Mecânica Analítica

Capítulo 1: Princípio dos trabalhos virtuais

H. Terças

Instituto Superior Técnico
(Departamento de Física)

1.1 Trabalho e energia

Seja $\vec{r}(t)$ a posição de uma determinada **partícula material** de massa m.

A sua velocidade é dada por $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$, e define-se o **momento linear** como

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Pela segunda lei de Newton,

$$\vec{F}_{\text{res}} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \equiv m\ddot{\vec{r}}.$$

Esta igualdade é válida para qualquer referencial inercial (invariância de Galileu). Seja $\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}_0 t$ uma **transformação de Galileu**. Então,

$$\vec{F}'_{\text{res}} = m\ddot{\vec{r}}' = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r} + \vec{v}_0 t\right) = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \vec{F}_{\text{res}}.$$

Para uma força resultante nula, existe **conservação do momento linear**

$$\vec{F}_{\text{res}} = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{p}} = 0.$$

O **momento angular** de uma partícula é definido como

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

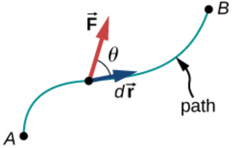
O **momento da força é definido** como $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{res}}$, que verifica

$$\vec{N} = \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) - \cancel{\vec{v} \times (m\vec{v})} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \equiv \dot{\vec{\ell}}.$$

Na ausência de torque, existe **conservação do momento angular**.

$$\vec{N} = 0 \Longrightarrow \dot{\vec{\ell}} = 0.$$

Consideremos agora o **trabalho de uma força** realizado entre os pontos $a \equiv \vec{r}_a$ e $b \equiv \vec{r}_b$



$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

onde $d\vec{r}$ é um elemento infinitesimal tangente e orientado da trajectória.

$$W_{ab} = m \int_a^b \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_a^b \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right) dt = \frac{m}{2} \left(v_b^2 - v_a^2\right).$$

$$\therefore W_{ab} = \Delta T_{ab} = T_b - T_a.$$

O trabalho da força corresponde à **variação da energia cinética**.

TÉCNICO LISBOA

Se a força (ou a sua resultante) for **conservativa**, então

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv -\vec{\nabla} V,$$

onde $V(\vec{r})$ é um **potencial**. Nesse caso,

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_a^b \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} = -(V_b - V_a) = -\Delta V_{ab}.$$

Assim, do resultado que decorre sobre a relação trabalho-energia para forças genéricas, temos que para **forças conservativas** se obtém

$$\Delta T_{ab} = -\Delta V_{ab} \Longrightarrow T_a + V_a = T_b + V_b,$$

ou seja, a **conservação da energia mecânica**.

Estes resultados podem ser facilmente generalizados para um sistema composto por várias partículas. O **momento total** define-se como

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}} = \vec{P}_{\mathrm{CM}},$$

onde $M = \sum_i m_i$ e $\vec{R}$ é a **posição do centro de massa**

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i.$$

De forma análoga, define-se o **momento angular total**

$$\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i = \sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i\right) = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i' = \vec{L}_{\mathrm{CM}} + \sum_i \vec{\ell}_i{}',$$

onde $\vec{A}_i'$ e designam quantidades relativas ao centro de massa, tal que

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$$

Quanto ao torque (momento das forças)

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right).$$

Separando nas forças externas $\left(\vec{F}_i^{(e)}\right)$ e internas $\left(\vec{F}_{ij}\right)$, temos

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right) + \sum_{i \neq j} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}\right).$$

O último termo contém termos do tipo

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}.$$

As forças internas entre duas partículas i e j quaisquer tem a mesma direcção do vector $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$. Assim,

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right) = \vec{N}^{(e)}.$$

$\therefore$ O momento angular só varia sob o efeito dos torques exteriores.

