

PB6.1 Seja $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ a base ordenada de \mathbb{R}^3 constituída pelos vectores

$$\mathbf{v}_1 = (2, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1).$$

- a) Qual é o vector de \mathbb{R}^3 que na base \mathcal{B} tem coordenadas $(0, 3, 5)$?
- b) Calcule as coordenadas do vector $(2, 0, 1)$ na base \mathcal{B} .
- c) Mediante uma matriz de mudança de base apropriada, calcule as coordenadas de um vector $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ nesta base.

PB6.2 Considere a base ordenada de \mathbb{R}^3 definida por $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ onde

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (1, 7, 7), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 3, 4).$$

- a) Quais as coordenadas do vector $(3, 1, -7)$ na base \mathcal{U} .
- b) Calcule $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que as coordenadas de \mathbf{w} na base \mathcal{U} sejam dadas por $(0, 3, -7)$.
- c) Quais as coordenadas do vector $(3, 1, -7)$ na base $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ formada pelos vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ que satisfazem as igualdades

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2.$$

PB6.3 Considere o seguinte subespaço do espaço dos polinómios de variável real de grau menor ou igual a 3 ,

$$\{p \in \mathcal{P}_3 : p(0) = p(2)\},$$

e as seguintes bases ordenadas deste subespaço

$$\mathcal{B}_1 = \{1, t^2 - 2t, t^3 - 4t\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \{1, t^2 - 2t, t^3 - 2t^2\}.$$

Se um polinómio p tem componentes (a, b, c) na base \mathcal{B}_1 , quais são as suas componentes na base \mathcal{B}_2 ?

PB6.4 Considere a equação no espaço das matrizes simétricas

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usando uma matriz mudança de base, determine α, β, γ em função de a, b, c .