Cálculo Diferencial e Integral I

LMAC/MEBIOM/MEFT

2^o Teste (VA) - 8 de Janeiro de 2018 - 18:30 às 20:00

Apresente todos os cálculos que efectuar. Não é necessário simplificar os resultados. As cotações indicadas somam 20 valores.

Problema 1 (4,5 val.) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{(a)} \int \frac{\cosh x}{1+\operatorname{senh}^2 x}dx = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan t = \arctan(\operatorname{senh} x)$$

$$\text{(b)} \int (x+1)^2 \ln(x+1)dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 \ln(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{(x+1)^3}{x+1}dx =$$

$$\frac{1}{3}(x+1)^3 \ln(x+1) - \frac{1}{3}\int (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 \ln(x+1) - \frac{1}{9}(x+1)^3$$

$$\text{(c)} \int \frac{x}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{x+2-2}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx - \int \frac{2}{x^2+4x+5}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx - \int \frac{2}{1+(x+2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt - \int \frac{2}{1+v^2}dv =$$

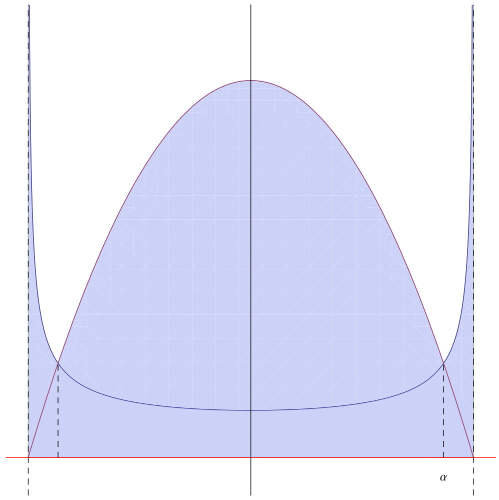
$$= \frac{1}{2}\ln t - 2\arctan v = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 2\arctan(x+2)$$

Problema 2 (4 val.) Considere as funções

$$f(x) = \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ e } g(x) = 1-x^2$$

Sendo $A = \{(x,y) : |x| < 1, 0 < y < f(x)\}$ e $B = \{(x,y) : |x| < 1, 0 < y < g(x)\}$, calcule a área do conjunto $A \cup B$.

Esboçamos abaixo a região em causa:



As curvas intersectam-se nos pontos $\pm\alpha$ e as rectas verticais $x = \pm 1$ são as assímptotas de f. Para calcular α, tomamos $t = \sqrt{1-x^2}$, donde

$$\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - x^2 \iff \frac{1}{8}\frac{1}{t} = t^2 \iff \frac{1}{8} = t^3 \iff \frac{1}{2} = t \iff \frac{1}{4} = 1 - x^2 \iff x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A área da região $A \cup B$ é dada por

$$2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-x^2)dx + 2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 = \right.$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) + \frac{1}{4}\left(\operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(\frac{\sqrt{3}}{2})\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{24}$$

Problema 3 (4,5 val.) Determine se as seguintes séries são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\operatorname{arcsen}(1/k)}{\sqrt{k}} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k\pi^k}{3^k+k} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k^{5/4}}$$

(a) Como

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{\operatorname{arcsen}(1/k)}{\sqrt{k}}}{\frac{1}{k^{3/2}}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\operatorname{arcsen}(1/k)}{1/k} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x} = 1,$$

concluímos que as séries

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arcsen}(1/k)}{\sqrt{k}} \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}} \text{ têm a mesma natureza.}$$

Como a série à direita é convergente (é uma série de Dirichlet $\sum 1/n^s$ com $s > 1$), é claro que a série original $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\operatorname{arcsen}(1/k)}{\sqrt{k}}$ é absolutamente convergente.

(b) Como $\dfrac{k\pi^k}{3^k+k} = k\dfrac{(\pi/3)^k}{1+k/3^k} \to \infty$, concluímos que a série é divergente.

(c) O seguinte integral impróprio é fácil de calcular:

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^{5/4}}dx = -4\left.\frac{\ln x}{x^{1/4}}\right|_1^\infty + 4\int_1^\infty \frac{1}{x^{5/4}}dx = 16$$

Concluímos do teste do integral que a série original é absolutamente convergente.

Problema 4 (4 val.) Neste grupo, definimos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{3k}}{2^k k^2}, f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{3k}}{2^k k^2}.$$

(a) Determine o domínio de convergência da série, e especifique a parte desse domínio onde a série é absolutamente convergente.

(b) Diga se f tem um ponto crítico em $x=0$ e caso afirmativo classifique-o.

(c) Qual é o menor valor de n para o qual pode garantir que $|f(1)-f_n(1)| < 1/100$? Para esse valor de n, qual é o sinal algébrico de $f(1)-f_n(1)$?

(d) Exprima a função f' em termos de funções elementares.

(a) Usamos o teste da razão:

$$\frac{|x|^{3k+3}/2^{k+1}(k+1)^2}{|x|^{3k}/2^k k^2} = \frac{|x|^3}{2}\frac{k^2}{(k+1)^2} \to \frac{|x|^3}{2}$$

A série converge absolutamente quando $\frac{|x|^3}{2} < 1$, i.e., $|x|^3 < 2$ e diverge quando $|x|^3 > 2$. O raio de convergência é portanto $R = \sqrt[3]{2}$. Quando $|x| = \sqrt[3]{2}$, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^{3k}}{2^k k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$$

Temos assim que a série original converge absolutamente para $x \in [-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$.

(b) Sabemos que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{3k}}{2^k k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Temos portanto $f(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = 0$ e $f^{(3)}(0) = (3!)\frac{1}{2} = 3 \neq 0$ e segue-se que f tem um ponto crítico em $x=0$ que não é um extremo (a primeira derivada que é não-nula é a terceira, que é de ordem ímpar).

