теория сложности

literature:

- Arora Barak "Complexity Modern Approach" (1st part)
- Garry Johnson "Трудно разрешенные задачи"
- site: compendium of NP-complete problems

outline:

- NP-полнота
  - Концепция недетерминированных вычислений
- Сведения
  - Теорема Кука-Левина
- язык CNFSAT
  - Теорема $CNFSAT \in NPC$
  - Теорема $CNFSAT \to 3SAT$
- Теорема $IND \in NPC$
- диагональный метод
  - теоремы об иерархии
    - Теорема о ёмкости иерархии
    - Теорема о временной иерархии
  - Теорема Бэйкера-Гилла-Соловэя (BGS)
  - Теорема Ладнера
- coNP
- PSPACE и PSPACE полнота
  - $TQBF \in PSC$
  - Теорема $NSPACE(f(n)) \subset DSPACE(f(n)^2)$
    - Следствие. Теорема Сэвитча
- Сублинейнай память
  - $NL \subset P$
  - Теорема транзитивности $LOGSPACE$-сведения
  - Теорема $CIRCVAL \in P$-*complete*
  - Теорема Иммермана $(NL = coNL)$
- Sparse
  - Th Бермана-Форчуна
  - Th Мэхэни
- Полиномиальная иерархия

NP-полнота

Характеристики сложности вычисления.
Есть распознователи $(\Sigma^* \to B)$ и преобразователи $(\Sigma^* \to \Sigma^*)$

- время: $T(n) = O(f(n))$
- память: $S(n)$
- random: $R(n)$

$DTIME(f) = \{L \mid \exists\, program\; p:$
$1.\, x \in L \implies p(X) = 1, x \notin L \implies p(x) = 0$
$2.\, n = |x| \implies T(p, x) = O(f(n))\}$

$h = (01)^* \in DTIME(n)$

$DT\widetilde{IME}(f) = \{h \mid \dots\}$

палинромы: $Pal \in DTIME_{RAM}(n)$
$Pal \notin DTIME_{TM}(n)$

$P = \cup_{f-polynom} DTIME(f) = \cup_{i=0}^{\infty} DTIME(n^i)$

$p(n) q(n) : p + q, p * q, p(q(n))$
$L_1 L_2 \in P : L_1 \cup L_2 \in P, L_1 \cap L_2 \in P, \overline{L_1} \in P, L_1 L_2 \in P, L_1^* \in P$

концепция недетрминированных вычислений

Допускается $\iff$ $\exists$ последовательность переходов, которая приводит к допуску
недетерминировання программа p(x) допускает $\iff$ $\exists$ последовательность недетерминированных выборов, приводящая к допуску
p(x) не допускает $\iff$ $\forall$ последовательности выборов не допуск

def *NTIME(f)* = $\{L \mid \exists$ недетерминированная программа p
$1)\; p(x) - acc \iff x \in L;\; 2)\; T(p, x) = O(f(n))\}$

> **ex** задача о гамильтоновом цикле
>
> ```
> p(G)
>  vis[1..n]: arr of bool
>  s = 1
>  for i = 1..n
>      u = ?{1..n}
>      if (vis[u]) return false
>      if (su not in EG) return false
>      vis[u] = true
>      s = u
>  if (s ≠ 1) return false
>  return true
> ```

> **ex** `isComposite(z)`, $n = \lceil \log_B z \rceil$, где B - это основание системы счисления
>
> ```
> a = ?{2..z-1} // T = logn
> if z % a = 0  // poly(logn)
>  return true
> return false
> ```

Нельзя свопнуть бранчи и сделать проверку на простоту, потому что это `true` и `false` не симметричны в недетерминированных вычислениях (нельзя даже `isPrime(n): return !isComposite(n)`)

---

def *NP* = $\cup_{f-polynome}\; NTIME(f)$, *nondeterministic polynomial*
stat $P \subset NP$

? $P = NP$

неформально: класс P - класс задач, которые можно решить за полином, класс NP - класс задач, решение которых можно проверить за полином

Σ_1 - класс языков, в которых можно формализовать класс решения, которое можно проверить за полином

$\Sigma_1 = \{L \mid \exists$ полином p, работающая за полином программа R(x, y) - детерминированная

$x \in L \iff \exists\, y$ (называют *сертификат*): $|y| \le p(|x|)\ and\ R(x, y) = 1$

$x \notin L \implies \forall\, y\ (|y| \le p(|x|))\ R(x, y) = 0\}$

> **ex** гамильтонов цикл $Ham \in \Sigma_1$
>
> ```
> R(G, y):
>  y as arr[1..n] of int
>  // we can add: y = ?arr[i..n] of {1..n} // O(n)
>  vis = arr[1..n] of bool
>  for i = 1..n
>      if (y[i] y[i mod n+1] not in EG) return false
>      if vis[y[i]] return false
>      vis[y[i]] = true
>  return true
> ```

Th $NP = \Sigma_1$

$L \in NP, L \in \Sigma_1$

неформально: NP – определение на языке недетерминированных формат, Σ_1 – определение на языке сертификатов

сведения

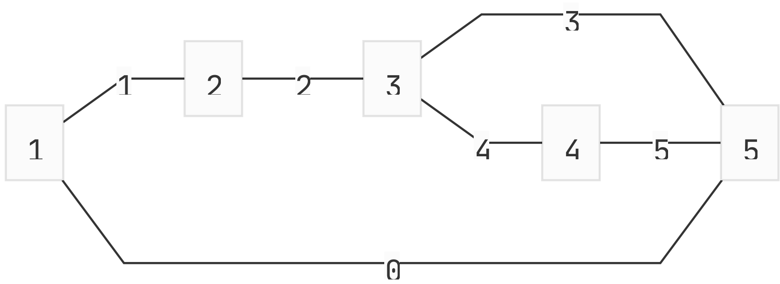
def сводим B к A *по Тьюрингу*: A, B – языки, C – сложностный класс, $B \in C^A$ (C с *оракулом* A). не считая вызова функции `isInA(x): Bool`, остальные ограничения класса C учитываются.

