ELETROMAGNETISMO

MEFT

Resoluções dos problemas da 3ª Série de problemas

Informação prévia

CUIDADO! CUIDADO! CUIDADO!
Agora temos propostas de RESOLUÇÕES!

Ao virar a página, poderá consultar as resoluções dos problemas da Série de Problemas em título. Ao ter acesso às resoluções antes de ter tentado resolver os problemas, irá comprometer seriamente a independência da sua própria resolução e os objetivos do estudo autónomo.
Tendo em conta que nas provas de avaliação não são dadas as soluções oficiais (nem antes nem durante o tempo de duração das provas), e que a utilização de quaisquer soluções "alternativas" de origem muito duvidosa não é recomendada nem permitida, sendo fortemente penalizada, recomenda-se vivamente a tentativa séria de resolução dos problemas recorrendo apenas ao estudo atempado e metódico, à capacidade e ao treino mental para a resolução de problemas, e aos dados e métodos de resolução de problemas aplicáveis em cada caso.

As resoluções sem erros fornecidas na próxima página cumprem apenas o objetivo de tranquilizar os alunos, no sentido de poupar tempo de estudo para a resolução de problemas adicionais, embora em cada caso se pressupõe que os alunos devem ter chegado aos mesmos resultados, com a confiança própria de quem domina a matéria aprendida.
As resoluções com erros fornecidas na próxima página, bem como as soluções omissas, não cumprem objetivo algum, pelo que, em consequência, não são indicadas explicitamente nem separadas das resoluções sem erros.

Ao virar a página, os alunos tomam consciência de que, apesar de todo o cuidado, tempo e carinho colocado pelo corpo docente na melhor preparação possível das resoluções fornecidas, recebem informação como está aí explicitada, e aceitam a ilibação de quaisquer responsabilidades do corpo docente na preparação das respetivas resoluções, com e sem erros e/ou omissões, abdicam de qualquer direito de reclamação ou de compensação por danos causados, morais ou intelectuais, que advenham da utilização da informação disponibilizada, e comprometem-se a comunicar atempadamente ao corpo docente quaisquer dúvidas e discrepâncias em relação à informação fornecida.

Ao virar a página, os alunos comprometem-se ainda a guardar sigilo em relação à informação aí disponibilizada, em particular abdicando de a:

- circular online ou offline,
- passar aos familiares/amigos/colegas/inimigos,
- copiar sob qualquer forma,
- adulterar e/ou alterar os conteúdos, quaisquer que sejam os objetivos,
- usar para qualquer outro fim que não o seu particular e reservado estudo autónomo, em especial e não excluindo, fins comerciais, industriais, militares, sociais ou outros,
- mostrar aos colegas de estudo em grupos de estudo – presenciais e/ou virtuais, sem o consentimento informado dos outros elementos do grupo, devidamente reconhecido nos termos da lei, devendo os mesmos ser informados dos perigos do mau uso da informação consultada e nunca sem antes terem tomarem conhecimento na íntegra desta informação prévia.

Bem, é melhor virar mais uma página...

Ok, agora mais a sério...

A resolução de problemas, seja em Física ou em qualquer outro domínio, é facilitada se forem seguidas algumas regras que ajudam na sua análise e a encontrar a sua solução correta.

Esta deve passar por três fases:

- uma de **análise** do problema,
- a de **resolução** propriamente dita e
- uma de **verificação**.

Nota: Das regras a seguir indicadas, nem todas se aplicam a todo o tipo de problemas devendo ser vistas como conselhos de ordem geral.

- **Análise**:
  Comece por certificar-se que entende o problema. Se tiver dúvidas experimente sublinhar palavras-chave que o definem, identificam o seu tipo e as grandezas envolvidas;
  Faça um esquema do sistema físico descrito, incluindo o sistema de eixos se estiverem envolvidas grandezas vetoriais;
  Identifique as grandezas por um símbolo;
  Veja se o problema é do mesmo tipo de um problema que já conheça; se for, a estratégia de solução deve ser semelhante;
  Pense na situação descrita: imagine o que se passa e preveja qual deverá ser o resultado (pelo menos qualitativo). Se tiver dúvidas na sua análise, discuta com um colega.

- **Resolução**:
  Liste as grandezas e valores de entrada, as grandezas a calcular e os valores de alguma constante que necessite; tenha muita atenção às unidades;
  Estabeleça as relações entre as grandezas por forma a definir as relações físicas entre as grandezas a calcular e as fornecidas;
  Se a resposta pretendida for um valor numérico, só então passe à substituição de valores, e não se esqueça das unidades; verifique se as unidades são coerentes (recomenda-se o uso do SI);
  No caso de grandezas vetoriais, indique os versores e o sistema de eixos em que são referidos, que tem que estar indicado esquema feito na análise;

- **Verificação**:
  Pense no resultado que obteve. Era o que estava à espera?
  É consistente com outros problemas semelhantes?
  O que sucederia se variasse os valores de entrada?
  Analise a sua solução no caso de situações limite (distância infinita, distância nula, etc.), e compare com o que lhe diz a usa intuição nestas situações mais fáceis de compreender.

