

COMPORTAMENTO UNIVERSAL

DE SISTEMAS NÃO - LINEARES

Dinâmica determinista - dada

as condições iniciais, a órbita futura do sistema é univocamente determinada

A sensibilidade às condições iniciais conduz ao caos. Um pequeno erro nas cond. iniciais \rightarrow incapacidade prática de prever a órbita

ex: 2 rolhos no mar colocados a distância de 1mm, podem estar distorçados a mais de 10m ao fim de 1 hora.

Laplace, 1776

"The present state of the system of nature is evidently a consequence of what it was in the preceding moment, and if we conceive of an intelligence which at a given instant comprehends all the relations of the entities of this universe, it could state the respective positions, motions, and general affects of all these entities at any time in the past or future.

"Physical astronomy, the branch of knowledge which does the greatest honor to the human mind, gives us an idea, albeit imperfect, of what such an intelligence would be. The simplicity of the law by which the celestial bodies move, and the relations of their masses and distances, permit analysis to follow their motions up to a certain point; and in order to determine the state of the system of these great bodies in past or future centuries, it suffices for the mathematician that their position and their velocity be given by observation for any moment in time. Man owes that advantage to the power of the instrument he employs, and to the small number of relations that it embraces in its calculations. But ignorance of the different causes involved in the production of events, as well as their complexity, taken together with the imperfection of analysis, prevents our reaching the same certainty about the vast majority of phenomena. Thus there are things that are uncertain for us, things more or less probable, and we seek to compensate for the impossibility of knowing them by determining their different degrees of likelihood. So it is that we owe to the weakness of the human mind one of the most delicate and ingenious of mathematical theories, the science of chance or probability."

Poincaré, 1903

"A very small cause which escapes our notice determines a considerable effect that we cannot fail to see, and then we say that the effect is due to chance. If we knew exactly the laws of nature and the situation of the universe at the initial moment, we could predict exactly the situation of that same universe at a succeeding moment. But even if it were the case that the natural laws had no longer any secret for us, we could still only know the initial situation *approximately*. If that enabled us to predict the succeeding situation with *the same approximation*, that is all we require, and we should say that the phenomenon had been predicted, that it is governed by laws. But it is not always so; it may happen that small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. Prediction becomes impossible, and we have the fortuitous phenomenon."

EXPERIÊNCIA DE LISCHKE E MAURER (1980)

→ parâmetro de controle : n° de Rayleigh $\propto \Delta t$
descreve a estabilidade do fluxo de calor em
camadas de convecção

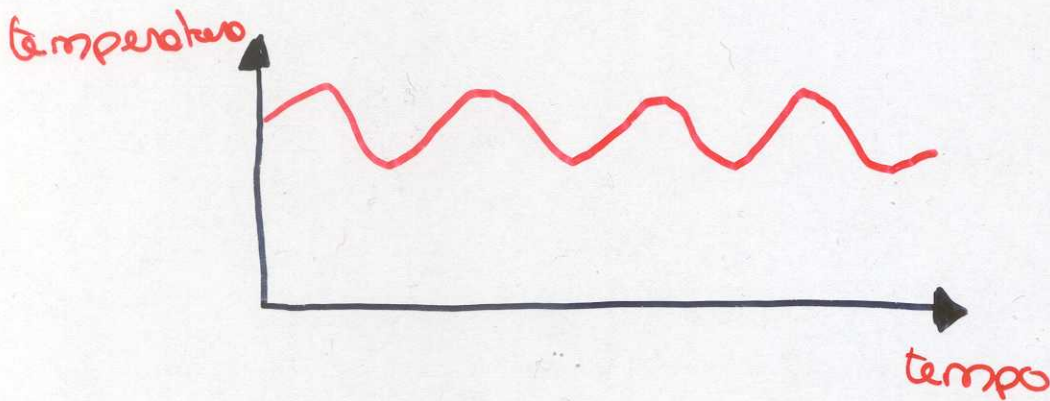
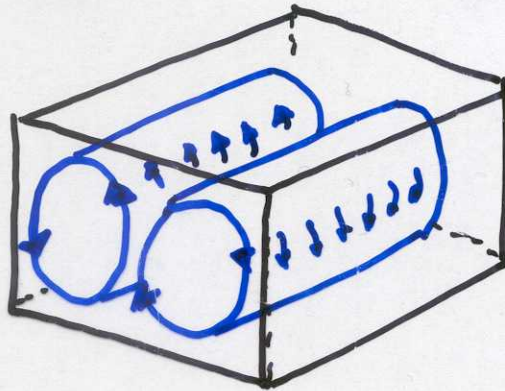
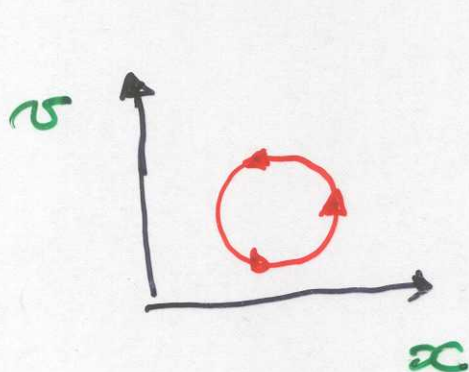
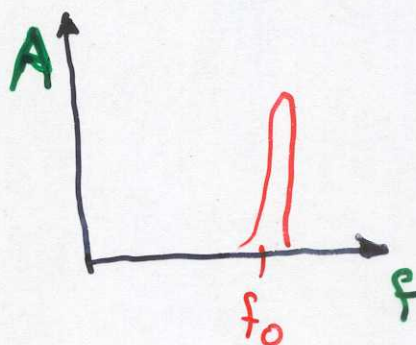


