Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий
Дискретный анализ, осень 2012
Хроматический многочлен и многочлен Татта: конспект лекции

Аннотация

Стягивание и исключение рёбер графа. Определение хроматического многочлена. Примеры для простых графов. Рекуррентное свойство. Мультипликативное свойство. Смысл коэффициентов многочлена. Замечание о сложности вычисления хроматического многочлена. Определение многочлена Татта. Ранги множеств рёбер. Определение рангового многочлена. Связи рангов множеств в графах со стянутыми и исключёнными рёбрами. Теорема о связи рангового многочлена и многочлена Татта. Универсальное свойство многочлена Татта. Применения многочлена Татта: количество остовных лесов, количество подграфов с тем же числом компонент связности, количество ациклических подграфов. Связь многочлена Татта и хроматического многочлена.

1 Хроматический многочлен

На протяжении этого раздела под словом «граф» мы будем понимать простой неориентированный граф.

Определение 1. Пусть $G = (V, E)$ — граф, а $e = \{u, v\} \in E$ — его ребро. Тогда будем обозначать через $G \backslash e$ граф G с выкинутым ребром e, т.е. граф $(V, E \setminus \{e\})$, а через G/e — граф G со стянутым ребром e, т.е. (V', E'), где $V' = V \setminus \{v\}$, а E' совпадает с $E \setminus \{e\}$, в котором все рёбра вида (v, w) заменены на (u, w).

Как обычно, правильной раскраской вершин графа мы называем раскраску, в которой любые соседние вершины имеют разные цвета.

Определение 2. Пусть задан граф G. *Хроматическим многочленом* графа G называется функция, сопоставляющая натуральному числу k число $\chi_G(k)$, равное количеству правильных раскрасок вершин графа G в k цветов.

Пример 3. Пусть G — пустой граф на n вершинах, т.е. имеет вид $G = (V, \varnothing)$. Тогда $\chi_G(k) = k^n$.

Доказательство. Действительно, каждая из n вершин может быть покрашена в любой из k цветов независимо от остальных. □

Пример 4. Пусть G — полный граф на n вершинах. Тогда $\chi_G(k) = k(k-1)\dots(k-n+1)$.

Доказательство. Действительно, первую вершину можно покрасить в любой из k цветов, а каждую следующую — в любой, кроме уже использованных. □

Пример 5. Пусть G — цепочка из n вершин. Тогда $\chi_G(k) = k(k-1)^{n-1}$.

Доказательство. Действительно, крайняя вершина красится в любой из k цветов, а каждая следующая — в любой, кроме того, в который покрашена предыдущая. □

Пример 6. Пусть G — цикл из n вершин. Тогда $\chi_G(k) = (k-1)\big((k-1)^{n-1} + (-1)^n\big)$.

Если «расцепить цикл», то получится цепочка, у которой цвета первой и последней вершин совпадают. Однако, легко воспользоваться этим фактом не получится. Вместо этого мы проведём рассуждение по индукции.

Доказательство. Пусть $n = 3$. Тогда цвета всех вершин должны быть различны, и число раскрасок равно $k(k-1)(k-2) = (k-1)\big((k-1)^2 - 1\big)$.

Докажем, что если формула верна для n, то она верна и для $n+1$. Количество правильных раскрасок цикла из n вершин равно количеству правильных раскрасок цепочки из n вершин за вычетом тех, в которых первая и последняя вершина покрашены одинаково. Последнее число равно количеству правильных раскрасок цикла из $(n-1)$ вершины, т.е., по предположению индукции, $(k-1)\big((k-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}\big)$. Таким образом, нужное нам число равно $k(k-1)^{n-1} - (k-1)\big((k-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}\big) = (k-1)\big(k(k-1)^{n-2} - (k-1)^{n-2} - (-1)^{n-1}\big) = (k-1)\big((k-1)^{n-1} + (-1)^n\big)$, что и требовалось. □

Это рассуждение можно обобщить на произвольный граф:

Лемма 7 (Рекуррентное соотношение для хроматического многочлена)**.** *Пусть G — граф, а $e = \{u, v\}$ — ребро этого графа. Тогда $\chi_G(k) = \chi_{G\setminus e}(k) - \chi_{G/e}(k)$.*

