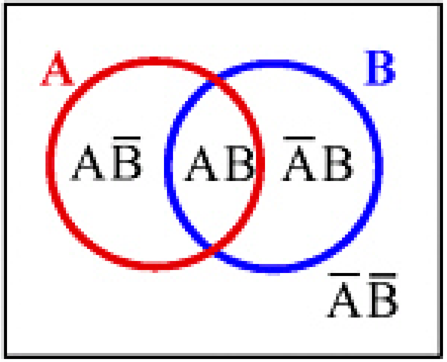
TÉCNICO LISBOA

Sistemas Digitais (SD)

Funções Lógicas



A	B	Saída
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Aula Anterior

- **Na aula anterior:**
  - Elementos de Tecnologia
    - Circuitos integrados
    - Famílias lógicas
  - Funções Lógicas
    - Circuitos com portas NAND
    - Circuitos com portas NOR

TÉCNICO LISBOA

Planeamento

SEMANA	TEÓRICA 1	TEÓRICA 2	PROBLEMAS/LABORATÓRIO
17/Fev a 21/Fev	Introdução	Sistemas de Numeração	
24/Fev a 28/Fev	**CARNAVAL**	Álgebra de Boole	P0
02/Mar a 06/Mar	Elementos de Tecnologia	Funções Lógicas	VHDL
9/Mar a 13/Mar	Minimização de Funções	Minimização de Funções	L0
16/Mar a 20/Mar	Def. Circuito Combinatório; Análise Temporal	Circuitos Combinatórios	P1
23/Mar a 27/Mar	Circuitos Combinatórios	Circuitos Combinatórios	**L1**
30/Mar a 03/Abr	Circuitos Sequenciais: Latches	Circuitos Sequenciais: Flip-Flops	P2
06/Abr a 10/Abr	**FÉRIAS DA PÁSCOA**	**FÉRIAS DA PÁSCOA**	**FÉRIAS DA PÁSCOA**
13/Abr a 17/Abr	Caracterização Temporal	Registos	L2
20/Abr a 24/Abr	Contadores	Circuitos Sequenciais Síncronos	P3
27/Abr a 01/Mai	Síntese de Circuitos Sequenciais Síncronos	Síntese de Circuitos Sequenciais Síncronos	L3
04/Mai a 08/Mai	Exercícios **Teste 1**	Memórias	P4
11/Mai a 15/Mai	Máq. Estado Microprogramadas: Circuito de Dados e Circuito de Controlo	Máq. Estado Microprogramadas: Microprograma	L4
18/Mai a 22/Mai	Circuitos de Controlo, Transferência e Processamento de Dados de um Processador	Lógica Programável	P5
25/Mai a 29/Mai	P6	P6	L5

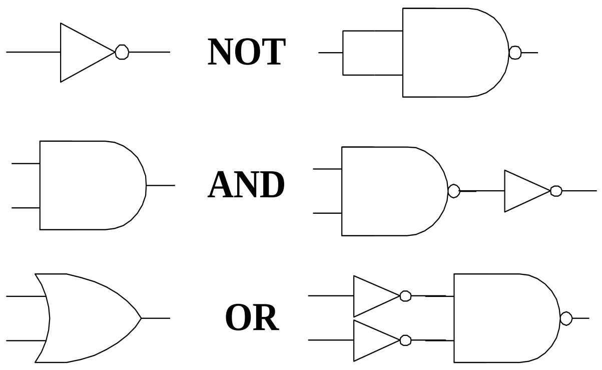
Sumário

- **Tema da aula de hoje:**
  - Funções lógicas:
    - Circuitos com portas NAND (revisão);
    - Circuitos com portas NOR (revisão);
  - Representações normalizadas:
    - Soma de produtos;
    - Mintermos;
    - Produto de somas;
    - Maxtermos;
  - Funções incompletamente especificadas.

