Limite de entrega: 10/06/2021 (23h59)
(via Projectos Fénix)
Docentes: Hugo Terças e Pedro Cosme

Mecânica Analítica

MEFT 2020/21

Avaliação Contínua – Ficha III

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente todos os cálculos que efectuar. A submissão deve ser feita no Fénix (`Estudante » Submeter » Projetos`).

Questão 1. [5 val] *Dinâmica de vórtices.*— Vórtices são estruturas que aparecem em vários sistemas físicos, tais como fluidos, supercondutores e superfluidos. A duas dimensões, a Teoria de Helmholtz consiste em considerar os vórtices como singularidades num determinado ponto $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$. Para um sistema de N vórtices, o Hamiltoniano de Helmholtz é dado por

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{N} \gamma_i\gamma_j \ln|\vec{r}_i - \vec{r}_j|,$$

onde γ_i representa a *circulação* de cada vórtice (que tem unidades físicas de momento angular por unidade de massa). As coordenadas x_i e y_i são canonicamente conjugadas o que, à primeira vista, parece estranho. De seguida, vamos perceber que não há qualquer problema. Apenas temos de munir esta teoria do seguinte parênteses de Poisson,

$$\{f, g\}_{\text{Helmholtz}} = \sum_i \frac{1}{\gamma_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right].$$

a) [1 val] Recorrendo ao formalismo dos parênteses de Poisson, mostre que

$$\dot{x}_i = -\sum_{j\neq i}\gamma_j\frac{y_i - y_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}, \quad \dot{y}_i = \sum_{j\neq i}\gamma_j\frac{x_i - x_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}.$$

b) [1 val] Argumente que se recupera o parênteses de Poisson usual se definirmos o momento canónico conjugado na forma

$$\vec{p}_i = \gamma_i\boldsymbol{\epsilon}\cdot\vec{r}_i,$$

onde $\boldsymbol{\epsilon}$ é o símbolo de Levi-Civita a duas dimensões. Não acha curioso que o momento canónica seja proporcional à posição (ao invés da velocidade)?

c) [1.5 val] Mostre que as seguintes quantidades são conservadas,

$$P_x = \sum_i \gamma_i y_i, \quad P_y = -\sum_i \gamma_i x_i.$$

Comente fisicamente o que acaba de determinar.

d) [1.5 val] Considere o caso $N = 2$. Mostre que a "dança" deste par de vórtices ocorre com a frequência

$$\omega = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{R^2},$$

onde $R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ é uma constante do movimento.

Questão 2. [5 val] *Teoria de perturbações no tempo.*— Considere um Hamiltoniano da forma

$$H(q,p,t) = H_0(q,p,t) + \Delta H(q,p,t),$$

onde $\Delta H \ll H_0$ pode ser considerado como uma perturbação ao Hamiltoniano H_0. Como vimos, H_0 admite uma função principal de Hamilton $S(q,\alpha,t)$ que é uma função geradora da transformação canónica $(p,q) \to (P,Q) = (\alpha,\beta)$, onde (α,β) são as soluções das equações triviais do movimento que obtemos com $K_0 = 0$. Nada nos impede, ainda assim, de usarmos a mesma função S para gerar a transformação canónica para H. Contudo, neste caso, as novas variáveis

$$P = \alpha = \alpha(q,p), \quad Q = \beta = \beta(q,p)$$

não serão mais constantes.

a) [1 val] Comece por mostrar que as novas variáveis obedecem às seguintes equações do movimento

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha}.$$

b) [1 val] A ideia subjacente à teoria de perturbações é de resolvermos as novas equações do movimento como expansões. Sejam (α_0, β_0) as soluções (constantes) obtidas a partir de H_0. Mostre que, para ordens superiores $n > 0$, temos

$$\dot{\alpha}_n = -\left.\frac{\partial \Delta H}{\partial \beta}\right|_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}, \quad \dot{\beta}_n = \left.\frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha}\right|_{\beta_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}.$$

c) [2 val] Vamos aplicar este formalismo ao caso do oscilador anarmónico,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{1}{4}m^2\lambda q^4,$$

onde λ é um parâmetro pequeno. Comece por construir a equação de Hamilton-Jacobi para o problema harmónico e mostre que

$$\dot{\beta}_1 = \frac{2\lambda\alpha_0}{\omega^4}\sin^4\left[\omega(t+\beta_0)\right], \quad \dot{\alpha}_1 = \frac{4\lambda\alpha_0^2}{\omega^3}\sin^3\left[\omega(t+\beta_0)\right]\cos\left[\omega(t+\beta_0)\right].$$

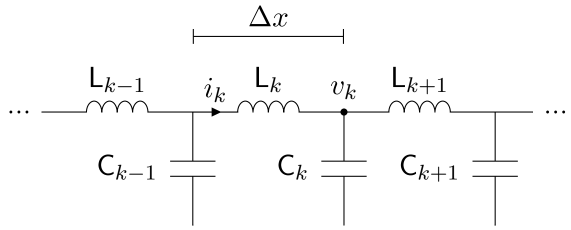
d) [1 val] Poderíamos, agora, voltar ao problema original e determinar as perturbações $\Delta q = q_1 - q_0$ e $\Delta p = p_1 - p_0$ recorrendo às relações de transformação após a integração das equações obtidas na alínea anterior. Contudo, antes disso, vamos considerar as evoluções *seculares*, i.e. aquelas obtidas ao fim de um período $\tau = 2\pi/\omega$,

$$\langle \dot{\Psi}_1 \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \dot{\Psi}_1 dt, \quad \Psi = \{\alpha, \beta\}.$$

