Cálculo Diferencial e Integral I

Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
2^o Teste (V1) - 15 de Janeiro de 2010 - 11h00m

Resolução

Problema 1 (2,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = xe^x \qquad (b)\ g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (c)\ h(x) = \frac{x^2+3x-1}{(x-2)(x+1)^2}$$

Resolução:

a) (Partes: $u = x, v' = e^x$): $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

b) (Substituição: $u = 1 + x^2, du = 2xdx$):

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

c) (Decomposição em fracções parciais:)

$$\frac{x^2+3x-1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2},$$

$$x^2 + 3x - 1 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2),$$

Consideramos os pontos $x = 2$, $x = -1$ e, por exemplo, $x = 0$, para obter

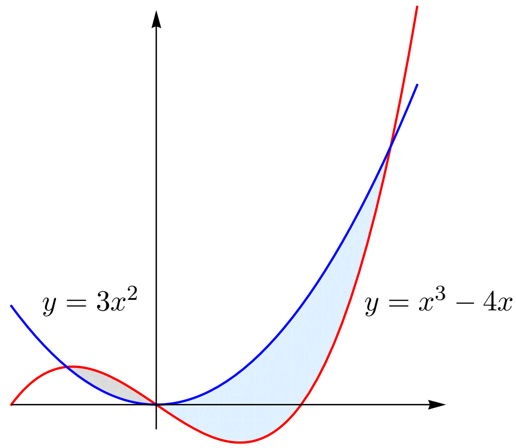
$$x = 2: \ 4 + 6 - 1 = 9A \Longleftrightarrow A = 1$$
$$x = -1: \ 1 - 3 - 1 = -3C \Longleftrightarrow C = 1$$
$$x = 0: \ -1 = A - 2B - 2C \Longleftrightarrow -1 = A - 2B - 2C \Longleftrightarrow B = 0$$

$$\int \frac{x^2+3x-1}{(x-2)(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{(x-2)} dx + \int \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \log(|x-2|) - \frac{1}{x+1} + C$$

Problema 2 (2,0 val.) Calcule a área da região do plano delimitada pelas curvas

$$y = x^3 - 4x \text{ e } y = 3x^2.$$

A área da região em causa é superior ou inferior a 65/2?



<u>Resolução</u>: As curvas intersectam-se quando $x = -1$, $x = 0$ e $x = 4$, porque

$$x^3 - 4x = 3x^2 \iff x^3 - 4x - 3x^2 = 0 \iff x(x^2 - 4 - 3x) = 0 \iff x(x-4)(x+1) = 0$$

A área é dada por

$$\int_{-1}^{4} |x^3 - 4x - 3x^2| dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - 4x - 3x^2) dx + \int_{0}^{4} (-x^3 + 4x + 3x^2) dx =$$

$$= \left(x^4/4 - 2x^2 - x^3\right|_{x=-1}^{x=0} + \left(-x^4/4 + 2x^2 + x^3\right|_{x=0}^{x=4} =$$

$$= -((-1)^4/4 - 2(-1)^2 - (-1)^3) + (-4^4/4 + 2 \cdot 4^2 + 4^3) =$$

$$-(1/4 - 1) + (32) = 33 - 1/4 > 32,5 = 65/2$$

Problema 3 (2,0 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{1+5k^2}} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2k)!\sqrt{k}} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\log^2(k+1)}$$

<u>Resolução</u>:

a) Consideramos as sucessões

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{1+5k^2}} \text{ e } b_k = \frac{1}{k}$$

Notamos primeiro que a_k é decrescente e $a_k \to 0$. Segue-se do critério de Leibniz (das séries alternadas) que a série $\sum (-1)^k a_k$ é convergente.

Temos por outro lado que

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{\sqrt{1+5k^2}} = \frac{1}{\sqrt{5+1/k}} \to \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Concluímos que as séries $\sum a_k$ e $\sum b_k$ têm a mesma natureza. Como a série (harmónica) de termo geral $1/k$ é divergente, a série $\sum a_k$ é também divergente, e a série dada não é absolutamente convergente, ou seja, é SIMPLESMENTE CONVERGENTE

b) Aplicamos o critério da razão, com $a_k = \frac{2^k}{(2k)!\sqrt{k}}$:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{(2k+2)!\sqrt{k+1}} \frac{(2k)!\sqrt{k}}{2^k} = \frac{2}{(2k+1)(2k+2)}\sqrt{\frac{k}{k+1}} \to 0$$

A série é portanto (absolutamente) convergente.

c) Usamos o critério do integral, com $f(t) = \frac{1}{(t+1)\log^2(t+1)}$. Com $v = \log(t+1)$, obtemos

$$\int \frac{1}{(t+1)\log^2(t+1)} dt = \int \frac{1}{v^2} dv = -\frac{1}{v} = -\frac{1}{\log(t+1)}$$

e portanto

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{(t+1)\log^2(t+1)} dt = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\log(x+1)} + \frac{1}{\log(2)} = \frac{1}{\log(2)}$$

Segue-se que a série é (absolutamente) convergente.