Доказательство. Мы докажем эквивалентное соотношение $\chi_{G\setminus e}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G/e}(k)$. Все раскраски $G\setminus e$ можно разделить на два класса: те, в которых u и v покрашены в разные цвета, и те, в которых они покрашены одинаково. Раскраски первого класса можно взаимно однозначно сопоставить раскраскам G: добавление или удаление ребра не нарушит правильности. А раскраски второго класса можно взаимно однозначно сопоставить раскраскам G/e: если u и v одного цвета, то их можно склеить. Таким образом, равенство установлено. □

Также несложно заметить следующий факт:

Лемма 8 (Мультипликативное свойство)**.** *Пусть G и H — два графа. Тогда $\chi_{G\sqcup H}(k) = \chi_G(k) \cdot \chi_H(k)$.*

Доказательство. Это стандартное применение комбинаторного правила произведения: при любой раскраске графа G подходит любая раскраска графа H. □

Эта лемма позволяет установить несколько хороших свойств хроматического многочлена:

Теорема 9. *При любом графе G функция $\chi_G(k)$ обладает следующими свойствами:*

1. *Функция $\chi_G(k)$ является многочленом с целыми коэффициентами;*
2. *Степень $\chi_G(k)$ равна числу вершин G;*
3. *Старший коэффициент равен 1;*
4. *Коэффициент при слагаемом k^{n-1} отрицателен и по модулю равняется числу рёбер в графе G;*

5. *Коэффициент при k^i равен 0 тогда и только тогда, когда i меньше числа компонент связности графа G (в частности, свободный член всегда равен нулю);*

6. *Знаки коэффициентов чередуются.*

Доказательство. Будем доказывать по индукции, используя лемму 7. Сначала докажем утверждение для деревьев, затем для связных графов, затем для произвольных. Мы докажем, что у любого дерева, а не только у цепочки, хроматический многочлен равен $k(k-1)^{n-1}$. Здесь все 6 свойств проверяются непосредственно. Базой будет служить дерево из одной вершины, хроматический многочлен которого равен k. Далее, пусть T — дерево из n вершин. Как известно, среди них найдётся висячая вершина. Обозначим смежное с ней ребро через e. Тогда $T \backslash e$ — несвязное объединение дерева из $(n-1)$ вершины и одной вершины, поэтому $\chi_{T \backslash e} = k(k-1)^{n-2} \cdot k = k^2(k-1)^{n-2}$. А T/e есть просто дерево из $(n-1)$ вершины, поэтому $\chi_{T/e} = k(k-1)^{n-2}$. По лемме 7 имеем $\chi_T(k) = \chi_{T \backslash e}(k) - \chi_{T/e}(k) = k^2(k-1)^{n-2} - k(k-1)^{n-2} = k(k-1)^{n-1}$, что и требовалось.

Теперь докажем для связных графов индукцией одновременно по числу рёбер. В качестве базы возьмём деревья. Переход: пусть G — связный граф, а e — его ребро, не являющееся мостом. Тогда $G \backslash e$ и G/e тоже являются связными графами, имеющими меньшее число рёбер. По предположению индукции для них все 6 свойств выполнены. Докажем эти свойства для $\chi_G(k) = \chi_{G \backslash e}(k) - \chi_{G/e}(k)$. Действительно, это многочлен с целыми коэффициентами как разность многочленов с целыми коэффициентами. Степень первого многочлена равна n, второго $(n-1)$, поэтому степень разности равна n. Старший коэффициент $\chi_G(k)$ равен старшему коэффициенту $\chi_{G \backslash e}(k)$, т.е. единице. Коэффициент при k^{n-1} в многочлене χ_G равен этому коэффициенту в многочлене $\chi_{G \backslash e}(k)$ за вычетом старшего коэффициента многочлена $\chi_{G/e}(k)$. Уменьшаемое равно числу рёбер $G \backslash e$ со знаком минус, вычитаемое равно 1, значит разность равна числу рёбер G со знаком минус, что и требовалось. Далее, оба многочлена $\chi_{G \backslash e}(k)$ и $\chi_{G/e}(k)$ знакопеременны, их степени отличаются на 1, значит и их разность знакопеременна. Коэффициенты при слагаемых k^i при $i \geq 1$ у каждого из них ненулевые, значит и разность обладает тем же свойством. Таким образом, все шесть свойств доказаны.

