

Pêndulo Rígido

David Cristino (96518), Duarte Marques (96523), João Marques (96542), Rodrigo Pereira (96563)

24 e 26 de novembro de 2020

Grupo B2, Terça e Quinta

*Mestrado Integrado em Engenharia Física e Tecnológica
Laboratório de Mecânica, Oscilações e Ondas
Profs. Pedro Sebastião e António Ferraz*

Resumo

No presente trabalho, são estudadas as oscilações para grandes ângulos de um pêndulo rígido e todo o seu movimento até à imobilização. Para isso, são registadas as posições angulares do sistema ao longo do tempo, recorrendo ao *software* Tracker. A equação do movimento, uma equação diferencial de 2ª ordem, é então utilizada de forma a determinar, por ajustes gráficos, os diferentes coeficientes de atrito do sistema em diferentes situações. Foi estudado o movimento do pêndulo rígido com haste paralelepípedica e com haste cilíndrica, com massas adicionais colocadas em diferentes posições do pêndulo e com pedaços de cartão colados nas faces laterais, de forma a analisar a influência de diferentes fatores no movimento do sistema.

Por fim, a variação do período de oscilação e da amplitude angular máxima ao longo do tempo para as diferentes situações foram comparadas recorrendo, sobretudo, à ferramenta *plotter* implementada no *fitteia*.

I Introdução teórica

Para se estudar o movimento oscilatório de um pêndulo rígido, é necessário obter a sua equação do movimento.

Pode-se definir o torque de um sistema como $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, onde \vec{r} é o vetor posição do ponto de aplicação da força e \vec{F} qualquer força que atue no sistema. Sabe-se que o torque do sistema representa uma variação do momento angular, o que é traduzido pela equação $\vec{\tau} = I_{\text{barra}} \ddot{\theta}$, onde I_{barra} é o momento de inércia da barra, grandeza esta que mede a resistência que um certo sistema oferece a rodar em torno de um determinado eixo.

O torque total do sistema corresponde à soma de todos os torques no mesmo, pelo que se obtém a equação $I_{\text{barra}} \ddot{\theta} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Para o cálculo dos torques, é natural considerar como origem do referencial o *pivot* do pêndulo, pois todas as forças aplicadas neste têm torque nulo, já que $\|\vec{r}\| = 0$. Considera-se como sentido positivo o sentido dos ponteiros do relógio. Em seguida, está representado o esquema de forças aplicadas no sistema.

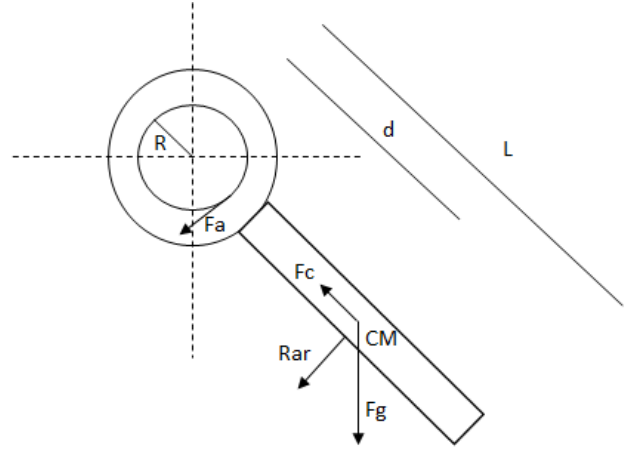


Figura 1: Diagrama de forças aplicadas no sistema.

Considerando que o centro de massa se encontra a uma distância d da origem do referencial, o torque causado pela força gravítica é:

$$\tau_{\vec{F}_g} = -dMg \sin \theta \quad (1)$$

Tanto a força centrípeta como a componente normal da força gravítica não têm contribuição para o torque, pois estão na mesma direção do eixo da barra.

Há também a considerar uma resistência do ar com componentes proporcionais à velocidade e ao seu quadrado, ou seja, $R_{ar} = c_1\dot{\theta} + c_2\dot{\theta}|\dot{\theta}|$. Como esta força é sentida ao longo de toda a barra, para se obter o torque, ter-se-á de integrar a expressão sR_{ar} , onde s é a distância radial, a qual varia entre 0 e L , obtendo-se:

$$\begin{aligned}\tau_{R_{ar}} &= - \int_0^L s R_{ar} ds = \\ &= - \frac{L^2}{2} (c_1\dot{\theta} + c_2\dot{\theta}|\dot{\theta}|)\end{aligned}\quad (2)$$

Para a força de atrito no rolamento, é necessário separá-la em atrito cinético e atrito estático. Considerando que o movimento se dá sem deslizamento, a força de atrito cinético será proporcional às forças perpendiculares à superfície, reação normal, N , e força centrípeta, F_c , pelo que $F_{ac} = c_3(N + F_c) = c_3M(g\cos\theta + \dot{\theta}^2d)$, pelo que o torque será:

$$\tau_{F_{ac}} = -c_3MR(g\cos\theta + \dot{\theta}|\dot{\theta}|d)\quad (3)$$

Já a força de atrito estático é uma força constante, tal que $F_{ae} = c_4\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}$, pelo que o torque desta força será:

$$\tau_{F_{ae}} = -c_4R\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\quad (4)$$

Desta forma, a equação do movimento fica:

$$\begin{aligned}I_{barra}\ddot{\theta} &= -dMg\sin\theta - \frac{L^2}{2}(c_1\dot{\theta} + c_2\dot{\theta}|\dot{\theta}|) - \\ &- c_3MR(g\cos\theta + \dot{\theta}|\dot{\theta}|d) - c_4R\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\end{aligned}\quad (5)$$

Após alguma álgebra, chega-se à expressão que irá ser usada nos ajustes gráficos no *fitteia*:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= -\omega_0^2\sin\theta - \frac{L^2}{2}(a_1\dot{\theta} + a_2\dot{\theta}|\dot{\theta}|) - \\ &- a_3MR(g\cos\theta + d\dot{\theta}|\dot{\theta}|) - a_4R\frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|}\end{aligned}\quad (6)$$

onde $\omega_0^2 = \frac{dMg}{I_{barra}}$, e a_1 , a_2 , a_3 e a_4 são as constantes de atrito do sistema, a serem determinadas.

