

Mecânica Analítica

Capítulo 4: O Corpo Rígido

H. Terças

Instituto Superior Técnico
(Departamento de Física)

4.1 Ligações e transformações

4.2 Ângulos de Euler

4.3 Tensor momento de inércia

4.4 O pião simétrico

Um corpo rígido é um sistema caracterizado N partículas vinculadas por ligações fixas no tempo, $r_i - r_j = c_{ij}$, correspondente à ligação holónoma do tipo

$$f(r_1, r_2, \dots, r_n) = r_{ij} - c_{ij} = 0.$$

Isto constitui $N(N - 1)/2$ restrições sobre $3N$ coordenadas. No final, importa-nos os 6 graus de liberdade efectivos

- Translações, $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{c}$ (3 graus)
- Rotações em torno de um ponto fixo (3 graus)

A translação estuda-se usando um ponto representativo do corpo, $\vec{R}(t)$, (em geral, o centro de massa). Contudo, necessitamos de um **referencial inercial**.

- Base das coordenadas do corpo rígido, \vec{e}_i' ($i = \{1, 2, 3\}$)
- Base do referencial de inércia, \vec{e}_i ($i = \{1, 2, 3\}$)

Uma partícula α do corpo tem de coordenada $\vec{r}_\alpha = \vec{R} + (\sum_i) b'_{\alpha i} \vec{e}_i'$.

Transformação de coordenadas: $\vec{e}_i' = A_{ij} \vec{e}_j$

$$\vec{r}_\alpha = \vec{R} + b'_{\alpha i} A_{ij} \vec{e}_j \quad (r_{\alpha, j} = R_j + b'_{\alpha, i} A_{ij}).$$

A condição de ortogonalidade implica

$$\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = \delta_{ij} = A_{ik} A_{j\ell} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_\ell}_{\delta_{k\ell}} = A_{ik} A_{jk}$$

Transformação ortogonal

$$A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \quad (AA^T = \mathbb{I})$$

Os nove elementos da matrix A_{ij} representam ângulos ($A_{ij} = \cos \theta_{ij}$).

Sejam x'_i ($i=1,2,3$) as coordenadas no referencial do corpo rígido (x_i no referencial de inércia).

$$x'_i = A_{ij}x_j.$$

- Exemplo: Rotação no plano.

$$\vec{e}_1' = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2, \quad \vec{e}_2' = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$$

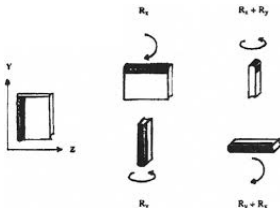
$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

O conjunto de matrizes reais ortogonais de dimensão 2 forma o grupo $O(2)$. Ao subgrupo de matrizes que consistem em rotações designa-se por $SO(2)$.

Em três dimensões, as rotações devem ser feitas com algum cuidado. Primeiro, necessitamos de definir um eixo e um ângulo de rotação em relação a esse eixo. Além disso, podemos querer estabelecer uma sucessão de rotações. $x''_i \xrightarrow{A} x'_i \xrightarrow{B} x_i$

$$x''_i = A_{ik} B_{kl} x_l \equiv C_{il} x_l \quad (\vec{x}'' = C \cdot \vec{x})$$

Em geral, $AB \neq BA$ (A e B não comutam): a ordem é importante.



A transformação inversa também pode ser feita $x_i = A_{ij}^{-1} x'_j$. Usando a condição de ortogonalidade, vem $AA^{-1} = \mathbb{I}$.

Transformação unitária

$$A^T = A^{-1}$$

Podemos demonstrar que $C = AB$ também é unitária. As matrizes A e B pertencem ao subgrupo $SO(N)$ ($N = 3$ no caso de interesse). Como A é uma transformação unitária, $\det(A) = 1$,

$$\det(A - \mathbb{I}) = 0.$$

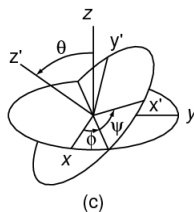
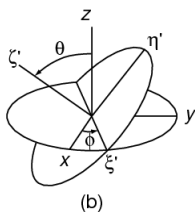
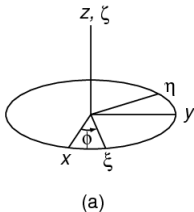
Existe, então, um vector $\vec{\omega}$ (eixo) tal que $A \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega}$. A este facto dá-se o nome de **teorema de Euler**: para cada rotação, existe um eixo para o qual ela é invariante.

