Mathematical Logic Questions

1. Исчисление высказываний. Общезначимость, следование, доказуемость, выводимость. Корректность, полнота, непротиворечивость. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.

- **Общезначимость($\models \alpha$) .** Общезначимое высказывание - высказывание, которое истинно при любой оценке пропозициональных переменных.
- **Следование($\Gamma \models \alpha$).** Пусть $\Gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ \ldots, \gamma_n$. Тогда α следует из Γ, если при любой оценке пропозициональных переменных, входящих в высказывания Γ и α, на которых все высказывания из Γ истинны, α также истинна.
- **Доказуемость($\vdash \alpha$) .** Высказывание α доказуемо, если существует доказательство $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ и α_k совпадает с α

  Доказательство. Доказательство в исчислении высказываний — это некоторая конечная последовательность выражений (высказываний) $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, что каждое из высказываний α_i либо является аксиомой, либо получается из других утверждений $\alpha_{P_1}, \alpha_{P_2}, \ldots, \alpha_{P_n}$ $(P_1 \ldots P_n < i)$ по правилу вывода.
- **Выводимость($\Gamma \vdash \alpha$).** Высказывание α выводимо из списка гипотез Γ, если существует вывод $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ и α_k совпадает с α.

  Вывод. Доказательство, в котором могут использоваться гипотезы.
  Ака. Вывод в исчислении высказываний — это некоторая конеч-
  ная последовательность выражений (высказываний) $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, что каждое из высказываний α_i либо является аксиомой, либо получается из других утверждений $\alpha_{P_1}, \alpha_{P_2}, \ldots, \alpha_{P_n}$ $(P_1 \ldots P_n < i)$ по правилу вывода, либо является гипотезой из списка Γ.
- **Корректность($\vdash \alpha \ \Rightarrow \ \models \alpha$).** Если высказывание доказуемо, то оно общезначимо
- **Полнота($\models \alpha \ \Rightarrow \ \vdash \alpha$).** Если высказывание общезначимо, то оно доказуемо.
- **Непротиворечивость.** Множество высказываний Γ(тут может иметься ввиду теория) непротиворечиво, если не существует формулы α такой, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$
- **Теорема о дедукции.** Пусть имеется Γ, α, β. Утверждение $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

  (если из списка высказываний Γ выводится импликация α и β, то можно перестроить вывод таким образом, что из из Γ, α выводимо β и наоборот)

  ▶ Доказательство

  Лемма 1. $\vdash \alpha \to \alpha$

  1. $\alpha \to \alpha \to \alpha \ (sch.\ ax\ 1)$
  2. $(\alpha \to \alpha \to \alpha) \to (\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha) \ (sch.\ ax\ 2)$
  3. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha) \ (MP\ 1, 2)$

4. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha))(sch.\ ax\ 1)$

5. $\alpha \to \alpha\ (MP\ 4, 3)$

- (1 часть) $\Gamma \vdash \alpha \to \beta \Rightarrow \Gamma, \alpha \vdash \beta$. Покажем как перестроить док-во (здесь мы его просто дополним)

  Выведем доказательство $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$:

  $(1).\ \delta_1$

  $\dots$

  $(m-1).\ \delta_{m-1}$

  $(m).\ \alpha \to \beta$ и дополним это док-во двумя утверждениями\
  $(m+1).\ \alpha$ (гипотеза, которая добавилась ($\Gamma, \alpha \vdash \beta$))\
  $(m+2).\ \beta\ (MP\ m, m+1)$

- (2 часть) $\Gamma, \alpha \vdash \beta \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Снова возьмем наше доказательство (только теперь оно доказывает β), также попытаемся перестроить. Наметим план что нам нужно получить и покажем, что мы можем выводить любую формулу из намеченного плана (допишем промежуточные формулы).

  План: (навесим на каждую строчку док-ва α слева)

  $(1).\ \alpha \to \delta_1$

  $\dots$

  $(m-1).\ \alpha \to \delta_{m-1}$

  $(m).\ \alpha \to \beta$

  Теперь этот план требуется дополнить до полноценного вывода. Будем рассматривать все формулы подряд и перед каждой формулой добавлять некоторое кол-во формул, обосновывающийх соответствующие высказывания. Рассмотрим формулу i, возможны следующий варианты:

  1. δ_i - аксиома или предположение, входящее в Γ. Тогда перед этой формулой вставим формулы δ_i и $\delta_i \to \alpha\delta_i$, и окажется, что i-ая формула выводится из предыдущих двух путем применения MP.
  2. δ_i совпадает с α. Тогда требуемое утверждение выводится при помощи леммы 1.
  3. δ_i выводится по правилу MP из каких-то других утверждений δ_j, δ_k ($\delta_k := \delta_i \to \delta_j$), где $j < i$ и $k < i$. Покажем, что $\alpha \to \delta_i$ тоже может быть выведена из $\alpha \to \delta_j$ и $\alpha \to \delta_k$ (нам этого достаточно, тк мы до этого перестроили их док-во).

     Для этого добавим 2 высказывания:\
     $(\alpha \to \delta_j) \to (\alpha \to \delta_k) \to (\alpha \to \delta_i)\ (sch\ ax.\ 2)$

     $(\alpha \to \delta_k) \to (\alpha \to \delta_i)\ (MP\ j, \dots)$

2. Теорема о полноте исчисления высказываний.

- Классическое исчисление высказываний полно.

  Полнота($\models \alpha\ \Rightarrow\ \vdash \alpha$). Если высказывание общезначимо, то оно доказуемо.

  ▶ Вспомогательные утверждения

- *Лемма 1.* Если $\Gamma, \Sigma \vdash \alpha$, то $\Gamma, \Sigma, \Delta \vdash \alpha$. Если $\Gamma, \Sigma, \Delta, \Phi \vdash \alpha$, то $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Phi \vdash \alpha$.

  ▶ Доказательство Леммы 1

  (1 часть) Тк у нас существует построенный вывод $\Gamma, \Sigma \vdash \alpha$, то при добавлении в список гипотез еще утверждений Δ вывод можно не изменять и оставить таким же, тк мы до этого не использовали добавленные утверждения $\Rightarrow\ \Gamma, \Sigma, \Delta \vdash \alpha$ верно.
  (2 часть) Оттого, что мы поменяли местами некоторые гипотезы в списке гипотез, то ход вывода и сами утверждения в нем можно не менять, стоит изменить только ссылки на гипотезы (если они упоминались в самом выводе).

- *Лемма 2.* Если справедливы три утверждения: $\Gamma \vdash \gamma,\ \Delta \vdash \delta,\ \gamma, \delta \vdash \alpha$, то справделиво и $\Gamma, \Delta \vdash \alpha$

  ▶ Доказательство Леммы 2

  Мы получим требуемый вывод, просто последовательно соединив все
  три исходных вывода. Первые два вывода будут (очевидно) корретными при допущениях Γ и Δ. В третьем же выводе могут использоваться высказывания Γ и Δ, отсутствующие в
  предположениях. Но поскольку эти высказывания доказаны в первых двух частях вывода, мы будем иметь полное право их упоминать — на тех же основаниях, на которых они указаны в конце соответствующих доказательств.

