

Duração: 90 minutos

1º teste A

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Numa fábrica há duas máquinas, M_1 e M_2 , que produzem o mesmo tipo de peça, sendo que a máquina M_1 contribui com 70% da produção global da fábrica. Cada peça produzida pela máquina M_1 possui 0, 1 ou 2 defeitos com probabilidade 0.8, 0.1 e 0.1, respetivamente. Por outro lado, cada peça produzida pela máquina M_2 possui 0 ou 1 defeitos com probabilidade 0.75 e 0.25, respetivamente.

- (a) Calcule a probabilidade de que uma peça escolhida ao acaso da produção da fábrica não possua qualquer defeito. (2.0)

Sejam M_i = “uma peça escolhida ao acaso é fabricada pela máquina i ”, $i = 1, 2$, e D_j = “uma peça escolhida ao acaso tem j defeitos”, $j = 0, 1, 2$.

Tem-se $P(M_1) = 0.7$, $P(M_2) = 1 - P(M_1) = 0.3$, $P(D_0 | M_1) = 0.8$, $P(D_1 | M_1) = P(D_2 | M_1) = 0.1$, $P(D_0 | M_2) = 0.75$, $P(D_1 | M_2) = 0.25$ e $P(D_2 | M_2) = 0$.

$$P(D_0) = \sum_{i=1}^2 P(D_0 | M_i)P(M_i) = 0.785.$$

- (b) Sabendo que uma peça escolhida ao acaso da produção da fábrica possui pelo menos um defeito, calcule a probabilidade de que tenha sido produzida na máquina M_1 . (1.5)

$$P(M_1 | D_1 \cup D_2) = P(M_1 | \overline{D_0}) = \frac{(1 - P(D_0 | M_1)) P(M_1)}{1 - P(D_0)} \approx 0.6512.$$

2. O número de aviões que descolam de um aeroporto numa certa hora do dia possui distribuição de Poisson de parâmetro 10.

- (a) Sabendo que nessa hora de um dado dia descolaram pelo menos 10 aviões, calcule a probabilidade de terem descolado mais do que 15 aviões na mesma hora. (2.0)

Seja X = “número de aviões que descolam numa hora”, sendo que $X \sim Poi(10)$.

$$P(X > 15 | X \geq 10) = \frac{P(X > 15 \wedge X \geq 10)}{P(X \geq 10)} = \frac{P(X > 15)}{P(X \geq 10)} = \frac{1 - F_X(15)}{1 - F_X(9)} \approx 0.0898.$$

- (b) Dadas as condições da pista, cada avião que descola do aeroporto sofre danos ligeiros nos pneus do trem de aterragem com probabilidade 0.02, independentemente do que suceda em outras descolagens.

- (i) Qual é a probabilidade de haver mais de 2 aviões afetados em 20 descolagens no aeroporto? (2.0)

Seja Y = “número de aviões que sofre danos em 20 descolagens”. Como Y representa o número de sucessos em 20 realizações independentes de uma prova de Bernoulli, tem-se que $Y \sim Bi(n = 20, p = 0.02)$.

$$P(Y > 2) = 1 - F_Y(2) \approx 0.0071.$$

- (ii) Qual é a probabilidade de ser necessário descolarem 4 ou mais aviões para que se detete o primeiro avião com o trem de aterragem afetado? Qual é o desvio padrão do número de descolagens até surgir o primeiro avião afetado? (2.5)

Seja Z = “número de descolagens até que o primeiro avião sofra danos”. Como Z representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli até ao primeiro sucesso, tem-se que $Z \sim Geo(p = 0.02)$.

$$P(Z \geq 4) = 1 - F_Z(3) \approx 0.9412.$$

$$\sqrt{Var[Z]} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} \approx 49.497 \text{ descolagens.}$$

1. O tempo de vida (em anos) de um certo tipo de satélite em órbita tem distribuição exponencial, sendo que a probabilidade do satélite durar pelo menos 3 anos é $e^{-1.5}$.

- (a) Justifique que o valor esperado do tempo de vida de um satélite é igual a 2 anos. (0.5)

Seja X = “tempo de vida de um satélite, em anos” com $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$P(X \geq 3) = e^{-1.5} \iff \int_3^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-1.5} \iff e^{-3\lambda} = e^{-1.5} \iff \lambda = 1/2. \text{ Logo, } E[X] = \frac{1}{\lambda} = 2.$$

- (b) Determine o valor do primeiro quartil do tempo de vida do satélite. (1.5)

$$F_X(q) = 1/4 \iff \int_0^q 1/2 e^{-x/2} dx = 1/4 \iff e^{-q/2} = 3/4 \iff q = -2 \log(3/4) \approx 0.5754 \text{ anos.}$$

- (c) Determine a probabilidade aproximada de o tempo total de vida em órbita de 100 satélites desse tipo ser superior a 200 anos. Indique as hipóteses que assumir. (3.0)

Seja S = “tempo total de vida de 100 satélites” com $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, em que X_i representa o tempo de vida do i^{o} satélite. Admitindo que os tempos de vida de diferentes satélites são independentes, e uma vez que S é a soma de um número suficientemente grande de variáveis aleatórias, tem-se pelo T.L.C. que

$$\frac{S - E[S]}{\sqrt{\text{Var}[S]}} \stackrel{d}{\sim} N(0, 1).$$

$$E[S] = E[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100E[X] = 200$$

$$\text{Var}[S] = \text{Var}[\sum_{i=1}^{100} X_i] = 100\text{Var}[X] = 400$$

$$\text{Então, } P(S > 200) \stackrel{TLC}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{200 - 200}{\sqrt{400}}\right) = 0.5.$$

2. Admita que a função de probabilidade conjunta de um par aleatório discreto (X, Y) é a seguinte:

$X \setminus Y$	0	1
0	0.0	0.3
1	0.4	0.2
2	0.0	0.1

- (a) Avalie a função de distribuição conjunta de (X, Y) nos pontos $(1, 1)$ e $(\frac{\pi}{2}, 1)$. (1.0)

$$F_{X,Y}(1, 1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = \sum_{x \leq 1} \sum_{y \leq 1} f_{X,Y}(x, y) = 0.9.$$

$$F_{X,Y}(\frac{\pi}{2}, 1) = P(X \leq \frac{\pi}{2}, Y \leq 1) = F_{X,Y}(1, 1) = 0.9.$$

- (b) Calcule $E[X|Y=1]$. (1.5)

$$f_{X|Y=1}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, 1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} 3/6, & x = 0 \\ 2/6, & x = 1 \\ 1/6, & x = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ uma vez que } f_Y(1) = \sum_x f_{X,Y}(x, 1) = 0.6.$$

$$E[X|Y=1] = \sum_{x=0}^2 x f_{X|Y=1}(x) = 2/3.$$

- (c) Determine $\text{Var}[X + Y^2]$. (2.5)

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0.4, & y = 0 \\ 0.6, & y = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \iff Y \sim \text{Ber}(0.6)$$

$$E[Y] = 0.6 \text{ e } Var[Y] = 0.24$$

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y) \begin{cases} 0.3, & x = 0 \\ 0.6, & x = 1 \\ 0.1, & x = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E[X] = \sum_x x f_X(x) = 0.8, E[X^2] = \sum_x x^2 f_X(x) = 1.0 \implies Var[X] = 0.36$$

$$E[XY] = \sum_x \sum_y xy f_{X,Y}(x, y) = 0.4, Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = -0.08$$

$$Var[X + Y^2] = Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X, Y] = 0.44, \text{ uma vez que, neste caso, } Y = Y^2.$$