2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

13.NOV.2019

Cursos: FÍSICA, MATEMÁTICA

Nome: EXEMPLO DE RESOLUÇÃO

Número:____________________Curso:____________________

JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS

1. Para cada $a \in \mathbb{R}$ seja $T_a : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ tal que $T_a(x,y,z,w) = (x+y+az, y-x+aw, z-w, z+w)$.

(a) Determine a representação matricial de T_a na base ordenada indicada em cada um dos dois casos (com a mesma base para o domínio e para o espaço de chegada):

(1) base canónica. (2) $((1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0),(0,1,0,0))$.

(b) Determine se existe alguma base ordenada de $\mathbb{C}^4$ (a mesma para domínio e espaço de chegada) em que a representação matricial de T_a seja uma matriz diagonal real. E uma matriz diagonal complexa? Em caso afirmativo, indique os valores de $a \in \mathbb{R}$ para que existe representação matricial diagonal em alguma base e calcule uma tal base e a representação matricial correspondente.

2. Seja P_n o conjunto dos polinómios reais de grau $\leq n$ e $T : P_4 \to P_4$ tal que $T(p) = p''' - p''$.

(a) Determine os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que $p'''(t) - p''(t) = at + bt^3$, $t \in \mathbb{R}$ tem solução em P_4.

(b) Determine: (1) a nulidade e a característica de T (use o Teorema de Característica e Nulidade).
(2) Uma base do espaço nulo de T. (3) A solução geral em P_4 de $p'''(t) - p''(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Identifique a imagem S da circunferência com raio 1 e centro em $(0,0)$ pela função $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x+y, y)$ e determine os pontos de S mais próximos e mais afastados de $(0,0)$.

RESPOSTAS (pode usar o espaço abaixo e no verso e/ou as folhas A4 necessárias).

1.(a) (1) $T_a(e_1) = (1,-1,0,0)$, $T_a(e_2) = (1,1,0,0)$, $T_a(e_3) = (a,0,1,1)$, $T_a(e_4) = (0,a,-1,1)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) $T_a(1,1,0,0) = (2,0,0,0) = 2(1,1,0,0) - 2(0,1,0,0)$

$T_a(0,0,1,1) = (a,a,0,2) = a(1,1,0,0) + 2(0,0,1,1) - 2(0,1,1,0) + 2(0,1,0,0)$

$T_a(0,1,1,0) = (1+a,1,1,1) = (1+a)(1,1,0,0) + (0,0,1,1) - a(0,1,0,0)$

$T_a(0,1,0,0) = (1,1,0,0)$ $\begin{bmatrix} 2 & a & 1+a & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -a & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Calcular valores próprios de A: λ tais que $A - \lambda I$ é singular

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & a & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Como é matriz triangular por blocos, é singular se e só se pelo menos um bloco na diagonal é singular $\Leftrightarrow$ um bloco na diagonal principal tem determinante $= 0$ $\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = \pm i \Leftrightarrow \lambda = 1 \mp i$.

Não tem valores próprios reais. Logo, não tem representação matricial diagonal real. Calcular vectores próprios c/ eliminação de Gauss p/ obter base de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.

$$\begin{bmatrix} \pm i & 1 & a & 0 \\ -1 & \pm i & 0 & a \\ 0 & 0 & \pm i & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \pm i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & \pm i & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & \pm i \\ 0 & 0 & a & \pm ia \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & \pm i & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & \pm i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base de $\mathcal{N}(A - (1 \mp i)I)$: $((\pm i, 1, 0, 0), (a, 0, \mp i, 1))$.

$0 = c_1(i,1,0,0) + c_2(a,0,-i,1) + c_3(-i,1,0,0) + c_4(a,0,i,1) = (i(c_1-c_3) + a(c_2+c_4), c_1+c_3, i(c_4-c_2), c_2+c_4)$

$\Leftrightarrow c_2 + c_4 = 0, c_4 - c_2 = 0, c_1 + c_3 = 0, c_1 - c_3 = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

$((i,1,0,0), (a,0,-i,1), (-i,1,0,0), (a,0,i,1))$ são linearmente independentes; como $\dim \mathbb{C}^4 = 4$, formam uma base de $\mathbb{C}^4$ e são vectores próprios.