1.2 Ligações

Um sistema de n partículas é descrito pela segunda lei de Newton na forma

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ij}, \quad i, j = \{1, ..., n\}.$$

Pode haver necessidade de se restringir o número de **graus de liberdade** através da introdução de **ligações**

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n; t) = 0, \tag{1}$$

que define uma **variedade** de dimensão $n-1$. As ligações que satisfazem a condição (1) dizem-se **ligações holónomas**.[1] Estas distinguem-se das ligações **não-holónomas** do tipo

$$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n; t) \geq 0.$$

[1] Podem ser ainda divididas em **reónomas** e **não-reónomas**, caso dependam, ou não, explicitamente do tempo.

- Exemplo 1: O corpo rígido.

  Num corpo rígido composto por n partículas, as distâncias entre duas partículas i e j é constante, $|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)| = c_{ij}$. Pode ser, então, descrito pela ligação holónoma

$$f(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

  Neste caso, teremos n equações de ligação deste tipo[2], o que resulta em **zero graus de liberdade**. Se incluirmos o centro de massa, teremos $n+1$ grau de liberdade, pelo que a dinâmica será univocamente descrita pela posição do centro de massa.

$$f(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{R}) = \vec{R}^2 + (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0. \quad ☺$$

[2] Na verdade, temos $2n$, mas são equivalente duas a duas...

- Exemplo 2: O disco que não desliza

Consideremos um disco que rola a uma velocidade angular ω constante. A condição de rolamento sem deslizamento é satisfeita desde que

$$v = \omega R = \dot{\theta} R \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{X} - \dot{\theta} R = 0.$$

Isto fornece uma equação de ligação do tipo $g(\dot{X}, \dot{\theta}) = \dot{X} - R\dot{\theta} = 0$. Felizmente, podemos integrar imediatamente esta ligação e escrever

$$\frac{dX}{dt} - R\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad X - R\theta = X_0,$$

e, portanto,

$$f(X, \theta) = X - R\theta - X_0. \quad ☺☺$$

- Exemplo 3: Gás dentro de um contentor

Consideremos um contentor cilíndrico de raio a contendo n partículas de um gás ideal. Cada uma das partículas está sujeita à condição $r_i \leq a$, o que resulta na ligação

$$g(\vec{r}_i) = |\vec{r}_i| - a \leq 0,$$

o que fornece uma ligação não-holónoma. ☹

Duas dificuldades associadas às equações de ligação:

- As n coordenadas $\vec{r}_i$ não são todas independentes;
- Existem forças adicionais (de ligação) a promover as ligações.

A primeira resolve-se introduzindo **coordenadas generalizadas**, q_i, tais que

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{2}$$

A segunda, como veremos no §2, resolve-se recorrendo aos multiplicadores indeterminados de Lagrange.

- Exemplo: Partícula confinada na superfície de uma esfera

A coordenada da partícula é $\vec{r} = (x, y, z)$ (3 graus de liberdade). Contudo, utilizando a equação de ligação

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

podemos reduzir a **dois graus de liberdade efectivos**. Por exemplo,

$$\vec{r} = \left(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right),$$

com **coordenadas generalizadas** (x, y) ou, ainda,

$$\vec{r} = R\left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right),$$

recorrendo às **coordenadas generalizadas** (θ, φ).

1.3 Princípio de D'Alembert

O princípio que passaremos a enunciar (princípio dos trabalhos virtuais de D'Alembert) permite-nos formular a mecânica clássica através das coordenadas generalizadas. Como veremos, em breve abandonaremos o conceito de força, passando a escrever as equações do movimento de uma forma mais natural.

Começamos por definir **deslocamento virtual** $\delta\vec{r}_i$ da coordenada (usual) $\vec{r}_i$, que representa um deslocamento infinitesimal e independente to tempo ("virtual" em oposição a "real"). Se um sistema está em equilíbrio, então os **trabalhos virtuais** são nulos (condição de estatia)

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \tag{3}$$

onde $\vec{F}_i^{(a)}$ representam forças aplicadas e $\vec{f}_i$ forças de ligação.

Na maioria dos casos de interesse (senão em todos, na verdade!), as forças de ligação não realizam trabalhos. Exemplos:

- A reacção normal $\vec{R}$ é sempre perpendicular a um deslocamento virtual horizontal, $\vec{R} \cdot \delta x \vec{e}_x = 0$;
- A tensão da haste de um pêndulo não realiza trabalho sobre a massa, $\vec{T} \cdot \delta\theta \vec{e}_\theta = 0$.

