O mundo que nos rodeia é extremamente complexo, composto por um número absurdamente grande de partículas. Felizmente, por vezes não temos que conhecer o comportamento de cada partícula individualmente para descrevermos o comportamento do todo. Chegamos assim à dinâmica de fluidos.
Um fluido é uma grande colecção de partículas, que se podem mover mais ou menos livremente. Um dos exemplos a mais larga escala é uma galáxia, composta por um vasto número de planetas, estrelas e buracos negros. O sol é um exemplo talvez mais comum de um fluido, constituído por electrões e nucleões. A nossa atmosfera, os oceanos etc tudo são fluidos.

Nós vamos representar fluidos como uma distribuição contínua, caracterizada por certas propriedades (densidade, viscosidade etc)
Assim, abdicamos do detalho microscópico em favor de propriedades macroscópicas.
Perdemos algo, mas ganhamos uma descrição elegantíssima do mundo que nos rodeia

A diferença entre líquidos e gases (e até plasmas por vezes) é simplesmente o empacotamento e interacção entre partículas, que leva a diferentes respostas à compressão:

- Para um sólido elástico,

$\delta P = -K\Theta$, mas se o número N de partículas for conservado $N = V\rho$ então

$$\Theta = \frac{\delta V}{V} = -\frac{\delta\rho}{\rho} \quad \text{ou seja} \quad \delta P = -K\frac{\delta\rho}{\rho}$$

Para a água, $K = 2.2$ GPa. logo uma mudança de pressão de $P = 10^5$ Pa (1atm) para 2×10^5 Pa (2atm) resulta em $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim -\frac{10^5}{2.2\times10^9} \sim -10^{-4}$.

- Por outro lado, para gases $\frac{\delta P}{P} = \gamma\frac{\delta\rho}{\rho}$ onde para um gás ideal

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, onde c_p e c_v são calores específicos a pressão e volume constante, respectivamente.

$\Rightarrow \delta\rho/\rho \sim 10^0$!

Finalmente, notamos que todos os materiais se deformam sob a acção de forças externas. Um fluido deforma-se sem limite e continuamente (progressivamente) sob a acção de forças, por pequenas que sejam.
Um fluido flui.

Estática: a lei de Arquimedes

Fluidos são por natureza isotrópicos, dado que "fluem", o que tende a simetrizar o meio. Por isso, o tensor das tensões de fluidos estáticos tem a forma

$$T = P \quad , \text{ ou } \quad T_{ij} = P\delta_{ij}$$

Consideremos agora um corpo imerso num fluido em repouso. A força no corpo é

de buoyancy ou boiar

$$\vec{F}^{b} = \int_{\partial V} -T \, d\vec{A} \quad \text{ou}$$

$$F_i^{b} = \int_{\partial V} -T_{ij} \, dA_j \quad , \text{ onde } d\vec{A} \text{ é a normal}$$

exterior ao corpo.

A força devido à gravidade vale

$$\vec{F}^{g} = \int_{V} \rho_{corpo} \, \vec{g} \, dV$$

• Em equilíbrio, $\vec{F}^{g} + \vec{F}^{b} = 0$. Em particular, se o corpo imerso for o próprio fluido,

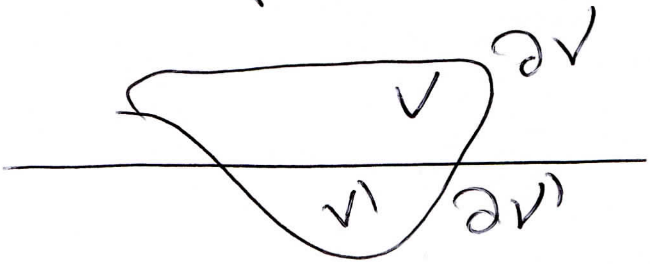
$$F^{b} = -\int_{\partial V} T \, d\vec{A} = -\int_{V} \nabla T \, dV$$

T. divergência

e $F^g = \int_V \rho_{corpo}\, g\, dV = \int_V g \rho_f\, dV$

e portanto $F^b + F^g = 0 \Rightarrow \nabla T - \rho_f g = 0$,
a lei de equilíbrio que já tínhamos visto.

