Semana 3 - Problema 2

O segredo é usar a linearidade do sistema Oscilador Harmónico para decompormos a força complicada que nos é dada em 2 forças simples com as quais sabemos trabalhar.

Eq. movimento:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos(\omega_0 t)\cos(\delta t)$$

Da semana 1, podemos usar:

$$\cos(\omega_0 t)\cos(\delta t) = \frac{1}{2}\left(\cos([\omega_0 + \delta]t) + \cos([\omega_0 - \delta]t)\right)$$

Passando para o plano complexo:

$$\frac{f_0}{m}\cos(\omega_0 t)\cos(\delta t) \Rightarrow \frac{f_0}{2m}\left(e^{-i(\omega_0+\delta)t} + e^{-i(\omega_0-\delta)t}\right)$$

Para já, foquemo-nos na solução particular. Sabemos, pela linearidade, que será a soma de 2 soluções;

$$x_p(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Em que cada uma é solução respetiva de:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \dfrac{f_0}{2m} e^{-i(\omega_0+\delta)t} \\ \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \dfrac{f_0}{2m} e^{-i(\omega_0-\delta)t} \end{cases}$$

2

Vamos propor soluções do tipo

$$x_i = \mathcal{l}_i \, e^{-i\omega_i t} \quad , \; i = 1, 2$$

Chegamos a

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_i^2)\,\mathcal{l}_i = \dfrac{f_0}{2m} \\ \omega_1 = \omega_0 + \delta \\ \omega_2 = \omega_0 - \delta \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \mathcal{l}_1 = -\dfrac{f_0}{2m\delta}\dfrac{1}{2\omega_0+\delta} \\ \omega_1 = \omega_0 + \delta \\ \mathcal{l}_2 = \dfrac{f_0}{2m\delta}\dfrac{1}{2\omega_0-\delta} \\ \omega_2 = \omega_0 - \delta \end{cases}$$

Pelo que a nossa solução particular é dado por

$$x_p(t) = \frac{f_0}{2m\delta}\left(\frac{e^{-i(\omega_0-\delta)t}}{2\omega_0-\delta} - \frac{e^{-i(\omega_0+\delta)t}}{2\omega_0+\delta}\right)$$

Até aqui, a nossa solução é exata. Agora, vamo-nos focar no limite $\delta \ll \omega_0$ para analisar o que acontece na ressonância. Lembrem-se que

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + \mathcal{O}(x^2) \quad , \text{ logo para } \delta \ll \omega_0$$

$$\frac{1}{2\omega_0-\delta} \simeq \frac{1}{2\omega_0}\left(1 + \frac{\delta}{2\omega_0}\right); \quad \frac{1}{2\omega_0+\delta} \simeq \frac{1}{2\omega_0}\left(1 - \frac{\delta}{2\omega_0}\right)$$

Substituindo em $x_p(t)$ chegamos a

$$x_p(t) \simeq \frac{f_0}{4m\delta\omega_0} e^{-i\omega_0 t}\left[e^{i\delta t}\left(1+\frac{\delta}{2\omega_0}\right) - e^{-i\delta t}\left(1-\frac{\delta}{2\omega_0}\right)\right]$$

Em que desprezámos termos de ordem $\mathcal{O}\left(\frac{\delta}{2\omega_0}\right)^2$

Também sabemos que em Ressonância, o sistema deixa de obedecer à linearidade à medida que o tempo aumenta, i.e. a amplitude de oscilação diverge.

Por isso, vamo-nos focar nos instantes iniciais, ~~nomea~~ nomeadamente em $t \sim \frac{1}{\omega_0}$. Isto permite-nos

"da ordem de"

expandir

$$e^{i\delta t} \simeq 1 + i\delta t + \mathcal{O}(\delta t)^2$$

$$e^{-i\delta t} \simeq 1 - i\delta t + \mathcal{O}(\delta t)^2$$

(recorde a série de Taylor da exponencial)

substituindo em $x_p(t)$ chega-se a

$$x_p(t) \simeq \frac{f_0}{4m\omega_0} e^{-i\omega_0 t}\left(\frac{1}{\omega_0} + 2it\right)$$

, onde novamente desprezámos tudo o que contenha termos em δ^2

Notem que δ desaparece da solução!