def сведение по *Куку-Левину* (*Тьюрингу за полином*) $B \in P^A$

def *сведене по Карпу* (*m-сведение*): язык B сводится к A ($B \le A$), если $\exists$ вычислимая за полином функция f такая, что $x \in B \iff f(x) \in A$

> **ex** $IND = \{\langle G, k\rangle |$ в $\ G\ d$ независимое множество размера k }
>
> $CLIQUE = \{\langle G, k\rangle |$ в $G \exists$ клика размера k$\}$
>
> $IND \le CLIQUE$
>
> $f(\langle G, k\rangle) = \langle \overline{G}, k\rangle$ // за полином
>
> в G и множестве размера k $\iff$ в $\overline{G}$ $\exists$ клика размера k
>
> $VCOVER = \{\langle G, k\rangle |$ в G $\exists$ вершинное покрытие размера $\ k$ }
>
> $IND \le VCOVER$
>
> $f(\langle G, k\rangle) = \langle G, n - k\rangle$, где n - число вершин G

> **ex** $SUBSETSUM = \{\langle [x_1, x_2, \dots, x_n], s\rangle \mid \exists I \subset \{1, 2, \dots, n\}, \sum_{i \in I} = s, x_i \in \mathbb{N}\}$
>
> `dp[i][w]` - можно ли первые i $\Sigma = w$ // w - $2^{|s|}$
>
> $VCOVER \le SUBSETSUM$
>
> пронумеруем вершины с единицы, рёбра – с нуля, битовыми масками каждой вершине сопоставляем рёбра



	6	5	4	3	2	1	0
x_1	1	0	0	0	0	1	1
x_2	1	0	0	0	1	1	0
x_3	1	0	1	1	1	0	0
x_4	1	1	1	0	0	0	0
x_5	1	1	0	1	0	0	1
s	3	2	2	2	2	2	2

$x_6 = 1$
$x_7 = 10$
$x_8 = 100$
$x_9 = 1000$
$x_{10} = 10000$
$x_{11} = 100000$
$f(\langle G, k \rangle)$, n - число вершин, m - число рёбер, $s = k22...2$, m двоек

f сводит VCOVER к SUBSETSUM
$\Rightarrow$: в G $\exists$ вершинное погрытие размера k
$\Leftarrow$: $[x_1 \ldots, x_{n+n}]$, s $\exists$ решение $\Rightarrow$ в G $\exists$ вершинное покрытие размера k

def язык называется *NP-hard* (*NP-трудный*), если выполнены следующие условия:
$\forall B \in NP : B \leq A$
def A называется *NP-complete* (*NP-полный*), если:
1) $A \in NPH$
2) $A \in NP$
// $NPC = NPH \cap NP$

ex BH_{1N} (bounded halting unary nondeterministic)
$BH_{1N} = \{\angle m, x, 1^t \rangle \mid$ m – недетрминированна машина тьюринга, x – вход, t – ограничение времени: $\exists$ последовательность недетерминированна выборов машины Тьюринга m, что она допускается за t шагов: `m(x) = 1`$\}$

Th $BH_{1N} \leq NPC$

1. $BH_{1N} \in NPH$
   $A \in NP$
   // def по Карпу
   m_A - недетерминированна машина Тьюринга, решающая A за полином

$p(n) = cn^k$
$f(x) = \langle m_A, x, q^{p(|x|)} \rangle$
$x \in A \iff \exists$ последовательность выборов $m_A(x) = 1$ (за $p(|x|)$)

2. $BH_{1N} \in NP$

L $A \leqslant^k B, B \leqslant^k C \implies A \leqslant^k C$
$x \xrightarrow{t} f(x) \xrightarrow{t} g(f(x))$
con $A \in NPH, A \leqslant B \implies B \in NPH$

stat если $B \leqslant A$, $A \in NPH$
$NP \xrightarrow{t} BH_{1N} \xrightarrow{t} SAT$

def $SAT = \{\phi(x_q \dots x_n) \mid \exists x_1 \dots x_n \ \phi(x_1 \dots x_n) = 1, \phi - бф\}$

Th *(Кук, Левин)* SAT in NPC

$SAT \in NPC$

$BH_{1N} \leqslant SAT$
$\langle m, x, 1^t \rangle \overset{f}{\mapsto} \phi$

ϕ удовлетворяет $\iff$ $\exists$ последовательность недетерминированных выборов $m(x) = 1$, за время t

больше t шагов не будет, есть мгновенные описания машины $\alpha \#_q \beta$
дополним описания до длины t + 1
$q_0 \vdash q_1 \vdash \dots \vdash q_t$

табло вычислений: первая строка - стартовое состояние, $i \to i+1, q_i \vdash q_{i+1}$, допуск: последовательность до $\#_{acc}$

$\langle m, x, 1^t \rangle \in BH_{1N} \iff \exists$ допускающее табло вычислений

количество состояний $|Q| = z$, множество ленточного алфавита $|PT| = y$, $z + y = k$
заведём $(t+1)^2 k$ переменных, x_{ijc} - верно ли, что в табло в i-й j-й ячейке записан символ 'c'