Diagrama no
espaço de fases

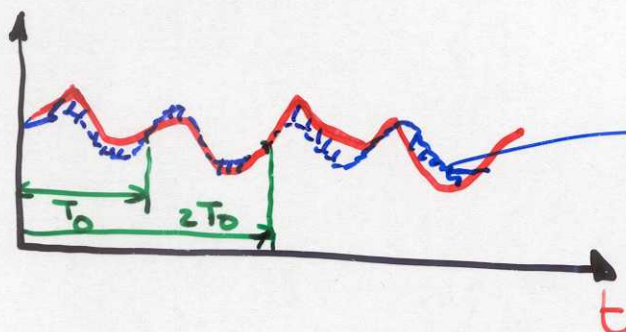


Espectro de potência

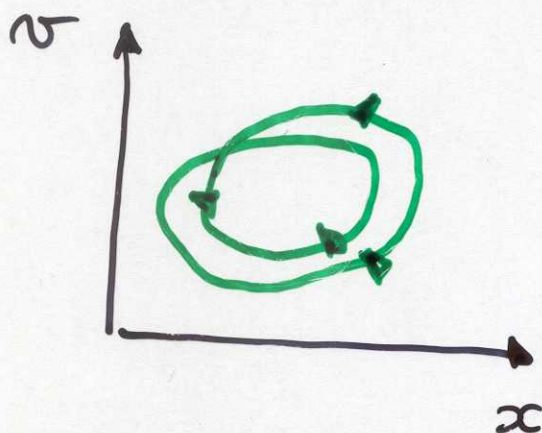


temperatura aumenta ↑

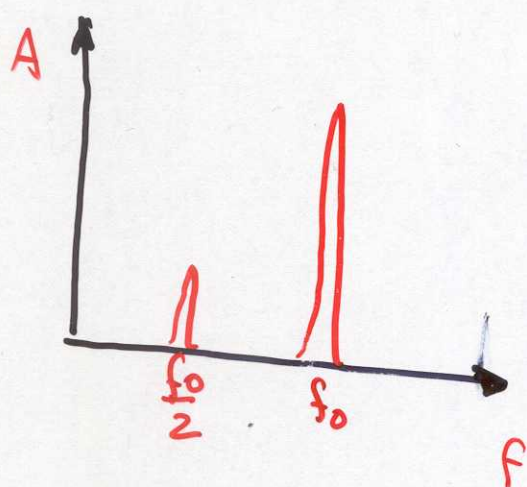
temp.



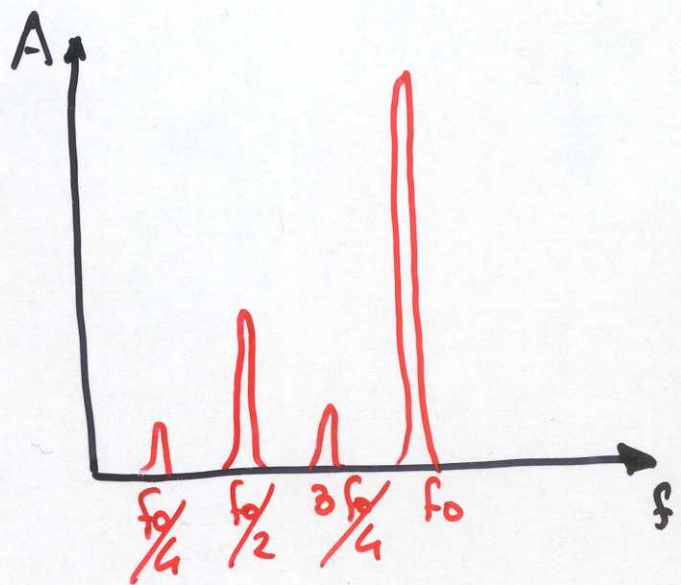
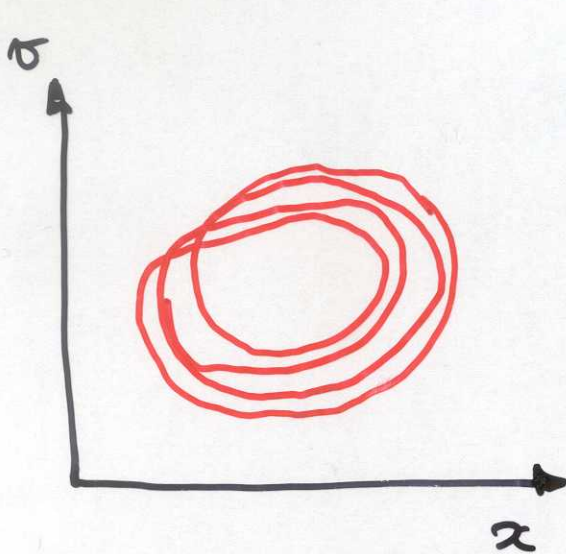
diferença entre a
sinusoide inicial
e a nova instabilidade



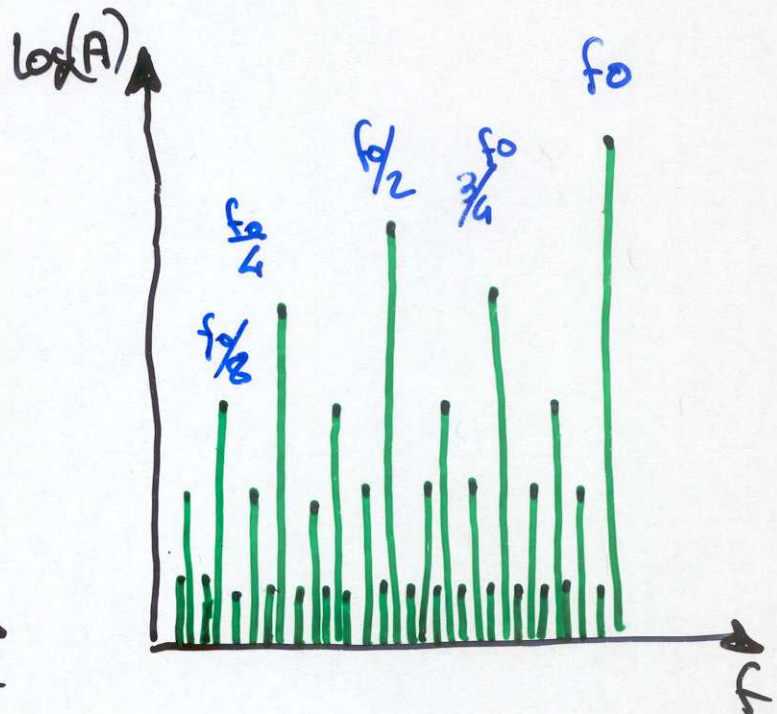
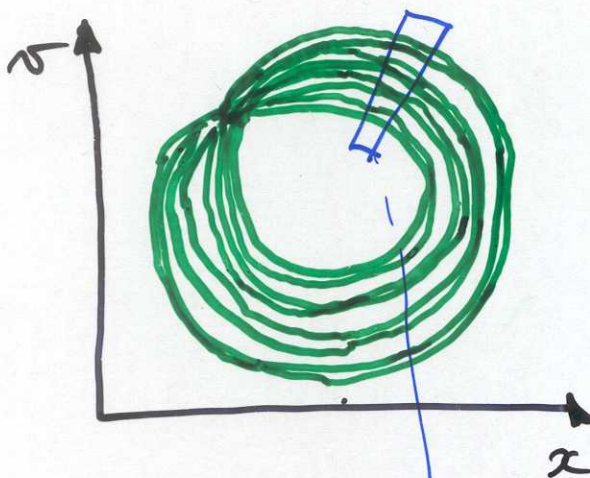
Período 2