Наконец, для произвольных графов мы докажем теорему, используя лемму 8. Проведём индукцию по числу компонент связности. Для одной компоненты уже всё доказано. Теперь представим G в виде $G_1 \sqcup G_2$, так что для $\chi_{G_1}(k)$ и $\chi_{G_2}(k)$ уже всё доказано. Тогда $\chi_G(k) = \chi_{G_1}(k) \cdot \chi_{G_2}(k)$. Произведение двух многочленов с целыми коэффициентами является многочленом с целыми коэффициентами. Степень равна сумме степеней, т.е. сумме числа вершин в G_1 и G_2, т.е. числу вершин G. Поскольку старшие коэффициенты равны единице, старший коэффициент произведения тоже равен 1. Второй коэффициент произведения равен сумме вторых коэффициентов, каждый из которых равен числу рёбер в G_i со знаком минус. Эта сумма и является числом рёбер графа G. Произведение знакопеременных многочленов является знакопеременным. Коэффициент при k^i не равен нулю тогда и только тогда, когда для некоторого j одновременно не равны нулю коэффициенты при k^j в одном графе и при k^{i-j} в другом. Это значит, что j не меньше числа компонент связности G_1, а $i-j$ не меньше числа компонент связности G_2, откуда i не меньше числа компонент связности G, что и требовалось.

Таким образом, все случаи разобраны и все свойства доказаны. $\square$

Возникает вопрос, как посчитать хроматический многочлен? Ясно, что это можно сделать непосредственно по лемме 7, но это приведёт к экспоненциальному алгоритму: подсчёт многочлена для одного графа требует подсчёта многочленов для двух графов, у которых на одно ребро меньше. Динамическое программирование тут не сильно поможет: количество графов, для которых нужно осуществить подсчёт, всё равно будет экспоненциальным. Оказывается, что есть существенные доводы в пользу того, что полиномиального алгоритма не существует. Дело в том, что даже вопрос о том, можно ли раскрасить граф G в 3 цвета, т.е. отлично ли $\chi_G(3)$ от нуля, является **NP**-полным. Это значит, что если существует полиномиальный алгоритм, дающий ответ на этот вопрос, то доказано, что $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Здесь мы не будем давать формальных определений (они будут в пятом семестре на курсе сложности вычислений), а скажем лишь, что это означает, что *любую* переборную задачу можно решить за полиномиальное время. Пока что эта гипотеза не доказана и не опровергнута, а за решение этой проблемы даётся премия в миллион долларов. При этом большинство исследователей верят, что $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

2 Многочлен Татта

Хроматический многочлен нетрудно модифицировать, так чтобы выполнялось свойство $\tilde{\chi}_G(k) = \tilde{\chi}_{G\setminus e}(k) + \tilde{\chi}_{G/e}(k)$. Действительно, достаточно взять $\tilde{\chi}_G(k) = (-1)^{|V|}\chi_G(k)$, где V — множество вершин графа G. Оказывается, что соотношение $f(G) = f(G\setminus e)+f(G/e)$ соблюдается для различных свойств, причём эти свойства можно описать при помощи специального многочлена, придуманного Таттом.

Теперь мы разрешим графу иметь петли и кратные рёбра.

Определение 10. Пусть задан граф G, возможно с петлями и кратными рёбрами. Определим многочлен Татта $T_G(x, y)$ следующими рекурсивными соотношениями:

1. Если граф G пуст, то $T_G(x, y) = 1$;
2. Если ребро e является мостом, то $T_G(x, y) = xT_{G\setminus e}(x, y)$;
3. Если ребро e является петлёй, то $T_G(x, y) = yT_{G/e}(x, y)$;
4. Если ребро e не является ни мостом, ни петлёй, то $T_G(x, y) = T_{G\setminus e}(x, y)+T_{G/e}(x, y)$.

