



TÉCNICO  
LISBOA

## Sistemas de Processamento Digital de Sinais

### Problemas sobre amostragem e representação

8 valores

I — Assinale apenas uma resposta.

1) Num processador digital com palavras de  $n$  bits com aritmética de vírgula fixa, uma palavra fraccionária (com sinal) no formato  $Q_m$  representando um valor  $x$ :

- ☒ pode representar valores  $-4 \leq x \leq 4 - 2^{-m}$  se  $m = n - 3$ .
- ☐ tem o menor erro relativo médio quando  $m = n - 2$ .
- ☐ tem o maior erro relativo médio quando  $n = m - 1$ .
- ☐ permite representar  $\sqrt{2}/2$  com erro relativo nulo desde que  $m = n - 1$ .

2) Num sistema de amostragem impulsiva com retenção, com frequência de amostragem  $f_s = 1/T_s$  e tempo de retenção  $\tau = T_s/3$ :

- ☐ apenas as réplicas de ordem  $n$  para  $n$  múltiplo inteiro de 3 sofrem distorção.
- ☐ não existem réplicas de ordem par.
- ☒ todas as réplicas sofrem distorção.
- ☐ não existem réplicas de ordem  $n$  para  $n$  múltiplo inteiro de 3.

3) A amostragem impulsiva ideal:

- ☐ não se pode utilizar na prática.
- ☐ origina um espectro com distorção nas réplicas pares.
- ☐ origina um espectro finito.
- ☒ origina um espectro infinito com réplicas sem distorção.

4) Num sistema de amostragem ideal com retenção, com frequência de amostragem  $f_s = 1/T_s$  e tempo de retenção  $\tau = T_s/4$ :

- ☐ não existem réplicas de ordem par.
- ☒ todas as réplicas sofrem distorção.
- ☐ não existem réplicas de ordem  $n$  para  $n$  múltiplo inteiro de 4.
- ☐ não existem réplicas de ordem  $n$  para  $n$  múltiplo inteiro de 2.

5) Com palavras  $x$ ,  $y$  e  $z$  de 16 bit no formato  $Q_{13}$ , a operação  $w = x^2 y + z$  está sempre correcta se for guardada no formato com ( $w$  com 16 bit, formato com maior precisão):

- ☐  $Q_{12}$ .
- ☐  $Q_{10}$ .
- ☒  $Q_8$ .
- ☐  $Q_9$ .

$$\begin{array}{c} x^2 y + z \\ \underbrace{\quad}_{Q_{11}} \quad \underbrace{\quad}_{Q_{13}} \quad \underbrace{\quad}_{Q_{13}} \\ \underbrace{\quad}_{Q_9} \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad Q_9 \rightarrow Q_8 \end{array}$$

6) Num sistema de amostragem rectangular com frequência de amostragem  $f_s = 1/T_s$  e tempo de seguimento  $\tau = T_s/2$ :

- ☐ o espectro do sinal amostrado consiste num número finito de réplicas do sinal de entrada.
- ☒ não existem réplicas nos múltiplos pares da frequência de amostragem.
- ☐ as réplicas do espectro no sinal amostrado sofrem distorção.
- ☐ não é necessário observar o teorema da amostragem.

7) Num sistema de amostragem ideal com retenção com frequência de amostragem  $f_s = 1/T_s$  e tempo de retenção  $\tau = T_s/2$ :

- ☐ o número de réplicas no sinal amostrado é finito.
- ☐ não existem réplicas de ordem par.
- ☒ todas as réplicas sofrem distorção.
- ☐ só as réplicas de ordem ímpar sofrem distorção.

