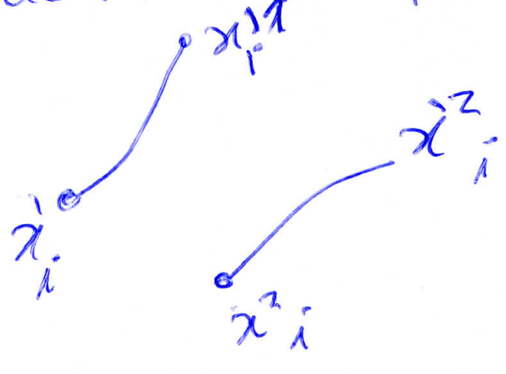
O tensor das deformações
["strain tensor"]

A posição de qualquer ponto de um corpo é descrita matematicamente pelo seu vector posição $\vec{r}$ (com componentes x_i) num qualquer sistema de coordenadas. Foquemos atenção num ponto particular com coordenadas $\vec{r}$ antes da deformação $\vec{r}\,'$ depois. O deslocamento deste ponto devido à deformação é

$$\vec{r}\,' - \vec{r} = \vec{\xi} \ , \quad \xi_i = x'_i - x_i \text{ é o vector de deslocamento}$$

Se soubermos ξ_i em função de x_j então a deformação do objecto é totalmente conhecida. Quando o corpo é deformado, a distância pontos varia. Se o raio vector entre 2 pontos antes da deformação é dx_i, depois será



$$dx'_i = dx_i + d\xi_i$$

A distância entre os pontos é antes

$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_i dx_i$ e depois

$dl'^2 = dx'_i dx'_i = (dx_i + d\xi_i)^2$

Mas $d\xi_i = \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_k$ logo

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

Que pode ser escrito como

(o 2º termo é $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} dx_i dx_k$)

$$dl'^2 = dl^2 + 2 S_{ik} dx_i dx_k$$

$$S_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\right) \equiv \varepsilon_{ik}$$

$$\equiv u_{ik}$$

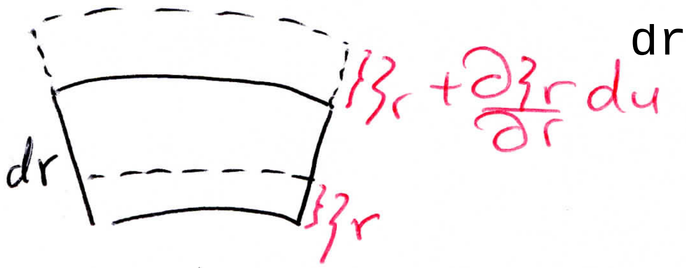
para alguns autores

Este é o tensor ~~das~~ deformações (strain tensor)

- O tensor não tem dimensões, e as entradas são as quantidades $\frac{\delta l}{l}$ que discutimos atrás

Podemos também expressar o tensor em coordenadas esféricas ou cilíndricas. Isto pode fazer-se de várias formas. [Façam-no usando transformação de coordenadas!] Geometricamente também é relativamente simples. Consideremos coordenadas cilíndricas $r\theta z$.

- Olhemos primeiro para S_{rr}

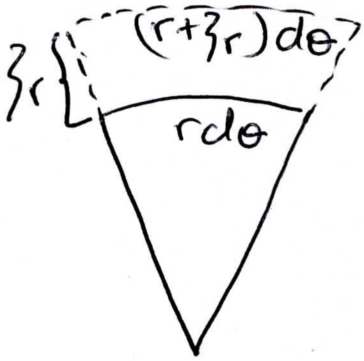


$$S_{rr} = \frac{\xi_r + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} dr - \xi_r}{dr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r}$$

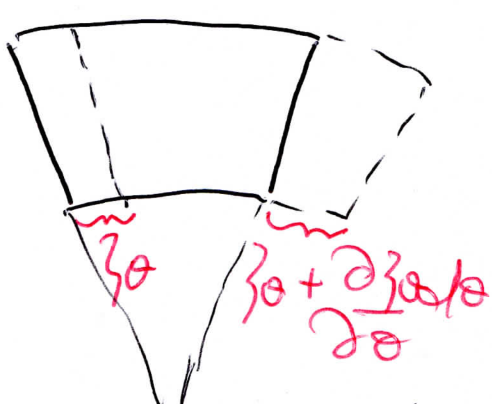
- A deformação $S_{\theta\theta}$ tem duas componentes

$$S_{\theta\theta} = S^1_{\theta\theta} + S^2_{\theta\theta}$$

A primeira é a mudança de distâncias devido ao movimento radial, a segunda devido ao circumferencial.



$$S^1_{\theta\theta} = \frac{(r+\xi_r)\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{\xi_r}{r}$$



$$S^2_{\theta\theta} = \frac{\xi_\theta + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} d\theta - \xi_\theta}{rd\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta}$$

ETC.

