14 Abn Osc Ord

REVISÃO

Solução para sistema finito de osciladores acoplados

$\equiv$

Solução para sistema infinito

[solução é simples devido a inv. translacional]

+

compatibilidade c/ cond. fronteira do sistema finito

[as interações são locais]

→ modos normais do sistema são determinados por inv. translacional e como vect. próprios da matriz

$$A_j^{\beta} = \beta^{j}$$

→ potência

valor próprio

componente j do vector próprio da matriz de simetria c/ valor próprio β

$\beta = \pm 1$ não acontece

$\omega_{1/\beta}^2 = \omega_{\beta}^2$

$$\omega_{\beta}^2 = 2B - C\left(\beta + 1/\beta\right)$$

freq. própria

(valores próprios de $\Pi^{-1}K$)

· **sistema finito**: apenas os modos normais do sistema infinito que satisfazem as cond. fronteira

comb. linear de modos com a mesma freq. (linearidade)

modo normal do sist. finito

mínimo

$$A = A^{\beta} + \xi A^{\beta^{-1}}$$

→ modos normais do sist. infinito c/ a mesma freq. ω_α

componentes

$$A_j = A_j^{\beta} + \xi A_j^{\beta^{-1}} = \beta^j + \xi \beta^{-j}$$

$\text{"}(1/\beta)^j$

Por exemplo, o sistema entre paredes

$A_0 = 0 \qquad A_{N+1} = 0$

$$A_j^n = \sin\left(\frac{j\, n\pi}{N+1}\right) \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

não dependem dos detalhes do sistema (B, C)

$$A^n(x) = \sin(kx) \qquad k = \frac{n\pi}{L} \qquad L = (N+1)a$$

de facto nem dependem do número de osciladores (só do tamanho do sistema)

$$\omega^2 = 2B - 2C\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right) = 2B - 2C\cos(ka)$$

detalhes do sistema

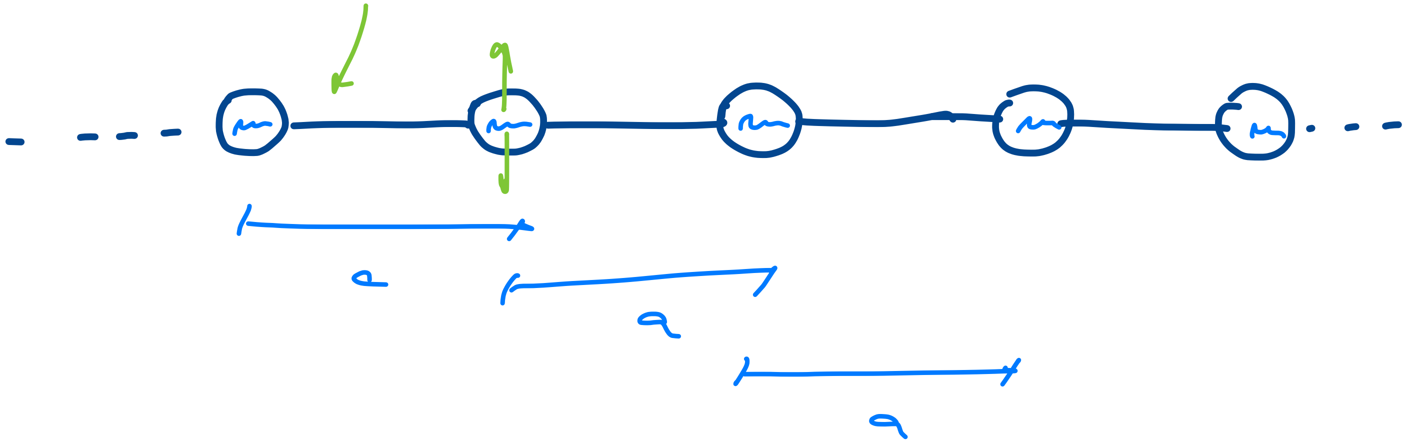
índice da do tamanho

válido para sist infinito e finito

O sistema de N pêndulos oscila longitudinalmente, ou seja na mesma direção de sua extensão

Outra possibilidade é o sist. oscilar transversalmente ($\perp$ à sua extensão)

$\longrightarrow$ exemplo útil: corda c/ contas (sem massa) massivas corda ideal (massa zero), tensão T



as contas só oscilam transversalmente

→ corda rígida:
não há mov. longitudinal

→ pequenas oscilações transversais:

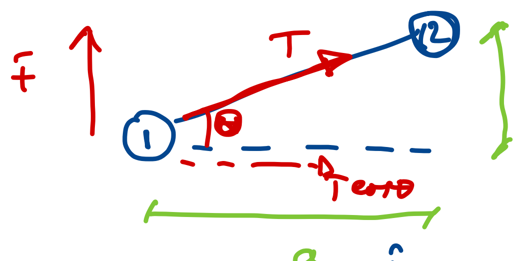
• alongamento da corda é desprezível

$\cos\theta \approx 1$

$\equiv$

tensão (força) horizontal é constante e anula-se equilíbrio em cada massa

força restitutiva transversal (tensão)



(desvios relativamente às posições de equilíbrio)

Semelhança de triângulos:

$$\frac{F}{T} \approx \frac{F}{T\cos\theta} = \frac{y_2 - y_1}{a} \Rightarrow F \approx T/a\,(y_2 - y_1)$$

$$F \approx \underbrace{T/a\,(\psi_2 - \psi_1)}$$

análogo a uma mola c/ $K = T/a$

a relação de dispersão é a mesma dos pêndulos no limite em que a quantidade em desprezável ($B = C$)

$$\omega^2 = 4B \sin^2 \frac{ka}{2}$$

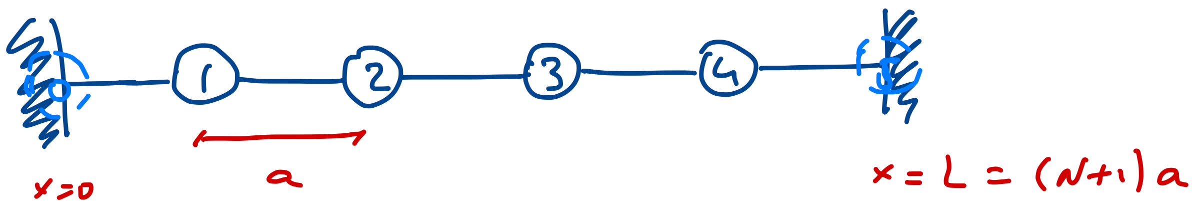
$$B = C = K/m$$

$$\longrightarrow B = C = \frac{T}{ma}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{4T}{ma} \sin^2 \frac{ka}{2}}$$

Condições fronteira na corda com contas

• extremos fixos (paredes) $\longrightarrow$ fixo como exercício



• muito semelhante ao que fizemos para os pêndulos com apenas 2 diferenças:

• freq. são diferentes $\omega^2 = \frac{4T}{ma}\sin^2 ka$

• modos normais

$$A^n(x) = \sin kx \qquad k = n\pi/L \qquad n = 1, \cdots, N$$

descrevem movimento transverso

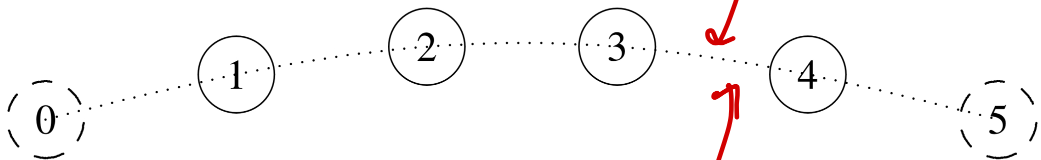
Usualmente, oscilações transversas têm interpretação mais simples:

$L = 5a$

$n = 1$

$A'(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$

$\sin \frac{\pi x}{L}$



$x = 0$ $x = a$ $x = 2a$ $x = 5a$

indicador visual

NÃO É A CONFIGURAÇÃO DA CORDA

só faz sentido para

$x = 0$

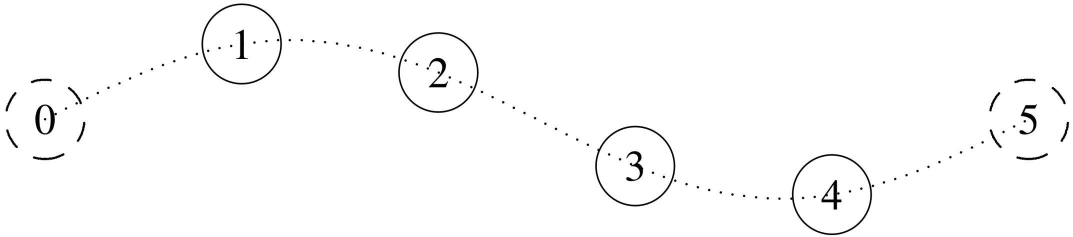
$x = a$

$x = 2a$

$x = 3a$

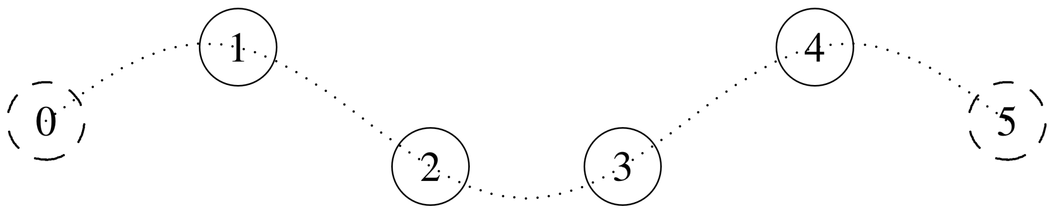
$x = 4a$

$x = 5a$



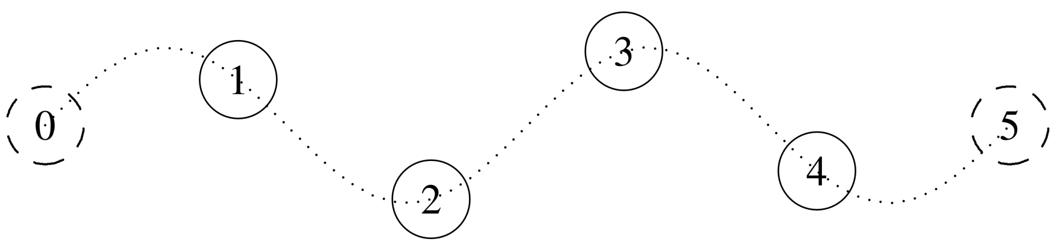
$n=2$

$A^2(x) = \sin\frac{2\pi}{L}x$



$n=3$

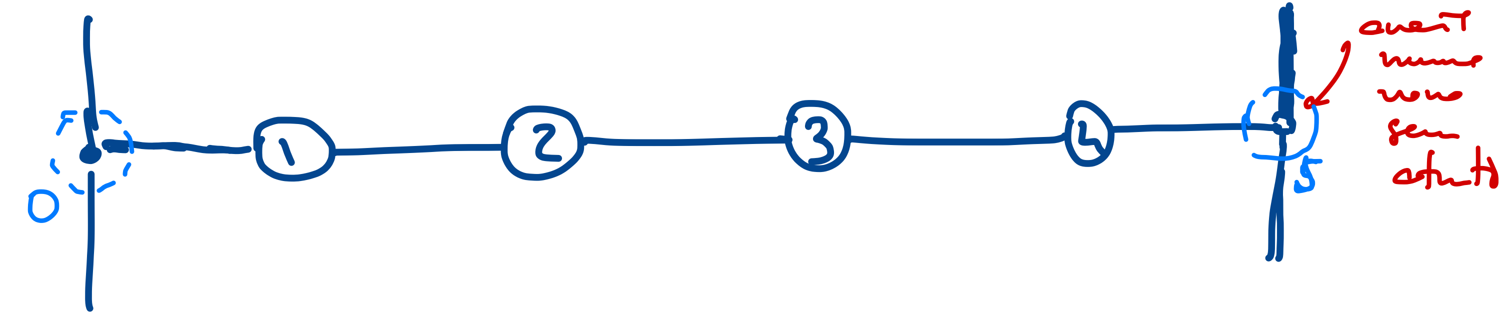
$A^3(x) = \sin\frac{3\pi}{L}x$



$n=4$

$A^4(x) = \sin\frac{4\pi}{L}x$

→ extremos livres



condições fronteira:

$$A_0 = A_1$$

para que o extremo livre (A_0) não exerça força em A_1

$$A_4 = A_5$$

— o mesmo —

Os modos normais do sistema infinito são

$$e^{\pm ikx} \longrightarrow \text{combinação linear}$$

$$\mathrm{Re}\{ e^{ikx} + \xi e^{-ikx} \}$$

$$= \boxed{\cos(kx - \theta)}$$

por enquanto é completamente geral

impor cond. fronteira

$$A_0 = A_1$$

$$\Rightarrow \cos(kx_0 - \theta) = \cos(kx_1 - \theta)$$

$\underline{A_0 = A_1}$ $\Longrightarrow$ $\cos(kx_0 - \theta) = \cos(kx_1 - \theta)$

