

# ELETROMAGNETISMO

## MEFT

### 11ª Série de problemas

#### (Eq. Fresnel, Meios dispersivos, velocidade de grupo, propagação guiada)

#### 1) Representação de ondas e.m. e Eqs. de Fresnel [Exerc. 12.5 JL]

Uma onda eletromagnética, plana e monocromática, propaga-se no vácuo e apresenta um campo elétrico dado por

$$\vec{E}(z, t) = 200 \cos(6 \times 10^6 t - kz + \pi/6) \vec{e}_x \text{ (V/m)}$$

com  $t$  expresso em s. Supondo que esta onda incide obliquamente segundo um ângulo  $i$ , na superfície de separação de um meio dielétrico com  $\epsilon_r = 4$  e  $\mu_r = 1$ , determine:

- a expressão do campo magnético da onda incidente;
- as amplitudes dos campos E e B das ondas refletidas e transmitidas para  $i = 45^\circ$  e sendo a normal ao plano de incidência dada por  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$  (note que não há componente de  $\vec{E}$  perpendicular ao plano de incidência).
- repita a alínea anterior para uma incidência normal;
- o ângulo  $i$  para o qual não existe onda refletida (na condição da alínea b));
- nas condições da alínea b), verifique o balanço de energia das três ondas sobre a superfície de separação.

#### 2) Equações de Fresnel [Exerc. 12.7 JL]

Uma onda eletromagnética, plana e monocromática, propaga-se no vácuo e possui um campo elétrico dado por

$$\vec{E}(z, t) = 200 [\cos(6 \times 10^6 t - kz) \vec{e}_x + \sin(6 \times 10^6 t - kz) \vec{e}_y] \text{ (V/m)}$$

Supondo que esta onda incide perpendicularmente sobre a superfície plana de um dielétrico de índice de refração  $n_2 = 1,5$ , determine:

- a energia eletromagnética incidente, por unidade de tempo e por unidade de área;
- as amplitudes dos campos elétrico e magnético da onda transmitida;
- a Refletância e a Transmitância.

#### 3) Dispersão e velocidade de grupo

Um pulsar é uma estrela que emite pulsos de ondas eletromagnéticas com variadas frequências, definidas com muita precisão. Estes pulsos viajam até à Terra diretamente através do meio interstelar, através do qual sofrem dispersão. Observações radiotelescópicas de uma estrela pulsar mostram que o tempo de chegada de um pulso particular com frequência próxima de 400 MHz é 0,7 s depois de outro pulso com frequência próxima de 1400 MHz. O índice de refração do meio interstelar é dado por:

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}}$$

em que  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ , a massa e carga do elétron são, respetivamente, dadas por  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\omega$  é a frequência angular das ondas e  $N = 3 \times 10^4/\text{m}^3$  é a densidade de elétrons no meio, neste caso aproximadamente uniforme entre a Terra e a estrela.

- Calcule a velocidade de grupo  $u$ , em função da frequência angular média do grupo de ondas,  $\omega$ ;  
(sugestão: use a relação de dispersão na forma  $u = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}$ )
- Calcule o tempo que um grupo de ondas leva a chegar, em função da distância D entre a Terra e a estrela e da frequência angular média do grupo de ondas,  $\omega$ .  
(sugestão: comece por comparar  $Ne^2$  com  $\epsilon_0 m \omega^2$  para considerar a aproximação  $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ )

- c) Calcule o intervalo de tempo entre 2 pulsos em função da distância  $D$  entre a Terra e a estrela e das frequências angulares médias dos grupos de ondas,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .
- d) Calcule a distância da Terra à Estrela em anos-luz.

**4) Propagação guiada** [Exerc.11.6C JL]

Considere a propagação de uma onda eletromagnética segundo o eixo dos  $ZZ$ , com o campo elétrico polarizado linearmente segundo o eixo dos  $XX$ , entre duas placas condutoras infinitas, localizadas no vácuo em  $y=0$  e  $y=d$ .

- a) Usando a relação de continuidade da componente tangencial do campo elétrico, determine a dependência da amplitude do campo segundo  $y$ .
- b) Determine a expressão do vetor de onda  $\vec{k}$ .

**5) Onda eletromagnética esférica** [Probl. 9.35 DG]

Suponha uma onda eletromagnética monocromática com a seguinte expressão para o campo elétrico, que se propaga no vácuo (esta é a expressão mais simples para uma onda eletromagnética esférica):

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi, t) = A \frac{\sin \theta}{r} \left[ \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \vec{e}_\varphi$$

- a) Mostre que o campo elétrico obedece às equações de Maxwell e determine o campo magnético correspondente (com  $c = \frac{\omega}{k}$ ; nos cálculos, use  $z = kr - \omega t$ );
- b) Calcule o vetor de Poynting e estime a intensidade da onda. O vetor de Poynting aponta na direção esperada? Como varia  $I$  com  $r$ ?
- c) Integre  $I \cdot dS$  numa superfície esférica para calcular a potência total radiada.

**6) Múltiplas superfícies de separação** [Probl. 9.36 DG]

Luz de frequência angular  $\omega$  passa de um meio 1, através de uma placa de espessura  $d$  e índice de refração  $n_2$ , para um meio 3. Mostre que a Transmitância total para incidência normal é dada por

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{4n_1n_3} \left[ (n_1 + n_3)^2 + \frac{(n_1^2 - n_2^2)(n_3^2 - n_2^2)}{n_2^2} \sin^2 \left( \frac{n_2 \omega d}{c} \right) \right]$$

**7) Múltiplas superfícies de separação** [Probl. 9.38 DG]

Luz de um aquário passa da água (índice de refração  $4/3$ ) para o ar, através de um vidro de índice de refração  $n = 1,5$ . Assumindo que se trata de incidência normal, calcule a transmitância mínima e máxima (para a luz visível, usando a equação do problema anterior). Consegue ver o peixe claramente, mas quão bem consegue o peixe vê-lo a si?