Probabilidades e Estatística

LEIC-A, LEIC-T, LEGM, MEEC, MEFT

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

2º semestre – 2012/2013
20/04/2013 – 09:00

Duração: 90 minutos **1º teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I 10 valores

1. O controlo de qualidade de um fabricante de chips electrónicos é feito através de um teste que identifica correctamente os produtos defeituosos em 99% dos casos, mas que também indica como defeituosos 5% dos produtos em boas condições. Admitindo que 1% dos chips fabricados têm defeitos e que o teste aplicado a um chip, escolhido ao acaso da produção, indicou o chip como sendo defeituoso, calcule a probabilidade de esse chip estar em boas condições. (3.0)

Sejam D =“um chip é defeituoso” e T =“o teste identifica um chip como defeituoso”. Tem-se que $P(D) = 0.01$, $P(T|D) = 0.99$ e $P(T|\bar{D}) = 0.05$.
$P(\bar{D}|T) = \frac{P(T|\bar{D})P(\bar{D})}{P(T|D)P(D)+P(T|\bar{D})P(\bar{D})} = \frac{0.05\times(1-0.01)}{0.99\times0.01+0.05\times(1-0.01)} = \frac{5}{6} = 0.8(3)$.

2. Suponha que o número de facturas emitidas diariamente com NIF de um governante mas solicitadas por outras pessoas, é uma variável aleatória, X, com distribuição de Poisson de parâmetro igual a 10.

(a) Sabendo que num dia foram emitidas pelo menos 5 facturas dessas, qual é a probabilidade de o número de facturas desse tipo, nesse dia, não exceder 20? (2.5)

$P(X \le 20|X \ge 5) = \frac{P(5\le X\le 20)}{P(X\ge 5)} = \frac{F_X(20)-F_X(4)}{1-F_X(4)} = \frac{0.9984-0.0293}{1-0.0293} \approx 0.9983$.

(b) Calcule a mediana de X. (1.5)

Pretende-se x tal que $P(X \le x) \ge 0.5$ e $P(X \ge x) \ge 0.5$.
Como $P(X \le 10) = F_X(10) = 0.583$ e $P(X \ge 10) = 1 - F_X(9) = 1 - 0.4579 = 0.5421$ então 10 é uma mediana de X. Deve-se ainda mostrar que $\forall x \neq 10$ alguma das duas condições é violada e assim a mediana é única.

(c) Supondo que a distribuição dos montante das facturas em causa (isto é, não correspondendo a consumos efectuados pelo governante) possui média de 20 euros e desvio padrão de 5 euros, calcule aproximadamente a probabilidade do montante total correspondente a 100 facturas desse tipo ser superior a 1900 euros. Considere que os montantes relativos a facturas diferentes são independentes. (3.0)

Sejam X_i =“montante da i-ésima factura”, $i = 1,\ldots,100$ e $T = \sum_{i=1}^{100} X_i$ =“montante total das 100 facturas”.
Temos que $E[T] = E[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} E[X_i] = 100E[X] = 2000$ e $Var[T] = Var[\sum_{i=1}^{100} X_i] = \sum_{i=1}^{100} Var[X_i] = 100Var[X] = 2500$, uma vez que as variáveis são independentes e identicamente distribuídas. Nestas condições, o teorema do limite central garante que

$$\frac{T-E[T]}{\sqrt{Var[T]}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

$P(T > 1900) = P\left(\frac{T-2000}{50} > \frac{1900-2000}{50}\right) \approx 1 - \Phi(-2) = 0.9772$.

Grupo II 10 valores

1. Na sequência da recente descoberta de indícios de carne de cavalo e/ou de porco em produtos supostos conterem apenas carne de vaca, foi estabelecido o seguinte critério para tentar separar casos de contaminação acidental de casos de fraude: se a percentagem de contaminante for inferior a 1% assume-se de imediato como acidental; se estiver entre 1% e 5% retira-se o produto do mercado e procede-se a mais estudos; e se for superior a 5% levanta-se de imediato um processo-crime ao fabricante. Admita que a percentagem do contaminante nos casos de fraude, X, tem distribuição normal com média 4 e desvio padrão 1.

(a) Qual é a probabilidade de uma contaminação fraudulenta passar de imediato por acidental? (2.0)

$P(X < 1) = F_{N(4,1)}(1) = 0.014.$

(b) Qual é a probabilidade de em 10 casos fraudulentos inspeccionados, escolhidos ao acaso, haver pelo menos dois em que é de imediato instaurado processo-crime? (3.0)

Seja Y =“número de casos fraudulentos, em 10, aos quais é instaurado um processo crime”. Como Y representa o número de sucessos em 10 repetições independentes de uma prova de Bernoulli, então $Y \sim Bi(10, p)$, com $p = P(X > 5) = 1 - F_{N(4,1)}(5) = 1 - 0.8413 = 0.1587$.
$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_{Bi(10,0.1587)}(1) = 1 - 0.5091 = 0.4909.$

2. Durante o período de garantia de um IPAD, o número de avarias na fonte de alimentação (X) e o número de avarias no processador e/ou placa gráfica (Y) têm a seguinte função de probabilidade conjunta:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.90	0.05	0.01
1	0.02	0.01	0.01

(a) Determine a função de distribuição, o valor esperado e a variância da variável aleatória Y condicional a $X = 1$. (2.5)

$$P(Y = y|X = 1) = \frac{P(X=1,Y=y)}{P(X=1)} = \begin{cases} 1/2, & y = 0 \\ 1/4, & y = 1 \text{ou} y = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$
uma vez que $P(X = 1) = \sum_{y=0}^{2} P(X = 1, Y = y) = 0.04$.
$E[Y|X = 1] = \sum_{y=0}^{2} yP(Y = y|X = 1) = 3/4.$
$E[Y^2|X = 1] = \sum_{y=0}^{2} y^2 P(Y = y|X = 1) = 5/4.$
$Var[Y|X = 1] = E[Y^2|X = 1] - E^2[Y|X = 1] = 5/4 - (3/4)^2 = 11/16.$
$$F_{Y|X=1}(y) = P(Y \leq y|X = 1) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1/2, & 0 \leq y < 1 \\ 3/4, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

(b) Calcule a covariância entre X e Y e comente o valor obtido. (2.5)

$E[X] = \sum_{x=0}^{1} xP(X = x) = 1 \times P(X = 1) = 0.04.$
$E[Y] = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{2} yP(X = x, Y = y) = 0.10.$
$E[XY] = \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{2} xyP(X = x, Y = y) = 0.03.$
$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0.03 - 0.04 \times 0.10 = 0.026.$
Como $Cov[X, Y] \neq 0$ pode-se afirmar que X e Y são variáveis aleatórias dependentes e $Cov[X, Y] > 0$ indica que há uma associação linear positiva entre elas.