- **Extra:**
  Divirta-se! A [boa] resolução de problemas tem uma enorme utilidade prática e, na maior parte dos casos, pode ser bastante divertida, especialmente quando não são totalmente triviais e levam a uma sensação de desafios vencidos com sucesso.

Vamos a isto!

(quer dizer, vire lá mais uma página)

Bem, é melhor virar ainda mais uma página...

(quer dizer, é para começar a página das resoluções numa página ímpar, permitindo imprimir a partir da página 5 em frente e verso)

ELETROMAGNETISMO

MEFT

Resoluções dos problemas da 3ªSérie de problemas
(trabalho em curso)

(Eletrostática – Condensadores, Dielétricos, Energia Eletrostática)

1) *Condutores* [Exerc.3.5 JL]

a) [R: Consideremos então duas esferas condutoras (A e B), de raios a e b, separadas pela distância $d \gg a, b$, com cargas elétricas $Q_A = Q, Q_B = 0$, quando são ligadas por um fio condutor. Desprezando a carga que se possa acumular no fio condutor, o papel deste é colocar as duas esferas ao mesmo potencial elétrico, redistribuindo a carga pelas esferas para garantir esta igualdade do potencial elétrico, ficando as esferas A e B com cargas elétricas $Q_A = q, Q_B = Q - q$, respetivamente e com potencial elétrico $\phi_A = \phi_B = \phi$. Queremos calcular q e ϕ.
Comecemos pelas expressões do potencial nas fronteiras dos condutores A e B (portanto dos próprios condutores A e B), após atingido o equilíbrio. Em A temos o potencial elétrico provocado pela carga no próprio condutor A e pela carga no condutor B, $Q_B = Q - q$, à distância $d \gg b$:
$\phi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} + \frac{Q-q}{d}\right)$ que tem que ser igual ao potencial em B, $\phi_B = \phi_A = \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q-q}{b} + \frac{q}{d}\right)$.
Podemos agora calcular q a partir da igualdade
$\left(\frac{q}{a} + \frac{Q-q}{d}\right) = \left(\frac{Q-q}{b} + \frac{q}{d}\right) \Leftrightarrow q\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d} - \frac{1}{d} + \frac{1}{b}\right) = Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{d}\right) \Leftrightarrow \frac{q}{adb}(db - 2ab + ad) = \frac{Q}{bd}(d - b) \Leftrightarrow$
$q = Q\frac{a(d-b)}{d(a+b)-2ab}$ e o potencial elétrico a partir de ϕ_A, por ex.:
$\phi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}\left(Q\frac{a(d-b)}{d(a+b)-2ab}\right) + \frac{Q}{d}\left(1 - \frac{a(d-b)}{d(a+b)-2ab}\right)\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d-b}{d(a+b)-2ab} + \frac{1}{d}\left(\frac{(d-a)b}{d(a+b)-2ab}\right)\right)$ ou
$\phi_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(\frac{d(d-b)+(d-a)b}{d(a+b)-2ab}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}\frac{d^2-ab}{d(a+b)-2ab} = \phi_B = \phi$.
$q_A = q = Q\frac{a(d-b)}{d(a+b)-2ab}; q_b = Q - q = Q\frac{b(d-a)}{d(a+b)-2ab}$.]

b) [R: Podemos usar o resultado da alínea anterior, no limite $d \to \infty$, para obter:
$q_a = Q\frac{a}{a+b}; q_b = Q\frac{b}{a+b}; \phi_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(a+b)} = \phi_b$.]

