DEEC
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES
TÉCNICO LISBOA

Electrónica Geral

José Gerald

Mestrado em Engenharia Aeroespacial
Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica
Licenciatura em Engenharia Aeroespacial

MEAer: 1º ano, 1º semestre
LEFT: 3º ano, 1º semestre
LEAer: 3º ano, 1º semestre

2021/2022

Capítulo 3

Filtros Activos

Intodução

Definição de Filtro:

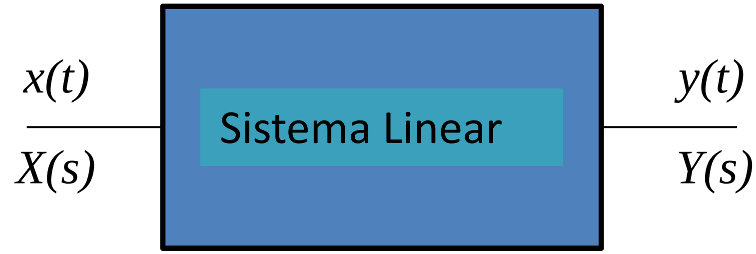
- Em sentido geral, um filtro é um sistema que processa diferentemente frequências diferentes – saída diferente da entrada e resposta em frequência não é constante.

- Em sentido restrito, um filtro é um sistema que selecciona faixas de frequência (ou no tempo) – bandas de passagem, de atenuação e de transição.

- Equalizador é um filtro que trata diferentemente frequências diferentes (em amplitude e/ou fase) mas não há distinção entre bandas de passagem e atenuação.

1. Tipos de filtros e especificações

Resposta em Frequência:



Função de Transferência:

Directa: $T(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)},\ T(j\omega)=\left|T(j\omega)\right|e^{j\phi(\omega)}$ *Inversa:* $H(s)=T^{-1}(s)=\dfrac{X(s)}{Y(s)}$

Ganho: $G(\omega)=20\log\left|T(j\omega)\right|\ \text{dB}$

Atenuação: $A(\omega)=-20\log\left|T(j\omega)\right|\ \text{dB}$

Atraso: $\tau(\omega)=-\dfrac{\partial\phi}{\partial\omega}$

Projecto de um Filtro - 2 Etapas:

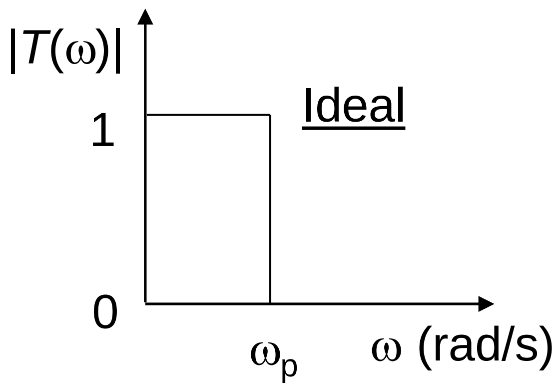
Especificações → Função de transferência → Circuito ou sistema

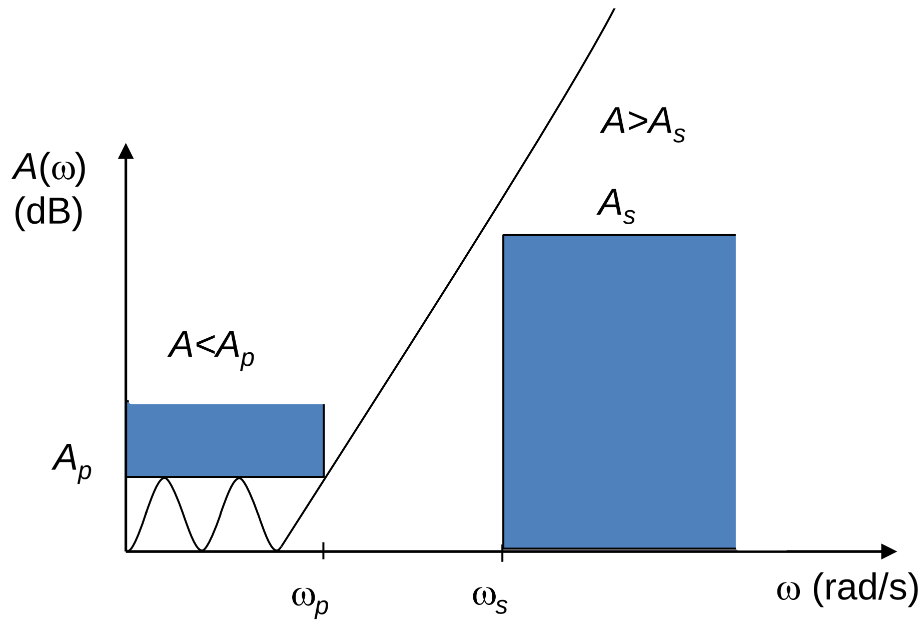
Aproximação | Realização

1. Tipos de filtros e especificações

Especificações:

Passa-Baixo (Low-Pass – LP)





Banda de Passagem (Passband) | Banda de Transição (Transition Band) | Banda de Atenuação (Stopband)

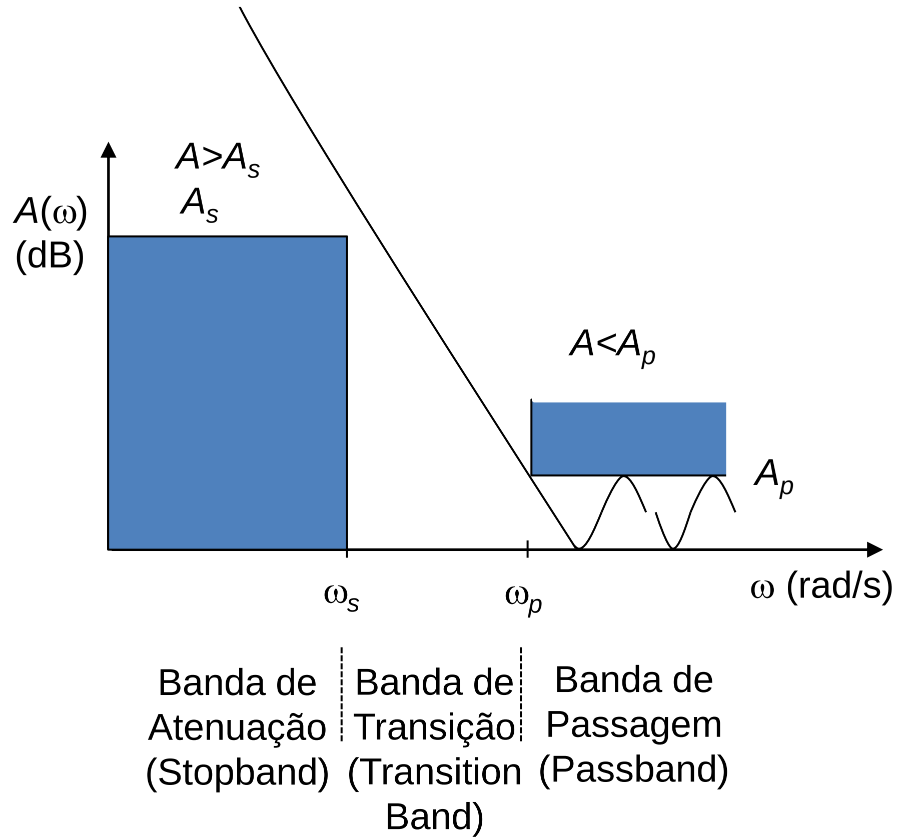
ω_p ➡ frequência de corte

ω_s ➡ frequência de atenuação

1. Tipos de filtros e especificações

Especificações:

Passa-Alto (High-Pass – HP)



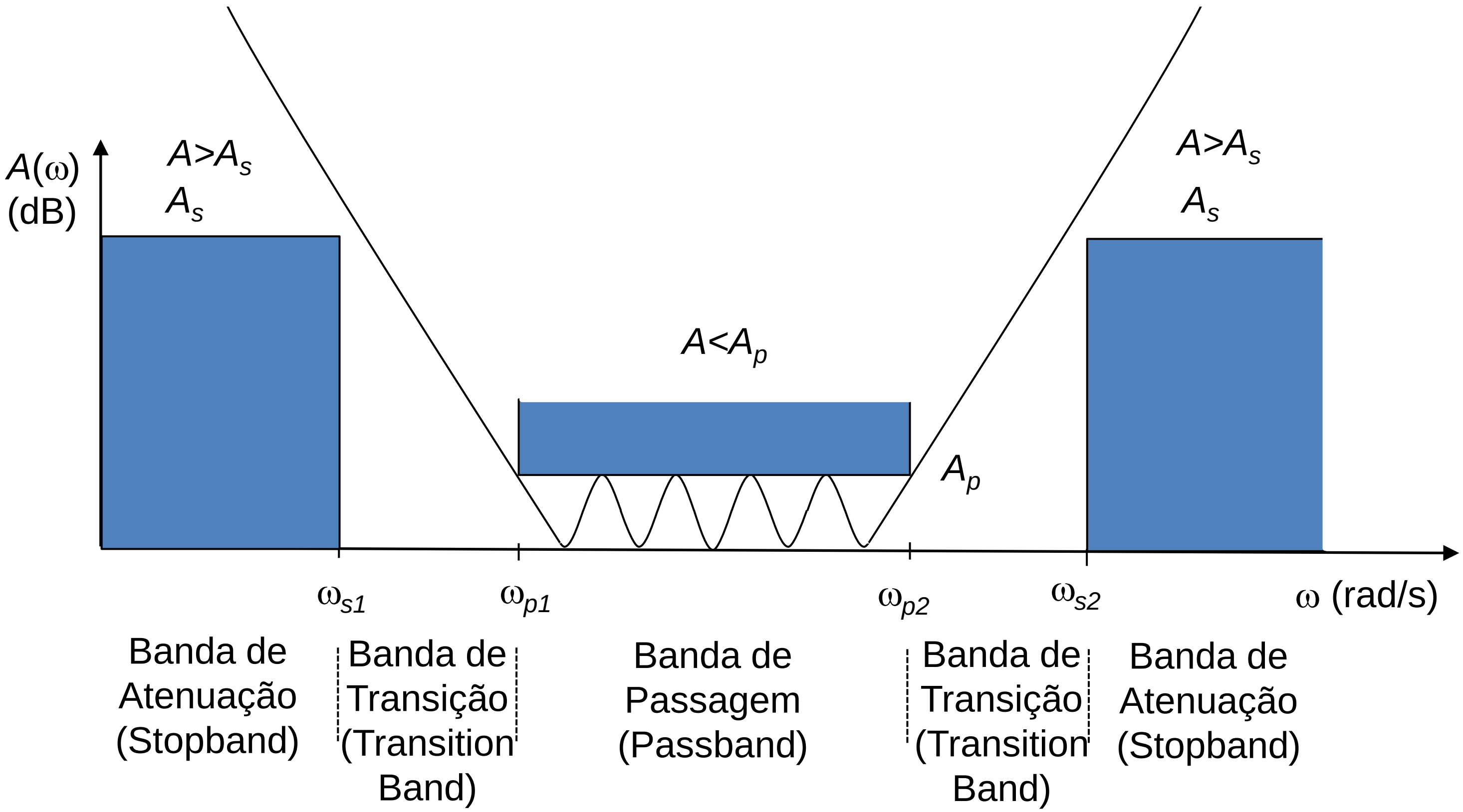
ω_p ⇒ frequência de corte

ω_s ⇒ frequência de atenuação

1. Tipos de filtros e especificações

Especificações:

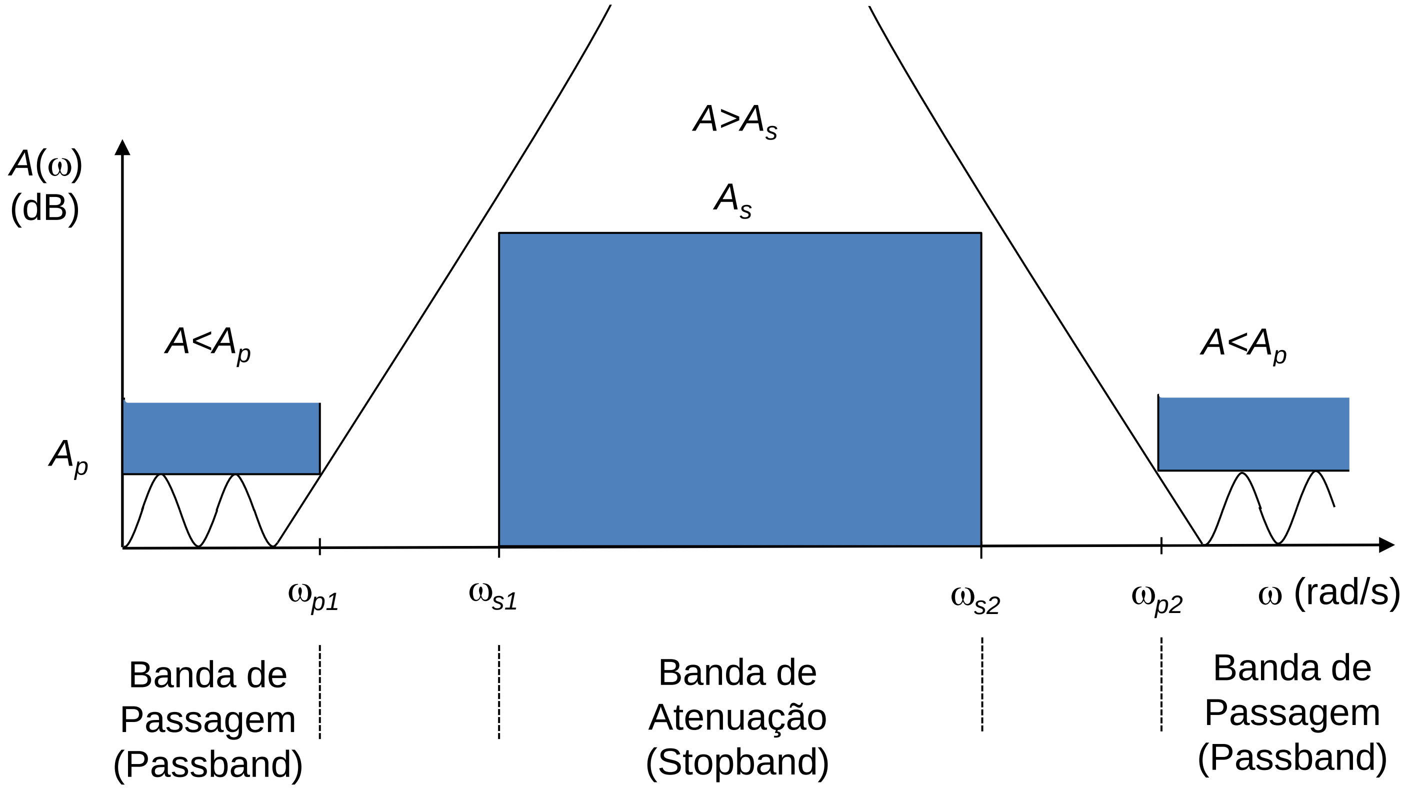
Passa-Banda (Band-Pass – BP)



