PROGRAMA DE ÁLGEBRA LINEAR

Capítulos do livro:

Luis T. Magalhães, **Álgebra Linear como Introdução a Matemática Aplicada**, Texto Editora. (edição a partir de 8ª)

1. Resolução de sistemas de equações lineares por Eliminação de Gauss
2. Espaços lineares
3. Transformações lineares
4. Projecções, comprimento, ortogonalidade, ângulo
5. Determinantes
6. Valores e vectores próprios

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Exemplo: Sistema de 3 equações lineares com 4 incógnitas

$a \in \mathbb{R}$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x & + & y & + & z & + & v & = & 1 \\
4x & + & 2y & + & 2z & + & 2v & = & a \\
-6x & - & 2y & - & z & + & v & = & 0
\end{array}
$$

2 fases: fase de **eliminação** e fase de **substituição**

Fase de eliminação

Operações:

- trocar pares de linhas
- subtrair a uma linha uma linha anterior multiplicada por um número

Objectivo:

- eliminar cada incógnita das equações abaixo
  da equação em que aparece em 1º lugar

Ordem:

- considerar cada uma das incógnitas da esquerda para a direita
- para cada incógnita trabalhar de cima para baixo

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Fase de eliminação - simplificar a notação

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & + & z & + & v & = & 1 \\ 4x & + & 2y & + & 2z & + & 2v & = & a \\ -6x & - & 2y & - & z & + & v & = & 0 \end{array}$$

As operações preservam linhas e colunas.

IDEIA: Consideram-se os coeficientes em conjunto distinguindo as equações (ou linhas) e as incógnitas (ou colunas)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz dos coeficientes (3×4 com componentes em $\mathbb{R}$)

Idem para termos independentes

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz dos termos independentes (matriz coluna 3×1)

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Fase de eliminação - simplificar a notação

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x & + & y & + & z & + & v & = & 1 \\
4x & + & 2y & + & 2z & + & 2v & = & a \\
-6x & - & 2y & - & z & + & v & = & 0
\end{array}
$$

Juntam-se as matrizes (matriz estendida)

$$
\left[\begin{array}{rrrr|r}
2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
4 & 2 & 2 & 2 & a \\
-6 & -2 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Fase de eliminação - executar as operações

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & a \\ -6 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right]$$

Aos 1ºs coeficientes $\neq 0$ em cada linha no final da fase de eliminação chama-se **pivots** (neste caso dois pivots: 2 e 1)

Se $a \neq 2$ não há soluções: **sistema impossível**

Se $a = 2$ o sistema tem soluções: passa-se à fase de substituição

$a = 2$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & v & = & 1 \\ & & y & + & 2z & + & 4v & = & 3 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Fase de substituição

Objectivo:

- resolver para as incógnitas multiplicadas por pivots em função das incógnitas não multiplicadas por pivots (**incógnitas livres**, neste caso z e v)

Ordem:

- considerar cada uma das incógnitas multiplicadas por pivots de baixo para cima

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Fase de substituição - obtenção de solução geral

$a = 2$

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & v & = & 1 \\ & & y & + & 2z & + & 4v & = & 3\,, \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}\,y - \tfrac{1}{2}\,z - \tfrac{1}{2}\,v + \tfrac{1}{2} \\ y &= -2z - 4v + 3\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\,z + \tfrac{3}{2}\,v - 1 \\ y &= -2z - 4v + 3\,, \quad z, v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Infinitas soluções: as incógnitas livres podem ter quaisquer valores e as outras são função das incógnitas livres pelas fórmulas obtidas no final da fase de substituição

Diz-se que é um **sistema indeterminado**

Se não há incógnitas livres e o sistema é possível, tem solução única

Nº de soluções de sistemas de equações lineares=0, 1 ou ∞!

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Sistema de m equações lineares com n incógnitas

$m, n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \,,
\end{aligned}
$$

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ são as **incógnitas**,

$a_{jk} \in \mathbb{R}$, para $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, são os **coeficientes**,

$b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ são as componentes do **termo independente**

Sistema de equações lineares homogéneo se $b_1 = \cdots = b_m = 0$.

Chama-se **sistema homogéneo correspondente** a um sistema de equações lineares ao que tem a mesma matriz de coeficientes.

MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Sistema de *m* equações lineares com *n* incógnitas

Objectivo da fase de eliminação de Gauss:
Obter um sistema equivalente com matriz dos coeficientes que é uma **matriz em escada de linhas**

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \bigodot & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \bigodot & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigodot & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigodot & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigodot & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bigodot & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bigodot =$ **pivots**, $* =$ elementos com valores que podem ser ou não $\neq 0$

Chama-se **característica da matriz em escada de linhas** U a
nº de **pivots** = nº de linhas não inteiramente nulas

Soluções de sistemas de equações lineares homogéneos

Todo sistema homogéneo de m equações lineares com n incógnitas, $m, n \in \mathbb{N}$, tem 1 ou ∞ soluções

Dem. Todas as incógnitas $=0$ é solução. O sistema é possível. Como em geral há 0, 1 ou ∞ soluções, tem-se um dos dois últimos casos. *Q.E.D.*

Todo sistema homogéneo de m equações lineares com n incógnitas, $m, n \in \mathbb{N}$, com mais incógnitas do que equações tem ∞ soluções

Dem. A matriz dos coeficientes é $m \times n$ com $m < n$. O nº de pivots é $\leq m < n$. Há pelo menos uma incógnita livre, logo, ∞ soluções. *Q.E.D.*

Notações gerais para matrizes

Notações usuais para matrizes gerais:

$$A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}, \text{ com } m,n\in\mathbb{N},$$

$$A=\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right]$$

Chama-se **componente, elemento** ou **entrada** ij da matriz a a_{ij}.

