ESPAÇOS LINEARES

Ideia: Espaços para Princípio de Sobreposição

Princípio de Sobreposição:

- Adição: $\begin{cases} \mathbf{v}_1 \to T(\mathbf{v}_1) \\ \mathbf{v}_2 \to T(\mathbf{v}_2) \end{cases} \implies \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \to T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2)$
- Multiplicação por $c \in \mathbb{R}$: $\mathbf{v} \to T(\mathbf{v}) \implies c\mathbf{v} \to c\,T(\mathbf{v})$

Logo: no espaço tem de ser definida adição e multiplicação por nºs reais

(tal como já considerado para matrizes reais $m \times n$)

ESPAÇOS LINEARES
Definição

Chama-se **espaço linear** ou **espaço vectorial real** (resp., **complexo**) a um conjunto $V \neq \emptyset$ com uma **adição** em V (aos elementos de V chama-se **vectores**) e uma **multiplicação por nºs reais** (resp., **complexos**) (chama dos escalares) com as propriedades (as mesmas propriedades básicas para matrizes reais $m \times n$):

- **Fecho da adição:** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \Rightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$
- **Fecho da multiplicação por escalares:** $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in V \Rightarrow c\mathbf{v} \in V$
- V **com adição é um grupo comutativo** (propriedades: associatividade, existência de 0 e de simétricos, e comutatividade)
- **Multiplicação por nºs reais é associativa, distributiva em relação às adições de reais e de vectores, e $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para $\mathbf{v} \in V$.**

$0\mathbf{v} = 0$ **e** $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$**, para todo** $\mathbf{v} \in V$**.**

Dem. Se $\mathbf{z} = 0\mathbf{v}$, é $\mathbf{z} + \mathbf{z} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{z}$; como $\mathbf{z}$ tem simétrico $\mathbf{y} \in V$, é $\mathbf{z} + \mathbf{z} + \mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{y} = 0$; logo, $\mathbf{z} = 0$ e $0\mathbf{v} = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$.
Para a 2ª, $\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = (1-1)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = 0$ *Q.E.D.*

1. $\mathbb{R}^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (incluindo $\mathbb{R}$, com $n=1$)
   com as operações definidas componente a componente
   $$(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)$$
   $$c\,(u_1, \ldots, u_n) = (cu_1, \ldots, cu_n)\,.$$
   Operações análogas às de matrizes coluna $n \times 1$,
   logo com as mesmas propriedades
   Portanto, $\mathbb{R}^n$ com estas operações **é espaço linear real**.

2. $\mathbb{R}^{m \times n}$, o conjunto das matrizes $m \times n$ com componentes reais,
   com a adição de matrizes e a multiplicação por n°s reais usuais
   (componente a componente). **É espaço linear real**.

3. $\mathbb{R}^S$, o conjunto das funções definidas em $S \neq \emptyset$ com valores reais, com as operações definidas ponto a ponto

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)\,, \qquad (cf)(t) = c\,f(t)\,, \quad t \in S\,.$$

Verificar todas as propriedades!

Fecho da adição? $f, g \in \mathbb{R}^S \Rightarrow f(t), g(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) + g(t) \in \mathbb{R}$, para $t \in S$. Logo, satisfaz Fecho da adição.

Fecho da multiplicação por escalares?
$c \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}^S \Rightarrow f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow c\,f(t) \in \mathbb{R}$, para $t \in S$.
Logo, satisfaz Fecho da multiplicação por escalares.

$\mathbb{R}^S$ com a adição é um grupo comutativo?
Sim, porque a adição é definida ponto a ponto pela adição de nºs reais e $\mathbb{R}, +$ é grupo comutativo (associatividade, comutatividade, existência de zero: função $f(t) = 0$ para $t \in S$, existência de simétricos: simétrico de f é $-f$, $(-f)(t) = -f(t)$ para $t \in S$)

3. (cont.)

   Associatividade da multiplicação por escalares?
   Sim, devido à associatividade da multiplicação de nºs reais:
   $a, b\in\mathbb{R}, f\in\mathbb{R}^S \Rightarrow (ab)f(t)=a(bf(t))$, para $t\in S$;
   logo, $(ab)f=a(bf)$ para $a, b\in\mathbb{R}, f\in\mathbb{R}^S$.

   Distributividade da multiplicação por escalares pelas adições?
   Sim, devido à distributividade da multiplicação pela soma com reais:
   se $a, b\in\mathbb{R}, f, g\in\mathbb{R}^S$, então
   $[(a+b)f](t)=af(t)+bf(t)\,,\quad [a(f+g)](t)=af(t)+ag(t)\,,\quad t\in S\,.$
   Logo, $(a+b)f=af+bf$ e $a(f+g)=af+ag$ para $a, b\in\mathbb{R}, f, g\in\mathbb{R}^S$.

   $1f=f$?
   Sim, porque 1 é a identidade da multiplicação de reais:
   $1f(t)=f(t)$ para $t\in S$. Logo, $1f=f$ para $f\in\mathbb{R}^S$.

   Portanto, **se $S\neq\emptyset$, então $\mathbb{R}^S$ é espaço linear real**.

   $\mathbb{R}^n$ é o caso particular de $\mathbb{R}^S$ com $S=\{1,\ldots,n\}$,
   e $\mathbb{R}^{m\times n}$ com $S=\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}$.

4. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, o conjunto das sucessões de termos reais, com as operações definidas termo a termo

$$\{u_n\} + \{v_n\} = \{u_n + v_n\}\,, \qquad c\{u_n\} = \{cu_n\}\,.$$

É caso particular do exemplo anterior com $S = \mathbb{N}$
É espaço linear real.

5. $\mathbb{R}^+$, nºs reais positivos. $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ e 0 de $\mathbb{R}$ não pertence a $\mathbb{R}^+$. Logo, $\mathbb{R}^+$ **não é** espaço linear.

6. $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, nºs reais não negativos. $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$, $1 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, e $-1 \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Logo, $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ **não é** espaço linear.

7. $\mathbb{Z}$, nºs inteiros. $1 \in \mathbb{Z}$, mas $\frac{1}{2}1 \notin \mathbb{Z}$. Logo, $\mathbb{Z}$ **não é** espaço linear.

ESPAÇOS LINEARES

Subespaços lineares

Chama-se **subespaço linear** de um espaço linear V a um subconjunto $S \subset V$ que é espaço linear com os mesmos escalares e operações de V.

$\{0\}$, V são subespaços lineares de qualquer espaço linear V.
Os outros, quando existem, contêm $\{0\}$ e estão contidos em V.

Se V é um espaço linear, $S \subset V$ é subespaço linear de V se e só se $S \neq \emptyset$ e satisfaz as propriedades de Fecho das operações.
Dem. Se S é subespaço linear de V, como é um espaço linear satisfaz as Propriedades de fecho das operações.
Reciprocamente, se $S \subset V$ satisfaz estas propriedades, como as propriedades operatórias são válidas em V também são em S (associatividade e comutatividade da adição, associatividade e distributividade da multipl. por escalares pelas adições, $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in S$).
Resta ver que 0 em V e simétricos em V de elementos de S pertencem a S.
Para $\mathbf{u} \in S$ é $0\mathbf{u} = 0 \in V$, $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$. Do Fecho da multiplicação por escalares em S é $0, -\mathbf{u} \in S$, para todo $\mathbf{u} \in S$. *Q.E.D.*

Se V é espaço linear, para verificar se $S \subset V$ é subespaço linear,
basta verificar $S \neq \emptyset$ e propriedades de FECHO das operações ☺

ESPAÇOS LINEARES
Exemplos de subespaços lineares

1. Conjunto S das matrizes reais $n\times n$ triangulares inferiores.
   $S\subset\mathbb{R}^{n\times n}$, e $\mathbb{R}^{n\times n}$ é espaço linear. $S\neq\emptyset$ (*e.g.* contém a matriz 0).
   Fecho da adição e da multiplicação por escalares?
   Somas de matrizes triangulares inferiores e produtos de escalares por matrizes triangulares inferiores são triangulares inferiores:
   $A, B\in S, c\in\mathbb{R} \Rightarrow A+B, cA\in S$. Portanto, S **é espaço linear real**.