2) *Equação de Laplace*

[R: *Sug.: parta da solução geral da equação de Laplace* $\nabla^2\phi = 0$ *com separação de variáveis,* $\phi(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(A_j e^{a_j x} + A_j' e^{-a_j x}\right)\left(B_j e^{b_j y} + B_j' e^{-b_j y}\right)\left(C_j e^{c_j z} + C_j' e^{-c_j z}\right)$, *com* $a_j^2 + b_j^2 + c_j^2 = 0$, *e aplique as condições fronteira (note que* a_j, b_j, c_j *são números complexos – que podem ser reais).*
Usando a sugestão em cima, a condição da independência de *z* permite concluir que $c_j = 0$, e podemos integrar os eventuais coeficientes C_j, C_j' constantes nos outros coeficientes B_j, B_j' (por ex.), ficando com a condição $a_j^2 = -b_j^2 \Leftrightarrow a_j = \pm i b_j$ (complexos!). Notando agora que no plano $y = 0$ não podemos ter funções exponenciais reais em x, os coeficientes a_j não podem ter uma componente real, pelo que os coeficientes b_j não podem ter uma componente imaginária. Como na região em causa o valor de y pode tender para infinito (onde queremos o potencial elétrico igual a zero), podemos concluir que com coeficientes b_j reais (positivos sem perda de generalidade), teremos de ter os coeficientes B_j todos iguais a zero. A nossa solução está reduzida a $\phi(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(A_j e^{i b_j x} + A_j' e^{-i b_j x}\right)B_j' e^{-b_j y}$ (em que também usamos, sem perda de generalidade neste caso, $a_j = +i b_j$). Agora usemos a condição $\phi(0,y,z) = 0 = \sum_{j=0}^{\infty}\left(A_j + A_j'\right)B_j' e^{-b_j y}$,

que nos permite concluir que $A_j' = -A_j$ e que $\phi(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(A_j e^{ib_j x} - A_j e^{-ib_j x}\right)B_j' e^{-b_j y} \Leftrightarrow$ $\phi(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j 2i\,\mathrm{sen}\left(b_j x\right) B_j' e^{-b_j y}$; a condição $\phi(d,y,z) = 0$ permite-nos concluir que $\mathrm{sen}\left(b_j d\right) = 0 \Leftrightarrow b_j d = n\pi \Leftrightarrow b_j = \frac{n\pi}{d}$. Mudemos o índice j para n e reescrevamos a solução encontrada até agora: $\phi(x,y,z) = \sum_{j=0}^{\infty} D_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{d}x\right) e^{-n\pi y/d}$ com $D_n = 2A_j B_j' i$. A condição no plano $y = 0$, $\phi(x,0,z)(0 \leq x \leq d) = \varphi_0 \sin\frac{\pi x}{d} = \sum_{j=0}^{\infty} D_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{d}x\right) \cdot 1$ permite-nos concluir que n só pode ser 1 e que $D_1 = \varphi_0$, pelo que a solução final para o potencial elétrico na região definida é
$\phi(x,y,z) = \varphi_0 \sin\frac{\pi x}{d} e^{-\pi y/d}$ (V).
Para o campo elétrico, usamos $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \vec{E}(x,y,z) = \frac{\pi\varphi_0}{d} e^{-\frac{\pi y}{d}}\left(\cos\frac{\pi x}{d}\vec{e}_x - \sin\frac{\pi x}{d}\vec{e}_y\right)$ (V/m).]

3) *Método das Imagens (solução sugerida por Lord Kelvin)*

a) [R: *Sug.: Mostre que pode substituir a esfera por uma carga pontual q'= –q/3 colocada em z=+R₀/3*;
Seja (R_e, φ_e, z_e) um ponto na superfície da esfera de raio R_0. As distâncias deste ponto às cargas q em $z = 3R_0$ e $q' = -\frac{q}{3}$ em $z' = \frac{R_0}{3}$ são, com $R_e^2 = R_0^2 - z_e^2$, respetivamente,

$$d = \sqrt{(3R_0 - z_e)^2 + (R_0^2 - z_e^2)} = \sqrt{10R_0^2 - 6R_0 z_e} \text{ e } d' = \sqrt{\left(\frac{R_0}{3} - z_e\right)^2 + (R_0^2 - z_e^2)} = \sqrt{\frac{10R_0^2}{9} - \frac{2R_0 z_e}{3}},$$

para valores $-R_0 \leq z_e \leq R_0$. Pelo que o potencial em qualquer ponto da esfera é

$$\phi(R_e,\varphi_e,z_e) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{10R_0^2 - 6R_0 z_e}} - \frac{q}{3\sqrt{10\frac{R_0^2}{9} - \frac{2R_0 z_e}{3}}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{10R_0^2 - 6R_0 z_e}} - \frac{q}{\sqrt{10R_0^2 - 6R_0 z_e}}\right) = 0, \text{ q.e.d.}$$

Usando estas duas cargas para calcular o potencial em todo o espaço, temos a expressão
$\phi(R,\varphi,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - 3R_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{9R^2 + (3z - R_0)^2}}\right)$.]

b) [R: Usamos a expressão em coordenadas cilíndricas do gradiente: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial R}\vec{e}_R - \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z$:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{R}{(R^2 + (z - 3R_0)^2)^{3/2}} - \frac{9R}{(9R^2 + (3z - R_0)^2)^{3/2}}\right)\vec{e}_R + \left(\frac{z - 3R_0}{(R^2 + (z - 3R_0)^2)^{3/2}} - \frac{9z - 3R_0}{(9R^2 + (3z - R_0)^2)^{3/2}}\right)\vec{e}_Z\right].$$

