Mecânica Analítica

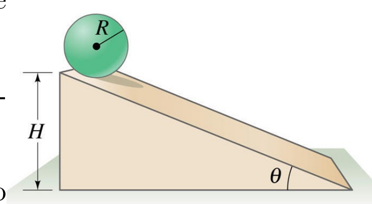
2020-2021

Série 5

Responsáveis: Hugo Terças, Pedro Cosme

Nesta série, ilustramos alguns aspectos da dinâmica de corpo rígido e iniciamos o estudo das pequenas oscilações

$\star$ **Problema 1. Desliza ou não desliza?** Considere um disco de raio R que desce um plano inclinado de ângulo θ. Considere que o disco parte, do repouso e sem rotação, de uma altura inicial H, e que o coeficiente de atrito entre as superfícies é μ.



a) Obtenha o Lagrangeano do sistema considerando que existe deslizamento.

b) Repita o procedimento considerando a condição de não-deslizamento e obtenha o valor da aceleração do disco.

c) Através do metódo dos multiplicadores de Lagrange, determine o ângulo de crítico θ_c a partir do qual o disco desliza.

$\star\star$ **Problema 2. Equações de Euler.** Considere um corpo rígido genérico, de momentos de inércia I_1, I_2 e I_3 em relação aos eixos principais num determinado referencial de inércia.

a) Partindo da relação de transformação entre o referencial de inércia o o referencial do corpo rígido, mostre que as equações de Euler se escrevem

$$\begin{aligned} N_1 &= I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ N_2 &= I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3, \\ N_3 &= I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{aligned}$$

b) Considere agora o caso da rotação livre, i.e. sem torques ($N_i = 0$). Assumindo pequenas perturbações, verifique em que condições a rotação em terno do eixo principal $\mathbf{e_1}$ é estável.

c) Considere o pião simétrico discutido nas aulas teóricas ($I_1 = I_2$). O Lagrangeano correspondente é dado por

$$L = \frac{1}{2}I_1\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2 - Mgl\cos\theta.$$

Obtenha, em termos das quantidades conservadas, a seguinte equação para a variável $u \equiv \cos\theta$,

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 + V_{\text{ef.}}(u) = 0.$$

d) Represente o potencial efectivo $V_{\text{ef.}}(u)$ graficamente e argumente que o movimento de nutação ocorre entre valores limitados de u.

$\star\star$ **Problema 3. Modos normais.** Considere um sistema de n graus de liberdade descrito pelas coordenadas generalizadas $q_1, q_2, ..., q_n$. Considere o caso em que existe pelo menos um ponto de equilíbrio.

a) Mostre que o Lagrangeano para pequenas oscilações $\eta_i = q_i - q_{0i}$ se escreve

$$L = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j.$$

b) Teste soluções do tipo $\eta_i = a_i e^{-i\omega t}$. Mostre que a equação do movimento se escreve

$$V_{ij} a_j = \omega^2 T_{ij} a_j$$

e obtenha a equação secular para ω.

c) Seja $\mathbf{a}_\alpha$ um vector próprio. Mostre que a simetria do tensor T_{ij} implica

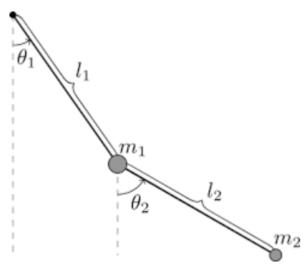
$$\mathbf{a}_\alpha^\dagger \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_\beta = \mathbb{I} \delta_{\alpha\beta}.$$

(De forma equivalente, que se $\mathbf{A}$ for a matriz cujas colunas são os vectores próprios, se tem $\mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A} = \mathbb{I}$.)

d) Defina as coordenadas normais ζ através da relação $\zeta_i = A_{ij} \eta_j$. Mostre que, em termos destas coordenadas, o Lagrangeano é diagonal

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{\zeta}_k^2 - \omega_k^2 \zeta_k^2 \right).$$

$\star\star$ **Problema 4. O pêndulo duplo.** Considere um pêndulo duplo, sujeito a um potencial gravítico constante, de hastes fixas ℓ_1 e ℓ_2. O primeiro pêndulo tem um ponto de suspensão fixo, enquanto que o segundo está suspenso na massa do primeiro.



a) Mostre que o Lagrangeano do sistema pode ser dado por

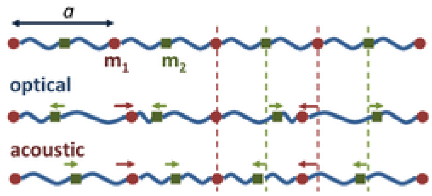
$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\ell_1 \ell_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] \\ &+ \quad m_1 g \ell_1 \cos\theta_1 + m_2 g \left(\ell_1 \cos\theta_1 + \ell_2 \cos\theta_2 \right). \end{aligned}$$

b) Obtenha os pontos de equilíbrio do sistema e discuta a sua natureza.

c) Considere o caso $m_1 = m_2 = m$ e $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, por simplicidade. Utilize o formalismo das pequenas oscilações para construir o Lagrangeano para as variáveis θ_1 e θ_2 em torno do ponto de equilíbrio estável que obteve na alínea b).

d) Obtenha os modos próprios de vibração do sistema e discuta-os fisicamente.