Uma **matriz** $m\times n$ com componentes reais é uma função $A:\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\}\to\mathbb{R}$.

Chama-se **dimensão** da matriz a $m\times n$.

Diz-se que é **matriz quadrada** se nº de linhas=nº de colunas.

Chama-se **diagonal principal** de $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ às componentes a_{ii} por ordem crescente de i.

Operações com matrizes: Adição de matrizes e multiplicação por nºs reais

Adição de matrizes com o mesmo número de linhas e com o mesmo número de colunas $m \times n$:

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \ .$$

Multiplicação de números reais c **por matrizes**:

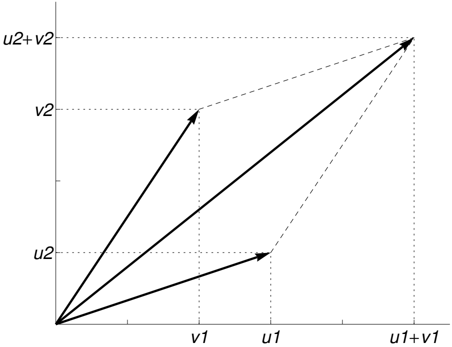
$$cA=[ca_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \ .$$

Representação geométrica de matrizes coluna e da respectiva adição e multiplicação por nºs reais

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix}$$

Representação por coordenadas cartesianas em eixos ortogonais

Adição $\leftrightarrow$ **"regra do paralelogramo"** para forças aplicadas num ponto



Multiplicação por $c \in \mathbb{R} \leftrightarrow$ ampliar, manter ou contrair (resp. se $|c| > 1$, $|c| = 1$, $0 < |c| < 1$) e também reflectir (se $c < 0$), posição $\mathbf{u}$ em relação à origem, ou a transformá-la na origem (se $c = 0$)

Exemplos de adição de matrizes e de multiplicação por nºs reais

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0{,}2 & 3 & \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -100 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & \frac{10}{3} \\ 0{,}7 & -97 & \pi-1 \end{bmatrix}$$

$$(-3)\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0{,}2 & 3 & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \\ -0{,}6 & -9 & -3\pi \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes reais

- A adição de matrizes com dimensões $=$s é associativa e comutativa.
- Existe uma matriz $m\times n$ 0, chamada **matriz zero**, tal que $A+0=A$, para toda matriz A $m\times n$ (é a matriz com todas as componentes 0).
- Para toda matriz A $m\times n$ existe matriz A' $m\times n$ tal que $A+A'=0$. Toda matriz A tem **simétrico**; é $(-1)A$.

São as mesmas propriedades básicas da adição de nºs reais.

Diz-se que o conjunto das matrizes reais $m\times n$ com a adição (tal como $\mathbb{R}$ com $+$) é um **grupo comutativo**.

Propriedades da multiplicação de nºs reais por matrizes reais

- A multiplicação de números reais por matrizes é associativa, *i.e.* $a(bA)=(ab)A$, para $a,b\in\mathbb{R}$, A uma matriz.
- $1A=A$ para toda matriz A.
- $0A=0$ para toda a matriz A.
- A multiplicação de números reais por matrizes é distributiva em relação à adição de números reais e de matrizes:

  $$(a+b)C=aC+bC\,, \qquad\qquad a(C+D)=aC+aD\,,$$

  $a,b\in\mathbb{R}$, C,D matrizes com a mesma dimensão.

Não é uma operação binária entre elementos de um mesmo conjunto, mas sim de conjuntos diferentes ($\mathbb{R}$ e matrizes) que dá matrizes

Operações com matrizes: Produto de matrizes

Produto de matrizes ((nº de colunas da 1ª)=(nº de linhas da 2ª)):

$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$, $B = [b_{jk}]_{j,k=1}^{n,p}$, $\quad AB = C = [c_{ik}]_{i,k=1}^{m,p}$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk}\,.$$

componente ik de $C = AB$ = (linha i de A)(coluna k de B)

Um sistema de m equações lineares com n incógnitas, com
$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$ matriz dos coeficientes,
$\mathbf{x} = [x_j]_{j=1}^{n,1}$ matriz coluna das incógnitas
$\mathbf{b} = [b_j]_{j=1}^{m,1}$ matriz coluna dos termos independentes,
escreve-se com o produto de matrizes

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são as matrizes coluna das colunas de A,

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{a}_j\,.$$

Diz-se que é uma **combinação linear** de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$
com coeficientes, resp., $x_1, \ldots, x_n$.

