Proposta de resolução do **2º Teste de Eletromagnetismo**
MEFT
Prof. Pedro Abreu
13 de julho de 2021

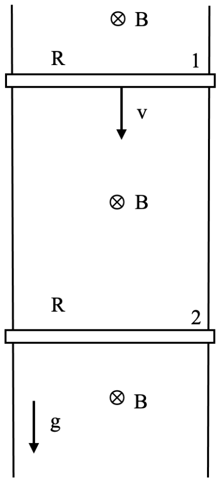
Versão: 1{2} **Duração do Teste: 1h 30m** $\varepsilon_0 = 8{,}854\text{x}10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N/A^2

Por determinação do Conselho Pedagógico, informamos que só serão cotadas as respostas que contribuam de forma significativa para os resultados ou demonstrações pedidas.

(2,0) **4)** Considere um toro de secção quadrada, de área $A = 0{,}04\{0{,}09\}\ \text{m}^2$, e raio médio $R = 2\{3\}$ m, feito de um material ferromagnético com permeabilidade magnética $\mu = 8000\{6000\}\,\mu_0$, enrolado por $N = 2000\{1000\}$ voltas de um fio condutor transportando a corrente $I = 2\{3\}$ mA. Pode assumir $R \gg \sqrt{A}$ (campo uniforme na secção).

[1,0] **a)** Calcule a magnetização e as correntes de magnetização em todo o espaço;
[R: *A magnetização só é diferente de zero no material ferromagnético. Dada a simetria do sistema, o campo magnético vai ter direção e sentido tangente a uma circunferência de raio r, com* $R - \frac{\sqrt{A}}{2} < r < R + \frac{\sqrt{A}}{2}$, *e a magnetização vai ter a mesma direção e sentido,* $\vec{M} = M(r)\vec{e}_\varphi$. *Temos então* $M(r) = \frac{B(r)}{\mu_0} - H(r) = (\mu_r - 1)H(r)$. *Para calcular* $H(r)$ *usamos a lei de Ampère:* $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{int}}$, *escolhendo um caminho fechado dado por uma circunferência como a referida em cima. Ao longo deste caminho o campo* H *tem a mesma intensidade,* $H(r)$, *e o integral é simplesmente* $H(r) \cdot 2\pi r = NI$, *e*
$\vec{M}(r) = (\mu_r - 1)\frac{NI}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \cong \frac{5{,}092\{2{,}864\}\times 10^3}{r}\vec{e}_\varphi \cong 2{,}55\{0{,}955\}\vec{e}_\varphi$ (kA/m).
As densidades de correntes de magnetização em todo o espaço são diferentes de zero apenas no interior e na superfície do toro. Em volume temos $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM(r))\vec{e}_z = 0$ *e na superfície do toro temos* $\vec{K}_M \cong \vec{\text{M}}(R) \times \vec{n}_{\text{ext}} = 2{,}55\{0{,}955\}\ \vec{e}_I$ (kA/m). *As correntes de magnetização totais são então* $I_{MAGN} = \int_0^{2\pi R} \vec{K}_M \cdot \vec{n}_\perp dl = 2\pi R K_M \cong 32\{18\}$ kA .]

[1,0] **b)** Suponha que se corta uma pequena fatia do toro, de largura $\delta = 0{,}002\{0{,}001\}$ m. Calcule o campo $\vec{H}$ e o campo magnético no centro deste pequeno volume de ar (entreferro) (*note que o campo magnético será diferente da situação sem o entreferro (a))*).
[R: *Usamos o mesmo caminho da alínea anterior, mas notando agora que o campo H não ter a mesma intensidade em todo o percurso. Por outro lado, na separação ao longo do caminho entre o ferro e o ar, mantém-se o fluxo do campo magnético, pelo que* $B_F = B_{ar} \Leftrightarrow \mu H_F = \mu_0 H_\delta$ *sendo* H_F *a intensidade do campo H no ferro e* H_δ *a intensidade do campo no ar (entreferro). Podemos usar esta informação para* $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = (2\pi r - \delta)H_F + \delta H_\delta = NI \Leftrightarrow (2\pi r - \delta)\frac{\mu_0}{\mu}H_\delta + \delta H_\delta = NI$ *ou*
$H_\delta = \frac{\mu NI}{(2\pi r - \delta)\mu_0 + \mu\delta} \cong \frac{\mu_r NI}{(2\pi R - \delta) + \mu_r\delta} = \frac{32000\{18000\}}{4\{6\}\pi - 0{,}002\{-0{,}001\} + 16\{6\}} = 1120\{724\}$ (A/m).
O campo magnético nesse ponto é então $B_\delta = \mu_0 H_\delta = 1{,}41\{0{,}91\}$ (mT) .]