1. Tipos de filtros e especificações

Especificações:

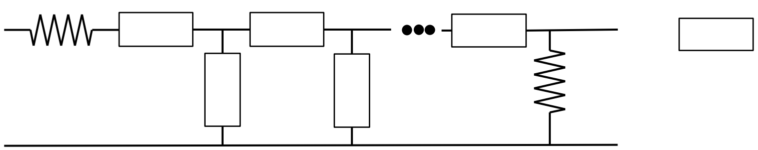
Rejeita-Banda(Band-Reject – BR)



1. Tipos de filtros e especificações

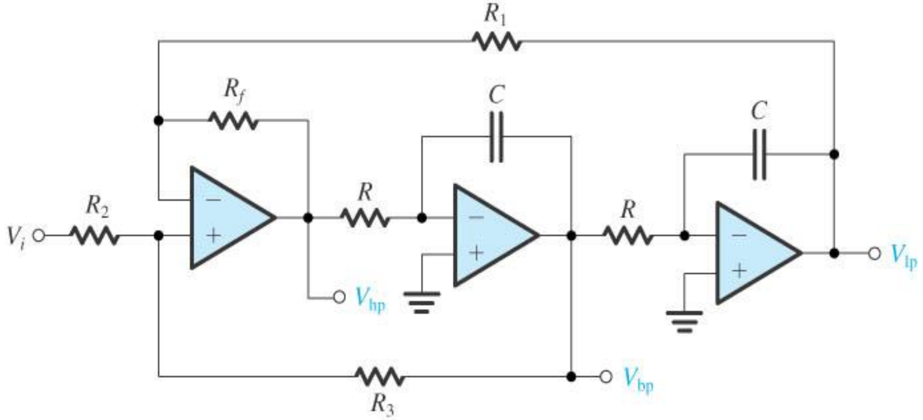
Tipos de Filtros:

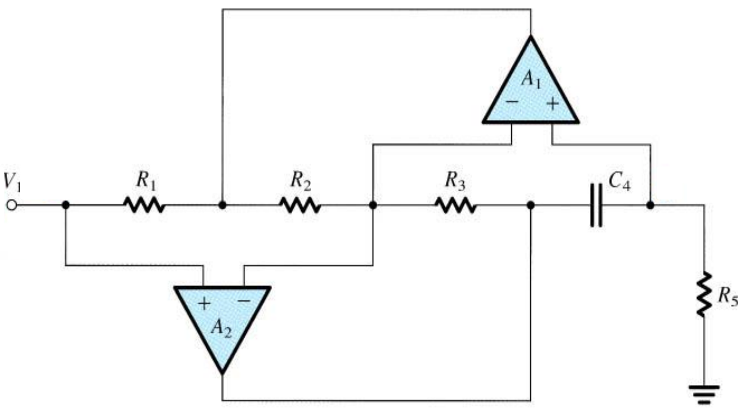
Passivos – RLC, normalmente estrutura LC em escada com terminações resistivas (duplamente terminados).



⟶ L ou C ou agregados destes

Activos – RC+Ampop, estruturas originais ou simulação de passivos.



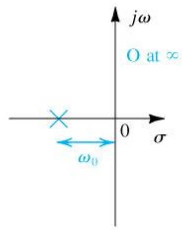
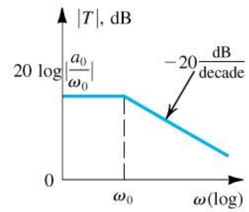
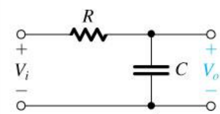
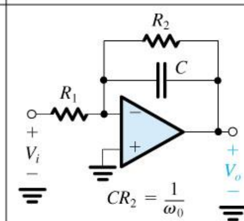
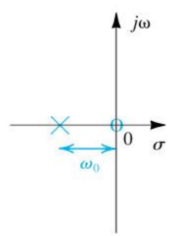
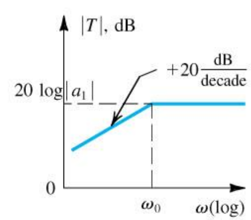
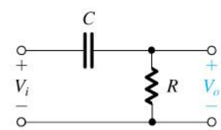
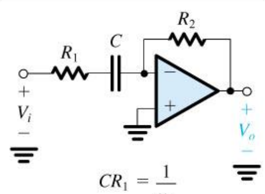
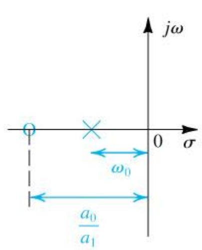
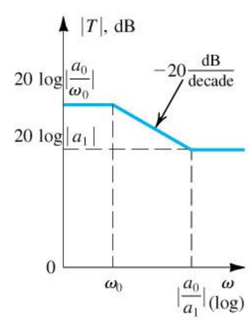
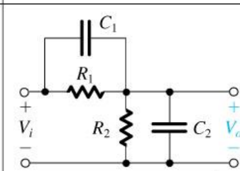
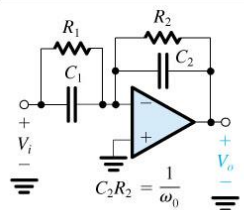


2. Filtros de 1ª e 2ª ordem

2.1. Filtros de 1ª ordem

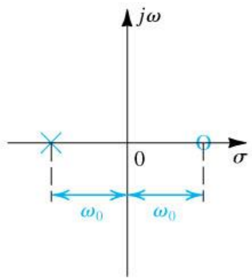
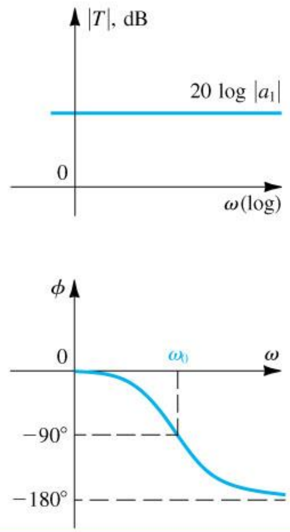
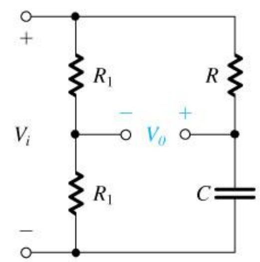
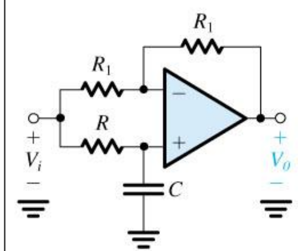
Função de transferência geral para filtros de 1ª ordem: $T(S)=\dfrac{a_1 s+a_0}{s+\omega_0}$

- Polo: $s=-\omega_0$
- Zero: $s=-a_0/a_1$
- Ganho DC: $T(0)=a_0/\omega_0$
- Ganho altas frequências: $T(\infty)=a_1$

Filter Type and $T(s)$	s-Plane Singularities	Bode Plot for $\lvert T\rvert$	Passive Realization	Op Amp–RC Realization
(a) Low pass (LP) $T(s)=\dfrac{a_0}{s+\omega_0}$	 	 	 $CR=\dfrac{1}{\omega_0}$ DC gain $=1$	 $CR_2=\dfrac{1}{\omega_0}$ DC gain $=-\dfrac{R_2}{R_1}$
(b) High pass (HP) $T(s)=\dfrac{a_1 s}{s+\omega_0}$	 	 	 $CR=\dfrac{1}{\omega_0}$ High-frequency gain $=1$	 $CR_1=\dfrac{1}{\omega_0}$ High-frequency gain $=-\dfrac{R_2}{R_1}$
(c) General $T(s)=\dfrac{a_1 s+a_0}{s+\omega_0}$	 	 	 $(C_1+C_2)(R_1 /\!/ R_2)=\dfrac{1}{\omega_0}$ $C_1R_1=\dfrac{a_1}{a_0}$ DC gain $=\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$ HF gain $=\dfrac{C_1}{C_1+C_2}$	 $C_2R_2=\dfrac{1}{\omega_0}$ $C_1R_1=\dfrac{a_1}{a_0}$ DC gain $=-\dfrac{R_2}{R_1}$ HF gain $=-\dfrac{C_1}{C_2}$

2. Filtros de 1ª e 2ª ordem (cont.)

2.1. Filtros de 1ª ordem (cont.)

$T(s)$	Singularities	$\lvert T \rvert$ and ϕ	Passive Realization	Op Amp–RC Realization
All pass (AP) $T(s) = -a_1 \frac{s-\omega_0}{s+\omega_0}$ $a_1 > 0$			 $CR = 1/\omega_0$ Flat gain $(a_1) = 0.5$	 $CR = 1/\omega_0$ Flat gain $(a_1) = 1$

2. Filtros de 1ª e 2ª ordem (cont.)

2.2. Secções Biquadráticas

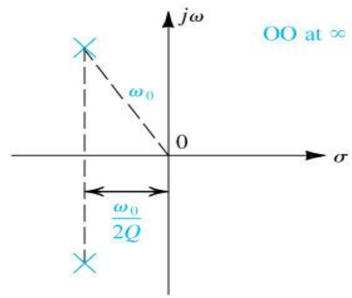
<table>
<tr><th>Filter Type and T(s)</th><th>s-Plane Singularities</th><th>|T|</th></tr>
<tr><td>

(a) Low pass (LP)

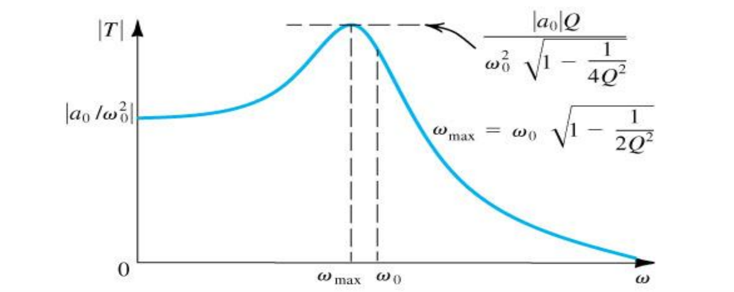
$$T(s) = \frac{a_0}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$$\text{DC gain} = \frac{a_0}{\omega_0^2}$$

</td><td>



</td><td>



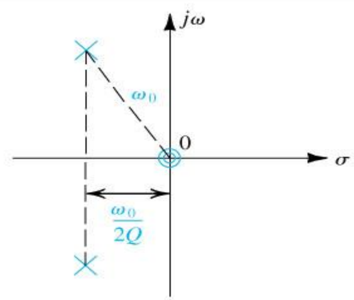
</td></tr>
<tr><td>

(b) High pass (HP)

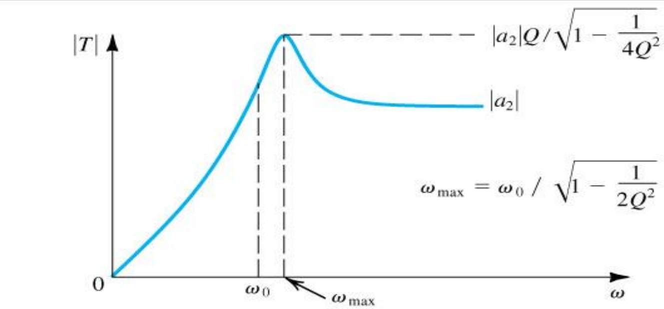
$$T(s) = \frac{a_2 s^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$$\text{High-frequency gain} = a_2$$

</td><td>



</td><td>



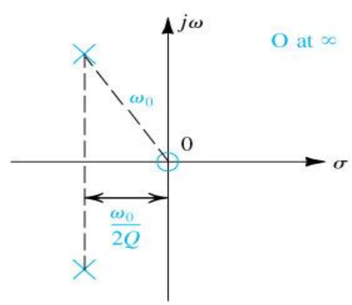
</td></tr>
<tr><td>

(c) Bandpass (BP)

