DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Complementos de Cálculo Diferencial e Integral

2ª Ficha de trabalho - 2º Semestre 2014/2015

1. Sejam x_n e y_n os termos gerais de duas sucessões em $\mathbb{R}^p$ e admita que x_n converge para z e que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - y_n\| < \|x_{n+1} - x_n\|$. Nestas condições:

   (a) Justifique que y_n converge para z.

   (b) Supondo que $A \subset \mathbb{R}^p$ é tal que $x_n \in A$ e $y_n \notin A$ (qualquer que seja n), justifique que z é um ponto fronteira de A.

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujas funções coordenadas g_1 e g_2 são definidas pelas expressões

$$g_1(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$$

$$g_2(x, y) = \log|y - x^2|$$

   e designe por D o seu domínio. Descreva geometricamente o conjunto D, determine no seu interior e a sua fronteira e indique, justificando, se D é aberto, fechado, limitado.

3. Determine se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade a $\mathbb{R}^2$.

   (a) $f(x, y) = \dfrac{xy(x+2) - (x+y)^2}{x^2 + y^2}$

   (b) $g(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 - xy + y^2}$

4. Considere a função (definida em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ em que a seguinte expressão designa um número real)

$$f(x, y) = \frac{(x-2)^2}{y - x^2}.$$

   Determine o seu domínio D e mostre que não existe ponto da fronteira de D ao qual $f(x, y)$ seja prolongável por continuidade.

5. Mostre que a função

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

   é prolongável por continuidade ao ponto $(0, 0, 0)$.

6. Determine para que números reais $a > 0$ a função definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ por

$$f(x, y) = \frac{|x|^a y}{x^6 + y^2}$$

   tem limite em $(0, 0)$.

7. Dê um exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ que é nula em pontos suficientemente próximos de $(0, 0)$ sobre cada curva de equação cartesiana $y = \pm|x|^a$, com $a > 0$, mas descontínua em ponto $(0, 0)$.