теория сложности

literature:

- Arora Barak "Complexity Modern Approach" (1st part)
- Garry Johnson "Трудно разрешенные задачи"
- site: compendium of NP-complete problems

outline:

- NP-полнота
  - Концепция недетерминированных вычислений
- Сведения
  - Теорема Кука-Левина
- язык CNFSAT
  - Теорема $CNFSAT \in NPC$
  - Теорема $CNFSAT \to 3SAT$
- Теорема $IND \in NPC$
- диагональный метод
  - теоремы об иерархии
    - Теорема о ёмкости иерархии
    - Теорема о временной иерархии
  - Теорема Бэйкера-Гилла-Соловэя (BGS)
  - Теорема Ладнера
- coNP
- PSPACE и PSPACE полнота
  - $TQBF \in PSC$
  - Теорема $NSPACE(f(n)) \subset DSPACE(f(n)^2)$
    - Следствие. Теорема Сэвитча
- Сублинейнай память
  - $NL \subset P$
  - Теорема транзитивности $LOGSPACE$-сведения
  - Теорема $CIRCVAL \in P$-*complete*
  - Теорема Иммермана ($NL = coNL$)
- Sparse
  - Th Бермана-Форчуна
  - Th Мэхэни
- Полиномиальная иерархия
- Схемная сложность
  - Схема из функциональных элементов
  - Программы с подсказками
    - Th P/poly = SIZE(poly)
    - Th Карпа-Липтона
  - Параллельные вычисления
- Вероятностные сложностные классы
  - Th Лаутемана
- Интерактивные доказательство

NP-полнота

Характеристики сложности вычисления.
Есть распознователи ($\Sigma^* \to B$) и преобразователи ($\Sigma^* \to \Sigma^*$)

- время: $T(n) = O(f(n))$
- память: $S(n)$
- random: $R(n)$

$DTIME(f) = \{L \mid \exists\, program\, p:$
$1.\ x \in L \implies p(X) = 1, x \notin L \implies p(x) = 0$
$2.\ n = |x| \implies T(p, x) = O(f(n))\}$

$h = (01)^* \in DTIME(n)$

$\widetilde{DTIME}(f) = \{h \mid \dots\}$

палинромы: $Pal \in DTIME_{RAM}(n)$
$Pal \notin DTIME_{TM}(n)$

$P = \cup_{f-polynom} DTIME(f) = \cup_{i=0}^{\infty} DTIME(n^i)$

$p(n)q(n) : p + q, p * q, p(q(n))$
$L_1 L_2 \in P : L_1 \cup L_2 \in P, L_1 \cap L_2 \in P, \overline{L_1} \in P, L_1 L_2 \in P, L_1^* \in P$

концепция недетрминированных вычислений

Допускается $\iff$ $\exists$ последовательность переходов, которая приводит к допуску
недетерминированння программа p(x) допускает $\iff$ $\exists$ последовательность недетерминированных выборов, приводящая к допуску
p(x) не допускает $\iff$ $\forall$ последовательности выборов не допуск

def *NTIME(f)* = $\{L \mid \exists$ недетерминированная программа p $1)\ p(x) - acc \iff x \in L;\ 2)\ T(p, x) = O(f(n))\}$

> **ex** задача о гамильтоновом цикле
>
> ```
> p(G)
>  vis[1..n]: arr of bool
>  s = 1
>  for i = 1..n
>      u = ?{1..n}
>      if (vis[u]) return false
>      if (su not in EG) return false
>      vis[u] = true
>      s = u
>  if (s ≠ 1) return false
>  return true
> ```

> **ex** `isComposite(z)`, $n = \lceil \log_B z \rceil$, где B - это основание системы счисления
>
> ```
> a = ?{2..z-1} // T = logn
> if z % a = 0  // poly(logn)
>  return true
> return false
> ```

Нельзя свопнуть бранчи и сделать проверку на простоту, потому что это `true` и `false` не симметричны в недетерминированных вычислениях (нельзя даже `isPrime(n): return !isComposite(n)`)

---

def *NP* = $\cup_{f-polynome} NTIME(f)$, *nondeterministic polynomial*
stat $P \subset NP$

? $P = NP$

неформально: класс P - класс задач, которые можно решить за полином, класс NP - класс задач, решение которых можно проверить за полином

Σ_1 - класс языков, в которых можно формализовать класс решения, которое можно проверить за полином
$\Sigma_1 = \{L \mid \exists$ полином p, работающая за полином программа R(x, y) - детерминированная
$x \in L \iff \exists\, y$ (называют *сертификат*): $|y| \le p(|x|)\ and\ R(x, y) = 1$
$x \notin L \implies \forall\, y\ (|y| \le p(|x|))\ R(x, y) = 0\}$

> **ex** гамильтонов цикл $Ham \in \Sigma_1$

```
R(G, y):
 y as arr[1..n] of int
 // we can add: y = ?arr[i..n] of {1..n} // O(n)
 vis = arr[1..n] of bool
 for i = 1..n
     if (y[i] y[i mod n+1] not in EG) return false
     if vis[y[i]] return false
     vis[y[i]] = true
 return true
```

Th $NP = \Sigma_1$

$L \in NP$, $L \in \Sigma_1$

неформально: NP - определение на языке недетерминированных формат, Σ_1 - определение на языке сертификатов

сведения

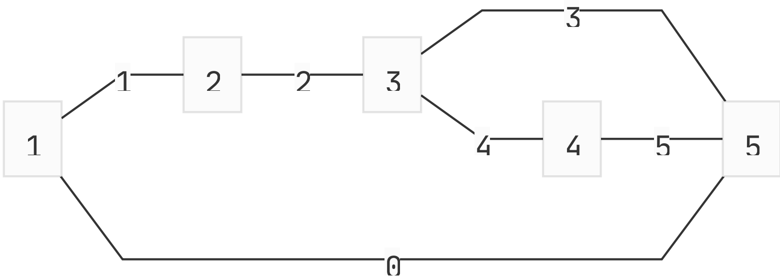
def сводим B к A *по Тьюрингу*: A, B - языки, C - сложностный класс, $B \in C^A$ (C *с оракулом* A). не считая вызова функции `isInA(x): Bool`, остальные ограничения класса C учитываются.

def сведение по *Куку-Левину* *(Тьюрингу за полином)* $B \in P^A$

def *сведене по Карпу* *(m-сведение)*: язык B сводится к A ($B \leq A$), если $\exists$ вычислимая за полином функция f такая, что $x \in B \iff f(x) \in A$

ex $IND = \{\langle G, k \rangle | \text{ в } G\ d$ независимое множество размера k }
$CLIQUE = \{\langle G, k \rangle |$ в $G \exists$ клика размера k}
$IND \leq CLIQUE$
$f(\langle G, k \rangle) = \langle \overline{G}, k \rangle$ // за полином
в G и множестве размера k $\iff$ в $\overline{G}$ $\exists$ клика размера k
$VCOVER = \{\langle G, k \rangle |$ в G $\exists$ вершинное покрытие размера k }
$IND \leq VCOVER$
$f(\langle G, k \rangle) = \langle G, n - k \rangle$, где n - число вершин G

ex $SUBSETSUM = \{\langle [x_1, x_2, \dots, x_n], s \rangle \mid \exists I \subset \{1, 2, \dots, n\}, \sum_{i \in I} = s, x_i \in \mathbb{N}\}$
`dp[i][w]` - можно ли первые i $\Sigma = w$ // w - $2^{|s|}$
$VCOVER \leq SUBSETSUM$
пронумеруем вершины с единицы, рёбра – с нуля, битовыми масками каждой вершине сопоставляем рёбра



	6	5	4	3	2	1	0
x_1	1	0	0	0	0	1	1
x_2	1	0	0	0	1	1	0
x_3	1	0	1	1	1	0	0
x_4	1	1	1	0	0	0	0

	6	5	4	3	2	1	0
x_5	1	1	0	1	0	0	1
s	3	2	2	2	2	2	2

$x_6 = 1$
$x_7 = 10$
$x_8 = 100$
$x_9 = 1000$
$x_{10} = 10000$
$x_{11} = 100000$
$f(\langle G, k\rangle)$, n - число вершин, m - число рёбер, $s = k22...2$, m двоек

f сводит VCOVER к SUBSETSUM

$\Rightarrow$: в G $\exists$ вершинное погрытие размера k

$\Leftarrow$: $[x_1 \dots, x_{n+n}], s$ $\exists$ решение $\Rightarrow$ в G $\exists$ вершинное покрытие размера k

def язык называется NP-hard (*NP-трудный*), если выполнены следующие условия:

$\forall B \in NP : B \leq A$

def A называется NP-complete (*NP-полный*), если:

1) $A \in NPH$

2) $A \in NP$

// $NPC = NPH \cap NP$

ex BH_{1N} (bounded halting unary nondeterministic)

$BH_{1N} = \{\angle m, x, 1^t\rangle$ | m – недетрминированн машина тьюринга, x – вход, t – ограничение времени: $\exists$ последовательность недетерминированн выборов машины Тьюринга m, что она допускается за t шагов: `m(x) = 1`}

Th $BH_{1N} \leq NPC$

1. $BH_{1N} \in NPH$

   $A \in NP$

   // def по Карпу

   m_A - недетерминированн машина Тьюринга, решающая A за полином $p(n) = cn^k$

   $f(x) = \langle m_A, x, q^{p(|x|)}\rangle$

   $x \in A \iff \exists$ последовательность выборов $m_A(x) = 1$ (за $p(|x|)$)
2. $BH_{1N} \in NP$

L $A \leqslant^k B, B \leqslant^k C \implies A \leqslant^k C$

$x \xrightarrow{t} f(x) \xrightarrow{t} g(f(x))$

con $A \in NPH, A \leqslant B \implies B \in NPH$

stat если $B \leqslant A$, $A \in NPH$

$NP \xrightarrow{t} BH_{1N} \xrightarrow{t} SAT$

def $SAT = \{\phi(x_q \dots x_n) \mid \exists x_1 \dots x_n \; \phi(x_1 \dots x_n) = 1, \phi -$ бф $\}$

Th *(Кук, Левин)* SAT in NPC

$SAT \in NPC$

$BH_{1N} \leqslant SAT$

$\langle m, x, 1^t\rangle \overset{f}{\mapsto} \phi$

ϕ удовлетворяет $\iff$ $\exists$ последовательность недетерминированных выборов $m(x) = 1$, за время t

больше t шагов не будет, есть мгновенные описания машины $\alpha\#_q\beta$

дополним описания до длины t + 1

$q_0 \vdash q_1 \vdash \dots \vdash q_t$

табло вычислений: первая строка - стартовое состояние, $i \to i+1, q_i \vdash q_{i+1}$, допуск: последовательность до $\#_{acc}$

$\langle m, x, 1^t\rangle \in BH_{1N} \iff \exists$ допускающее табло вычислений

количество состояний $|Q| = z$, множество ленточного алфавита $|PT| = y$, $z + y = k$

заведём $(t+1)^2k$ переменных, x_{ijc} - верно ли, что в табло в i-й j-й ячейке записан символ 'c'

$\phi(x_{ijc}) = C \wedge S \wedge T \wedge N$

$C = \wedge i, j = 0..t \vee_C ((\wedge \neg X_{ij\alpha}) \wedge X_{ijc})$

$S = X_{00\#_s} \wedge X_{01x_1} \wedge X_{02x_2} \wedge \ldots \wedge X_{0nx_n} \wedge X_{0(n+1)B} \wedge \ldots$

$T = X_{t0\#x} \vee X_{t1\#_y} \vee \ldots \vee X_{tt\#_y}$

$N = (\wedge_{i,j} \wedge_{c_1c_2c_3c_3 \notin Q} X_{i-1,j-1,c_1} \wedge X_{i-1,j,c_2} \wedge X_{i,j+1,c_3} \wedge X_{i,j,c_4} \to c_1 = c_4) \wedge_{ijx} \wedge_{c_1 \ldots c_6 \ldots}$ допустимы

$qed \, \square$

язык CNFSAT

def $CNFSAT = \{\phi \mid \phi$ в КНФ, $\phi \in SAT\}$
$(x_i \vee \neg x_j \ldots) \wedge (\vee \vee \vee) \wedge (\vee)$
clause (клоз)
ex 2-SAT (ровно две) HornSAT (не более одной без отрицания)

Th CNFSAT in NPC

1. $CNFSAT \in NP$
2. $CNFSAT \in NPH$
   $SAT \leqslant CNFSAT$
   $\phi \overset{f \ (polynomial \ time)}{\longrightarrow} \psi$
   $\phi \in SAT \iff \psi = f(\psi) \in CNFSAT$

базис: $\wedge, \vee, \neg$

строим дерево разбора нашей формулы ϕ:

- если у neg сын neg, то можем удалить
- neg -> and/or => neg <- and/or -> neg neg

каждому поддереву соответствует преобразованная подформула $\phi_i(x_{i_1} \ldots x_{i_k})$, хотим построить следующее: $\psi_i(x_{i_1} \ldots x_{i_k}, y_1 \ldots y_{i_t})$
$\phi(\overline{X}) = 1 \implies \exists \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y}) = 1$
$\phi(\overline{X}) = 0 \implies \forall \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y}) = 0$

вершина	brand new ψ
X	$\phi = X, \psi = X$
neg X	$\phi = \neg X, \psi = \neg X$
and	$\phi_1 \wedge \phi_2, \psi_1 \wedge \psi_2$
or	$\psi_1 \vee \psi_2$ не можем написать, потому что это не будет в КНФ новая переменная z: $(\psi_1 \vee z) \wedge (\psi_2 \vee \neg z)$

> получается, что число клозов равно числу листьев
> внутри каждого клоза число вхождений равно число переменных + или

#clauses = #leaves
#entries = #vars + #or
poly

$\square \, qed$

Th CNFSAT to 3SAT

> $3SAT = CNFSAT \wedge 3CNF$

1. $3SAT \in NP$
2. $3SAT \in NPH$
   $CNFSAT \leqslant 3SAT$

ψ	X
$(x \vee y \vee u) \wedge (x \vee y \vee \neg u)$	$x \vee y$
ok	$x \vee y \vee z$
вспомогательные переменные k - 3 новые перменные: $(x_1 \vee x_2 \vee t_1) \wedge (\neg t_1 \vee x_3 \vee t_2) \wedge (\neg t_2 \vee x_2 \vee t_3) \wedge \ldots \wedge (\neg t_{k-3} \vee x_{k-1} \vee x_k)$	$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k, k > 3$

$\square \, qed$

3SAT - superstar

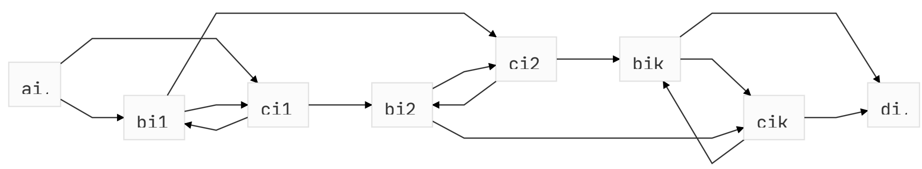
Th IND in NPC

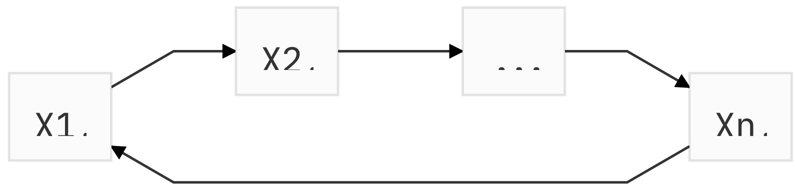
дана формула ϕ в 3КНФ, мы хотим вывести граф G и число k, такие что ϕ удовлетворима тогда и только тогда, когда в графе есть независимое множество размера k
$\phi \in 3SAT \iff \langle G, k \rangle \in IND$

в ϕ k clauses, граф построим из k triangles
в вершинах переменные, соответствующие claus'ам
соединим переменные с их отрицанием

$HAM = \{G \mid G-$ ориентированный граф, содержит Гамильтонов цикл$\}$
$HAM \in NP$
$HAM \in NPH$

$\phi(x_1 x_2 \dots x_n)$ k clauses
$x_i \to 2k+2$ вершины





где X - это компонента предыдущего вида

диагональный метод

теоремы об иерахии

$$DSPACE(f) = \{L \mid \exists \text{ программа p: } \begin{array}{l} x \in L \implies p(x) = 1 \; S(p,x) = O(f(n)) \\ x \notin L \implies p(x) = 0 \end{array}\}$$

$PSACE = \cup_{p-polynom} DSPACE(p)$

Th NP subset PS subset EXP

thesis если p запускает q, q использует $O(f)$ памяти, то p может тоже для этого использовать$O(f)$ памяти