$\phi(x_{ijc}) = C \wedge S \wedge T \wedge N$

$C = \wedge i, j = 0..t \vee_C ((\wedge \neg X_{ij\alpha}) \wedge X_{ijc})$

$S = X_{00\#_s} \wedge X_{01x_1} \wedge X_{02x_2} \wedge \dots \wedge X_{0nx_n} \wedge X_{0(n+1)B} \wedge \dots$

$T = X_{t0\#x} \vee X_{t1\#_y} \vee \dots \vee X_{tt\#_y}$

$N = (\wedge_{i,j} \wedge_{c_1 c_2 c_3 c_3 \notin Q} X_{i-1,j-1,c_1} \wedge X_{i-1,j,c_2} \wedge X_{i,j+1,c_3} \wedge X_{i,j,c_4} \to c_1 = c_4) \wedge_{ijx} \wedge_{c_1 \dots c_6 \dots}$ допустимы

qed $\square$

язык CNFSAT

def $CNFSAT = \{\phi \mid \phi$ в КНФ, $\phi \in SAT\}$
$(x_i \vee \neg x_j \dots) \wedge (\vee \vee \vee) \wedge (\vee)$
clause (клоз)
ex 2-SAT (ровно две) HornSAT (не более одной без отрицания)

Th CNFSAT in NPC

1. $CNFSAT \in NP$

2. $CNFSAT \in NPH$
   $SAT \leqslant CNFSAT$
   $\phi \xrightarrow{f \ \ (polynomial\ time)} \psi$
   $\phi \in SAT \iff \psi = f(\psi) \in CNFSAT$

базис: $\wedge, \vee, \neg$

строим дерево разбора нашей формулы ϕ:

- если у neg сын neg, то можем удалить
- neg -> and/or => neg <- and/or -> neg neg

каждому поддереву соответствует преобразованная подформула $\phi_i(x_{i_1} \dots x_{i_k})$,
хотим построить следующее: $\psi_i(x_{i_1} \dots x_{i_k}, y_1 \dots y_{i_t})$
$\phi(\overline{X}) = 1 \implies \exists \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y}) = 1$
$\phi(\overline{X}) = 0 \implies \forall \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y}) = 0$

вершина	brand new ψ
X	$\phi = X, \psi = X$
neg X	$\phi = \neg X, \psi = \neg X$
and	$\phi_1 \wedge \phi_2, \psi_1 \wedge \psi_2$
or	$\psi_1 \vee \psi_2$ не можем написать, потому что это не будет в КНФ новая переменная z: $(\psi_1 \vee z) \wedge (\psi_2 \vee \neg z)$

> получается, что число клозов равно числу листьев
> внутри каждого клоза число вхождений равно число переменных + или

#clauses = #leaves
#entries = #vars + #or
poly

$\square$ *qed*

Th CNFSAT to 3SAT

> $3SAT = CNFSAT \wedge 3CNF$

1. $3SAT \in NP$
2. $3SAT \in NPH$
   $CNFSAT \leqslant 3SAT$

ψ	X
$(x \vee y \vee u) \wedge (x \vee y \vee \neg u)$	$x \vee y$
ok	$x \vee y \vee z$
вспомогательные переменные k - 3 новые перменные: $(x_1 \vee x_2 \vee t_1) \wedge (\neg t_1 \vee x_3 \vee t_2) \wedge (\neg t_2 \vee x_2 \vee t_3) \wedge \dots \wedge (\neg t_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k)$	$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_{k}$

$\square$ *qed*

3SAT - superstar

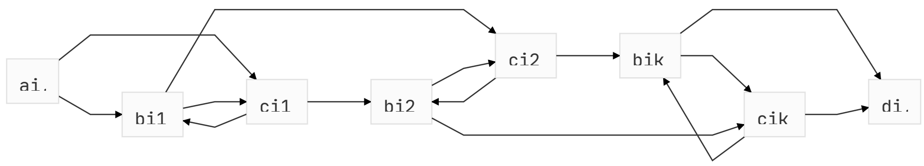
Th IND in NPC

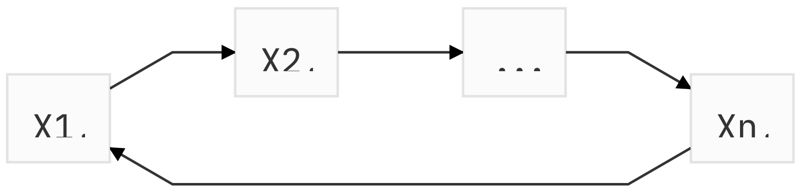
дана формула ϕ в 3КНФ, мы хотим вывести граф G и число k, такие что ϕ удовлетворима тогда и только тогда, когда в графе есть независимое множество размера k
$\phi \in 3SAT \iff \langle G, k\rangle \in IND$

в ϕ k clauses, граф построим из k triangles
в вершинах переменные, соответствующие claus'ам
соединим переменные с их отрицанием

$HAM = \{G \mid G-$ ориентированный граф, содержит Гамильтонов цикл$\}$
$HAM \in NP$
$HAM \in NPH$

$\phi(x_1 x_2 \dots x_n)$ k clauses
$x_i \to 2k+2$ вершины





где X - это компонента предыдущего вида

диагональный метод

теоремы об иерахии

$DSPACE(f) = \{L \mid \exists$ программа p: $x \in L \implies p(x) = 1\ S(p,x) = O(f(n))\}$
$x \notin L \implies p(x) = 0$

$PSACE = \cup_{p-polynom} DSPACE(p)$

Th NP subset PS subset EXP

thesis если p запускает q, q использует $O(f)$ памяти, то p может тоже для этого использовать$O(f)$ памяти