II Material

- Suporte horizontal, suportes verticais com nós e garras e grampos de aperto;
- Placar de fundo branco;
- Fita cola e UHU *patafix*;
- Fita métrica de menor divisão 1mm;
- Craveira de precisão $\pm 0.02mm$;

• Pêndulo rígido

- Veio central de massa $(78 \pm 1)g$ e comprimento $(50.00 \pm 0.05)cm$;
- Haste paralelepípedica de massa $(215 \pm 1)g$ e comprimento $(47.90 \pm 0.05)cm$;
- Haste cilíndrica de massa $(162 \pm 1)g$ e comprimento $(47.90 \pm 0.05)cm$;
- Peça circular de suporte do pêndulo ao vau metálico;
- Dois parafusos, de massas $(6 \pm 1)g$ e $(7 \pm 1)g$;

• Câmara de 240 fps e tripé de suporte;

• Balança digital de sensibilidade $\pm 1g$;

• Conjunto de massas (porcas);

• Duas porcas para fixação da peça circular do pêndulo;

• Dois candeeiros;

• Pedacos retangulares de cartão;

• Folha de papel.

III Montagem

Em primeiro lugar, são medidas as massas e as dimensões dos diferentes componentes do sistema, recorrendo à balança digital e à fita métrica e craveira analógica, respetivamente.

Em seguida, o veio central é colocado dentro da haste (cilíndrica ou paralelepípedica) e preso nas extremidades superior e inferior por parafusos. A peça circular é colocada no topo da montagem, peça esta que é inserida no eixo do pêndulo. Usam-se grampos de aperto para fixar o suporte horizontal à bancada de trabalho. Este suporte possui um varo metálico que serve de eixo. Com duas porcas, é fixado o pêndulo rígido a esta vara, de forma a que o movimento de oscilação se dê apenas (o quanto possível) num plano paralelo ao do placar branco.

Para um registo mais fiável dos dados, desenha-se, no pêndulo, uma marca circular numa cor distinta da do fundo branco (vermelho ou preto, por exemplo, de forma a aumentar o contraste) e colocam-se candeeiros a iluminar a montagem, de tal modo que se reduzam as sombras no fundo. Isto é importante tendo em conta o software Tracker, usado na recolha dos dados.

Monta-se a câmara no tripé de forma a que esta aponte na direção do eixo, reduzindo, assim, erros de paralaxe. Com esta, são filmados os vários ensaios do movimento oscilatório do pêndulo rígido.

IV Procedimento experimental

Na presente atividade experimental, são estudadas as diferentes características do movimento do sistema. Para todos os ensaios, o pêndulo foi largado de uma posição acima do plano horizontal que passa pelo pivô, e com uma certa velocidade inicial, de modo a que completasse algumas voltas completas em torno do centro de rotação. Em todos os ensaios, o pêndulo completou, pelo menos, duas voltas completas. No total, realizaram-se 8 ensaios diferentes:

- Caso 1: sem massas nem pedaços de cartão;
- Caso 2: massas colocadas na zona superior;
- Caso 3: massas colocadas na zona inferior;
- Caso 4: pedaços de cartão colados nas extremidades laterais.

Sendo que cada caso foi realizado uma vez com a haste paralelepipedica e outra vez com a haste cilíndrica.

No caso 1, usaram-se os pêndulos sem nenhuma alteração, com o objetivo de estudar o efeito da variação da forma geométrica do pêndulo no atrito do ar. Com os casos 2 e 3, em que se adicionaram massas à haste do pêndulo, fez-se variar a posição do centro de massa, levando à variação do momento de inércia. Por último, de forma a aumentar consideravelmente a área de superfície exposta ao atrito do ar, colou-se um pedaço de cartão retangular em cada uma das extremidades laterais do pêndulo, perpendicularmente ao plano de oscilação, de forma a que o sistema adotasse um forma pouco aerodinâmica.

Para efetuar os ajustes gráficos para diferentes ensaios, foi necessário medir certas grandezas em laboratório, de forma a aplicar a equação 6 com diferentes valores. Foram elas: a distância L , apresentada na Figura 1, medida com a fita métrica; a massa do sistema, M , medida na balança digital; a distância d , também apresentada na Figura 1. Para determinar d , segurava-se o pêndulo em ambas as extremidades e deslocavam-se os dedos que suportavam o pêndulo, em direção ao centro, de forma a encontrar o centro de massa; sabendo a localização do centro de massa, media-se a distância d com a fita métrica.

V Resultados obtidos

De forma a estudar o movimento oscilatório do pêndulo rígido, realizaram-se, então, diferentes ensaios em condições distintas e, para cada situação, foram determinados os coeficientes a_1 , a_2 , a_3 e a_4 apresentados na equação 6, assim como os valores de ω_0 .

Os valores da posição angular, θ , e do tempo t , aos quais se aplica a equação diferencial de ajuste, foram obtidos recorrendo à ferramenta *Tracker* e aos vídeos captados em laboratório. Os ajustes gráficos foram efetuados recorrendo à macro NODE1 implementada no software Fitteia, na qual se obtêm as soluções de ODEs. O valor da aceleração gravítica utilizado nos ajustes foi $g = 9.8005 \text{ m/s}^2$.