- Exemplo: Rotação no eixo zz . A matriz A deixa invariante o eixo dos zz

$$A = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por outras palavras, isto quer dizer que o movimento mais geral de um corpo rígido mantendo um dos pontos fixos é uma rotação (é intuitivo).

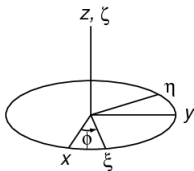
A maneira mais económica de descrever a rotação de um corpo rígido é através dos **ângulos de Euler**



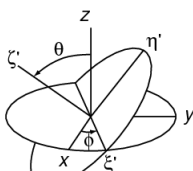
Sejam A , B e C as matrizes correspondentes às rotações (a), (b) e (c)

$$A = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

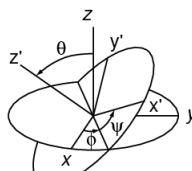
A maneira mais económica de descrever a rotação de um corpo rígido é através dos **ângulos de Euler**



(a)



(b)

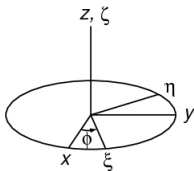


(c)

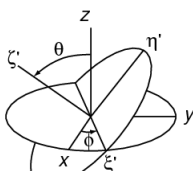
Sejam A , B e C as matrizes correspondentes às rotações (a), (b) e (c)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

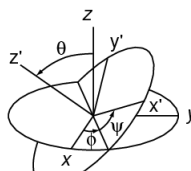
A maneira mais económica de descrever a rotação de um corpo rígido é através dos **ângulos de Euler**



(a)



(b)

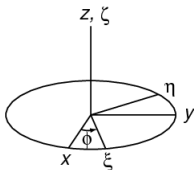


(c)

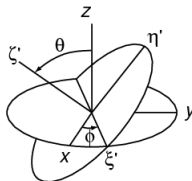
Sejam A , B e C as matrizes correspondentes às rotações (a), (b) e (c)

$$C = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

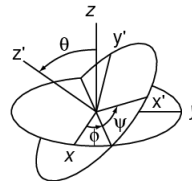
A maneira mais económica de descrever a rotação de um corpo rígido é através dos **ângulos de Euler**



(a)



(b)

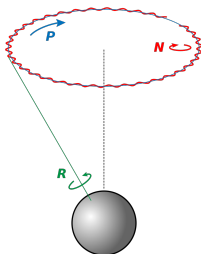


(c)

A rotação total $\mathcal{A} = CBA$ (atenção à ordem!) é então

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Existem importantes consequências na cinemática dos sistemas físicos devido às rotações, $\dot{\phi} \neq 0$



- Exemplo: rotação da terra. Devido às forças não inerciais (fictícias), existem movimentos de **precessão** e **nutação** (devido ao efeito combinado de $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ - voltaremos a este assunto com mais detalhe.)

Seja $\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z$ a velocidade de angular de rotação em relação ao eixo zz .
Seja x'_i uma coordenada em relação ao referencial em rotação (x_i em relação ao referencial em rotação). Então, $x'_i = A_{ij}x_j$, onde

$$A = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}.$$

Tomando a derivada temporal,

$$\dot{x}'_i = A_{ij}\dot{x}_j + \frac{d}{dt}(A_{ij})x_j = \dot{x}_i + \epsilon_{ikj}\omega_k x_j \quad (\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

Para a aceleração, temos

$$\vec{a}' = \vec{a} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})}_{\text{Centr.}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{v}$$

De uma forma geral, podemos escrever a derivada de uma quantidade genérica \vec{f} no referencial em rotação na forma

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \right)_c + \vec{\omega} \times \vec{f}.$$

Assim, para uma partícula α de um corpo rígido com coordenada \vec{r}_α (em relação ao referencial laboratório),

$$\vec{v}_\alpha = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha.$$

Então, o momento linear total vem

$$\vec{p} = M\vec{V} + \sum_{\alpha} \vec{\omega} \times (m_{\alpha}\vec{r}_{\alpha}).$$

Uma vez que \vec{R} é a posição do centro de massa, o último termo cancela-se dois a dois.

