Cálculo Diferencial e Integral I

Mestrado Integrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

2^o Exame - 26 de Janeiro de 2008 - 13:00

Solução

Problema 1 (0,5 val.) Seja $f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2 - 3x + 1)$.

(a) Determine o domínio de f.

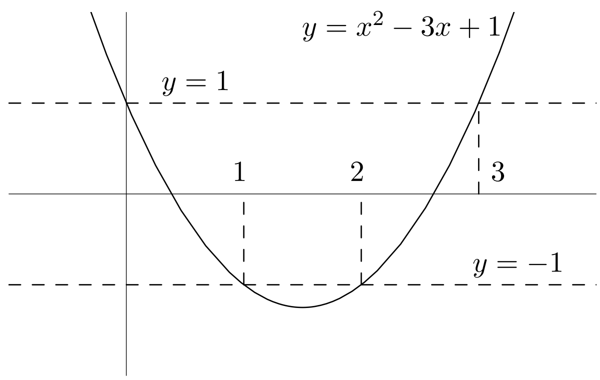
RESOLUÇÃO: As condições a satisfazer são:

$$-1 \le x^2 - 3x + 1 \le 1, \text{ ou seja, } 0 \le x^2 - 3x + 2 \text{ E } x^2 - 3x \le 0$$

Notamos que:

- A quadrática $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ tem raízes $x = 1$ e $x = 2$. É claro que $x^2 - 3x + 2 \ge 0$ quando $x \le 1$ OU $x \ge 2$, i.e, quando $x \in (]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[)$.
- A quadrática $x^2 - 3x = x(x-3)$ tem raízes $x = 0$ e $x = 3$. É claro que $x^2 - 3x \le 0$ quando $x \in [0, 3]$.
- Concluímos que $-1 \le x^2 - 3x + 1 \le 1$ se e só se $x \in ([0, 1] \cup [2, 3])$, ou seja,

O domínio de f é o conjunto $[0, 1] \cup [2, 3]$



(b) Determine, se existirem, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo do domínio de f.

RESOLUÇÃO: É óbvio que supremo = máximo = 3 e ínfimo = mínimo = 0.

Problema 2 (1,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{3}{2x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Determine os intervalos de monotonia de f.

RESOLUÇÃO: Se $x \neq 0$ a função é contínua e diferenciável em x temos

$$f'(x) = e^{-\frac{3}{2x^2}} \cdot \frac{3}{x^3}, \text{ donde o sinal de } f' \text{ é o sinal de } x$$

Quando $x \to 0$ é claro que $-\frac{3}{2x^2} \to -\infty$, e portanto $f(x) \to 0$, donde f é também contínua em $x = 0$. Concluímos que

$$f \text{ É DECRESCENTE EM }]-\infty, 0] \text{ E CRESCENTE EM } [0, +\infty[.$$

(b) Estude a concavidade de f.

RESOLUÇÃO: Se $x \neq 0$ então

$$f''(x) = e^{-\frac{3}{2x^2}} \cdot \frac{9}{x^6} - e^{-\frac{3}{2x^2}} \cdot \frac{9}{x^4} = e^{-\frac{3}{2x^2}} \frac{9}{x^4}(\frac{1}{x^2} - 1) = e^{-\frac{3}{2x^2}} \frac{9}{x^4}(\frac{1-x^2}{x^2})$$

O sinal algébrico de $f''(x)$ é o sinal algébrico de $1 - x^2$, pelo menos quando $x \neq 0$. Temos então que

$$f \text{ TEM A CONCAVIDADE PARA CIMA EM }]-1, 0[\text{ E }]0, 1[, \text{ E}$$

$$f \text{ TEM A CONCAVIDADE PARA BAIXO EM }]-\infty, -1[\text{ E }]1, +\infty[.$$

(c) Diga se f é diferenciável em $x = 0$.