2. Conjunto S das matrizes $m\times n$ com componentes que são nºs racionais, em $\mathbb{Q}$. $S\subset\mathbb{R}^{m\times n}$, e $\mathbb{R}^{m\times n}$ é espaço linear.
   Fecho da multiplicação por escalares? A multiplicação de $c\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (*e.g.* $\sqrt{2}$) por $A\in S$ tem todas as componentes irracionais.
   Portanto, S **não é** espaço linear.
   Mas $A, B\in S \Rightarrow A+B\in S$; logo, S satisfaz Fecho da adição!

3. Conjunto S dos pares ordenados com $(a, b)\in\mathbb{R}^2$ e $ab\geq 0$.
   $S\subset\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ é espaço linear. Fecho da adição? $(0, 1), (-1, 0)\in S$ e $(0, 1)+(-1, 0)=(-1, 1)\notin S$. Portanto, S **não é** espaço linear.
   Mas $c\in\mathbb{R}$ e $(a, b)\in S \Rightarrow c(a, b)\in S$, pois $(ca)(cb)=c^2ab\geq 0$; logo S satisfaz Fecho da multiplicação por escalares!

4. Conjunto S das sucessões de nºs reais de Fibonacci $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ com as operações definidas termo a termo.
   $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é espaço linear. $S \neq \emptyset$ (*e.g.* contém a sucessão com todos os termos 0). Se u e v são sucessões de Fibonacci, então
   $$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\,, \qquad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n\,.$$
   Fecho da adição?
   $$(u+v)_{n+2} = u_{n+2} + v_{n+2} = (u_{n+1} + u_n) + (v_{n+1} + v_n) = (u+v)_{n+1} + (u+v)_n\,.$$
   Fecho da multiplicação por escalares?
   $$(cu)_{n+2} = cu_{n+2} = c(u_{n+1} + u_n) = (cu)_{n+1} + (cu)_n$$
   Portanto, S **é espaço linear real.**

5. Conjunto P_n dos **polinómios** reais de **grau** $\leq n$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ou seja das funções $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$
com $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, com adição e multiplicação por escalares usuais (o **grau** de p é o maior k tal que $a_k \neq 0$ e o grau de $p = 0$ é 0).
$P_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ é espaço linear com as operações usuais: $\mathbb{R}^S$ já considerado, com $S = \mathbb{R}$. $P \neq \emptyset$ (*e.g.* $p = 0$ pertence a P).

Fecho da adição? Sim, porque soma de polinómios de grau $\leq n$ é polinómio de grau $\leq n$: se $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, $q(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ para $t \in \mathbb{R}$, então $(p+q)(t) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) t^k$, para $t \in \mathbb{R}$; logo, $p + q \in P_n$.

Fecho da multiplicação por escalares?
$$c \in \mathbb{R}\,,\ p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, t \in \mathbb{R} \implies cp(t) = c \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = \sum_{k=0}^{n} c a_k t^k, t \in \mathbb{R}\,;$$
logo, $cp \in P_n$.

Portanto, P_n **é espaço linear real**.

6. Conjunto P dos polinómios reais de qualquer grau com adição e multiplicação por escalares. $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, e $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ é espaço linear. $P \neq \emptyset$ (*e.g.* o polinómio $p=0$ pertence a P).

   Fecho da adição e da multiplicação por escalares?
   Do exemplo precedente, adição de polinómios é polinómio e multiplicação de escalar por polinómio é polinómio.

   Portanto, P **é espaço linear real**.

7. Conjunto S dos polinómios reais de grau n com adição e multiplicação por escalares usuais.
   $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ é espaço linear com operações usuais (*cf.* exemplo 5).
   Se $n \in \mathbb{N}$, então $0 \notin S$;

   S **não é** espaço linear.

   Fecho da adição? Falha: $t^n + (-t^n) = 0 \notin S$.
   Fecho da multiplicação por escalares? Falha: $0t^n = 0 \notin S$.

8. $C^k(I,\mathbb{R})$ conjunto das funções com valores reais com derivada de ordem k ($k\in\mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$) contínua num intervalo $I\subset\mathbb{R}$ com a adição e multiplicação usuais (para $k=0$ são as funções contínuas, para $k=\infty$ as indefinidamente diferenciáveis).
   $C^k(I,\mathbb{R})\subset\mathbb{R}^I$ e $\mathbb{R}^I$ é espaço linear com as operações usuais.
   $C^k(I,\mathbb{R})\neq\emptyset$ (*e.g.* $f=0$ pertence a $C^k(I,\mathbb{R})$).

   Fecho da adição? Soma de funções com derivada de ordem $k\in\mathbb{N}$ tem derivada de ordem k, soma de funções contínuas é contínua:
   $$f,g\in C^k(I,\mathbb{R}) \Rightarrow f+g\in C^k(I,\mathbb{R}).$$
   Fecho da multiplicação por escalares? Multiplicação de real por função com derivada de ordem $k\in\mathbb{N}$ tem derivada de ordem k, multiplicação de real por função contínua é contínua:
   $$c\in\mathbb{R}, f\in C^k(I,\mathbb{R}) \Rightarrow cf\in C^k(I,\mathbb{R}).$$
   Portanto, $C^k(I,\mathbb{R})$ **é espaço linear real**.

   São subespaços lineares sucessivos $\neq$s incluídos uns nos outros:
   $$C^\infty(I,\mathbb{R})\subsetneq\cdots\subsetneq C^{k+1}(I,\mathbb{R})\subsetneq C^k(I,\mathbb{R})\subsetneq C^{k-1}(I,\mathbb{R})\subsetneq\cdots\subsetneq C^0(I,\mathbb{R})\subsetneq\mathbb{R}^I$$

9. S das funções $y \in C^2(I, \mathbb{R})$ que são soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, com as operações usuais.

   $S \subset C^2(I, \mathbb{R})$ e $C^2(I, \mathbb{R})$ é espaço linear com as operações usuais.
   $S \neq \emptyset$ (*e.g.* $y = 0$ satisfaz $y \in S$).

   Fecho da adição? Se $y_1, y_2 \in S$,

   $a(y_1+y_2)'' + b(y_1+y_2)' + c(y_1+y_2) = (ay_1'' + by_1' + cy_1) + (ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0 + 0 = 0$.

   Logo, $y_1, y_2 \in S \Rightarrow y_1 + y_2 \in S$.

   Fecho da multiplicação por escalares? Se $\alpha \in \mathbb{R}, y \in S$,

$$a(\alpha y)'' + b(\alpha y)' + c(\alpha y) = \alpha(ay'' + by' + cy) = 0$$

- Portanto, S **é espaço linear real** para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$.

10. Conjunto $S_{a,b}$ das funções com valores reais definidas num intervalo I que num ponto $a \in I$ têm um valor b, com as operações usuais.

    $S_{a,b} \subset \mathbb{R}^I$ e $\mathbb{R}^I$ é espaço linear com as operações usuais.

    O zero de $\mathbb{R}^I$ é a função identicamente 0, que pertence a $S_{a,b}$ se e só se $b=0$. Logo, **só para $b=0$ $S_{a,b}$ pode ser espaço linear**.

    Verificação da condição necessária e suficiente dada:

    $S_{a,b} \neq \emptyset$ (*e.g.* $f=b$ pertence a $S_{a,b}$).

    Fecho da adição? $f, g \in S_{a,b} \Rightarrow (f+g)(a) = f(a) + g(a) = b+b = 2b$.
    Sim se e só se $2b=b$, ou seja $b=0$.

    Fecho da multiplicação por escalares?
    $$c \in \mathbb{R}, f \in S_{a,b} \Rightarrow (cf)(a) = c\big(f(a)\big) = cb\,.$$
    Sim,se e só se $cb=0$ para todos $c \in \mathbb{R}$, ou seja $b=0$.

    Portanto, para qualquer $a \in I$, $S_{a,b}$ **é espaço linear real se e só se** $b=0$ (só $S_{a,0}$ é espaço linear).

11. Conjunto S das soluções de sistema de equações lineares homogéneo $A\mathbf{x}=0$, em que A é matriz real $m\times n$.

    $S\subset\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais é espaço linear.
    $S\neq\emptyset$, pois $0\in S$.

    Fecho da adição e da multiplicação por escalares?
    Princípio de sobreposição já obtido para soluções de $A\mathbf{x}=0$.

Portanto, S **é espaço linear real**.

Designa-se $\mathcal{N}(A)$.

12. Conjunto S das matrizes coluna $m \times 1$ $\mathbf{b}$ tais que sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, em que A é matriz real $m \times n$, tem solução, com as operações usuais.

