Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2012/2013

2ºTeste — Versão B

(CURSOS: LEGM, LEMAT, MEAER, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEEC, MEQ)

22 de Dezembro de 2012, 14h30

Duração: 1h 30m

1. Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$t + \frac{1}{1+4y^2}\frac{dy}{dt} = 0; \qquad y(1) = 0.$$

Determine explicitamente a solução $y(t)$ e indique justificadamente se a solução anterior explode.

Resolução: A equação pode escrever-se na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\arctan(2y(t))\right) = -t \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\arctan(2y(t))\right) = -2t$$

Integrando dos dois lados de 1 a t obtém-se

$$\arctan(2y(t)) - \arctan 0 = -t^2 + 1 \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2}\tan(1-t^2).$$

Esta solução está definida para

$$-\frac{\pi}{2} < 1 - t^2 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1 - t^2 > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t^2 < 1 + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |t| < \sqrt{1+\frac{\pi}{2}},$$

ou seja,

$$t \in \left]-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right[.$$

Nos extremos (finitos) do intervalo da definição, a solução tende para infinito, portanto explode.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine e^{At}.

(b) Determine a solução geral da equação

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) Indique, justificando, os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}; \qquad \mathbf{x}(0) = (a, b)$$

é limitada em $[0, +\infty[$.

Resolução:

(a) Os valores próprios de A são as raízes do polinómio característico $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -3.$$

Os vectores próprios de $\lambda = 2$ são as soluções não nulas da equação

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 4b,$$

ou, seja os múltiplos não nulos de $(4,1)$. Os vectores próprios de $\lambda = -3$ são as soluções não nulas da equação

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = -b,$$

ou, seja os múltiplos não nulos de $(1,-1)$. Conclui-se que uma solução matricial fundamental do sistema é dada por

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 4e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{2t} & -e^{-3t} \end{bmatrix},$$

e que

$$e^{At} = Y(t)Y(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 4e^{2t} & e^{-3t} \\ e^{2t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{2t} + e^{-3t} & 4e^{2t} - 4e^{-3t} \\ e^{2t} - e^{-3t} & e^{2t} + 4e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Outra possibilidade seria usar a diagonalização da matriz A. Como a matriz tem dois valores próprios reais diferentes, existe portanto uma base de vectores próprios linearmente independentes - um por cada valor próprio - na qual a matriz é escrita na forma puramente diagonal $A = S\Lambda S^{-1}$ com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

e a correspondente matriz de mudança de base, com os vectores próprios correspondentes nas colunas

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtém-se a mesma matriz exponencial atrás calculando:

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & -4/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

(b) Podemos determinar uma solução particular constante para o sistema de equações diferenciais resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} 0 = x + 4y + 4 \\ 0 = x - 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

logo a solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Alternativamente, a fórmula de variação das constantes dá-nos a solução particular

$$e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \int_0^t \begin{bmatrix} 4e^{2(t-s)} \\ e^{2(t-s)} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} -2e^{2(t-s)} \\ -\frac{1}{2}e^{2(t-s)} \end{bmatrix} \Bigg|_{s=0}^{s=t} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - 2 \\ \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

donde obtemos a seguinte expressão para a solução geral do sistema:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - 2 \\ \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} + c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) A solução do problema de valor inicial é

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4(a+b)e^{2t} + (a-4b)e^{-3t} \\ (a+b)e^{2t} + (4b-a)e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Esta solução é limitada sse o coeficiente das exponenciais e^{2t} (que tendem para ∞ quando $t \to +\infty$) se anulam, ou seja, sse $a + b = 0$.

3. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$y'' - y = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$$

escolhendo para $b(t)$ **uma e só uma** das seguintes funções.

$$(\mathbf{i})\ b(t) = t^2 - 2e^{-t},\ \ t \in \mathbb{R} \qquad \textbf{ou} \qquad (\mathbf{ii})\ b(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le t \le 5 \\ 0 & \text{se } t > 5 \end{cases}$$

Resolução:

(i) O aniquilador de $b(t)$ é $D^3(D+1)$ logo uma solução do problema de valor inicial é solução da equação homogénea

$$D^3(D+1)(D^2-1)y = 0 \Leftrightarrow D^3(D+1)^2(D-1)y = 0$$

e portanto

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 e^t + c_5 e^{-t} + c_6 t e^{-t}$$

para alguns $c_i \in \mathbb{R}$. Podemos portanto achar uma solução particular da equação dada da forma $y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_6 t e^{-t}$. Substituindo esta expressão na equação obtemos

$$2c_3 + c_6(-2e^{-t} + te^{-t}) - (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_6 t e^{-t}) = t^2 - 2e^{-t}$$

o que dá azo ao sistema

$$\begin{cases} 2c_3 - c_1 = 0 \\ -c_2 = 0 \\ -c_3 = 1 \\ -2c_6 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = -1 \\ c_6 = 1 \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = -2 - t^2 + te^{-t}$ é uma solução particular da equação e a solução geral é

$$y(t) = -2 - t^2 + te^{-t} + c_4 e^t + c_5 e^{-t}$$

com $c_4, c_5 \in \mathbb{R}$. Substituindo nas condições iniciais obtemos

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + c_4 + c_5 = 0 \\ 1 + c_4 - c_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_4 = \frac{1}{2} \\ c_5 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Conclui-se assim que a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = y(t) = -2 - t^2 + te^{-t} + \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}.$$

(ii) Notando que $b(t) = 1 - H(t-5)$ e aplicando a transformada de Laplace à equação diferencial obtemos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-5s}}{s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s^2-1)} - e^{-5s}\frac{1}{s(s^2-1)}.$$

Escrevendo $\frac{1}{s(s^2-1}$ em termos de frações simples obtemos

$$\frac{1}{s(s^2-1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1}$$

logo a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - H(t-5)\left(-1 + \frac{1}{2}e^{t-5} + \frac{1}{2}e^{-(t-5)}\right).$$

4. Considere o problema de valor inicial e fronteira para $u\colon [0,\pi] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (1 + \operatorname{sen} t)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad \text{com} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -3 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Determine a série de cosenos de $f(x)$ indicando a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) Resolva o problema de valor inicial e fronteira (1).

Resolução:

(a) A série de cosenos de $f(x)$ é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

com

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -3\,dx = -3,$$

e, para $n \ge 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -3\cos(nx)dx = -\frac{6}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{6}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

isto é,

$$f(x) = -\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos(nx).$$

A série de cosenos é a série de Fourier do prolongamento par de $f(x)$ ao intervalo $[-\pi,\pi]$, que é a função

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -3 & \text{se } \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}.$$

Esta função é seccionalmente de classe C^1, com descontinuidades em $x = \pm\frac{\pi}{2}$ e os limites nos extremos do intervalo são ambos iguais a -3, logo, pelo Teorema sobre convergência pontual das séries de Fourier, a série de Fourier de f converge para a função $S\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{3}{2} & \text{se } |x| = \frac{\pi}{2} \\ -3 & \text{se } \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi \end{cases}.$$

Uma vez que a soma da série de Fourier é uma função periódica com período 2π, conclui-se finalmente que a soma da série é dada, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ pela expressão:

$$-\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(nx) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{3}{2} & \text{se } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ -3 & \text{se } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}.$$

onde k denota um número inteiro qualquer.

(b) Substituindo $u(x,t) = X(x)T(t)$ na equação diferencial parcial obtemos

$$X(x)T'(t) = (1 + \operatorname{sen} t)X''(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{(1 + \operatorname{sen} t)T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se ambas as funções, de variáveis diferentes x e t, forem ambas constantes, digamos $-\lambda$. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = -\lambda(1 + \operatorname{sen} t)T(t) \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

A primeira equação é uma equação separável para $T(t)$:

$$\frac{d}{dt} \log|T| = -\lambda(1 + \operatorname{sen} t) \Leftrightarrow T(t) = Ae^{-\lambda(t - \cos t)} \text{ com } A \in \mathbb{R}.$$

A expressão para as soluções da segunda equação depende do sinal de λ. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{-\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{se } \lambda < 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{\lambda}x + C\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.

