# Mecânica Analítica

2020-2021

**Série 10**

*Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme*

Nesta série, ilustramos o formalismo Lagrangeano para sistemas contínuos

$\star\star$ **Problema 1. A corda vibrate.** Considere uma corda de comprimento $L$ e densidade de massa $\mu$, sujeita a uma tensão constante $\tau$. Seja ainda $\psi(x,t)$ a deformação local da corda no ponto $x$ e no instante $t$.

a) Comece por mostrar, pela maneira que lhe for mais conveniente, que os infinitésimos de energia cinética e potencial podem ser escritos na seguinte forma

$$dT = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 dx, \quad dV = \tau\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2} - 1\right) dx.$$

Seja $\psi(x,t)$ o deslocamento vertical da corda. A energia cinética de um elemento infinitesimal de corda é

$$dT = \frac{1}{2}v^2 dm = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 \mu dx.$$

Assumindo que a corda está em equilíbrio na sua posição natural, a diferença de energia potencial virá pelo trabalho exercido pela tensão durante a deformação,

$$dV = \tau(d\ell - dx) = \tau(\sqrt{dx^2+dy^2} - dx) = \tau\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - 1\right) dx.$$

Finalmente, usando $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \tau\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2} - 1\right).$$

Para pequenas deformações, $\partial_x\psi \ll 1$,

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2} - 1 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2.$$

b) Expanda o termo de energia potencial em primeira ordem na derivada parcial em $x$ e obtenha a *densidade Lagrangeana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2,$$

que satisfaz a relação $L = \int \mathcal{L}[\psi(x,t), x, t]\ dx$.

> Para pequenas deformações, $\partial_x\psi \ll 1$,
>
> $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2} - 1 \simeq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2.$$

c) Parta do princípio de d'Alembert para mostrar que a estacionariedade da acção implica

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t\psi\right)}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_x\psi\right)}\right) = 0.$$

> Começamos por reparar que $S = \int L dt = \int\int \mathcal{L} dt dx$, com $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\psi, \dot{\psi}, \partial_x\psi; x, t\right)$. Assim,
>
> $$\begin{aligned} \delta S = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\mathcal{L} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\delta\dot{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\delta\partial_x\psi\right] = 0. \end{aligned}$$
>
> - $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\delta\dot{\psi}\ dt = \cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\delta\psi\Big|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\right)\delta\psi\ dt;$
> - $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\delta\partial_x\psi\ dx = \cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\delta\psi\Big|_{x_1}^{x_2}} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\right)\delta\psi\ dx.$
>
> A condição de estacionariedade da acção vem, então,
>
> $$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)}\right)\right]\delta\psi\ dxdt = 0.$$
>
> Como $\delta\psi$ é arbitrário, a condição de estacionariedade implica a equação de Euler-Lagrange para o campo $\psi(x,t)$. Mudando um pouco a notação, $\dot{\psi} = \partial_t\psi$, obtemos
>
> $$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t\psi\right)}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_x\psi\right)}\right) = 0.$$

d) Escreva a equação do movimento e obtenha a famosa equação das ondas

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c_s^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0.$$

Qual o significado físico de $c_s$?

Começamos por observar que $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$, uma vez que $\boldsymbol{L}$ não depende explicitamente de $\psi$ (apenas das suas derivadas).

- $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \mu \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$,
- $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \psi)} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tau \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \tau \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$.

A equação do movimento é, então

$$\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

Dividindo por $\mu$, temos $c_s = \sqrt{\tau/\mu}$, que representa a velocidade de propagação da onda.

e) Efectue uma mudança de coordenadas ($\eta = x + c_s t$ e $\xi = x - c_s t$) para obter a solução de d'Alembert para a equação das ondas, i.e. para mostrar que

$$\psi(x,t) = f(x + c_s t) + g(x - c_s t),$$

com $f$ e $g$ arbitrários, satisfaz a equação do movimento. Qual o significado físico desta solução?

Definimos $\eta = x + c_s t$ e $\xi = x - c_s t$. Assim, $x = \dfrac{1}{2}(\eta + \xi)$ e $t = \dfrac{1}{2c_s}(\eta - \xi)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}\right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{c_s}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\right).$$

Aplicando estes operadores na equação do movimento, vem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

As soluções formais desta equação são obtidas reparando que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0 \Longrightarrow \psi = f(\xi) + c, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \Longrightarrow \psi = g(\eta) + d.$$

Assim, $\psi(\eta, \xi) = f(\xi) + g(\eta)$ e, portanto

$$\psi(x,t) = f(x + c_s t) + g(x - c_s t).$$

Esta solução indica que qualquer sobreposição de duas ondas propagando-se à esquerda e à direita satisfaz a equação das ondas. Tal facto revela a natureza não dispersiva das ondas acústicas.