8) Com palavras  $x$ ,  $y$  e  $z$  de 16 bit no formato  $Q_{13}$ , a operação  $w = x + y \cdot z$  está sempre correcta se for guardada no formato:

- ☐  $Q_{12}$ .
- ☒  $Q_{10}$ .
- ☐  $Q_8$ .
- ☐  $Q_9$ .

$$\underbrace{y \cdot z}_{Q_{11}} + \underbrace{x}_{Q_{11}} \rightarrow Q_{10}$$

9) Considere a equação às diferenças  $y_n = 1.3x_n + 0.2x_{n-1} + 0.2x_{n-2} - 1.3x_{n-3}$  e a sua implementação num processador digital com palavras de  $N$  bits com aritmética de vírgula fixa. O formato aritmético mais preciso para representar  $y_n$  é:

$$3x \Rightarrow +2b'2$$

- ☒  $Q_{N-3}$  se as amostras  $x_n$  estiverem em  $Q_{N-1}$ .
- ☐  $Q_{N-4}$  se as amostras  $x_n$  estiverem em  $Q_{N-4}$ .
- ☐  $Q_{N-6}$  se as amostras  $x_n$  estiverem em  $Q_{N-3}$ .
- ☐  $Q_{15}$  independentemente do formato das amostras  $x_n$ .

$$Q_{11}$$

10) Quando se multiplicam dois números fraccionários de 16 bit nos formato  $Q_{14}$  e  $Q_{12}$ , o resultado:

- ☒ pode sempre guardar-se correctamente em  $Q_{10}$  mas este não é o formato mais preciso.
- ☐ está sempre correcto se for guardado em  $Q_{12}$ .
- ☐ nunca está correcto se for guardado em  $Q_{13}$ .
- ☐ pode sempre guardar-se correctamente em  $Q_{13}$  se tiver valor absoluto inferior a 8.

3.5

II - Considere os números reais  $x$  e  $y$  representados com 16 bit no formato  $Q_{14}$  num processador de vírgula fixa.

- 1 a) Determine o formato aritmético mais preciso que garante que  $z = x^2 + y^2 - 1$  é sempre calculado correctamente. Justifique.  $Q_{12}$
- 1.5 b) Escreva o código C (32 bit sempre que possível) que realiza esta operação incluindo as inicializações das variáveis considerando  $x = 1.2$ ,  $y = 0.5$  e  $z$  do tipo `Int16`.
- 1 c) Calcule o erro relativo que se obtém em  $z$  e diga como poderia diminuí-lo.

$$z_{true} = 0.69$$

$z = x^2 + y^2 - 1$ ,  $Q_{14} \Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 \leq 8 \rightarrow -1 \leq z \leq 7 \rightarrow Q_{12}$

Se  $\bar{u}$  se lion en conta

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{Q_{13}} - 1 \xrightarrow{Q_{13} \rightarrow Q_{12}} Q_{12} \rightarrow Q_{11}$$

$$x = 1.2 = 19661$$

$$y = 0.5 = 8192$$

$$z = (x \ll x + y \ll y - (1 \ll 28)) \gg 16 = 2827 \quad z_{real} = \frac{2827}{2^{12}} = 0.6901855...$$

$$E = 2.689 \times 10^{-4}$$

$$Q_{14} \rightarrow -4 < x^2 - y^2 < 4$$

entre 0 e 4

3.5

$$(z - 2^{-14})^2 = 4 + z^{-28} - 2^{-12} < 4!$$

$\Rightarrow w$  em  $Q_{13}$ . pelas regras seria  $Q_{13} - Q_{13} \rightarrow Q_{12}$

III - Considere os números reais  $x$  e  $y$  representados com 16 bit no formato  $Q_{1,14}$  num processador de vírgula fixa. **Nota:** Considere que no formato  $Q_{i,m}$  o número  $w$  é representado no intervalo  $-(2^i - 2^{-m}) \leq w \leq 2^i - 2^{-m}$ .

1 a) Diga qual é o formato aritmético que garante que  $z = x^2 - y^2$  é sempre calculado correctamente. Justifique.

1.5 b) Escreva o código C que realiza esta operação considerando  $x$ ,  $y$  e  $z$  variáveis do tipo short (16 bit).