Quanto ao momento angular,

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \left(\vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{V} \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})] .$$

Consideremos o caso em que \vec{R} está fixo ($\vec{V} = 0$). Usando a identidade $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$,

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{\omega} r_{\alpha}^2 - \vec{r}_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\omega})]$$

Em componentes (convenção da soma!)

$$\begin{aligned} L_i &= \omega_i \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 - \sum_{\alpha} r_{\alpha i} r_j \omega_j \\ &= \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 \delta_{ij} - r_i r_j)}_{I_{ij}} \omega_j \end{aligned}$$

De forma vectorial $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

De forma explícita, o **tensor de inércia** escreve-se

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \begin{bmatrix} r_{\alpha}^2 - x_{\alpha}^2 & -x_{\alpha}y_{\alpha} & -x_{\alpha}z_{\alpha} \\ -y_{\alpha}x_{\alpha} & r_{\alpha}^2 - y_{\alpha}^2 & -y_{\alpha}z_{\alpha} \\ -z_{\alpha}x_{\alpha} & -z_{\alpha}y_{\alpha} & r_{\alpha}^2 - z_{\alpha}^2 \end{bmatrix}$$

Tensor simétrico: $I_{ij} = I_{ji}$. No caso contínuo, o somatório de massas para a um integral,

$$I_{ij} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dV.$$

Quanto à **energia cinética de rotação**,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2.$$

Com a identidade $(\vec{A} \times \vec{B})(\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\omega^2 r_{\alpha}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})^2)$$

Por componentes (convenção da soma!)

$$\begin{aligned}T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\omega_i \omega_i r_{\alpha}^2 - r_{\alpha i} r_{\alpha j} \omega_i \omega_j) \\&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \omega_i (r_{\alpha}^2 \delta_{ij} - r_{\alpha i} r_{\alpha j}) \omega_j \\&= \frac{1}{2} \omega_i I_{ij} \omega_j = \frac{1}{2} L_i \omega_i\end{aligned}$$

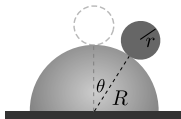
Se o corpo tiver movimento de **translação**,

$$T = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}.$$

Por fim, o Lagrangeano pode então escrever-se

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} - V$$

- Exemplo 1: Rolamento sobre calote. Considere uma esfera de raio r a rolar, sem deslizar, sobre uma calote esférica (fixa ao solo) de raio R .

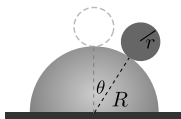


$$L = T - V = \frac{1}{2}M(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{5}Mr^2\dot{\varphi}^2 - Mg(R+r)\cos\theta$$

Condição de não-deslizamento, $v = (R+r)\dot{\theta} = r\dot{\varphi}$

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{7}{10}M(R+r)^2\dot{\theta}^2 - Mg(R+r)\cos\theta$$

- Exemplo 1: Rolamento sobre calote. Considere uma esfera de raio r a rolar, sem deslizar, sobre uma calote esférica (fixa ao solo) de raio R .



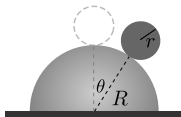
Para determinarmos o ângulo de abandono, θ_c , fazemos uso das duas ligações relevantes $f_1(\theta, \varphi) = (R+r)\theta - r\varphi - c = 0$ e $f_2(\rho) = \rho - (R+r) = 0$.

$$L^\lambda(\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, \rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2}M \left(\rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{\rho}^2 \right) + \frac{1}{5}Mr^2 \dot{\varphi}^2 - M g \rho \cos \theta + \sum_k \lambda_k f_k$$

Temos três equações do movimento, $q_i = (\rho, \theta, \varphi)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^\lambda}{\partial q_i} - \frac{\partial L^\lambda}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

- Exemplo 1: Rolamento sobre calote. Considere uma esfera de raio r a rolar, sem deslizar, sobre uma calote esférica (fixa ao solo) de raio R .

