1º Teste de Matemática Computacional (Repescagem) – 15/01/2018

Cursos: LEMat, MEBiol, MEBiom, MEFT, MEQ

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas.

1. Calcule $x = \dfrac{\pi - \frac{22}{7}}{\frac{1}{17}}$ num sistema de ponto flutuante com cinco dígitos na mantissa e arredondamento simétrico. Apresente todos os cálculos que efetuar.

   Calcule ainda o erro absoluto e o erro relativo desse resultado utilizando um valor de x com 6 dígitos significativos. Explique os resultados obtidos. [1.5]

2. Pretende-se encontrar o ponto z onde a função $h(x) := 2\sin x - \frac{x^2}{8}$ atinge o seu <u>valor máximo</u> no intervalo $[0.5, 1.5]$.

   (a) Obtenha uma equação que lhe permita calcular esse ponto de máximo. [1.0]

   (b) Com o objetivo de aplicar o método de Newton à equação obtida na alínea anterior, escolha uma das iteradas iniciais seguintes
   $$x_0 = 0, \qquad x_0 = \pi, \qquad x_0 = 6.1$$
   de modo a garantir que o método converge para z. Justifique. [1.5]

   (c) Calcule um valor aproximado de z com erro absoluto inferior a 10^{-2} através do método de Newton. [1.5]

   (d) Mostre que z é ponto fixo da função $g(x) := 8\cos x$. Poderá usar o método do ponto fixo com função iteradora g para aproximar z? Justifique. [1.0]

3. Considere o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ com
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) A influência dos erros de arredondamento far-se-á sentir significativamente na solução do sistema? Justifique. [1.0]

   (b) Seja $\mathbf{b} = (3, 1, 4)^T$. Determine a primeira aproximação da solução do sistema utilizando o método de Jacobi com $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 3)^T$. [1.0]

   (c) Pretende-se resolver o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pelo método iterativo
   $$\mathbf{Px}^{(k+1)} = \mathbf{Qx}^{(k)} + \mathbf{b}, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
   Determine a matriz $\mathbf{Q}$ e mostre que o método converge para a solução exata do sistema. [1.5]

Resolução

1. Num sistema $\mathbb{F}(10, 5)$ o cálculo de $f(a, b, c) = (a-b)/c$ faz-se após reptresentação dos números dados através de arredondamento simétrico

$$fl(a) = fl(\pi) = fl(3.141592...) = 0.31416 \times 10^1 = \tilde{a},$$

$$fl(b) = fl(\frac{22}{7}) = fl(3.142857...) = 0.31429 \times 10^1 = \tilde{b},$$

$$fl(c) = fl(\frac{1}{17}) = fl(0.05882352...) = 0.58824 \times 10^{-1} = \tilde{c}$$

nos seguintes passos

$$z_1 = fl(\tilde{a} - \tilde{b}) = -0.13000 \times 10^{-2}$$

$$z_2 = fl(z_1/\tilde{c}) = fl(\frac{-0.13000 \times 10^{-2}}{0.58824 \times 10^{-1}}) = fl(-0.22099823... \times 10^{-1}) = -0.22100 \times 10^{-1}$$

A aproximação $\tilde{x} = -0.214963 \times 10^{-1}$ tem 6 algarismos significativos relativamente a $x = -0.021496317...$ porque é obtida por arredondamento simétrico.

Quanto ao erro absoluto e erro relativo de z_2 calculados com base em $\tilde{x}$, tem-se:

$$|e_{z_2}| = |-0.214963 \times 10^{-1} + 0.22100 \times 10^{-1}| = 6.037 \times 10^{-4},$$

$$|\delta_{z_2}| = \left|\frac{-0.214963 \times 10^{-1} + 0.22100 \times 10^{-1}}{-0.214963 \times 10^{-1}}\right| = 2.808 \times 10^{-2}.$$

2. (a) A equação que dá os pontos de estacionaridade de h é

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - \frac{x}{4} = 0.$$

Como $h'(0.5) = 1.63017 > 0$, $h'(1.5) = -0.233526 < 0$ e $h''(x) = -2\sin x - \frac{1}{4} < 0$, para todo $x \in [0.5, 1.5]$, conclui-se que um máximo de h ocorre em $[0.5, 1.5]$. O ponto de máximo localizado em $[0.5, 1.5]$ pode ser obtido resolvendo a equação

$$2\cos x - \frac{x}{4} = 0$$

ou, de forma equivalente,

$$\cos x - \frac{x}{8} = 0.$$

(b) O método de Newton para $f(x) := \cos x - \frac{x}{8}$ fica

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2\cos(x_n) - 0.125x_n}{2\sin(x_n) + 0.125}$$

e com $x_0 = 6.1$, obtém-se

$$x_1 = 2.2378802$$
$$x_2 = 1.2512737 \in [1.0, 1.5]$$
$$x_3 = 1.3980592 \in [1.0, 1.5]$$

