(i) A constante de mola efetiva para um sistema de n molas em paralelo é dada por

$$K_{efetiva} = \sum_i \underbrace{k_i}_{\text{constante de cada mola}} = 4k$$

0.5

Logo, a equação do movimento do cristal é dada por:

$$M\ddot{y} = \underbrace{-4ky}_{\text{Força elástica das 4 molas}} + \underbrace{M A_0 \cos(\omega_d t)}_{\text{Força efetiva vertical do movimento da mesa.}}$$

1.5

onde y representa o desvio em relação à posição de equilíbrio (e daí não se considerar o peso)

0.5

(ii) Para a solução steady state consideramos que qualquer solução homogénea já desapareceu devido a dissipação residual no sistema e impomos $y = A\cos(\omega_d t)$, onde A é uma constante e determinar a partir da equação do movimento. 0.5

Substituindo na equação do movimento chegamos a ($\omega_0^2 = 4K/M$)

$$-\omega_d^2 A \cancel{\cos(\omega_d t)} = -\omega_0^2 A \cancel{\cos(\omega_d t)} + A_0 \cancel{\cos(\omega_d t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega_d^2}$$ 4.5

(iii) A constante de mola efetiva para um sistema de N molas iguais em série é dada por

$$\frac{1}{K_{efetiva}} = \frac{N}{K} \Leftrightarrow K_{efetiva} = \frac{K}{N}$$

Se pensarmos numa só mola como sendo composta por várias molas idênticas em série, esta relação permite-nos induzir que a constante elástica duma mola varia inversamente com o seu comprimento (mantendo todas as restantes características da mola fixas) 1.0

$$\frac{\omega_0^2}{4} = K/M \gg \omega_d^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{4K}{M} \gg \omega_d^2$$

Logo, neste limite

$$A = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega_d^2} \approx \frac{A_0}{\omega} + O\left(\frac{\omega_d^2}{\omega_0^2}\right)$$

0.5

$$M A_0$$

$$4K$$

Para uma nova constante elástica $\tilde{K}$

$$\tilde{A} = \frac{M A_0}{4\tilde{K}}$$, o que significa

amplitude de vibração é dada pelo módulo

$$\frac{|\tilde{A}|}{|A|} = 0.9 \Leftrightarrow \frac{K}{\tilde{K}} = 0.9$$

sendo $K = \frac{\lambda}{L}$, onde λ é uma constante e L é o comprimento da cada mola

concluímos que

$$\frac{(\cancel{\lambda}/L)}{(\cancel{\lambda}/\tilde{L})} = 0.1 \Leftrightarrow \tilde{L} = 0.1\,L$$ 4.5

ou seja temos de fazer cada mola 10 vezes mais pequena.

0.25

(iv) Assumindo que o colchão introduzido produz uma força dissipativa proporcional à velocidade da massa isso significa que a equação do movimento é corrigida por

$$M\ddot{y} = -4Ky + MA_0\cos(\omega_d t) - \underbrace{b\dot{y}}_{\substack{\text{força} \\ \text{dissipativa} \\ (b \geq 0)}}$$ 0.25

Passando para o plano complexo, a solução de steady state é dada por

$$z = A e^{-i\omega_d t}$$

pelo que substituindo na equação do movimento temos que

$$-M\omega_d^2 A = MA_0 - 4K A + i\omega_d b A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A(4K - i\omega_d b - M\omega_d^2) = MA_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{MA_0}{4K - i\omega_d b - M\omega_d^2}$$

Pelo que a amplitude de vibração é

$$|A| = \frac{MA_0}{\sqrt{(4K - M\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}}$$ 3.0

No limite $K/M \gg \omega_d^2$, isto é aproximado por

$$|A| \approx \frac{MA_0}{\sqrt{16K^2 + b^2\omega_d^2}}$$ 0.5

Para que a amplitude seja reduzida por um fator de 10 em relação à alínea anterior temos que

$$\left(\frac{\cancel{MA_0}}{\sqrt{16K^2+b^2\omega_d^2}}\right) \Big/ \left(\frac{\cancel{MA_0}}{4K}\right) = 0.1 \iff$$

$$\iff \quad 40K = \sqrt{16K^2+\omega_d^2 b^2} \iff$$

$$\iff \quad b \approx \frac{40K}{\omega_d} \qquad 2.5$$