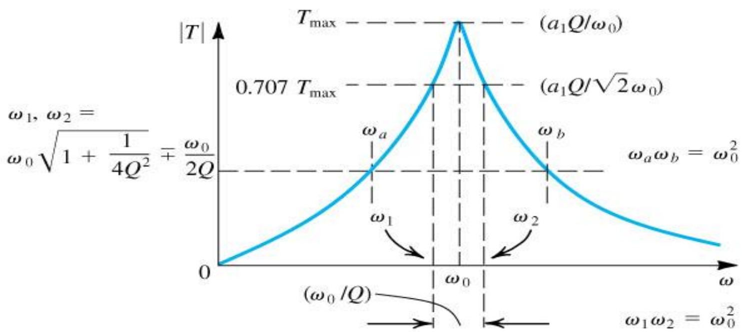
$$T(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$$\text{Center-frequency gain} = \frac{a_1 Q}{\omega_0}$$

</td><td>



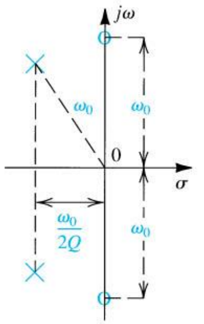
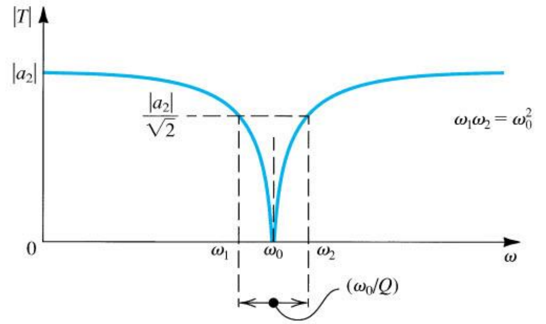
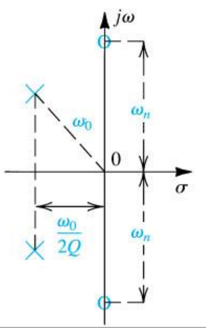
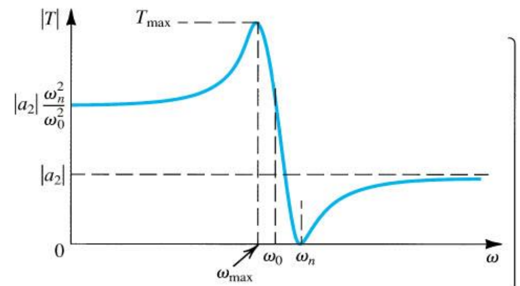
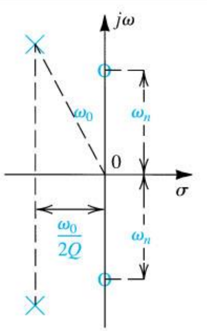
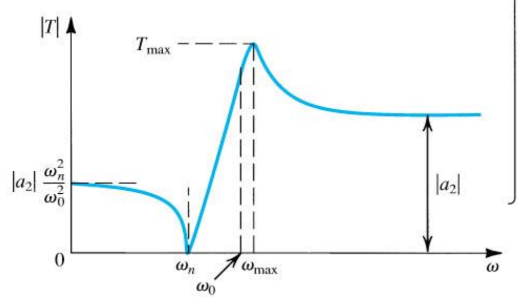
</td><td>



</td></tr>
</table>

2. Filtros de 1ª e 2ª ordem (cont.)

2.2. Secções Biquadráticas (cont.)

Filter Type and $T(s)$	s-Plane Singularities	$\|T\|$
(d) Notch $T(s) = a_2 \dfrac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + s\dfrac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$ DC gain = High-frequency gain $= a_2$		
(e) Low-pass notch (LPN) $T(s) = a_2 \dfrac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + s\dfrac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$ $\omega_n \geq \omega_0$ DC gain $= a_2 \dfrac{\omega_n^2}{\omega_0^2}$ High-frequency gain $= a_2$		 $\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{\omega_n^2}{\omega_0^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{2Q^2}\right) - 1}{\dfrac{\omega_n^2}{\omega_0^2} + \dfrac{1}{2Q^2} - 1}}$ $T_{max} = \dfrac{\|a_2\| \, \|\omega_n^2 - \omega_{max}^2\|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{max}^2)^2 + \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 \omega_{max}^2}}$
(f) High-pass notch (HPN) $T(s) = a_2 \dfrac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + s\dfrac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$ $\omega_n \leq \omega_0$ DC gain $= a_2 \dfrac{\omega_n^2}{\omega_0^2}$ High-frequency gain $= a_2$		

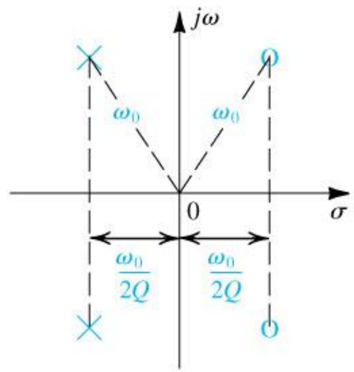
2. Secções Biquadráticas (cont.)

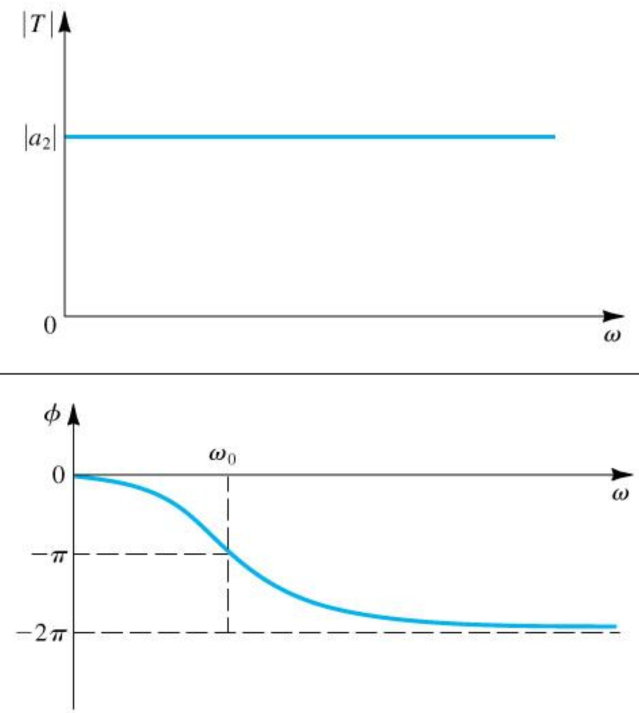
2.2. Secções Biquadráticas (cont.)

(g) All pass (AP)

$$T(s) = a_2 \frac{s^2 - s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Flat gain $= a_2$

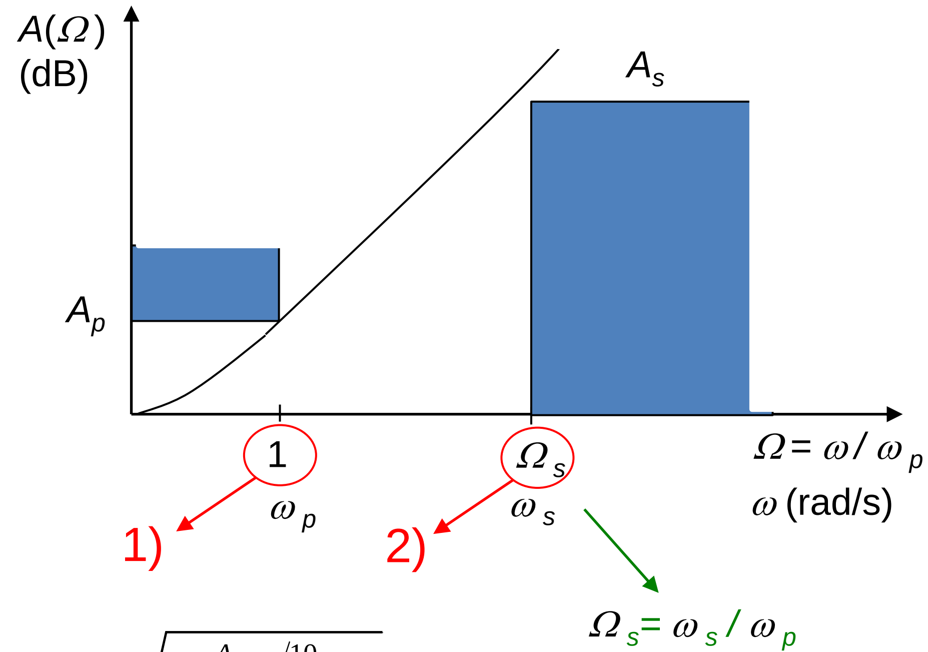




3. Filtros de Butterworth e Chebyshev

3.1. Butterworth

$$A(\Omega)=10\log(1+\varepsilon^2\Omega^{2n})$$



Características:

- Polinomial
- Monotónica
- Maximamente plana na origem

Procedimento:

1) $A(1)=10\log(1+\varepsilon^2)=A_p \Rightarrow \varepsilon$

$$A_{MAX}=A(\omega)\Big|_{\omega=\omega_p}=10\log_{10}\left(1+\varepsilon^2\right)\Rightarrow\varepsilon=\sqrt{10^{A_{MAX}/10}-1}$$

2) $A(\Omega_s)=10\log(1+\varepsilon^2\,\Omega_s^{2n})\geq A_s \Rightarrow n$

$$A_{MIN}=A(\omega)\Big|_{\omega=\omega_s}=10\log_{10}\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^{2n}\right]\Rightarrow n\geq\frac{\log_{10}\left(\dfrac{10^{A_{MIN}/10}-1}{\varepsilon^2}\right)}{\log_{10}\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_p}\right)^2}$$

3) $T(s)=H^{-1}(\hat{S})\Big|_{\hat{S}=\sqrt[n]{\varepsilon}\,\frac{s}{\omega_p}}$

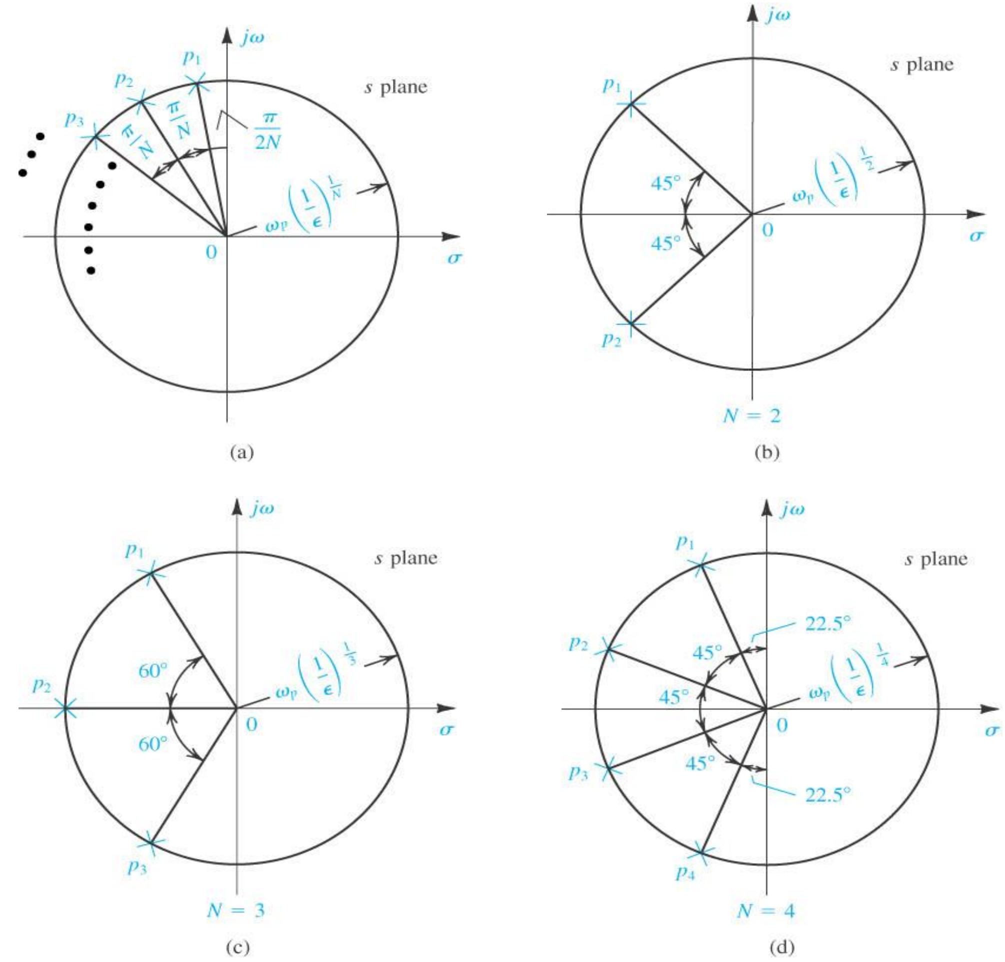
3. Filtros de Butterworth e Chebyshev

3.1. Butterworth (cont.)

<u>Localização dos Pólos</u>:

$H(\hat{S})H^*(\hat{S})=|H(\hat{S})|^2$ tem as raízes igualmente distribuídas sobre uma circunferência unitária, com simetria no eixo imaginário. Para $H(\hat{S})$ escolhem-se as raízes que se situam no SPCE (para que o filtro seja estável).