Um sistema diz-se **estático** se os trabalhos virtuais devido às forças aplicadas se anularem

Condição de estatia

$$W = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

O resultado anterior seria útil caso pretendêssemos estudar processos estáticos (é, por exemplo, muito aplicado em engenharia civil para determinar o equilíbrio de edifícios e pontes. Há uma disciplina inteira dedicada ao problema - A Estática). Mas será que podemos generalizar para o caso **dinâmico**?

Uma vez que as forças aplicadas são aquelas que realizam trabalho, $\vec{F}_i^{(a)} = \dot{\vec{p}}_i$, D'Alembert postulou que no caso dinâmico os trabalhos virtuais devem ser nulos para uma nova condição (condição de dinâmica)

Princípio de D'Alembert

$$W = \sum_i \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

É uma condição muito razoável e intuitiva, mas não deixa de ser um princípio (muito poderoso, contudo. ☺)

Recorremos, agora, às coordenadas generalizadas $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\{q_j\}, t)$. Neste caso,

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \qquad \delta\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j .$$

Assim, o termo da força do princípio de D'Alembert vem (soma sobre os índices repetidos!) [3]

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{ij} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j ,$$

onde introduzimos a **força generalizada** (que agora não tem necessariamente unidades físicas de força, i.e. N$\equiv$kg.m.s^{-2})

$$Q_j \equiv \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{4}$$

[3] Abandonamos o superscripto (a), sem pena de ambiguidade.

Quanto ao termo do momento linear,

$$\dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j .$$

Usando as identidades

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \text{(prove!)}$$

podemos escrever

$$\dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j - \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j ,$$

que ainda se pode escrever na forma

$$\dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)\right\}\delta q_j . \qquad (5)$$

Combinando as Eqs. (4) e (5), o princípio de D'Alembert vem

$$\left\{ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m_i v_i^2\right) - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

Uma vez que os δq_j são independentes, a única forma da eq. anterior ser satisfeita é se os coeficientes se anularem, i.e. sse

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0.$$

Se estivermos na presença de forças conservativas, $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V = -\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}_i}$,

$$Q_j = -\vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j},$$

e considerando que o potencial não depende das velocidades generalizadas, $V = V(q_j, t)$, então

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0.$$

Definindo, finalmente, a **função Lagrangeana** ou simplesmente **Lagrangeano**

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \equiv T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t),$$

tal que do princípio de D'Alembert resultam as celebradas **equações de Euler-Lagrange**,

Equações de Euler-Lagrange (conservativas)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Verifiquemos, agora, que as equações de Euler-Lagrange correspondem, de facto, às equações do movimento.

- Exemplo 1: O oscilador harmónico. Seja x a coordenada generalizada que descreve o deslocamento do oscilador. A energia cinética vem

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Já o potencial é aquele de uma mola,

$$V = \frac{1}{2}kx^2,$$

pelo que

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

A eq. de Euler-Lagrange é[4]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ☺$$

[4] Nota: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

- Exemplo 2: A máquina de Atwood. Sejam z_1 e z_2 as coordenadas generalizadas que descrevem os deslocamentos verticais das massas m_1 e m_2.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2, \quad V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2.$$

A condição de fio inextensível (comprimento ℓ) impõe a restrição $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 - \ell = 0$. Eliminado z_2 e fazendo $z_1 = z$, temos[5]

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2 + (m_1 - m_2) g z + m_2 g \ell.$$

A eq. de Euler-Lagrange vem, finalmente

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Longleftrightarrow \ddot{z} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad ☺☺$$

Nem sequer precisámos de preocupar-nos a assumir um sentido para o movimento e/ou a decompor forças. Simples e elegante!

[5] podemos desprezar a constante, pois as equações só envolvem derivadas!

Mas que escolha de Lagrangeano devemos fazer? Será que temos alguma liberdade? A resposta é sim!