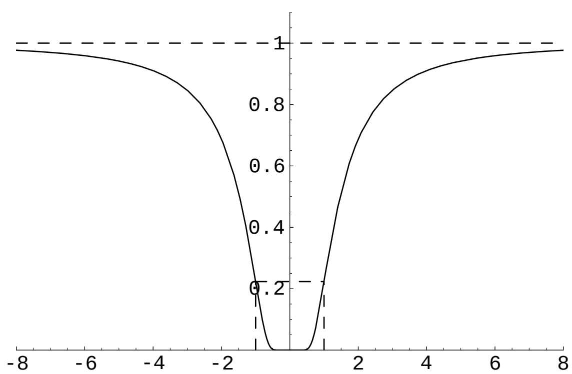
RESOLUÇÃO: A função é diferenciável em 0, porque

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{3}{2x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{e^{\frac{3}{2x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{-1/x^2}{e^{\frac{3}{2x^2}}(-3/x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^{\frac{3}{2x^2}}(3)} = 0$$

(d) Esboce o gráfico de f. RESOLUÇÃO: Notamos que f tem um mínimo absoluto em

$x = 0$, onde $f(0) = 0$, e é também claro que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = e^0 = 1$, donde a recta horizontal com equação $y = 1$ é assímptota do gráfico tanto à esquerda como à direita. O gráfico apresenta-se abaixo.



Problema 3 (0,5 val.) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to \pi^+} \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$ $\qquad$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}$

Resolução: Para o limite em (a), notamos que quando $x \to \pi^+$ então $\operatorname{sen}(x) \to 0$ por valores negativos, donde $1/\operatorname{sen}(x) \to -\infty$. Segue-se que

$$\lim_{x\to\pi^+} \arctan\left(\tfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{u\to-\infty} \arctan(u) = -\pi/2$$

Para o limite em (b), aplicamos a regra de Cauchy duas vezes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{6x} = -1/6$$

Problema 4 (0.5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \operatorname{arcsen}(x^2) \qquad (b)\ g(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \qquad (c)\ h(x) = \int_{2x}^{1} e^{t^2}\,dt$$

Resolução:

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (2x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

(b) $g(x) = e^{\cos(x)\log(\operatorname{sen}(x))}$ donde $g'(x) = e^{\cos(x)\log(\operatorname{sen}(x))} \cdot (-\operatorname{sen}(x)\log(\operatorname{sen}(x)) + \dfrac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)})$

(c) Sendo F uma primitiva de e^{x^2}, temos $h(x) = F(1) - F(2x)$, donde

$$h'(x) = -e^{(2x)^2}(2) = -2e^{4x^2}.$$

Problema 5 (1,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \arctan(x) \qquad (b)\ g(x) = e^x \operatorname{sen}(1+e^x) \qquad (c)\ h(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$$

(d) Calcule o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$. O integral é superior ou inferior a $\frac{3}{8}$?

Resolução:

(a) $\displaystyle\int 1 \cdot \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

(b) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(1+e^x)dx = \int \operatorname{sen}(u)du = -\cos(u) = -\cos(1+e^x)$

(c) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{Bx+C}{(x^2+1)}$, onde $A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = 1$.

Temos assim que

$$(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C = 1, \text{ donde}$$

$$A+B = B+C = 0, A+C = 1, \text{ ou } A = C = -B = 1/2$$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{(x^2+1)}dx =$$

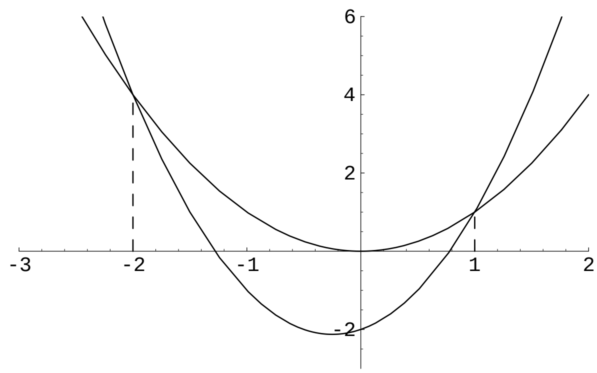
$$= \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{(x^2+1)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(u)}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\log(u) + \frac{1}{2}\arctan(x).$$
$$= \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan(x).$$

(d)

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx = \left(\frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan(x)\right|_{x=0}^{x=1} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\log(2) - \frac{1}{4}\log(2) + \frac{1}{2}\arctan(1)\right) - \left(\frac{1}{2}\log(1) - \frac{1}{4}\log(1) + \frac{1}{2}\arctan(0)\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\log(2) + \frac{\pi}{8} > \frac{\pi}{8} > \frac{3}{8}$$

Problema 6 (1 val.) Calcule a área da região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x^2 + x - 2$. A área da região em causa é superior ou inferior a 5?