1 c) Determine o erro relativo que se obtém em  $z$  para os valores particulares de  $x = 1.51$  e  $y = -1.31$ .

$$z = ((x * x) - (y * y)) \ll 1 \gg 16$$

$$x = 24740, y = -21463 \Rightarrow z = 4621$$

$$E = 1.54 \times 10^{-4}$$

$$z_{true} = 0.5640869$$

$$z_{true} = 0.564$$

IV - Considere os números fraccionários  $x$   $Q_{12}$ ,  $y$   $Q_{15}$  e  $z$   $Q_{15}$  e o seu processamento num processador de vírgula fixa de 16 bit.

1 a) Determine o formato que deve ser utilizado para representar  $w = (x + y) \cdot (z - 1)$  com 16 bit de modo que o valor de  $w$  esteja sempre correcto quaisquer que sejam os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  nos formatos anteriores. Justifique detalhadamente.

1 b) Considere agora  $x = -7.1$ ,  $y = 0.75$  e  $z = 0.9$ . Escreva o código C em vírgula fixa que permite calcular  $w$ , incluindo as declarações de variáveis e as inicializações, utilizando apenas palavras de 16 bit.

$$x = -29082, y = 24576, z = 29491$$

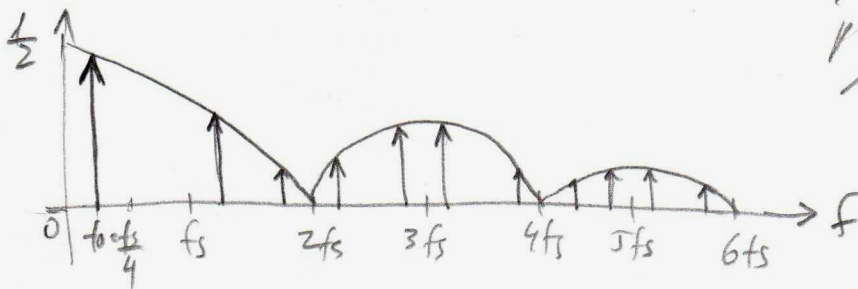
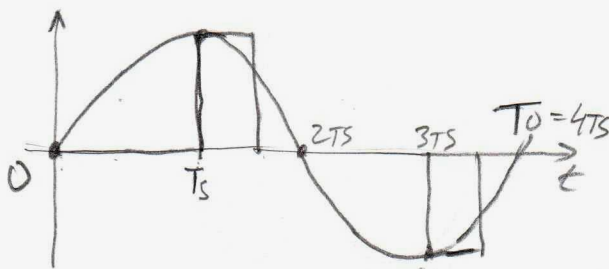
$$w = (((x + (y \gg 3)) \gg 1) \times (z - (1 \ll 15))) \gg 16 = 661 \rightarrow w_{true} = \frac{661}{2^{10}} = 0.6455$$

3 V - Considere um sistema de amostragem ideal com retenção a funcionar com  $f_s = \frac{1}{T_s}$  e com um tempo de retenção  $\tau = T_s / 2$ . O sinal de entrada é uma sinusóide com amplitude  $A$  e frequência

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = f_s / 4.$$

1.5 a) Represente o sinal de entrada e o sinal amostrado no domínio do tempo para  $0 \leq t \leq T_0$  e no domínio da frequência para  $0 \leq f \leq 6f_s$ .

1.5 b) Diga se ocorre *aliasing* na amostragem e explique porque é que este tipo de amostragem é muito utilizado quando se pretende passar do domínio digital para o domínio analógico utilizando um conversor D/A seguido de um retentor.



$f_0 = \frac{f_s}{4} \Rightarrow f_s = 4f_0$   
 $\Rightarrow$  não ocorre *aliasing*  
 É utilizado um conversor D/A porque se consegue gerar um sinal com grande energia ( $\neq$  impulsos) e com pouca distorção na 1ª réplica.