Th о ёмкости иерархии

$\frac{f}{g} \to 0$ тогда $\exists L : L \in DSPACE(g) \backslash DSPACE(f)$

$h = \sqrt{fg},\ \frac{h}{g} \to 0,\ \frac{f}{h} \to 0$

$n = |\langle p, x\rangle|$

$L = \{\langle p, x\rangle \mid$ неверно, что $(p(\langle p, x\rangle) = 1,$ использовав $h(n)$ памяти $)\}$

$L \in DSPACE(g)$

Пусть $L \notin DSPACE(f)$, q - разрешает L, используя $\leqslant cf(n)$, рассмотрим
$n_0 : h(n_0) > cf(n_0)$, $n_0 > |q|$

рассмотрим $x : |\langle q, x\rangle| = n_0$

$q(\langle q, x\rangle) = \ ?$

$q(\langle q, x\rangle) = q \implies \langle q, x\rangle \in L \implies !(q(\langle q, x\rangle) = 1 \; and \; S(q, \langle q, x\rangle) \leqslant cf(n)\langle h(n_0)) \implies q(\langle q, x\rangle) = 0$

$q(\langle q, x\rangle) = 0 \implies \langle q, x\rangle \notin L \implies q(\langle q, x\rangle) = 1$

Th о временной иерархии

DSPACE -> DTIME, память -> время

ломается немного первая часть, так что новое условие:

$\frac{f}{g} \to 0, \exists h : \frac{f}{h} \to 0, \frac{sim(h)}{g} \to 0.$ $(sim(h) = O(g))$ (где $sim(f)$ - за сколько можно просимулировать программу, работающую за f) тогда
$\exists L : L \in DTIME(g) \backslash DTIME(f)$

$h = \sqrt{fg}, \ \frac{h}{g} \to 0, \ \frac{f}{h} \to 0$

$n = |\langle p, x\rangle|$

$L = \{l\angle p, x\rangle \mid$ неверно, что $(p(\langle p, x\rangle) = 1,$ использовав $h(n)$ времени $)\}$

$L \in DTIME(g)$

Пусть $L \notin DTIME(f)$, q - разрешает L, используя $\leqslant cf(n)$, рассмотрим
$n_0 : h(n_0) > cf(n_0)$, $n_0 > |q|$

рассмотрим $x : |\langle q, x\rangle| = n_0$

> **Implies $P \neq EXP$**
>
> $f = n^{\log_2 n} = 2^{(\log_2 n)^2}$
> $g = 2^n$
> $\frac{f}{g} \to 0 \implies \exists L \in DTIME(g) \backslash DTIME(f)$ (первая часть $\implies L \in EXP$, вторая – $\implies L \notin P$)

Th (Бейкер, Гилл, Соловэй) BGS

$u = \{\langle p, x\rangle \mid \ p(x) = 1\}$
$uni(p, x) \to$ останавливается ли p на x

Вычисления с оракулом p^A – p с оракулом A

$\exists$ оракул $A : p^A = NP^A$
$\exists$ оракул $B : p^B \neq NP^B$

// **релятивизуется**, если доказательство остаётся верным, если всему фиксированному в программе добавить оракул

рассмотрим $A \in PSC$

$p^A \overset{1}{\subset} NP^A \overset{2}{\subset} PS^A \overset{3}{\subset} PS \overset{4}{\subset} P^A$:

1. любая недетерминированння программа частный случай детерминированной
2. релятивизуется

3. можем заменить вызов оракула на процедуру проверки
4. потому что взяли PSpace полный, любой сводится за полином и спросим у оракула

B $U_B = \{x \mid \exists y \in B \quad |x| = |y|\}$

L $\forall B \; U_b \in NP^B$

Придумаем $B : U_B \notin P^B$

Теперь рассмотрим часть $\exists$ оракул $B : p^B \neq NP^B$:

Построим последовательность программ $q_1, q_2, q_3, \dots$
$T(q_i)$ - полином
$\forall L \in P : \exists i : q_i$ разрешает L

Рассмотрим все коды исходных программ, упорядочим их лексикографически и запустим

// n – это длина входа

	n	$2n^2$	$3n^3$	...	kn^k	...
p_1						
p_2						
$\dots$						
p_m					$p_m \mid TL = kn^k$	
$\dots$						

каждая из этих программ работает за полином

нумеруем эту табличку по диагонали

получим счётное множество пронумерованных программ

если программа не успела завершиться за TL, то говорим, что q_i возвращает 0

так же можем занумировать все программы с оракулами: $q_1^\bullet, q_2^\bullet, \dots, q_n^\bullet, \dots$

должны сделать $B : p^B \neq NP^B$

рассмотрим $B : U_B = \{x \mid \exists y : |x| = |y|, y \in B\}$

L $\forall B : U_B \in NP^B$

```
ub(x)
   y ← недетерминированно Sigma^|x|
   return check(y)
```

Построить $B : U_B \notin p^B$ (если построим такое B, то теорема БГС доказана)

$B_1 : q_1^{B_1}$ не распознавала U_{B_1}

запустим q_1 с оракулом и будем выступать в роли оракула

$q_1^\bullet(x_1)$: спрашивает оракула $?y_1 \to NO$ (пишем в map наши ответы)
$?y_2 \to NO \dots ?y_k \to NO$

// выберем $x_\cdot : T(q_1, x_1) < 2^{|x_1|}$

если результат программы $YES: \;\forall z \; |z| = |x_1| : z \notin B_1$
$NO: \;\exists z_1 : q_1^\bullet(x_1)$ не задала вопрос про $z_1, \; |z_1| = |x_1|; \; z_1 \in B_1$

$B_1 \to B_2$ $q_1^{B_2}$ не распознаёт $U_{B_2}, q_2^{B_2}$ не распознаёт U_{B_2}
$T(q_2^\bullet, x_2) < 2^{|x_2|}, |x_2| >$ максимальной длины, для которого известно принадлежность B_1

