Proposta de Resolução muito simplificada do
Exame de Época Especial de Eletromagnetismo
MEFT
Prof. Pedro Abreu
24 de julho de 2021

Versão: 1{2} **Duração: Exame: 3h00** $\varepsilon_0 = 8{,}854\text{x}10^{-12}$ F/m, $\mu_0=4\pi.10^{-7}$ N/A^2

Por determinação do Conselho Pedagógico, informamos que só serão cotadas as respostas que contribuam de forma significativa para os resultados ou demonstrações pedidos. As cotações parcelares são indicativas.

(3,0) **1)** Considere um cabo coaxial muito comprido constituído por um cabo condutor cilíndrico maciço, de raio $R = 0{,}001\{0{,}002\}$ m, eletricamente carregado com densidade **superficial** de carga $\sigma_1 = 0{,}8\{0{,}5\}$ μC/m^2, rodeado por um meio dielétrico de constante dielétrica relativa $\varepsilon_r = 8\{10\}$, e por uma coroa cilíndrica condutora **ligada à terra** de raio interior $R_i = 0{,}004\{0{,}005\}$ m e espessura desconhecida.

[1,0] **a)** Calcule o campo elétrico **E** em todos os pontos do espaço;
[R: *Teorema de Gauss para* $\vec{D}$: $\oiint \vec{D}\cdot\vec{n}dS = Q_{\text{int}}$, *usando a aproximação de um cilindro infinito. Escolhendo uma superfície fechada cilíndrica, de comprimento L, o campo é uniforme na parede lateral, e temos* $\oiint \vec{D}\cdot\vec{n}dS = D(r)\cdot 2\pi rL = Q_{\text{int}}$. *A carga interior vai depender do valor de* r, *distância ao eixo do cabo. Para* $r < R$, *não há carga e também não há campo elétrico, estando no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático. De igual modo, o campo elétrico é nulo para* $R_i < r < R_e$ *e como o condutor exterior está ligado à Terra e não há mais cargas até ao infinito, podemos assumir que o campo também é nulo para* $r \geq R_e$, *pelo que* $\vec{E} = 0$ *para* $r < R$ *ou* $r > R_i$.
Para $R < r < R_i$, $Q_{\text{int}} = \sigma_1 \cdot 2\pi RL$ *e* $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{2\pi RL\sigma_1}{2\pi rL\varepsilon}\vec{e}_r = \frac{\sigma_1 R}{\varepsilon_r\varepsilon_0 r}\vec{e}_r = \frac{11{,}3\{11{,}3\}}{r}\vec{e}_r$ (V/m).]

[0,5] **b)** Calcule a diferença de potencial elétrico entre os dois condutores;
[R: $V = \int_R^{R_i}\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_R^{R_i}\frac{\sigma_1 R}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\sigma_1 R}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\log\left(\frac{R_i}{R}\right) = 15{,}7\{10{,}3\}$ V.]

[0,5] **c)** Calcule a capacidade por unidade de comprimento;
[R: $\frac{C}{L} = \frac{Q}{LV} = \frac{2\pi RL\sigma_1}{LV} = \frac{2\pi RL\sigma_1}{L\frac{\sigma_1 R}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\log\left(\frac{R_i}{R}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\log\left(\frac{R_i}{R}\right)} = 0{,}321\{0{,}61\}$ nF.]

