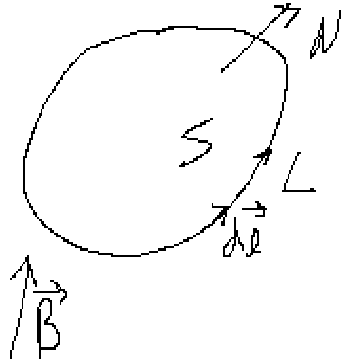
Lei de Indução de Faraday; verificação experimental e funcionamento do transformador.

LET 2021

Lei de indução de Faraday



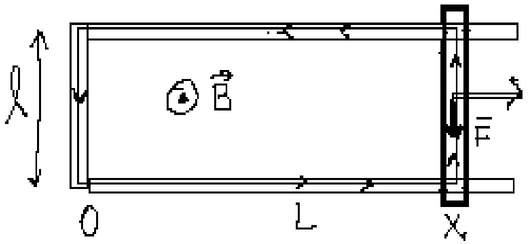
$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} \qquad \mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_i\cdot d\vec{l} = \oint \frac{\vec{F}_i}{q}\cdot d\vec{l}$$

Origem do fenômeno:

Força de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$ $\qquad \frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}$

— ϕ pode variar com campo B estático e circuito a variar:



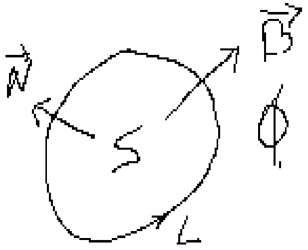
$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x}$

$$E_i = \frac{F}{q} = vB \qquad \mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E}_i\cdot d\vec{l} = -vBl$$

$$\phi = Blx \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -\mathcal{E}_i$$

— ϕ pode variar com campo B variável e circuito estático: $\vec{v} = 0 \Rightarrow$ existe $\vec{E}$ criado pela variação de $\vec{B}$ (descoberta de Faraday)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \text{Equação de Maxwell}$$

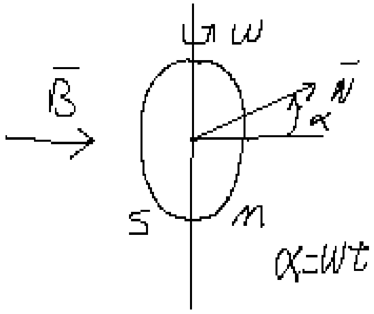


$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \vec{N}\, ds = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{N}\, ds = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \vec{B} \cdot \vec{N}\, ds}_{\phi} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Teorema de Stokes
$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_i \Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt}$$

Verificação experimental:

I $\rightarrow \vec{B}$ fixo, circuito a rodar:



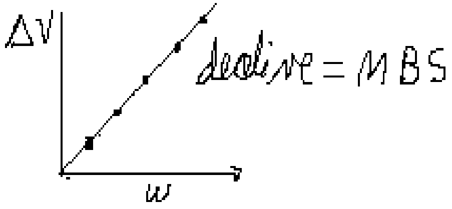
Conjunto de espiras que rodam em torno de um diâmetro

$$\phi = n \int_S \vec{B} \cdot \vec{N}\, ds = nBS\cos\alpha \qquad \mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(nBS\cos(wt)\right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_i = nBSw\,\sin(wt)$$

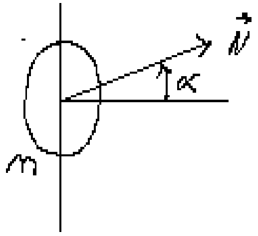
$$\Delta V = -\mathcal{E}_i = -nBSw\,\sin(wt)$$

$$\boxed{\Delta V_{max} = nBSw}$$



$B \rightarrow$ gerado pelas bobinas de Helmholtz $\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 n i}{l} \frac{8}{5\sqrt{5}} = \frac{32\pi}{5\sqrt{5}} \frac{ni}{l} \times 10^{-7}$ Tesla