f) Considere que a corda está fixa nos seus extremos, $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$. Use o método da separação de variáveis para mostrar que a relação de dispersão é quantizada,

$$\omega_n = c_s \frac{n\pi}{L}.$$

Separamos a equação na forma $\psi(x,t) = X(x)T(t)$ e introduzimos na equação diferencial

$$\frac{T''}{T} - c_s^2 \frac{X''}{X} = 0.$$

Como cada um dos termos depende apenas das suas variáveis, eles têm de ser constantes, i.e.

$$\frac{T''}{T} = -\alpha \quad \wedge \quad \frac{X''}{X} = -\frac{\alpha}{c_s^2}.$$

A segunda equação resolve-se imediatamente,

$$X(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{c_s}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{c_s}x\right).$$

Condições fronteira $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ implicam que

$$A = 0 \quad \wedge \quad \frac{\sqrt{\alpha}}{c_s} = \frac{n\pi}{L},$$

onde $n$ é um número inteiro. Como a solução é periódica no tempo, $T(t) = \sum_\omega T_\omega e^{-i\omega t}$, $\sqrt{\alpha} = \omega$ e, portanto

$$\omega_n = c_s \frac{\pi n}{L}.$$

g) Determine as leis de conservação que achar relevantes e calcule os elementos do tensor energia-momento.

Como o Lagrangeano não depende do espaço-tempo, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathcal{L} = 0$. Por outro lado, usando a definição de derivada total

$$d_\mu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} d_\mu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi)} d_\mu \partial_\nu \psi + \cancel{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}\mathcal{L}.$$

Usamos a equação de Euler-Lagrange para eliminar $\partial_\psi \mathcal{L}$ e escrever

$$d_\mu \mathcal{L} = d_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \psi)}\right) d_\mu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi)} d_\mu \partial_\nu \psi.$$

Igualamos os índices mudos por forma a conseguirmos colocar tudo em evidência, e então temos

$$d_\nu \mathcal{L} \delta^\nu_\mu = d_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} d_\mu \psi\right)$$

$$d_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} d_\mu \psi - \mathcal{L}\delta^\nu_\mu\right) \equiv d_\nu T^\nu_\mu = 0.$$

As componentes são obtidas percorrendo os valores dos índices $\mu\nu = (0,1) = (t,x)$ (ver aula teórica)

$$T_0^0 = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\tau\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \mathcal{E}, \quad T_1^1 = -T_0^0 = -\mathcal{E}$$

$$T_1^0 = \mu\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad T_0^1 = -\tau\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

⋆⋆ **Problema 2. Teoria de Kirchoff-Love.** Em teoria de campo, é possível que a densidade Lagrangeana contenha derivadas do campo $\psi$ de ordem superior à primeira [1]. Este é o caso da teoria de elasticidade, em que a dinâmica do sistema depende não só da deformação $\psi$ mas também da curvatura local, i.e. $\nabla^2\psi$.

a) Mostre que para uma teoria da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, \Box\psi, x, t)$, a equação de Euler-Lagrange se escreve como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) + \Box \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\Box \psi)} \right) = 0,$$

onde $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$.

Repetimos o procedimento do Problema 1), mas desta vez para um Lagrangeano do tipo $\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\psi, \partial_\mu\psi, \Box\psi; x, t\right)$.

$$\begin{aligned} \delta S = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \delta \int_1^2 \mathcal{L}\ dx^\mu = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \int_1^2 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial^\mu\psi)} \delta(\partial_\mu\partial^\mu\psi) \right] dx^\mu = 0. \end{aligned}$$

Os dois primeiros termos sabemos como tratar (ver problema 1); o segundo termo é feito de forma análoga

- $$\int_1^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial^\mu\psi)} \delta(\partial_\mu\partial^\mu\psi) dx^\mu = \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial^\mu\psi)} \delta(\partial_\mu\psi)\Big|_1^2} - \int_1^2 \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial^\mu\psi)} \right) \delta(\partial_\mu\psi) dx^\mu.$$

  Integramos mais uma vez por partes,

- $$\int_1^2 \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial^\mu\psi)} \right) \delta(\partial_\mu\psi) dx^\mu = \cancel{\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial^\mu\psi)} \right) \delta\psi\Big|_1^2} - \int_1^2 \partial^\mu\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial^\mu\psi)} \right) \delta\psi dx^\mu.$$

Assim, a condição de estacionariedade, vem

$$\int_1^2 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} + \Box \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\Box\psi)} \right] \delta\psi\ dx^\mu = 0.$$

b) Considere a seguinte densidade lagrangeana, descrevendo uma membrana (ex. um tambor) presa nas suas extremidades,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \rho \dot{\psi}^2 - \gamma |\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 - D \left( \nabla^2 \psi \right)^2 \right],$$

onde $\rho$ é a massa por unidade de área, $\gamma$ é a tensão aplicada e $D$ (que depende dos módulos de Poisson e de Young) é a rigidez da membrana. Utilize o resultado da alínea anterior para obter a equação de Kirchoff-Love,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \psi + \beta^2 \nabla^4 \psi = 0,$$

