Limite de entrega: 18/05/2021 (23h59)
(via Projectos Fénix)
Docentes: Hugo Terças e Pedro Cosme

Mecânica Analítica

MEFT 2020/21

Avaliação Contínua – Ficha II

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente todos os cálculos que efectuar. A submissão deve ser feita no Fénix (`Estudante » Submeter » Projetos`).

Questão 1. *O efeito de Zeeman.–* Considere um electrão de massa m e carga $-e$ que situa ligado ao núcleo do seu átomos através de um potencial electrostático do tipo $\phi = \phi(x_i)$. O Lagrangeano que o descreve contém um potencial que depende das velocidades,

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + e\phi(x_i) - e\dot{x}_i A_i(x_i),$$

onde A_i é o potencial vector, que se relaciona com os campos electromagnéticos na forma

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \qquad \text{e} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

a) [2 val] Mostre que o Hamiltoniano do sistema pode ser dado por

$$H(x_i, p_i) = \frac{1}{2m}\left(p_i + eA_i\right)^2 - e\phi.$$

Obtenha, ainda, a energia mecânica do sistema e justifique se esta é, ou não, conservada caso $A_i = A_i(x_i)$. Comente a sua relação com o Hamiltoniano.

b) [2 val] Mostre que as equações do Hamilton combinadas produzem

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{m}\left(\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{x}} \times \vec{B}\right).$$

c) [2 val] Resolva as equações do movimento considerando que ϕ pode ser aproximado a um potencial central de Hooke (elástico) de constante k. Considere, ainda, um campo magnético alinhado com o eixo zz, $B = (0, 0, B_0)$. Mostre que o electrão dispõe de dois modos de vibração, i.e. obtenha o desdobramento das riscas devido ao campo magnético (efeito de Zeeman). Comente.

d) [2 val] No formalismo Lagrangeano, vimos que o atrito pode ser descrito através dos potenciais de Rayleigh do tipo $\mathcal{F}(\dot{q}_i)$. Mostre que, na presença de tais potenciais, as equações de Hamilton se escrevem

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

e) [2 val] O caso da ressonância magnética nuclear (RMN) pode ser formalmente recuperado retirando o potencial atómico $\phi(r)$, mas mantendo o mesmo campo magnético. Nesse caso, o *spin* do núcleo pode ser classicamente representado pelo vector $\vec{p}$. Recupere as equações da alínea c) na presença de um atrito da forma

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} m \left[\gamma_\perp (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \gamma_\parallel \dot{z}^2 \right] .$$

Resolva analiticamente as equações do movimento e represente graficamente a órbita paramétrica $(p_x(t),\ p_y(t),\ p_z(t))$ (talvez seja conveniente recorrer a um computador para o/a auxiliar a visualizar). Comente fisicamente o resultado observado.

Questão 2. [10 val] *Ondas cnoidais.*— A elevação η de uma onda em águas pouco profundas é um problema não linear complexo. Contudo, pode ser descrita[1] (num sistema de unidades apropriado, não se preocupem com isso agora) pelo Lagrangeano

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{\dot{\eta}^2}{2} + 3c\eta^2 - \frac{3}{2}\eta^3 + r\eta,$$

onde c é a velocidade de fase da onda e r um parâmetro. Apesar da complexidade do sistema físico, pode obter-se bastante informação da análise do espaço de fases.

a) [2 val] Obtenha o Hamiltoniano para este mesmo sistema e justifique se o mesmo é, ou não, conservado.

b) [2.5 val] Represente graficamente o espaço de fases e descreva de forma qualitativa, mas detalhada, os possíveis tipos de trajectória e seu comportamento.

c) [2.5 val] Escreva as equações do movimento e, recorrendo a um software à sua escolha, obtenha soluções numéricas periódicas. De que forma pode o espaço de fases que determinou anteriormente ajudá-lo?

d) [3 val] As soluções periódicas deste problema são as chamadas *ondas cnoidais* cuja expressão é $\eta(t) = \eta_0 + A\mathrm{cn}^2\left(\frac{t}{\Delta}\middle| m\right)$, onde cn é uma função elíptica de Jacobi, η_0 representa a base da onda, m é um parâmetro relacionado com o período, Δ a largura dos picos e A a altura dos picos.

  (i) Determine uma expressão para a separatriz do espaço de fases para quando $r = 0$. Determine a amplitude de uma trajectória precisamente sobre a separatriz.

  (ii) Sabendo que a amplitude de uma onda cnoidal é A/m obtenha uma expressão que relacione m, A e a velocidade c

  (iii) Assuma agora que a sua condição inicial para as equações de movimento se encontra na intersecção da separatriz com o eixo η do espaço de fases em que $\eta \neq 0$. Mostre que, usando a relação que obteve no ponto anterior se tem:

$$m = 1 - \frac{\eta_0}{2c}.$$

(Sugestão: avalie $\eta(t = 0)$ na expressão dada.)

  Na verdade, para velocidades de fase $c \gg 1$, onde portanto $m \to 1$, a solução que se obtém deixa de ser periódica tornando-se um pico solitário que se propaga, ou seja, um solitão de equação $\eta(t) = A\mathrm{sech}^2(t/\Delta)$. Experimente comparar as soluções das ondas cnoidais com o caso extremo do solitão.

[1] Verá mais tarde, na disciplina de física dos meios contínuos, de que forma tal descrição é obtida, por exemplo a partir das afamadas equações de Navier–Stokes.