Cálculo Diferencial e Integral I/MEEC
2011/2012
Resolução do 1º Teste

Problema 1 Seja $f(x) = \sqrt{\log(2 - |x^2 - 4x + 3|)}$.

(a) Determine o domínio de f, que designamos D.

Resolução: O domínio D é dado por

$$\log(2 - \left|x^2 - 4x + 3\right|) \geq 0 \Longleftrightarrow 2 - \left|x^2 - 4x + 3\right| \geq 1 \Longleftrightarrow \left|x^2 - 4x + 3\right| \leq 1$$

Temos $\left|x^2 - 4x + 3\right| \leq 1$ se e só se $-1 \leq x^2 - 4x + 3 \leq 1$, onde

$$(1)\ x^2 - 4x + 3 \leq 1 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 2 \leq 0 \Longleftrightarrow \text{ e}$$

$$(2)\ x^2 - 4x + 3 \geq -1 \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$$

A condição (2) é satisfeita por qualquer $x \in \mathbb{R}$, e a condição (1) é satisfeita no intervalo entre as raízes da quadrática $4x^2 - 4x + 2$, que são

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Concluímos que $D = [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$. A figura seguinte ilustra os nossos cálculos.

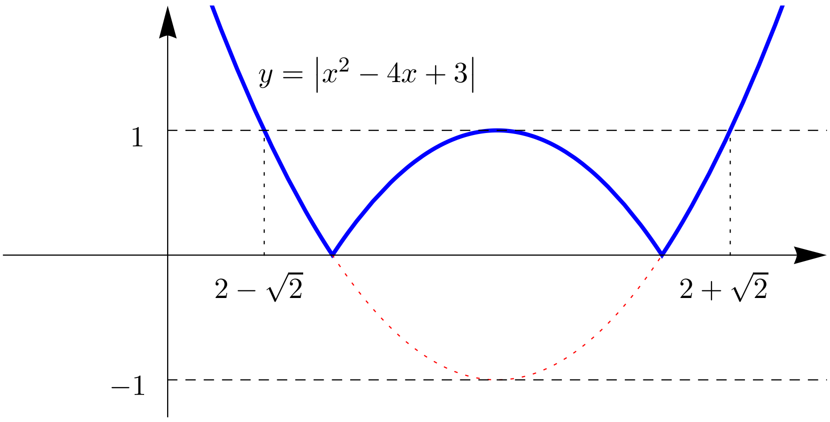

Figura 1: $\left|x^2 - 4x + 3\right| \Longleftrightarrow -1 \leq x^2 - 4x + 3 \leq 1$

(b) Determine, se existirem, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo de D.

Resolução: Temos $\max D = \sup D = 2 + \sqrt{2}$ e $\min D = \inf D = 2 - \sqrt{2}$.

(c) Determine, se existirem, o máximo, mínimo, supremo e ínfimo de $D \cap \mathbb{Q}$.

Resolução: Temos $\sup D \cap \mathbb{Q} = 2 + \sqrt{2}$ e $\inf D \cap \mathbb{Q} = 2 - \sqrt{2}$. $D \cap \mathbb{Q}$ não tem máximo nem mínimo, porque os respectivos supremo e ínfimo são *irracionais*.

Problema 2 Demonstre por indução que a seguinte identidade é válida para qualquer natural n, desde que $x \neq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$$

Resolução: Para $n = 1$ temos a provar que, quando $x \neq 1$, então

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{1} x^k = \frac{x - x^{1+1}}{1-x}$$

Para isso, basta-nos observar que

$$\sum_{k=1}^{1} x^k = x^1 = x \text{ e, por outro lado, } \frac{x - x^{1+1}}{1-x} = \frac{x - x^2}{1-x} = \frac{x(1-x)}{1-x} = x$$

$$\sum_{k=1}^{1} x^k = \frac{x - x^{1+1}}{1-x}$$

Para concluir a indução, temos ainda que mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} x^k = \frac{x - x^{n+2}}{1-x},$$

onde a identidade à esquerda é a “hipótese de indução”. Procedemos como se segue:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k = \sum_{k=1}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{x - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1-x} = \frac{x - x^{n+2}}{1-x}$$

Repare-se que a segunda igualdade à esquerda corresponde à utilização da hipótese de indução, e as igualdades finais resultam de cálculos elementares.

