Mecânica Analítica

2020-2021

Série 2

Responsável: Hugo Terças

O objectivo desta série de exercícios consiste numa primeira exposição ao cálculo variacional e às suas aplicações a problemas clássicos na matemática e na física.

$\star\star$ **Problema 1. Princípio da acção mínima.** Considere a quantidade $I[y(x)]$ que é dada como um funcional de uma função $y(x)$,

$$I[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]dx.$$

a) Mostre que a condição de estacionariedade, i.e. $\delta I = 0$, com extremos fixos $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ implica

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Apliquemos a condição de estacionariedade para o funcional , $\delta I = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \delta F dx = 0$. Usando a definição de derivada variacional, temos

$$\int_a^b \delta F dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right) dx,$$

onde $y' = dy/dx$. Integrando por partes o segundo termo, temos

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\cancel{\delta y}\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx,$$

onde usámos o facto das variações cancelarem nos extremos, $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Daqui obtemos

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx = 0.$$

Como δy é uma variação infinitesimal <u>arbitrária</u>, a única forma do integral se anular é impondo que o termo entre parêntesis seja nulo, conduzindo à equação de Euler-Lagrange.

b) Mostre que as equações de Euler-Lagrange são invariantes para a adição de derivadas totais,

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{dF}{dT},$$

se $F = F(q_i, t)$.

$\delta S' = 0 \Leftrightarrow \delta \left(\int_a^b L(q_i, \dot{q}_i t) + \frac{dF}{dt} \right) dt = 0 \Leftrightarrow \delta S + \delta[F(b) - F(a)] = 0$. Como $F(a) \equiv F[q_i(a), a]$ e $F(b) \equiv F[q_i(b), b]$ são constantes, fica demonstrado o resultado pretendido.

c) Seja $f_\alpha = f_\alpha(q_i, \dot{q}_i; t) = 0$ uma ligação semi-holónoma. Mostre que a condição de extermos condicionados com multiplicadores de Lagrange λ_α implica

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^\lambda.$$

Determine a forma das forças generalizadas de constrangimento Q_j^λ.

Ligações semi-holónomas, $f_\alpha = f_\alpha(q_i, \dot{q}_i; t) = 0$. O que agora temos em mãos é um problema de extremos condicionados, onde as restrições são dados pelos f_α. Suponhamos que temos $n + m$ coordenadas generalizadas, das quais $i = \{1, ...n\}$ são independentes e as restantes $j = \{n + 1, ...m\}$ são dadas pelas ligações (portanto, $\alpha = \{1, ...m\}$). Temos de juntar λ_α multiplicadores indeterminados para extremar a acção $S = \int_{t_a}^{t_b} \left[L(q_i, \dot{q}_i; t) + \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha \right] dt$. Fazendo $\delta S = 0$, agora temos

$$\int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i dt + \int_{t_a}^{t_b} \sum_\alpha \delta(\lambda_\alpha f_\alpha) dt = 0.$$

Calculemos a variação (derivada variacional) do último termo. Admitindo que $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(t)$, podemos escrever

$$\delta(\lambda_\alpha f_\alpha) = \frac{\partial}{\partial q_j}(\lambda_\alpha f_\alpha)\delta q_j + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\lambda_\alpha f_\alpha)\delta \dot{q}_j.$$

Integrando, temos

$$\int_{t_a}^{t_b} \delta(\lambda_\alpha f_\alpha) dt = \int_{t_a}^{t_b} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j dt + \left[\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \cancel{\delta q_j} \right]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt}\left(\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

Juntando tudo, temos

$$\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i + \sum_\alpha \left[\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j \right\} dt = 0.$$

Juntando os índices i e j num único índice $k = \{1, ...n + m\}$, podemos escrever

$$\int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_\alpha \left[\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \right\} \delta q_k dt = 0.$$

Fazendo uso do mesmo argumento do ponto anterior, concluímos que a condição de extremo condicionado da acção implica

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \sum_\alpha \left[\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \dot{q}_k}\right)\right] = 0,$$

onde o último termo é a força generalizada de constrangimento, Q_k^λ. Como os índices são mudos, podemos fazer a troca $k \to i$ para escrever como está no enunciado.

$\star$ **Problema 2. Geodésica no plano.** Usando cálculo variacional, determine a geodésica (curva que minimiza a distância entre dois pontos) no plano.

Definimos $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$. O funcional de distância total é escrita à custa de uma integração $s[y(x), y'(x)] = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\ dx$. Usando a Eq. de Euler-Lagrange para a função integranda,

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = c.$$

Deste último passo resulta

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = c,$$

o que após uma integração simples resulta em $y(x) = mx + b$, onde $m = c/\sqrt{1 - c^2}$ e b são constantes arbitrárias (importa pelas condições iniciais).