теперь запускаем $q_2(x_2)$: спрашивает у нас: если спрашивали уже про это слово, то я то же самое и отвечаю, если нет, отвечаю NO и записываю

B_k $\forall i \leqslant k : q_i^{B_k}$ не распознаёт U_{B_k}

опять находим x_k и запускаем

тот же самый подход, что и выше, при запуске

этот процесс продолжается до бесконечности

для ответа БГС возьмём $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$

// релятивизация – это *барьер* доказательства $P \neq NP$

Th *Ладнера*

$P \neq NP \implies \exists L : L \notin P, L \notin NPC, L \in NP$

> иллюстрация, **не** доказательство
>
> *Blowing Holes in SAT*
>
> координатная ось с итерированным логарифмом
>
> $1 \to 10 \to 10^{10} \to 10^{10^{10}}$
>
> выбираем нечётные промежутки
>
> $SAT0 = SAT \ \cap \ EVEN$
>
> $EVEN = \{x \mid log_{10}^*|x|$ чётен $\}$
>
> к нему сводится SAT:
>
> $\exists f : x \in SAT \iff f(x) \in SAT0$

так же, как в теореме БГС, у нас есть последовательность $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$, так же запускаем программу p_i с таймером jn^j и так же занумеровали программу по диагонали: $f_1 \dots f_i \dots$

все f_i работают за полином

$L = SAT \ \cap \ EVEN$ $(SAT \ \cap \ \{\phi \mid |\phi|$ в "чёрном" куске $\})$

рассмотрели первый чёрный кусок, префикса которого достаточно, чтобы программа q_1 не разрешала L за полином

теперь рассмотрим некст белый кусок: добьёмся того, чтобы сведение f_1 неправильно сводило SAT к нашему языку

занумеруем формулы по возрастанию длины и дальше лексикографически: $\phi_1, \phi_2, \dots$

$\phi_1 \xrightarrow{f_1} z_1$
$\phi_2 \to z_2$
$\dots$

найдётся формула $\phi_x \xrightarrow{f_1} z_x : \phi_x \in SAT \neq z_x = f_1(\phi_x) \in L$

найдётся такая ϕ_x потому, что если бы не нашлось, то получили бы противоречие в том, что SAT сводится за полиномальное время под действием f_1 к конечному языку

z_x лежит либо в первом чёрном отрезке, либо во втором белом

$n_2 = max(n_1 + 1, |z_x|)$

> **Lemma** $L \in NPC, F -$ конечный, $L \setminus F \in NPC$
> $L \leqslant L \setminus F$
>
> ```
> f(x):
>     if x in F
>         if x in L return YesWord
>         else return NoWord
>     else retun x
> ```

построим $BLACK$:

1. $x \in BLACK$ - зависит только ок $|X|$
2. $BLACK \in P$
3. $L \notin NPC, L \notin P$

разрешитель $BLACK$: (верно ли, что слова длины n принадлежат нашему языку, пусть работает за n)

```
black(x: String)
    a = black(|x|)
    return x in BLACK // основываясь на данных из массива а

black(n): List<Int>
// [n1, n2, ..., nk] - список всех границ, которые не превышают n
// ограничение по времени n^(большое число, пусть 100)
    if n = 0 return []
    a = black(n - 1)
    // black(n - 1) отработала за T ⩽ (n - 1)^100, T_left ⩾
n^99
    set Timer on n^99, if triggered return a
    if len(a) чётна:
        i = len(a) / 2 + 1
        for (phi - формула, |phi| ⩽ n):
            if (phi in SAT intersect BLACK ≠ q_i(phi))
                return a ++ [n]
    else // len(a) нечётна
        i = (len(a) - 1) / 2 + 1
        for (phi - формула, |f_i(phi)| ⩽ n):
            if (phi in SAT ≠ f_i(phi) in SAT intersect BLACK):
                return a ++ [n]
    return a
```

---

coNP

def $coNP = L \mid \overline{L} \in NP$

> **ex** $SAT \in NP,$
> $\overline{SAT} \in coNP$

> есть все слова Σ^*, среди них есть булевы формулы и давайте рассматривать только булевы формулы, они делятся на SAT и на $\overline{SAT}$, а на небулевы формулы забьём
>
> $\overline{SAT} = \{\phi \mid \forall\ \vec{x}\colon \phi(\vec{x}) = 0\}$

> **ex** $FACTORIZATION = \{\langle n, x\rangle \mid$ у $n\ \exists$ простой делитель $\leqslant x\} \in NP \cap coNP$
>
> (P candidate)

PSpace и PSpace полнота

def $PS = \cup_{p-polynom} DSPACE(p)$

$P \subset NP \subset PS \subset EXP$

def $L \in PSH : \forall A \in PS:\ A \leqslant L\ (f -$ за полином $x \in A \iff f(x) \in L)$

def $L \in PSC$: $1)\ L \in PSH$
$2) L \in PS$

> **ex** булевы формулы с квантора (матлог референс)
> $TQBF$ (True Quantified Boolean Formula) $= \{\phi \mid \phi -$ булева формула с кванторами, $Free(\phi) = \emptyset\ \ val(\phi) = 1\}$

TQBF in PSC

1. $TQBF \in PS$
   построим дерево разбора и храним множество значений текущих свободных переменных
2. $TQBF \in PSH$
   рассмотрим $L \in PS,\ L \leqslant TQBF$
   m - машина Тьюринга, разрешающая L, детерминированн, $S(m, x) \leqslant p(n)$ // $n = |x|$