Exemplos de produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades do produto de matrizes

O produto de matrizes satisfaz (se dimensões são compatíveis):

- $(AB)_{ij} =$(linha i de A) (coluna j de B)
- (coluna j de AB) $= A$ (coluna j de B)
- (linha i de AB) $=$ (linha i de A) B .

Chama-se **matriz transposta** de matriz A à obtida trocando linhas com colunas preservando a ordem; designa-se A^t.

$(A^t)^t = A$.

Diz-se que A é uma matriz **simétrica** se $A^t = A$ (tem de ser quadrada).

Se A tem tantas colunas como linhas de B, $(AB)^t = B^t A^t$.

Propriedades do produto de matrizes

O produto de matrizes satisfaz (se dimensões são compatíveis):

- Associatividade: $A(BC) = (AB)C$.
- Distributividade em relação à adição:

$$A(B+D) = AB+AD\,, \qquad (F+G)A = FA+GA\,.$$

- $AI_n = A$ e $I_n E = E$, em que I_n é a **matriz identidade**.
  É uma matriz quadrada $n \times n$ com componentes 0 excepto na diagonal principal que são 1 .

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Produto de matrizes não é comutativo**: em geral $AB \neq BA$. Prova?
  Pares de matrizes que satisfazem $=$ dizem-se **matrizes comutáveis**.

Se A, B comutam são quadradas com a mesma dimensão.

Princípio de Sobreposição para soluções de sistemas de equações lineares

Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ são soluções de um sistema de equações lineares homogéneo, então $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$ para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ também é solução.

Dem. $A(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2) = c_1 A(\mathbf{u}_1) + c_2 A(\mathbf{u}_2) = c_1 0 + c_2 0 = 0$. *Q.E.D.*

Se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ são soluções de um sistema de equações lineares, então $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ é solução do sistema homogéneo correspondente.

Dem. $A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = A\mathbf{u}_1 - A\mathbf{u}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = 0$. *Q.E.D.*

Logo,

(solução geral de sistema de equações lineares)
= (solução geral do sistema homogéneo correspondente)
+ (solução particular do sistema)

Eliminação de Gauss em termos de produtos por matrizes

Operações da eliminação de Gauss:

1. troca de pares de linhas ij
2. subtracção a linha i de linha anterior j multiplicada por número e_{ij}

1. $\leftrightarrow$produto à esquerda por matriz $m \times m$ P_{ij}
que difere de I_m por troca das linhas ij

Chama-se **matriz de permutação** $m \times m$ a uma matriz cujas linhas são permutação das de I_m.

Quantas são?

As matrizes P_{ij} são casos particulares de matrizes de permutação

2. $\leftrightarrow$produto à esquerda por matriz $m \times m$ E_{ij}
que difere de I_m por ter componente ij $-e_{ij}$

Chama-se **matriz elementar** $m \times m$ a uma matriz que difere de I_m por ter uma componente ij, com $i > j$, $\neq 0$

Fase de eliminação do método de eliminação de Gauss

$\updownarrow$

produtos à esquerda por matrizes de permutação e matrizes elementares

Exemplos de matrizes de permutação

Exemplo:

Matriz de permutação que troca linhas 2,3 de matrizes A $4\times n$, $P_{23}A$?

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P_{ij} = P^t_{ji}$, **quaisquer** $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$, (são matrizes simétricas).

(se B é $m\times 4$ BP_{23} troca as colunas 2 e 3 de B)

Há $4! = 24$ matrizes de permutação 4×4.

Matriz P que reordena linhas $1, 2, 3, 4$ de A para $3, 1, 2, 4$ em PA?

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$P \neq P^t$, $P = P_{23}P_{13}$, $P_{23}P_{13} \neq P_{13}P_{23}$, $P_{23}P_{14} = P_{14}P_{23}$.

Toda matriz de permutação é produto de matrizes de permutação de pares (em geral, com várias possibilidades) *Dem.?*

(se B é $m\times 4$ BP reordena as colunas $1, 2, 3, 4$ para $2, 3, 1, 4$)

Exemplos de matrizes elementares

Exemplo:
Matriz elementar que subtrai à 2ª linha a 1ª multiplicada por 3 e
matriz elementar que subtrai à 3ª linha a 2ª multiplicada por -2
de matrizes A $3\times n$ por, resp. $E_{21}(-3)\,A$ e $E_{32}(2)\,A$?

$$E_{21}(-3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad E_{32}(2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$

Multiplicação sucessiva pelas duas matrizes elementares

$$E_{32}(2)\,E_{21}(-3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-6&2&1\end{bmatrix},\quad E_{21}(-3)\,E_{32}(2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$$

$$E_{32}(2)\,E_{21}(-3)\neq E_{21}(-3)\,E_{32}(2)\,,\quad E_{31}(-1)\,E_{32}(2)=E_{32}(2)\,E_{31}(-1)\,.$$

$$E_{21}(-3)\,E_{31}(-1)\,E_{32}(2)=E_{21}(-3)\,E_{32}(2)\,E_{31}(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}.$$

as componentes fora da diagonal principal do produto são as correspondentes dos factores se a ordem dos factores, da esquerda para a direita, é a da eliminação de Gauss. *Dem.?*

Inversão de matrizes elementares e de permutação

As operações elementares e as permutações de linhas podem ser invertidas:

- Inverter $E_{ij} = E_{ij}(-c)$ que subtrai à linha i a linha j multiplicada por c é somar à linha i a linha j multiplicada por c.

