31 Tlan Osc Ihnd

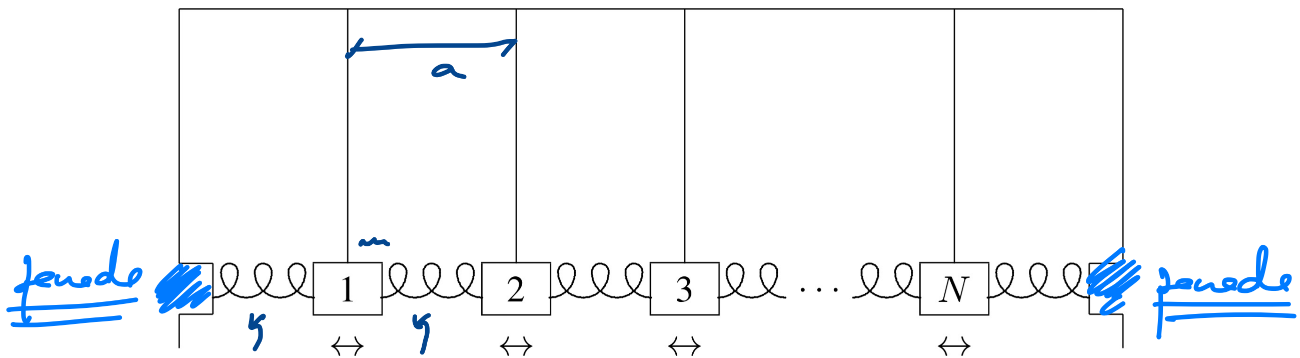
Ondas

Quais são os propriedades necessárias para que um sistema suporte ondas?

(1) invariância translacional

(2) interações locais

N osciladores acoplados



- todas as massas iguais $\to m$
- todas as molas iguais $\to k$
- separação entre massas no equilíbrio é uniforme $\to a$

$\to$ oscilações livres (s/ atrito, s/ forças externas)

movimento apenas na direção das molas

$\to$ oscilações longitudinais

coordenadas $\longrightarrow$ deslocamento de cada massa relativamente à sua posição de equilíbrio

massa 'j' $\longrightarrow$ ψ_j

vetor deslocamento

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

as equações do mov.

$$\frac{d^2 \Psi}{dt^2} = -M^{-1} K \Psi$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} = -M^{-1} K \Phi \qquad M = m \mathbb{1}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{mg}{\ell} + 2\kappa & -\kappa & 0 & \cdots & 0 \\ -\kappa & \frac{mg}{\ell} + 2\kappa & -\kappa & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -\kappa & \frac{mg}{\ell} + 2\kappa & -\kappa & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}K = \begin{pmatrix} 2B & -C & 0 & \cdots & 0 \\ -C & 2B & -C & \cdots & 0 \\ 0 & -C & 2B & -C \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & -C & 2B \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} 2B &= g/\ell + 2k/m \\ C &= k/m \end{aligned}}$$

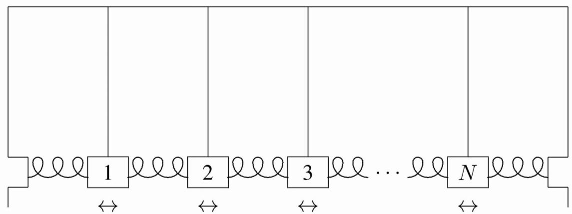
só há interação com primeiros vizinhos

$\equiv$ interações são locais

Vamos tentar separar o problema de encontrar os modos normais para N osciladores acoplados em 2 problemas mais simples:

(i) resolver o caso em que N é infinito

(ii) efeito no sistema infinito de condições fronteira (periódicas) que nos levam de volta ao sistema finito



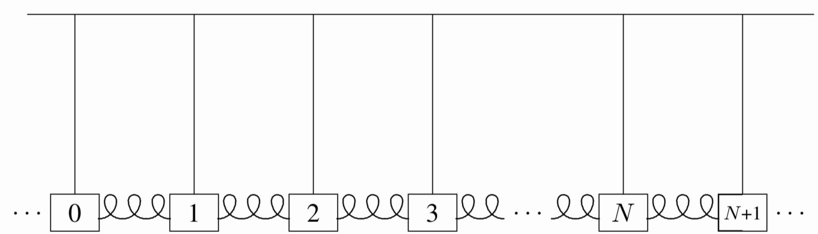
sistema finito

sistema infinito

Porquê fazer isto?

