Prof. Vitor Cardoso (responsável)
Prof. Pedro Pereira (práticas)

Mestrado em Engenharia Física Tecnológica (MEFT)
Física dos Meios Contínuos
Teste I (28/03/2022)

Duração: 45 minutos

Justifique cuidadosamente todas as respostas e raciocínios
Exprima as unidades no sistema S.I. no final de cada resposta
Não é permitido o uso de formulários ou calculadoras

Problema 1 Um corpo isotrópico em equílibrio tem o seguinte campo de deslocamentos $\vec{\zeta} = x^2 \vec{e}_x + z^2 \vec{e}_z$ num certo sistema de coordenadas (x,y,z).

a) (4.0 val.) Calcule o tensor das deformações de Cauchy. Qual a componente de expansão e qual a de cisalhamento? Desenhe o campo de deslocamento.

R: $S_{ij} = (\partial_i \zeta_j + \partial_j \zeta_i)/2$. Assim, $S_{xx} = 2x$, $S_{zz} = 2z$, todos os outros termos são nulos. Ora, $S_{ij} = \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij} + \Sigma_{ij}$, com Θ o traço de S. Assim, $\Theta = 2(z + x)$ e $\Sigma = 2/3(2x - z, -x - z, 2z - x)$.

b) (4.0 val.) Calcule o tensor das tensões de Cauchy. Determine a densidade de força externa a actuar neste corpo.

R: $T_{ik} = -K\Theta\delta_{ik} - 2\mu\Sigma_{ik}$. Por isso,

$$T_{xx} = -2K(x+z) - \frac{4}{3}\mu(2x - z)\,, \tag{1}$$

$$T_{yy} = -2K(x+z) + \frac{4}{3}\mu(x + z)\,, \tag{2}$$

$$T_{zz} = -2K(x+z) - \frac{4}{3}\mu(2z - x)\,. \tag{3}$$

Ora a densidade de força elástica $f_{\mathrm{el\,k}} = -\nabla_i T_{ik}$. Em equilibrio $f_{\mathrm{ext}} + f_{\mathrm{el}} = 0$ logo $f_{\mathrm{ext\,k}} = \nabla_i T_{ik}$. Portanto $f_{\mathrm{ext\,x}} = f_{\mathrm{ext\,z}} = -2K - 8\mu/3$.

Problema 2 Uma barra de comprimento $2L$ está presa numa parede, horizontalmente, como

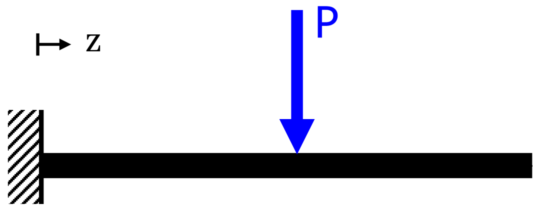

Figura 1: Uma barra presa numa extremidade, com um peso P a meio.

na Figura 1. A barra tem massa desprezável, mas foi colocada uma massa de peso P exactamente a meio da barra, em $z = L$. A barra tem constante de Young E e dimensões laterais $a \times b$ (b segundo os eixo dos yy, que é vertical com sentido para cima nesta figura).

a) (2.0 val.) Que forças estão aplicadas na extremidade presa desta barra?

R: Uma força de cisalhamento $F_{\text{cis}} = P$ (em y) e uma tensão normal (em z) para manter o momento nulo.

b) (4.0 val.) Usando a equação de Euler-Bernoulli, determine a flexão $\eta(z)$ da barra entre $z = 0, L$ e entre $z = L, 2L$.

