

Indução Magnética criada por diferentes distribuições de corrente.

Indução magnética na presença de matéria.
Relação $B(H)$ em materiais ferromagnéticos.

IST 2020

Indução Magnética criada por diferentes distribuições de corrente

Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

↓

$$d\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dq \vec{v} = dq \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dq}{dt} d\vec{s} = i d\vec{s}$$



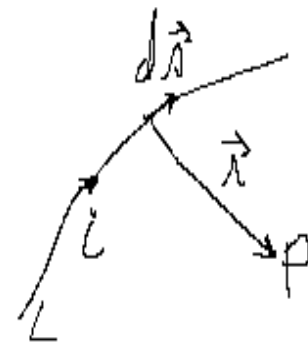
$$d\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{i d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

↓

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum i$$

Teorema de Ampère



indução magnética

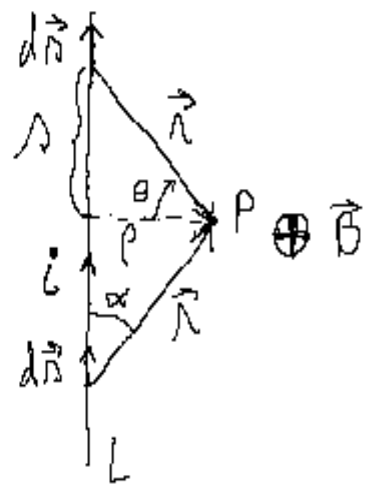
$$[\vec{B}] = \text{Tesla} = \text{kg A}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$$

permeabilidade magnética do vácuo

Potencial Vetor

Exemplos: Indução magnética gerada por condutor retilíneo:



$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L i \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L i \frac{\rho ds}{r^3}$$

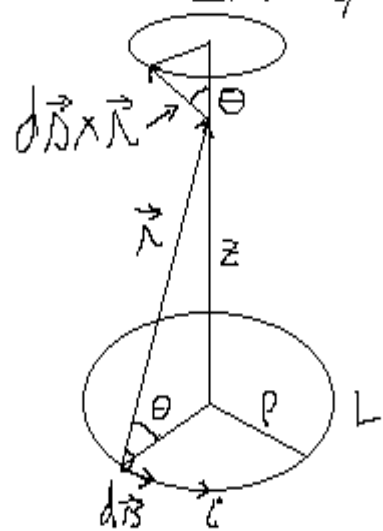
$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 \theta}{\rho^3} \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho}$$

$$|d\vec{s} \times \vec{r}| = ds \sin \alpha = ds \rho$$

$$\rho = r \sin \theta \rightarrow d\rho = \frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$\rho = r \cos \theta$$

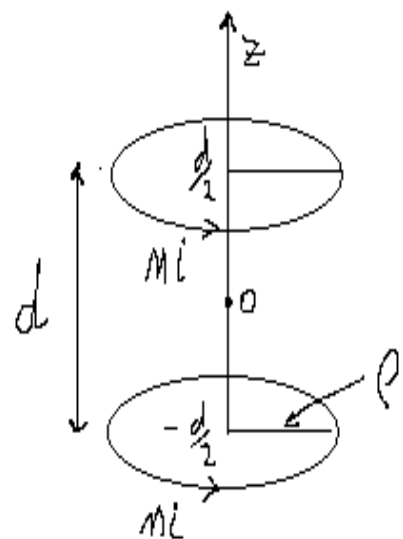
Indução magnética gerada por espira circular no eixo da espira:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int i \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_L \frac{ds \sin \theta}{r^3} \hat{z} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} 2\pi R \hat{z} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{r^3} \hat{z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Indução magnética gerada por bobinas de Helmholtz no eixo das bobinas.



$$B_z = \frac{\mu_0 M i}{2} \frac{a^2}{(a^2 + (z + \frac{d}{2})^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 M i}{2} \frac{a^2}{(a^2 + (z - \frac{d}{2})^2)^{3/2}}$$

$$B_z = \mu_0 M i \frac{a^2}{(a^2 + \frac{d^2}{4})^{3/2}} + z \frac{dB_z}{dz} \Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \frac{d^2 B_z}{dz^2} \Big|_{z=0} + \frac{z^3}{3!} \frac{d^3 B_z}{dz^3} \Big|_{z=0} + \frac{z^4}{4!} \frac{d^4 B_z}{dz^4} \Big|_{z=0} + \dots$$

