Mecânica Analítica

Capítulo 6: Formalismo Hamiltoniano

H. Terças

Instituto Superior Técnico
(Departamento de Física)

TÉCNICO LISBOA

- No formalismo **Lagrangeano**, um sistema de n coordenadas generalizadas possui n equações do movimento de **segunda ordem**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

  Necessitamos de especificar $2n$ condições iniciais para o conjunto $\{q_i, \dot{q}_i\}$.

- No formalismo **Hamiltoniano**, um sistema de $2n$ coordenadas resultarão em $2n$ equações de **primeira ordem**.
  De igual forma, necessitaremos de especificar $2n$ condições iniciais para as $2n$ coordenadas (a definir).

O formalismo Hamiltoniano envolve o conceito de **coordenadas conjugadas** $\{q_i, p_i\}$, onde

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Para tal, faremos uso das **transformações de Legendre**. Consideremos uma função $f(x, y)$. O seu diferencial é

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{u} dx + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{v} dy.$$

Seja $g = f - ux$, cujo diferencial é dado por

$$\begin{aligned} dg &= df - udx - xdu \\ &= \cancel{udx} + vdy - \cancel{udx} - xdu \\ &= = vdy - xdu \end{aligned}$$

$$df = udx - vdy, \quad dg = vdy - xdu$$

Esta transformação implica a seguinte relação entre as variáveis

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial y},$$

de onde concluímos que a nova função é $g = g(u, y)$. A **transformação de Legendre** consiste então em

$$g(u, y) = f(x, y) - ux.$$

De outra forma, podemos obter uma outra função h definida como

$$h(v, x) = f(x, y) - vy,$$

que resulta nas seguinte relações

$$y = -\frac{\partial h}{\partial v}, \quad u = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

- Exemplo: Potenciais termodinâmicos

A **energia interna** $U = U(S, V)$ tem por diferencial

$$dU = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial S}}_{T} dS + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial V}}_{-P} dV.$$

A **entalpia** obtém-se por uma transformação de Legendre $(S, V) \to (S, P)$

$$H = U + PV,$$

cujo diferencial é

$$dH = TdS + VdP,$$

que conduz às seguintes relações termodinâmicas

$$T = \frac{\partial H}{\partial S}, \quad V = \frac{\partial H}{\partial P}.$$

- Exemplo: Potenciais termodinâmicos

As transformações $(S, V) \to (T, V)$ e $(S, P) \to (T, P)$ resultam nas energias livres de **Helmholtz** e de **Gibbs**, respectivamente

$$F = U - TS, \quad G = H - TS,$$

cujos diferenciais são

$$dF = -\underbrace{P}_{\frac{\partial F}{\partial V}} dV - \underbrace{S}_{\frac{\partial F}{\partial T}} dT, \quad dG = \underbrace{V}_{\frac{\partial G}{\partial P}} dP - \underbrace{S}_{\frac{\partial G}{\partial T}} dT.$$

Os quatro potenciais termodinâmicos conduzem às relações de Maxwell[1]

$$\frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{\partial P}{\partial S}, \quad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial V}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial P}.$$

[1] $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f$

Consideremos um sistema descrito por pelo Lagrangeano $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$,

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

O momento canónico é $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

pelo que

$$dL = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

O **Hamiltoniano** $H(q_i, p_i, t)$ é gerado pela transformação de Legendre

$$H(q_i, p_i, t) = \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t).$$

O Hamiltoniano possui o seguinte diferencial

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - dL \\ &= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned}$$

de onde se conclui imediatamente que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

e se deduzem as $2n$ **equações canónicas de Hamilton**

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

A estratégia para se obter o Hamiltoniano $H(q_i, p_i, t)$ de um sistema inicialmente descrito por um Lagrangeano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ é a seguinte:

1. Escrever a transformação de Legendre $H = \dot{q}_i p_i - L$;
2. O momento conjugado é definido em termos de q_i e $\dot{q}_i$ na relação $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Neste ponto, há mistura das variáveis q_i, $\dot{q}_i$ e p_i;
3. Inverter a relação anterior para eliminar $\dot{q}_i$ na transformação de Legendre.

