

# **Experiência de Millikan**

**Estimativa da carga eléctrica de gotículas de óleo  
electrizadas em suspensão num fluido**

**Gonçalo Figueira** — [goncalo.figueira@tecnico.ulisboa.pt](mailto:goncalo.figueira@tecnico.ulisboa.pt)

Complexo Interdisciplinar, ext. 3375

Tel. 218 419 375

**1.º semestre 2019/20**



## Objectivos

Corpo esférico em queda livre num fluido

Velocidade limite

Equilíbrio através de um campo eléctrico

Determinação do valor de  $q$

# Robert A. Millikan

EUA (1868-1953)

Univ. Chicago, Caltech

Prémio Nobel da Física de 1923

“pela medição da carga electrónica elementar e pelo seu trabalho sobre o efeito fotoeléctrico”

1910 – experiência da gota de óleo

Demonstrou que os raios cósmicos são de origem extraterrestre



# Experiência de Millikan: objectivos e método

## Objectivo

Determinar a carga eléctrica de pequenas gotas de óleo, mostrando que surge sempre como múltiplo de uma unidade fundamental: a carga do electrão

Valor tabelado:

$$q = -1.6021766208 \times 10^{-19} \text{ C}$$

## Método

- Estudar a queda de pequenas gotículas de óleo electrizadas sob acção da gravidade e de um campo eléctrico uniforme
- Medir força de gravidade (determinar *velocidade limite*)
- Medir força eléctrica (cancelar com força de gravidade)

# Corpo esférico em queda livre num fluido

Está sujeito a duas forças de sentidos contrários:

**Peso**

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

**Força de atrito**  
proporcional à velocidade

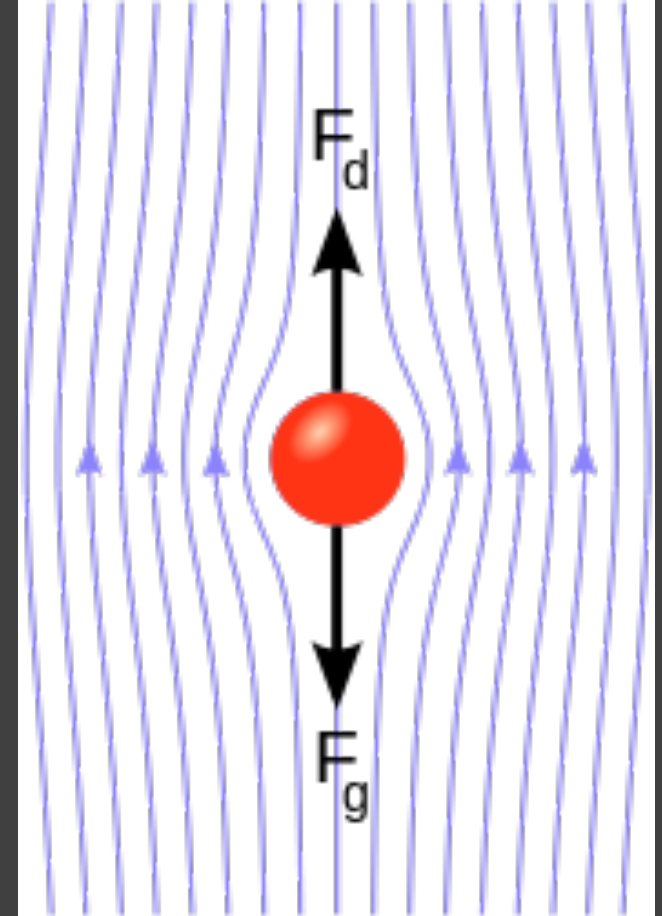
$$\vec{F}_d = -k\eta\vec{v}$$

Para um corpo esférico temos  
(Lei de Stokes)