Th о ёмкости иерархии

$\frac{f}{g} \to 0$ тогда $\exists L : L \in DSPACE(g) \backslash DSPACE(f)$

$h = \sqrt{fg}, \;\; \frac{h}{g} \to 0, \;\; \frac{f}{h} \to 0$

$n = |\langle p, x \rangle|$

$L = \{\langle p, x \rangle \mid$ неверно, что $(p(\langle p, x \rangle) = 1,$ использовав $h(n)$ памяти $)\}$

$L \in DSPACE(g)$

Пусть $L \notin DSPACE(f)$, q - разрешает L, используя $\leqslant cf(n)$, рассмотрим $n_0 : h(n_0) > cf(n_0)$, $n_0 > |q|$

рассмотрим $x : |\langle q, x \rangle| = n_0$

$q(\langle q, x \rangle) = \; ?$

$q(\langle q, x \rangle) = q \implies \langle q, x \rangle \in L \implies !(q(\langle q, x \rangle) = 1 \; and \; S(q, \langle q, x \rangle) \leqslant cf(n) \langle h(n_0)) \implies q(\langle q, x \rangle) = 0$

$q(\langle q, x\rangle) = 0 \implies \langle q, x\rangle \notin L \implies q(\langle q, x\rangle) = 1$

Th о временной иерархии

DSPACE -> DTIME, память -> время

ломается немного первая часть, так что новое условие:

$\frac{f}{g} \to 0, \exists h : \frac{f}{h} \to 0, \frac{sim(h)}{g} \to 0.$ $(sim(h) = O(g))$ (где $sim(f)$ - за сколько можно просимулировать программу, работающую за f) тогда $\exists L : L \in DTIME(g) \backslash DTIME(f)$

$h = \sqrt{fg}, \ \frac{h}{g} \to 0, \ \frac{f}{h} \to 0$

$n = |\langle p, x\rangle|$

$L = \{l \angle p, x\rangle \mid$ неверно, что $(p(\langle p, x\rangle) = 1$, использовав $h(n)$ времени $)\}$

$L \in DTIME(g)$

Пусть $L \notin DTIME(f)$, q - разрешает L, используя $\leqslant cf(n)$, рассмотрим $n_0 : h(n_0) > cf(n_0)$, $n_0 > |q|$

рассмотрим $x : |\langle q, x\rangle| = n_0$

> **Implies** $P \neq EXP$
>
> $f = n^{\log_2 n} = 2^{(\log_2 n)^2}$
> $g = 2^n$
> $\frac{f}{g} \to 0 \implies \exists L \in DTIME(g) \backslash DTIME(f)$ (первая часть $\implies L \in EXP$, вторая – $\implies L \notin P$)

Th (Бейкер, Гилл, Соловэй) BGS

$u = \{\langle p, x\rangle | \ p(x) = 1\}$
$uni(p, x) \to$ останавливается ли p на x

Вычисления с оракулом p^A – p с оракулом A

$\exists$ оракул $A : p^A = NP^A$
$\exists$ оракул $B : p^B \neq NP^B$

// **релятивизуется**, если доказательство остаётся верным, если всему фиксированному в программе добавить оракул

рассмотрим $A \in PSC$

$p^A \overset{1}{\subset} NP^A \overset{2}{\subset} PS^A \overset{3}{\subset} PS \overset{4}{\subset} P^A$:

1. любая недетерминированння программа частный случай детерминированной
2. релятивизуется
3. можем заменить вызов оракула на процедуру проверки
4. потому что взяли PSpace полный, любой сводится за полином и спросим у оракула

B $\ U_B = \{x \mid \exists y \in B \ \ |x| = |y|\}$

L $\forall B \ U_b \in NP^B$

Придумаем $B : U_B \notin P^B$

Теперь рассмотрим часть $\exists$ оракул $B : p^B \neq NP^B$:

Построим последовательность программ $q_1, q_2, q_3, \ldots$
$T(q_i)$ - полином
$\forall L \in P : \exists i : q_i$ разрешает L

Рассмотрим все коды исходных программ, упорядочим их лексикографически и запустим

// n - это длина входа

	n	$2n^2$	$3n^3$	...	kn^k	...
p_1						
p_2						
$\ldots$						
p_m					$p_m \mid TL = kn^k$	
$\ldots$						

каждая из этих программ работает за полином

нумеруем эту табличку по диагонали

получим счётное множество пронумерованных программ

если программа не успела завершиться за TL, то говорим, что q_i возвращает 0

так же можем занумировать все программы с оракулами: $q_1^\bullet, q_2^\bullet, \dots, q_n^\bullet, \dots$

должны сделать $B : p^B \neq NP^B$

рассмотрим $B : U_B = \{x \mid \exists y : |x| = |y|, y \in B\}$

L $\forall B : U_B \in NP^B$

> ```
> ub(x)
>    y ← недетерминированно Sigma^|x|
>    return check(y)
> ```

Построить $B : U_B \notin p^B$ (если построим такое B, то теорема БГС доказана)

$B_1 : q_1^{B_1}$ не распознавала U_{B_1}

запустим q_1 с оракулом и будем выступать в роли оракула

$q_1^\bullet(x_1)$: спрашивает оракула $?y_1 \to NO$ (пишем в map наши ответы) $?y_2 \to NO \dots ?y_k \to NO$

// выберем $x_\cdot : T(q_1, x_1) < 2^{|x_1|}$

если результат программы $YES: \ \forall z\ |z| = |x_1| : z \notin B_1$
$NO: \ \exists z_1 : q_1^\bullet(x_1)$ не задала вопрос про $z_1, \ |z_1| = |x_1|; \ z_1 \in B_1$

$B_1 \to B_2\ q_1^{B_2}$ не распознаёт $U_{B_2}, q_2^{B_2}$ не распознаёт U_{B_2}
$T(q_2^\bullet, x_2) < 2^{|x_2|}, |x_2| >$ максимальной длины, для которого известно принадлежность B_1

теперь запускаем $q_2(x_2)$: спрашивает у нас: если спрашивали уже про это слово, то я то же самое и отвечаю, если нет, отвечаю NO и записываю

$B_k\ \forall i \leqslant k : q_i^{B_k}$ не распознаёт U_{B_k}

опять находим x_k и запускаем

тот же самый подход, что и выше, при запуске

этот процесс продолжается до бесконечности

для ответа БГС возьмём $B = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$

// релятивизация - это *барьер* доказательства $P \neq NP$

Th *Ладнера*

$P \neq NP \implies \exists L : L \notin P, L \notin NPC, L \in NP$

> иллюстрация, **не** доказательство
>
> *Blowing Holes in SAT*
>
> координатная ось с итерированным логарифмом
>
> $1 \to 10 \to 10^{10} \to 10^{10^{10}}$
>
> выбираем нечётные промежутки
>
> $SAT0 = SAT\ \cap\ EVEN$
>
> $EVEN = \{x \mid log_{10}^*|x|$ чётен $\}$
>
> к нему сводится SAT:
>
> $\exists f : x \in SAT \iff f(x) \in SAT0$

так же, как в теореме БГС, у нас есть последовательность $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$, так же запускаем программу p_i с таймером jn^j и так же занумеровали программу по диагонали: $f_1 \dots f_i \dots$

все f_i работают за полином

$L = SAT\ \cap\ EVEN\ (SAT\ \cap\ \{\phi \mid |\phi|$ в "чёрном" куске $\})$

рассмотрели первый чёрный кусок, префикса которого достаточно, чтобы программа q_1 не разрешала L за полином теперь рассмотрим некст белый кусок: добъёмся того, чтобы сведение f_1 неправильно сводило SAT к нашему языку

занумеруем формулы по возрастанию длины и дальше лексикографически: $\phi_1, \phi_2, \dots$

$\phi_1 \xrightarrow{f_1} z_1$
$\phi_2 \to z_2$
$\dots$

найдётся формула $\phi_x \xrightarrow{f_1} z_x : \phi_x \in SAT \neq z_x = f_1(\phi_x) \in L$

найдётся такая ϕ_x потому, что если бы не нашлось, то получили бы противоречие в том, что SAT сводится за полиномальное время под действием f_1 к конечному языку

z_x лежит либо в первом чёрном отрезке, либо во втором белом
$n_2 = max(n_1 + 1, |z_x|)$

> **Lemma** $L \in NPC, F-$ конечный, $L \setminus F \in NPC$
> $L \leqslant L \setminus F$
>
> ```
> f(x):
>     if x in F
>         if x in L return YesWord
>         else return NoWord
>     else retun x
> ```

построим $BLACK$:

