exemplo de aplicação para o pêndulo acoplado de coordenadas normais

~~[illegible]~~

Modos normais

$$\begin{cases} \omega_1^2 = g/\ell \\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_2^2 = \dfrac{g}{\ell} + \dfrac{2K}{m} \\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1°: construir o vetor linha

$$B^\alpha = (A^\alpha)^T M$$

Neste caso

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \text{ logo}$$

$$B_1 = (m \quad m), \quad B_2 = (m \quad -m)$$

~~[illegible]~~

Sanity Check: à partida devemos ter

$$B^\alpha M^{-1} K = \omega_\alpha^2 B^\alpha$$

vamos confirmar. Para este sistema

$$M^{-1} K = \begin{pmatrix} \frac{g}{\ell} + K/m & -K/m \\ -K/m & g/\ell + K/m \end{pmatrix}$$

$$B_1 M^{-1} K = \underbrace{m(1 \quad 1)}_{B_1} \begin{pmatrix} g/\ell + K/m & -K/m \\ -K/m & g/\ell + K/m \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{B_1}\, m\,(g/\ell + \cancel{K/m} - \cancel{K/m} \qquad -\cancel{K/m} + g/\ell + \cancel{K/m}) =$$

$$= \underbrace{g/\ell}_{\omega_1^2} \quad \underbrace{m\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}}_{B_1} \checkmark$$

②

Confirme para B_2 !

As coordenadas normais são dadas por

$$X^\alpha = B^\alpha \cdot x$$

Logo teremos

$$X^1 = m(1 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} = m(x_1(t) + x_2(t))$$

$$X^2 = m(1 \; -1)\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} = m(x_1(t) - x_2(t))$$

Relembrando que

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2) \\ x_2(t) = a_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) - a_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2) \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{cases} X^1 = \tilde{a}_1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) \\ X^2 = \tilde{a}_2 \cos(\omega_2 t - \theta_2) \end{cases}$$

, ou seja coordenadas que osilam com uma ferquência fixa.

Podem também confirmar que $B^\beta A^\alpha = 0$ para $\beta \neq \alpha$

se $X(t) = \sum_\alpha (b_\alpha A^\alpha \cos\omega_\alpha t + c_\alpha A^\alpha \sin\omega_\alpha t)$

$X(0) = \sum_\alpha b_\alpha A^\alpha$ e as constantes

são dadas por $b_\alpha = \dfrac{B^\alpha X(0)}{B^\alpha A^\alpha}$, $c_\alpha = \dfrac{\omega_\alpha^{-1}}{B^\alpha A^\alpha} B^\alpha \dot{X}\Big|_{t=0}$

No nosso problema

$$x(0) = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{x}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo $c_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2$

$$b_1 = \Bigg(\underbrace{(1 \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B^1 \cdot A^1 = 2} \Bigg)^{-1} \underbrace{(1 \;\; 1) \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}}_{B^\alpha \cdot x(0)} =$$

$$= \frac{d}{2}$$

$$b_2 = \Bigg(\underbrace{(1 \;\; -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B^2 \cdot A^2 = 2} \Bigg)^{-1} (1 \;\; -1) \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{d}{2}$$

Logo

$$x(t) = b_1 \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{A_1} \cos \omega_1 t + b_2 \overset{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{A_2} \cos \omega_2 t =$$

$$= \frac{d}{2} \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t \\ \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t \end{pmatrix}$$

o que está de acordo com a nossa solução anterior

A vantagem deste método é que não é necessário voltar a resolver um sistema de equações para determinar as constantes dependentes das condições iniciais