Oscilações e Ondas

19 Nov

N osciladores acoplados

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = -K X$$

$$\Longrightarrow X(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[b_\alpha A^\alpha \cos(\omega_\alpha t) + c_\alpha A^\alpha \sin(\omega_\alpha t) \right]$$

A^α são os modos normais [vectores próprios de $-M^{-1}K$]

b_α e c_α são coeficientes a determinar a partir das cond. iniciais

Condições iniciais

$$x(t) = \sum_{\alpha=1}^{N} \left[b_\alpha A^\alpha \cos(\omega_\alpha t) + c_\alpha A^\alpha \sin(\omega_\alpha t) \right]$$

$$x(0) = \sum_\alpha b_\alpha A^\alpha$$

posições (relativas ao equilíbrio) em $t=0$

$$\dot{x}(0) \equiv \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_\alpha c_\alpha \omega_\alpha A^\alpha$$

velocidades em $t=0$

Relação entre coordenadas normais e condições iniciais.

A nossa primeira forma de resolver o problema dos 2 pêndulos foi encontrando combinações lineares de coordenadas que oscilam com uma frequência única

sol. geral: $x(t) = bA^1\cos(\omega_1 t - \theta_1) + cA^2\cos(\omega_2 t - \theta_2)$

$$x(t) = b A^1 \cos(\omega_1 t - \theta_1) + c A^2 \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

modos normais:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2 soluções

$$x_1(t) = b \cos(\omega_1 t - \theta_1) + c \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

$$x_2(t) = b \cos(\omega_1 t - \theta_1) - c \cos(\omega_2 t - \theta_2)$$

→ de onde

coordenadas normais

$$\begin{cases} X^1(t) \equiv x_1(t) + x_2(t) = 2b \cos(\omega_1 t - \theta_1) \\ X^2(t) \equiv x_1(t) - x_2(t) = 2c \cos(\omega_2 t - \theta_2) \end{cases}$$

Isto permite estabelecer a ligação às coord. iniciais de uma forma bastante simples.

Construir, a partir de cada modo normal A^α (freq ω_α), um vector linha

$$B^\alpha = A^{\alpha T} \Pi$$

é vector próprio "esquerdo" de $\Pi^{-1} K$

$$\boxed{B^\alpha \Pi^{-1} K = \omega_\alpha^2 B^\alpha}$$

compara com

$$\Pi^{-1} K A^\alpha = \omega_\alpha^2 A^\alpha$$

$$B^\alpha \Pi^{-1} K = \omega_\alpha^2 B^\alpha$$

$$\hookrightarrow \quad X^\alpha = B^\alpha \cdot X = \sum_j b^\alpha_j x_j$$

↓

comb. lineal de coordenadas

↓

coord. normal (oscila con freq. única ω_α)

$$\frac{d^2 X^\alpha}{dt^2} = B^\alpha \frac{d^2 X}{dt^2} = -B^\alpha \Pi^{-1} K X = -B^\alpha \omega_\alpha^2 X$$

$$= -\omega_\alpha^2 X^\alpha \quad ✓$$

Os vectores β^{α}, a partir dos quais se constroem as coord. normais, têm a mesma informação que os modos normais

ajuda a fixar b_α e c_α a partir das cond. iniciais

$X^\beta = B^\beta X \longrightarrow$ coordenada normal que oscile com freq. ω_β

$$B^\beta X(t) \propto e^{\pm i\omega_\beta t}$$

na solução geral (soma sobre modos normais)

$$X(t) = \sum_\alpha b_\alpha A^\alpha \cos(\omega_\alpha t) + c_\alpha A^\alpha \sin(\omega_\alpha t)$$

só os termos com $\alpha=\beta$ é que oscilam c/ freq. ω_β.

Logo $B^\beta A^\alpha = A^{\beta T}\Pi A^\alpha = 0$, $\beta \neq \alpha$

(nem vale sobre modos degenerados)

logo

$$X(0) = \sum_{\alpha} b_\alpha A^\alpha$$

$$\longrightarrow B^\beta X(0) = \sum_{\alpha} b_\alpha B^\beta A^\alpha$$

$$= b_\beta B^\beta A^\beta$$

$$\Longrightarrow \boxed{b_\alpha = \frac{B^\alpha X(0)}{B^\alpha A^\alpha}}$$

coeficientes a partir dos modos normais e $X(0)$

Fazendo também para as velocidades

$$\dot{x}(0) = \sum_\alpha \omega_\alpha c_\alpha A^\alpha$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega_\alpha c_\alpha = \frac{1}{B^\alpha A^\alpha}\,\dot{x}(0)}$$

[relacionam cond. iniciais no sist. coord. normais — em que tudo é diagonal!]

Oscilações forçadas (e ressonância) em sistemas acoplados

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \Gamma \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2\, x(t) = F(t)/m$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}X(t) + \underset{\text{matriz}}{\Gamma} \frac{d}{dt}X(t) + \underbrace{M^{-1}K}_{\text{matriz}} = M^{-1}\underbrace{\overset{\text{vetor}}{F}(t)}_{\text{todas as comp. c/ mesma freq.}}$$

[fica como problema...]