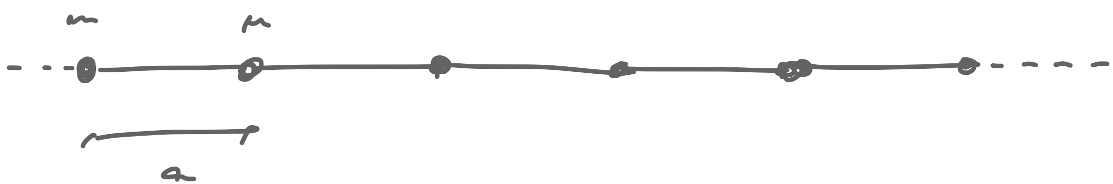
21 Abn Oscard

Ondas

corda com contas



limite contínuo : 'a' muito pequeno

o sistema é efectivamente contínuo

$A(x)$ faz sentido para todos os valores de x na corda

em relação a quê?

↓

comprimento de onda

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$$

• autof. de $\Pi^{-1}K$ — modo normal $\qquad A_j = A(x) \quad x = ja, \ j \in \mathbb{Z}$

$$\Pi^{-1}K\, A(x) = \frac{T}{\mu a}\Big(2A(x) - A(x+a) - A(x-a)\Big)$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 2B & -C & \\ & -C & 2B & -C \\ & & -C & 2B \end{bmatrix}$$

penso a onde $C = B$

até agora isto é válido para qualquer espaçamento 'a'

a pequeno

$$\Rightarrow \quad a \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\Rightarrow \quad ka \ll 2\pi$$

número muito pequeno

então

$A(x+a)$

$A(x-a)$ estão muito próximos de $A(x)$

(pelo menos na escala do comp. de onda)

série de Taylor que converge muito rapidamente

$$A(x+a) \simeq A(x) + \frac{\partial A}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} a^2 + \cdots$$

$$A(x-a) \simeq A(x) - \frac{\partial A}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} a^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad 2A(x) - A(x+a) - A(x-a) = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} a^2 + \cdots$$

termos de ordem a^4 ou superior

$$\Longrightarrow \quad \Pi^{-1} K\, A(x) = \frac{T}{ma} (-1)\, a^2 \, \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Pi^{-1} K\, A(x) = -\frac{Ta}{m} \, \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}}$$

se $a \ll d$ $\rightarrow$ massas entre muitíssimo próximas umas dos outras (relativamente à escala de d)

$m/a \longrightarrow \rho_L$ densidade linear de massa (massa por unid de comprimento)

$$\underbrace{\Pi^{-1} K}_{} \, A(x) = \underbrace{- \frac{T}{\rho_L} \frac{\partial^2}{\partial x^2}}_{} \, A(x)$$

como isto é válido para qualquer $A(x)$

$$\Pi^{-1} K \longrightarrow - \frac{T}{\rho_L} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Assim a eq. do movimento

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = -\underbrace{M^{-1}K}_{-\frac{T}{\rho_L}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}\,\psi(x,t)$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \psi_3(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t) = \frac{T}{\rho_L}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)}$$

eq. ondas

relazione di dispersione

$$\omega^2 = \frac{4T}{\mu a}\sin^2\frac{ka}{2} \xrightarrow[ka \to 0]{}$$

$$= \frac{4T}{\mu a}\left(\frac{ka}{2}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{\sin\frac{ka}{2}}{\frac{ka}{2}}\right)^2}_{ka\to 0} \to 1 \quad \longrightarrow \frac{4T}{\mu a}\left(\frac{ka}{2}\right)^2$$

$$= \frac{Tk^2a}{\mu} = \frac{T}{\rho_l}k^2$$

Torna a sistema continuo

$$\boxed{\omega^2 = T/\rho_l \, k^2}$$ rel. disp. onde ideal continue

outra forma de obter ω^2 no limite em que ka é pequeno

$$\omega^2 = \frac{4T}{\mu a} \sin^2 \frac{ka}{2} = \frac{4T}{\mu a} \left(\sin \frac{ka}{2} \right)^2$$