[1] No caso discreto, se o Lagrangeano depender da aceleração generalizada, $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$, o espaço de fases fica sobredeterminado como consequência das transformações canónicas, conduzindo à famosa *instabilidade de Ostrogradsky* (para uma pequena introdução sobre o assunto, ver https://arxiv.org/abs/1411.3721). Isto justifica porque é que uma teoria física só depende das posições e das velocidades generalizadas.

onde $c_s = \sqrt{\gamma/\rho}$ e $\beta = \sqrt{D/\rho}$.

- $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$.
  O índice $\mu = (0,1) = (t,x)$, pelo que
- $\partial_t \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \rho \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$,
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\boldsymbol{\nabla}\psi)} = -\gamma \nabla^2 \psi$,
- $\nabla^2 \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla^2 \psi)} = -D\nabla^4 \psi$.

Assim, juntando todos os termos

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \gamma \nabla^2 \psi + D\nabla^4 \psi = 0.$$

Dividindo tudo por $\rho$ e definindo $c_s = \sqrt{\gamma/\rho}$ e $\beta^2 = D/\rho$, obtemos a equação do movimento pretendida.

c) Verifique se a teoria é simétrica para as transformações discretas $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{PT}$.

$$\mathcal{T}\{\mathcal{L}(\varphi, \partial_x \psi, \partial_t \psi, \partial_x^2 \psi)\} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_x \psi, \partial_{(-t)} \psi, \partial_x^2 \psi) = \mathcal{L}(\varphi, \partial_x \psi, \partial_t \psi, \partial_x^2 \psi),$$

$$\mathcal{P}\{\mathcal{L}(\varphi, \partial_x \psi, \partial_t \psi, \partial_x^2 \psi)\} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_{-x} \psi, \partial_t \psi, \partial_{(-x)}^2 \psi) = \mathcal{L}(\varphi, \partial_x \psi, \partial_t \psi, \partial_x^2 \psi),$$

$$\mathcal{PT}\{\mathcal{L}(\varphi, \partial_x \psi, \partial_t \psi, \partial_x^2 \psi)\} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_{-x} \psi, \partial_{(-t)} \psi, \partial_{(-x)}^2 \psi) = \mathcal{L}(\varphi, \partial_x \psi, \partial_t \psi, \partial_x^2 \psi).$$

d) Tente soluções do tipo onda plana para obter a relação de dispersão

$$\omega = \sqrt{c_s^2 k^2 + \beta^2 k^4}.$$

À luz do que já conhece sobre a teoria das ondas, comente o resultado encontrado.

Vamos tentar soluções do tipo

$$\psi(x,y,t) = \psi(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k},\omega} \psi_{\mathbf{k},\omega} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Inserindo na equação do movimento, temos

$$\sum_{\mathbf{k},\omega} \left(-\omega^2 + c_s^2 k^2 + \beta^2 k^4\right) \psi_{\mathbf{k},\omega} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0.$$

Como $\psi_{\mathbf{k},\omega}$ são coeficientes arbitrários (porém não nulos), temos que

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 + \beta^2 k^4.$$

As velocidades de fase ($v_f$) e de grupo ($v_g$) da onda são dadas por

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{c_s^2 k^2 + \beta^2 k^4}}{k}, \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c_s k + 2\beta^2 k^3}{\sqrt{c_s^2 k^2 + \beta^2 k^4}}.$$

Como vemos, $v_g \neq v_f$, pelo que um pacote de ondas dispersa-se de forma distinta de uma onda sinusoidal. Como uma onda é, em geral, uma sobreposição de ondas sinusoidais, o facto de cada uma dessas componente ter uma velocidade diferente (ou seja, não segue o movimento de grupo!) fará com que a onda de disperse.

Contudo, no limite dos grandes comprimentos de onda $k \ll c_s/\beta$, a relação de dispersão é aproximadamente acústica, $\omega \simeq c_s k$. Neste limite, $v_f \simeq c_s \simeq v_g$. No limite oposto, $k \gg c_s/\beta$, $\omega \simeq \beta k^2$, e $v_f \simeq \beta k$ e $v_g = 2\beta k = 2 v_f$, significando que onda e altamente dispersiva no limite dos pequenos comprimentos de onda.