[1,0] **d)** Calcule as densidades de cargas de polarização nas superfícies de separação entre os meios.
[R: *Só há cargas de polarização* σ' *em* R^+ *e em* R_i^-, *pois só há meio dielétrico com* $\varepsilon_r > 1$ *entre* R *e* R_i. *Em* R^+, *temos* $\sigma'(R^+) = \vec{P}\cdot\vec{n}_{\text{ext}}$, *sendo* $\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec{E}$ *pelo que*
$\sigma'(R^+) = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec{E}(R^+)\cdot(-\vec{e}_r) = -\frac{(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\sigma_1 R}{\varepsilon_r\varepsilon_0 R} = -\frac{(\varepsilon_r-1)\sigma_1}{\varepsilon_r} = -0{,}7\{-0{,}45\}$ μC/m^2.
Em R_i^-, *temos* $\sigma'(R_i^-) = \vec{P}\cdot\vec{n}_{\text{ext}}$, *sendo* $\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec{E}(R_i^-)$ *pelo que*
$\sigma'(R_i^-) = \frac{(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\sigma_1 R}{\varepsilon_r\varepsilon_0 R_i} = -\frac{(\varepsilon_r-1)\sigma_1 R}{\varepsilon_r R_i} = 175\{180\}$ nC/m^2.]

(4,0) **2)** Considere o cabo coaxial do problema 1, transportando uma corrente contínua $I = 5\{8\}$ A.

[0,5] **a)** Calcule a espessura da coroa cilíndrica exterior, para ter a mesma **densidade de corrente** existente no condutor interior; ($R = 0{,}001\{0{,}002\}$ m, $R_i = 0{,}004\{0{,}005\}$ m)
[R: $J_i = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{5\{8\}}{\pi 0{,}001^2\{0{,}002^2\}} = 1{,}59\{0{,}637\}\ (MA/\mathrm{m}^2)$; $J_e = \frac{I}{\pi(R_e^2 - R_i^2)} = J_i \Leftrightarrow R_e^2 = R^2 + R_i^2 \Leftrightarrow$ $R_e = 4{,}123\{5{,}385\} \times 10^{-3}$ m, *pelo que a espessura é* $R_e - R_i = 0{,}123\{0{,}385\}$ mm .]

[1,0] **b)** Calcule o campo magnético em todo o espaço provocado por este sistema;
[R: *Seja uma linha circular "enrolada" à volta do eixo do cabo. O campo magnético é tangente ao longo desta linha, segundo o versor* $\vec{e}_\varphi$. *Seja* $\vec{e}_z$ *o eixo do sentido da corrente e* $\vec{e}_R$ *o versor radial em coordenadas cilíndricas, tal que* $\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_R$. *Dada a simetria do sistema temos* $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\varphi$ *sendo* r *a distância ao eixo. Diz-nos então a lei de Ampère que*
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{int}} \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r}$. *A corrente interior depende da distância* r *(raio da circunferência definida pela linha), pelo que a intensidade do campo magnético é* $B(r)$*:*
$0 < r < R$: $I_{int} = J_i \pi r^2 \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 J_i r}{2} = 1\{0{,}4\}\, r$ (T); $R < r < R_i$: $I_{int} = I \Leftrightarrow B(r) = \frac{1\{1{,}6\}(\mu\mathrm{T})}{r}$;
$R_i < r < R_e$: $I_{int} = \left(I - J_e \pi (r^2 - R_i^2)\right) \Leftrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2 - R_i^2}{R^2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{R_e^2 - r^2}{R^2}\right) \Leftrightarrow$
$B(r) = \frac{\{0{,}4\}(1{,}7\{2{,}9\}\times 10^{-5} - r^2)}{r}$ (T); $r > R_e$: $I_{\text{int}} = I - I = 0 \Leftrightarrow B(r) = 0$.]

[1,0] **c)** Suponha que se faz passar este cabo pelo centro de uma espira circular, de raio $R_E = 0{,}1\{0{,}2\}$ m, fazendo coincidir o eixo do cabo com o eixo perpendicular ao plano da espira. Calcule o coeficiente de indução mútua entre o cabo e a espira.
[R: *Como o campo magnético criado pelo cabo é paralelo ao plano da espira, não há fluxo a atravessar a espira, pelo que* $M = 0$.]

