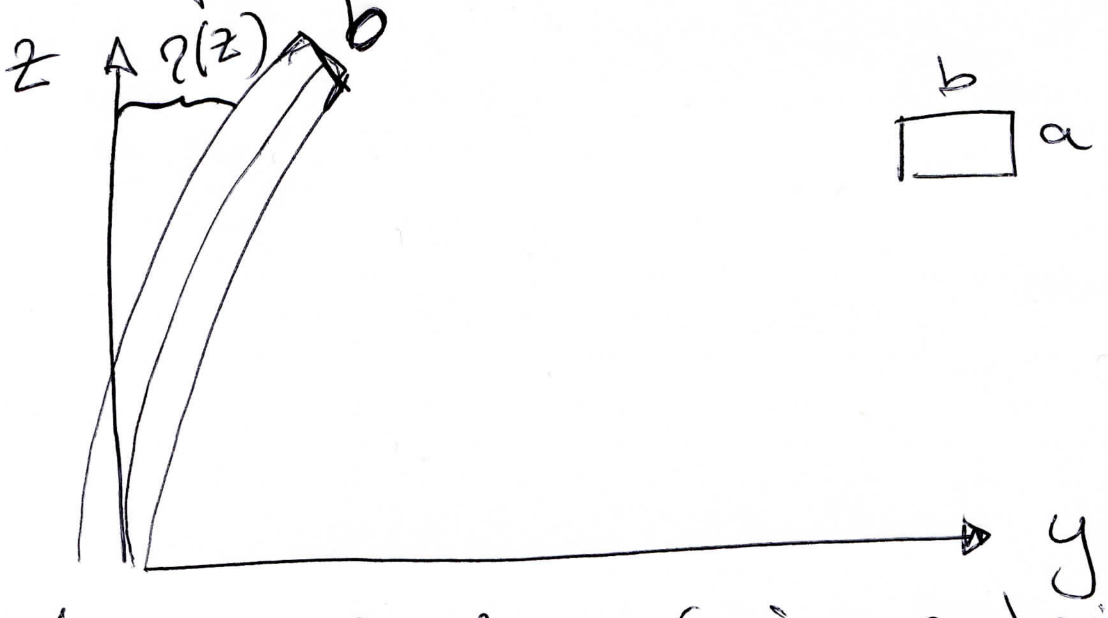
Aula 8+9:

Equilíbrio de barras finas

Já relacionamos o raio de curvatura com o momento de flexão, portanto agora faltam apenas 2 ingredientes:

i. Relacionar o raio de curvatura com propriedades locais da barra

ii. Aplicar a lei de Newton no equilíbrio



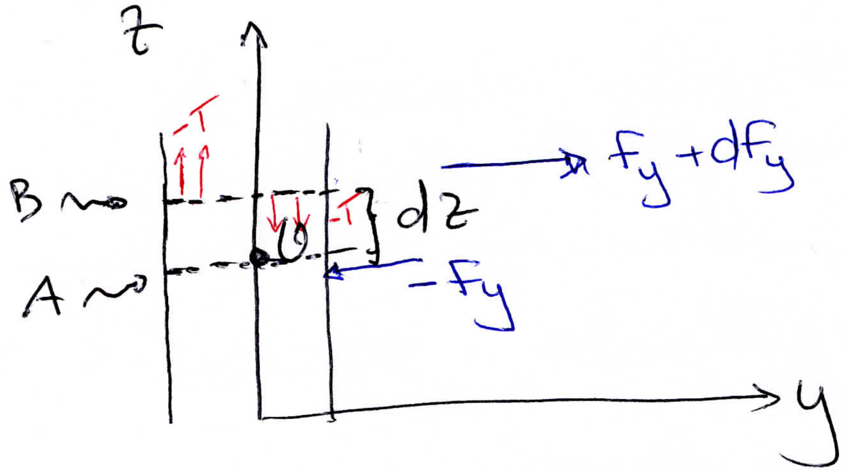
É um resultado geométrico conhecido que

$$\frac{1}{R} = \frac{\left|\frac{d^2\eta}{dz^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Para deflexões ligeiras, $\frac{1}{R} \simeq \eta''$

