19 Mai Dsc Ond

Corpo Rígido [algumas noções]

def. ↳ sistema de N partículas onde as distâncias relativas entre pares de partículas estão fixas

$$|\underline{r}_i - \underline{r}_j| = d_{ij} = \text{const} \quad \forall_{i,j}$$

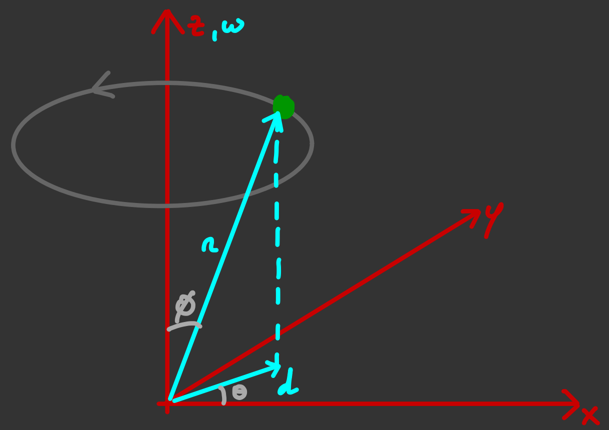
Movimento corpo rígido = translação do CM

+

$\boxed{\text{rotação}}$ começam aqui

1. velocidade angular

fixar ponto no corpo rígido e considerar rotações relativas a esse ponto.



rotação em torno de $\hat{z}$

$$\underline{r} = (x, y, z)$$
$$= (d\cos\theta, d\sin\theta, z)$$

projecção da distância origem–partícula no plano $\hat{x}O\hat{y}$

$$d = r\sin\phi$$

$$\dot{\underline{r}} = (v_x, v_y, v_z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$
$$= (-\dot{\theta}\, d\sin\theta, \dot{\theta}\, d\cos\theta, 0)$$

Podemos introduzir um novo vector

$$\underline{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{z} = (0, 0, \dot{\theta})$$

tal que

$$\dot{\underline{r}} = \underline{\omega} \times \underline{r}$$

$\underline{\omega} = (0, 0, \dot{\theta})$

$\underline{r} = (d\cos\theta, d\sin\theta, z)$

$$= (-\dot{\theta}\, d\sin\theta,\ \dot{\theta}\, d\cos\theta,\ 0)$$

$\underline{\omega}$ ≡ velocidade angular

"posição angular" <u>não é um vector</u>.

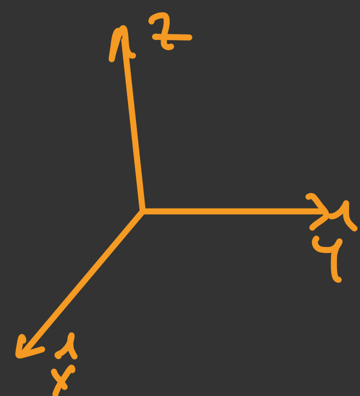
$\underline{a} = \underline{b} \times \underline{c} = -\underline{c} \times \underline{b}$

↳ vector ⊥ a $\underline{b}$ e $\underline{c}$ com sentido dado pela regra da mão direita

$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$

$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$

$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$



$$\underline{a} = \underline{b} \times \underline{c} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$= (b_y c_z - b_z c_y, \dots, \dots)$$

Rotação em torno de eixo arbitrário $\hat{n}$

↓ sentido pela regra da mão direita

$$\underline{\omega} = \omega \hat{n}$$

magnitude do vetor vel. angular

$$\omega = |\dot{\theta}|$$

↳ ângulo relativo ao eixo de rotação

↓

velocidade (escalar) de rotação.

velocidade linear (escalar)

$$v = |\dot{\underline{r}}| = |\underline{\omega} \times \underline{r}| = |\omega\, \hat{n} \times \underline{r}| = \omega\, |\hat{n} \times \underline{r}|$$

ângulo entre $\underline{r}$ e $\underline{\omega}$

$$= \omega\, \underbrace{r \sin\phi}_{d\,=\,\text{distância} \perp \text{ao eixo de rotação}} = d\,\omega$$

energia cinética (só rotação)

$$T = \frac{1}{2} m\, \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} = \frac{1}{2} m\, (\underline{\omega} \times \underline{r}) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

$$= \frac{1}{2} m\, (d\omega\, \hat{\dot{r}}) \cdot (d\omega\, \hat{\dot{r}})$$

direção da velocidade

$$= \frac{1}{2} m\, d^2 \omega^2\, \underbrace{\hat{\dot{r}} \cdot \hat{\dot{r}}}_{=1}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m\, d^2 \omega^2}$$

2. Momento de Inércia

Corpo rígido (as partículas com distâncias relativas fixas)

$$\dot{\underline{r}}_i = \cancel{\underline{\omega}_i} \times \underline{r}_i = \underline{\omega} \times \underline{r}_i \qquad i = 1, \dots, N$$

