Semana 7

(1)

Problema 1

A simetria de translação do sistema infinito garante-nos que a solução para o deslocamento das massas em relação ao equilíbrio do tipo:

$$A_\pm(x) = e^{\pm ikx}$$

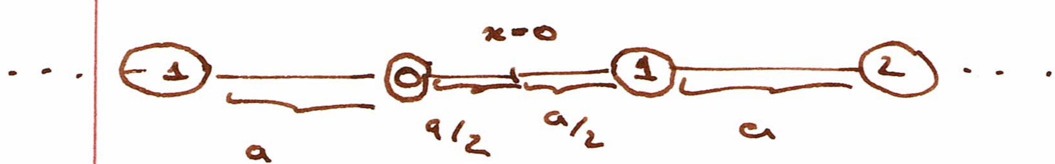
A condição fronteira da parede do lado esquerdo corresponde a um deslocamento nulo em $x = 0$ (pondo a origem do eixo na parede). Isto é atingido através da combinação linear

$$A(x) \propto A_+(x) - A_-(x) \propto \sin kx$$

"proporcional" a

o que garante $A(x=0) = \sin k \cdot 0 = 0$

No sistema infinito teríamos



Logo a condição fronteira imposta implica que $A_1 = A(x_1) = A(x = a/2) \propto \sin(k\frac{a}{2})$

$$A_0 = A(x_0) = A(x = -a/2) \propto \sin(-\frac{ka}{2}) = -\sin(k\frac{a}{2})$$

ou seja $A_0 = -A_1$

Invertendo a lógica, podemos considerar que o ponto em $x=0$ se mantém sempre em repouso, o que significa que a resultante das forças que nele atua tem de ser nula. Como para pequenos deslocamentos temos

$\{ A_2 - A_1$

$$F = T \operatorname{sen}\theta \simeq T\,\frac{A_2 - A_1}{a}$$

em 1ª ordem

Temos que o ponto $x=0$ do sistema infinito tem ~~deslocam~~ resultante das forças nula se

$$0 = T\,\frac{A_0 - A_{x=0}}{\left(\frac{a}{2}\right)} + T\,\frac{A_1 - A_{x=0}}{\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad A_0 = -A_1$$

Assumindo uma combinação linear do tipo

$$A(x) \propto e^{ikx} + \underbrace{c}_{\text{constante a determinar}} e^{-ikx}$$

$$A_0\left(x = -\frac{a}{2}\right) = e^{-ika/2} + c\,e^{ika/2}$$

$$A_1(x = a/2) = e^{ika/2} + c\,e^{-ika/2}$$

impondo $A_0 = -A_1 \Rightarrow c = -1$

e chegamos a $A(x=0) = 0$

Pelo que as 2 descrições são equivalentes

Para chegar à condição fronteira da parede direita basta fazer uma reflexão horizontal

3

$$x_0 \to x_{N+1}$$

$$x_1 \to x_N$$

o que significa

$$A_N = - A_{N+1}$$

e que irá implicar

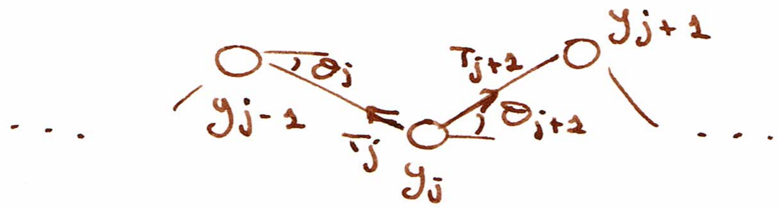
$$A(x = \underset{\downarrow}{Na}) = 0 \iff \sin(KNa) = 0 \iff$$

$$(N-1)a + 2\times\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\iff K = \frac{\pi n}{Na}, \quad n = 1, \dots, N$$

porque temos apenas N modos

Para chegarmos aos modos normais e respetivas frequências temos de encontrar a relação de dispersão do sistema. Partimos da equação do movimento



$$T_j = \frac{T}{a}(y_{j-1} - y_j)$$

Para pequenos deslocamentos

$$T_{j+1} = \frac{T}{a}(y_{j+1} - y_j)$$

$$m\frac{d^2 y_j}{dt^2} = \frac{T}{a}(-2y_j + y_{j-1} + y_{j+1})$$

Fazendo a solução 4

~~$y_j = A_j e^{-i\omega t}$~~

$$y_j = A(x) e^{-i\omega t} = e^{ikx} e^{-i\omega t}$$

$\downarrow$

porque a relação de dispersão é independente das condições fronteira

substituindo na equação do movimento

$$-m\omega^2 = \frac{T}{a}\left(-2 + e^{-ika} + e^{ika}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{T}{m}\left(2 - 2\cos(ka)\right)} = 2\sqrt{\frac{T}{ma}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

