теория сложности

literature:

- Arora Barak "Complexity Modern Approach" (1st part)
- Garry Johnson "Трудно разрешенные задачи"
- site: compendium of NP-complete problems

outline:

NP-полнота

Характеристики сложности вычисления.
Есть распознователи ($\Sigma^* \to B$) и преобразователи ($\Sigma^* \to \Sigma^*$)

- время: $T(n) = O(f(n))$
- память: $S(n)$
- random: $R(n)$

$DTIME(f) = \{L \mid \exists \, program \; p:$
$1. \, x \in L \implies p(X) = 1, x \notin L \implies p(x) = 0$
$2. \, n = |x| \implies T(p, x) = O(f(n))\}$

$h = (01)^* \in DTIME(n)$

$DT\widetilde{IME}(f) = \{h \mid \ldots\}$

палинромы: $Pal \in DTIME_{RAM}(n)$
$Pal \notin DTIME_{TM}(n)$

$P = \cup_{f-polynom} DTIME(f) = \cup_{i=0}^{\infty} DTIME(n^i)$

$p(n)q(n) : p + q, p * q, p(q(n))$
$L_1 L_2 \in P : L_1 \cup L_2 \in P, L_1 \cap L_2 \in P, \overline{L_1} \in P, L_1 L_2 \in P, L_1^* \in P$

концепция недетрминированных вычислений

Допускается $\iff$ $\exists$ последовательность переходов, которая приводит к допуску
недетерминированння программа p(x) допускает $\iff$ $\exists$ последовательность недетерминированных выборов, приводящая к допуску
p(x) не допускает $\iff$ $\forall$ последовательности выборов не допуск

def *NTIME(f)* = $\{L \mid \exists$ недетерминированная программа p
$1) \; p(x) - acc \iff x \in L; \; 2) \; T(p, x) = O(f(n))\}$

> **ex** задача о гамильтоновом цикле
>
> ```
> p(G)
>  vis[1..n]: arr of bool
>  s = 1
>  for i = 1..n
>      u = ?{1..n}
>      if (vis[u]) return false
>      if (su not in EG) return false
>      vis[u] = true
>      s = u
>  if (s ≠ 1) return false
>  return true
> ```

ex `isComposite(z)`, $n = \lceil \log_B z \rceil$, где B - это основание системы счисления

```
a = ?{2..z-1} // T = logn
if z % a = 0  // poly(logn)
 return true
return false
```

Нельзя свопнуть бранчи и сделать проверку на простоту, потому что это `true` и `false` не симметричны в недетерминированных вычислениях (нельзя даже `isPrime(n): return !isComposite(n)`)

---

def NP = $\cup_{f-polynome}$ $NTIME(f)$, *nondeterministic polynomial*
stat $P \subset NP$

? $P = NP$

неформально: класс P - класс задач, которые можно решить за полином, класс NP - класс задач, решение которых можно проверить за полином

Σ_1 - класс языков, в которых можно формализовать класс решения, которое можно проверить за полином
$\Sigma_1 = \{L \mid \exists$ полином p, работающая за полином программа R(x, y) - детерминированная
$x \in L \iff \exists\, y$ (называют *сертификат*): $|y| \leq p(|x|)$ and $R(x, y) = 1$
$x \notin L \implies \forall\, y\ (|y| \leq p(|x|))\ R(x, y) = 0\}$

> **ex** гамильтонов цикл $Ham \in \Sigma_1$
>
> ```
> R(G, y):
>  y as arr[1..n] of int
>  // we can add: y = ?arr[i..n] of {1..n} // O(n)
>  vis = arr[1..n] of bool
>  for i = 1..n
>      if (y[i] y[i mod n+1] not in EG) return false
>      if vis[y[i]] return false
>      vis[y[i]] = true
>  return true
> ```

Th $NP = \Sigma_1$
$L \in NP, L \in \Sigma_1$
неформально: NP – определение на языке недетерминированных формат, Σ_1 – определение на языке сертификатов

сведения

def сводим B к A *по Тьюрингу*: A, B – языки, C – сложностный класс, $B \in C^A$ (C c *оракулом* A). не считая вызова функции `isInA(x): Bool`, остальные ограничения класса C учитываются.

def сведение по *Куку-Левину* *(Тьюрингу за полином)* $B \in P^A$

def *сведене по Карпу* *(m-сведение)*: язык B сводится к A ($B \leq A$), если $\exists$ вычислимая за полином функция f такая, что $x \in B \iff f(x) \in A$

ex $IND = \{\langle G, k\rangle |$ в $G\ d$ независимое множество размера k $\}$
$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle |$ в $G \exists$ клика размера k$\}$
$IND \le CLIQUE$

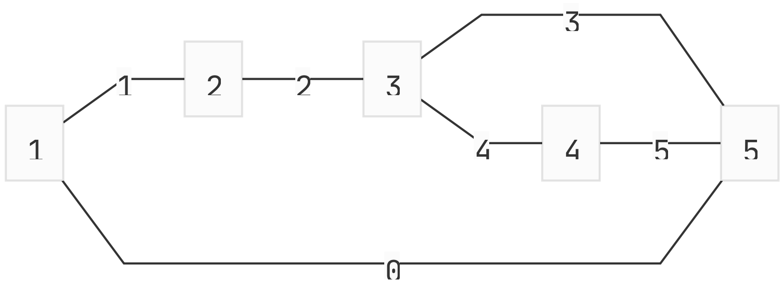
$f(\langle G, k\rangle) = \langle \overline{G}, k\rangle$ // за полином

в G и множестве размера k $\iff$ в $\overline{G}$ $\exists$ клика размера k
$VCOVER = \{\langle G, k\rangle |$ в G $\exists$ вершинное покрытие размера k $\}$
$IND \le VCOVER$

$f(\langle G, k\rangle) = \langle G, n-k\rangle$, где n - число вершин G

ex $SUBSETSUM = \{\langle [x_1, x_2, \ldots, x_n], s\rangle \mid \exists I \subset \{1, 2, \ldots, n\}, \sum_{i \in I} = s, x_i \in \mathbb{N}\}$
`dp[i][w]` - можно ли первые i $\Sigma = w$ // w - $2^{|s|}$
$VCOVER \le SUBSETSUM$

пронумеруем вершины с единицы, рёбра – с нуля, битовыми масками каждой вершине сопоставляем рёбра



	6	5	4	3	2	1	0
x_1	1	0	0	0	0	1	1
x_2	1	0	0	0	1	1	0
x_3	1	0	1	1	1	0	0
x_4	1	1	1	0	0	0	0
x_5	1	1	0	1	0	0	1
s	3	2	2	2	2	2	2

$x_6 = 1$
$x_7 = 10$
$x_8 = 100$
$x_9 = 1000$
$x_{10} = 10000$
$x_{11} = 100000$
$f(\langle G, k\rangle)$, n - число вершин, m - число рёбер, $s = k22...2$, m двоек

f сводит VCOVER к SUBSETSUM
$\Rightarrow$: в G $\exists$ вершинное погрытие размера k
$\Leftarrow$: $[x_1 \ldots, x_{n+n}], s$ $\exists$ решение $\Rightarrow$ в G $\exists$ вершинное покрытие размера k

def язык называется NP-hard (*NP-трудный*), если выполнены следующие условия:

$\forall B \in NP : B \le A$

def A называется NP-complete (*NP-полный*), если:

1) $A \in NPH$

2) $A \in NP$

// $NPC = NPH \cap NP$

> **ex** BH_{1N} (bounded halting unary nondeterministic)
> $BH_{1N} = \{\angle m, x, 1^t \rangle \mid$ m – недетрминированння машина тьюринга, x – вход, t – ограничение времени: $\exists$ последоватеьность недетерминированння выборов машины Тьюринга m, что она допускается за t шагов: `m(x) = 1`$\}$
>
> **Th** $BH_{1N} \le NPC$
>
> 1. $BH_{1N} \in NPH$
> $A \in NP$
>   // def по Карпу
> m_A - недетерминированння машина Тьюринга, решающая А за полином
> $p(n) = cn^k$
> $f(x) = \langle m_A, x, q^{p(|x|)} \rangle$
> $x \in A \iff \exists$ последовательность выборов $m_A(x) = 1$ (за $p(|x|)$)
> 2. $BH_{1N} \in NP$

L $A \leqslant^k B, B \leqslant^k C \implies A \leqslant^k C$

$x \xrightarrow{t} f(x) \xrightarrow{t} g(f(x))$

con $A \in NPH, A \leqslant B \implies B \in NPH$

stat если $B \leqslant A$, $A \in NPH$

$NP \xrightarrow{t} BH_{1N} \xrightarrow{t} SAT$

def $SAT = \{\phi(x_q \dots x_n) \mid \exists x_1 \dots x_n \; \phi(x_1 \dots x_n) = 1, \phi - \text{бф} \}$

