Complementos de Cálculo Diferencial e Integral

11^{a} Ficha de trabalho - 2^{o} Semestre 2014/2015

1. Verifique as seguintes igualdades, onde $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são campos vectoriais de classe C^1 e φ um campo escalar, também de classe C^1 definidos num aberto de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{f}) = \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathbf{f} + \varphi \operatorname{div}\mathbf{f}$.

   (b) $\operatorname{div}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{f} - \mathbf{f} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{g}$.

   (c) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{f}) = \operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{f} + \varphi \operatorname{rot}\mathbf{f}$.

2. Mostre a fórmula do gradiente: Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio regular e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1 definido em $\overline{D}$, então

   $$\int_D \operatorname{grad}\varphi = \int_{\partial D} \varphi \boldsymbol{\nu}\, dV_{n-1},$$

   onde $\boldsymbol{\nu}$ designa a normal unitária exterior à fronteira do domínio regular D.

   Sugestão: Considere o a igualdade 1.(a) - generalizada para $\mathbb{R}^n$ - com $\mathbf{f} \equiv \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ um campo constante.

3. Mostre a fórmula do rotacional: Se $D \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio regular e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1 definido em $\overline{D}$, então

   $$\int_D \operatorname{rot}\mathbf{f} = \int_{\partial D} \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{f}\, dV_2,$$

   onde $\boldsymbol{\nu}$ designa a normal unitária exterior à fronteira do domínio regular D.

   Sugestão: Considere o a igualdade 1.(b) com $\mathbf{g} \equiv \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ um campo constante; note também que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ para quais vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ de $\mathbb{R}^3$.

4. Mostre a fórmula de Kelvin: Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade -2 de classe C^2 com orientação definida pelo campo de normais unitárias $\mathbf{n}$, $S \subset M$ um domínio domínio regular e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um campo escalar de classe C^1 definido em $\overline{S}$, então

   $$\int_S \mathbf{n} \times \operatorname{grad}\varphi\, dV_2 = \oint_{\partial S} \varphi\, d\mathbf{g},$$

   onde $\mathbf{g}$ é um caminho regular simples que representa a curva fechada ∂S com orientação consistente com a orientação de M.

   Sugestão: Considere o a igualdade 1.(c) com $\mathbf{f} \equiv \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ um campo constante.

5. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio regular, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1 e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^2 tal que $\mathbf{f} = 0$ em ∂D. Prove que nestas condições temos

   $$\int_D \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{rot}\mathbf{f} = 0.$$

   Sugestão: Considere o a igualdade 1.(a) notando que $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f}) = 0$.