- *Лемма 3.* Каждое из построенных по таблицам истинности утверждений доказуемо.

  ▶ Доказательство Леммы 3

  Доказательство каждого из утверждений стоит провести формально.
  Ex: $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$

  $$1.\ \beta \to \alpha \to \beta\ (Sch.\ Ax\ 1)$$

  $$2.\ \beta\ (Hypothesis\ 2)$$

  $$3.\ \alpha \to \beta\ (MP\ 1,\ 2)$$

- *Лемма 4.* (Правило контрапозиции). Каковы бы ни были формулы α, β, справедливо, что $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

  ▶ Доказательство Леммы 4

  Докажем $(\alpha \to \beta), \neg\beta \vdash \neg\alpha$

  $$1.\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha\ (Sch.\ Ax.\ 9)$$

  $$2.\ (\alpha \to \beta)\ (Hypothesis\ 1)$$

  $$3.\ (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha\ (MP\ 2, 1)$$

  $$4.\ \neg\beta \to \alpha \to \neg\beta\ (Sch. Ax. 1)$$

  $$5.\ \neg\beta\ (Hypothesis\ 2)$$

  $$6.\ \alpha \to \neg\beta\ (MP\ 5, 4)$$

  $$7.\ \neg\alpha\ (MP\ 6, 3)$$

  И два раза применим дедукцию

- *Лемма 5.* Правило исключенного третьего. Какова бы ни была формула $\alpha, \vdash \alpha \vee \neg\alpha$

  ▶ Доказательство Леммы 5

- 1 часть. Для начала покажем $\vdash \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\alpha$

  $1.\ \alpha \to \alpha \vee \neg\alpha\ (Sch.\ Ax.\ 6)$

  $2. \ldots (n+1)\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, (\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha) \to \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\alpha\ (Lemma\ 4\ proof)$

  $(n+2).\ \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\alpha\ (MP\ 1, n+1)$

- 2 часть. Покажем $\vdash \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha$

  $1.\ \neg\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha\ (Sch.\ Ax.\ 6)$

  $2. \ldots (n+1)\ \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, (\neg\alpha \to \alpha \vee \neg\alpha) \to \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha\ (Lemma\ 4\ proof)$

  $(n+2).\ \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha\ (MP\ 1, n+1)$

- 3 часть\
  $1.\ \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\alpha\ (p\ 1)$

  $2.\ \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha\ (p\ 2)$

  $3.\ (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\alpha) \to (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\ (Sch.\ Ax.\ 9)$

  $4.\ (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\ (MP\ 1, 3)$

  $5.\ \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)\ (MP\ 2, 5)$

  $6.\ \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \to (\alpha \vee \neg\alpha)\ (Sch.\ Ax.\ 10)$

  $7.\ (\alpha \vee \neg\alpha)\ (MP\ 5, 6)$

- *Лемма 6.* Исключение допущения. Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. Тогда также справедливо $\Gamma \vdash \alpha$.

  ▶ Доказательство Леммы 6

  $\Gamma \vdash \rho \to \alpha$ Дедукция.\
  $\Gamma \vdash \neg\rho \to \alpha$ Дедукция.\
  $1.\ \rho \to \alpha$

  $2.\ \neg\rho \to \alpha$

  $3.\ \rho \vee \neg\rho\ (Lemma 5)$

  $4.\ (\rho \to \alpha) \to (\neg\rho \to \alpha) \to \rho \vee \neg\rho \to \alpha\ (Sch.\ Ax.\ 8)$

  3 MP\
  $7.\ \alpha$

Для доказательства теоремы мы докажем чуть более сильное утверждение — что для любого k от 0 до n и любой оценки переменных $x_1, \ldots, x_k$ справедливо$$ ${}^{[x_1]}P_1,..., {}^{[x_k]}P_k\vdash\alpha$. Нетрудно заметить, что утверждение теоремы непосредственно следует из данного утверждения для $k = 0$. Доказательство будет вестись индукцией по $n − k$.\
База.

- Классическое исчисление высказываний корректно.

  ▶ Доказательство корректности КИВ

3. Интуиционистское исчисление высказываний. BHK-интерпретация. Решётки. Булевы и псевдобулевы алгебры.

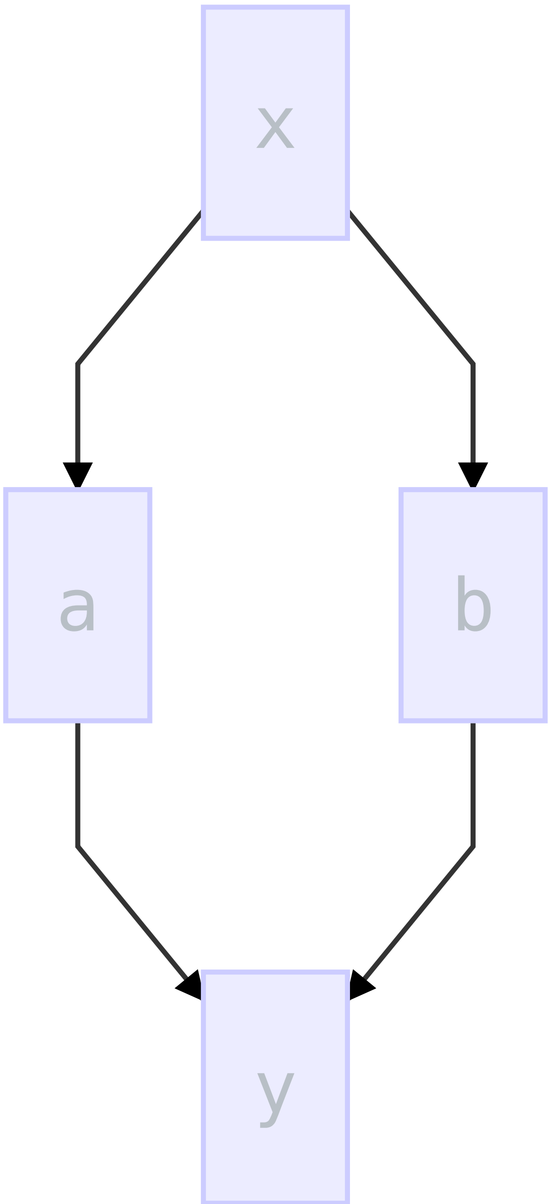
- **Интуиционистское исчисление высказываний.** Чтобы получить **ИИВ** (Интуиционистское исчисление высказываний) нужно в **КИВ** (Классическое исчисление высказываний) заменить 10-ю аксиому ($\neg\neg\alpha \to \alpha$) на $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$
  - В интуиционистском исчислении высказываний невозможно доказать правило исключенного третьего: $\alpha \& \neg\alpha$
  - Существует множество способов построить модель для интуиционистской логики: BHK-интерпретация, Модели Крипке, Топологическая интерпретация...
  - ▶ Топологическая интерпретация.

