Mecânica Analítica

2020-2021

Série 10

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

> Nesta série, ilustramos o formalismo Lagrangeano para sistemas contínuos bem como algumas propriedades gerais da teoria clássica de campo.

$\star\star$ **Problema 1. A corda vibrante.** Considere uma corda de comprimento L e densidade de massa μ, sujeita a uma tensão constante τ. Seja ainda $\psi(x,t)$ a deformação local da corda no ponto x e no instante t.

a) Comece por mostrar, pela maneira que lhe for mais conveniente, que os infinitésimos de energia cinética e potencial podem ser escritos na seguinte forma

$$dT = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 dx, \quad dV = \tau\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2} - 1\right) dx.$$

b) Expanda o termo de energia potencial em primeira ordem na derivada parcial em x e obtenha a *densidade Lagrangeana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2,$$

que satisfaz a relação $L = \displaystyle\int \mathcal{L}[\psi(x,t),x,t]\;dx$.

c) Parta do princípio de d'Alembert para mostrar que a estacionariedade da acção implica

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t\psi\right)}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_x\psi\right)}\right) = 0.$$

d) Escreva a equação do movimento e obtenha a famosa equação das ondas

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c_s^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0.$$

Qual o significado físico de c_s?

e) Efectue uma mudança de coordenadas ($\eta = x + c_s t$ e $\xi = x - c_s t$) para obter a solução de d'Alembert para a equação das ondas, i.e. para mostrar que

$$\psi(x,t) = f(x + c_s t) + g(x - c_s t),$$

com f e g arbitrários, satisfaz a equação do movimento. Qual o significado físico desta solução?

f) Considere que a corda está fixa nos seus extremos, $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$. Use o método da separação de variáveis para mostrar que a relação de dispersão é quantizada,

$$\omega_n = c_s \frac{n\pi}{L}.$$

g) Determine as leis de conservação que achar relevantes e calcule os elementos do tensor energia-momento.

$\star\star$ **Problema 2. Teoria de Kirchoff-Love.** Em teoria de campo, é possível que a densidade Lagrangeana contenha derivadas do campo ψ de ordem superior à primeira [1]. Este é o caso da teoria de elasticidade, em que a dinâmica do sistema depende não só da deformação ψ mas também da curvatura local, i.e. $\nabla^2\psi$.

a) Mostre que para uma teoria da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, \Box\psi, x, t)$, a equação de Euler-Lagrange se escreve como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)}\right) + \Box\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\Box\psi\right)}\right) = 0,$$

onde $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$.

b) Considere a seguinte densidade lagrangeana, descrevendo uma membrana (ex. um tambor) presa nas suas extremidades,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\rho\dot{\psi}^2 - \gamma|\boldsymbol{\nabla}\psi|^2 - D\left(\nabla^2\psi\right)^2\right],$$

onde ρ é a massa por unidade de área, γ é a tensão aplicada e D (que depende dos módulos de Poisson e de Young) é a rigidez da membrana. Utilize o resultado da alínea anterior para obter a equação de Kirchoff-Love,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c_s^2\nabla^2\psi + \beta^2\nabla^4\psi = 0,$$

onde $c_s = \sqrt{\gamma/\rho}$ e $\beta = \sqrt{D/\rho}$.

c) Verifique se a teoria é simétrica para as transformações discretas $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$ e $\mathcal{PT}$.

[1] No caso discreto, se o Lagrangeano depender da aceleração generalizada, $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$, o espaço de fases fica sobredeterminado como consequência das transformações canónicas, conduzindo à famosa *instabilidade de Ostrogradsky* (para uma pequena introdução sobre o assunto, ver https://arxiv.org/abs/1411.3721). Isto justifica porque é que uma teoria física só depende das posições e das velocidades generalizadas.

d) Tente soluções do tipo onda plana para obter a relação de dispersão

$$\omega = \sqrt{c_s^2 k^2 + \beta^2 k^4}.$$

À luz do que já conhece sobre a teoria das ondas, comente o resultado encontrado.