• Para um corpo arbitrário



$$\vec{F}^b = -\int_{\partial V_{TOT}} \cancel{P}\, T\, d\vec{A}$$

Tomamos o volume correspondente ao fluido que foi deslocado pelo corpo. Assumindo que fora a pressão é nula (o que muda se não for?)

$$\vec{F}^b = -\int_{\partial V_{TOT}} T\, d\vec{A} = -\int_{\partial V'} T\, dA = -\int_{V'} \nabla T\, dV$$

$$= -\int_{V'} \rho_f\, g\, dV = -gM'$$

Com M' a massa de fluido deslocado. Isto prova a lei de Arquimedes

Estabilidade de corpos flutuantes

Mesmo que um corpo flutue, o que requer $\rho_f > \rho_{corpo}$, é necessário que tal aconteça de forma estável se quisermos ter controlo nesse corpo. Para isso, não basta haver equilíbrio de forças, é também necessário haver equilíbrio de momentos. Este problema é especialmente importante para barcos, submarinos e alguns seres vivos.

Ora, o momento total é a soma de dois termos

$$M = M_b + M_g$$

$$M_g = \int_V \vec{x} \times [\rho_{corpo} \vec{g}] \, dV$$

$$M_b = \int_{\partial V} \vec{x} \times (-T d\vec{A}) = \int_{\partial V'} \vec{x} \times (-T d\vec{A})$$

Ora, o produto externo pode ser escrito como

$$\vec{x} \times (-T d\vec{A}) = -\varepsilon_{ijk} x_j T_{kl} dA_l \vec{e}_i$$

e portanto podemos escrever

$$M_b = -\int_{\partial V'} \varepsilon_{ijk} x_j T_{kl} dA_l \vec{e}_i$$ → vector

T. divergência

$$= -\int_{V'} (\varepsilon_{ijk} x_j T_{kl})_{,l} \, dV \vec{e}_i$$

$$= -\int_{V'} [\varepsilon_{ilk} T_{kl} + \varepsilon_{ijk} x_j T_{kl,l}] \, dV \vec{e}_i$$

F08

$$= \int_{V'} \vec{x} \times (-\nabla T)\, dV$$

e usando equilíbrio de forças, $\rho g - \nabla T = 0$,

$$M_B = \int_{V'} \vec{x} \times (-\rho_f \vec{g})\, dV$$

um resultado quase óbvio!

Equilíbrio mecânico e gravidade

Consideremos um campo gravitacional constante, e defina-se o centro de massa ou de gravidade

$$\vec{x}_g = \frac{\int_V \vec{x} \rho_{corpo}\, dV}{\int_V \rho_{corpo}\, dV} = \frac{\int_V x \rho_{corpo}\, dV}{M}$$

Então $\vec{M}_g = \int_V \vec{x} \times [\rho_{corpo} \vec{g}]\, dV = \vec{x}_g \times \vec{g}\, M$

Podemos também definir o centro de flutuação

$$\vec{x}_b = \frac{\int_{V'} \vec{x} \rho_f\, dV}{\int_V \rho_{corpo}\, dV} = \frac{\int_{V'} \vec{x} \rho_f\, dV}{M}, \text{ e temos}$$

$$\vec{M}_b = \int_{V'} [\vec{x} \times (-\rho_f \vec{g})]\, dV = -\vec{x}_b \times \vec{g}\, M$$