$$k = 6\pi r$$

$k$  [m] = coeficiente de forma

$\eta$  [Pa.s] = coef. viscosidade: 1 Poise = 0,1 Pa.s



# Corpo esférico em queda livre num fluido



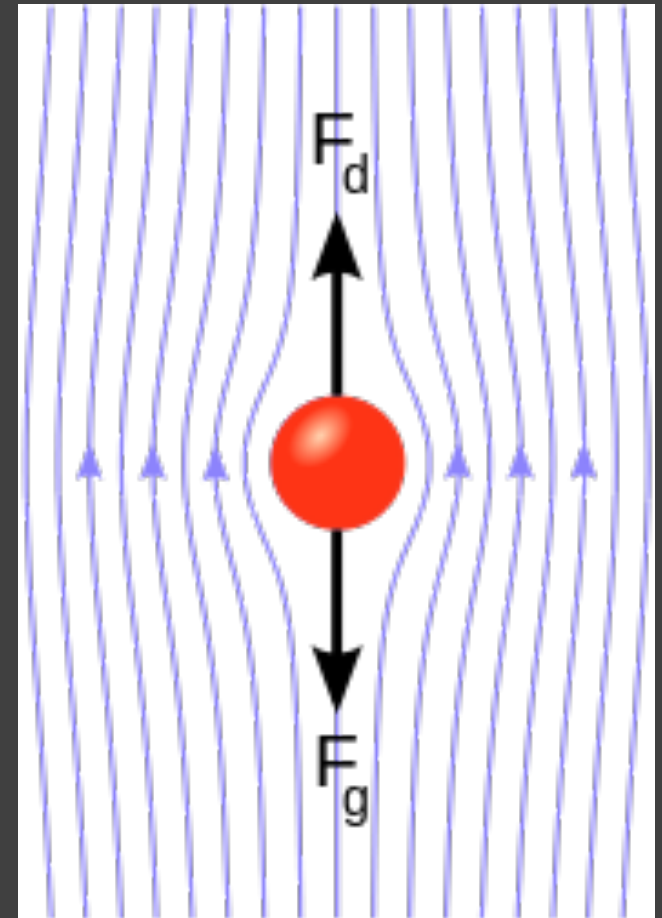
# Equação do movimento

$$ma = \sum F \Leftrightarrow$$
$$m \frac{dv}{dt} = mg - k\eta v$$

À medida que aumenta a velocidade:

- aumenta a força de atrito
- termo da direita diminui
- velocidade converge para um valor limite:

$$m \frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$
$$v \rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k\eta}$$



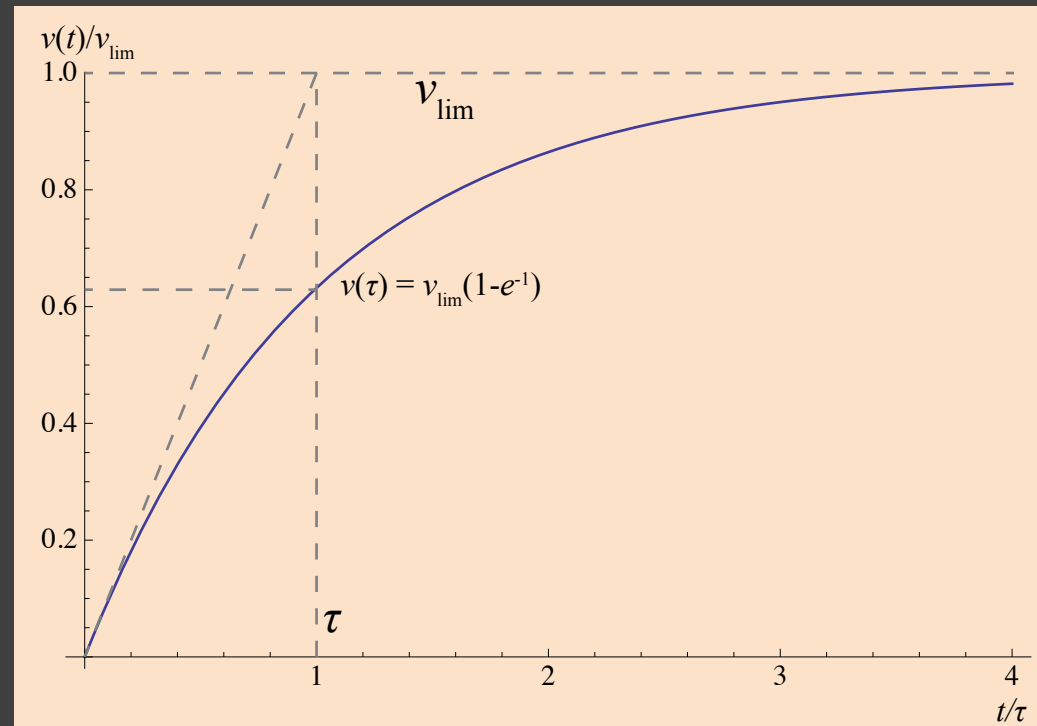
# Equação do movimento

A equação do movimento é uma eq. diferencial de 1.<sup>a</sup> ordem:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k\eta}{m}v$$