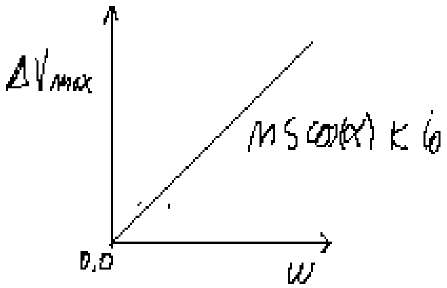
II → Circuito estático
$\vec{B}$ a variar no tempo $\Rightarrow \phi = \int_S \vec{B}\cdot\vec{N}\, dS = \phi(t)$,



Para os n espiras circulares: $\mathcal{E}_i = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[n\int_S \vec{B}\cdot\vec{N}\, dS\right] = -\frac{d}{dt}\left(nBS\cos(\alpha)\right) = -nS\cos(\alpha)\frac{dB}{dt}$

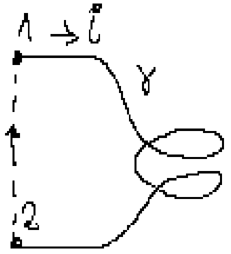
$B = Ki = K i_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \mathcal{E}_i = -nS\cos(\alpha)\left[-K i_0 \omega \sin(\omega t)\right] = nS\cos(\alpha) K i_0 \omega \sin(\omega t)$

$\Delta V = -\mathcal{E}_i \Rightarrow \Delta V_{max} = nS\cos(\alpha) K i_0 \omega$



Coeficientes de auto-indução e indução mútua

A → secção do fio



$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$ $\quad \phi \propto i \Rightarrow \phi = Li \quad$ L → coeficiente de auto indução do circuito $\quad [L] = H$ → Henry

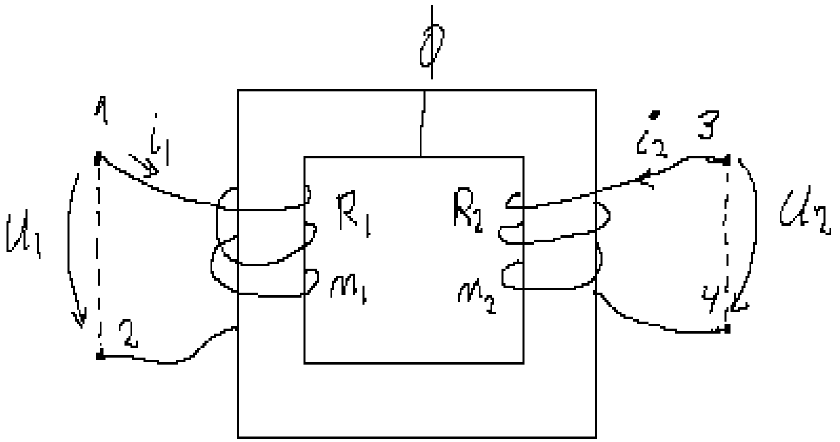
$\mathcal{E}_i = \int_1^2 \vec{E}_{i\,fio}\cdot d\vec{l} + \int_2^1 \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$

$\vec{E}_{i\,fio} = \frac{\vec{J}}{\sigma_c} \qquad J = \frac{i}{A}$

$\int_1^2 \frac{\vec{J}}{\sigma_c}\cdot d\vec{l} - U_{12} = -L\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{J}{\sigma_c} l - U_{12} = -L\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{Jl}{\sigma_c} = i \overbrace{\frac{l}{A\sigma_c}}^{\text{resistência do fio}} = iR$

$$\boxed{U_{12} = Ri + L\frac{di}{dt}}$$

Introdução ao estudo do Transformador



$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt}$$

$\psi_1 \propto i_1, i_2 \Rightarrow \psi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2$

$\psi_2 \propto i_2, i_1 \Rightarrow \psi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2$

$L_{ii} \rightarrow$ coeficiente de auto-indução do circuito i

L_{ij} ($i \neq j$) $\rightarrow$ coeficiente de indução mútua entre os circuitos i e j $\quad L_{ij} = L_{ji}$