O momento total

$$\vec{M}_T = (\vec{x}_g - \vec{x}_b) \times \vec{g}\, M$$

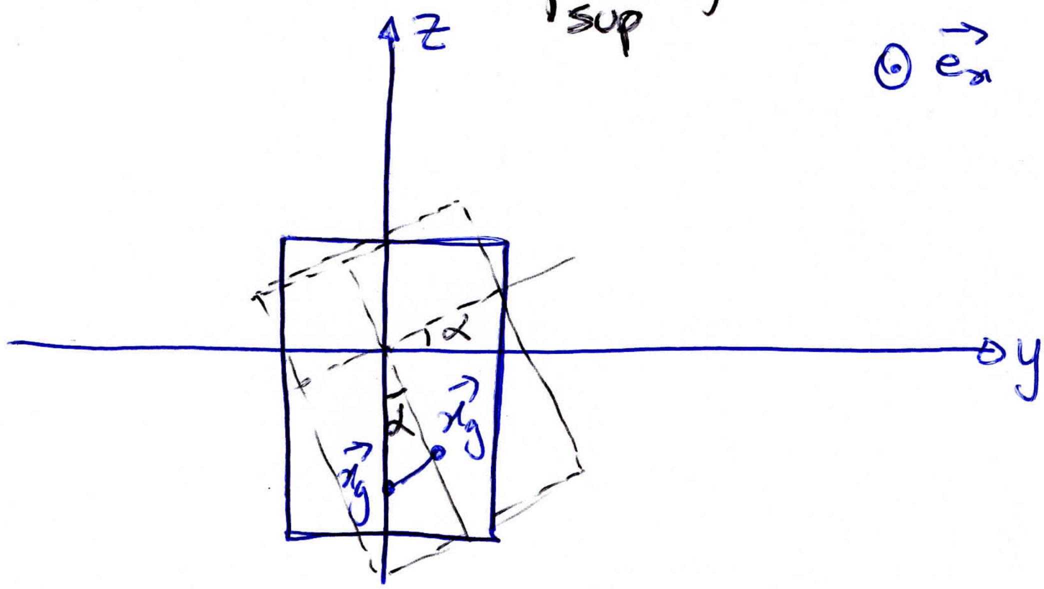
não depende da origem das coordenadas.

FCOP

Para existir equilíbrio, o momento total tem que ser nulo, o que só pode acontecer se $\vec{x}_g - \vec{x}_b \parallel \vec{g}$

Alguns destes equilíbrios podem ser instáveis.

Consideremos agora uma pequena rotação que desvia o objecto do equilíbrio. Usemos coordenadas em que $(x_b, y_b, z_{\text{fluido sup}}) = (0,0,0)$



Como esta é apenas uma rotação infinitesimal α,

$\delta x_g = 0 \qquad \delta y_g = -\alpha z_g \qquad \cancel{\delta z_g = \alpha y_g}$

Por outro lado, para o centro de flutuação $\vec{x}_b = \int_{V'} \frac{\vec{x} \times \rho_f \, dV}{M}$ temos duas contribuições

$$\delta \vec{x}_b = \frac{1}{M} \int_{V'} (\delta \vec{x})_{rot} \, \rho_f \, dV + \frac{1}{V} \int_{\delta V'} \vec{x} \, dV$$

$$= (\delta x_b)_{rot} + (\delta x_b)_{desl}$$

O primeiro termo é a contribuição da rotação; o segundo é relacionado com o deslocamento do fluido. O primeiro termo é idêntico ao do cm,

$$(\delta x_b)_{rot} = 0 \quad (\delta y_b)_{rot} = -\alpha z_b \ \ldots$$

O segundo termo pode ser calculado geometricamente

$$(\delta \vec{x}_b)_{desl} = -\frac{1}{M} \int_{A_{z=0}} \vec{x} \rho_f \underbrace{(\delta z_b)_{rot} dA}_{\delta V}$$

$$(\delta x_b)_{desl} = -\frac{\alpha}{V'} \int_{A_{z=0}} x y \, dA = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{V'} J$$

$$(\delta y_b)_{desl} = -\frac{\alpha}{V'} \int_{A_{z=0}} y^2 dA = -\alpha \frac{I}{V'}$$

$$\boxed{J = \int_{A_{z=0}} xy \, dA \ ; \quad I = \int_{A_{z=0}} y^2 dA}$$

Portanto $\quad \delta x_b = -\alpha \dfrac{J}{V}$

$$\delta y_b = -\alpha \left(z_b + \frac{I}{V'} \right) = -\alpha z_M$$

$\boxed{z_M = z_b + \dfrac{I}{V'}}$ é chamado metacentro (metacenter)

O momento total segundo x, por exemplo,

$$\delta M_x = -(\delta y_g - \delta y_b) g M = \alpha (z_g - z_M) g M$$

Para o equilíbrio ser estável, $z_g < z_M$

F098