   $m(x)\ \ q_o \vdash q_1 \vdash q_2 \vdash \ldots \vdash q_t$

   $f : x \to \phi$

   $\phi -$ истина $\iff m(x) = 1$

   $X_{ijc} -$ ячейка (i, j) содержит символ c

   $Q_i = [X_{i0c_1}, X_{i1c_1}, \ldots, X_{ip(n)c_1}, X_{i0c_2}, \ldots, X_{ip(n)c_2}]$

   $S(Q_0)\ \cap\ T(Q_t)\ \cap\ C\ \cap\ N$

   введём синтаскический сахар: $\exists(\forall)Q_i := \exists(\forall)X_{i0c_1}, \exists(\forall)\ldots$

   $Q_i \vdash Q_{i+1}$

   $\exists Q_0\ \exists Q_1\ ..\exists Q_t\ S(Q_0)\ \wedge\ T(Q_t)\ \wedge\ C\ \wedge\ Q_0 \vdash Q_1\ \wedge\ Q_1 \vdash Q_2\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ Q_{t-1} \vdash Q_t$

   выведенная формула плоха её длиной: $Q(Q_0),\ T(Q_t),\ Q_0 \vdash Q_1$ имеют длину $p(n)$, но последних кусков t, таким образом вся формула имеет длину $p(n)2^{q(n)}$, а это не полиномиальное сведение

   $Q \vdash R$

   $\vdash\ -$ булева формула от $2\ (p(n) + 1)\ z$ аргументов

   $Q \vdash R := Q \underbrace{\vdash U_1 \vdash U_2 \ldots \vdash U_{2^m-1} \vdash R}_{2^m}$

   $\vdash_m = \vdash^{2^m}$

$$Q \vdash_m R = \exists T \, (Q \vdash_{m-1} T \ \land \ T \vdash_{m-1} R)$$

$$Q \vdash_m R = \exists T \, \forall A \, \forall B \, (\neg (A \vdash_{m-1} B) \to (Q \neq A \lor B \neq T) \land (T \neq A \lor B \neq R))$$

$$len(m) = O(p(n)) + len(m-1) \implies len(m) = O(p(n)\ m)$$

□

// PS proof template: $PS \to TQBF \to L$

Th NSPACE(f(n)) subset DSPACE(f(n)^2)

$f(n) \geqslant log(n)$
$NSPACE(f(n)) \subset DSPACE(f(n)^2)$

Доказательство:

Пусть $L \in NSPACE(f(n))$ $\exists$ недетерминирванная машина Тьюринга $x \in L \iff \exists$ последовательность недетерминированных выборов, m(x) = 1
$S(m, x) \leqslant f(n), \ n = len(x)$

вход – лента машины Тьюринга со словом x
рабочая – лента машины Тьюринга с $f(n)$
конфигурация машины Тьбринга кодируется:$(pos, work)$, где $work = \alpha \#_p \beta$, длина $pos = log(n)$, а длина $work = f(n) + 1$, и тогда вся длина пары – $O(f(n))$

Существует ли последовательность переходов длиной $2^{c \ f(n)}$, которая q_0 переводит в допускающую конфигурацию q_t

заведём функцию (можно ли достичь): $Reach(q_s, q_t, k)$ (можно ли из q_s перейти за 2^k шагов до q_t ($q_s \vdash^{2^k} q_t$))

```
Reach(qs, qt, k):
    if (k = 0):
        return qs ⊢ qt
    for (qm - конфигурация машины Тьюринга m):
        if Reach(qs, qm, k - 1) and Reach (qm, qt, k - 1):
            return True
    return False
```

локальные переменные функции `Reach` занимают $f(n)$, суммарно памяти нам понадобится $O(k \ f(n))$

```
inL(x):
    qs - стартовая конфигурация m
    for (qt - допускающая конфиграция m):
        if Reach(qs, qt, c * f(|x|)):
            return 1
    return 0
```

q_s требует $f(n)$ памяти
вызов `Reach` требует $f(n)^2$ памяти
локальная переменная q_t требует $f(n)$ памяти

Следствие Th (*Сэвитча*)

$PS = NPS$

Сублинейная память

Полином памяти PS
Экспонента памяти $EXPSPACE$, $EXP \subset NEXP \subset EXPSPACE$

$DSPACE(f(n)), f(n) = \overline{\overline{o}}(n)$

Миниальный логичный класс возникающий - это $DSPACE(1)$ (в контексте машины Тьюринга можем хранить только состояние) $= Reg = NSPACE(1)$

$DSPACE(log\, n) = L$

$NSPACE(log\, n) = NL$

можно:

1. целочисленные переменные $value \leqslant n^c$ (константное количество)
2. массив bool: $len \leqslant c * log\, n$

нельзя:

1. массивы $\Omega(n)$
2. рекурсия $\Omega(n)$

> **ex** проверка на палиндром
>
> ```
> pal(s)
>    n = len(s)
>    for i = 0..n/2
>        if s[i] ≠ s[n - 1 - i]
>            return False
>        return True
> ```

> **ex** проверка пути в графе недетерминированно
>
> ```
> reach(G, s, t)
>  if (s = t) return True
>  n = num vert(G)
>  u = s
>  for i = 1..n
>      v = ? {1..n}
>      if uv not in E
>          return False
>      u = v
>      if u = t
>          return True
>  return False
> ```
>
> переменные `n, u, i, v` и на проверку `not in E` – константное количество размера n

$L \subset NL \subset DSPACE(log^2\, n) \subset PS$

stat NL subset P

$A \in NL$

$\exists$ машина Тюринга, разрешающая A

граф G, вершины – конфигурация m (state (const), pos (n), mem (const^(c log n))), рёбра – переходы m