Problema 4 (1,5 val.) Determine e classifique os extremos da função f definida para $x \in \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{(t^2-1)e^{t^5}}{1+t^{10}}\ \mathrm{d}t.$$

Resolução: A derivada de f é dada por

$$f'(x) = 2x\frac{((x^2)^2-1)e^{(x^2)^5}}{1+(x^2)^{10}} = \frac{2x(x^4-1)e^{x^{10}}}{1+x^{20}}$$

A derivada anula-se quando $x = 0$ e quando $x = \pm 1$, e o seu sinal algébrico é o sinal de

$$x(x^4-1) = x(x^2-1)(x^2+1) = x(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

Temos assim $f'(x) < 0$ para $x < -1$, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ e $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Concluímos que f tem mínimo em $x = \pm 1$ e máximo em $x = 0$.

Problema 5 (1,0 val.) Determine a série de Taylor no ponto $a = 0$ das seguintes funções, especificando em cada caso o raio de convergência da série, e o conjunto onde a série converge absolutamente:

$$(a)\ f(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad (b)\ g(x) = e^{x^2} \qquad (c)\ h(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

Resolução:

a) Trata-se da série geométrica com 1º termo 1 e razão $= x^2$:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

Sabemos que a série converge quando $x^2 < 1$, ou seja, o raio de convergência é $R = 1$, e a série converge absolutamente para $|x| < R$ (diverge quando $x = \pm 1$).

b) A série de Taylor da exponencial é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}, \text{ donde}$$

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}$$

O raio de convergência é evidentemente $R = \infty$ e a série converge absolutamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

c) Integramos termo-a-termo a série anterior, para obter uma primitiva de $g(x) = e^{x^2}$:

$$\int e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}, \text{ donde}$$

$$\int_0^x e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}, \text{ também para qualquer } x \in \mathbb{R}.$$

Mais uma vez o raio de convergência é $R = \infty$ e a série converge absolutamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Problema 6 (1,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}$, dada para $x \neq 0$ por

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x^3)}{x^2}$$

.

(a) Determine a série de Taylor de f, e indique o conjunto onde a série de Taylor é igual à função f.

Resolução: A série de Taylor de $\cos x$, válida para qualquer $x \in \mathbb{R}$, é

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \text{ donde } \cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{24} - \cdots$$

Temos portanto

$$1 - \cos(x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{6n}}{(2n)!} = \frac{x^6}{2} - \frac{x^{12}}{24} + \cdots, \text{ e}$$

$$\frac{1 - \cos(x^3)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{6n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{6n-2}}{(2n)!} = \frac{x^4}{2} - \frac{x^{10}}{24} + \cdots$$

Notamos em particular que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{6n-2}}{(2n)!} = \frac{x^4}{2} - \frac{x^{10}}{24} + \cdots \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}, \text{ incluindo } x = 0.$$

(b) Qual é o menor valor de n para o qual $f^{(n)}(0) \neq 0$? A função f tem algum extremo em $x = 0$?

Resolução: A série de Taylor de f (em $a = 0$) é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{6k-2}}{(2k)!} = \frac{x^4}{2} - \frac{x^{10}}{24} + \cdots$$

O menor valor de n para o qual $f^{(n)}(0) \neq 0$ é portanto $n = 4$, e

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } f^{(4)}(0) = \frac{4!}{2} = 12 > 0$$

Como $n = 4$ é par, segue-se que f tem um mínimo em $x = 0$.

(c) Mostre que $0,096 < \int_0^1 f(x)dx < 0,1$.

Resolução: Integrando a série da alínea anterior termo-a-termo, temos

$$\int f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{6k-1}}{(6k-1)(2k)!} = \frac{x^5}{5 \cdot 2} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 24} + \cdots$$

Concluímos que

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(6k-1)(2k)!} = \frac{1}{5 \cdot 2} - \frac{1}{11 \cdot 24} + \cdots$$

Como a série numérica acima é alternada e o seu termo geral decresce em valor absoluto para zero, temos

$$\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k-1} \frac{1}{(6k-1)(2k)!} < \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(6k-1)(2k)!} < \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} \frac{1}{(6k-1)(2k)!}$$

Por outras palavras,

$$\frac{1}{5 \cdot 2} - \frac{1}{11 \cdot 24} < \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{5 \cdot 2} - \frac{1}{11 \cdot 24} + \cdots < \frac{1}{5 \cdot 2}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{254} < \int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{10}$$

Como $1/254 < 1/250 = 0,004$, temos ainda

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{250} < \frac{1}{10} - \frac{1}{254} < \int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{10} \text{ ou } 0,096 < \int_0^1 f(x)dx < 0,1$$