Prof. Vitor Cardoso (responsável)

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica (MEFT)
Física dos Meios Contínuos: Formulário

Coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi\,, \quad y = r\sin\theta\sin\phi\,, \quad z = r\cos\theta\,, \quad \vec{e}_x = \sin\theta\cos\phi\vec{e}_r + \cos\theta\cos\phi\vec{e}_\theta - \sin\phi\vec{e}_\phi\\
\vec{e}_y &= \sin\theta\sin\phi\vec{e}_r + \cos\theta\sin\phi\vec{e}_\theta + \cos\phi\vec{e}_\phi\,, \quad \vec{e}_z = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta\\
\vec{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z\,, \quad \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\vec{e}_y - \sin\theta e_z\\
\vec{e}_\phi &= -\sin\phi\vec{e}_x + \cos\phi\vec{e}_y
\end{aligned}$$

Tensor das deformações

$$S_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\zeta_k}{\partial x_i}\right)$$

Em coordenadas esféricas (r,θ,ϕ),

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= \frac{\partial\zeta_r}{\partial r}\,, \quad S_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta_\theta}{\partial\theta} + \frac{\zeta_r}{r}\,, \quad S_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\zeta_\phi}{\partial\phi} + \frac{\zeta_\theta\cot\theta}{r} + \frac{\zeta_r}{r}\,,\\
2S_{\theta\phi} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\zeta_\phi}{\partial\theta} - \zeta_\phi\cot\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\zeta_\theta}{\partial\phi}\,, \quad 2S_{r\theta} = \frac{\partial\zeta_\theta}{\partial r} - \frac{\zeta_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta_r}{\partial\theta}\,,\\
2S_{\phi r} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\zeta_r}{\partial\phi} + \frac{\partial\zeta_\phi}{\partial r} - \frac{\zeta_\phi}{r}\,.
\end{aligned}$$

Em coordenadas cilindricas (r,ϕ,z),

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= \frac{\partial\zeta_r}{\partial r}\,,\ S_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta_\phi}{\partial\phi} + \frac{\zeta_r}{r}\,,\ S_{zz} = \frac{\partial\zeta_z}{\partial z}\,,\\
2S_{\phi z} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta_z}{\partial\phi} + \frac{\partial\zeta_\phi}{\partial z}\,,\ 2S_{r\,z} = \frac{\partial\zeta_r}{\partial z} + \frac{\partial\zeta_z}{\partial r}\,, \quad 2S_{r\phi} = \frac{\partial\zeta_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta_r}{\partial\phi} - \frac{\zeta_\phi}{r}\,.
\end{aligned}$$

O tensor das deformações pode ser decomposto em componentes de cisalhamento e de expansão $S_{ik} = \Sigma_{ik} + \frac{1}{3}\Theta\delta_{ik}$.

Tensor das tensões

O tensor das tensões pode ser também decomposto em componentes de cisalhamento e de expansão,

$$T_{ik} = T_{ik}^{\text{cis}} + P\delta_{ik}\,.$$

A relação entre deformação e tensão

$$T_{ik} = -K\Theta\delta_{ik} - 2\mu\Sigma_{ik}\,,$$

onde K é o módulo de expansão (bulk modulus) e μ é o de cisalhamento. Estes coeficientes estão relacionados com o módulo de Young E e o rácio de Poisson ν:

$$E = \frac{9\mu K}{3K+\mu}\,, \qquad \nu = \frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}\,, \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}\,, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}\,.$$

Densidade de energia elástica $U = -\frac{1}{2}T_{ij}\zeta_{i,j}$.

A equação de Navier-Cauchy. Na presença da gravidade como força de corpo exterior,

$$\left(K + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}\zeta_l + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\zeta_j + \rho g_j = \rho\ddot{\zeta}_j\,,$$

onde g_j é a componente da aceleração da gravidade na direcção j. Esta equação pode ser expressa como

$$\text{grad}\left(\text{div}\vec{\zeta}\right) - \frac{3\mu}{3K+4\mu}\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\zeta}\right) = -\frac{3\rho\left(\vec{g}-\ddot{\vec{\zeta}}\right)}{3K+4\mu}$$

Equilibrio de barras finas. Uma barra elongada na direção z está sujeita a uma força F_z segundo z e a uma força de corpo (como a gravidade) por unidade de comprimento W, segundo o eixo transveral y. Em equilibrio, a deflexão η obedece à equação de Euler-Bernoulli

$$E\left(I_y\eta''\right)'' + F_z\eta'' - W_y = 0\,,$$

onde derivadas são em ordem a z. A esta configuração corresponde uma força de cisalhamento segundo y,

$$F_y = -E\left(I_y\eta''\right)' - F_z\eta'\,. \tag{1}$$

Equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

Equação de Euler

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\text{grad})\,\vec{v} = \frac{\vec{f} - \text{grad}\,\text{P}}{\rho}$$

$$D_1 v_r - \frac{v_\phi^2}{r} = \frac{f_r - \partial_r P}{\rho}\,, \qquad D_1 v_\phi + \frac{v_\phi v_r}{r} = \frac{r f_\phi - \partial_\phi P}{r\rho}\,, \qquad D_1 v_z = \frac{f_z - \partial_z P}{\rho}\,,$$

$$D_1 \equiv \partial_t + v_r\partial_r + \frac{v_\phi}{r}\partial_\phi + v_z\partial_z\,.$$

$$D_2 v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = \frac{f_r - \partial_r P}{\rho}\,, \qquad D_2 v_\theta + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r} = \frac{r f_\theta - \partial_\theta P}{r\rho}\,,$$

$$D_2 v_\phi + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r} = \frac{r\sin\theta f_\phi - \partial_\phi P}{\rho r\sin\theta}\,, \qquad D_2 \equiv \partial_t + v_r\partial_r + \frac{v_\theta}{r}\partial_\theta + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\,.$$