(1,5) **d)** Suponha que se faz passar este cabo pelo centro de um solenoide toroidal (toroide) circular de secção quadrada de lado $a = 0{,}001\{0{,}002\}$ m, de raio médio $R_T = 0{,}1\{0{,}5\}$ m, fazendo coincidir o eixo do cabo com o eixo perpendicular ao plano do toro. Considere o solenoide toroidal como tendo 100{200} espiras distribuídas uniformemente ao longo do toro (e que $a \ll R\_T$).

[0,5] i) Calcule o coeficiente de indução mútua entre o cabo e o toroide.
[R: *Como o campo magnético criado pelo cabo é nulo fora do cabo, não há campo magnético criado pelo cabo na secção do toroide, pel que* $M = 0$.]

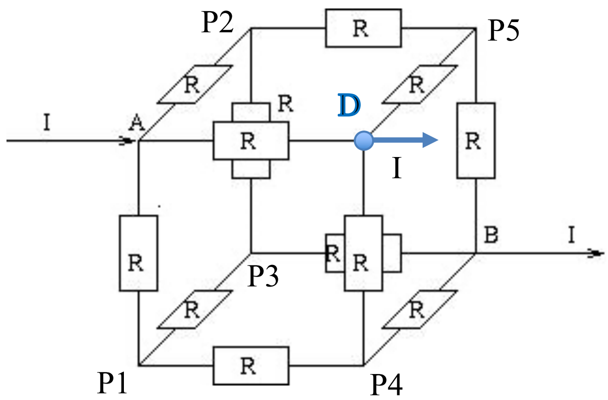
[1,0] ii) Refaça a alínea anterior se em vez do cabo fizesse passar apenas o fio condutor interior do cabo.
[R: *Neste caso, o fio já produz um campo magnético na secção do toroide, perpendicular a esta secção, com intensidade dada por (alínea b) com* $R_e > R_T + \frac{a}{2}$*):* $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cong \frac{\mu_0 I}{2\pi R_T}$ *se usarmos a aproximação* $a \ll R\_T$. *O coeficiente de indução mútua fica assim*
$M = \frac{\Phi_T}{I_{\text{fio}}} = \frac{N_T \iint \vec{B}_{\text{fio}} \cdot \vec{e}_\varphi dS}{I_{\text{fio}}} \cong \frac{N_T \mu_0 I a^2}{2\pi R_T \cdot I} = \frac{N_T \mu_0 a^2}{2\pi R_T} = 0{,}2\{0{,}32\}$ nH.]

(3,0) **3)** Na figura ao lado as resistências são todas iguais. As resistências são cilindros de comprimento $l = 0{,}5\{0{,}2\}$ m e raio $R = 0{,}0001\{0{,}0002\}$ m, numa liga com condutividade elétrica dependente da distância r ao eixo do cilindro dada por $\sigma(r) = 2{,}38\{4\} \times 10^6 \cdot r\ (\Omega\text{m})^{-1}$. Pode assumir que o campo elétrico dentro dos blocos é uniforme e paralelo ao eixo do cilindro.

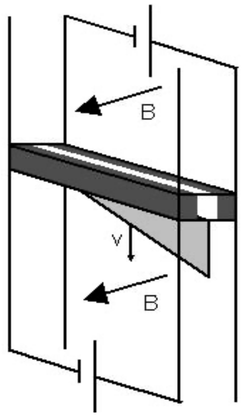
[1,0] **a)** Calcule o valor de cada resistência (em Ω);
(*sugestão: comece por calcular a corrente I que atravessa a secção do condutor, em função da tensão V aplicada nos extremos*)
[R: $I = \iint \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma(r) E r dr d\varphi = 2\pi \frac{V}{l} \int_0^R \sigma(r) r dr = 2\pi \frac{V}{l} \int_0^R 2{,}38\{4\} \times 10^6 r^2 dr$ *ou*
$I = 2\pi \frac{V}{l} 2{,}38\{4\} \times 10^6 \frac{R^3}{3} \Leftrightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{3l \times 10^{-6}}{2\pi 2{,}38\{4\} R^3} = 100{,}3\{2{,}98\}$ kΩ.]