  Начнем с множества истинностных значений. Возьмем в качестве этого множества все открытые множества некоторого заранее выбранного топологического пространства. Определим оценку для связок интуиционисткого исчисления высказываний следующим образом:

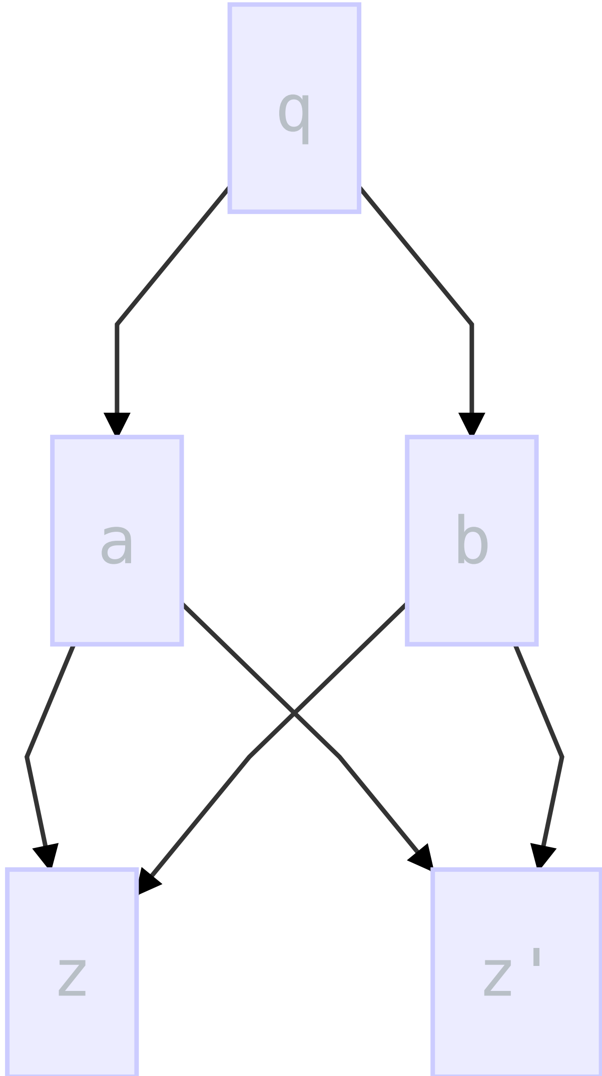
  - $[A \& B] = [A] \cap [B]$
  - $[A \vee B] = [A] \cup [B]$
  - $[A \to B] = (c[A] \cup [B])^{\circ}$
  - $[\neg A] = (c[A])^{\circ}$

  Будем считать, что формула истинна в данной модели, если её значение оказалось равно всему пространству.
  * Example: возьмем пространство R, и вычислим значение формулы $A \vee \neg A$ при A равном (0,1):
  $[A \vee \neg A] = (0,1) \cup [\neg A] = (0,1) \cup (c(0,1))^{\circ} = (0,1) \cup ((-\infty, 0) \cup (1, \infty)) = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$

- **BHK-интерпретация (Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation).** Пусть заданы высказывания α, β, тогда:
  - мы считаем $\alpha \& \beta$ доказанным, если у нас есть доказательство α и есть доказательство β
  - мы считаем $\alpha \vee \beta$ доказанным, если у нас есть доказательство α или доказательство β, и мы точно знаем какое
  - мы считаем $\alpha \to \beta$ доказанным, если из доказательства α мы можем построить доказательство β
  - мы считаем $\perp$ (aka 0) утверждением не имеющим доказательства
  - $\neg\alpha$ есть сокращение $\alpha \to \perp$. Мы считаем $\neg\alpha$ доказанным, если мы умеем из доказательства α получить противоречие
- **Решётка.** Частично-упорядоченное(рефлексивно, транзитивно, антисимметрично) множество $\langle M, \sqsubseteq \rangle$, в котором, для любых a, b определены две операции:
  - верняя грань a, b: $a + b = c$, наименьший c, что $a \sqsubseteq c, b \sqsubseteq c$
  - нижняя грань a, b: $a * b = c$, наибольший c, что $c \sqsubseteq a, c \sqsubseteq b$
  - example: $a + b = x, a * b = y$



- наименьший и минимальный:\
  z-наименьший, если для всех $t \in M:\ z \sqsubseteq t$\
  z-минимальный, если нет такого $t \in M:\ t \sqsubseteq z$
  example: z, z' : никакой не наименьший, но оба минимальные



- **Дистрибутивная решетка.** Для любых a, b, c: $(a + b) * c = a * c + b * c$
  - Решетка дистрибутивна т. и т. т., когда при любых $a, b, c : a * b + c = (a + c) * (b + c)$
- **Импликативная решётка.** Решетка с псевдодополнением, определённым для любых двух элементов этой решетки
  - Операция псевдополнения. $c = a \to b$, c - это такой наибольший t, что $t * a \sqsubseteq b$
  - В импликативной решетке есть наибольший элемент
- **Псевдобулева алгебра (ака алгебра Гейтинга).** Импликативная решетка с 0
  - 0 - наименьший элемент решетки
  - ▶ Корректность псевдобулевой алгебры для ИИВ

- **Булева алгебра.** Псевдобулева алгебра, в которой для любых a: $a + (a \to 0) = 1$. \
Булева алгебра - пример классической логики:
a + (a -> 0) = 1 - Закон исключенного третьего, который читается как "Либо альфа, либо не альфа выполнено"

  ▶ Неполнота классической модели для ИИВ

4. Алгебра Линденбаума. Полнота интуиционистского исчисления высказываний в псевдобулевых алгебрах.

- **Алгебра Линдебаума.** Множество множеств (классов) факторизованных по отношению эквивалентности.
  - Определение. Возьмем множество всех формул ИИВ, тогда:
  1. $\alpha \sqsubseteq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$
  2. $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \sqsubseteq \beta$ и $\beta \sqsubseteq \alpha$
- Полнота ИИВ TODO()

5. Модели Крипке. Сведение моделей Крипке к псевдобулевым алгебрам. Нетабличность интуиционистского исчисления высказываний.

