Probabilidades e Estatística

LEAN, LEE, LEGI, LETI, MEAer, MEBiom, MEEC, MEMec

2º semestre – 2014/2015
02/05/2015 – 11:00

Duração: 90 minutos **1º teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I	10 valores

1. Um fabricante de calculadoras compra circuitos integrados a um de três fornecedores: A, B e C. 50% dos circuitos provêm do fornecedor A, 30% de B e os restantes de C. Sabe-se ainda que 1% dos circuitos fornecidos por A são defeituosos, enquanto que para o fornecedor B essa percentagem é de 3% e para C é de 4%.

(a) Um circuito é selecionado ao acaso e avaliado, tendo-se verificado que é defeituoso. Qual a probabilidade de ter sido fornecido pelo fornecedor B? (3.0)

Sendo os acontecimentos $A(B,C)$ =“o circuito selecionado é proveniente do fornecedor $A(B,C)$” e D =“o circuito selecionado é defeituoso”, tem-se $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(C) = 0.2$, $P(D \mid A) = 0.01$, $P(D \mid B) = 0.03$ e $P(D \mid C) = 0.04$.

$$P(B \mid D) = \frac{P(D \mid B)P(B)}{P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B) + P(D \mid C)P(C)} \approx 0.409.$$

(b) Calcule a probabilidade de um circuito integrado não ser nem defeituoso nem ter sido fornecido pelo fornecedor A. (2.0)

$P(\bar{D} \cap \bar{A}) = P(\overline{D \cup A}) = 1 - P(D \cup A) = 1 - [P(A) + P(D) - P(D \cap A)] = 1 - [P(A) + P(D) - P(D \mid A)P(A)] \approx 0.483.$

2. Num sistema de codificação de mensagens o número de erros que ocorre ao longo do tempo segue um processo de Poisson de taxa 0.1 por segundo.

(a) Determine a probabilidade de, em um minuto, ocorrer pelo menos 1 erro, sabendo que nesse minuto se registaram menos de 3 erros. (2.0)

Sendo $X(t)$ =“número de erros em t segundos”, tem-se que $X(t) \sim Poi(0.1t)$.

$$P(X(60) \geq 1 \mid X(60) < 3) = \frac{P(1 \leq X(60) < 3)}{P(X(60) < 3)} = \frac{F_{X(60)}(2) - F_{X(60)}(0)}{F_{X(60)}(2)} = \frac{0.0620 - 0.0025}{0.0620} \approx 0.96.$$

(b) A ocorrência de erros de codificação tem custos por minuto associados, definidos da seguinte forma: se nesse período ocorrerem menos de 4 erros, o custo (em €) é igual ao quadrado do número de erros registados nesse período de tempo; caso contrário, o custo é fixo e igual a 20€. Determine o valor esperado do custo num período de 1 minuto. (3.0)

Seja C =“custo num período de 1 minuto, em euros”$= \begin{cases} X(60)^2, & X(60) < 4 \\ 20, & X(60) \geq 4 \end{cases}.$

$$f_C(c) = \begin{cases} f_{X(60)}(0) = 0.0025, & c = 0 \\ f_{X(60)}(1) = 0.0149, & c = 1 \\ f_{X(60)}(2) = 0.0446, & c = 4 \\ f_{X(60)}(3) = 0.0892, & c = 9 \\ 1 - F_{X(60)}(3) = 0.8488, & c = 20 \end{cases}$$

$E[C] = \sum_c c f_C(c) = 17.97$ euros.

Grupo II	10 valores

1. A distância ao alvo de um dardo atirado por um certo jogador é uma variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-\frac{x}{2}, & 0<x<2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine a distância mediana ao alvo, que carateriza o desempenho deste jogador. (2.0)

$F_X(x) = 1/2 \iff \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 1/2 \iff \int_0^x \left(1-\frac{t}{2}\right)dt = 1/2 \iff x = 2-\sqrt{2}$ uma vez que $x \in]0,2[$.

(b) Considere 36 lançamentos independentes realizados por este jogador. Calcule a probabilidade aproximada de a distância média dos 36 lançamentos ser inferior a $1/2$. (3.0)

Seja $S=\sum_{i=1}^{36} X_i$. Pelo T.L.C. tem-se que $\frac{S-E[S]}{\sqrt{Var[S]}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$.
$E[S] \overset{i.d.}{=} 36E[X] = 24$ uma vez que $E[X] = \int_0^2 x(1-0.5x)\,dx = 2/3$
$Var[S] \overset{i.i.d.}{=} 36Var[X] = 8$ uma vez que $E[X^2] = \int_0^2 x^2(1-0.5x)\,dx = 2/3$ e $Var[X] = E[X^2]-(E[X])^2 = 2/9$
Assim, $P(\bar{X}<0.5) = P(S<18) \overset{T.L.C.}{\approx} F_{N(24,8)}(18) \approx 0.017$.

2. Considere o vector aleatório (X,Y) cuja função de probabilidade conjunta é apresentada a seguir:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

(a) Calcule a variância de $(X+Y)$. Serão X e Y variáveis aleatórias independentes? Justifique a sua resposta. (3.0)

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2/3, & x=-1 \\ 1/3, & x=1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$E[X] = \sum_{x=-1,1} x f_X(x) = -1/3$, $E[X^2] = \sum_{x=-1,1} x^2 f_X(x) = 1$ e $Var[X] = E[X^2]-(E[X])^2 = 8/9$

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/3, & y=-1 \\ 1/3, & y=0 \\ 1/3, & y=1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$E[Y] = \sum_{y=0}^{2} y f_Y(y) = 0$, $E[Y^2] = \sum_{y=0}^{2} y^2 f_Y(y) = 2/3$ e $Var[Y] = E[Y^2]-(E[Y])^2 = 2/3$
$E[XY] = \sum_{x=-1,1}\sum_{y=-1}^{1} xy f_{X,Y}(x,y) = 0$
$Cov[X,Y] = E[XY]-E[X]E[Y] = 0$
$Var[X+Y] = Var[X]+Var[Y]+2Cov[X,Y] = 14/9$
As variáveis não são independentes porque, por exemplo, $0 = f_{X,Y}(1,0) \neq f_X(1)f_Y(0) = 1/9$.

(b) Determine a correlação entre $3X$ e $(X+Y)$. (2.0)
Sugestão: Se não resolveu a alínea (a), considere que a variância de $(X+Y)$ é 2.

$Corr[3X,X+Y] = \dfrac{Cov[3X,X+Y]}{\sqrt{Var[3X]Var[X+Y]}} = \dfrac{3Cov[X,X]+3Cov[X,Y]}{\sqrt{9Var[X]Var[X+Y]}} = \dfrac{3Var[X]+3Cov[X,Y]}{\sqrt{9Var[X]Var[X+Y]}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}} \approx 0.756.$