Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEFT

1º Teste (VA) - 9 de Novembro de 2019 - 9:00 às 10:30

Resolução

Problema 1 (4,5 val.) Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{senh}(\sqrt{1+x}))$ (b) $g(x) = \dfrac{\ln(1+e^{x^2})}{x}$ (c) $h(x) = x^{e^x}$

Resolução:

(a) $f'(x) = \cos(\operatorname{senh}(\sqrt{1+x}))\cosh(\sqrt{1+x})\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

(b) $g'(x) = -\dfrac{\ln(1+e^{x^2})}{x^2} + \dfrac{2xe^{x^2}}{x(1+e^{x^2})}$

(c) $h'(x) = x^{e^x}(e^x \ln x)' = x^{e^x}(e^x \ln x + \dfrac{e^x}{x})$

Problema 2 (4,5 val.) Calcule, se existirem (finitos ou infinitos), os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 2\operatorname{senh} x + 2x - 1}{2\cos x + 3\operatorname{sen} x - 3x - 2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{x^2+\ln(1+x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}(1-e^x)^x$

Resolução:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 2\operatorname{senh} x + 2x - 1}{2\cos x + 3\operatorname{sen} x - 3x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - 2\cosh x + 2}{-2\operatorname{sen} x + 3\cos x - 3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 2\operatorname{senh} x}{-2\cos x + 3\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{x^2+\ln(1+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\frac{1}{2x+\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+e^x)(1+x)}{(x^2+e^x)(2x^2+2x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{e^x}+1}{\frac{x^2}{e^x}+1}\frac{\frac{1}{x}+1}{2x+2+\frac{1}{x}} = \frac{(1)}{(1)}\frac{(1)}{(+\infty)} = 0$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}(1-e^x)^x = \lim_{x\to 0^-} e^{x\ln(1-e^x)}$; $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\ln(1-e^x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-e^x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1-e^x)}{1/x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2e^x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{2xe^x+x^2e^x}{-e^x} = -\lim_{x\to 0^-}(2x+x^2) = 0$, donde

$$\lim_{x\to 0^-}(1-e^x)^x = e^0 = 1.$$

Problema 3 (3 val.) Seja $f(x) = 2 + \ln(1 + x/2)$ e p_n o polinómio de Taylor de f de ordem n no ponto $a = 0$.

(a) Calcule p_3.
(b) Mostre que $f(x) < p_3(x)$ para qualquer $x > 0$.
(c) Mostre que $p_3(x) - 1/50 < f(x) < p_3(x)$ quando $0 < x < 1$.

Resolução:

(a) $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{x+2}, f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}, f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$, donde

$$p_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24}$$

(b) $f(x) = p_3(x) + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4$, onde $0 < c < x$ e

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+2)^4} \text{ e portanto } \frac{f^{(4)}(c)}{4!} = -\frac{1}{4(c+2)^4} < 0 \text{ por razões evidentes.}$$

Segue-se que $f(x) = p_3(x) + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 < p_3(x)$.

(c) Se $0 < x < 1$ então $0 < c < x < 1$ e $4 \cdot 2^4 < 4(c+2)^4$ donde

$$\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 < \frac{f^{(4)}(c)}{4!} = \frac{1}{4(c+2)^4} < \frac{1}{4 \cdot 2^4} = \frac{1}{64} < \frac{1}{50}$$

Temos finalmente

$$f(x) - p_3(x) = -\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 > -\frac{1}{50}$$

Problema 4 (4 val.) Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/(3x)) & \text{se } x > 0 \\ 3xe^{1/x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é prolongável por continuidade a $x = 0$.
(b) Sendo F o prolongamento por continuidade de f referido em a), verifique se F é diferenciável em $x = 0$. Caso afirmativo, determine se F' é contínua em $\mathbb{R}$.
(c) Sendo g a restrição de F ao intervalo $]-\infty, 0]$, mostre que g tem inversa $h = g^{-1}$ e calcule $h'(b)$, onde $b = f(-1/3) = -1/e^3$.
(d) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. Conclua que existe $a > 0$ tal que f é injectiva em $[a, +\infty[$.

Resolução:

(a) Se $x > 0$ temos $0 \leq |f(x)| \leq x^2$, pelo que $f(x) \to 0$ quando $x \searrow 0$. Por outro lado, é claro que $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, pelo que $f(x) \to 0$ quando $x \nearrow 0$. Portanto $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e f é prolongável por continuidade a 0.

(b) Temos naturalmente $F(0) = 0$. Para verificar a existência de $F'(0)$ calculamos dois limites laterais:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 3e^{1/x} = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x\operatorname{sen}(1/(3x)) = 0.$$

Concluímos que F é diferenciável em $x = 0$ e $F'(0) = 0$. Temos assim

$$F'(x) = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{3x}) + x^2\cos(\frac{1}{3x}))(-\frac{1}{3x^2}) = 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{3x}) - \frac{1}{3}\cos(\frac{1}{3x}) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 3e^{1/x} + 3xe^{1/x}(-1/x^2) = 3e^{1/x}(1 - \frac{1}{x}) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Notamos que $\lim_{x\to 0^+} F'(x)$ não existe, pelo que F' não é contínua em $x = 0$ (F' é claramente contínua para $x \neq 0$).