Determine as quantidades seculares $\langle \dot{\beta}_1 \rangle$ e $\langle \dot{\alpha}_1 \rangle$ e mostre que, para tempos longos, $\omega t \gg 1$, $\beta_1 \simeq \langle \dot{\beta}_1 \rangle t$ e $p_1 = p_0$. Interprete fisicamente estes resultados e verifique que a perturbação à frequência é $\Delta\omega = 3\lambda E/(4\omega^3)$. *[Sugestão: compreenda que, naturalmente, a relação entre β e q é a mesma a todas as ordens.]*

Questão 3. **[10 val]** *Equações do Telégrafo.*— Como sabe, o formalismo lagrangeano pode ser aplicado a uma míriade de situações físicas, de entre as quais os circuitos eléctricos. Neste problema iremos desenvolver um modelo para a propagação de sinais electromagnéticos numa linha de transmissão (por exemplo, um cabo coaxial).

Comecemos por aproximar a linha de transmissão, por enquanto sem perdas, por uma sequência de indutores e condensadores como indicado no circuito equivalente apresentado ao lado. Considere que cada elemento é caracterizado pela sua impedância distribuída ao longo da linha, isto é, $\mathsf{L} = l\Delta x$ e $\mathsf{C} = c\Delta x$, e que i_k são as correntes que percorrem as bobines e v_k as tensões em cada nodo relativamente à terra.



Como coordenadas generalizadas para este problema iremos utilizar a cargas Q_k nos indutores, de tal forma que $i_k = \dfrac{\partial Q_k}{\partial t}$ e os fluxos P_k tal que $v_k = \dfrac{\partial P_k}{\partial t}$.

a) [2 val] Derive uma densidade lagrangeana que descreva o limite contínuo da linha de transmissão.

(i) Mostre que podemos escrever a energia armazenada no sistema discreto como

$$\sum_k \frac{1}{2} l \dot{Q}_k^2 \Delta x + \sum_k \frac{1}{2} c \dot{P}_k^2 \Delta x.$$

(ii) Justifique que a energia transferida para os condensadores k é dada por

$$\sum_k \frac{1}{2} \dot{P}_k \left(Q_{k+1} - Q_k\right) - \sum_k \frac{1}{2} P_k \left(\dot{Q}_{k+1} - \dot{Q}_k\right).$$

[Sugestão: note que a carga em cada condensador k é igual a $Q_{k+1} - Q_k$ e que a corrente que o percorre $\dot{Q}_k - \dot{Q}_{k+1}$]

(iii) Por fim, tome o limite contínuo e portanto obtenha a densidade lagrangeana deste sistema em termos dos campos Q e P, justificando cada um dos termos e a sua relação com o modelo discreto

$$L = \int \mathcal{L} dx = \int \frac{1}{2} l \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{2} P \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t}\, dx$$

b) [2 val] Mostre que, para densidades lagrangeanas $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \partial_{\mu\nu}\psi)$, que dependem de derivadas de segunda ordem nos campos, as equações de Euler-Lagrange se escrevem:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} + \partial_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu\nu}\psi)} = 0, \quad \nu \geq \mu$$

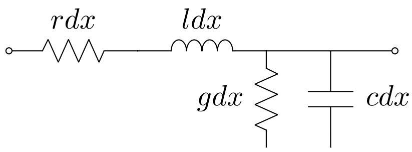
Utilize este resultado e a densidade lagrangeana determinado anteriormente para obter as equações de evolução dos campos Q e P.

c) [3 val] Verifique que a densidade lagrangeana

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} l \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

também reproduz a mesma evolução dos campos Q e P. De seguida, utilize-a para determinar o tensor energia–momento T_μ^ν, para o campo Q, discutindo o seu significado físico e de cada uma das suas componentes. *(Sugestão: Para a sua análise deverá ser proveitoso escrever o tensor em termos da corrente $i = \dot{Q}$ e tensão $v = \dot{P}$ e notar ainda que $\partial_x Q = -cv$)*

d) [3 val] Iremos agora considerar perdas ao longo da linha. Paras as modelizar introduz-se uma resistência em série (com resistência rdx) e outra em paralelo (com conductância gdx) ao longo da linha, tal como esquematizado.



(i) Argumente que a função de dissipação de Rayleigh que descreve este tipo de perdas se pode escrever

$$\mathcal{F} = \int \frac{1}{2} r \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} g \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 dx$$

(ii) Obtenha as novas equações para os campos Q e P agora com perdas e mostre que estas se podem reescrever, em termos da corrente i e tensão v ao longo da linha, como:

$$l\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = -ri$$
$$c\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} = -gv,$$

conhecidas como equações do telegrafo precisamente por modelizarem a propagação de um sinal num cabo de telegrafo. Por fim, combine-as para obter apenas a evolução da tensão

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - lc\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (rc + gl)\frac{\partial v}{\partial t} + grv.$$

(iii) Partindo do resultado anterior determine a relação de dispersão para a propagação de ondas planas de tensão na linha de transmissão. Comente fisicamente o valor de $\Im\{\omega(k)\}$