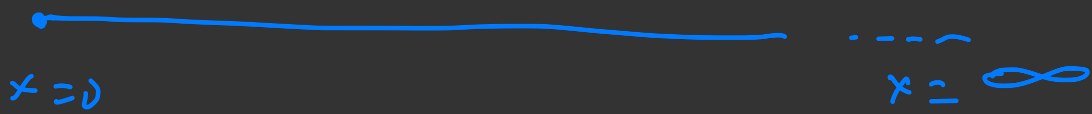
30 Ahn Osc Ond

Reflexão e transmissão

exemplo 1: oscilação numa corda semi-infinita
(para tudo o que importa a corda é suficientemente longe)



oscilação forçada ≡ cond. fronteira

$$\psi(0,t) = A\cos\omega t$$

para determinar $\psi(x,t)$ é necessário mais uma cond. fronteira

→ procedimento habitual é implementar condição fronteira no outro extremo

$$\psi(\infty, t) = \ldots \quad \times$$

não é possível atribuir um valor (constante) porque em princípio a onda oscila para todo o x

→ procedimento alternativo

→ especificar a onda que regressa

$$\underset{x=0}{\bullet} \longleftarrow$$

ou que sai de

$$\underset{x=0}{\bullet} \longrightarrow$$

A isto chama-se fixar a <u>cond. fronteira no infinito</u>

Por exemplo:

ficou que não existe onda a regressar

[fisicamente equivalente a dizer que as ondas na corda são exclusivamente produzidas em $x=0$]

Em geral: para uma onda com freq. ω
podemos escrever a sol. geral
como combinação de 4
ondas progressivas (reais)
(2 combinações lineares
em cada sentido

$$e^{i(kx-\omega t)} \quad , \quad e^{-i(kx-\omega t)}$$

$$\psi(x,t) = a\cos(kx-\omega t) + b\sin(kx-\omega t) + c\cos(kx+\omega t) + d\sin(kx+\omega t)$$

implementar condições fronteira

$\boxed{x=0}$ $\psi(0,t) = a\cos\omega t - b\sin\omega t$

$\qquad\qquad\quad + c\cos\omega t + d\sin\omega t$

$A\cos\omega t$

$\Rightarrow \quad b - d = 0$

$\qquad a + c = A$

$\boxed{x=\infty}$ ausência de onda

$\leftarrow$ $x=\infty$

$\Rightarrow c = d = 0$

$\Rightarrow a = A \;,\; b = c = d = 0$

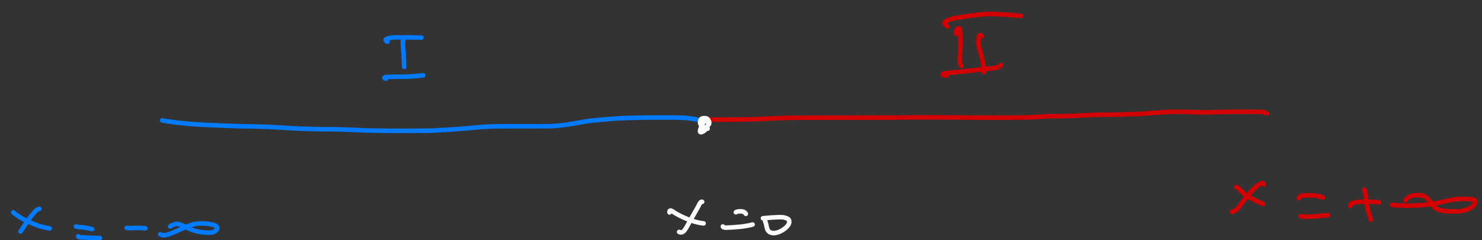
$$\Rightarrow \boxed{\psi(x,t) = A \cos(kx - \omega t)}$$

amplitude do osc. forçado em $x=0$

sistema infinito

2 cordas semi-infinitas (mesma tensão $T_I = T_{II} = T$ mas densidades diferentes $\rho_I \neq \rho_{II}$)

amarradas (num nó sem massa) em $x=0$



cond. fronteira

$x=0$

onda

$\propto A e^{-i\omega t}$

$\Longleftrightarrow$ onda incidente da esquerda em $x=0$

é refletida e transmitida

Para resolver: adaptar a um problema de oscilações forçadas

onda incidente de I causa todas as oscilações

↳ ondas transmitidas e refletidas tb. são proporcionais a $e^{-i\omega t}$

A freq. do oscilador é a mesma em toda a corda

(osc. forçada em regime estacionário – steady state) então

- $x \leq 0$ (reg. I)