Problema 3 (2,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para $x \neq 0$ por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(1/x) & \text{se} \quad x > 0 \\ (x+1)e^{1/x} & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) f é prolongável por continuidade a $x = 0$?

Resolução: Calculamos os limites laterais de f em 0:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \operatorname{sen}(1/x) = 0$, porque $|x \operatorname{sen}(1/x)| \leq |x| \to 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} (x+1)e^{1/x} = 0$, porque $(x+1) \to 1$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$.

Concluímos que f é prolongável por continuidade a $x = 0$, tomando $f(0) = 0$,

(b) Determine a imagem $f(\mathbb{R})$.

Resolução: Analisamos primeiro o comportamento de f quando $x < 0$. Notamos que

- $e^{1/x} > 0$ é decrescente em $]-\infty, 0[$, e $e^{1/x} \to 1$ quando $x \to -\infty$.
- $(x+1)$ é decrescente em $]-\infty, 0[$, e $x + 1 \to -\infty$ quando $x \to -\infty$.

Concluímos que

$$f \text{ é decrescente em }]-\infty, 0[, \text{ e } f(x) \to -\infty \text{ quando } x \to -\infty.$$

Segue-se como evidente que $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, 0]$.

O comportamento de f para $x > 0$ é mais complexo, em resultado das oscilações de $\operatorname{sen}(1/x)$. Notamos no entanto que, com $t = 1/x$, temos

$$x \operatorname{sen}(1/x) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \text{ em particular, } \lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}(1/x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

Como $\frac{\operatorname{sen} t}{t} < 1$ para qualquer $t \neq 0$, a imagem $f(\mathbb{R})$ não inclui valores $y \geq 1$. Por outro lado, como $f(0) = 0$ a imagem inclui o intervalo $[0, 1[$. Concluímos assim que $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1[$. A figura 2 apresenta o gráfico de f, para ilustrar as nossas conclusões.

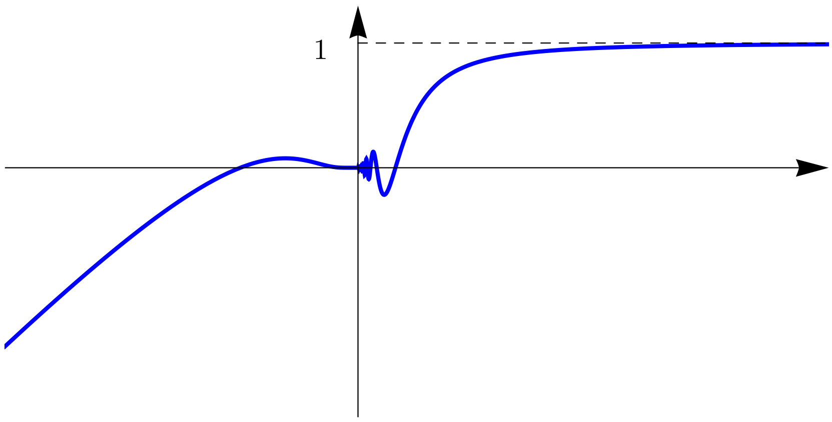

Figura 2

(c) A equação $f(x) - x/2 + 10 = 0$ tem soluções $x < 0$?

Resolução: Consideramos a função $g(x) = f(x) - x/2 + 10 = 0$, que é contínua em $\mathbb{R}$. Calculamos o limite de $g(x)$ quando $x \to -\infty$ como se segue:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x/2 + 10 = \lim_{x\to-\infty} \left((x+1)e^{1/x} - x/2 + 10\right) = \lim_{x\to-\infty} \left[x\left(e^{1/x} - 1/2\right) + e^{1/x} + 10\right]$$

Como $e^{1/x} \to 1$ quando $x \to -\infty$ é claro que $g(x) \to -\infty$ quando $x \to -\infty$. Como $g(0) = 10 > 0$, segue-se do Teorema de Bolzano que a equação $g(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-\infty, 0[$.