Esta equação tem solução da forma (ver notas de apoio)

$$v(t) = \frac{mg}{k\eta} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{k\eta}{m}t\right) \right]$$
$$= v_{\text{lim}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad \tau \equiv \frac{m}{k\eta}$$





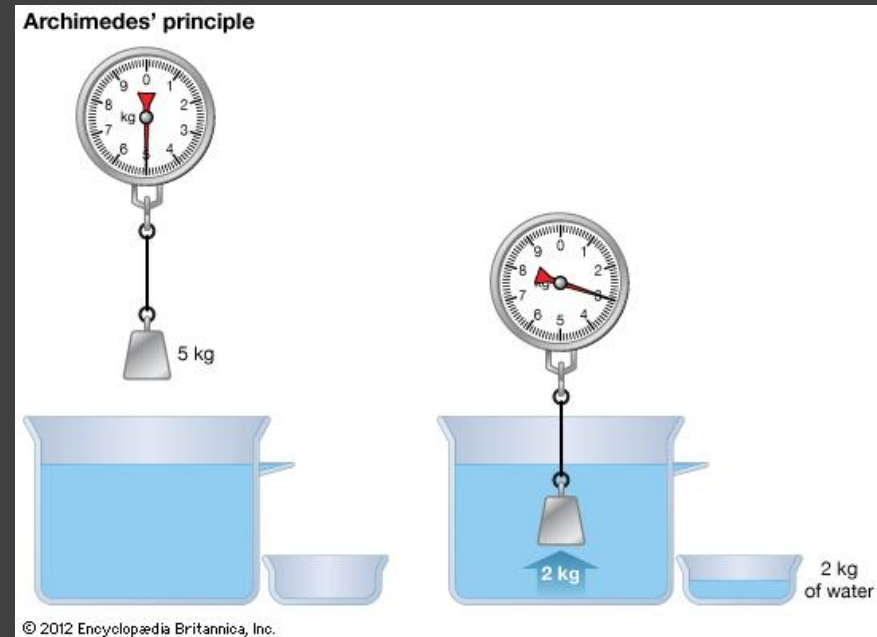
# Correcção: impulsão e peso aparente

Dentro do fluido o corpo aparenta ser mais leve (princípio de Arquimedes):

$$mg \rightarrow (m - m_f)g$$
$$V_{\text{lim}} \rightarrow \frac{(m - m_f)g}{k\eta}$$

Para um corpo esférico de raio  $R$ :

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad m_f = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_f$$
$$V_{\text{lim}} = \frac{2R^2(\rho - \rho_f)g}{9\eta}$$



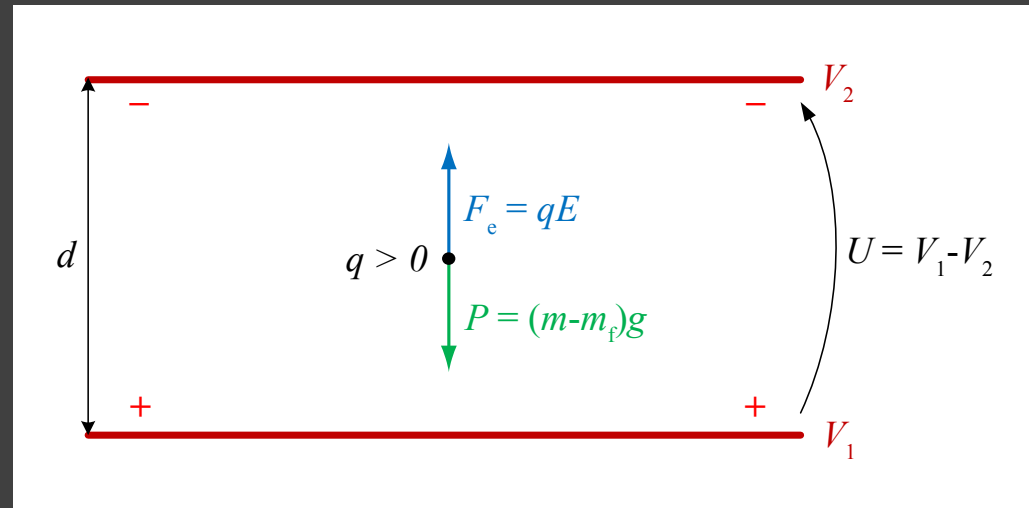
# Equilíbrio de um corpo carregado através de um campo eléctrico uniforme vertical