A função f pertence a $C^2([1.0, 1.5])$ e satisfaz as seguintes condições

(i) $f(1.0) = 0.415302 > 0,\ f(1.5) = -0.116763 < 0$;

(ii) $f'(x) = -\sin x - \frac{1}{8} < 0,\ \forall x \in [1.0, 1.5]$;

(iii) $f''(x) = -\cos x < 0,\ \forall x \in [1.0, 1.5]$;

(iv) $\left|\dfrac{f(1.0)}{f'(1.0)}\right| = |-0.42971| < 0.5 = 1.5 - 1.0, \quad \left|\dfrac{f(1.5)}{f'(1.5)}\right| = 0.104021 < 0.5.$

Está assim garantida a convergência do método de Newton começando a iteração com qualquer elemento do intervalo $[1.0, 1.5]$, em particular, a partir de $x_2 = 1.2512737$ ou $x_3 = 1.3980592$. Isto justifica a escolha de $x_0 = 6.1$.

Note-se ainda que, com $x_0 = 0$ se obtém a sucessão de iteradas

$$x_1 = 8,\ x_2 = 6.97205,\ x_3 = 6.84119,\ x_4 = 6.83075,\ x_5 = 6.83067...$$

enquanto que, a iterada inicial $x_0 = \pi$ produz

$$x_1 = -8,\ x_2 = -8.98859,\ x_3 = -9.71873,\ x_4 = -9.09729,\ x_5 = -10.065, ...$$

Estes resultados sugerem que tais sucessões não podem convergir para z. No caso $x_0 = 0$, há convergência para outra solução de $\cos x - \frac{x}{8} = 0$, fora do intervalo em causa.

(c) Para majorar o erro de $x_3 = 1.3980592$, podemos começar por notar que

$$f(x_2) = 0.157704 > 0,\ f(x_3) = -0.00287798 < 0 \Rightarrow z \in [x_2, x_3]$$

e aplicar uma das seguintes técnicas:

i. uma majoração trivial que usa apenas o facto de z ser zero de f

$$|z - x_3| \leq \frac{|f(x_3)|}{\min_{x\in[x_2,x_3]} |f'(x)|} = \frac{|f(x_3)|}{|f'(x_2)|} = 0.0026787... < 10^{-2}$$

ii. a fórmula de erro do método de Newton

$$|x - x_3| \leq \frac{\max_{x\in[x_2,x_3]} |f''(x)|}{2|f'(x_2)|}|z - x_2|^2$$

com

$$|z - x_2| \leq x_3 - x_2 \text{ e } \max_{x\in[x_2,x_3]} |f''(x)| = |f''(x_2)|,$$

o que dá

$$|x - x_3| \leq \frac{|f''(x_2)|}{2|f'(x_2)|}(x_3 - x_2)^2 = 0.00314965 < 10^{-2}.$$

(d) Começamos por mostrar

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{8} = \cos(x) \Leftrightarrow x = 8\cos(x) \Leftrightarrow x = g(x).$$

Tem-se $g'(x) = -8\sin(x)$ e $g''(x) = -8\cos(x) < 0$, quando $x \in [1, 1.5]$, pelo que g' é decrescente em $[1, 1.5]$. Sendo $g'(1) = -6.73$ e $g'(1.5) = -7.98$, obtém-se $|g'(z)| > \min_{x\in[1.0;1.5]} |g'(x)| = 6.73 > 1$ (ponto fixo repulsor) e, consequentemente, o método do ponto fixo diverge.

3. (a) Sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/22 & 1/11 & 1/22 \\ -1/11 & 4/11 & 2/11 \\ 1/22 & -2/11 & 9/22 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{|4+|-1|+|0|, |1|+|2|+|-1|, |0|+|1|+|2|\} = \max\{5,4,3\} = 5$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \max\{|5/22|+|1/11|+|1/22|, |-1/11|+|4/11|+|2/11|, |1/22|+|-2/11|+|9/22|\} = \frac{7}{11}$$

$$\text{cond}(\mathbf{A})_\infty = \frac{35}{11} \approx 3.2$$

Como a matriz $\mathbf{A}$ é bem condicionada, a influência dos erros de arredondamento não será significativa na solução do sistema.

(b) A primeira iterada do método de Jacobi é calculada da seguinte forma

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{4}(3+2) = \frac{5}{4} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{2}(1-1+3) = \frac{3}{2} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(4 - x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(4-2) = 1 \end{cases}$$

(c) O método deve ser consistente com o sistema de equações, ou seja,

$$\mathbf{Px} = \mathbf{Qx} + \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{P} - \mathbf{Q})\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Para que tal aconteça:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quanto à convergência, a matriz de iteração do método é dada por

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

sendo

$$\|\mathbf{C}\|_\infty = \max(2/5, 1, 2/3) = 1, \quad \|\mathbf{C}\|_1 = \max\{7/10, 8/15, 5/6\} = 5/6.$$

Como $\|\mathbf{C}\|_1 < 1$ conclui-se que o método converge qualquer que seja o vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.