Data: 16 de Janeiro de 2015
Duração: 1 hora e 30 minutos / 3 horas
Professores responsáveis: Vasco Guerra e Carlos Santos Silva

TERMODINÂMICA E ESTRUTURA DA MATÉRIA
2º Teste / 1º Exame

1^o exame: grupos 1 a 7
2^o teste: grupos 4 a 7

Justifique cuidadosamente as suas respostas e apresente detalhadamente todos os cálculos que efectuar.

1. (3.5 val) Um motor térmico opera entre duas fontes de calor a temperaturas T_1 e $T_2 < T_1$, onde um gás recebe calor Q_1 da fonte à temperatura T_1 e rejeita Q_2 para a fonte à temperatura T_2. Não assuma reversibilidade.
   (a) (0.5 val) Determine a variação de entropia do gás ao fim de um ciclo, ΔS_g, em função de Q_1, Q_2, T_1 e T_2.
   (b) (1 val) Determine a variação de entropia do universo ao fim de um ciclo, ΔS_U, em função de Q_1, Q_2, T_1 e T_2.
   (c) (1 val) Obtenha o rendimento do motor em termos de ΔS_U, Q_1, T_1 e T_2.
   (d) (1 val) Comente o resultado.
2. (3.5 val) Um cilindro vertical contém 500 moles de um gás ideal monoatómico e é fechado pr um pistão de massa $m = 50$ kg e área $A = 100$ cm^2. O sistema está termicamente isolado durante o processo que se descreve de seguida. Inicialmente o pistão está preso e ocupa um volume $V_0 = 1$ m^3 e está à temperatura $T_0 = 300$ K. O pistão é então solto e acaba por chegar a uma posição de equilíbrio ocupando um volume $V_1 > V_0$. Negligencie quaisquer forças de atrito que possam impedir o pistão de deslizar livremente ao longo do cilindro. Determine:
   (a) (0.5 val) a pressão inicial do gás (em atmosferas);
   (b) (0.5 val) a pressão final do gás (em atmosferas);
   (c) (0.5 val) o trabalho feito pelo gás, em termos da variação de volume do sistema;
   (d) (1.0 val) o volume final do gás;
   (e) (0.5 val) a temperatura final do gás;
   (f) (0.5 val) a variação de entropia.
3. (1 val) Comente a seguinte afirmação: dados dois estados de equilíbrio termodinâmico, podemos sempre encontrar uma transformação irreversível entre esses estados tal que a variação de entropia seja maior do que ao longo de um processo reversível entre esses dois estados.

4. (3.5 val) A entropia de um buraco negro sem carga e sem rotação foi calculada por Stephen Hawking,

$$S = \frac{kc^3 A}{4G\hbar} \ ,$$

onde $A = 4\pi R_S^2$ é a área da superfície do buraco negro, $R_S = 2GM/c^2$ ´o raio do buraco negro de massa M e a energia interna do buraco negro é $E = Mc^2$.

   (a) (1 val) Mostre que a temperatura do buraco negro é dada por

   $$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi \hbar GM} \ .$$

   [Sugestão: comece por substituir M pela expressão em termos da energia!]

   (b) (1 val) Calcule a capacidade calorífica do buraco negro. Quando o buraco negro perde energia, a sua temperatura aumenta, diminui, ou mantém-se constante?

   (c) A grande descoberta de Stephen Hawking é que um buraco negro *radia*, como se fosse um corpo negro à temperatura T. Quando um buraco negro radia, perde massa.

      i. (0.5 val) Escreva a lei de Stefan-Boltzmann e indique o significado de todas as grandezas nela envolvidas.

      ii. (1 val) Use a lei de Stefan-Boltzmann para mostrar que a taxa a que o buraco negro perde massa sob a forma de radiação é dada por

      $$\frac{dM}{dt} = \frac{\sigma \hbar^4 c^6}{256\pi^3 \hbar^4 G^2} \frac{1}{M^2} \ ,$$

      onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann.
      [Sugestão: é mais fácil do que parece. Comece por relacionar uma ou mais das grandezas da alínea anterior com dE/dt]

5. (1 val) Comente a seguinte afirmação:

   Um cilindro encimado por um pistão móvel contém uma mistura de água e vapor a 100 ^{o}C e a 1 atm. Assumindo que o sistema se mantém a uma temperatura fixa em equilíbrio termodinâmico, se se empurrar lentamente o pistão para baixo, a pressão da mistura líquido/gás vai aumentar.

6. (4 val) Água corre através de uma conduta de aço cilíndrica de raio $R_i = 52$ mm, espessura $d = 2$ mm, comprimento $L = 10$ m e condutividade térmica $k_a = 50$ W/m K.

   (a) Sabendo que a temperatura da água é $T_0 = 15$ ^{o}C, a temperatura exterior $T_e = -10$ ^{o}C, o coeficiente de convecção entre a água e as paredes de aço é $h_1 = 30$ kW/m^2 K e o coeficiente de convecção entre o aço e o ar exterior é $h_e = 20$ W/m^2 K, determine:

      i. (1 val) as resistências térmicas relevantes para o problema;

      ii. (0.5 val) o fluxo de calor que a água perde para o exterior;

      iii. (0.5 val) as temperaturas das superfícies interior e exterior da conduta de aço.

      iv. (1 val) Represente tão aproximadamente quanto possível o perfil radial da temperatura.

   (b) (1 val) Para reduzir as perdas coloca-se um material isolante no exterior do cilindro, com raio exterior $R_e = 300$ mm e condutividade térmica $k_e = 0.05$ W/m.K. Determine as perdas de calor por unidade de tempo nesta nova configuração (se precisar, assuma que o coeficiente de convecção entre o material isolante e o ar exterior é o mesmo que entre a conduta e o ar exterior).

7. (3.5 val) Um sistema é constituído por duas partículas que podem distribuir-se por 3 níveis, de energias ε, 3ε e 5ε.

   (a) (1 val) Determine o número de microestados do sistema e a energia de cada um deles, considerando separadamente os casos em que tem bosões e fermiões. Qual o número médio de partículas que espera encontrar em cada nível no limite $T \to 0$?

   (b) Considere agora apenas o caso em que tem um sistema de fermiões.

      i. (1.0 val) Calcule a probabilidade de cada microestado quando o sistema está em contacto com uma fonte de calor à temperatura T.

      ii. (0.5 val) Calcule a energia média do sistema quando está em contacto com uma fonte de calor à temperatura T.

      iii. (0.5 val) Obtenha o limite de altas temperaturas das probabilidades e energia que calculou nas alíneas anteriores. Comente os resultados.

      iv. (0.5 val) Obtenha o limite de baixas temperaturas das probabilidades e energia que calculou anteriormente [Sugestão: identifique o termo dominante na função de partição]. Comente os resultados.

- Constantes e factores de conversão

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} \quad ; \quad R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ J m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$$