    $S \subset \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^m$ com as operações usuais é espaço linear.
    $S \neq \emptyset$, pois $A0 = 0$, logo $\mathbf{b} = 0 \in S$.

    Fecho da adição?
    $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in S \Rightarrow \exists\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$. $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.
    Logo, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in S \Rightarrow \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \in S$.

    Fecho da multiplicação por escalares?
    $c \in \mathbb{R}, \mathbf{b} \in S \Rightarrow \exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. $A(c\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$.
    Logo, $c \in \mathbb{R}, \mathbf{b} \in S \Rightarrow c\mathbf{b} \in S$.

    Portanto, S **é espaço linear real**.

    Designa-se $\mathcal{R}(A)$.

Intersecções $\cap_{a\in A} U_a$ de subespaços lineares U_a , $a\in A\neq\emptyset$, de espaço linear V são subespaços lineares de V.

Dem. $\cap_{a\in A} U_a \subset V$ e V é espaço linear.
$\cap_{a\in A} U_a \neq \emptyset$ pois 0 de V pertence a U_a para todo $a\in A$, logo, $0 \in \cap_{a\in A} U_a$.

Fecho da adição? Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \cap_{a\in A} U_a$, então $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U_a$ para todo $a\in A$. Como U_a é espaço linear, Fecho da adição em $U_a \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v} \in U_a$, todo $a\in A$. Logo, $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \cap_{a\in A} U_a$.

Fecho da multiplicação por escalares? Idem. *Q.E.D.*

Exemplo:

$\mathbb{R}^{3\times 3}$ espaço linear real das matrizes reais 3×3 com as operações usuais

U_1 subespaço linear das matrizes 3×3 triangulares inferiores

U_2 subespaço linear das matrizes 3×3 triangulares superiores

$U_1 \cap U_2 =$ é subespaço linear; vectores são as matrizes 3×3 diagonais

ESPAÇOS LINEARES

Produto cartesiano de conjuntos

Chama-se **produto cartesiano** de um nº finito de conjuntos $U_1, \ldots, U_n$ a

$$\times_{j=1}^{n} U_j = U_1 \times \cdots \times U_n = \{(u_1, \ldots, u_n) \colon u_j \in U_j\,,\ j = 1, \ldots, n\}\,.$$

É o conjunto das funções $f : \{1, \ldots, n\} \to \cup_{j=1}^{n} U_j$ tais que $f(j) \in U_j$ para $j = 1, \ldots, n$.

Chama-se **produto cartesiano** de um conjunto infinito numerável de conjuntos $U_1, U_2, \ldots$ a

$$\begin{aligned} \times_{j\in\mathbb{N}} U_j = \times_{j=1}^{\infty} U_j = U_1 \times U_2 \times \cdots &= \{(u_1, u_2, \ldots) \colon u_j \in U_j, j \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \colon u_n \in U_n\}\,. \end{aligned}$$

É o conjunto das funções $f : \mathbb{N} \to \cup_{j\in\mathbb{N}} U_j$ tais que $f(j) \in U_j$ para $j \in \mathbb{N}$.

Definição geral de produto cartesiano: Se $A \neq \emptyset$ é qualquer conjunto, chama-se **produto cartesiano** dos conjuntos em $\{U_a\}_{a\in A}$ ao conjunto das funções $f : A \to \cup_{a\in A} U_a$ tais que $f(a) \in U_a$ para $a \in A$.

É consistente com as definições anteriores.

Se A não é finito, a definição pressupõe o **Axioma de Escolha**.

Este axioma equivale a: O produto cartesiano de conjuntos $\neq \emptyset$ é $\neq \emptyset$.

Se A é finito, este axioma não é preciso: prova-se por indução.

Produtos cartesianos $\times_{a\in A}U_a$, de espaços lineares U_a, com $A\neq\emptyset$, com os mesmos escalares, e com adição e multiplicação por escalares definidas componente a componente pelas correspondentes operações nos espaços U_a são espaços lineares.

Dem. Verificar que $V=\times_{a\in A}U_a$ satisfaz todas condições da definição!

$V\neq\emptyset$? $f(a)=0\in U_a$ para $a\in A \Rightarrow f\in V$.

Fecho da adição e da multiplicação por escalares?
Associatividade do produto por escalares e distributividade pelas adições de escalares e vectores? $1\mathbf{v}=\mathbf{v}$?
Válidas em consequência da definição das operações, porque em cada componente $a\in A$ são válidas, pois U_a, $a\in A$, são espaços lineares.

V com a adição é grupo comutativo?
Associatividade e comutatividade válidas pela mesma razão.
Zero: $f\in V$ tal que $f(a)=0\in U_a$.
Simétrico de $f\in V$: $h\in V$ com $h(a)=-f(a)\in U_a$. *Q.E.D.*

Antes, forma simples de determinar se conjuntos menores do que um espaço linear são espaços lineares: **axiomas de fecho**; agora, forma simples para **certos** conjuntos maiores: **produtos cartesianos**. ☺

1. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^S$ com $S \neq \emptyset$, já vistos directamente.
2. Conjunto das sucessões de matrizes reais 2×3, $(\mathbb{R}^{2\times 3})^{\mathbb{N}}$, com as operações definidas componente a componente e as operações usuais de matrizes em cada componente.
3. Conjunto das sucessões de funções reais contínuas definidas em $[0,1]$, $C^0([0,1])^{\mathbb{N}}$.
4. $\times_{k \in \mathbb{N}\cup\{0\}} C^k(I,\mathbb{R})$ em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo em $\mathbb{R}$, com as operações usuais de funções em cada componente.

ESPAÇOS LINEARES

Operações de subespaços: União

Uniões de subespaços lineares de espaço linear V são espaços lineares?
Podem não ser.

Contraexemplo: $U = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$, $V = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
$U, V \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2$ é espaço linear.
$(1, 0), (0, 1) \in U \cup V$ e $(1, 1) \notin U \cup V$. Para $U \cup V$ falha Fecho da adição.
(não falha Fecho da multiplicação por escalares)

Menor subespaço linear S de $\mathbb{R}^2$ que contém $U \cup V$?
Para validade de Fecho da Adição, tem de ser
$(x, y) = (x, 0) + (0, y) \in S$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
Logo, $S = \mathbb{R}^2$.

É propriedade geral.

ESPAÇOS LINEARES

Operações de subespaços: Soma

Chama-se **soma** de subconjuntos U, V de espaço linear W ao conjunto de todas as somas de vectores de U com vectores de V, ou seja a $U+V=\{\mathbf{u}+\mathbf{v} : \mathbf{u}\in U, \mathbf{v}\in V\}$.

Soma $U+V$ de subespaços lineares U, V de espaço linear W é subespaço de W. É o menor subespaço de W que contém $U\cup V$.

Dem. $U+V\subset W$ devido ao Fecho da adição no espaço linear W. $U+V\neq\emptyset$ (*e.g.* contém $0=0+0$; como U,V são espaços lineares $0\in U, 0\in V$).

Fecho da adição? Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\in U+V$, então $\mathbf{w}_1=\mathbf{u}_1+\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2=\mathbf{u}_2+\mathbf{v}_2$, com $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\in U, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\in V$. Logo,
$\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2=(\mathbf{u}_1+\mathbf{v}_1)+(\mathbf{u}_2+\mathbf{v}_2)=(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)+(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\in U+V$,
do Fecho da adição nos espaços U, V.
Fecho da multiplicação por escalares? Se $c\in\mathbb{R}$, $\mathbf{w}\in U+V$, então $\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$, com $\mathbf{u}\in U, \mathbf{v}\in V$. Logo, $c\mathbf{w}=c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}\in U+V$,
do Fecho da multiplicação por escalares nos espaços U,V.
Portanto $U+V$ é espaço linear.

Se $S\supset U\cup V$ é subespaço linear de W e $U, V\subset W$, então $U+V\subset S$ porque a adição é fechada em S. *Q.E.D.*

A união de dois subespaços lineares de um espaço linear é espaço linear se e só se um é subconjunto do outro

Dem. Sejam $U, V \subset W$ espaços lineares.

Se $U \subset V$, $U \cup V = V$ é espaço linear.