$\downarrow$ expandir em série de Taylor

$\sin x \simeq x + \dots$

$$\simeq \frac{4T}{\mu a} \left(\frac{ka}{2} + \dots \right)^2$$

$$\simeq \frac{4T}{\mu a} \frac{k^2 a^2}{4} = T/\rho_2 \, k^2$$

$$\left[\frac{T}{\rho_L}\right] = \frac{M\,L\,T^{-2}}{M\,L^{-1}} = L^2\,T^{-2} \longrightarrow \text{velocidade ao quadrado}$$

dimensões

$$\sqrt{T/\rho_L} \equiv v_\varphi \quad \text{velocidade de fase}$$

Série Fourier

- onda com extremos fixos

$$\psi(0,t) = 0$$
$$\psi(l,t) = 0$$

os modos são os mesmos que para o sistema discreto
(não dependem do número de osciladores)

$$A^n(x) = \sin kx$$

$$k = \frac{n\pi}{l}$$

mas agora

$n = 1, \dots, \infty$

↓ efectivamente até a aprox. de continuidade fazer sentido

" dist. inter-atómica " $< d = 2\pi/k = \frac{2l}{n}$ ←

$$k = \frac{n\pi}{\ell}$$

$$-\pi/a \le k \le \pi/a$$

$$a \to 0$$

$$\Rightarrow -\infty \le k \le \infty$$

Sol. para cada modo normal

$$\psi^n(x,t) \propto \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \overbrace{\cos(\omega_n t)}^{\propto \text{ evol. temporal}}$$

$$\omega_n = \sqrt{T/\rho_l}\; k_n$$

$$= \sqrt{T/\rho_l}\; \frac{n\pi}{l}$$

Relembrar

- para um sistema finito o conj. dos modos normais é completo

  ≡ qualquer configuração do sistema pode ser escrita como combinação linear de modos normais

- corda contínua é o limite de corda com contas

  N (número de contas) $\longrightarrow \infty$

  a (separação) $\longrightarrow 0$

para cada valor de N o conj de N modos normais é completo

$N \to \infty$: conf. genérico do sistema pode ser descrito por uma combinação do número infinito de modos normais

Série Fourier

↓ funciona sempre que a conf. seja uma função bem comportada

COMO É QUE ISTO FUNCIONA?

extremos fixos: $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \underbrace{\sin \frac{n\pi x}{\ell}}_{\text{modo normal}}$$

: série de Fourier!

coefs. de Fourier

Isto só é útil porque existe uma forma simples de calcular os coef. c_n dado uma função $\psi(x)$

• os modos normais são ortogonais (linearmente independentes)

$$\downarrow \quad \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

$$\underbrace{\int_0^\ell \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\sin\frac{n'\pi x}{\ell}\,dx}_{\text{análoga a produto interno para funções}} = \begin{cases} \ell/2 & \text{se } n = n' \\ 0 & \text{se } n \neq n' \end{cases}$$

$$= \ell/2\;\underbrace{\delta_{nn'}}_{}$$

símbolo de Kronecker,

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 1, & n = n' \\ 0, & n \neq n' \end{cases}$$

Assim podemos fazer

$$\underbrace{\int_0^\ell \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\psi(x)\,dx}_{\text{proj. de } \psi(x) \text{ no modo normal } n'} = \int_0^\ell \sin\frac{n\pi x}{\ell}\sum_{n'=1}^{\infty} c_{n'}\sin\frac{n'\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \sum_{n'=1}^{\infty} c_{n'}\underbrace{\int_0^\ell \sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{n'\pi x}{\ell}\,dx}_{\ell/2\ \delta_{nn'}}$$

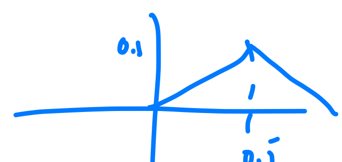
$$= \ell/2\sum_{n'=1}^{\infty} c_{n'}\delta_{nn'}$$

$$= \ell/2\ c_n$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\psi(x)\,dx}$$

A mesma forma que obtivemos para determinar as coord. normais a partir dos modos normais

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 0.5 \\ (1-x), & 0.5 \leq x < 1 \end{cases}$$



estudar os primeiros (alguns) termos
de série