Neste momento, sabemos caracterizar as deformações e as tensões, mas ainda não estabelecemos uma relação entre elas. Em primeira aproximação, a resposta como vimos no início é linear, portanto podemos escrever a relação geral

$$T_{ij} = - Y_{ijkl} S_{kl}$$

ond Y é um tensor de ordem 4, portanto com $3^4 = 81$ componentes. Contudo, o tensor é simétrico em ij e em kl, portanto temos apenas $6^2 = 36$ componentes independentes. Além disso, a própria matriz S é simétrica em $ij \leftrightarrow kl$, pelo que na realidade temos 21 componentes... ainda é muito!

Se o material for isotrópico, o mesmo em todas as direcções, então temos apenas duas opções, os graus de cisalhamento e compressão, isto é, os graus de liberdade correspondentes a Θ e a Σ_{ij},

$$\boxed{T_{ij} = - K \Theta \delta_{ij} - 2 \mu \Sigma_{ij}}$$

$K \rightarrow$ bulk modulus

$\mu \rightarrow$ shear modulus

<u>Nota 1</u>: $Y_{ijkl} = Y_{jikl} = Y_{ijlk}$

Como é simétrico nos primeiros dois e últimos dois índices, e como já vimos o nr de graus independentes para um tensor simétrico de ordem 2 é 6, temos $6 \times 6 = 36$ nrs independentes

<u>Nota 2</u>: Um tensor isotrópico é tal que a lei constitutiva é a mesma em referenciais diferentes. Em particular, num referencial rodado deveremos ter

$$T'_{ij} = -Y_{ijkl} S'_{kl}, \text{ ou } Y'_{ijkl} = Y_{ijkl}$$

- Todos os escalares são isotrópicos
- Já vimos na aula prática que não existem vectores (tensores-1) isotrópicos
- É fácil de ver que existem tensores isotrópicos, em particular o tensor delta de Kronecker δ_{ij}. Para ver isso, mudemos de coordenadas.

$$\delta'_{ij} = \delta_{mn} a_{mi} a_{nj} \quad [\text{por definição de tensor}]$$

$$= a_{mi} a_{mj} \quad [\text{dado que } \delta_{mn} = 0 \text{ se } m \neq n]$$

Mas as transformações são ortogonais,

$a_{mi} a_{mj} = \delta_{ij}$, como podem verificar

Podemos mostrar que <u>todos</u> os tensores de ordem 2 são proporcionais a δ_{ij}.

- Se Y_{ijkl} for um tensor isotrópico de ordem-4 então

$$Y_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ll}\delta_{jk})$$

Antes de mais, é útil ver que em isotropia os eixos coordenados podem ser trocados arbitrariamente, a sem mudar o resultado. Portanto, permutações dos índices 1, 2, 3 não afectam as componentes de um tensor isotrópico. Logo,

$$Y_{1111} = Y_{2222} = Y_{3333}$$
$$Y_{1122} = Y_{2233} = Y_{3311} = Y_{1133} = Y_{2211} = Y_{3322}$$
$$Y_{1212} = Y_{2323} = Y_{3131} = Y_{1313} = Y_{2121} = Y_{3232}$$
$$Y_{1221} = Y_{2332} = Y_{3113} = Y_{2112} = Y_{3223} = Y_{1331}$$

De seguida, uma rotação em torno do eixo x_1, i.e., $x'_1 = x_1$, $x'_2 = -x_2$, $x'_3 = -x_3$ vai mudar o sinal de qualquer termo com um nr ímpar do índice 1. Estes termos tem que se anular, devido à isotropia.

Por exemplo, $Y_{1222} = Y_{1223} = Y_{2212} = 0$

Por simetria, isto é válido para qualquer índice i.

Assim, acabamos apenas com

$$Y_{1111}, Y_{1122}, Y_{1212} \text{ e } Y_{1221}$$

É fácil de mostrar, fazendo rotações ao longo de x_3 que uma destas é dependentes.

Ora, dado que δ_{ij} é isotrópico,

$$\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad \delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}, \quad \delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}$$

são também isotrópicos, donde segue o resultado anterior.