I Caso 1: Regime simples

No caso da peça metálica paralelepipedica, as medições obtidas com a fita métrica foram $L = (54.67 \pm 0.02) \text{ cm}$ e $d = (23.73 \pm 0.53) \text{ cm}$. Com a craveira, obteve-se $R = (1.224 \pm 0.002) \text{ cm}$, sendo este o raio interior da peça circular na extremidade superior do pêndulo rígido. A massa do sistema é $M = (362 \pm 1) \text{ g}$. O ajuste gráfico obtido é apresentado na figura abaixo. Nesta, apenas se apresenta parte do gráfico obtido (até $t = 30 \text{ s}$), de forma a facilitar a visualização da função de ajuste obtida. Embora se tenham realizado medições até cerca de $t = 180 \text{ s}$, o *software* de ajuste apresenta algumas "singularidades" na linha de ajuste ao se fazer *Zoom In* em zonas de oscilação mais fervorosa, algo que já se nota na Figura 3.

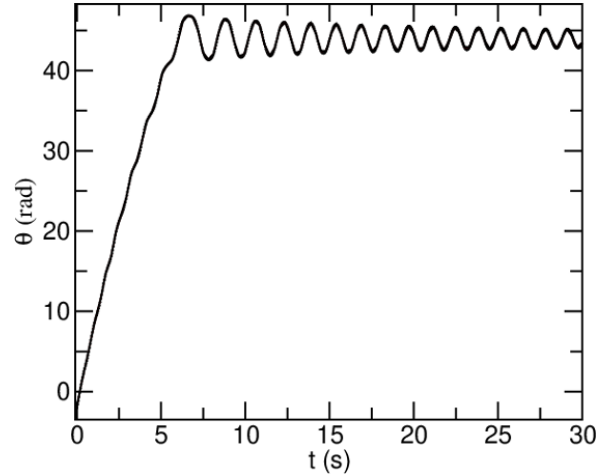


Figura 2: Movimento oscilatório do pêndulo de haste paralelepipedica em função do tempo - caso 1.

Apresenta-se ainda abaixo uma representação ampliada do movimento oscilatório em torno da posição final de equilíbrio, ou seja, numa parte do movimento em que o pêndulo já não perfaz voltas completas em torno do pivô. O troço do gráfico da Figura 2 que se assemelha a uma reta corresponde, por sua vez, à situação na qual o valor do ângulo é estritamente crescente, ou seja, na qual o pêndulo dá voltas completas. As ligeiras oscilações verificadas neste troço, sobretudo para valores superiores de t , devem-se às variações de velocidade do sistema ao longo do movimento circular.

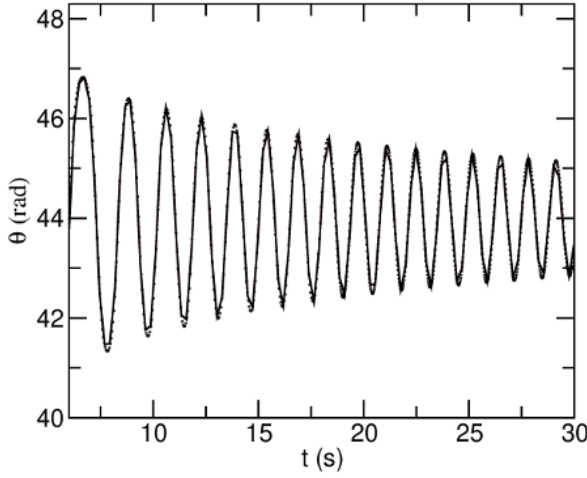


Figura 3: Movimento oscilatório do pêndulo de haste paralelepípedica em torno da posição final, em função do tempo - caso 1.

À medida que o movimento progride no tempo, verifica-se uma tendência de estabilização do valor de θ , em torno da posição no qual o pêndulo atingirá o repouso.

Nos gráficos apresentados, é evidente o movimento oscilatório do sistema com amplitude decrescente, a qual se deve aos efeitos das forças de atrito envolvidas.

Para este ajuste, os resultados obtidos foram:

- $\omega_0 = (5.27336 \pm 0.00005) \text{ rad s}^{-1}$;
- $a_1 = (5.67629 \pm 0.00005) \times 10^{-1}$;
- $a_2 = (6.37587 \pm 0.00006) \times 10^{-2}$;
- $a_3 = (-7.93926 \pm 0.00008)$;
- $a_4 = (-1.52761 \pm 0.00002) \times 10^1$.

Recorrendo à equação $I = \frac{dMg}{\omega_0^2}$, chega-se a $I = (3.03 \pm 0.08) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$. Além disso, tem-se que o período próximo do equilíbrio é dado por $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, logo $T = (1.19150 \pm 0.00001) \text{ s}$.

As incertezas dos valores ω_0 , a_1 , a_2 , a_3 e a_4 são dados pelo Fitteia. Por sua vez, as incertezas de I e T são dadas, respetivamente, por $\delta I = \frac{Mg}{\omega_0^2} \delta d + \frac{dM}{\omega_0^2} \delta M + \frac{2dMg}{\omega_0^3} \delta \omega_0$ e $\delta T = \frac{2\pi}{\omega_0^2} \delta \omega_0$.

Estas expressões serão usadas com os resultados obtidos por todos os diferentes ajustes gráficos.

Por sua vez, para o pêndulo com a haste cilíndrica, tem-se que $L = (51.80 \pm 0.02) \text{ cm}$, $R = (0.500 \pm 0.002) \text{ cm}$, $d = (22.40 \pm 0.02) \text{ cm}$ e $M = (308 \pm 1) \text{ g}$. O ajuste gráfico correspondente é apresentado em seguida.

