Estudo da compressão e expansão adiabática e isotérmica de um gás. Determinação de γ=Cp/Cv para o ar

IST 2021

Sumário:

- Ar e modelo do gás ideal
- Compressão/expansão adiabática
- Determinação do coeficiente adiabático
- Balanço energético
- Compressão/expansão isotérmica
- Compressão/expansão politrópica

Processos de compressão e expansão do ar

Ar → Mistura de vários gases: N_2 - 78.08% em volume
O_2 - 20.9476%
Ar - 0.934%
$T = 15°C$ $P = 1atm$

Ar ≃ Gás ideal (a temperaturas e pressões não muito elevadas)

Gás ideal: $PV = nRT$, $U = U(T)$ $R = 8.314\, J\, K^{-1} mol^{-1}$ (constante dos gases)

1º Princípio ⇒ $dU = dQ + dW$, $dW = -PdV$ (processo quasi-estático)

Calor específico molar a V constante $C_V \equiv \frac{1}{n}\left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \frac{1}{n}\left(\frac{dU}{dT}\right)_V = \begin{cases} \frac{3}{2}R \rightarrow \text{gás monoatómico} \\ \frac{5}{2}R \rightarrow \text{gás diatómico} \end{cases} \Rightarrow dU = nC_V\, dT$

Transformação adiabática: $dQ = 0$

$dU = nC_v dT = dQ + dW = dW = -p\,dV \quad p = \frac{nRT}{V} \rightarrow \quad nC_v dT = -p\,dV = -\frac{nRT}{V} dV \rightarrow$

$C_v\, dT = -\frac{RT}{V} dV \rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_v}\frac{dV}{V} \rightarrow \ln T = -\frac{R}{C_v}\ln V + a \rightarrow \ln T + \frac{R}{C_v}\ln V = a$

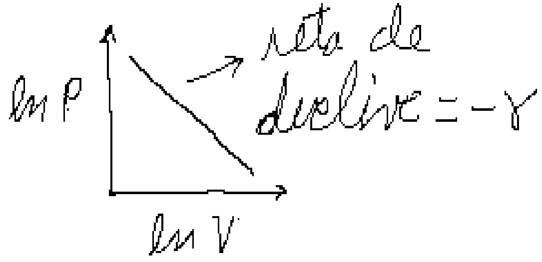
$\ln\left(T V^{\frac{R}{C_v}}\right) = a \rightarrow T V^{\frac{R}{C_v}} = b \rightarrow \frac{PV}{nR} V^{\frac{R}{C_v}} = b \rightarrow P V^{\frac{R}{C_v}+1} = nRb = \text{constante} \rightarrow$

$PV^{\frac{R+C_v}{C_v}} = \text{constante} \qquad R + C_v = C_p \rightarrow PV^{C_p/C_v} = \text{constante} \qquad C_p/C_v = \gamma \qquad PV^{\gamma} = \text{constante}$

Ar $\Rightarrow$ mistura de gases diatômicos $\Rightarrow C_v = \frac{5}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{\frac{5}{2}R + R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.4$

Determinação experimental de γ: $PV^\gamma = \text{constante} \rightarrow \ln(PV^\gamma) = \text{constante}^* \rightarrow$

$\rightarrow \ln P + \gamma \ln V = \text{constante}^* \rightarrow \ln P = -\gamma \ln V + \text{constante}^*$



Balanço energético na transformação adiabática

$$\boxed{\Delta U = W}$$

$$\Delta U = \int_{T_i}^{T_f} m c_v \, dT = m c_v (T_f - T_i)$$

$$W = \int_{V_i}^{V_f} -p \, dV = -P_i V_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma} = -P_i V_i^\gamma \left. \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right|_{V_i}^{V_f} = -\frac{P_i V_i^\gamma}{1-\gamma}\left(V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}\right) \rightarrow$$