(4,0) **5)** Duas barras condutoras de resistência elétrica $R = 10\{20\}\Omega$, massa $m = 2\{4\}$ kg e comprimento $l = 0{,}5\{2\}$ m estão no plano vertical sujeitas à gravidade, podendo deslocar-se na vertical sem atrito sobre carris de resistência elétrica desprezável. No início, a barra 1 (em cima) tem **velocidade constante** $v = 2\{5\}$ m/s e a barra 2 (em baixo) está travada. Ambas estão sujeitas a um campo magnético uniforme de intensidade $B = 0{,}5\{2\}$ T e com o sentido indicado na figura.
Neste problema a resistência deveria ter sido $R = 0{,}00319\{1{,}02\}\,\Omega$ *para ser coerente com a velocidade constante da barra 1.*

[1,0] **a)** Calcule a corrente induzida nas barras (incluindo sentido da corrente na barra 1).
[R: *A corrente induzida é dada por* $i = \frac{\varepsilon_{ind}}{2R} = \frac{1}{2R}\frac{d\Phi}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{2R}\frac{d(Bly)}{dt} = \frac{Blv}{2R} \Leftrightarrow$
$i = \frac{0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 2\{2\cdot 2\cdot 5\}}{2\cdot 10\{20\}} = 0{,}025\{0{,}50\}\ \mathrm{A}$, *sendo o sentido na barra 1 da esquerda para a direita, para criar um campo induzido que compense a diminuição do fluxo.*]

[1,0] **b)** Calcule a força que se exerce sobre a barra 2.
[R: $\vec{F} = mg\vec{e}_z + \vec{F}_M$ *com* $\vec{F}_M = \int i\vec{e}_l \times \vec{B} dl = ilB\vec{e}_z = \frac{B^2l^2v}{2R}\vec{e}_z = 0{,}00625\{2\}\vec{e}_z$ (N), *sendo* $\vec{e}_z$ *o versor da vertical apontando para baixo.*]

[1,0] **c)** Suponha que se destrava a barra 2. Calcule a aceleração da barra 2. Que acontece à barra 1?
[R: *No início, a aceleração da barra 2 é descendente e com intensidade*
$a_2 = g + \frac{F_M}{m} = 9{,}8031\{10{,}3\}\ (\mathrm{m/s^2})$;
a barra 1 deixa de ter velocidade constante, porque o fluxo já não varia tão depressa, levando a uma menor corrente induzida e a uma menor força sobre a barra 1, deixando de compensar o seu peso.]

[1,0] **d)** Escreva as equações do movimento das barras em função das velocidades das barras, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ (note que as velocidades são sempre muito inferiores à velocidade de estabilização das eventuais correntes induzidas). Qual o movimento das barras após um tempo (relativamente) grande? Justifique sumariamente a sua resposta.
[R: *O fluxo através do circuito delimitado pelas barras, num dado instante em que se encontram respetivamente nas posições* $y_1(t)$ *e* $y_2(t) > y_1(t)$, *é dado por* $\Phi = \iint \vec{B}\cdot\vec{n}dS = lB(y_2 - y_1)$, *pelo que a sua variação no tempo, no instante em que tenham velocidades* $v_1(t)$ e $v_2(t)$, *é dado por* $\frac{d\Phi}{dt} = Bl\left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right) = Bl(v_2(t) - v_1(t)$. *A corrente induzida em todo o circuito será então* $i = \frac{\varepsilon}{2R} = \frac{1}{2R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{Bl}{2R}(v_2(t) - v_1(t))$, *no sentido contrário aos dos ponteiros do relógio, isto é, mantendo o sentido da alínea a) apenas se* $v_1 > v_2$ $(i < 0)$. *A força eletromagnética sentida na barra 1 (de cima), será então dada por* $\vec{F}_{M1} = ilB\vec{e}_z$ *(para cima se* $i < 0$ *), e a força eletromagnética sentida na barra 2 (de baixo) será dada por* $\vec{F}_{M2} = -ilB\vec{e}_z$. *A estas forças somam-se os respetivos pesos para escrevermos as equações do movimento – sistema de duas equações diferenciais acopladas:*