Completado estes três pontos, reunimos as condições para usar as equações canónicas do movimento (ao invés das equações de Euler-Lagrange).

- Exemplo 1: O oscilador harmónico.

Considere um oscilador harmónico a uma dimensão descrito pelo Lagrangeano

$$L(x,\dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

A transformação de Legendre fornece

$$H = \dot{x}p - L = \dot{x}p - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

O momento canónico conjugado é

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

que permite imediatamente concluir que $\dot{x} = p/m$. Assim, obtemos

$$\boxed{H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = T + V}$$

$\therefore$ O Hamiltoniano coincide com a energia mecânica do sistema!

- Exemplo 1: O oscilador harmónico.

$$\boxed{H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = T + V}$$

As equações do movimento são

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -kx \\[2ex] \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = p/m. \end{cases}$$

que podem ser escritas na forma $\dot{b}_i = M_{ij} b_j = 0$,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix}}_{\dot{\vec{b}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

- Exemplo 1: O oscilador harmónico.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{bmatrix}}_{\dot{\vec{b}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}}_{\vec{b}}.$$

A solução formal é $\vec{b}(t) = \mathrm{Re}\left[e^{\mathbf{M}t} \cdot \vec{b}_0\right]$, onde

$$e^{\mathbf{M}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{A}^{-1},$$

onde $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal contendo os valores próprios e $\mathbf{A}$ a matriz cujas colunas são os vectores próprios[2],

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbb{I}) = 0 \quad \Longrightarrow \lambda = \pm i\omega_0.$$

Assim,

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{bmatrix} e^{i\omega_0 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{i}{m\omega_0} & -\frac{i}{m\omega_0} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[2] $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

TÉCNICO LISBOA

- Exemplo 1: O oscilador harmónico.

Escolhendo α convenientemente, a exponencial da matriz $\mathbf{M}$ pode ser escrita

$$e^{\mathbf{M}t} = \begin{bmatrix} e^{-i\omega_0 t} & -\dfrac{i}{m\omega_0} \\ \\ im\omega_0 & e^{i\omega_0 t} \end{bmatrix},$$

de onde finalmente resulta

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{Re}\left[x_0 e^{-i\omega_0 t} - i\dfrac{p_0}{m\omega_0}\right] = \tilde{x}_0 \cos(\omega_0 t) \\ \\ p(t) = \operatorname{Re}\left[p_0 e^{i\omega_0 t} + i x_0 m\omega_0\right] = \tilde{p}_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

Podemos observar que as equações do movimento são equivalentes a

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

o que implica que $p(t) = m\dot{x}(t) = -im\omega_0 x(t) = m\omega_0 e^{-i\pi/2} x(t)$.

De uma forma geral, a transformação de Legendre pode ser decomposta da seguinte forma

$$H = \dot{q}_i p_i - L = \dot{q}_i p_i - \left[L^{(0)}(q_i, t) + L_k^{(1)}(q_i, t)\dot{q}_k + L_{km}^{(2)}(q_i, t)\dot{q}_k\dot{q}_m \right],$$

onde

- $L^{(0)}(q_i, t)$ é a parte do Lagrangeano que não depende das velocidades generalizadas;
- $L_k^{(1)}(q_i, t)$ são os coeficientes dos termos lineares nas velocidades;
- $L_{km}^{(2)}(q_i, t)$ são os coeficientes dos termos quadráticos nas velocidades.

Sem dependência explícita no tempo, $L \neq L(t)$, o Lagrangeano pode ser decomposto como

$$L(q_i, \dot{q}_i) = L_0(q_i) + a_k(q_i)\frac{1}{2}\dot{q}_k + T_{k\ell}(q_i)\dot{q}_k\dot{q}_\ell.$$

Em forma matricial,

$$L = L_0 + \dot{\vec{q}} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^{\,T} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\vec{q}}.$$

Nesta notação, o Hamiltoniano escreve-se

$$H = \dot{\vec{q}} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) - \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^{\,T} \cdot \mathbf{T} \cdot \dot{\vec{q}} - L_0.$$