Problema 4 (2,0 val.) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + x \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + x\cos x + 5x^2} \qquad (b)\ \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad (c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(1 + e^{x^2})}{\sqrt{1 + \log x}}$$

Resolução:

$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + x \operatorname{sen} x + \cos x}{1 + x\cos x + 5x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{x} + 5} = \frac{2+0+0}{0+0+5} = \frac{2}{5}$$

(b) Como $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$, temos

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = e^0 = 1$$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \arctan(1+e^{x^2}) = \lim\limits_{t\to +\infty} \arctan(t) = \dfrac{\pi}{2}$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+\log x} = \lim\limits_{t\to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$ donde se segue que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan(1+e^{x^2})}{\sqrt{1+\log x}} = 0$$

Problema 5 (1,5 val.) Considere a usual função trigonométrica dada por $f(x) = \operatorname{cotan} x$.

(a) Mostre que f é injectiva no conjunto $A =]0,\pi[$.

Resolução: Temos $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ e observamos que

- Quando $0 < x \leq \pi/2$ as funções sen e cos são ambas positivas, sendo sen crescente e cos decrescente, em ambos os casos estritamente. Segue-se que cotan é estritamente decrescente em $]0,\pi/2]$.
- Quando $\pi/2 \leq x < \pi$ a função sen é positiva, mas $\cos x \leq 0$. Temos agora sen decrescente e $|\cos|$ crescente, em ambos os casos ainda estritamente. Segue-se que $|\operatorname{cotan}|$ é estritamente crescente, e como $\operatorname{cotan} x \leq 0$ continua a ser verdade que cotan é estritamente decrescente, mas em $[\pi/2,\pi[$.

A função cotan é assim estritamente decrescente, logo injectiva, em $]0,\pi[$. ([1])

(b) Determine a imagem $B = f(A)$.

Resolução: Os seguintes limites são imediatos:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotan} x = +\infty \text{ e } \lim_{x\to \pi^-} \operatorname{cotan} x = -\infty$$

Como cotan é contínua no *intervalo* $]0,\pi[$, segue-se que $f(]0,\pi[) = \mathbb{R}$.

(c) Esboce o gráfico da função inversa $f^{-1} = \operatorname{arccotan}$, $f^{-1} : B \to A$.

Resolução: A figura 3 apresenta o gráfico de arccotan (o gráfico de cotan aparece ponteado).

Problema 6 (1,5 val.) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $\mathbb{R}$ de que se conhecem apenas os valores indicados na tabela seguinte. Sabe-se também que f é injectiva.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3		1		0
$g(x)$	1	4	3/2	0	

(a) A função g é injectiva?

[1] Note-se aqui que a resposta a esta questão é particularmente simples depois do nosso estudo de derivadas. Como $(\operatorname{cotan} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x < 0$ a função cotan é estritamente decrescente em qualquer intervalo contido no seu domínio.

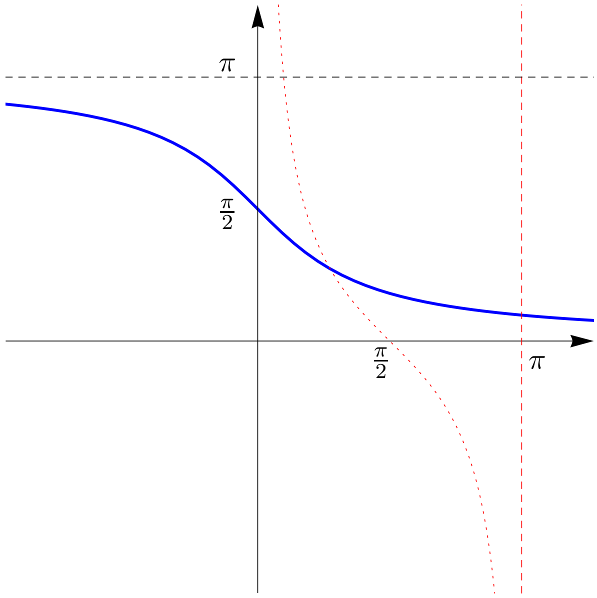

Figura 3: Gráfico de arccotan.

Resolução: Uma função contínua num intervalo é injectiva se e só se é estritamente monótona nesse intervalo. Não é o caso de g, porque $g(1) > g(0)$ e $g(2) < g(1)$. Portanto, a função g não é monótona.

(b) A equação $f(x) = g(x)$ tem mais do que uma solução com $0 < x < 3$? Tem alguma solução com $x < 1$?