Quando Y tem a simetria extra

$$Y_{ijkl}=Y_{jikl} \quad , \quad Y_{ijkl}=Y_{ijlk}, \text{ então}$$

$$Y_{ijkl}=\lambda\,\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

Aplicando este resultado na primeira expressão da página 22, obtemos o segundo resultado dessa página

Dado que K, μ são os únicos parâmetros livres, tem que estar relacionados com o módulo de Young E e a constante de Poisson ν

Tomemos a seguinte situação

$$T_{zz} = -K\theta - 2\mu\Sigma_{zz} \qquad A$$

$$T_{xx} = -K\theta - 2\mu\Sigma_{xx} = 0 \qquad B$$

$$T_{yy} = -K\theta - 2\mu\Sigma_{yy} = 0 \qquad C$$

$$T_{xy} = T_{xz} = T_{yz} = 0$$

Somando $A+B+C$ temos

$$T_{zz} = -3K\theta - 2\mu\Sigma_{ii}, \text{ mas } \Sigma_{ii} = 0 \text{ por construção}$$

$$= -3K\theta$$

Por sua vez, $S_{ik} = \Sigma_{ik} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ik}$ logo

$$S_{zz} = \Sigma_{zz} + \frac{1}{3}\theta, \text{ mas de } (A)$$

$$\Sigma_{zz} = \frac{1}{2\mu}\left(-K\theta - T_{zz}\right) = \frac{1}{2\mu}(2K\theta) = \frac{K\theta}{\mu}$$

$$S_{zz} = \theta\left(\frac{K}{\mu} + \frac{1}{3}\right) \text{ logo}$$

A que Landau chama σ

$$\boxed{-\frac{T_{zz}}{S_{zz}} = \frac{9\mu K}{3K+\mu} = E}$$

Por outro lado, o rácio de Poisson $\nu \equiv -\frac{S_{xx}}{S_{zz}}$

$$S_{xx} = \Sigma_{xx} + \frac{1}{3}\theta = \theta\left(\frac{1}{3} - \frac{K}{2\mu}\right), \text{ usando (B). Logo}$$

$$\nu = -\frac{S_{xx}}{S_{zz}} = -\frac{\theta\left(\frac{1}{3} - \frac{K}{2\mu}\right)}{\theta\left(\frac{1}{3} + \frac{K}{\mu}\right)} = -\frac{2\mu - 3K}{2(\mu + 3K)} = \frac{3K - 2\mu}{2(3K+\mu)}$$

Note-se que

$$T_{ij} = -K\Theta\,\delta_{ij} - 2\mu\Sigma_{ij}$$

$$\Theta \equiv S_{ll} = \frac{\delta V}{V}$$

Se focarmos atenção na compressão hidrostática de um fluido para a qual

$T_{ij} = +\delta P\,\delta_{ij}$ então temos os elementos diagonais

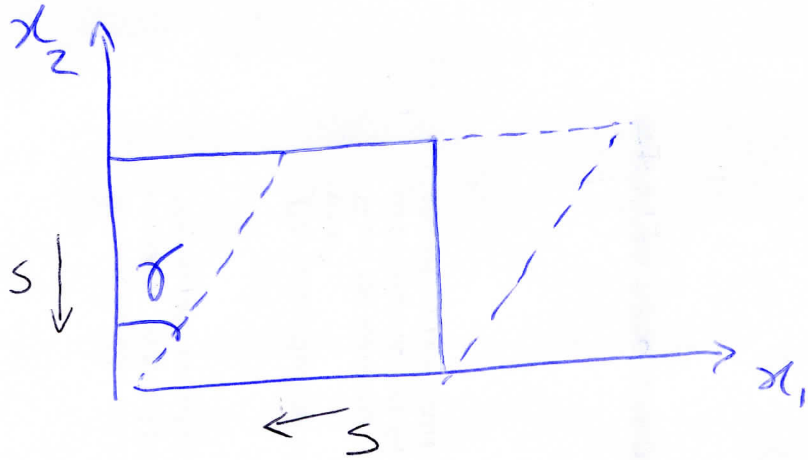
$$+\delta P = -K\Theta = -K\frac{\delta V}{V} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left.\frac{\delta V}{\delta P}\right)_{T\ \text{CONST}}}$$

Para um gás ideal, por exemplo,

$$P_{gás}V = nRT \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial P} = -P_{gás}^{-2}\,nRT$$

$$\Rightarrow K = P_{gás}$$

Consideremos cisalhamento apenas



- A deformação é $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j \xi_i + \partial_i \xi_j)$

Mas $\xi_2 = 0$, $\xi_1 = \gamma x_2$ logo

$S_{12} = S_{21} = \frac{\gamma}{2}$, as outras componentes nulas

Ora $T_{12} = -K\theta\delta_{ij} - 2\mu\Sigma_{ij} = -2\mu S_{12} = -\mu\gamma$

Mas tinhamos visto na página 13 que

$\tau = -T_{12} = -G\gamma \Rightarrow G = \mu$

- Podemos também calcular os eixos principais da deformação:

$\mathrm{Det}[S - \lambda I] = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \pm\gamma$

$[S - \lambda I]v = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$

$v_3 = (0,0,1)$

Ou seja, os eixos estão a $45°$ com os da figuras, e dão-nos o eixo onde a deformação é maior. É neste eixo que esperamos fracturas

Exemplo giz.