DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Matemática Computacional

MEBiol, MEBiom, MEFT

1º Teste - Recuperação

Duração: 90 minutos 21/1/2020 – 11:30

Apresente todos os cálculos e justifique convenientemente todas as respostas.

1. Seja ψ a função definida por $\psi(t) = \sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}$, para $t \in [-1, 1]$.

(a) [**1.5**] Analise o condicionamento de $\psi(t)$ nos casos

(i) $t \approx 0$; (ii) $t \approx 1$.

(b) [**1.0**] Proponha um algoritmo numericamente estável para o cálculo (em sistema de ponto flutuante) de $\psi(t)$ quando $t \approx 0$.

2. Seja $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ a solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(a) [**1.0**] Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para (a, b, c) qualquer que seja a aproximação inicial em $\mathbb{R}^3$.

(b) [**1.0**] Tomando para iterada inicial $(a^{(0)}, b^{(0)}, c^{(0)}) = (0, 0, 0)$, efetue duas iterações do método de Gauss-Seidel para aproximar (a, b, c).

(c) [**1.5**] Considere o método iterativo definido por

$$x_{n+1} = a x_n + \frac{2b}{x_n^2} + \frac{4c}{x_n^5} \tag{2}$$

Mostre que, se (a, b, c) for a solução do sistema (1) então o método (2) converge para $\sqrt[3]{2}$, pelo menos localmente, com ordem de convergência igual a 3.

3. Considere a equação

$$1 - x^5 - \sin(x) = 0, \tag{3}$$

a qual tem uma e uma só solução real z.

A aplicação do método de Newton com aproximação inicial $x_0 = 1.5$ à equação (3) produziu as seguintes iteradas

$$x_1 = 1.2009347, \quad x_2 = 0.97509914, \quad x_3 = 0.83551037.$$

(a) [**1.5**] Mostre que o método de Newton com $x_0 = 1.5$ converge monotonamente para z.

(b) [**1.0**] Calcule x_4 e um majorante do erro $|z - x_4|$.

(c) [**1.5**] Sem efetuar mais iterações, obtenha um majorante do erro relativo de x_7.

Formulário

- **Propagação de erros em funções e algoritmos** ($x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n,\ x \approx \tilde{x}$)

$$\delta_{f(\tilde{x})} \approx \sum_{k=1}^{n} p_{f,k}(x)\delta_{\tilde{x}_k}, \quad p_{f,k}(x) := \frac{x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)}{f(x)}$$

$$\delta_{f_{\mathbb{F}}(\tilde{x})} \approx \sum_{k=1}^{n} p_{f,k}(x)\delta_{\tilde{x}_k} + \sum_{k=1}^{m} q_k \delta_{\mathrm{arr}_k}$$

- **Majoração de erros na aproximação de zeros** ($z, \tilde{z} \in \mathbb{R},\ z \approx \tilde{z}$)

$$|z - \tilde{z}| \le \frac{|f(\tilde{z})|}{\min_I |f'|},\ I = \mathrm{int}(z; \tilde{z})$$

- **Métodos iterativos para equações**

Método de Newton $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$z - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(z - x_n)^2,\ \xi_n \in \mathrm{int}(z; x_n)$$

$$|z - x_n| \le \frac{1}{\mathbb{K}}(\mathbb{K}|z - x_0|)^{2^n},\ \mathbb{K} := \frac{\max|f''|}{2\min|f'|}$$

Método do ponto fixo $\quad x_{n+1} = g(x_n)$

$$|z - x_n| \le L^n |z - x_0|, \quad |z - x_n| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|, \quad |z - x_{n+1}| \le \frac{L}{1-L}|x_{n+1} - x_n|$$

- **Normas e Condicionamento**

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{A}^{-1}\|$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \|\delta_{\tilde{\mathbf{x}}}\| \le \frac{\mathrm{cond}(\mathbf{A})}{1 - \mathrm{cond}(\mathbf{A})\|\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}\|}(\|\delta_{\tilde{\mathbf{A}}}\| + \|\delta_{\tilde{\mathbf{b}}}\|)$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = (\rho(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}))^{1/2}$$

- **Métodos iterativos para sistemas lineares**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{Cx} + \mathbf{d} \qquad \mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{Cx}^{(n)} + \mathbf{d}$$

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}^{(n)}\| \le \|\mathbf{C}\|^n \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^{(0)}\|, \qquad \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^{(n)}\| \le \frac{\|\mathbf{C}\|^n}{1 - \|\mathbf{C}\|}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}^{(n+1)}\| \le \frac{\|\mathbf{C}\|}{1 - \|\mathbf{C}\|}\|\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}\|$$

Método de Jacobi: $\mathbf{C} = -\mathbf{D_A}^{-1}(\mathbf{L_A} + \mathbf{U_A})$,

Método de Gauss-Seidel: $\mathbf{C} = -(\mathbf{L_A} + \mathbf{D_A})^{-1}\mathbf{U_A}$

Resolução

1.