Nessa base a rep. matricial de T_a é $\operatorname{diag}(1-i, 1-i, 1+i, 1+i)$, p/ todo $a \in \mathbb{R}$.

2.(a) Existe solução em $P_4 \Leftrightarrow at+bt^3 \in \mathcal{R}(T)$.

Para $p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$, com $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$,
$p'''(t) - p''(t) = 6c_3 + 24c_4 t - 2c_2 - 6c_3 t - 12c_4 t^2 = (6c_3 - 2c_2) + (24c_4 - 6c_3)t - 12c_4 t^2$.
logo, $\mathcal{R}(T) = P_2$. $at+bt^3 \in \mathcal{R}(T) \Leftrightarrow b=0$. $\exists$ solução $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$ e $b=0$,

(b) (1) $\operatorname{rank} T = \dim P_2 = 3$. $\dim P_4 = 5$. $\operatorname{nul} T = \dim P_4 - \operatorname{rank} T = 5-3 = 2$,
do Teorema de Característica e Nulidade.

(2) $T(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6c_3 - 2c_2 = 0 \\ 24c_4 - 6c_3 = 0 \\ 12c_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c_4 = c_3 = c_2 = 0$. logo, $p \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p(t) = c_0 + c_1 t$, com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

Portanto, $\mathcal{N}(T) = P_1$.

(3) p é solução de $[T(p)](t) = t \Leftrightarrow \begin{cases} 6c_3 - 2c_2 = 0 \\ 24c_4 - 6c_3 = 1 \\ 12c_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_4 = 0 \\ c_3 = -\frac{1}{6} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

uma solução é $q(t) = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$.

Como T é transformação linear, a equação é linear.
A solução geral é a soma de uma solução particular com a solução geral da eq. homogénea correspondente, i.e., os elementos de $\mathcal{N}(T)$: $p(t) = c_0 + c_1 t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$, com $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

3. $T(x,y) = (X,Y) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = X \\ y = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X - Y = x \\ Y = y \end{cases}$. logo, T é injectiva e, portanto,
S é uma elipse com centro em $(0,0)$. $1 = x^2 + y^2 = (X-Y)^2 + Y^2 = X^2 - 2XY + 2Y^2$
$\Leftrightarrow [X\ Y]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 1$. Calcular valores próprios de $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. São
λ tais que $B - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ é singular $\Leftrightarrow \det B = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Calcular vectores próprios associados: a λ_1,
$[1-\lambda_1\ \ -1]\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 0$ dá $(1, 1-\lambda_1)$, e a λ_2, analogamente $(1, 1-\lambda_2)$.
As direcções destes vectores são as dos eixos de simetria da elipse S,
que tem equação nas componentes (X', Y') na base formada pelos dois vectores próprios $[X'\ Y']\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = 1 \Leftrightarrow \frac{(X')^2}{1/\lambda_1} + \frac{(Y')^2}{1/\lambda_2} = 1$,
O comprimento do semieixo maior (na direcção de $(1, 1-\lambda_2)$) é $\sqrt{1/\lambda_2}$ e
o comprimento do semieixo menor (na direcção de $(1, 1-\lambda_1)$) é $\sqrt{1/\lambda_1}$.
Logo, os pontos de S mais afastados de $(0,0)$ são $\pm \frac{\sqrt{1/\lambda_2}}{\sqrt{1+(1-\lambda_2)^2}}(1, 1-\lambda_2)$
e os pontos de S mais próximos de $(0,0)$ são $\pm \frac{\sqrt{1/\lambda_1}}{\sqrt{1+(1-\lambda_1)^2}}(1, 1-\lambda_1)$,
porque são as extremidades dos eixos da elipse, respectivamente, maior e menor nas coordenadas (X', Y').