$\star\star\star$ **Problema 3. A Equação de Schrödinger.** Em Mecânica Quântica, os sistemas físicos são descritos por uma função de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$, que é um campo complexo. A uma dimensão, para uma partícula sob a acção de um potencial $V(x)$, o Lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L} = \psi^* \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi - V(x) \psi^* \psi = 0,$$

onde $\hbar = h/2\pi$ e $h$ é a constante de Planck.

a) Obtenha a equação do movimento para o campo $\psi$ partindo da equação de Euler-Lagrange para $\psi^*$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - d_\mu \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}} = 0,$$

o que fornece, imediatamente

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi.$$

b) Obtenha a equação de Schrödinger independente do tempo fazendo

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}.$$

Para esta prescrição, temos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi,$$

pelo que a equação de Schödinger independente do tempo é

$$\hbar\omega\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi \equiv H\psi.$$

Se olharmos para $H$ como um operador, esta equação aparece como um problema aos valores próprios. Ora, como $H$ é o Hamiltoniano (esta informação é subsidiária, obviamente não têm de saber isto...), $\hbar\omega = E$ são os seus valores próprios.

c) Mostre que o Lagrangeano é simétrico para o grupo U(1), i.e. para transformações da forma

$$\psi \to \psi_\lambda = e^{i\lambda}\psi.$$

Como vimos nas aulas teóricas, uma teoria de campo é simétrica para uma determinada transformação contínua caso $\partial_\lambda \mathcal{L}|_{\lambda=0} = 0$ sob o efeito da transformação

$$\psi \to \psi_\lambda.$$

Neste caso, este cálculo nem sequer é necessário, pois basta observar

$$\mathcal{L}(\psi_\lambda, \psi_\lambda^*, \partial_x^2\psi_\lambda) = \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_x^2\psi)$$

d) Como $\psi(x,t)$ é um número complexo, podemos escrevê-lo na forma de Moivre,

$$\psi(x,t) = A(x,t)e^{-iS(x,t)/\hbar}.$$

Mostre que, no limite clássico, $\hbar \to 0$, $S(x,t)$ satisfaz a equação de Hamilton−Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V = 0.$$

Compare a forma geral da equação de Hamilton−Jacobi $\dot{S} + H = 0$ com a equação de Schrödinger para concluir que, em mecânica quântica, $p \to i\hbar\partial_x$, ou seja, que o momento linear passa a ser um operador.

O cálculo é muito simples, mas requer alguma paciência. Façamos termo a termo

- $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\dfrac{\partial A}{\partial t}e^{-iS/\hbar} - \dfrac{i}{\hbar}A\dfrac{\partial S}{\partial t}\right]e^{-iS/\hbar}.$
- $\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left[\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \dfrac{i}{\hbar}A\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \dfrac{2i}{\hbar}\dfrac{\partial A}{\partial x}\dfrac{\partial S}{\partial x} - \dfrac{1}{\hbar^2}A\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right]e^{-iS/\hbar}$

Assim, a equação do movimento vem

$$i\hbar\frac{\partial A}{\partial t} - A\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{i\hbar}{2m}A\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\hbar i}{m}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2m}A\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + VA.$$

A parte real da equação fornece

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V = 0.$$

No limite clássico, $\hbar \to 0$, obtemos o resultado pretendido. Isto demonstra que, na verdade, o formalismo de Hamilton-Jacobi corresponde ao limite clássico da equação de

Schödinger, mostrando que este é o percursor da mecânica quântica. Agora podemos dar um significado mais interessante à função $S(x,t)$: corresponde à fase da função de onda $\psi(x,t)$. Além disto, isto mostra que $H$ é o operador que actua sobre $\psi(x,t)$.

⋆⋆ **Problema 4. Teorema de Noether.** Considere um determinado fenómeno físico descrito por um **campo real** $\varphi(x^\mu)$ no espaço-tempo de Minkowskii ($g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$), cujo Lagrangeano é do tipo

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi),$$

onde $V(\varphi)$ é um potencial e

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right), \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right).$$

a) Demonstre o teorema de Noether, i.e. que caso a teoria seja simétrica para uma transformação contínua $\varphi \to \varphi_\lambda$, então existe uma corrente conservada dada por

$$j^\mu = \partial^\mu\varphi \left.\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

Se a teoria for simétrica para a transformação $\varphi \to \varphi_\lambda$, então

$$\left.\frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0,$$

onde $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}(\varphi_\lambda, \partial\varphi_\lambda)$. Aplicando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial\lambda} &= \frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial\varphi_\lambda}\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial(\partial_\mu\varphi_\lambda)}\frac{\partial(\partial_\mu\varphi_\lambda)}{\partial\lambda} \\
0 &= \frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial\varphi_\lambda}\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial(\partial_\mu\varphi_\lambda)}\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda}\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial(\partial_\mu\varphi_\lambda)}\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial(\partial_\mu\varphi_\lambda)}\frac{\partial(\partial_\mu\varphi_\lambda)}{\partial\lambda} \\
0 &= \left(\cancel{\frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial\varphi_\lambda} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial(\partial_\mu\varphi_\lambda)}}\right)\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda} + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial(\partial_\mu\varphi_\lambda)}\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda}\right) \quad \Longrightarrow \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_\lambda}{\partial(\partial_\mu\varphi_\lambda)}\left.\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}\right) = 0
\end{aligned}$$

b) Considere a transformação $\varphi \to \varphi_\lambda = \varphi + \lambda f$, onde $f(x^\mu)$ é um campo real arbitrário. Que condições $V(\varphi)$ deve satisfazer por forma à teoria ser simétrica para esta transformação? Determine a corrente de Noether correspondente.