(a) O número de condição de ψ é dado por

$$p_\psi(t) = \frac{t\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\frac{t}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}} + \frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)}{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}} = \frac{t(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})}{2\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t})} =$$

$$= \frac{t(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})^2}{2\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t})(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})} = \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{2\sqrt{1-t^2}}$$

para $t \in]-1,1[$.

(i) Se $t \approx 0$ então $\psi(t) \approx 1$ e o problema é bem condicionado.

(ii) Se $t < 1$ e $t \approx 1$ o problema é mal condicionado pois

$$\lim_{t\to 1^-} p_\psi(t) = +\infty.$$

(b) No algoritmo associado à expressão $\psi(t) = \sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}$ ocorre cancelamento subtrativo quando $t \approx 0$, pois, neste caso, tem-se $t+1 \approx 1-t$.

Notando que

$$\psi(t) = \frac{(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t})(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t})}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}} = \frac{2t}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}},$$

podemos considerar o algoritmo associado a esta última expressão

$$w_1 = 2\times t, \quad w_2 = 1+t, \quad w_3 = \sqrt{w_2}, \quad w_4 = 1-t, \quad w_5 = \sqrt{w_4},$$

$$w_6 = w_3 + w_5, \quad w_7 = w_1/w_6$$

para evitar o cancelamento subtrativo.

2.

(a) A matriz de iteração do método de Gauss-Seidel é $C_{GS} = -(L_A + D_A)^{-1}U_A$ e

$$\det(\lambda I - C_{GS}) = 0 \iff \det(L_A+D_A)\det(\lambda I - C_{GS}) = 0 \iff \det(\lambda(L_A+D_A)+U_A) = 0.$$

Note-se que não é necessário calcular $(L_A + D_A)^{-1}$ se quisermos analisar a convergência através da condição que envolve $\varrho(C_{GS})$. Resolvendo

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -2\lambda & -5 \\ 0 & \lambda & 5\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff -10\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda^2 - 5\lambda^2 = 0$$

obtemos os valores próprios de C_{GS}: $\lambda = 0$, $\lambda = 1/10$. Então

$$\varrho(C_{GS}) = 1/10 < 1$$

e o método de Gauss-Seidel converge para (a,b,c) qualquer que seja a aproximação inicial em $\mathbb{R}^3$.

(b) O método de Gauss-Seidel escreve-se

$$\begin{cases} a^{(k+1)} = 1 - b^{(k)} - c^{(k)} \\ b^{(k+1)} = \frac{1}{2}a^{(k+1)} - \frac{5}{2}c^{(k)} \\ c^{(k+1)} = -\frac{1}{5}b^{(k+1)}, \; k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Note-se que não é necessário calcular a matriz de iteração para efeitos computacionais. Com $(a^{(0)}, b^{(0)}, c^{(0)}) = (0,0,0)$ obtém-se sucessivamente

$$(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)}) = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{10}\right) = (1, 0.5, -0.1)\,,$$

$$(a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}) = \left(\frac{3}{5}, \frac{11}{20}, -\frac{11}{100}\right) = (0.6, 0.55, -0.11)\,.$$

(c) Nesta questão, usamos as equações

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-2b-5c=0 \\ b+5c=0 \end{cases}$$

mas não é necessário resolver o sistema. Basta saber que $a, b, c \neq 0$.

O método iterativo definido por

$$x_{n+1} = ax_n + \frac{2b}{x_n^2} + \frac{4c}{x_n^5}$$

é o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = ax + \frac{2b}{x^2} + \frac{4c}{x^5}.$$

(i) Começamos por mostrar que $z = \sqrt[3]{2}$ é ponto fixo de g:

$$g(\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{2} + \frac{2b}{(\sqrt[3]{2})^2} + \frac{4c}{(\sqrt[3]{2})^5} = \sqrt[3]{2}\left(a + \frac{2b}{2} + \frac{4c}{4}\right) = \sqrt[3]{2}\,(a+b+c) = \sqrt[3]{2},$$

já que uma das equações do sistema dado é $a+b+c=1$.