$\underline{\omega}$

vel. de cada partícula

o mesmo para todas as partículas num corpo rígido.

mostrar ao contrário

$$\frac{d}{dt}\left|\underline{r}_i - \underline{r}_j\right|^2 = 2\left(\dot{\underline{r}}_i - \dot{\underline{r}}_j\right)\cdot\left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right) = 2\Big[\underbrace{\underline{\omega}\times\left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right)}_{\perp\left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right)}\Big]\cdot\left(\underline{r}_i - \underline{r}_j\right) = 0$$

$= 0$

a energia cinética fica

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, \underline{\dot{r}}_i \cdot \underline{\dot{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_i) \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)}_{\omega^2 d_i^2}$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i d_i^2}_{I} = \frac{1}{2} \omega^2 I$$

I momento de inércia

(cada massa pesada pela sua distância ao eixo de rotação)

Notar a semelhança

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \text{(rotação)}$$

$$T = \frac{1}{2} M v^2 \qquad \text{(translação)}$$

- quanto maior M, mais energia é necessária para transladar um corpo rígido
- " " I, " " " " " rodar um corpo rígido

Momento angular

momento (moment) do momento (momentum) linear

$$\underline{L} = \sum_i \underline{L}_i = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{p}_i = \sum_i \underline{r}_i \times (m_i \dot{\underline{r}}_i)$$

$$= \sum_i m_i (\underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i) = \sum_i m_i \, \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)$$

com $\underline{\omega} = \omega \underbrace{\hat{n}}_{\text{eixo de rotação}}$

momento de inércia

$$\underbrace{\underline{L} \cdot \hat{n}}_{\text{comp. de } \underline{L} \text{ em } \hat{n}} = \omega \sum_i m_i \Big(\underbrace{\underline{r}_i \times \underbrace{(\hat{n} \times \underline{r}_i)}_{/\!/ \dot{r}_i}}_{/\!/ \hat{n}} \Big) \cdot \hat{n} = \omega \underbrace{\sum_i m_i d_i^2}_{I} = I\omega$$

$\propto d_i^2$

$p \propto M v \qquad L \propto I \omega$

Binário ou "torque" (momento de força)

↳ altera o momento angular (tal como a aplicação de uma força altera o momento linear)

binário (definição)

$$\dot{\underline{L}} = \underline{\tau} \qquad\qquad \dot{\underline{p}} = \underline{F}$$

Com $\underline{\tau} \parallel \underline{\omega}$, $\underline{\tau} = \tau \hat{n}$ fixo

$[\underline{\omega} = \omega \hat{n}]$

$$I \dot{\omega} = \tau$$

Em geral $\underline{\tau} = \underline{r} \times \underline{F}$

$$\underline{\tau} = \frac{d}{dt}\underline{L} = \frac{d}{dt}(\underline{r} \times \underline{p})$$

$$= \underbrace{\dot{\underline{r}} \times \underline{p}}_{=0} + \underline{r} \times \dot{\underline{p}} = \underline{r} \times \underline{F}$$

Momentos de inércia de corpos contínuos

$m_i \longrightarrow \rho(\underline{r})$ densidade de massa

$\sum_i \longrightarrow \int_{V_{corpo}}$

$$M = \int_V \rho(\underline{r})\, \underbrace{dV}_{d^3\underline{r}}$$

$$I = \int_V \rho(\underline{r})\, r_\perp^2\, dV$$

$r_\perp = r \sin\phi$

distância $\perp$ entre o ponto $\underline{r}$ e o eixo de rotação

$\rho(\underline{r}) = \rho = \text{const}$ simplifica muito as contas e é aplicável em muitos casos

Exemplos:

(i) anel circular [dens. (linear) uniforme, massa M, raio a]

eixo de rotação a passar no centro e $\perp$ ao plano do anel

→ todos os pts à mesma distância do eixo do rotação

$M = \rho(2\pi a)$

$r_\perp = a$

$$I = \int_0^{2\pi a} \rho a^2 \, dl = \rho a^2 (2\pi a) = M a^2$$

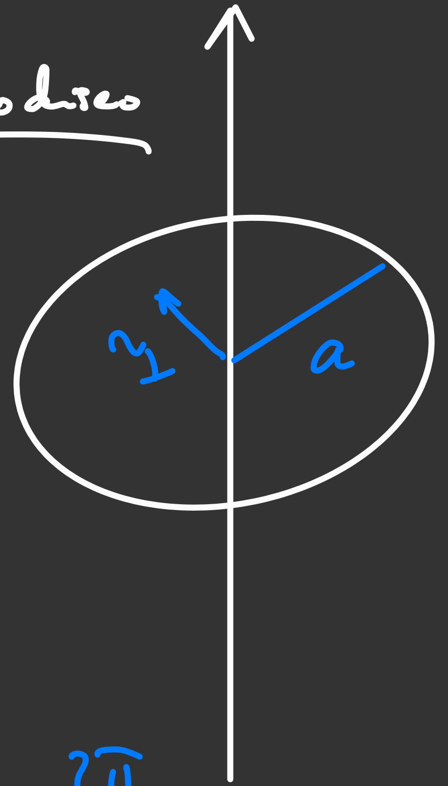
$M = 2\pi a \rho$

(iii) disco (fino)

raio a

massa $M = \pi \rho a^2$ — ρ: densid. sup.