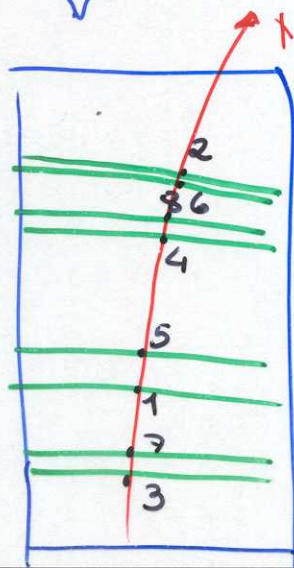
Período 4



Período 8



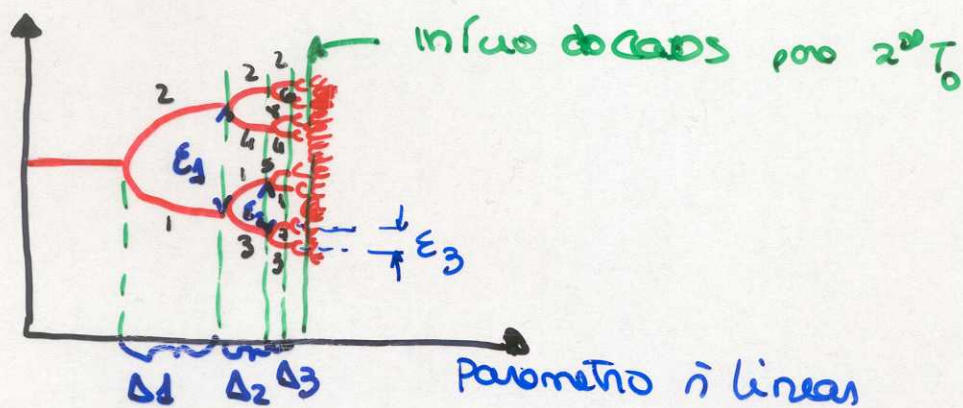
→ redução do tamanho do espaço de fase



Mapa de Poincaré

(são os pontos de interseção de trajetórias do espaço de fase com uma superfície)

Diagrama de Bifurcação



As trajetórias no espaço de fase estão localizadas →
 ⇒ expansão finita do diagrama de bifurcação

Descoberta de Feigenbaum:

● Parâmetro de convergência é Universal (independente do sistema físico em causa)

$$\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} \rightarrow \delta = 4.6692 \dots$$

● A escala relativa de sucessivos ramos de bifurcação é Universal

$$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_{i+1}} \rightarrow \alpha = 2.5029 \dots$$

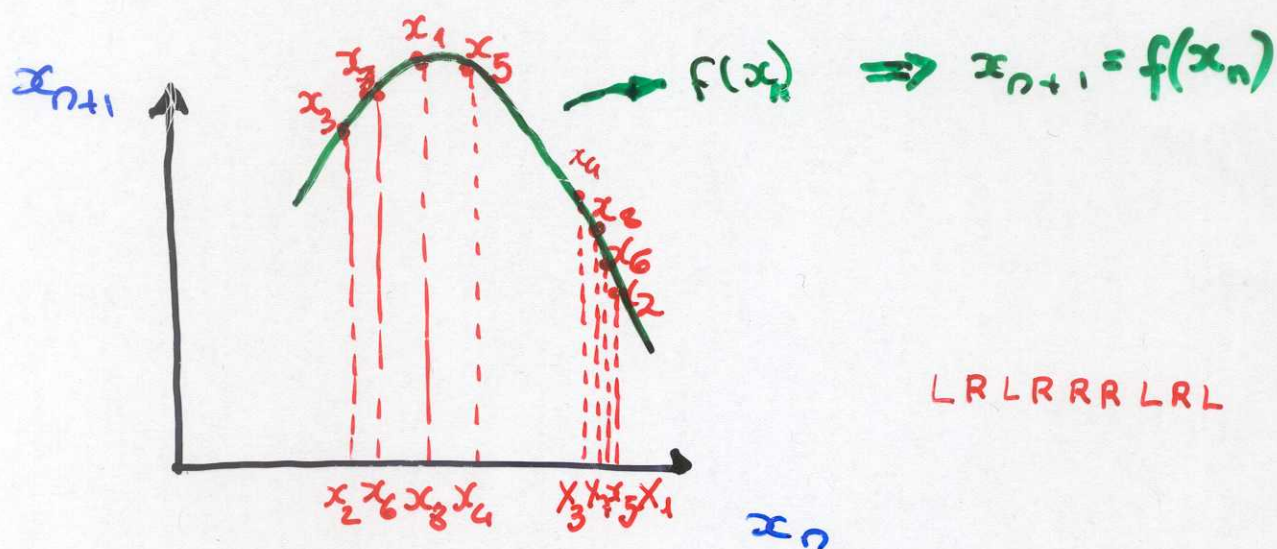
conclusão:

No caminho para o caos (obtido através de sucessivos bifurcações) há 2 quantidades universais: δ , α

Mapas de Poincaré

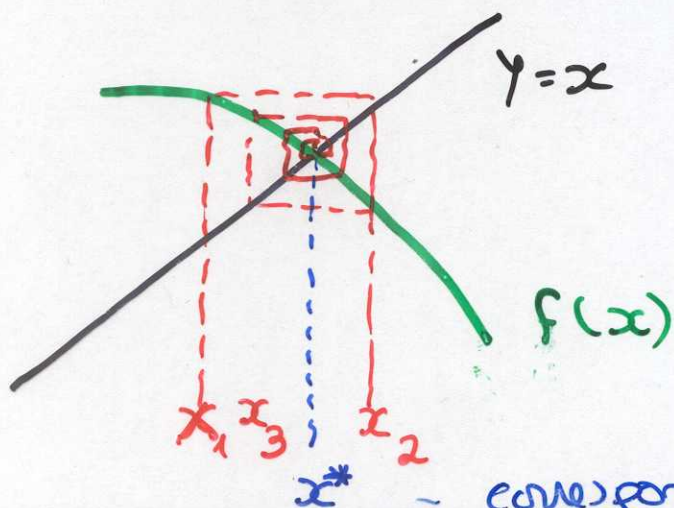
Um maneira de descrever a localização do espaço de fases é pela representação gráfica da $n+1$ interseção (do trajectório γ e superfície de Poincaré) em função do interseção precedente, para um dado valor do parâmetro \bar{n} linear