  Corresponde a multiplicar à esquerda pela matriz elementar $E_{ij}(c)$.
  Designa-se E_{ij}^{-1} ($E_{ij}^{-1} E_{ij} = I_m = E_{ij} E_{ij}^{-1}$)
  $$[E_{ij}(x)]^{-1} = E_{ij}(-x)$$
- Inverter $P_{ij} \leftrightarrow$ produto à esquerda por P_{ij}: $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$ (porque $P_{ij} P_{ij} = I_m$);
  Designa-se . Também é $P_{ij}^t = P_{ij}$. Logo
  $$P_{ij}^{-1} = P_{ij} = P_{ij}^t$$
- Toda matriz de permutação P é um produto de matrizes que trocam pares de linhas: $P = P_{i_1 j_1} \cdots P_{i_k j_k}$.

  Inverter um produto é multiplicar por ordem inversa as inversas dos factores, desde que existam: $(XY)^{-1} = Y^{-1} X^{-1}$
  $$P^{-1} = P_{i_k j_k}^{-1} \cdots P_{i_1 j_1}^{-1} = P_{i_k j_k}^t \cdots P_{i_1 j_1}^t = (P_{i_1 j_1} \cdots P_{i_k j_k})^t = P^t$$
  $$P^{-1} = P^t$$

Matrizes triangulares

Matrizes elementares E_{ij} diferem de I_n por componente ij, $(i>j)$ ser $\neq 0$.
Logo, todas componentes acima da diagonal principal são 0.

Chama-se **matriz triangular inferior** (resp. **superior**) a matriz quadrada com as componentes acima (resp. abaixo) da diagonal principal $=0$.

O produto de matrizes triangulares inferiores (resp. superiores) com a mesma dimensão é triangular inferior (resp. superior).

Dem. X, Y triangulares inferiores $(x_{ij}, y_{ij}=0\,, i<j)$.
Se $Z=XY$ é $z_{ij}=\sum_{k=1}^{m} x_{ik}y_{kj}$. Para $i<j$, se $k<j$, é $y_{kj}=0$; se $k\geq j$, é $k>i$ e $x_{ik}=0$; logo, a soma $=0$.

Se X, Y são triangulares superiores, X^t, Y^t são triangulares inferiores, $(XY)^t=Y^tX^t$ também, e XY é triangular superior. *Q.E.D.*

Matrizes elementares da eliminação de Gauss e inversas são triangulares inferiores com 1s na diagonal principal.

Matrizes diagonais

Chama-se **matriz diagonal** a uma matriz quadrada com componentes 0 com a possível excepção das na diagonal principal. Designa-se

$$D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

Se A é $n \times p$ e B é $m \times n$, DA (resp. BD) são as matrizes com cada linha (resp. coluna) multiplicada pela resp. componente na diagonal principal de D, preservando a ordem.

Matrizes regulares

Chama-se **matriz regular** a uma matriz quadrada para a qual a eliminação de Gauss pode ser efectuada sem troca de linhas e leva a pivots em todas as colunas (e linhas).

Factorização triangular de matrizes regulares

Toda matriz regular A tem Factorização Triangular $A = LDU$, com L e U resp. triangular inferior e superior com 1s na diagonal principal, e D diagonal com componentes $\neq 0$ na diagonal principal.

A factorização é única. A diagonal principal de D são os pivots.

Dem. U' matriz no final de eliminação de Gauss. $U' = E_{m,m-1} \cdots E_{21} A$.

$$A = E_{21}^{-1} \cdots E_{m,m-1}^{-1} U' = LU', \qquad \text{com } L = E_{21}^{-1} \cdots E_{m,(m-1)}^{-1}.$$

L é triangular inferior com 1s na diagonal principal.

U' tem na diagonal principal os pivots. Com U obtida dividindo cada linha i de U' pelo resp. pivot p_i e $D = \mathrm{diag}(p_1, \ldots, p_m)$ é $U' = DU$ e U é triangular superior com 1s na diagonal principal. $A = LU' = LDU$.

Resta provar unicidade.

$$L_1 D_1 U_1 = A = L_2 D_2 U_2 \quad \Rightarrow \quad D_1 U_1 U_2^{-1} D_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 .$$

Lado esquerdo é triangular superior e direito triangular inferior com 1s na diagonal principal; logo, $= I_m$.

$$L_1^{-1} L_2 = I_m \Rightarrow L_2 = L_1 . \qquad D_1 U_1 U_2^{-1} D_2^{-1} = I_m \Rightarrow U_1 U_2^{-1} = D_1^{-1} D_2 ;$$

lado esquerdo da última é triangular superior com 1s na diagonal principal e direito é diagonal; logo, $= I_m$.

$$U_1 U_2^{-1} = I_m \Rightarrow U_1 = U_2 , \qquad D_1^{-1} D_2 = I_m \Rightarrow D_1 = D_2 . \qquad \textit{Q.E.D.}$$

Matriz L na factorização $A = LDU$ de matriz regular

Exemplo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta propriedade é geral.