Из этого определения не очевидна корректность: почему полученная функция не зависит от порядка выкидывания рёбер? Однако, если определение корректно, то T_G, очевидно, является многочленом от двух переменных с целыми неотрицательными коэффициентами. Корректность мы докажем, связав многочлен Татта с другим многочленом — ранговым многочленом Уитни. Для начала мы введём некоторые обозначения:

Определение 11. Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф. Для множества $A \subset E$ через $G(A)$ будем обозначать граф (V, A). Через $c(G)$ будем обозначать число компонент связности графа G. *Рангом* множества A будем называть число $\rho(A) = |V| - c(G(A))$.

Замечание 12. Ранг множества A равен количеству рёбер в любом остовном лесе графа $G(A)$. (Остовным лесом называется объединение остовных деревьев всех компонент связности, т.е. такой ациклический граф $G(B)$, что $B \subset A$ и $c(G(B)) = c(G(A))$). Действительно, в каждой компоненте связности остовного леса рёбер на одно меньше, чем вершин, а общее число вершин равно $|V|$.

Теперь определим сам ранговый многочлен:

Определение 13. Ранговый многочлен графа G есть многочлен от двух переменных, определяемый формулой:

$$R_G(u, v) = \sum_{A \subset E} u^{\rho(E)-\rho(A)} v^{|A|-\rho(A)}.$$

Замечание 14. Показатели в формуле тоже имеют некоторый смысл. Величина $\rho(E) - \rho(A)$ равна $c(G(A)) - c(G)$, т.е. приросту числа компонент связности за счёт перехода к множеству рёбер A. Мы будем обозначать эту величину через $\rho^*(A)$ и называть числом *важных* для A рёбер. (Их важно добавить к A, чтобы получилось столько же компонент связности, сколько было изначально).

Величину $|A| - \rho(A)$ будем называть числом *лишних* рёбер: именно столько рёбер можно выкинуть из множества A, не меняя число компонент связности. Обозначать эту величину будем через $\overline{\rho}(A)$.

Далее докажем следующую техническую лемму:

Лемма 15. *Пусть фиксировано некоторое ребро $e \in E$ и множество $A \subset E \setminus \{e\}$. Обозначим через $\rho_1(A)$, $\rho_1^*(A)$, $\overline{\rho_1}(A)$ ранги множества A в графе G/e, а через $\rho_2(A)$, $\rho_2^*(A)$, $\overline{\rho_2}(A)$ — ранги в графе $G \backslash e$. Тогда для множества $A' = A \cup \{e\}$ выполняются следующие соотношения:*

1. *Если e не петля, то $\rho^*(A') = \rho_1^*(A)$ и $\overline{\rho}(A') = \overline{\rho_1}(A)$;*
2. *Если e не мост, то $\rho^*(A) = \rho_2^*(A)$ и $\overline{\rho}(A) = \overline{\rho_2}(A)$;*
3. *Если e мост, то $\rho^*(A') = \rho^*(A) - 1$ и $\overline{\rho}(A') = \overline{\rho}(A)$;*
4. *Если e петля, то $\rho^*(A') = \rho^*(A)$ и $\overline{\rho}(A') = 1 + \overline{\rho}(A)$.*

Доказательство.

1. Стягивание ребра e в любом случае не меняет числа компонент связности, поэтому $\rho^*(A') = \rho_1^*(A)$. Если e не петля, то стягивание e также не меняет числа лишних рёбер, откуда $\overline{\rho}(A') = \overline{\rho_1}(A)$.
2. Если e не мост, то удаление ребра e не меняет числа компонент связности, откуда $\rho(A) = \rho_2(A)$ и $\rho(E) = \rho_2(E \setminus \{e\})$. Подставляя эти равенства в формулы для ρ^* и $\overline{\rho}$, получаем $\rho^*(A) = \rho_2^*(A)$ и $\overline{\rho}(A) = \overline{\rho_2}(A)$, что и требовалось.
3. Если e мост, то в графе $G(A')$ на одну компоненту связности меньше, чем в $G(A)$, откуда $\rho^*(A') = \rho^*(A) - 1$. При этом ребро e не будет лишним в A', поэтому $\overline{\rho}(A') = \overline{\rho}(A)$.
4. Если e петля, то её исключение не меняет числа компонент связности, поэтому $\rho^*(A') = \rho^*(A)$. По той же причине e является лишним, откуда $\overline{\rho}(A') = 1 + \overline{\rho}(A)$.