$\star\star$ **Problema 3. Lei de Snell.** Considere um raio de luz a propagar-se no plano (x, y), atravessando uma descontinuidade localizada na recta $y = 0$, dividindo dois meios onde as velocidades de propagação são diferentes, v_1 e v_2, mas constantes.

a) Determine a trajectória que minimiza o *tempo* de deslocamento entre um ponto A localizado no meio 1 ($y < 0$) e um ponto B localizado no meio 2 ($y > 0$). Qual é a lei física que se obtém?

Por definição, o infinitésimo de tempo escreve-se, para cada um dos meios separadamente, na forma $dt = ds/v = v^{-1}\sqrt{1 + y'(x)^2}dx$. Assim, o funcional de tempo é

$$T[y'(x)] = \int_a^b \frac{ds}{v} = \int_a^b \underbrace{\frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{v}}_{F[y'(x)]} dx,$$

onde os extremos de integração são arbitrários. Como $\partial F/\partial y = 0$, temos que

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{v\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

o que implica automaticamente

$$\frac{y_1'}{v_1\sqrt{1+y_1'^2}} = \frac{y_2'}{v_2\sqrt{1+y_2'^2}}.$$

Usando o facto de que $y_i'(x=0) = \tan(\theta_i)$, onde θ_i é o ângulo do raio com a vertical na superfície de separação, obtemos a lei de Snell

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}.$$

b) O que acontece se as velocidades não forem constantes? Apresente o resultado na forma diferencial.

Se a velocidade de cada meio for variável, digamos da forma $v_i = v_i[y_i(x)]$, a equação do movimento implica

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_i'}{v_i\sqrt{1+y_i'^2}}\right) + \frac{\sqrt{1+y_i'^2}}{v_i^2}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

As constantes de integração resultantes seriam fixas com as condições de fronteira.

c) Nas condições da alínea anterior, suponha que a velocidade de propagação de cada meio segue uma lei da forma $v_i(y) = v_{0i} + \alpha_i y$. Qual é a trajectória descrita pelo raio de luz? O que pode dizer quanto ao interface ($y = 0$)?

Graças ao olho clínico do vosso colega Pedro Birra (a quem desde já agradeço por me chamar à atenção), reparou-se num pequeno erro na solução desta alínea. O uso da equação de Euler-Lagrange é de pouca utilidade (ao contrário do que parece sugerido na solução fornecida anteriormente), e por isso devemos usar a **identidade de Beltrami**, uma vez que o nosso funcional não depende explicitamente de x. Aplicando-a ao nosso problema, temos

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F = c,$$

onde $F = v(y)^{-1}\sqrt{1+y'^2}$ e c é uma constante, o que então resulta em

$$\frac{1}{v(y)}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = -c$$

(note que a escolha do sinal da constante é feita sempre a posteriori, i.e. por forma a dar resultados físicos). Usando $v(y) = v_0 - \alpha y$ para cada um dos meios (e resolvendo para um deles apenas), obtemos

$$y' = \pm\sqrt{\frac{1}{(a-by)^2} - 1},$$

com $a = v_0 c$ e $b = -\alpha c$ definindo novas constantes. Escolhendo o sinal positivo (i.e. resolvendo para o semi-plano superior, $y > 0$), fazemos a mudança de variável $z = a - by$

($\Rightarrow dz = -bdy \Leftrightarrow dz/dx = -b\ dy/dx$), obtemos

$$-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz = bdx.$$

Integrando ambos os lados, obtemos $\sqrt{1-(a-by)^2} = bx + x_0$. Impondo $x = 0$ para $y = 0$, retira-se que $x_0 = \sqrt{1-a^2}$, o que finalmente conduz à seguinte trajectória

$$1-(a-by)^2 = \left(bx + \sqrt{1-a^2}\right)^2.$$

finalmente, tomando $\alpha_0 = 0$ ($v_0 = 0$) por simplicidade, temos

$$y = -\frac{1}{b}\sqrt{1-(1+bx)^2},$$

o que representa a parte superior se $b < 0$ (i.e. escolhendo $c > 0$).

$\star$ **Problema 4. A catenária**. Considere dois postes de electricidade separados de uma distância L, unidos por um cabo que toca os dois postes à altura h. Pretendemos determinar a função $y(x)$ que descreve a curva formada pelo cabo, a famosa *catenária*.