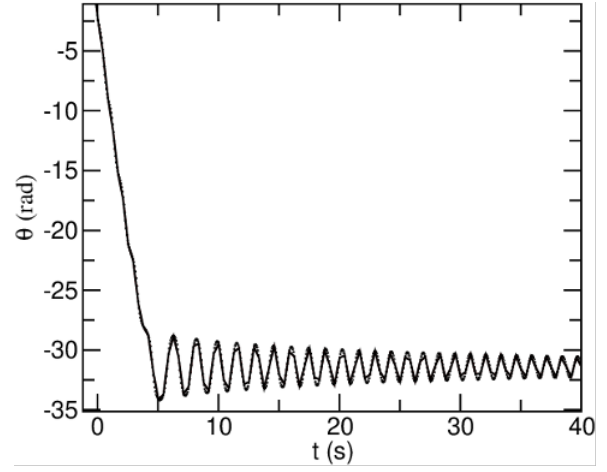


Figura 4: Movimento oscilatório do pêndulo de haste cilíndrica em função do tempo - caso 2.

Os resultados obtidos foram:

- $\omega_0 = (5.26808 \pm 0.00008) \text{ rad s}^{-1}$;
- $a_1 = (6.08118 \pm 0.00010) \times 10^{-1}$;
- $a_2 = (1.83988 \pm 0.00004) \times 10^{-2}$;
- $a_3 = (-4.27468 \pm 0.00009)$;
- $a_4 = (-3.37444 \pm 0.00007) \times 10^1$.

Com isto, obtém-se $I = (2.44 \pm 0.01) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $T = (1.19269 \pm 0.00002) \text{ s}$.

II Caso 2: Regime com massas na zona superior

Visto que os gráficos obtidos para as diferentes secções da atividade são bastante semelhantes entre si, serão, a partir de agora, colocados em anexo.

Para a barra paralelepípedica (Figura 12), foi inicialmente retirado o vau metálico do interior da haste, e colocaram-se 8 porcas iguais, de massa conjunta $m = (18 \pm 1) \text{ g}$, juntas e a uma distância de 7.5 cm até 11.6 cm do pivô do sistema. Os valores de L e R mantiveram-se constantes face ao caso 1, mas, devido à introdução de novas massas, mudou a massa total do sistema e a posição do centro da massa. Os novos valores são $d = (23.15 \pm 0.10) \text{ cm}$ (de incerteza estimada tendo em conta os erros associados à medição) e $M = (380 \pm 2) \text{ g}$.

Do ajuste gráfico, chegou-se a:

- $\omega_0 = (5.2798 \pm 0.0014) \text{ rad s}^{-1}$;
- $a_1 = (-1.8648 \pm 0.0045) \times 10^{-1}$;
- $a_2 = (4.8479 \pm 0.0044) \times 10^{-2}$;
- $a_3 = (3.5049 \pm 0.6293) \times 10^{-2}$;
- $a_4 = (2.3584 \pm 0.0050) \times 10^1$.

Sendo que $I = (3.09 \pm 0.03) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $T = (1.1900 \pm 0.0003) \text{ s}$.

Relativamente à haste cilíndrica (Figura 13): neste caso, as porcas acrescentadas, que apresentavam uma massa conjunta de $m = (17 \pm 1) \text{ g}$, foram colocadas a uma distância de 6.6 cm até 10.8 cm do pivô do sistema. A nova posição do centro de massa é $d = (21.5 \pm 0.1) \text{ cm}$ e a massa do sistema é $M = (325 \pm 2) \text{ g}$.

Do ajuste, obtêm-se os seguintes valores:

- $\omega_0 = (5.26931 \pm 0.00004) \text{ rad s}^{-1}$;
- $a_1 = (3.71931 \pm 0.00004) \times 10^{-1}$;
- $a_2 = (2.55751 \pm 0.00001) \times 10^{-3}$;
- $a_3 = (-3.2052 \pm 0.0002) \times 10^{-1}$;
- $a_4 = (1.59750 \pm 0.00001) \times 10^1$.

Dos quais se chega a $I = (2.47 \pm 0.03) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $T = (1.19241 \pm 0.00001) \text{ s}$.

III Caso 3: Regime com massas na zona inferior

Esta montagem experimental é em tudo semelhante à anterior, assim como o valor da massa total do sistema. Porém, as porcas são colocadas na zona inferior do vau metálico, o que modifica a posição do centro de massa.

No caso da haste paralelepípedica (Figura 14), foram colocadas de 24.3 cm a 28.4 cm do pivô. A nova distância do pivô ao centro de massa foi determinada experimentalmente como sendo $d = (24.08 \pm 0.10) \text{ cm}$.

Os resultados obtidos são os seguintes:

- $\omega_0 = (5.30158 \pm 0.00001) \text{ rad s}^{-1}$;
- $a_1 = (1.9957 \pm 0.0002) \times 10^{-4}$;
- $a_2 = (6.4290 \pm 0.0003) \times 10^{-2}$;
- $a_3 = (-5.66700 \pm 0.00002)$;
- $a_4 = (5.7636 \pm 0.0001)$.

Daqui se obtém que $I = (3.19 \pm 0.03) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $T = (1.18515 \pm 0.00001) \text{ s}$.

No caso da haste cilíndrica (Figura 15), as porcas foram colocadas em posições de 46.3 cm a 50.5 cm do pivô. A nova distância do pivô ao centro de massa foi determinada experimentalmente como sendo $d = (26.5 \pm 0.1) \text{ cm}$.

Neste caso:

- $\omega_0 = (5.25058 \pm 0.00002) \text{ rad s}^{-1}$;
- $a_1 = (-4.81053 \pm 0.00001) \times 10^{-1}$;

- $a_2 = (3.26196 \pm 0.00001) \times 10^{-2}$;
- $a_3 = (5.88278 \pm 0.00002)$;
- $a_4 = (7.88720 \pm 0.00002) \times 10^1$.

Logo, $I = (3.06 \pm 0.03) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $T = (1.19666 \pm 0.00001) \text{ s}$.