Se $U \cup V$ é espaço linear, então $U \cup V = U + V$, pois este é o menor subespaço linear de W que contém $U \cup V$.
Se $U \not\subseteq V$, existe $\mathbf{u} \in U \setminus V$; para todo $\mathbf{v} \in V$ é $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U+V = U \cup V$, pelo que $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U$ ou $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$; não pode ser o 2º caso, pois seria $\mathbf{u} = (\mathbf{u}+\mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) \in V$, e $\mathbf{u} \notin V$; logo, é o 1º caso, e $\mathbf{v} = (-\mathbf{u}) + (\mathbf{u}+\mathbf{v}) \in U$.
Portanto, se $U \not\subseteq V$, é $V \subset U$, ou seja $U \subset V$ ou $V \subset U$. *Q.E.D.*

Como todo espaço linear V satisfaz o Fecho da adição e da multiplicação por escalares, o menor subespaço linear de V que contém $\emptyset \neq S \subset V$ é o conjunto das **somas finitas** de vectores de S multiplicados por escalares.

Diz-se que um vector $\mathbf{v}$ de um espaço linear V é **combinação linear** dos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ se $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{v}_j$, com $c_1, \ldots, c_k$ escalares.

Se A é uma matriz real $m \times n$ e $\mathbf{u}$ é uma matriz coluna real $n \times 1$, então $(A\mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$, $i = 1, \ldots, m$.
Designando as colunas de A por $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ é $A\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \mathbf{a}_j$.
Logo, $A\mathbf{u}$ é a **combinação linear das colunas de** A com coeficientes que são as componentes de $\mathbf{u}$, por ordem.

Chama-se **expansão linear** ou **espaço gerado** por um subconjunto $S \neq \emptyset$ de um espaço linear V, ao conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S. Designa-se por $\mathcal{L}(S)$. Diz-se que S **gera** $\mathcal{L}(S)$.
Se $S = \emptyset$, define-se $\mathcal{L}(S) = \{0\}$.

Se V é um espaço linear e $\emptyset \neq S \subset V$, então $\mathcal{L}(S)$ é um espaço linear. É o menor subespaço linear de V que contém S.

Dem. Como V é um espaço linear, o Fecho da adição e da multiplicação por escalares em V garantem $\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{v}_j \in V$ para $\mathbf{v}_j \in V$ e c_j escalares, $j=1,\ldots,k$; logo, $\mathcal{L}(S) \subset V$. $\mathcal{L}(S) \neq \emptyset$ (*e.g.* $0 = 0\mathbf{v} \in \mathcal{L}(S)$, com $\mathbf{v} \in S$).

Fecho da Adição? Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}(S)$, então $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbf{v}_j$, com $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \in S$ e a_i, b_j escalares, $i=1,\ldots,k, j=1,\ldots,m$.
Logo, $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{m} b_i \mathbf{v}_j \in \mathcal{L}(S)$.

Fecho da multiplicação por escalares? Se c é escalar, $c\mathbf{u} = c \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{k} c a_i \mathbf{u}_i \in \mathcal{L}(S)$.

Portanto, $\mathcal{L}(S)$ **é subespaço linear de** V.

Todo subespaço linear de um espaço linear V que contém $\emptyset \neq S \subset V$, para satisfazer o Fecho da adição e da multiplicação por escalares tem de conter todas as combinações lineares de elementos de S ; logo, tem de conter $\mathcal{L}(S)$. *Q.E.D.*

Exemplos:

1. O espaço linear $\mathbb{R}^2$ é gerado por qualquer dos conjuntos
   $\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(1,1),(-1,1)\}$, $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$,
   $\{(1,0),(0,k): k=1,\ldots,m\}$, qualquer $m\in\mathbb{N}$,
   $\{(x,y): x,y\in\mathbb{N}\}$, $\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}\}$, $\{(x,y): x,y\in\,]0,1[\,\}$
   Nenhum conjunto com 1 elemento gera $\mathbb{R}^2$.

2. A recta de declive 2 em $\mathbb{R}^2$ que passa em $(0,0)$, $L=\{(x,2x): x\in\mathbb{R}\}$,
   é um espaço linear gerado por qualquer dos conjuntos $\{(1,2)\}$,
   $\{(1,2),(-2,-4)\}$, $\{(k,2k),(0,0): k=1,\ldots,m\}$, qualquer $m\in\mathbb{N}$,
   $\{(x,2x): x\in\mathbb{N}\}$, $\{(x,2x): x\in\mathbb{R}\}$, $\{(x,2x): x\in\,]0,1[\,\}$.
   L pode ser gerado por conjunto com 1 elemento.

3. O espaço linear P_n dos polinómios de grau $\leq n$, com $n \in \mathbb{N}$ é gerado por qualquer dos conjuntos de polinómios
   $\{p_0, \ldots, p_n\}$, $p_j(t) = t^j$, $t \in \mathbb{R}$,
   $\{q_0, \ldots, q_n\}$, $q_j(t) = (1+t)^j$, $t \in \mathbb{R}$, $\{r_0, \ldots, r_n\}$, $r_j(t) = \frac{t^j}{j!}$, $t \in \mathbb{R}$.
   Não pode ser gerado por conjunto com menos de $n+1$ elementos

4. O espaço linear de todos os polinómios reais é gerado pelo conjunto infinito numerável $\{p_0, p_1, \ldots\}$, com $p_j(t) = t^j$, $j \in \mathbb{N}$.
   Não é gerado por qualquer conjunto finito.

ESPAÇOS LINEARES
Expansão linear: exemplos

5. Se A uma matriz real $m \times n$, o espaço dos termos independentes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ para que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução é gerado pelas colunas de A, porque $A\mathbf{x}$ é a combinação linear das colunas de A com coeficientes que são, por ordem, as componentes de $\mathbf{x}$.

   Chama-se **espaço das colunas de** A, designado $\mathcal{R}(A)$.
   É subespaço linear de $\mathbb{R}^m$.

   Chama-se **espaço das linhas de** A ao gerado pelas linhas de A.
   É $\mathcal{R}(A^t)$. É subespaço linear de $\mathbb{R}^n$.

Um sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução se e só se b pertence ao espaço das colunas de A (*i.e.* $\mathbf{b} \in \mathcal{R}(A)$).

Diz-se que $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n \in V$, em que V é um espaço linear são **vectores linearmente independentes** se a única combinação linear deles igual a 0 tem todos os coeficientes 0 , *i.e.* $\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{v}_j = 0 \ \Rightarrow \ c_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Caso contrário diz-se que são **vectores linearmente dependentes**.

Diz-se que $S \subset V$ é um **conjunto linearmente independente** se qualquer nº finito de seus elementos são vectores linearmente independentes.

Caso contrário diz-se que é um **conjunto linearmente dependente**.

Independência linear: exemplos

No espaço linear das matrizes reais 3×4 as colunas da matriz real A são linearmente independentes? E as linhas?

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

3ª coluna = 1ª multiplicada por -2;
logo, $2(1,-2,3)+0(2,0,0)+(-2,4,-6)+0(0,0,1)=0$;
portanto, as colunas são linearmente dependentes.
Uma combinação linear das linhas $=0$ equivale a
$c_1(1,2,-2,0)+c_2(-2,0,4,0)+c_3(3,0,-6,1)=0$,
que equivale a

$$\begin{array}{rrrl} c_1 & -2c_2 & +3c_3 & =0 \\ 2c_1 & & & =0 \\ -2c_1 & +4c_2 & -6c_3 & =0 \\ & & c_3 & =0 \end{array}$$

ou seja $c_1=c_3=0$, e, em consequência, $c_2=0$;

logo, as linhas são linearmente independentes.