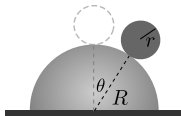


$$\varphi : \quad \frac{2}{5} M r^2 \ddot{\varphi} - \underbrace{\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}}_{Q_{\varphi}^{\lambda_1}} = 0$$

$$\theta : \quad M \rho^2 \ddot{\theta} - M g \rho \sin \theta - \underbrace{\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta}}_{Q_{\theta}^{\lambda_1}} = 0$$

$$\rho : \quad M \ddot{\rho} - M \rho \dot{\theta}^2 + M g \cos \theta - \underbrace{\lambda_2 \frac{\partial f}{\partial r}}_{Q_{\rho}^{\lambda_2}} = 0$$

- Exemplo 1: Rolamento sobre calote. Considere uma esfera de raio r a rolar, sem deslizar, sobre uma calote esférica (fixa ao solo) de raio R .



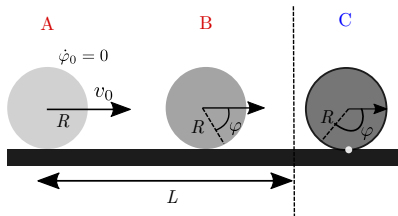
Eliminamos λ_1 na equação para θ aplicando as ligações

$$\begin{aligned} \theta : \quad & \ddot{\theta} - \frac{5}{7} \frac{g}{R+r} \sin \theta = 0 \\ \rho : \quad & \cancel{M\ddot{\rho}} - M\rho\dot{\theta}^2 + Mg \cos \theta = \underbrace{\lambda_2 \frac{\partial f}{\partial r}}_{Q_\rho^{\lambda_2}} \end{aligned}$$

Na situação de abandono, $\lambda_2 = 0$. Integrando, $\frac{\dot{\theta}_c^2}{2} + \frac{5g}{7(R+r)} \cos \theta_c = \frac{5g}{7(R+r)}$

$$\cos \theta_c = \frac{10}{17} \Rightarrow \theta_c \simeq 54.0^\circ \quad (> 47.9^\circ \text{ particula})$$

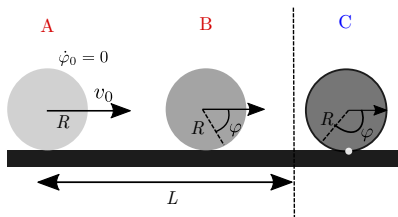
- Exemplo 2: Rolamento com e sem deslizamento. Considere uma esfera de raio R a rolar que é lançada horizontalmente num solo com atrito cinético.



Usamos o potencial de Rayleigh para descrever o atrito, $\mathcal{F} = \mu M g (\dot{X} - R \dot{\varphi})$ (construído por forma a ser nulo para a ligação $f(x, \varphi) = X - R\varphi = 0$)

$$L(X, \dot{X}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{5} M R^2 \dot{\varphi}^2$$

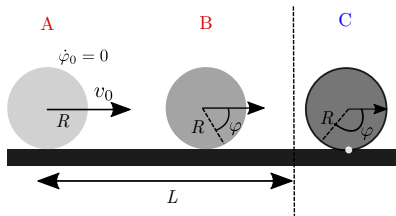
- Exemplo 2: Rolamento com e sem deslizamento. Considere uma esfera de raio R a rolar que é lançada horizontalmente num solo com atrito cinético.



Para as coordenadas $q_i = (X, \varphi)$, temos então

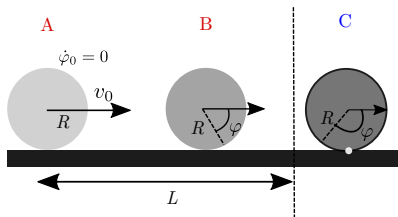
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

- Exemplo 2: Rolamento com e sem deslizamento. Considere uma esfera de raio R a rolar que é lançada horizontalmente num solo com atrito cinético.



$$\left\{ \begin{array}{l} X : \quad \ddot{X} + \mu g = 0 \Rightarrow \dot{X}(t) = v_0 - \mu g t \\ \varphi : \quad \frac{2}{5} R \ddot{\varphi} - \mu g = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \cancel{\omega_0} + \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R} t \end{array} \right.$$

- Exemplo 2: Rolamento com e sem deslizamento. Considere uma esfera de raio R a rolar que é lançada horizontalmente num solo com atrito cinético.



