

Duração: 90 minutos

1º teste B

**Justifique convenientemente todas as respostas!**

**Grupo I**

10 valores

1. Uma fábrica produz chips para telemóveis dos quais 1% apresentam algum tipo de defeito. Nessa fábrica foi introduzido um controlo de qualidade para detectar eventuais defeitos nos chips produzidos. Sabe-se que 99.5% dos chips sem defeitos são classificados no controlo como não defeituosos e que a probabilidade de um chip ser classificado como não defeituoso quando efectivamente tem defeitos é 0.001.

- (a) Determine a probabilidade de um chip ser correctamente classificado nesse controlo de qualidade. (3.0)

Sejam  $D$  = “um chip é defeituoso” e  $C$  = “um chip é classificado como defeituoso”. Tem-se  $P(D) = 0.01$ ,  $P(\bar{C} | \bar{D}) = 0.995$  e  $P(\bar{C} | D) = 0.001$ .  

$$P((C \cap D) \cup (\bar{C} \cap \bar{D})) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap \bar{D}) = P(C | D)P(D) + P(\bar{C} | \bar{D})P(\bar{D}) = (1 - P(\bar{C} | D))P(D) + P(\bar{C} | \bar{D})(1 - P(D)) = 0.9950.$$

- (b) Qual é a probabilidade de um chip classificado como defeituoso ser efectivamente defeituoso? (2.0)

$$P(D | C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C | D)P(D)}{P(C | D)P(D) + P(C | \bar{D})P(\bar{D})} = \frac{(1 - P(\bar{C} | D))P(D)}{(1 - P(\bar{C} | D))P(D) + (1 - P(\bar{C} | \bar{D}))(1 - P(D))} = 0.9758.$$

2. O serviço de manutenção informática de um departamento de uma universidade concluiu, depois de longa experiência, que o número de computadores avariados ao longo do tempo segue um processo de Poisson com valor esperado de 6 computadores por período de 4 semanas.

- (a) Calcule a probabilidade de no período de uma semana se avariarem pelo menos 3 computadores. (1.0)

Seja  $X(t)$  = “número de computadores avariados num período de  $t$  semanas”. Tem-se que  $X(t) \sim Poi(\lambda t)$  com  $E[X(4)] = 4\lambda = 6$ .  
 Uma vez que  $X(1) \sim Poi(3/2)$ , tem-se  $P(X(1) \geq 3) = 1 - P(X(1) < 3) = 1 - P(X(1) \leq 2) = 1 - F_{X(1)}(2) = 1 - 0.8088 = 0.1912$ .

- (b) Calcule a probabilidade de em 6 semanas haver pelo menos uma em que se avariaram pelo menos 3 computadores. (2.5)

Seja  $Y$  = “número de semanas em que avariaram pelo menos 3 computadores num conjunto de 6 semanas”. Como  $Y$  representa o número de sucessos (avaria de pelo menos 3 computadores) em 6 repetições independentes (períodos disjuntos num processo de Poisson) de uma prova de Bernoulli então  $Y \sim Bi(6, p)$ , com  $p = P(X(1) \geq 3) = 0.1912$ .  

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - F_Y(0) = 0.7200.$$

- (c) Determine o número esperado de semanas que devem decorrer até que haja uma semana em que se avariaram pelo menos 3 computadores. (1.5)

Seja  $T$  = “número de semanas até à primeira em que avariaram pelo menos 3 computadores”. Pela justificação da alínea anterior tem-se  $T \sim Geo(p)$ , com  $p = 0.1912$ . Logo  $E[T] = 1/p = 5.2301$  semanas.

1. Admite-se que em determinada população o peso das pessoas pode ser descrito por uma distribuição normal com valor esperado 65 Kg.

- (a) Determine a variância do peso das pessoas sabendo que na população a percentagem de pessoas com peso inferior a 40 Kg é de 5%. (2.5)

Seja  $X$  = "peso de uma pessoa da população", com  $X \sim N(65, \sigma^2)$ .

$$P(X < 40) = 0.05 \iff P\left(\frac{X-65}{\sigma} < \frac{40-65}{\sigma}\right) = 0.05 \iff \Phi(-25/\sigma) = 0.05 \iff -25/\sigma = \Phi^{-1}(0.05) \iff -25/\sigma = -1.645 \iff \sigma^2 = (25/1.645)^2. \text{ Assim, } \sigma^2 \approx 230.9661 \text{ Kg}^2.$$

- (b) Seis pessoas estão à espera de um elevador no qual existe o seguinte aviso: "Lotação: 5 pessoas ou 400 Kg". Qual é a probabilidade do peso das 6 pessoas exceder 400 Kg? (2.5)

*Nota:* se não resolveu a alinea (a) considere que o desvio padrão do peso de uma pessoa é 18 kg.

Sejam  $X_i$  = "peso da  $i^{\text{a}}$  pessoa",  $i = 1, \dots, 6$  e  $T = \sum_{i=1}^6 X_i$  = "peso total das 6 pessoas".

Temos que  $E[T] = E[\sum_{i=1}^6 X_i] = \sum_{i=1}^6 E[X_i] = 6E[X] = 390$  e  $Var[T] = Var[\sum_{i=1}^6 X_i] = \sum_{i=1}^6 Var[X_i] = 6Var[X] = 1385.7966$ , uma vez que as variáveis  $X_i$  são independentes e identicamente distribuídas a  $X$ . Uma vez que  $T$  é a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuições normais, então  $T \sim N(390, 1385.7966)$ .

$$P(T > 400) = 1 - P(T \leq 400) = 1 - F_T(400) \approx 1 - 0.6059 = 0.3941.$$

2. Num *stand* de automóveis, os números de vendas diárias de carros de duas marcas distintas são duas variáveis aleatórias, representadas por  $X$  e  $Y$ , que têm uma função de probabilidade conjunta dada pela seguinte tabela:

$X \backslash Y$	0	1
0	0.20	0.30
1	0.04	0.10
2	0.26	0.10

- (a) Determine o valor esperado e a moda de  $X$  condicionalmente a  $Y = 1$ . (2.0)

$$f_{X|Y=1}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \begin{cases} 0.6, & x = 0 \\ 0.2, & x = 1, 2 \end{cases},$$

uma vez que  $f_Y(1) = \sum_{x=0}^2 f_{X,Y}(x,1) = 0.5$ .

$$E[X|Y=1] = \sum_{x=0}^2 x f_{X|Y=1}(x) = 0.6 \text{ e } \text{Moda}(X) = \arg \max_{x \in \{0,1,2\}} f_{X|Y=1}(x) = 0.$$

- (b) Calcule a variância do número total de vendas diárias de carros das duas marcas nesse *stand*. (3.0)

$$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X, Y] = 0.8304.$$

$$f_X(x) = \sum_{y=0}^1 f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5, & x = 0 \\ 0.14, & x = 1, \\ 0.36, & x = 2 \end{cases} \quad E[X] = \sum_{x=0}^2 x f_X(x) = 0.86, \quad E[X^2] = \sum_{x=0}^2 x^2 f_X(x) = 1.58 \text{ e}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0.8404.$$

$$f_Y(y) = \sum_{x=0}^2 f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5, & y = 0 \\ 0.5, & y = 1 \end{cases} \iff Y \sim Ber(0.5), \quad E[Y] = 0.5 \text{ e } Var[Y] = 0.25$$

$$E[XY] = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^1 xy f_{X,Y}(x,y) = 0.3 \text{ e } Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = -0.13.$$