$L = E_{21}^{-1} \cdots E_{m,(m-1)}^{-1}$.
Devido à ordem das matrizes elementares neste produto L tem em cada componente o elemento $\neq 0$ que aparece na resp. matriz elementar.

Os multiplicadores da eliminação de Gauss lêem-se em L.

Factorização por eliminação de Gauss para matrizes gerais

Toda matriz A tem, a menos de permutação de linhas, factorização triangular: $PA = LU$ (*i.e.* $A = P^tLU$), com P matriz de permutação, L triangular inferior com 1s na diagonal principal e U em escada de linhas.

Dem. Existe P tal que a eliminação de Gauss de PA não envolve troca de linhas. Se U é matriz em escada de linhas no final de eliminação de Gauss aplicada a PA. $U = E_{m,m-1} \cdots E_{21} PA$.

$$PA = E_{21}^{-1} \cdots E_{m,m-1}^{-1} U' = LU, \qquad \text{com } L = E_{21}^{-1} \cdots E_{m,(m-1)}^{-1}.$$

L é triangular inferior com 1s na diagonal principal. *Q.E.D.*

A factorização $PA = LU$ é usada em algoritmos numéricos de resolução de sistemas de equações lineares.
Conhecidas P, L, U, resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é computacionalmente eficiente.

O sistema equivale a $LU\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, que equivale aos dois sistemas

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c}, \qquad L\mathbf{c} = P\mathbf{b},$$

com matrizes de coeficientes triangulares, logo resolúveis por substituição.

Inversas de matrizes quadradas

Chama-se **inversa** de matriz quadrada A a X tal que $XA = I$, $AX = I$.
Diz-se **matriz não singular** ou **invertível** se tem inversa e
matriz singular se não tem. Designa-se a inversa de A por A^{-1} .

A inversa de matriz $n \times n$ de A quando existe é $n \times n$ e é única

Dem. Se $XA = I = AX \Rightarrow I, X$ são $n \times n$.Se X, Y são inversas de A, é $YA = I_n$, $X = (YA)X = Y(AX) = Y$. *Q.E.D.*

Já se sabe que:

- Se A é matriz de permutação, então $A^{-1} = A^t$.
- Se A é matriz elementar $E_{ij}(c)$, $i < j$ ou $i > j$, então $[E_{ij}(c)]^{-1} = E_{ij}(-c)$.
- Se A é triangular inferior com 1s na diagonal principal, $A = L = E_{i_1 j_1} \cdots E_{i_k j_k}$, então $A^{-1} = L^{-1} = E_{i_k j_k}^{-1} \cdots E_{i_1 j_1}^{-1}$.
- Se A é matriz diagonal, $A = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, então é não singular se e só se todos $d_i \neq 0$; então, $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$.

Inversas de matrizes quadradas

Produtos AB de matrizes invertíveis são invertíveis, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
Dem. $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I\,B = B^{-1}B = I$.
Analogamente, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ *Q.E.D.*

Produtos $A_1 \cdots A_N$ de matrizes invertíveis são invertíveis.
$(A_1 \cdots A_N)^{-1} = A_N^{-1} \cdots A_1^{-1}$
Dem. Aplicação sucessiva da anterior e associatividade. *Q.E.D.*

Se A tem inversa, A^{-1} também tem, e $(A^{-1})^{-1} = A$
Dem. $AA^{-1} = I$, $A^{-1}A = I$. Logo, $(A^{-1})^{-1} = A$. *Q.E.D.*

Se A tem inversa, A^t também tem, e $(A^t)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$
Dem. $\left(A^{-1}\right)^t A^t = \left(AA^{-1}\right)^t = I$, $A^t\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^{-1}A\right)^t = I$. *Q.E.D.*

Matrizes quadradas regulares A são invertíveis.
Dem. $A = LDU$ e L, D, U têm inversas. $A^{-1} = U^{-1}D^{-1}L^{-1}$. *Q.E.D.*

Inversas de matrizes e sistemas de equações lineares

Matriz A $n\times n$ tem inversa se e só $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tem solução única para toda $\mathbf{b}$ $n\times 1$. A solução é $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$.

Dem. Se A tem inversa, o sistema é equivalente a $A^{-1}A\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$;
logo, também a $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$, que é solução única de $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

Se $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tem solução única para toda $\mathbf{b}$, como se X for a inversa de A é $AX=I_n$, as colunas de A^{-1}, se existir, são as soluções únicas dos sistemas

$$A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix};$$

$AXA=I_nA=A$. Como $AZ=A$ tem solução única, $XA=I_n$. Logo, $A^{-1}=X$.

Q.E.D.

Matriz A $n\times n$ tem inversa se e só $A\mathbf{x}=0$ tem solução única.

Dem. Do Princípio de Sobreposição, $A\mathbf{x}=0$ tem solução única
$\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tem solução única para cada $\mathbf{b}$ $n\times 1$. *Q.E.D.*

Inversas de matrizes e eliminação de Gauss

Matriz A $n \times n$ tem inversa se e só se eliminação de Gauss dá n pivots.

