TÉCNICO LISBOA

Proposta de Resolução do **2º Teste de Eletromagnetismo**
MEFT
Prof. Pedro Abreu
28 de junho de 2019

Versão: 1{2} **Duração do Teste: 1h 30m** $\varepsilon_0 = 8{,}854\mathrm{x}10^{-12}$ F/m, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ N/A^2

Por determinação do Conselho Pedagógico, informamos que só serão cotadas as respostas que contribuam de forma significativa para os resultados ou demonstrações pedidos.

(4,0) **4)** Um cilindro infinito de raio $a = 0{,}1\{0{,}2\}$ m tem uma magnetização permanente paralela ao eixo, $\vec{M} = kr\,\vec{e}_z$, sendo $k = 10^{4\{5\}}$ A/m^2 e r a distância ao eixo do cilindro. Não há corrente de condução em lado nenhum.

[1,0] **a)** Calcule o campo magnético em todo o espaço;
[R: *Como não há corrente de condução em lado nenhum,* $\vec{H} = 0$ *em todo o espaço. Temos então* $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\vec{M} = 4\pi \times 10^{-3\{-2\}}\, r\vec{e}_z(\mathrm{T})$ *para* $0 \le r < 0{,}1\{0{,}2\}$ m *e* $\vec{B} = 0$ *para* $r > 0{,}1\{0{,}2\}$ m*, pois fora do cilindro* $\vec{M} = 0$*. Note-se que não existe campo magnético em* $r = 0{,}1\{0{,}2\}$ m *pois é descontínuo.*]

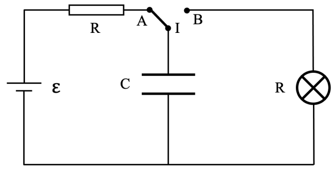
[1,0] **b)** Calcule as densidades de corrente de magnetização em todo o espaço;
[R: *Estas densidades podem-se obter de* $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$*, para as densidades de corrente de magnetização em volume, e* $\vec{K}_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$*, para as densidades de corrente de magnetização em superfície. Dentro do cilindro temos então*
$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} = -\frac{\partial M_z}{\partial r}\vec{e}_\varphi = -\frac{\partial(kr)}{\partial r}\vec{e}_\varphi = -k\vec{e}_\varphi = -10^{4\{5\}}\vec{e}_\varphi$ (A/m^2) *; na fronteira, temos*
$\vec{K}_M = \vec{M}(R) \times \vec{n}_{ext} = kR\vec{e}_z \times \vec{e}_r = kR\vec{e}_\varphi = 10^{4\{5\}} \cdot 0{,}1\{0{,}2\}\vec{e}_\varphi$ (A/m) $= 1\{20\}\vec{e}_\varphi$(kA/m)*; e fora temos* $\vec{J}_M = 0$ *e* $\vec{K}_M = 0$ *pois* $\vec{M} = 0$.]

[2,0] **c)** Suponha agora que a envolver o cilindro tem uma espira circular de raio $b = 0{,}5\{0{,}4\}$ m e de resistência elétrica $R = 100\{10\}\,\Omega$, centrada no eixo do cilindro e com o plano da espira perpedicular ao eixo do mesmo, e que a magnetização desce até zero a uma taxa constante (demorando $100\{10\}$s a chegar a zero). Calcule a corrente induzida na espira durante este tempo (desprezando a auto-indução da espira). [Apenas se não resolveu as alíneas anteriores, considere o campo magnético no cilindro como sendo dado pela expressão $\vec{B} = 10^{-6\{-5\}}\, r\,\vec{e}_z$ (T)]
[R: *Para calcular a corrente induzida na espira, temos de calcular a variação no tempo do fluxo do campo magnético através da espira. A corrente* $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R}\left(-\frac{d\Phi}{dt}\right)$*. O sinal menos é útil para nos indicar o sentido da corrente na espira. Diminuindo o fluxo do campo magnético (pois a magnetização desce até zero), vai ser criada uma corrente induzida na espira segundo* $\vec{e}_\varphi$*, para contrariar essa diminuição de fluxo. Assim,*

$$I = \frac{1}{R}\left(\left|\frac{d\Phi}{dt}\right|\right) = \frac{1}{R}\left|\frac{d}{dt}\left(\iint \vec{B} \cdot \vec{n}dS\right)\right| = \frac{1}{R}\frac{\Phi_{\text{inicial}} - \Phi_{\text{final}}}{\Delta t} = \frac{1}{R\Delta t}\Phi_{\text{inicial}} = \frac{\mu_0}{R\Delta t}\iint \vec{M} \cdot \vec{n}dS, \text{ ou}$$

$$I = \frac{\mu_0}{R\Delta t}\int_0^{2\pi}\int_0^a M(r) \cdot rdrd\varphi = \frac{\mu_0}{R\Delta t}2\pi\int_0^a 10^{4\{5\}}r^2dr = \frac{2\pi\mu_0}{R\Delta t}10^{4\{5\}}\frac{a^3}{3} = 2{,}63\{21055\}\text{ nA} .$$]

[2,0] **5)** Um flash, por ex. de uma máquina fotográfica, pode ser muito simplesmente modelado por dois circuitos ligados ao mesmo condensador C (figura à direita), carregando o mesmo quando o interruptor está em A, e disparando o flash (lâmpada ⊗ de resistência R_L) quando se muda o interruptor para a posição B.



