Probabilidades e Estatística

LEAN, LEE, LEGI, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEMec, MEQ

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

1º semestre – 2014/2015
15/11/2014 – 11:00

Duração: 90 minutos **1º teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I 10 valores

1. Considere uma urna com 4 bolas brancas e 2 bolas pretas, da qual são extraídas 4 bolas aleatoriamente, sem reposição.

(a) Qual é a probabilidade de saírem 2 bolas brancas? (2.0)

Seja X =“número de bolas brancas nas 4 bolas extraídas”. Uma vez que as tiragens são feitas sem reposição então $X \sim H(6,4,4)$ em que $X \in \{2,3,4\}$.
$P(X=2) = f_X(2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{2}{5}$.

(b) Sabendo que foram extraídas pelo menos 2 bolas brancas, qual é a probabilidade de no total saírem mais de 3 bolas brancas? (2.5)

$P(X>3 \mid X \geq 2) = \frac{P(X>3 \wedge X\geq 2)}{P(X\geq 2)} = \frac{P(X=4)}{P(X\geq 2)} = P(X=4) = f_X(4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{2}{0}}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{15}$.

2. Num jornal é publicado diariamente um jogo de palavras cruzadas. Suponha que determinado leitor desse jornal tem a capacidade de completar o jogo com probabilidade 0.8. Indique as hipóteses que tiver de assumir para resolver as questões que se seguem.

(a) Numa semana, qual é a probabilidade do leitor completar pelo menos 4 vezes o jogo, sabendo que jogou às palavras cruzadas em todos os dias dessa semana? (2.5)

Seja X =“número de dias em que o leitor completa o jogo numa semana”. Admitindo independência entre dias distintos, X representa o número de sucessos em 7 repetições independentes de uma prova de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a 0.8 e, assim, $X \sim Bi(7,0.8)$.
$P(X\geq 4) = 1-P(X<4) = 1-P(X\leq 3) = 1-F_X(3) = 1-0.0333 = 0.9667$.
Alternativa: $P(X\geq 4) = P(Y\leq 3) = F_Y(3) = 0.9667$ em que $Y = 7-X \sim Bi(7,0.2)$.

(b) Qual é a probabilidade de ser necessário esperar pelos menos 3 dias para que o leitor não complete o jogo? Em média, quantos dias é necessário esperar para que o leitor tenha as palavras cruzadas incompletas? (3.0)

Seja W =“número de até surgir o primeiro em que o jogo não é completado”. Uma vez que W representa o número de repetições independentes de uma prova de Bernoulli até se observar o primeiro sucesso, então $W \sim Geo(p)$, com $p = 1-0.8 = 0.2$.
$P(W\geq 3) = 1-P(W<3) = 1-P(W\leq 2) = 1-F_W(2) = 1-0.36 = 0.64$.
$E[W] = 1/p = 1/0.2 = 5$ dias.

Grupo II	10 valores

1. Sabe-se que em determinado aeroporto os aviões aterram, em média 8 por hora, de acordo com um processo de Poisson.

(a) Calcule a probabilidade de num período de 15 minutos aterrarem no máximo 3 aviões. (2.0)

Seja $X(t)$ =“número de aviões que aterram num aeroporto em t horas”. Sabe-se que $X(t) \sim Poi(\lambda t)$, com $\lambda = E[X(1)] = 8$.
$P(X(1/4) \leq 3) = F_{Poi(2)}(3) = 0.8571$.

(b) Um destes aviões transposta 100 passageiros. Sabendo que a massa da bagagem por passageiro é uma variável aleatória com valor esperado 15 kg e desvio padrão 2 kg, calcule a probabilidade aproximada da massa total das bagagens dos passageiros do avião ultrapassar 1 550 kg. Admita que as massas das bagagens dos diferentes passageiros deste avião são independentes. (3.0)

Seja $T = \sum_{i=1}^{100} X_i$ em que X_i representa a massa da bagagem do iº passageiro, com $i = 1, \ldots, 100$. Temos que $\mathrm{E}[T] = \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} \mathrm{E}[X_i] = 100\,\mathrm{E}[X] = 1500$ e $\mathrm{Var}[T] = \mathrm{Var}[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} \mathrm{Var}[X_i] = 100\,\mathrm{Var}[X] = 400$, uma vez que as variáveis X_i são independentes e identicamente distribuídas a X.
Nestas condições, o teorema do limite central garante que

$$\frac{T - \mathrm{E}[T]}{\sqrt{\mathrm{Var}[T]}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

$P(T > 1550) \overset{TLC}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{1550-1500}{\sqrt{400}}\right) \approx 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$.
Alternativa: $P(T > 1550) \overset{TLC}{\approx} 1 - F_{N(1500,400)}(1550) = 1 - 0.9938 = 0.0062$.

2. Considere o par aleatório (X, Y) que representa a voltagem (em volt) em dois nós distintos de um circuito. A função de densidade marginal de X é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{2}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e, para $0 < x < 1$, a função de densidade condicional de $Y|X = x$ é

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{2x+2y}{2x+1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Calcule o quantil de probabilidade 0.75 da variável aleatória X. (2.0)

$F_X(q) = 0.75 \iff \int_{-\infty}^{q} f_X(x)\,dx = 0.75 \iff \int_0^q \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 0.75 \iff \frac{q^2+q}{2} = 0.75 \iff q = \frac{-1\pm\sqrt{7}}{2} \iff q = \frac{-1+\sqrt{7}}{2} \approx 0.8229$, uma vez que se deve ter $0 < q < 1$

(b) Calcule a covariância entre X e Y. Será que as variáveis aleatórias são independentes? (3.0)

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x}(y) f_X(x) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx \overset{0<y<1}{=} \int_0^1 (x+y)\,dx = y + \frac{1}{2}$

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y\left(y + \frac{1}{2}\right) dy = \frac{7}{12}$
$\mathrm{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}$
$\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[Y]\mathrm{E}[Y] = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = -\frac{1}{144} \approx -0.0069$
Como $\mathrm{Cov}[X,Y] \neq 0$ então X e Y não são independentes.