Mecânica Analítica

2020-2021

Série 4

Responsável: Hugo Terças

Nesta série, ilustramos alguns aspectos os principais potenciais centrais

$\star$ **Problema 1. Potencial efectivo.** Considere uma partícula de massa m que se pode mover no espaço sob a acção de um potencial central $V(\vec{r}) = V(r)$.

a) Determine as quantidades conservadas neste sistema.

b) Mostre que a equação do movimento se pode escrever na forma

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(V + \frac{1}{2}\frac{\ell_\theta^2}{mr^2}\right).$$

Isto quer dizer que a dinâmica de uma partícula num potencial central é equivalente ao problema unidimensional de uma partícula no potencial efectivo $V_{\text{ef.}}(r) = V(r) + \ell_\theta^2/(2mr^2)$.

c) Introduza a variável $u = 1/r$ e obtenha a equação polar das órbitas

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -m\frac{r^2}{\ell_\theta^2}F(r),$$

onde $F(r) = -dV/dr$.

d) Verifique a condição de órbita circular para forças centrais do tipo $F(r) = -k/r^2$. Este é o caso da força gravítica.

e) Para que tipo de força obtemos órbitas não confinadas do tipo $r(\theta) = ke^{\alpha\theta}$ (com $k\alpha > 0$)? Dê um exemplo físico onde isso se possa verificar.

f) É possível inferir algumas propriedades das órbitas comparando a energia mecânica E com o potencial efectivo $V_{\text{ef.}}(r)$. Para tal, consideramos o caso particular da lei da gravitação universal de Newton,

$$V_{\text{ef.}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell_\theta^2}{2mr^2}.$$

Considere os quatro casos possíveis e descreva as órbitas correspondentes.

$\star\star$ **Problema 2. Órbitas abertas ou fechadas?** Considere uma massa m no pano ligada a uma mola de constante elástica k e comprimento natural ℓ.

a) Represente graficamente o potencial efectivo e obtenha o(s) ponto(s) de equilíbrio do sistema.

b) Estude a forma do potencial efectivo e observe que, no caso geral, obtemos sempre órbitas limitadas, isto é, que existem r_- e r_+ tais que $r_- \leq r \leq r_+$. Mostre que para $\ell = 0$ essas órbitas são sempre elípticas.

c) Considere o caso particular da órbita circular. Para que valores da frequência angular $\dot{\theta} = \omega_0$ obtemos órbitas fechadas para os pequenos desvios?

$\star\star\star$ **Problema 3. Teorema do virial.** Uma propriedade importante dos potenciais centrais pode ser deduzida como um caso particular de um teorema mais geral em física estatística – o *teorema do virial de Clausius*. Este difere, em carácter, dos teoremas discutidos até aqui, tendo uma natureza estatística, i.e. envolve médias temporais de várias quantidades mecânicas.

Considere um sistema genérico composto por N partículas de massa m, com posições $\mathbf{r}_i$ e sujeitas a forças $\mathbf{F}_i$ (não necessariamente conservativas).

a) Mostre que a energia cinética média, $\langle T \rangle$, pode ser dada por

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \rangle,$$

onde $\langle . \rangle$ representa a média temporal tomada num intervalo de tempo τ, que escolhemos ser muito maior do que qualquer tempo característico do sistema.

b) Parta do teorema da equipartição da energia, $\langle T \rangle = 3Nk_B\Theta/2$ (Θ é a temperatura), para obter a equação dos gases ideais

$$PV = Nk_B\Theta.$$

c) Assuma, agora, que o sistema evolui apenas sob o efeito de forças centrais. Mostre que, para potenciais do tipo $V = V_0 r^{n+1}$, o teorema do virial pode ser escrito na forma

$$\langle T \rangle = \frac{n+1}{2}\langle V \rangle.$$

Concretize para o caso da força electrostática (ou da força da gravidade).