Th *(Кук, Левин)* SAT in NPC

$SAT \in NPC$

$BH_{1N} \leqslant SAT$

$\langle m, x, 1^t \rangle \overset{f}{\mapsto} \phi$

ϕ удовлетворяет $\iff$ $\exists$ последовательность недетерминированных выборов $m(x) = 1$, за время t

больше t шагов не будет, есть мгновенные описания машины $\alpha \#_q \beta$

дополним описания до длины t + 1

$q_0 \vdash q_1 \vdash \dots \vdash q_t$

табло вычислений: первая строка - стартовое состояние, $i \to i+1, q_i \vdash q_{i+1}$, допуск: последовательность до $\#_{acc}$

$\langle m, x, 1^t \rangle \in BH_{1N} \iff \exists$ допускающее табло вычислений

количество состояний $|Q| = z$, множество ленточного алфавита $|PT| = y$, $z + y = k$

заведём $(t+1)^2 k$ переменных, x_{ijc} - верно ли, что в табло в i-й j-й ячейке записан символ 'c'

$\phi(x_{ijc}) = C \wedge S \wedge T \wedge N$

$C = \wedge i, j = 0..t \vee_C ((\wedge \neg X_{ij\alpha}) \wedge X_{ijc})$

$S = X_{00\#_s} \wedge X_{01x_1} \wedge X_{02x_2} \wedge \ldots \wedge X_{0nx_n} \wedge X_{0(n+1)B} \wedge \ldots$

$T = X_{t0\#x} \vee X_{t1\#_y} \vee \ldots \vee X_{tt\#_y}$

$N = (\wedge_{i,j} \wedge_{c_1c_2c_3c_3 \notin Q} X_{i-1,j-1,c_1} \wedge X_{i-1,j,c_2} \wedge X_{i,j+1,c_3} \wedge X_{i,j,c_4} \to c_1 = c_4) \wedge_{ijx} \wedge_{c_1 \ldots c_6 \ldots}$
допустимы

qed □

язык CNFSAT

def $CNFSAT = \{\phi \mid \phi$ в КНФ$, \phi \in SAT\}$
$(x_i \vee \neg x_j \ldots) \wedge (\vee \vee \vee) \wedge (\vee)$
clause (клоз)
ex 2-SAT (ровно две) HornSAT (не более одной без отрицания)

Th CNFSAT in NPC

1. $CNFSAT \in NP$
2. $CNFSAT \in NPH$
   $SAT \leqslant CNFSAT$
   $\phi \overset{f \quad (polynomial\ time)}{\longrightarrow} \psi$
   $\phi \in SAT \iff \psi = f(\psi) \in CNFSAT$

базис: $\wedge, \vee, \neg$

строим дерево разбора нашей формулы ϕ:

- если у neg сын neg, то можем удалить
- neg -> and/or => neg <- and/or -> neg neg

каждому поддереву соответствует преобразованная подформула $\phi_i(x_{i_1} \ldots x_{i_k})$,
хотим построить следующее: $\psi_i(x_{i_1} \ldots x_{i_k}, y_1 \ldots y_{i_t})$
$\phi(\overline{X}) = 1 \implies \exists \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y}) = 1$
$\phi(\overline{X}) = 0 \implies \forall \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y}) = 0$

вершина	brand new ψ
X	$\phi = X, \psi = X$
neg X	$\phi = \neg X, \psi = \neg X$
and	$\phi_1 \wedge \phi_2, \psi_1 \wedge \psi_2$
or	$\psi_1 \vee \psi_2$ не можем написать, потому что это не будет в КНФ новая переменная z: $(\psi_1 \vee z) \wedge (\psi_2 \vee \neg z)$

> получается, что число клозов равно числу листьев
> внутри каждого клоза число вхождений равно число переменных + или

#clauses = #leaves
#entries = #vars + #or
poly

□ qed

Th CNFSAT to 3SAT

> $3SAT = CNFSAT \wedge 3CNF$

1. $3SAT \in NP$

2. $3SAT \in NPH$
   $CNFSAT \leqslant 3SAT$

ψ	X
$(x \vee y \vee u) \wedge (x \vee y \vee \neg u)$	$x \vee y$
ok	$x \vee y \vee z$
вспомогательные переменные k - 3 новые перменные: $(x_1 \vee x_2 \vee t_1) \wedge (\neg t_1 \vee x_3 \vee t_2) \wedge (\neg t_2 \vee x_2 \vee t_3) \wedge \ldots \wedge (\neg t_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k)$	$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k$

$\square$ qed

3SAT - superstar

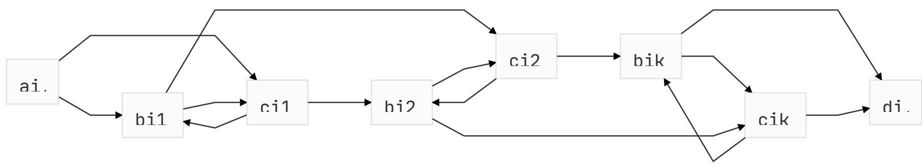
Th IND in NPC

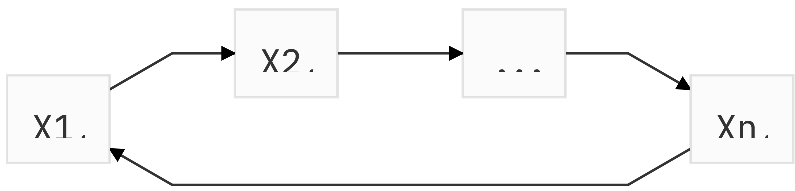
дана формула ϕ в 3КНФ, мы хотим вывести граф G и число k, такие что ϕ удовлетворима тогда и только тогда, когда в графе есть независимое множество размера k
$\phi \in 3SAT \iff \langle G, k \rangle \in IND$

в ϕ k clauses, граф построим из k triangles
в вершинах переменные, соответствующие claus'ам
соединим переменные с их отрицанием

$HAM = \{G \mid G-$ ориентированный граф, содержит Гамильтонов цикл$\}$
$HAM \in NP$
$HAM \in NPH$

$\phi(x_1 x_2 \ldots x_n)$ k clauses
$x_i \to 2k + 2$ вершины





где X - это компонента предыдущего вида

диагональный метод

теоремы об иерахии

$DSPACE(f) = \{L \mid \exists$ программа p: $x \in L \implies p(x) = 1\ S(p,x) = O(f(n))\}$
$x \notin L \implies p(x) = 0$

$PSACE = \cup_{p-polynom} DSPACE(p)$

Th NP subset PS subset EXP

thesis если p запускает q, q использует $O(f)$ памяти, то p может тоже для этого использовать$O(f)$ памяти

Th о ёмкости иерархии

$\frac{f}{g} \to 0$ тогда $\exists L : L \in DSPACE(g) \backslash DSPACE(f)$

$h = \sqrt{fg},\ \ \frac{h}{g} \to 0,\ \ \frac{f}{h} \to 0$

$n = |\langle p, x\rangle|$

$L = \{\langle p, x\rangle \mid$ неверно, что $(p(\langle p, x\rangle) = 1,$ использовав $h(n)$ памяти $)\}$

$L \in DSPACE(g)$

Пусть $L \notin DSPACE(f)$, q - разрешает L, используя $\leqslant cf(n)$, рассмотрим $n_0 : h(n_0) > cf(n_0)$, $n_0 > |q|$

рассмотрим $x : |\langle q, x\rangle| = n_0$

$q(\langle q, x\rangle) =\ ?$

$q(\langle q, x\rangle) = q \implies \langle q, x\rangle \in L \implies !(q(\langle q, x\rangle) = 1\ and\ S(q, \langle q, x\rangle) \leqslant cf(n)\langle h(n_0)) \implies q(\langle q, x\rangle) = 0$

$q(\langle q, x\rangle) = 0 \implies \langle q, x\rangle \notin L \implies q(\langle q, x\rangle) = 1$

Th о временной иерархии

DSPACE -> DTIME, память -> время

ломается немного первая часть, так что новое условие:

$\frac{f}{g} \to 0, \exists h : \frac{f}{h} \to 0, \frac{sim(h)}{g} \to 0.$ $(sim(h) = O(g))$ (где $sim(f)$ - за сколько можно просимулировать программу, работающую за f) тогда $\exists L : L \in DTIME(g) \backslash DTIME(f)$

$h = \sqrt{fg},\ \ \frac{h}{g} \to 0,\ \ \frac{f}{h} \to 0$

$n = |\langle p, x\rangle|$

$L = \{l\angle p, x\rangle \mid$ неверно, что $(p(\langle p, x\rangle) = 1,$ использовав $h(n)$ времени $)\}$

$L \in DTIME(g)$

Пусть $L \notin DTIME(f)$, q - разрешает L, используя $\leqslant cf(n)$, рассмотрим $n_0 : h(n_0) > cf(n_0)$, $n_0 > |q|$

рассмотрим $x : |\langle q, x\rangle| = n_0$

> **Implies $P \neq EXP$**
>
> $f = n^{\log_2 n} = 2^{(\log_2 n)^2}$
> $g = 2^n$
> $\frac{f}{g} \to 0 \implies \exists L \in DTIME(g) \backslash DTIME(f)$ (первая часть $\implies L \in EXP$, вторая – $\implies L \notin P$)