□

Тот факт, что ранговый многочлен является многочленом и корректно определён, очевиден. Мы докажем связь многочлена Татта с ранговым, откуда будет следовать корректность определения для многочлена Татта:

Теорема 16 (Татт)**.** *Для любого графа G выполнено равенство $T_G(u+1, v+1) = R_G(u, v)$.*

Доказательство. Если граф G пуст, то единственным подмножеством E является пустое множество, для которого нет важных и лишних рёбер. Поэтому $\rho^*(\varnothing) = \overline{\rho}(\varnothing) = 0$ и $R_G(u, v) = 1 = T_G(u+1, v+1)$. Докажем, что для рангового многочлена выполняются соотношения Татта.

Выберем некоторое ребро $e \in E$ и разобьём все подмножества E на пары вида (A, A'), где $e \notin A$ и $A' = A \cup \{e\}$. Тогда

$$R_G(u, v) = \sum_{A \subset E \setminus \{e\}} \left(u^{\rho^*(A)} v^{\overline{\rho}(A)} + u^{\rho^*(A')} v^{\overline{\rho}(A')} \right).$$

Далее, разберём несколько случаев:

1. Пусть e петля. Тогда $\rho^*(A') = \rho^*(A)$ и $\overline{\rho}(A') = 1 + \overline{\rho}(A)$. Тогда $u^{\rho^*(A')} v^{\overline{\rho}(A')} = u^{\rho^*(A)} v^{1+\overline{\rho}(A)} = v u^{\rho^*(A)} v^{\overline{\rho}(A)}$, откуда $u^{\rho^*(A)} v^{\overline{\rho}(A)} + u^{\rho^*(A')} v^{\overline{\rho}(A')} = (v+1) u^{\rho^*(A)} v^{\overline{\rho}(A)}$. Вынося $(v+1)$ за скобки, получаем $R_G(u, v) = (v+1) \sum_{A \subset E \setminus \{e\}} u^{\rho^*(A)} v^{\overline{\rho}(A)} = (v+1) R_{G \setminus e}(u, v)$. Это первое соотношение Татта.

2. Пусть e мост. Тогда $\rho^*(A) = \rho^*(A') + 1 = \rho_1^*(A) + 1$ и $\overline{\rho}(A) = \overline{\rho}(A') = \overline{\rho_1}(A)$. Отсюда $u^{\rho^*(A)} v^{\overline{\rho}(A)} + u^{\rho^*(A')} v^{\overline{\rho}(A')} = u^{\rho_1^*(A)+1} v^{\overline{\rho_1}(A)} + u^{\rho_1^*(A)} v^{\overline{\rho_1}(A)} = (u+1) u^{\rho_1^*(A)} v^{\overline{\rho_1}(A)}$. Таким образом, $R_G(u, v) = (u+1) \sum_{A \subset E \setminus \{e\}} u^{\rho_1^*(A)} v^{\overline{\rho_1}(A)} = (u+1) R_{G/e}(u, v)$. Это второе соотношение Татта.

3. Наконец, пусть e не мост и не петля. Тогда $u^{\rho^*(A)} v^{\overline{\rho}(A)} + u^{\rho^*(A')} v^{\overline{\rho}(A')} = u^{\rho_2^*(A)} v^{\overline{\rho_2}(A)} + u^{\rho_1^*(A)} v^{\overline{\rho_1}(A)}$, откуда $R_G(u, v) = \sum_{A \subset E \setminus \{e\}} u^{\rho_2^*(A)} v^{\overline{\rho_2}(A)} + \sum_{A \subset E \setminus \{e\}} u^{\rho_1^*(A)} v^{\overline{\rho_1}(A)} = R_{G \setminus e}(u, v) + R_{G/e}(u, v)$. Это третье соотношение Татта.