Resolução: A função f é por hipótese injectiva, e portanto estritamente monótona. De acordo com os dados disponíveis, é estritamente *decrescente*. Completamos por isso o quadro inicial da seguinte forma, onde $3 > a > 1$ e $1 > b > 0$:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	a	1	b	0
$g(x)$	1	4	3/2	0	

Consideramos a função (contínua) $h(x) = f(x) - g(x)$. Temos então $h(0) = 2 > 0$, $h(1) = a - 4 < 0$ e $h(3) = b > 0$. Segue-se do teorema de Bolzano que a equação $h(x) = 0$ tem soluções pelo menos em $]0, 1[$ e em $]1, 3[$.

(c) Qual é o *menor* valor de k para o qual pode garantir que a equação $g(x) - x^2 = k$ tem mais do uma solução? Qual é o *maior* valor de k para o qual pode garantir que a equação $g(x) - x^2 = k$ tem pelo menos uma solução?

Resolução: Tomamos $\phi(x) = x^2 + k$ e notamos que a equação em causa é $g(x) = \phi(x)$. Notamos que (ver figura 4):

- $k > 3$: Não podemos garantir a existência de qualquer solução, porque temos neste caso $\phi(x) > g(x)$ em todos os pontos onde conhecemos o valor de $g(x)$.
- $k = 3$: A equação tem pelo menos a solução $x = 1$, porque $g(1) = 4 = \phi(1) = 1 + 3$.

- $1 < k < 3$: Existem pelo menos duas raízes, porque

$$g(0) = 1 < \phi(0) = k, g(1) = 4 > \phi(1) = 1 + k \text{ e } g(3) = 0 < \phi(3) = 9 + k.$$

- $k = 1$: A equação tem solução $x = 0$ e pelo menos uma outra solução $x > 0$, porque

$$g(1) = 4 > \phi(1) = 1 + k \text{ e } g(3) = 0 < \phi(3) = 9 + k.$$

- $-9 \leq k < 1$: Existe pelo menos uma raíz, porque

$$g(0) = 1 > \phi(0) = k \text{ e } g(3) = 0 \leq \phi(3) = 9 + k.$$

- $k < -9$: Os dados disponíveis nada permitem concluir, porque temos $\phi(x) < g(x)$ para todos os valores conhecidos.

Concluímos assim que

- O *menor* valor de k para o qual podemos garantir que a equação $g(x) - x^2 = k$ tem mais do uma solução é $k = 1$, e
- O *maior* valor de k para o qual podemos garantir que a equação $g(x) - x^2 = k$ tem pelo menos uma solução é $k = 3$.

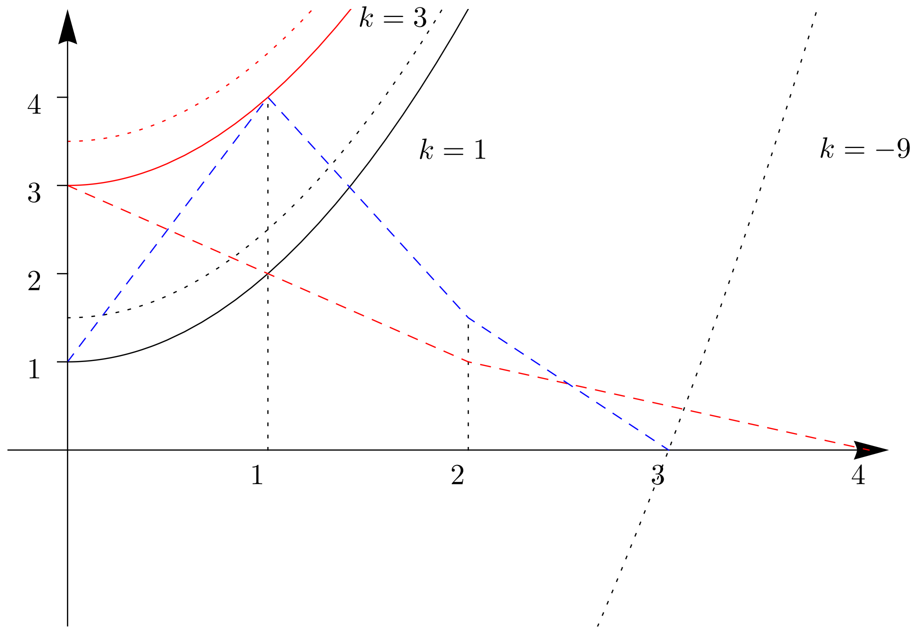

Figura 4