Ordem	$H(\hat{S})$
1	$\hat{S}+1$
2	$1+1{,}414\,\hat{S}+\hat{S}^2$
3	$(\hat{S}+1)(\hat{S}^2+\hat{S}+1)$
4	$(\hat{S}^2+0{,}765\,\hat{S}+1)(\hat{S}^2+1{,}848\,\hat{S}+1)$
5	$(\hat{S}+1)(\hat{S}^2+0{,}618\,\hat{S}+1)(\hat{S}^2+1{,}618\,\hat{S}+1)$



3. Filtros de Butterworth e Chebyshev

3.1. Butterworth (cont.)

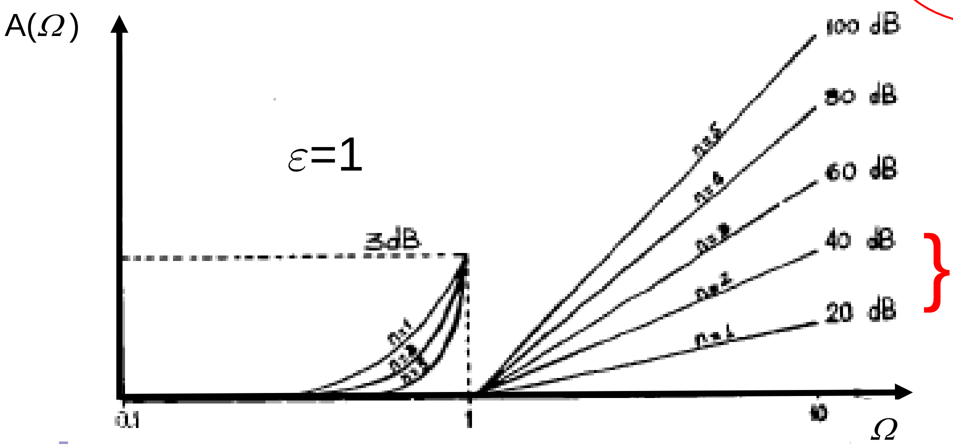
Polinomial e Maximamente Plana:

$$|H(j\Omega)|^2 = 1 + |k(j\Omega)|^2 \ \text{com} \ |k(j\Omega)| = \varepsilon\Omega^n$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^k}{\partial\Omega^k}|k(j\Omega)| = \varepsilon n(n-1)...(n-k+1)\Omega^{n-k}$$

Atenuação assimptótica:

$$\Omega >> 1 \Rightarrow A(\Omega) \approx 10\log(\varepsilon\,\Omega^n)^2 = 20\log\varepsilon + 20n\log\Omega$$



20ndB/dec

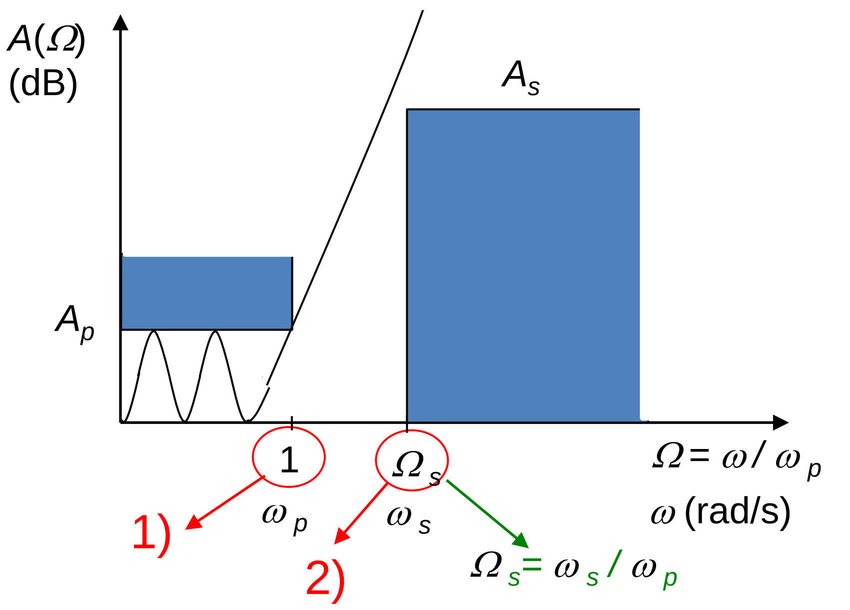
3. Filtros de Butterworth e Chebyshev

3.2 Chebyshev

Características:

- Polinomial
- Ondulação na banda de passagem

$$A(\Omega)=10\log[1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)]$$



Procedimento:

1) $A(1)=10\log(1+\varepsilon^2)=A_p \Rightarrow \varepsilon$

$$\varepsilon=\sqrt{10^{A_{MAX}/10}-1}$$

2) $A(\Omega_s)=10\log(1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega_s)]\geq A_s \Rightarrow n$

3) $$T(s)=\left.\frac{k}{H(S)}\right|_{S=\frac{s}{\omega_p}}$$

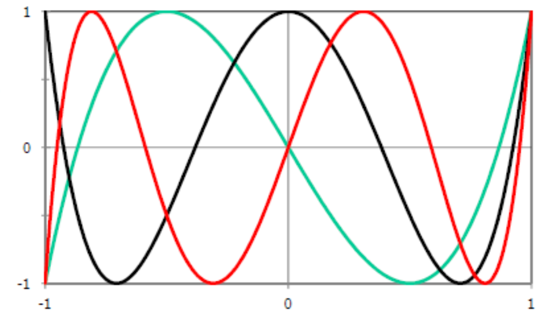
3. Filtros de Butterworth e Chebyshev

3.2 Chebyshev (Cont.)

Localização dos Pólos:

H(S) tem as suas raízes sobre uma elípse

polinómios

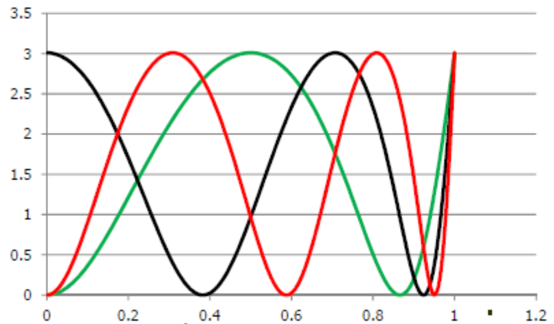


Polinómios de Chebyshev:

$|\Omega|<1$ $C_n(\Omega)=\cos[n\cos^{-1}(\Omega)]$

$$\begin{cases} C_0(\Omega)=1 \\ C_1(\Omega)=\Omega \\ C_2(\Omega)=2\Omega^2-1 \\ C_3(\Omega)=4\Omega^3-3\Omega \\ C_4(\Omega)=8\Omega^4-8\Omega^2+1 \\ C_n(\Omega)=2\Omega C_{n-1}(\Omega)-C_{n-2}(\Omega),\ n\geq 2 \end{cases}$$

$|\Omega|>1$ $C_n(\Omega)=\cosh[n\cosh^{-1}(\Omega)]$



$A(\Omega)=10\log[1+\varepsilon^2 C_n^2(\Omega)]$

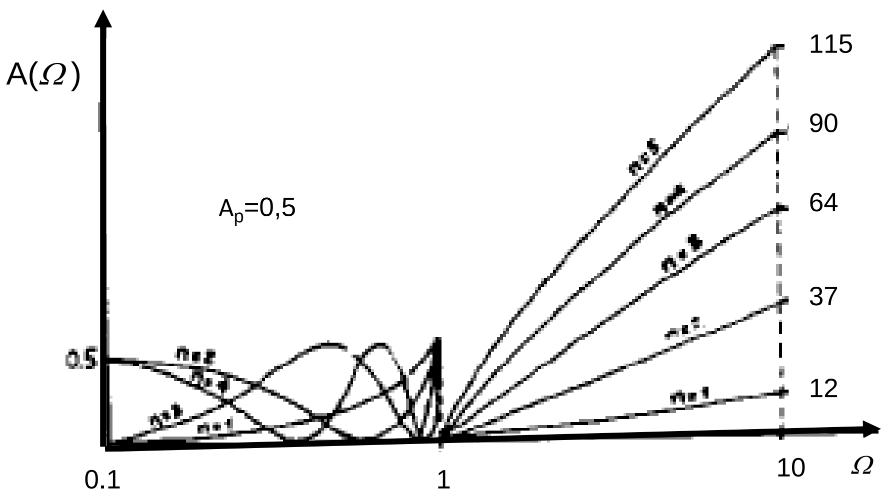
3.2 Chebyshev (Cont.)

<u>Atenuação assimptótica:</u>

$\Omega >> 1$: $A_B(\Omega) \approx 20\log\varepsilon + 20n\log \Omega^n$

$A_C(\Omega) \approx 20\log\varepsilon + 20\log 2^{n-1}\Omega^n$

$\Rightarrow$ $A_C(\Omega) = A_B(\Omega) + 6(n-1)$ dB



- Ap=0.5dB

n	K	D(S)
1	2.862775	$(S + 2.862775)$
2	1.431388	$(S^2 + 1.425625\ S + 1.516203)$
3	0.715694	$(S^2 + 0.626456\ S + 1.142448)(S + 0.626456)$
4	0.357847	$(S^2 + 0.846680\ S + 0.356412)(S^2 + 0.350706\ S + 1.063519)$
5	0.178923	$(S^2 + 0.586245\ S + 0.476767)(S^2 + 0.223926\ S + 1.035784)(S + 0.362320)$

- Ap=1dB

n	K	D(S)
1	1.965227	$(S + 1.965227)$
2	0.982613	$(S^2 + 1.097734\ S + 1.102510)$
3	0.491307	$(S^2 + 0.494171\ S + 0.994205)(S + 0.494171)$
4	0.245653	$(S^2 + 0.673739\ S + 0.279398)(S^2 + 0.279072\ S + 0.986505)$
5	0.122827	$(S^2 + 0.468410\ S + 0.429298)(S^2 + 0.178917\ S + 0.988315)(S + 0.289493)$

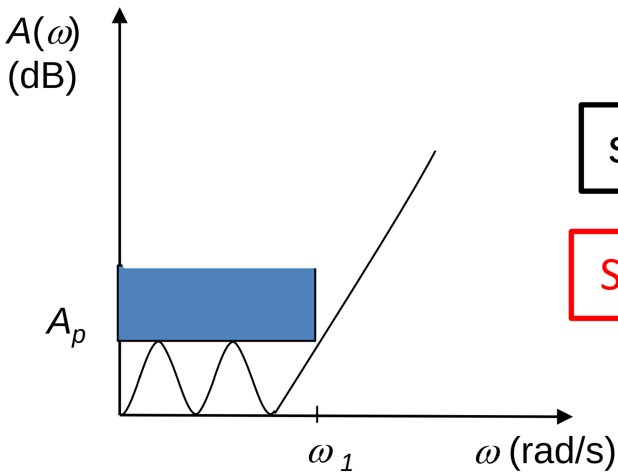
- Ap=3dB

n	K	D(S)
1	1.002377	$(S + 1.002377)$
2	0.501189	$(S^2 + 0.644900\ S + 0.707948)$
3	0.250594	$(S^2 + 0.298620\ S + 0.839174)(S + 0.298620)$
4	0.125297	$(S^2 + 0.411239\ S + 0.195980)(S^2 + 0.170341\ S + 0.903087)$
5	0.062649	$(S^2 + 0.287250\ S + 0.377009)(S^2 + 0.109720\ S + 0.936025)(S + 0.177530)$

4. Transformações de Frequência

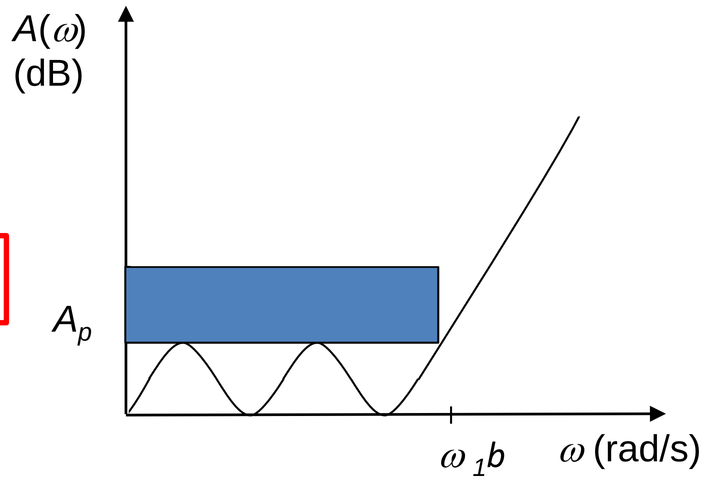
4.1. Transformação Passa-Baixo Passa-Baixo (LP-LP)