Em caso afirmativo, A^{-1} é a solução da equação matricial $AX = I_n$,

e pode ser obtida por eliminação de Gauss aplicada a n sistemas de equações lineares todos com matriz de coeficientes A.

Determinação se matriz é ou não singular por eliminação de Gauss

Exemplo: A é não singular?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -12 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & \frac{5}{2} & -8 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix}$$

Pivots em todas as colunas (e linhas). Logo A é não singular.

Cálculo de inversa por eliminação de Gauss

Exemplo: Cálculo de A^{-1}.
Resolver a equação $AX = I$.
Tantos sistemas de equações quantas as colunas de I , todos com a mesma matriz de coeficientes. Eliminação de Gauss pode ser em conjunto, com matriz estendida com a matriz identidade.

$$[\,A\,|\,I\,] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -8 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & -\frac{13}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{array}\right]$$

Fase de substituição:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{46} & \frac{9}{46} & -\frac{1}{23} \\ \frac{15}{23} & -\frac{4}{23} & \frac{6}{23} \\ \frac{13}{92} & -\frac{5}{92} & -\frac{1}{23} \end{bmatrix}$$

VALIDAR!

Método de Gauss-Jordan

A seguir à fase de eliminação prosseguir com
eliminação de baixo para cima, e da direita para a esquerda.
IDEIA: Passar de $[\,A \mid I\,]$ a $[\,I \mid A^{-1}\,]$

Exemplo:

$$[\,A \mid I\,] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & -\frac{13}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{30}{23} & \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} \\ 0 & 0 & -23 & -\frac{13}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 0 & \frac{10}{23} & \frac{5}{23} & \frac{4}{23} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{30}{23} & \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} \\ 0 & 0 & -23 & -\frac{13}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & -\frac{5}{23} & \frac{9}{23} & -\frac{2}{23} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{30}{23} & \frac{8}{23} & -\frac{12}{23} \\ 0 & 0 & -23 & -\frac{13}{4} & \frac{5}{4} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{46} & \frac{9}{46} & -\frac{1}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{15}{23} & -\frac{4}{23} & \frac{6}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{92} & -\frac{5}{92} & -\frac{1}{23} \end{array}\right]$$

VALIDAR!

Condição suficiente para invertibilidade de matriz por comparação de componentes

Diz-se que matriz A tem **diagonal estritamente dominante por linhas** (resp. **colunas**) se cada componente na diagonal principal é $>$ soma dos módulos das outras componentes na mesma linha (resp. coluna),

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \,, \qquad \Big(\text{resp. } \; a_{jj} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \Big);$$

tem **diagonal estritamente dominante** se o tem por linhas ou colunas.

Matrizes $n \times n$ com diagonal estritamente dominante são não singulares

Dem. Se A tem diagonal estritamente dominante por linhas, $A\mathbf{x} = 0$ e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, é $a_{ii} x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$.

Se $|x_i| = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$, como $|a+b| \leq |a| + |b|$ e $|ab| = |a||b|$, p/ $a, b \in \mathbb{R}$,

$$|a_{ii}||x_i| = |a_{ii} x_i| = \Big| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \Big| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}||x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \,.$$

Logo, $\big(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\big)|x_i| \leq 0$. Como 1º factor > 0, 2º factor é $|x_i| = 0$. Logo, $A\mathbf{x} = 0$ tem solução única $\mathbf{x} = 0$. Portanto, A é não singular.

Se A tem diagonal estritamente dominante por colunas, aplica-se o precedente a A^t. Logo, A^t é não singular e, portanto, também A é. *Q.E.D.*

Condição suficiente para invertibilidade de matriz por comparação de componentes

Exemplos: A tem inversa?

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

A tem diagonal estritamente dominante (não por linhas (*e.g.* falha a 2ª linha), mas sim por colunas). Logo, A é não singular.

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

A não tem diagonal estritamente dominante, mas com $D = \mathrm{diag}(2, 1)$

$$AD = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

tem diagonal estritamente dominante (por linhas e não por colunas).
Logo, AD é não singular,
e, como D é não singular, $A = (AD)D^{-1}$ é não singular.

Inversão de matrizes 2×2

Se $a\neq 0$, eliminação de Gauss dá

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0\\ c & d & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0\\ 0 & d-\frac{cb}{a} & -\frac{c}{a} & 1\end{array}\right]$$

e se, ainda, $ad-bc\neq 0$, há 2 pivots e com eliminação de Gauss-Jordan

$$\to\left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+\frac{bc}{(d-\frac{cb}{a})a} & -\frac{b}{d-\frac{cb}{a}}\\ 0 & d-\frac{cb}{a} & -\frac{c}{a} & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc}\\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{array}\right].$$

Logo, $\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

Se $a=0\,,cb\neq 0$, eliminação de Gauss-Jordan dá

$$\left[\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1\\ 0 & b & 1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} c & 0 & -\frac{d}{b} & 1\\ 0 & b & 1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c}\\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0\end{array}\right].$$

Logo, $\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

Se $a=0\,,cb=0$, a matriz é singular. Logo:

$A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ **é não singular se e só se** $ad-bc\neq 0$**, e neste caso**

$\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$. $ad-bc$ é o **determinante** de A, $\det A$.