Equação de Bernoulli para escoamento potencial $v = \nabla\Psi$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \Phi + h = c(t)$$

Equação de Navier-Stokes para fluidos viscosos incompressíveis $(\nu = \eta/\rho)$

O tensor das tensões para estes fluidos tem a forma

$$T_{ij}^{\rm tot} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j + T_{ij}^{\rm visc}\,, \qquad T_{ij}^{\rm visc} = -\eta\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k v_k\right)$$

É costume escrever este tensor como

$$T_{ij}^{\rm tot} = \rho v_i v_j + T_{ij}\,,$$

onde em coordenadas cilindricas:

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= P - 2\eta\partial_r v_r, \quad T_{\phi\phi} = P - 2\eta\left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial_\phi v_\phi}{r}\right), \quad T_{zz} = P - 2\eta\partial_z v_z\,,\\
T_{r\phi} &= -\eta\left(\frac{\partial_\phi v_r}{r} + \partial_r v_\phi - \frac{v_\phi}{r}\right), \quad T_{\phi z} = -\eta\left(\partial_z v_\phi + \frac{\partial_\phi v_z}{r}\right), \quad T_{zr} = -\eta\left(\partial_r v_z + \partial_z v_r\right)
\end{aligned}$$

ou esféricas:

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= P - 2\eta\partial_r v_r, \quad T_{\phi\phi} = P - 2\eta\left(\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi v_\phi + \frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right), \quad T_{\theta\theta} = P - 2\eta\left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial_\theta v_\theta}{r}\right),\\
T_{r\theta} &= -\eta\left(\frac{\partial_\theta v_r}{r} + \partial_r v_\theta - \frac{v_\theta}{r}\right), \quad T_{\theta\phi} = -\eta\left(\frac{\partial_\phi v_\theta}{r\sin\theta} + \frac{\partial_\theta v_\phi}{r} - \frac{v_\phi\cot\theta}{r}\right), \quad T_{\phi r} = -\eta\left(\partial_r v_\phi + \frac{\partial_\phi v_r}{r\sin\theta} - \frac{v_\phi}{r}\right)
\end{aligned}$$

A equação de movimento é

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.{\rm grad})\,\vec{v} = \frac{\vec{f} - {\rm grad\,P} + \eta\nabla^2\vec{v}}{\rho}\,.$$

$$\begin{aligned}
D_1 v_r - \frac{v_\phi^2}{r} &= \frac{f_r - \partial_r P}{\rho} + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} - \frac{v_r}{r^2}\right),\\
D_1 v_\phi + \frac{v_\phi v_r}{r} &= \frac{rf_\phi - \partial_\phi P}{r\rho} + \nu\left(\nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2}\right),\\
D_1 v_z &= \frac{f_z - \partial_z P}{\rho} + \nu\nabla^2 v_z\,, \qquad D_1 \equiv \partial_t + v_r\partial_r + \frac{v_\phi}{r}\partial_\phi + v_z\partial_z\,.
\end{aligned}$$

Aqui, $\nabla^2 v_r, \nabla^2 v_\phi, \nabla^2 v_z$ é o Laplaciano escrito em coordenadas cilindricas (ver abaixo a forma explicita deste operador). Em coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned}
D_2 v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} &= \frac{f_r - \partial_r P}{\rho} + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} - \frac{2v_r}{r^2}\right),\\
D_2 v_\theta + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r} &= \frac{rf_\theta - \partial_\theta P}{r\rho} + \nu\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right),\\
D_2 v_\phi + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r} &= \frac{r\sin\theta f_\phi - \partial_\phi P}{\rho r\sin\theta} + \nu\left(\nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}\right),\\
D_2 &\equiv \partial_t + v_r\partial_r + \frac{v_\theta}{r}\partial_\theta + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\,.
\end{aligned}$$

Aqui, usamos $\nabla^2 v_r, \nabla^2 v_\phi, \nabla^2 v_z$ como o Laplaciano escrito em coordenadas esféricas (ver abaixo a forma explicita deste operador).

Operadores matemáticos

Transformação de tensores
Se mudarmos de coordenadas (x, y, y) para (x', y', y') então

$$T'_{ij} = T_{mn} a_{mi} a_{nj} \,,$$

onde $a_{ij} = \vec{e}_i . \vec{e'}_j$, e $\vec{e}_i$, $\vec{e'}_j$ são versores no sistemas respectivos.
O gradiente de um escalar f, pode ser expressa como,

$$\mathrm{grad}\, f \;=\; \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi \,.$$

A divergência de um vector pode ser expressa como,

$$\mathrm{div}\vec{V} \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

O Laplaciano pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \nabla^2 f \;&=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \,, \\ &=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

O rotacional de um vector $\vec{V}$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{V} \;&=\; \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rV_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \phi}\right)\vec{e}_z \,, \\ &=\; \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\phi \sin\theta\right) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rV_\phi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\phi \end{aligned}$$

Teorema de Helmholtz. Um vector $\vec{a}$ pode ser decomposto na soma de duas componentes, uma com rotacional nulo, e outra com divergência nula,

$$\vec{a} = \nabla\times\vec{b} + \nabla\Phi$$

Identidades.

$$\nabla\times(\Phi\vec{a}) = \Phi\nabla\times\vec{a} + (\nabla\Phi)\times\vec{a}$$

$$\nabla(\nabla\times\vec{a}) = 0\,, \qquad \nabla\times(\nabla\Phi) = 0\,, \qquad \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla\left(\nabla\vec{a}\right) - \nabla^2\vec{a}$$