Th (Бейкер, Гилл, Соловэй) BGS

$u = \{\langle p, x\rangle |\ \ p(x) = 1\}$
$uni(p, x) \to$ останавливается ли p на x

Вычисления с оракулом p^A – p с оракулом A

$\exists$ оракул $A : p^A = NP^A$
$\exists$ оракул $B : p^B \neq NP^B$

// **релятивизуется**, если доказательство остаётся верным, если всему фиксированному в программе добавить оракул

рассмотрим $A \in PSC$

$p^A \overset{1}{\subset} NP^A \overset{2}{\subset} PS^A \overset{3}{\subset} PS \overset{4}{\subset} P^A$:

1. любая недетерминировання программа частный случай детерминированной
2. релятивизуется
3. можем заменить вызов оракула на процедуру проверки
4. потому что взяли PSpace полный, любой сводится за полином и спросим у оракула

B $\ \ U_B = \{x \mid \exists y \in B \ \ |x| = |y|\}$

L $\forall B\ \ U_b \in NP^B$

Придумаем $B : U_B \notin P^B$

Теперь рассмотрим часть $\exists$ оракул $B : p^B \neq NP^B$:

Построим последовательность программ $q_1, q_2, q_3, \ldots$
$T(q_i)$ - полином
$\forall L \in P : \exists i : q_i$ разрешает L

Рассмотрим все коды исходных программ, упорядочим их лексикографически и запустим

// n – это длина входа

	n	$2n^2$	$3n^3$	…	kn^k	…
p_1						
p_2						
$\ldots$						
p_m					$p_m \mid TL = kn^k$	
$\ldots$						

каждая из этих программ работает за полином

нумеруем эту табличку по диагонали

получим счётное множество пронумерованных программ

если программа не успела завершиться за TL, то говорим, что q_i возвращает 0

так же можем занумировать все программы с оракулами: $q_1^\bullet, q_2^\bullet, \ldots, q_n^\bullet, \ldots$

должны сделать $B : p^B \neq NP^B$

рассмотрим $B : U_B = \{x \mid \exists y : |x| = |y|, y \in B\}$

L $\forall B : U_B \in NP^B$

> ```
> ub(x)
>    y ← недетерминированно Sigma^|x|
>    return check(y)
> ```

Построить $B : U_B \notin p^B$ (если построим такое B, то теорема БГС доказана)

$B_1 : q_1^{B_1}$ не распознавала U_{B_1}

запустим q_1 с оракулом и будем выступать в роли оракула

$q_1^{\bullet}(x_1)$: спрашивает оракула $?y_1 \rightarrow NO$ (пишем в map наши ответы)
$?y_2 \rightarrow NO \ldots ?y_k \rightarrow NO$

// выберем $x_{\cdot} : T(q_1, x_1) < 2^{|x_1|}$

если результат программы $YES: \ \forall z \, |z| = |x_1| : z \notin B_1$
$NO: \ \exists z_1 : q_1^{\bullet}(x_1)$ не задала вопрос про $z_1, \ |z_1| = |x_1|; \ z_1 \in B_1$

$B_1 \rightarrow B_2 \ q_1^{B_2}$ не распознаёт $U_{B_2}, q_2^{B_2}$ не распознаёт U_{B_2}
$T(q_2^{\bullet}, x_2) < 2^{|x_2|}, |x_2| >$ максимальной длины, для которого известно принадлежность B_1

теперь запускаем $q_2(x_2)$: спрашивает у нас: если спрашивали уже про это слово, то я то же самое и отвечаю, если нет, отвечаю NO и записываю

$B_k \ \forall i \leqslant k : q_i^{B_k}$ не распознаёт U_{B_k}

опять находим x_k и запускаем

тот же самый подход, что и выше, при запуске

этот процесс продолжается до бесконечности

для ответа БГС возьмём $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$

// релятивизация – это *барьер* доказательства $P \neq NP$

Th *Ладнера*

$P \neq NP \implies \exists L : L \notin P, L \notin NPC, L \in NP$

> иллюстрация, **не** доказательство
>
> *Blowing Holes in SAT*
>
> координатная ось с итерированным логарифмом
>
> $1 \rightarrow 10 \rightarrow 10^{10} \rightarrow 10^{10^{10}}$
>
> выбираем нечётные промежутки
>
> $SAT0 = SAT \ \cap \ EVEN$
>
> $EVEN = \{x \mid log_{10}^{*}|x| \text{ чётен } \}$
>
> к нему сводится SAT:
>
> $\exists f : x \in SAT \iff f(x) \in SAT0$

так же, как в теореме БГС, у нас есть последовательность $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, так же запускаем программу p_i с таймером jn^j и так же занумеровали программу по диагонали: $f_1 \ldots f_i \ldots$

все f_i работают за полином

$L = SAT \cap EVEN$ ($SAT \cap \{\phi \mid |\phi|$ в "чёрном" куске $\}$)

рассмотрели первый чёрный кусок, префикса которого достаточно, чтобы программа q_1 не разрешала L за полином

теперь рассмотрим некст белый кусок: добьёмся того, чтобы сведение f_1 неправильно сводило SAT к нашему языку

занумеруем формулы по возрастанию длины и дальше лексикографически: $\phi_1, \phi_2, \dots$

$\phi_1 \xrightarrow{f_1} z_1$
$\phi_2 \rightarrow z_2$
$\dots$

найдётся формула $\phi_x \xrightarrow{f_1} z_x : \phi_x \in SAT \neq z_x = f_1(\phi_x) \in L$

найдётся такая ϕ_x потому, что если бы не нашлось, то получили бы противоречие в том, что SAT сводится за полиномальное время под действием f_1 к конечному языку

z_x лежит либо в первом чёрном отрезке, либо во втором белом
$n_2 = max(n_1 + 1, |z_x|)$

> **Lemma** $L \in NPC, F-$ конечный, $L \setminus F \in NPC$
> $L \leqslant L \setminus F$
>
> ```
> f(x):
>     if x in F
>         if x in L return YesWord
>         else return NoWord
>     else retun x
> ```

построим $BLACK$:

1. $x \in BLACK$ - зависит только ок $|X|$
2. $BLACK \in P$
3. $L \notin NPC, L \notin P$

разрешитель $BLACK$: (верно ли, что слова длины n принадлежат нашему языку, пусть работает за n)

```
black(x: String)
    a = black(|x|)
    return x in BLACK // основываясь на данных из массива a

black(n): List<Int>
// [n1, n2, ..., nk] - список всех границ, которые не превышают n
// ограничение по времени n^(большое число, пусть 100)
    if n = 0 return []
    a = black(n - 1)
    // black(n - 1) отработала за T ⩽ (n - 1)^100, T_left ⩾ 
n^99
    set Timer on n^99, if triggered return a
    if len(a) чётна:
        i = len(a) / 2 + 1
        for (phi - формула, |phi| ⩽ n):
            if (phi in SAT intersect BLACK ≠ q_i(phi))
```

```
            return a ++ [n]
    else // len(a) нечётна
        i = (len(a) - 1) / 2 + 1
        for (phi - формула, |f_i(phi)| ⩽ n):
            if (phi in SAT ≠ f_i(phi) in SAT intersect BLACK):
                return a ++ [n]
    return a
```

---

coNP

def $coNP = L \mid \overline{L} \in NP$

> **ex** $SAT \in NP$,
> $\overline{SAT} \in coNP$
> есть все слова Σ^*, среди них есть булевы формулы и давайте рассматривать только булевы формулы, они делятся на SAT и на $\overline{SAT}$, а на небулевы формулы забьём
>
> $\overline{SAT} = \{\phi \mid \forall\ \vec{x}\colon \phi(\vec{x}) = 0\}$

> **ex** $FACTORIZATION = \{\langle n, x\rangle \mid$ у $n\ \exists$ простой делитель $\leqslant x\} \in NP \cap coNP$
>
> (P candidate)

PSpace и PSpace полнота

def $PS = \cup_{p-polynom} DSPACE(p)$

$P \subset NP \subset PS \subset EXP$

def $L \in PSH : \forall A \in PS:\ A \leqslant L\ (f -$ за полином $x \in A \iff f(x) \in L)$

def $L \in PSC$: $1)\ L \in PSH$
$2) L \in PS$

> **ex** булевы формулы с квантора (матлог референс)
> $TQBF$ (True Quantified Boolean Formula) $= \{\phi \mid \phi -$ булева формула с кванторами, $Free(\phi) = \emptyset\ \ val(\phi) = 1\}$

TQBF in PSC

1. $TQBF \in PS$
   построим дерево разбора и храним множество значений текущих свободных переменных
2. $TQBF \in PSH$
   рассмотрим $L \in PS,\ L \leqslant TQBF$
   m - машина Тьюринга, разрешающая L, детерминированння, $S(m, x) \leqslant p(n)$ // $n = |x|$