[1,0] **b)** Calcule o valor da resistência equivalente entre A e B (quaisquer 2 vértices opostos);
(*sugestão: comece por especificar as correntes em todos os ramos do circuito, tirando proveito da simetria do sistema*)
[R: *Devido à simetria do sistema, a corrente I que entra no ponto A divide-se em 3 partes iguais. De igual modo, as correntes que chegam ao ponto B são todas iguais a $I/3$. Peguemos agora na corrente $I/3$ que segue para o ponto D. Quando chega a esse ponto, também se vai dividir de igual modo pelos 2 ramos, passando $I/6$ para baixo. Podemos assim escolher um caminho entre A e B, passando pelo ponto D, descendo e seguindo para o ponto B, para calcular a diferença de potencial elétrico entre os pontos A e B:*
$V = \frac{RI}{3} + \frac{RI}{6} + \frac{RI}{3} = RI\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow R_{AB} = \frac{V}{I} = \frac{5}{6} R = 83{,}59\{2{,}486\}$ kΩ.]

[1,0] **c)** Calcule o valor da resistência equivalente entre A e D (quaisquer 2 vértices vizinhos);
(*sugestão: basta definir mais 2 correntes I' e I'' para resolver o circuito, respeitando a simetria*)
[R: *Comecemos por notar que não sai corrente para fora do cubo no ponto B. Assim, todo o sistema é simétrico no plano ADB (simetria de espelho). Sendo assim, seja I' a corrente que do ponto A segue para baixo (para P1), idêntica à corrente que do ponto A segue para P2. A corrente que segue para o ponto D é então $I - 2I'$. A corrente que chega a P1 separa-se na corrente I'' que vai para P3 e na corrente $I' - I''$ que vai para P4. Ora, pela simetria, a corrente de P2 para P3 é também I'' e a que vai de P2 para P5 é também $I' - I''$. A corrente que vai de P3 para B é $2I''$ que se divide de igual modo em I'' de B para P5 e em I''de B para P4. Finalmente, como esperado, a corrente que vai de P5 para D é igual à que vai de P4 para D e igual a I'. Precisamos agora de 2 circuitos fechados para obter I' e I'' em função de I. Pelo circuito de cima – A-P2-P5-D – temos $RI' + R(I' - I'') + RI' = R(I - 2I')$; pelo circuito de trás – P2-P3-B-P5 – temos $RI'' + R \cdot 2I'' + RI'' = R(I' - I'') \Leftrightarrow I' = 5I''$ que podemos colocar na equação de cima para obter $I = I' + I' - \frac{I'}{5} + I' + 2I' = \frac{24}{5} I' \Leftrightarrow I' = \frac{5}{24} I$ e $V_{AD} = R(I - 2I') = RI\left(1 - 2\frac{5}{24}\right)$, pelo que $R_{AD} = \frac{V_{AD}}{I} = \frac{7}{12} R = 58{,}51\{1{,}74\}$ kΩ .]*



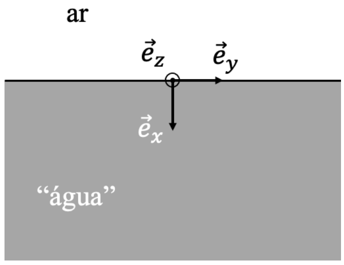
(3,0) **4)** No sistema penal representado na figura (sem as baterias ligadas), uma barra de 1,2 m de comprimento e massa m=5{8} Kg, constituída por uma camada isolante coberta por duas camadas condutoras, ambas com resistência elétrica $R = 2\{4\}$ mΩ, cai sem atrito na vertical entre duas espiras retangulares (abertas), de resistência desprezável. Para controlar a queda, aplica-se um campo magnético constante, B = 0,1{0,2} T, perpendicular às espiras.