A

Consideremos agora uma secção arbitrária da barra, como na figura



Na superficie A e B existem tensões normais T_{zz} que dão origem a um momento, em relação ao ponto O, e na superficie A

$$M_x^O = -\int T_{zz}\, y\, dS = -E I_y \eta'',$$

como já vimos (onde $I_y = \int dS\, y^2$ e $T_{zz} = yE\eta''$)

Assim, existe um momento

$$dM_x^O = M_x(x+dx) - M_x(x)$$

a actuar naquela porção de barra.

Para estar em equilibrio, uma força F_y tem que actuar nos lados, de forma que

(A) $dF_y + w\, dz = 0$, com w a força de corpo por unidade de comprimento

ICTP
www.ictp.it

Em relação a O, o momento dessas forças vale

$$d\vec{M}_f = d\vec{z} \times \vec{f}_y = -f_y\, dz$$

[o momento da força de corpo $\propto w\, dz^2$ e pode ser desprezado]

Mas este momento tem que ser tal que a barra esteja em equilíbrio,

$$d\vec{M}_f + d\vec{M}_x = 0 \Rightarrow dM_x = -dM_f = f_y\, dz$$

Assim,

$$\frac{dF_y}{dz} = -w \quad (\tilde{A})$$

$$\frac{dM_x}{dz} = f_y \Rightarrow \frac{d^2M_x}{dz^2} = -w \quad (\tilde{B})$$

e como vimos

$$M_x = -E I_y \eta'' \quad (\tilde{C})$$

$\tilde{B}$ e $\tilde{C}$ resultam em

$$E\,(I_y \eta'')'' = w \quad , \text{ relação Euler-Bernoulli}$$

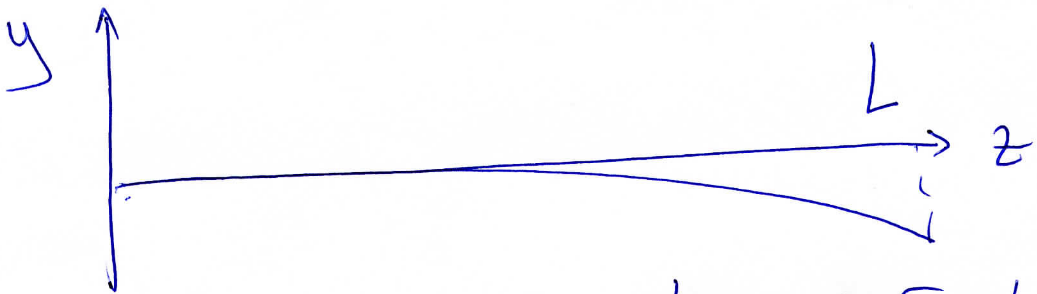
A força de cisalhamento

$$F_y = \cancel{-E\left[I_y \eta''\right]'} = -E\left[I_y \eta''\right]'$$

C

Resolvamos para a ~~acção~~ forma da barra sob a acção da gravidade, assumindo que está presa em $y=0$,

- $\eta(0) = \eta'(0) = 0$
- Assumimos que a outra ponta, a uma distância L, está livre, $T_{zz} = T_{zy} = 0$



A solução geral de $\frac{d^4\eta}{dz^4} = \frac{W}{EI}$ é

$$\eta = \frac{W}{EI}\left[\frac{z^4}{24} + \frac{c_3 z^3}{6} + \frac{c_2 z^2}{2} + c_1 z + c_0\right]$$

i) Exigindo que $\eta(0) = \eta'(0) = 0 \Rightarrow c_0 = c_1 = 0$

ii) $T_{zz} = yE\eta''$ logo $T_{zz}(L) = 0 \Rightarrow \eta''(L) = 0$

$T_{zy} = 0 \Rightarrow \eta'''(L) = 0$

Estas duas condições dão

$c_2 = L^2/2$

$c_3 = -L$

D

www.ictp.it

Portanto,

$$\eta = \frac{w}{EI}\left[\frac{z^4}{24} - \frac{Lz^3}{6} + \frac{L^2 z^2}{4}\right]$$

