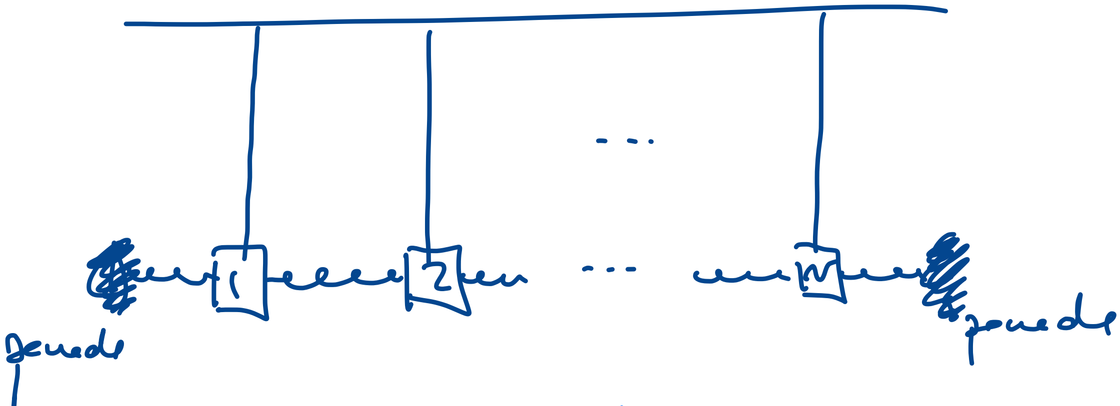
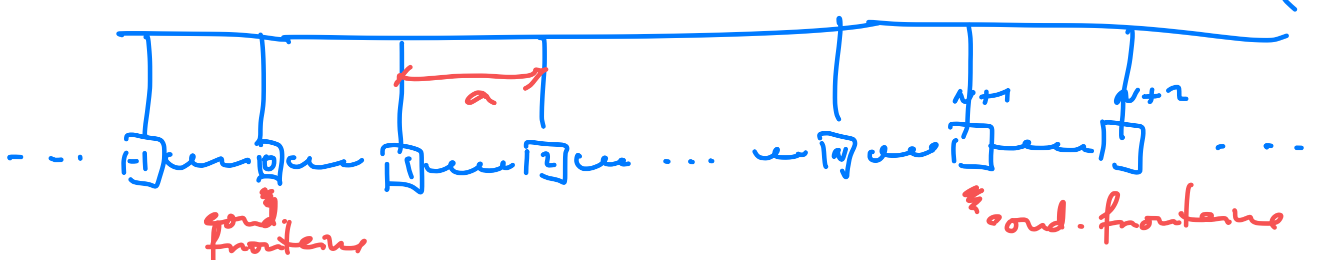
2 Abn Osc Dvd

Modos normais para sistema de N osciladores acoplados

(entre paredes rígidas)



→ sistema infinito ≡ invariante para translações (por múltiplo de 'a')



(1) resolver sistema infinito (sem condições fronteira)

→ inv. translacional

$$\cdots \; \boxed{-1} \leftarrow \boxed{0} \leftarrow \boxed{1} \leftarrow \boxed{2} \; \cdots$$

ou seja se existir um modo normal com componentes

$$A_j$$

$$A' = S' A$$

então existe outro modo normal (c/ a mesma freq.) com componentes

$$A'_j = A_{j+1}$$

$$S' = \begin{bmatrix} \ddots & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 \quad 1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

como S' tem dimensão infinita nunca voltamos à configuração.

<u>valores próprios (de S')</u>

$$A' = S' A = \beta A$$

$\uparrow$ valor próprio

em componentes

$$A'_j = \underbrace{\beta A_j = A_{j+1}}$$

para qq $\beta \neq 0$

fixou $A_0 = 1$ [comp. livre de cada vector próprio]

$$\Rightarrow A_1 = \beta, \quad A_2 = \beta^2, \quad \ldots$$

$$\boxed{A_j = \beta^j}$$

exponente

componente

$\longrightarrow$ específico todo o vector próprio $\forall \beta \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ 1/\beta^2 \\ 1/\beta \\ 1 \\ \beta \\ \beta^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Tb posso escrever

$$\beta A_j = A_{j+1} \Rightarrow \beta A_{j-1} = A_j \Rightarrow A_{j-1} = 1/\beta \, A_j$$

$$A_{-1} = 1/\beta \quad , \quad A_{-2} = 1/\beta^2$$

Para cada valor β (valor próprio de S') existe um vector próprio A único.