1. $x \in BLACK$ - зависит только ок $|X|$
2. $BLACK \in P$
3. $L \notin NPC, L \notin P$

разрешитель $BLACK$: (верно ли, что слова длины n принадлежат нашему языку, пусть работает за n)

```
black(x: String)
    a = black(|x|)
    return x in BLACK // основываясь на данных из массива a

black(n): List<Int>
// [n1, n2, ..., nk] - список всех границ, которые не превышают n
// ограничение по времени n^(большое число, пусть 100)
    if n = 0 return []
    a = black(n - 1)
    // black(n - 1) отработала за T ⩽ (n - 1)^100, T_left ⩾ n^99
    set Timer on n^99, if triggered return a
    if len(a) чётна:
        i = len(a) / 2 + 1
        for (phi - формула, |phi| ⩽ n):
            if (phi in SAT intersect BLACK ≠ q_i(phi))
                return a ++ [n]
    else // len(a) нечётна
        i = (len(a) - 1) / 2 + 1
        for (phi - формула, |f_i(phi)| ⩽ n):
            if (phi in SAT ≠ f_i(phi) in SAT intersect BLACK):
                return a ++ [n]
    return a
```

---

coNP

def $coNP = L \mid \overline{L} \in NP$

> **ex** $SAT \in NP$,
> $\overline{SAT} \in coNP$
> есть все слова Σ^*, среди них есть булевы формулы и давайте рассматривать только булевы формулы, они делятся на SAT и на $\overline{SAT}$, а на небулевы формулы забьём
>
> $\overline{SAT} = \{\phi \mid \forall\, \vec{x} \colon \phi(\vec{x}) = 0\}$

> **ex** $FACTORIZATION = \{\langle n, x\rangle \mid$ у n $\exists$ простой делитель $\leqslant x\} \in NP \cap coNP$

> (P candidate)

PSpace и PSpace полнота

def $PS = \cup_{p-polynom} DSPACE(p)$

$P \subset NP \subset PS \subset EXP$

def $L \in PSH : \forall A \in PS: \ A \leqslant L \ (f$ – за полином $x \in A \iff f(x) \in L)$

def $L \in PSC$: 1) $L \in PSH$
2)$L \in PS$

> **ex** булевы формулы с квантора (матлог референс)
> $TQBF$ (True Quantified Boolean Formula) $= \{\phi \mid \phi$ – булева формула с кванторами,
> $Free(\phi) = \emptyset \ \ val(\phi) = 1\}$

TQBF in PSC

1. $TQBF \in PS$
   построим дерево разбора и храним множество значений текущих свободных переменных
2. $TQBF \in PSH$
   рассмотрим $L \in PS, \ L \leqslant TQBF$
   m - машина Тьюринга, разрешающая L, детерминированння, $S(m, x) \leqslant p(n)$ // $n = |x|$

   $m(x) \ \ q_o \vdash q_1 \vdash q_2 \vdash \ldots \vdash q_t$

   $f: x \to \phi$

   ϕ – истина $\iff m(x) = 1$

   X_{ijc} – ячейка (i, j) содержит символ c

   $Q_i = [X_{i0c_1}, X_{i1c_1}, \ldots, X_{ip(n)c_1}, X_{i0c_2}, \ldots, X_{ip(n)c_2}]$

   $S(Q_0) \ \cap \ T(Q_t) \ \cap \ C \ \cap \ N$

   введём синтаскический сахар: $\exists(\forall)Q_i := \exists(\forall)X_{i0c_1}, \exists(\forall)\ldots$

   $Q_i \vdash Q_{i+1}$

   $\exists Q_0 \ \exists Q_1 \ ..\exists Q_t \ S(Q_0) \ \wedge \ T(Q_t) \ \wedge \ C \ \wedge \ Q_0 \vdash Q_1 \ \wedge \ Q_1 \vdash Q_2 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ Q_{t-1} \vdash Q_t$

   выведенная формула плоха её длиной: $Q(Q_0)$, $T(Q_t)$, $Q_0 \vdash Q_1$ имеют длину $p(n)$, но последних кусков t, таким образом вся формула имеет длину $p(n)2^{q(n)}$, а это не полиномиальное сведение

   $Q \vdash R$

   $\vdash$ – булева формула от $2 \ (p(n) + 1) \ z$ аргументов

   $Q \vdash R := Q\underbrace{\vdash U_1 \vdash U_2 \ldots \vdash U_{2^m - 1} \vdash R}_{2^m}$

   $\vdash_m = \vdash^{2^m}$

   $Q \vdash_m R = \exists \, T \ (Q \vdash_{m-1} T \ \wedge \ T \vdash_{m-1} R)$

   $Q \vdash_m R = \exists \, T \, \forall A \, \forall B \, (\neg(A \vdash_{m-1} B) \to (Q \neq A \vee B \neq T) \wedge (T \neq A \vee B \neq R))$

   $len(m) = O(p(n)) + len(m-1) \implies len(m) = O(p(n) \ m)$

□

// PS proof template: $PS \to TQBF \to L$

Th NSPACE(f(n)) subset DSPACE(f(n)^2)

$f(n) \geqslant log(n)$
$NSPACE(f(n)) \subset DSPACE(f(n)^2)$

Доказательство:

Пусть $L \in NSPACE(f(n))$ $\exists$ недетерминирванная машина Тьюринга $x \in L \iff \exists$ последовательность недетерминированных выборов, m(x) = 1
$S(m, x) \leqslant f(n), \ n = len(x)$

вход – лента машины Тьюринга со словом x
рабочая – лента машины Тьюринга с $f(n)$
конфигурация машины Тьбринга кодируется:$(pos, work)$, где $work = \alpha\#_p\beta$, длина $pos = log(n)$, а длина $work = f(n) + 1$, и тогда вся длина пары – $O(f(n))$

Существует ли последовательность переходов длиной $2^{c\,f(n)}$, которая q_0 переводит в допускающую конфигурацию q_t

заведём функцию (можно ли достичь): $Reach(q_s, q_t, k)$ (можно ли из q_s перейти за 2^k шагов до q_t ($q_s \vdash^{2^k} q_t$))

```
Reach(qs, qt, k):
    if (k = 0):
        return qs ⊢ qt
    for (qm - конфигурация машины Тьюринга m):
        if Reach(qs, qm, k - 1) and Reach (qm, qt, k - 1):
            return True
    return False
```

локальные переменные функции `Reach` занимают $f(n)$, суммарно памяти нам понадобится $O(k\,f(n))$

```
inL(x):
    qs - стартовая конфигурация m
    for (qt - допускающая конфиграция m):
        if Reach(qs, qt, c * f(|x|)):
            return 1
    return 0
```

q_s требует $f(n)$ памяти
вызов `Reach` требует $f(n)^2$ памяти
локальная переменная q_t требует $f(n)$ памяти

Следствие Th (*Сэвитча*)

$PS = NPS$

Сублинейная память

Полином памяти PS
Экспонента памяти $EXPSPACE$, $EXP \subset NEXP \subset EXPSPACE$

$DSPACE(f(n)), f(n) = \overline{\overline{o}}(n)$

Миниальный логичный класс возникающий - это $DSPACE(1)$ (в контексте машины Тьюринга можем хранить только состояние) $= Reg = NSPACE(1)$

$DSPACE(log\, n) = L$

$NSPACE(log\, n) = NL$

можно:

1. целочисленные переменные $value \leqslant n^c$ (константное количество)
2. массив bool: $len \leqslant c * log\, n$

нельзя:

1. массивы $\Omega(n)$
2. рекурсия $\Omega(n)$

> **ex** проверка на палиндром
>
> ```
> pal(s)
>    n = len(s)
>    for i = 0..n/2
>        if s[i] ≠ s[n - 1 - i]
>            return False
>        return True
> ```

> **ex** проверка пути в графе недетерминированно

> ```
> reach(G, s, t)
>  if (s = t) return True
>  n = num vert(G)
>  u = s
>  for i = 1..n
>      v = ? {1..n}
>      if uv not in E
>          return False
>      u = v
>      if u = t
>          return True
>  return False
> ```
>
> переменные `n, u, i, v` и на проверку `not in E` – константное количество размера n

$L \subset NL \subset DSPACE(log^2\ n) \subset PS$

stat NL subset P

$A \in NL$

$\exists$ машина Тюринга, разрешающая A

граф G, вершины - конфигурация m (state (const), pos (n), mem (const^(c log n))), рёбра - переходы m