IV Caso 4: Regime com pedaços de cartão

Foram colocados, nas partes laterais da haste paralelepípedica, dois pedaços retangulares de cartão, com o topo a cerca de 23.8 cm de distância do pivô. Cada pedaço apresentava espessura e massa desprezáveis, e um comprimento de 20 cm e largura de 6.2 cm . Deste modo, as variáveis d , M , L e R a considerar são as mesmas do caso 1. Os pedaços de cartão foram colados à haste com *Post-It* (UHU *patafix*).

Deste ajuste (Figura 16), obtiveram-se os seguintes valores:

- $\omega_0 = (5.26804 \pm 0.00025) \text{ rad s}^{-1}$;
- $a_1 = (2.54 \pm 0.05) \times 10^{-1}$;
- $a_2 = (1.801 \pm 0.005) \times 10^{-1}$;
- $a_3 = (-4.48 \pm 0.07)$;
- $a_4 = (-1.0 \pm 0.1)$.

E, portanto, $I = (3.03 \pm 0.08) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $T = (1.19270 \pm 0.00006) \text{ s}$.

No caso da outra haste (Figura 17), usaram-se dois pedaços de cartão semelhantes, de comprimento 20 cm e largura 6 cm , de massa conjunta 3 g (logo, $M = (311 \pm 2) \text{ g}$) e a cerca de 18.7 cm do pivô. A posição do centro de massa é considerada a mesma da do caso 1. Os cartões foram presos com fita-cola.

Os resultados obtidos foram:

- $\omega_0 = (5.2625 \pm 0.0001) \text{ rad s}^{-1}$;
- $a_1 = (8.5266 \pm 0.0004) \times 10^{-1}$;
- $a_2 = (7.8051 \pm 0.0003) \times 10^{-2}$;
- $a_3 = (7.0852 \pm 0.0004)$;
- $a_4 = (-2.5191 \pm 0.0001) \times 10^1$.

Com isto, chega-se a $I = (2.92 \pm 0.03) \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $T = (1.1940 \pm 0.0001) \text{ s}$.

V Período e amplitude de oscilação ao longo do tempo

Finalmente, procurou-se avaliar a relação entre os diferentes situações de atrito e a variação do período e da amplitude máxima de oscilação, em módulo, ao longo do tempo.

Tendo obtido, dos ajustes gráficos, valores esperados para o período próximo do equilíbrio ($T = \frac{2\pi}{\omega_0}$), poder-se-á verificar se os valores do período, ao longo do tempo, convergem, de facto, para os valores obtidos pelos ajustes gráficos. Observar-se-á, também, à partida, a convergência dos valores de $|\theta|_{max}$ para zero (situação na qual o pêndulo está em repouso).

Para realizar esta análise, recorreu-se à ferramenta *plotter*, implementada no Fitteia. Esta permite facilmente realizar *plots* conjuntos de vários conjuntos de dados e desenhar linhas que unem os pontos de um dado conjunto de dados.

Para cada situação física estudada nesta atividade, começou-se por obter a derivada $\frac{d\theta}{dt}$, através do Fitteia. Visto que se pretende analisar o período e a amplitude máxima de oscilação, analisaram-se apenas os dados a partir do momento no qual o pêndulo já não perfaz voltas completas. Para o caso 1, com a haste paralelepipedica, obtém-se o seguinte gráfico:

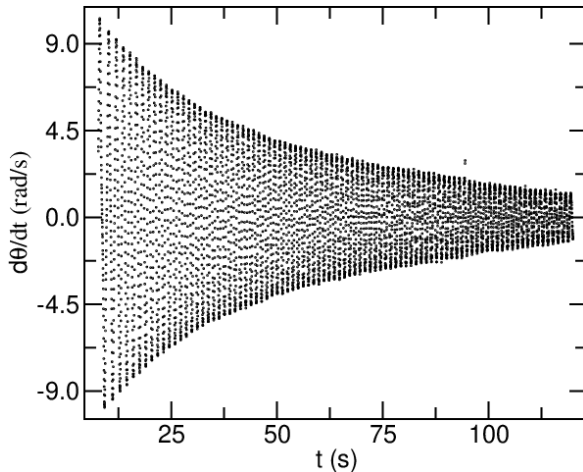


Figura 5: Derivada temporal do conjunto de pontos obtidos para o caso 1 com a haste paralelepipedica.

Sendo que, para as outras situações, obtiveram-se gráficos bastante semelhantes.

Em seguida, seleccionaram-se, na tabela de dados, os pontos nos quais existem máximos de amplitude de oscilação (em módulo). Estes ocorrem quando $\frac{d\theta}{dt} = 0$ (pontos nos quais a velocidade angular do pêndulo rígido é nula). Tendo estes pontos, pode, então, fazer-se o ajuste para os valores de $|\theta|$ correspondentes - estes valores correspondem a máximos de amplitude - e do período, T .

Com o intuito de exemplificação, eis o *plot* realizado para uma das situações, tanto com pontos isolados, tanto com a linha a unir os diferentes pontos experimentais:

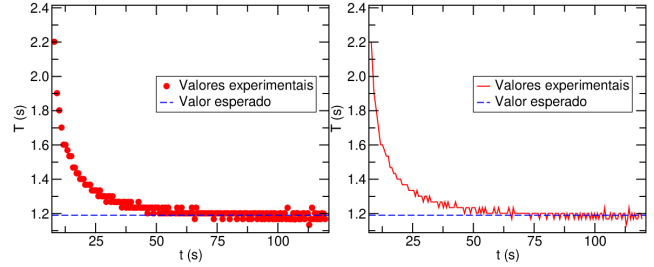


Figura 6: *Plot* do período ao longo do tempo (caso 1, haste paralelepipedica).

