2° teste / 1 Exame , Mecânica e Relatividade , 13 janeiro 2020

(1)

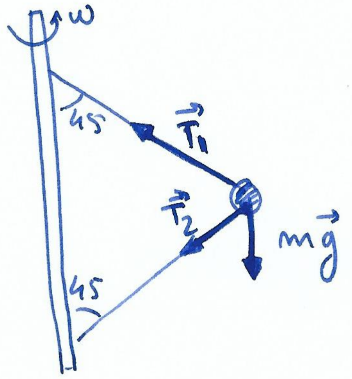
a) o corpo tem um movimento circular com velocidade constante $v = l \sin 45 \cdot \omega$

isto é $v = 8 \cdot 0,6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3,4$ m/s

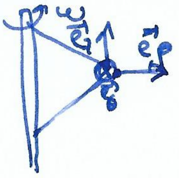
A energia cinética será então

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 3,4^2 = 1,15 \text{ J}$$

b)



c) Em coordenadas cilíndricas, as equações de movimento do corpo são



$\vec{e_\rho}$: $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -T_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - T_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{e_\theta}$: $m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = 0$

$\vec{e_z}$: $m\ddot{z} = T_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - mg$

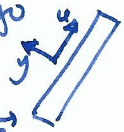
com as restrições $\rho = l\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, $\dot{\theta} = 8$, $z = ct$, $\dot{z} = \ddot{z} = 0$

vindo $\underline{T_1 = 5,2 N}$ e $\underline{T_2 = 2,5 N}$.

(2)

a) Numa colisão elástica frontal com uma parede de massa infinita já verificámos que a partícula inverte o seu momento linear $\vec{p_i}$ e conserva energia cinética

Neste caso podemos escrever a nossa velocidade nas componentes x (paralela à parede) e y (perpendicular à parede). Logo



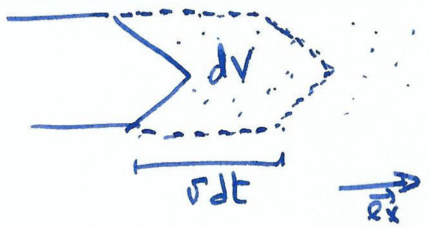
$v_i = -v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e_y} + v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e_x}$ $\quad$ $v_f = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e_y} + v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e_x}$ após a colisão com parede infinita na direção $\vec{e_y}$ (em $\vec{e_x}$ não há colisão).

logo temos

pelo que o momento linear transferido para a parede na direção horizontal $\vec{e_i}$ ($\xrightarrow{\vec{e_i}}$) é igual ao momento inicial da partícula (para haver conservação de momento).

$$\vec{P}_{\text{transferido parede em } \vec{e_i}} = m v_0 \vec{e_i}$$

b) i) O número de partículas que colide com o foguetão em dt é igual às que se encontram no volume dV



$$dV = \pi R^2 \cdot v\,dt \qquad e \qquad \frac{dN}{dV} = 10^{10}\ m^{-3}$$

$$n^o \text{ de colisões} = \pi R^2 \cdot v\,dt \cdot 10^{10}$$

Como em média há tantas partículas a ser desviadas para cima e para baixo, para a direita e para a esquerda, etc., em cada colisão o momento transferido para o foguetão só acontece na direcção do movimento e vale

$$d\vec{p} = -n^o \text{ de colisões} \cdot m v = -\pi R^2 v\, 10^{10} \cdot m v \cdot dt$$

Logo a força que actua sobre o foguetão é $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -\pi R^2\, 10^{10} m \cdot v^2$

$$= -3{,}77 \times 10^{-16} v^2 \ [N]$$

ii) A equação do movimento do foguetão é

$$M \ddot{x} = -3{,}77 \times 10^{-16} v^2$$

Como $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$, temos

$$M \frac{dv}{dt} = -3{,}77 \times 10^{-16} v^2 \qquad \text{ou então} \qquad \frac{1}{v^2} dv = -\frac{3{,}77 \times 10^{-16}}{M} dt$$

vindo $-\frac{1}{v} = -\frac{3{,}77 \times 10^{-16}}{M} t + C$, isto é, $v = \frac{1}{\frac{3{,}77 \times 10^{-16}}{M} t - C}$