O vector dos momentos canónicos é $\vec{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \mathbf{T} \cdot \dot{\vec{q}} + \vec{a}$, o que implica

$$\dot{\vec{q}} = \mathbf{T}^{-1} \cdot (\vec{p} - \vec{a}), \quad \dot{\vec{q}}^{\,T} = (\vec{p}^{\,T} - \vec{a}^{\,T}) \cdot \mathbf{T}^{-1}.$$

Neste último passo, assumimos que $\mathbf{T}^{-1}$ existe (o que é o caso pois o tensor da energia cinética é definido positivo). Finalmente, vem então que

$$\boxed{H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2}\left(\vec{p}^{\,T} - \vec{a}^{\,T}\right) \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) - L_0(q_i, t)} \qquad (1)$$

- Exemplo 2: O potencial central a 3 dimensões

$$L(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta},\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - V(r).$$

Como a matriz $\mathbf{T}$ é diagonal,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2\sin^2\theta \end{bmatrix},$$

a fórmula contida na Eq. (1) conduz imediatamente a

$$H(r,p_r,\theta,p_\theta,\varphi,p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V(r)$$

- Exemplo 3: O Hamiltoniano electromagnético

Recordemos a forma do Lagrangeano de uma partícula carregada num campo EM

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - q\Phi + qA_i x_i .$$

O momento **canónico** $p_i = m\dot{x}_i + qA_i$ é diferente do momento **mecânico** $p_i = m\dot{x}_i$. Da Eq. (1), vem

$$\begin{aligned} H &= (p_i - qA_i)\frac{1}{2m}(p_i - qA_i) + q\Phi \\ H &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\Phi \end{aligned}$$

Como vemos, as equações de Hamilton não tratam os q_i's e os p_i's de forma simétrica: a equação para p_i tem um sinal "$-$". Construamos um vector coluna $\vec{\eta}$ de $2n$ entradas

$$\vec{\eta} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

Nesta base, as equações do movimento podem ser escritas na **forma simplética**

$$\dot{\vec{\eta}} = \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{\eta}},$$

onde a matriz simplética tem a forma

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I}_{n\times n} \\ -\mathbb{I}_{n\times n} & 0 \end{bmatrix}$$

1. Conservação do momento canónico

Como vimos, no formalismo Lagrangeano a existência de coordenadas cíclicas implica a conservação de momentos conjugados

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Longrightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{constante}.$$

Das equações de Hamilton,

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}.$$

$\therefore$ Uma **coordenada cíclica** no formalismo Lagrangeano continua a ser cíclica no formalismo Hamiltoniano.

$$\boxed{H \neq H(q_j) \Longrightarrow p_i = \text{constante}}$$

2. Conservação da energia

No formalismo Lagrangeano, a conservação da energia decorre da identidade de Beltrami

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Para $L = T - V$, $L \neq L(t)$ implica a conservação da energia mecânica. Vejamos o que se passa neste caso. Com $H = H(q_i, p_i, t)$,

$$\frac{dH}{dt} = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{-\dot{p}_i}\dot{q}_i + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{\dot{q}_i}\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t},$$

obtemos imediatamente

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

$\therefore$ Para um mesmo sistema, $L \neq L(t)$ implica imediatamente a conservação do Hamiltoniano. Se $H = T + V$, então a **energia mecânica** conserva-se.

3. Transformação de coordenadas

Demonstrámos no formalismo Lagrangeano que se a transformação de coordenadas

$$Q_i = Q_i(q_i, ..., q_n; t)$$

não depender explicitamente do tempo, a quantidade $h = (\partial_{\dot{q}_i} L)\dot{q}_i - L$ se conserva[3].

Pode acontecer que a transformação acima dependa explicitamente de t mas $H(Q_i, P_i)$ não. Nesse caso, H é uma constante do movimento mas não corresponderá à energia mecânica do sistema. O inverso também pode acontecer: $H = T + V$ mas não ser constante.

$\therefore$ O uso de um novo sistema de coordenadas pode alterar a forma do Hamiltoniano.

