Complementos de Cálculo Diferencial e Integral

4ª Ficha de trabalho - 2º Semestre 2014/2015

1. Seja φ uma aplicação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$, diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$; sejam L_1 e L_2 as funções coordenadas da sua derivada no ponto $(0,0,0)$:

$$\begin{aligned} L_1(x,y,z) &= 2x+3y+4z \\ L_2(x,y,z) &= x-y \end{aligned}$$

Seja ψ a seguinte aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$:

$$\psi(u,v) = \operatorname{arctg}\left(u^2+v^3\right).$$

Sabendo que $\varphi(0,0,0) = (1,0)$, Calcule a matriz Jacobiana de $\psi \circ \varphi$ no ponto $(0,0,0)$.

2. Sendo G uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e

$$F(x,y,z) = G\left(x^2-y^2, y^2-z^2\right)$$

   (a) Indique, justificando, em que pontos F é diferenciável.

   (b) Mostre que, em qualquer ponto (x,y,z), se verifica a igualdade

$$yzF'_x(x,y,z) + xzF'_y(x,y,z) + xyF'_z(x,y,z) = 0$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e tal que $f(-1,1) = -1$. Considere uma função G definida por

$$G(x,y) = f\left(f(x,y), f^2(x,y)\right)$$

Mostre que

$$\frac{\partial G}{\partial x}(-1,1) + 2\frac{\partial G}{\partial y}(-1,1) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\right]^2 - 4\left[\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right]^2$$

4. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes:

   (a) $\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$

   (b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$

   Sugestão: Para (b)$\Rightarrow$(a) mostre que a função $\psi(t) = \frac{f(tx,ty)}{t^\alpha}$ é constante em $]0,+\infty[$.