Na superfície esférica, temos $R_e^2 + z_e^2 = R_0^2$ e a expressão do campo elétrico é simplesmente

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{8R_e}{\left(10R_0^2 - 6z_e R_0\right)^{3/2}}\right)\vec{e}_R + \left(-\frac{8z_e}{\left(10R_0^2 - 6z_e R_0\right)^{3/2}}\right)\vec{e}_Z\right]$, com a normal $\vec{n} = \vec{e}_r = \frac{R_e\vec{e}_R + z_e\vec{e}_z}{R_0}$; como o campo no interior da esfera é zero, a densidade superficial de carga na superfície da esfera é simplesmente

$$\sigma = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{n} = \sigma(R_e,\varphi_e,z_e) = \frac{q}{4\pi R_0}\left[\left(-\frac{8R_e^2}{\left(10R_0^2 - 6z_e R_0\right)^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(-\frac{8z_e^2}{\left(10R_0^2 - 6z_e R_0\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right] = -\frac{2q}{\pi}\left[\frac{R_0}{\left(10R_0^2 - 6z_e R_0\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

sendo a carga total da esfera condutora independente de R_0 e $Q = -0{,}24314\,q$ (com *Mathematica*).]

4) *Capacidade e meios dielétricos*

a) [R: Por influência eletrostática, temos $Q_2 = -Q_1 = -Q = -4\mu$C.]

b) [R: Como temos dielétricos (LHI), comecemos por calcular o campo de deslocamento elétrico, $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, usando o teorema de Gauss e um superfície fechada com a forma de um paralelepípedo, com faces de área A paralelas aos planos e de comprimento l. O teorema de Gauss diz-nos que $\iint \vec{D}\cdot\vec{n}dS = Q_{int} = \sigma A$.
A densidade $\sigma = \frac{Q}{2} = 2\mu\mathrm{C/m^2}$. Fixe-se a placa positiva como a da esquerda em $z = 0$ e a negativa como a da direita em $z = +d$. Calculamos o campo para cada placa separadamente e obtemos $2D_e.A = \sigma A \Leftrightarrow$

$\vec{D}_e = \frac{\sigma}{2}\frac{z}{|z|}\vec{e}_z$ para a placa positiva (da esquerda, por exº) e $\vec{D}_d = -\frac{\sigma}{2}\frac{z-d}{|z-d|}\vec{e}_z$ para a placa negativa (a da direita). Como não depende de z, na região $z > d$ a soma das duas contribuições é nula em todos os pontos, bem como para $z < 0$. $\vec{D}$ só é diferente de zero na região $0 < z < +d$ e temos aí $\vec{D} = \frac{\sigma}{2}\frac{z}{|z|}\vec{e}_z - \frac{\sigma}{2}\frac{z-d}{|z-d|}\vec{e}_z = \frac{\sigma}{2}\vec{e}_z + \frac{\sigma}{2}\frac{d-z}{|d-z|}\vec{e}_z = \frac{\sigma}{2}\vec{e}_z + \frac{\sigma}{2}\vec{e}_z = \sigma\vec{e}_z$. O campo elétrico $\vec{E} = \vec{D}/\varepsilon$ é assim nulo em todo espaço $z < 0$ ou $z > d$, e no espaço entre as placas, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\vec{e}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z = 1{,}13 \times 10^5\vec{e}_z$(V/m).]

c) [R: $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = |E|d = 0{,}004 \times 1{,}13 \times 10^5 = 452$ V.]

d) [R: $C = \frac{Q}{V} = \frac{4\times10^{-6}}{452} = 8{,}854$ nF.]

e) [R: Como a espessura do condutor introduzido é desprezável, e a carga dos condutores exteriores não é alterada, podendo-se considerar o condutor interior como dois condutores sobrepostos de cargas respetivamente iguais a $+Q\ e - Q$. Percebemos assim que o campo elétrico não sofre alterações e a diferença de potencial elétrico entre os condutores exteriores mantém-se no valor calculado em c). Pelo que, mantendo-se a tensão V e a carga Q, mantém-se também a capacidade total do sistema, C=8,854 nF.]

f) [R: O campo $\vec{D}$ mantém a sua intensidade. Pelo que, do lado direito, temos agora $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z = 2{,}26 \times 10^5\ \vec{e}_z$ e $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^{0{,}003} E_1 dz + \int_{0{,}003}^{0{,}004} E_2 dz = 565$ V e $C = 7{,}08$ nF.]