Nota: As seguintes equações podem ser úteis

$$
\begin{aligned}
\int \delta(z-a)dz &= H(z-a) \\
< z-a >^n &= (z-a)^n H(z-a)\,, \qquad < z-a >^0 = H(z-a) \\
\int < z-a >^n dz &= \frac{< z-a >^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}
$$

R: Dado que não existem forças entre $z = 0, L$, então a equação de Euler-Bernoulli para a deformação é simplesmente

$$\eta'''' = 0\,,$$

com solução $\eta_1 = az^3 + bz^2 + cz + d$. Como a barra está fixa ($\eta_1(0) = \eta_1'(0) = 0$) em $z = 0$ então $c = d = 0$. Temos agora que impôr a condição de existir uma força localizada P em $z = L$:

$$P = -EI\eta_1'''(L)\,,$$

o que impõe $a = -P/(6EI)$. Temos então $\eta_1 = -P/(6EI)z^3 + bz^2$. Investiguemos agora a região entre $(L, 2L)$. A solução geral é idêntica, $\eta_2 = ez^3 + fz^2 + gz + h$. Agora, como temos a extremidade em $z = 2L$ livre, queremos impôr $\eta_2''(2L) = \eta_2'''(2L) = 0$, o que implica que $e = f = 0$ e portanto $\eta_2 = gz + h$. Finalmente, impondo continuidade de $\eta''(L)$, $\eta'(L)$, $\eta(L)$ temos sucessivamente $b = PL/(2EI)$, $g = PL^2/(2EI)$, $h = -PL^3/(6EI)$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\eta &= -\frac{P}{6EI}z^2(z-3L)\,, \qquad 0 < z < L \\
\eta &= \frac{PL^2}{2EI}(z-L/3)\,, \qquad L < z < 2L
\end{aligned}
$$

Note-se que o último troço é uma linha recta! Note-se também que o momento

$$I = \frac{ab^3}{12}$$

Alternativamente: Integramos Euler-Bernoulli quatro vezes e encontramos

$$EI\eta = P\frac{(z-L)^3}{6}H(z-L) + \frac{a}{6}z^3 + \frac{b}{2}z^2 + cz + d$$

Se integrarmos apenas uma ou duas vezes, encontramos um resultado util para as condições fronteira:

$$EI\eta''' = PH(z-L) + a$$

$$EI\eta'' = P(z-L)H(z-L) + az + b$$

Assim, $c = d = 0$ resulta de impor $\eta(0) = \eta'(0) = 0$

De $\eta'''(2L) = \eta''(2L) = 0$, temos

$$\eta'''(2L) = 0 \implies PH(2L-L) + a = 0 \implies a = -P$$

$$\eta''(2L) = 0 \implies PLH(2L-L) + a2L + b = 0$$

o que resulta em

$$PL - 2PL + b = 0 \implies b = PL$$

Portanto a solução completa é

$$EI\eta = P\frac{(z-L)^3}{6}H(z-L) - \frac{P}{6}z^3 + \frac{PL}{2}z^2$$

which gives

Ou seja,

$$\eta = \begin{cases} -\frac{P}{6EI}z^3 + \frac{PL}{2EI}z^2 & , \ z \leq L \\ P\frac{(z-L)^3}{6EI} - \frac{P}{6EI}z^3 + \frac{PL}{2EI}z^2 & L < z \leq 2L \end{cases} = \begin{cases} -\frac{P}{6EI}(z^3 - 3Lz^2) & z \leq L \\ \frac{P}{2EI}\left(\frac{(z-L)^3}{3} - \frac{1}{3}z^3 + Lz^2\right) & L < z \leq 2L \end{cases}$$

Mas

$$\left(\frac{(z-L)^3}{3} - \frac{1}{3}z^3 + Lz^2\right) = \frac{1}{3}(z-L)(z^2 - 2zL + L^2) - \frac{1}{3}z^3 + Lz^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(z^3 - 2z^2L + zL^2 - Lz^2 + 2zL^2 - L^3 - z^3 + 3Lz^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(3zL^2 - L^3\right) = L^2(z - L/3)$$

E potanto encontramos o mesmo resultado.

$$\eta = \begin{cases} -\frac{P}{6EI}(z^3 - 3Lz^2) & z \leq L \\ \frac{PL^2}{2EI}(z - L/3) & L < z \leq 2L \end{cases}$$

Problema 3

a) (4.0 val.) Mostre, a partir da equação de Navier-Cauchy, que existem ondas planas elásticas com duas polarizações diferentes. Calcule a sua velocidade de propagação.