- **Вообще, очень полезно посмотреть видосики на степике**
- **Определение**
  1. Пусть W - множество миров. (миры - это какие-то множества;
  2. $(\preceq) \subseteq W \times W$ - отношение частичного порядка на W;
  3. $(\Vdash) \subseteq W \times P$ - отношение вынужденности, причём если $W_x \preceq W_y$ и $W_x \Vdash X$, то $W_y \Vdash X$, где X - переменная. (*Мы требуем, чтобы если некоторый мир наследует нашему, то все переменные, которые вынуждены в нашем мире в нем тоже были бы вынуждены*)

     Тогда $< W, (\preceq), (\Vdash) >$ - **модель Крипке**

     Как оценить высказывание в модели Крипке?
- **Определение**
  1. $W_k \Vdash P$ - задано в модели.
  2. $W_k \Vdash \phi \& \psi$ - если $W_k \Vdash \phi$ и $W_k \Vdash \psi$
  3. $W_k \Vdash \phi \vee \psi$ - если $W_k \Vdash \phi$ или $W_k \Vdash \psi$
  4. $W_k \Vdash \phi \to \psi$ - если в любом W_i : $W_k \preceq W_i$ из $W_i \Vdash \phi$ следует $W_i \Vdash \psi$
  5. $W_k \Vdash \neg\phi$ - если в любом W_i : $W_k \preceq W_i$ выполнено $W_i \nVdash \phi$
  6. $W_k \nVdash \perp$

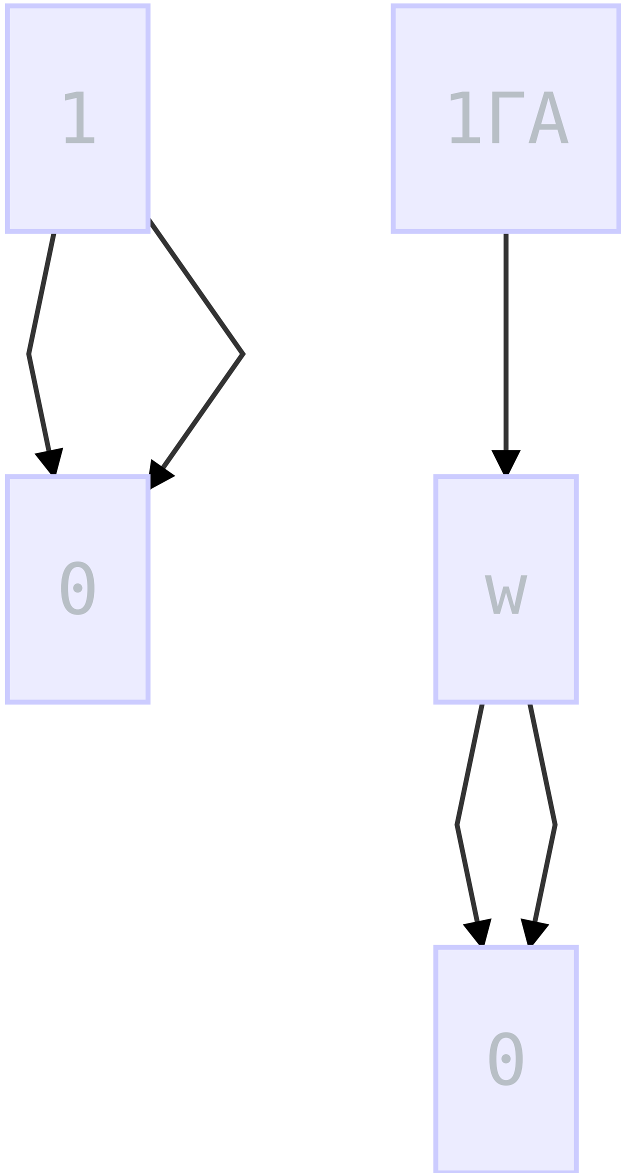
- **Определение**
  - $\Vdash \phi$ в модели W (иначе: $W \models \phi$), если $W_i \Vdash \phi$ при всех $W_i \in W$ (*Будем говорить, что формула ϕ **истинна** в данной модели, если она вынуждена в каждом мире этой модели*)
  - $\models \phi$, если $\Vdash \phi$ во всех моделях W (*Будем говорить, что формула ϕ **общезначима**, если она вынуждена во всех моделях*)

- **Теорема**
  - Модель Крипке это **алгебра Гейтинга**
- **Табличная модель.** Будем говорить, что модель исчисления - табличная, если:
  1. Задано множество истиностных значений V.
  2. Для каждой связки задана функция оценки: $f_\star : V * V \to V$ и $f_\neg : V \to V$
  3. Среди V выделены некоторые истинные значения $\top$. Мы считаем, что $\models \alpha$, если $[\alpha] \in \top$ при любых оценках пропозициональных переменных.
  4. Модель корректна
  - классическая оценка для исчисления высказываний - табличная модель
- TODO картинки?, ...
- **Теорема** В интуционистской логике нет полной табличной модели

  ▶ Доказательство

6. Гёделева алгебра. Операция $\Gamma(A)$. Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний.

- **Гёделева алгебра** Алгебра A - гёделева, если для любых $a, b \in A$ если $a + b = 1$, то $a = 1$ и $b = 1$.
- **Гёдевелизация ($\Gamma(A)$)** Добавление элемента, который больше всех



Алгебра с добавлением ω и $1_{\Gamma(A)}$. Причем если $a \in A$, то $\omega \geqslant a, 1_\Gamma(A) \geqslant a$ и $1_\Gamma(A) > \omega$

- Дизъюнктивность ИИВ. Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

  ▶ Доказательство

7. Исчисление предикатов. Общезначимость, следование, выводимость. Теорема о дедукции в исчислении предикатов.

- **Определение**
  - ***Терм*** исчисления предикатов (или *предметное выражение*) это:
    - *Предметная переменная* - маленькая буква начала или конца лат. алфавита, (возможно с индексами или апострофом)
    - Применение функции: если $(\theta_1, \dots \theta_n)$ - термы и f - *функциональный символ* (некая функция), то $f(\theta_1, \dots \theta_n)$ тоже терм. (Например константы - нульместные функции)
- **Определение**
  - **Формула** исчисления предикатов - это:
    - Если α и β - формулы исчисления предикатов, то $\neg\alpha, \alpha \& \beta, \alpha \vee \beta, \alpha \to \beta$ - также формула
    - Если α - формула, и x - предметная переменная, то $\forall x \alpha$ и $\exists x \alpha$ - также формулы
    - Применение предиката: если $(\theta_1, \dots \theta_n)$ - термы, и P - предикатный символ, то $P(\theta_1, \dots \theta_n)$ - формула.
- **Определение**
  - Дана некоторая формула s. Будем говорить, что подстрока s_1 строки s является подформулой если она в точности соответствует какому-то одному нетерминалу в дереве разбора строки s.
- **Определение**
  - Если в формулу входит подформула, полученная по правилам для кванторов $(\forall x \alpha, \exists x \alpha)$, то мы будем говорить, что формула α находится в области действия данного квантора по переменной x. Также будем говорить, что любая подформула формулы α находится в области действия данного квантора.
- **Определение**
  - Если некоторое вхождение переменной x находится в области действия квантора по переменной x, то такое вхождение мы назовем **связанным**. Вхождение x непосредственно рядом с квантором назовём **связывающим**. Те вхождения переменных, которые не являются связанными или связывающими назовём **свободными**. Формула не имеющая свободных вхождений переменных называется **замкнутой**.
- **Определение**
  - Будем говорить, что терм θ **свободен для подстановки** в формулу ψ вместо x, если после подстановки вместо свободных вхождений x ни одно вхождение свободной переменной в θ не станет связанным.
- В исчислении предикатов к схемам аксиом из исчисления высказываний добавляется две схемы аксиом:

  Пусть θ свободно для подстановки вместо x

  11. $\forall x(\psi) \to (\psi[x := \theta])$
  12. $(\psi[x := \theta]) \to \exists x(\psi)$
- Правила вывода:

  Пусть x не входит свобоно в ϕ, тогда имеют место следующие правила вывода:

  $\frac{(\phi)\to(\psi)}{(\phi)\to\forall x(\psi)}$
  $\frac{(\psi)\to(\phi)}{\exists x(\psi)\to(\phi)}$
- **Определения**
  - Формула в исчислении предикатов **общезначима**, если она истинна на любом предметном множестве D, при любой оценке предикатных и функциональных символов, и при любых оценках свободных предметных переменных.

    - Пусть имеется некоторое исчисление предикатов с множеством аксиом A, и пусть дан некоторый список Γ формул исчисления предикатов. Тогда **вывод** формулы α в исчислении с аксиомами $A \cup \Gamma$ мы назовем выводом из допущений Γ и будем записывать как $\Gamma \vdash \alpha$
    - Пусть имеется какое-то предметное множество D, список формул Γ и высказывание α, тогда **следованием** из Γ в α назовем следующее утверждение: если при всех оценках (предикатных, функциональных и тд) в предметном множестве D, где формулы Γ истинны, истинна и α. (мб можно понятнее написать TODO)
- **Теорема о дедукции**

  Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, и в доказательстве отсутствуют применения правил для кванторов, использующих свобоные применения правил для кванторов, использующих свободные переменные из формулы α, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Обратно, если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

  ▶ Доказательство
- *Исчисление предикатов* **корректно**, т.е любое доказуемое утверждение общезначимо

  ▶ Доказательство

8. Непротиворечивые множества формул. Доказательство существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов.

- **Непротиворечивое множество формул.** Назовем Γ - множество замкнутых формул - непротиворечивым, если ни для какой формулы α невозможно показать, что $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \neg\alpha$
- **Def.** Полным непротиворечивым множеством (непротиворечивым бескванторным множеством) формул назовем такое множество Γ, что для любой замкнутой (замкнутой и бескванторной) формулы α либо $\alpha \in \Gamma$, либо $(\neg\alpha) \in \Gamma$
- **Lemma.** Пусть Γ - полное непротиворечивое множество бескванторых формул. Тогда существует модель для Γ.

  ▶ Доказательство

9. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Доказательство полноты исчисления предикатов.

- **Определение**
    - Назовём формулу α **формулой с поверхностными кванторами**, если существует такой узел в дереве разбора формула, не являющийся квантором, ниже которого нет ни одного квантора, а выше - нет ничего кроме кванторов. (Например: $\forall x \exists y \forall z (P(x, y, z) \& P(z, y, x))$
- **Лемма**

  Для любой формулы исчисления предикатов найдётся эквивалентная ей формула с поверхностными кванторами.

  ▶ Доказательство
- **Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов.**

  Пусть Γ - непротиворечивое множество формул исчисления предикатов. Тогда существует модель для Γ.

  ▶ Доказательство

- **Теорема**

  Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

  ▶ Доказательство

10. Теории первого порядка, структуры и модели. Аксиоматика Пеано. Арифметические операции. Формальная арифметика.

- **Теория первого порядка.** Теорией первого порядка назовем исчисление предикатов с дополнительными ("нелогическими" или "математическими")
  - предикатными и функциональными символами
  - аксиомами\
    сущности, взятые из исходного исчисления высказываний, назовём логическими.
- **Структура.** Структурой теории первого порядка мы назовем упорядоченную тройку $\langle D, F, P \rangle$, где $F = \langle F_0, F_1 \dots \rangle$ - списки оценок для 0-местных, 1-местных и тд функций, и $P = \langle P_0, P_1 \dots \rangle$ - списки оценок для 0-местных, 1-местных и тд предикатов, D - предметное множество.

  ▶ Небольшое пояснение
- **Def.** Назовем структуру корректной, если любая доказуемая формула истинна в данной структуре.
- **Модель.** Модель теории - любая корректная структура
- **Аксиоматика Пеано.** Рассмотрим некоторое множество N. Будем говорить, что оно удовлетворяет аксиомам Пеано, если выполнено:
  - В нем существует некоторый выделенный элемент 0 ($0 \in N$)
  - Для каждого элемента определена операция $'$, результат ее также принадлежит множеству N ($N \to N$)

  Кроме того, эти элементы и операция к этим элементам должны удовлетворять следующим требованиям:
  - Не существует такого $x \in N$, что $x' = 0$ (Нет предшественника у минимального элемента)
  - Если при x и y из N верно, что $x' = y'$, то $x = y$. Если $x = y'$,то x назовем следующим за y, а y - предшествующим x (определение операции $'$)
  - Каково бы ни было свойство ("предикат") $P : N \to V$, если:
    - выполнено $P(0)$
    - при любом $x \in N$ из $P(x) \Rightarrow P(x')$\
      то при любом $x \in N$ выполнено $P(x)$\
      (Индукция)
- **Формальная арифметика.** (формализация аксиоматики Пеано) формальная арифметика - теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими:
  - двуместными функциональными символами $(+)$,$(*)$, одноместным функциональным символом $(')$, нульместным функциональным символом 0;
  - двуместным предикатным символом $(=)$;
  - восемью аксиомами:
    - $(A1)$ $a = b \to a = c \to b = c$ (транзитивность равенства)
    - $(A2)$ $a = b \to a' = b'$ (инъективность штриха)
    - $(A3)$ $a' = b' \to a = b$ (инъективность штриха)

    - $(A4)$ $\neg a' = 0$ (у нуля нет предшественников)
    - $(A5)$ $a + 0 = a$ (определение сложения)
    - $(A6)$ $a = b' = (a + b)'$ (определение сложения)
    - $(A7)$ $a * 0 = 0$ (определение умножения)
    - $(A8)$ $a * b' = a * b + a$ (определение умножения)
  - схемой аксиом индукции
    $\psi[x := 0]\&(\forall x.\,(\psi \to \psi[x := x'])) \to \psi$

- Еще один пример теории первого порядка.