5) *Capacidade e meios dielétricos*

a) [R: Dada a simetria esférica e à presença de dielétricos, utiliza-se o teorema de Gauss para calcular o campo de deslocamento elétrico e, a partir deste, o campo e potencial elétricos. Para uma dada superfície esférica à distância r do centro, temos $\iint \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{int}$. Como na superfície o campo é constante, o integral tem simplesmente o resultado $4\pi r^2 D(r)$, pelo que em qualquer ponto desta superfície temos $\vec{E} = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$. Quanto à carga interior, depende do valor de r.
Comecemos por notar que no interior dos condutores, em equilíbrio eletrostático, temos o campo $\vec{E} = 0$: $r \in [0, R_A[\cup]R_{BI}, R_{BE}[\cup]R_{CI}, R_{CE}[: \vec{E} = 0$; nas outras regiões, como as corôas esféricas estão descarregadas, só há carga na esfera condutora interior e $Q_{int} = 5$ nC para $r > R_A$. Temo $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ e $r \in]R_A, R_{BI}[\cup]R_{BE}, R_{CI}[: E(r) = \frac{5\text{nC}}{4\pi 2\varepsilon_0 r^2} = 22{,}5/r^2$ (V/m); $r > R_{CE}: E(r) = 45/r^2$ (V/m).]

b) [R: Para o potencial elétrico, com $\phi(\infty) = 0$, usa-se simplesmente $\phi(r) = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$ ou
$\phi(r) = -\int_\infty^r \frac{45}{r^2} \cdot dr\ \ (r \geq R_{CE}) = \frac{45}{r}$ (V), com o valor $\phi_3 = \phi(R_{CI} \leq r \leq R_{CE}) = 100$ V.
Para $R_{BE} \leq r \leq R_{CI}$, temos $\phi(r) = -\int_{R_{CI}}^r \frac{22{,}5}{r^2} \cdot dr + 100\text{ V} = \frac{22{,}5}{r} - \frac{22{,}5}{0{,}4} + 100 = \frac{22{,}5}{r} + 43{,}75$ V, com o valor $\phi_2 = \phi(R_{BI} \leq r \leq R_{BE}) = \frac{22{,}5}{0{,}25} + 43{,}75 = 133{,}75$ V.
Para $R_A \leq r \leq R_{BI}$, temos $\phi(r) = -\int_{R_{BI}}^r \frac{22{,}5}{r^2} \cdot dr + 133{,}75\text{ V} = \frac{22{,}5}{r} - \frac{22{,}5}{0{,}2} + 133{,}75 = \frac{22{,}5}{r} + 21{,}25$ V, com o valor $\phi_1 = \phi(r \leq R_A) = \frac{22{,}5}{0{,}05} + 21{,}25 = 471{,}25$ V.]

c) [R: Para a capacidade do sistema, podemos por as cargas que quisermos. Pelo que alteramos apenas a carga do condutor exterior para $Q_3 = -Q_1 = -5$ nC, pelo que o campo no exterior do sistema passa a ser nulo. Note-se que o campo elétrico para $r \in]R_A, R_{BI}[\cup]R_{BE}, R_{CI}[$ não é alterado (nem a carga elétrica interior nem as constantes dielétricas sofrem alteração). A diferença de potencial elétrico entre os condutores (1 e 3), é $V = \phi_1 - \phi_2 + \phi_2 - \phi_3$ ou $V = -\int_{R_{BI}}^{R_A} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{R_{CI}}^{R_{BE}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_A}^{R_{BI}} \frac{22{,}5}{r^2} \cdot dr + \int_{R_{BE}}^{R_{CI}} \frac{22{,}5}{r^2} \cdot dr$ ou $V = -\frac{22{,}5}{R_{BI}} + \frac{22{,}5}{R_A} - \frac{22{,}5}{R_{CI}} + \frac{22{,}5}{R_{BE}} = 371{,}25$ V. A carga é $Q_1 = 5$ nC, e a capacidade é $C = \frac{Q_1}{V} = 13{,}5$ pF.]

d) [R: Se ligar o condutor exterior à terra, ficando com potencial $\phi_3 = 0$ V, concluímos que o campo em todo o espaço exterior fica nulo. Usando o teorema de Gauss, concluímos que a carga $Q_{int} = 0$, para qualquer superfície fechada com $r > R_{CE}$. Como $Q_{int} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ e $Q_2 = 0$, temos $Q_3 = -Q_1 = -5$ nC.]