   $m(x)\ \ q_o \vdash q_1 \vdash q_2 \vdash \ldots \vdash q_t$

   $f : x \to \phi$

   $\phi -$ истина $\iff m(x) = 1$

   $X_{ijc} -$ ячейка (i, j) содержит символ c

   $Q_i = [X_{i0c_1}, X_{i1c_1}, \ldots, X_{ip(n)c_1}, X_{i0c_2}, \ldots, X_{ip(n)c_2}]$

$S(Q_0) \ \cap \ T(Q_t) \ \cap \ C \ \cap \ N$

введём синтаскический сахар: $\exists(\forall) Q_i := \exists(\forall) X_{i0c_1}, \exists(\forall) \ldots$

$Q_i \vdash Q_{i+1}$

$\exists Q_0 \ \exists Q_1 \ .. \exists Q_t \ S(Q_0) \ \wedge \ T(Q_t) \ \wedge \ C \ \wedge \ Q_0 \vdash Q_1 \ \wedge \ Q_1 \vdash Q_2 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ Q_{t-1} \vdash Q_t$

выведенная формула плоха её длиной: $Q(Q_0), \ T(Q_t), \ Q_0 \vdash Q_1$ имеют длину $p(n)$, но последних кусков t, таким образом вся формула имеет длину $p(n) 2^{q(n)}$, а это не полиномиальное сведение

$Q \vdash R$

$\vdash$ – булева формула от $2 \ (p(n) + 1) \ z$ аргументов

$Q \vdash R := Q \underbrace{\vdash U_1 \vdash U_2 ... \vdash U_{2^{m} - 1} \vdash R}_{2^m}$

$\vdash_m = \vdash^{2^m}$

$Q \vdash_m R = \exist \ T \ (Q \vdash_{m - 1} T \ \and \ T \vdash_{m - 1} R)$

$Q \vdash_m R = \exist \ T \ \forall A \ \forall B \ (\neg (A \vdash_{m - 1} B) \rightarrow (Q \neq A \or B \neq T) \and (T \neq A \or B \neq R))$

$len(m) = O(p(n)) + len(m - 1) \implies len(m) = O(p(n) \ m)$

$\square$

// PS proof template: $PS \rightarrow TQBF \rightarrow L$

Th NSPACE(f(n)) subset DSPACE(f(n)^2)

$f(n) \geqslant log(n)$
$NSPACE(f(n)) \subset DSPACE(f(n)^2)$

Доказательство:

Пусть $L \in NSPACE(f(n))$ ∃ недетерминирванная машина Тьюринга $x \in L \iff \exist$ последовательность недетерминированных выборов, m(x) = 1
$S(m, x) \leqslant f(n), \ n = len(x)$

вход – лента машины Тьюринга со словом x
рабочая – лента машины Тьюринга с $f(n)$
конфигурация машины Тьбринга кодируется:$ (pos, work)$, где $work = \alpha \#_p \beta$, длина $pos = log(n)$, а длина $work = f(n) + 1$, и тогда вся длина пары – $O(f(n))$

Существует ли последовательность переходов длиной $2^{c \ f(n)}$, которая q_0 переводит в допускающую конфигурацию q_t

заведём функцию (можно ли достичь): $Reach(q_s, q_t, k)$ (можно ли из q_s перейти за 2^k шагов до q_t ($q_s \vdash^{2^k} q_t$))

```
Reach(qs, qt, k):
    if (k = 0):
        return qs ⊢ qt
    for (qm - конфигурация машины Тьюринга m):
        if Reach(qs, qm, k - 1) and Reach (qm, qt, k - 1):
            return True
    return False
```

локальные переменные функции `Reach` занимают $f(n)$, суммарно памяти нам понадобится $O(k \ f(n))$

```
inL(x):
    qs - стартовая конфигурация m
    for (qt - допускающая конфиграция m):
        if Reach(qs, qt, c * f(|x|)):
            return 1
    return 0
```

q_s требует $f(n)$ памяти
вызов `Reach` требует $f(n)^2$ памяти
локальная переменная q_t требует $f(n)$ памяти

Следствие Th (*Сэвитча*)

$PS = NPS$

Сублинейная память

Полином памяти PS
Экспонента памяти $EXPSPACE,\ EXP \subset NEXP \subset EXPSPACE$

$DSPACE(f(n)), f(n) = \overline{\overline o}(n)$

Миниальный логичный класс возникающий – это $DSPACE(1)$ (в контексте машины Тьюринга можем хранить только состояние) $ = Reg = NSPACE(1)$

$DSPACE(log \ n) = L$

$NSPACE(log \ n) = NL$

можно:

1. целочисленные переменные $value \leqslant n^c$ (константное количество)
2. массив bool: $len \leqslant c * log \ n$

нельзя:

1. массивы $\Omega(n)$
2. рекурсия $\Omega(n)$

> **ex** проверка на палиндром
>
> ```
> pal(s)
>    n = len(s)
>    for i = 0..n/2
>        if s[i] ≠ s[n - 1 - i]
>            return False
>        return True
> ```

> **ex** проверка пути в графе недетерминированно

```
reach(G, s, t)
 if (s = t) return True
 n = num vert(G)
 u = s
 for i = 1..n
     v = ? {1..n}
     if uv not in E
         return False
     u = v
     if u = t
         return True
 return False
```

> переменные `n, u, i, v` и на проверку `not in E` – константное количество размера n

$L \subset NL \subset DSPACE(log^2 \ n) \subset PS$

stat NL subset P

$A \in NL$

∃ машина Тюринга, разрешающая A

граф G, вершины - конфигурация m (state (const), pos (n), mem (const^(c log n))), рёбра - переходы m

полиномиальное количество состояний

m допускает x $\iff$ в G ∃ путь из (s, 1, 0…00) в вершину (допускающее, *, *)

$\forall A \in NL \ \ A \leqslant Reach$

$LOGSPACE$-сведение

def $A \leqslant_L B$, если $\exist f \ S(f, x) \leqslant c * log \ |x| \ \ : x \in A \iff f(x) \in B$

def A P-complete:

1. $A \in P$
2. $\forall B \in P: B \leqslant _L A$

def A NL-complete:

1. $A \in NL$
2. $\forall B \in NL: B \leqslant_L A$

можно переписать утверждение как $Reach \in NL-complete$

Th транзитивность LOGSPACE-сведения

$x \stackrel f \longrightarrow y \stackrel g \longrightarrow z$

$x \in A \iff y \in B \iff z \in C$

g работает и умеет спрашивать i-ый символ слова y, в таком случае вызываем $f(x)$, получаем символ, всё остальное выбрасываем

итого памяти надо $mem(f) + mem(g) +$ служебные = логарифм памяти

Th CIRCVAL in P-complete

> $CIRCVAL = \{\langle C, \stackrel \rightarrow x \rangle \ | \ C$ - схема из функциональных элементов, $\stackrel \rightarrow x$ - входы, $C(\stackrel \rightarrow x) = 1\}$
>
> Не путать с $CIRCSAT = \{c \ | \ \exist \stackrel \rightarrow x: C(\stackrel \rightarrow x) = 1\}$

$CIRCVAL \in P$

докажем теперь, что все из P сводятся к ней (аналогично теореме Кука):

$A \in P$, m – детерминированная машина Тьюринга, m разрешает A, m работает за $p(n)$

$x \stackrel f \longrightarrow C, \stackrel \rightarrow x$
$x \in A \iff C(\stackrel \rightarrow x) = 1$

Th (Иммермана) NL = coNL

> $coNL = \{A \ | \ \overline A \in NL\}$

$NReach = \{\langle G, s, t \rangle \ | \ $в G не ∃ пути из $s \longrightarrow t \}$

```
NoPath(G, s, t, c) // c - количество вершин, достижимых из s
    for u = 1..n
        if (?) // достижима ли
            c--
            if not Reach(G, s, u)
                return False
            if (u == t)
                return False
    return c == 0
```

```
Next(G, s, c) -> Int
// c - достижимы из s путями len <= k
// возвращает достижимые из s путями len <= k + 1
    r = 0
    for u = 1..n
        if u достижимо len <= k || u достижимо len = k + 1
        // 1: for v -> (?) достижимо или нет, если да, то
угадываем путь
        // 2: for v -> (?) достижимо или нет, если да, то
угадываем путь
        // и перебираем рёбра
            r++
    return r
```

```
NReach(G, s, t)
    c = 1 // достижимые путями len <= 0
    for i = 1..n - 1
        c = Next(G, s, c) // c: len <= n - 1
    return NoPath(G, s, t, c
```

$coNL \subset NL$

$coNL = NL$

Sparse

def $Sparse$ *(редкие языки)* = $\{L \ | \ \exist $ полином $p \ \forall n \ | \Sigma^n \cap L | \ \leqslant p(n)\}$