Regra de Cramer para sistemas de 2 eqs. com 2 incógnitas

O sistema de 2 equações com 2 incógnitas

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

tem solução única se e só se $ad-bc \neq 0$. A solução é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} de-bf \\ -ce+af \end{bmatrix}.$$

O sistema de 2 equações com 2 incógnitas

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

tem solução única se e só se $ad-bc \neq 0$**. A solução é**

$$x = \frac{de-bf}{ad-bc}, \qquad y = \frac{af-ce}{ad-bc}.$$

ou seja

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}, \qquad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}},$$

.

Multiplicação de matrizes por blocos e inversão de matrizes triangulares por blocos

As matrizes podem ser multiplicadas por blocos (nº de linhas e colunas dos blocos têm de ser compatíveis)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix}$$

Se A, D são matrizes quadradas não singulares, resp. $m \times m$ e $n \times n$, com "eliminação de Gauss-Jordan" por blocos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A & B & I_m & 0 \\ 0 & D & 0 & I_n \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & I_m & -BD^{-1} \\ 0 & D & 0 & I_n \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} I_m & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I_n & 0 & D^{-1} \end{array}\right]$$

Se A ou D são singulares, $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ é singular. Logo:

Se A e D são não singulares $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$.

Se A ou D são singulares a inversa não existe.

Análogo para $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$?

Inversão de matrizes por blocos

Se A, B, C, D são matrizes $n \times n$, e A é não singular, com "eliminação de Gauss" por blocos

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0 \\ C & D & 0 & I_n \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B & -CA^{-1} & I_n \end{array}\right]$$

se $S = D - CA^{-1}B$ é não singular,

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} A & B & I_n & 0 \\ 0 & S & -CA^{-1} & I_n \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & I_n + BS^{-1}CA^{-1} & -BS^{-1} \\ 0 & S & -CA^{-1} & I_n \end{array}\right].$$

Logo, **Se A é não singular: (1) se $S = D - CA^{-1}B$ é singular, a matriz é singular, (2) se S é não singular, a matriz é não singular e**

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1}(I_n + BS^{-1}CA^{-1}) & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

Análogo se D é não singular, com S substituído por $A - BD^{-1}C$, e fórmulas correspondentes nas entradas da matriz apropriadas.

Análogo se C é não singular com S substituído por $B - AC^{-1}D$, ou se B é não singular com S substituído por $C - DB^{-1}A$.

Mas podem ser A, B, C, D singulares e $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ não singular. Exemplo?

Condição necessária e suficiente para matriz ser regular

Uma matriz $n \times n$ A é regular se e só se as n submatrizes $k \times k$ A_k com elementos das 1ªs k linhas e colunas são não singulares

Dem. Para iniciar sem troca de linhas é necessário $a_{11} \neq 0$.
Se for possível proceder a eliminação de Gauss sem troca de linhas até uma linha k, A é transformada numa matriz

$$\begin{bmatrix} U_k & F \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad U_k \ \ k \times k \ \text{ triangular superior com } k \text{ pivots},$$

U_k é a matriz obtida de A_k por eliminação de Gauss, pelo que A_k é não singular. *Q.E.D.*

Eficiência computacional da eliminação de Gauss

Ordem assimptótica do nº de multiplicações+divisões de números para matrizes **genéricas**:

- Multiplicação directa de matrizes $n \times n$: $\mathbf{n^3}$
- Método de eliminação de Gauss para resolução de sistemas com n equações e incógnitas: $\mathbf{\frac{n^3+3n^2-n}{3} = \frac{n^3}{3} + O(n^2) = O(n^3)}$
- Inversão de matriz $n \times n$ por eliminação de Gauss: $\mathbf{n^3 + O(n^2) = O(n^3)}$

$f(x) = O\big(g(x)\big)$ quando $x \to +\infty$ se $\exists_{C,K>0} : |f(x)| \leq C\big|g(x)\big|\,,\ x > K\,.$

Para matrizes **esparsas** ou com estrutura particular devida a simetrias *e.g.* **tridiagonais**, pode ser muito menor.

Em geral, o método de eliminação de Gauss é muito eficiente.

e.g. a fórmula simples $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ é pior: para A não singular genérica calcular A^{-1} para n grande requer o triplo de operações.

Pivots ≈ 0 em comparação com outros causam imprecisão numérica.
Por isso usam-se métodos como:
escolha de pivots por troca de linhas e/ou colunas,
escalamento de linhas ou colunas.

São questões de **Análise Numérica**

Multiplicação rápida de matrizes de grande dimensão

Em 1969 V. **Strassen** publicou um artigo de 3 páginas com título *"Gaussian elimination is not optimal"* provando a possibilidade de multiplicação de matrizes genéricas mais eficiente do que a multiplicação directa subjacente ao método de eliminação de Gauss usual, e obteve ordem assimptótica do nº de multiplicações de números $\mathbf{O(n^{2,81})}$.

A melhoria do algoritmo de multiplicação implica uma **correspondente melhoria do algoritmo do método de eliminação de Gauss**.

