Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 11 (modificada)

(Curvas e integrais de linha)

1. Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma curva regular simples e determine um caminho regular simples que a descreve:
   a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; y=x^3\}$.
   b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; 4x^2+9y^2=1\}$.

2. Mostre que o conjunto C é uma curva. Calcule equações cartesianas para a recta tangente e para o plano normal à curva no ponto P.
   a) $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x^2+y^2, x=y\}$, $\quad P=(1,1,2)$.
   b) $C=\big\{\big(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(2t)\big) : t\in\mathbb{R}\big\}$, $\quad P=(1,0,0)$.

3. Determine a massa total do fio $\{(t^2, t\cos t, t\operatorname{sen} t) : 0\le t\le 2\pi\}$, com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma(x,y,z)=\sqrt{x}$.

4. Calcule o centróide da curva $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y^2+z^2 \, , \; x^2+y^2+z^2=2\}$.

5. Calcule o trabalho do campo vectorial f ao longo do caminho indicado:
   a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y)=(-y,x)$ e caminho $g(t)=(t\cos t, t\operatorname{sen} t)$ com $t\in[0,2\pi]$.
   b) Campo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(x,z,z-y)$ e caminho $g(t)=(t^2,\cos t,\operatorname{sen} t)$ com $t\in[0,2\pi]$.

6. Calcule o trabalho do campo vectorial f em $\mathbf{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(x,z,2y)$ ao longo das seguintes curvas:
   a) Segmento de recta de $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$.
   b) Intersecção das superfícies com equações cartesianas $x^2+y^2=1$ e $z=x^2-y^2$ no sentido anti-horário visto do ponto $(0,0,100)$.
   c) Intersecção das superfícies com equações cartesianas $x=y^2+z^2$ e $2y+x=3$ no sentido horário visto do ponto $(100,-1,0)$.

7. Determine se o campo vectorial é ou não conservativo e, em caso afirmativo, calcule um potencial.
   a) $a(x,y)=(y^2,x^3)$.
   b) $b(x,y)=(x^3+y, y^2+x)$.
   c) $c(x,y)=(e^x,e^y)$.
   d) $d(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.
   e) $e(x,y,z)=(y,x,2z)$.
   f) $g(x,y,z)=(-y,x,z)$.

8. Calcule o trabalho do campo vectorial F definido em pontos de $\mathbb{R}^3$ por
$$F(x,y,z)=\left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, 2z\right)$$
ao longo da curva C, num sentido à sua escolha e descreva esse sentido.
   a) $C=\{(\cos t,\operatorname{sen} t,t),\; 0\le t\le 2\pi\}$.
   b) $C=\{y^2+z^2=1 \; ; \; x=y^2-z^2\}$.