Para a teoria ser simétrica para esta transformação, basta requerer que o termo do potencial o seja simétrico, pois os termos cinéticos são-no imediatamente. Assim,

$$\left.\frac{\partial V_\lambda}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{\partial V_\lambda}{\partial\varphi_\lambda}\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} = \frac{\partial V}{\partial\varphi}f = 0.$$

Como $f$ é arbitrário, a teoria é simetrica se $\partial_\varphi V = 0$, i.e. se $V =$ constante. A corrente que se conserva neste caso é

$$j^\mu = \partial^\mu \varphi f.$$

c) Observe que a equação do movimento se escreve na forma

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Observamos, mais uma vez, que a corrente se conserva se $V =$ constante. Para que família de simetrias esta corrente $j^\mu$ é uma corrente de Noether?

A corrente que participa na equação do movimento é

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \varphi.$$

Isto corresponderá a uma corrente de Noether se

$$\delta\varphi = \left.\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = 1.$$

Uma transformação possível é **transformação identidade** $\varphi \to \varphi_\lambda = \lambda$, em que $\lambda$ é um campo. Na verdade, qualquer transformação $\varphi_\lambda = f(\lambda)$ com $f'(0) = 1$ satisfaz esta condição.

d) Mostre que o tensor de energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \mathcal{L} g^{\mu\nu}.$$

Como vimos, a identidade de Beltrami para campos diz-nos que, caso o Lagrangeano não dependa explicitamente do espaco-tempo (i.e. $\partial_\mu \mathcal{L} = 0$), então existe conservação do tensor energia-momento $T^\mu_\nu$,

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0, \quad \text{onde} \quad T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu = \partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu.$$

Usando a métrica para subir o índice $\nu$,

$$T^{\mu\nu} = g^{\nu\alpha} T^\mu_\alpha = g^{\nu\alpha}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\alpha \varphi - \mathcal{L}\delta^\mu_\alpha\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \mathcal{L} g^{\mu\nu}.$$

Para o cado da métrica de Minkowskii, os termos dos tensore $T^\mu_\nu$ e $T^{\mu\nu}$ diferem apenas de sinais. No caso de uma teoria de campo no espaço euclidiano, não haverá qualquer diferença ($g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$).

$\star\star$ **Problema 6. Higgs sem Goldstone.** Consideremos a teoria de campo real do problema anterior, com o potencial

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}a\varphi^2 + \frac{1}{4}b\varphi^4, \quad b > 0.$$

a) Primeiramente, considere $a < 0$. Mostre que o valor esperado do campo não quebra a simetria discreta $\mathbb{Z}_2$, i.e. $\varphi \to -\varphi$.

> O Lagrangeano do sistema é
>
> $$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}|a|\varphi^2 - \frac{1}{4}b\varphi^4.$$
>
> Rapidamente, podemos observar que $\mathcal{L}$ possui simetria $\mathbb{Z}_2$. O valor esperado do campo (i.e. o ponto de equilíbrio) corresponde a
>
> $$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right|_0 = 0 \Leftrightarrow \varphi_0\left(|a| + b\varphi_0^2\right) = 0 \Longrightarrow \varphi_0 = 0.$$
>
> Esta solução também possui simetria $\mathbb{Z}_2$: não há quebra espontânea de simetria.

b) Considere agora o caso $a > 0$. Determine as soluções constantes possíveis e mostre que estas quebram a simetria discreta $\mathbb{Z}_2$.

> $$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right|_0 = 0 \Leftrightarrow \varphi_0\left(a - b\varphi_0^2\right) = 0 \Longrightarrow \varphi_0 = 0 \vee \varphi_0 = \pm\sqrt{a/b}.$$
>
> A solução $\varphi_0 = 0$ preserva a simetria; contudo, esta é violada para as soluções $\psi_0 = \pm\sqrt{a/b}$. Neste caso, há quebra espontânea da simetria discreta $\mathbb{Z}_2$.

c) Linearize o Lagrangeano em torno dos pontos de equilíbrio de menor simetria. Observe a emergência de um campo com massa (modo de Higgs).