$$\begin{cases} mg + \frac{B^2l^2}{2R}(v_2 - v_1) = m\frac{dv_1}{dt} \\ mg - \frac{B^2l^2}{2R}(v_2 - v_1) = m\frac{dv_2}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(v_1 + v_2) = 2g \\ \frac{d}{dt}(v_2 - v_1) = -\frac{B^2l^2}{R}(v_2 - v_1) \end{cases}$$

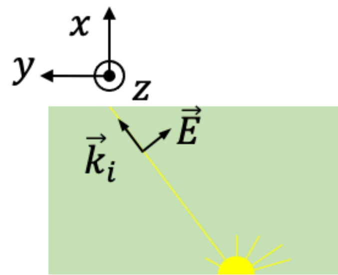
, o que permite concluir que o centro de massa, com velocidade instantânea $v_{CM} = \frac{v_1+v_2}{2}$, *vai ter movimento de queda livre (pois* $\frac{dv_{CM}}{dt} = g$, *enquanto a velocidade relativa entre as barras* $v_{rel} = v_2 - v_1$ *vai tender para zero exponencialmente (pois* $\frac{dv_{rel}}{dt} = -\frac{B^2l^2}{R}v_{rel} \Leftrightarrow v_{rel} = v_{rel_0}e^{-\frac{B^2l^2}{R}t}$). *O movimento das barras após um tempo grande é em queda livre, sendo constante a distância entre elas e não existindo corrente induzida.*]

(4,0) **6)** Um palacete em Lisboa tem um pequeno lago no jardim. O lago, cujas paredes são escuras, é iluminado durante a noite por uma lâmpada monocromática colocada no fundo, que emite isotropicamente. Considere que a lâmpada é pontual. O índice de refração da água é $n_1 = 4/3$.

[1,0] a) Se um dos raios de luz da lâmpada incidir na superfície da água (plano (yz)) segundo um ângulo de incidência $\theta_i = 36{,}87°$, calcule o ângulo segundo o qual ele se propaga no ar.
[R: $\theta_t = \text{arcsen}\left(\frac{n_1}{n_2}\text{sen}\,36{,}87°\right) = \text{arcsen}\left(\frac{4/3}{1}0{,}6\right) = \text{arcsen}(0{,}8) = 53{,}13°$.]

[2,0] b) A lâmpada emite luz amarela com comprimento de onda $\lambda_{\text{agua}} = 375\{450\}$ nm (na água), sendo o campo elétrico de uma onda incidente no ponto $x = y = z = 0$ (origem dos eixos) e no instante $t = 0$ (ver figura), dado pela expressão, no referencial indicado (superfície da água igual ao plano (yz)):

$$\begin{cases} E_{ix} = 60\{30\}\cos\big(\omega t - k_i(0{,}8x + 0{,}6y)\big) \\ E_{iy} = -80\{-40\}\cos\big(\omega t - k_i(0{,}8x + 0{,}6y)\big) \\ E_{iz} = 0 \end{cases} \quad \text{(em V/m)}$$