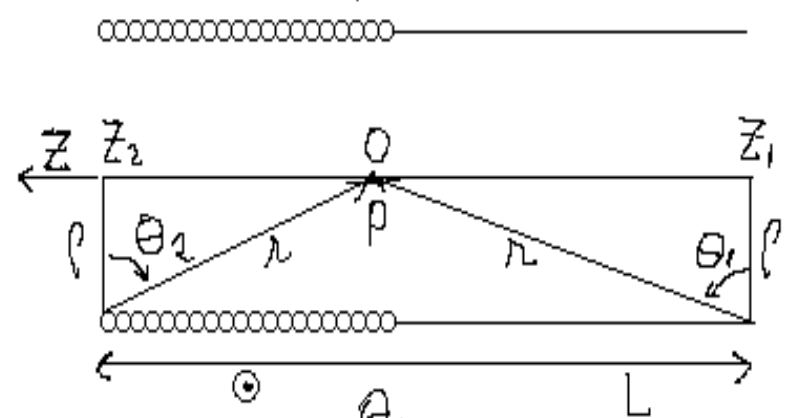
Com $d = a \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_z \Big|_{z=0} = \mu_0 M i \frac{a^2}{(\frac{5}{4}a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 M i}{a} \frac{8}{5\sqrt{5}}$$

$$B_z \Big|_{z \neq 0} = \frac{\mu_0 M i}{2} \left[\frac{a^2}{(a^2 + (z + \frac{a}{2})^2)^{3/2}} + \frac{a^2}{(a^2 + (z - \frac{a}{2})^2)^{3/2}} \right]$$

Indução magnética gerada por solenoide finito no seu eixo

$\oplus i$ $N \leftarrow N$ espiras por unidade de comprimento



$$dB_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2}{r^3} di = \frac{\mu_0}{2} \frac{r^2}{r^3} Ni dz, \quad r = \sqrt{r^2 + z^2}$$

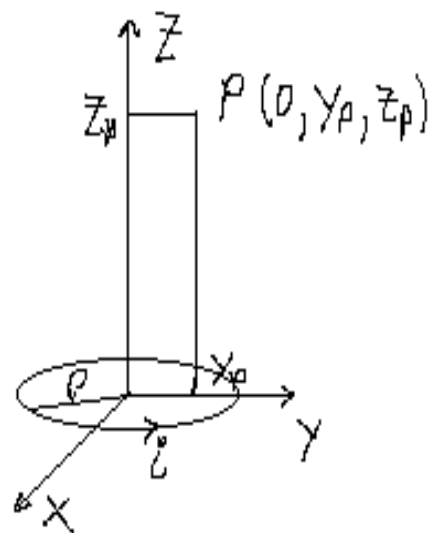
$$\frac{r}{r} = \cos \theta, \quad \frac{-z}{r} = \sin \theta \quad \frac{-z}{r} = \tan \theta \quad dz = -\frac{r}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$B_z = \frac{\mu_0 Ni}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{r^2}{r^3} dz = \frac{\mu_0 Ni}{2} \int_{\theta_1}^{-\theta_2} \frac{r^2}{r^3 / \cos^2 \theta} \frac{(-r)}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$B_z = \frac{\mu_0 Ni}{2} \int_{-\theta_2}^{\theta_1} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 Ni}{2} [\sin \theta_1 + \sin \theta_2]$$

$$\text{solenóide muito longo } (L \gg 2r) \Rightarrow \theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow B_z = \mu_0 Ni$$

Indução magnética gerada por espira fora do eixo:



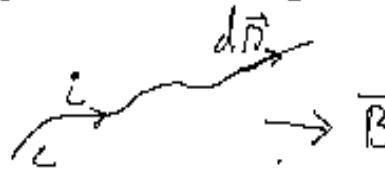
$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} a \int_0^{2\pi} \frac{z_p \sin\theta \hat{e}_y + (a - y_p \sin\theta) \hat{e}_z}{(a^2 + y_p^2 - 2ay_p \sin\theta + z_p^2)^{3/2}} d\theta$$

Forças sobre condutores percorridos por corrente na presença de \vec{B}

Força de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ $d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} = dq \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} = i d\vec{r} \times \vec{B}$

\vec{B} $q \circ \vec{v}$ força total no conduto $L \rightarrow \vec{F} = \int_L i d\vec{r} \times \vec{B}$

