Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEBIOM/MEFT

2º Teste (VA) - 7 de Janeiro de 2019 - 9:00 às 10:30

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = x^3 e^{x^2} \qquad (b)\ g(x) = \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \qquad (c)\ h(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x(x^2+1)}$$

Problema 2 (4 val.) Considere as funções $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

Sendo $A = \{(x,y) : x \neq 0, 0 < y < f(x)\}$ e $B = \{(x,y) : x > 0, 0 < y < g(x)\}$, calcule a área do conjunto $A \cap B$.

Problema 3 (4,5 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sqrt[3]{k}\tan(1/k) \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(k^5-1)\operatorname{sen}(k^2)}{5^k} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\sqrt[k]{3k}-1)^{2k}$$

Problema 4 (4 val.) Neste grupo, definimos $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{4k}}{k\, 81^k}$.

(a) Determine o domínio de convergência da série, e especifique a parte desse domínio onde a série é absolutamente convergente.

(b) Mostre que f tem um extremo local em $x = 0$ e classifique-o.

(c) Justifique que f é integrável em $I = [0,3]$ e calcule o integral de f em I com erro inferior a $1/10$. Diga se o seu resultado é uma aproximação por defeito ou por excesso do valor exacto.

(d) Determine f' e f.

Problema 5 (3 val.) Responda às seguintes questões:

(a) Mostre que se $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ são séries respectivamente absoluta e simplesmente convergentes então $\sum_n(a_n + b_n)$ é simplesmente convergente. Sugestão: Suponha primeiro que as duas séries são absolutamente convergentes.

(b) Seja $f(x) = \cos x$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Com $I = [-\pi/2, \pi/2]$, calcule $\overline{\int_I} f$ e $\underline{\int_I} f$ e determine se f é ou não Riemann-integrável em I.

(c) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}$. Sugestão: Ponha $1/n$ em evidência.

(d) Mostre que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}\operatorname{sen}(nx)$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEBIOM/MEFT

2º Teste (VB) - 7 de Janeiro de 2019 - 9:00 às 10:30

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$(a)\ f(x) = \frac{x^2 \sec^2 x^3}{\tan x^3} \qquad (b)\ g(x) = x^3 \operatorname{sen}(x^2) \qquad (c)\ h(x) = \frac{4x^2 + x - 1}{x(x^2 - 1)}$$

Problema 2 (4 val.) Considere as funções $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e $g(x) = \dfrac{2}{3+x^2}$.

Sendo $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < f(x)\}$ e $B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < g(x)\}$, calcule a área do conjunto $A \cup B$.

Problema 3 (4,5 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k^{10} + 1)10^k}{k!} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt[4]{k} \operatorname{sen}(1/k^2) \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt[k]{2k} - 1)^{3k}$$

Problema 4 (4 val.) Neste grupo, definimos $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{4k}}{k\ 16^k}$.

(a) Determine o domínio de convergência da série, e especifique a parte desse domínio onde a série é absolutamente convergente.

(b) Mostre que f tem um extremo local em $x = 0$ e classifique-o.

(c) Justifique que f é integrável em $I = [0, 2]$ e calcule o integral de f em I com erro inferior a $1/10$. Diga se o seu resultado é uma aproximação por defeito ou por excesso do valor exacto.

(d) Determine f' e f.

Problema 5 (3 val.) Responda às seguintes questões:

(a) Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = \cos x$ se $x \notin \mathbb{Q}$. Com $I = [0, \pi]$, calcule $\overline{\int_I} f$ e $\underline{\int_I} f$ e determine se f é ou não Riemann-integrável em I.

(b) Mostre que se $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ são séries respectivamente absoluta e simplesmente convergentes então $\sum_n (a_n + b_n)$ é simplesmente convergente. Sugestão: Suponha primeiro que as duas séries são absolutamente convergentes.

(c) Mostre que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)\sqrt{n}} \cos(nx)$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

(d) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$. Sugestão: Ponha $1/n$ em evidência.