Resolução: As curvas intersectam-se quando $x^2 = 2x^2 + x - 2$, ou seja, $0 = x^2 + x - 2$. Esta equação tem as soluções $x = 1$ e $x = -2$. A região está representada graficamente abaixo: A



sua área é:

$$\int_{-2}^{1}(x^2 - (2x^2 + x - 2))dx = \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right|_{x=-2}^{x=1} =$$
$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) = 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} < 5$$

Problema 7 (1 val.) Determine se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{k} \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k+3^k} \qquad (c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2(n)}$$

Resolução:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}$ é divergente, porque $\sqrt{k} \to +\infty$ quando $k \to +\infty$.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + 3^k}$ é convergente, por comparação com a série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$, já que $\frac{1}{2^k + 3^k} < \frac{1}{2^k}$. (também é fácil chegar à mesma conclusão pelo critério da razão).

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2(n)}$ é convergente, pelo teste do integral, já que, fazendo $u = \log(x)$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^2(x)} dx = \int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du = -\left.\frac{1}{u}\right|_{u=\log(2)}^{u=+\infty} = \frac{1}{\log(2)} < \infty$$

Problema 8 (0,5 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ x^{-2} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

(a) Determine $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{R}.$$

Resolução: Como a função f é contínua excepto em $x = 1$, teremos $F'(x) = f(x)$ para $x \neq 1$, ou seja,

$$F'(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x < 1 \\ x^{-2} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Segue-se imediatamente que existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$F(x) = \begin{cases} e^x + C_1 & \text{se} \quad x < 1 \\ -x^{-1} + C_2 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

A função F é um integral indefinido, e portanto é contínua em $\mathbb{R}$, incluindo em $x = 1$, logo

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = e + C_1 = \lim_{x \to 1^+} F(x) = -1 + C_2$$

Concluímos assim que $C_2 = C_1 + e + 1$, e o valor de C_1 é arbitrário. Tomando por exemplo $C_1 = 0$, obtemos

$$F(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ -x^{-1} + e + 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Resolução:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^0 f(x)dx + \lim_{v\to+\infty}\int_0^v f(x)dx =$$

$$\lim_{u\to-\infty}[F(0)-F(u)] + \lim_{v\to+\infty}[F(v)-F(0)] = -\lim_{u\to-\infty}F(u) + \lim_{v\to+\infty}F(v) = e+1$$

Problema 9 (1 val.) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável estritamente crescente. Na tabela seguinte estão indicados alguns valores de f e f':

x	0	1	2	3	4	5	6
f	0	2	4	5	6	7	9
f'	1	3	5	2	4	7	6

(a) Calcule a derivada de $f(x^2+1)+f(x)^2+1$ no ponto $x=2$.

Resolução: Sendo $h(x)=f(x^2+1)+f(x)^2+1$, temos

$$h'(x) = 2xf'(x^2+1)+2f(x)f'(x), \text{ donde}$$

$$h'(2) = 2\cdot 2\cdot f'(5) + 2f(2)f'(2) = 4\cdot 7 + 2\cdot 4\cdot 5 = 48.$$

(b) Seja g a função inversa de f. Calcule $g'(2)$.

Resolução: Temos $g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$, e portanto $g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}$. Como $f(1)=2$ sabemos que $g(2)=1$, e obtemos finalmente

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$$

(c) Mostre que existe um $c\in\,]2,4[$ tal que $f'(c)=1$.

Resolução: Notamos primeiro que

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Segue-se do Teorema de Lagrange que existe $c\in\,]2,4[$ tal que $f'(c)=1$.

