20 Mai Osc Ond

Tensor de Inércia

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i \, \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i = \frac{1}{2}\, \underline{\omega}^T \, \underbrace{I}_{\text{tensor de inércia}} \, \omega$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{bmatrix}}_{\text{tensor de inércia}} \begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix}$$

em componentes

$$I_{ab} = \sum m_i \Big((\underline{r}_i \cdot \underline{r}_i)\, \delta_{ab} - (\underline{r}_i)_a (\underline{r}_i)_b \Big)$$

$\lambda \rightarrow \{x, y, z\}$

$\{x, y, z\}$

O momento de inércia em relação a um eixo $\hat{n}$ é

$$I_{\hat{n}} = \hat{n}^T \mathcal{I} \hat{n}$$

exemplo $\hat{n} = \hat{z}$

$$I_{\hat{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = I_{zz}$$

Teorema dos eixos paralelos para o tensor de inércia

Até agora escrevemos o tensor de inércia sem especificar o ponto relativamente ao qual é calculado (ou seja, a origem do referencial em que se escreve $\underline{r}_i$)

Por defeito assume-se que a origem do referencial coincide com o CM

(por exemplo para valores tabelados)

Em geral quero ser capaz de escrever o tensor de inércia em relação a qq ponto (por exemplo um pivot). Basta escrever

$$\underline{r}_i = \underline{R} + \underline{r}'_i$$

$\underline{r}'_i$ → pos. relativa ao CM

$\underline{R}$ → do CM no novo referencial

$\underline{r}_i$ → posição relativa à origem do novo referencial

$$I_{ab} = \sum_i m_i \left((\underline{r}_i \cdot \underline{r}_i)\,\delta_{ab} - (\underline{r}_i)_a (\underline{r}_i)_b \right)$$

$$\underline{r}_i \cdot \underline{r}_i = (\underline{R} + \underline{\varphi}_i) \cdot (\underline{R} + \underline{\varphi}_i) = \underline{R} \cdot \underline{R} + \varphi_i \cdot \varphi_i + \cancel{\underline{2\underline{R} \cdot \underline{\varphi}_i}}$$

$$(\underline{r}_i)_a (\underline{r}_i)_b = (\underline{R})_a (\underline{R})_b + (\varphi_i)_a (\varphi_i)_b$$

$$+ \cancel{\underline{(\underline{R})_a (\varphi_i)_b}} + \cancel{\underline{(\underline{R})_b (\underline{\varphi}_i)_a}}$$

todos os termos lineares em $(\varphi_i)_{a,b}$ são nulos, porque são $\propto \sum_i m_i \varphi_i = 0$ pela definição do CM

Substituindo

$$I_{ab} = \sum_i m_i \Big((\underline{R}\cdot\underline{R})\,\delta_{ab} - (\underline{R})_a(\underline{R})_b + (\underline{\varphi}_i\cdot\underline{\varphi}_i)\,\delta_{ab} - (\underline{\varphi}_i)_a(\underline{\varphi}_i)_b \Big)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \Big((\underline{\varphi}_i\cdot\underline{\varphi}_i)\,\delta_{ab} - (\underline{\varphi}_i)_a(\underline{\varphi}_i)_b \Big)}_{I_{ab}^{cm}} + \Big((\underline{R}\cdot\underline{R})\,\delta_{ab} - (\underline{R})_a(\underline{R})_b \Big) \underbrace{\sum_i m_i}_{M}$$

$$= I_{ab}^{cm} + M \Big((\underline{R}\cdot\underline{R})\,\delta_{ab} - (\underline{R})_a(\underline{R})_b \Big)$$

Em forma matricial explícita

$$\underline{R} = (x, y, z)$$

coord. cm

$$I = I_{cm} + M \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

→ os termos diagonais são a (distância)^2 entre eixos

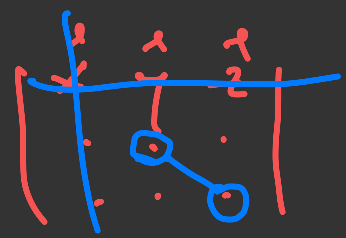
→ a interpretação dos outros termos é menos óbvia