onda incidente

$$\psi_I(x,t) = A\, e^{ikx}\, e^{-i\omega t} + RA\, e^{-ikx}\, e^{-i\omega t}$$

coef. de reflexão

onda refletida

- $x \geq 0$ (reg. II)

$$\psi_{II}(x,t) = \tau A\, e^{ik'x}\, e^{-i\omega t}$$

coef. transmissão

onda transmitida

notem que $k' \neq k$

$$k = \omega \sqrt{\rho_I / T} \qquad k' = \omega \sqrt{\rho_{II} / T}$$

cond. fronteira em $x=0$

continuidade da corda: $\psi_I(0,t) = \psi_{II}(0,t)$

$$\Rightarrow \boxed{1 + R = \tau}$$

força no nó é nula

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\psi_I(x,t)\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\psi_{II}(x,t)\right|_{x=0}$$

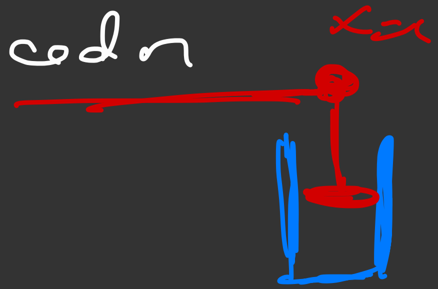
$$\Rightarrow \boxed{\, i k (1 - R) = i k' \tau \,}$$

juntando as 2 relações

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{2}{1 + k'/k} \; ; \; R = \frac{1 - k'/k}{1 + k'/k}$$

ajuste de impedâncias

modo impede a substituição da corda na reg. II por um amortecedor



a mesma impedância que a corda que substitui

porque as interações são locais:

- o que acontece em $x>0$ não tem efeito em $x<0$
- a única comunicação é em $x=0$

$$Z = \frac{T k}{\omega} = \sqrt{\rho T}$$

$$\underline{f} = -Z\,\underline{v}$$

potência necessária para produzir onda progressiva substituir corda $\overline{II}$ pelo seu efeito em $x=0$

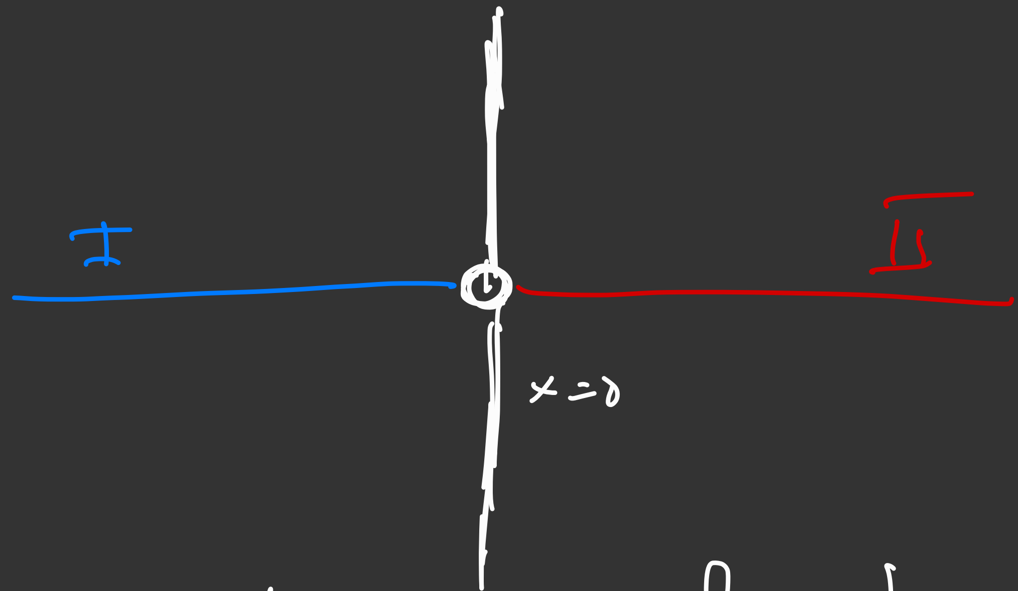
$$\tilde{F}_0^{\overline{II}} = - Z_{II} \frac{\partial}{\partial t} \psi(0,t)$$

não existe onda refletida ($R=0$) se

$$k' = k \Rightarrow \rho_I = \rho_{\overline{II}} \quad (\text{"mesma corda"})$$

