Problema 1

O som obedece à equação das ondas

$$c_s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$ onde $c_s = 300\ ms^{-1}$ é a velocidade do som à pressão e temperatura ambiente

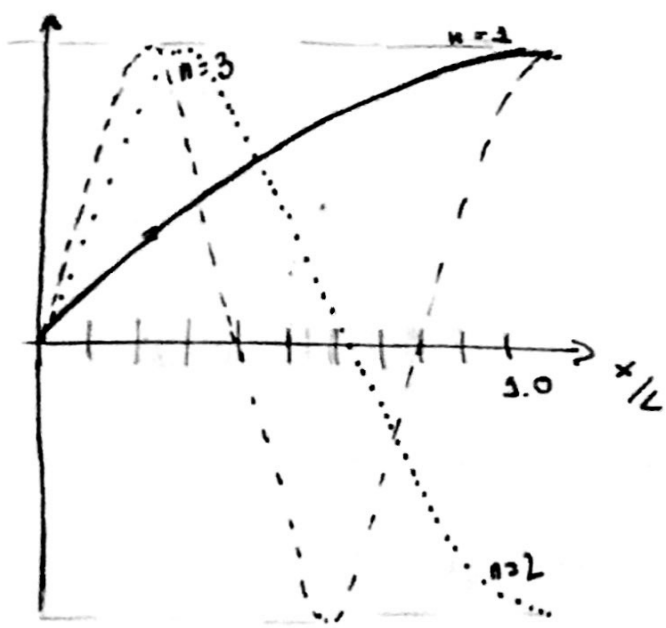
As condições fronteira do tubo de orgão são

$$\begin{cases} \psi(0,t) = 0 \\ \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

cujos modos normais são (tal como na corda)

$$A_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2\ell}\right), n = 0 \ldots \infty$$

Os primeiros 3 modos são dados por




As frequências normais para cada um são dadas pela relação

$$2\pi f_n = \omega_n = c_s k_n$$ de onde obtemos

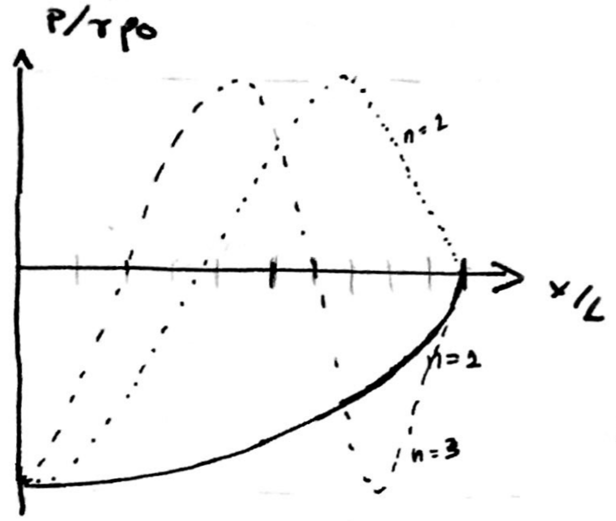
$$f_1 = 50\ Hz,\ f_2 = 150\ Hz,\ f_3 = 250\ Hz$$

O excesso de pressão ao longo do tubo é dado (2)

por $p = - \gamma p_0 \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x}}$

só nos interessa

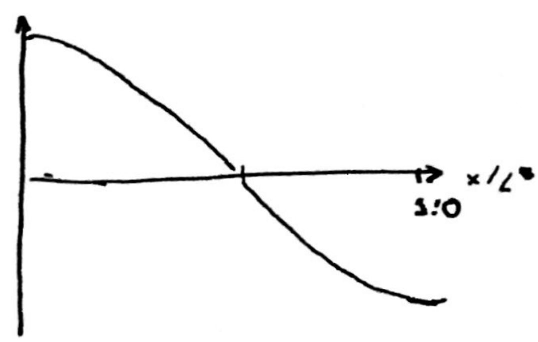
esta dependência




Um máximo de amplitude $\psi$ corresponde a um mínimo de pressão e vice-versa ⇒ o som é uma onda longitudinal de compressão/descompressão.

c) quando o tubo é aberto em ambas as pontas

• primeiro modo normal é




Seja $L'$ o novo comprimento do tubo. O comprimento de onda do primeiro modo é $\lambda_1' = 2L'$.