  Теория групп. К исчислению предикатов добавим двуместный предикат $(=)$, двуместную функцию $(*)$, одноместную функцию x^{-1}, нульместную функцию 1 и следующие аксиомы:

  - $(E1)$ $a = b \to a = c \to b = c$
  - $(E2)$ $a = b \to (a * c = b * c)$
  - $(E3)$ $a = b \to (c * a = c * b)$
  - $(G1)$ $a * (b * c) = (a * b) * c$
  - $(G2)$ $a * 1 = a$
  - $(G3)$ $a * a^{-1} = 1$

11. Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции. Функция Аккермана. Примитивная рекурсивность арифметических функций, функций вычисления простых чисел, частичного логарифма.

- **Примитивы:**

  1. Ноль. $Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, Z(x) = 0$
  2. Инкремент. $N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, N(x) = x'$
  3. Проекция. $V_i^n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, V_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$
  4. Подстановка. Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$, то $S\langle f, g_1, \ldots, g_n\rangle : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$, при этом:
  $$S\langle f, g_1, \ldots, g_n\rangle(x_1, \ldots, x_m) = f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$$
  5. Примитивная рекурсия. Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$, то $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, при этом
  $$R\langle f, g\rangle(x_1, \ldots, x_n, y) = \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n), y = 0 \\ g(x_1, \ldots, x_n, y - 1, R\langle f, g\rangle(x_1, \ldots, x_n, y)), y > 0 \end{cases}$$
  6. Минимизация. Если $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, то $\mu\langle f\rangle : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, при этом
  $$\mu\langle f\rangle(x_1, \ldots, x_n) = \text{такое минимальное число } y, \text{ что } f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0. \\ \text{Если такого } y \text{ нет, то результат примитива неопределен}$$

- **Примитивно-рекурсивная функция.** Функция называется примитивно-рекурсивной, если возможно построить выражение только из первых пяти примитивов, такое, что оно при всех аргументах возвращает значение, равно значению требуемой функции.

- **Рекурсивная функция.** Если функция может быть выражена только из 6 примитивов, то она называется рекурсивной.

- **Функция Аккермана.** Рекурсивна, но не примитивно-рекурсивна
  $$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, \text{ если } m = 0 \\ A(m - 1, 1), \text{ если } m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)), \text{ если } m > 0, n > 0 \end{cases}$$

▶ Доказательство

- **Проверка числа на простоту.** Функция проверки числа на простоту примитивно-рекурсивна.
- ▶ Haskell code

```
eq :: [Int] -> Int
eq = s if' [s lower [u 1, u 2], z, s if' [s lower [u 2, u 1], z, one]]

primef :: [Int] -> Int
primef = s z [u 1]

primeg :: [Int] -> Int
primeg = s if' [s eq [u 2, one], one, s if' [s modhs [u 1, u 2], s prodhs
[one, u 3], z]]

prime :: [Int] -> Int
prime = sr (r . (,,) primef primeg) [u 1, u 1]
```

- **Частичный логарифм.** Частичный логарифм примитивно-рекурсивен.
- ▶ Haskell code

```
div2while0h :: [Int] -> Int
div2while0h = s if' [s eq [s div2 [u 1], z], u 2, s div2while0' [s div2 [u
1], s plus [u 2, one], z]]

div2while0' :: [Int] -> Int
div2while0' = sr (r . (,,) div2while0h z) [u 1, u 2, z]

div2while0 :: [Int] -> Int
div2while0 = s div2while0' [u 1, one]

plogkh :: [Int] -> Int
plogkh = s z [u 1]

plogkg :: [Int] -> Int
plogkg = s if' [s eq [s modhs [u 1, s powhs [u 2, u 3]], z], u 3, u 4]

plogk :: [Int] -> Int
plogk = sr (r . (,,) plogkh plogkg) [u 1, u 2, s plus [ s div2while0 [u 1],
one]]
```

12. Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Представимость примитивов N, Z, S, U в формальной арифметике.

- **Выразимое отношение.** Отношение R называется выразимым (в формальной арифметике), если существует такая формула $\alpha(x_1, \dots x_n)$ с n свободными переменными, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$
  1. если $(k_1, \dots, k_n) \in R$, то доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$
  2. если $(k_1, \dots, k_n) \notin R$, то доказуемо $\neg\alpha(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$

- **Представимость.** Функция f от n аргументов называется представимой в формальной арифметике, если существует такая формула $\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1})$ с $n+1$ свободной переменной, что для любых натуральных $k_1, \ldots, k_n$:
  1. $f(k_1, \ldots, k_n) = k_{n+1}$ тогда и только тогда, когда доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_{n+1}})$
  2. Доказуемо $\exists! b. \alpha(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{b})$,

     где $\exists! y. \alpha(y) = (\exists y. \alpha(y)) \& \forall a. \forall b. \alpha(a) \& \alpha(b) \rightarrow a = b$
- **Вспомогательные утверждения.**

  ▶ Spoiler

  Для любого выводимого выражения мы можем составить этот же вывод с другими переменными, пусть $T\ :=\ 0 = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$ (sch.ax.1) : \
  $Lemma\ 1) \vdash P[x := \Theta]$\
  $1.\ P \rightarrow T \rightarrow P$ (sch.ax.1)\
  $1.5\ P$ (тк это выводимое утверждение) \
  $2.\ T \rightarrow P$ (MP 1, 1.5) \
  $3.\ T \rightarrow \forall x. (P)$ (по правилу вывода(2) можно ввести кванторы по переменным внутри P, если эти переменные не входят свободно в T, что верно по построению) \
  $3.5\ T$ (sch.ax.1) \
  $4.\ \forall x. (P)$ (MP 3.5, 3) \
  $5.\ (\forall x. (P)) \rightarrow (P[x := \Theta])$ (по sch.ax.11 можно заменить переменные по кванторам внутри P) \
  $6. (P[x := \Theta])$ (MP 4,5)

  $Lemma\ 2)\ a = b \vdash b = a$

  $1.\ a = b\ (Hypothesis\ 1)$

  $2.\ a = a\ (\text{нетрудно показать по Лемме }1)$

  $3.\ a = b \rightarrow a = a \rightarrow b = a\ (Ax.\ 2\ (FA))$

  $4.\ b = a\ (2\ MP\ from\ 3)$

- **Представимость примитива Z (Ноль).** Примитив Z представим в ФА $\psi(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \& x_2 = 0$

  ▶ Доказательство

  Возьмем формулу $\psi(x_1, x_2) := x_2 = 0$. Более формально: $\psi(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \& x_2 = 0$, тк формула с какими-то параметрами требует начилие этих параметров в кач-ве свободных переменных.
  Теперь покажем представимость ((1)докажем эту формулу и (2) покажем, что выполняется только при одном аргументе).