O resultado geral está apresentado, por exemplo no Lifschitz,

$$S_{rr} = \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \qquad S_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\xi_r}{r}$$

$$S_{zz} = \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \qquad 2S_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_\theta}{\partial z}$$

$$2\,S_{rz} = \frac{\partial \xi_r}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial r}$$

$$2\,S_{r\theta} = \frac{\partial \xi_\theta}{\partial r} - \frac{\xi_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi_r}{\partial \theta}$$

Eixos Principais da deformação
[Principal strain axes]

Vejamos uma situação simplificada, em que não existe deformação ao longo de um eixo. Isto acontece quando lidamos com membranas no plano x-y por exemplo. O estado das deformações num dado sistema coordenado é

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[na realidade podemos ter S_{zz} que nada se altera no argumento em baixo]

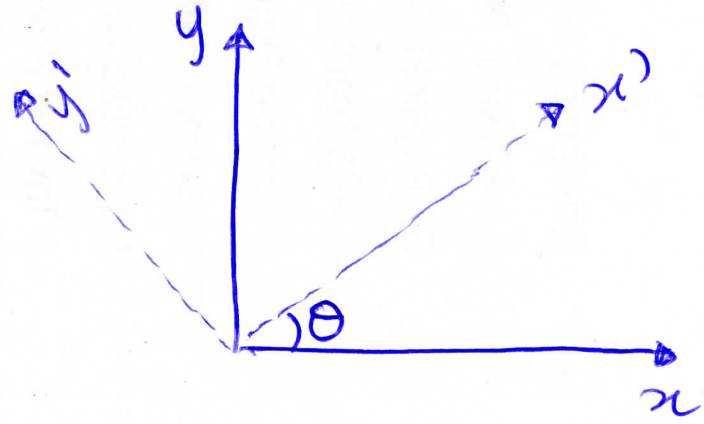
Consideremos agora uma rotação de xy para $x'y'$ de forma que

$$[S'] = \begin{pmatrix} S'_{xx} & S'_{xy} & 0 \\ S'_{xy} & S'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como sabemos [ver práticas], se definirmos

$a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ com $\vec{e}_j$ versores, então

$$T'_{ij} = T_{mn} a_{mi} a_{nj}$$



16.1

Para esta transformação,

$$[a] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$S'_{11} = S_{mn} a_{m1} a_{n1} = S_{11} a_{11}^2 + S_{21} a_{21} a_{11} + S_{12} a_{11} a_{21} + S_{22} a_{21}^2$$

$$= S_{11} \cos^2\theta + 2 S_{12} \cos\theta \operatorname{sen}\theta + S_{22} \operatorname{sen}^2\theta$$

$$S'_{22} = S_{11} \operatorname{sen}^2\theta + S_{22} \cos^2\theta - 2 S_{12} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$S'_{12} = (-S_{11} + S_{22}) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + S_{12} (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

Ora, $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$; $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

Logo,

$$S'_{xx} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} + \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \cos 2\theta + S_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (1)$$

$$S'_{yy} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} - \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \cos 2\theta - S_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \quad (2)$$

$$S'_{xy} = -\frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \operatorname{sen} 2\theta + S_{xy} \cos 2\theta$$

o que permite escrever

$$S'_{xx} + S'_{yy} = S_{xx} + S_{yy} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} S'_{xx} = 2S'_{xy} \quad \frac{\partial}{\partial\theta} S'_{yy} = -2S'_{xy} \quad (4)$$

$$S'_{xy} = 0 \text{ quando } Tg\,2\theta = \frac{2S_{xy}}{S_{xx} - S_{yy}} \quad (5)$$

- As direcções dos eixos $x'y'$ que correspondem à direcção (5) chamam-se direcções principais. Os eixos são os eixos principais e as deformações S'_{xx} e S'_{yy} são as deformações principais.

- Se x', y' forem eixos principais, $S'_{xy} = 0$ e (4) mostra que S'_{xx} ou S'_{yy} são máximos ou mínimos com respeito a qualquer direcção θ. Substituindo em (1) e (2) o ângulo θ (prove!)

$$S_{\substack{max\\min}} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S_{xx} - S_{yy}}{2}\right)^2 + S_{xy}^2}$$

- Por outro lado, diferenciando (4) em ordem a θ, podemos calcular o ângulo para o qual S'_{xy} toma uma valor extremo. Pode-se mostrar que este ângulo faz 45° com as direcções principais e que

$$S_{\substack{xy\\max}} = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = \sqrt{\left(\frac{S_{xx} - S_{yy}}{2}\right)^2 + S_{xy}^2}$$

Exemplo:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos seguir o procedimento anterior, que daria

$S_{\substack{max \\ min}} = \pm 5$ e $tg\, 2\theta = \frac{8}{6} \Rightarrow \theta = \frac{0.927295}{2}$

De forma equivalente, podemos diagonalizar a matriz

$Det(S - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = -5, 5, 1$

$[S - \lambda I]v = 0 \Rightarrow v_2 = (-1, 2, 0);\ v_1 = (2, 1, 0);\ v_3 = (0, 0, 1)$

Logo, a matriz de transformação

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad S' = P^{-1} S P = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto $\cos\theta = \vec{e_1}' \cdot \vec{e_1} = (1,0,0)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 1, 0\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\theta = \frac{0.927295}{2}$ e