Notem que

- O momento $M_x = w\left[\frac{L^2}{2} - Lz + \frac{z^2}{2}\right]$ é máximo em $z=0$ e zero em $z=L$
- $T_{zz} = yE\eta'' = \frac{yw}{I}\left[\frac{z^2}{2} - Lz + \frac{L^2}{2}\right]$

Para $I = \frac{ab^3}{12}$ e $w = \rho g ab$ temos

$$T_{zz} = \frac{12\rho g y L^2}{2\,b^2},$$ máximo em $y = \pm\frac{b}{2}$

o coeficiente é 3

A tensão máxima na barra vale então

$$T_{max}(z=0) = \frac{6\rho g L^2}{2\,b} = \frac{6PL}{2\,ab^2},$$ $P =$ peso da barra

convém comparar com Galileu, $T_{max} \sim \frac{2PL}{ab^2}$

- Se ambos extremos estiverem apertados, ou apenas suportados, a forma da barra muda.

$\eta = \eta'' = 0$ suporte simples

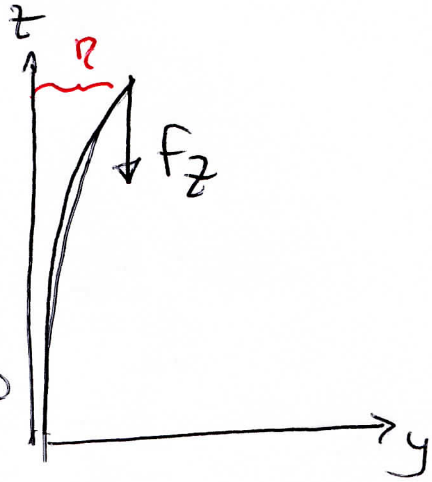
$\eta = \eta' = 0$ fins presos

$\eta'' = \eta''' = 0$ fins livres

E

$d\Pi_n =$

Resumo e generalização



No caso mais geral duma barra fina actuada por uma força de corpo W_y por unidade de comprimento e uma força F_z* na extremidade

$$E\left(I_y \eta''\right)'' + F_z \eta'' - W_y = 0$$

onde $F_z > 0 \equiv$ compressão

A força de cisalhamento

$$F_y = -E\left(I_y \eta''\right)' - F_z \eta' \, , \quad I_y = \int y^2 \, dx \, dy$$

* Que muda a relação de momentos anterior

F

Instabilidade à flexão ou dobragem
["Buckling" instability]

Se comprimiemos uma barra com força, ela dobra. Calculemos o valor crítico da força para a qual esta dobragem resulta numa nova configuração. Na ausência de forças dos corpo,

$E(I\eta'')'' + F_z\eta'' = 0$. Procuremos uma solução onde um fim está fixo e o outro extremos livre,

$\eta(0) = \eta'(0) = 0$
$\eta''(L) = \eta'''(L) + \frac{F_z}{EI}\eta'(L) = 0$

A solução geral é

$\eta = a_1 + a_2 z + a_3 \cos Kz + a_4 \operatorname{sen} Kz$, com

$K^2 = \frac{F_z}{IE}$. Impondo as BCs, temos

$a_2 = a_4 = 0$ e $a_1 = -a_3$ e $KL = \frac{n\pi}{2}$ como a única solução <u>não trivial</u>. Portanto a força mínima vale

$$\frac{FL^2}{EI} = \frac{\pi^2}{4}$$

$\begin{cases} \text{Natureza e agulhões} \\ \text{outras BCs} \end{cases}$