⋆⋆⋆ **Problema 5. Vibrações em cristais: os fonões.**



Em física do estado sólido, as vibrações das estruturas cristalinas dos diferentes materiais (metais, semi-metais, semicondutores e dieléctricos) têm um papel fundamental nas propriedades termodinâmicas do sistema. O calor específico dos sólidos, por exemplo, depende fortemente da maneira como os as estruturas cristalinas vibram. Da mesma forma, a condutividade eléctrica é afectada pela maneira como os electrões (considerados livres, em primeira aproximação) interagem com o potencial criado pelos iões da rede.

Acontece que, no caso de sistemas muito grandes (no limite analítico, infinitos), os modos de vibração adquirem um carácter colectivo, comportando-se como ondas acústicas. Aos elementos (quanta) de vibração destes modos nos sólidos dá-se o nome de *fonão*.

Consideremos um cristal unidimensional, que em primeira aproximação é uma colecção infinita e periódica de osciladores harmónicos acoplados. Seja $x_n = na$ a posição do n-ésimo ião da rede, onde a é a constante da rede. Consideremos, ainda, que todos os osciladores têm a mesma massa m e constante de mola k, restringindo a interacção a primeiros vizinhos.

a) Mostre que o Lagrangeano do sistema pode ser escrito na forma

$$L = \frac{1}{2} m \sum_n \dot{u}_n^2 - \frac{1}{2} k \sum_n \left(u_{n+1} - u_n\right)^2, \tag{1}$$

onde $u_n = x_n - na$ é o deslocamento em relação à posição de equilíbrio.

b) Escreva as equações do movimento e determine a relação de dispersão do *modo acústico* dos fonões

$$\omega(q) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{qa}{2}\right). \tag{2}$$

Para longos comprimentos de onda, $qa \ll 1$, obtemos a relação da dispersão das ondas acústicas, $\omega = v|q|$, onde $v = 2\omega_0 a$. O desvio próximo da *zona de Brillouin*, i.e. para $q \simeq \pi/a$, reflecte a estrutura discreta da rede.

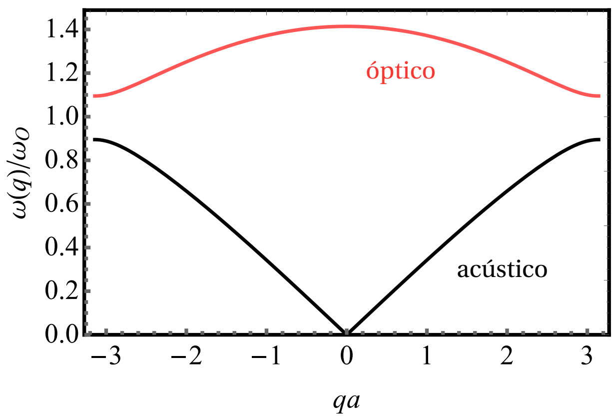
c) Considere agora um cristal diatómico, constituído por massas m_1 e m_2. Mostre que, nesse caso, obtemos dois modos distintos

$$\omega(q)^2 = \omega_{\mathrm{O}}^2 \pm \sqrt{\omega_{\mathrm{O}}^4 - 4\omega_{\mathrm{A}}^4 \sin^2(qa)}, \tag{3}$$

onde

$$\omega_{\mathrm{O}} = \sqrt{k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}, \quad \text{e} \quad \omega_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{k}{\sqrt{m_1 m_2}}}. \tag{4}$$

O modo de fonão de maior frequência recebe o nome de *modo óptico*, e apresenta um hiato no limite dos largos comprimentos de onda $q \to 0$ (ver Figura abaixo). Tem, portanto, uma natureza diferente do modo acústico determinado na alínea anterior (e que corresponde aqui ao modo de menor frequência), recebendo este nome por poder ser excitado com de feixes luminosos. Aproveite para se convencer de que no caso $m_1 = m_2$ recuperamos o caso descrito anteriormente.



1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
ω(q)/ω0
qa
óptico
acústico