Calcule a capacidade do condensador C e a resistência R do lado esquerdo do circuito, assumindo que a corrente máxima na lâmpada é 1000{2000} A, que a força eletromotriz é $\varepsilon = 400\{500\}\,V$, e que a duração do flash tem de ser em média 1s/125{60} = 8{16,7} ms, pretendendo-se um tempo da ordem de 5{4} s para "carregar o flash".

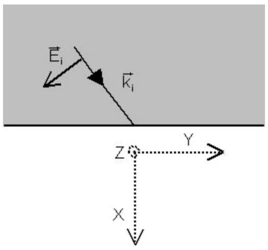
[R: *Quando se "dispara" o flash, o condensador fica ligado à lâmpada do flash, com resistência elétrica* R_L. *Estando o condensador carregado, terá a tensão elétrica da bateria com força eletromotriz* ε. *Para a corrente máxima na lâmpada ser* $1000\{2000\}$ A, *a resistência* $R_L = \frac{V_C}{I} = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{400\{500\}}{1000\{2000\}} = 0{,}4\{0{,}25\}\,\Omega$. *Para o tempo de duração do flash ser* Δt, *que assumimos ser o tempo de "descarga", isto é, o tempo para que a carga do condensador baixe na razão* $1/e$, *temos de ter* $\Delta t = R_L C \Leftrightarrow C = \frac{\Delta t}{R_L} = \frac{0{,}008\{0{,}0167\}}{0{,}4\{0{,}25\}} = 20\{66{,}7\}$ mF.

Para a resistência do lado esquerdo, conhecida a capacidade do condensador, usamos o tempo de carga, assumido como o valor que separa do máximo em $1/e$, *temos* $\Delta t_{carga} = 5\{4\}\,\mathrm{s} = RC \Leftrightarrow$
$R = \frac{\Delta t_{carga}}{C} = \frac{5\{4\}}{0{,}02\{0{,}0667\}} = 250\{60\}\,\Omega$.]

(4,0) **6)** Uma onda eletromagnética propaga-se num meio com permeabilidade magnética μ=μ0 e constante dielétrica ε_0, sendo o campo elétrico (unidades em V/m) em função do tempo e do espaço dado pelas expressões (no sistema de eixos da figura)

$$\begin{cases} E_x = 78{,}78\{39{,}4\}\cos(\omega t - (0{,}2182\{0{,}1818\}x + 1{,}2375\{1{,}0313\}y)\times 10^7)\ \text{(V/m)} \\ E_y = 13{,}89\{6{,}95\}\cos(\omega t - (0{,}2182\{0{,}1818\}x + 1{,}2375\{1{,}0313\}y)\times 10^7 + \pi)\ \text{(V/m)} \\ E_z = 60\{30\}\cos(\omega t - (0{,}2182\{0{,}1818\}x + 1{,}2375\{1{,}0313\}y)\times 10^7)\ \text{(V/m)} \end{cases}$$

[1,0] **a)** Calcule o vetor de onda (k_x, k_y, k_z,)$_i$, a velocidade de propagação da onda e o índice de refração n_1 do meio onde a onda se propaga, o comprimento de onda e a frequência angular ω desta onda.



[R: *Como o meio 1 tem constante dielétrica* ε_0, *a onda propaga-se com veloc.* $c = 299792458$ m/s *e o índice de refração é* $n_1 = 1$. *O vetor de onda vem da expressão da fase da onda (dentro do cos),* $\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$, *pelo que* $\vec{k}_i = \left(0{,}2182\{0{,}1818\}\vec{e}_x + 1{,}2375\{1{,}0313\}\vec{e}_y\right)\times 10^7\ (\text{m}^{-1})$, *tendo módulo* $k_i = 1{,}257\{1{,}0472\}\times 10^7\ \text{m}^{-1}$. *A frequência angular é* $\omega = ck_i = 3{,}77\{\pi\}\times 10^{15}\ \text{s}^{-1}$ *e o comprimento de onda é* $\lambda_i = 2\pi/k_i = 500\{600\}$ nm.]

[1,0] **b)** Calcule o vetor de Poynting e a intensidade para esta onda.

