Probabilidades e Estatística

LEIC-A, LEIC-T, LMAC, LEMat, MA, MEAmbi, MEBiol, MEFT, LEGM, MEQ

2º semestre – 2014/2015
02/05/2015 – 09:00

Duração: 90 minutos **1º teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I 10 valores

1. Três tipos de doenças D_1, D_2 e D_3 são conhecidas por provocarem dores de cabeça. De longa experiência com estas doenças conclui-se que a sua prevalência na população é de $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{10}$ e $\frac{3}{20}$, respetivamente. Sabe-se ainda que as doenças não podem ocorrer simultaneamente no mesmo doente. Por outro lado, é sabido que as dores de cabeça ocorrem com probabilidade $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$, nas pessoas com as doenças D_1, D_2 e D_3, respetivamente, e na proporção de $\frac{1}{50}$ nas pessoas sem qualquer daquelas doenças. Escolhida uma pessoa ao acaso, diga qual a probabilidade de:

(a) A pessoa ter dores de cabeça. (2.5)

Sendo os acontecimentos C =“ter dor de cabeça” e D_i =“ter doença do tipo i”, $i = 1,2,3$, tem-se que $P(D_1) = 1/20$, $P(D_2) = 1/10$, $P(D_3) = 3/20$, $P(C \mid D_1) = 4/5$, $P(C \mid D_2) = 1/4$, $P(C \mid D_3) = 1/5$, $P(C \mid \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3) = 1/50$ e que $P(D_i \cap D_j) = 0$, $\forall i \neq j$.
$P(C) = \sum_{i=1}^{3} P(C \mid D_i)P(D_i) + P(C \mid \bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3)P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3) \approx 0.109$ tendo em conta que $P(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \bar{D}_3) = 1 - \sum_{i=1}^{3} P(D_i)$.

(b) A pessoa ter a doença D_2 sabendo que tem dores de cabeça. (2.0)

$P(D_2 \mid C) = \dfrac{P(C \mid D_2)P(D_2)}{P(C)} \approx 0.229.$

2. Considere que o número de contentores que chegam por dia a um terminal portuário é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com valor esperado igual a 40.

(a) Calcule a probabilidade de chegarem ao terminal mais de 40 contentores num dia em que se sabe que chegaram no máximo 65 contentores. (2.5)

Seja X =“número de contentores que chegam por dia a um terminal portuário”. Tem-se que $X \sim Poi(\lambda)$ com $E[X] = \lambda = 40$.
$P(X > 40 \mid X \leq 65) = \dfrac{P(40 < X \leq 65)}{P(x \leq 65)} = \dfrac{F_X(65) - F_X(40)}{F_X(65)} = \dfrac{0.9999 - 0.5419}{0.9999} \approx 0.4580.$

(b) Considere que cada contentor é aberto para inspeção com probabilidade 0.02. Num dia em que cheguem 60 contentores, qual é o número mais provável de inspeções, se a escolha dos contentores para seleção for feita ao acaso? (3.0)

Seja Y =“número de contentores inspecionados num total de 60 contentores”. Tem-se que $Y \sim Bin(60, 0.02)$ uma vez que Y representa o número de sucessos numa sucessão de provas de Bernoulli independentes. Pretende-se a moda de Y definida por $\arg\max_{y \in \mathbb{R}} f_Y(y)$.
Seja $g(y) = \dfrac{f_Y(y+1)}{f_Y(y)} = \dfrac{(60-y)0.02}{(y+1)0.98}$, $y \in \{0, \ldots, 59\}$. Como $g(0) < 1$ e $g(y) > 1$, $\forall y \geq 1$, tem-se que a moda de Y é igual a 1.

Grupo II	10 valores

1. O tempo de atendimento num balcão de informações, em minutos, é uma variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{15}, & 1 < x < 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine o quantil de ordem 3/4 da variável aleatória X. (2.0)

$F_X(x) = 3/4 \iff \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 3/4 \iff \int_1^x \frac{2t}{15}\,dt = 3/4 \iff x = \frac{7}{2}$ uma vez que $x \in]1,4[$.

(b) Seja $(X_1, \ldots, X_{100})$ um vetor de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição que X. Calcule a probabilidade aproximada de a média aritmética dessas 100 variáveis exceder 2 minutos. (3.0)

Seja $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Pelo T.L.C. tem-se que $\frac{S-E[S]}{\sqrt{Var[S]}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$.
$E[S] \overset{i.d.}{=} 100E[X] = 280$ uma vez que $E[X] = \int_1^4 \frac{2x^2}{15}\,dx = 2.8$
$Var[S] \overset{i.i.d.}{=} 100Var[X] = 66$ uma vez que $E[X^2] = \int_1^4 \frac{2x^3}{15}\,dx = 8.5$ e $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0.66$
Assim, $P(\bar{X} > 2) = P(S > 200) \overset{T.L.C.}{\approx} 1 - F_{N(280,66)}(200) \approx 1$.

2. Admita que a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) é a seguinte:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.0	0.4	0.0
1	0.3	0.2	0.1

(a) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y e comente o resultado obtido. (3.0)

$$f_X(x) = \sum_{y=0}^{2} f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.4, & x = 0 \\ 0.6, & x = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \iff X \sim Ber(0.6)$$

$E[X] = 0.6$ e $Var[X] = 0.24$

$$f_Y(y) = \sum_{x=0}^{1} f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.3, & y = 0 \\ 0.6, & y = 1 \\ 0.1, & y = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$E[Y] = \sum_{y=0}^{2} y f_Y(y) = 0.8$, $E[Y^2] = \sum_{y=0}^{2} y^2 f_Y(y) = 1.0$ e $Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 0.36$
$E[XY] = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2} xy f_{X,Y}(x,y) = 0.4$

$$Corr[X,Y] = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = -0.272$$

As variáveis têm uma fraca associação linear negativa.

(b) Determine o valor de $E\left[\left(3X^2+4\right)Y\right]$. (2.0)

$E[(3X^2+4)Y] = 3E[X^2Y] + 4E[Y] = 4.4$ uma vez que $E[X^2Y] = \sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2} x^2 y f_{X,Y}(x,y) = 0.4$.