = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz$$



$$\begin{aligned} f &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz \\ &= \bar{x}y\left(z + \bar{z}\right) + xz \\ &= \bar{x}y.1 + xz \\ &= \bar{x}y + xz \end{aligned}$$



Álgebra de Boole

- **Simplificação algébrica:**
  - A simplificação e manipulação algébrica das funções lógicas tem vários benefícios:
    - Permite reduzir a complexidade de circuitos, o que leva a uma redução no número de erros na montagem do circuito.
    - Permite reduzir o tempo de propagação dos sinais ao longo do circuito de cálculo (ex.: processadores mais rápidos)
    - Permite reduzir a potência consumida (ex: processadores energeticamente mais eficientes)

PRÓXIMA AULA

Próxima Aula

- **Tema da Próxima Aula:**
  - Elementos de Tecnologia
    - Circuitos integrados
    - Famílias lógicas
  - Funções lógicas
    - Circuitos com portas NAND
    - Circuitos com portas NOR

TÉCNICO LISBOA

Agradecimentos

Algumas páginas desta apresentação resultam da compilação de várias contribuições produzidas por:

- Nuno Roma
- Guilherme Arroz
- Horácio Neto
- Nuno Horta
- Pedro Tomás