Multiplicação rápida de matrizes de grande dimensão

IDEIA: Ordenação de operações correspondente a sucessivas multiplicações por **blocos de matrizes** com metade da dimensão, e ordem de adições e produtos de blocos bem escolhidas.

Para matrizes $n \times n$ com $n = 2^k$
(o método pode ser adaptado para outras matrizes)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

onde os blocos são $n \times n$ com $n = 2^{k-1}$

$$P_1 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}), \qquad P_2 = (A_{21} + A_{22})B_{11},$$
$$P_3 = A_{11}(B_{12} - B_{22}), \qquad P_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11}),$$
$$P_5 = (A_{11} + A_{12})B_{22}, \qquad P_6 = (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}),$$
$$P_7 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}),$$

$$C_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7, \quad C_{12} = P_3 + P_5,$$
$$C_{21} = P_2 + P_4, \qquad C_{22} = P_1 + P_3 - P_2 + P_6.$$

$7 = 2^{\log_2 7} = 2^{2,81}$ produtos em vez de $8 = 2^3$

Multiplicação rápida de matrizes de grande dimensão

Verificação:

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})+A_{22}(B_{21}-B_{11})-(A_{11}+A_{12})B_{22}+(A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})\\
&= A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}\\
C_{12} &= A_{11}(B_{12}-B_{22})+(A_{11}+A_{12})B_{22} = A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\
C_{21} &= (A_{21}+A_{22})B_{11}+A_{22}(B_{21}-B_{11}) = A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}\\
C_{22} &= (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})+A_{11}(B_{12}-B_{22})-(A_{21}+A_{22})B_{11}+(A_{21}-A_{11})(B_{11}+B_{12})\\
&= A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}
\end{aligned}
$$

nº de $\times$ de reais para produto de matrizes genéricas $2^k \times 2^k$:

- Método directo: $(2^k)^3 = 2^{3k} = 8^k$
- Método de Strassen: 7^k

A dimensão da matriz é $n \times n$ com $n = 2^k$.
ordem assimptótica do nº de multiplicações de números
$7^{\log_2 n} = \left(2^{\log_2 7}\right)^{\log_2 n} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\log_2 7} = n^{2,8074}$

Multiplicação rápida de matrizes de grande dimensão

Seguiu-se uma corrida para obter algoritmos de multiplicação de matrizes $n \times n$ mais eficientes em ordem assimptótica $O(n^p)$ de multiplicações; $p =$:

Método directo:	**3**
1969, V. Strassen:	**2,81**
1979, V. Pan:	**2,80**
1979, D. Bini, M. Capovani, G. Lotti, F. Romani:	**2,78**
1981, A Schönhage:	**2,55**
1981, V. Pan:	**2,53**
1982, F. Romani:	**2,52**
1982, D. Coppersmith e S. Winograd:	**2,50**
1986, V. Strassen:	**2,48**
1987, D. Coppersmith e S. Winograd:	**2,376**
2010, A. Stothers:	**2,374**
2012, V. Williams:	**2,37293**
2014, F. Le Gall:	**2,3728639**

$$10^3 = 1.000\,;\ 10^{2,3728639} = 236\,;$$
$$100^3 = 1.000.000\,;\ 100^{2,3728639} = 55.684$$
$$1.000^3 = 1.000.000.000\,;\ 1.000^{2,3728639} = 13.139.890$$

Próximo do óptimo: genericamente o produto depende dos n^2 elementos da matriz, pelo que o nº de multiplicações é $\geq O(\mathbf{n^2})$.

Prova-se que as ideias usadas até agora não permitem obter $\leq O(\mathbf{n^{2,3078}})$

Notas históricas: Sistemas de equações lineares, eliminação de Gauss, matrizes

sec. XIX-XVII AC	Babilónia	sistemas de equações lineares de 2 eq. e 2 incógnitas
sec. III AC	Arquimedes	idem de 7 eq. e 7 incógnitas
	China	eliminação de Gauss 3 eq. e 3 incógnitas, coeficientes em tabela como matrizes
	Índia	eliminação de Gauss 2 eq. 2 incógnitas
1670	I. Newton	notas com eliminação de Gauss (pub. post. *Arithmetica Universalis*, 1707)
1683	T. Seki	matrizes 3×3 (c/ determinantes)
1684	G. Leibniz	idem
1811	C. Gauss	redescoberta de eliminação de Gauss (6 eq. e 6 incógnitas p/ localizar Pallos)
1826	A. Cauchy	usa matrizes a que chamou "tableaux"
1850	J. Sylvester	cunha o termo "matriz"
1853	A. Cayley	álgebra de matrizes (sem usar o nome)
1858	A. Cayley	publica *Memoir on the Theory of Matrices*
1888	W. Jordan	eliminação de Gauss-Jordan
1888	B.I. Clasen	idem
1947	J. von Neumann, H. Goldstine	factorização triangular $PA = LU$ para computação
1948	A. Turing	cunha o termo "factorização triangular"
1969	V. Strassen	*Gaussian elimination is not optimal* $\big(O(n^{2.808})$ operações$\big)$
1978-87, 2010-14	vários (12)	redução sucessiva de operações para $O(n^{2.3728639})$