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\psi_1}{dt} = R_1 i_1 - u_1 = -m_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\psi_2}{dt} = R_2 i_2 - u_2 = -m_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1 i_1 - u_1}{-m_1} = \frac{d\phi}{dt} \qquad \frac{R_2 i_2 - u_2}{-m_2} = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{m_1} = \frac{u_2}{m_2}$$ se $R_1 i_1$ e $R_2 i_2$ desprezáveis face a u_1 e u_2

$$\downarrow$$

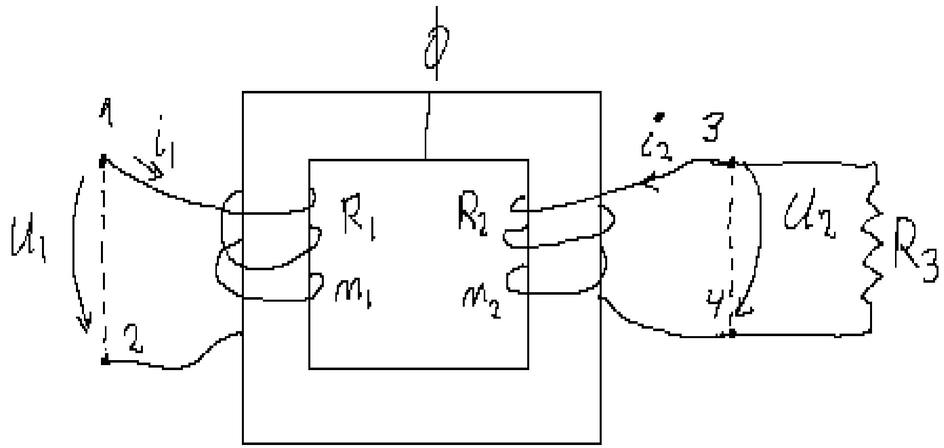
$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

Lei do transformador ideal

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = R_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = R_2 i_2 + L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

Introdução ao estudo do Transformador, continuação



$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = R_1 i_1 + L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = R_2 i_2 + L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = -R_3 i_2$$

$$L_{12} = L_{21} = L_M$$

Considerando grandezas sinusoidais:

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = R_1\bar{I}_1 + j\omega L_{11}\bar{I}_1 + j\omega L_M\bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 = R_2\bar{I}_2 + j\omega L_M\bar{I}_1 + j\omega L_{22}\bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 = -R_3\bar{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad '' \\ j\omega L_M\bar{I}_1 = -\bar{I}_2(R_2+R_3+j\omega L_{22}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{U}_1 = \dfrac{(R_1+j\omega L_{11})(R_2+R_3+j\omega L_{22})}{j\omega L_M}(-\bar{I}_2) + j\omega L_M\bar{I}_2 \\ \quad '' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{U}_2 = -R_3\dfrac{\bar{U}_1}{j\omega L_M - \dfrac{(R_1+j\omega L_{11})(R_2+R_3+j\omega L_{22})}{j\omega L_M}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = +\dfrac{R_3\, j\omega L_M}{\omega^2 L_M^2 + R_1(R_2+R_3) + j\omega\left[L_{11}(R_2+R_3)+L_{22}R_1\right] - \omega^2 L_{11}L_{22}} \end{cases}$$

Casos particulares:

$$\lim_{R_3\to\infty}\left(\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1}\right) = \lim_{R_3\to\infty}\left(\frac{R_3 j\omega L_M}{\omega^2 L_M^2 + R_1(R_2+R_3) + j\omega\left[L_{11}(R_2+R_3)+L_{22}R_1\right] - \omega^2 L_{11}L_{22}}\right) = \frac{j\omega L_M}{R_1 + j\omega L_{11}}$$

$$\lim_{\substack{R_3\to\infty\\ \omega L_{11}\gg R_1}}\left(\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1}\right) = \frac{L_M}{L_{11}} \approx \frac{n_2}{n_1}$$