Sejam $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ vectores de um espaço linear V :

- **Se incluem o vector 0 , são linearmente dependentes.**
  Dem. Se $\mathbf{v}_j = 0$ para um $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}} 0\mathbf{v}_i + 1\mathbf{v}_j = 0$. *Q.E.D.*
- **Se incluem vectores iguais, são linearmente dependentes.**
  Dem. Se $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k$ para uns $j \neq k \in \{1, \ldots, n\}$,
  $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}} 0\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j + (-1)\mathbf{v}_j = 0$. *Q.E.D.*
- **Se alguns são linearmente dependentes, todos são.**
  Dem. Há uma combinação linear dos vectores linearmente dependentes com coeficientes não todos 0 . Adicionando uma combinação linear dos outros com coeficientes 0 obtém-se uma combinação linear $= 0$ com coeficientes que não são todos 0. *Q.E.D.*
  $\Longleftrightarrow$ **Se são linearmente independentes, quaisquer deles são.**
- **São linearmente dependentes se e só se pelo menos um deles é combinação linear dos outros.**
  Dem. Se são linearmente dependentes, há combinação linear $\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{v}_j = 0$ com pelo menos um $c_k \neq 0$, e $\mathbf{v}_k = -\sum_{j \neq k} \frac{c_j}{c_k} \mathbf{v}_j$.
  Reciprocamente, se $\mathbf{v}_k = \sum_{j \neq k} a_j \mathbf{v}_j$, então $\sum_{j=1}^{n} a_j \mathbf{v}_j = 0$, com $a_k = -1$, pelo que os vectores são linearmente dependentes. *Q.E.D.*

Os vectores nas colunas de uma matriz com componentes escalares A $m \times n$ são linearmente independentes se e só se o sistema de equações lineares homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ tem solução única.

Dem. Como $A\mathbf{x}$ é a combinação linear das colunas de A com coeficientes que são as componentes de $\mathbf{x}$, na mesma ordem, $A\mathbf{x} = 0$ tem solução única (0) se e só se as colunas de A são linearmente independentes. *Q.E.D.*

Quaisquer $n > m$ vectores de $\mathbb{R}^m$ são linearmente dependentes.

Dem. $A\mathbf{x} = 0$ tem ∞ soluções; resultado imediato do precedente. *Q.E.D.*

Chama-se **base** de um espaço linear V a um conjunto $B \subset V$ linearmente independente que gera V.

Chama-se **dimensão** de V à cardinalidade de uma base B de V e escreve-se $\dim V = \#B$.
(É preciso provar que é a mesma para todas bases)

Diz-se que o subespaço linear $\{0\}$ de um espaço linear V tem **dimensão zero** e escreve-se $\dim\{0\} = 0$; também se considera de dimensão finita.

Diz-se que V tem **dimensão infinita** se cardinalidade de bases não é finita; não distinguindo $\neq$s cardinalidades infinitas escreve-se $\dim V = \infty$.

$\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$. Há conjuntos com cardinalidade maior. Exemplo?

ESPAÇOS LINEARES

Bases de espaço linear

Se B é base de um espaço linear V, cada vector de V tem representação única como combinação linear de elementos de B.

Dem. Se $\mathbf{v}=\sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{v}_{\lambda_j}$ e $\mathbf{v}=\sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{v}_{\alpha_k}$, subtraindo, obtém-se

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{v}_{\lambda_j} - \sum_{k=1}^{n} b_k \mathbf{v}_{\alpha_k} = 0\,.$$

Como elementos de B são linearmente independentes, agrupando os que correspondem aos mesmos vectores obtém-se uma combinação linear com coeficientes 0; logo, coeficientes a_j, b_k de vectores iguais nas duas somas são iguais, e coeficientes de vectores só numa das somas são 0. *Q.E.D.*

Chama-se **componentes** ou **coordenadas** de um vector $\mathbf{v}$ numa base B de um espaço linear V aos coeficientes de combinações lineares de elementos de B que são iguais a $\mathbf{v}$.

Para cada $\mathbf{v}\in V$ apenas um nº finito dos coeficientes podem ser $\neq 0$ e são únicos para cada correspondente elemento da base.

Bases de espaço linear V são **sistemas de referência** ou **de coordenadas**.

Cada vector $\neq 0$ tem nº finito de coordenadas $\neq 0$, únicas.

Revisão: Bases e dimensão de espaço linear

Base de um espaço linear V é um conjunto $B \subset V$ linearmente independente que gera V.

Dimensão de V é a cardinalidade de uma base B de V, $\dim V = \# B$.
(é a mesma para todas bases de um mesmo espaço linear)

V tem **dimensão infinita** se cardinalidade de bases não é finita; não distinguindo $\neq$s cardinalidades infinitas escreve-se $\dim V = \infty$.

Define-se que subespaço linear $\{0\}$ de espaço linear V tem **dimensão zero**, $\dim \{0\} = 0$; também se considera de dimensão finita.

Componentes ou **coordenadas** de vector $\mathbf{v}$ em base B de espaço linear V são os coeficientes da combinação linear de elementos de B que dá $\mathbf{v}$.

Base de espaço linear V é **sistema de referência** ou **de coordenadas** de V.

Teorema da Dimensão: *Todo espaço linear* $V \neq \{0\}$ *tem bases, todas com a mesma cardinalidade (o nº de elementos no caso de conjuntos finitos), chamada* **dimensão de** V *e designada* $\dim V$*.* *Todo* $S \subset V$ *com* $\#S > \dim V$ *é linearmente dependente.*

Dem. Prova-se aqui só para dimensão finita.
Seja $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ uma base de V e $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ com $m < n$.
Como B_1 gera V, $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\mathbf{u}_i$. Como $m < n$, o sistema $C\mathbf{x} = 0$ com $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ tem ∞ soluções, em particular soluções $\mathbf{x} \neq 0$, e

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \right) \mathbf{u}_i = 0 \,,$$

pelo que S é linearmente dependente. Logo, não há qualquer base de V com mais elementos do que uma outra base de V. *Q.E.D.*

Prova-se para dim $= \infty$ supondo validade do Axioma de Escolha.
Foi provado em 1984 que Axioma de Escolha $\Leftrightarrow$ Teorema da Dimensão.

Se U é uma matriz em escada de linhas:

- **As colunas com pivots são uma base do espaço das colunas $\mathcal{R}(U)$.**
  Dem. Se C é a matriz das colunas de U com pivots, $C\mathbf{x}=0$ tem solução única. Logo, as colunas de C são linearmente independentes. Portanto, são base de $\mathcal{R}(C)$. C é triangular superior com pivots na diagonal principal até às linhas 0 de U.
  Se $\mathbf{v}$ é uma combinação linear de colunas de U, as componentes correspondentes a estas linhas são 0 e, portanto, $C\mathbf{x}=\mathbf{v}$ tem solução; logo, $\mathcal{R}(U)=\mathcal{R}(C)$.
  Portanto, as colunas de C são uma base de $\mathcal{R}(U)$. *Q.E.D.*
- **As linhas $\neq 0$ são uma base do espaço das linhas.**
  Dem. As colunas de U^t com pivots são as $\neq 0$.
  Do resultado precedente são uma base do espaço das colunas de U^t.
  Logo, são uma base do espaço das linhas de U. *Q.E.D.*

1. No espaço linear $\mathbb{R}^n$, os vectores $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$ que são as colunas da matriz identidade I_n,

   $$\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e_n} = (0, \ldots, 0, 1)$$

   são linearmente independentes, pois I_n é matriz em escada de linhas com pivots em todas colunas ($I_n\mathbf{c} = 0$ tem solução única $\mathbf{c} = 0$).

   $$\mathcal{L}(\{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{e_j} = I_n\mathbf{c} = \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n) : c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^n.$$

   Logo, $\{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

   Chama-se à **base ordenada** $(\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n})$ **base canónica de** $\mathbb{R}^n$.
   As componentes ou coordenadas de um vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ na base canónica são $x_1, \ldots, x_n$, por ordem, pois $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e_j}$.

   Representar geometricamente a base canónica de $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.

