Ondas Sonoras

Até agora, consideramos o escoamento como incompressível. Olhamos brevemente para escoamento compressível em geral. Relembramos a equação da continuidade,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla(\rho \vec{v}) = 0$$

e a equação de Euler, ou melhor a relação de Bernoulli para escoamento potencial,

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \Phi + h = f(t)$$

onde $v = \nabla\varphi$, h é a entalpia e Φ descreve o potencial externo.

Olhamos agora para um escoamento estacionário $\rho = \rho_0$, $P = P_0$, $v = v_0$, $\varphi = \varphi_0$ e provoquemos uma perturbação

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$

$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$, ou $v = v_0 + \delta v$ com $v_0 = \nabla\varphi_0$

e $\delta v = \nabla\delta\varphi$

e $P = P_0 + \delta P$ ou $h = h_0 + \delta h$

Nota: As flutuações de pressão para o som variam, tipicamente, entre 10^{-4}–$1\ Nm^{-2}$, portanto $\frac{\delta P}{P_0} \sim 10^{-5}$–$10^{-9}$! O formalismo é portanto aplicável, excepto em explosões fortes e afins

Notemos que

- $h(P_0+\delta P) = h_0 + \delta P \frac{dh}{dP}(P_0) = h_0 + \varepsilon \frac{\delta P}{\rho_0}$

pois $\nabla P = \rho \nabla h$. Isto é $\delta h = \frac{\delta P}{\rho_0}$ (A)

- Para escoamento barotrópico,

$$\delta P = \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \delta \rho \equiv c^2 \delta \rho \, , \quad \text{com } c^2 = \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \quad (B)$$

No que se segue vou considerar c^2 constante, e h_0, P_0, v_0, φ_0 independente do tempo.

As equações linearizadas são

$$\partial_t \delta\rho + \nabla(\delta\rho\, v_0 + \rho_0 \delta v) = 0 \quad (C)$$

$$\partial_t \delta\varphi + \nabla\varphi_0 \nabla\delta\varphi + \delta h = 0 \, , \quad \text{onde assumimos} \quad (D)$$

$$\delta\Phi = \delta f = 0$$

De (A) e (D)

$$\delta P = -\rho_0(\partial_t \delta\varphi + v_0 \nabla\delta\varphi) \quad (i)$$

Usando (B) em (C), temos

$$\frac{1}{c^2}\partial_t \delta P + \nabla\left(\frac{v_0}{c^2}\delta P + \rho_0 \nabla\delta\varphi\right) = 0 \quad (ii)$$

substituindo (i) em (ii),

$$-\frac{\rho_0}{c^2}\partial_t^2 \delta\varphi - \frac{v_0 \rho_0}{c^2}\nabla\partial_t \delta\varphi + \nabla(\rho_0 \nabla\delta\varphi) + \nabla\left(-\frac{v_0\rho_0}{c^2}\partial_t \delta\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{v_0^2 \rho_0}{c^2}\nabla\delta\varphi\right) \quad (iii)$$

Isto é, se $\rho_0 \simeq$ const e $c^2 \sim$ const,

$$(c^2 - v_0^2)\nabla^2 \delta\varphi - \partial_t^2 \delta\varphi$$
$$- 2v_0 \nabla(\partial_t \nabla\varphi) - (\nabla v_0)\partial_t \delta\varphi - \nabla(v_0^2) \cdot \nabla\delta\varphi = 0$$

- Se $v_0 \sim 0$, obtemos

$$\boxed{c^2\nabla^2\delta\varphi - \partial_t^2 \delta\varphi = 0}$$

Descreve uma onda que se propaga com

$$v_{som}^2 = c^2 = \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$$

Para gases ideais, $P = \frac{RT}{\mu}\rho$, μ peso molecular

ora, as relações termodinâmicas dizem que

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s = \frac{c_p}{c_v}\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = \gamma \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \text{, logo}$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

Note-se que a velocidade do som, c, não é a velocidade do fluido. Calculemos esta última. Para uma onda plana, $\varphi = \varphi(x - ct)$

$$\delta v_x = \frac{\partial \delta\varphi}{\partial x} = \delta\varphi'(x - ct)$$

De (i) $\delta P = -\rho_0 \partial_t \delta\varphi = \rho_0 c\,\delta\varphi'(x-ct) = \rho_0 c\,\delta v_x$

ora $\delta P = c^2 \delta\rho \Rightarrow \boxed{\delta v_x = c\frac{\delta\rho}{\rho_0}}$

- Assumindo $\nabla v_0 = 0$ e 1-dimensão espacial, fazer transformação Galileana para obter equação sonora na página anterior

- Para a relevância da velocidade de grupo e relação com óptica geométrica, ver Landau e Lifshitz

- Ver geodésicas do som

Quando é que um fluido é incompressível?