(d) Mostre que $15 \leq \int_2^5 f(x)\,dx \leq 18$.

Resolução: Como a função é crescente, temos em qualquer intervalo $[a,b]$ que

$$f(a)\leq f(x)\leq f(b), \text{ para qualquer } x\in[a,b], \text{ e portanto}$$

$$f(a)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)(b-a).$$

Esta observação aplicada em cada um intervalos $[2,3]$, $[3,4]$ e $[4,5]$ permite-nos concluir que

$$\int_2^5 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx \int_3^4 f(x)dx \int_4^5 f(x)dx \leq f(3)+f(4)+f(5) = 18 \text{ e}$$

$$\int_2^5 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx \int_3^4 f(x)dx \int_4^5 f(x)dx \geq f(2) + f(3) + f(4) = 15.$$

Problema 10 (1 val.) Determine a série de Taylor no ponto $a = 0$ das funções:

$$(a)\ f(x) = e^{2x} \qquad (b)\ g(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (c)\ h(x) = \arctan(x)$$

RESOLUÇÃO:

(a) Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, temos $e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$

(b) A usual fórmula da soma de uma série geométrica com 1º termo igual a 1 e razão $r = -x^2$ conduz à série de Taylor:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

(c) Como $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} dx$, temos

$$\arctan x = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$$

Notamos que, como $\arctan 0 = 0$, temos ainda $C = 0$.

Problema 11 (0,5 val.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Determine a série de Taylor de f e o respectivo raio de convergência.

RESOLUÇÃO: Recordamos a série de Taylor de $\operatorname{sen} x$, válida para qualquer $x \in \mathbb{R}$, para concluir que, quando $x \neq 0$,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Quando $x = 0$ tanto esta última série como f são iguais a 1, pelo que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R}.$$

É evidente que esta é a série de Taylor de f, e tem raio de convergência $R = +\infty$.

(b) Sendo $P_n(x)$ o polinómio de Taylor de ordem n da função f, mostre que

$$|f(x) - P_{2n}(x)| < \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+3)!}.$$

RESOLUÇÃO: Como x^{2n} é sempre positivo, a série de Taylor de f é alternada. Numa série alternada, a diferença entre uma sua soma parcial e a soma da série não excede o 1º termo que não foi considerado para a soma parcial. Dito doutra forma, como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = P_{2n}(x) + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!} + \cdots$$

Temos que

$$|f(x) - P_{2n}(x)| < \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+3)!}.$$

(c) Mostre que

$$\frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx < \frac{1.703}{1.800}$$

RESOLUÇÃO: Trata-se de estimar o valor do integral com error inferior a

$$\frac{1.703}{1.800} - \frac{17}{18} = \frac{3}{1.800} = \frac{1}{600}.$$

Para calcular um valor aproximado para o integral de f é razoável substituir a função f por um seu polinómio de Taylor apropriado, e a questão a esclarecer é a da ordem do polinómio que devemos utilizar.

Para estimar a diferença entre o integral de f e o integral de P_{2n} usamos a alínea anterior, notando que $0 \leq x \leq 1$:

$$|f(x) - P_{2n}(x)| < \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!}, \text{ donde}$$

$$\int_0^1 |f(x) - P_{2n}(x)|\, dx < \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(2n+3)!} dx = \frac{1}{(2n+3)(2n+3)!}.$$

Quando $n = 1$, obtemos imediatamente

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+3)!} = \frac{1}{(5)(120)} = \frac{1}{600}$$

Na verdade, para $n = 1$, e como

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots$$

temos com mais exactidão que

$$1 - \frac{x^2}{3!} < f(x) < 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}, \text{ e}$$

$$\int_0^1 (1 - \frac{x^2}{3!})\, dx < \int_0^1 f(x)\, dx < \int_0^1 (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!})\, dx, \text{ donde}$$

$$(1 - \frac{1}{3 \cdot 3!}) < \int_0^1 f(x)\, dx < (1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!}), \text{ ou seja,}$$

$$\frac{17}{18} < \int_0^1 f(x)\, dx < \frac{17}{18} + \frac{1}{600} = \frac{1.703}{1.800}$$