$\star\star\star$ **Problema 3. A Equação de Schrödinger.** Em Mecânica Quântica, os sistemas físicos são descritos por uma função de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$, que é um campo complexo. A uma dimensão, para uma partícula sob a acção de um potencial $V(x)$, o Lagrangeano é dado por

$$\mathcal{L} = \psi^* \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi - V(x)\psi^*\psi = 0,$$

onde $\hbar = h/2\pi$ e h é a constante de Planck.

a) Obtenha a equação do movimento para o campo ψ partindo da equação de Euler-Lagrange para ψ^*.

b) Obtenha a equação de Schrödinger independente do tempo fazendo

$$\psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}.$$

c) Mostre que o Lagrangeano é simétrico para o grupo U(1), i.e. para transformações da forma

$$\psi \to \psi_\lambda = e^{i\lambda}\psi.$$

d) Como $\psi(x, t)$ é um número complexo, podemos escrevê-lo na forma de Moivre,

$$\psi(x, t) = A(x, t)e^{-iS(x,t)/\hbar}.$$

Mostre que, no limite clássico, $\hbar \to 0$, $S(x, t)$ satisfaz a equação de Hamilton−Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V = 0.$$

Compare a forma geral da equação de Hamilton−Jacobi $\dot{S} + H = 0$ com a equação de Schrödinger para concluir que, em mecânica quântica, $p \to i\hbar\partial_x$, ou seja, que o momento linear passa a ser um <u>operador</u>.

$\star\star$ **Problema 4. Teorema de Noether.** Considere um determinado fenómeno físico descrito por um **campo real** $\varphi(x^\mu)$ no espaço-tempo de Minkowskii ($g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$), cujo Lagrangeano é do tipo

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi),$$

onde $V(\varphi)$ é um potencial e

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right), \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right).$$

a) Demonstre o teorema de Noether, i.e. que caso a teoria seja simétrica para uma transformação contínua $\varphi \to \varphi_\lambda$, então existe uma corrente conservada dada por

$$j^\mu = \partial^\mu \varphi \left.\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

b) Considere a transformação $\varphi \to \varphi_\lambda = \varphi + \lambda f$, onde $f(x^\mu)$ é um campo real arbitrário. Que condições $V(\varphi)$ deve satisfazer por forma à teoria ser simétrica para esta transformação? Determine a corrente de Noether correspondente.

c) Observe que a equação do movimento se escreve na forma

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Observamos, mais uma vez, que a corrente se conserva se $V =$ constante. Para que família de simetrias esta corrente j^μ é uma corrente de Noether?

d) Mostre que o tensor de energia-momento é dado por

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \mathcal{L} g^{\mu\nu}.$$

⋆⋆ **Problema 5. Formalismo hamiltoniano em fluidos.** Até agora vimos apenas densidades lagrangeanas. Como deve imaginar pode também resolver-se os problemas de campos clássico com formalismo de densidade Hamiltoniana, definida a partir da transformação de Legendre

$$\mathcal{H} = \dot{\varphi}_i \pi_i - \mathcal{L} \quad \text{com} \quad \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}.$$

Vamos explorar um pouco este formalismo no contexto da física dos fluidos. Suponha que pretende estudar um fluido invíscido a uma dimensão. Uma abordagem naïve (porém correcta) dita que a densidade lagrangeana se escreva $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho u^2 - e(\rho)$, em que ρ é a densidade do fluido, u a sua velocidade e $e(\rho)$ a densidade de energia interna, função da densidade.

a) Comece por mostrar que as equações de Hamilton para campos se escrevem:

$$\dot{\varphi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi}$$
$$\dot{\pi} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}$$

onde $\frac{\delta}{\delta \psi} \equiv \frac{\partial}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \psi)}$

b) Esperamos que o fluido obedeça à equação da continuidade[2] $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$. Verifique que esta condição é automáticamente satisfeita com a introdução de um campo escalar φ tal que $\rho = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\rho u = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Reescreva a densidade lagrangeana em termos deste novo campo e suas derivadas e obtenha o tensor energia momento T_μ^ν comentando as suas componentes.