// для каждой длины не больше полинома слов этой длины

ex *язык простых чисел, заданных в унарной системе счисления*: $Primes_1 = \{1^p \ | \ p$ – простое }

ex $Fact_1 = \{\langle 1^n, 1^\alpha \rangle \ | \ d$ - минимальный делитель n }

Th Бермана-Форчуна

$coNPC \cap Sparse \neq \empty \implies P = NP$

$S \in coNPC \cap Sparse \implies P = NP$

$\sphericalangle \ TAUT \in coNPC$: f сводит $TAUT$ к S за q

```
taut(phi(x1, ..., xn)):
    if n == 0
        return eval(phi)

    phi1 = phi w/ x1 = 1
    phi0 = phi w/ x1 = 0

    if taut(phi1) and taut(phi0)
        return True
    return False
```

добавим мемоизацию:

```
  // memorization
+ memo: set<formula> // формулы, которые точно являются тавтологиями

  taut(phi(x1, ..., xn)):
      if n == 0
          return eval(phi)

+     if phi in memo
+         return True

      phi1 = phi w/ x1 = 1
      phi0 = phi w/ x1 = 0

      if taut(phi1) and taut(phi0)
```

```
+         memo.add(phi)
          return True
      return False
```

$\phi \in TAUT \iff f(\phi) \in S$

$\phi \in memo \implies \phi \in TAUT$

давайте хранить теперь $f(\phi)$ вместо ϕ:

$z \in memo \implies z \in S \implies (z = f(\phi) \implies \phi \in TAUT)$

```
  // memorization
+ memo: set<string>

  taut(phi(x1, ..., xn)):
      if n == 0
          return eval(phi)

+     z = f(phi)
+     if z in memo
          return True

      phi1 = phi w/ x1 = 1
      phi0 = phi w/ x1 = 0

      if taut(phi1) and taut(phi0)
+         memo.add(z)
          return True
      return False
```

$|\phi| = L$
все формулы, от которых вызывается `taut` имеют длину $\leqslant L$
$|z| \leqslant q(L)$
$|S \cap \Sigma^n| \leqslant p(n)$
`memo.size()` $\leqslant \sum_{n = 0}^{q(L)} p(n) \leqslant p(q(L)) * q(L)=r(L)$

`memo.size()` $\leqslant r(|\phi|)$

$\square$

Th Мэхэни

$NPC \cap Sparse \neq \empty \implies P = NP$

> $SAT \in NPC$
> $LSAT = \{\langle \phi(x_1, ..., x_n), [y_1, ..., y_n] \rangle \ | \ \exist z_1 ... z_n: z_1...z_n \leqslant y_1...y_n, \phi(z_1, ..., z_n) = 1 \}$

L $LSAT \in NPC$

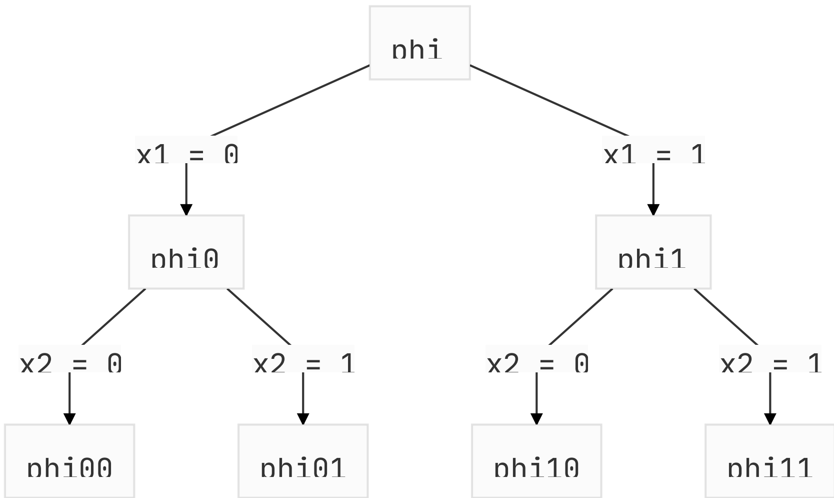
1. $LSAT \in NP$ сертификат $\stackrel \rightarrow z$

2. $SAT \leqslant LSAT$ $\phi \in SAT \iff \langle \phi, [1...1] \rangle \in LSAT$

f сводит $LSAT$ к S: $\langle \phi, \stackrel \rightarrow y \rangle \iff f(\phi, \stackrel \rightarrow y) \in S$

$LSAT \stackrel f \leqslant S$

подобие поиска в ширину:



$[\phi_1, \phi_2, \phi_t]$
на каждом k-ом слое $n-k$ переменных
выберем одну переменную и положим их = 0 и = 1, положим в общую очередь

при $k = n$ в формулах 0 переменных, вычисляем слева направо, пока не найдём равное единице
не нашли – формула не удовлетворима, нашли – нашли минимальное лексикографически удовлетворяющее назначение ϕ

на очередном k-ом слое: $[\phi_1, \phi_2, \phi_t]$
для каждой формулы запишем $\stackrel \rightarrow a$ – вектор, откуда взялась эта формула
применим к парам
$z_i = f(\phi, \underbrace {\stackrel \rightarrow {a_i}111...111}_n), \ ...$
$\stackrel \rightarrow {a_i}$ лежит на пути к минимальному лексикографически удовлетворяющему

$z_1 \notin S, z_2 \notin S, \ ..., z_i \in S, ... \in S$

$|\langle \phi, \underbrace {1..1}_n \rangle | = L$
$\phi_i(x_{k+1}...x_n) \leqslant q(L)$

$| S \cap \Sigma^n | \leqslant p(n)$

различных $z_i \in S$ не больше $p(q(L)) * q(L)$

$z_k = z_j, k < j$
$j \neq i$
из пар равных оставим того, кто раньше

$z_{v_1}, z_{v_2}, ..., z_{v_u}$ – различны если $u > p(q(L)) * q(L)$, то оставим последние $p(q(L)) * q(L)$

$t \leqslant 2 * p(q(L)) * q(L)$

всё время работы за полином, решили SAT за полином, получается $P = NP$

$\square$

полиномиальная иерархия

$\sphericalangle \ NP$
$\Sigma_1 = \{L \mid \exists$ полином p, R (checker), выполняется за полином, $x \in L \iff \exist y, |y| \leqslant p(|x|), R(x, y) = 1 \}$

$\sphericalangle \ coNP$
$\Pi_1 = \{L \ | \ \exist$ полином $p, R,$ выполняется за полином
$(x \notin L \iff \exist y, |y| \leqslant p(|x|), R(x, y) = 1)
$
$x \in L \iff \forall y, |y| \leqslant p(|x|), \overline R(x, y) = 1 \}$

$\Sigma_k = \{L \ | \ \exist$ полином p, R (checker), выполняется за полином, $x \in L \iff \exist y_1 \forall y_2 \exist y_3 ... Q y_k, |y_i| \leqslant p(|x|), R(x, y_1, ..., y_k) = 1 \}$

$\Pi_k = \{L \ | \ \exist$ полином $p, R,$ выполняется за полином $x \in L \iff \forall y_1 \exist y_2 \forall y_3 ... Q y_k, |y_i| \leqslant p(|x|), \overline R(x, y_1, ..., y_k) = 1 \}$

$k = 1 \rightarrow \Sigma_1 = NP, \ \Pi_1 = coNP$

$k = 0 \rightarrow \{L \ | \ \exist R$, вычислимое за полином, $x \in L \iff R(x)\}$,
$\Sigma_0 = \Pi_0 = P$

$MinF = \{\phi \ | \ \phi$ — минимальная по длине булева формула для своей функции }
$\phi \in MinF \iff \forall \psi$ (функция $\psi =$ функция $\phi \implies |\psi| \geqslant |\phi|$)
($|\psi| \geqslant |\phi|) \or ($функция $\psi \neq$ функция $\phi)$
($|\psi| \geqslant |\phi|) \or (\exist x_1 ... x_n \phi(x_1 ... x_n) \neq \psi(x_1 ... x_n))$

$\phi \in MinF \iff \forall \psi \ \exist \stackrel \rightarrow x ((|\psi| \geqslant |\phi|) \or \phi(x_1 ... x_n) \neq \psi(x_1 ... x_n))$

$MinF \in \Pi_2$

Схемная сложность

Схема из функциональных элементов

булева формула $f: B^n \rightarrow B$
программа $p: \Sigma^* \rightarrow B$

non-uniform computations
$\forall n\ \ C_n \ \ B^n \rightarrow B$
$L \subset \Sigma^* \ \{C_0, C_1, C_2, ..., C_n, ...\}$

parallel computation
$L \subset \Sigma^* \ \{C_0, C_1, ..., C_n, ...\}$
$p(n) \rightarrow C_n$, есть ограничения на эту программу p

ограничения, которые у нас есть, -- $size$, $depth$
функция f
$SIZE(f)$ $= \{L \ | \ \exist$ семейство схем из функциональных элементов $C_0 C_1 ... C_n ... \ \ C_i $ распознаёт $L \cap \Sigma^i, size(C_i) = O(f(i)) \}$
так же вводится $DEPTH(f)$