6) *Campo Elétrico e Capacidade*

a) [R: Como a área das placas é muito superior a d^2, podemos usar a aproximação dos planos infinitos. O campo criado por um plano infinito tem intensidade constante (problema 4) desta série), pelo que o campo criado por este sistema de dois planos com cargas opostas só é diferente de zero no espaço entre as placas, não variando na direção perpendicular às placas. A diferença de potencial entre as placas condutoras é $V = 10\text{ (V)} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed$ e não varia com os pontos das placas. Pelo que $\vec{E} = \frac{V}{d}\vec{e}_z = 10^4\vec{e}_z$ (V/m) entre as placas, e nulo fora. Note-se que, neste caso, o campo não depende do meio dielétrico.]

b) [R: Podemos usar um paralelepípedo como superfície fechada englobando a região A na placa da esquerda para calcular a sua carga, e depois outra superfície englobando a região B para obter a carga em B. O teorema de Gauss diz-nos então que $\iint \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{int} \Leftrightarrow Q_A = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \varepsilon_A E A_A \Leftrightarrow$ $Q_A = 10\varepsilon_0 10^4 \cdot 0{,}6 \cdot 1 = 531$ nC. Por outro lado, $Q_B = \varepsilon_B E A_B = 15\varepsilon_0 10^4 \cdot 0{,}4 \cdot 1 = 531$ nC.]

c) [R: $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_A + Q_B}{V} = \frac{531+531}{10} \times 10^{-9} = 1{,}062 \times 10^{-7}$ F; $C_A = \frac{Q_A}{V} = \frac{531}{10}$ nF $= \frac{Q_B}{V} = C_B = 53{,}1$ nF.]

d) [R: igual nos 2 pois têm a mesma capacidade; retirando os meios dielétricos, alteramos a capacidade, ficando a região A com maior capacidade (tem uma área maior), pelo que a corrente fluíria melhor em A.]

7) *Capacidade, energia e força eletrostática* [Exerc.4.11C JL]

a) [R: Para calcular a capacidade, supomos uma diferença de potencial V entre as placas condutoras, pelo que o campo elétrico é homogéneo no seu interior e nulo no exterior (na aproximação dos planos infinitos e usando os resultados dos problemas 4) e 6)). Mas a carga não se distribui uniformemente na placa da esquerda (nem na da direita). Assumindo que as placas estão isoladas (cargas constantes) e que o dielétrico penetrou uma distância x entre as placas, a carga em contacto com o dielétrico é $Q_D(x) = \sigma a x = \varepsilon E a x = \varepsilon x V \frac{a}{d}$ e a carga restante na placa é $Q - Q_D(x) = \varepsilon_0 E a(l - x) = \varepsilon_0(l - x)V\frac{a}{d}$. A carga total é assim $Q = \varepsilon x V \frac{a}{d} + \varepsilon_0(l - x)V\frac{a}{d}$ e a capacidade é $C(x) = \frac{Q}{V} = (\varepsilon_0(l - x) + \varepsilon x) \cdot \frac{a}{d}$.]

b) [R: Sendo a carga constante (e igual a Q), a variação de energia eletrostática do condensador é $\Delta W_C = W_C(l) - W_C(0)$, com $W_C(x) = \frac{Q^2}{2C(x)} = \frac{Q^2 d}{2a(\varepsilon_0(l-x)+\varepsilon x)} \Leftrightarrow \Delta W_C = \frac{Q^2 d}{2a}\left(\frac{1}{\varepsilon l} - \frac{1}{\varepsilon_0 l}\right) = \frac{Q^2 d}{2al} \cdot \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0 \varepsilon}$.]

c) [R: Sendo a introdução do dielétrico a potenciais constantes, devemos usar para a energia eletrostática do condensador a expressão $W_C(x) = \frac{1}{2}C(x)V^2 \Leftrightarrow \Delta W_C = \frac{V^2}{2}\left(\varepsilon l \frac{a}{d} - \varepsilon_0 l \frac{a}{d}\right) = \frac{V^2 a l}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0)$.]

8) *Capacidade, energia e força eletrostática* [Exerc.4.12C JL]

a) [R: Sendo os potenciais constantes, a diferença de potencial elétrico entre as duas placas também é constante, pelo que o campo elétrico no interior também é constante e de intensidade $E = \frac{V}{d}$. A carga da placa (da esquerda) na região em contacto com o dielétrico é $Q_D(y) = a y \sigma_D = a y \varepsilon E = a y \varepsilon \frac{V}{d}$ e a carga da placa (da esquerda) na região em contacto com o ar é $Q_A(y) = a(l - y)\sigma_A = a(l - y)\varepsilon_0 \frac{V}{d}$. A capacidade deste sistema é assim $C(y) = \frac{Q_D(y)+Q_A(y)}{V} = \left(\varepsilon y + \varepsilon_0(l - y)\right) \cdot \frac{a}{d}$.]