[2]Na verdade, num tratamento mais detalhado da teoria hamiltoniana de fluidos não é necessário impor a continuidade e esta surgiria naturalmente das equações, mas por simplicidade iremos neste exercício impô-la *a priori*

c) Mostre que a densidade hamiltoniana se escreve $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\pi^2 \partial_x \varphi + e(-\partial_x \varphi)$ e obtenha as equações do movimento correspondentes.

d) Lembrando que a densidade de energia interna e a pressão (p) se relacionam segundo $\frac{p}{\rho} = \frac{\partial e}{\partial \rho}$ mostre que, das equações do movimento se obtem a equação de Euler (caso particular da equação do momento de Cauchy)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0$$

⋆⋆ **Problema 6. Higgs sem Goldstone.** Consideremos a teoria de campo real do problema anterior, com o potencial

$$V(\varphi) = -\frac{1}{2}a\varphi^2 + \frac{1}{4}b\varphi^4, \quad b > 0.$$

a) Primeiramente, considere $a < 0$. Mostre que o valor esperado do campo não quebra a simetria discreta $\mathbb{Z}_2$, i.e. $\varphi \to -\varphi$.

b) Considere agora o caso $a > 0$. Determine as soluções constantes possíveis e mostre que estas quebram a simetria discreta $\mathbb{Z}_2$.

c) Linearize o Lagrangeano em torno dos pontos de equilíbrio de menor simetria. Observe a emergência de um campo com massa (modo de Higgs).

d) Explique porque é que a quebra espontânea de simetria não resulta na emergência de um campo de massa nula (modo de Goldstone).

e) Repita o procedimento da alínea c) para o caso de uma teoria de campo complexa,

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial\psi, \partial\psi^*) = \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^* + \frac{1}{2}a|\psi|^2 - \frac{1}{4}b|\psi|^4.$$

Mostre que, neste caso, existe um modo de Goldstone. Qual a simetria que se quebra?

f) Mostre que a corrente de Noether associada à simetria $U(1)$ se mantém conservada apesar da quebra espontânea de simetria. Ou seja, mostre que a conservação da corrente de Noether é consequência da simetria do Lagrangeano, e não da das soluções.

⋆⋆⋆ **Problema 7. A massa do fotão?** Considere o Lagrangeano de Proca, introduzido para descrever situações onde o fotão (descrito pelo campo vectorial real A_μ) adquire uma massa

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m_A^2c^2}{\hbar^2}A_\mu A^\mu.$$

a) Mostre que o Lagrangeano de Proca não é invariante para a transformação de padrão $A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda$, onde $\Lambda(x^\mu)$ é uma função escalar.

b) Contudo, é sabido que os fotões adquirem massa quando se propagam em alguns meios (por exemplo, num plasma ou num supercondutor). Essa massa aparece devido ao mecanismo de Higgs. Para percebermos como funciona, introduzimos um campo complexo ψ (por exemplo, de electrão) que entra no Lagrangeano da seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^* - V(|\psi|).$$

Mostre que esta teoria é invariante para a transformação de padrão global $\psi \to \tilde{\psi} = e^{i\lambda}\psi$, onde λ é uma constante.

c) Considere agora a transformação de padrão local $\psi \to \tilde{\psi} = e^{ig\alpha}$, onde $\alpha(x^\mu)$ é uma função que varia no espaço-tempo. Verifique que a teoria é invariante para esta transformação através do acoplamento mínimo,