- **Bibliografia:**
  - **M. Mano, C. Kime**: Secção 2.3
  - **G. Arroz, J. Monteiro, A. Oliveira**: Secção 2.2

Funções Lógicas

- **Circuitos com portas NAND:**
  - A porta NAND é considerada uma porta universal porque qualquer circuito digital pode ser realizado apenas com portas NAND.
  - Qualquer função booleana é realizável apenas com portas NAND por substituição directa das operações NOT, AND e OR.
  - A operação NOT é normalmente considerada em sentido lato, como uma NAND de 1 entrada.



  - Nalgumas tecnologias (p.ex. TTL) as portas NAND são as portas mais simples (portanto mais baratas), pelo que é vantajosa a realização de circuitos só com NANDs.

Funções Lógicas

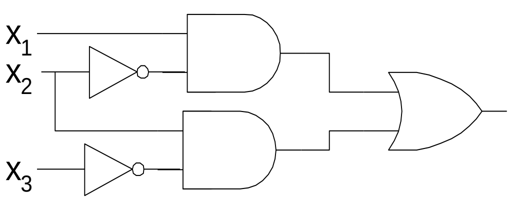
Circuitos com portas NAND (cont.):

- Uma função representada na forma de uma soma de produtos pode ser transformada numa forma directamente realizável apenas com portas NAND por simples aplicação da lei de DeMorgan.

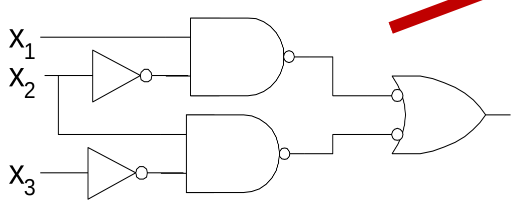
Exemplo:

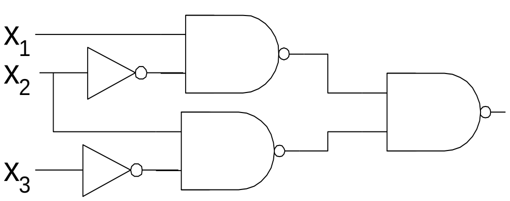
$$f = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3 x_2 = \overline{\overline{x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3 x_2}} = \overline{\overline{x_1\bar{x}_2}\cdot\overline{\bar{x}_3 x_2}}$$

$$= \left(x_1 \ nand \ \bar{x}_2\right) nand \left(\bar{x}_3 \ nand \ x_2\right)$$



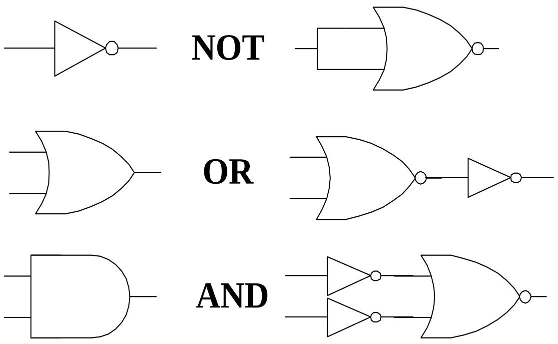
A estrutura do circuito mantém-se inalterada.





Funções Lógicas

Circuitos com portas NOR:

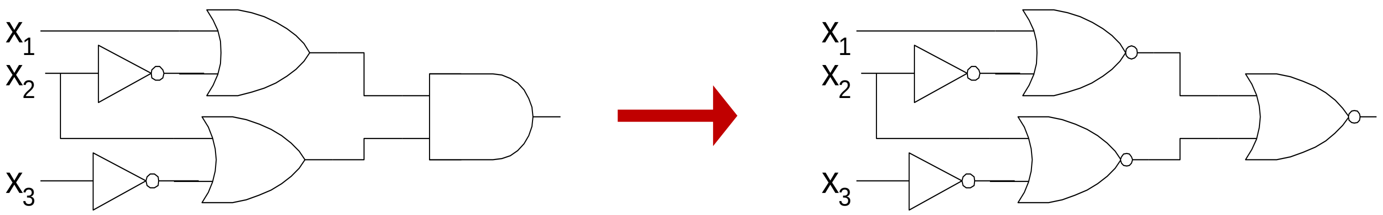


Dual:

- Qualquer circuito pode ser realizado apenas com portas NOR.
- No caso de a função estar representada como um produto de somas, a transformação mantém a estrutura.

$$g = (x_1 + \bar{x}_2)\cdot(\bar{x}_3 + x_2) = \overline{\overline{(x_1 + \bar{x}_2)\cdot(\bar{x}_3 + x_2)}} = \overline{\overline{(x_1 + \bar{x}_2)} + \overline{(\bar{x}_3 + x_2)}}$$

$$= (x_1 \; nor \; \bar{x}_2) \; nor \; (\bar{x}_3 \; nor \; x_2)$$



Funções Lógicas

REPRESENTAÇÃO NORMALIZADA: SOMA DE PRODUTOS

- Designa-se por forma normal **disjuntiva** de uma função booleana simples completamente especificada, $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_N)$, uma expressão lógica representativa da função com a estrutura de uma soma de produtos.
- Por esta razão, designa-se habitualmente uma forma normal disjuntiva simplesmente por **soma de produtos**.
- Se cada parcela for constituída por um produto lógico envolvendo N literais distintos, diz-se que a função se encontra representada na primeira forma canónica ou **forma canónica disjuntiva**.

Exemplos:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 . x_2 + \overline{x_1} . \overline{x_2} . \overline{x_3} \qquad \leftarrow \text{forma não canónica}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 . x_2 . x_3 + x_1 . x_2 . \overline{x_3} + \overline{x_1} . \overline{x_2} . \overline{x_3} \qquad \leftarrow \text{forma canónica}$$

Funções Lógicas

MINTERMOS:

- Designa-se por mintermo (também produto canónico, implicante canónico ou termo minimal) um termo de produto em que todas as variáveis aparecem exactamente uma vez, complementadas ou não.

Mintermos para 3 variáveis

x_3	x_2	x_1	mintermo	
0	0	0	$\bar{x}_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1$	m_0
0	0	1	$\bar{x}_3.\bar{x}_2.x_1$	m_1
0	1	0	$\bar{x}_3.x_2.\bar{x}_1$	m_2
0	1	1	$\bar{x}_3.x_2.x_1$	m_3
1	0	0	$x_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1$	m_4
1	0	1	$x_3.\bar{x}_2.x_1$	m_5
1	1	0	$x_3.x_2.\bar{x}_1$	m_6
1	1	1	$x_3.x_2.x_1$	m_7

Um **mintermo** representa exactamente uma combinação das variáveis binárias na tabela de verdade da função.

Uma função de n variáveis tem até 2^n mintermos.

Cada mintermo é também designado por m_i em que o índice *i* indica o número decimal equivalente à combinação binária por ele representada.

O mintermo vale 1 para a combinação representada e 0 para todas as outras.

TÉCNICO LISBOA

Funções Lógicas

■ REPRESENTAÇÃO NORMALIZADA: PRODUTO DE SOMAS

- Designa-se por forma normal **conjuntiva** de uma função booleana simples completamente especificada, $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_N)$, uma expressão lógica representativa da função com a estrutura de um produto de somas.
- Por esta razão designa-se habitualmente uma forma normal conjuntiva simplesmente por **produto de somas**.
- Se cada parcela for constituída por uma soma lógica envolvendo **N** literais distintos, diz-se que a função se encontra representada em segunda forma canónica ou **forma canónica conjuntiva**.

Exemplos:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2).(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}) \quad \leftarrow \textbf{forma não canónica}$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3).(x_1+x_2+\overline{x_3}).(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}) \quad \leftarrow \textbf{forma canónica}$$

Funções Lógicas

MAXTERMOS:

- Designa-se por maxtermo (também soma canónica, implicado canónico ou termo maximal) um termo de soma em que <u>todas as variáveis aparecem exactamente uma vez</u>, complementadas ou não.