Tirando apenas a parte real, chegamos à seguinte solução particular real:

$$x_p(t) = \underbrace{\frac{f_0}{4m\omega_0^2}\cos(\omega_0 t)}_{\substack{\text{em fase com}\\ \text{a força externa}\\ (1)}} + \underbrace{\frac{f_0}{2m\omega_0}\, t\, \text{sen}(\omega_0 t)}_{\substack{\text{desfasado de } \frac{\pi}{2}\\ \text{com a força}\\ \text{externa}\\ (2)}}$$

A solução total será a soma desta com a solução homogénea $A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t)$ onde A e B dependem das condições iniciais.

Reparem que δ não aparece na nossa solução particular mas sabemos que ao fazer $\delta \to 0$ deveríamos obter um sistema ressonante. Que aconteceu? Ao focarmo-nos em instantes $t \sim \frac{1}{\omega_0}$, perdemos a informação que viria da não linearidade do sistema em ressonância. Contudo, ganhámos algo em troca. Qual é o gráfico de $t\,\text{sen}(\omega_0 t)$? O segundo termo apresentado na solução particular $x_p(t)$ captura a divergência <u>LINEAR</u> do sistema, como esperado para os instantes iniciais de um oscilador harmónico em ressonância.

Vamos então calcular a potência transferida ~~num~~ em meio período. Vamos novamente ignorar a solução homogénea porque a física interessante está na solução particular que captura a divergência da amplitude para os instantes iniciais do sistema na ressonância.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \underbrace{\frac{1}{\frac{\pi}{\omega_0}}}_{\text{meio período}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} dt \; \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{v}}_{\text{trabalho realizado instantaneamente}}$$

$$F = f_0 \cos(\omega_0 t)$$, onde novamente ignoramos tudo o que não é linear em δ (qual a série de taylor de $\cos x$?)

$$v = \underbrace{-\frac{f_0}{4m\omega_0}\,\text{sen}(\omega_0 t)}_{\text{termo } 1} + \underbrace{\frac{f_0}{2m\omega_0}\,\text{sen}(\omega_0 t) + \frac{f_0}{2m}\, t\cos(\omega_0 t)}_{\text{termo } 2}$$

Termo 1:

$$F\cdot v = -\frac{f_0^2}{4m\omega_0}\,\text{sen}(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$$

Estamos a integrar no 1º e 2º quadrante do círculo trigonométrico ($\theta = \omega_0 t$ vai de 0 a π). $\text{sen}(\omega_0 t)$ é sempre positivo e $\cos(\omega_0 t)$ é ímpar em relação a $\frac{\pi}{2}$. Logo, quando integrado este termo é zero.

Isto seria expectável à partida? Compare o que sabe do oscilador harmónico forçado com atrito e qual a contribuição da componente da solução particular em fase com a força externa para a energia transferida em meio período.

Termo 2: o primeiro é do tipo da conta que acabámos de fazer por isso foquemo-nos em $\frac{f_0}{2m} t \cos(\omega_0 t)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} dt \, \frac{f_0^2}{2m} t \cos^2(\omega_0 t) = \qquad \text{(integrar por partes)}$$

$$= \frac{f_0^2}{2m}\left(t\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t\omega_0)}{4}\right]\Bigg|_0^{\pi/\omega_0} - \int_0^{\frac{\pi}{\omega_0}} dt \left(\frac{t}{2} + \underbrace{\frac{\sin(2t\omega_0)}{4}}\right)\right) =$$

este termo dá 0 quando integrado entre 0 e π/ω_0. Consegue perceber porquê?

$$= \frac{f_0^2}{2m}\left(\frac{\pi^2}{2\omega_0^2} - \frac{t^2}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega_0}}\right) =$$

$$= \frac{f_0^2}{2m} \frac{\pi^2}{4\omega_0^2}$$

$$P = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \frac{f_0^2}{2m} \frac{\pi^2}{4\omega_0^2} = \frac{1}{2} f_0 \omega_0 \underbrace{\frac{f_0 \pi}{4m\omega_0^2}}$$

amplitude média do termo em $x_p(t)$ proporcional a $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$. Compare com o oscilador harmónico forçado com atrito?