Translacção na Frequência



$\boxed{s = s/b}$

$\boxed{S = s/\omega_p}$

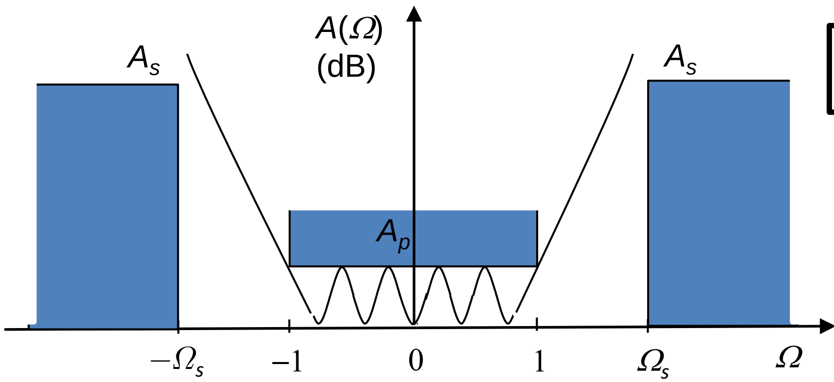


Circuitos RLC $\begin{cases} T(s)=T(R,sL,1/sC) \\ T(s/b)=T[R,s(L/b),1/s(C/b)] \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} R \to R \\ L \to L/b \\ C \to C/b \end{cases}$ $\xrightarrow{Z \to aZ}$ $\begin{cases} R \to aR \\ L \to aL/b \\ C \to C/ab \end{cases}$

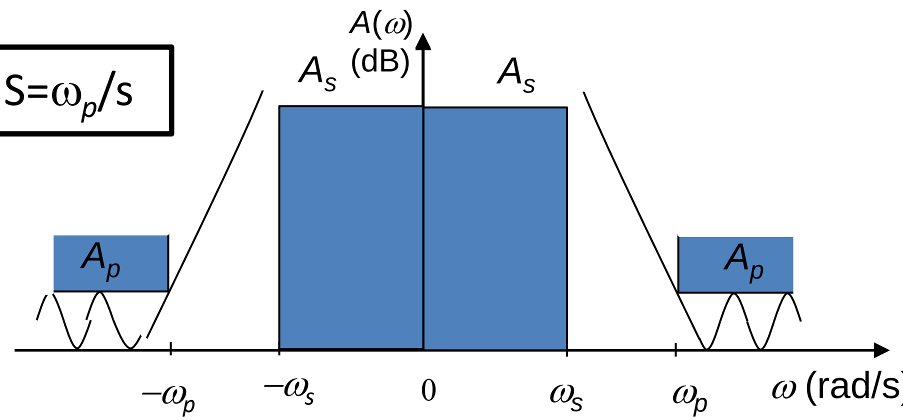
Circuitos RC-activos: $\begin{cases} T(s)=T(R,1/sC) \\ T(s/b)=T[R,1/s(C/b)] \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} R \to R \\ C \to C/b \end{cases}$ $\xrightarrow{Z \to Z/b}$ $\begin{cases} R \to R/b \\ C \to C \end{cases}$

4. Transformações de Frequência

4.2. Transformação Passa-Baixo Passa-Alto (LP-HP)



$$\boxed{S=\omega_p/s}$$



Especificações HP $\rightarrow$ *Especificações* $LP_N \rightarrow H_{LP}(S) \rightarrow T_{HP}(s)$

$$\boxed{\Omega_s=\omega_p/\omega_s}$$

Circuitos RLC:

LP	HP
R	R
SL	$\frac{\omega_p}{s}L=\frac{1}{sC'}\ ,\quad C'=\frac{1}{\omega_p L}$
$\frac{1}{SC}$	$\frac{1}{\frac{\omega_p}{s}C}=sL'\ ,\quad L'=\frac{1}{\omega_p C}$

Circuitos RC-activos:

LP	HP
R	R
$\frac{1}{SC}$	$\frac{1}{\frac{\omega_p}{s}C}=sL'$

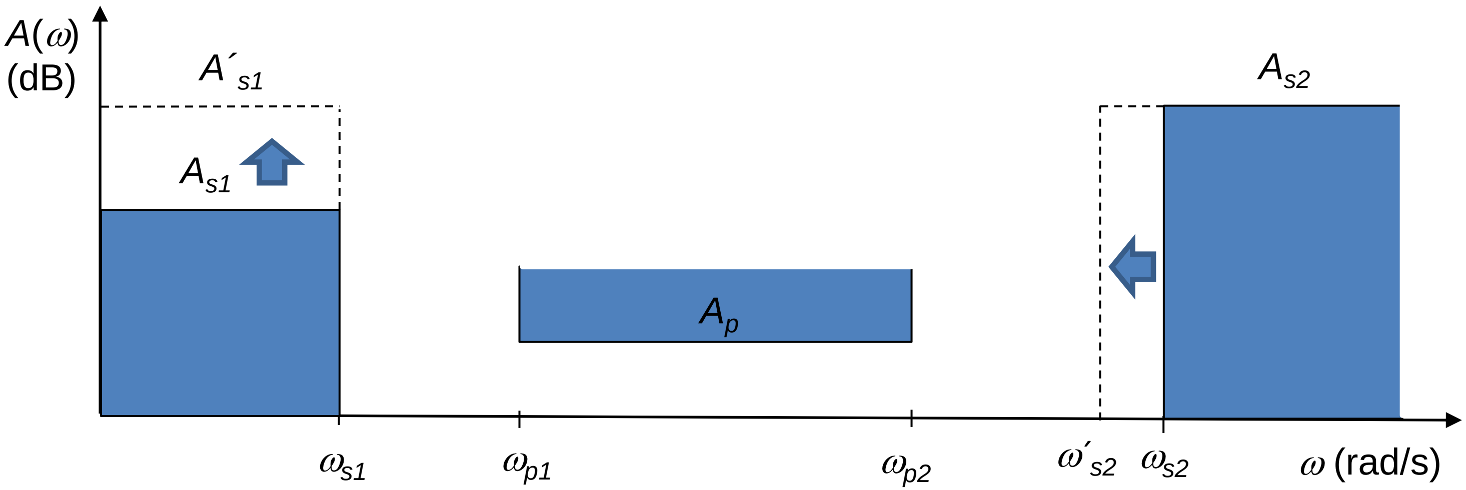
Z=Z/(ks)

$$\begin{cases} \frac{R}{\alpha s}=\frac{1}{sC'}\ ,\quad C'=\frac{k}{R} \\ \frac{1}{k\omega_p C}=R'\ ,\quad R'=\frac{1}{k\omega_p C} \end{cases}$$

4. Transformações de Frequência

4.3. Transformação Passa-Baixo Passa-Banda (LP-BP)

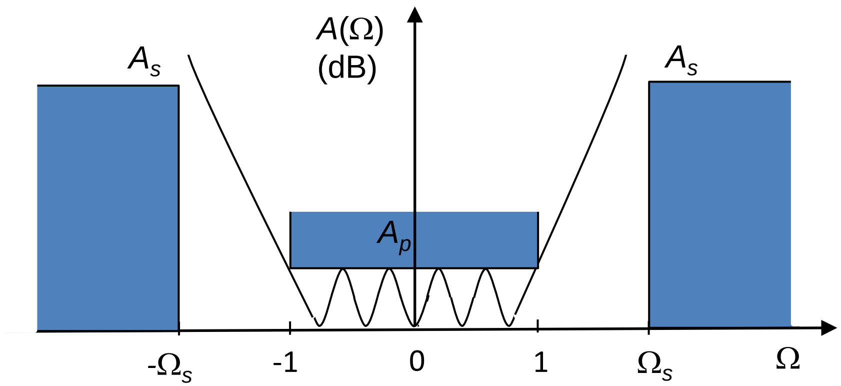
- Filtros simétricos: simetria geométrica ⇒ $\omega_0^2=\omega_{p1}\omega_{p2}$
- Especificações devem ser simétricas: $A_{s1}=A_{s2}$ e $\omega_{s1}\omega_{s2}=\omega_0^2$
- Reduzir ao pior caso (banda de transição mais estreita):



No final: $\omega_0^2=\omega_{p1}\omega_{p2}=\omega_{s1}\omega'_{s2}$ e $A'_{s1}=A_{s2}$

4. Transformações de Frequência

4.3. Transformação Passa-Baixo Passa-Banda (cont.)

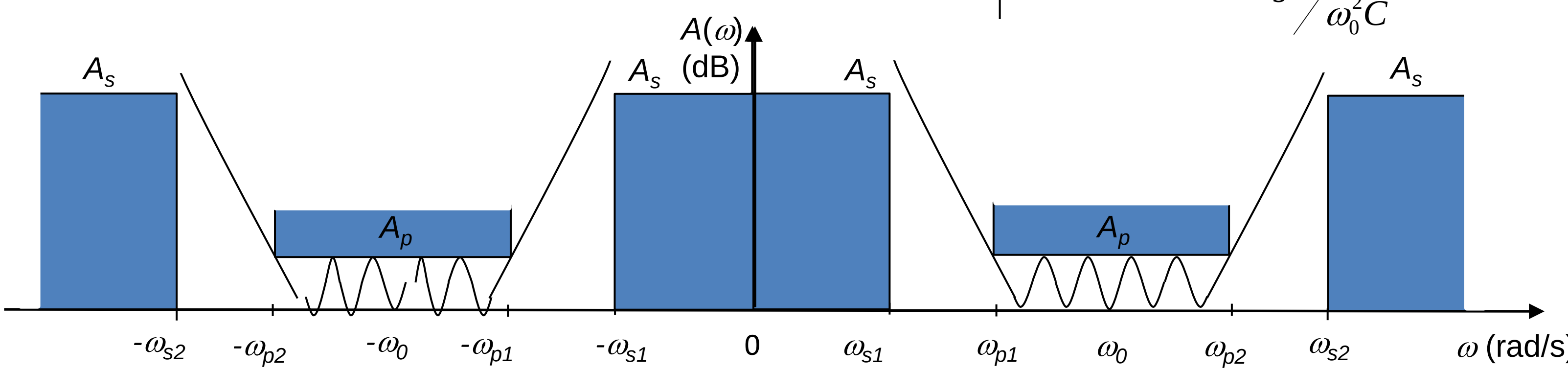


$$S = \frac{s^2 + \omega_0^2}{Bs}$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_{s2} - \omega_{s1}}{\omega_{p2} - \omega_{p1}}$$

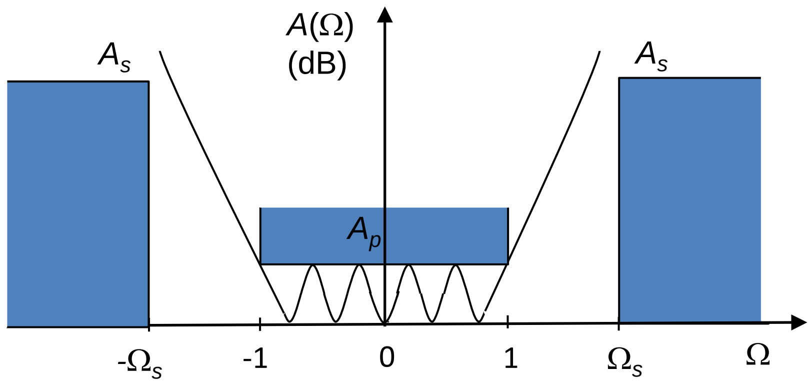
$$B = \omega_{p2} - \omega_{p1}$$

LP	BP
R	R
SL	$\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}L = s\frac{L}{B} + \frac{1}{s\,{}^{B}\!/_{\omega_0^2 L}} = sL' + \frac{1}{sC'}$
SC	$\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}C = s\frac{C}{B} + \frac{1}{s\,{}^{B}\!/_{\omega_0^2 C}} = sC' + \frac{1}{sL'}$



4. Transformações de Frequência

4.4. Transformação Passa-Baixo Rejeita-Banda (LP-BR)

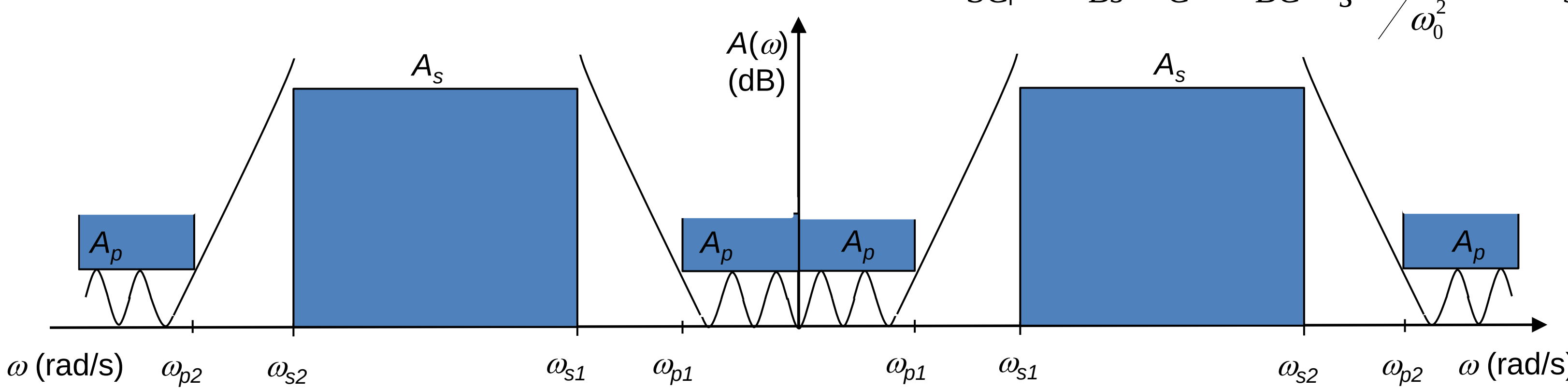


$$\boxed{S = \frac{Bs}{s^2 + \omega_0^2}}$$

$$\boxed{\Omega_s = \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{\omega_{s2} - \omega_{s1}}}$$

$$\boxed{B = \omega_{p2} - \omega_{p1}}$$

LP	BR
R	R
$\frac{1}{SL}$	$\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}\frac{1}{L} = s\frac{1}{BL} + \frac{1}{s\,\mathrm{BL}/\omega_0^2} = sC' + \frac{1}{sL'}$
$\frac{1}{SC}$	$\frac{s^2+\omega_0^2}{Bs}\frac{1}{C} = s\frac{1}{BC} + \frac{1}{s\,\mathrm{BC}/\omega_0^2} = sL' + \frac{1}{sC'}$



6. Realização de Filtros

- Filtros passivos (RLC) – mais usados em energia ou como protótipos
- Filtros RC-Activos – usados em tecnologia híbrida ou VLSI (MHz)
- Filtros digitais – usados em VLSI e baixas/médias frequências
- Filtros com condensadores comutados (sem resistências, VLSI, MHz)
- Filtros de transcondutância (OTA) (VLSI, sem resistências, poucos GHz)
- Filtros electromecânicos (100 kHz a 100 MHz)
- Filtros de onda acústica superficial (SAW) (poucos GHz)
- Filtros de microondas (200 MHz – 100 GHz)

6. Realização de Filtros (cont.)

Critério de avaliação dos filtros: Índice de Sensiblidade Relativa

$$S_x^Y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y / Y}{\Delta x / x} = \frac{x}{Y}\frac{\partial Y}{\partial x} \Rightarrow S_{x_i}^{|T|} = \frac{x_i}{|T|}\frac{\partial |T|}{\partial x_i}$$

Simplesmente terminados: 2 a 20.