$P/poly$ (P by poly) $= \cup_{k = 0}^\infty \ SIZE(n^k)$

> **ex** (**Th**) $P \subset P/poly$
>
> $L \in P \implies \exist$ детерминированная машина Тьюринга m, распознающая L
>
> работает за полином $q(n)$
>
> $n \rightarrow$ табло вычислений $q(n)$ на $q(n)$

> **ex** $UNARY = \{L \ | \ L \subset \{0\}^* \}$
> $UNARY \subset P/poly$
>
> $\forall n \ 0^n \in L C_n$ допускает только $0^n \downarrow_n$
> либо $0^n \notin L \ C_n \equiv 0$
>
> $HALT_1 = \{0^k \ | k-$ая программа завершается на пустом входе }
> $HALT_1$ не разрешим, но принадлежит $UNARY$ и $P/poly$

Программы с подсказками (advise)

$p(x, a_n)$, где $n = |x|$ и a_n называется подсказкой

$L \in C/f \iff \exist$ программа p, удовлетворяющая ограничением класса C и $\exist a_0, a_1, ..., a_n, ... \ \ a_i \in \Sigma^* \ \ |a_i| \leqslant f(i) \ \ \forall x \ \ p(x, a_n) = [x \in L]$

Th P/poly = SIZE(poly)

$P/poly$ вычисление с подсказками $= SIZE(poly)$

$\supset$) $L \in SIZE(poly) \implies \sphericalangle \ \ a_0 a_1 a_n ... \ \ a_i = C_i \ \ p(x, a_i)$ вычисляет схему a_i на x

$\subset$) $L \in P/poly$ $\sphericalangle \ n\ m -$ машина Тьюринга, построим схему и назовём её C_n

> $P \ vs\ NP$
>
> $NP \subset P/poly \implies P = NP$ -- неизвестно
>
> $NP\ !\subset P/poly \implies P \neq NP$

Th (Карпа-Липтона)

$NP \subset P/poly \implies \Sigma_2 = \Pi_2$

> **L** $NP \subset P/poly$
> $\exist C_0 C_1 C_2 ... C_n ...$ - схемы для SAT $|C_i| \leqslant p(i)$ полином p
> тогда ∃ схемы $A_0 A_1 ... A_n ...$

> 1. $|A_i|$ -- полном от i
> 2. A_i имеет i выходов и если $\phi \in STA \implies \phi(A_i(\phi)) = 1$
>
> $\phi \rightarrow [SET \ \ x_1 = 1] \rightarrow \phi |_{x_1 = 1} \rightarrow [C_i] \rightarrow (\phi |_{x_1 = 1} \in SAT)$

$\sphericalangle \ L \in \Pi_2$, докажем $L \in \Sigma_2$

$R(x, y, z)$ -- полиномиальная детерминированная машина Тьюринга

$x \in L \iff \forall y \ \exist z\ R(x, y, z)$

$T = \{\langle x, y \rangle \ | \ \exist z \ R(x,y, z\}$

$x \in L \iff \forall y \ \langle x, y \rangle \in T$

$T \in NP \implies T \leqslant^f SAT$

$x \in L \iff \forall y \ f(\langle x, y \rangle) \in SAT$ // $|y| \leqslant q(|x|)$
$|\langle x, y \rangle | \leqslant r(n)$

$x \in L \iff \exist [A_0 A_1 ... A_{r(n)}]$ 1) A_i -- схемы из леммы, 2) $\forall y \ \ \phi := f(\langle x, y \rangle) \ |\phi| = m, \phi(A_m(\phi)) = 1$

1) $\iff \forall |\phi| \leqslant r(n): \ \ (\forall z \ \phi(z) = 0 \or \phi(A_m(\phi)) = 1)$

$x \in L \iff \exist A_0 A_1 ... A_{r(n)} \ \forall \phi \forall z \forall y (\phi(z) = 0 \or \phi(A_{|\phi|} (\phi) = 1) \and \phi := f(x, y) \ \psi(A_{|\psi|} (\psi)) = 1$

Параллельные вычисления

def NC^i (*Nick's class*) $= \{L \ | \ \exist$ схемы из функциональных элементов $C_ k,\ size(C_k) \leqslant poly(k), \ \ depth(C_k) \leqslant c\ log^i(k), \ \ C_k$ может быть выведено по k, используя $O(log \ k)$ памяти }
NC $= \cup_{i = 0}^\infty \ NC^i$

def AC^i (*Aaron's class*) -- то же самое, но $\or$ и $\and $ могут иметь неограниченное число входов
AC $= \cup_{i = 0}^\infty \ AC^i$

$AND(x_1...x_n) \in NC^1 \cap AC^0$
$PARITY(x_1...x_n) \in NC^1 \setminus AC^0$
$SUM(x_1...x_ny_1...y_n) \in \widetilde {NC^1}$

Th $NC^i \subset AC^i \subset AC^{i + 1}$
Cons $AC = NC$
Th $L \subset NC \subset P$

Вероятностные сложностные классы

$\sphericalangle \ L$ и p - вероятностная программа для L

1. нульсторонняя ошибка : $x \in L \iff p(x) = 1, \ T(p, x)$ - случайная величина
2. односторонняя ошибка : $x \in L \implies p(x) = 1$ (false positive), $x \notin L \implies p(x) = 0$ (false negative)
   ex тест Миллера-Рабина на простоту
3. двусторонняя ошибка

Введение вероятности

Способ 1. Вероятностная лента

ex linux `/dev/urand`

есть доступ к вероятнстной ленте – односторонней бесконечной последовательности символов какого-то алфавита

множество всех вероятностных лент – Ω

Способ 2. Генератор случайных чисел

ex `random(n) -> [0, n - 1]`

способы **эквивалетны**

События, связанные с программой

Thesis $\forall$ множество $R \subset \Omega$, задающее множество вероятностных лент, приводящих рещультат работы программ, является событием

> **Proof** $R = \{r \ | \ A(p,r,x)\}$, выполняется какой-то предикат A
>
> $R = \cup_{i = 0}^\infty r_i$, $r_i = \{r \ | \ A(p,r,x) \ \and $ считан i бит с вероятностной ленты }
>
> $R_i = \{r = z\{01\}^* \ | \ z \in Z_i\}$
>
> $\mu(z_i) = {|z_i| \over 2^i}$
>
> не более, чем счётное объединение измеримых, значит, объединение измеримо, значит R является событием

Нульсторонняя ошибка

ZPP (*Zero-error Probabilistic Polynomial*) $= \{L \ | \ \exist$ программа $p: {1)\ \forall x \ p(x) = 1 \iff x \in L \\ 2)\ E(T(p, x)) = poly(|x|)} \ \ \}$

ex $QSort \in \widetilde{ZPP}$ // (волна - это не про распознователь, а про преобразователь)

альтернативное определение: $ZPP_1 = \{L \ | \ \exist p: \Sigma^* \to \{0, 1, ?\} : {1) \ p(x) = 1 \implies x \in L \\ \ \ \ \ \ p(x) = 0 \implies x \notin L \\ 2) \ T(p, x) \leqslant poly(|x|) \\ 3) \ P(p(x) = ?) \leqslant {1 \over 2}} \ \ \}$

Th $ZPP = ZPP_1$

> **Proof**
>
> 1. $ZPP \subset ZPP_1$
> $p, \ \ E(T(p, x)) = q(n)$
> $p(x) |_{TL = 2q(n)}$ (on TL `return ?`)
> 2. $ZPP_1 \subset ZPP$
>
> ```
> p:
>     while ((res = p(x)) = ?);
>     return res
> ```

Односторонняя ошибка

RP (*Randomized Polynomial*) $= \{L \ | \ \exist$ программа $p: (1) \ x \notin L \implies p(x) = 0 \\ \ \ \ \ \ x \in L \implies P(p(x) = 1) \geqslant {1 \over 2} \\ 2) \ T(p, x) \leqslant poly(|x|)} \ \ \}$

$coRP$ $= \{ -//- \ \ {x \in L \implies p(x) = 1 \\ x \notin L \implies P(p(x) = 0) \geqslant {1 \over 2} } \ \}$

> **ex** $Primes \in coRP$
>
> тест Миллера-Рабина
>
> $n \in Primes$
>
> *Малая теорема Ферма*: p - простое $\implies \forall a$ простое с p $a^{p - 1} \equiv 1 \mod p$
>
> *тест Ферма*: a взаимно простое с p, $a^{p - 1} \equiv 1 \mod p$ ~~$\implies$~~ p - простое (числа Кармайкла ломают)
>
> $a^{n - 1} \mod n \neq 1$, a - *свидетель Ферма*
>
> либо $n \notin Primes \implies P(a$ - свидетель Ферма $\geqslant {1 \over 2})$, либо n - число Кармайкла
>
> ...