[3] $(\partial_{\dot{q}_i} L)\dot{q}_i - L = T + V$ para potenciais que não dependem das velocidades

- Exemplo 1: A mola que se move

Considere um sistema composto por uma mola contendo uma massa m numa das suas extremidades enquanto a outra se move a velocidade constante

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(x - v_0 t)^2.$$

A equação do movimento é $\ddot{x} + \omega_0^2(x - v_0 t) = 0$, que pode ser resolvida através da transformação $X = x - v_0 t$, que contém o tempo **explicitamente**

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$

O Hamiltoniano correspondente é

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}\left(x - v_0 t\right)^2 = T + V.$$

H **é** a energia mecânica do sistema mas **não se conserva!**

- Exemplo 1: A mola que se move

Formulemos o problema em termos da coordenada generalizada X:

$$L(X,\dot{X}) = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + mv_0\dot{X} + \frac{mv_0^2}{2} - \frac{1}{2}kX^2.$$

Identificamos $\vec{a} = a = mv_0$ na Eq. (1) para obter

$$H(X,P) = \frac{(P-mv_0)^2}{2m} + \frac{1}{2}kX^2 - \frac{mv_0^2}{2} \neq T + V.$$

H **não é** a energia mecânica do sistema mas **é conservado!**

Formulação de Routh

Ao que parece, a formulação Hamiltoniana não parece trazer vantagens em relação à Lagrangeana na resolução de problemas mecânicos (ver exemplo do oscilador harmónico!).

Contudo, é especialmente útil para a descrição de problemas envolvendo **coordenadas cíclicas**. Seja q_n uma coordenada cíclica,

$$L = L(q_1, ..., q_{n-1}; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n; t).$$

A solução ainda requer n equações do movimento (devido às velocidades $\dot{q}_i$). No formalismo Hamiltoniano, contudo, $p_n = \alpha$ é uma constante.

$$H = H(q_1, ..., q_{n-1}; p_i, ..., p_{n-1}; \alpha; t),$$

tal que $\dot{q}_n = \dfrac{\partial H}{\partial \alpha}$. Ao que parece, temos agora $n-1$ graus de liberdade com que nos preocupar.[4]

[4] sim, certo, ainda assim $2n-1$ equações...

Formulação de Routh

Routh propôs combinar a formulação Lagrangeana para as coordenadas não cíclicas e a Hamiltoniana para as cíclicas. Definamos a função de Routh R (o *Routhiano*) como

$$R(q_i, ..., q_n; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s; p_{s+1}, ..., p_n; t) = \sum_{i=s+1}^{n} p_i \dot{q}_i - L,$$

que podemos decompor na forma

$$R(q_i, ..., q_n; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s; p_{s+1}, ..., p_n; t) = H(p_{s+1}, ..., p_n) - L(q_1, ...q_s; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s).$$

Para $i \leq s$ (não cíclicas)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0$$

Formulação de Routh

Routh propôs combinar a formulação Lagrangeana para as coordenadas não-cíclicas e a Hamiltoniana para as cíclicas. Definamos a função de Routh R (o *Routhiano*) como

$$R(q_i, ..., q_n; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s; p_{s+1}, ..., p_n; t) = \sum_{i=s+1}^{n} p_i \dot{q}_i - L,$$

que podemos decompor na forma

$$R(q_i, ..., q_n; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s; p_{s+1}, ..., p_n; t) = H(p_{s+1}, ..., p_n) - L(q_1, ...q_s; \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s).$$

Para $i > s$ (cíclicas)

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial R}{\partial q_i} \\[2ex] \dot{q}_i = \dfrac{\partial R}{\partial p_i} \end{cases} .$$

- Exemplo 1: O potencial central.

Consideremos o problema do potencial central $V = -k/r^n$, cujo Lagrageano é

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)^2 + \frac{k}{r^n}.$$

Aplicando o procedimento de Routh, obtemos

$$R(r, \dot{r}, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{k}{r^n}.$$

Aplicando a equação de Euler-Lagrande para a coordenada não-cíclica r, obtemos

$$\ddot{r} - \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{nk}{r^{n+1}} = 0.$$

Aplicando as equações de Hamilton para a coordenada cíclica θ,

$$\dot{p}_\theta = 0, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta^2}{mr^2},$$

cuja solução é já nossa conhecida, $p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \text{constante}.$

O Hamiltoniano da relatividade restrita

Antes de procurarmos a formulação Hamiltoniana, temos de motivar a formulação Lagrangeana.