Duplamente terminados: 0,2 a 2.

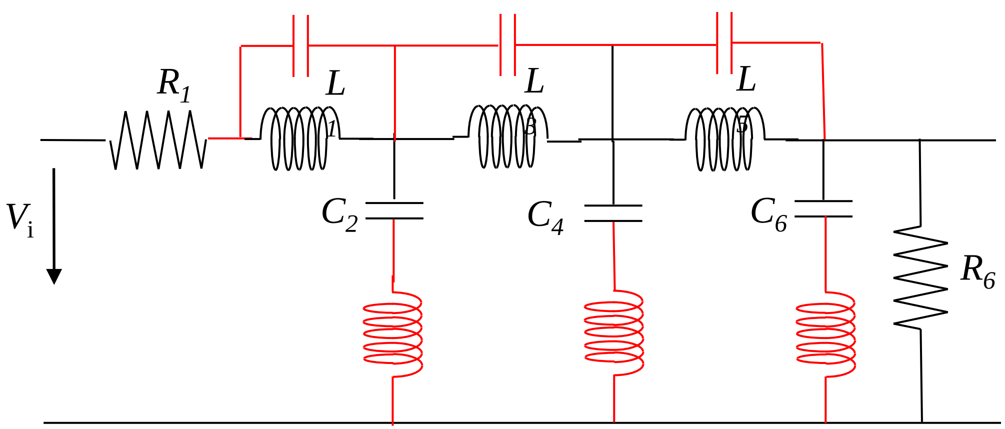
Sensiblidades mais baixas:

1º Filtros LC em escada duplamente terminados

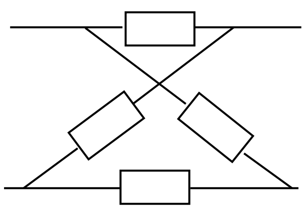
2º Filtros com malhas (loops) encaixados

3º Secções biquadráticas

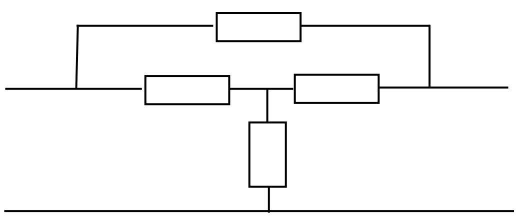
Filtro LC em escada (ladder) duplamente terminados



Filtro em grade (lattice)



Filtro em ponte (bridge)



6. Realização de Filtros (cont.)

Desenho de Filtros RC-Activos

- Por simulação (directa ou operacional) dos melhores filtros passivos – Filtros LC em escada duplamente terminados.

  Exemplo de simulação directa: Generalized Immittance Converter (GIC)

- Por cadeia de secções biquadráticas (com 1 ou mais ampops).

  Exemplo de secções biquadráticas com 1 ampop: Sallen&Key, Rauch.

  Exemplo de secções biquadráticas com mais ampops: TIL

Sec. Biq. com 1 ampop:
- Baixo consumo
- Menos componentes (simples=barato)
- Sensibilidades médias
- Q<10, f_p<GxLB/100

Sec. Biq. com mais de 1 ampop:
- Sensibilidades menores
- Q maiores, f_p<GxLB/50
- Ajuste independente dos parâmetros
- Vários tipos de filtro no mesmo circuito
- Maior consumo
- Mais componentes

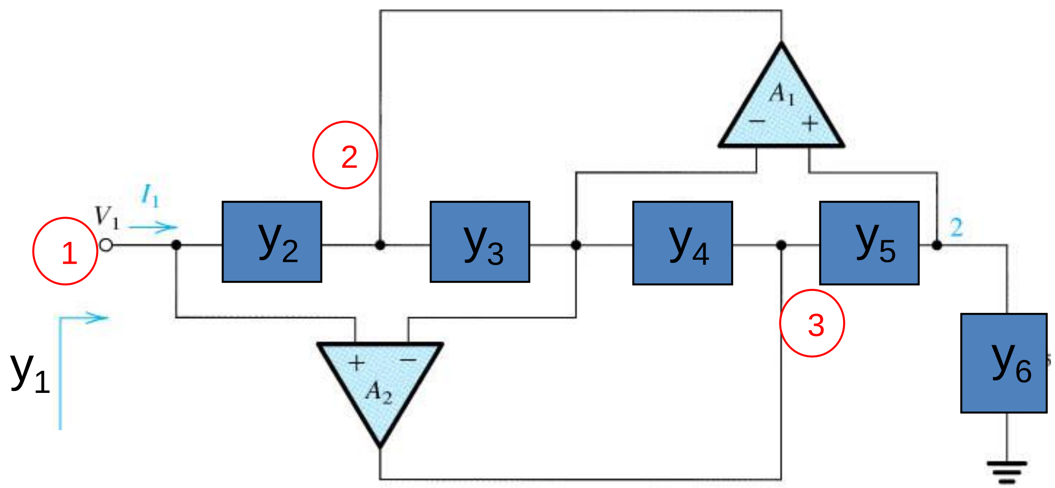
$$B_i(s) = \frac{s^2 + \frac{\omega_{zi}}{Q_{zi}} s + \omega_{zi}^2}{s^2 + \frac{\omega_{pi}}{Q_{pi}} s + \omega_{pi}^2}$$

Organizar a associação de pólos e zeros por forma a que ao longo da cadeia de secções não haja, na banda passante, nem sinais muito grandes (saturação dos ampops) nem muito pequenos (má relação sinal/ruído).

7. Filtros com Simulador de Indutância

7.1. Circuito de simulação de indutância de Antoniou

Simulação Directa - Generalized Imittance Converter (GIC)



$$\begin{cases} y_2(V_1 - V_2) = I_1 & (1) \\ y_3(V_2 - V_1) = y_4(V_1 - V_3) & (2) \\ y_5(V_3 - V_1) = y_6 V_1 & (3) \end{cases}$$

$$y_1 = \frac{y_2 y_4 y_6}{y_3 y_5}$$

Bobine à massa: Y_L=1/sL → Condensadores em 3 ou 5. O resto resistências.

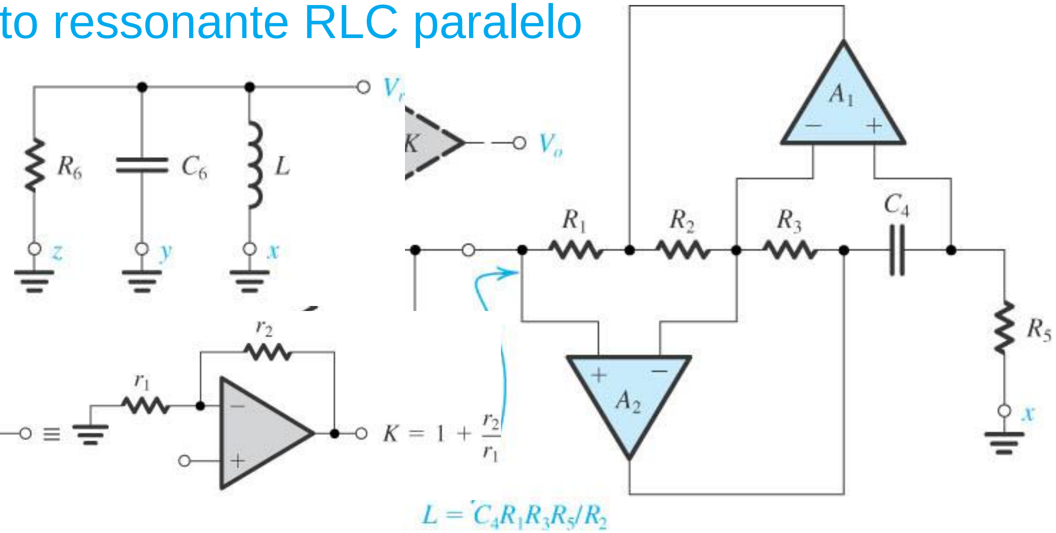
Bobine flutuante: 2 GICs, um de cada lado! Não é razoável. → Método de Bruton

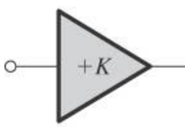
7. Filtros com Simulador de Indutância (cont.)

7.2. Circuito ressonante RLC paralelo

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_6}}$$

$$Q = \omega_0 C_6 R_6$$



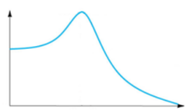


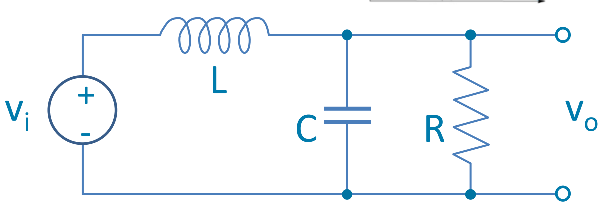
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_4 C_6 R_1 R_3 R_5 / R_2}}$$

$$Q = R_6 \sqrt{\frac{C_6}{C_4} \frac{R_2}{R_1 R_3 R_5}}$$

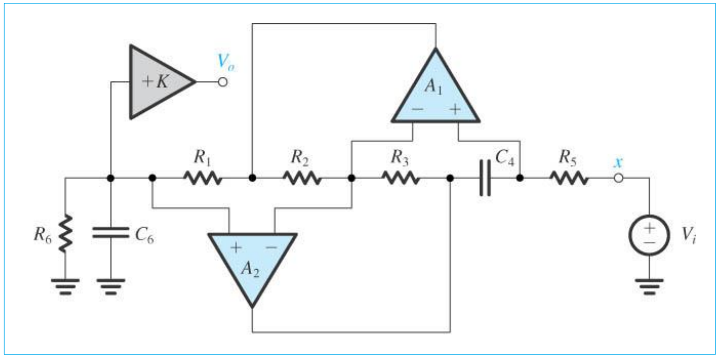
7.3. Filtros baseados no circuito ressonante RLC paralelo

7.3.1. Passa-baixo





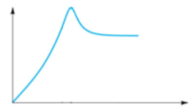
$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{Z_R // Z_C}{Z_L + Z_R // Z_C} = \frac{\dfrac{R/sC}{R+1/sC}}{sL + \dfrac{R/sC}{R+1/sC}} = \frac{\dfrac{1}{LC}}{s^2 + \dfrac{1}{CR}s + \dfrac{1}{LC}}$$

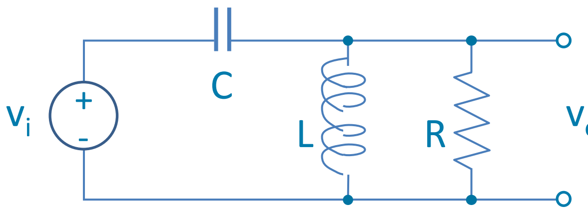


$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{K\dfrac{1}{L_{eq}C_6}}{s^2 + \dfrac{1}{C_6R_6}s + \dfrac{1}{L_{eq}C_6}} \qquad com \qquad L_{eq} = \frac{R_1R_3R_5C_4}{R_2}$$

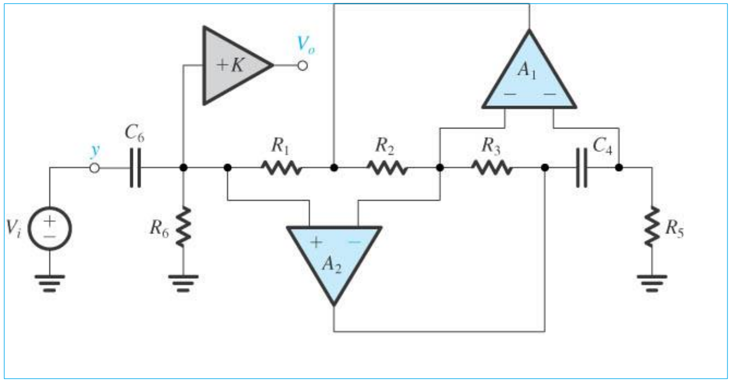
7. Filtros com Simulador de Indutância (cont.)