R: A equação de Navier-Cauchy pode escrever-se como

$$\mu \partial_i \partial_i \zeta_j + (K + \mu/3) \partial_j \partial_l \zeta_l = \rho \ddot{\zeta}_j \,.$$

Tomemos um meio infinito e homogéneo e uma onda plana a viajar na direcção x. Como o meio é homogéneo e infinito então $\zeta = \zeta(t, x)$, pelo que $\partial_z = \partial_y = 0$ e temos

$$\mu \partial_x^2 \zeta_x + (K + \mu/3) \partial_x^2 \zeta_x = \rho \ddot{\zeta}_x$$
$$\mu \partial_x^2 \zeta_y = \rho \ddot{\zeta}_y \,, \qquad \mu \partial_x^2 \zeta_z = \rho \ddot{\zeta}_z \,.$$

Estas equações tem a forma de uma equação de onda com velocidade

$$c_l^2 = \frac{3K + 4\mu}{3\rho} \,, \qquad c_t^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

b) (2.0 val.) Foi escavada uma cavidade esférica, de raio R, num material extremamente rígido. A cavidade é preenchida agora com um material elástico, com constantes de elasticidade K, μ. Determine uma expressão para as frequências de oscilação radial do material elástico.

R: Para oscilações radiais, o vector deslocamento só pode ter componente radial e depender apenas de (t, r). Assim, $\vec{\nabla} \times \vec{\zeta} = 0$. A equação de Navier Stokes reduz-se a

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{\zeta}) = \frac{3\rho \ddot{\vec{\zeta}}}{3K + 4\mu}$$

Em coordenadas esféricas e usando a simetria já discutida temos

$$\partial_r \left(\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \zeta_r) \right) = \frac{\ddot{\zeta}_r}{c_l^2}$$

Fazendo $\zeta_r = e^{-i\omega t} f(r)/r$ temos finalmente a equação

$$f'' + (W^2 - 2/r^2) f = 0 \,,$$

onde $W \equiv \omega / c_l$. As soluções desta equação podem tentar-se sob a forma

$$f = A \cos Wr + g(r) + C \sin Wr + h(r) \,,$$

e obtemos

$$g'' + (W^2 - 2/r^2) g = \frac{2A \cos Wr}{r^2} \,,$$

com solução particular da forma $g = B \sin(Wr)/r$ e $h = D \cos(Wr)/r$. Substituindo, temos $B = -A/W$ e $D = C/W$. Portanto,

$$\zeta_r = e^{-i\omega t} \frac{A \cos Wr - A \sin(Wr)/(Wr) + C \sin Wr + C \cos(Wr)/(Wr)}{r}$$

Para termos uma deformação finita $C = 0$. Finalmente, temos que impor deslocamento nulo na fronteira da cavidade, dado que o meio circundante é rijo. Obtemos assim a condição

$$\tan x = x \,,$$

com $x = \omega R / c_l$. A raíz mais baixa encontra-se em $x = 4.49341$.

Formulário

Tensor das deformações

$$S_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}\right)$$

Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ),

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= \frac{\partial \zeta_r}{\partial r}\,, \quad S_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\zeta_r}{r}\,, \quad S_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \zeta_\phi}{\partial \phi} + \frac{\zeta_\theta \cot\theta}{r} + \frac{\zeta_r}{r}\,,\\
2S_{\theta\phi} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \zeta_\phi}{\partial \theta} - \zeta_\phi \cot\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \zeta_\theta}{\partial \phi}\,, \quad 2S_{r\theta} = \frac{\partial \zeta_\theta}{\partial r} - \frac{\zeta_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_r}{\partial \theta}\,,\\
2S_{\phi r} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \zeta_r}{\partial \phi} + \frac{\partial \zeta_\phi}{\partial r} - \frac{\zeta_\phi}{r}\,.
\end{aligned}$$

