Mecânica Analítica

2020-2021

Série 3

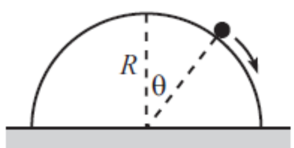
Responsável: Hugo Terças

Nesta série, concluímos o estudo dos multiplicadores de Lagrange e iniciamos os potenciais centrais

⋆⋆ **Problema 1.** Partindo do princípio de Hamilton, mostre que para $L = L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$, as equações de Euler-Lagrange se escrevem[1]

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} = 0.$$

⋆ **Problema 2. Forças de constrangimento na calote esférica.** Considere uma calote esférica de raio R. Do seu topo, uma partícula pontual de massa m parte, do repouso, podendo deslizar, sem atrito, até a abandonar.



a) Identifique os graus de liberdade do sistema e obtenha o respectivo Lagrangeano.

b) Escreva as equações do movimento.

c) Assuma que a partícula e a calote interagem entre si através de um potencial $V(\mathbf{r})$. Identifique a forma desse potencial e obtenha a força de constrangimento. Para isso, promova a coordenada radial (constrangida) a grau de liberdade e imponha a restrição *a posteriori*. Interprete fisicamente.

d) Determine a altura crítica h_c a que a partícula abandona a calote.

⋆⋆⋆ **Problema 3. O poço de Evel Knivel.** [2]. Evel Knivel foi um motociclista americano que ficou famoso pelas suas proezas acrobáticas. Foi considerado um dos mais aclamados duplos do cinema americano entre as décadas de 70 e 80, tendo feito mais de 75 saltos sobre motociclos e somado mais de 433 fracturas ósseas. Numa das suas proezas, Evel punha-se à prova no conhecido *poço da morte*.

Considere que Evel e a sua motoreta (massa total m) circulam na superfície de um parabolóide, obtido por revolução em torno do eixo zz, e de abertura a.

[1] Esta forma das equações de Euler-Lagrange não são uma mera formalidade. Na verdade, elas são bastante recorrentes em teoria de campo.

[2] Podia ser o *poço da morte*, mas, felizmente para Evel, não foi o caso.

a) Mostre que o Lagrangeano do sistema se pode escrever como

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz,$$

onde ρ é a distância de um ponto do parabolóide ao eixo zz e φ o ângulo polar.

b) Como sabe, as equações de Euler-Lagrange só são válidas para coordenadas generalizadas independentes. Para as obter, temos de eliminar algumas coordenadas escrevendo as equações de ligação. Obtenha essa(s) equação(ões).

c) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para este problema. Mostre que, para velocidades angulares constantes, $\dot{\varphi} = \omega_0$, se tem

$$\lambda = -\frac{1}{2}m\omega_0^2.$$

Qual o seu significado físico?

d) Vamos estudar quão estável é o movimento de Evel. Para tal, consideremos perturbações nas coordenadas do tipo $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $z = z_0 + \delta z$ e $\dot{\varphi} = \omega_0 + \delta\dot{\varphi}$. Escreva as equações de Euler-Lagrange em primeira ordem nas perturbações e mostre que Evel está limitado (sorte dele!) a pequenas oscilações de frequência angular

$$\Omega = \frac{2\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{2\omega_0^2\rho_0^2}{ag}}}.$$

⋆⋆ **Problema 4. O pêndulo móvel.** Considere um pêndulo simples, composto por uma massa m suspensa numa haste indeformável de comprimento ℓ e de massa desprezável, cujo ponto de suporte é uma massa M que se pode deslocar horizontalmente.

a) Escolha θ (o ângulo que o pêndulo faz com a vertical) e X (a posição horizontal da massa M em relação à origem) como coordenadas generalizadas. Escreva um Lagrangeano simpático para o sistema.

b) Obtenha as equações do movimento do sistema.

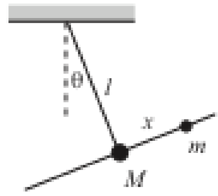
c) Considere o caso em que a massa M se desloca com velocidade constante. Mostre que o Lagrangeano resultante é equivalente (ou seja, resulta nas mesmas equações do movimento) ao caso do pêndulo simples standard (com ponto de suspensão fixo). Discuta o resultado.

d) Considere agora o caso em que a massa M se desloca com aceleração constante. Quantos graus de liberdade tem o sistema? Mostre que neste caso o Lagrangeano não é equivalente ao de um pêndulo simples standard. Qual a origem do novo ingrediente? Escreva as equações do movimento.

e) Ainda no mesmo caso da alínea d), determine a força na direcção r utilizando o método dos multiplicadores indeterminados de Lagrange. A que corresponde o termo não presente no caso standard?

⋆⋆ **Problema 5. O plano oscilante.** Considere uma massa M fixa no vértice que faz um ângulo recto entre uma barra (sem massa) de comprimento ℓ e uma barra muito longa, também sem massa.