Таким образом, многочлен $R_G(u+1, v+1)$ удовлетворяет определению многочлена Татта, что и требовалось. □

Многочлен Татта является универсальным для свойств, связывающих величины для графов с величинами для тех же графов со стянутыми или выкинутыми рёбрами.

Теорема 17 (Универсальное свойство многочлена Татта)**.** *Пусть числовая функция на графах $f(G)$ обладает следующими свойствами для некоторых констант a, b, x_0, y_0:*

1. *Если G пуст, то $f(G) = 1$;*

2. *Если ребро e является мостом, то $f(G) = x_0 f(G/e)$;*

3. *Если ребро e является петлёй, то $f(G) = y_0 f(G \setminus e)$;*

4. *Если ребро e не является ни мостом, ни петлёй, то $f(G) = a f(G/e) + b f(G \setminus e)$.*

Тогда $f(G) = a^{\rho(E)} b^{|E|-\rho(E)} T_G(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})$.

Доказательство. Эта теорема относится к числу тех, где проще самостоятельно придумать доказательство, чем разбираться в написанном. Тем не менее, мы приводим доказательство целиком.

Поскольку для пустого графа $|E| = \rho(E) = 0$, а $T_G = 1$, то база индукции верна. Докажем переход.

Пусть e является мостом. Тогда $\rho_1(E\backslash\{e\}) = \rho(E)-1$, т.к. стягивание e не меняет число компонент связности и уменьшает число вершин на одну. Тогда $f(G) = x_0 f(G/e) = x_0 a^{\rho_1(E\backslash\{e\})} b^{|E|-1-\rho_1(E\backslash\{e\})} T_{G/e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = x_0 a^{\rho(E)-1} b^{|E|-\rho(E)} T_{G/e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = \frac{x_0}{a} a^{\rho(E)} b^{|E|-\rho(E)} \cdot T_{G/e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = a^{\rho(E)} b^{|E|-\rho(E)} T_G(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})$, что и требовалось.

Пусть e является петлёй. Тогда $\rho_2(E\backslash\{e\}) = \rho(E)$, т.к. удаление e не меняет ни числа вершин, ни числа компонент связности. Тогда $f(G) = y_0 f(G\backslash e) = y_0 a^{\rho_2(E\backslash\{e\})} b^{|E|-1-\rho_2(E\backslash\{e\})} \cdot T_{G\backslash e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = y_0 a^{\rho(E)} b^{|E|-1-\rho(E)} T_{G\backslash e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = \frac{y_0}{b} a^{\rho(E)} b^{|E|-\rho(E)} T_{G\backslash e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = a^{\rho(E)} b^{|E|-\rho(E)} T_G(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})$, что и требовалось.

Наконец, пусть e не является ни мостом, ни петлёй. Тогда $\rho_1(E \setminus \{e\}) = \rho(E) - 1$ и $\rho_2(E\backslash\{e\}) = \rho(E)$. Тогда $f(G) = af(G/e)+bf(G\backslash e) = a \cdot a^{\rho_1(E\backslash\{e\})} b^{|E|-1-\rho_1(E\backslash\{e\})} T_{G/e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) + b \cdot a^{\rho_2(E\backslash\{e\})} b^{|E|-1-\rho_2(E\backslash\{e\})} T_{G\backslash e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) = a^{\rho(E)} b^{|E|-\rho(E)} (T_{G/e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}) + T_{G\backslash e}(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})) = a^{\rho(E)} b^{|E|-\rho(E)} \cdot T_G(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b})$, что и требовалось.

Таким образом, все случаи разобраны, и теорема доказана. $\square$

Наконец, изучим значения многочлена Татта в разных точках.

Теорема 18. *Для любого графа G верно, что:*

1. $T_G(1,1)$ *равно количеству остовных лесов;*
2. $T_G(1,2)$ *равно количеству подграфов G, имеюших столько же компонент связности, что и G;*
3. $T_G(2,1)$ *равно количеству ациклических подграфов G.*

Заметим, что $\overline{\rho}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $G(A)$ не содержит циклов, а $\rho^*(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $G(A)$ имеет столько же компонент связности, что и G.

