Mecânica Analítica

2020-2021

Série 7

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

Nesta série, concluímos o formalismo Hamiltoniano e ilustramos as transformações canónicas

⋆⋆ **Problema 1. Referenciais em rotação.** Considere um disco opaco no plano xOy a rodar em torno do eixo dos z's com velocidade angular constante ω. Seja m a massa de uma partícula que se encontre em movimento em cima do disco.

a) Escreva o Lagrangeano desta partícula em coordenadas cartesianas.

b) Determine o Hamiltoniano correspondente. Justifique se se trata ou não da energia mecânica do sistema.

c) Obtenha as equações do movimento do oscilador harmónico de potencial $V(r) = \dfrac{1}{2}k(r-\ell)^2$ no referencial em rotação.

⋆⋆ **Problema 2. Relatividade restrita.** Considere um sistema relativista a uma dimensão no plano (x,t), sob o efeito de um potencial $V(x)$.

a) Escreva um Lagrangeano para o sistema e obtenha as equações formais do movimento.

b) Obtenha o Hamiltoniano respectivo e interprete-o fisicamente.

c) Considere o caso em que a partícula é submetido a uma aceleração constante, $V(x) = max$. Mostre que o movimento é hiperbólico no plano (x,t).

⋆⋆ **Problema 3. Oscilador anarmónico.** Considere um sistema físico uni-dimensional (um oscilador não-harmónico) cujo Lagrangeano é dado por:

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 - \alpha x^3 + \beta x\dot{x},$$

onde α e β são constantes.

a) Escreva o Hamiltoniano do sistema.

b) Indique, justificando, se o Hamiltoniano é ou não conservado e se coincide ou não com a energia total do sistema.

c) Construa o espaço de fases do oscilador harmónico e discuta-o fisicamente.

⋆⋆ **Problema 4. Parêntesis de Poisson.** Mostre, partindo da definição de parênteses de Poisson, as propriedades algébricas verificadas por funções (com segunda derivada contínua) u, v e w de coordenadas canónicas:

a) $[uv, w] = u[v, w] + [u, w]v$

b) $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]]$

c) Utilizando os parêntesis de Poisson, mostre que para o oscilador harmónico unidimensional (q, p) existe uma quantidade conservada u dada por

$$u(q, p, t) = \ln(p + im\omega q) - i\omega t, \quad \text{onde} \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

d) Mostre que para um sistema unidimensional descrito pelo Hamiltoniano

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2},$$

a quantidade $D = pq/2 - Ht$ é uma constante do movimento.

⋆⋆ **Problema 5. Transformações canónicas.** Considere a transformação dada por

$$q_i = \alpha Q_i + \beta\sigma_{ij} P_j \,,$$
$$p_i = \alpha P_i - \beta\sigma_{ij} Q_j \,,$$

onde α e β são constantes, $i, j = 1, 2$ e σ_{ij} é tal que $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ e $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$.

a) Determine, pelo método que julgar mais apropriado, a relação a que α e β têm de obedecer para que a transformação seja canónica.

b) Um sistema com 2 graus de liberdade é descrito pelo Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right).$$

Escreva o Hamiltoniano correspondente.

c) Resolva a dinâmica do sistema em (b), ou seja obtenha q_1, q_2, p_1, p_2 como funções do tempo e condições iniciais, no caso em que se verifica $Q_2 = P_2 = 0$.

⋆ **Problema 6. Função geradora F_4.** Considere a seguinte transformação:

$$Q = p + iaq \,, \qquad P = \frac{p - iaq}{2ia}.$$

a) Mostre que a transformação é canónica e encontre uma função geradora estilo F_4.

b) Use a transformação para resolver o problema do oscilador harmónico a uma dimensão (considere $a^2 = km$, onde k é a constante da mola).