Nesta última, um berlinde de massa m pode deslizar, sem atrito. O sistema pode rodar no plano definido pelas duas barras, sendo θ o ângulo com a vertical. Assuma que o berlinde de massa m pode penetrar a massa M.



a) Identifique os graus de liberdade do sistema e obtenha o respectivo Lagrangeano.

b) Determine as equações do movimento.

c) Determine os modos próprios de vibração do sistema no limite das pequenas oscilações.

d) Perceba o que aconteceria se as massas m e M fossem impenetráveis. Que alterações ocorreriam nas alíneas a), b) e c)?

$\star$ **Problema 6. Uma simples barreira centrífuga.** Considere uma mola de constante elástica k e comprimento natural ℓ_0, ligada a uma massa m que se pode mover no plano.

a) Quantos graus de liberdade tem este sistema? Justifique.

b) Escreva o Lagrangeano deste sistema em coordenadas generalizadas e determine as quantidades conservadas. Justifique.

$\star\star$ **Problema 7. A mesa furada.** Considere uma massa m unida a outra massa M por um fio inextensível de comprimento ℓ_0. A massa M é colocada sob a acção da gravidade (movimento vertical), ao passo que a massa m pode movimentar-se no plano horizontal.

a) Quantos graus de liberdade tem este sistema? Justifique.

b) Escreva o Lagrangeano deste sistema em coordenadas generalizadas e determine as quantidades conservadas.

c) Obtenha os pontos de equilíbrio do sistema e caracterize-os. Em condições estes existem?

d) Considere uma pequena perturbação à órbita de equilíbrio, $r = r_0 + \xi$. Obtenha a equação para ξ e verifique o teorema de Bertrand.

$\star\star$ **Problema 8. Um Teorema de Nöther.** Como vimos, o Teorema de Nöther estabelece uma relação geral entre simetrias e leis de conservação. Vejamo-lo formulado na sua versão mais fraca. Para tal, consideremos a seguinte família de transformações contínuas de parâmetro infinitesimal ϵ

$$q_i' = q_i + \epsilon \xi_i(q_i, t),$$

onde ξ_i designam os *geradores das translações.*

a) Mostre que, caso o Lagrangeano seja invariante para a transformação acima, i.e. se $\delta L = \left.\frac{dL}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$, então existe conservação da seguinte quantidade (carga de Nöther)

$$\mathcal{I}(q_i, \dot{q}_i) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \xi_i.$$

b) Use o resultado anterior para demonstrar que a conservação do momento linear é uma consequência da simetria para translações. Para tal, recorra à transformação

$$X = x + \epsilon.$$

c) Repita o ponto anterior considerando a invariância para rotações no plano (x, y),

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lim_{\epsilon \to 0} \begin{bmatrix} x\cos\epsilon & -y\sin\epsilon \\ x\sin\epsilon & y\cos\epsilon \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} x & -\epsilon y \\ \epsilon x & y \end{bmatrix}$$

para demonstrar a conservação do momento angular segundo a direcção z.

$\star\star$ **Fraco, forte e o polaritão.** Considere um sistema mecânico composto por dois osciladores idênticos de massa m e constante elástica k, e suponha, ainda, que estes se encontram ainda ligados entre si por uma mola de constante elástica k'. O acoplamento entre os dois osciladores pode ser de dois tipos, dependendo do valor de k': fraco ou forte, sendo que o último caso é de particular relevância. Em física de matéria condensada, por exemplo, um mecanismo deste tipo permite o acoplamento de partículas elementares de um determinado sistema (ex. fotão acoplando com um excitão, em semi-condutores), dando origem a *quasi-partículas* (neste caso o *polaritão*). A teoria das quasi-partículas é extremamente bem-sucedida na descrição de efeitos colectivos em matéria condensada (esperem para ver!).

a) Mostre que o Lagrangiano do sistema pode ser escrito na seguinte forma

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k'(x_1 - x_2)^2$$

b) Defina novas coordenadas ξ_1 e ξ_2 (quais?) que transformem o problema num outro onde as molas aparecem desacopladas. Escreva as equações do movimento para estas novas coordenadas e interprete fisicamente o resultado.

c) Regressemos às coordenadas originais $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Escreva as respectivas equações do movimento, resolva-as e obtenha os *batimentos*

$$x_1(t) = A_1\left[\sin(\omega_1 t) + \frac{\omega_1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right], \quad x_2(t) = A_2\left[\sin(\omega_1 t) - \frac{\omega_1}{\omega_2}\sin(\omega_2 t)\right].$$

Determine ω_1 e ω_2 e interprete fisicamente. Onde é que já vimos isto?

d) Considere a situação em que $k' \ll k$. Expanda ω_2 em primeira ordem no rácio k'/k e represente graficamente $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Observe o aparecimento de um envelope envolvendo uma oscilação no seu interior.

e) Inverta a situação, tomando agora $k' \gg k$. Que tipo de movimento obtemos? A este fenómeno dá-se o nome de acoplamento forte.