De forma a se poderem comparar os diferentes casos, o *plot* conjunto é feito com os valores do período de cada caso normalizado pelo respetivo T_0 , sendo este o valor do período inferido a partir de cada ω_0 do ajuste gráfico. Os *plots* são também todos transladados para $t = 0$. Eis o resultado final:

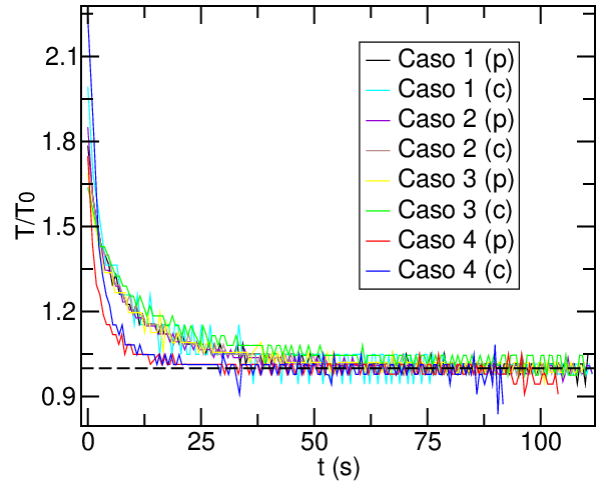


Figura 7: *Plot* conjunto dos períodos normalizados.

Para as funções $|\theta|_{max}(t)$, fazem-se *plots* análogos:

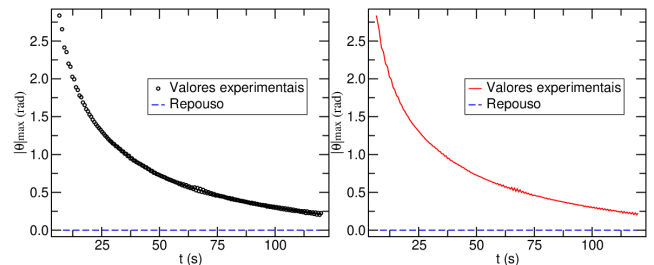


Figura 8: *Plot* da amplitude ao longo do tempo (caso 1, haste paralelepipedica).

Eis o *plot* conjunto correspondente:

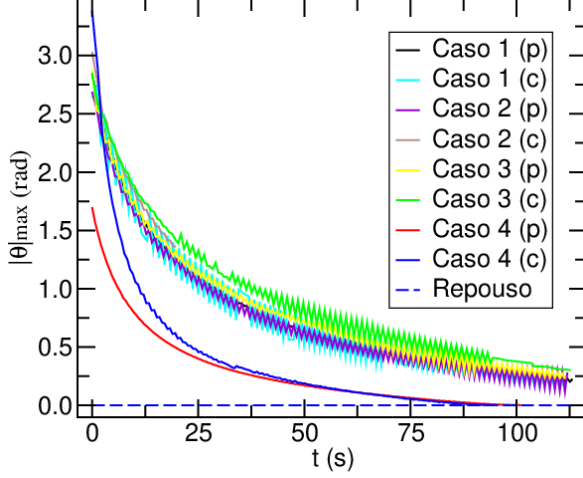


Figura 9: *Plot* conjunto das amplitudes máximas.

É de apontar que, nas legendas das Figuras 6, 7, 8 e 9, "p" e "c" referem-se, respetivamente, às hastes paralelepédica e cilíndrica.

VI Análise dos resultados

Para o regime simples, o valor a_1 para a haste cilíndrica é superior em 6.6% relativamente ao valor para a haste paralelepédica. Isto indica que o atrito cuja intensidade é proporcional à velocidade é maior para a barra cilíndrica. Porém, seria de esperar o contrário, visto que a forma cilíndrica é mais aerodinâmica. O paralelepípedo apresenta uma maior área de contacto com o ar e apresenta cantos, o que causa turbulência nas suas proximidades. Uma relação oposta verifica-se para a_2 , o coeficiente relativo à componente do atrito proporcional ao quadrado da velocidade, cujo valor é em 71.1% superior para a haste paralelepédica. Por um lado, tal poderá dever-se à possibilidade de se ter imposto uma velocidade inicial superior. Porém, esta relação corrobora o que se esperava – a forma cilíndrica é mais aerodinâmica. Verifica-se também que o momento de inércia é inferior para o sistema com a haste cilíndrica, o que seria de esperar tendo em conta a massa inferior deste sistema.

Para o caso das massas na zona inferior, para o paralelepípedo, verifica-se que o momento de inércia obtido é superior ao momento de inércia no caso das massas na zona superior, o que seria de esperar, visto que, colocando as massas numa zona mais inferior, aumenta a distância do pivô ao centro de massa.

Por outro lado, verifica-se que o coeficiente a_3 , em módulo, é em cerca de 99.4% superior ao do caso com as massas em cima, o que indica uma maior contribuição do torque causado pela força gravítica (e consequentemente, pela força normal) e pela força centrípeta, o

que, mais uma vez, vem ao encontro da posição mais distante do centro de massa. O coeficiente a_4 , porém, é inferior, o que faz sentido, tendo em conta o maior valor de ω_0 – sendo a rotação mais rápida, a ação do atrito estático não é tão significativa.