Escrever as várias quantidades relevantes em termos do tensor de inércia

Momento angular

$$\underline{L} = \sum_i m_i \, \underline{r}_i \times \underline{\dot{r}}_i = \sum_i m_i \, \underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)$$

vamos fazer para uma componente (L_x) que não é necessariamente o eixo de rotação



$$L_x = \underline{L} \cdot \hat{x} = \sum_i m_i \left(\underline{r}_i \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_i) \right)_x$$

$$= \sum_i m_i \left[y_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)_z - z_i (\underline{\omega} \times \underline{r}_i)_y \right]$$

$$= \sum_i m_i \left[y_i (\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \right] = (\dots)$$

$$= \sum_i m_i \left[\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i (\omega_y y_i + \omega_z z_i) \right]$$

$$= \underbrace{\left[\sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \right]}_{I_{xx}} \omega_x + \underbrace{\left[\sum_i m_i (-x_i y_i) \right]}_{I_{xy}} \omega_y$$

$$+ \underbrace{\left[\sum_i m_i (-x_i z_i) \right]}_{I_{xz}} \omega_z$$

$$\Rightarrow L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

<u>también</u>

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Então

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\underline{L} = \mathcal{I}\, \underline{\omega}}$$

momento angular e velocidade angular têm, em geral, direcções diferentes

[só coincidem quando a rotação é em torno de um eixo principal do corpo – vector próprio de $\mathcal{I}$]

Notar que I (matriz) pode ser sempre diagonalizada (porque é real e simétrica)

$\Downarrow$

Qualquer objecto tem eixos principais

(em relação ~~a~~ aos quais I é diagonal) nos eixos principais $(1,2,3)$

$$T = \frac{1}{2}\underline{\omega}^T \underline{\underline{I}}\,\underline{\omega} = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 I_{11} + \omega_2^2 I_{22} + \omega_3^2 I_{33}\right)$$

$$\underline{L} = \underline{\underline{I}}\,\underline{\omega} = \left(I_{11}\omega_1, I_{22}\omega_2, I_{33}\omega_3\right)$$

$$\swarrow$$

$$(L_1, L_2, L_3) \qquad \Rightarrow (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left(\frac{L_1}{I_{11}}, \frac{L_2}{I_{22}}, \frac{L_3}{I_{33}}\right)$$

e logo

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{I_{11}} + \frac{L_2^2}{I_{22}} + \frac{L_3^2}{I_{33}}\right)$$

comparar com

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

5. Movimento geral de um corpo rígido

Translação + Rotação

↳ em torno do CM

↙ CM com trajectória $\underline{R}(t)$

posição de partícula no corpo

$$\underline{r}_i = \underline{R} + \underline{r}'_i \implies \dot{\underline{r}}_i = \dot{\underline{R}} + \dot{\underline{r}}'_i$$

pos. relativa ao CM

com o corpo a rodar em torno do CM

$$\dot{\underline{r}}'_i = \underline{\omega} \times \underline{r}'_i$$

então,

$$\dot{\underline{r}}_i = \dot{\underline{R}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_i' = \dot{\underline{R}} + \underline{\omega} \times (\underline{r}_i - \underline{R})$$

e energia cinética

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, \dot{\underline{r}}_i \cdot \dot{\underline{r}}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, (\dot{\underline{R}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_i') \cdot (\dot{\underline{R}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_i')$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i}_{M} \dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_i') \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')}_{\underline{\omega}^2 \underline{r}_i'^2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i m_i \underbrace{\dot{\underline{R}} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{r}_i')}_{\propto \sum_i m_i \underline{r}_i' = 0 \text{ por def. do cm}}$$

$$\sum m_i r_i'^2 = I$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\underline{R}}^2 + \frac{1}{2} I \underline{\omega}^2$$

só é simples porque $\underline{r}_i'$ relativo ao cm

Momento relativamente a um ponto arbitrário (rotação)

mais complicado que relativamente ao c.m.