Logo para que ela tenha a mesma frequência que anteriormente

temos que ter $f_1 = \frac{c_s}{\lambda_1'} = 50 \text{ Hz} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L' = 3$

## Problema 2

→ **Energia cinética**

Para uma partícula pontual é dada por $\frac{1}{2}mv^2$

Um elemento de ~~unidade~~ comprimento da corda de densidade linear $\rho = \frac{M}{L}$ possui velocidade $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, em que $\psi$ é a variação em relação à posição de equilíbrio. Logo a densidade de energia cinética na corda é $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$, e a energia cinética total da corda é

$$K = \int_0^L dx\, \mathcal{K}$$

→ **Energia potencial**

De forma semelhante a energia potencial a que uma partícula ~~potencial~~ pontual está sujeita está relacionada com a força que nela atua através de $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$. Na corda, um elemento de comprimento está sujeito a uma força restitutiva que é

$F = -T\frac{\partial\psi}{\partial x} \Rightarrow$ densidade de energia potencial é

$u = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$, e a energia potencial na corda é dada por $U = \int_0^L dx\, u$.

Para o n modo normal temos que

$$\psi_n(x,t) = A\sin(K_n x)\cos(\omega_n t + \phi), \quad K_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{\tau L}{M}}$$

Logo, substituindo chegamos a que a energia do n modo normal da corda é

$$E_n = \frac{1}{2}\tau\int_0^L dx\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{L}\int_0^L dx\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= A^2\frac{\tau K_n^2}{2}\int_0^L dx\cos^2(K_n x)\cos^2(\omega_n t) + A^2\frac{K\omega_n^2}{2L}\int_0^L dx\sin^2(K_n x)\sin^2(\omega_n t) =$$

$$= \ldots = \frac{1}{4}A^2\frac{n^2\pi^2\tau}{L}$$

b) Pela forma dada para a energia sabemos que a correspondente à ~~dos modo~~ de sobreposição destes modos normais será ~~~~

$$E = E_1 + E_3 + \text{termo de interferência}$$

↓

fase não interessa para o cálculo

O termo de interferência que advém de $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$ e $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$ será proporcional a $\int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)dx$ e $\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)dx$ respetivamente

Mas estes integrais são nulos pela relação de ortogonalidade entre modos normais (podem fazer o cálculo para confirmar).

Logo, chegamos a $\bar{E} = E_1 + E_3 = \frac{1}{4} A_1^2 \frac{\pi^2 T}{L} + \frac{9}{4} A_3^2 \frac{\pi^2 T}{L}$

Problema 3

A equação das ondas para a corda é dada por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho_L} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

Procurando soluções do tipo $e^{i(Kx - \omega t)}$ (ondas planas) obtemos

$$-\omega^2 + \frac{T}{\rho_L} K^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}\, K$$

A velocidade de propagação das ondas é

$v = \frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$. Para uma equação das ondas gerais têm

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - v_g^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

Pergunta extra: qual é a transformação de coordenadas mais geral que mantém a invariância da equação de ondas em referenciais inerciais?

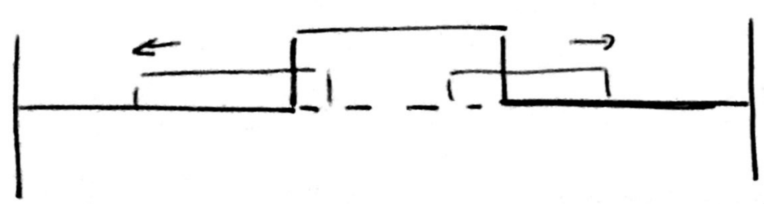
Há 2 formas de resolver os problemas seguintes. A primeira (e mais laboriosa) seria calcular os coeficientes da solução geral que correspondem às condições iniciais dadas. A segunda, que dá (muito) menos trabalho, apela à interpretação física do pulso enquanto "travelling waves". Ignorando as condições fronteira, o movimento da corda pode ser escrito como

$$y(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{\substack{\text{onda a}\\ \text{propagar-se}\\ \text{para a direita}}} + \underbrace{f(x+vt)}_{\substack{\text{onda a}\\ \text{propagar-se}\\ \text{para a esquerda}}}$$

De forma a respeitar as condições iniciais, em $t=0$, $f(x)$ corresponde ao pulso quadrado de largura $L/4$ mas altura $h/2$. Esta solução também satisfaz as condições iniciais

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = -v f'(x) + v f'(x) = 0 \checkmark$$