  (1) $y = 0 \vdash (x = x) \& (y = 0)$

  1. $y = 0\ (Hypothesis\ 1)$
  2. $x = x\ (\text{нетрудно показать по лемме }1)$
  3. $x = x \rightarrow y = 0 \rightarrow (x = x) \& (y = 0)\ (Sch.\ Ax.\ 5)$
  4. $2MP$

  (2) $\vdash \exists_1 y. \psi(x, y)$, $\exists y. (x = x) \& (y = 0)$ доказано по пред пункту + $Sch.\ Ax\ 12$, тогда осталось доказать $\forall a. \forall b. ((x = x) \& (a = 0)) \& ((x = x) \& (b = 0)) \rightarrow a = b$

1. $((x=x)\&(a=0))\&((x=x)\&(b=0))$ $(Hypothesis\ 1)$
2. $((x=x)\&(a=0))$ $(Sch.\ Ax.\ 3\ (from\ 1)\ +\ MP)$
3. $((x=x)\&(b=0))$ $(Sch.\ Ax.\ 4\ (from\ 1)\ +\ MP)$
4. $a=0$ $(Sch.\ Ax\ 4\ (from\ 2)\ +\ MP)$
5. $b=0$ $(Sch.\ Ax\ 4\ (from\ 3)\ +\ MP)$
6. $0=a\to 0=b\to a=b$ $(Ax\ 2\ (FA))$
7. $0=a$ $(\text{Лемма}\ 2)$
8. $0=b$ $(\text{Лемма}\ 2)$
9. $a=b$ $(2\ MP\ from\ 6)$
10. Дедукция
11. Навешивание кванторов по Лемме 1 (половина леммы)

- **Представимость примитива N (Инкремент).** Примитив N представим в ФА.
  $\alpha(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$

  ▶ Доказательство

  Возьмем формулу: $\alpha(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$. Покажем представимость. TODO()
- **Представимость примитива U (Проекция).** Примитив U представим в ФА
  $\beta(x_1, \ldots, x_{n+1}) := (\&_{i\neq k} x_i = x_i)\& x_k = x_{n+1}$

  ▶ Доказательство

  Возьмем формулу: $\beta(x_1, \ldots, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$, формальнее:
  $\beta(x_1, \ldots, x_{n+1}) := (\&_{i\neq k} x_i = x_i)\& x_k = x_{n+1}$. Покажем представимость. Доказательство почти такое же как с примитивом Z, единственная проблема, это большое кол-во конъюнкций (но они все очевидно доказуемы).
- **Представимость примитива S (Подстановка).** Пусть функции $f, g_1, .., g_k$ представимы в ФА. Тогда $S\langle f, g_1, .., g_k\rangle$ представим в ФА
  $\exists g_1 \ldots \exists g_k.\ \phi(g_1, \ldots, g_k, x_{n+1})\&\gamma_1(x_1, \ldots, x_n, g_1)\&\ldots\&\gamma_k(x_1, \ldots x_n, g_k)$

  ▶ Доказательство

  Пусть $f, g_1, .., g_k$ представляются формулаии $\phi, \gamma_1, ..\gamma_k$.
  Тогда $S\langle f, g_1, .., g_k\rangle$ будет представлена формулой:

  $$\exists g_1 \ldots \exists g_k.\ \phi(g_1, \ldots, g_k, x_{n+1})\&\gamma_1(x_1, \ldots, x_n, g_1)\&\ldots\&\gamma_k(x_1, \ldots x_n, g_k)$$

  Суть. У нас есть выражения γ_i, которые истинны, когда последний аргумент есть результат применения функции g к первым аргументам x_i, но как взять результаты мы не знаем, при этом зная, что они существуют (потому что функции f, g_i представимы и дают какой-то результат) поэтому навешиваем квантор существования.

  1. Подаем x_i
  2. Угадываем результаты промежуточные результаты с помощью квантора существования
  3. Подставляем в формулу ϕ промежуточные результаты, а x_{n+1} результат всей подстановки S

  Формальное док-во???

13. Бета-функция Гёделя. Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в формальной арифметике.

- **β-функция Гёделя.** $\beta(b,c,i) := b\%(1+(i+1)*c)$

  Здесь b, c параметры, а i - какой-то элемент последовательности. Ака b, c определяют что за массив, а i говорит о каком-то индексе.

  ▶ Представление бета-функции в ФА

  β-функция Гёделя представима в ФА формулой:
  $\beta(c,d,i,d) := \exists q.\,(b = q*(1+c*(i+1))+d)\&(d < 1+c*(i+1))\backslash$
  Деление b на x с отстатком: найдутся частное (q) и остаток (d), что $b = q*x+d$ и $0 \le d < x$

  Доказать формально???

  Теорема. Китайская теорема об остатках (вариант формулировки):

  если $u_0, \ldots, u_n$ - попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\%u_i$

  Теорема. Главное свойство β-функции.

  Если $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_0$, то найдутся такие $b, c \in \mathbb{N}_0$, что $a_i = \beta(b,c,i)$

  ▶ Доказательство

  Положим $c = max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1+c*(i+1)$.

  1. Покажем $\text{н о д}\,(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$. Доказательство от противного. Пусть p-простое, $u_i \text{ делится на } p$ и $u_j \text{ делится на } p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c*(j-i)$. Значит, $c \text{ делится на } p$ или $(j-i) \text{ делится на } p$. Тк $j - i \le n$, то $c \text{ делится на } (j-i)$, поэтому если и $j - i \text{ делится на } p$, то все равно $c \text{ делится на } p$. Но и $1+c*(i+1) \text{ делится на } p$, отсюда $1 \text{ делится на } p$ - что невозможно.
  2. $0 \le a_i < u_i$. Очевидно из определения.

  Условие китайской теоремы выполняется и найдется b, что:
  $a_i = b\%(1+(i+1)*c) = \beta(b,c,i)$

- **Представимость примитива R (Примитивная рекурсия).** Примитив R представим в ФА. примитив $R\langle f, g\rangle$ представим в ФА формулой $\rho(x_1, \ldots, x_n, y, a)$:

  $\exists b.\,\exists c.\,(\exists a_0.\,\beta(b,c,0,a_0)\&\phi(x_1,\ldots,x_n,a_0))$

  $\&\forall k.\,k < y \to \exists d.\,\exists e.\,\beta(b,c,k,d)\&\beta(b,c,k',e)\&\gamma(x_1,\ldots,x_n,k,d,e)$

  $\&\beta(b,c,y,a)$

  ▶ Доказательство

  Начнем с понимания определения примитивной рекурсии. Это цикл, который многократно вызывает функции в процессе вычисления. Соответственно, чтобы удостовериться в том, что цикл действительно правильно выполняется, нам надо запомнить каждую итерацию и проверить, что она действительно получается из предыдущей. Следовательно надо научиться строить длинные списки и каким-то образом научиться их представлять в рамках атуральных чисел.