Exemplo do período 8



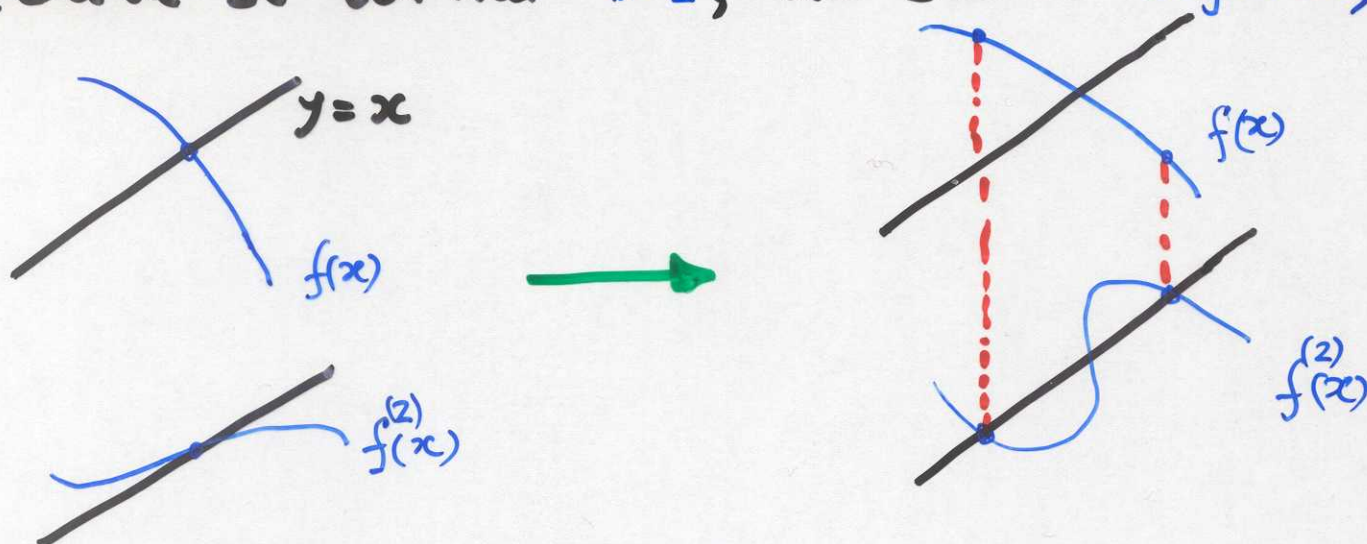
LRLRRRLRL

$f(x)$ - dá a localização do trajectório no instante $t + \bar{T}_0$ a partir da localização no instante t e a convergência até ao ciclo limite ($x^* = f(x^*)$).



corresponde a um pb fixo

A medida que aumentamos o parâmetro não linear, $f(x)$ torna-se cada vez mais inclinada no ponto fixo. Então, $f(f(x))$ também. Quando o valor do seu declive se tornar > 1 , dá-se a bifurcação.

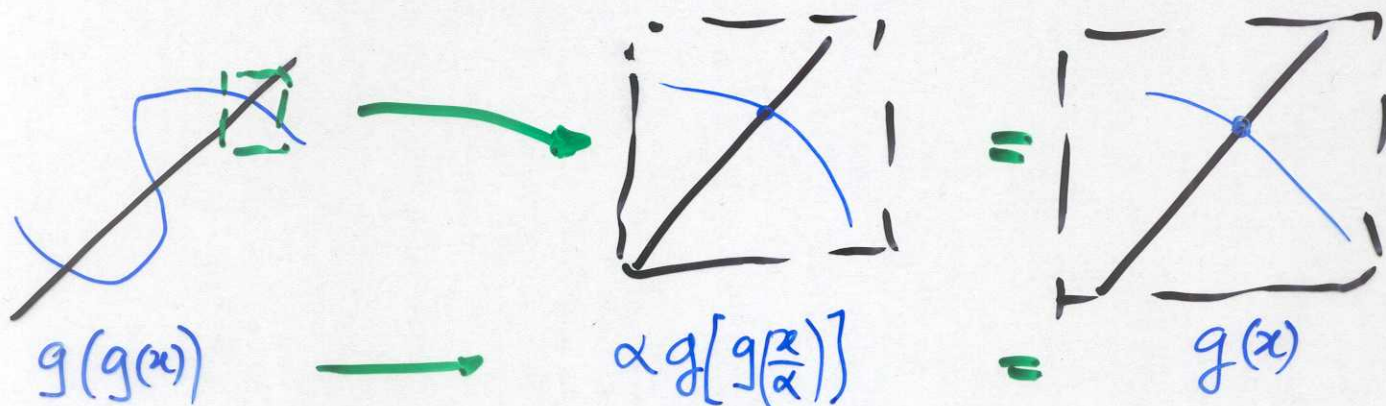


As duplicações de período $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \dots$ não dependem da forma exacta de $f(x)$. O fenómeno é, assim, universal.

A vizinhança de pontos fixos sucessivos é idêntica após iteração e transformação de escala: chegamos a uma função universal $g(x)$, que "perdeu a memória" da forma de $f(x)$:

Iterando 2 vezes e fazendo "zoom":

$$T f(x) = -\alpha f(f(-x/\alpha)) \rightarrow g(x) = -\alpha g(g(-x/\alpha))$$



Dinâmica no Intervalo

considerando uma iteração funcional, i.e. composição sucessiva de função consigo própria

$$\text{ex: } f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

sendo x_0 o pt de partida da órbita:

$$= \{ x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots \}$$

$$\hookrightarrow x_1 = f(x_0) \quad x_2 = f(x_1) \quad \dots \quad x_m = f(x_{m-1}) \quad \dots$$

\Rightarrow a função f é não-linear, a órbita será complexa e não existe regra de recorrência.