(c) Como vimos acima, $g'(x) = f'(x) = 3e^{1/x}(1 - \frac{1}{x})$ para $x < 0$. É evidente que $g'(x) \neq 0$ para $x < 0$ e segue-se do teorema de Lagrange que g é injectiva em $]-\infty, 0]$, tendo por isso uma inversa h (é aliás fácil ver que g e h são bijecções $g, h :]-\infty, 0] \to]-\infty, 0]$). Mais uma vez porque $g'(x) \neq 0$ para $x < 0$, temos para $b = g(-1/3)$ (e portanto $-1/3 = h(b)$) que

$$h'(b) = \frac{1}{g'(h(b))} = \frac{1}{g'(-1/3)} = 3e^{-3}(1 + 3) = 12/e^3.$$

(d) Tomando $t = 1/(3x)$, temos $x = 1/(3t)$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x\operatorname{sen}(\frac{1}{3x}) - \frac{1}{3}\cos(\frac{1}{3x}) = \lim_{t\to 0^+}[\frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} - \frac{1}{3}\cos(t)] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Existe por isso $a > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para qualquer $x > a$. Segue-se novamente do teorema de Lagrange que f é estritamente crescente em $[a, +\infty[$ e tem por isso inversa nesse intervalo.

Problema 5 (4 val.) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Prove que

(a) Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha > f(0)$, então f tem mínimo em $[0, +\infty[$, mas não tem necessariamente máximo.
(b) Se f não tem extremos locais em $\mathbb{R}$ então f é injectiva em $\mathbb{R}$.
(c) Se $u(x) = \sec x$ com $x \in [0, \pi/2[$ então u tem inversa h e $h'(x) = 1/(x\sqrt{x^2 - 1})$.
(d) Supondo que $f^{(2)}$ e $g^{(2)}$ existem em $\mathbb{R}$ e $p(x) = 1 + x + x^2$ e $q(x) = 2x + x^2$ são os polinómios de Taylor de ordem 2 no ponto $a = 0$ respectivamente de f e de g, então $r(x) = 1 + 2x + 5x^2$ é o polinómio de Taylor de $h(x) = f(g(x))$ de ordem 2 no ponto $a = 0$.

Resolução:

(a) Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha > f(0)$, é claro que existe $a > 0$ tal que $f(x) > f(0)$ para qualquer $x > a$ (basta aplicar a definição de limite com $\epsilon = \alpha - f(0)$).

Pelo teorema de Weierstrass, a função f tem mínimo m no intervalo $[0,a]$ e é evidente que $m \leq f(0) < f(x)$ para qualquer $x \in]a,+\infty[$. Segue-se que m é o mínimo de f no conjunto $[0,+\infty[$.

O exemplo de $f(x) = \arctan x$, para o qual $f(0) = 0$ e $\alpha = \pi/2 > f(0)$, mostra que a função f não tem necessariamente máximo em $[0,+\infty[$.

(b) Temos a mostrar que se f não é injectiva em $\mathbb{R}$ então f tem extremos locais em $\mathbb{R}$. Supomos para isso que $a < b$ e $f(a) = f(b)$. Pelo teorema de Weierstrass a função f tem máximo e mínimo no intervalo $[a,b]$ e como $f(a) = f(b)$ é óbvio que pelo menos um deles ocorre no interior do intervalo, i.e., num ponto c tal que $a < c < b$. Concluímos que f tem um extremo local em c.

(c) Se $u(x) = \sec x$ com $x \in [0,\pi/2[$ então $u([0,\pi/2[) = [1,+\infty[$ e $u'(x) = \sec x \tan x > 0$ para $x \in]0,\pi/2[$. Concluímos que u é estritamente crescente e tem inversa $h : [1,+\infty[\to [0,\pi/2[$. Escrevemos $\theta = h(x)$ e observamos que, para $x > 0$, $u'(h(x)) > 0$ e

$$h'(x) = \frac{1}{u'(h(x))} = \frac{1}{u'(\theta)} = \frac{1}{\sec\theta\tan\theta}$$

Notamos que $\sec\theta = u(h(x)) = x$, donde $\cos\theta = 1/x$ e, como $0 < \theta < \pi/2$, $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - 1/x^2} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ e $\tan\theta = \sqrt{x^2-1}$. Temos assim que

$$h'(x) = \frac{1}{\sec\theta\tan\theta} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(Em alternativa, podemos notar que $h(x) = \operatorname{arcsec} x = \operatorname{arcsen} 1/x$).

(d) Como $p(x) = 1 + x + x^2$ e $q(x) = 2x + x^2$ são os polinómios de Taylor de ordem 2 no ponto $a = 0$ respectivamente de f e de g, temos

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 2, g(0) = 0, g'(0) = 2, g''(0) = 2$$

Como $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ e $h''(x) = f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x)$, temos

$$h(0) = f(g(0)) = f(0) = 1,\ h'(0) = f'(0)g'(0) = 2 \text{ e}$$

$$h''(0) = f''(g(0))[g'(0)]^2 + f'(g(0))g''(0) = f''(0)[2]^2 + f'(0)2 = 8 + 2 = 10$$

O polinómio de Taylor de ordem 2 de h em $a = 0$ é portanto $1 + 2x + 5x^2$.