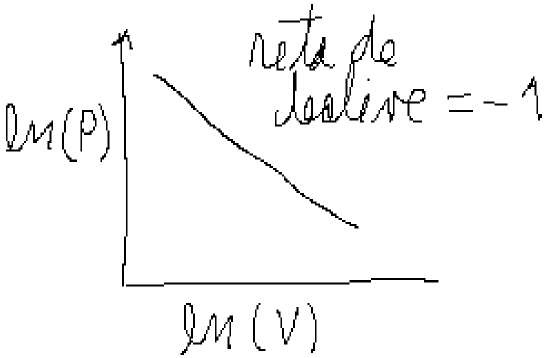
$$W = \frac{P_f V_f}{\gamma - 1} - \frac{P_i V_i}{\gamma - 1} = m c_v (T_f - T_i)$$

Transformação isotérmica: $T = \text{constante} \Rightarrow dT = 0 \Rightarrow dU = n c_v dT = 0$

$$dU = 0 = dQ + dW \Rightarrow Q + W = 0 \rightarrow Q = -W = \int_{V_i}^{V_f} P\, dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\, dV = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

Análise experimental da transformação isotérmica:

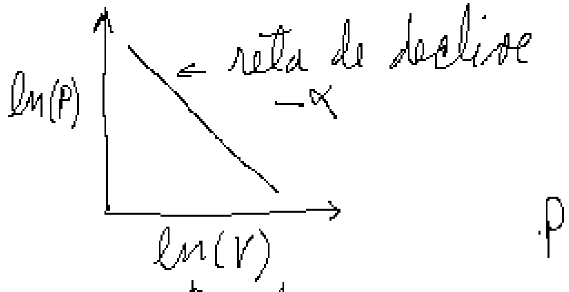
$$PV = nRT \rightarrow P = \frac{nRT}{V} \rightarrow \ln P = -\ln V + \ln(nRT)$$



Processos politrópicos:

Em muitos casos verifica-se experimentalmente que:

$$\ln(P) = -\alpha \ln(V) + c$$



$$\ln(P) = -\alpha \ln(V) + c \Rightarrow \ln(PV^{\alpha}) = c \Rightarrow PV^{\alpha} = c^*$$

↑ Processo politrópico

$$P = \frac{c^*}{V^{\alpha}} = \frac{mRT}{V} \to V^{1-\alpha} = \frac{mRT}{c^*}$$

diferenciando em ordem a T →

$$\to (1-\alpha)\, V^{1-\alpha-1} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{mR}{c^*} \to$$

$$\to \frac{dV}{dT} = V^{\alpha} \frac{mR}{(1-\alpha)c^*}$$

Usar o 1º princípio para calcular o calor trocado:

$$dU = dQ + dW \to dQ = dU - dW = mC_v dT + p\,dV$$

$$dQ = mC_v dT + P\frac{dV}{dT}dT = mC_v dT + PV^{\alpha}\frac{mR}{(1-\alpha)c^*}dT$$

$$dQ = mC_v dT + \frac{c^*}{V^{\alpha}} V^{\alpha} \frac{mR}{(1-\alpha)c^*} dT = mC_v dT + \frac{mR}{1-\alpha} dT = m\left(C_v + \frac{R}{1-\alpha}\right) dT$$

Numa transformação finita teremos:

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} dQ = m\left(C_v + \frac{R}{1-\alpha}\right)(T_f - T_i) = -m\beta\Delta T$$ com $$\beta = -\left(C_v + \frac{R}{1-\alpha}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{C_v + R + \beta}{C_v + \beta}$$

Determinando Q a partir do balanço energético $Q = \Delta U - W = mc_v\Delta T - W = mc_v\Delta T + \int_{V_i}^{V_f} p\, dV$,

Podemos determinar $\beta = -\frac{Q}{m\Delta T}$ e $\alpha = \frac{c_v + R + \beta}{c_v + \beta}$ e comparar α com o declive da reta $\ln p$ versus $\ln V$

verificando assim a consistência das diferentes medições.

Casos limites do modelo

- Transformação adiabática $\rightarrow Q = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{c_v + R}{c_v} = \gamma$
- Transformação isotérmica $\rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow \beta = \infty \Rightarrow \alpha = 1$

O modelo descreve bem os casos limites.

Conclusão

Na presença de um processo politrópico num gás ideal em que $PV^{\alpha} = c$, α está relacionado com o calor trocado no processo através das expressões: $Q = -n\beta\Delta T$, $\alpha = \dfrac{C_V + R + \beta}{C_V + \beta}$

FIM