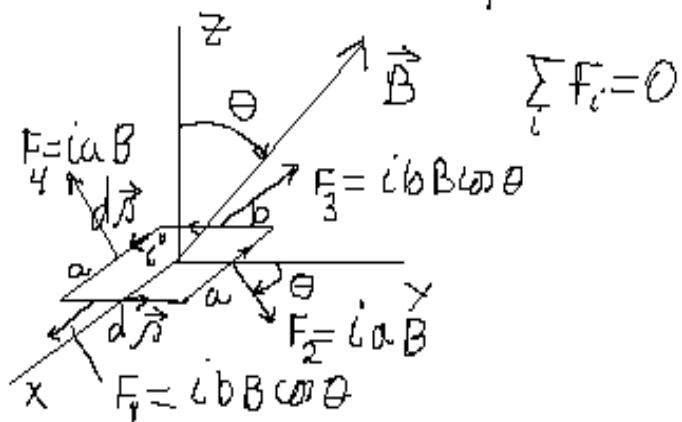
$d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times i d\vec{r} \times \vec{B}$



momento das forças que atuam em $L \rightarrow \vec{N} = \int_L \vec{r} \times (i d\vec{r} \times \vec{B})$

$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$ num circuito plano:
momento magnético $\vec{m} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times i d\vec{r}$
do circuito:

Forças sobre uma espira rectangular:



$\vec{N} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \rightarrow$ momento das forças que atuam na espira

$\vec{N} = 2 \frac{b}{2} i a B \sin \theta (-\hat{e}_x) = -i a b B \sin \theta \hat{e}_x$

$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{m} = i a b \hat{e}_z = i A \hat{e}_z \quad (A = ab)$

Espira com área $A = ab$ percorrida por corrente i
constitui um dipolo magnético de momento: $m = iA$

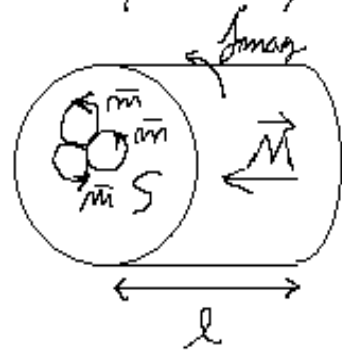
Campo de indução magnética na presença de matéria:

$$\vec{M} = \sum_i N_i \langle \vec{m}_i \rangle \rightarrow \text{vetor magnetização, momento magnético médio por unidade de volume}$$

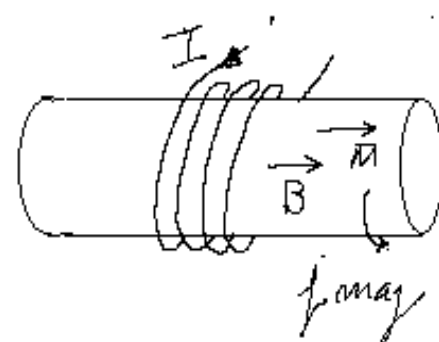
Diferentes substâncias: (Prop. Magnéticas)

Diamagnéticas	$\downarrow \vec{M} \quad \uparrow \vec{B}$	$\chi_m < 0 \quad \mu < \mu_0$
Paramagnéticas	$\uparrow \vec{M} \quad \uparrow \vec{B}$	$\chi_m > 0 \quad \mu > \mu_0$
Ferromagnéticas	$\uparrow \vec{M} \quad \uparrow \vec{B} \quad \vec{M} \rightarrow \text{muito grande}$	

Vetor Campo Magnético:



$$\begin{aligned} m_T &= M S l = M l S \\ &= I_t S = \frac{I_t}{l} l S \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= \frac{I_t}{l} = J_{mag} \end{aligned}$$