A condição de não deslizamento é satisfeita para o instante t_c tal que $\dot{X}(t_c) = R\dot{\varphi}(t_c)$

$$t_c = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g} \Rightarrow \dot{X}(t_c) = \frac{5}{7} v_0$$

O momento angular de um sistema obedece à equação

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_c + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N},$$

onde \vec{N} é o momento das força aplicadas (torque). Em componentes,

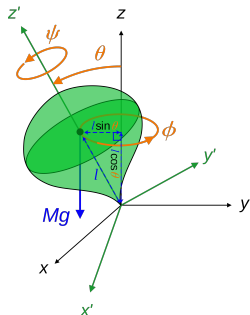
$$\dot{L}_i + \epsilon_{ijk} \omega_j L_k = N_i.$$

Escolhemos um eixo de rotação, $L_i = I_i \omega_i$ (or termos cruzados anulam-se). Assim (sem soma nos índices i)

$$I_i \dot{\omega}_i + \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \omega_j \omega_k = N_i.$$

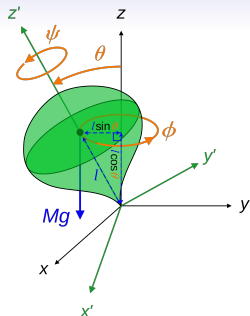
Explicitamente,

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) &= N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (I_3 - I_1) &= N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) &= N_3. \end{aligned}$$



Consideremos o caso do pião simétrico $I_1 = I_2 \neq I_3$ ($I_3 = I_{zz}$).

- $\dot{\psi}$: rotação em torno do eixo principal, z'
- $\dot{\phi}$: rotação do eixo principal em torno do eixo vertical z (precessão)
- $\dot{\theta}$: oscilação do eixo z' em relação ao z (nutação).

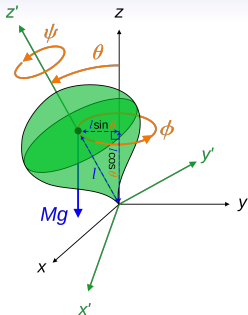


Equações de Euler (decomposição nos eixos, não de Euler-Lagrange)

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) &= N_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 (I_3 - I_1) &= N_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= N_3. \end{aligned}$$

No referencial laboratório, consideremos a situação $N_3 = N_2 = 0 \neq N_1$

- $\omega_3 = \text{constante}$
- N_1 obriga ω_1 a variar
- ω_2 também varia porque está acoplado a ω_1



A situação é complicada de visualizar em termos de $\dot{\omega}_i$. Vamos aos **ângulos de Euler**,

$$\omega_i = \mathcal{B}_{ij} \zeta_j, \quad \zeta_j = \{ \overbrace{e_z}^{\text{inercia}}, \overbrace{e'_x, e'_z}^{\text{corpo}} \}$$

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

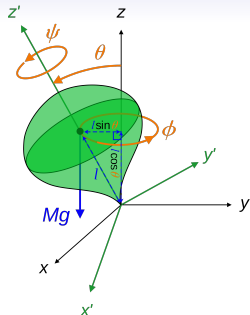
$$\omega_i = \mathcal{B}_{ij} \zeta_j, \quad \zeta_j = \{ \overbrace{e_z}^{\text{inercia}}, \overbrace{e'_x, e'_z}^{\text{corpo}} \}$$

$$\mathcal{B}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Usamos as rotações $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ para transformar os e_j na base do corpo rígido (sistema em rotação)

- $e_z = e_3 = \mathcal{A}_{j3} e_j = (\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi, \cos \theta)$
- $e'_x = e'_1 = C_{j1} e_j = (\cos \psi, -\sin \psi, 0)$
- $e'_z = e'_3 = (0, 0, 1)$

$$\vec{\omega} = \left(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right)$$