> A linearização em torno das soluções de equilíbrio de menor simetria, $\varphi_\pm = \pm\sqrt{a/b}$, pode ser feita recorrendo à prescrição
>
> $$\varphi = \varphi_\pm + \xi.$$
>
> Substituindo no Lagrangeano, temos
>
> $$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ &= \partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \frac{1}{2}a(\varphi_+ + \xi)^2 - \frac{1}{4}b\left(\varphi_+ + \xi\right)^4 \\ &= \partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - a\xi^2 + \frac{a^2}{4b} + \mathcal{O}(\xi^3). \end{aligned}$$
>
> Da mesma forma,
>
> $$\begin{aligned} \mathcal{L}_- &= \partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \frac{1}{2}a(\varphi_- + \xi)^2 - \frac{1}{4}b\left(\varphi_- + \xi\right)^4 \\ &= \partial_\mu\xi\partial^\mu\xi - a\xi^2 + \frac{a^2}{4b} + \mathcal{O}(\xi^3), \end{aligned}$$

o que mostra que o Lagrangeano não perdeu simetria apesar das soluções de equilíbrio (ou o *valor de expectação no vácuo*) sim. Comparando o Lagrangeano linearizado com o Lagrangeano de Klein-Gordon, vemos que $a = m^2c^2/2\hbar^2$, pelo que

$$m_\xi = \frac{\hbar}{c}\sqrt{2a} = \frac{\hbar}{c}\sqrt{2b}\varphi_+.$$

O valor de expectação não nulo para do campo, adquirido por quebra espontânea de simetria, atribui massa ao novo campo $\xi$. O campo $\xi$ recebe o nome de *modo de Higgs* (pela semelhança com o formalismo das pequenas oscilações).

d) Explique porque é que a quebra espontânea de simetria não resulta na emergência de um campo de massa nula (modo de Goldstone).

A simetria quebrada neste caso, $\mathbb{Z}_2$, é uma simetria discreta. O teorema de Goldstone assegura que, por cada simetria contínua que se quebra, emerge um campo de massa nula (modo de Goldstone).

e) Repita o procedimento da alínea c) para o caso de uma teoria de campo complexa,

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial\psi, \partial\psi^*) = \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^* + \frac{1}{2}a|\psi|^2 - \frac{1}{4}b|\psi|^4.$$

Mostre que, neste caso, existe um modo de Goldstone. Qual a simetria que se quebra?

Comecemos por determinar os valores de expectação no vácuo (pontos de equilíbrio). Parametrizando o campo na forma $\psi = \rho e^{i\theta}$, o Lagrangeano escreve-se

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \rho^2\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + \frac{1}{2}a\rho^2 - \frac{1}{4}b\rho^4.$$

Antes de avançarmos, observamos que o potencial de chapéu mexicano surge como uma espécie de "potencial central" que apenas depende do campo radial $\rho$. O Lagrangeano não depende explicitamente de $\theta$, e desta simetria há-de resultar uma corrente de Noether conservada. Ora, como os termos de massa só aparecem devido a potenciais, fica claro porque é que um modo de Goldstone associado a $\theta$ é de se esperar aqui.
O Lagrangeano é invariante para a transformação $\theta \to \theta + \alpha$, o que reflecte a simetria para o grupo $U(1)$

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \quad \psi^* \to e^{-i\alpha}\psi^*.$$

Os pontos de equilíbrio são

$$\rho_0 = 0 \wedge \theta_0 = \alpha \quad \vee \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a}{b}} \wedge \theta_0 = \alpha,$$

onde $\alpha$ é um valor constante. Linearizando em torno do segundo ponto,

$$\rho = \rho_0 + \xi, \quad \theta = \alpha + \delta$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \rho_0^2\partial_\mu\delta\partial^\mu\delta + \frac{1}{2}a(\rho_0+\xi)^2 - \frac{1}{4}b(\rho_0+\xi)^4 \\ &= \partial_\mu\xi\partial^\mu\xi + \rho_0^2\partial_\mu\delta\partial^\mu\delta - a\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3).\end{aligned}$$

Para além do campo $\xi$ com massa $m \propto \sqrt{a}$ (modo de Higgs), existe também a emergência de um campo de massa nula $\delta$ (modo de Goldstone). Neste caso, a simetria que se quebra é a simetria $U(1)$, que é uma simetria contínua. Observe que, caso linearizasse o Lagrangeano na vizinhança do ponto $\rho_0 = 0$ (modo de máxima simetria), o modo de Goldstone não figuraria na teoria.

f) Mostre que a corrente de Noether associada à simetria $U(1)$ se mantém conservada apesar da quebra espontânea de simetria. Ou seja, mostre que a conservação da corrente de Noether é consequência da simetria do Lagrangeano, e não da das soluções.