Como para $t=0$, $v = v_0$ temos que $v_0 = -\frac{1}{C}$ logo $v = \frac{1}{\frac{3{,}77 \times 10^{-16}}{M} t + \frac{1}{v_0}}$

③

a) No sistema de forças centrais, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ e $\vec{L} = cte$. Temos portanto que a órbita é plana podendo ser descrita por coordenadas polares por

$$\begin{array}{l|l} \vec{e}_r & \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\frac{Mm}{r^2} \\ \vec{e}_\theta & \mu(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \end{array} \longrightarrow |\vec{L}| = cte \quad L = \mu r^2 \dot{\theta}$$

No caso da sonda em órbita em torno do sol, $\mu = \frac{M_{sonda} M_{sol}}{M_{sond} + M_{sol}} \simeq M_{sonda}$ e o sol coincide com CM do sistema. Logo para uma órbita circular temos ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$)

~~Logo~~ $\cancel{M_S}\, r\,\dot{\theta}^2 = G\frac{M\cancel{M_S}}{r^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{G M_{sol}}{r^3}}$ e de $v = \dot{\theta} r$, $v = \sqrt{\frac{G M_{sol}}{r}}$

$$L = m_{sond} r^2 \dot{\theta} \qquad e \qquad E = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{M_{sol} m_{sonda}}{r}.$$

Vem portanto $v = 3{,}84 \times 10^4\ m/s$, $L = 3{,}5 \times 10^{19}\ kg\ m^2 s^{-1}$, $E = -7{,}37 \times 10^{12}\ J$

b) Na órbita elíptica, sabemos que nos pontos à distância máxima e mínima a energia é apenas igual ao potencial efetivo dado por (3)

$$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - G\frac{M_{sol}\, m_H}{r} \qquad \text{com } \mu = \frac{M_{sol}\, m_H}{M_{sol}+m_H} \approx m_H$$

logo $$U_{eff}(r) = \frac{L^2}{2 m_H r^2} - G\frac{M_{sol}\, m_H}{r}$$

e portanto por conservação de energia (a única força que atua é a força de atração gravítica que é uma força conservativa)

$$\frac{L^2}{2 m_H r_{min}^2} - G\frac{M_{sol}\, m_H}{r_{min}} = \frac{L^2}{2 m_H r_{max}^2} - G\frac{M_{sol}\, m_H}{r_{max}}$$

pelo que $L = 1{,}07\times10^{30}\ kg\, m^2 s^{-1}$

Temos portanto que no ponto mais próximo do sol $(\dot r = 0)$ a velocidade é igual a $v = \frac{L}{m_H r_{min}} = 5{,}38\times10^4\ m/s$

c) Para que a órbita seja aberta, $E \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m_H \cdot v^2 - G\frac{M_{sol}\, m_H}{r_{min}} \geq 0$, isto é

$$v \geq \sqrt{\frac{M_{sol}\, G\, 2}{r_{min}}} = 5{,}43\times10^4\ m/s$$

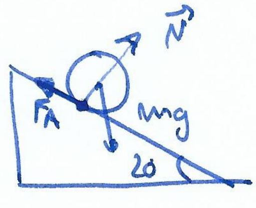
(4)

a) Como o tubo cilíndrico rola sem deslizar no plano inclinado, temos conservação de energia, pois o peso é conservativo, a normal não executa trabalho por ser $\perp$ e a força de atrito é aplicada no ponto de contacto do tubo com o plano que tem velocidade relativa ao plano nula $(\delta r = 0)$. Assim

$$E_i = E_f$$
$$mgh = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \text{com } \omega = \frac{v_{CM}}{R} \text{ por ser rolamento sem deslizamento.}$$

como $h = L\cdot \sin 20$ vem

$$\cancel{m}\cdot g L \sin 20 = \frac{1}{2}\cancel{m} v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{R^2}\cdot\frac{v_{CM}^2}{\cancel{R^2}} \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{g L \sin 20} = 1{,}83\ m/s$$

b) 