ESPAÇOS LINEARES

Independência linear, bases e dimensão – exemplos

2. O conjunto $S=\{(1,2),(0,1)\}\subset\mathbb{R}^2$ é linearmente independente?
Sim, porque um não é igual ao outro multiplicado por um escalar.
S gera $\mathbb{R}^2$?
A matriz com os elementos de S nas colunas $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ é não singular, pois é uma matriz elementar.
Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ arbitrário, $A\mathbf{c}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ tem solução. Logo, $\mathbb{R}^2=\mathcal{L}(S)$.
S é uma base de $\mathbb{R}^2$.
As componentes de um vector de $\mathbb{R}^2$, *e.g.* $(1,0)$ na base ordenada $\big((1,2),(0,1)\big)$ são (c_1,c_2) tais que $A\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$; logo,

$$\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$$

Representar geometricamente

3. Ao espaço linear das soluções da equação homogénea $U\mathbf{x}=0$, chama-se **espaço nulo** ou **núcleo** de U, designado $\mathcal{N}(U)$, e chama-se **nulidade** de U a $\mathrm{nul}\, U = \dim \mathcal{N}(U)$.
   Cada elemento de $\mathcal{N}(U)$ é combinação linear de vectores com coeficientes que são as incógnitas livres, pois a solução geral é $\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n-r} x_{i_j}\mathbf{u}_{i_j}$, em que $x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-r}}$ são as incógnitas livres (n é o nº de colunas de U e $r=\mathrm{rank}\, U$).
   Logo, $\mathcal{N}(U)=\mathcal{L}(\{\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_{n-r}}\})$.
   Se $\{\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_{n-r}}\}$ fosse linearmente dependente, um dos vectores seria combinação linear dos outros e a solução geral poderia ser expressa com menos uma incógnita livre, o que é falso;
   logo, $\{\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_{n-r}}\}$ é linearmente independente.
   Portanto, $\{\mathbf{u}_{i_1},\ldots,\mathbf{u}_{i_{n-r}}\}$ é uma base de $\mathcal{N}(U)$. $\dim \mathcal{N}(U) = n-r$.

   os $n-r$ vectores (n=nº de colunas de U, r=característica de U) **que são as soluções de $U\mathbf{x}=0$ obtidas com uma incógnita livre $=1$ e as outras 0 são uma base do espaço nulo de U.**

$$\dim \mathcal{R}(U) + \dim \mathcal{N}(U) = n, \qquad \mathrm{rank}\, U + \mathrm{nul}\, U = n.$$

4. Determinar bases e dimensão dos espaços de colunas, de linhas e nulo da matriz em escada de linhas

$$U=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base de espaço das colunas: $\{(1,0,0,0),(-1,3,0,0)\}$ (colunas c/ pivots)

Base de espaço das linhas: $\{(0,1,2,-1,5),(0,0,0,3,-2)\}$ (linhas $\neq 0$)

Base do espaço nulo: As incógnitas livres de $U\mathbf{x}=0$ são as componentes de (x_1,x_3,x_5). Dando-lhes valores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ obtém-se base do espaço nulo: $\{(1,0,0,0,0),(0,-2,1,0,0),(0,-\frac{13}{3},0,\frac{2}{3},1)\}$.

$\dim\mathcal{R}(U)=2$,
dimensão do espaço das linhas $=\dim\mathcal{R}(U)=2$,
$\dim\mathcal{N}(U)=3$.

Se A é uma matriz $m \times n$ e U é a matriz em escada de linhas obtida com eliminação de Gauss:

- **As linhas $\neq 0$ de U são uma base do espaço das linhas de A.**
  Dem. O espaço das linhas é invariante com as operações da eliminação de Gauss. *Q.E.D.*

- **As colunas de A correspondentes às colunas de U com pivots são uma base de $\mathcal{R}(A)$.**
  Dem. $A\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow U\mathbf{u} = 0$.
  Colunas $j_1, \ldots, j_k$ de A são linearmente independentes
  $\Leftrightarrow$ colunas $j_1, \ldots, j_k$ de U são linearmente independentes. *Q.E.D.*

- **Os espaços das colunas e das linhas de A têm a mesma dimensão: a característica de A, $\operatorname{rank} A$.**
  Dem. Como para U. *Q.E.D.*

- **Bases de $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{N}(U)$ são as mesmas,** $\operatorname{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = n - \operatorname{rank} A$.
  Dem. $A\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow U\mathbf{u} = 0$. Logo, $\mathcal{N}(U) = \mathcal{N}(U)$ *Q.E.D.*

5. Uma base do espaço $\mathbb{R}^{2\times 2}$ das matrizes reais 2×2 é

$$\mathbf{E_{11}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E_{12}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E_{21}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E_{22}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   logo, $\dim \mathbb{R}^{2\times 2}=4$.

6. $\dim \mathbb{R}^{m\times n}=mn$. Uma base é $\{\mathbf{E_{ij}}: i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n\}$, $\mathbf{E_{ij}}$ matriz $m\times n$ com todas componentes 0 excepto a ij que é 1.

7. O conjunto das funções reais de variável real $p_k(t)=t^k$, $t\in\mathbb{R}$, com $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, é linearmente independente no espaço linear $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?
   Se $\sum_{k=0}^{n} c_k t^k=0$, calculando em $t=0$ obtém-se $c_0=0$.
   Dividindo por t e calculando em $t=0$ obtém-se $c_1=0$.
   Repetindo sucessivamente, obtém-se $c_k=0$ para todos $k=0,\ldots,n$.
   Logo, $p_0, p_1, \ldots$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   Como $\{p_0,\ldots,p_n\}$ gera P_n e é linearmente independente, $\{p_0,\ldots,p_n\}$ é base de P_n e $\dim P_n=n+1$.

8. Espaço linear P de todos os polinómios reais $P \supset P_n$, todo $n \in \mathbb{N}$.
   $\{p_0, p_1, \ldots\}$ é base de P, dim $P = \infty$. (dim $P = \#\mathbb{N}$) .

9. $\dim C^0([-1,1],\mathbb{R}) = \infty$, porque restrições dos polinómios a $[-1,1]$ é subespaço linear $P([-1,1])$ de $C^0([-1,1],\mathbb{R})$ e dim $P([-1,1]) = \infty$.

ESPAÇOS LINEARES

Bases de espaço linear: propriedades gerais

- **Se V é espaço linear de dimensão finita $n = \dim V$, então:**
  $S \subset V$ linearmente independente $\Rightarrow$ existe base $B \supset S$ de V.

  Dem. $S = S_k = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. $\mathcal{L}(S_k) = V \Rightarrow S$ é base.
  $\mathcal{L}(S_k) \neq V \Rightarrow$ existe $\mathbf{v}_{k+1} \in V \setminus \mathcal{L}(S_k)$. $S_{k+1} = S_k \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\}$.

  S_{k+1} é linearmente independente?
  $\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{v}_j + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = 0$; $c_{k+1} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{k+1} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{c_j}{c_{k+1}} \mathbf{v}_j \in \mathcal{L}(S_k)$.
  Contradição! Logo, $c_{k+1} = 0$ e $\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{v}_j = 0 \Rightarrow c_1 = \cdots = c_k = 0$,
  pelo que S_{k+1} é linearmente independente.

  Repete-se sucessivamente obtendo conjuntos linearmente independentes $S_k, S_{k+1}, \ldots$ com $\#S_{j+1} = \#S_j + 1$ enquanto não se tem uma base de V.
  Do Teorema da Dimensão, não há subconjuntos de V linearmente independentes com $> n$ elementos. Logo, S_n é base de V. *Q.E.D.*

Prova-se para dim $V = \infty$ supondo validade do Axioma de Escolha.

Se V é espaço linear, $\dim V = n < \infty$ **e** $S \subset V$**:**

- $\#S = n$ **e** S **linearmente independente** $\Rightarrow S$ **é base de** V**.**
  Dem. Como S é linearmente independente e $\dim V = n < \infty$, existe base $B \supset S$. Do Teorema da Dimensão, $\#B = n = \#S$. Logo, $S = B$. *Q.E.D.*

- $\#S = n$ **e** $\mathcal{L}(S) = V \Rightarrow S$ **é base de** V**.**
  Dem. Se S fosse linearmente dependente, poder-se-ia tirar a S sucessivamente um elemento combinação linear dos outros até obter conjunto linearmente independente B que ainda geraria V. B seria base e $\#B < \#S = n$, contrariando Teorema da Dimensão! *Q.E.D.*

10. As funções reais de variável real $u_1(t) = \cos at$, $u_2(t) = \sin at$, $t \in \mathbb{R}$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, são linearmente independentes no espaço linear $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

    $c_1 \cos at + c_2 \sin at = 0$ calculado em $t = 0$ dá $c_1 = 0$ e em $t = \pi/(2a)$ dá $c_2 = 0$. Logo, u_1 e u_2 são vectores linearmente independentes.

11. E $u_1(t) = \cos^2 at$, $u_2(t) = \sin^2 at$, $u_3(t) = 1$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

    $\cos^2 at + \sin^2 at = 1$, logo $u_1 + u_2 - 1 = 0$.
    Portanto, são linearmente dependentes.

    Calculando $c_1 \cos^2 at + c_2 \sin^2 at = 0$, $a_1 \cos^2 at + a_2 1 = 0$ e $b_1 \sin^2 at + b_2 1 = 0$ em $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2a}$ dá
    $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$,
    pelo que quaisquer duas das funções u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes. Logo, $\dim \mathcal{L}(\{u_1, u_2, u_3\}) = 2$, e
    $\{u_1, u_2\}$, $\{u_1, u_3\}$, $\{u_2, u_3\}$ são bases de $\mathcal{L}(\{u_1, u_2, u_3\})$.