Aqui tb fazer separação entre translação (do ponto) + rotação relativa ao ponto

Ponto ref. $\underline{Q}$

$$\dot{\underline{r}}_i = \dot{\underline{R}} + \underline{\omega} \times (\underline{r}_i - \underline{R})$$

fixo

$$\underline{r}_i = \underline{Q} \qquad \dot{\underline{Q}} = \dot{\underline{R}} + \underline{\omega} \times (\underline{Q} - \underline{R})$$

para eliminar $\dot{\underline{R}}$

$$\Rightarrow \dot{\underline{r}}_i = \dot{\underline{Q}} + \underline{\omega} \times (\underline{r}_i - \underline{Q})$$

a mesma forma que para o c.m., mas energia cinética tem uma forma + complicada

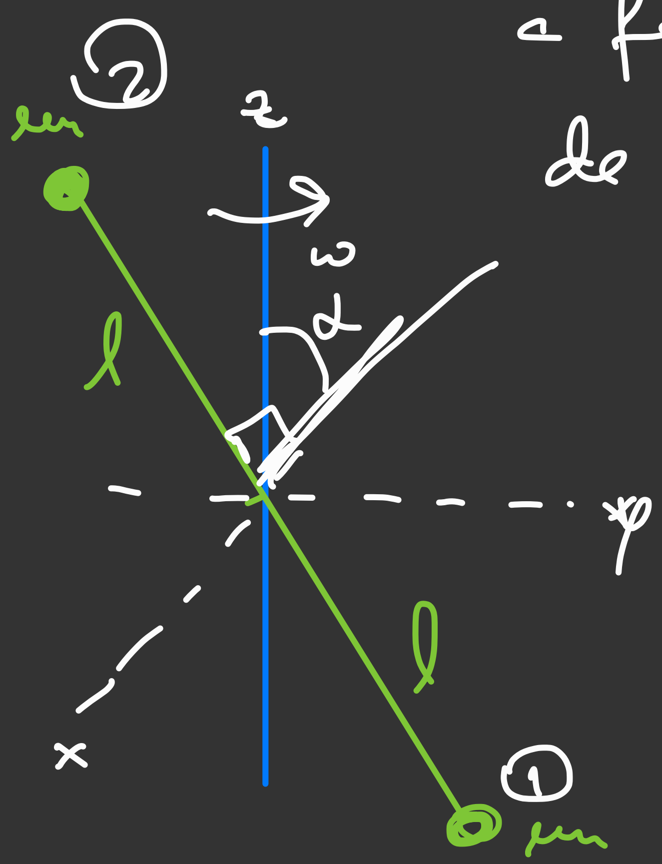
Exemplo: vara (sem massa) com massas m nos extremos

comp. $2l$

$h = l \sin\alpha$

$r = l \cos\alpha$

rodar em torno de $\hat{z}$ com a vara a fazer ∢ relativo α com o eixo de rotação [α é o ângulo entre o $\perp$ à vara e $\hat{z}$]



$t=0$ vara está no plano xz

partícula 1

$x_1 = r \cos\omega t$

$y_1 = r \sin\omega t$

$z_1 = -h$

partícula 2

$x_2 = -r \cos\omega t$

$y_2 = -r \sin\omega t$

$z_2 = h$

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = m(y_1^2 + z_1^2) + m(y_2^2 + z_2^2)$$

$$= 2m(r^2 \sin^2 \omega t + h^2)$$

$$I_{yy} = 2m(r^2 \cos^2 \omega t + h^2)$$

$$I_{zz} = 2m\, r^2$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -m_1 x_1 y_1 - m_2 x_2 y_2$$

$$= -2mr^2 \sin \omega t \cos \omega t$$

$(\ldots)$

$$I = 2m \begin{pmatrix} r^2 \sin^2\omega t + h^2 & -r^2 \sin\omega t \cos\omega t & rh\cos\omega t \\ \cdot & r^2\cos^2\omega t + h^2 & rh\sin\omega t \\ \cdot & \cdot & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$L_x = I_{xx}\overset{=0}{\cancel{\omega_x}} + I_{xy}\overset{=0}{\cancel{\omega_y}} + I_{xz}\omega_z$$

$$= 2mrh\omega\cos\omega t$$

$$L_y = 2mrh\omega\sin\omega t$$

$$L_z = 2mr^2\omega = \text{const}$$

$\underline{L}$ not parallel to $\underline{\omega}$

Binário (momento de força)

$$\underline{\tau} = \frac{d\underline{L}}{dt} =$$

$$\tau_x = -2mahw^2 \sin wt$$

$$\tau_y = 2mahw^2 \cos wt$$

$$\tau_z = 0$$