28 Mai Dsc Thd

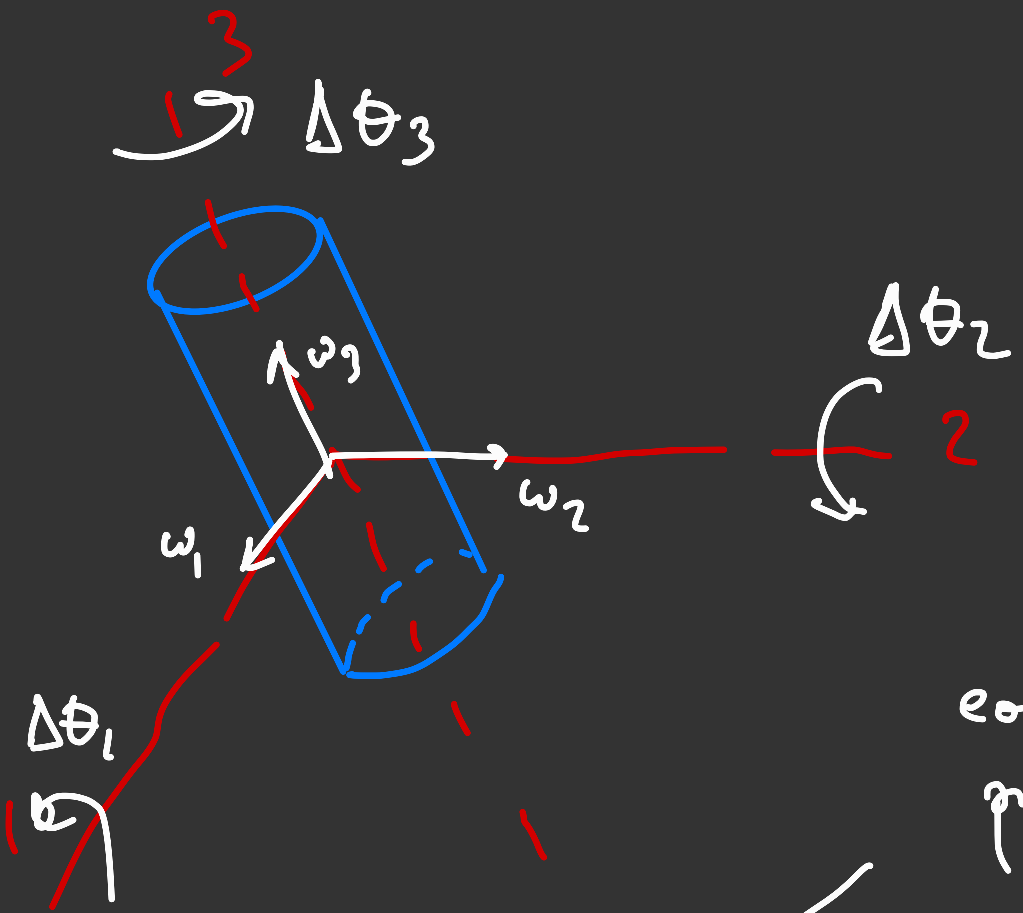
7. Equações de Euler

equações do movimento para corpo rígido

$$\underline{\tau} = \frac{d\underline{L}}{dt}$$

[simples de escrever, difícil de resolver]

Considerar um referencial (inercial) de coordenadas que coincide com a posição instantânea dos eixos principais (1,2,3) do corpo no instante t



velocidade angular no inst. t
(instantânea)

$$\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

como os eixos são principais, o tensor de inércia é diagonal

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} L_1 = I_1 \omega_1 \\ L_2 = I_2 \omega_2 \\ L_3 = I_3 \omega_3 \end{cases}$$

Um tempo pequeno δt depois:

$\longrightarrow$ os eixos principais mudam de posição

como, δt é pequeno vamos escrever os ângulos de rotação em torno cada eixo em primeira ordem (aprox linear) em δt