12. **Decaimento de isótopo radioactivo** a velocidade $y'(t)$ no instante t proporcional à quantidade de isótopo $y(t)$, *i.e.* satisfaz a equação diferencial $y' = -ay$, com $a > 0$.

    O conjunto S das soluções é subespaço linear de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

    Para obter soluções $\neq 0$, com $y(t_0) \neq 0$,
    $y > 0$ num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com $t_0 \in I$,
    $\frac{y'}{y} = -a \Leftrightarrow (\ln|y|)' = -a \Leftrightarrow \ln|y|\,(t) = -at + c$, $c \in \mathbb{R}$ constante.
    Logo, $|y(t)| = e^c e^{-at}$, ou seja $y(t) = \pm\, e^c e^{-at}$.
    Com sinal $+$ ou $-$ é $y(t) \neq 0$ e $y'(t) = -ay(t)$ para $t \in \mathbb{R}$;
    não podem mudar de sinal porque são contínuas.

    Como e^c assume todos valores > 0 quando c varia em $\mathbb{R}$
    e $y = 0$ é solução, a solução geral é $y(t) = Ke^{-at}$, $K \in \mathbb{R}$.
    É $K = y(0)$, pelo que $y(t) = y(0)\, e^{-at}$.

    Se $E(t) = e^{-at}$, $S = \mathcal{L}(\{E\})$, $\{E\}$ **é uma base de** S **e** $\dim S = 1$.

13. As funções reais de variável real $u_k(t) = e^{a_k t}$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, com $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, são linearmente independentes?

    Se $a_i = a_j$ para alguns $i \neq j$, são linearmente dependentes (2 são =s).

    Se $a_1, \ldots, a_n$ são distintos e $a_M = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$,
    $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} c_k e^{(a_k - a_M)t} = 0$.
    Fazendo $t \to +\infty$, obtém-se $c_M = 0$.
    Repetindo obtém-se sucessivamente por ordem decrescente de magnitude de a_k que $c_k = 0$ para $k = 1, \ldots, n$.
    Logo, se $a_1, \ldots, a_n$ são distintos
    $u_1, \ldots, u_n$ são vectores linearmente independentes.

$S = \{f_a \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : a \in \mathbb{R}\}$, com $f_a(t) = e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$, é linearmente independente

$$\#S = \#\mathbb{R} \Rightarrow \dim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \geq \#\mathbb{R}.$$

14. **Movimento livre de massa e mola** com a outra extremidade fixa num ponto, numa recta e sem atrito. A equação do movimento obtém-se da **Lei de Newton** $força = massa \times aceleração$ e da **Lei de Hooke** da elasticidade linear $força = -k^2 y$, com $k^2 > 0$ constante, chamada rigidez da mola, e y a posição da massa em relação ao ponto de equilíbrio. Obtém-se a equação $my'' + k^2 y = 0$.

    O conjunto das soluções S é subespaço linear de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
    Com $\omega_0 = \frac{k}{\sqrt{m}}$, $y_1(t) = \cos \omega_0 t$ e $y_2(t) = \sin \omega_0 t$ são soluções linearmente independentes. Geram S?
    Multiplicando por y', $my'y'' + k^2 yy' = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{m}{2}(y')^2 + \frac{k^2}{2} y^2\right]' = 0$;
    logo, $E = \frac{m}{2}(y')^2 + \frac{k^2}{2} y^2$ é constante para cada solução.
    Se z é solução, $y = z - (c_1 y_1 + c_2 y_2)$ é solução com $y(0) = z(0) - c_1$ e $y'(0) = z'(0) - c_2 \omega_0$. Com $c_1 = z(0)$ e $c_2 = \frac{z'(0)}{\omega_0}$, é $y(0) = y'(0) = 0$ e $E(t) = 0$, ou seja $z(t) = z(0) \cos \omega_0 t + z'(0) \sin \omega_0 t$; logo, $S = \mathcal{L}(\{y_1, y_2\})$. $\{y_1, y_2\}$ **é base de** S**,** $\dim S = 2$. (E é uma energia)

Se $A, \mathbf{b}$ são matrizes, resp., mxn e $mx1$, então $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem:

- **0 soluções** $\iff \operatorname{rank} A < \operatorname{rank} [A \;\; \mathbf{b}]$,
- **1 só solução** $\iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \;\; \mathbf{b}]$, $\operatorname{nul} A = 0$,
- ∞ **soluções** $\iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} [A \;\; \mathbf{b}]$, $\operatorname{nul} A \neq 0$.

Se A,B são matrizes resp. $m\times n$, $n\times p$, $\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

Dem. Cada coluna e cada linha de AB é combinação linear, resp., das colunas de A e das linhas de B; logo, $\mathcal{R}(AB)\subset\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{R}\big((AB)^t\big)=\mathcal{R}\big(B^tA^t\big)\subset\mathcal{R}(B^t)$, e, portanto, $\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$. *Q.E.D.*

Produtos de matriz por matrizes não singulares (com dimensões compatíveis) não alteram a característica

Dem. Se A é matriz $m\times n$ e X é matriz não singular $m\times m$, então $A=X^{-1}XA$ e $\operatorname{rank} A\leq \operatorname{rank} XA \leq \operatorname{rank} A$. Logo, $\operatorname{rank} XA = \operatorname{rank} A$. Se Y é matriz não singular $n\times n$, então $\operatorname{rank} AY = \operatorname{rank} A$, pois $A=AYY^{-1}$ e o mesmo argumento dá o resultado. *Q.E.D.*

Se A, B são matrizes $n\times n$, $AB=I_n \Rightarrow BA=I_n$
($\exists$ inversa à direita $\Rightarrow$ $\exists$ inversa à esquerda, e vice versa).

Dem. $n=\operatorname{rank} I_n = \operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}\leq n$. $\operatorname{rank} A = n = \operatorname{rank} B$. Existe A^{-1} e $B=A^{-1}AB=A^{-1}$, $B^{-1}=A$. *Q.E.D.*

Se A **é matriz real** $m \times n$**, então** $\operatorname{rank} A^t A = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^t$.

Dem. $\operatorname{rank} A^t A \leq \operatorname{rank} A$.

$\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A^t A) \Rightarrow A^t A\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}^t A^t A\mathbf{x} = 0 \Rightarrow (A\mathbf{x})^t (A\mathbf{x}) = 0$.
$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ é $n \times 1$ e $\mathbf{y}^t \mathbf{y} = 0$; se $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, é $\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = 0$;
logo, $\mathbf{y} = 0$, ou seja $A\mathbf{x} = 0$.
Portanto, $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A^t A) \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{N}(A)$, *i.e.* $\mathcal{N}(A^t A) \subset \mathcal{N}(A)$, $\operatorname{nul} A^t A \leq \operatorname{nul} A$.

Como $A^t A$ e A têm n colunas, é $\operatorname{rank} A^t A \geq \operatorname{rank} A$.

Conjugando, $\operatorname{rank} A^t A = \operatorname{rank} A$. *Q.E.D.*

Se A é matriz real $m\times n$, para $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ verifica-se:

1. Existência: $\forall_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m}\,\exists$ **solução** $\iff \operatorname{rank} A = m$ **(**$m\leq n$**)**
   $\iff \exists$ **inversa à direita** C **de** A**,** $AC=I_m$**.**
2. Unicidade: $\forall_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m}\,\exists$ **no máximo 1 solução** $\iff \operatorname{rank} A = n$ **(**$m\geq n$**)**
   $\iff \exists$ **inversa à esquerda** B **de** A**,** $BA=I_n$**.**
3. Existência e unicidade: $\forall_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m}\,\exists$ **1 e só 1 solução**
   $\iff A$ **é quadrada não singular** $\iff \exists$ **inversa** A^{-1}**.**

Dem.

(1) $\Leftrightarrow \mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^m \Leftrightarrow \operatorname{rank} A=m$. As colunas de C são as soluções correspondentes às colunas de I_m.