a) Comece por demonstrar que a equação de Euler-Lagrange para este problema fornece

$$1 + y'^2 - yy'' = 0.$$

Seja h a altura dos postes e L a distância entre eles. Consideremos, ainda, que a aceleração da gravidade g é constante e que o fio tem densidade de massa por unidade de comprimento ρ. A catenária é a curva definida por uma corda de comprimento $L_0 > L$, sendo aquela que minimiza a energia potencial gravítica. Como tal, basta-nos escrever essa energia sob a forma de um funcional e aplicar o que já sabemos. Se $y(x)$ for a altura da catenária num ponto genérico $x \in [-L/2, L/2]$, o infinitésimo de energia é $dV = \rho g y(x) ds = \rho g y(x)$. Portanto, temos

$$V[y(x), y'(x)] = \int_{-L/2}^{L/2} \rho g y(x) ds = \int_{-L/2}^{L/2} \rho g y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}dx \equiv \int_{-L/2}^{L/2} F[y(x), y'(x)]dx.$$

Aplicando as equações de Euler-Lagrange, obtemos imediatamente o resultado pretendido,

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 1 + y'^2 - yy'' = 0.$$

b) A equação diferencial anterior é de difícil resolução. Para resolvermos o problema inicial, reparamos que o funcional $F[x, y(x), y'(x)]$ não depende explicitamente de x. Nestas condições, use a equação de Euler-Lagrange para demonstrar a *identidade de Beltrami*[1]

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'}y' = C,$$

[1] Como vimos nas aulas teóricas, em contextos de problemas mecânicos esta identidade expressa a convervação de energia.

onde C é uma constante.

A demonstração da identidade de Beltrami é trivial. Comecemos por calcular a derivada total da função integranda,

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y''.$$

Usamos a equação de Euler-Lagrange para eliminar o segundo termo,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'},$$

o que implica

$$\frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'}y'\right) = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Como $\partial F/\partial x = 0$, obtemos imediatamente o resultado pretendido.

c) Use o resultado anterior para finalmente obter a equação da catenária,

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a} + b\right).$$

Expresse as constantes a e b em função de L e de h.

Recorrendo à identidade de Beltrami, podemos escrever

$$F - \frac{\partial F}{\partial y'}y' = C \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{C}{\rho g} \equiv a \Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}.$$

Escolhemos o sinal positivo (porque sim − a outra raíz não daria nada de jeito...) e definimos $y = \cosh(z)$ $(dy = a\sinh(z)dz$. Então, a equação diferencial pode escreve-se

$$a\sinh(z)dz = \sqrt{\cosh^2(z) - 1}dx \Leftrightarrow a\int dz = \int dx \Rightarrow z = \frac{x}{a} + b.$$

Invertendo, obtemos finalmente $y = a\cosh\left(\frac{x}{a} + b\right)$. Como $y(-L/2) = y(L/2)$, percebemos que $b = 0$. Para obter a, temos de resolver a equação transcendental $L_0 = 2a^2\sinh(L/2a)$, que resulta de usarmos a informação do comprimento da corda ser L_0. Esta informação deve ser compatível com a condição $a/h = \cosh(L/2a)$ (i.e. $y(L/2) = h$), o que significa que, para L_0 fixo, não podemos definir L e h de forma independente.

⋆ **Problema 5. Um sistema, vários Lagrangeanos.** Um sistema uni-dimensional de uma partícula de massa m é descrito pelo Lagrangeano

$$L = \frac{1}{12}m^2\dot{x}^4 + m\dot{x}^2V - V^2,$$

onde $V = V(x)$ é um potencial.

a) Obtenha a equação do movimento da partícula.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$
$$\Leftrightarrow m\dot{x}^2\ddot{x} + 2m\ddot{x}V + 2m\dot{x}^2\frac{\partial V}{\partial x} - m\dot{x}^2\frac{\partial V}{\partial x} + 2V\frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{x}\left(m\dot{x}^2 + 2V\right) - \frac{\partial V}{\partial x}\left(2V + m\dot{x}^2\right) = 0,$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V\right)\left(m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0\right).$$

Daqui decorrem duas condições: se V for um potencial conservativo, existe conservação da energia (neste caso, $E = 0$); em alternativa, a equação do movimento corresponde à segunda Lei de Newton. Embora a primeira decorra imediatamente da segunda, o facto $E = 0$ é uma informação adicional que não se poderia obter por mera integração.

b) Caracterize fisicamente o sistema descrito por L.

Trata-se do movimento uni-dimensional num potencial conservativo V.

c) Escreva um Lagrangiano L' (mais simples do que L) que descreva o mesmo sistema físico.

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V.$$

⋆ **Problema 6. O pêndulo deformável.** Considere um pêndulo simples onde uma massa m está suspensa numa haste de comprimento l. Quando o pêndulo é posto em movimento (em $t = 0$) o comprimento da haste é variado de forma constante no tempo

$$\frac{dl}{dt} = \alpha = \text{constante}\,.$$

O ponto de suspensão é mantido fixo.

a) Quantos graus de liberdade tem este sistema? Quais?