$$\text{ex: } f(x) = a - x^2$$

numa função linear: $f(x) = ax$

a solução de recorrência é $x_{n+1} = ax_n$

e se $|a| < 1$ então $x_n \rightarrow 0$ qd $n \rightarrow \infty$

considerando a função

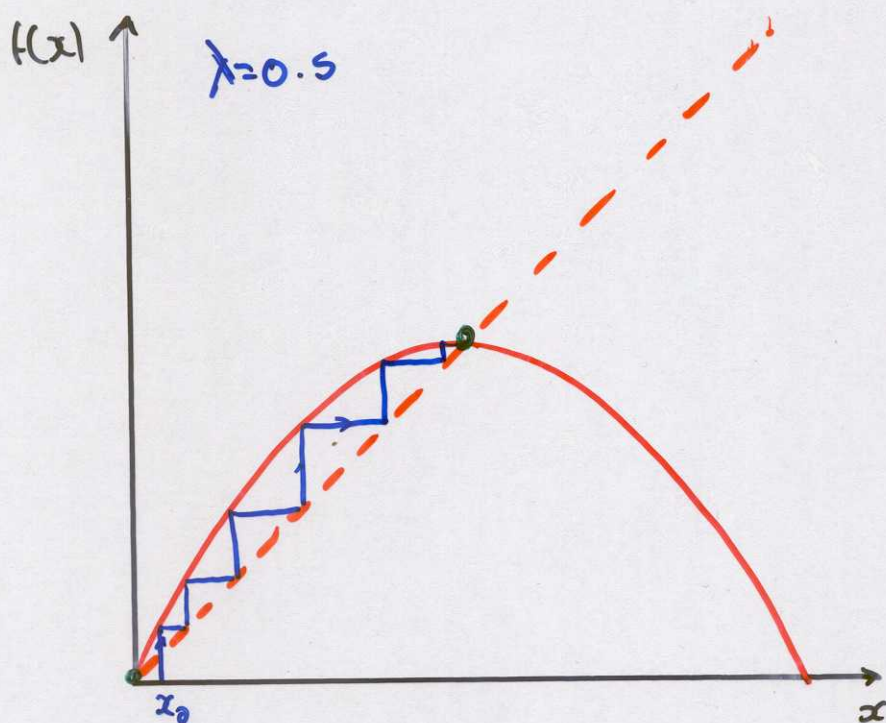
$$f(x) = a \lambda x (1-x)$$

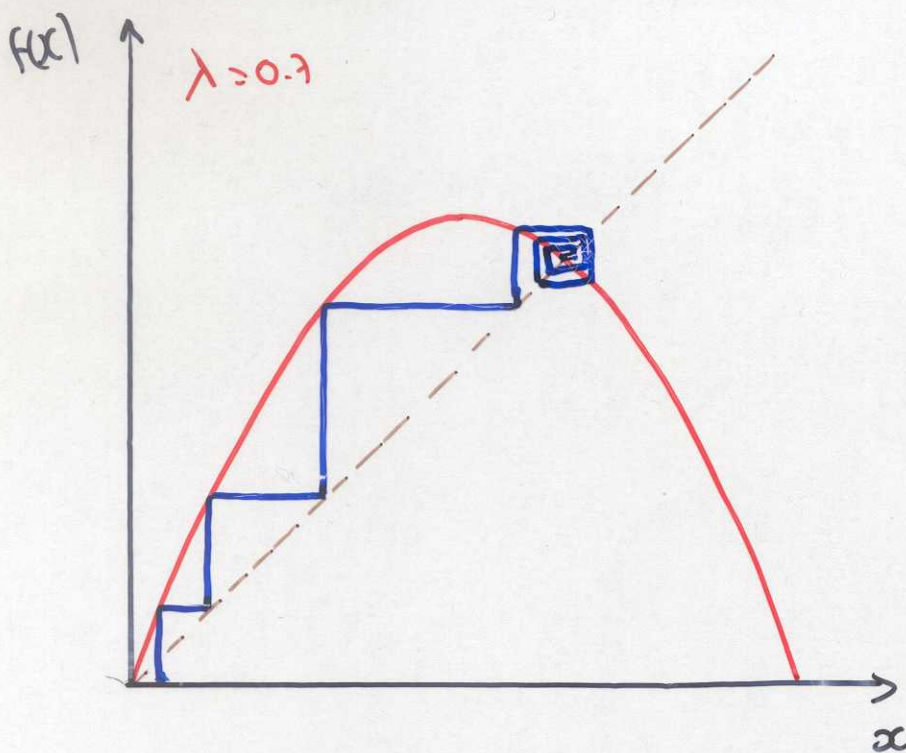
há pontos x_0 para os quais a iteração
seguinte é sempre x_0 — pontos fixos
e o comportamento é estóico ou de
período 1

$$\rightarrow x_0 = a \lambda x_0 (1-x_0)$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 - \frac{1}{a\lambda} \end{cases}$$

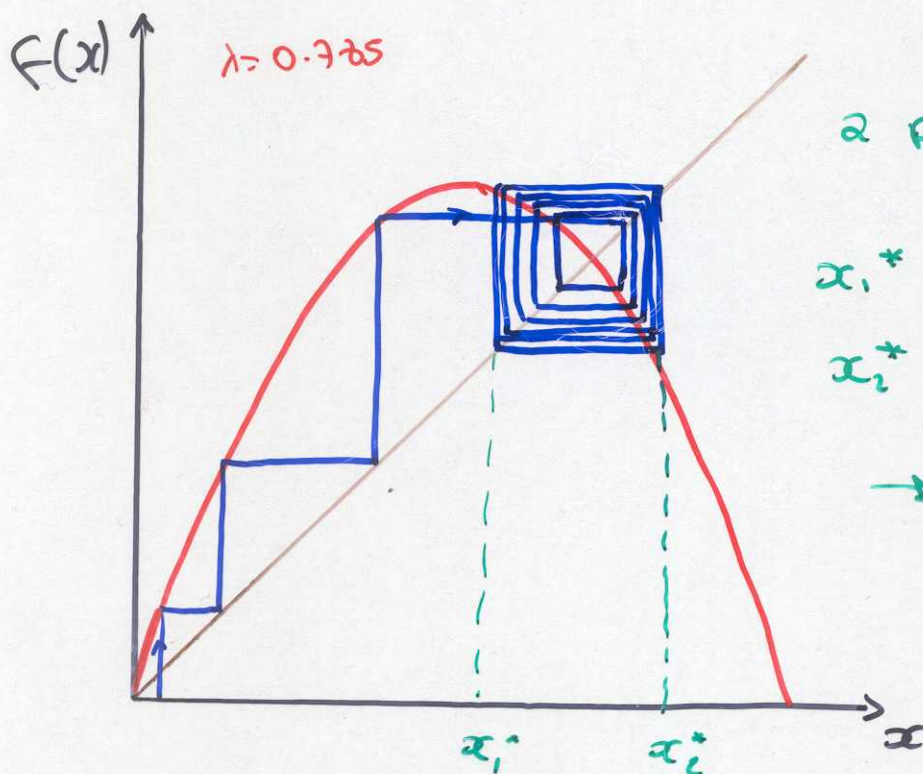
se x_0 não é um ponto fixo:





porto fixo
estável

sempre que existe órbita periódica
estável, quase todos os pontos do intervalo
tendem para ela quando $n \rightarrow \infty$