Maxtermos para 3 variáveis

x_3	x_2	x_1	maxtermo	
0	0	0	$x_3 + x_2 + x_1$	M_0
0	0	1	$x_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_1
0	1	0	$x_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_2
0	1	1	$x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_3
1	0	0	$\bar{x}_3 + x_2 + x_1$	M_4
1	0	1	$\bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_5
1	1	0	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_6
1	1	1	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_7

Um **maxtermo** representa exactamente uma combinação das variáveis binárias na tabela de verdade da função.

Uma função de n variáveis tem até 2^n maxtermos.

Cada maxtermo é também designado por M_i em que o índice i indica o número decimal equivalente à combinação binária por ele representada.

O maxtermo vale 0 para a combinação representada e 1 para todas as outras.

MINTERMOS E MAXTERMOS:

- O **mintermo** corresponde a uma função ≠ 0 com o número mínimo de 1's na tabela da verdade.

Exemplo:

$$f = \bar{x}_3 . x_2 . x_1$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Funções Lógicas

MINTERMOS E MAXTERMOS:

- O **maxtermo** corresponde a uma função ≠ 1 com o número máximo de 1's na tabela da verdade.

Exemplo:

$$f = x_3 + \overline{x}_2 + \overline{x}_1$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funções Lógicas

MINTERMOS E MAXTERMOS:

- Um mintermo e um maxtermo com o mesmo índice são complementos um do outro:

$$m_j = \overline{M}_j$$

x_3	x_2	x_1	mintermo		maxtermo	
0	0	0	$\bar{x}_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1$	m_0	$x_3 + x_2 + x_1$	M_0
0	0	1	$\bar{x}_3.\bar{x}_2.x_1$	m_1	$x_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_1
0	1	0	$\bar{x}_3.x_2.\bar{x}_1$	m_2	$x_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_2
0	1	1	$\bar{x}_3.x_2.x_1$	m_3	$x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_3
1	0	0	$x_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1$	m_4	$\bar{x}_3 + x_2 + x_1$	M_4
1	0	1	$x_3.\bar{x}_2.x_1$	m_5	$\bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_5
1	1	0	$x_3.x_2.\bar{x}_1$	m_6	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_6
1	1	1	$x_3.x_2.x_1$	m_7	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_7

Exemplo:

$$\begin{aligned} m_3 &= \bar{x}_3.x_2.x_1 \\ &= \overline{\overline{\bar{x}_3.x_2.x_1}} \\ &= \overline{x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1} \\ &= \overline{M}_3 \end{aligned}$$

Funções Lógicas

TABELA DA VERDADE ↔ SOMA DE PRODUTOS

- Uma função booleana pode ser expressa algebricamente como uma soma de produtos directamente a partir da tabela de verdade.
- A soma inclui todos os mintermos para os quais a função vale 1.

Exemplo:

$$f(x_3, x_2, x_1) = \sum m(0,1,3,5,7)$$

$$\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1) = {} & \bar{x}_3.\bar{x}_2.\bar{x}_1 && \leftarrow m_0 \\ & + \bar{x}_3.\bar{x}_2.x_1 && \leftarrow m_1 \\ & + \bar{x}_3.x_2.x_1 && \leftarrow m_3 \\ & + x_3.\bar{x}_2.x_1 && \leftarrow m_5 \\ & + x_3.x_2.x_1 && \leftarrow m_7 \end{aligned}$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Funções Lógicas

SOMA DE PRODUTOS ↔ PRODUTO DE SOMAS

- Conversão entre formas canónicas: o produto de somas utiliza os maxtermos correspondentes aos mintermos não utilizados na soma de produtos.
- É equivalente a aplicar a lei de DeMorgan ao complemento da função.