полиномиальное количество состояний

m допускает x $\iff$ в G $\exists$ путь из (s, 1, 0...00) в вершину (допускающее, *, *)

$\forall A \in NL \;\; A \leqslant Reach$

$LOGSPACE$-сведение

def $A \leqslant_L B$, если $\exists f \; S(f, x) \leqslant c * log\,|x| \;\; : x \in A \iff f(x) \in B$

def A P-complete:

1. $A \in P$
2. $\forall B \in P : B \leqslant_L A$

def A NL-complete:

1. $A \in NL$
2. $\forall B \in NL : B \leqslant_L A$

можно переписать утверждение как $Reach \in NL - complete$

Th транзитивность LOGSPACE-сведения

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$

$x \in A \iff y \in B \iff z \in C$

g работает и умеет спрашивать i-ый символ слова y, в таком случае вызываем $f(x)$, получаем символ, всё остальное выбрасываем

итого памяти надо $mem(f) + mem(g) +$ служебные = логарифм памяти

Th CIRCVAL in P-complete

> $CIRCVAL = \{\langle C, \vec{x}\rangle \mid C$ - схема из функциональных элементов, $\vec{x}$ - входы, $C(\vec{x}) = 1\}$
>
> Не путать с $CIRCSAT = \{c \mid \exists\, \vec{x}\colon C(\vec{x}) = 1\}$

$CIRCVAL \in P$

докажем теперь, что все из P сводятся к ней (аналогично теореме Кука):

$A \in P$, m – детерминированная машина Тьюринга, m разрешает A, m работает за $p(n)$

$x \xrightarrow{f} C, \vec{x}$
$x \in A \iff C(\vec{x}) = 1$

Th (Иммермана) NL = coNL

> $coNL = \{A \mid \overline{A} \in NL\}$

$NReach = \{\langle G, s, t\rangle \mid$ в G не $\exists$ пути из $s \longrightarrow t\}$

```
NoPath(G, s, t, c) // c - количество вершин, достижимых из s
    for u = 1..n
        if (?) // достижима ли
            c--
            if not Reach(G, s, u)
                return False
            if (u == t)
                return False
    return c == 0
```

```
Next(G, s, c) → Int
// c - достижимы из s путями len ⩽ k
// возвращает достижимые из s путями len ⩽ k + 1
    r = 0
    for u = 1..n
        if u достижимо len ⩽ k || u достижимо len = k + 1
        // 1: for v → (?) достижимо или нет, если да, то
угадываем путь
        // 2: for v → (?) достижимо или нет, если да, то
угадываем путь
        // и перебираем рёбра
            r++
    return r
```

```
NReach(G, s, t)
    c = 1 // достижимые путями len ⩽ 0
    for i = 1..n - 1
        c = Next(G, s, c) // c: len ⩽ n - 1
    return NoPath(G, s, t, c
```

$coNL \subset NL$

$coNL = NL$

Sparse

def $Sparse$ (*редкие языки*) $= \{L \mid \exists$ полином $p\ \forall n\ |\Sigma^n \cap L| \ \leqslant p(n)\}$

// для каждой длины не больше полинома слов этой длины

ex *язык простых чисел, заданных в унарной системе счисления*: $Primes_1 = \{1^p \mid p -$ простое $\}$

ex $Fact_1 = \{\langle 1^n, 1^\alpha \rangle \mid d$ - минимальный делитель n $\}$

Th Бермана-Форчуна

$coNPC \cap Sparse \neq \emptyset \implies P = NP$

$S \in coNPC \cap Sparse \implies P = NP$

$\lhd\ TAUT \in coNPC$: f сводит $TAUT$ к S за q

```
taut(phi(x1, ..., xn)):
    if n == 0
        return eval(phi)

    phi1 = phi w/ x1 = 1
    phi0 = phi w/ x1 = 0

    if taut(phi1) and taut(phi0)
        return True
    return False
```

добавим меморизацию:

```
  // memorization
+ memo: set<formula> // формулы, которые точно являются тавтологиями

  taut(phi(x1, ..., xn)):
      if n == 0
          return eval(phi)

+     if phi in memo
+         return True

      phi1 = phi w/ x1 = 1
      phi0 = phi w/ x1 = 0

      if taut(phi1) and taut(phi0)
+         memo.add(phi)
          return True
      return False
```

$\phi \in TAUT \iff f(\phi) \in S$

$\phi \in memo \implies \phi \in TAUT$

давайте хранить теперь $f(\phi)$ вместо ϕ:

$z \in memo \implies z \in S \implies (z = f(\phi) \implies \phi \in TAUT)$

```
  // memorization
+ memo: set<string>

  taut(phi(x1, ..., xn)):
      if n == 0
          return eval(phi)

+     z = f(phi)
+     if z in memo
```

```
            return True

        phi1 = phi w/ x1 = 1
        phi0 = phi w/ x1 = 0

        if taut(phi1) and taut(phi0)
+           memo.add(z)
            return True
        return False
```

$|\phi| = L$

все формулы, от которых вызывается `taut` имеют длину $\leqslant L$

$|z| \leqslant q(L)$

$|S \cap \Sigma^n| \leqslant p(n)$

`memo.size()` $\leqslant \sum_{n=0}^{q(L)} p(n) \leqslant p(q(L)) * q(L) = r(L)$

`memo.size()` $\leqslant r(|\phi|)$

$\square$

Th Мэхэни

$NPC \cap Sparse \neq \emptyset \implies P = NP$

> $SAT \in NPC$
> $LSAT = \{\langle \phi(x_1, \dots, x_n), [y_1, \dots, y_n] \rangle \mid \exists z_1 \dots z_n : z_1 \dots z_n \leqslant y_1 \dots y_n, \phi(z_1, \dots, z_n) = 1\}$