Todos os vect. próprios e vals próprios

$\Rightarrow$ vectores próprios de S' (A) são os modos normais do sistema infinito (vectores próprios de $T^{-1}K$)

$$\boxed{A_j^\beta = \beta^j}$$

comp. j do modo normal β (que corresponde ao valor próprio β de S')

actuar com $M^{-1}K$ no vector próprio

$\Longrightarrow$ freq. próprias ω^2

$$M^{-1}K\,A^\beta = \omega^2 \, A^\beta$$

fazer a linha j de $M^{-1}K$

$$\boxed{\omega^2 A_j^\beta = 2B A_j^\beta - C A_{j-1}^\beta - C A_{j+1}^\beta}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} j-1 & j & j+1 \end{array} \\ j & \begin{bmatrix} \cdots 0 & -C & 2B & -C & 0 \cdots \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} A^\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \omega^2 \beta^j = 2B\beta^j - C\beta^{j-1} - C\beta^{j+1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega^2 = 2B - C\left(\tfrac{1}{\beta} + \beta\right)}$$

• para $\beta \neq \pm 1$ $\qquad \omega^2 = 2B - C\left(\frac{1}{\beta} + \beta\right)$

existem 2 modos normais c/ a mesma freq.

$\Rightarrow$ qq comb. linear destes modos

é tb um modo normal c/ a mesma

freq.

• para $\beta = \pm 1$ $\qquad \omega^2 = 2B \mp 2C$

$\Rightarrow$ só um modo para cada freq.

nunca há mais do que 2 modos c/ a mesma

frequência

$\Rightarrow$ continua no máximo 2 modos para tentar

satisfazer cond. fronteira do sist. finito cond. fronteira ($\longrightarrow$ sist. finito)

$$A_j = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} j=0 \\ j=N+1 \end{array}\right\} \text{paredes}$$

comecemos por implementar $A_0 = 0$

para cada ω^2 2 modos ($\beta \neq \pm 1$)

$$\swarrow A^\beta \quad \text{e} \quad A^{\beta^{-1}} \equiv A^{1/\beta}$$

comb. linear tal que

$$A_0^\beta = 1 \qquad A_0^{\beta^{-1}} = 1$$

$\boxed{A_0 = 0}$

$$\Rightarrow A = A^\beta - A^{\beta^{-1}}$$

$$\Rightarrow A_j \propto A_j^\beta - A_j^{\beta^{-1}} = \beta^j - (1/\beta)^j = \beta^j - \beta^{-j}$$

$$\boxed{A_j \propto \beta^{j} - \beta^{-j}}$$

componente

expoentes

Para que A_j possa ser $= 0$ para $j \neq 0$

(em particular para $j = N+1$) é necessário

que

$$|\beta| = 1 \Longrightarrow \beta = e^{i\theta}$$

número qualquer

con isto $\left\{ \begin{array}{l} \rho = e^{i\theta} \\ A_j \propto \rho^{j} - \rho^{-j} \end{array} \right.$

$$A_j \propto e^{ij\theta} - e^{-ij\theta} \propto \sin(j\theta)$$

cond. frontiera

$A_{N+1} = 0$

$\sin\left((N+1)\theta\right) = 0 \implies (N+1)\theta = n\pi$

intero $1, 2, \dots, N$

$$\implies \boxed{\theta = \frac{n\pi}{N+1}}$$

juntando tudo

etiqueta do modo normal

$$\boxed{A_j^n = \sin\left(\frac{j\, n\pi}{N+1}\right)}$$

componente

$n = 1, \dots, N$

→ verifica que outros valores de n

$n=0$

$n=N+1$

apenas resultam em modos que já estão no conjunto

$n=1,\dots,N$

as freq. normais

$$\omega^2 = 2B - C\left(\underbrace{\beta}_{e^{i\theta}} + \underbrace{1/\beta}_{e^{-i\theta}}\right)$$

$$\omega^2 = 2B - 2C\cos\theta$$

$$\boxed{\omega_n^2 = 2B - 2C\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)}$$