(2) $\Leftrightarrow$ não há incógnitas livres $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A=n \Leftrightarrow \operatorname{rank} A^t=n$.
de (1) $\Leftrightarrow \forall_{\mathbf{d}\in\mathbb{R}^n}\,\exists$ solução de $A^t\mathbf{y}=\mathbf{d} \Leftrightarrow \exists$ inversa à direita B^t de A^t,
$A^tB^t=I_n$. $BA=(A^tB^t)^t=I_n$.

(3) De (1) e (2) $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A=m, \operatorname{rank} A=n \Leftrightarrow A$ é quadrada não singular
$\Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$. *Q.E.D.*

Matrizes não quadradas com inversa à direita (resp., esquerda)
têm infinitas destas inversas e nenhuma à esquerda (resp., direita).

Os subespaços lineares do espaço linear $\mathbb{R}^n$ são:

- $n=1$: $\{0\}, \mathbb{R}$ $\dim = 0, 1$. (geometricamente: ponto 0 e recta real).
- $n=2$: $\{0\}, \mathcal{L}(\{(1, c)\})$, com $c \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\{(0, 1)\})$, $\mathbb{R}^2$. $\dim = 0, 1, 2$.
  (geometricamente: ponto 0, rectas que passam em 0, plano $\mathbb{R}^2$)
  Para indicar as rectas de uma só vez: $\mathcal{L}(\{(\cos\theta, \sin\theta)\}), \theta \in [0, 2\pi[$.
- $n=3$: (geometricamente: ponto 0 , rectas que passam em 0, planos que passam em 0, $\mathbb{R}^3$). $\dim = 0, 1, 2, 3$.

É preciso generalizar a ideia de rectas e planos clássicos:

Chama-se **plano-**k ou **variedade linear de dimensão** k ou **espaço afim de dimensão** k em $\mathbb{R}^n$ a $S+\{\mathbf{a}\}$, com S subespaço linear de $\mathbb{R}^n$, $\dim S=k$ e $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ é um ponto de $\mathbb{R}^n$. (paralelo ao subespaço S e passa no ponto $\mathbf{a}$)

Os planos-1 são rectas, os planos-2 são planos clássicos, o plano-0 é o ponto 0, o plano-3 em $\mathbb{R}^3$ é o espaço tridimensional clássico.

Os subespaços lineares do espaço linear $\mathbb{R}^n$ são:

- geometricamente: ponto 0, rectas que passam em 0, planos-k que passam em 0, $k=2,\ldots,n-1$, e $\mathbb{R}^n$. $\dim=0,1,\ldots,n$.

Equações cartesianas de planos-k em $\mathbb{R}^n$:

- Rectas (planos-1)
  $k=1,\ n=2$: $ax+by=c$, com $(a,b)\neq(0,0)$
  $k=1,\ n=3$: $$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z &= d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z &= d_2\,, \end{aligned}$$
  com (a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) linearmente independentes
  (um não é o outro multiplicado por um escalar)
  $k=1$, n geral: $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, com A $(n-1)\times n$ e $\operatorname{rank} A=n-1$
- Planos (clássicos) (planos-2)
  $k=2,\ n=3$: $ax+by+cz=d$, com $(a,b,c)\neq 0$
  $k=2,\ n\geq 3$: $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, com A $(n-2)\times n$ e $\operatorname{rank} A=n-2$
- $1\leq k\leq n-1$: $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, com A $(n-k)\times n$ e $\operatorname{rank} A=n-k$

Um plano-k em $\mathbb{R}^n$ com equação cartesiana $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ é um subespaço linear de $\mathbb{R}^n$ se e só se contém 0, ou seja se e só se $\mathbf{b}=0$.

Um plano-k em $\mathbb{R}^n$ passa no ponto $\mathbf{p}$ e é paralelo ao plano com equação cartesiana $A\mathbf{x}=0$ se e só se tem equação $A\mathbf{x}=A\mathbf{p}$.

Quais foram os 10 resultados mais importantes provados desde o início (pela ordem em que foram dados)?

1. Sistemas $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ têm 0, 1 ou ∞ soluções
2. Sobreposição nas soluções de $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$
3. Matrizes têm factorização $A=PLU$
4. $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tem solução única, A $n\times n$ $\Leftrightarrow$ A^{-1} existe $\Leftrightarrow$ A tem n pivots
5. Subconjunto de espaço linear é subespaço linear $\Leftrightarrow$ é $\neq\emptyset$ e verifica fecho da adição e da multiplicação por escalares
6. $\dim\mathcal{R}(A^t)=\dim\mathcal{R}(A)$
7. Teorema de Característica e Nulidade para matrizes: se A é $m\times n$, $\mathrm{rank}\,A+\mathrm{nul}\,A=n$
8. Teorema da Dimensão (provado p/ dimensão finita)
9. $\mathrm{rank}\,AB\leq\min\{\mathrm{rank}\,A,\mathrm{rank}\,B\}$
10. Para matrizes reais $\mathrm{rank}\,A^tA=\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,A^t$.

7 provados com ELIMINAÇÃO DE GAUSS

2 relacionados com Princípio da Sobreposição

1 provado com ELIMINAÇÃO DE GAUSS e
soma de quadrados de nºs reais $=0\Rightarrow$ todos os nºs são 0

Notas históricas: Antecedentes da noção de espaço linear

(mecânica, coordenadas cartesianas, complexos e segmentos orientados, quaterniões, análise vectorial em electromagnetismo, teoria da extensão e axiomática)

1632	Galileo	sistemas de referência p/ movimento de corpos (Princípio da Relatividade)
1637	R. Descartes	coordenadas cartesianas para plano
1637	P. Fermat	idem
1659	J. de Witt	mudanças lineares de coordenadas para cónicas
1660	R. Hooke	1º modelo linear da mecânica ("Como a tensão, assim é a força")
1687	I. Newton	regra do paralelogramo para adição de forças
1743	L. Euler	resolução de eq. difer. lineares de 2ª ordem c/ coef. constantes
1762	J. d'Alembert	Princípio de Sobreposição para eq. diferenciais lineares
1799	C. Wessel	representação de nºs complexos no plano
1818	A. Möbius	segmentos orientados (adição e simétrico de colineares)
1833	G. Bellavitis	adição de segmentos orientados não colineares no plano
1837	W. Hamilton	nºs complexos como pares ordenados de nºs reais e resp. operações
1840	H. Grassman	teoria da extensão (percursora da ideia e das operações de vectores)
1843	W. Hamilton	publica descoberta dos quaterniões (C. Gauss tinha-os descoberto em 1819 mas só foi publicado em 1900)
1844	H. Grassman	álgebra de vectores, independência linear, base, dimensão
1846	W. Hamilton	cunha os termos **"vector"** e **"escalar"** para componentes de quaterniões
1846	A. Cayley	1º trabalho em espaços de dimensão >3

Notas históricas: Criação e consolidação da noção de espaço linear e vector (análise vectorial em electromagnetismo, axiomática)

1862	H. Grassman	prop. fundamentais semelhantes a axiomática de espaço linear actual
1881	J.W. Gibbs	*Elements of Vector Analysis* (separa partes escalar e vect. de quaterniões)
1888	G. Peano	axiomática para sistemas lineares segundo H. Grassman (incluindo dim quase totalmente ignorada até 1932
1893	O. Heaviside	*The Elements of Vectorial Algebra and Analysis* (semelhante a Gibbs)
1901	S. Pincherle	cunha termo **"espaço linear"**
1918	H. Weyl	*Raum, Zeit, Materie*, em que surge o termo **"Álgebra Linear"**
1931	van der Waerden	*Moderne Algebra* com capítulo **"Álgebra Linear"**
1932	S. Banach	*Théorie des opérateurs linéaires* retoma axiomática de Peano-Grassman para espaço linear e, finalmente, leva à sua **ampla aceitação!**
1932	F. Hausdorff	prova existência de bases para espaços lineares gerais
1934	H. Lowig	prova que bases de um espaço linear têm a mesma cardinalidade, e p/ espaço linear real V com $\#V > \#\mathbb{R}$ é dim $V = \#V$
1935	H. Whitney	noção de matróide abstractizando independência linear para conjuntos

3 ÉPOCAS DE VECTORES:

1799 a 1843 $\approx$45 anos Plano complexo e segmentos orientados no plano (dim=2)
1843 a 1881/93 $\approx$45 anos Quaterniões (dim=3)
1881/93 a 1932 $\approx$45 anos Análise vectorial (dim=3)
1932- $\approx$87 anos Espaço linear $\approx$90 anos da ideia em 1840 até se generalizar