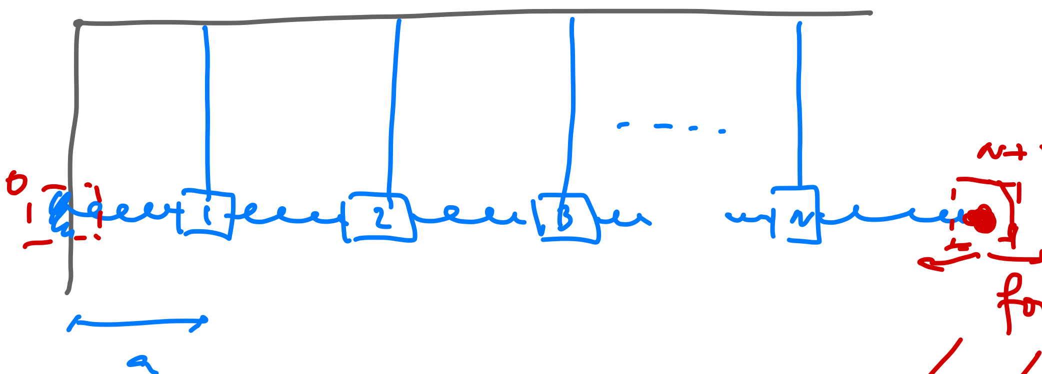
16 th Oct 2nd

Oscilações forçadas (utilizando condições fronteira)

exemplo



força externa

implementada como condição fronteira

$$\boxed{z\cos(\omega_d t)}$$

amplitude

freq. força externa

deslocamento do bloco $\boxed{N+1}$

$\rightarrow z\, e^{-i\omega_d t}$

- soluções steady-state (quando os oscilações livres do sistema já foram atenuadas)

— assume a existência de atrito —

osc. livres

cond. fronteira $\xrightarrow{1}$ forma da função que dá os modos normais

cond. fronteira $\xrightarrow{2}$ fixa o k $\xrightarrow[\text{calcular}]{}$ ω próprias do sistema

osc. forçadas (steady state) $\longrightarrow$ ω_d é fixada externamente

$\longrightarrow$ usar na rel. dispersão para calcular k

$$\boxed{\omega^2 = 2B - 2C \cos ka}$$

rel. dispersão

$$\longrightarrow \quad k = \frac{1}{a} \arccos\left(\frac{2B - \omega_d^2}{2C}\right)$$

Solução

Continuam modos do sist. infinito $e^{\pm i k x}$ com os k determinados a partir da rel. dispersão tal que satisfaçam as cond. fronteira em

- $x = 0 \xrightarrow[\text{parede}]{} \sin(kx) \rightarrow \psi(x,t) = \varphi \sin kx \, e^{-i\omega_d t}$

fixo

amplitude (por determinar)

calculado a partir de ω_d

- $x = (N+1)a = L$

$$\hookrightarrow \psi(L,t) = \varphi \sin kL \, e^{-i\omega_d t} = z e^{-i\omega_d t}$$

$$\Longrightarrow \varphi = \frac{z}{\sin kL}$$

amplitude de oscilação

$z \rightarrow$ amp. força externa

$\sin kL \rightarrow$ depende de ω_d através de k e do tamanho do sistema a situaz. completa

$$\psi(x,t) = \frac{z}{\sin kL} \sin kx \cos \omega_d t$$

se $\omega_d = \omega$ ⟶ $\sin kL = 0$

ω_d: freq. esterna

ω: freq. normal

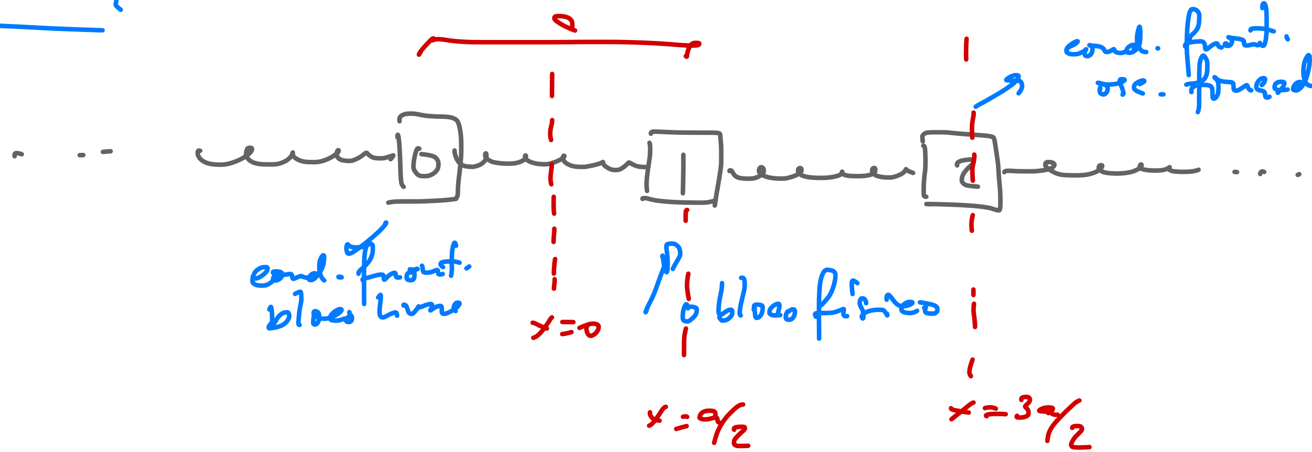
$\psi \to \infty$

(resonância)