(c) É claro que

$$f(1) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2^k k^2}, f_n(1) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1}{2^k k^2} \text{ e } \frac{1}{2^k k^2} \searrow 0.$$

Notamos que

$$\text{Para } k=3,\ \frac{1}{2^3 3^2} = \frac{1}{8 \cdot 9} = \frac{1}{72} > \frac{1}{100} \text{ e para } k=4,\ \frac{1}{2^4 4^2} = \frac{1}{16 \cdot 16} = \frac{1}{256} < \frac{1}{100}$$

Como a série em causa é alternada, concluímos que

$$|f(1) - f_n(1)| < 1/100 \text{ para } n \geq 3 \text{ e } f_3(1) < f(1) < f_4(1) = f_3(1) + \frac{1}{256}$$

Em particular,

$$0 < f(1) - f_3(1) < \frac{1}{256} < \frac{1}{100}$$

(d) Observamos que

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{3kx^{3k-1}}{2^k k^2} = \frac{3}{x}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{3k}}{2^k k} = \frac{3}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left(\frac{x^2}{3}\right)^k = \frac{3}{x}\ln(1+\frac{x^2}{3})$$

Problema 5 (3 val.) Demonstre as seguintes afirmações, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função.

(a) Se f é integrável em $[0, 1/2]$ e em $[1/2, 1]$, então f é integrável em $[0, 1]$.
(b) Se f é integrável em $[0, t]$ para qualquer $0 < t < 1$ e limitada em $[0, 1]$, então f é integrável em $[0, 1]$.
(c) Se $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{n^2}{1+e^{nx}}$ então f é integrável em $[0, 1]$.
(d) Se $f(x) = (-1)^{n-1}$ quando $\frac{1}{3^n} < x \leq \frac{1}{3^{n-1}}$, com $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável em $[0, 1]$ e $\int_0^1 f(x)dx = 1/2$.

(a) Dado $\epsilon > 0$, existem partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, respectivamente de $[0, 1/2]$ e de $[1/2, 1]$, tais que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}_1) - \underline{S}(f, \mathcal{P}_1) < \epsilon/2 \text{ e } \overline{S}(f, \mathcal{P}_2) - \underline{S}(f, \mathcal{P}_2) < \epsilon/2$$

Supondo sem perda de generalidade que as duas partições incluem o intervalo (só com um ponto) $\{1/2\}$, é claro que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ é uma partição de $[0, 1]$ e

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \overline{S}(f, \mathcal{P}_1) + \overline{S}(f, \mathcal{P}_2),\ \underline{S}(f, \mathcal{P}) = \underline{S}(f, \mathcal{P}_1) + \underline{S}(f, \mathcal{P}_2)$$

Concluímos que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) = \overline{S}(f, \mathcal{P}_1) - \underline{S}(f, \mathcal{P}_1) + \overline{S}(f, \mathcal{P}_2) - \underline{S}(f, \mathcal{P}_2) < \epsilon$$

Segue-se que a função é integrável em $[0,1]$.

(b) Supomos aqui que $|f(x)| \leq M$ para qualquer $x \in [0,1]$. Sendo $\mathcal{P}_1$ a partição do intervalo $[t,1]$ formada por $\mathcal{P}_1 = \{[t,t],]t,1]\}$, é claro que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_1) - \underline{S}(f,\mathcal{P}_1) \leq 2M(1-t)$$

Dado $\epsilon > 0$, fixamos t tal que $2M(1-t) < \epsilon/2$. Como f é integrável em $[0,t]$, existe uma partição $\mathcal{P}_2$ do intervalo $[0,t]$ tal que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_2) - \underline{S}(f,\mathcal{P}_2) < \epsilon/2$$

Mais uma vez supondo que o intervalo $[t,t]$ faz parte de cP_2, notamos que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ é uma partição de $[0,1]$ e

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) = \overline{S}(f,\mathcal{P}_1) - \underline{S}(f,\mathcal{P}_1) + \overline{S}(f,\mathcal{P}_2) - \underline{S}(f,\mathcal{P}_2) < \epsilon$$

donde se segue que a função é integrável em $[0,1]$.

(c) Como $1 + e^{nx} \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{n^2}{1+e^{nx}}, \text{ onde } \left| \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{n^2}{1+e^{nx}} \right| \leq \frac{n^2}{2^n}$$

A série numérica de termo geral $n^2/2^n$ é claramente convergente (por exemplo, pelo critério da razão), e segue-se do teste-M de Weierstrass que a série de funções (cada uma das quais é contínua) converge uniformemente em $\mathbb{R}$. A função limite é portanto contínua e portanto integrável no intervalo $[0,1]$.

(d) Considere-se a partição $\mathcal{P}_n$ de $[0,1]$ formada pelos intervalos da forma

$$]\frac{1}{3^k}, \frac{1}{3^{k-1}}], 1 \leq k \leq n, \text{ aos quais adicionamos } [0, \frac{1}{3^n}]$$

É fácil verificar que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^k} \right) + \frac{1}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2}{3^k} + \frac{1}{3^n}$$

Temos analogamente

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{3^{k-1}} - \frac{1}{3^k} \right) - \frac{1}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2}{3^k} - \frac{1}{3^n}$$

Notamos que a função f é integrável em $[0,1]$, porque

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_n)-\underline{S}(f,\mathcal{P}_n)=\frac{2}{3^n}\to 0$$

Por esta razão,

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_n),\underline{S}(f,\mathcal{P}_n)\to\int_0^1 f(x)dx,\text{ donde somando a série geométrica em causa,}$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,\mathcal{P}_n)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2}{3^k}=\frac{2/3}{1+1/3}=\frac{1}{2}$$