вероятность берётся только по вероятностным лентам

Th RP_{weak} $= \{-//- \ \ x \in L \implies P(p(x) = 1) \geqslant {1 \over a(n)}$, q - любой полином, $q > 1 \ \}$, $RP = RP_{weak}$

> **Proof** Повторим k раз $(1 - {1 \over q(n)})^k < {1 \over 2}$
> $k \sim q(n)$
> $(1 - {1 \over q(n)})^{q(n)} \sim {1 \over e} < {1 \over 2}$

Th RP_{strong} $= \{-//- \ \ x \in L \implies P(p(x) = 1) \geqslant 1 - {1 \over 2^{q(n)}}, q$ - полином, $q > 1 \ \}$, $RP = RP_{strong}$

> **Proof** $P(p(x) = 0 \ | \ x \in L) < {1 \over 2}$
> $P(p(x) = 0 \ \ k \ times \ | \ x \in L) < {1 \over 2^k}$
> $k = q(n)$

такой способ называется **amplification** (*уменьшение вероятности ошибки (накачка)*)

L $ZPP \subset RP$

> **Proof** $\sphericalangle \ L \in ZPP \ \ P(p(zx) = ?) \leqslant {1 \over 2}$
>
> ```
> q(x):
>   res = p(x)
>   if res ≠ ?
>       return res
>   return 0
> ```

> $x \notin L \implies q(x) = 0$
> $x \in L \implies P(q(x) = 1) \geqslant {1 \over 2}$

$\implies$ $ZPP \subset coRP$

Th $ZPP = RP \cap coRP$

> **Proof**
>
> $RP \cap coRP \subset ZPP$
>
> $p_1 \ \ {x \notin L \implies P_1(x) = 0 \\ x\in L \implies P(p_1(x) = 1) \geqslant 1} \ \ \ \ p_2 \ \ {x \in L \implies p_2(x) = 2\\ x \notin L \implies P(p_2(x) = 0) \geqslant {1 \over 2} }$
>
> сделаем программу q:
>
> | p_1 | p_2 | res |
> | --- | --- | --- |
> | 0 | 0 | 0 |
> | 0 | 1 | ? // $P(q(x) = ?) \leqslant {1 \over 4}$ |
> | 1 | 0 | *impossible* |
> | 1 | 1 | 1 |

Двусторонняя ошибка

PP (*Probabilistic Polynomial*) $= \{L \ | \ {x \in L \implies P(p(x) = 1) > {1 \over 2} \\ x \notin L \implies P(p(x) = 0) > {1 \over 2}}, \ p$ работает за полином}

На практике неприменим, рассматривают скорее:
BPP (*Bounded Probabilistic Polynomial*) – пишем вместо ${1 \over 2}$ какое-то число, например $2 \over 3$

Th (*Лаутемана*)

$BPP \subset \Sigma_2$

$\implies BPP \subset \Pi_2$ (по симметрии)

> $L \in BPP: x \in L \iff \exist$ много $r: p(x, r) = 1$
> $L \in \Sigma_2: x \in L \iff \exist y \forall z: \ R(x, y, z)$

L (*прокачка BPP*) $L \in BPP: \forall$ полинома $p(n) \ \ \exist$ полином $q(n)$ и программа A, работающая ща полином $P(A(x) = [x \in L]) \geqslant 1 - {q \over 2^{p(n)}}, A$ импользует $q(n)$ случайных бит

> $A(x, r) \ \ x \in L \iff |\{r \ | \ A(x, r) = 1\}| \geqslant (1 - {1 \over 2^{p(n)}}) 2^{q(n)} = 2^{q(n)} 2^{q(n) - p(n)}$
> $x \notin L \iff |\{r \ | \ A(x, r) = 1\} | < {2^{q(n)} \over 2^{p(n)}} = b$, тогда выше: $2^{q(n)} - b$
>
> $B^{q(n)} = \Omega, \ \ |\Omega| = 2^{q(n)}$
>
> введём групповую операцию (**ex** xor)
>
> выберем k
>
> $X \subset \Omega$ - большое $\iff \exist y_1 y_2 ... y_k: \cup_{i = 1}^k y_i \oplus X = \Omega$

$X \subset \Omega$ - маленькое $\iff \forall y_1 y_2 ... y_k \cup_{i = 1}^k y_i \oplus X \neq \Omega$

1. $|X| < {2^{1(n)} \over k} \implies X$ — k -маленькое
   $x \notin L \implies \underbrace {|\{r \ | \ A(x, r) = 1\}|}_R < {2^{q(n)} \over 2^{p(n)}} < {2^{q(n)} \over k} \implies R$ — k -маленькое
2. $|X| > (1 - {1 \over 2^{p(n)}}) 2^{q(n)} \stackrel {k?} \implies X$ — k -большое
   $\exist y_1 y_2 ... y_k \cup_{i = 1}^k y_i \oplus X = \Omega$
   $P_{y_1 y_2 ... y_k} (\cup_{k = 1} ^k y_i \oplus X = \Omega) = \\ = P(\forall z \or_{i = 1} ^k z \in y_i \oplus X) = \\ = P(\forall z \or_{i = 1}^k y_i \in z \oplus X) = \\ = 1 - P(\exist z \and_{i = 1}^k y_i \notin z \oplus X) = \\ = 1 - P(\or_{z} \and_{i = 1}^k y_i \notin z \oplus X) \geqslant \\ \geqslant 1 - \Sigma_k P(\and_{i = 1} ^k y_i \notin z \oplus X) = \\ = 1 - 2^{q(n)} (1 - {|X| \over |\Omega|})^k \geqslant \\ \geqslant 1 - 2^{q(n)} (1 - (1 - {1 \over 2^{q(n)}}) {2^{q(n)} \over 2^{q(n)}})^k = \\ = 1 - {2^{q(n)} \over 2^{k p(n)}}$
   если добавим условие что $k > {q(n) \over p(n)}$, то получается, что > 0

$\sphericalangle \ L \in BPP$, выберем $p(n) = n$, по лемме $\exist q(n) \ \ R = \{r \ | \ A(x,r) = 1\}$

$x \in L \implies |R| > (1 - {q \over 2^n} 2^{q(n)}) \ \ x \notin L \implies |R| < {2^{q(n)} \over 2^n}$

выберем $k = q(n)$, для $n > n_0: {q(n) \over n} < k < 2^n$

$X \in L \implies R$ — k-большое

$X \notin L \implies R$ — k-маленькое

$x \in L \iff \exist y_1 ... y_k \forall z (A(x, y_1 \oplus z) \or A(x, y_w \oplus z) ... \or A(x, y_k \oplus z))$

$z \in y_i \oplus R \iff z \oplus y_i \in R \iff A(x, y_i \oplus z) = 1$

$\implies L \in \Sigma_2$

PI (*Polynom Identity*) $= \{\langle p(x_1...x_n), q(x_1...x_n), m \rangle \ | \ \forall x_1...x_n \ \ p(\overline x) \equiv q(\overline x) \mod m \}$

1. $PI \in coNP$
2. $PI \in NP$ открыто
3. $PI \in coRP \subset BPP$

L (*Шварца-Зиппеля*)

p – полином над полем, $deg \ p = d$, $p \ne 0$, S, $|S| = s$
если случайно выбрать x_i из S, $P(p(x_1...x_n) = 0) \leqslant {d \over s}$

Proof индукция по количеству переменных в полиноме

база $n = 1$ полином над полем имеет $\leqslant d$ корней

$P(p(x) = 0) \leqslant {d \over s}$

переход к n

$P(x_1 ... x_n) = x_1^k \stackrel {\ne 0} {q_k} (x_2 ... x_n) + x_1^{k - 1} q_{k -1}(x_2...x_n) + ... + x_1^0q_0(x_2...x_n)$

> $P(p(x_1...x_n) = 0) = P(p(x_1...x_n) = 0 \ | \ \stackrel {\leqslant 1} {q_k} (x_2...x_n) = 0) P(\stackrel {\leqslant {d - k \over s}} {q_k} (x_2...x_n) = 0) + \stackrel {\leqslant {k \over s}} P(p(x_1...x_n) = 0 \ | \ q_k \ne 0) \stackrel {\leqslant 1} P(q_k \ne 0)$
>
> $\sphericalangle \ p - 1 \ \ p \equiv q \iff p - q \equiv 0$

Интерактивные доказательства

Verifier за истину, Prover за принадлежность в вопросе $x \in L$

V работает детерминированно за полином
P – произвольная программа

$L \ \ x \ \ q_1 \ \ a_1 \ \ q_2 \ \ a_2 \ \ ... \ \ q_k \ \ a_k \ \ res$

$q_i = V(x, a_1, ..., a_{i - 1})$
$a_i = P(x, q_1, q_2, ..., q_i)$

Интерактивное взаимодействие, пара V, P называется **интерактивный протокол**

$x \in L \iff res = 1$

dIP = $\{L \ | \ \exist V: {x \in L \implies \exist P: res(V, P) = 1 \\ x \notin L \implies \forall P: res(V, P) = 0} \}$

