Matemática Computacional

MEBiol, MEBiom, MEFT

2º Teste - Recuperação

Duração: 90 minutos 21/1/2020 – 11:30

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas.

1.[1.5] Considere o sistema

$$\begin{cases} -5x + 3\sin x + 3\cos y = 0 \\ 3\cos x + 3\sin y - 5y = 0 \end{cases}$$

Tomando como iterada inicial $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0,0)$, efetue iterações pelo método de Newton até que $\|(x^{(k)}, y^{(k)}) - (x^{(k-1)}, y^{(k-1)})\|_\infty < 1.6$.

2. Seja f a função definida por $f(x) = 2^{\cos(x)}$ $(x \in \mathbb{R})$.

(a) Considere os nós $x_k = \frac{k\pi}{2}$, com $k = 0,1,2,3,4$.

i) [1.0] Determine o polinómio interpolador de f nos nós x_0, x_1, x_3, x_4.

ii) [1.5] Determine a função da forma

$$g(x) = \alpha + \beta x^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

que melhor ajusta os pontos $(x_k, f(x_k))$, $k = 0,2,4$, no sentido dos mínimos quadrados.

(b) Seja $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

i) [1.0] Calcule um valor aproximado de I utilizando a regra dos trapézios com 5 nós igualmente espaçados.

ii) [1.5] Determine um conjunto de nós de integração que podem ser usados na regra dos trapézios de modo a garantir um valor aproximado do integral I com 5 algarismos significativos.

3. [2.0] Considere o integral

$$I : C([a,b]) \to \mathbb{R}, \qquad I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

e uma regra de quadratura

$$Q : C([a,b]) \to \mathbb{R}, \qquad Q(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

para aproximar I. Sabendo que os nós de integração $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ e os correspondentes pesos $A_0, A_1, \ldots, A_n$ foram calculados para garantir que Q tem grau de exatidão máximo, determine o grau de Q e mostre que, neste caso, todos os pesos são todos positivos.

4. [1.5] Efetue um passo do método de Euler para aproximar $u(1)$ e $u'(1)$, onde u é a solução do problema

$$\begin{cases} u''(t) = \frac{t}{u^2(t)+1}, \ t \geq 0, \\ u(0) = A, \ u'(0) = B. \end{cases}$$

Resolução

1. A primeira iterada é obtida da seguinte forma ($\mathbf{X} = (x, y)$)

$$\mathbf{J}(x^{(0)}, y^{(0)})\Delta\mathbf{X}^{(0)} = -\mathbf{f}(x^{(0)}, y^{(0)}), \qquad \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X}^{(0)} + \Delta\mathbf{X}^{(0)}.$$

Tem-se

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} -5x + 3\sin x + 3\cos y \\ 3\cos x + 3\sin y - 5y \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} -5 + 3\cos x & -3\sin y \\ -3\sin x & 3\cos y - 5 \end{bmatrix}.$$

Com $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0,0)$, obtemos

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \Delta\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \ \mathbf{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Para a diferença entre as duas primeiras iteradas:

$$\|(x^{(1)}, y^{(1)}) - (x^{(0)}, y^{(0)})\|_\infty = \|(\Delta x^{(0)}, \Delta y^{(0)})\|_\infty = \frac{3}{2} < 1.8.$$

2.

(a) i) Os nós a usar são dados por

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{3\pi}{2}, \quad x_4 = 2\pi$$

e expressão para o polinómio interpolador é

$$p(x) = f(0) + f[0,\pi/2]x + f[0,\pi/2,3\pi/2]x(x-\pi/2) + f[0,\pi/2,3\pi/2,2\pi]x(x-\pi/2)(x-3\pi/2).$$