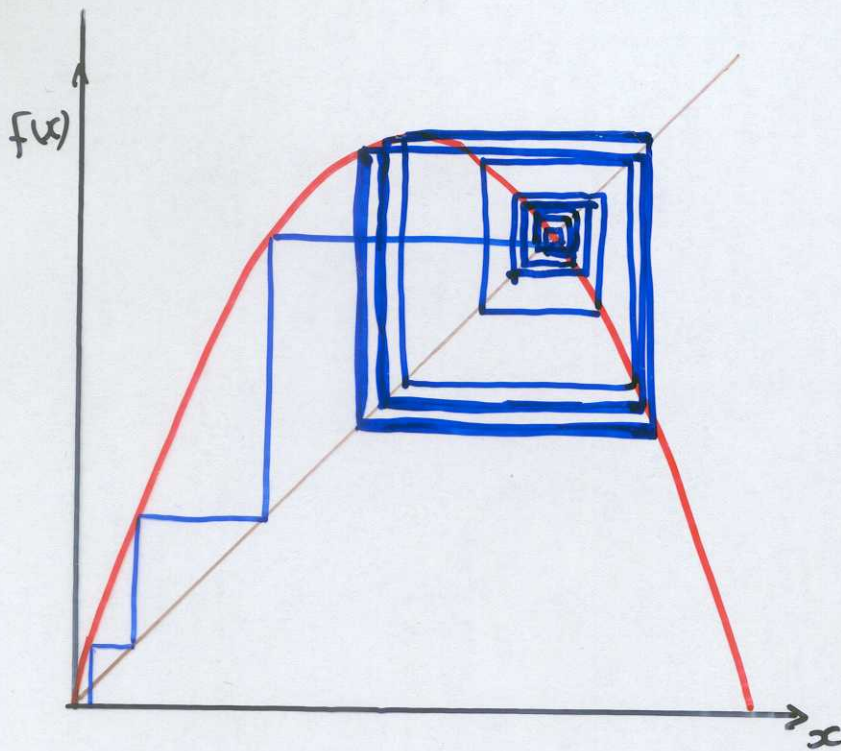
2 pts "fixos"

$$x_1^* = f(x_2^*)$$

$$x_2^* = f(x_1^*)$$

→ período 2

aumentando λ , têm-se sucessivas duplicações de período:



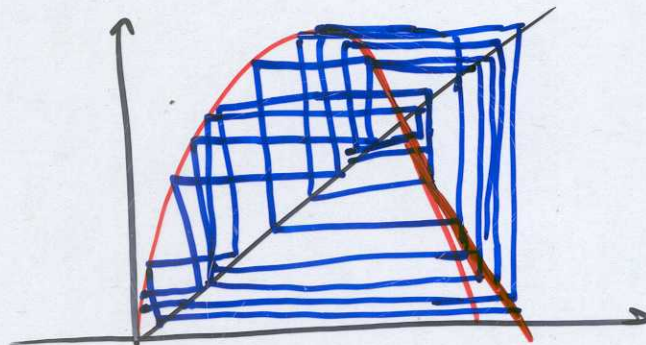
período 4

Se não existir órbita periódica ou ponto fixo estável \rightarrow regimes aperiódicos

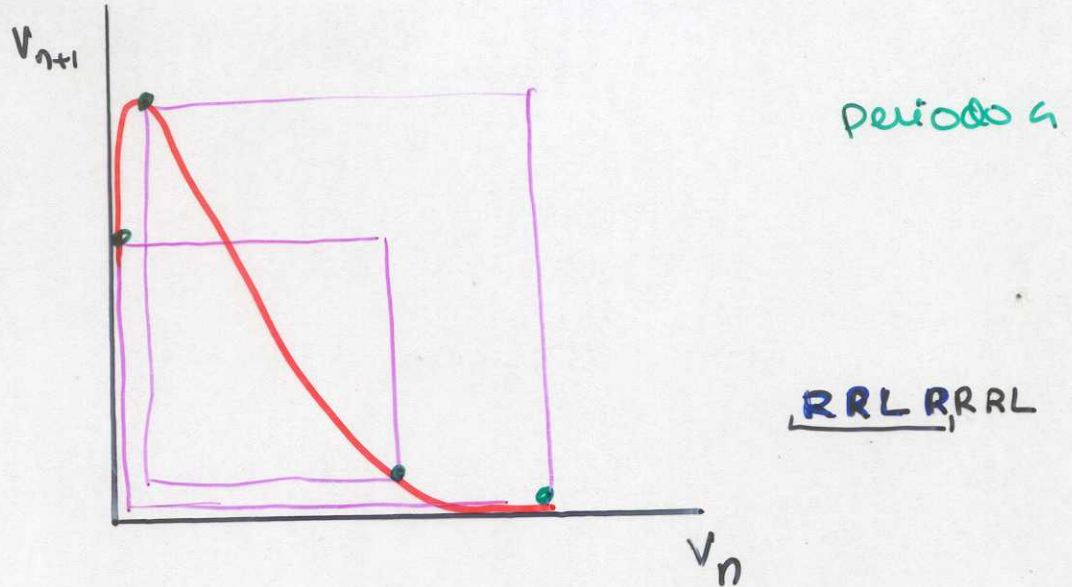
e sensibilidade às condições iniciais

Estes regimes aperiódicos são ergódicos.

