TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA PARA INTEGRAIS

T. de Convergência Monótona de Levi
T. de Convergência Dominada de Lebesgue

Luis T. Magalhães

IST

19.ABR.2020

Introdução

Estes teoremas dão condições muito gerais e naturais para troca de limite com integral (de Lebesgue), o que é bastante mais restritivo e complicado com integral de Riemann. Como o integral de Lebesgue foi definido por limites de integrais de sucessões de funções em escada crescentes (em sentido lato) q.t.p., é de esperar que seja mais simples para este integral.

O T. de Convergência Monótona de Levi é o mais simples.
É simplesmente a prova que o processo de extensão do integral de funções em escada na definição do integral de funções limite superior aplicado a funções integráveis à Lebesgue não dá uma nova extensão.

O T. de Convergência Dominada de Lebesgue pode ser provado por aplicações do T. de Convergência Monótona de Levi.

O T. de Convergência Dominada de Lebesgue é útil quando a sucessão de funções considerada não é monótona. Em particular, para determinar integrabilidade ou calcular integrais por sucessões de funções definidas em conjuntos expansivos com união igual ao domínio de integração, se a função muda de sinal, em geral não há monotonia e o T. de Convergência Monótona de Levi não pode ser directamente aplicado.

T. de Convergência Monótona de Levi (TCM Levi)

Se $S \subset \mathbb{R}^n$ e $\{f_k\} \subset L(S)$ é sucessão monótona q.t.p. em S e $\{\int_S f_k\}$ é limitada, então $\exists_{f \in L(S)}: \lim_{k\to\infty} f_k = f$ q.t.p. em S e $\int_S f = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k$.

Dem. Prova-se que é válido na sequência $S(I) \to U(I) \to L(I) \to L(S)$, com $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo, como já feito para outras propriedades do integral (de Lebesgue). Sem perda de generalidade, supõe-se f_k crescente (se não, troca-se f_k por $-f_k$).

$\boldsymbol{\{f_k\} \subset S(I)}$**.** Se $f_k \nearrow f$ q.t.p. em I, da definição de $U(I)$, $f \in U(I)$, $\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k$.

Resta provar que $\lim_{k\to\infty} f_k$ existe q.t.p. em I. Seja $D = \{\mathbf{x} \in I : \{f_k(\mathbf{x})\} \text{ diverge}\}$; para $\mathbf{x} \in I \setminus D$ define-se $f(\mathbf{x}) = \lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{x})$. $D \subset D_{kj} = \{\mathbf{x} \in I : f_k(\mathbf{x}) > j\}$. Como $\exists_{M>0}: \int_I f_k \leq M$, a soma do volume-$n$ de intervalos em que $f_k > j$ tende para 0 quando $j \to \infty$, pelo que $\cap_{j\in\mathbb{N}} D_{kj}$ tem medida nula. Logo, D tem medida nula e, portanto, definindo f com qualquer valor em D, $\lim_{k\to\infty} f_k$ existe q.t.p. em I.

$\boldsymbol{\{f_k\} \subset U(I)}$**.** Seja $M \geq \int_I f_k$. $\exists_{\{s_{kj}\}_{j\in\mathbb{N}} \in S(I)}: s_{kj} \nearrow f_k$ q.t.p. em I quando $j \to \infty$. Tem-se q.t.p. em I quando $j \to \infty$:

$$\begin{array}{ccccccc}
s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1j} & \cdots & \nearrow & f_1 \\
s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2j} & \cdots & \nearrow & f_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s_{j1} & s_{j2} & \cdots & s_{jj} & \cdots & \nearrow & f_j
\end{array} .$$

Considera-se a sucessão dos máximos da coluna j, $t_j = \max\{s_{1j}, s_{2j}, \ldots, s_{jj}\}$.