Comecemos para a partícula livre. O princípio variacional associado de um sistema relativista deve ser formulado em termos de um invariante θ

$$\delta S = \delta \int_{\theta_1}^{\theta_2} L d\theta.$$

O *intervalo* parece ser uma quantidade[5]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Em termos de s

$$\delta S = \delta \int \alpha ds = \delta \int_{t_1}^{t_2} \alpha \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i \dot{x}^i}{c^2}} dt.$$

[5] Em relatividade geral (espaço-tempo curvo), $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

Ao que parece, o Lagrangeano tem a forma

$$L = \alpha\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Para determinarmos o valor de α, recorremos ao limite não-relativista

$$L \simeq \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + ...\right),$$

de onde se retira imediatamente que $\alpha = -mc^2$. Na presença de um potencial $V(x_i)$, podemos então escrever

$$\boxed{L(x_i, \dot{x}_i) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_i^2}{c^2}} - V(x_i)} \tag{2}$$

É extraordinariamente simples!

Notas importante:

- Embora o Lagrangeano na Eq. (2) anterior conduza à forma correcta das equações do movimento, este não é **covariante**, i.e. não é invariante para as transformações de Lorentz[6].
- Uma formulação mais robusta implica o uso de quadrivectores x_μ, onde o espaço e o tempo são tratados da mesma forma.
- Além disso, no contexto da **relatividade geral**, a introdução de potenciais externos modificam a métrica (exemplo, a gravidade "curva" o espaço-tempo)

No contexto da disciplina, vamos utilizar esta formulação mais "fraca", sem comprometer, contudo, o rigor da nossa análise.

[6] Por outras palavras, funcionam num determinado referencial apenas

O Hamiltoniano correspondente obtém-se através transformação de Legendre

$$H(x_i, p_i) = p_i \dot{x}_i - L(x_i, \dot{x}_i),$$

onde o momento canónico se obtém por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m\dot{x}_i}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m \dot{x}_i.$$

Substituindo na equação acima (soma em i implícita)

$$H = \frac{p_i^2}{\gamma m} + \frac{mc^2}{\gamma} + V(x_i).$$

Se $\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + p_i^2c^2$, então

$$\boxed{H(x_i, p_i) = \mathcal{E}(p_i) + V(x_i)},$$

ou seja, $H = \sqrt{m^2c^4 + T^2} + V \neq T + V$!

O Princípio de Hamilton

Vejamos em que condições as equações de Hamilton decorrem do princípio variacional de Hamilton. Consideremos a variação$-\delta$ introduzida no §2

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0.$$

As equações de Euler-Lagrange obtém-se impondo a condição de **extremos fixos**, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

Invertendo a transformação de Legendre, $L = p_i \dot{q}_i - H$, pelo que

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left[p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \right]}_{f(q_i, \dot{q}_i, p_i, \dot{p}_i, t)} dt = 0.$$

Dada a dependência funcional de f, a variação$-\delta$ deve corresponder a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i} \delta \dot{p}_i \right) dt = 0.$$

Impondo a condição $\delta q_i(t_\alpha) = \delta p_i(t_\alpha) = 0$, com $\alpha = \{1, 2\}$, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i} \right) \delta p_i \right] dt = 0.$$

Como as variações δq_i e δp_i são independentes,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0.$$

Daqui resultam imediatamente as equações de Hamilton

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Notas:

1. O princípio de Hamilton impõe extremos nulos δq_i apenas;
2. O princípio de Hamilton modificado impõe extremos nulos δq_i e δp_i.

Na formulação Hamiltoniana, q_i e p_i são coordenadas independentes. A relação $p_i = \partial_{\dot{q}_i} L$ só faz sentido no formalismo Lagrangeano!

TÉCNICO LISBOA

Como nota final, devemos esclarecer que f não é a única função que gera as equações de Hamilton.