Existe onda transmitida e/ou refletida? Justifique a sua resposta. Para o(s) caso(s) em que exista, calcule o(s) vetor(es) de onda (k_x, k_y, k_z,) e a(s) intensidade(s) da(s) onda(s).
[R: *Irá existir onda transmitida porque foi possível calcular o ângulo de refração na alínea anterior. Quanto à onda refletida, como só tem componente paralela ao plano de incidência, temos de calcular o ângulo de Brewster,* $\theta_{iB} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{4/3}\right) = 36{,}87°$ *que é idêntico ao ângulo de incidência. Não existe assim componente paralela na onda refletida, e como a onda incidente não tinha componente perpendicular, também não irá existir esta componente na onda refletida. Concluímos assim que não há onda refletida. O vetor de onda para a onda transmitida é* $\vec{k}_t = k_t\big(\cos\theta_t\,\vec{e}_x + \text{sen}\,\theta_t\,\vec{e}_y\big) = k_t\big(0{,}6\vec{e}_x + 0{,}8\vec{e}_y\big)$, *com*
$k_t = \frac{n_2\omega}{c} = \frac{n_2}{n_1}k_i = \frac{3}{4}\frac{2\pi}{\lambda_{agua}} = \frac{3}{4}\frac{2\pi}{3{,}75\{4{,}5\}\times 10^{-7}} = 4\left\{\frac{10}{3}\right\}\pi \times 10^6\ \text{m}^{-1}$ *e*
$\vec{k}_t = 1{,}26\{1{,}05\}\big(0{,}6\vec{e}_x + 0{,}8\vec{e}_y\big) \times 10^7\text{m}^{-1} = \big(0{,}754\{0{,}628\}\vec{e}_x + 1{,}005\{0{,}838\}\vec{e}_y\big) \times 10^7\text{m}^{-1}$.
Para a intensidade da onda transmitida, podemos usar o facto de não haver onda refletida, pelo que $I_t\cos\theta_t + 0 = I_i\cos\theta_i$ *e* $I_t = \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}I_i = \frac{0{,}8}{0{,}6}I_i = \frac{4}{3}I_i$. *Sendo que, como a onda incidente não tem componente perpendicular, tem então polarização linear e*
$I_i = \frac{1}{2}n_1 c\varepsilon_0 E_{0i}^2 = \frac{2\cdot 0{,}0026562}{3}\left(60^2\{30^2\} + 80^2\{40^2\}\right)$. *Pelo que*
$I_t = \frac{8\cdot 0{,}0026562}{9}100^2\{50^2\} = 23{,}61\{5{,}90\}\text{W/m}^2$. *Note-se que, se tivéssemos optado por calcular primeiro o coeficiente* $t_\parallel = \frac{2\sin\theta_t\cos\theta_i}{\sin(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_t-\theta_i)} = \frac{2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8}{1\cdot\cos 16{,}26°} = \frac{4}{3}$, *teríamos o mesmo resultado:*
$I_t = \frac{1}{2}n_2 c\varepsilon_0 E_{0t}^2 = \frac{0{,}0026562}{2}E_{0t\parallel}^2 = \frac{0{,}0026562}{2}t_\parallel^2 E_{0i\parallel}^2 = \frac{0{,}0026562}{2}\cdot\frac{16}{9}\cdot E_{0i}^2 = 23{,}61\{5{,}90\}\text{W/m}^2$.]

[1,0] c) Nessa noite observa-se que apesar de a lâmpada pontual emitir isotropicamente, quando olhamos para o lago apenas vemos um círculo luminoso com um raio de 40{20} cm. Qual a profundidade do lago?
[R: *Vemos um círculo porque a luz proveniente da lâmpada que incide fora do limite do círculo está a incidir com um ângulo superior ao do ângulo de reflexão total, pelo qual nenhuma luz é transmitida para o ar. Este ângulo de reflexão total é* $\theta_{iRT} = \text{arcsen}\left(\frac{1}{4/3}\right) = 48{,}6°$, *cuja tangente corresponde à razão entre o raio do círculo e a profundidade da lâmpada (ou do lago). A profundidade será então* $h = \frac{R}{\tan\theta_{iRT}} = \frac{0{,}4\{0{,}2\}}{1{,}34} = 35{,}3\{17{,}6\}$ cm.]