T. de Convergência Monótona de Levi (TCM Levi)

É $t_j \leq f_j$, $t_j \nearrow$ q.t.p. em I $\int_I t_j \leq \int_I f_j \leq M$. Do caso $\{f_k\} \subset S(I)$, $\exists_{f \in U(I)}$: $t_j \nearrow f$ q.t.p. em I e $\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_S t_j \leq M$. Seja $g(\mathbf{x}) = \lim_{j\to\infty} f_j(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. $i \leq j \;\Rightarrow\; s_{ij} \leq t_j \leq f_j$ q.t.p. $\Rightarrow\; f_i \leq f \leq g$ q.t.p. $\Rightarrow\; g \leq f \leq g$ q.t.p. $\Rightarrow\; f = g$ q.t.p., em que a 2ª $\Rightarrow$ obtém-se com $j \to \infty$ e a 3ª com $i \to \infty$. Como $i \leq j \Rightarrow \int_I t_i \leq \int_I f_i \leq \int_I f_j \Rightarrow \int_I f \leq \lim_{j\to\infty} \int_I f_j$, obtém-se $f_j \nearrow g = f$ q.t.p. $\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \int_I f_j \leq \int_I f$.

$\boldsymbol{\{f_k\} \subset L(I)}$**.** Aproxima-se f_k por $U_k \in U(I)$. Seja $g_1 = f_1, g_k = f_k - f_{k-1} \geq 0$ q.t.p. É $f_k = \sum_{j=1}^{k} g_j$. Cada $g_j \in L(I)$, pelo que $\exists_{u_j, v_j \in U(I)}$: $g_j = u_j - v_j$ com $v_j \geq 0$, $\int_I v_j < \frac{1}{2^j}$. Logo, $u_j = g_j + v_j \geq 0$ q.t.p., $U_k = \sum_{j=1}^{k} u_j \in U(I)$ é crescente e

$$\int_I U_k = \int_I \sum_{j=1}^{k} u_j = \int_I \sum_{j=1}^{k} g_j + \int_I \sum_{j=1}^{k} v_j \leq \int_I f_k + \sum_{j=1}^{k} \tfrac{1}{2^j} < \int_I f_k + 1\,,$$

pelo que $\{\int_I U_k\}$ é majorada. Do caso $\{f_k\} \subset U(I)$, $\exists_{U, V \in L(I)}$: $U_k \nearrow U$, $V_k \nearrow V$ q.t.p. Com $f = U - V$ é

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} g_j = U_k - V_k \to U - V = f\,, \qquad \int_I f_k = \int_I U_k - \int_I V_k \to U - V = f\,.$$

$\boldsymbol{\{f_k\} \subset L(S)}$**.** Do caso precedente, é válido no intervalo $I = \mathbb{R}^n$. Portanto, com a função característica de S, χ_S, e a extensão de f_k a $\mathbb{R}^n$ $=0$ fora de S, é válido para $\chi_S f_k$, pelo que $\exists_{f \in L(\mathbb{R}^n)}$: $\chi_S f_k \to f$ q.t.p. e $\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_S f_k = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k$. Como $f_k = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus S$ e $f_k \to f$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n$, é $f = 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^n \setminus S$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_S f$. *Q.E.D.*

T. de Convergência Dominada de Lebesgue (TCD Lebesgue)

Se $S\subset\mathbb{R}^n$**,** $\{f_k\}\subset L(S)$ **é uma sucessão tal que** $\lim\limits_{k\to\infty} f_k=f$ **q.t.p. em** S **e** $|f_k|\le h\in L(S)$ **q.t.p. em** S **para** $k\in\mathbb{N}$**, então** $f\in L(S)$ **e** $\int_S f=\lim\limits_{k\to\infty}\int_S f_k$**.**