Como sabemos, a variação$-\delta$ é invariante para derivadas totais, dF/dt. Assim, defina-se a nova função

$$g = f - \frac{d}{dt}(p_i q_i) = f - \dot{p}_i q_i - p_i \dot{q}_i.$$

A condição de extremo implicaria

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[-\dot{p}_i q_i - H(q_i, p_i, t)\right] dt = 0.$$

Como exercício, podemos verificar que daqui decorrem imediatamente as mesmas equações do movimento.

Contudo, a função integranda não pode ser identificada como o Lagrangeano do sistema (e dificilmente tal se pode obter através de transformações de coordenadas!)

O princípio de Hamilton é **restritivo** porque impõe variações nulas nos extremos do intervalo. As variações podem ser parametrizadas na forma[7]

$$q_i(t;\alpha) = q_i(t;0) + \alpha\eta_i(t),$$

onde $q_i(t;0)$ são as trajectórias não perturbadas. Nestes termos, a variação$-\delta$ escreve-se na forma

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\alpha) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(0) dt.$$

Defina-se a **variação**$-\Delta$ por forma a relaxar a hipótese de extremos nulos

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \equiv \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} L(\alpha) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(0) dt.$$

[7]Desta forma, $\delta q_i(t) = q_i(t;\alpha) - q_i(t;0)$, e $\delta q_i = 0 \Leftrightarrow \eta_i = 0$.

Para Δt_1 e Δt_2 infinitesimais,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = L(t_2)\Delta t_2 - L(t_1)\Delta t_1 + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} L(\alpha) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(0) dt}_{\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt} .$$

O segundo termo pode ser tratado como até aqui

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \cancel{\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]} \delta q_i dt + \left.\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} ,$$

onde usámos as equações de Euler-Lagrange. Assim,

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \left. (L\Delta t + p_i \delta q_i) \right|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \left. (L\Delta t + p_i \delta q_i) \right|_{t_1}^{t_2} .$$

A relação entre as variações nos extremos t_1 e t_2 é (α e Δt's infinitesimais)

$$\Delta q_i \simeq \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t,$$ [8]

o que permite escrever a variação$-\Delta$ da acção na forma (eliminando δq_i)

$$\begin{aligned} \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \left. (L\Delta t - p_i \dot{q}_i \Delta t + p_i \Delta q_i) \right|_{t_1}^{t_2} \\ &= \left. (p_i \Delta q_i - H \Delta t) \right|_{t_1}^{t_2} . \end{aligned}$$

Restrições:

1. $H \neq H(t)$ (H conservado);
2. H é conservado para as trajectórias virtuais (i.e. variadas sob Δ);
3. Escolhemos α tal que $\Delta q_i = 0$ nos extremos (não δq_i!).

[8] $\Delta q_i(t_2) = q_i(t_2 + \Delta t_2; \alpha) - q_i(t_2; 0) = q_i(t_2 + \Delta t_2; 0) - q_i(t_2; 0) + \alpha \eta_i(t + \Delta t_2)$

Para as condições impostas em 1., 2. e 3., temos imediatamente que

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1).$$

Invertendo a transformação de Legendre para escrever $L = p_i \dot{q}_i - H$,

$$\Delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - H(t_2 - t_1) \right\} = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1),$$

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt - H(\Delta t_2 - \Delta t_1) = -H(\Delta t_2 - \Delta t_1).$$

Princípio da acção mínima

$$\boxed{\Delta \int_{t_1}^{t_2} p_i \dot{q}_i dt = 0}$$

Este princípio parece inofensivo mas tem consequências interessantes em física.

- Exemplo 1: O princípio de Fermat

Para uma grande classe de sistemas mecânicos, a energia cinética é da forma
$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$.
Sabendo que

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = T_{ji} \dot{q}_j,$$

a função integranda da acção é $p_i \cdot q_i = 2T$. Assim o princípio da acção mínima fornece

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0.$$

Se $V = 0$, $T = \text{constante}$ (sistemas livres), e obtemos o **princípio de Fermat** (tempo mínimo)

$$\Delta (t_2 - t_1) = 0.$$