→ porque é mais simples,
em particular o
"interior" é muito
simples

3.1.1 The Infinite System



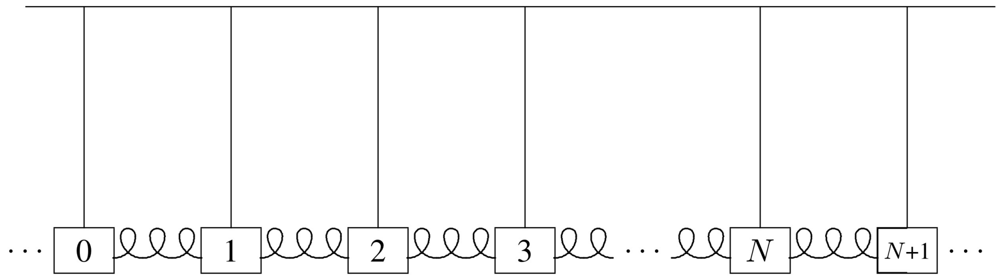
interior

parede
do sist. finito

No sistema infinito podemos usar o que já sabemos sobre simetrias.

O sistema infinito é invariante para translações (múltiplos de 'a')

5.1.1 The Infinite System



Sistema infinito $\longrightarrow$ número infinito de modos normais

cond. fronteira

blocos '0' e 'N+1' parados

número finito $^{(N)}$ de modos normais do sistema finito.

cond. fronteira

- bloco 0 parado — tudo o que acontece à esquerda: blocos $-1, -2, \ldots, -\infty$ não afecta o interior do sistema (blocos $1 \ldots N$)

- bloco $N+1$ parado — tudo o que acontece à direita: blocos $N+2, N+3, \ldots, \infty$ não afecta o interior do sistema

Esta técnica:

resolver problema finito, resolvendo prob. infinito + cond. fronteira

é muito geral e importante em física

Solução para o sistema infinito (sem pendulos)

modo normal:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \\ A_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad M^{-1}K = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots\ 2B & -C & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots\ -C & 2B & -C & 0 & \cdots \\ \cdots\ -0 & -C & 2B & -C & \cdots \\ \cdots\ 0 & 0 & -C & 2B & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

invariância translacional: por exemplo, deslocar para a esquerda por 'a'

bloco (j+1) vai para o sítio do bloco (j)

Matriz de simetria (∞)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Se existe um modo c/ componente A_j,

TAMBÉM EXISTE outro (c/ a mesma freq)

$$\boxed{A' = SA}$$

$$A'_j = A_{j+1}$$

Os modos normais são vectores próp. do S (matriz de simetria)

$$A' = SA = \beta A$$

β valor próprio

melhor escrito (em componente)

$$\boxed{A'_j = \beta A_j = A_{j+1}}$$

uma comp. de cada vector próprio é arbitrária (como sempre)

→ escolher $A_0 = 1$

$A_0 = 1 \longrightarrow A_1 = \beta \longrightarrow A_2 = \beta^2$

$\longrightarrow \ldots$

$$\boxed{A_j = (\beta)^j}$$

$$A_j = (\beta)^j$$

da mesma forma

$A_0 = 1$

$$A_{j-1} = \beta^{-1} A_j \implies A_{-1} = 1/\beta \;,\; A_{-2} = 1/\beta^2 , \dots$$

ou seja

$$A_j = \beta^j$$

é válido para qualquer valor de β ($\neq 0$) já que, sendo o sistema infinito, nunca voltamos ao mesmo sítio