As condições de fronteira homogéneas $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$ para as soluções da forma $X(x)T(t)$ não nulas dizem que

$$X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Como

$$X'(x) = \begin{cases} B\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - C\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{se } \lambda < 0 \\ B & \text{se } \lambda = 0 \\ -B\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x + C\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x & \text{se } \lambda > 0. \end{cases}$$

impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} B - C = 0 \\ Be^{\sqrt{-\lambda}\pi} - Ce^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

donde obtemos a solução $X(x) = C$

(iii) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} -B \cdot 0 + C\sqrt{\lambda} = 0 \\ -B\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\pi + C\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \text{ ou } \sqrt{\lambda} = n \end{cases}$$

donde obtemos as soluções $X(x) = B\cos(nx)$ com $n = 1, 2, \cdots$, para $\lambda = n^2$.

As soluções da equação diferencial da forma $X(x)T(t)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções constantes (correspondentes ao caso em que $\lambda = 0$) e as funções da forma

$$A\cos(nx)e^{-n^2(t-\cos t)}$$

com $A \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \ldots$.

Procuramos agora uma solução formal para (1) que seja uma "combinação linear infinita"das soluções obtidas acima:

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx)e^{-n^2(t-\cos t)}.$$

Substituindo esta expressão na equação $u(x,0) = f(x)$ obtemos

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx)e^{n^2} = f(x)$$

pelo que $2c_0$ e $c_n e^{n^2}$ são os coeficientes da série de cosenos obtida na alínea anterior. Sendo assim

$$2c_0 = -3 \Leftrightarrow c_0 = -\frac{3}{2}, \quad \text{e} \quad c_n e^{n^2} = \frac{6}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Leftrightarrow c_n = \frac{6}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{-n^2}$$

e portanto a solução é

$$u(x,t) = -\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{-n^2}\cos(nx)e^{-n^2(t-\cos t)}.$$

5. Mostre que todas as soluções da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(ty) + t^3$$

são funções pares (quando prolongadas ao seu intervalo máximo de definição).

Resolução: Uma vez que $f(t,y) = \operatorname{sen}(ty) + t^3$ é continuamente diferenciável, o Teorema de Picard garante que cada problema de valor inicial tem uma solução única. Como o domínio de f é todo o $\mathbb{R}^2$, as soluções podem ser prolongadas a um intervalo, nos extremos do qual $(t, y(t)) \to \infty$.

Como

$$-1 + t^3 \leq \operatorname{sen}(ty) + t^3 \leq 1 + t^3$$

e as soluções dos problemas de valor inicial

$$\frac{dz}{dt} = \pm 1 + t^3, \qquad z(t_0) = y_0$$

são

$$z(t) - y_0 = \pm(t - t_0) + \frac{t^4 - t_0^4}{4}$$

conclui-se do Teorema sobre comparação de soluções de equações diferenciais que a solução $y(t)$ com condição inicial y_0 satisfaz

$$y_0 - (t - t_0) + \frac{t^4 - t_0^4}{4} \leq y(t) \leq y_0 + (t - t_0) + \frac{t^4 - t_0^4}{4} \text{ para } t \geq t_0,$$

e

$$y_0 + (t - t_0) + \frac{t^4 - t_0^4}{4} \leq y(t) \leq y_0 - (t - t_0) + \frac{t^4 - t_0^4}{4} \text{ para } t \leq t_0.$$

Assim, as soluções dos problemas de valor inicial para a equação diferencial do enunciado não explodem e portanto, o seu intervalo máximo de definição é $\mathbb{R}$ (e em particular todas as soluções estão definidas em $t = 0$.)

Se $y(t)$ é uma solução da equação diferencial, então $u(t) = y(-t)$ também é, uma vez que

$$\frac{du}{dt} = -\frac{dy}{dt}(-t) = -\left(\operatorname{sen}(-ty(-t))) + (-t)^3\right) = \operatorname{sen}(tu(t)) + t^3$$

Uma vez que $u(t)$ satisfaz $u(0) = y(-0) = y(0)$, da unicidade da solução do problema de valor inicial com condição inicial $y(0)$ conclui-se que $u(t) = y(t)$ para todo o t, isto é $y(-t) = y(t)$ para todo o t. Logo $y(t)$ é uma função par.