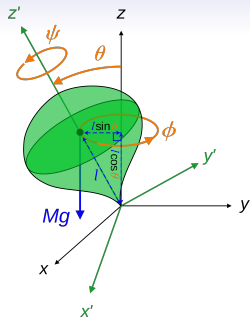


$$T = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$

Em termos dos **ângulos de Euler**,

$$T = \frac{1}{2}I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}I_2 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2$$

$$V = Mgl \cos \theta$$



$$L = \frac{1}{2}I_1 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2}I_2 \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 - Mgl \cos \theta$$

Duas coordenadas cíclicas: ψ e ϕ (conservação de momentos)

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 \equiv I_1 a$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \equiv I_1 b$$

- $p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 \equiv I_1 a$
- $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta \equiv I_1 b$

Outra quantidade conservada é a energia

$$E = T + V = L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta.$$

Usando p_ψ para eliminar ϕ

$$I_3 \dot{\psi} = I_1 a - I_3 \dot{\phi} \cos \theta.$$

Inserindo na expressão para p_ϕ

$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$	$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$
--	--

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

Finalmente, pela equação da energia,

$$\underbrace{E - \frac{I_3 \omega_3^2}{2}}_{E'} = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \underbrace{\frac{I_1 (b - a \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta}}_{V_{\text{ef.}}(\theta)} + Mgl \cos \theta.$$

Definindo constantes, $\alpha = (2E - I_3 \omega_3^2)/I_1$, $\beta = 2Mgl/I_1$, $a = p_\psi/I_1$ e $b = p_\phi/I_1$,

$$\alpha = \dot{\theta}^2 + \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \beta \cos \theta$$

- Mudança de variável: $u = \cos \theta$

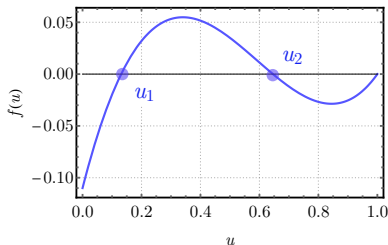
$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$$

- Equações relevantes do problema:

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

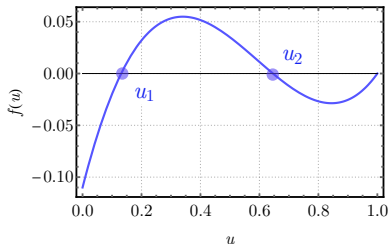
$$\dot{u}^2 = \underbrace{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}_{f(u)}$$



- Soluções físicas: $f(u) \geq 0$

$$\dot{u}^2 = \underbrace{(1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2}_{f(u)}$$

Significa que $u_1 \leq u \leq u_2$ (órbitas limitadas)



Qualitativamente: que tipo de trajetórias temos?

- Caso 1: $b/a > u_2$. Da equação de precessão,

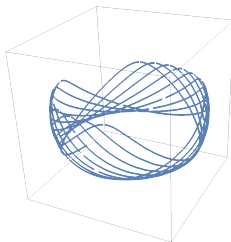
$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

vemos que $\dot{\phi}$ não muda de sinal no intervalo $[\arccos(u_2), \arccos(u_1)]$.

$$\ddot{\phi}|_{u_1} = 0 = \ddot{\phi}|_{u_2} = 0$$

O pião **precessa** da mesma forma nos pontos θ_1 e θ_2 ,

O pião **nuta** no intervalo $[\arccos(u_2), \arccos(u_1)]$.



- Caso 2: $u_1 < b/a < u_2$. Da equação de precessão

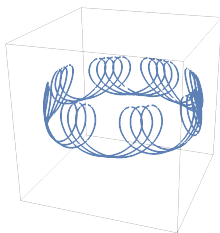
$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

vemos que $\dot{\phi}$ muda de sinal no intervalo $[\arccos(u_2), \arccos(u_1)]$.

$$\ddot{\phi}|_{u_1} \neq \ddot{\phi}|_{u_2}$$

O pião **precessa** com sinais opostos θ_1 e θ_2

O pião **nuta** no intervalo $[\arccos(u_2), \arccos(u_1)]$.



