Mecânica Analítica

2020-2021

Série 0

Responsável: Hugo Terças

O objectivo desta série de exercícios consiste numa primeira exposição ao cálculo tensorial e suas aplicações

Problema 1. Transformação de tensores. Usando a propriedade de transformação de vectores contravariantes, $x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, onde $A^{\alpha}_{\beta} = \dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$ (a definição de A é arbitrária, sendo que escolhemos A^{-1} para designar a matriz de transformação dos vectores da base), verifique as seguintes propriedades:

a) $\omega'_{\mu\nu} = (A^{-1})^{\alpha}_{\mu}(A^{-1})^{\beta}_{\nu}\omega_{\alpha\beta}$

Um tensor covariante de segundo grau pode ser escrito como o produto de dois covectores $\omega_{\mu\nu} = a_{\mu} b_{\nu}$. Assim, e relembrando a transformação para covectores $x'_{\mu} = (A^{-1})^{\nu}_{\ \mu} x_{\nu}$,

$$\omega'_{\mu\nu} = a'_{\mu} b'_{\nu} = (A^{-1})^{\alpha}_{\mu} a_{\alpha} (A^{-1})^{\beta}_{\nu} b_{\beta} = (A^{-1})^{\alpha}_{\mu}(A^{-1})^{\beta}_{\nu}\omega_{\alpha\beta}$$

b) A contracção de um vector contravariante com um vector covariante é um invariante, i.e. ${a'}^{\mu} b'_{\mu} = a^{\nu} b_{\nu}$

$${a'}^{\mu} b'_{\mu} = A^{\mu}_{\alpha}(A^{-1})^{\beta}_{\mu} a^{\alpha} b_{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} a^{\alpha} b_{\beta} = a^{\alpha} b_{\alpha}$$

c) O produto interno usual só é invariante em espaços ortornormados, i.e ${a'}^{\mu} {y'}^{\mu} = a^{\nu} y^{\nu}$ <u>sse</u> $A^{T} = A^{-1}$.

Pela definição da transformação de vectores (contravariantes) tem-se

$${a'}^{\mu} {y'}^{\mu} = A^{\mu}_{\alpha} A^{\mu}_{\beta} a^{\alpha} y^{\beta} = A^{\mu}_{\alpha}(A^{T})^{\beta}_{\mu} a^{\alpha} y^{\beta}$$

onde no último passo transpusemos a matriz A de forma a contrair o índice μ. Para o produto interno se manter invariante então o produto das matrizes deve resultar num delta de Kronecker

$$A^{\mu}_{\alpha}(A^{T})^{\beta}_{\mu} = \delta^{\beta}_{\alpha}$$

o que apenas acontece de $A^{T} = A^{-1}$, ou seja em espaços ortonormados.

d) O produto interno generalizado $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = t_{\mu\nu}a^\mu b^\nu$ é invariante e mantém a comutatividade se $t_{\mu\nu}$ for um tensor simétrico.

O produto interno generalizado deve manter as propriedades do produto interno usual, de entre elas a comutatividade, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$, portanto

$$t_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = t_{\nu\mu}b^\nu a^\mu$$

o que implica

$$t_{\mu\nu} = t_{\nu\mu}$$

ou seja o tensor deverá ser simétrico.
Verifiquemos agora a invariância

$$t'_{\mu\nu}a'^\mu b'^\nu = (A^{-1})^\alpha_\mu (A^{-1})^\beta_\nu t_{\alpha\beta} A^\mu_\gamma a^\gamma A^\nu_\delta b^\delta = \delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta t_{\alpha\beta} a^\gamma b^\delta = t_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$$

e) Os tensores $s_{\mu\nu} = u_\mu w_\nu + u_\nu w_\mu$ e $a_{\mu\nu} = u_\mu w_\nu - u_\nu w_\mu$ são respectivamente simétrico e anti-simétrico.

Este é muito simples, baste trocar o "nome" aos índices.

f) A contracção do símbolo de Levi-Civita com um tensor simétrico é nulo, $\epsilon_{\mu\nu\alpha}s_{\nu\alpha} = 0$.