$$\Delta\theta_1 \simeq \omega_1 \delta t$$

$$\Delta\theta_2 \simeq \omega_2 \delta t$$

$$\Delta\theta_3 \simeq \omega_3 \delta t$$

Com isto, a variação do momento angular

$$\Delta L_1 = L_1(t+\Delta t) - L_1(t)$$

... $\uparrow$ eixo definido no instante t $\uparrow$

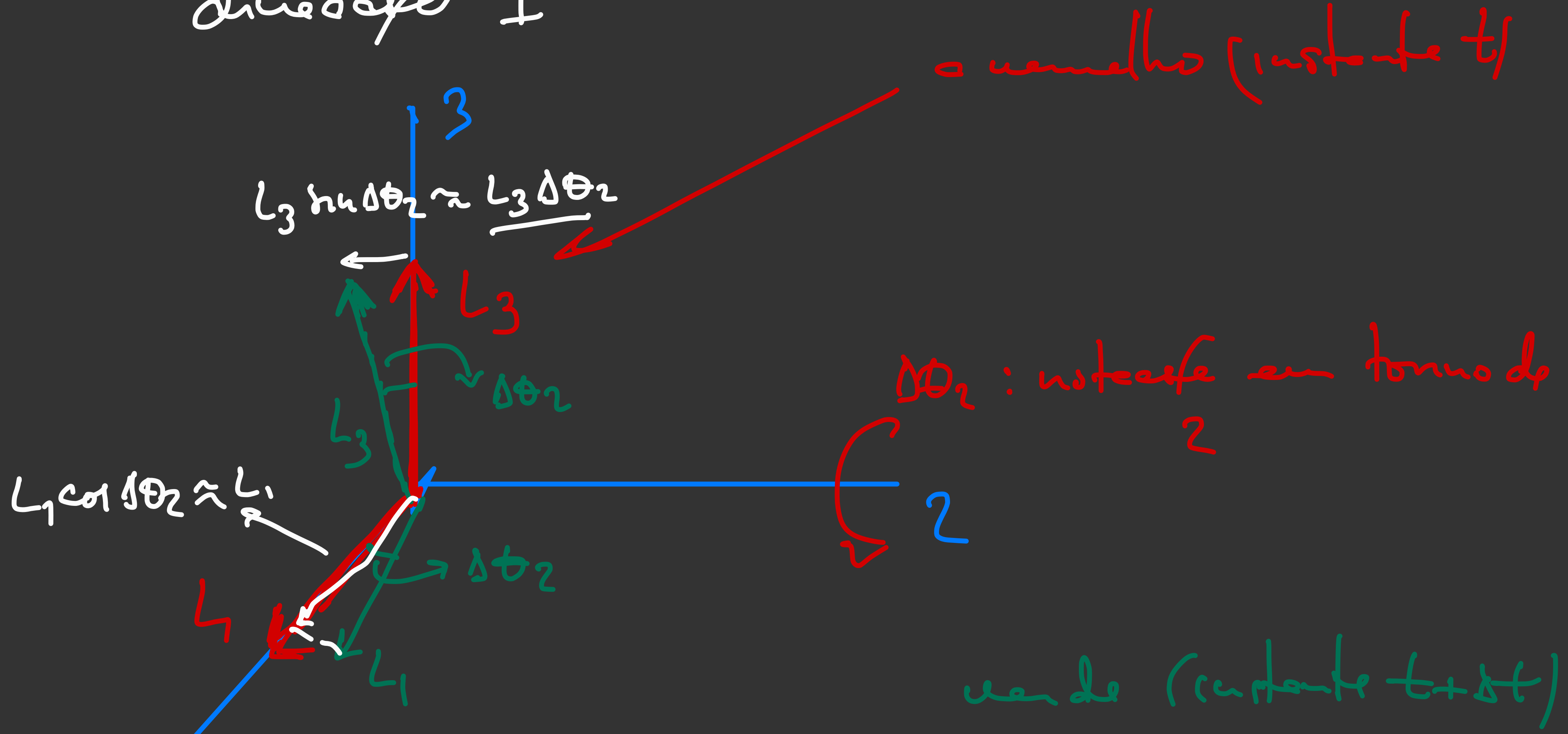
pode ser calculado tendo em conta rotações infinitesimais. Como rotações infinitesimais comutam (rotações finitas não comutam) podemos considerar uma de cada vez. (em torno de cada eixo)

L_1 pode variar por 2 razões:

(i) se ω_1 mudar, a magnitude de L_1 também muda $\Delta(I_1\omega_1) = I_1 \Delta\omega_1$

(ii) rotações em torno dos outros eixos alteram direção de L_2 e L_3 que podem assim ter uma contribuição na direção $\hat{1}$

(iii) rotações em torno dos outros eixos alteram direcção de L_2 e L_3 que podem assim ter uma contribuição na direcção $\hat{1}$



Como vemos a contribuição no eixo 1
(eixos são os do instante t)

para rotação em torno de 2

- rotação de L_1 não tem (em 1ª ordem) consequências na magnitude do momento angular no eixo 1

