

1º Semestre 2012/2013
2º Teste – Época de Recurso

2013/02/01 – 15:00

Justifique convenientemente todas as respostas !

Duração: 90 min

Grupo I

10 valores

1. A duração, em dias, de uma componente electrónica é uma variável aleatória X com distribuição exponencial de parâmetro λ . Considere que (X_1, X_2, \dots, X_5) é uma amostra aleatória de tamanho 5 de X .
- (a) Calcule a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro λ com base na seguinte concretização da amostra aleatória: 2.3, 2.7, 3.8, 4.3, 4.9. (3.0)
- Solução:** $\hat{\lambda} = 0.278$.
- (b) Mostre que a variável aleatória $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_5)$, que representa o mínimo da amostra aleatória, tem distribuição exponencial de parâmetro 5λ . (1.0)
- (c) Tendo em conta o resultado da alínea anterior, investigue se $5Y$ é ou não mais eficiente que a média amostral, \bar{X} , na estimação do parâmetro $\mu = 1/\lambda$. (2.0)
- Solução:** \bar{X} é mais eficiente que $5Y$.
2. Um investigador está interessado em comparar a altura de mulheres de dois países, A e B. Denotando por X_1 e X_2 as alturas, em centímetros, das mulheres nos países A e B, respectivamente, uma amostragem aleatória de 9 mulheres, de cada um dos países, produziu os seguintes valores:

País A	163	169	157	157	171	165	164	173	162	$\sum_{i=1}^9 x_{1i} = 1481$
País B	166	153	157	167	155	164	152	166	150	$\sum_{i=1}^9 x_{2i} = 1430$

 Sabe-se que a variância das alturas das mulheres em cada um dos dois países é de 40 cm^2 .

- (a) Indicando hipóteses de trabalho que sejam necessárias, determine um intervalo de confiança a 99% para a diferença das alturas médias das mulheres nos países A e B. (3.0)
- Solução:** Admitindo $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 40)$ e que ambas as amostras aleatórias são independentes, $\text{IC}_{99\%}(\mu_1 - \mu_2) = [-2.013; 13.346]$.
- (b) Quantas mulheres devem ser inquiridas adicionalmente em cada país (supondo que os respectivos tamanhos amostrais se mantêm iguais) para estarmos confiante a 96% que a margem de erro na estimação da diferença das alturas médias referidas em (a) seja menor que 3 centímetros? (1.0)

Solução: 29.

Grupo II

10 valores

1. Escolhidos ao acaso 150 pagamentos registados numa loja, foram obtidos os seguintes dados: (3.5)

<i>Tipo de pagamento</i>	Numerário	Cheque	Cartão débito/crédito
<i>Número de pagamentos</i>	40	52	58

 Teste a hipótese de as 3 modalidades de pagamento referidas serem equiprováveis. Calcule, justificando, o valor- p do teste e decida com base no valor obtido, tendo em conta os níveis de significância usuais.

Solução: Valor- $p=0.186$. Aos níveis de significância usuais (1%, 5%, 10%), não rejeito a hipótese de as 3 modalidades de pagamento serem equiprováveis.

2. Num certo dia de primavera, foram registados em 22 localidades de uma região de Inglaterra o número diário de horas de sol (x) e a temperatura máxima diária (Y , em $^{\circ}\text{C}$), estando os dados obtidos sumariados a seguir:

- (a) Ajuste um modelo de regressão linear simples de Y em função de x , indicando os pressupostos necessários para que esse modelo tenha validade estatística. (2.0)

Solução: $\hat{Y} = 14.018 + 0.364x$. Admite-se que os erros são variáveis aleatórias independentes, não correlacionadas entre si, com valor esperado nulo e variância constante.

- (b) Obtenha o coeficiente de determinação do modelo ajustado e comente o valor obtido. (1.0)

Solução: $r^2 = 0.778$. Cerca de 77.8% da variação total da temperatura máxima diária é explicada pelo número diário de horas de sol através do modelo de regressão considerado, valor suficientemente elevado para considerarmos que há um bom ajuste da recta estimada aos dados.

- (c) Teste, ao nível de significância de 1%, a significância do modelo de regressão linear. Comente o resultado do teste face ao valor obtido na alínea anterior. (3.5)

Solução: Ao nível de significância de 1%, rejeito a hipótese do coeficiente de regressão β_1 ser nulo. Este resultado realça a importância do número diário de horas de sol na explicação da temperatura máxima diária, o que é coerente com a alínea anterior, onde se concluiu que há um bom ajuste da recta estimadas aos dados.