eixo ⊥ ao disco



$$I = \iint \rho \underbrace{(x^2+y^2)}_{r_\perp^2} \, dx\, dy$$

→ limites de integração complicados

→ coordenadas polares

$\underline{r} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

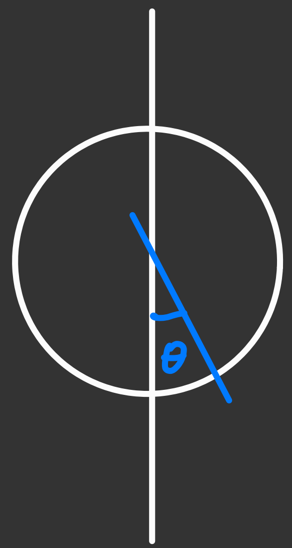
$(x, y) \xrightarrow[\text{mud. coord}]{} (r, \theta)$

$dx\,dy \longrightarrow r\,dr\,d\theta$

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho \underbrace{r^2}_{(x^2+y^2)} \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dx\,dy}$$

$$= \frac{1}{2} M a^2$$

eixo no plano do disco



$\theta = 0 \; (= \pi = 2\pi)$ no eixo de rotação

pt. em (r, θ)

$\longrightarrow \; r_\perp = r \sin\theta$

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho \, (r \sin\theta)^2 \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} M a^2$$

Teorema eixos perpendiculares

[SÓ PARA OBJECTOS 2D]

eixo $\hat{z}$ $\perp$ ao disco $\longrightarrow$ momentos de inércia relativos aos eixos $\hat{x}$ e $\hat{y}$

$$I_x = \int \rho\, y^2\, dA$$

$$I_y = \int \rho\, x^2\, dA$$

$\downarrow$ distância ao eixo $\hat{z}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

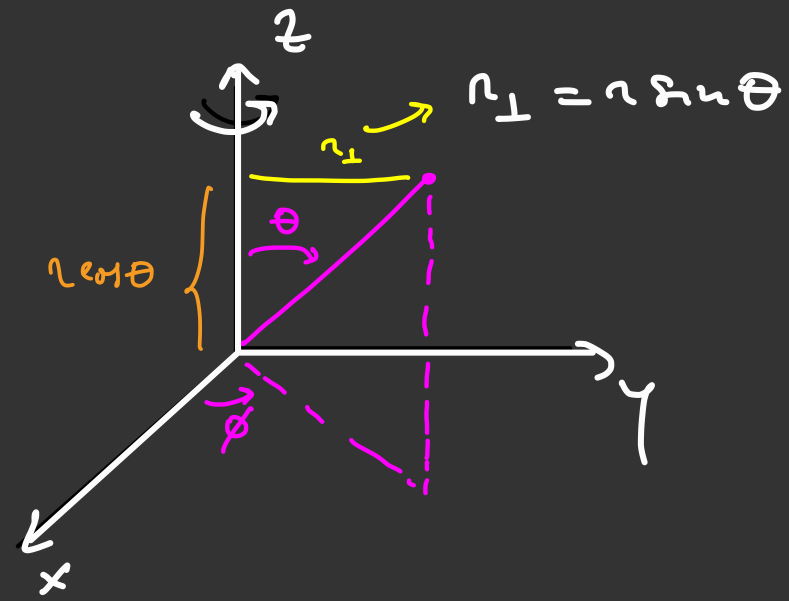
$$\Rightarrow \underbrace{I_z}_{\text{eixo de rotação}} = \int \rho\,(x^2 + y^2)\, dA = I_{\cancel{y}} + I_{\cancel{x}}$$

$$\Rightarrow I_z = I_x + I_y$$

(iii) esfera (raio a , $M = \frac{4}{3}\pi \rho a^3$)

coord. esféricas

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$



$$dV = dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$I = \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\ \rho\,(r\sin\theta)^2\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