- a rotação de L_3 contribui com

$$L_3 \Delta\theta_2 = I_3 \omega_3 \Delta\theta_2$$

para rotação em torno de 3

- contribuição para ΔL_1

$$\Longrightarrow \quad -L_2 \Delta\theta_3 = -I_2 \omega_2 \Delta\theta_3$$

$$\Longrightarrow \Delta L_1 = I_1 \Delta\omega_1 + I_3 \omega_3 \Delta\theta_2 - I_2 \omega_2 \Delta\theta_3$$

então ($\Delta\theta_i = \omega_i \Delta t$)

$$\Delta L_1 = I_1 \Delta\omega_1 + I_3 \omega_3 \underbrace{\omega_2 \Delta t}_{\Delta\theta_2} - I_2 \omega_2 \omega_3 \Delta t$$

$$= I_1 \Delta\omega_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 \Delta t$$

dividindo por Δt e fazendo $\Delta t \to 0$

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta t} \to \frac{dL_1}{dt} \qquad \frac{\Delta\omega_1}{\Delta t} \to \frac{d\omega_1}{dt}$$

$$\frac{dL_1}{dt} = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\omega_3\omega_2 = \tau_1$$

então (o caso para L_2 e L_3 é análogo ao que fizemos para L_1)

comp. nos eixos (1,2,3) no instante t

$$\frac{dL_1}{dt} = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 = \tau_1$$

$$\frac{dL_2}{dt} = I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = \tau_2$$

$$\frac{dL_3}{dt} = I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 = \tau_3$$

Eqs. de Euler

Eqs. de Euler para mov. do corpo rígido

↙ relacionam $\underline{\tau}$, $\underline{\omega}$ e $\dfrac{d\underline{\omega}}{dt}$ num instante de tempo t onde os eixos $(1,2,3)$ [as componentes destes vectores] são os eixos principais no instante t

para um instante t' é necessário re-escrever tudo para os novos eixos principais $(1',2',3')$

As eqs. de Euler não relacionam os sistemas de coordenadas $(1,2,3)$ e $(1',2',3')$

As eqs. de Euler não relacionam os sistemas de coordenadas (1,2,3) e (1',2',3')

- no ref. do laboratório, as componentes do tensor de inércia variam de forma não trivial (e não descrito pelas eqs. de Euler)

- no ref. dos eixos principais as comp. do tensor de inércia são constantes, mas não seguimos a orientação dos eixos

soluções das eqs. de Euler não resultam em ângulos no ref. do laboratório

ângulos de Euler ⟶ relacionam os eixos principais com os eixos do ref. do laboratório

[isto está para além desta UC]

Aqui, vamos tentar perceber propriedades que possam ser descritas pelas eqs. Euler