♫ **Problema 4. 'Another One Bites The Dust'.** No sistema solar, existe uma distribuição mais ou menos uniforme de poeiras (com excepção do que se passa na cintura de asteróides!). Nesse caso, um potencial $U_2(r)$ soma-se à usual atracção gravitacional $V(r) = -k/r$.

a) Assuma que a distribuição de poeira é uniforme e tem densidade de massa ρ. Use a equação de Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ para mostrar que o potencial $U_2 = m\Phi$ que devido às poeiras é dado por[1]

$$U_2(r) = \frac{1}{2}\alpha r^2.$$

Determine a constante α.

[1] Pense de forma análoga ao cálculo do potencial electrostático - ou do campo eléctrico - para uma distribuição de cargas de densidade ρ.

b) Mostre que o período de uma órbita circular de raio r_0 é aproximadamente dado por

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{\alpha \tau_0^2}{8\pi^2 m}\right),$$

onde $\tau_0 = 2\pi r_0^{3/2}\sqrt{m/k}$ é o período da órbita na ausência de poeiras.

c) Determine a frequência angular das órbitas resultantes de pequenas perturbações em torno do equilíbrio.

d) Mostre que órbitas quasi-circulares podem ser aproximadas por órbitas elípticas que precessam. Determine o período desta precessão e conclua se esta precessão ocorre no mesmo sentido (ou no sentido oposto) da velocidade angular orbital.

$\star\star$ **Problema 5. Potencial de Yukawa.** No contexto das interacções electrofracas, Yukawa percebeu que os portadores da interacção - os *piões* - eram partículas com massa (ao contrário do caso electromagnético, onde os portadores - os fotões - não têm massa). Isto resultaria num potencial da forma

$$V(r) = -\frac{k}{r}e^{-r/a}.$$

Ao contrário do potencial $1/r$, o potencial de Yukawa tem alcance finito, definido pela distância característica a. Classicamente, em sistemas em que os efeitos de blindagem são importantes (por exemplo, devido ao movimento térmico dos electrões, os iões num plasma interagem através de um potencial "blindado"), este potencial também aparece.

a) Obtenha a equação para o movimento radial e represente graficamente o potencial efectivo. Discuta a natureza qualitativa das órbitas em função da sua energia e do momento angular.

b) Mostre que para órbitas quasi-circulares (i.e. obtidas por perturbação da órbita circular), o ângulo apsidal sofre, por cada revolução, um avanço de $\pi r_0/a$, onde r_0 é raio de equilíbrio.

$\star\star\star$ **Problema 6. Secção eficaz.** Consideremos o problema da difusão em potenciais centrais $V(r)$ repulsivos.

a) Mostre que a conservação do número de partículas (# part. incidentes = # part. difundidas) resulta na seguinte secção eficaz diferencial

$$\sigma(\theta) = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|.$$

b) Parta da equação das órbitas integrada, $\theta(r)$, para mostrar a seguinte relação entre o parâmetro de impacto de b e o ângulo de difusão θ

$$\theta(b) = \pi - 2b\int_0^{u_m} \frac{bdu}{\sqrt{1 - V(u)/E - b^2u^2}},$$

onde $u = 1/r$.

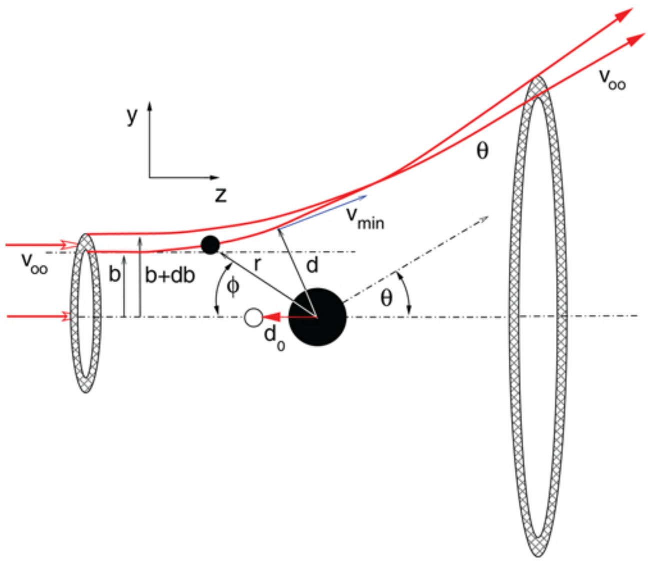

Figure 1: Esquema de um processo de difusão num potencial central repulsivo. À variação infinitesimal da área de impacto bdb corresponde uma secção eficaz diferencial $\sigma(\theta)$.