Em casos em que as distâncias entre blocos no equilíbrio é uniforme (...

podemos usar as posições de equilíbrio para etiquetar os blocos (em vez de um índice usar uma posição)

índice → j posição → x

<u>x parede esquerda</u> $x = 0$

1º bloco $x = a$

2º bloco $x = 2a$

⋮

$\Rightarrow$ descrever o deslocamento de todos (cada) os blocos por uma única função

$\psi(x,t)$ tal que $\psi(ja,t)$ é o deslocamento do bloco j

f. contínua ← que só faz sentido físico em posições x discretas vamos re-escrever o que ~~fizemos~~ tudo em termos de ψ

- **modo normal** $A(x)$ tal que $A(ja) = A_j$

- **inv. translacional** $(A_{j+1} = \beta A_j)$

$$A(x+a) = \beta A(x)$$

↳ em geral (qq número complexo $\neq 0$)

pode ser escrito como

$$\beta = e^{ika}$$

e $k \longrightarrow k + 2\pi/a$ não muda nada

podemos restringir os valores de k tal que

$$-\pi/a \leq \mathrm{Re}(k) \leq \pi/a$$

Agora

$$A(ja) = A_j \xrightarrow{\text{para um modo } \beta} A^{\beta}(ja) = A_j^{\beta} = \beta^j$$

$$\| $$

$$(e^{ika})^j$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{\beta}(ja) = e^{ik\underline{\underline{ja}}}}$$

f. contínua e se lida apenas para valores discretos $x = ja$

$$\boxed{A(x) = e^{ikx}}$$

modo normal $A(x)$ é determinado apenas por k

$$-\pi/a \leq \operatorname{Re} k \leq \pi/a$$

$A(x) = e^{ikx}$; $-\pi/a \leq Re(k) \leq \pi/a$

k (se for real — já vimos) é chamado o número de onda angular do modo

dimensões rad/distância

d (comprimento de onda) é a distância mínima tal que

$x \rightarrow x+d$ deixa o modo inalterado

$$A(x) = A(x+d)$$

n ciclo completo (2π

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{2\pi}{k}}$$

Então, para o sistema finito (N osc. acoplados c/ paredes nos extremos)

$$A_j^n = \sin\left(\frac{j n \pi}{N+1}\right)$$

$$\boxed{A^n(x) = \sin(kx)}$$

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

$$L = (N+1)a$$

tamanho do sistema

não dependem dos detalhes do sistema (molas? pêndulos? moléculas de ar) nem sequer do número de osciladores

dependem apenas do <u>TAMANHO</u> do sistema

RELAÇÃO DE DISPERSÃO

↳ relação entre ω^2 e o número de onda k

$$\boxed{\omega^2 = 2B - 2C\cos ka}$$

detalhes do sistema (molas e pêndulos)

↓

NÃO DEPENDE DAS CONDIÇÕES FRONTEIRA

Um limite muito interessante $(B=C)$

para $\omega^2 = 2B - 2C\cos ka$

$\boxed{B=C}$

$\left.\begin{array}{l} g \to 0 \\ \text{ou} \\ l \to \infty \end{array}\right\}$

(s/ gravidade)

(comp. dos fios dos pêndulos ∞)

$\equiv$ quando a gravidade é desprezável

$$\omega^2 = 2B(1-\cos ka) = 4B\sin^2\frac{ka}{2}$$

se $k=0 \longrightarrow \omega^2 = 0$ (zero mode)

mov. de todos os blocos sem 1ª força

translação do sistema como um todo.