$$B = \mu_0 (nI + J_{mag})$$

$$B = \mu_0 (nI + M)$$

$$\frac{B}{\mu_0} - M = nI = H$$

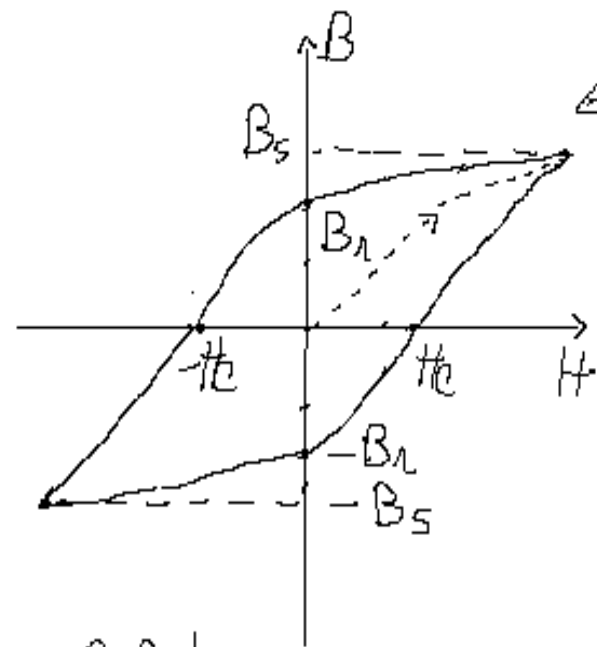
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \text{ com } \mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

$\mu \rightarrow$ permeabilidade magnética $\chi_m \rightarrow$ susceptibilidade magnética

Relação $B(H)$ nos materiais ferromagnéticos. $\vec{B} = \vec{B}(H)$



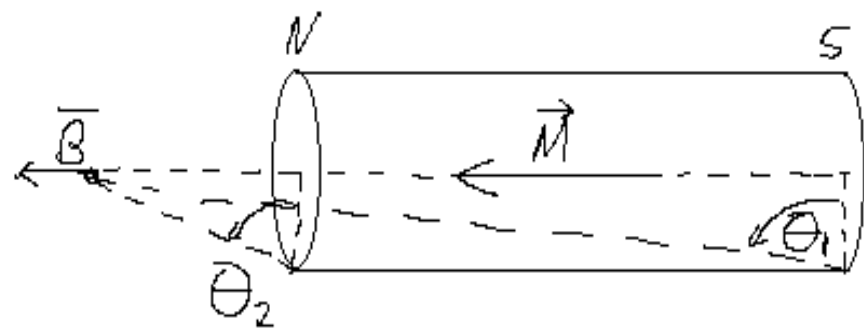
← Ciclo de histerese

$B_s \rightarrow$ Indução de saturação

$B_r \rightarrow$ Indução remanente

$H_c \rightarrow$ Campo crítico

Campo de indução \vec{B} criado por um cilindro de material com magnetização uniforme M



$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 M}{2} (-\sin\theta_2 + \sin\theta_1)$$

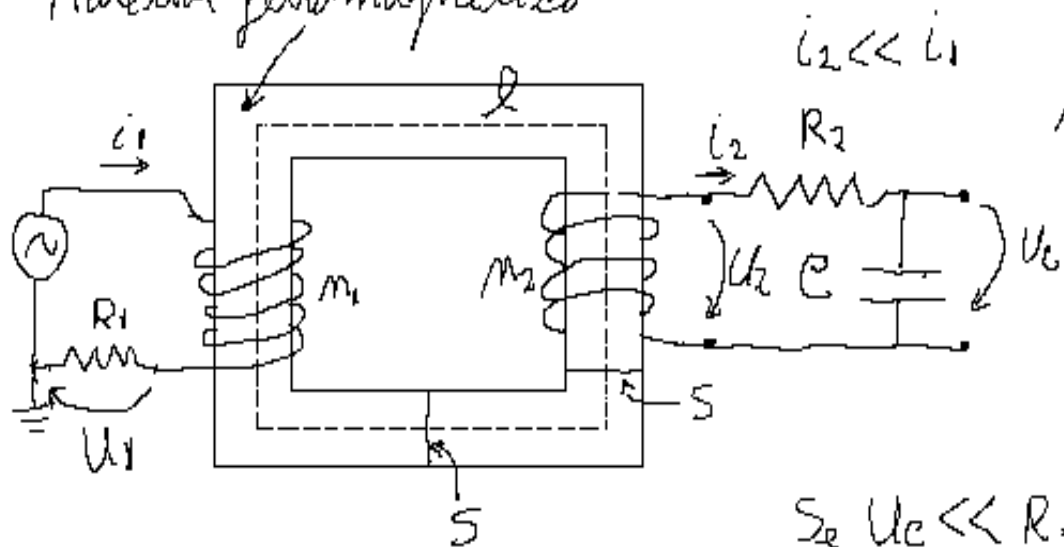
(Por comparação com B do solenoide pinto)

$$\mu_i = \left. \frac{\partial B}{\partial H} \right|_{B=0} \gg \mu_0$$

materiais ferro-
magnéticos

Determinação experimental da característica $B(H)$ num material ferromagnético

Material ferromagnético



Teor. Ampère $\rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = m_1 i_1 \rightarrow H = \frac{m_1 i_1}{l} = \frac{m_1 U_1}{l R_1}$