полиномиальное количество состояний

m допускает x $\iff$ в G $\exists$ путь из (s, 1, 0…00) в вершину (допускающее, *, *)

$\forall A \in NL\ \ A \leqslant Reach$

$LOGSPACE$-сведение

def $A \leqslant_L B$, если $\exists f\ S(f, x) \leqslant c * log\,|x| \quad : x \in A \iff f(x) \in B$

def A P-complete:

1. $A \in P$
2. $\forall B \in P : B \leqslant_L A$

def A NL-complete:

1. $A \in NL$
2. $\forall B \in NL : B \leqslant_L A$

можно переписать утверждение как $Reach \in NL - complete$

Th транзитивность LOGSPACE-сведения

$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$

$x \in A \iff y \in B \iff z \in C$

g работает и умеет спрашивать i-ый символ слова y, в таком случае вызываем $f(x)$, получаем символ, всё остальное выбрасываем

итого памяти надо $mem(f) + mem(g) +$ служебные = логарифм памяти

Th CIRCVAL in P-complete

> $CIRCVAL = \{\langle C, \vec{x}\rangle \mid C$ - схема из функциональных элементов, $\vec{x}$ - входы, $C(\vec{x}) = 1\}$
> Не путать с $CIRCSAT = \{c \mid \exists\ \vec{x}\colon C(\vec{x}) = 1\}$

$CIRCVAL \in P$

докажем теперь, что все из P сводятся к ней (аналогично теореме Кука):

$A \in P$, m – детерминированная машина Тьюринга, m разрешает A, m работает за $p(n)$

$x \xrightarrow{f} C, \vec{x}$
$x \in A \iff C(\vec{x}) = 1$

Th (Иммермана) NL = coNL

> $coNL = \{A \mid \overline{A} \in NL\}$

$NReach = \{\langle G, s, t\rangle \mid$ в G не $\exists$ пути из $s \longrightarrow t\}$

```
NoPath(G, s, t, c) // c - количество вершин, достижимых из s
    for u = 1..n
        if (?) // достижима ли
            c--
            if not Reach(G, s, u)
                return False
            if (u == t)
                return False
    return c == 0
```

```
Next(G, s, c) → Int
// c - достижимы из s путями len ⩽ k
// возвращает достижимые из s путями len ⩽ k + 1
    r = 0
    for u = 1..n
        if u достижимо len ⩽ k || u достижимо len = k + 1
        // 1: for v → (?) достижимо или нет, если да, то угадываем путь
        // 2: for v → (?) достижимо или нет, если да, то угадываем путь
        // и перебираем рёбра
            r++
    return r
```

```
NReach(G, s, t)
    c = 1 // достижимые путями len ⩽ 0
    for i = 1..n - 1
        c = Next(G, s, c) // c: len ⩽ n - 1
    return NoPath(G, s, t, c
```

$coNL \subset NL$

$coNL = NL$

Sparse

def *$Sparse$ (редкие языки)* = $\{L \mid \exists$ полином $p\, \forall n\, |\Sigma^n \cap L| \leqslant p(n)\}$

// для каждой длины не больше полинома слов этой длины

ex *язык простых чисел, заданных в унарной системе счисления*: $Primes_1 = \{1^p \mid p -$ простое $\}$

ex $Fact_1 = \{\langle 1^n, 1^d\rangle \mid d$ - минимальный делитель n $\}$

Th Бермана-Форчуна

$coNPC \cap Sparse \neq \emptyset \implies P = NP$

$S \in coNPC \cap Sparse \implies P = NP$

$\lhd\, TAUT \in coNPC$: f сводит $TAUT$ к S за q

```
taut(phi(x1, ..., xn)):
    if n == 0
        return eval(phi)

    phi1 = phi w/ x1 = 1
    phi0 = phi w/ x1 = 0

    if taut(phi1) and taut(phi0)
        return True
    return False
```

добавим меморизацию:

```
  // memorization
+ memo: set<formula> // формулы, которые точно являются тавтологиями

  taut(phi(x1, ..., xn)):
      if n == 0
          return eval(phi)

+     if phi in memo
+         return True

      phi1 = phi w/ x1 = 1
      phi0 = phi w/ x1 = 0

      if taut(phi1) and taut(phi0)
+         memo.add(phi)
          return True
      return False
```

$\phi \in TAUT \iff f(\phi) \in S$

$\phi \in memo \implies \phi \in TAUT$

давайте хранить теперь $f(\phi)$ вместо ϕ:

$z \in memo \implies z \in S \implies (z = f(\phi) \implies \phi \in TAUT)$

```
  // memorization
+ memo: set<string>

  taut(phi(x1, ..., xn)):
      if n == 0
          return eval(phi)

+     z = f(phi)
+     if z in memo
          return True

      phi1 = phi w/ x1 = 1
      phi0 = phi w/ x1 = 0

      if taut(phi1) and taut(phi0)
+         memo.add(z)
          return True
      return False
```

$|\phi| = L$
все формулы, от которых вызывается `taut` имеют длину $\leqslant L$
$|z| \leqslant q(L)$
$|S \cap \Sigma^n| \leqslant p(n)$
`memo.size()` $\leqslant \sum_{n=0}^{q(L)} p(n) \leqslant p(q(L)) * q(L) = r(L)$

`memo.size()` $\leqslant r(|\phi|)$

$\square$

Th Мэхэни

$NPC \cap Sparse \neq \emptyset \implies P = NP$

> $SAT \in NPC$
> $LSAT = \{\langle \phi(x_1, \ldots, x_n), [y_1, \ldots, y_n] \rangle \mid \exists z_1 \ldots z_n : z_1 \ldots z_n \leqslant y_1 \ldots y_n, \phi(z_1, \ldots, z_n) = 1\}$

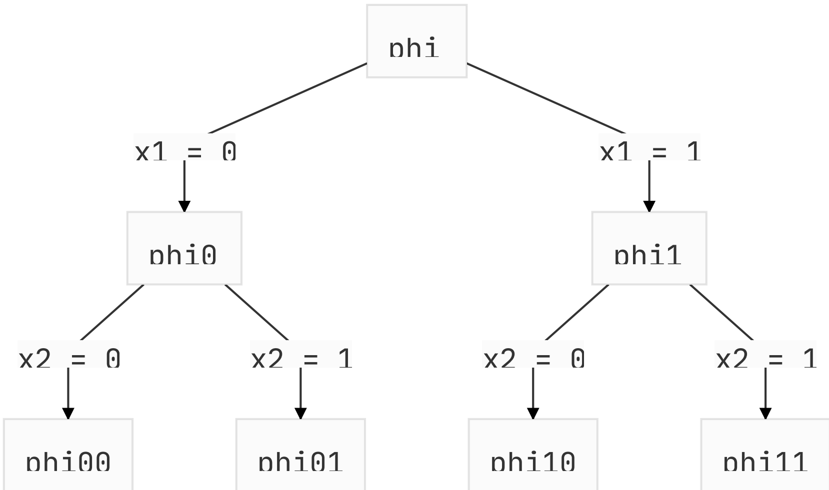
L $LSAT \in NPC$

1. $LSAT \in NP$ сертификат $\vec{z}$
2. $SAT \leqslant LSAT$ $\quad \phi \in SAT \iff \langle \phi, [1...1] \rangle \in LSAT$

f сводит $LSAT$ к S: $\langle \phi, \vec{y} \rangle \iff f(\phi, \vec{y}) \in S$

$LSAT \overset{f}{\leqslant} S$

подобие поиска в ширину:



$[\phi_1, \phi_2, \phi_t]$
на каждом k-ом слое $n - k$ переменных
выберем одну переменную и положим их = 0 и = 1, положим в общую очередь

при $k = n$ в формулах 0 переменных, вычисляем слева направо, пока не найдём равное единице
не нашли – формула не удовлетворима, нашли – нашли минимальное лексикографически удовлетворяющее назначение ϕ

на очередном k-ом слое: $[\phi_1, \phi_2, \phi_t]$
для каждой формулы запишем $\vec{a}$ – вектор, откуда взялась эта формула
применим к парам
$z_i = f(\phi, \underbrace{\overrightarrow{a_i}\ 111...111}_{n}),\ \ldots$
$\overrightarrow{a_i}$ лежит на пути к минимальному лексикографически удовлетворяющему

