Complementos de Cálculo Diferencial e Integral

5ª Ficha de trabalho - 2º Semestre 2014/2015

1. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.

   (b) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Que pode concluir sobre a continuidade da função $\dfrac{\partial f}{\partial x\partial y}$?

2. Seja $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^2 e $f(x,t)=F(x-t,x+t)$.

   (a) Verifique que $F(u,v)=f\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2}\right)$.

   (b) Mostre que f satisfaz a igualdade (em todos os pontos)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{se e só se} \quad \frac{\partial F}{\partial u\partial v}=0.$$

   (c) Mostre que se F satisfaz a igualdade anterior (em todos os pontos), então existem funções (de uma variável real) P e Q tais que

$$F(u,v)=P(u)+Q(v).$$

   (d) Determine uma função $f(x,t)$ tal que

$$f(x,0)=2\,\mathrm{sen}\,x\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,0)=\cos x \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

3. Use a formula de Taylor de segunda ordem de e^{xy+1} em $(1,-1)$, para determinar o único valor de $a\in\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\frac{e^{xy+1}-4+2x-2y+a\left(x^2+y^2\right)}{(x-1)^2+(y+1)^2}=0.$$

4. Seja f uma função de classe C^2 num aberto limitado $D\subset\mathbb{R}^2$ e contínua no seu fecho $\overline{D}$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0 \quad \text{em } D \quad \text{e} \quad f=0 \quad \text{na fronteira } \partial D.$$

   Mostre que $f>0$ em D.