Далее воспользуемся теоремой о связи с ранговым многочленом:

1. $T_G(1,1) = R_G(0,0)$. Учитывая, что $0^0 = 1$ и $0^k = 0$ при $k > 0$, ненулевыми (а именно, единичными) будут только те слагаемые, где $\rho^*(A) = 0$ и $\overline{\rho}(A) = 0$. Это означает, что $G(A)$ не содержит циклов и содержит столько же компонент связности, сколько и G, т.е. является остовным лесом. Суммируя единицы для каждого остовного леса, получаем число остовных лесов.

2. $T_G(1,2) = R_G(0,1)$. Здесь мы суммируем единицы для тех A, где $\rho^*(A) = 0$, т.е. для подграфов, имеющих столько же компонент связности, сколько и G.

3. $T_G(2,1) = R_G(1,0)$. Здесь мы суммируем единицы для тех A, где $\overline{\rho}(A) = 0$, т.е. для ациклических подграфов.

Наконец, установим связь хроматического многочлена и многочлена Татта.

Теорема 19. *Для любого графа G и натурального числа k выполнено соотношение*

$$\chi_G(k) = (-1)^{|V|-c(G)} k^{c(G)} T_G(1-k, 0).$$

Доказательство. Воспользуемся универсальным свойством многочлена Татта для функции $P_G(k) = \dfrac{\chi_G(k)}{k^{|V|}}$. Проверим условия теоремы.

Для пустого графа $\chi_G(k) = k^{|V|}$, т.е. $P_G(k) = 1$.

Пусть ребро является мостом. Тогда множество вершин V разбивается на два непересекающихся подмножества: V_1 и V_2. Обозначим через G_1 и G_2 соответствующие подграфы. Их раскраски не связаны друг с другом, поэтому $\chi_{G\setminus e}(k) = \chi_{G_1}(k) \cdot \chi_{G_2}(k)$. Далее, правильная раскраска G/e получается из правильных раскрасок G_1 и G_2, где цвета склеиваемых вершин совпадают. Можно взять любую правильную раскраску G_1, для чего есть $\chi_{G_1}(k)$ вариантов, а из правильных раскрасок G_2 годится только доля $\frac{1}{k}$, где цвет склеиваемой вершины нужный. Таким образом, $\chi_{G/e}(k) = \frac{1}{k}\chi_{G_1}(k) \cdot \chi_{G_2}(k)$. Далее, по рекуррентному свойству хроматического многочлена $\chi_G(k) = \chi_{G\setminus e}(k) - \chi_{G/e}(k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \chi_{G_1}(k) \cdot \chi_{G_2}(k) = (k-1)\chi_{G/e}(k)$. Значит, $P_G(k) = \dfrac{\chi_G(k)}{k^{|V|}} = \dfrac{(k-1)\chi_{G/e}(k)}{k^{|V|}} = \dfrac{k-1}{k} P_{G/e}(k)$, т.е. первое условие выполнено для $x_0 = \frac{k-1}{k}$.

Пусть ребро e является петлёй. Тогда правильных раскрасок нет, т.е. $P_G(k) = 0$. Значит, второе условие выполнено для $y_0 = 0$.

Наконец, пусть ребро e не является ни петлёй, ни мостом. Опять же, в силу рекуррентного свойства хроматического многочлена $\chi_G(k) = \chi_{G\setminus e}(k) - \chi_{G/e}(k)$. Поделив на $k^{|V|}$, получим $P_G(k) = -\frac{1}{k} P_{G/e}(k) + P_{G\setminus e}(k)$. Значит, третье соотношение выполнено для $a = -\frac{1}{k}$, $b = 1$.

Согласно универсальному свойству многочлена Татта получаем $P_G(k) = \left(-\frac{1}{k}\right)^{\rho(E)} T_G(1-k, 0)$. Значит, $\chi_G(k) = (-1)^{\rho(E)} k^{|V|-\rho(E)} T_G(1-k, 0)$. Поскольку $\rho(E) = |V| - c(G)$, имеем $\chi_G(k) = (-1)^{|V|-c(G)} k^{c(G)} T_G(1-k, 0)$, что и требовалось. $\square$