A corrente de Noether associada à invariância para a transformação $\psi \to \psi_\lambda = e^{i\lambda}\psi$ é obtida calculando a transformação infinitesimal correspondente

$$\delta\psi = \left.\frac{\partial\psi_\lambda}{\partial\psi_\lambda}\right|_{\lambda=0} = i\psi,$$

e, portanto, $\delta\psi^* = -i\psi^*$. Assim,

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)}\delta\psi^* = i\left(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*\right) = 2\rho^2\partial^\mu\theta.$$

$$\partial_\mu j^\mu = 2\partial_\mu\left(\rho^2\partial^\mu\theta\right).$$

Nem precisamos de fazer contas. A corrente $j^\mu$ tem muitas semelhanças com o momento angular, que sabemos que é conservado no problema do potencial central. Para tirar as dúvidas, vamos à equação do movimento para $\theta$

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\theta)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \partial_\mu\left(\rho^2\partial^\mu\theta\right) = 0 = \frac{1}{2}\partial_\mu j^\mu.$$

Ou seja, a quebra espontânea de simetria que ocorre nos estados $\psi$ e $\psi^*$ em nada afecta a conservação da corrente de Noether. Isso tem simplesmente a ver com o facto desta última decorrer apenas da simetria do Lagrangeano. Fica claro que a quebra espontânea de simetria é uma propriedade que diz respeito às soluções dos campos apenas.

⋆⋆⋆ **Problema 7. A massa do fotão?** Considere o Lagrangeano de Proca, introduzido para descrever situações onde o fotão (descrito pelo campo vectorial real $A_\mu$) adquire uma massa

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m_A^2c^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu.$$

a) Mostre que o Lagrangeano de Proca não é invariante para a transformação de padrão $A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$, onde $\Lambda(x^\mu)$ é uma função escalar.

É imediato verificar que o termo de “energia cinética" é invariante para a transformação de padrão (ou de *gauge*)

$$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = (\partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu)(\partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu) = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A\nu - \partial^\nu A^\mu) = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Quando ao segundo termo,

$$\tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu = A_\mu A^\mu + \partial_\mu \Lambda A^\mu + \partial^\mu \Lambda A_\mu \neq A_\mu A^\mu.$$

O segundo termo (termo de massa) **viola a invariância de padrão**. Há uma quebra **explícita** dessa simetria. É esta a razão pela qual os fotões não têm massa!

b) Contudo, é sabido que os fotões adquirem massa quando se propagam em alguns meios (por exemplo, num plasma ou num supercondutor). Essa massa aparece devido ao mecanismo de Higgs. Para percebermos como funciona, introduzimos um campo complexo $\psi$ (por exemplo, de electrão) que entra no Lagrangeano da seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* - V(|\psi|).$$

Mostre que esta teoria é invariante para a transformação de padrão global $\psi \to \tilde{\psi} = e^{i\lambda}\psi$, onde $\lambda$ é uma constante.

É uma observação imediata:

$$\partial_\mu \tilde{\psi} \partial^\mu \tilde{\psi}^* - V(|\tilde{\psi}|) = \partial_\mu \psi e^{i\lambda} \partial^\mu \psi^* e^{-i\lambda} - V(|\psi e^{i\lambda}|) = \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi^* - V(|\psi|)$$

c) Considere agora a transformação de padrão local $\psi \to \tilde{\psi} = e^{ig\alpha}$, onde $\alpha(x^\mu)$ é uma função que varia no espaço-tempo. Verifique que a teoria é invariante para esta transformação através do acoplamento mínimo,

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu, \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha.$$

Uma vez que os termos $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e $V(|\psi|)$ são invariantes para transformações de padrão no campo, só precisamos de preocupar com o termos cinético,

$$\partial_\mu \tilde{\psi} = (\partial_\mu \psi + ig\psi \partial_\mu \alpha)\, e^{ig\alpha} = (D_\mu \psi) e^{ig\alpha}$$
$$\partial^\mu \tilde{\psi}^* = (\partial^\mu \psi - ig\psi \partial^\mu \alpha)\, e^{-ig\alpha} = (D^\mu \psi^*) e^{-ig\alpha}.$$

Ou seja, para em termos da derivada de gauge $D_\mu = \partial_\mu + ig\partial_\mu \alpha$ a teoria fica invariante. Como $A_\mu$ é invariante para transformações de gauge do tipo $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$, absorvemos $\partial_\mu \alpha$ na definição do campo de gauge

$$\partial_\mu \alpha = A_\mu.$$

d) Considere agora o Lagrangeano que é invariante para todas as transformações padrão (e também invariante de Lorentz)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + D_\mu \psi D^\mu \psi^* + \frac{1}{2} a|\psi|^2 - \frac{1}{4} b|\psi|^4.$$

Mostre que, como consequência do mecanismo de Higgs, o fotão pode adquirir uma massa de forma a preservar a invariância de gauge, e que a sua massa é

$$m_A \propto g\rho_0.$$

Como o potencial do chapéu mexicano é um potencial central, fazemos a decomposição de Moivre, $\psi = \rho e^{i\theta}$, onde os campos $\rho$ e $\theta$ são reais,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho - \rho^2 \left(\partial_\mu \theta + igA_\mu\right)\left(\partial^\mu \theta - igA^\mu\right) + \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4} b\rho^4.$$