Inicialmente, poderíamos pensar que tem dois, pois o movimento dá-se no plano. Contudo, existe uma equação de ligação. Assim, temos $2-1 = 1$ grau de liberdade (efectivo).

b) Escreva as ligações a que está sujeito o sistema e indique o tipo de ligação e o número de ligações.

$dl/dt = \alpha \Rightarrow l = l_0 + \alpha t$, de onde percebemos que a equação de ligação se escreve na forma $f(l;t) \equiv l - l_0 - \alpha t = 0$ (ligação holónoma reónoma).

c) Escreva o Lagrangeano do sistema escolhendo coordenada(s) generalizada(s) que tenham em conta a(s) ligação(ões) presente(s) no sistema.

Escolhendo o ângulo θ (o ângulo que a haste faz com a vertical) como coordenada generalizada, temos que a energia cinética se escreve

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\alpha^2 + l^2\theta^2\right).$$

Por outro lado, tomando o sentido positivo do eixo y como aquele que "aponta para baixo", podemos escrever $V = -mgl\cos\theta$. Assim, temos

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - V = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + l\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta.$$

d) Escreva, mas não resolva, as equações do movimento.

Usando a equação de Euler-Lagrande para a variável θ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0,$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\right) + mgl\sin\theta = 0,$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + 2\frac{\alpha}{l}\theta = 0.$$

e) Mostre que, para $\alpha = 0$, o Lagrangeano se reduz ao do pêndulo simples habitual.

Fazendo $\alpha = 0$, obtemos $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin_\theta = 0$, onde $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Esta situação corresponde ao pêndulo com haste de tamanho fixo.

f) Utilizando o método dos multiplicadores indeterminados de Lagrange, determine a força de tensão na haste.

Este talvez seja o ponto central deste exercício: perceber como uma acção externa (neste caso, fazer variar o tamanho da haste) resulta numa força generalizada. Para tal, promovemos a variável l a grau de liberdade levantando, momentaneamente, a sua restrição. O Lagrangeano condicionado escreve-se, então

$$L^\lambda(\theta, \dot{\theta}, l, \dot{l}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right) + mgl\cos\theta - \lambda f(l;t),$$

onde $f(l;t) = l - l_0 - \alpha t$. Escrevendo, agora, as equações de Euler-Lagrange para as <u>duas coordenadas</u>, obtemos

$$(\theta :) \qquad l\ddot{\theta} + 2\dot{l}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0,$$

$$(l :) \qquad m\ddot{l} - \lambda\frac{\partial f}{\partial l} - mg\cos\theta - ml\dot{\theta}^2 = 0.$$

Levantando o constrangimento, fazemos $\dot{\ell} = \alpha$, $\ddot{l} = 0$, para obter as forças generalizadas,

$$Q_l^\lambda = \lambda\frac{\partial f}{\partial l} = -(mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2),$$

$$Q_\theta^\lambda = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0.$$

g) Mostre que:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot\theta\,\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dE}{dt},$$

onde θ é o ângulo entre a vertical e a haste e E é a energia total do sistema. O que pode concluir sobre a conservação da energia total deste sistema?

Vamos aplicar o que sabemos sobre a identidade de Beltrami. A quantidade

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\dot\theta - L = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}m\alpha^2 = T + V + \text{const} = E + \text{const}.$$

Como

$$\dot E = -\partial L/\partial t \neq 0,$$

concluímos imediatamente que a energia mecânica do sistema não é conservada. Neste caso é claro de se perceber: fazer aumentar continuamente o tamanho da haste do pêndulo implica uma injecção externa de energia (trabalho realizado).

⋆⋆⋆ **A braquistócrona**. Em 1696, Bernoulli (que, reza a história, já possuia a solução!) desafiou a comunidade científica a determinar qual a trajectória que minizava o tempo (e não a distância) entre dois pontos A e B situados a duas alturas diferentes, na presença de gravidade. A curva recebe hoje o nome de *braquistócrona*.

Que aquele que consiga solucionar este problema conquiste o prémio que prometemos. Este prémio não é ouro nem prata (...) mas antes as honras, os elogios e os aplausos; (...) exaltaremos, pública e privadamente, por palavra e por carta, a perspicácia do nosso grande Apollo.

Ao desafio responderam vários cientistas, tais como Leibniz, Jacob, Newton e l'Hôpital.

a) Comece por mostrar que o problema variacional da braquistócrona se pode escrever na forma

$$T[y(x)] = \int_A^B \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx.$$

b) Use a idenditade de Beltrami para obter a equação diferencial

$$y(1+y'^2) = 2a,$$

onde a é uma constante arbitrária. De seguida, assumindo que a trajectória começa no ponto $y=0$, tente uma solução do tipo $y = a(1-\cos\theta)$ para obter as equações paramétricas do *ciclóide*

$$y(\theta) = a(1-\cos\theta), \quad x(\theta) = a(\theta - \sin\theta).$$