Zo sempre que as impedâncias são as mesmas à fronteira é nul exemplo 3: (tudo igual ao exemplo 2 exceto nó $\to$ anel)

2 cordas ligadas por anel (s/massa) que (em $x=0$) desliza sem atrito na vertical ao longo de um varão



o varão pode exercer força horizontal no anel

$\Longrightarrow$ tensões nas cordas podem ser diferentes

$$Z_I = \sqrt{\rho_I T_I}$$

$$Z_{II} = \sqrt{\rho_{II} T_{II}}$$

se $Z_I = Z_{II}$ ausência de reflexão

em geral:

$$k = \omega \sqrt{\rho_I / T_I} \qquad k' = \omega \sqrt{\rho_{II} / T_{II}}$$

cond. fronteira em $x=0$

- continuidade $\quad \psi_I(0,t) = \psi_{II}(0,t)$

$$\Rightarrow 1 + R = \tau$$

• no exemplo 2 força nula no nó. aqui isso não é necessário

igual para ambos os lados

$$f_y^{I,II} \propto Z \frac{\partial}{\partial t} \psi(0,t)$$

↳ impedância

(sinal depende do sentido

$+$ onda $\rightarrow$

$-$ onda $\leftarrow$)

$$\boxed{Z_I(1-R) = Z_{II}\,\tau}$$

$$\boxed{1+R = \tau} \implies \tau = \frac{2Z_I}{Z_I+Z_{II}}$$

$$R = \frac{Z_I - Z_{II}}{Z_I+Z_{II}}$$

caso limite

$$\boxed{Z_{II} \to \infty}$$

é necessário uma força (potência) infinita para gerar uma onda em II

$\Longleftrightarrow$

$x=0$ é um extremo fixo da onda

$$\lim_{Z_{II} \to \infty} R = -1$$

$$\psi_I(x,t) \propto \sin kx$$

onda estacionária infinita (de $-\infty$ a 0)

c/ $\psi(0,t)=0$

$$\boxed{z_{II} \to 0}$$ $\longrightarrow$ não é necessário qq força para deslocar a onda em I

$$\lim_{z_{II} \to 0} R = 1$$

$\Leftarrow$

$x=0$ é um extremo livre

onda estacionária infinita

$$\frac{d}{dx}\psi(x,t)\Big|_{x=0} = 0$$

Ondas refletidas (reg. I)

$$\psi_I(x,t) = A\cos(kx-\omega t) + RA\cos(kx+\omega t)$$

$R = \pm 1 \longrightarrow$ onda estacionária

$R = 0 \longrightarrow$ onda progressiva

e nos outros casos ??

olhar para o mov. em x de um máximo (crista) de $\psi_I(x,t)$

máximo $\quad \dfrac{\partial}{\partial x} \psi_I(x,t) = 0$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \quad \sin(kx-\omega t) + R\sin(kx+\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow (1+R)\sin kx \cos \omega t = (1-R)\cos kx \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \tan kx = \frac{1-R}{1+R} \tan \omega t$$

$\Rightarrow$ x em f. de t

$\equiv$ mov. do máximo

agora quero a velocidade $\dfrac{\partial x}{\partial t}$

fazer

$$\frac{d}{dt}\left(\tan \underset{\text{função de } t}{kx}\right) = \frac{1-R}{1+R}\frac{d}{dt}\left(\tan \omega t\right)$$

$$\Rightarrow \quad k \underbrace{\boxed{\frac{1}{\cos^2 kx}}}_{1+\underbrace{\tan^2 kx}_{\left(\frac{1-R}{1+R}\tan\omega t\right)^2}} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1-R}{1+R}\,\frac{\omega}{\cos^2 \omega t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v \frac{(1+R)(1-R)}{(1+R)^2\cos^2\omega t + (1-R)^2\sin^2\omega t}$$

vel. do máximo

velocidade de fase

ω/k

quando

$\sin\omega t = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \underbrace{\frac{1-R}{1+R}}_{<1} v < v$$

$\pi/2$ mais tarde

$\cos\omega t = 0$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \underbrace{\frac{1+R}{1-R}}_{>1} v > v$$

onda se propaga aos solavancos

neste caso geral pensando c/ onda progressiva