Escolhendo como eixos 

e para a direção $\perp$ (torque) $\vec{e}_\perp$

teremos
$\vec{e_x}$: $m\ddot x = mg\sin 20 - F_A$
$\vec{e_y}$: $m\ddot y = N - mg\cos 20$
(torque) $\vec{e}_\perp$: $I\cdot\ddot\theta\, \vec{e}_\perp = R F_A\, \vec{e}_\perp$
(restrição rolamento sem deslizamento) : $\ddot x = R\ddot\theta$

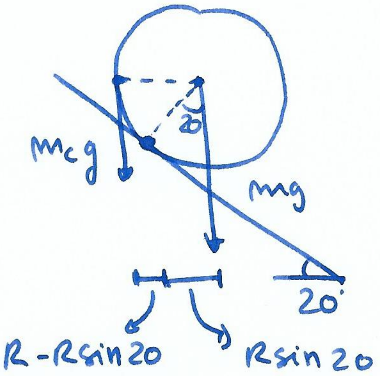
Com a restrição $\ddot y = 0$ $\Rightarrow$ $\cancel{R} F_A = m R^{\cancel{2}}\cdot\frac{\ddot x}{\cancel{R}} \rightarrow F_A = m\ddot x$

Substituindo na 1ª equação vem

$$m\ddot{x} = mg\sin 20 - m\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} = \frac{g\sin 20}{2} = 1{,}68 \text{ m/s}^2$$

e portanto $F_A = m \times 1{,}68 = 0{,}17$ N com o sentido indicado na figura.

c)



Como o corpo está em equilíbrio, o torque em relação ao ponto de contacto do cilindro com o plano é nulo

$\otimes$ $\vec{e}_\perp$

temos portanto que

$$0 = mg\cancel{R}\sin 20 - m_c g(\cancel{R}-\cancel{R}\sin 20)$$

isto é $m_c = \dfrac{m\sin 20}{1-\sin 20} = 0{,}052$ kg

5

a) $T = \gamma T_0$ com $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}999^2}}$

logo $T = 5{,}82 \times 10^{-7}$ s

O percurso realizado pela partícula no laboratório é $\Delta x = T \times 0{,}999c$
$= 174$ m

b) No laboratório o momento linear do sistema é

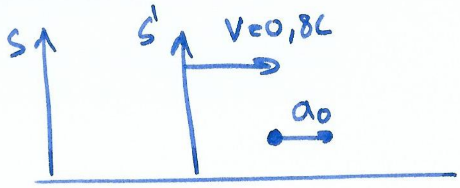
$$P_{sist} = P_1 + P_2 = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m(-v)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

Como as partículas se fundem numa, e o momento do sistema é 0, então a partícula resultante encontra-se em repouso.
Por conservação da energia temos

$$E_1 + E_2 = E_{Mf}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-0{,}999^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-0{,}999^2}} = M_f \cdot c^2 \Rightarrow M_f = 4{,}47 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

c)



$$a_0 = \frac{dv'}{dt'}$$

Se for v' a velocidade da partícula em S', a sua velocidade em S será

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}$$

Diferenciando vem

$$dv = \frac{\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right) - (v' + V)\frac{V}{c^2}}{\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right)^2} \cdot dv'$$

Pela transformação de Lorentz

$$t = \gamma\left(t' + \frac{u'V}{c^2}\right) \quad , \text{ou} \quad dt = \gamma\left(dt' + dx'\frac{V}{c^2}\right)$$

$$= \gamma\, dt'\left(1 + \frac{dx'}{dt'}\frac{V}{c^2}\right)$$

$$= \gamma\, dt'\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right)$$

Pelo que a aceleração da partícula em S

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\dfrac{\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right) - (v' + V)\frac{V}{c^2}}{\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right)^2} \cdot dv'}{\gamma\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right) \quad dt'}$$

Pelo que para a partícula em repouso em S' ($v' = 0$) vem (note que $a_0 = \frac{dv'}{dt'}$)

$$a = \frac{\dfrac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{1}}{\gamma(1 + 0)} a_0 = \frac{a_0}{\gamma^3} = 0{,}22\, a_0$$