[1,0] **a)** Calcule a força a atuar a barra, em função da velocidade **v** (incluindo a gravidade);
[R: *Para calcular esta força temos de calcular a corrente induzida devida ao movimento da barra. O fluxo de cima está a variar com o tempo na forma* $\frac{d\Phi}{dt} = Bl\frac{dy}{dt} = Blv$ *e o fluxo de baixo também está a variar na forma* $\frac{d\Phi'}{dt} = Bl\frac{dy}{dt} = Blv$. *O sentido da corrente em cima é no sentido horário – provocar um campo induzido contrário a B, enquanto em baixo é no sentido anti-horário, para provocar um campo induzido no sentido de B. Na barrra, as correntes têm o mesmo sentido (da direita para a esquerda na imagem), intensidade* $i = \frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{Blv}{R}$, *provocando uma força magnética para cima dada por (em cada lado da barra)* $F_M = ilB = \frac{B^2l^2v}{R}$. *A força total a atuar a barra é assim* $F = mg - 2F_M = mg - \frac{2B^2l^2v}{R} = 49\{78{,}4\} - 14{,}4\{28{,}8\} \cdot v$ (N)*, orientada para baixo.*]

[1,0] **b)** Calcule a velocidade máxima atingida pela barra;
[R: *Como* $F = m\frac{dv}{dt}$, *a velocidade é máxima quando* $\frac{dv}{dt} = 0$, *isto é, quando* $F = 0 \Leftrightarrow$
$v = \frac{mgR}{2B^2l^2} = 3{,}40\{2{,}72\}\ \mathrm{m/s}$.]

[1,0] **c)** Para manter a barra travada a 1/3 do topo, colocam-se duas baterias iguais nas espiras (ver figura), de modo a obrigar a passar corrente por ambos os lados da barra. Calcule a força eletromotriz de cada bateria para que a barra permaneça sempre em repouso.
[R: *As correntes que têm que passar nos dois lados da barra para ela permanecer em repouso são as que provocam uma força magnética total igual ao peso:* $2F_M = mg \Leftrightarrow 2IlB = mg \Leftrightarrow I = \frac{mg}{2lB} \Leftrightarrow$
$\varepsilon = RI = \frac{mgR}{2lB} = 0{,}41\{0{,}653\}$ V.]



(4,0) **5)** Uma onda eletromagnética com frequência angular $\omega = 4{,}7\{2{,}7\} \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ propaga-se **no ar** quando incide na água duma piscina, com índice de refração $n_2 = 4/3\{\sqrt{3}\}$. Nota-se que **não há onda refletida** e que a intensidade da onda incidente é $I_i = 53{,}124\{332\}\ \mathrm{W/m^2}$. Escolhendo um referencial apropriado,

[1,0] **a)** Calcule o ângulo de incidência e o ângulo de refração;
[R: *Como não há onda refletida, sabemos que o campo elétrico da onda incidente não pode ter componente perpendicular ao plano de incidência – segundo* $\vec{e}_z$ *– e que o ângulo de incidência tem de ser o ângulo de Brewster,* $\theta_i = \theta_{iB} = \arctan\frac{n_2}{n_1} = \arctan\frac{4}{3}\{\sqrt{3}\} = 53{,}13°\{60°\}$. *O ângulo de refração é simplesmente dado por* $\theta_t = 90° - \theta_i = 36{,}87°\{30°\}$, *pois* $\theta_i = \theta_{iB}$
(que se pode confirmar com $\theta_t = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_i\right) = \arcsin\left(\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}0{,}8\{0{,}5\}\right) = 36{,}87°\{30°\}$ *).*]