7.3.2. Passa-alto



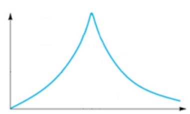


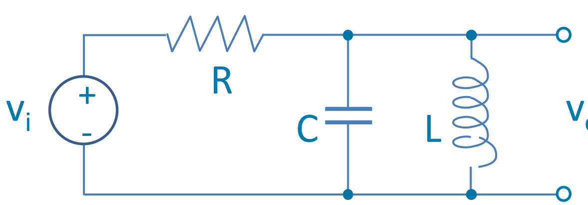
$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{Z_R//Z_L}{Z_C+Z_R//Z_L}=\frac{\dfrac{sLR}{R+sL}}{\dfrac{1}{sC}+\dfrac{sLR}{R+sL}}=\frac{s^2}{s^2+\dfrac{1}{CR}s+\dfrac{1}{LC}}$$



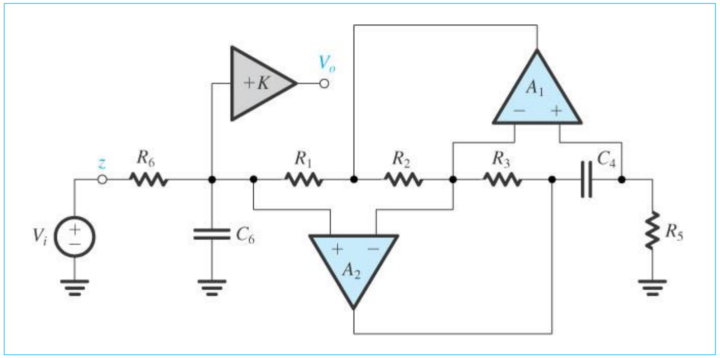
$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{Ks^2}{s^2+\dfrac{1}{C_6R_6}s+\dfrac{1}{L_{eq}C_6}} \qquad com \qquad L_{eq}=\frac{R_1R_3R_5C_4}{R_2}$$

7.3.3. Passa-banda





$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{Z_L//Z_C}{Z_R+Z_L//Z_C}=\frac{\dfrac{sL/sC}{sL+1/sC}}{R+\dfrac{sL/sC}{sL+1/sC}}=\frac{\dfrac{1}{CR}s}{s^2+\dfrac{1}{CR}s+\dfrac{1}{LC}}$$

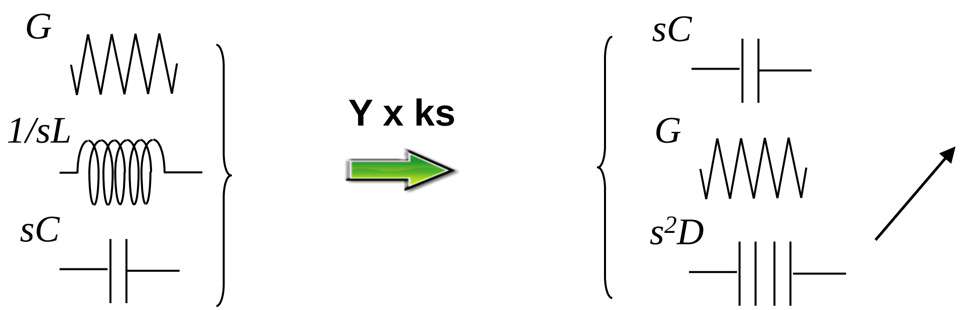


$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{K\dfrac{1}{C_6R_6}s}{s^2+\dfrac{1}{C_6R_6}s+\dfrac{1}{L_{eq}C_6}} \qquad com \qquad L_{eq}=\frac{R_1R_3R_5C_4}{R_2}$$

7. Filtros com Simulador de Indutância (cont.)

Método de Bruton (conversão de impedâncias)

Se multiplicarmos todas as impedâncias de um circuito pelo mesmo factor, a função de transferência não se altera (pois é função homogénia de grau zero).

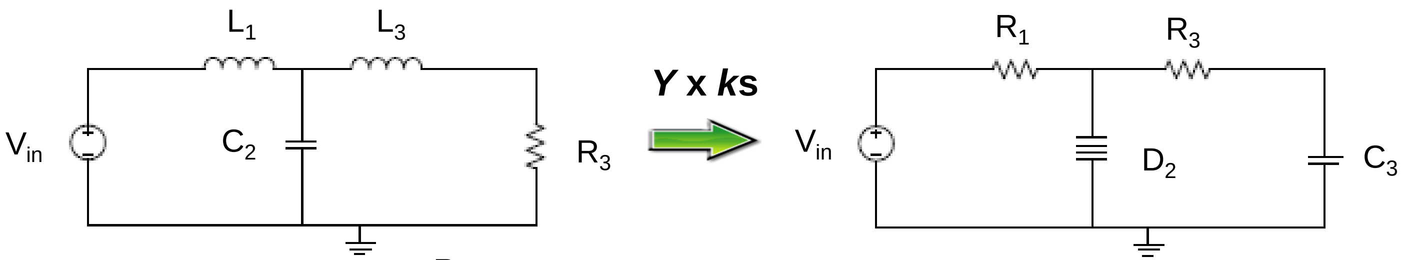


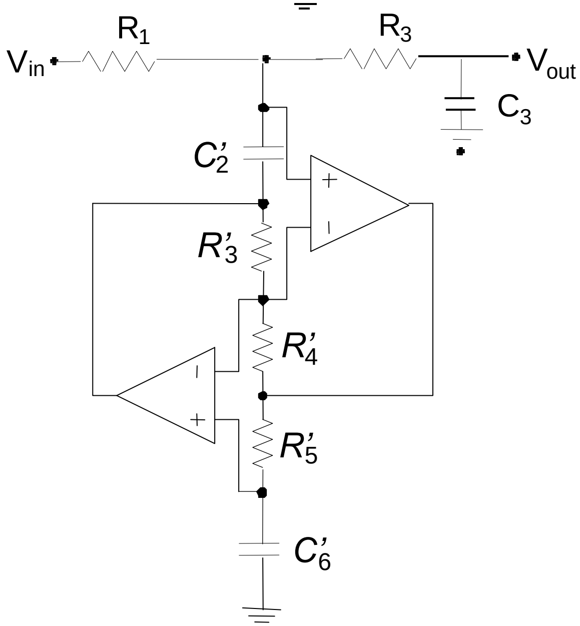
Os super condensadores à massa simulam-se usando GICs com 2 condensadores distribuídos por 2, 4, ou 6. Mas os ampops não são ideais! Têm GxLB finito. Então não é indiferente a escolha da localização dos condensadores.

Elemento a simular	**Localização**	**Condição de compensação**
Bobine	C_5 C_3	$G_3=G_4$ $B_1G_6=B_2G_5$
Super-condensador	C_2, C_6 C_2, C_4 C_4, C_6	$G_3=G_4$ $B_1G_6=B_2G_5$ impossível

7. Filtros com Simulador de Indutância (cont.)

Exemplo: Filtro passa-baixo de 3ª ordem





Equações de dimensionamento

$$
\begin{cases}
G_1 = \dfrac{k}{L_1} \\[2ex]
G_3 = \dfrac{k}{L_3} \\[2ex]
C_3 = \dfrac{k}{R_3} \\[2ex]
D_2 = kC_2 = \dfrac{C_2' G_4' C_6'}{G_3' G_5'}
\end{cases}
$$

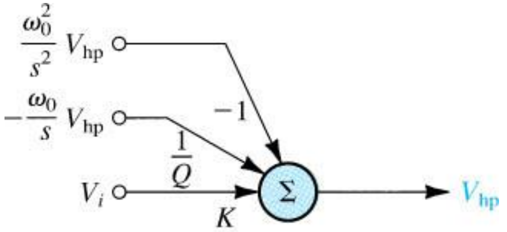
$C'_2=C'_6$ e $R'_3=R'_4=R'_5$ se possível

8. Filtros de 2ª ordem utilizando integradores

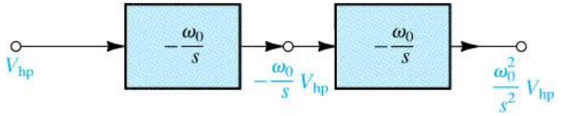
8.1. Derivação da secção biquadrática com dois integradores

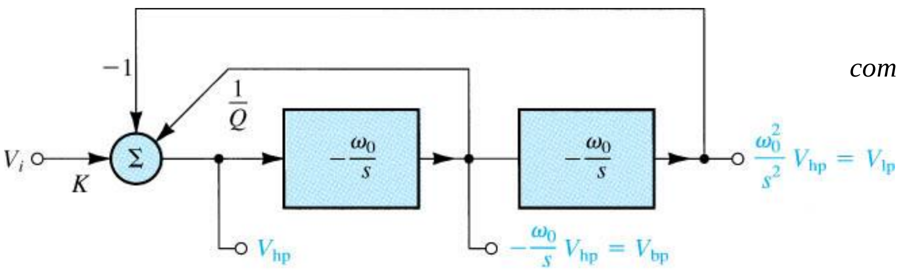
Considerando por exemplo a função de transferência de um filtro passa alto de 2ª ordem:

$$\frac{v_{hp}}{v_i} = \frac{Ks^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad v_{hp} + \frac{1}{Q}\left(\frac{\omega_0}{s}v_{hp}\right) + \left(\frac{\omega_0^2}{s^2}v_{hp}\right) = Kv_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{hp} = Kv_i - \frac{1}{Q}\frac{\omega_0}{s}v_{hp} - \frac{\omega_0^2}{s^2}v_{hp}}$$



8.2. Secção biquadrática de Kerwin-Huelsman-Newcomb (KHN)



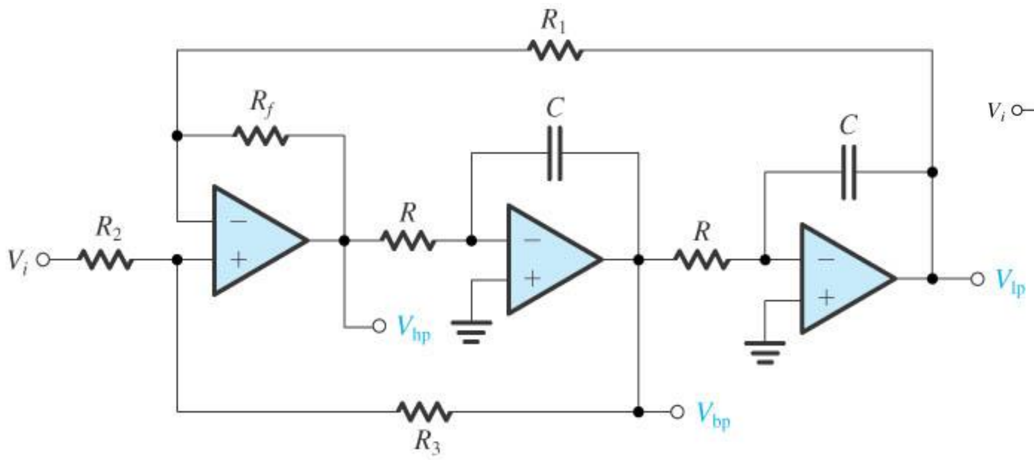


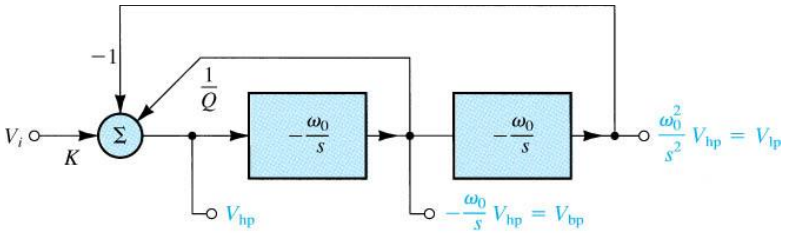
$$v_{hp} = \frac{R_3}{R_2+R_3}\left(1+\frac{R_f}{R_1}\right)v_i - \frac{R_2}{R_2+R_3}\left(1+\frac{R_f}{R_1}\right)\left(-\frac{1}{sRC}\right)v_{hp} - \frac{R_f}{R_1}\left(\frac{1}{R^2C^2s^2}\right)v_{hp}$$

$$v_{bp} = -\frac{1}{sRC}v_{hp} \qquad v_{lp} = -\frac{1}{sRC}v_{bp}$$

$$com \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad e \quad \frac{R_2}{R_3} = 2Q-1, \; K = 2-\frac{1}{Q} \quad se \quad \frac{R_f}{R_1} = 1$$

8.2. Secção biquadrática de Kerwin-Huelsman-Newcomb (KHN) (cont.)

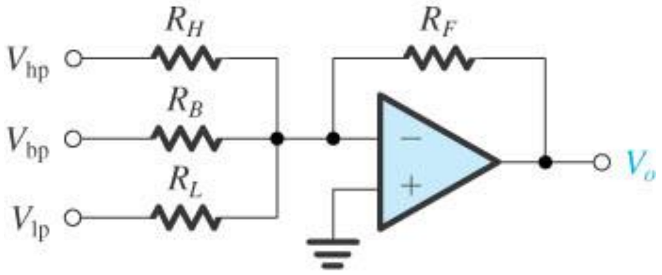




Equações de Dimensionamento

$$\frac{R_f}{R_1} = 1 \qquad \frac{R_3}{R_2} = 2Q - 1 \qquad K = \frac{2R_3}{R_2 + R_3}$$