Aplicando uma diferença de potencial  $U = V_1 - V_2$ :

$$E = \frac{U}{d} \quad F_e = |q|E = |q|\frac{U}{d}$$

A equação do movimento passa a incluir quatro forças:

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F = (m - m_f)g - q \frac{U}{d} - k\eta v$$



Peso

Impulsão

Força eléctrica ( $q > 0$ )

Força de atrito

# Equilíbrio de um corpo carregado através de um campo eléctrico uniforme vertical

Variando a d.d.p.  $U$ , podemos equilibrar as forças e **parar** o corpo:

$$m \frac{dv}{dt} = (m - m_f)g - q \frac{U}{d} - k\eta v$$
$$0 = (m - m_f)g - q \frac{U}{d} - 0$$

Recordando a expressão que relaciona  $v_{\text{lim}}$ ,  $m$  e  $m_f$ :

$$v_{\text{lim}} k\eta = q \frac{U}{d} \quad \rightarrow \quad q = \frac{v_{\text{lim}} k\eta d}{U}$$

# Relação entre a carga e a velocidade limite

Finalmente, usando a Lei de Stokes (corpo esférico) e considerando o fluido o ar:

$$q = \frac{6\pi R \eta_{\text{ar}} d}{U} v_{\text{lim}}$$

$v_{\text{lim}}$  velocidade limite de queda da partícula através do fluido, na ausência do campo elétrico

$\eta_{\text{ar}}$   $18.52 \times 10^{-5} \text{ P} = 18.52 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  (viscosidade do ar a 23 °C)

$\rho$   $973 \text{ kg/m}^3$  (massa específica do óleo de silicone)

$\rho_{\text{f}}$   $1 \text{ kg/m}^3$  (massa específica do ar)

$d$  distância entre placas, a medir no laboratório

# Correcção: lei de Stokes para corpos muito pequenos

Quando as dimensões dos corpos forem comparáveis à distância média entre as moléculas do ar, é necessário corrigir a viscosidade:

$$\eta'_{\text{ar}} = \frac{\eta_{\text{ar}}}{1 + \frac{b}{pR}}$$

$$b = 7.88 \times 10^{-3} \text{ Pa.m}$$

$$p = \text{pressão atmosférica [Pa]}$$

$$R = \text{raio da gota [m]}$$

$$q' = q \left( \frac{\eta'_{\text{ar}}}{\eta_{\text{ar}}} \right)^{3/2} = q \left( \frac{1}{1 + b/pR} \right)^{3/2}$$