Para a haste cilíndrica, comparando com os valores obtidos com as massas na zona superior, chegam-se a conclusões semelhantes às apontadas para a haste paralelepédica. O momento de inércia obtido é superior no caso das massas na zona inferior. O coeficiente a_3 , em módulo, é em 2 ordens de grandeza superior ao do caso com as massas em cima. Neste caso, contudo, o coeficiente a_4 é superior com as massas em baixo, sendo também inferior ω_0 , o que vai contra o que, à partida, se esperava. No caso da haste cilíndrica, as massas foram postas mais em baixo do que na haste paralelepédica (em cerca de 22 cm). Deste modo, poderá estar a sobrepor-se outro efeito que faz diminuir ω_0 relativamente à situação com as porcas em cima. Fazendo uma analogia com o pêndulo simples: com um comprimento do fio maior no pêndulo simples, o período de oscilação aumenta, de acordo com a expressão $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, para pequenas oscilações. Ora, ao se deslocarem as massas para baixo no pêndulo rígido, está-se, efetivamente, a deslocar o centro de massa para baixo, o que corresponderia a aumentar o comprimento do "fio". Deste modo, seria de esperar, de facto, um período maior e um ω_0 menor.

Para o caso com o cartão, podem comparar-se os valores com os obtidos para o regime simples. Como seria de esperar, o valor do coeficiente de atrito a_2 , relativo à força de atrito proporcional a v^2 , é superior no caso com o cartão. No regime simples, o valor era de $a_2 = (6.37587 \pm 0.00006) \times 10^{-2}$, logo cerca de 64.6% inferior ao caso com cartão. Contudo, não se esperava obter a relação que se obteve para o coeficiente a_1 : este é superior em cerca de 55.2% no regime simples. Tal poderá dever-se ao facto de se poder ter lançado o sistema com cartão com velocidade inicial bastante elevada; deste modo, o atrito proporcional ao quadrado da velocidade, mais significativo, fez diminuir consideravelmente a velocidade, fazendo diminuir o efeito posterior do atrito proporcional a v . Além disso, há de apontar que o cartão não terá sido o material mais apropriado a usar, devido à sua elevada fragilidade e maleabilidade.

Finalmente, podem-se deduzir importantes conclusões das Figuras 7 e 9. Porém, estas tornam-se mais evidentes ao fazer *plots* apenas para os instantes iniciais:

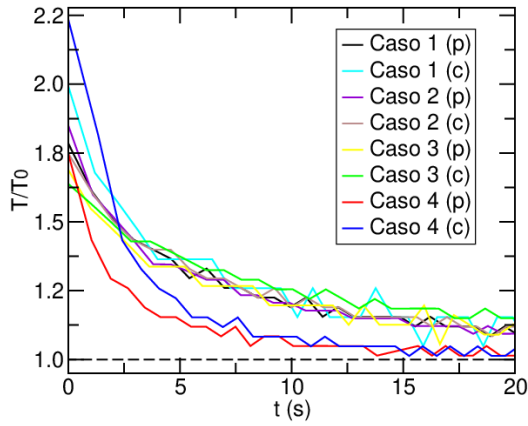


Figura 10: *Plot* conjunto parcial dos períodos normalizados.

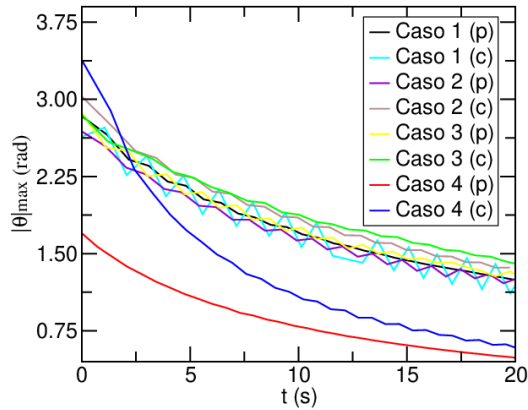


Figura 11: *Plot* conjunto parcial das amplitudes máximas.

Por um lado, verifica-se que o período normalizado diminui ao longo do tempo, aproximando-se de 1. Assim, corrobora-se, de certo modo, os valores de T obtidos nos ajustes gráficos. Mesmo assim, verifica-se uma ligeira discrepância, sobretudo para as linhas do Caso 4. Também se verifica que o período decai muito mais rapidamente nestes casos, o que indica o efeito significativo do atrito do ar face aos restantes: havendo os pedaços de cartão, este toma valores muito mais elevados. Nos outros casos, as diferenças entre os períodos

não são tão notórias.

Pode também concluir-se que a amplitude diminui ao longo do tempo, tendendo para 0 no limite assintótico. Também é notória a diminuição acentuada das ordenadas para as linhas do Caso 4. Em ambas as figuras, nota-se também uma queda mais acentuada nos valores da linha azul escura. Porém, tal dever-se-á às diferentes velocidades (e ângulos) iniciais impostas - sendo maiores, a perda de energia inicial é muito mais acentuada.

Visto que a velocidade vai diminuindo ao longo do tempo, as perdas de energia também vão sendo menores, daí as taxas de variação de $\frac{T}{T_0}$ e $|\theta_{max}|$ diminuírem ao longo do tempo.

VII Conclusão

Foram atingidos os objetivos propostos para esta atividade. No geral, os resultados obtidos foram de acordo ao esperado, embora se tenham verificado algumas discrepâncias, já apontadas. Todavia, os valores estarão afetados de alguns erros experimentais, tais como: alinhamento deficiente da câmara com o eixo de rotação; movimentos do pêndulo em direções indesejadas; limitações no *software* de recolha de dados. Pensa-se que os movimentos em direções indesejadas terão sido os erros mais significativos, pois verificou-se que a peça circular do topo do pêndulo estava danificada, o que causava uma inclinação do mesmo face à vertical e também ligeiras vibrações indesejadas. Esta inclinação também coloca em causa a aplicação da equação diferencial (6). Seria ainda aconselhável haver uma forma de quantificar as velocidades e ângulos iniciais impostos, de forma a comparar melhor as diferentes situações.

Referências

- [1] Sebastião P., Pêndulo Rígido (T6), *Guia dos Trabalhos Experimentais*, Departamento de Física (IST), Lisboa, 2020.
- [2] Manual online do *fitteia*, *Fitting solutions of differential equations*, 2020, *fitteia team*.