outro exemplo : oscilações forçadas c/ o outro extremo livre

pêndulo no limite $g \to 0$, $l \to \infty$

mov. do bloco ? $\longrightarrow$ sistema infinito



já sabemos a rel. dispersão (porque é a mesma para sistema infinito ou finito c/ qualquer número de osciladores)

pêndulos c/ $g \to 0$ $\equiv$ cordas c/ contas

$$\omega_d^2 = \frac{4K}{\mu} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

isto já sabemos

Só calcular k

cond. fronteira

$$\psi_2(t) = d_0 \, e^{-i\omega_d t}$$

extremo livre

$$\psi_0(t) = \psi_1(t)$$

$x=0$ é entre x_0 e x_1

$a/2$

fixa a forma da função

$$\psi(x,t) = z(t) \cos kx$$

$x_2 = 3a/2$ (~~posição~~ do bloco 2) $\hookrightarrow$ f. externo

$$\psi_2(t) = z(t)\cos\left(\frac{3a}{2}k\right)$$

$$\parallel$$

$$d_0 e^{-i\omega_d t}$$

$$\Longrightarrow z(t) = \frac{d_0}{\cos\frac{3ka}{2}} e^{-i\omega_d t}$$

esta cond. front determina a amplitude

Fermo o mov. do bloco

$\propto \mathrm{Re}\{e^{-i\omega_d t}\}$

$$\psi_1(t) = \underbrace{\frac{\cos ka/2}{\cos 3ka/2}}_{\text{feio}} d_0 \cos(\omega_d t)$$

feio $\longrightarrow$ simplificar

$$\frac{\cos\varphi}{\cos 3\varphi}$$

$$\cos 3\varphi = \mathrm{Re}\left(e^{3i\varphi}\right) = \mathrm{Re}\left((e^{i\varphi})^3\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left((\cos\varphi + i\sin\varphi)^3\right) = \dots \cos\varphi\,(1-4\sin^2\varphi)$$

$$\psi_1(t) = \frac{\cancel{\cos ka/2}}{\cancel{\cos ka/2}\,(1-4\sin^2\frac{ka}{2})} d_0 \cos(\omega_d t)$$

$$\psi_1(t) = \frac{d_0}{1 - 4\sin^2\frac{ka}{2}} \cos \omega_d t$$

$$\omega_d^2 = 4\frac{k}{m}\sin^2\frac{ka}{2}$$

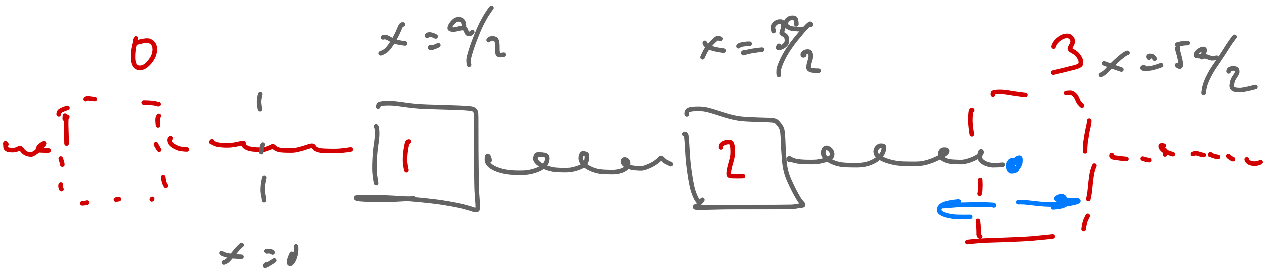
$$\omega_0^2 = k/m$$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2\, 4\sin^2 ka/2$$

$$\boxed{\psi_1(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_d^2}\, d_0 \cos \omega_d t}$$

esta forma de resolver o problema é muito simples de generalizar:

2 blocos (1 e 2)



rel. dispersão é a mesma

$$\omega_d^2 = 4\frac{K}{m}\sin^2\frac{ka}{2}$$

cond. fronteira $\psi_0(t) = \psi_1(t)$ é a mesma

$$\Rightarrow \psi(x,t) = z(t)\cos kx$$

cond. fronteira $\psi_3(t) = d_0 \cos \omega_d t$

$$\Rightarrow z(t) \propto \frac{1}{\cos 5ak/2}$$

para os blocos físicos:

$$\psi_1(t) = \frac{\cos\left(\frac{ka}{2}\right)}{\cos\frac{5ak}{2}}\, d_0 \cos(\omega_d t)$$

$$\psi_2(t) = \frac{\cos\left(\frac{3ka}{2}\right)}{\cos\frac{5ak}{2}}\, d_0 \cos(\omega_d t)$$

é muito fácil re-utilizar para qualquer número de blocos...