Пусть $f:\mathbb{N}_0^n\to\mathbb{N}_0$ и $g:\mathbb{N}_0^{n+2}\to\mathbb{N}_0$ представлены формулами ϕ и γ. Зафиксируем $x_1,\dots,x_n,y\in\mathbb{N}_0$

Шаг вычисления	Обозначение	Утверждение в ФА
$R\langle f,g\rangle(x_1,\dots,x_n,0)=f(x_1,\dots,x_n)$	a_0	$\vdash\phi(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n},\overline{a_0})$
$R\langle f,g\rangle(x_1,\dots,x_n,1)=g(x_1,\dots,x_n,0,a_0)$	a_0	$\vdash\gamma(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n},\overline{a_1})$
...	...	...
$R\langle f,g\rangle(x_1,\dots,x_n,1)=g(x_1,\dots,x_n,y-1,a_{y-1}$	a_y	$\vdash\gamma(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n},\overline{a_y})$

По свойству β-функции, найдутся b и c, что $\beta(b,c,i)=a_i$ для $0\le i\le y$

Таким образом примитив $R\langle f,g\rangle представим в ФА формулой$ \rho(x_1,...,x_n,y,a)$:

$\exists b.\exists c.\,(\exists a_0.\,\beta(b,c,0,a_0)\&\phi(x_1,\dots,x_n,a_0))$

$\&\forall k.\,k<y\to\exists d.\exists e.\,\beta(b,c,k,d)\&\beta(b,c,k',e)\&\gamma(x_1,\dots,x_n,k,d,e)$

$\&\beta(b,c,y,a)$

Пояснение.
1 строка. b,c просто параметры. 1 скобка. Есть значение a_0, которое с одной стороны, является запомненным значением β-функции Гёделя с 0 значением, с другой стороны явяется значением применения функции f к аргументам x_i.
2 строка. Промежуточные значения задаются формулой γ. Бета-функция от двух соседних элементов равно d,e соответсвенно и результат применение $\gamma\ from\ x_i\ and\ d=e$
3 строка. Последний элемент данного выражения есть последний элемент бета-функции Гёделя
Формальное доказательство???

- **Представимость примитива M (Минимизация).** Примитив M представим в ФА. Пусть функция $f:\mathbb{N}_0^{n+1}\to\mathbb{N}_0$ представима в ФА формулой $\phi(x_1,\dots,x_n,y)$. Тогда примитив $M\langle f\rangle$ представим в ФА формулой:

  ▶ Доказательство
- **Представимость рекурсивных в формальной арифметике.** Рекурсивные функции представимы в формальной арифметике (индукция по длине док-ва)

  ▶ Доказательство

14. Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.

- **Гёделева нумерация.** Будем называть Гёделевой нумераций следующую конструкцию. Пусть $\langle a_0,\dots,a_{n-1}\rangle$-некоторый список положительных натуральных чисел. Пусть p_i-простое число номер i, тогда Гёделева нумерация этого списка:

  $\ulcorner\langle a_0,...,a_{n-1}\rangle\urcorner=2^{a_0}\ast 3^{a_1}\ast...\ast p_{n-1}^{a_{n-1}}$
- Также мы можем составить Гёделеву нумерацию для всей программы, в тч для отдельных символов:

Номер	Символ
3	(
5	)
7	'
9	.
11	$\neg$
13	$\rightarrow$
15	$\lor$
17	$\&$
19	$\forall$
21	$\exist$
23	$\vdash$
$25+6k$	x_k
$27+6\ast 2^k\ast 3^n$	f_k^n
$29+6\ast 2^k\ast 3^n$	p_k^n

- **Рекурсивность функций представимых в ФА.** Функции, представимые в ФА, рекурсивны.

  ▶ Доказательство

15. Непротиворечивость и ω-непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики, её неформальный смысл.

- **Непротиворечивость.** Формальная арифметика непротиворечива, если нет формулы α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$
- **ω-непротиворечивость.** Формальная арифметика ω-непротиворечива, если для любой формулы $\phi(x)$, что
  - $\vdash\phi(\overline{p})$ при всех $p\in\N_0$ выполено $\nvdash\exist p.\neg\phi(p)$
  - (менее фомально) пусть $\vdash\phi(\overline{0}),\vdash\phi(\overline{1})$... Значит,z нет p, что $\vdash\neg\phi(p)$
- **Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики.**

  def. Определим функция $W_1:W_1(x,p)=1$, если $x=\ulcorner\alpha\urcorner$, где α- формула с единственной свободной переменной x_1, а p- доказательство самоприменения $\alpha:\vdash\alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$ и $W_1(x,p)=0$, если это не так.

  Теорема. Существует формула ω_1 со своодными переменными x_1,x_2 такая, что:

  1. $\vdash\omega_1(\overline{\ulcorner\phi\urcorner},\overline{p})$, если p - гёделев номер доказательства самоприменения ϕ
  2. $\vdash\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\phi\urcorner},\overline{p})$ иначе

▶ Доказательство

Теорема Гёделя

- Если формальная арифметика непротиворечива,то $\nvdash\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$
- Если формальная арифметика ω-непротиворечива,то $\nvdash\neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$

  $\sigma(x):=\forall p.\neg\omega_1(x,p)$: $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ означает "я не доказуема". При этом мы показали, что она не доказуема, значит она истинна? Покажем это формально

  Теорема $\models\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$ В стандартной интерпретации формальной арифметики: $D=\N_0,a'=a+1$ и тд.

  ▶ Доказательство

  $\nvdash\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, значит, при любом $p\in\N_0$ выполнено $W_1(\ulcorner\sigma\urcorner,p)=0$. То есть, $[\neg\omega_1(\ulcorner\sigma\urcorner,p)]=И$, то есть $[\forall p.\neg\omega_1(x,p)$: $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})] = [\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})]=И$

16. Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера, её неформальный смысл. Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте арифметики, $Consis$. Неформальное пояснение метода доказательства.

- **Первая теорема Гёделя в форме Россера.**
  - def. $W_2(x,p)=1$, если p-доказательство отрицания самоприменения.
  - Лемма. Существует формула ω_2, что $\vdash\omega_2(\overline{x},\overline{p})$, если $W_2(x,p)=1$, иначе $\vdash\neg\omega_2(\overline{x},\overline{p})$
  - **Теорема**. Пусть $\alpha(x):=\forall p.\omega_1(x,p)\rightarrow\exist q.q<p\&\omega_2(x,q)$, тогда $\nvdash \alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$ и $\nvdash\neg \alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})$

    Описание. Мы говорим, что если p является доказательством самоприменения x, то найдется доказательство q, причем, с меньшим Гёделевым номером, чем p, который является док-вом отрицания самоприменения x. Тогда не доказуемо ни самоприменение α, ни отрицание самоприменения.

    Менее формальное определение теоремы. Если существует доказательство самоприменения α, то существует и доказательство отрицания самоприменения α, причем с меньшим номером

    TODO (степик лег)