$z_1 \notin S, z_2 \notin S,\ \ldots, z_i \in S, \ldots \in S$

$|\langle \phi, \underbrace{1..1}_{n} \rangle| = L$

$\phi_i(x_{k+1} \ldots x_n) \leqslant q(L)$

$|S \cap \Sigma^n| \leqslant p(n)$

различных $z_i \in S$ не больше $p(q(L)) * q(L)$

$z_k = z_j, k < j$
$j \neq i$
из пар равных оставим того, кто раньше

$z_{v_1}, z_{v_2}, \ldots, z_{v_u}$ – различны

если $u > p(q(L)) * q(L)$, то оставим последние $p(q(L)) * q(L)$

$t \leqslant 2 * p(q(L)) * q(L)$

всё время работы за полином, решили SAT за полином, получается $P = NP$

□

полиномиальная иерархия

$\triangleleft\ NP$
$\Sigma_1 = \{L \mid \exists$ полином p, R (checker), выполняется за полином, $x \in L \iff \exists y, |y| \leqslant p(|x|), R(x,y) = 1\}$

$\triangleleft\ coNP$
$\Pi_1 = \{L \mid \exists$ полином p, R, выполняется за полином
$(x \notin L \iff \exists y, |y| \leqslant p(|x|), R(x,y) = 1)$
$x \in L \iff \forall y, |y| \leqslant p(|x|), \overline{R}(x,y) = 1\}$

$\Sigma_k = \{L \mid \exists$ полином p, R (checker), выполняется за полином,
$x \in L \iff \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots Q y_k, |y_i| \leqslant p(|x|), R(x, y_1, \dots, y_k) = 1\}$

$\Pi_k = \{L \mid \exists$ полином p, R, выполняется за полином
$x \in L \iff \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots Q y_k, |y_i| \leqslant p(|x|), \overline{R}(x, y_1, \dots, y_k) = 1\}$

$k = 1 \to \Sigma_1 = NP,\ \Pi_1 = coNP$

$k = 0 \to \{L \mid \exists R$, вычислимое за полином, $x \in L \iff R(x)\}$, $\Sigma_0 = \Pi_0 = P$

$MinF = \{\phi \mid \phi$ – минимальная по длине булева формула для своей функции $\}$
$\phi \in MinF \iff \forall \psi$ (функция $\psi =$ функция $\phi \implies |\psi| \geqslant |\phi|$)
$(|\psi| \geqslant |\phi|) \vee$(функция $\psi \neq$ функция ϕ)
$(|\psi| \geqslant |\phi|) \vee (\exists x_1 \dots x_n \phi(x_1 \dots x_n) \neq \psi(x_1 \dots x_n))$

$\phi \in MinF \iff \forall \psi\, \exists\, \vec{x}\ ((|\psi| \geqslant |\phi|) \vee \phi(x_1 \dots x_n) \neq \psi(x_1 \dots x_n))$

$MinF \in \Pi_2$

Схемная сложность

Схема из функциональных элементов

булева формула $f : B^n \to B$
программа $p : \Sigma^* \to B$

non-uniform computations
$\forall n\ \ C_n\ \ B^n \to B$
$L \subset \Sigma^*\ \{C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots\}$

parallel computation
$L \subset \Sigma^*\ \{C_0, C_1, \dots, C_n, \dots\}$
$p(n) \to C_n$, есть ограничения на эту программу p

ограничения, которые у нас есть, -- $size$, $depth$
функция f
$SIZE(f) = \{L \mid \exists$ семейство схем из функциональных элементов $C_0 C_1 \dots C_n \dots\ \ C_i$ распознаёт
$L \cap \Sigma^i, size(C_i) = O(f(i))\}$
так же вводится $DEPTH(f)$

$P/poly$ (P by poly) $= \cup_{k=0}^{\infty} SIZE(n^k)$

> **ex** (Th) $P \subset P/poly$
>
> $L \in P \implies \exists$ детерминированная машина Тьюринга m, распознающая L
>
> работает за полином $q(n)$
>
> $n \to$ табло вычислений $q(n)$ на $q(n)$

> **ex** $UNARY = \{L \mid L \subset \{0\}^*\}$
> $UNARY \subset P/poly$
>
> $\forall n\ 0^n \in LC_n$ допускает только $0^n \downarrow_n$
> либо $0^n \notin L\ C_n \equiv 0$
>
> $HALT_1 = \{0^k\ |k-$ая программа завершается на пустом входе $\}$
> $HALT_1$ не разрешим, но принадлежит $UNARY$ и $P/poly$

Программы с подсказками (advise)

$p(x, a_n)$, где $n = |x|$ и a_n называется подсказкой

$L \in C/f \iff \exists$ программа p, удовлетворяющая ограничением класса C и
$\exists a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \quad a_i \in \Sigma^* \quad |a_i| \leqslant f(i) \quad \forall x \quad p(x, a_n) = [x \in L]$

Th P/poly = SIZE(poly)

$P/poly$ вычисление с подсказками $= SIZE(poly)$

$\supset)\ L \in SIZE(poly) \implies \lhd \ a_0 a_1 a_n \dots \quad a_i = C_i \quad p(x, a_i)$ вычисляет схему a_i на x

$\subset)\ L \in P/poly \quad \lhd\ n\ m-$ машина Тьюринга, построим схему и назовём её C_n

> $P \ vs \ NP$
>
> $NP \subset P/poly \implies P = NP$ -- неизвестно
>
> $NP \,! \subset P/poly \implies P \neq NP$

Th (Карпа-Липтона)

$NP \subset P/poly \implies \Sigma_2 = \Pi_2$

> L $NP \subset P/poly$
> $\exists C_0 C_1 C_2 \dots C_n \dots$ - схемы для SAT $|C_i| \leqslant p(i)$ полином p
> тогда $\exists$ схемы $A_0 A_1 \dots A_n \dots$
>
> 1. $|A_i|$ -- полном от i
> 2. A_i имеет i выходов и если $\phi \in STA \implies \phi(A_i(\phi)) = 1$
>
> $\phi \to [SET \ \ x_1 = 1] \to \phi|_{x_1 = 1} \to [C_i] \to (\phi|_{x_1=1} \in SAT)$

$\lhd\ L \in \Pi_2$, докажем $L \in \Sigma_2$

$R(x, y, z)$ -- полиномиальная детерминированная машина Тьюринга

$x \in L \iff \forall y \, \exists z \, R(x, y, z)$

$T = \{\langle x, y \rangle \mid \exists z \, R(x, y, z\}$

$x \in L \iff \forall y \, \langle x, y \rangle \in T$

$T \in NP \implies T \leqslant^f SAT$

$x \in L \iff \forall y \, f(\langle x, y \rangle) \in SAT$ // $\qquad |y| \leqslant q(|x|) \qquad\qquad |\langle x, y \rangle| \leqslant r(n)$

$x \in L \iff \exists [A_0 A_1 \dots A_{r(n)}]$ 1) A_i -- схемы из леммы, 2) $\forall y \quad \phi := f(\langle x, y \rangle) \ |\phi| = m, \phi(A_m(\phi)) = 1$

1) $\iff \forall |\phi| \leqslant r(n): \quad (\forall z \, \phi(z) = 0 \vee \phi(A_m(\phi)) = 1)$

$x \in L \iff \exists A_0 A_1 \dots A_{r(n)} \ \forall \phi \forall z \forall y (\phi(z) = 0 \vee \phi(A_{|\phi|}(\phi) = 1) \wedge \phi := f(x, y) \ \psi(A_{|\psi|}(\psi)) = 1$

Параллельные вычисления

def NC^i (*Nick's class*) $= \{L \mid \exists$ схемы из функциональных элементов
$C_k, \ size(C_k) \leqslant poly(k), \ \ depth(C_k) \leqslant c \, log^i(k), \ \ C_k$ может быть выведено по k, используя $O(log\, k)$ памяти $\}$
$NC = \cup_{i=0}^{\infty} NC^i$

def AC^i (*Aaron's class*) -- то же самое, но $\vee$ и $\wedge$ могут иметь неограниченное число входов
$AC = \cup_{i=0}^{\infty} AC^i$

$AND(x_1 \dots x_n) \in NC^1 \cap AC^0$
$PARITY(x_1 \dots x_n) \in NC^1 \setminus AC^0$
$SUM(x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n) \in \widetilde{NC^1}$

Th $NC^i \subset AC^i \subset AC^{i+1}$
Cons $AC = NC$
Th $L \subset NC \subset P$

Вероятностные сложностные классы

$\lhd$ L и p - вероятностная программа для L

1. нульсторонняя ошибка : $x \in L \iff p(x) = 1,\ T(p, x)$ - случайная величина
2. односторонняя ошибка : $x \in L \implies p(x) = 1$ (false positive), $x \notin L \implies p(x) = 0$ (false negative)
   ex тест Миллера-Рабина на простоту
3. двусторонняя ошибка