usando $1 - \cos(2x) = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$

substituindo $k = \frac{n\pi}{Na}$, $n = 1, \ldots, N$

concluímos que o n modo normal tem

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{T}{ma}} \sin\left(\frac{n\pi}{2N}\right)$$

$$A(x) \propto \sin\left(\frac{\pi n}{Na} x\right)$$

$\downarrow$ equivale a

$$\left(\sin\frac{n\pi}{2N}, \sin\frac{3n\pi}{2N}, \ldots, \sin\frac{(2N-1)n\pi}{2N}\right)$$

avaliando na posição de equilíbrio das massas.

Problema 2

As equações do movimento do sistema podem ser escritas como

$$m_1 \ddot{x}_1 = \underbrace{-k_1 x_1}_{} + \overbrace{T_1}^{}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 + T_2$$

$\rightarrow$ acoplamento

$\downarrow$ forças de restauro de cada pêndulo

e como T_1 e T_2 são por ação reacção temos que

$$T_2 = -T_1 = k(x_1 - x_2)$$

$\downarrow$ constante de acoplamento

NOTA: estamos a assumir $k_1, k_2, k > 0$

daqui tiramos que

$$M^{-1}K = \begin{pmatrix} \frac{k+k_1}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ \frac{-k}{m_2} & \frac{k+k_2}{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde $a = \frac{k+k_1}{m_1}$, $b = -\frac{k}{m_1}$, $c = -\frac{k}{m_2}$, $d = \frac{k+k_2}{m_2}$

A equação característica de $M^{-1}K$ é dada por

$$\omega^4 - (a+d)\omega^2 + ad - bc = 0$$

calculando o discriminante

$$\Delta = \sqrt{(a+d)^2 - 4ad + 4bc} = \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} > 0$$

porque $(a-d)^2 > 0$ e $bc > 0$. Logo há 2 soluções distintas para ω^2. Chamemos-lhes ω_+^2 e ω_-^2

$$\omega_\pm^2 = \frac{a+d \pm \Delta}{2}$$

$$\omega_+ + \omega_- = a+d > 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_+^2 \text{ e } \omega_-^2 \text{ são positivos e distintos}$$

$$\omega_+ \cdot \omega_- = ad - bc > 0$$

Logo há 2 frequências reais

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_+}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_-}$$

$\Rightarrow$ Há 2 modos normais como teria de ser já que o sistema tem 2 graus de liberdade.

Para determinar os modos normais vamos recorrer ao teorema de que se 2 matrizes $n \times n$, M e N, que comutam entre si e têm n valores próprios distintos então têm os mesmos vetores próprios

Prova: sejam $x_1, \dots, x_n$ os n vetores próprios de M, com valores próprios $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$

$$M x_i = m_i x_i \quad , i = 1, \dots, n$$

Então

$$MN x_i = NM x_i = m_i N x_i \Rightarrow N x_i$$ também é vetor próprio de M com valor próprio m_i

$MN = NM$ porque M e N comutam

Mas como M tem n valores próprios distintos o único vetor próprio com valor próprio m_i é x_i.

Logo $N x_i$ tem de ser um ~~p~~ múltiplo de x_i

$$N x_i = c\, x_i$$

ou seja x_i também é vetor próprio de N

NOTA: este raciocínio é repetido até à exaustão em Mecânica Quântica / Física de Partículas.

Logo podemos caracterizar os modos normais do sistema calculando ~~os~~ vetores próprios de S, porque tanto S como M têm valores próprio distintos e comutam entre si

(Relembro que $S^2 = \mathbb{1} \Rightarrow \lambda = \pm 1$ onde λ são os valores próprios de S).

Os ~~vetores~~ vetores próprios de S são simples de calcular

- $\lambda = 1$, $v = (1, 1)$ → a oscilar em fase, mesma amplitude
- $\lambda = -1$, $v = (1, -1)$ → a oscilar em oposição de fase com a mesma amplitude

E por intuição física ~~sabem~~ concluímos que no modo em que os corpos oscilam em oposição de fase o acoplamento entre eles é maior do que no caso em fase pelo que ao modo normal $(1,-1)$ corresponde a frequência $\omega_2 = \omega_+$ e a $(1,1)$ a frequência própria $\omega_1 = \omega_-$.