[1,0] **b)** Calcule a intensidade da onda transmitida;
[R: *Como não há onda refletida, e* $I_i \cos\theta_i \equiv I_r\cos\theta_r + I_t\cos\theta_t = I_t\cos\theta_t$, *temos*
$I_t = \frac{I_i\cos\theta_i}{\cos\theta_t} = \frac{53{,}124\{332\}0{,}6\{0{,}5\}}{0{,}8\{0{,}866\}} = 39{,}84\{191{,}7\}\ \mathrm{W/m^2}$.
Se calculado através dos coeficientes de Fresnel, tem-se $t_\parallel = \frac{2\sin 36{,}87°\{30°\}\cos 53{,}13°\{60°\}}{\sin 90°\cos(53{,}13°-36{,}87°)\{30°\}} = \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ *e*
$E_{0t} = E_{0t\parallel} = t_\parallel E_{0i\parallel}$, *pelo que* $I_t = \frac{1}{2}n_2 c\varepsilon_0 E_{0t}^2 = \frac{1}{2}n_2 c\varepsilon_0 t_\parallel^2 E_{0i}^2 = \frac{1}{2}n_2 c\varepsilon_0 t_\parallel^2 \cdot \frac{2I_i}{n_1 c\varepsilon_0}$ *ou*
$I_t = \frac{n_2}{n_1}t_\parallel^2 I_i = \frac{4}{3}\{\sqrt{3}\}\left(\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right)^2 I_i = \frac{3}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}53{,}125\{332\} = 39{,}84\{191{,}7\}\ \mathrm{W/m^2}$.]

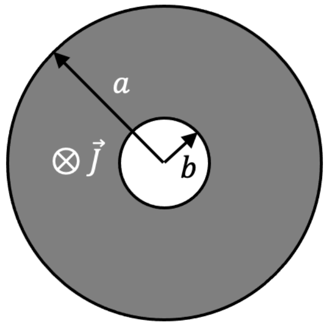
[1,0] **c)** Calcule o módulo da amplitude máxima da onda transmitida, E_{0t}, e o vetor de onda $\vec{k}_t$;
[R: $I_t = \frac{1}{2}n_2 c\varepsilon_0 E_{0t}^2$, *pois a onda transmitida tem polarização linear (não tem componente em* $\vec{e}_z$*). Assim,* $E_{0t} = \sqrt{\frac{2I_t}{n_2 c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\frac{2\cdot 39{,}84\{191{,}7\}}{c\varepsilon_0}} = 150\{289\}\ \mathrm{V/m}$. *O número de ondas é* $k_t = \frac{n_2\omega}{c}$ *e o vetor de onda é* $\vec{k}_t = k_t\left(\cos\theta_t\,\vec{e}_x + \operatorname{sen}\theta_t\,\vec{e}_y\right) = \frac{4}{3}\{\sqrt{3}\}\frac{4{,}7\{2{,}7\}\times 10^{15}}{3\times 10^8}\left(0{,}8\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\vec{e}_x + 0{,}6\{0{,}5\}\vec{e}_y\right)$ *ou*
$\vec{k}_t = 2{,}09\{1{,}56\}\times 10^7\left(0{,}8\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\vec{e}_x + 0{,}6\{0{,}5\}\vec{e}_y\right)\ \mathrm{m^{-1}}$.]

[1,0] **d)** Escreva as expressões para as componentes do campo elétrico da onda transmitida;
[R: *Para obter as expressões do campo elétrico da onda transmitida, comecemos por notar que a parte variável da fase da onda em cada componente é dada por*
$\Phi(\vec{r},t) = \omega t - \vec{k}_t\cdot\vec{r} = 4{,}7\{2{,}7\}\times 10^{15}t - 2{,}09\{1{,}56\}\times 10^7\left(0{,}8\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\vec{e}_x + 0{,}6\{0{,}5\}\vec{e}_y\right)$, *e que as componentes têm amplitude* $E_{0tz} = 0$, $E_{0ty} = -E_{0t}\cos\theta_t$, $E_{0tx} = E_{0t}\operatorname{sen}\theta_t$. *Em* V/m *temos*