Введение вероятности

Способ 1. Вероятностная лента

ex linux `/dev/urand`

есть доступ к вероятнстной ленте – односторонней бесконечной последовательности символов какого-то алфавита

множество всех вероятностных лент – Ω

Способ 2. Генератор случайных чисел

ex `random(n) -> [0, n - 1]`

способы **эквивалетны**

События, связанные с программой

Thesis $\forall$ множество $R \subset \Omega$, задающее множество вероятностных лент, приводящих рещультат работы программ, является событием

> **Proof** $R = \{r \mid A(p, r, x)\}$, выполняется какой-то предикат A
>
> $R = \cup_{i=0}^{\infty} r_i,\ \ r_i = \{r \mid A(p, r, x) \wedge$ считан i бит с вероятностной ленты $\}$
>
> $R_i = \{r = z\{01\}^* \mid z \in Z_i\}$
>
> $\mu(z_i) = \frac{|z_i|}{2^i}$
>
> не более, чем счётное объединение измеримых, значит, объединение измеримо, значит R является событием

Нульсторонняя ошибка

ZPP (*Zero-error Probabilistic Polynomial*) = $\{L \mid \exists$ программа $p : 1)\ \forall x\ p(x) = 1 \iff x \in L$ $\}$
$2)\ E(T(p, x)) = poly(|x|)$

ex $QSort \in \widetilde{ZPP}$ // (волна - это не про распознователь, а про преобразователь)

альтернативное определение: $ZPP_1 = \{L \mid \exists p : \Sigma^* \to \{0, 1, ?\} : 1)\ p(x) = 1 \implies x \in L$ $\}$
$p(x) = 0 \implies x \notin L$
$2)\ T(p, x) \leqslant poly(|x|)$
$3)\ P(p(x) = ?) \leqslant \frac{1}{2}$

Th $ZPP = ZPP_1$

> **Proof**
>
> 1. $ZPP \subset ZPP_1$
> $p,\ \ E(T(p, x)) = q(n)$
> $p(x)|_{TL = 2q(n)}$ (on TL `return ?`)
> 2. $ZPP_1 \subset ZPP$
>
> ```
> p:
>     while ((res = p(x)) = ?);
>     return res
> ```

Односторонняя ошибка

RP (*Randomized Polynomial*) = $\{L \mid \exists$ программа $p : 1)\ x \notin L \implies p(x) = 0$ $\}$
$x \in L \implies P(p(x) = 1) \geqslant \frac{1}{2}$
$2)\ T(p, x) \leqslant poly(|x|)$

$coRP = \{-//- \quad x \in L \implies p(x) = 1 \quad \}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad x \notin L \implies P(p(x) = 0) \geqslant \frac{1}{2}$

> **ex** $Primes \in coRP$
>
> тест Миллера-Рабина
>
> $n \in Primes$
>
> *Малая теорема Ферма*: p - простое $\implies$ $\forall a$ простое с p $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$
>
> *тест Ферма*: a взаимно простое с p, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p \implies p$ - простое (числа Кармайкла ломают)
>
> $a^{n-1} \mod n \neq 1$, a - *свидетель Ферма*
>
> либо $n \notin Primes \implies P(a$ - свидетель Ферма $\geqslant \frac{1}{2})$, либо n - число Кармайкла
>
> ...

вероятность берётся только по вероятностным лентам

Th $RP_{weak} = \{-//- \quad x \in L \implies P(p(x) = 1) \geqslant \frac{1}{q(n)}$, q - любой полином, $q > 1\}$, $RP = RP_{weak}$

> **Proof** Повторим k раз $(1 - \frac{1}{q(n)})^k < \frac{1}{2}$
> $k \sim q(n)$
> $(1 - \frac{1}{q(n)})^{q(n)} \sim \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$

Th $RP_{strong} = \{-//- \quad x \in L \implies P(p(x) = 1) \geqslant 1 - \frac{1}{2^{q(n)}}$, q - полином, $q > 1\}$, $RP = RP_{strong}$

> **Proof** $P(p(x) = 0 \mid x \in L) < \frac{1}{2}$
> $P(p(x) = 0 \ \ k\ times \mid x \in L) < \frac{1}{2^k}$
> $k = q(n)$

такой способ называется **amplification** (*уменьшение вероятности ошибки (накачка)*)

L $ZPP \subset RP$

> **Proof** $\triangleleft\ L \in ZPP \ \ P(p(zx) = ?) \leqslant \frac{1}{2}$
>
> ```
> q(x):
>    res = p(x)
>    if res ≠ ?
>        return res
>    return 0
> ```
>
> $x \notin L \implies q(x) = 0$
> $x \in L \implies P(q(x) = 1) \geqslant \frac{1}{2}$

$\implies ZPP \subset coRP$

Th $ZPP = RP \cap coRP$

> **Proof**
>
> $RP \cap coRP \subset ZPP$
>
> $p_1 \ \ x \notin L \implies P_1(x) = 0$ $\quad\quad$ $p_2 \ \ x \in L \implies p_2(x) = 2$
> $\quad\ \ x \in L \implies P(p_1(x) = 1) \geqslant 1$ $\quad\quad$ $x \notin L \implies P(p_2(x) = 0) \geqslant \frac{1}{2}$
>
> сделаем программу q:
>
> | p_1 | p_2 | res |
> |---|---|---|
> | 0 | 0 | 0 |
> | 0 | 1 | ? // $P(q(x) = ?) \leqslant \frac{1}{4}$ |
> | 1 | 0 | *impossible* |
> | 1 | 1 | 1 |

Двусторонняя ошибка

PP (*Probabilistic Polynomial*) $= \{L \mid x \in L \implies P(p(x)=1) > \frac{1}{2}$, p работает за полином$\}$
$x \notin L \implies P(p(x)=0) > \frac{1}{2}$

На практике неприменим, рассматривают скорее:
BPP (*Bounded Probabilistic Polynomial*) – пишем вместо $\frac{1}{2}$ какое-то число, например $\frac{2}{3}$

Th (*Лаутемана*)

$BPP \subset \Sigma_2$

$\implies BPP \subset \Pi_2$ (по симметрии)

> $L \in BPP : x \in L \iff \exists$ много $r : p(x,r) = 1$
> $L \in \Sigma_2 : x \in L \iff \exists y \forall z : \ R(x,y,z)$

L (*прокачка* BPP) $L \in BPP : \forall$ полинома $p(n)$ $\exists$ полином $q(n)$ и программа A, работающая ща полином $P(A(x) = [x \in L]) \geqslant 1 - \frac{q}{2^{p(n)}}$, A импользует $q(n)$ случайных бит

> $A(x,r)$ $x \in L \iff |\{r \mid A(x,r)=1\}| \geqslant (1 - \frac{1}{2^{p(n)}})2^{q(n)} = 2^{q(n)}2^{q(n)-p(n)}$
>
> $x \notin L \iff |\{r \mid A(x,r)=1\}| < \frac{2^{q(n)}}{2^{p(n)}} = b$, тогда выше: $2^{q(n)} - b$
>
> $B^{q(n)} = \Omega, \ \ |\Omega| = 2^{q(n)}$
>
> введём групповую операцию (**ex** xor)
>
> выберем k
>
> $X \subset \Omega$ - большое $\iff \exists y_1 y_2 \dots y_k : \cup_{i=1}^k y_i \oplus X = \Omega$
>
> $X \subset \Omega$ - маленькое $\iff \forall y_1 y_2 \dots y_k \ \cup_{i=1}^k y_i \oplus X \neq \Omega$
>
> 1. $|X| < \frac{2^{1(n)}}{k} \implies X$ — k-маленькое
> $x \notin L \implies \underbrace{|\{r \mid A(x,r)=1\}|}_{R} < \frac{2^{q(n)}}{2^{p(n)}} < \frac{2^{q(n)}}{k} \implies R$ — k-маленькое
> 2. $|X| > (1 - \frac{1}{2^{p(n)}})2^{q(n)} \overset{k?}{\implies} X$ — k-большое
> $\exists y_1 y_2 \dots y_k \ \cup_{i=1}^k y_i \oplus X = \Omega$
> $P_{y_1 y_2 \dots y_k}(\cup_{k=1}^k y_i \oplus X = \Omega) =$
> $= P(\forall z \vee_{i=1}^k z \in y_i \oplus X) =$
> $= P(\forall z \vee_{i=1}^k y_i \in z \oplus X) =$
> $= 1 - P(\exists z \wedge_{i=1}^k y_i \notin z \oplus X) =$
> $= 1 - P(\vee_z \wedge_{i=1}^k y_i \notin z \oplus X) \geqslant$
> $\geqslant 1 - \Sigma_k P(\wedge_{i=1}^k y_i \notin z \oplus X) =$
> $= 1 - 2^{q(n)}(1 - \frac{|X|}{|\Omega|})^k \geqslant$
> $\geqslant 1 - 2^{q(n)}(1 - (1 - \frac{1}{2^{q(n)}})\frac{2^{q(n)}}{2^{q(n)}})^k =$
> $= 1 - \frac{2^{q(n)}}{2^{kp(n)}}$
>   если добавим условие что $k > \frac{q(n)}{p(n)}$, то получается, что > 0
>
> $\lhd$ $L \in BPP$, выберем $p(n) = n$, по лемме $\exists q(n)$ $R = \{r \mid A(x,r) = 1\}$
>
> $x \in L \implies |R| > (1 - \frac{q}{2^n} 2^{q(n)})$ $x \notin L \implies |R| < \frac{2^{q(n)}}{2^n}$
>
> выберем $k = q(n)$, для $n > n_0 : \frac{q(n)}{n} < k < 2^n$
>
> $X \in L \implies R$ — k-большое
>
> $X \notin L \implies R$ — k-маленькое
>
> $x \in L \iff \exists y_1 \dots y_k \forall z (A(x, y_1 \oplus z) \vee A(x, y_w \oplus z) \dots \vee A(x, y_k \oplus z))$
>
> $z \in y_i \oplus R \iff z \oplus y_i \in R \iff A(x, y_i \oplus z) = 1$
>
> $\implies L \in \Sigma_2$