3.

(i) cada uma das massas só se pode movimentar numa direcção (no plano do papel, perpendicular à extensão da corda), logo o sistema tem 5 graus de liberdade e consequentemente 5 modos normais.

(ii) Os modos normais do sistema de massas são combinações lineares dos modos normais de um sistema infinito (que são $e^{\pm ikx}$) que respeitem as condições fronteira

Temos 3 possibilidades para as condições fronteira:

(1) fixo em $x=0$ e $x=l$

(2) livre em $x=0$ e $x=l$

(3) fixo em $x=0$ e livre em $x=l$ (ou vice-versa, que é apenas uma reflexão já que só queremos modos em que a massa do meio está parada)

Para impor condições fronteira consideramos 2 massas fictícias (em $x=0$ e $x=l$) às quais impomos as condições necessárias.

Vamos escrever os modos como

$$A_j^n$$

modo $n = 1,2,3,4,5$

fictícias

$j = 0,1,2,3,4,5,6$

(partículas)

$x = j\, l/6$

(1) $A_0^n = 0 \quad \Rightarrow \quad A_j^n \propto \sin(kx) = \sin\left(kj\ell/6\right)$

$A_6^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(k\cancel{6}\,\ell/\cancel{6}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k\ell = n\pi \quad \Rightarrow \quad k = n\pi/\ell$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$
(depois repete)

$$A_j^n = \sin\left(\frac{n\pi}{\cancel{\ell}}\,\frac{j\cancel{\ell}}{6}\right) = \sin\left(\frac{jn\pi}{6}\right)$$

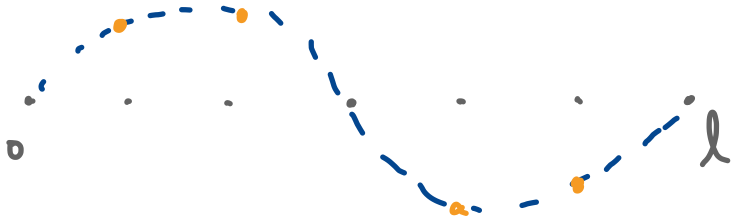
$j = 1, 2, 3, 4, 5$
↙ massas

· queremos modos em que a massa do meio ($x = \ell/2 \Rightarrow j = 3$) está parado

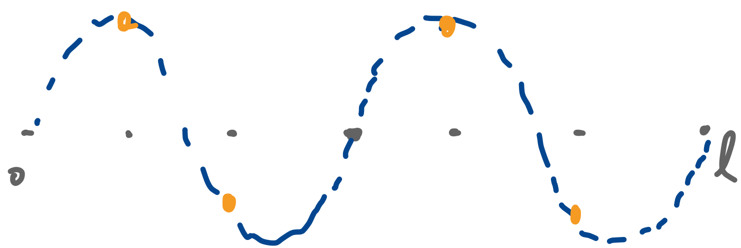
$$A_3^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{3n\pi}{6}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = 2, 4$$

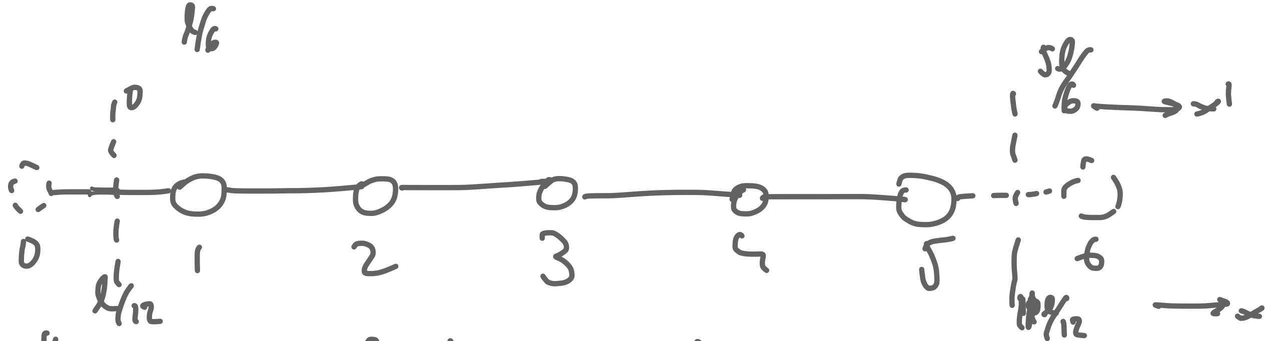
$n = 2$



$n = 4$



(2)