Para cada β existe um vector próprio único

vamos etiquetar os modos normais com β (vect. próprios)

(etiqueta) modo normal com valor próprio β

$$A_j^{\beta} = \beta^{j}$$

comp. j

Substituindo nas eqs. do mov. para obter as freq. próprias

$$\Pi^{-1} K A^{\beta} = \omega^2 A^{\beta}$$

para a comp. j

$$\omega^2 A_j^{\beta} = 2B A_j^{\beta} - c A_{j-1}^{\beta} - c A_{j+1}^{\beta}$$

mas sabemos que

$$A_j^{\beta} = \beta^j$$

logo

$$\omega^2 \beta^j = 2B \beta^j - c \beta^{j-1} - c \beta^{j+1}$$

dividindo β^j

$$\Longrightarrow \boxed{\omega^2 = 2B - c\beta^{-1} - c\beta}$$

$$\omega^2 = 2B - c\beta^{-1} - c\beta$$

$\beta \longleftrightarrow \beta^{-1} = 1/\beta$

não altera ω^2

quando $\beta = \pm 1$ $\boxed{\omega^2 = 2B \mp 2C}$

só se tem um modo normal

$A^{\beta} = A^{\beta^{-1}}$

em todos os outros casos $\beta \neq \pm 1$

$\Rightarrow$ 2 modos normais com a mesma frequência

$A^{\beta} \neq A^{\beta^{-1}}$

mas têm a mesma freq.

Como para cada valor de ω existem 1 ou 2 modos normais

$\Longrightarrow$ implementação das paredes (cond. fronteira)

considerando no máximo 2 modos simultaneamente

→ cond. fronteira

só alguns valores de β correspondem a modos que respeitam as cond. front. (blocos 0 e $N+1$ parados)

para cada ω^2, qq comb. linear dos 2 modos TS é modo normal (com a mesma freq)

queremos comb. lineares tais que

$$A_0 = 0 \qquad A_{N+1} = 0$$

$A_0 = 0 \longrightarrow A_{\hat{j}} = 0 \,, \quad \hat{j} = 0$

$$\boxed{\beta \neq \pm 1}$$

modo normal

$$\hookrightarrow \quad A = A^{\beta} - A^{\beta^{-1}}$$

$$\left[A = c_1 \left(A^{\beta} + c_2 A^{\beta^{-1}} \right) \right]$$

2 modos normais

$$A^{\beta} \,,\; A^{\beta^{-1}}$$

comp. $\hat{j}$

$$A_{\hat{j}} \propto A_{\hat{j}}^{\beta} - A_{\hat{j}}^{\beta^{-1}} = \underbrace{\beta^{\hat{j}} - \beta^{-\hat{j}}}_{\hat{j}=0}$$

$= A_{\hat{j}} = 0$

quero que seja $= 0$ para $\hat{j} = 0$

✓ é verdade

para $\hat{j} \neq 0$, $A_{\hat{j}}$ só pode ser nulo se $|\beta| = 1$

para poder ter $A_{N+1} = 0$ tenho que ter $|\beta| = 1$

$$|\beta| = 1 \implies \boxed{\beta = e^{i\theta}}$$

$$\implies A_j \propto e^{ij\theta} - e^{-ij\theta} \propto \sin(j\theta)$$

imponiamo $A_0 = 0$

$$\boxed{j = N+1} \quad A_j = 0 \implies \boxed{A_{N+1} = 0}$$

$$A_{N+1} \propto \sin\left((N+1)\theta\right) = 0$$

$$\implies (N+1)\theta = n\pi \qquad n \text{ intero}$$

$$\implies \boxed{\theta = \frac{n\pi}{N+1}}$$

Temos que os modos do sist. infinito sejam tb modos do sistema finito (respeitem as cond. fronteira — paredes) é necessário que

$$\boxed{A_j^n = \sin\left(\frac{j n \pi}{N+1}\right)}$$

$n = 1, 2, \ldots, N$

número de modos normais

$$\omega^2 = 2B - 2C \cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$$