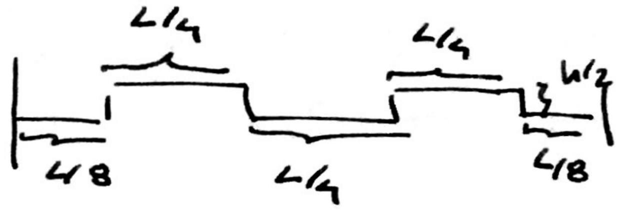
Ou seja, o movimento subsequente será descrito por 2 pulsos a moverem-se em direções opostas



Em $t = \frac{L}{4v}$, os pulsos andaram $x = \frac{L}{4}$, logo

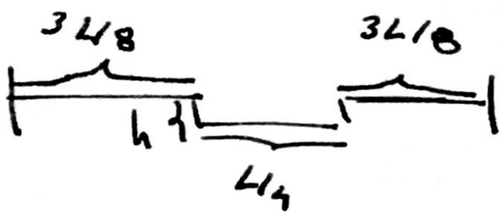
(7)

a configuração da corda será




Em $t = \frac{L}{v}$ os pulsos já refletiram na parede.

Esta reflexão tem de conservar a energia (ignorando absorsões na parede) e por isso o pulso é refletido integralmente. Para que as condições fronteira sejam cumpridas, esta reflexão tem de vir desfasada de $\pi$, ou teríamos uma interferência construtiva entre o pulso refletido e o incidente. Logo após $t = \frac{L}{v}$ os pulsos percorreram uma distância $L$ e aparecem desfasados de $\pi$



8

Problema 4

Do problema 2 sabemos que este será dado

por $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho y_0^2 \frac{v^2}{\sigma^2}\left(\frac{x-vt}{\sigma}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{x-vt}{\sigma}\right)^2\right]$

Já a densidade de energia potencial é

$$u = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}T y_0^2 \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{x-vt}{\sigma}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{x-vt}{\sigma}\right)^2\right]$$

A energia total do pulso é dada por

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(\mathcal{K}+u) = \int_{-\infty}^{+\infty} T y_0^2 \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{x-vt}{\sigma}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{x-vt}{\sigma}\right)^2\right]dx =$$

$$= \frac{T y_0^2}{\sigma}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ usando o integral gaussiano

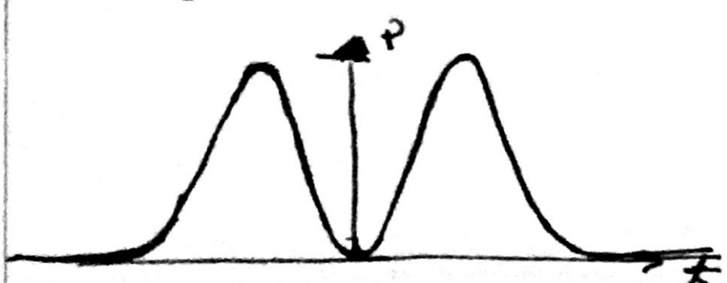
A potência é dada por

$$P = F\cdot v = \underbrace{T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}_{F}\underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)}_{v}$$

Logo, em $x = x_0$

$$P\Big|_{x=x_0} = v T y_0^2 \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{(x-vt)^2}{\sigma}\right) \underbrace{\exp\left[-\left(\frac{x-vt}{\sigma}\right)^2\right]}_{\exp\left[-\left(\frac{x_0-vt}{\sigma}\right)^2\right]}\Bigg|_{x=x_0}$$

O gráfico desta função é



## Problema 5



Tendo o aro massa desprezável, pela 2ª lei de Newton a força resultante no aro tem de ser nula. Logo

$$F = -T\frac{\partial y}{\partial x} - b\frac{\partial y}{\partial t} = 0. \iff$$

$$\iff T\frac{\partial y}{\partial x} + b\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

Usando $y = f(t - x/v) + g(t + x/v)$, e substituindo na condição fronteira obtida (em $x=0$)

$$-\frac{T}{v}f'(t) + \frac{T}{v}g'(t) + b f'(t) + b g'(t) = 0.$$

~~Resolvendo g~~

Integrando no tempo (e ignorando constantes de integração) e resolvendo para $g$ obtém-se

$$g = \frac{T - bv}{T + bv}\, f$$

No limite $b \to 0 \Rightarrow g \to f$, o que é o resultado esperado para uma "free end".

No limite $b \to \infty \Rightarrow g \to -f$, o que é o resultado esperado para uma corda presa.