• $A_0^u = A_1^u$ (condição fronteira para extremo livre)

qualquer combinação linear de (e^{ikx}) e (e^{-ikx}) pode ser escrita como

$$\cos(kx - \theta)$$

$\Rightarrow$ máximo (ou mínimo) entre eles, ou seja em $\frac{x_0 + x_1}{2} = \ell/12$

a forma mais simples é escolher as coordenadas

$x' = x - \ell/12$, tal que máximo (mínimo) ocorre para $x' = 0$

logo $\cos(kx' - \theta) \xrightarrow{x'=0} \cos(\theta) = \pm 1 \Rightarrow$ podemos escolher

$\theta = 0$

$$A_j^u \propto \cos(kx')$$

cond. fronteira no outro extremo: $A_5^u = A_6^u$

máx (ou mín) entre eles

$\hookrightarrow x' = 5l/6$

$$\cos\left(k\, 5l/6\right) = \pm 1 \Longrightarrow k\,\frac{5l}{6} = n\pi \Rightarrow k = \frac{6n\pi}{5l}$$

$$A_j^n = \cos\left(\frac{6n\pi}{5\ell}x'\right) = \cos\left(\frac{6n\pi}{5\ell}\left(x - \ell/12\right)\right) \qquad x = j\,\ell/6$$

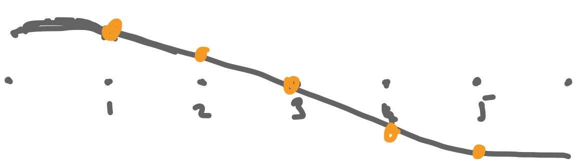
$$= \cos\left(\frac{6n\pi}{5\ell}\left(\ell/6\, j - \ell/12\right)\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{5}\left(j - 1/2\right)\right)$$

$n = 1,2,3,4,5$
$j = 1,2,3,4,5$

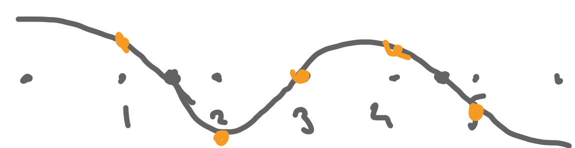
queremos soluções tal que $A_3^n = 0$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{5}\,5/2\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 1,3,5$$

$n=1$



$n=3$



$\underline{n=5}$

todos os massas em repouso

(3)

fixo em $x=0$ $\Rightarrow$ $\sin(kx)$ $\qquad x = j\,\ell/6$

máx em $x = \frac{11}{12}\ell$ $\Rightarrow$ $\sin\left(k\,\frac{11}{12}\,\ell\right) = \pm 1$

$$\Rightarrow k\,\frac{11\ell}{12} = (2n-1)\,\pi/2$$

$$\Rightarrow k = \frac{12}{11\ell}(2n-1)\,\pi/2 = \frac{6}{11\ell}(2n-1)\,\pi$$

$$A_j^n = \sin\left(\frac{\cancel{6}}{11\cancel{\ell}}(2n-1)\,\pi\; j\,\cancel{\ell}/\cancel{6}\right) = \sin\left(\frac{(2n-1)\,j\,\pi}{11}\right)$$

$\rightarrow$ $A_3^n = 0$ $\Rightarrow$ $\sin\left((2n-1)\,\frac{3\pi}{11}\right) = 0$ $\Rightarrow$ $(2n-1)\,\frac{3\pi}{11} = m\pi$

$\Rightarrow (2n-1) = \frac{11m}{3}$ $\qquad$ m p/ m inteiros

$\boxed{\text{não tem solução para } n \le 5}$

(iii) Já determinamos este solução em (ii)

modo fundamental

$$A_3^{1} = \sin\left(\frac{(2\overset{n=1}{n}-1)\,3\pi}{11}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)$$

massa em $x = l/2$

isto é a amplitude. logo

$$\varphi_3(t) = \sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)\underbrace{\sin(\omega t)}$$

$t=0 \Rightarrow \sin\omega t = 0$

$\Rightarrow \varphi_3(0) = 0$ ✓

ω é determinado a partir de k pela relação do dispersão

$$\omega^2 = \frac{4T}{ma}\sin^2\frac{ka}{2} \xrightarrow{a = l/6} \omega^2 = \frac{24T}{ml}\sin^2\left(\frac{kl}{12}\right)$$