Em coordenadas cilindricas (r, ϕ, z),

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= \frac{\partial \zeta_r}{\partial r}\,,\; S_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_\phi}{\partial \phi} + \frac{\zeta_r}{r}\,,\; S_{zz} = \frac{\partial \zeta_z}{\partial z}\,,\\
2S_{\phi\, z} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_z}{\partial \phi} + \frac{\partial \zeta_\phi}{\partial z}\,,\; 2S_{r\, z} = \frac{\partial \zeta_r}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_z}{\partial r}\,, \quad 2S_{r\phi} = \frac{\partial \zeta_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta_r}{\partial \phi} - \frac{\zeta_\phi}{r}\,.
\end{aligned}$$

O tensor das deformações pode ser decomposto em componentes de cisalhamento e de expansão $S_{ik} = \Sigma_{ik} + \frac{1}{3}\Theta\delta_{ik}$.

Tensor das tensões

O tensor das tensões pode ser também decomposto em componentes de cisalhamento e de expansão,

$$T_{ik} = T_{ik}^{\text{cis}} + P\delta_{ik}\,.$$

A relação entre deformação e tensão

$$T_{ik} = -K\Theta\delta_{ik} - 2\mu\Sigma_{ik}\,,$$

onde K é o módulo de expansão (bulk modulus) e μ é o de cisalhamento. Estes coeficientes estão relacionados com o módulo de Young E e o rácio de Poisson ν:

$$E = \frac{9\mu K}{3K + \mu}\,, \qquad \nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}\,.$$

Densidade de energia elástica $U = -\frac{1}{2}T_{ij}\zeta_{i,j}$.

A equação de Navier-Cauchy. Na presença da gravidade como força de corpo exterior,

$$\left(K + \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_l}\zeta_l + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\zeta_j + \rho g_j = \rho\ddot{\zeta}_j\,,$$

onde g_j é a componente da aceleração da gravidade na direcção j. Esta equação pode ser expressa como

$$\text{grad}\left(\text{div}\vec{\zeta}\right) - \frac{3\mu}{3K + 4\mu}\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\zeta}\right) = -\frac{3\rho\left(\vec{g} - \ddot{\vec{\zeta}}\right)}{3K + 4\mu}$$

Equilibrio de barras finas. Uma barra elongada na direção z está sujeita a uma força F_z segundo z e a uma força de corpo (como a gravidade) por unidade de comprimento W, segundo o eixo transveral y. Em equilibrio, a deflexão η obedece à equação de Euler-Bernoulli

$$E\left(I_y\eta''\right)'' + F_z\eta'' - W_y = 0\,,$$

onde derivadas são em ordem a z. A esta configuração corresponde uma força de cisalhamento segundo y,

$$F_y = -E\left(I_y\eta''\right)' - F_z\eta'\,. \tag{4}$$

Equação da continuidade

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

Equação de Euler

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\mathrm{grad})\,\vec{v} = \frac{\vec{f} - \mathrm{grad\,P}}{\rho}$$

$$\begin{aligned}
&D_1v_r - \frac{v_\phi^2}{r} = \frac{f_r - \partial_r P}{\rho}\,, \qquad D_1v_\phi + \frac{v_\phi v_r}{r} = \frac{rf_\phi - \partial_\phi P}{r\rho}\,, \qquad D_1 v_z = \frac{f_z - \partial_z P}{\rho}\,,\\
&D_1 \equiv \partial_t + v_r\partial_r + \frac{v_\phi}{r}\partial_\phi + v_z\partial_z\,.\\
&D_2v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = \frac{f_r - \partial_r P}{\rho}\,, \qquad D_2v_\theta + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r} = \frac{rf_\theta - \partial_\theta P}{r\rho}\,,\\
&D_2v_\phi + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r} = \frac{r\sin\theta f_\phi - \partial_\phi P}{\rho r\sin\theta}\,, \qquad D_2 \equiv \partial_t + v_r\partial_r + \frac{v_\theta}{r}\partial_\theta + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\,.
\end{aligned}$$