если $k = f(n)$, где $n = |x|$, это $dIP[f]$

Th $dIP = NP$

> **Proof**
>
> - $NP \subset dIP[1]$
> $q_1 = \epsilon \ \ a_1 = y$ (P может просто пербором найти нужный y)
> - $dIP \subset NP$
> $R(x, y=(a_1, a_2, ..., a_k))$

рассмотрим теперь случай, когда V – вероятностная программа

$Prover$ по умолчаю не видит ленту $Verifier$ (концепция **private coins**)

IP $= \{\exist V : {x \in L \implies \exist P\ \ Prob(res(V, P) = 1) \geqslant {2 \over 3} \\ \\ x \notin L \implies \forall P \ \ Prob(res(V, P) = 1) \leqslant {2 \over 3}} \}$

$NP \subset IP$: $NP = dIP \subset IP$

$BPP \subset IP$

$IP \subset PSPACE$

GNI (Graph Non Isomorphism) $= \{ \langle G_1, G_2 \rangle\ | \ G_1$ не изоморфен $G_2 \}$

1. V:

$$\begin{aligned} i &= random(1,2) \\ \pi &= randomPermutation(n) \\ H &= \pi(G_i) \\ &\xrightarrow{q_1=H} H \sim G_j, H \nsim G_{3-j} \\ a_1 &= j \\ &\xleftarrow{j=a_1} \\ return\ \ i &= j \end{aligned} \tag{1}$$

Сейчас вероятности 1 и 1/2 из определения. Чтобы добиться нужынх, запустим два раза (можно сразу)

Можно сделать и последовательных два запуска, чтобы добиться $1 \over 4$

$GNI \in IP$

Th1 (*Шамир*) $IP = PSPACE$

Th2 $coNP \subset IP$

L1 $\#SAT = \{ \langle \phi, k \rangle \ | \ \phi $ имеет ровно k удовлетворяющих назначений $\} \in IP$

L2 $TAUT \leqslant \#SAT$

> **L2 Proof**
> $\phi \in TAUT \iff \langle \phi, 2^n \rangle \in \#SAT$

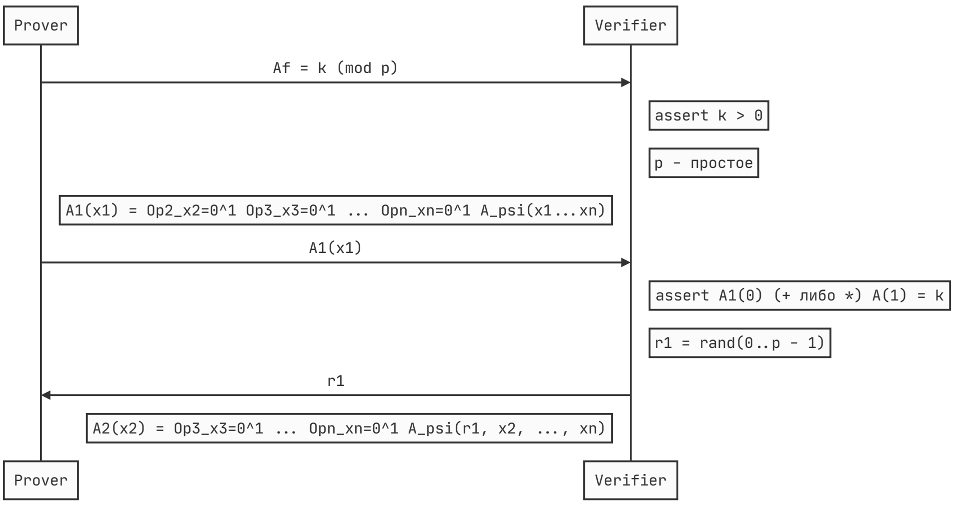
> **Th2 w/ L1&L2 Proof**
> $L \in coNP \ \ \ L \leqslant TAUT \leqslant \#SAT$
> $x \in L \iff f(x) = \langle \phi, k \rangle \in \#SAT$

> **L1 Proof**
> $\phi \rightarrow A(\phi)$ (арифметизация)
>
> | вместо | пишем |
> |---|---|
> | x | x |
> | $\neg x$ | $1 - x$ |
> | $\phi \and \psi$ | $A(\phi)A(\psi)$ |
> | $\phi \or \psi$ | $1 - (1 - A(\phi))(1 - A(\psi))$ |
>
> $phi(x_1, ..., x_n) = 1 \iff A(\phi) (x_1, ..., x_n) = 1$
>
> $\langle \phi, k \rangle \in \#SAT \iff \sum_{x_1 = 0}^1 \sum_{x_2 = 0}^1 ... \sum_{x_n = 0}^1 A(\phi)(x_1 ... x_n) = k$
>
> $A_1(x_1) = \sum_{x2 = 0}^1 \sum_{x_3 = 0}^1 ... \sum_{x_n = 0}^1 A_\phi (x_1 ... x_n)$ - полином от x_1
>
> давайте выберем простое $p: 2^n < p \leqslant 2^{n + 1}$ (постулат Бертрана)
>
> $\deg A_1 \leqslant |\phi|$
>
> просим P прислать нам полином A_1
>
> $\sum_{x_1 = 0}^1 \underbrace {\sum_{x_2 = 0}^1 ... \sum_{x_n = 0}^1 A_\phi (\overline x)}_{A_1} = k$
>
> $assert(A_1(0) + A_1(1)) = k$
>
> **все вычисления по модулю p**
>
> $A_2 (x_2) = \sum_{x_3 = 0}^1 \sum_{x_4 = 0}^1 ... \sum_{x_n = 0}^1 A_\phi(r_1, x_2, x_3 ... x_n)$, где $r_1 = random(0..p - 1)$
>
> отправим P число r_1, попросим прислать A_2
>
> $assert(A_2(0) + A_2(1) = A_1(r_1))$
>
> $r_2 = random(0..p - 1)$
>
> отправляем P число r_2
>
> $A_k(x_k) = \sum_{x_k = 0}^1 ... \sum_{x_n = 0}^1 a_\phi(r_1, ..., r_{k - 1}, ..., x_k, ..., x_n)$
>
> $assert(A_n(0) + A_n(1) = A_{n-1}(r_{n - 1}))$

> $A_n(x_n) = A_\phi(r_1, ..., r_{n - 1}, x_n)$
>
> $\deg A_n \leqslant |\phi|$
>
> $assert A_n is OK$
>
> $accept$

Th Шамира

$TQBF_1 = \{\phi \ | \ \phi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n \ \ \psi (x_1 ... x_n),\ val(\phi) = 1\}$
$\phi = \exist x ... \rightarrow \sum_{x = 0}^1 ...$
$\phi = \forall x ... \rightarrow \prod_{x = 0}^1 ...$
$\phi \in TQBF_1 \iff A_\phi \neq 0$ (*арифметизация*)



$(1 - {d \over p})^3 \sim 1 - {ds \over p}$

Между $Qx_i\underbrace {...}_{не\ более\ 1\ \forall}x_i \implies \deg x_i \leqslant d^4$
$Qx_1 \underbrace{...}_\exist \forall x_i \exist x_1' \exist x_2 ' ... \exist x_{i - 1}' (x_1 = x_1' \and x_2 = x_2' \and ... \and x_{i - 1} = x_{i - 1}') \and \\ \and \exist \underbrace{...}_\exist \forall x_j \exist x_1'' \exist x_2 ' ... \exist x_{i - 1}' ... \exist x_{j - 1}'' (x_1' = x_1'' \and x_2' = x_2'' \and ... \and x_{j - 1}' = x_{j - 1}'')$

$|\tilde \phi| \leqslant |\phi|^2$
$\tilde n \leqslant n^2$
$d \leqslant n^2$
$A_{\tilde \phi} = A_\phi$
$\deg A_i \leqslant 2n^2$
$d \leqslant 2n^2$
$s = \tilde n \leqslant n^2$
$p > 3ds \geqslant 6n^4$

r_i - слово, которое было прочитано V с вероятностной ленты между i и $i + 1$ запросом

def *public coins*: $q_i = r_i$
def *private coins*: otherwise

def $AM[k]$ (*Arthur Merlin*): существует доказательство с открытыми моментами с k-раундами
если нет ограничения: $AM[*]$

1. $k = 1$
   $AM[1] = $ AM
2. $k = 1, r_1 = \epsilon$
   MA

переделаем GNI в протокол с открытыми монетами

$\{H \ | \ G_1 \sim H$ или $G_2 \sim H\}$
H не имеет автоморфизмов (1)

$G_1 \sim G_2$ $|s| = n !$

$G_1 \nsim G_2$ $|s| = 2 n!$

перепишем (1)
$S = \{\langle H, \pi \rangle \ | \ G_1 \sim H ..., \pi$ - автоморфизм $H\}$

∃ сертификат принадлежности S

> **ex** $S \subset \{0...999\}$
> $|S| = 700$
> $|S| = 350$
> по число можно проверить $\in S?$
> быстрая проверка: S большое или маленькое?
> $7/10$ или $3.5/10$ примерно - *метод Монте-Карло*

$|u| = 2^{n (n - 1) \over 2} n !$

Хэширование