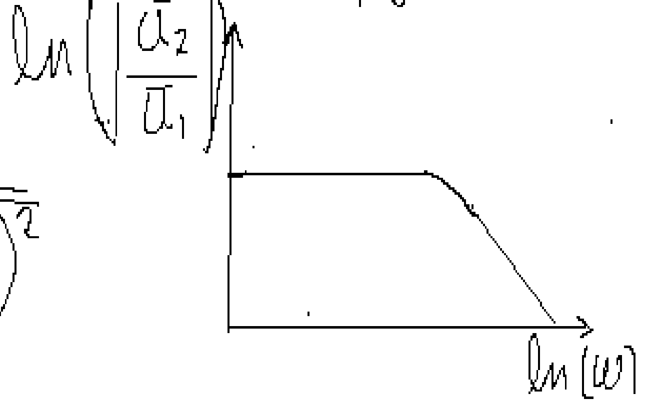
$K \to$ fator de acoplamento magnético

fator

$$K^2 = \frac{L_M^2}{L_{11}L_{22}} < 1$$

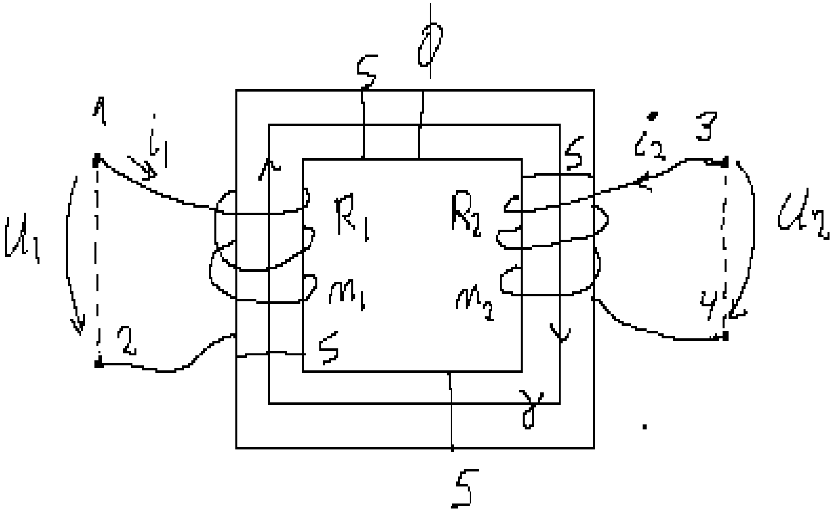
$$\lim_{\substack{R_1\to 0\\ R_2\to 0}}\left(\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1}\right) = \frac{R_3 j\omega L_M}{\omega^2\left(L_M^2 - L_{11}L_{22}\right) + j\omega L_{11}R_3} = \frac{L_M}{L_{11}}\,\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{R_3}\left(L_{22} - \frac{L_M^2}{L_{11}}\right)} = \frac{L_M}{L_{11}}\,\frac{1}{1 + j\omega\frac{L_{22}}{R_3}\left(1-K^2\right)}$$

$$\lim_{\substack{R_1\to 0\\ R_2\to 0}}\left|\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1}\right| = \frac{L_M}{L_{11}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\left(\frac{L_{22}}{R_3}\right)^2\left(1-K^2\right)^2}}$$



Determinação aproximada dos coeficientes de indução.

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1 &= L_{11} i_1 + L_M i_2 = m_1 \phi \\ \Psi_2 &= L_M i_1 + L_{22} i_2 = m_2 \phi \end{aligned}\right\} \text{Sem dispersão das linhas de força}$$



Cálculo de ϕ:

Teorema de Ampère: $\oint_\gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = m_1 i_1 + m_2 i_2$

$$H\gamma = m_1 i_1 + m_2 i_2$$

$B = \mu H \qquad \frac{B}{\mu}\gamma = m_1 i_1 + m_2 i_2 \rightarrow B = \frac{\mu}{\gamma}(m_1 i_1 + m_2 i_2)$

$$\phi \simeq B.S = \frac{\mu S}{\gamma}(m_1 i_1 + m_2 i_2) \Rightarrow L_{11} = \frac{m_1 \phi}{i_1}\bigg|_{i_2=0} = \frac{\mu S}{\gamma} m_1^2 \quad , \quad L_{22} = \frac{m_2 \phi}{i_2}\bigg|_{i_1=0} = \frac{\mu S}{\gamma} m_2^2$$

$$L_M = \frac{m_1 \phi}{i_2}\bigg|_{i_1=0} = \frac{\mu S}{\gamma} m_1 m_2$$

$$K = \frac{L_M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} = 1$$ $\rightarrow$ Porque não se considerou a dispersão das linhas de força.

FIM