Usemos o resultado da alínea anterior para decompor o tensor simétrico

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mu\nu\alpha}s_{\nu\alpha} = \epsilon_{\mu\nu\alpha}(u_\nu w_\alpha + u_\alpha w_\nu) = \epsilon_{\mu\nu\alpha}u_\nu w_\alpha + \epsilon_{\mu\nu\alpha}u_\alpha w_\nu = \\ = \epsilon_{\mu\nu\alpha}u_\nu w_\alpha + \epsilon_{\mu\alpha\nu}u_\nu w_\alpha = (\epsilon_{\mu\nu\alpha} - \epsilon_{\mu\nu\alpha})u_\nu w_\alpha = 0\end{aligned}$$

g) Recorrendo ao tensor de Levi-Civita, mostre a seguinte (muito útil!) identidade vectorial: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$

Recorrendo ao símbolo de de Levi-Civita

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \epsilon_{\mu\nu\gamma}a_\nu(\epsilon_{\gamma\alpha\beta}b_\alpha c_\beta) = \epsilon_{\mu\nu\gamma}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}a_\nu b_\alpha c_\beta = -\epsilon_{\mu\gamma\nu}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}a_\nu b_\alpha c_\beta = \\ = \epsilon_{\gamma\mu\nu}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}a_\nu b_\alpha c_\beta = (\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\alpha\nu})a_\nu b_\alpha c_\beta = \\ = a_\beta b_\mu c_\beta - a_\nu b_\nu c_\mu = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\end{aligned}$$

h) Repita o procedimento para se convencer de que $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f) = 0$ e $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) = 0$, para quaisquer f e $\boldsymbol{u}$[1].

Na primeira igualdade temos $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f) = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f$ mas o tensor $\partial_j\partial_k f = \partial_k\partial_j f$ é simétrico (cf. teorema de Schwarz) assim, como vimos anteriormente, a contração do

[1] Não invente! Seja simpático e assuma que f e $\mathbf{u}$ estão bem definidos no seu domínio. Deixemos as patologias para os matemáticos...

símbolo de Levi-Civita com este tensor é zero

$$\epsilon_{ijk}\partial_j(\partial_k f) = 0.$$

No segundo caso encontramos

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) = \partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_j u_k)$$

ora, o símbolo de Levi-Civita é constante e portanto podemos escrever

$$\partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_j u_k) = \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j u_k = 0$$

porque, mais uma vez, para cada componente indexada a k, $\partial_i\partial_j u_k$ é um tensor simétrico cuja contracção com ϵ_{ijk} devolverá zero.

i) Com alguma paciência, parta da definição do tensor de Levi-Civita para demonstrar $\epsilon_{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\mu\rho\beta} = \delta_{\nu\rho}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{\nu\beta}\delta_{\alpha\rho}$.

Se não quisermos confirmar "de enfiada" as $3^4 = 81$ equações correspondentes a cada uma das hipóteses dos tensores de quarta ordem envolvidos na expressão anterior temos de ser espertos.
Se $\nu = \alpha$ ou $\rho = \beta$ o lado esquerdo da equação é zero uma vez que os símbolos de Levi-Civita teriam índices iguais, e o lado direito é também nulo uma vez que o primeiro produto de deltas é idêntico ao segundo.
Para os restantes casos, comecemos por escrever o lado esquerdo da igualdade como

$$\epsilon_{1\nu\alpha}\epsilon_{1\rho\beta} + \epsilon_{2\nu\alpha}\epsilon_{2\rho\beta} + \epsilon_{3\nu\alpha}\epsilon_{3\rho\beta} = \epsilon_{1'2'3'}\epsilon_{1'\rho\beta} \quad \nu = 2', \alpha = 3',$$

onde $(1'2'3')$ representa uma permutação de (123), uma vez que já eliminamos as hipóteses com índices repetidos. Ora a quantidade $\epsilon_{1'2'3'}\epsilon_{1'\rho\beta}$ pode ser nula ou não,