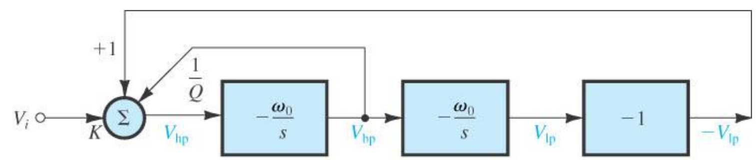
Para obter zeros de transmissão:

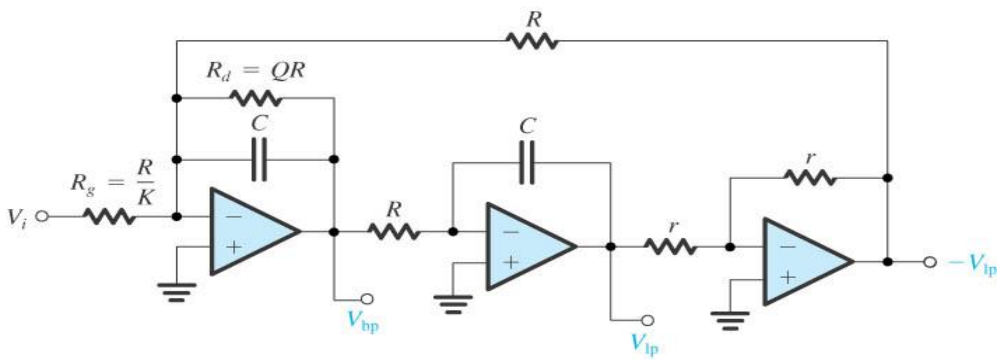


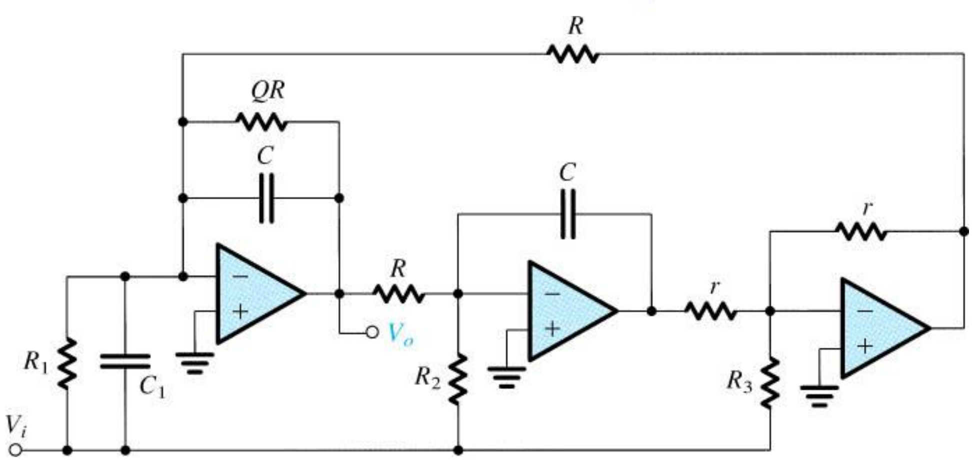
$$\frac{V_o}{V_i}(s) = -k\frac{\frac{R_F}{R_H}s^2 - \frac{R_F}{R_B}\omega_0 s + \frac{R_F}{R_L}\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

8. Filtros de 2ª ordem utilizando integradores

8.3 Secção biquadrática Tow-Thomas







Equações de Dimensiopnamento

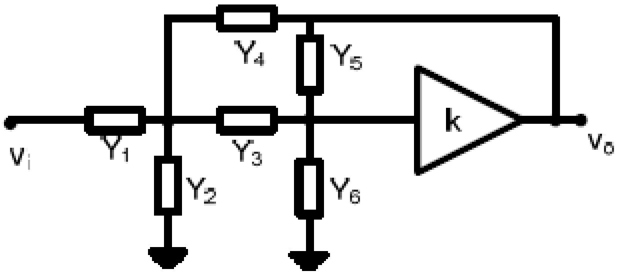
$C_1=AC$, $R_1=R/B$, $R_2=R/E$, $R_3=R/D$

$$\frac{V_o}{V_i}(s) = -\frac{As^2 - \omega_0(B-D)s + E\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

9. Secções biquadráticas com um amplificador

9.2.1. Topologia de realimentação positiva – Secção de Sallen and Key

Consideremos o seguinte circuito utilizando topologia de realimentação positiva:

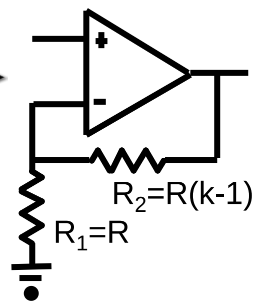


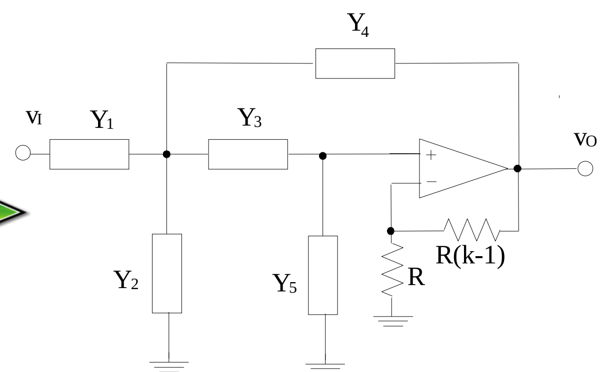
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{kY_1Y_3}{(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)[Y_5(1-k)+Y_3+Y_6]-Y_3(Y_3+kY_4)}$$

Secção de Sallen & Key

k>0 e finito

$y_5=0$



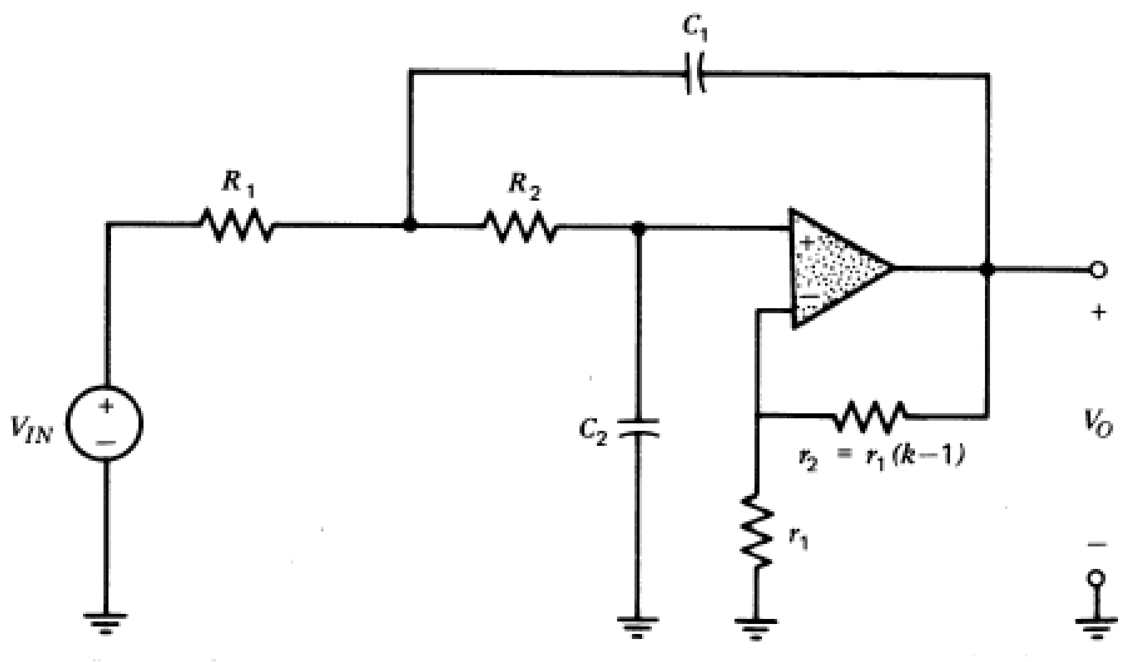


$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{kY_1Y_3}{(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4).Y_5+(Y_1+Y_2).Y_3+(1-k)Y_3Y_4}$$

Tipo de filtro	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Passa-baixo	$1/R_1$	0	$1/R_3$	sC_4	$s.C_5$
Passa-alto	sC_1	0	$s.C_3$	$1/R_4$	$1/R_5$
Passa-banda	$1/R_1$	$s.C_2$	$s.C_3$	$1/R_4$	$1/R_5$

9. Secções biquadráticas com um amplificador

9.2.1. Circuito passa-baixo de Sallen and Key (cont.)



$$\frac{v_O}{v_{IN}} = \frac{\dfrac{k}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s\left(\dfrac{1}{R_1 C_1} + \dfrac{1}{R_2 C_1} + \dfrac{1-k}{R_2 C_2}\right) + \dfrac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \qquad k = 1 + \frac{r_2}{r_1}$$

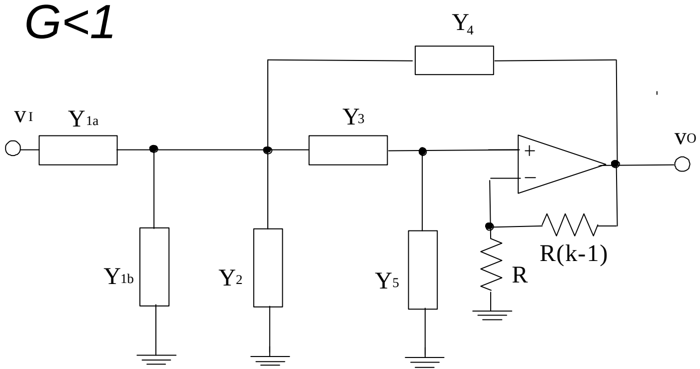
9. Secções biquadráticas com um amplificador

9.2.1. Circuito passa-baixo de Sallen and Key (cont.)

Alteração da constante de ganho

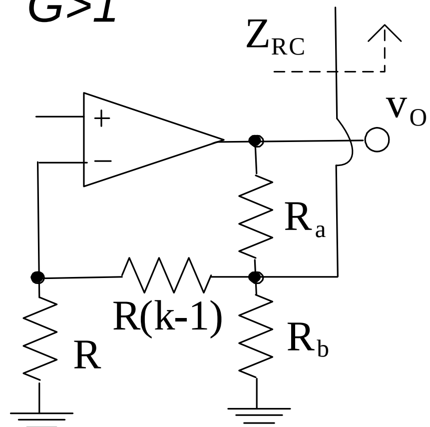
$$\frac{V_o}{V_i} = G\frac{kY_1Y_3}{(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4).Y_5+(Y_1+Y_2).Y_3+(1-k)Y_3Y_4}$$

G<1



$$\begin{cases} Z_{1a}//Z_{1b}=Z_1 \\ \dfrac{Z_{1b}}{Z_{1a}+Z_{1b}}=G \end{cases}$$

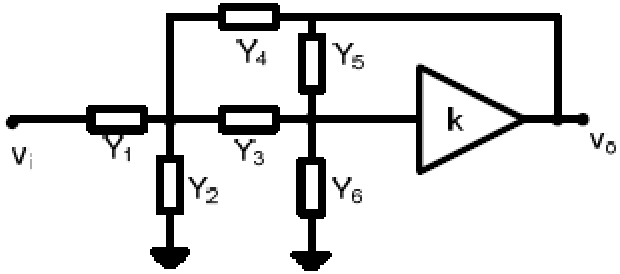
G>1



$$\begin{cases} R_a//R_b << Z_4 \\ R_b << R_1+R_2 \end{cases} \Rightarrow G \approx 1+\frac{R_a}{R_b}$$

9. Secções biquadráticas com um amplificador

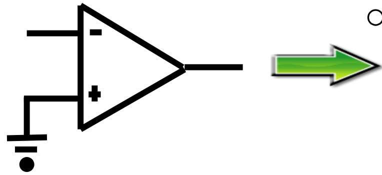
9.2.2. Secção de Rauch

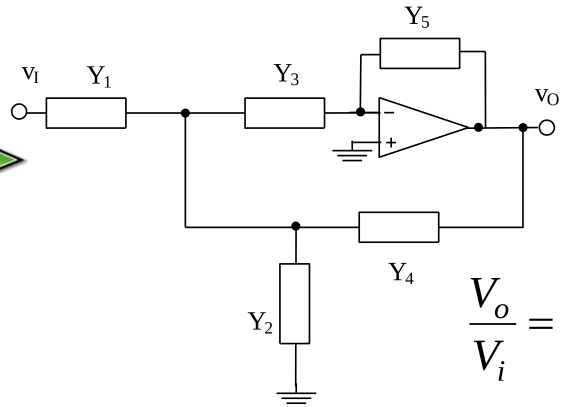


$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{kY_1Y_3}{(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)[Y_5(1-k)+Y_3+Y_6]-Y_3(Y_3+kY_4)}$$

Secção de Rauch

$$\begin{cases} K=-\infty \\ y_6=0 \end{cases}$$





$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{-Y_1Y_3}{(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4).Y_5+Y_3.Y_4}$$

Tipo de filtro	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Passa-baixo	$1/R_1$	$s.C_2$	$1/R_3$	$1/R_4$	$s.C_5$
Passa-alto	$s.C_1$	$1/R_2$	$s.C_3$	$s.C_4$	$1/R_5$
Passa-banda	$1/R_1$	$1/R_2$	$s.C_3$	$s.C_4$	$1/R_5$