$$\begin{cases} E_{0tx} = 90\{144\}\cos\left(4{,}7\{2{,}7\}\times 10^{15}t - 2{,}09\{1{,}56\}\times 10^7\left(0{,}8\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}\vec{e}_x + 0{,}6\{0{,}5\}\vec{e}_y\right)\right) \\ E_{0ty} = 120\{250\}\cos\left(4{,}7\{2{,}7\}\times 10^{15}t - 2{,}09\{1{,}56\}\times 10^7\left(0{,}8\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}\vec{e}_x + 0{,}6\{0{,}5\}\vec{e}_y\right) + \pi\right) \\ E_{0tz} = 0 \end{cases}$$

.]

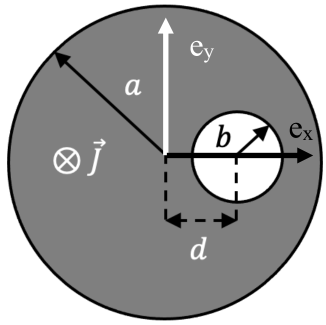
(3,0) **6)** Na figura mostra-se a secção transversal de um condutor cilíndrico infinito e uniforme, de raio $a = 0{,}5\{0{,}8\}$ m, no qual foi retirada uma cavidade cilíndrica (paralela ao eixo) de raio $b = 0{,}1\{0{,}2\}$ m. A corrente $I = 5\{8\}$ A está uniformemente distribuída no condutor (excluindo a cavidade). O material condutor é ferromagnético com permeabilidade magnética relativa $\mu_r = 5000\{2000\}$.



[1,0] **a)** Calcule o campo $\vec{H}$, o campo magnético $\vec{B}$ e a Magnetização $\vec{M}$ em todo o espaço, se os eixos forem coincidentes, isto é, se a distância entre os eixos for $\boldsymbol{d = 0}$.
[R: *Comecemos por calcular o campo $\vec{H}$. Seja uma circunferência de raio r, centrada no eixo do condutor cilíndrico. O campo $\vec{H}$ é tangente a esta circunferência, segundo o versor $\vec{e}_\varphi$, e só depende da distância r ao eixo do cilindro, dado por $\vec{e}_z = \vec{e}_I \parallel \vec{J}$. Temos então que $\vec{H} = H(r)\vec{e}_\varphi$ e pela lei de Ampère que $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ ao longo desta circunferência é igual à corrente interior: $H \cdot 2\pi r = I_{\text{int}}$. Para $r < b$, $I_{\text{int}} = 0$, pelo que $H = 0, B = 0, M = 0$. Para $b < r < a$, $I_{\text{int}} = J\pi(r^2 - b^2)$, e*
$H(r) = \frac{J\pi(r^2-b^2)}{2\pi r} = \frac{J}{2}\frac{(r^2-b^2)}{r} = \frac{3{,}316\{2{,}122\}}{r}(r^2 - 0{,}01\{0{,}04\})(\text{A/m})$; $\vec{B} = \mu\vec{H} = 5000\{2000\}\mu_0\vec{H}$
ou $\vec{B} = \frac{20{,}83\{5{,}33\}}{r}(r^2 - 0{,}01\{0{,}04\})\vec{e}_\varphi$ (mT); $\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} = 4999\{1999\}\vec{H} \Leftrightarrow$
$\vec{M} = \frac{16575\{4242\}}{r}(r^2 - 0{,}01\{0{,}04\})\vec{e}_\varphi$ (A/m).
Para $r > a$, $\vec{M} = 0$, $I_{int} = I$, $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \frac{0{,}796\{1{,}273\}}{r}\vec{e}_\varphi(\text{A/m})$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H} = \frac{1\{1{,}6\}}{r}\vec{e}_\varphi(\mu\text{T})$]