A órbita de um ponto percorre densamente todo o intervalo quando $n \rightarrow \infty$ sem tender por nenhuma órbita estável



Representando a função v_{n+1} em função de v_n obtemos a aplicação do intervalo



Esta função apresenta um plo crítico e o padrão RRLR define o itinerário do ponto x por uma aplicação do intervalo

$$\begin{aligned} R &: f^n(x) > c \\ L &: f^n(x) < c \\ C &: f^n(x) = c \end{aligned}$$

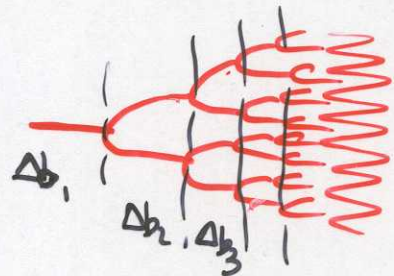
DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

Bifurcação é a modificação qualitativa do comportamento quando um parâmetro de controle é modificado

ex: variação do offset b

A partir do curva de tensão constrói-se o diagrama de bifurcação

$$\frac{\Delta b_1}{\Delta b_2}, \frac{\Delta b_2}{\Delta b_3}, \frac{\Delta b_3}{\Delta b_4} \rightarrow \delta$$



qualquer que seja a função do intervalo

→ janelas periódicas de período 5, ou 3, 6...

Mitchell Feigenbaum

A partir de estudos de turbulência descobriu um carácter universal em um grande conjunto de sistemas não-lineares na sua passagem do periódico ao caótico.

$$\delta = 4.6692016 \dots$$

Em todos os sistemas em que há duplicação do período em função dum dado parâmetro Λ

sendo $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots, \Lambda_n, \Lambda_{n+1}, \dots$

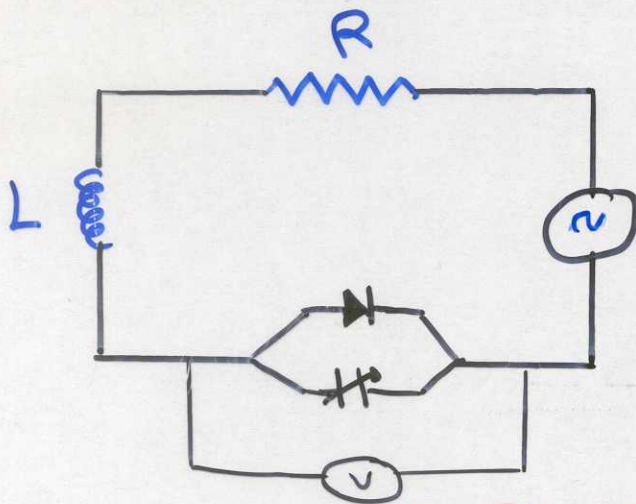
a sequência dos valores desse parâmetro por uma nova duplicação do período tem-se que

$$\delta_n = \frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}}$$

$$\delta_n \rightarrow 4.6692016 \quad \text{se } n \rightarrow \infty$$

é que seja o sistema!

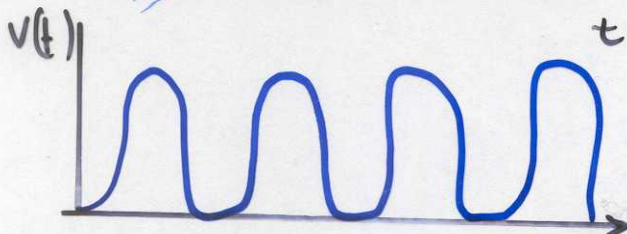
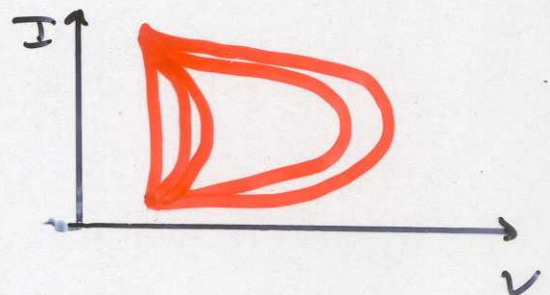
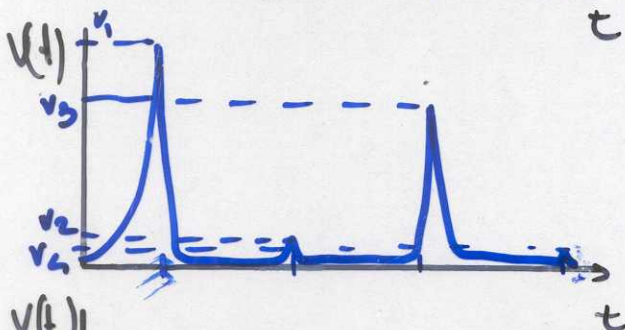
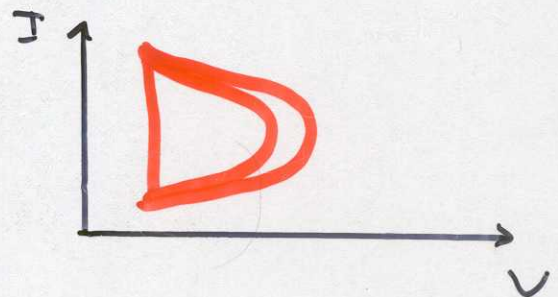
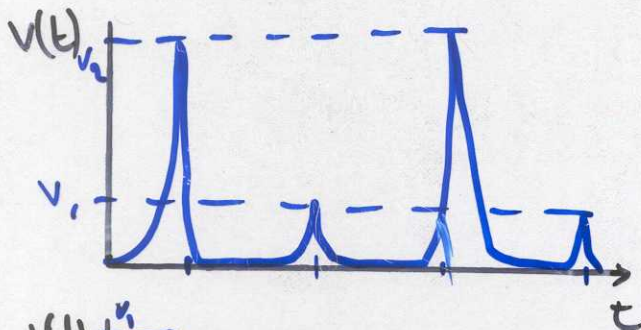
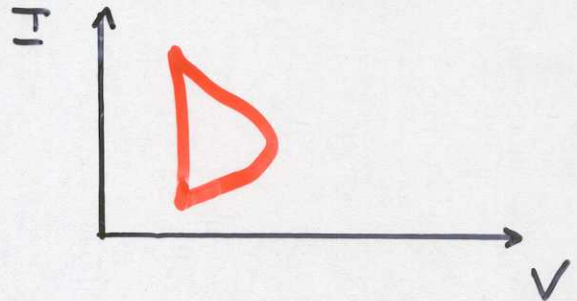
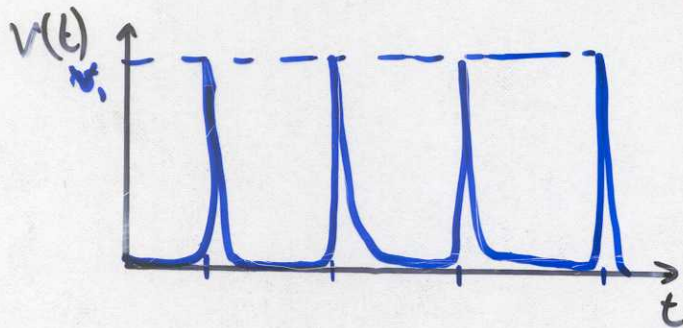
CIRCUITO RLC NÃO - LINEAR