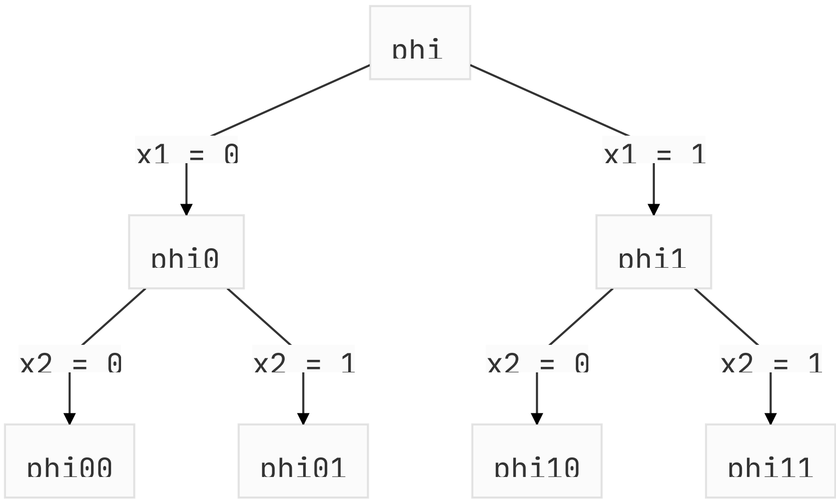
L $LSAT \in NPC$

1. $LSAT \in NP$ сертификат $\vec{z}$
2. $SAT \leqslant LSAT \quad \phi \in SAT \iff \langle \phi, [1...1] \rangle \in LSAT$

f сводит $LSAT$ к S: $\langle \phi, \vec{y} \rangle \iff f(\phi, \vec{y}) \in S$

$LSAT \overset{f}{\leqslant} S$

подобие поиска в ширину:



$[\phi_1, \phi_2, \phi_t]$
на каждом k-ом слое $n - k$ переменных
выберем одну переменную и положим их = 0 и = 1, положим в общую очередь

при $k = n$ в формулах 0 переменных, вычисляем слева направо, пока не найдём равное единице
не нашли – формула не удовлетворима, нашли – нашли минимальное лексикографически удовлетворяющее назначение ϕ

на очередном k-ом слое: $[\phi_1, \phi_2, \phi_t]$
для каждой формулы запишем $\vec{a}$ – вектор, откуда взялась эта формула
применим к парам
$z_i = f(\phi, \underbrace{\vec{a_i}\ 111...111}_{n}),\ \ldots$
$\vec{a_i}$ лежит на пути к минимальному лексикографически удовлетворяющему

$z_1 \notin S, z_2 \notin S,\ \ldots, z_i \in S, \ldots \in S$

$|\langle \phi, \underbrace{1..1}_{n} \rangle| = L$

$\phi_i(x_{k+1} \ldots x_n) \leqslant q(L)$

$|S \cap \Sigma^n| \leqslant p(n)$

различных $z_i \in S$ не больше $p(q(L)) * q(L)$

$z_k = z_j, k < j$
$j \neq i$
из пар равных оставим того, кто раньше

$z_{v_1}, z_{v_2}, \ldots, z_{v_u}$ – различны

если $u > p(q(L)) * q(L)$, то оставим последние $p(q(L)) * q(L)$

$t \leqslant 2 * p(q(L)) * q(L)$

всё время работы за полином, решили SAT за полином, получается $P = NP$

$\square$

полиномиальная иерархия

$\lhd NP$

$\Sigma_1 = \{L \mid \exists$ полином p, R (checker), выполняется за полином,

$x \in L \iff \exists y, |y| \leqslant p(|x|), R(x, y) = 1\}$

$\lhd coNP$

$\Pi_1 = \{L \mid \exists$ полином p, R, выполняется за полином

$(x \notin L \iff \exists y, |y| \leqslant p(|x|), R(x, y) = 1)$

$x \in L \iff \forall y, |y| \leqslant p(|x|), \overline{R}(x, y) = 1\}$

$\Sigma_k = \{L \mid \exists$ полином p, R (checker), выполняется за полином,

$x \in L \iff \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \ldots Q y_k, |y_i| \leqslant p(|x|), R(x, y_1, \ldots, y_k) = 1\}$

$\Pi_k = \{L \mid \exists$ полином p, R, выполняется за полином

$x \in L \iff \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \ldots Q y_k, |y_i| \leqslant p(|x|), \overline{R}(x, y_1, \ldots, y_k) = 1\}$

$k = 1 \to \Sigma_1 = NP,\ \Pi_1 = coNP$

$k = 0 \to \{L \mid \exists R$, вычислимое за полином, $x \in L \iff R(x)\}$, $\Sigma_0 = \Pi_0 = P$

$MinF = \{\phi \mid \phi$ – минимальная по длине булева формула для своей функции $\}$

$\phi \in MinF \iff \forall \psi$ (функция $\psi =$ функция $\phi \implies |\psi| \geqslant |\phi|$)

$(|\psi| \geqslant |\phi|) \vee$(функция $\psi \neq$ функция ϕ)

$(|\psi| \geqslant |\phi|) \vee (\exists x_1 \ldots x_n \phi(x_1 \ldots x_n) \neq \psi(x_1 \ldots x_n))$

$\phi \in MinF \iff \forall \psi \, \exists \, \vec{x} \, ((|\psi| \geqslant |\phi|) \vee \phi(x_1 \ldots x_n) \neq \psi(x_1 \ldots x_n))$

$MinF \in \Pi_2$