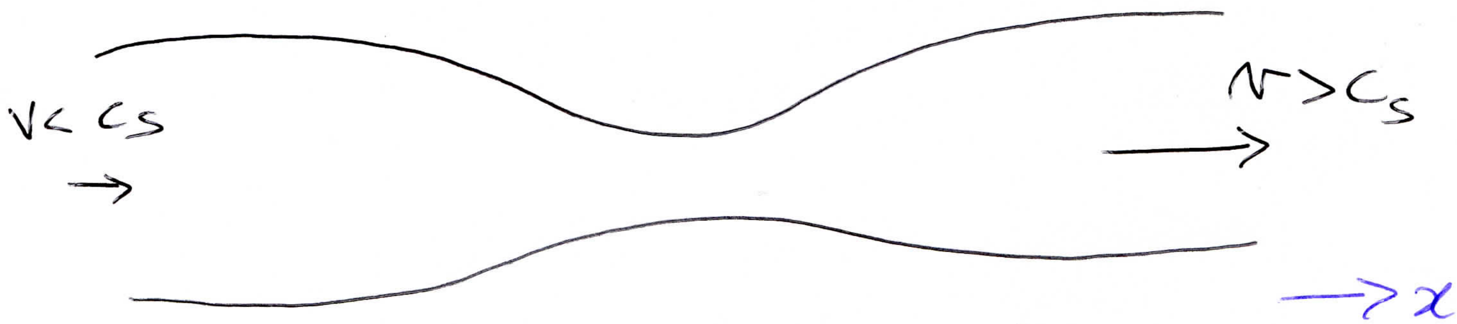
Um fluido é considerado incompressível se $\frac{\delta \rho}{\rho} \ll 1$. Ora, nós vimos que $\delta \rho \sim \frac{\delta P}{c^2}$, e a relação de Bernoulli diz que δP é da ordem de v^2. Portanto, $\frac{\delta \rho}{\rho} \sim \frac{v^2}{c^2}$. Ou seja, incompressibilidade significa que a velocidade do fluido deve ser menor que a do som em toda a parte.

Isto é, um líquido ou um gás preferem manter a densidade, saindo do caminho dos obstáculos. Contudo, a altas velocidades não têm "tempo de reação".

A boquilha ("nozzle") de de Laval

A boquilha de de Laval é um aparelho usado para acelerar fluidos, normalmente até velocidades supersónicas. Foram inicialmente usadas em turbinas de vapor, mas hoje em dia são comuns em foguetões, túneis de vento etc.

A boquilha consiste num tubo de secção variável, convergente inicialmente e depois divergente, como na figura.



Na primeira metade o fluido é acelerado, normalmente a velocidades supersónicas, que podem continuar na segunda metade.

A secção da boquilha é $A(x)$. Para perfis suaves, a continuidade exige que

$$\rho v A = \frac{dm}{dt} = \text{const}$$

A derivada logarítmica desta equação é

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}=0$$

Para escoamento isentrópico, $d\rho=\frac{dP}{c^2}$,

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}+\frac{1}{c^2\rho}\frac{dP}{dx}=0$$

Mas a equação de Euler $\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\frac{\vec{f}-\nabla P}{\rho}\right)$ em regime estacionário é

$$\rho v\frac{dv}{dx}=-\frac{dP}{dx}\text{, ou seja,}$$

$$\frac{1}{v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$$

Portanto, quando o escoamento é subsónico ($v<c$) $\frac{dv}{dx}$ e $\frac{dA}{dx}$ tem sinais opostos. Ou seja, afunilar A resulta num aumento da velocidade. A situação é oposta para escoamento supersónico!

Vemos também que, se houver um ponto onde $v=c$, ele ocorre na garganta onde $\frac{dA}{dx}=0$.

Vejamos algumas aplicações. Começemos por calcular os modos sonoros, esfericamente simétricos*, de uma esfera de fluido de raio a.

A equação $c^2\nabla^2\psi - \partial_t^2\psi = 0$ escreve-se em simetria esférica como $\frac{c^2}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\psi) - \partial_t^2\psi = 0$. Tomando

$\psi = e^{-i\omega t}\frac{R(r)}{r}$ temos

$$\frac{1}{r^2}\left[r^2\frac{R'}{r} - R\right]' + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{R}{r} = 0 \Rightarrow R'' + \frac{\omega^2}{c^2}R = 0$$

solução: $R = a_1 \cos\frac{\omega}{c}r + a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{c}r\right)$

Requerendo que a velocidade à superfície e no centro sejam nulas, temos

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}(r=0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0 \quad (\text{que dá } \psi(r=0) \text{ finito})$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}(r=a) = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{ca}\cos\left(\frac{\omega a}{c}\right) - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega a}{c}\right)}{a^2} = 0$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\omega a}{c}\right) = \frac{\omega a}{c}$, a raiz mais baixa é

$\omega_1 \sim 4.49\frac{c}{a}$

* Consegue resolver o caso geral?