VIII Anexos

I Gráficos

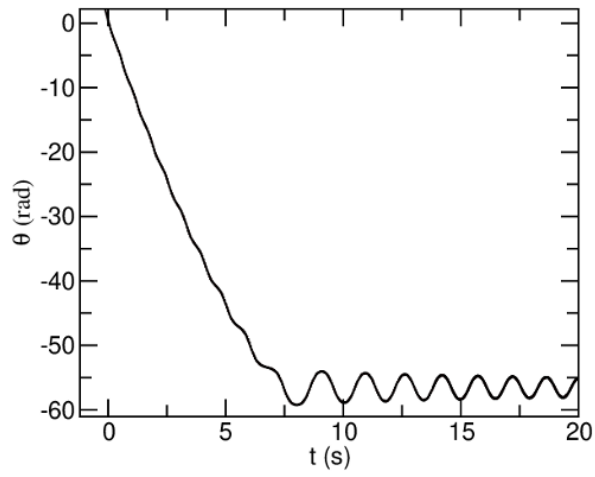


Figura 12: Movimento oscilatório do pêndulo de haste paralelepípedica com massas na zona superior - caso 2.

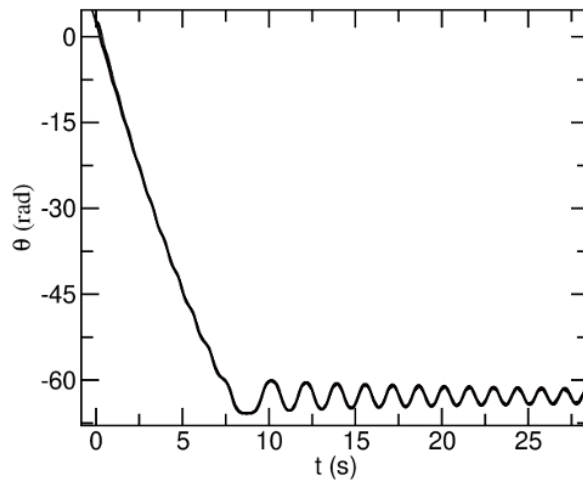


Figura 13: Movimento oscilatório do pêndulo de haste cilíndrica com massas na zona superior - caso 2.

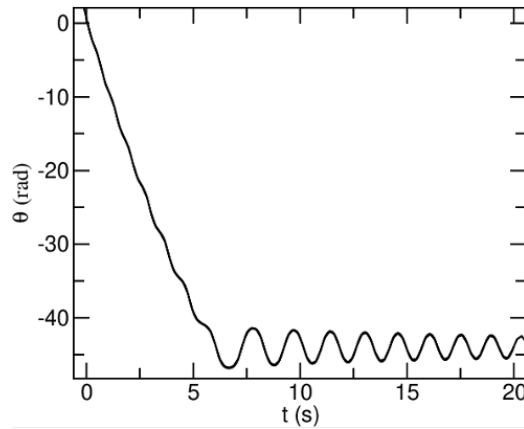


Figura 14: Movimento oscilatório do pêndulo de haste paralelepípedica com massas na zona inferior - caso 3.

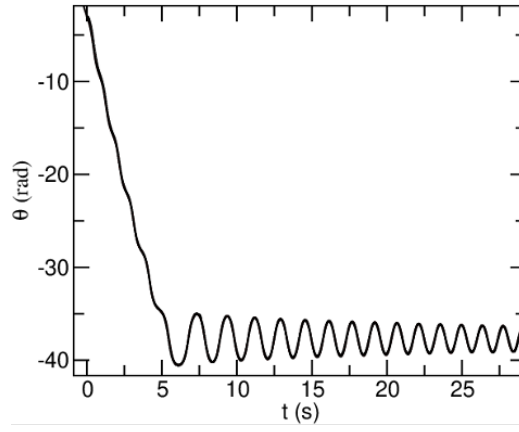


Figura 15: Movimento oscilatório do pêndulo de haste cilíndrica com massas na zona inferior - caso 3.

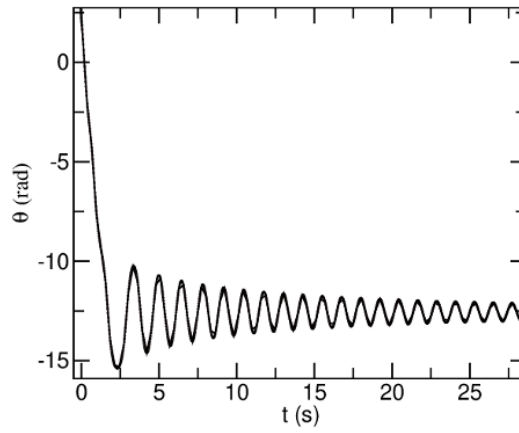


Figura 16: Movimento oscilatório do pêndulo de haste paralelepipedica e pedaços laterais de cartão colados - caso 4.

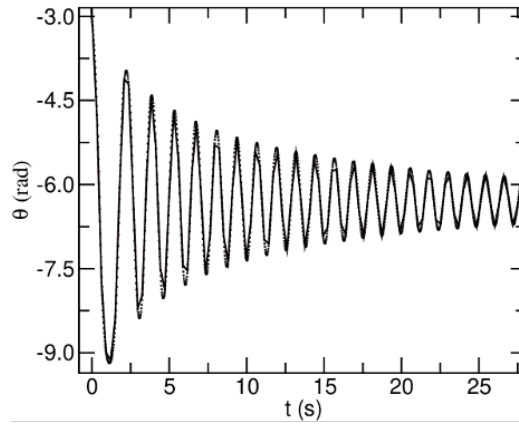


Figura 17: Movimento oscilatório do pêndulo de haste cilíndrica e pedaços laterais de cartão colados - caso 4.