A) Invariância para derivadas totais. O Lagrangeano fica definido a menos da adição de derivadas totais. Seja $F = F(q_i, \dot{q}_i, t)$ tal que

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i t) + \frac{dF}{dt}.$$

Calculando termo a termo

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{dF}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right).$$

Como as derivadas parciais podem trocar entre si, vemos que $\frac{\partial}{\partial q_i}\dot{F} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_i}$, ou seja

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_i} \qquad \text{(A1)}$$

Quanto ao segundo termo da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{dF}{dt} \quad \text{(A2)}.$$

Combinando (A1) e (A2), temos

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_i}.$$

Uma vez que

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j \Longrightarrow \frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial F}{\partial q_j}\underbrace{\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i}}_{\delta_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial q_i},$$

o que anula o último termo da equação acima. Assim, verificamos que L' obedece às mesmas equações do movimento que L.

B) Invariância de Galileu. Consideremos a seguinte transformação de coordenadas

$$\dot{Q}_i = \dot{q}_i + v_i,$$

onde v_i é um parâmetro. O novo Lagrangeano relaciona-se com o antigo da seguinte forma

$$L'(Q_i, \dot{Q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i + v_i, t).$$

As novas eqs. de Euler-Lagrange são

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial Q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\delta_{ij} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Daqui se obtém que as equações de Euler-Lagrange são invariantes para transformações entre referenciais inerciais (ainda bem!)

C) Invariância para transformações locais. Consideremos a seguinte transformação de coordenadas

$$q_i = q_i(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

que promove a transformação

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \to L(s_i, \dot{s}_i, t).$$

Assim,

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} - \frac{\partial L}{\partial s_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{s}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial s_i} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\frac{\partial q_j}{\partial s_i}.$$

A última forma da igualdade se manter para uma transformação não-trivial, i.e. $\dfrac{\partial q_j}{\partial s_i} \neq 0$, é através da invariância da equação do movimento

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad ☺$$

1.4 Potenciais de velocidades

O formalismo lagrangeano também acomoda **potenciais conservativos** que dependem das velocidades, $V = V(q_i, \dot{q}_i)$.

Neste caso, visto que os termos em $\dot{q}_i$ entram no Lagrangeano através do termo $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, a forma de acomodar isto na forma de um potencial é por via de uma força generalizada do tipo

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}. \tag{6}$$

Um exemplo interessante é a força de Lorentz no electromagnetismo.

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = q\left(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right),$$

onde $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ e $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Em componentes, temos

$$F_\alpha = q\left(E_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\dot{r}_\beta B_\gamma\right) = q\left(-\partial_\alpha\phi - \partial_t A_\alpha + \dot{r}_\beta \underbrace{\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\gamma\rho\sigma}}_{\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma}-\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}} \partial_\rho A_\sigma\right).$$

Definindo coordenadas generalizadas $q_\alpha = r_\alpha$ (aqui usamos espaços ortonormados, $r_\alpha = (x, y, z) = r^\alpha$), $F_\alpha = Q_\alpha$, pelo que obtemos

$$Q_\alpha = q\left[-\frac{\partial\phi}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \dot{q}_\beta\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta}\right)\right].$$

O potencial que resulta por integração da Eq. (6) é, finalmente[6]

$$V(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) = q\left(\phi + \dot{q}_\beta A_\beta\right) = q\left[\phi(q_\alpha) + \dot{\vec{q}}\cdot\vec{A}(q_\alpha)\right].$$

[6] Os potenciais ϕ e $\vec{A}$ não dependem das velocidades!

Outra situação fisicamente relevante é o caso dos sistemas dissipativos, descritos por **potenciais não-conservativos**. Vejamos o caso da força de atrito

$$\vec{F} = -\mu\dot{\vec{r}},$$

onde μ é o coeficiente de atrito. A força generalizada associada é

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \vec{F} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j},$$

onde introduzimos o **potencial de Rayleigh** $\mathcal{F}(q_i, \dot{q}_i)$ que, neste caso é

$$\mathcal{F}(\dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2.$$

É formalmente semelhante a um termo de energia cinética, mas entra nas equações de Euler-Lagrange de forma diferente (força generalizada)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$