(ii) Agora mostramos a convergência local:

$$g'(x) = a - \frac{4b}{x^3} - \frac{20c}{x^6}, \qquad g'(\sqrt[3]{2}) = a - \frac{4b}{(\sqrt[3]{2})^3} - \frac{20c}{(\sqrt[3]{2})^6} = a - \frac{4b}{2} - \frac{20c}{4} = 0$$

pois $a-2b-5c=0$. A condição $|g'(\sqrt[3]{2})| = 0 < 1$ garante a convergência local do método, com limite $z = \sqrt[3]{2}$. Podemos mesmo garantir desde já a convergência supralinear.

(iii) Relativamente à ordem de convergência, tem-se

$$g''(x) = \frac{12b}{x^4} + \frac{120c}{x^7} = \frac{12}{x^4}\left(b + \frac{10c}{x^3}\right), \qquad g''(\sqrt[3]{2}) = \frac{12}{(\sqrt[3]{2})^4}\left(b + \frac{10c}{(\sqrt[3]{2})^3}\right) = \frac{12}{(\sqrt[3]{2})^4}\,(b+5c) = 0$$

onde se usou $b+5c=0$. Assim, está garantida convergência quadrática (pelo menos). Como

$$g'''(x) = -\frac{48b}{x^5} - \frac{840c}{x^8} = -\frac{48}{x^5}\left(b + \frac{70c}{2x^3}\right),$$

$$g'''(\sqrt[3]{2}) = -\frac{48}{(\sqrt[3]{2})^5}\left(b + \frac{70c}{4}\right) \neq 0,$$

o método tem ordem 3. Aqui usámos também $b+5c=0$ para concluir que $b + \frac{70c}{4} \neq 0$.

3.

(a) O método de Newton foi aplicado à função $f(x) := 1 - x^5 - \sin(x)$, para a qual se tem

$$f'(x) = -5x^4 - \cos(x), \qquad f''(x) = -20x^3 + \sin(x).$$

Para a escolha do intervalo a considerar, para além das iteradas apresentadas, notamos que

$$f(0.5) = 0.489324 > 0, \quad f(1.5) = -7.59124 < 0.$$

São satisfeitas as condições suficientes de convergência do método de Newton com $x_0 = 1.5$ e considerando (por exemplo) o intervalo $I := [0.5, 1.5]$:

(i) $f(0.5)f(1.5) < 0$,

(ii) $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$,

(iii) $f''(x) < -20x^3 + \sin(x) = -2.5 + \sin(x) < 0$, $\forall x \in I$,

(iv) $f''(x)f(1.5) > 0$, $\forall x \in I$.

A condição (iv) garante convergência monótona para z. Mais concretamente, a sucessão gerada pelo método de Newton a partir de $x_0 = 1.5$ é decrescente para z.

(b) A quarta iterada é

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.78762618.$$

Como $f(0.7)f(x_4) < 0$, tem-se $z \in [0.7, x_4]$. Atendendo a que $|f'|$ é uma função monótona crescente no intervalo $[0.7, x_4]$, o erro absoluto pode ser majorado por

$$|z - x_4| \leq \frac{|f(x_4)|}{\min_{x\in[0.7,x_4]} |f'(x)|} = \frac{|f(x_4)|}{|f'(0.7)|} = 0.00599936. \tag{4}$$

(c) Pela fórmula de erro do método de Newton, tem-se

$$|z - x_7| \leq K^{2^3-1}|z - x_4|^{2^3} = K^7|z - x_4|^8$$

onde podemos usar

$$K = \frac{\max_{x\in[0.7,x_4]} |f''(x)|}{2\min_{x\in[0.7,x_4]} |f'(x)|} = \frac{|f''(x_4)|}{2|f'(0.7)|} = 2.30583$$

uma vez que, atendendo à convergência monótona, todas as iteradas x_k, $k \geq 4$, vão pertencer ao intervalo $[0.7, x_4]$. Então

$$|z - x_7| \leq (2.30583)^7 \cdot (0.00599936)^8 = 0.581608 \cdot 10^{-15}.$$

Para o erro relativo de x_7, de (4) resulta

$$z \in [x_4 - 0.00599936, x_4 + 0.00599936],$$

donde

$$|\delta_{x_7}| = \frac{|z - x_7|}{|z|} \leq \frac{|z - x_7|}{x_4 - 0.00599936} = 0.744099 \cdot 10^{-15}.$$

Também seria correto fazer

$$|\delta_{x_7}| = \frac{|z - x_7|}{|z|} \leq \frac{|z - x_7|}{0.7}.$$