b) [R: A força eletrostática que se exerce sobre o sistema é $\vec{F}_{El} = -\frac{dW}{dy}\vec{e}_y$, sendo d$W$ a soma das variações de energia no condensador, $dW_C(y)$, com a da bateria, $dW_{Bat}(y)$, obrigatória para garantir os potenciais constantes. Ora, $dW_{Bat}(y) = -2dW_C(y)$, pois se o condensador recebeu carga dq, aumentando a sua energia em $dW_C = +\frac{1}{2}(dq)V$, a bateria que deu essa carga, perdeu a energia dada por $(dq)V$, isto é, $dW_{Bat}(y) = -(dq)V = -2\left(\frac{1}{2}(dq)V\right) = -2W_C(y)$. Portanto, a variação de energia eletrostática total do sistema é $\frac{dW}{dy} = -\frac{dW_C(y)}{dy}$, e a força eletrostática é $\vec{F}_{El} = +\frac{dW_C(y)}{dy}\vec{e}_y = \frac{1}{2}\frac{dC(y)}{dy}V^{2\vec{e}_y} = \frac{V^2 a}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{e}_y$.]

c) [R: A posição de equilíbrio corresponde à posição em que a força gravítica sobre o líquido equilibra a força eletrostática. Se o líquido subido a altura y_{eq}, a força gravítica é $F_G = -mg = -\rho_m a d y_{\text{eq}} g \Leftrightarrow \rho_m a d g y_{\text{eq}} = \frac{V^2 a}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0) \Leftrightarrow y_{\text{eq}} = V^2 \cdot \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2d^2 \rho_m g}$.]

d) [R: O balanço de energia eletrostática é simplesmente $\Delta W = \Delta W_{Bat} + \Delta W_C = -2\Delta W_C + \Delta W_C = -\Delta W_C$. $-\Delta W_C = -\frac{1}{2}\left(C(y_{\text{eq}}) - C(0)\right)V^2 = \frac{1}{2}\left(-\left(\varepsilon y_{\text{eq}} + \varepsilon_0 (l - y_{\text{eq}})\right) \cdot \frac{a}{d} + \varepsilon_0 l \frac{a}{d}\right)V^2 = -\frac{V^2 a}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0) y_{\text{eq}} \Leftrightarrow$ $\Delta \mathrm{W} = -\Delta W_C = -\frac{V^2 a}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot V^2 \cdot \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2d^2 \rho_m g} = -\frac{V^4 a}{4d^3 \rho_m g}(\varepsilon - \varepsilon_0)^2$.]

9) *Energia eletrostática e força sobre dielétricos* [Problem 4.28 DG]

a) [R: (*Sug.: comece por calcular o campo para uma densidade linear de carga e de seguida calcule o potencial em* a *que terá que ser V*)
Comecemos então por calcular o campo elétrico entre os condutores, para uma dada densidade linear de carga λ que provoque uma diferença de potencial elétrico V entre os condutores ou, como em $R = b$ temos $\phi = \phi_2 = 0$, que provoque um potencial no condutor 1 dado por $\phi = \phi_1 = V$. Dado que $a < b \ll L$, usamos a aproximação de cilindros infinitos. Comecemos por imaginar uma superfície cilíndrica de altura $l \ll L$ e raio R (com $a < R < b \ll L$), à qual se aplica o teorema de Gauss para obter $\iint \vec{D} \cdot \vec{n} dS = D(R) 2\pi R l = Q_{int} = +\lambda l \Leftrightarrow D(R) = \frac{\lambda}{2\pi R} \Leftrightarrow E(R) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon R}$. Temos então para a diferença de potencial elétrico entre os dois condutores como sendo
$V - 0 = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon R} dR = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \log\frac{b}{a} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2\pi\varepsilon V}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} \Leftrightarrow \vec{E}(R) = \frac{V}{R log(b/a)} \vec{E}_R$, igual no ar e no óleo (dado que a diferença de potencial elétrico é a mesma em todo o condutor; note-se que $E = 0$ para $R > b$).]

b) [R: Em contacto com o ar, a carga total é $Q_{\text{ar}}(h) = 2\pi R(L-h)\sigma_{\text{ar}} = 2\pi R(L-h)\varepsilon_0 E = \frac{2\pi(L-h)\varepsilon_0 V}{\log(b/a)}$; em contacto com o óleo, a carga total é $Q_{\text{óleo}}(h) = 2\pi R h \sigma_{\text{óleo}} = 2\pi R h \varepsilon_0 (1+\chi_e) E = \frac{2\pi h \varepsilon_0 (1+\chi_e) V}{\log(b/a)}$]

c) [R: A capacidade é $C(h) = \frac{Q_{\text{ar}}(h) + Q_{\text{óleo}}(h)}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log(b/a)}\left(L - h + h(1+\chi_e)\right) = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log(b/a)}(L + h\chi_e)$.]