c) Considere o potencial $V(r) = k/r^n$, com $\{k, n\} > 0$. Para energias muito elevadas, o ângulo de difusão deve ser pequeno (porquê?). Mostre que, nesse limite, se tem

$$\theta \simeq c + \frac{E_c}{E}.$$

Determine a constante E_c.

d) Mostre que, para $n = 2$, se tem

$$\sigma(\theta) = \frac{k}{\pi E} \frac{1 - x}{x^2 (2 - x)^2 \sin(\pi x)}, \qquad \text{onde} \quad x = \theta/\pi.$$

e) Considere agora o potencial de “esfera mole" (em oposição à esfera rígida) dado por

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq R, \\ 0, & r > R \end{cases},$$

onde R é o raio da esfera que cria o potencial. Mostre que

$$\sigma(\theta) = \frac{n^2 R^2}{4\cos(\theta/2)} \frac{(n\cos(\theta/2) - 1)(n - \cos(\theta/2))}{\left(1 + n^2 - 2n\cos(\theta/2)\right)^2},$$

onde $n = \sqrt{1 + V_0/E}$ é o índice de refracção de uma esfera de raio R. Isto explica porque é que podemos usar a mecânica de partículas para explicar o problema de difusão da luz (arco-íris): no limite da óptica geométrica, a luz pode ser descrita como raios (partículas). Por isso a descrição Newtoniana da difusão de corresponde à de Huygens feita para ondas (óptica de Fourier). Na verdade, este resultado tem implicações profundas na questão da dualidade onda-partícula, uma das ideias percursoras da mecânica quântica.

$\star\star\star$ **As leis de Kepler.** Johannes Kepler foi um físico-matemático que ficou imortalizado pelas suas descobertas em mecânica celeste. Em particular, no séc. XVII, formulou três leis universais que decorrem da observação do movimento dos astros que orbitam torno do Sol. Neste desafio, vamos tentar obtê-las.

a) Lei das áreas. Parta da conservação do momento angular em potenciais centrais para demonstrar que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\ell_\theta}{2m} = \text{const.},$$

i.e. que áreas iguais são "varridas" em intervalos de tempo iguais.

b) Lei das órbitas. Usando a definição de energia mecânica, mostre que da eq. do movimento para uma partícula num potencial central se obtém, após integração,

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2\left(E - V_{\text{ef.}}(r)\right)}{m}}.$$

Faça a escolha acertada para o sinal e utilize esta relação para obter

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\ell_\theta}{r^2\sqrt{2m\left(E - V_{\text{ef.}}(r)\right)}}.$$

A discussão do tipo de órbitas feita por Kepler faz sentido para potenciais gravíticos. Assim, no que se segue, consideramos $V(r) \sim -k/r$. Faça uso da mudança de variável $u = 1/r$ na expressão anterior para obter

$$\frac{d\theta(u)}{du} = \frac{\alpha}{\epsilon}\frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{\alpha u-1}{\epsilon}\right)^2}},$$

com $\alpha = \ell_\theta^2/(mk)$ e $\epsilon = \sqrt{1 + 2E\ell_\theta^2/(mk^2)}$. Faça uma mudança de variável apropriada (não dizemos qual, mas pense numa relação trigonométrica!) para finalmente obtermos a famosa 1ª Lei de Kepler

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon\cos\theta.$$

Como podemos agora observar, as quantidades ϵ e α representam a excentricidade e o *latus rectum* da órbita, respectivamente. Indique a que valores de ϵ correspondem órbitas elípticas, hiperbólicas, parabólicas e circulares. Aproveite este resultado para demonstrar que, no caso de órbitas planetárias, os semi-eixos maiores e menores são dados por

$$a \equiv \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{\alpha}{1-\epsilon^2}, \quad b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}}.$$

c) Lei dos períodos. Mostre, partindo da lei das áreas obtida acima, que no caso do movimento planetário se obtém a famosa 3ª Lei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k}a^3.$$