Construimos a tabela de diferenças divididas

x_i	$F(x_i)$	$F[\cdot,\cdot]$	$F[\cdot,\cdot,\cdot]$	$F[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0	2			
		$-\frac{2}{\pi} = -0.63661977$		
$\frac{\pi}{2}$	1		$\frac{4}{3\pi^2} = 0.13509491$	
		0		0
$\frac{3\pi}{2}$	1		$\frac{4}{3\pi^2} = 0.13509491$	
		$\frac{2}{\pi} = 0.63661977$		
2π	2			

e concluimos que polinómio interpolador tem apenas grau 2:

$$p(x) = 2 - \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{3\pi^2}x\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

ii) Os pontos a considerar no ajustamento são

$$(x_0, f(x_0)) = (0,2), \quad (x_2, f(x_2)) = (\pi, 1/2), \quad (x_4, f(x_4)) = (2\pi, 2)$$

e as funções de base associadas à função $g(x) = \alpha + \beta x^2$ são dadas por

$$\Phi_1(x) = 1 \quad \Phi_2(x) = x^2.$$

O sistema de equações normais é da forma

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^2 \phi_1(x_{2k})^2 & \sum_{k=0}^2 \phi_1(x_{2k})\phi_2(x_{2k}) \\ \sum_{k=0}^2 \phi_1(x_{2k})\phi_2(x_{2k}) & \sum_{k=0}^2 \phi_2(x_{2k})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^2 \phi_1(x_{2k})f(x_{2k}) \\ \sum_{k=0}^2 \phi_2(x_{2k})f(x_{2k}) \end{bmatrix}$$

com

$$\sum_{k=0}^{2} \phi_1(x_{2k})^2 = 3, \qquad \sum_{k=0}^{3} \phi_2(x_{2k})^2 = \pi^4 + (2\pi)^4 = 17\pi^4,$$

$$\sum_{k=0}^{3} \phi_1(x_{2k})\phi_2(x_{2k}) = \pi^2 + (2\pi)^2 = 5\pi^2,$$

$$\sum_{k=0}^{3} \phi_1(x_{2k})f(x_{2k}) = 2 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{3} \phi_1(x_{2k})f(x_{2k}) = \frac{17}{2}\pi^2.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 5\pi^2 \\ 5\pi^2 & 17\pi^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{17}{2}\pi^2 \end{bmatrix}$$

obtém-se $(\alpha, \beta) = (1.30769, 0.0116909)$ e a função de ajustamento fica

$$g(x) = 1.30769 + 0.0116909x^2.$$

(b) i) Tomamos $h = \pi/8$ e obtemos os 5 nós igualmente espaçados em $[0, \pi/2]$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \pi/8, \quad x_2 = 2\pi/8 = \pi/4, \quad x_3 = 3\pi/8, \quad x_4 = 4\pi/8 = \pi/2$$

A aproximação para o integral é

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{\pi}{8}\left[\frac{2^{\cos(x_0)} + 2^{\cos(x_4)}}{2} + 2^{\cos(x_1)} + 2^{\cos(x_2)} + 2^{\cos(x_3)}\right] \\ &= \frac{\pi}{8}\left[\frac{3}{2} + 2^{\cos(\pi/8)} + 2^{\cos(\pi/4)} + 2^{\cos(3\pi/8)}\right] = 2.4871603. \end{aligned}$$

ii) Começamos por notar que

$$1 \le 2^{\cos(x)} \le 2, \; \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \implies \frac{\pi}{2} \le I \le \pi$$

pelo que o valor aproximado T_N fornecido pela regra dos trapézios deverá ser tal que

$$|I - T_N| \le 0.5 \cdot 10^{1-5} = 0.5 \cdot 10^{-4}.$$

Tem-se $h = (\pi/2)/N$ e

$$|I - T_N| \le \frac{\pi^3}{96N^2} \max_{x \in [0,\pi/2]} |f''(x)|.$$

Como

$$f''(x) = -\ln(2)\cos(x)2^{\cos(x)} + \ln(2)^2 \sin^2(x)2^{\cos(x)} = \ln(2)2^{\cos(x)}[\ln(2) - \ln(2)\cos^2(x) - \cos(x)]$$

e a função $x \mapsto \ln(2) - \ln(2)\cos^2(x) - \cos(x)$ é crescente em $[0, \pi/2]$, tem-se

$$\max_{x \in [0,\pi/2]} |f''(x)| \le \ln(2) \max_{x \in [0,\pi/2]} 2^{\cos(x)} \max_{x \in [0,\pi/2]} |\ln(2) - \ln(2)\cos^2(x) - \cos(x)| \le 2\ln(2)\max\{1, \ln(2)\} = 2\ln(2).$$