Dem. Basta provar para $S=I$ intervalo em $\mathbb{R}^n$. A ideia é encaixar $\{f_k\}$ entre sucessões monótonas crescente e decrescente e aplicar o TCM de Levi, *i.e.* $g_k\le f_k\le G_k$ com $g_k\nearrow$ e $G_k\searrow$ q.t.p., $\{g_k\},\{G_k\}\subset L(I)$ e $\{\int_I g_k\}$, $\{\int_I G_k\}$ limitadas.
Com $f_1,f_2,\dots,f_{k-1},f_k,\dots,f_j,f_{j+1},\dots\to f$ q.t.p., define-se g_k e G_k as funções que são, resp., mínimo e máximo dos termos da sucessão $\{f_s\}$ de ordens $\ge k$ e G_{kj} a função que é máximo dos termos da ordem k à ordem $j\ge k$, inclusivé, *i.e.*

$$g_k=\min_{j\ge k} f_j\,,\qquad G_k=\max_{j\ge k} f_j\,,\qquad G_{kj}=\max_{k\le s\le j} f_s\,,$$

Verifica-se $g_k\nearrow$, $G_k\searrow$ q.t.p., e com k fixo $G_{kj}\nearrow G_k$ quando $j\to\infty$ q.t.p.
Para aplicar o TCM de Levi a $\{g_k\}$ e a $\{G_k\}$ é preciso garantir $\{g_k\},\{G_k\}\subset L(I)$.
Como $|G_{kj}|\le h$ q.t.p. e $\left|\int_I G_{kj}\right|\le\int_I h$, do TCM de Levi, $G_k\in L(I), \int_I G_k=\lim\limits_{j\to\infty}\int_I G_{kj}\le\int_I h$.
Outra vez do TCM de Levi, $\exists_{G\in L(I)}: G_k\searrow G$ q.t.p. e $\int_I G=\lim\limits_{k\to\infty}\int_I G_k$.
Idem para g_{kj} e g_k, $\exists_{g\in L(I)}: g_k\nearrow g$ q.t.p. e $\int_I g=\lim\limits_{k\to\infty}\int_I g_k$, $\int_I g_k=\lim\limits_{j\to\infty}\int_I g_{kj}\le\int_I h$.
Como $f_k\to f$ q.t.p., $g=f=G$ q.t.p. Logo, $f\in L(I)$.

$$g_k\le f_k\le G_k\Rightarrow \int_I g_k\le\int_I f_k\le\int_I G_k$$

Com $\lim\limits_{k\to\infty}$ obtém-se

$$\int_I f\le \lim_{k\to\infty}\int_I f_k\le\int_I f.$$

Logo, as desigualdades nesta fórmula são igualdades. *Q.E.D.*

Observações

1. Provou-se o TCD Lebesgue com 4 aplicações do TCM de Levi.
2. Os 2 Teoremas de Convergência para Integrais podem ser comparados e distinguidos com ajuda da tabela seguinte:

	SUPÕE-SE: $S \subset \mathbb{R}^n$, $\{f_k\} \in L(S)$	**CONCLUI-SE:**
TCM Levi	$\{f_k\}$ monótona q.t.p. em S $\left\{\int_S f_k\right\}$ converge	$f_k \to f$ q.t.p. em S
TCD Lebesgue	$f_k \to f$ q.t.p. em S $\lvert f_k\rvert \leq h \in L(S)$ q.t.p. em S	$\left\{\int_S f_k\right\}$ converge
		$f \in L(S)$, $\int_S f = \lim\limits_{k\to\infty} \int_S f_k$

- Nos 2 casos supõe-se que há uma sucessão de funções integráveis e conclui-se que o limite da sucessão é integrável e o limite troca com o integral.
- No TCM Levi supõe-se que sucessão de funções é monótona q.t.p., e no TCD Lebesgue que é dominada por uma função integrável.
- A convergência da sucessão de funções q.t.p. é conclusão do TCM Levi, e é condição para aplicação do TCD Lebesgue.
- A convergência da sucessão de integrais é conclusão do TCD Lebesgue, e é condição para aplicação do TCM Levi.