Exemplo:

x_3	x_2	x_1	f	$\overline{f}$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$f(x_3,x_2,x_1) = m_0 + m_1 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$\overline{f(x_3,x_2,x_1)} = m_2 + m_4 + m_6$$

$$f(x_3,x_2,x_1) = \overline{m_2 + m_4 + m_6} = \overline{m}_2.\overline{m}_4.\overline{m}_6$$
$$= M_2.M_4.M_6$$

$$f = \overline{\overline{x}_3.x_2.\overline{x}_1 + x_3.\overline{x}_2.\overline{x}_1 + x_3.x_2.\overline{x}_1}$$
$$= \left(\overline{\overline{x}_3.x_2.\overline{x}_1}\right).\left(\overline{x_3.\overline{x}_2.\overline{x}_1}\right).\left(\overline{x_3.x_2.\overline{x}_1}\right)$$
$$= \left(x_3 + \overline{x}_2 + x_1\right).\left(\overline{x}_3 + x_2 + x_1\right).\left(\overline{x}_3 + \overline{x}_2 + x_1\right)$$

TÉCNICO LISBOA

Funções Lógicas

- **TABELA DA VERDADE $\leftrightarrow$ PRODUTO DE SOMAS**
  - Uma função booleana pode ser expressa algebricamente, como um produto de somas, directamente a partir da tabela de verdade.
  - O produto inclui todos os maxtermos para os quais a função vale 0.

Exemplo:

$$f(x_3,x_2,x_1)=\prod M(2,4,6)$$

$$\begin{aligned} f(x_3,x_2,x_1) &= (x_3+\bar{x}_2+x_1) && \leftarrow M_2 \\ &.(\bar{x}_3+x_2+x_1) && \leftarrow M_4 \\ &.(\bar{x}_3+\bar{x}_2+x_1) && \leftarrow M_6 \end{aligned}$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Funções Lógicas

FUNÇÕES INCOMPLETAMENTE ESPECIFICADAS

Exemplo: Função que detecta se um número, no intervalo [1,6], é múltiplo de 3.

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	X
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	X

A função toma o valor 'X' (às vezes também representado por '-') para cada uma das combinações das entradas que nunca ocorrerão.

Realidade Física: 'X' não existe, apenas existem '0' ou '1'.

X – *"don´t care"*: não nos preocupamos com o comportamento do circuito para os valores fora do intervalo, portanto podemos escolher para cada 'X' o valor mais adequado entre '0' ou '1'.

Representação:

$$f(x_3,x_2,x_1)=\sum m(3,6)+\sum m_d(0,7)$$
$$=m_3+m_6+m_{d0}+m_{d7}$$
$$f(x_3,x_2,x_1)=\prod M(1,2,4,5)\cdot\prod M_d(0,7)$$
$$=M_1.M_2.M_4.M_5.M_{d0}.M_{d7}$$

Funções Lógicas

■ **FUNÇÕES INCOMPLETAMENTE ESPECIFICADAS (cont.)**

Exemplo:

Estratégia: para cada 'X' escolhemos '0' ou '1' de acordo com os objectivos do projecto (habitualmente, maior simplificação).

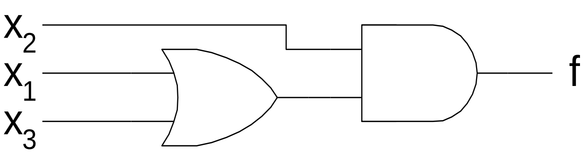
Neste caso, a solução mais simples corresponde a substituir o primeiro 'X' por '0' e o segundo por '1'.

x_3	x_2	x_1	f	$\to$ g
0	0	0	X	$\to$ 0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	X	$\to$ 1

$$f \to g(x_3, x_2, x_1) = \sum m(3,6,7) = \prod M(0,1,2,4,5)$$

$$= x_2 x_1 + x_3 x_2$$

$$= x_2 (x_1 + x_3)$$



PRÓXIMA AULA

Próxima Aula

- **Tema da Próxima Aula:**
  - Minimização algébrica
  - Minimização de Karnaugh:
    - Representação de funções de n variáveis:
      - Quadros de 3 e 4 variáveis;
      - Quadros de n variáveis;
    - Agrupamentos de uns e zeros:
      - Eixos de simetria;
      - Implicantes e implicados;
      - Implicantes e implicados primos;
      - Implicantes e implicados primos essenciais.

Agradecimentos

Algumas páginas desta apresentação resultam da compilação de várias contribuições produzidas por:

- Nuno Roma
- Guilherme Arroz
- Horácio Neto
- Nuno Horta
- Pedro Tomás