Os pontos de equilíbrio do potencial $\partial_\rho V = 0$ e $\partial_\theta V = 0$ fornecem duas soluções

$$\rho_0 = 0 \wedge \theta = \theta_0 \quad \vee \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a}{b}} \wedge \theta = \theta_0.$$

O primeiro ponto (ponto de equilíbrio instável) não quebra a simetria contínua $U(1)$, ao passo que o segundo sim. Usando a prescrição para as pequenas oscilações,

$$\rho = \rho_0 + \xi, \quad \theta = \theta_0 + \vartheta,$$

temos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \rho_0^2 g^2 B_\mu B^\mu - a\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^3),$$

onde $B_\mu = A_\mu - ig^{-1}\partial_\mu \vartheta$ e $G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Observamos que o campo $\vartheta$ sem massa (campo de Goldstone) é absorvido pelo campo electromagnético. Por outro lado, o fotão (i.e. o novo campo electromagnético $B_\mu$) adquire uma massa

$$m_A \propto g\rho_0.$$

Esta massa é adquirida de forma dinâmica, i.e. através do acoplamento entre o fotão e o campo de matéria, sendo proporcional ao acoplamento $g$.

$\star\star\star$. **Solitões em teoria de campo.** Em teoria de campo (nas suas versões clássicas e quântica), a quantidade $\psi$ representa o campo escalar, i.e. uma partícula simples de spin total nulo. Solitões, que originalmente foram observados no contexto de mecânica dos fluidos, são ondas não lineares que se comportam como partículas. Recebem este nome justamente por serem ondas "solitárias", i.e. por verem a sua forma inalterada durante a propagação ou mesmo após interagirem entre si ou com obstáculos exteriores.

Vamos começar por considerar a teoria de campo mais geral num espaço $1+1-$dimensional (i.e. uma dimensão temporal e uma dimensão espacial). Em relatividade restrita, o espaço-tempo é de Minkowskii e, portanto, a métrica é tem a forma $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1)$. A densidade lagrangeana neste caso tem a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - V(\psi).$$

a) Use a equação de Euler-Lagrange para obter a famosa equação de Klein-Gordon,

$$\Box \phi + V'(\psi) = 0,$$

onde $V'(\psi) = dV/d\psi$.

b) Restringimos, agora, a discussão a soluções que não alteram a sua forma, i.e. independentes do tempo ($\partial_t \psi = 0$). Neste caso, a Eq. de Klein-Gordon reduz-se à equação de Helmholtz generalizada, $\nabla^2 \psi - V'(\phi) = 0$. Use o resultado da alínea anterior para demonstrar que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - V(\psi) = \text{const.}$$

Isto permite converter a Eq. de Klein-Gordon numa equação de primeira ordem.

c) Para avançarmos, temos de relacionar o valor da constante com uma quantidade física que possamos controlar. Para tal, definimos a energia como $E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\, dx$. Mostre que, para condições fronteira apropriadas, podemos identificar

$$E = \text{const.} \tag{1}$$

d) Resolva a equação de primeira ordem que obteve para encontrar

$$x - x_0 = \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{\sqrt{2V(\psi)}}$$

e) Falta agora concretizar a forma do potencial. Relembre que para obter a propriedade em (1) tivémos de assumir que o potencial se anularia em $x \to \pm\infty$. Um potencial que é compatível com esta condição fronteira é o aclamado *potencial do chapéu mexicano*, utilizado para descrever a quebra espontânea de simetria que conduz ao aparecimento do bosão de Higgs,

$$V(\psi) = \frac{\lambda}{4!}\left(\psi^2 - \psi_0^2\right)^2,$$

onde $\psi_0$ é o chamado valor de expectação do vácuo. Insira este potencial na equação que obteve na alínea anterior para determinar a solução de *solitão*

$$\psi(x) = \pm\psi_0 \tanh\left(\frac{\alpha}{2}(x - x_0)\right),$$

onde $\alpha = 2\sqrt{3/(\lambda\psi_0^2)}$. Represente graficamente $|\psi(x)|^2$ e observe que o solitão é uma solução localizada no espaço. Poderíamos aproveitar para verificar que o solitão é invariante para transformações do tipo $x \to (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (transformação de Lorentz), o que demonstra que, de facto, se comporta como uma onda que não altera a sua forma durante a propagação. Como veremos adiante em disciplinas mais especificas, este último facto deve-se à compensação entre a dispersão e a não-linearidade do potencial. [2]

[2]Para uma derivação detalhada deste resultado, podem aceder ao seguinte endereço electrónico https://www.youtube.com/watch?v=pxm4ZbqaA4Y.