- Se $\epsilon_{1'2'3'}\epsilon_{1'\rho\beta} = 0$, como $\rho \neq \beta$ para anular o segundo Levi-Civita restam as hipóteses
  - $\rho = 1' \Rightarrow \delta_{2'1'}\delta_{3'\beta} - \delta_{2'\beta}\delta_{3'1'} = 0 - 0 = 0$ ou
  - $\beta = 1' \Rightarrow \delta_{2'\rho}\delta_{3'1'} - \delta_{2'1'}\delta_{3'\rho} = 0 - 0 = 0.$
- Se $\epsilon_{1'2'3'}\epsilon_{1'\rho\beta} \neq 0$ então temos os seguintes casos
  - $\rho = 2', \beta = 3'$ e ambas as permutações têm a mesma paridade, do lado direito temos $\delta_{2'2'}\delta_{3'3'} - \delta_{2'3'}\delta_{3'2'} = 1 - 0 = 1.$
  - $\rho = 3', \beta = 2'$ e as permutações têm paridades distintas, e do lado direito $\delta_{2'3'}\delta_{3'2'} - \delta_{2'2'}\delta_{3'3'} = 0 - 1 = -1.$

Problema 2. Tensor da métrica. Considere o tensor da métrica definido por $g_{\mu\nu} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial x'^\nu}$.

a) Parta da definição para mostrar que o tensor da métrica em coordenadas polares (r, θ) se escreve

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

Porque razão é diagonal?

Como sabemos, em coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

ora subentendendo a transformação de $x^\mu = (x, y)$ para $x'^\mu = (r, \theta)$ as componentes da métrica serão

$$g_{rr} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$g_{r\theta} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\cos\theta + r\sin\theta\cos\theta = 0 = g_{\theta r}$$

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \theta} = (-r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2 = r^2$$

Uma vez que o espaço é ortogonal a métrica é diagonal.

b) Partindo da métrica euclidiana, $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1)$, faça uso da regra de transformação dos tensores para chegar ao resultado do ponto a).

Seguindo o enunciado, no espaço euclidiano (2D) a métrica é $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1) = \delta_{\mu\nu}$ e transforma-se, covariantemente, como

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'^\nu}$$

c) Verifique a seguinte propriedade de contracção da métrica, $g_{\mu\nu}g^{\mu\alpha} = \delta^\alpha_\nu$.

Recordemos que se pode obter um covector "baixando o índice" de um vector usando a métrica, $a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu$, mas o vector pode também ser criado de forma idêntica a partir do covector e portanto, tem-se

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu = g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha}a_\alpha$$

para a igualdade fazer sentido então

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = \delta^\alpha_\mu$$

d) Mostre que a métrica é um tensor definido positivo, i.e. que o produto interno por ela definido satisfaz $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$.

e) Use a propriedade da conversão de índices covariantes em índices contravariantes para determinar a forma dos tensores $g^{\mu\nu}$ e g^μ_ν.

Da alínea a) tem-se que $g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$, portanto de forma a garantir que $g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = \delta^\alpha_\mu$ é simples ver que $g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{bmatrix}$. Por fim o tensor misto $g^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}$ ou seja ,

$$g^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta^\mu_\nu$$

f) Seja $x_\mu = (r, \theta)$ um covector em coordenadas polares. Determine x^μ.

$$x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \theta/r^2 \end{bmatrix}$$

Problema 3. Curvas em espaços curvos. Considere um sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) de métrica $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta)$. Considere uma curva ℓ parametrizada por $t \in]0, \infty]$ da seguinte forma

$$r = t \qquad \theta = \arcsin\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \phi = \sqrt{t^2 - 1}.$$

Mostre que o segmento de curva $t \in [1, 2]$ tem comprimento $s = \sqrt{6}$.

Para obter o comprimento de uma linha teremos de integrar o elemento de linha $s = \displaystyle\int ds$ ao longo da parametrização dada em termo da variável t, ou seja $s = \displaystyle\int_1^2 \frac{ds}{dt}dt$.

O quadrado do elemento de linha é dado por $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \Rightarrow \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = g_{\mu\nu}\dfrac{dx^\mu}{dt}\dfrac{dx^\nu}{dt}$ que neste caso de coordenadas esféricas fica

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\sin\theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \\ = 1 + t^2\left(\frac{-1/t^2}{\sqrt{1-1/t^2}}\right)^2 + \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\right)^2 = \\ = 1 + \frac{1}{t^2-1} + \frac{t^2}{t^2-1} = \frac{2t^2}{t^2-1}\end{aligned}$$

portanto, voltando ao integral de linha

$$s = \int_1^2 \frac{ds}{dt}dt = \int_1^2 \sqrt{\frac{2t^2}{t^2-1}}dt = \sqrt{6}$$