↳ Exemplo: estabilidade dinâmica

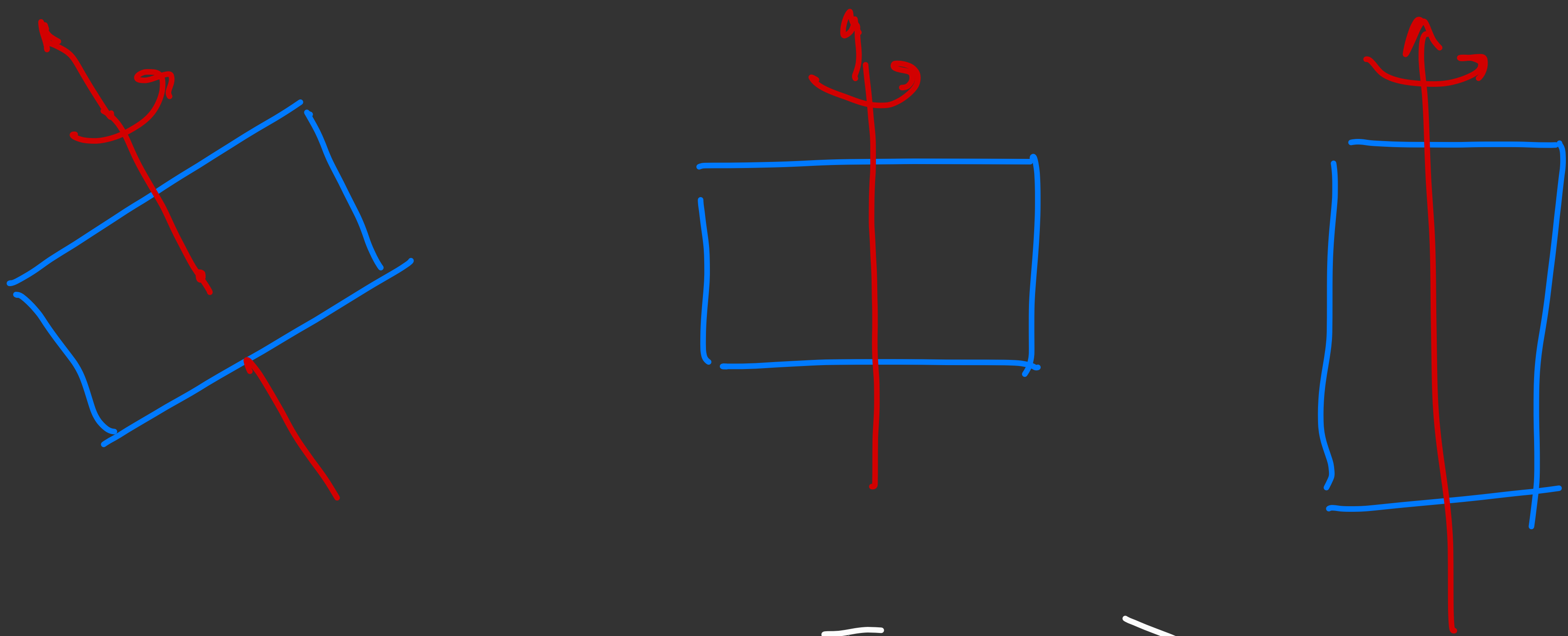
. estabilidade estática

deslocamento para fora do equilíbrio resulta em forças que levam o sistema de volta para o equilíbrio

. estabilidade dinâmica

sistema responde a uma força alterando o movimento apenas ligeiramente livro (paralelepípedo)

(estabilidade de rotação depende do eixo)



$I_1 > I_2 > I_3$

Eqs. Euler

- corpo a rodar inicialmente com
  $\omega_1 = \text{const}$ $\quad\quad \omega_2 = \omega_3 = 0$

- perturbação tal que $\omega_2, \omega_3 \neq 0$ mas
  $\omega_2, \omega_3 \ll \omega_1$

  (numa situação real seria consequência do peso)

- após perturbação deixa de existir
  binário

$$(*) \quad I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 = 0$$

$$(**) \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3 = 0$$

$$(***) \quad I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\omega_2\omega_1 = 0$$

$\omega_2, \omega_3 << \omega_1 \Rightarrow \omega_2 \omega_3$ muito pequeno

$(\ast)$ $$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{\omega_1 = \text{const}}$$

$(\ast\ast)$ $\longrightarrow$ derivar em ordem ao tempo

$$\frac{d}{dt}\left(I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\omega_1 \omega_3 \right) = 0$$

$$\Rightarrow I_2 \frac{d^2\omega_2}{dt^2} + (I_1 - I_3)\left[\cancel{\frac{d\omega_1}{dt}}^{=0} \omega_3 + \omega_1 \frac{d\omega_3}{dt} \right] = 0$$

$(\ast\ast\ast)$

$$\Rightarrow I_2 \frac{d^2\omega_2}{dt^2} + \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_3}\,\omega_1^2 \omega_2 = 0$$

de forma mais compacta

$$\frac{d^2\omega_2}{dt^2} + A\,\omega_2 = 0$$

$$A = \frac{(I_1-I_2)(I_1-I_3)}{I_2 I_3}\omega_1^2$$

de facto simetria para todos os casos fazendo rodar 1, 2, 3

- se I_1 for o maior momento de inércia

$A > 0$

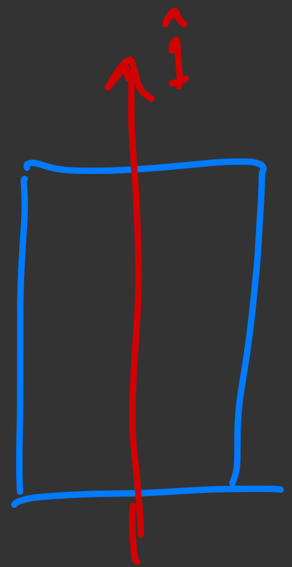
→ osc. harmónico

ω_2 oscila com frequência $\sqrt{A}$ e amplitude limitada

→ o mesmo para ω_3

ou seja rodando aquilo a que chamamos 1 (ou seja o eixo em relação ao qual ω_1 é grande)

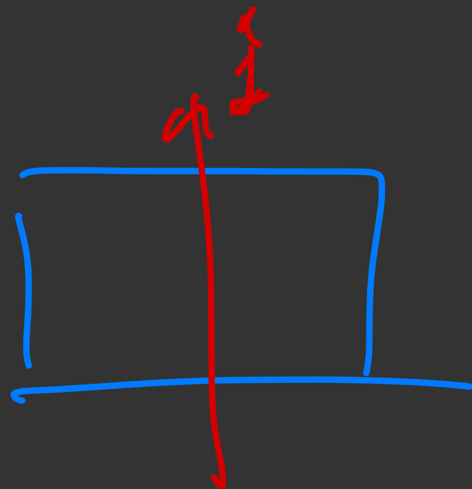
- se I_1 for o menor momento de inércia (I_1 é o nosso I_3 inicial)



$$A > 0$$

comportamento idêntico a quando I_1 é o maior

- se I_1 for o intermédio



$$A < 0$$

$\Rightarrow$ ω_2 e ω_3 aumentam exponencialmente no tempo (instabilidade)