- Caso 3: $b/a = u_1$ ou $b/a = u_2$. Das equações

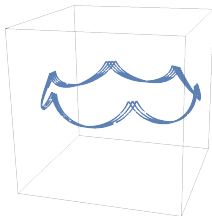
$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad \dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

vemos que $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ se anulam num dos pontos u_1 ou u_2 .

$$\ddot{\phi}|_{u_1} = 0 \vee \ddot{\phi}|_{u_2} = 0$$

O pião **precessa** com cúspides em θ_1 ou θ_2

O pião **nuta** no intervalo $[\arccos(u_2), \arccos(u_1)]$.



- **Pião rápido:** Energia inicial de rotação $\gg \Delta V_{\max}$

$$\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \gg 2Mgl$$

$|\dot{\theta}|, |\dot{\phi}| \ll |\dot{\psi}|$ (rotação domina sobre a precessão e a nutação). Da conservação de energia

$$E' = Mgl \cos \theta_0 \Rightarrow \alpha = \beta u_0.$$

$$\dot{\theta}^2 = f(u), \text{ onde } f(u) \simeq (u_0 - u) [\beta(1 - u^2) - a^2(u_0 - u)].$$

$$\text{Raízes: } u = u_0 \quad \text{e} \quad u = u_1,$$

com u_1 satisfazendo $(1 - u_1^2) - \frac{a^2}{\beta}(u_0 - u_1) = 0$. Intervalo de nutação:

$$\Delta = u_0 - u_1 \simeq \frac{\beta \sin^2 \theta_0}{a^2} = \frac{I_1}{I_3} \frac{2Mgl}{I_3 \omega_3^2} \sin^2 \theta_0.$$

$$\Delta_{\text{nut}} \sim \frac{1}{\omega_3^2}$$

- $\dot{\Delta} = f(u) \simeq a^2 \Delta (\Delta_1 - x) \quad (\Delta = u_0 - u, \Delta_1 = u_0 - u_1).$
Defina-se $y = \Delta - x_1/2,$

$$\dot{y}^2 = a^2 \left(\frac{x_1^2}{4} - y^2 \right) \Rightarrow \boxed{\ddot{y} + a^2 y = 0},$$

onde $a = \frac{I_3}{I_1} \omega_3$ é a frequência de **nutação**

- $\dot{\phi} = \frac{a(u_0 - u)}{\sin^2 \theta} \simeq \frac{a\Delta}{\sin^2 \theta_0}.$ Neste caso,

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{2a} [1 - \cos(at)].$$

Tomando médias, obtemos a frequência de **precessão**

$$\boxed{\bar{\dot{\phi}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{I_3 \omega_3}}$$

Finalmente, podemos estudar as condições para a **precessão simples** (ou regular), i.e. sem **nutation**, $\dot{\theta} = 0$.

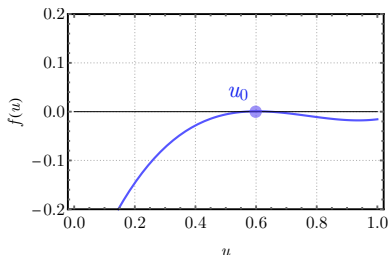
$$\dot{u}^2 = f(u) = 0 \Rightarrow u = u_0$$

Isto implica que

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi}\cos\theta_0).$$

Para que $\dot{\phi}$ seja real, um pião no plano superior ($\theta_0 < \pi/2$) requer

$$\omega_3 > \frac{2}{I_3} \sqrt{MglI_1 \cos\theta_0}$$



Finalmente, podemos estudar as condições para a **precessão simples** (ou regular), i.e. sem **nutation**, $\dot{\theta} = 0$.

$$Mgl = \dot{\phi}(I_3\omega_3 - I_1\dot{\phi}\cos\theta_0).$$

- Precessão **lenta**: Desprezar termos $\sim \dot{\phi}^2$

$$\dot{\phi} \simeq \frac{Mgl}{I_3\omega_3} = \bar{\phi}$$

Não depende de θ_0 !

- Precessão **rápida**: Desprezar Mgl perante $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{I_3\omega_3}{I_1\cos\theta_0}$$

Podíamos chegar a resultados mais precisos resolvendo a equação quadrática para $\dot{\phi}$. Contudo, os resultados qualitativos são satisfatórios.