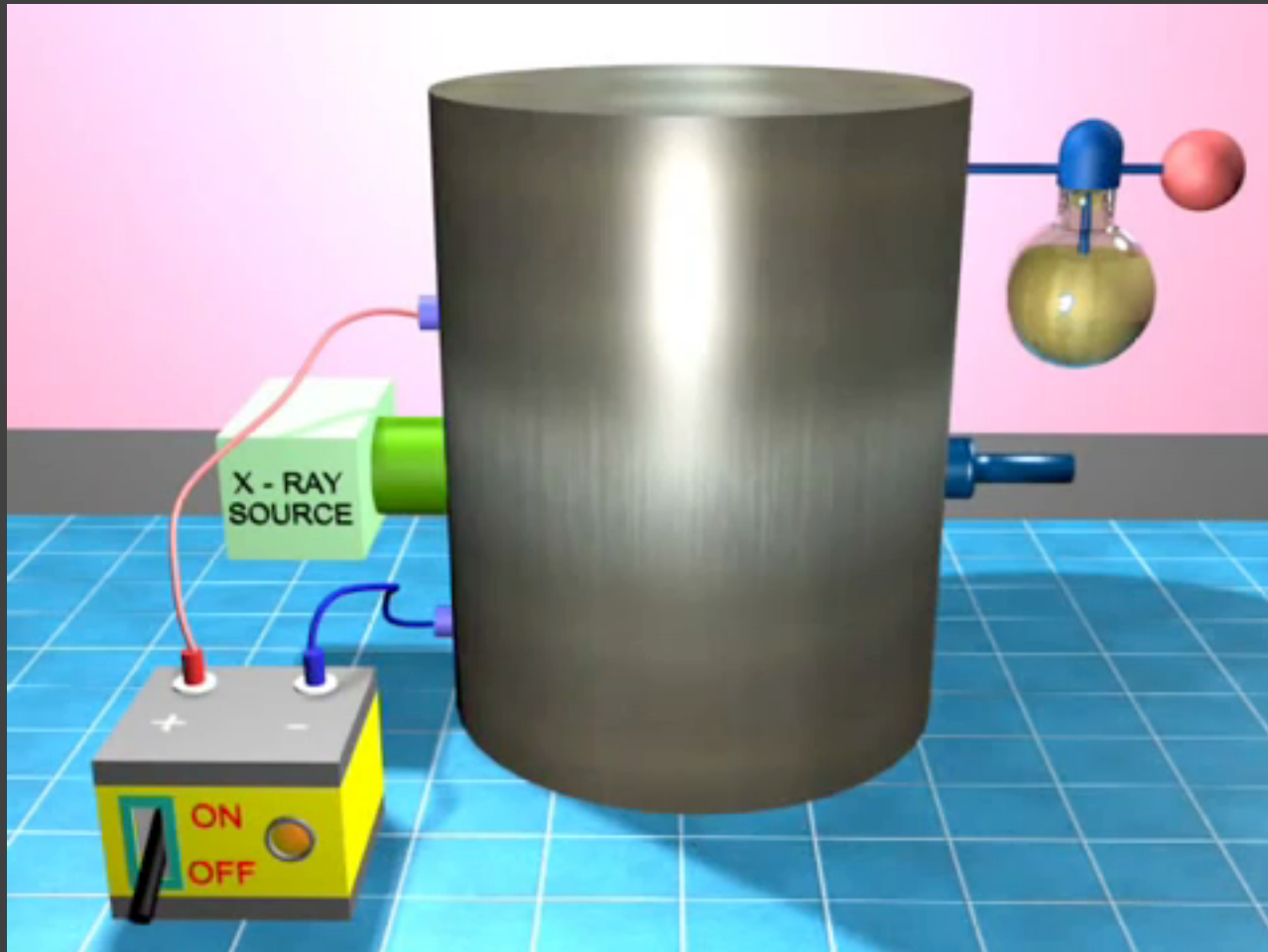


# Experiência de Millikan

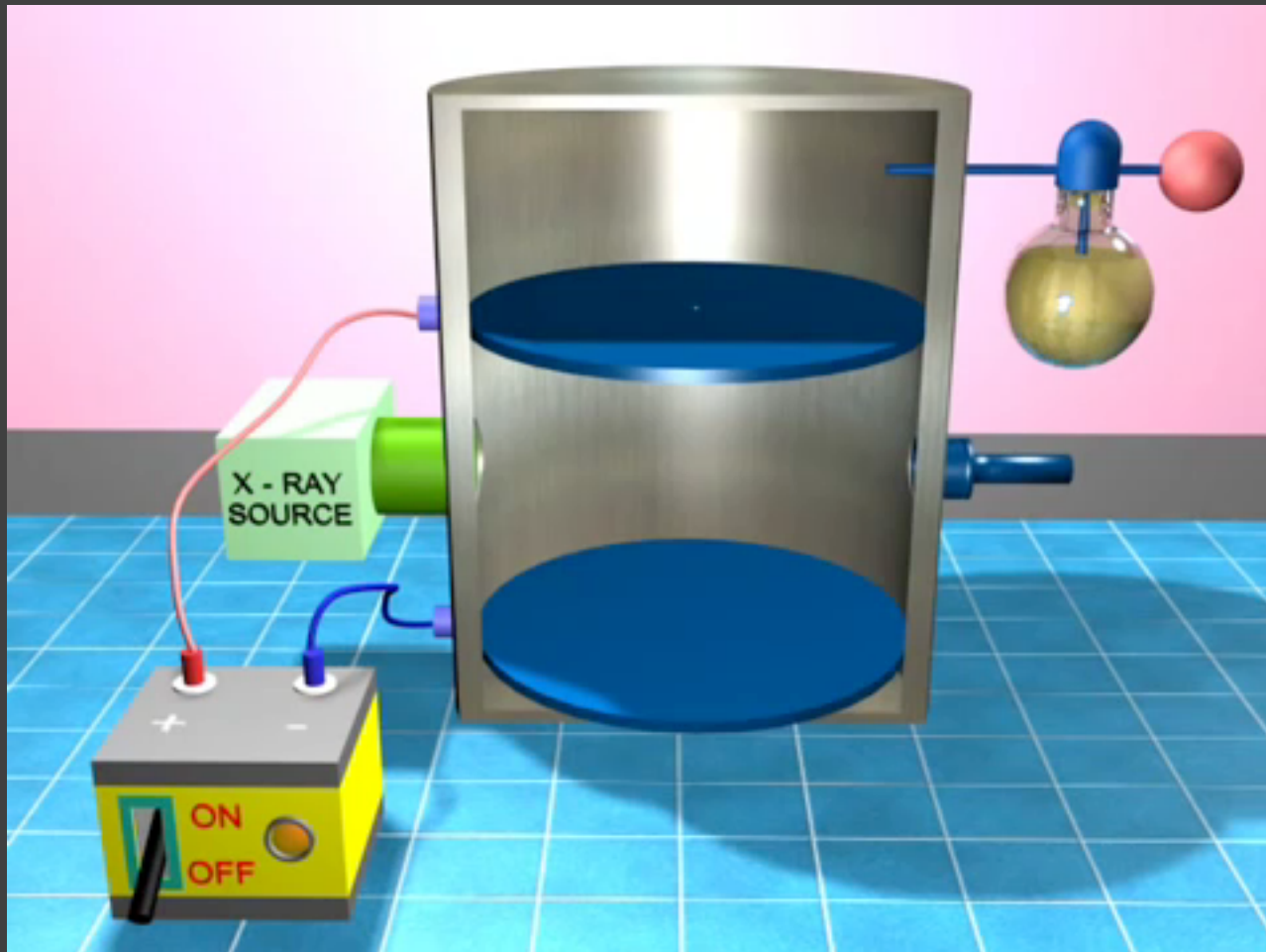
3B Scientific U131001 & U13105-230



# Experiência de Millikan



# Experiência de Millikan

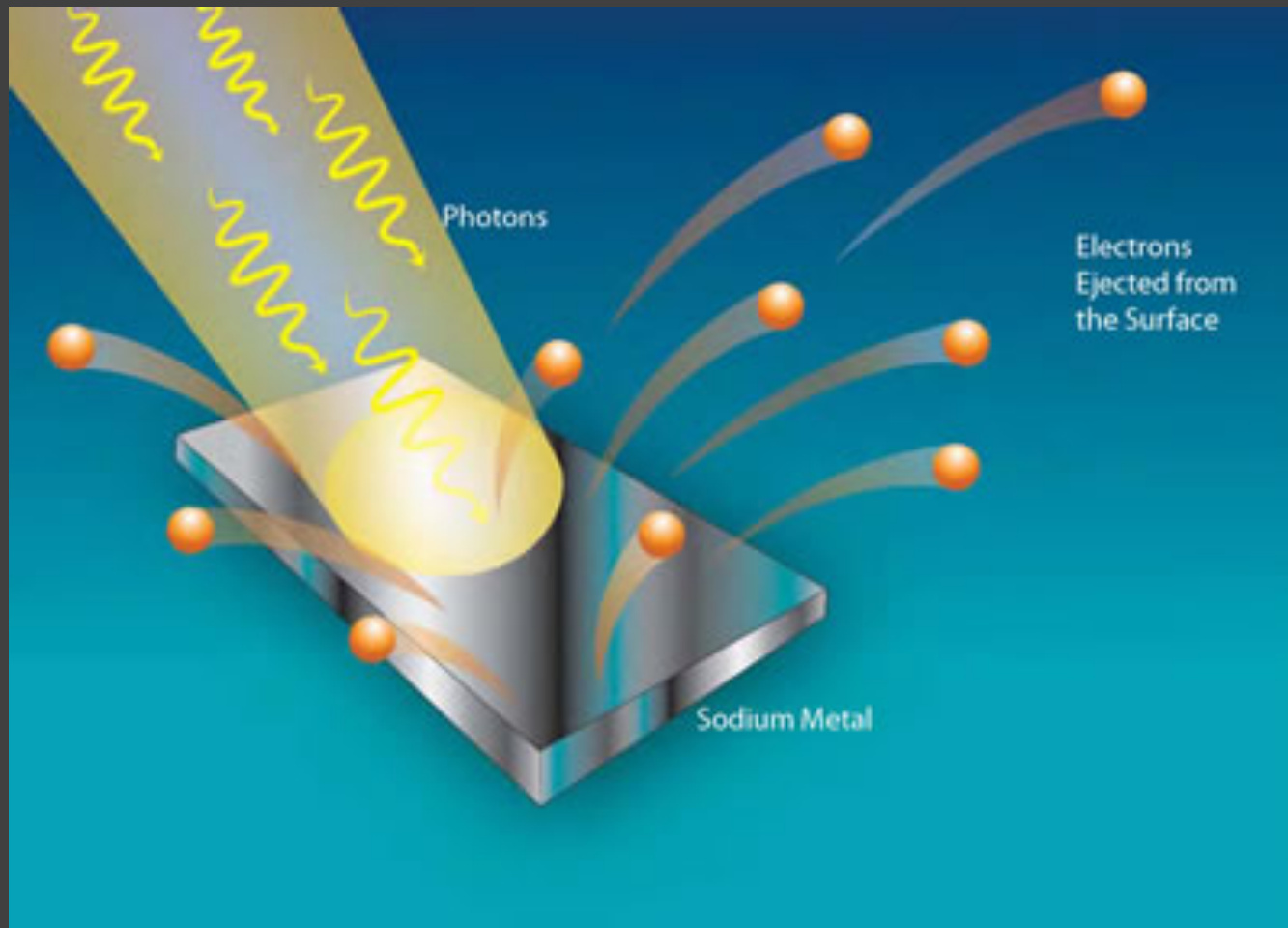


# Algumas ideias e estimativas

- Qual o valor da força eléctrica exercida numa carga  $q = q_e$ ?  
( $E \sim 50$  kV/m)
- Para uma força gravítica idêntica, qual a massa das gotas?
- Qual a ordem de grandeza do tamanho (raio) das gotas?