Podemos então usar a estimativa

$$|I - T_N| \le \frac{2\ln(2)\pi^3}{96N^2} = \frac{\ln(2)\pi^3}{48N^2}$$

e determinar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\ln(2)\pi^3}{48N^2} \le 0.5 \cdot 10^{-4} \Leftrightarrow N \ge \sqrt{\frac{\ln(2)\pi^3}{24}} \cdot 10^2 = 94.6307.$$

Assim, podemos tomar $N = 95$ subintervalos de $[0, \pi/2]$ e os correspondentes nós de integração são dados por

$$x_i = \frac{\pi}{2N} i = \frac{\pi}{190} i, \quad i = 0, 1, \ldots, 95.$$

3. Os $n+1$ pesos e os $n+1$ nós ($2n+2$ incógnitas) são solução do sistema (não-linear)

$$\begin{cases} Q(1) = I(1) \\ Q(x) = I(x) \\ \quad \cdots \\ Q(x^n) = I(x^n) \\ Q(x^{n+1}) = I(x^{n+1}) \\ \quad \cdots \\ Q(x^{2n+1}) = I(x^{2n+1}) \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n A_i = b-a \\ \sum_{i=0}^n A_i x_i = (b^2-a^2)/2 \\ \quad \cdots \\ \sum_{i=0}^n A_i x_i^n = (b^{n+1}-a^{n+1})/(n+1) \\ \sum_{i=0}^n A_i x_i^{n+1} = (b^{n+2}-a^{n+2})/(n+2) \\ \quad \cdots \\ \sum_{i=0}^n A_i x_i^{2n+1} = (b^{2n+2}-a^{2n+2})/(2n+2) \end{cases}$$

o qual é constituído por $2n+2$ equações. Isto garante que a fórmula Q terá grau $2n+1$, pelo menos. Contudo, Q não tem grau $2n+2$ porque, para o polinómio $p(x) = \prod_{j=0}^n (x-x_j)^2$, de grau $2n+2$, tem-se

$$0 = \sum_{i=0}^n A_i \prod_{j=0}^n (x_i - x_j)^2 = Q(p) \neq I(p) = \int_a^b \left[\prod_{j=0}^n (x-x_j)\right]^2 dx > 0.$$

Seja $\{\ell_0, ..., \ell_n\}$ a base de Lagrange de $\mathscr{P}_n$. Para mostrar que os pesos são positivos, usamos o facto de Q ser exata para polinómios de grau $2n$, e notamos que, da propriedade $\ell_j(x_i) = \delta_{ij}$ resulta

$$A_i = \sum_{i=0}^n A_i \ell_j(x_i)^2 = Q(\ell_j(x)^2) = I(\ell_j(x)^2) = \int_a^b \ell_j(x)^2 dx > 0.$$

4. Em primeiro lugar, através da mudança de variável $v = u'$, transformamos o problema dado num sistema de equações de ordem 1:

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = \frac{t}{u^2(t)+1},\ t \geq 0, \\ u(0) = A,\ v(0) = B. \end{cases}$$

Definindo

$$y : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2 \qquad y(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix}$$

e a função

$$f : [0, \infty[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(t, y) = f\left(t, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v \\ \frac{t}{u+1} \end{bmatrix}$$

temos

$$y_0 = y(0) = \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

e, por aplicação do método de Euler, obtemos em $t_1 = h = 1$:

$$\begin{bmatrix} u(1) \\ u'(1) \end{bmatrix} = y(1) \approx y_1 = y_0 + hf(0, y_0) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \frac{0}{A^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B \\ B \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$u(1) \approx A+B, \qquad u'(1) \approx B.$$