Equação de Bernoulli para escoamento potencial $v = \nabla\Psi$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \Phi + \frac{P}{\rho} = c(t)$$

Equação de Navier-Stokes para fluidos viscosos incompressíveis ($\nu = \eta/\rho$)
O tensor das tensões para estes fluidos tem a forma

$$T_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j + T_{ij}^{\mathrm{visc}}\,, \qquad T_{ij}^{\mathrm{visc}} = -\zeta\delta_{ij}\partial_k v_k - \eta\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k v_k\right)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\mathrm{grad})\,\vec{v} = \frac{\vec{f} - \mathrm{grad\,P} + \eta\nabla^2\vec{v}}{\rho}\,.$$

$$\begin{aligned}
&D_1v_r - \frac{v_\phi^2}{r} = \frac{f_r - \partial_r P}{\rho} + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} - \frac{v_r}{r^2}\right)\,,\\
&D_1v_\phi + \frac{v_\phi v_r}{r} = \frac{rf_\phi - \partial_\phi P}{r\rho} + \nu\left(\nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2}\right)\,,\\
&D_1v_z = \frac{f_z - \partial_z P}{\rho} + \nu\nabla^2 v_z\,, \qquad D_1 \equiv \partial_t + v_r\partial_r + \frac{v_\phi}{r}\partial_\phi + v_z\partial_z\,.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_2 v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} &= \frac{f_r - \partial_r P}{\rho} + \nu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} - \frac{2v_r}{r^2}\right),\\
D_2 v_\theta + \frac{v_\theta v_r}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r} &= \frac{r f_\theta - \partial_\theta P}{r\rho} + \nu\left(\nabla^2 v_\theta - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right),\\
D_2 v_\phi + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi\cot\theta}{r} &= \frac{r\sin\theta f_\phi - \partial_\phi P}{\rho r\sin\theta} + \nu\left(\nabla^2 v_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta}\right),\\
D_2 \equiv \partial_t + v_r\partial_r + \frac{v_\theta}{r}\partial_\theta + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\partial_\phi\,.
\end{aligned}
$$

Operadores matemáticos

Transformação de tensores

Se mudarmos de coordenadas (x, y, y) para (x', y', y') então

$$T'_{ij} = T_{mn} a_{mi} a_{nj}\,,$$

onde $a_{ij} = \vec{e}_i.\vec{e'}_j$, e $\vec{e}_i$, $\vec{e'}_j$ são versores no sistemas respectivos.

O gradiente de um escalar f, pode ser expressa como,

$$\operatorname{grad} f \;=\; \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\vec{e}_\phi\,.$$

A divergência de um vector pode ser expressa como,

$$\operatorname{div}\vec{V} \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta V_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}$$

O Laplaciano pode ser expresso como

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,,\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
$$

O rotacional de um vector $\vec{V}$ pode ser expresso como

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{V} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\phi} - \frac{\partial V_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rV_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\phi}\right)\vec{e}_z\,,\\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rV_\phi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\phi
\end{aligned}
$$

Teorema de Helmholtz. Um vector $\vec{a}$ pode ser decomposto na soma de duas componentes, uma com rotacional nulo, e outra com divergência nula,

$$\vec{a} = \nabla\times\vec{b} + \nabla\Phi$$

Identidades.

$$\nabla\times(\Phi\vec{a}) = \Phi\nabla\times\vec{a} + (\nabla\Phi)\times\vec{a}$$

$$\nabla(\nabla\times\vec{a}) = 0\,,\qquad \nabla\times(\nabla\Phi) = 0\,,\qquad \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla\left(\nabla\vec{a}\right) - \nabla^2\vec{a}$$