- Estime a velocidade limite que irá medir
- Estime o tempo  $\tau$  necessário para a gota “atingir” a velocidade limite quando parte do repouso

# Próxima aula

## Efeito fotoelétrico





- Qual o valor da força eléctrica exercida numa carga  $q = q_e$ ? ( $E \sim 50 \text{ kV/m}$ )
- Para uma força gravítica idêntica, qual a massa das gotas?
- Qual a ordem de grandeza do tamanho (raio) das gotas?
- Estime a velocidade limite que irá medir

- ( $m \sim 10^{-12} \text{ g}$ )
- $(4/3)\pi R^3 \rho = 1\text{E-}15 \rightarrow R \sim$
- $E = 600 \text{ V}/0.01 \text{ m} = 6\text{E}4 \text{ V/m}$
- $F_e = qE = 1.6\text{E-}19 \times 6\text{E}4 \sim 1\text{E-}14 \text{ N}$
- $F_g = mg = 1\text{E-}15 \text{ kg} \times 9.8 \sim 1\text{E-}14 \text{ N}$
- $v_L \sim 1\text{E-}14 / (6 \pi \times 0.63 \mu\text{m} \times 18.52\text{E-}6) \sim 46 \mu\text{m/s}$
- $R \sim 0.63 \mu\text{m}$
- $\tau \sim 4.6\text{E-}6 \text{ s}$