d) [R: (*Sug.: a força eletrostática sobre o dielétrico é a variação da energia eletrostática com a altura h*)
O dielétrico sobe a altura h até equilibrar as intensidades da força gravítica e da força eletrostática. Esta última pode ser obtida pela expressão (potenciais constantes) $F_{El} = +\frac{dW_C(h)}{dh} = \frac{1}{2}\frac{dC(h)}{dh}V^2 = \frac{\pi\varepsilon_0 V^2 \chi_e}{\log(b/a)}$ enquanto que a força gravítica é $F_G = mg = \rho_m \pi (b^2 - a^2) h g$, pelo que a altura atingida pelo líquido é $h_{\text{eq}} = \left(\frac{\pi\varepsilon_0 V^2 \chi_e}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}\right) / (\rho_m \pi (b^2 - a^2) g) = \frac{\varepsilon_0 \chi_e V^2}{\rho_m (b^2 - a^2) g \log(b/a)}$.]

10) *Associação de condensadores*

a) [R: Entre os pontos A e B temos uma associação de condensadores em paralelo, do ramo central com os ramos laterais: $C_{\text{eq}} = C_3 + C_{esq} + C_{dto} = C_3 + (C_1^{-1} + C_1^{-1})^{-1} + (C_2^{-1} + C_2^{-1})^{-1} = C_3 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}$ ou $C_{\text{eq}} = 30\text{ pF} + 5\text{ pF} + 10\text{ pF} = 45\text{ pF}$.]

b) [R: Entre os pontos D e E, já não conseguimos ter uma associação simples. Mas podemos notar que o ramo de cima é exatamente igual ao ramo de baixo, pelo que a diferença de potencial elétrico entre os pontos E e A tem de ser igual à diferença entre os pontos E e B, pelo que a diferença de potencial elétrico entre os pontos A e B é sempre nula. Como é sempre nula, o condensador C_3 não irá carregar e é como se não estivesse no circuito (não passa carga no ramo central). Pelo que podemos concluir que temos uma associação em paralelo do ramo de cima com o ramo de baixo, isto é,
$C_{\text{eq}} = (C_1^{-1} + C_2^{-1})^{-1} + (C_1^{-1} + C_2^{-1})^{-1} = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\cdot10\cdot20}{10+20}\text{ pF} = \frac{400}{30}\text{ pF} = \frac{40}{3}\text{ pF}$.]

11) *Funcionamento de condensadores*

a) [R: Não acontece nada porque o condensador C_2 não consegue carregar porque a outra armadura não está ligada a lado nenhum e não consegue expulsar a carga dessa armadura.]

b) [R: A diferença de potencial no condensador C_1, V_1, é simétrica da diferença de potencial no condensador $C_2, V_2 = -V_1$. A carga total tem de se conservar, mas note-se que a polaridade de C_2 é inversa da de C_1. No início, $Q_{1i} = C_1 V_0 = 150\ \mu\text{C}$ e $Q_{2i} = 0$. Após atingir o equilíbrio, temos $V_2 = -V_1 \Leftrightarrow \frac{-Q_2}{C_2} = -\frac{Q_1}{C_1} = -\frac{150-Q_2}{C_1} \Leftrightarrow Q_2\left(-\frac{C_1}{C_2} - 1\right) = -150 \Leftrightarrow Q_2 = 50\mu\text{C}$ e $Q_1 = 100\mu\text{C}$. Temos então as tensões e energias em cada condensador dadas por $V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 10\text{ V}$, $V_2 = -\frac{Q_2}{C_2} = -10\text{ V}$, $W_1 = \frac{C_1}{2} V_1^2 = 500\ \mu\text{J}$, $W_2 = \frac{C_2}{2} V_2^2 = 250\ \mu\text{J}$.]

c) [R: Agora, é a tensão da bateria que se vai dividir nas tensões nos 2 condensadores, sendo as cargas em cada condensador com a mesma polaridade e o mesmo valor.
Temos assim $V_{Bat} = V = 50\text{ V} = V_1 + V_2$, e $Q_1 = C_1 V_1 = Q_2 = C_2 V_2 \Leftrightarrow V_1\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) = 50\text{ V} \Leftrightarrow$
$V_1 = \frac{50\text{ V}}{3} = 16{,}7\text{ V}$. $V_2 = 50 - V_1 = 33{,}3\text{ V}$, $Q_1 = C_1 V_1 = 10 \times 10^{-6} \cdot 16{,}7 = 167\mu\text{C} = Q_2$,
$W_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = 0{,}5 \times 10^{-5} \cdot 16{,}7^2 = 1{,}39\text{ mJ}$, $W_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = 0{,}25 \times 10^{-5} \cdot 33{,}3^2 = 2{,}78\text{ mJ}$.]