para eixo que passe no centro

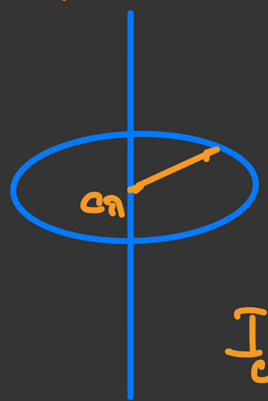
$$= \frac{2}{5} M a^2$$

3. Teorema dos eixos paralelos

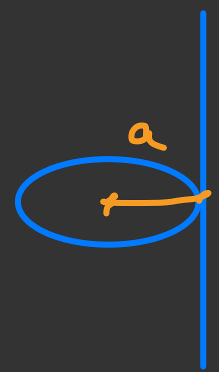
Um corpo rígido de massa M cujo momento de inércia relativo ao seu CM é I_{CM} tem como momento de inércia relativo a um eixo paralelo a este a uma distância h um momento de inércia

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

exemplo: disco

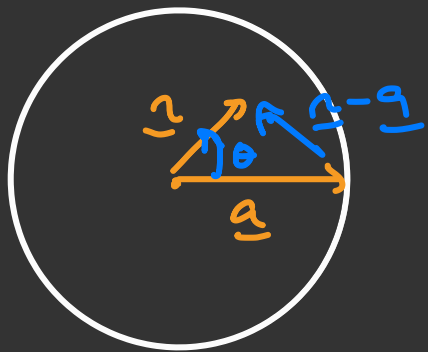


$I_{CM} = \frac{1}{2} M a^2$



$I = I_{CM} + Ma^2 = \frac{3}{2} Ma^2$

↳ força bruta (prox página)



coord. polares (r, θ) : $\theta = 0$ centro do disco ⊥ intersecção com eixo de rotação

dist. ao eixo

$$d^2 = (\underline{r} - \underline{a})^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta$$

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho\,(r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \rho a^4 \frac{3\pi}{2} = \frac{3}{2}\, \Pi a^2$$

4. Tensor de Inércia (material novo)

* o momento de inércia não é uma propriedade intrínseca de um corpo — depende sempre do eixo em relação ao qual é calculado.

→ construir uma quantidade que tenha toda a informação necessária para calcular o momento de inércia relativo a qualquer eixo e que só depende das propriedades do corpo

De facto já definimos esse objecto implicitamente quando escrevemos a energia cinética

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \underbrace{(\underline{\omega}\times\underline{r}_i)\cdot(\underline{\omega}\times\underline{r}_i)}_{(|\underline{\omega}|\,|\underline{r}_i|\,\sin\theta)^2}$$

θ ângulo entre $\underline{\omega}$ e $\underline{r}_i$

$$|\underline{\omega}|^2|\underline{r}_i|^2\sin^2\theta = |\underline{\omega}|^2|\underline{r}_i|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$= |\underline{\omega}|^2|\underline{r}_i|^2 - \Big(\underbrace{|\underline{\omega}|\,|\underline{r}_i|\cos\theta}_{\underline{\omega}\cdot\underline{r}_i}\Big)^2$$

$$= (\underline{\omega}\cdot\underline{\omega})(\underline{r}_i\cdot\underline{r}_i) - (\underline{\omega}\cdot\underline{r}_i)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[(\underline{\omega} \cdot \underline{\omega})(\underline{r_i} \cdot \underline{r_i}) - (\underline{\omega} \cdot \underline{r_i})^2 \right]$$

expandindo em componentes

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \left(\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \right) \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)^2$$

$$(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)^2$$

$$= \omega_x^2 x_i^2 + \omega_y^2 y_i^2 + \omega_z^2 z_i^2$$

$$+ \omega_x \omega_y x_i y_i + \omega_y \omega_x y_i x_i$$

$$+ \dots$$

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}}_{\text{depende da rotação (do eixo)}} \underbrace{\sum_i m_i \begin{bmatrix} \cancel{x_i^2} + y_i^2 + z_i^2 \cancel{- x_i^2} & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{bmatrix}}_{\text{Só depende da geom. do objecto}} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Podemos então escrever

$$T = \frac{1}{2}\, \underline{\omega}^T\, \underbrace{\mathcal{I}}_{\text{matriz}}\, \underline{\omega} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{tensor de inércia}}$$

ou, em componentes,

$$\underbrace{I_{ab}}_{a,b\,=\,x,y,z} = \sum_i m_i \left((\underline{r}_i \cdot \underline{r}_i)\, \underbrace{\delta_{ab}}_{=\begin{cases} 0 & a \neq b \\ 1 & a = b \end{cases}} - (\underline{r}_i)_a (\underline{r}_i)_b \right)$$

x, y, z x, y, z

Então posso calcular mom. de inércia em relação a um eixo $\hat{n}$

$$I_{\hat{n}} = \hat{n}^T \mathcal{I} \hat{n}$$

Por exemplo para $I_{\hat{x}}$

$$I_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = I_{xx}$$