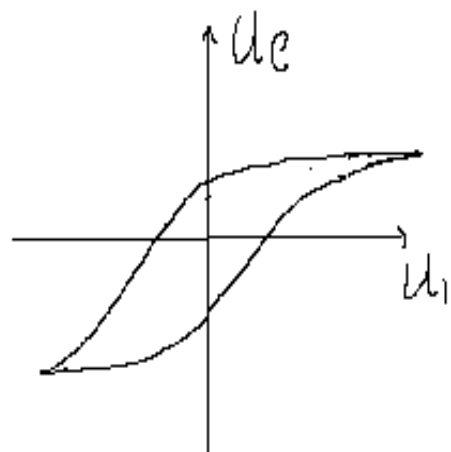
$$U_2 = \frac{d\phi}{dt} = m_2 S \frac{dB}{dt}$$

$$U_2 = R_2 i_2 + U_C = R_2 C \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

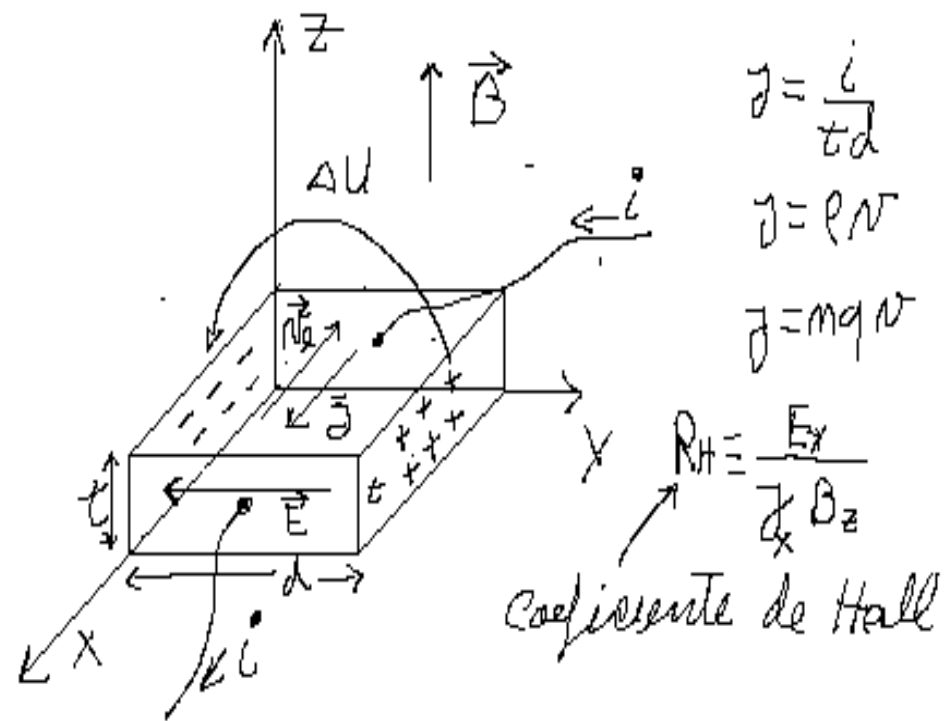
$$S_2 U_C \ll R_2 C \frac{dU_C}{dt} \Rightarrow U_C = \frac{1}{R_2 C} \int U_2 dt = \frac{1}{R_2 C} m_2 S B \Rightarrow$$

$$B = \frac{R_2 C}{m_2 S} U_C$$

$$H = \frac{m_1 U_1}{l R_1}$$



Medição da indução magnética por efeito de Hall



$$j = \frac{i}{td}$$

$$j = n v$$

$$j = n q v$$

$$R_H \equiv \frac{E_y}{j_x B_z}$$

coeficiente de Hall

$$\vec{F}_e = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_e = 0 \Rightarrow \vec{E} = - \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Delta U = E d = v B d = \frac{j}{n q} B d = \frac{i}{t d} \frac{B d}{n q} = \frac{i B}{n q t}$$

$$\Delta U = R_H \frac{i B}{t}$$

$$B = \frac{t \Delta U}{i R_H}$$

$$R_H = \frac{1}{n q}$$

FIM