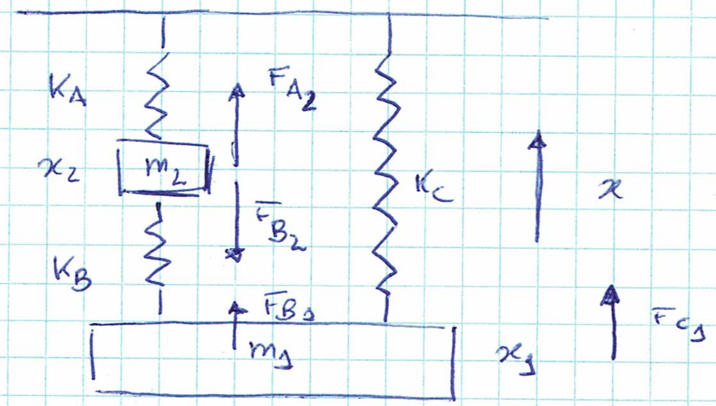

a) O peso das massas contribui apenas para uma alteração da posição de equilíbrio. Logo, definindo x_1 e x_2 como o desvio em relação à posição de equilíbrio da massa 1 e 2, respetivamente, podemos ignorar o peso no resto do problema 0.5 Muitos não apresent. esta justificação

Sendo assim as equações do movimento serão

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \underbrace{-K_B(x_1 - x_2)}_{F_{B_1}} \underbrace{- K_C\, x_1}_{F_{c_1}}$$

4.5

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \underbrace{-K_B(x_2 - x_1)}_{F_{B_2}} \underbrace{- K_A\, x_2}_{F_{A_2}}$$

b) em notação matricial

0.5 $M\ddot{X} = -KX \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} K_B + K_C & -K_B \\ -K_B & K_A + K_B \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}K = \begin{pmatrix} \frac{K_B + K_C}{m_1} & -\frac{K_B}{m_1} \\ -\frac{K_B}{m_2} & \frac{K_A + K_B}{m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -15 \\ -5 & \frac{23}{2} \end{pmatrix} N\, m^{-2}$$

2.0 (Não descontei a quem não apresentou números aqui)

c) Procuramos soluções do tipo $X = A e^{-i\omega t}$, pelo que as equações do movimento se tornam

$$(M^{-1} K - \omega^2 I) A = 0 \qquad (*)$$

Logo as frequências dos modos normais são determinadas por

$$\det (M^{-1} K - \omega^2 I) = 0$$

podiam ter apenas dito que ω^2 correspondem aos valores próprios da matriz $M^{-1} K$

Fazendo as contas chegariam a

$\omega_+^2 \simeq 26.13 \ rad^2 s^{-2}$

$\omega_-^2 = 6.37 \ rad^2 \cdot s^{-2}$

2.5 Apresentações equivalentes deste resultado foram aceites sem qualquer penalização

d) Os modos próprios correspondem aos vetores próprios da matriz $M^{-1} K$ pelo que substituindo em $(*)$ e resolvendo para $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ chegariam, após a álgebra necessária a

$\omega_+ \simeq 5.12 \ rad \, s^{-1}$, $V_+ = (0.95, -0.32)$

$\omega_- \simeq 2.52 \ rad \cdot s^{-1}$, $V_- = (0.72, 0.70)$ 4.5

(ou equivalente)

No primeiro caso, os corpos oscilam em oposição de fase com frequência ω_+, sendo que a amplitude de oscilação de 1 é aproximadamente o triplo de 2.

No segundo modo normal, os corpos oscilam em fase com frequência ω_-, com amplitudes aproximadamente iguais.

0.5 Muitos esqueceram-se desta descrição qualitativa.

d) A solução geral do sistema será dada por

$$x_1(t) = c_+ \cos(\omega_+ t) + c_- \cos(\omega_- t) + d_+ \operatorname{sen}(\omega_+ t) + d_- \operatorname{sen}(\omega_- t)$$

$$x_2(t) = -\frac{1}{3} c_+ \cos(\omega_+ t) + c_- \cos(\omega_- t) - \frac{1}{3} d_+ \operatorname{sen}(\omega_+ t) + d_- \operatorname{sen}(\omega_- t)$$

2.5

onde aproximaram-se os coeficientes dos modos normais para facilitar os cálculos (não era necessário e ninguém foi penalizado por tal)

As condições iniciais do sistema são

$$\begin{cases} x_1(t=0) = 1 \text{ cm} \\ x_2(t=0) = 0 \text{ cm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t=0) = 0 \text{ cm s}^{-1} \\ \dot{x}_2(t=0) = 0 \text{ cm s}^{-1} \end{cases}$$

o que equivale a

$$\begin{cases} 1 = c_+ + c_- \\ 0 = -\frac{c_+}{3} + c_- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_+ = 0.75 \text{ cm} \\ c_- = 0.25 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \omega_+ d_+ + \omega_- d_- \\ 0 = -\frac{\omega_+}{3} d_+ + \omega_- d_- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_+ = 0 \text{ cm} \\ d_- = 0 \text{ cm} \end{cases}$$

Logo o movimento subsequente do sistema é descrito por

$$x_1(t) = 0.75 \cos(5.12 t) + 0.25 \cos(2.52 t) \text{ cm}$$

$$x_2(t) = -0.25 \cos(5.12 t) + 0.25 \cos(2.52 t) \text{ cm}$$

2.5

Penalização de 0.25 a quem não simplificou expressões neste resultado final.