[1,0] **b)** Calcule as **densidades de corrente** de magnetização no interior (em volume) e nas superfícies interior e exterior do cilindro condutor (note que é "infinito"), na situação da alínea anterior.
[R: *No volume interior do condutor, a densidade volúmica de corrente de magnetização é*
$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{\nabla} \times M_\varphi(r)\vec{e}_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rM_\varphi(r)\right)\vec{e}_z = \frac{\vec{e}_z}{r}\frac{\partial}{\partial r}(16575\{4242\}(r^2 - b^2)) \Leftrightarrow$
$\vec{J}_M = \frac{\vec{e}_z}{r}16575\{4242\}2r = 33{,}15\{8{,}484\}\vec{e}_z$ (kA/m²). *Para a densidade superficial de corrente, temos na superfície em $r = a$, $\vec{K}_{Ma} = \vec{M}(a) \times \vec{e}_r$, pois a normal à superfície em $r = a$ é para fora, segundo $\vec{e}_r$, com $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$. Temos então* $\vec{K}_{Ma} = \frac{16575\{4242\}}{a}(a^2 - 0{,}01\{0{,}04\})(-\vec{e}_z)$ *ou*
$\vec{K}_{Ma} = -7956\{-3182\}\vec{e}_z$ (A/m). *Para* $r = b$, $\vec{M}(b) = 0$ *e* $\vec{K}_{Mb} = 0$.]

[1,0] **c)** Calcule o campo $\vec{H}$, o campo magnético ($\vec{B}$) e a Magnetização $\vec{M}$ **dentro da cavidade**, se os eixos estiverem distanciados pela distância $d = 0{,}3\{0{,}5\}$ m (figura de baixo).
[R: *Dentro da cavidade temos ar, pelo que $\vec{M} = 0$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, e $\vec{H} = \vec{H}_E + \vec{H}_D$, sendo $\vec{H}_E$ provocado por um cilindro homogéneo de raio a com densidade uniforme de corrente $\vec{J}$, e $\vec{H}_D$ provocado por um cilindro homogéneo de raio b com densidade de corrente $-\vec{J}$, estando o eixo do segundo cilindro à distância d na direção x. Seja então um ponto na cavidade de coordenadas x', y' em relação ao eixo do cilindro de raio b. Note-se que temos sempre $r'^2 = x'^2 + y'^2 < b^2$. As coordenadas deste ponto em relação ao eixo do cilindro grande são $x = x' + d, y = y'$, sendo que também temos $r = \sqrt{x^2 + y^2} < a$. Sendo os cilindros*



homogéneos, usamos a lei de Ampère para calcular ambos os campos: $\vec{H}_E = \frac{J\pi r^2}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \frac{J}{2}r\vec{e}_\varphi$, *com* $\frac{J}{2} = 3{,}136\{2{,}122\}(\text{A/m}^2)$ *(da alínea a)),* $\vec{H}_D = -\frac{J}{2}r'\vec{e}_{\varphi'}$. *Os versores $\vec{e}_\varphi$ e $\vec{e}_{\varphi'}$ são diferentes, respetivamente perpendiculares a $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_{r'}$. Em função de x, y e de x', y' escrevem-se, respetivamente,* $\vec{e}_\varphi = \frac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{r}$ *e* $\vec{e}_{\varphi'} = \frac{-y'\vec{e}_x + x'\vec{e}_y}{r'}$, *o que facilita muito o cálculo dos campos, porque ficamos apenas com* $\vec{H}_E = \frac{J}{2}r\vec{e}_\varphi = \frac{J}{2}\left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y\right)$, $\vec{H}_D = -\frac{J}{2}(-y'\vec{e}_x + x'\vec{e}_y)$ *e com*
$\vec{H} = \frac{J}{2}(x - x')\vec{e}_y = -\frac{Jd}{2}\vec{e}_y = -1\{1{,}06\}\vec{e}_y(\text{A/m})$ *e* $\vec{B} = \mu_0\vec{H} = -1{,}25\{1{,}33\}$ (μT).]