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu, \quad A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha.$$

d) Considere agora o Lagrangeano que é invariante para todas as transformações padrão (e também invariante de Lorentz)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\psi D^\mu\psi^* + \frac{1}{2}a|\psi|^2 - \frac{1}{4}b|\psi|^4.$$

Mostre que, como consequência do mecanismo de Higgs, o fotão pode adquirir uma massa de forma a preservar a invariância de gauge, e que a sua massa é

$$m_A \propto g\rho_0.$$

$\star\star\star$. **Solitões em teoria de campo.** Em teoria de campo (nas suas versões clássicas e quântica), a quantidade ψ representa o campo escalar, i.e. uma partícula simples de spin total nulo. Solitões, que originalmente foram observados no contexto de mecânica dos fluidos, são ondas não lineares que se comportam como partículas. Recebem este nome justamente por serem ondas "solitárias", i.e. por verem a sua forma inalterada durante a propagação ou mesmo após interagirem entre si ou com obstáculos exteriores.

Vamos começar por considerar a teoria de campo mais geral num espaço $1+1-$dimensional (i.e. uma dimensão temporal e uma dimensão espacial). Em relatividade restrita, o espaço-tempo é de Minkowskii e, portanto, a métrica é tem a forma $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1)$. A densidade lagrangeana neste caso tem a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi - V(\psi).$$

a) Use a equação de Euler-Lagrange para obter a famosa equação de Klein-Gordon,

$$\Box\phi + V'(\psi) = 0,$$

onde $V'(\psi) = dV/d\psi$.

b) Restringimos, agora, a discussão a soluções que não alteram a sua forma, i.e. independentes do tempo ($\partial_t\psi = 0$). Neste caso, a Eq. de Klein-Gordon reduz-se à equação de Helmholtz generalizada, $\nabla^2\psi - V'(\phi) = 0$. Use o resultado da alínea anterior para demonstrar que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - V(\psi) = \mathrm{const}.$$

Isto permite converter a Eq. de Klein-Gordon numa equação de primeira ordem.

c) Para avançarmos, temos de relacionar o valor da constante com uma quantidade física que possamos controlar. Para tal, definimos a energia como $E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\ dx$. Mostre que, para condições fronteira apropriadas, podemos identificar

$$E = \mathrm{const}. \tag{1}$$

d) Resolva a equação de primeira ordem que obteve para encontrar

$$x - x_0 = \pm\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi}{\sqrt{2V(\psi)}}$$

e) Falta agora concretizar a forma do potencial. Relembre que para obter a propriedade em (1) tivémos de assumir que o potencial se anularia em $x \to \pm\infty$. Um potencial que é compatível com esta condição fronteira é o aclamado *potencial do chapéu mexicano*, utilizado para descrever a quebra espontânea de simetria que conduz ao aparecimento do bosão de Higgs,

$$V(\psi) = \frac{\lambda}{4!}\left(\psi^2 - \psi_0^2\right)^2 ,$$

onde ψ_0 é o chamado valor de expectação do vácuo. Insira este potencial na equação que obteve na alínea anterior para determinar a solução de *solitão*

$$\psi(x) = \pm\psi_0 \tanh\left(\frac{\alpha}{2}(x - x_0)\right) ,$$

onde $\alpha = 2\sqrt{3/(\lambda\psi_0^2)}$. Represente graficamente $|\psi(x)|^2$ e observe que o solitão é uma solução localizada no espaço. Poderíamos aproveitar para verificar que o solitão é invariante para transformações do tipo $x \to (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (transformação de Lorentz), o que demonstra que, de facto, se comporta como uma onda que não altera a sua forma durante a propagação. Como veremos adiante em disciplinas mais especificas, este último facto deve-se à compensação entre a dispersão e a não-linearidade do potencial. [3]

[3] Para uma derivação detalhada deste resultado, podem aceder ao seguinte endereço electrónico `https://www.youtube.com/watch?v=pxm4ZbqaA4Y`.