$\Downarrow$

(i) $\cos(kx - \theta)$ tem um máximo (ou mínimo) em $x = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$

ou

(ii) $kx_1 - kx_0$ é um múltiplo de 2π

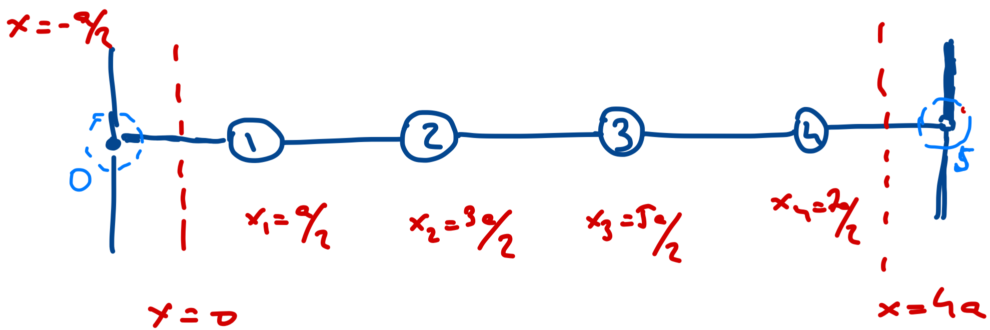
(não acrescenta soluções novas às que são determinadas pela condição (i))

$\cos(kx - \theta)$ máximo ou mínimo em

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

escolha origem do coordenadas de uma maneira astuta

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = 0$$



$$\cos(-\theta) = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \text{modo normal} \propto \cos(kx)$$

Falta determinar valores possíveis de k usando a outra condição fronteira

$A_4 = A_J \longrightarrow$ máximo ou mínimo entre eles, ou seja em $x = 4$

Como fizemos uma escolha não trivial de coordenadas vamos escrever a versão diferente

$$A_j = \cos\left[ka\left(j - \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

$j = 1 \Rightarrow x = a/2$

$j = 2 \Rightarrow x = 3a/2$

$$A_5 = A_4 \Rightarrow \cos\left[ka\left(4-1/2\right)\right] = \cos\left[ka\left(5-1/2\right)\right]$$

máximo ou mínimo no meio

$$\Rightarrow \cos[4ka] = \pm 1$$

$$\Rightarrow 4ka = n\pi \qquad \boxed{n = 0, 1, 2, 3}$$

$$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{4a}$$

4 contas no

onda

cu faje

$$A_j = \cos\left[ka\left(j - \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

$$k = \frac{n\pi}{4a}$$

$$n = 0, 1, 2, 3$$

pentru $n > 3$ se repetă

$n = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow A_j = 1$

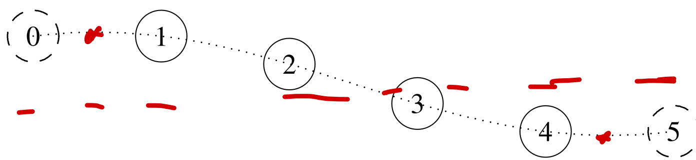
extremal lines:

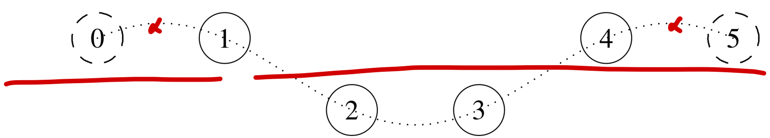
- $n=0$: trivial

$$A_j^0 = 1$$

- $n=1$

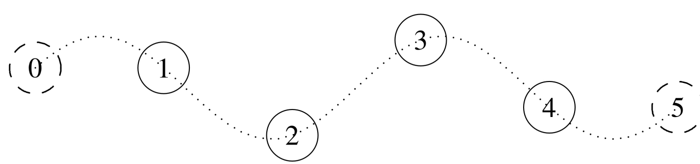
$$A_j^1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\left(j-\frac{1}{2}\right)\right)$$





- $n=2$

$$A_j^2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\,2\left(j-\frac{1}{2}\right)\right)$$



- $n=3$

$$A_j^3 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\,3\left(j-\frac{1}{2}\right)\right)$$

- um extremo fixo e o outro livre

$A_0 = 0 \longrightarrow \sin(kx)$ $\qquad x_0 = 0$

$A_4 = A_5 \longrightarrow$ ponto médio $\dfrac{x_4 + x_5}{2} = \dfrac{9a}{2}$

$$\sin\left(k \frac{9a}{2}\right) = \pm 1$$

$\longrightarrow k = \ldots$

(fica como exercício
conjunto)