PI (*Polynom Identity*) $= \{\langle p(x_1 \dots x_n), q(x_1 \dots x_n), m \rangle \mid \forall x_1 \dots x_n \ p(\overline{x}) \equiv q(\overline{x}) \mod m\}$

1. $PI \in coNP$
2. $PI \in NP$ открыто
3. $PI \in coRP \subset BPP$

L (*Шварца-Зиппеля*)

p - полином над полем, $deg\, p = d$, $p \neq 0$, S, $|S| = s$
если случайно выбрать x_i из S, $P(p(x_1 \dots x_n) = 0) \leqslant \frac{d}{s}$

> **Proof** индукция по количеству переменных в полиноме
>
> база $n = 1$ полином над полем имеет $\leqslant d$ корней
>
> $P(p(x) = 0) \leqslant \frac{d}{s}$
>
> переход к n
>
> $P(x_1 \dots x_n) = x_1^k \overset{\neq 0}{q_k}(x_2 \dots x_n) + x_1^{k-1} q_{k-1}(x_2 \dots x_n) + \dots + x_1^0 q_0(x_2 \dots x_n)$
>
> $P(p(x_1 \dots x_n) = 0) = P(p(x_1 \dots x_n) = 0 \mid \overset{\leqslant 1}{q_k}(x_2 \dots x_n) = 0) P(\overset{\leqslant \frac{d-k}{s}}{q_k}(x_2 \dots x_n) = 0) + \overset{\leqslant \frac{k}{s}}{P}(p(x_1 \dots x_n) = 0 \mid q_k \neq 0) \overset{\leqslant 1}{P}(q_k \neq$
>
> $\lhd\, p - 1 \;\; p \equiv q \iff p - q \equiv 0$

Интерактивные доказательства

Verifier за истину, Prover за принадлежность в вопросе $x \in L$

V работает детерминированно за полином
P – произвольная программа

$L \;\; x \;\; q_1 \;\; a_1 \;\; q_2 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; q_k \;\; a_k \;\; res$

$q_i = V(x, a_1, \dots, a_{i-1})$
$a_i = P(x, q_1, q_2, \dots, q_i)$

Интерактивное взаимодействие, пара V, P называется **интерактивный протокол**

$x \in L \iff res = 1$

dIP = $\{L \mid \exists V : x \in L \implies \exists P : res(V, P) = 1\}$
$\qquad\qquad x \notin L \implies \forall P : res(V, P) = 0$

если $k = f(n)$, где $n = |x|$, это $dIP[f]$

Th $dIP = NP$

> **Proof**
>
> - $NP \subset dIP[1]$
> $q_1 = \epsilon \;\; a_1 = y$ (P может просто пербором найти нужный y)
> - $dIP \subset NP$
> $R(x, y = (a_1, a_2, \dots, a_k))$

рассмотрим теперь случай, когда V – вероятностная программа

$Prover$ по умолчаю не видит ленту $Verifier$ (концепция **private coins**)

$IP = \{\exists V : x \in L \implies \exists P \;\; Prob(res(V, P) = 1) \geqslant \frac{2}{3}\}$
$\qquad x \notin L \implies \forall P \;\; Prob(res(V, P) = 1) \leqslant \frac{2}{3}$

$NP \subset IP$: $NP = dIP \subset IP$

$BPP \subset IP$

$IP \subset PSPACE$

GNI (Graph Non Isomorphism) $= \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1$ не изоморфен $G_2\}$

1. V:

$$\begin{gathered} i = random(1, 2) \\ \pi = randomPermutation(n) \\ H = \pi(G_i) \\ \xrightarrow{q_1 = H} H \sim G_j, H \nsim G_{3-j} \\ a_1 = j \\ \xleftarrow{j = a_1} \\ return \;\; i = j \end{gathered} \tag{1}$$

Сейчас вероятности 1 и 1/2 из определения. Чтобы добиться нужынх, запустим два раза (можно сразу)

Можно сделать и последовательных два запуска, чтобы добиться $\frac{1}{4}$

$GNI \in IP$

Th1 (*Шамир*) $IP = PSPACE$

Th2 $coNP \subset IP$

L1 $\#SAT = \{\langle\phi, k\rangle \mid \phi$ имеет ровно k удовлетворяющих назначений $\} \in IP$

L2 $TAUT \leqslant \#SAT$

L2 Proof

$\phi \in TAUT \iff \langle\phi, 2^n\rangle \in \#SAT$

Th2 w/ L1&L2 Proof

$L \in coNP \quad L \leqslant TAUT \leqslant \#SAT$

$x \in L \iff f(x) = \langle\phi, k\rangle \in \#SAT$

L1 Proof

$\phi \to A(\phi)$ (арифметизация)

вместо	пишем
x	x
$\neg x$	$1 - x$
$\phi \wedge \psi$	$A(\phi)A(\psi)$
$\phi \vee \psi$	$1 - (1 - A(\phi))(1 - A(\psi))$

$phi(x_1, \dots, x_n) = 1 \iff A(\phi)(x_1, \dots, x_n) = 1$

$\langle\phi, k\rangle \in \#SAT \iff \sum_{x_1=0}^{1} \sum_{x_2=0}^{1} \dots \sum_{x_n=0}^{1} A(\phi)(x_1 \dots x_n) = k$

$A_1(x_1) = \sum_{x2=0}^{1} \sum_{x_3=0}^{1} \dots \sum_{x_n=0}^{1} A_\phi(x_1 \dots x_n)$ - полином от x_1

давайте выберем простое $p : 2^n < p \leqslant 2^{n+1}$ (постулат Бертрана)

$\deg A_1 \leqslant |\phi|$

просим P прислать нам полином A_1

$\sum_{x_1=0}^{1} \underbrace{\sum_{x_2=0}^{1} \dots \sum_{x_n=0}^{1} A_\phi(\overline{x})}_{A_1} = k$

$assert(A_1(0) + A_1(1)) = k$

все вычисления по модулю p

$A_2(x_2) = \sum_{x_3=0}^{1} \sum_{x_4=0}^{1} \dots \sum_{x_n=0}^{1} A_\phi(r_1, x_2, x_3 \dots x_n)$, где $r_1 = random(0..p-1)$

отправим P число r_1, попросим прислать A_2

$assert(A_2(0) + A_2(1) = A_1(r_1))$

$r_2 = random(0..p-1)$

отправляем P число r_2

$A_k(x_k) = \sum_{x_k=0}^{1} \dots \sum_{x_n=0}^{1} a_\phi(r_1, \dots, r_{k-1}, \dots, x_k, \dots, x_n)$

$assert(A_n(0) + A_n(1) = A_{n-1}(r_{n-1}))$

$A_n(x_n) = A_\phi(r_1, \dots, r_{n-1}, x_n)$

$\deg A_n \leqslant |\phi|$

$assert A_n is OK$

$accept$