[R: *O vetor de Poynting tem direção e sentido igual a* $\vec{e}_k = 0{,}1736\vec{e}_x + 0{,}9848\vec{e}_y$ (m).
O módulo do vetor de Poynting é, em W/m^2,
$\left|\vec{\Sigma}\right| = n_1 c\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(3{,}77\{\pi\}\times 10^{15} - (0{,}2182\{0{,}1818\}x + 1{,}2375\{1{,}0313\}y)\times 10^7) \Leftrightarrow$.
$\left|\vec{\Sigma}\right| = 26{,}6\{6{,}64\}\cos^2(3{,}77\{\pi\}\times 10^{15} - (0{,}2182\{0{,}1818\}x + 1{,}2375\{1{,}0313\}y)\times 10^7)$
e a intensidade é $I_i = \langle\left|\vec{\Sigma}_i\right|\rangle = 26{,}6\{6{,}64\}\langle\cos^2(\dots)\rangle = 26{,}6\{6{,}64\}\cdot\frac{1}{2} = 13{,}281\{3{,}32\}$ W/m^2.]

(2,0) **c)** Suponha que esta onda atinge a superfície de separação para um meio 2 com índice de refração $n_2 \cong 2$, no ponto $X = Y = Z = 0$ (origem dos eixos) e no instante $t = 0$ s, sendo a superfície de separação o plano YZ (ver figura).

[0,3] i) Calcule o ângulo de incidência da onda nessa superfície;

[R: *No sistema de referência fornecido, o ângulo de incidência é* $\theta_i = \arctan\frac{k_{iy}}{k_{ix}} = 80°\{80°\}$.]

[0,5] ii) Calcule, se existirem, o ângulo de reflexão total e o ângulo de Brewster (ou de polarização);

[R: *O índice de refração do 2º meio é* $n_2 = 2 > n_1$, *pelo que não existe ângulo de reflexão total. O ângulo de Brewster é* $\theta_{iB} = \arctan\frac{n_2}{n_1} = 63{,}44°\{63{,}44°\}$.]

[1,2] iii) Existe onda transmitida e/ou refletida? Para o(s) caso(s) em que exista, determine o(s) respectivo ângulo(s) de propagação (ângulo de refração ou ângulo de reflexão), o(s) vetor(es) de onda (k_x, k_y, k_z,), e a(s) intensidade(s) para essa(s) onda(s).

[R: *Existe onda refletida, porque* $E_{i\perp} \neq 0$. *Existe onda transmitida porque* $n_2 > n_1$. *O ângulo de reflexão é* $\theta_r = \theta_i = 80°\{80°\}$*; o ângulo de refração é* $\theta_t = \text{arcsen}\left(\frac{n_1}{n_2}\text{sen}\,\theta_i\right) = 29{,}5°\{29{,}5°\}$.
Os vetores de onda são $\vec{k}_r = \left(-0{,}2182\{-0{,}1818\}\vec{e}_x + 1{,}2375\{1{,}0313\}\vec{e}_y\right)\times 10^7(\text{m}^{-1})$ *e com* $k_t = \frac{\omega}{v} = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\times 3{,}77\{\pi\}\times 10^{15}}{c} = 2{,}514\{2{,}094\}\times 10^7\text{m}^{-1}$,
$\vec{k}_t = k_t\left(\cos 29{,}5°\,\vec{e}_x + \text{sen}\,29{,}5°\,\vec{e}_y\right) = 2{,}188\vec{e}_x + 1{,}238\vec{e}_y\{1{,}822\vec{e}_x + 1{,}031\vec{e}_y\}(\times 10^7\text{m}^{-1})$.
Tendo em conta a polarização linear (componentes em fase), temos as intensidades
$I_{r(t)} = \langle\left|\vec{\Sigma}_{r(t)}\right|\rangle = \frac{1}{2}n_{1(2)}c\varepsilon_0 E_{0r(t)}^2$, *com* $E_{0r(t)}^2 = r_\parallel^2(t_\parallel^2)E_{0i\parallel}^2 + r_\perp^2(t_\perp^2)E_{0i\perp}^2$. *Os coeficientes são*
$r_\parallel^2 = \left(\frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}\right)^2 = 0{,}185\{0{,}185\}$, $r_\perp^2 = \left(-\frac{\text{sen}(\theta_i-\theta_t)}{\text{sen}(\theta_i+\theta_t)}\right)^2 = 0{,}670\{0{,}670\}$,
$t_\parallel^2 = \left(\frac{2\,\text{sen}\,\theta_t\cos\theta_i}{\text{sen}(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}\right)^2 = 0{,}0814\{0{,}0814\}$, $t_\perp^2 = \left(\frac{2\,\text{sen}\,\theta_t\cos\theta_i}{\text{sen}(\theta_i+\theta_t)}\right)^2 = 0{,}0329\{0{,}0329\}$,
e as intensidades são, respetivamente para a onda refletida e para a onda transmitida,
$I_r = \frac{1}{2}c\varepsilon_0[0{,}185\cdot 80^2\{40^2\} + 0{,}670\cdot 60^2\{30^2\}] = 4{,}772\{1{,}193\}$ W/m^2 *e,*
$I_t = \frac{1}{2}2c\varepsilon_0[0{,}0814\cdot 80^2\{40^2\} + 0{,}0329\cdot 60^2\{30^2\}] = 1{,}698\{0{,}424\}$ W/m^2.]