Espaço de fase:
3 dimensões (V, I, t)

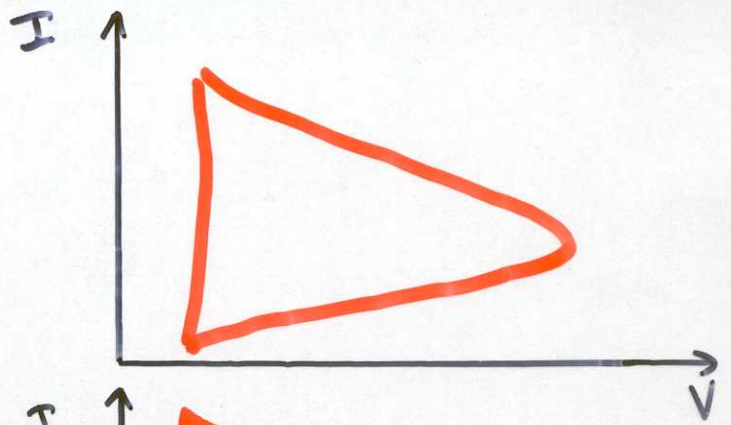
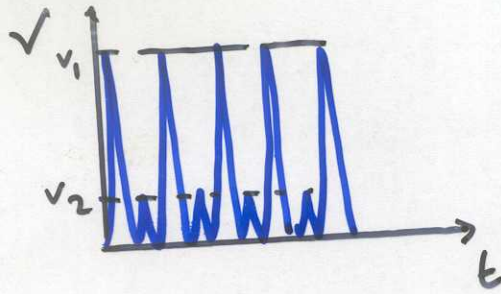
No varicap, a tensão varia com a tensão aplicada:
 $C(V) = \left(\frac{C_0}{1 + V/\phi} \right)^r$

Dinâmica no plano (V, I) para diferentes
valores de tensão de excitação do circuito:

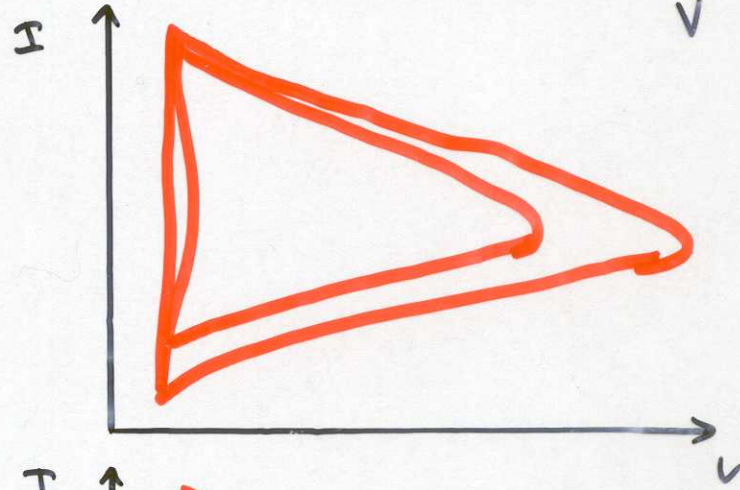
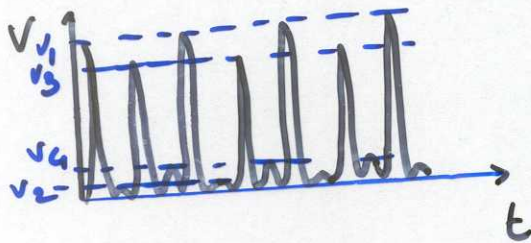


→ tensão de excitação

Período 2

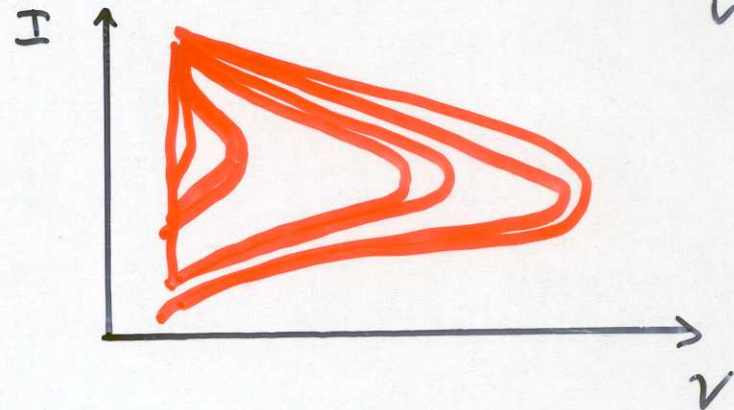
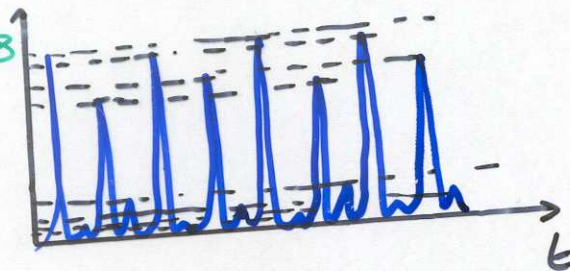


período 4

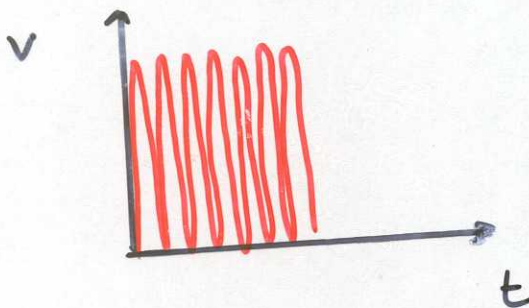


RLRR

período 8



RLRRRLRR



→ tensão de excitação

Há uma sequência de duplicação de período, um regime caótico seguido de uma redução e diminuição de entropia

$$V = b + a \cos \omega t$$

A variável a estudar é a tensão aos terminais do diodo (ou intensidade de corrente que o atravessa) em tempo da frequência ω , do offset b e da amplitude a (para variar a continuamente faz-se um modelar de amplitude do sinal de seno.)

O offset b é controlado por um potenciômetro ou por uma função em dente de serra que se somou ao seno com um amplificador operacional.