Mathematical Logic Questions

1. **Исчисление высказываний. Общезначимость, следование, доказуемость, выводимость. Корректность, полнота, непротиворечивость. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.**

- **Общезначимость($\models \alpha$) .** Общезначимое высказывание - высказывание, которое истинно при любой оценке пропозициональных переменных.
- **Следование($\Gamma \models \alpha$).** Пусть $\Gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ \dots, \gamma_n$. Тогда α следует из Γ, если при истинной оценке Γ (каждого высказывания из Γ) следует истинность α.
- **Доказуемость($\vdash \alpha$) .** Высказывание α доказуемо, если существует доказательство $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ и α_k совпадает с α

  Доказательство. Доказательство в исчислении высказываний — это некоторая конеч-
  ная последовательность выражений (высказываний) $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$, что каждое из высказываний α_i либо является аксиомой, либо получается из других утверждений $\alpha_{P_1}, \alpha_{P_2}, \dots, \alpha_{P_n}$ $(P_1 \dots P_n < i)$ по правилу вывода.
- **Выводимость($\Gamma \vdash \alpha$).** Высказывание α выводимо из списка гипотез Γ, если существует вывод $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ и α_k совпадает с α.

  Вывод. Доказательство, в котором могут использоваться гипотезы.
  Ака. Вывод в исчислении высказываний — это некоторая конеч-
  ная последовательность выражений (высказываний) $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$, что каждое из высказываний α_i либо является аксиомой, либо получается из других утверждений $\alpha_{P_1}, \alpha_{P_2}, \dots, \alpha_{P_n}$ $(P_1 \dots P_n < i)$ по правилу вывода, либо является гипотезой из списка Γ.
- **Корректность($\vdash \alpha \ \Rightarrow \ \models \alpha$).** Если высказывание доказуемо, то оно общезначимо
- **Полнота($\models \alpha \ \Rightarrow \ \vdash \alpha$).** Если высказывание общезначимо, то оно доказуемо.
- **Непротиворечивость.**
- **Теорема о дедукции.** Пусть имеется Γ, α, β. Утверждение $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

  (если из списка высказываний Γ выводится импликация α и β, то можно перестроить вывод таким образом, что из из Γ, α выводимо β и наоборот)

2. **Теорема о полноте исчисления высказываний.**

- Классическое исчисление высказываний полно.

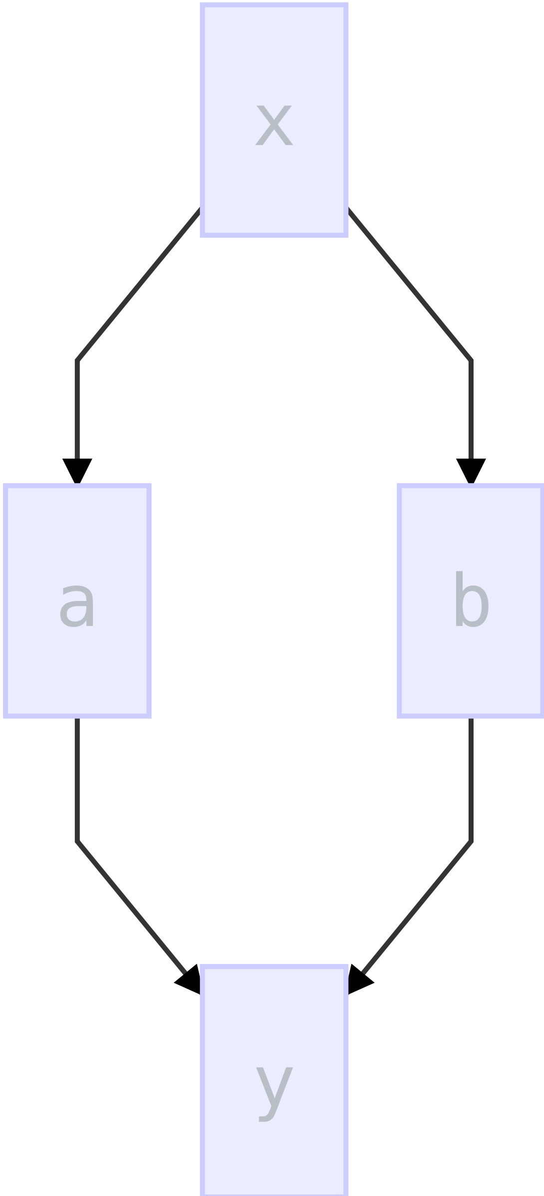
  Полнота($\models \alpha \ \Rightarrow \ \vdash \alpha$). Если высказывание общезначимо, то оно доказуемо.

3. **Интуиционистское исчисление высказываний. BHK-интерпретация. Решётки. Булевы и псевдобулевы алгебры.**

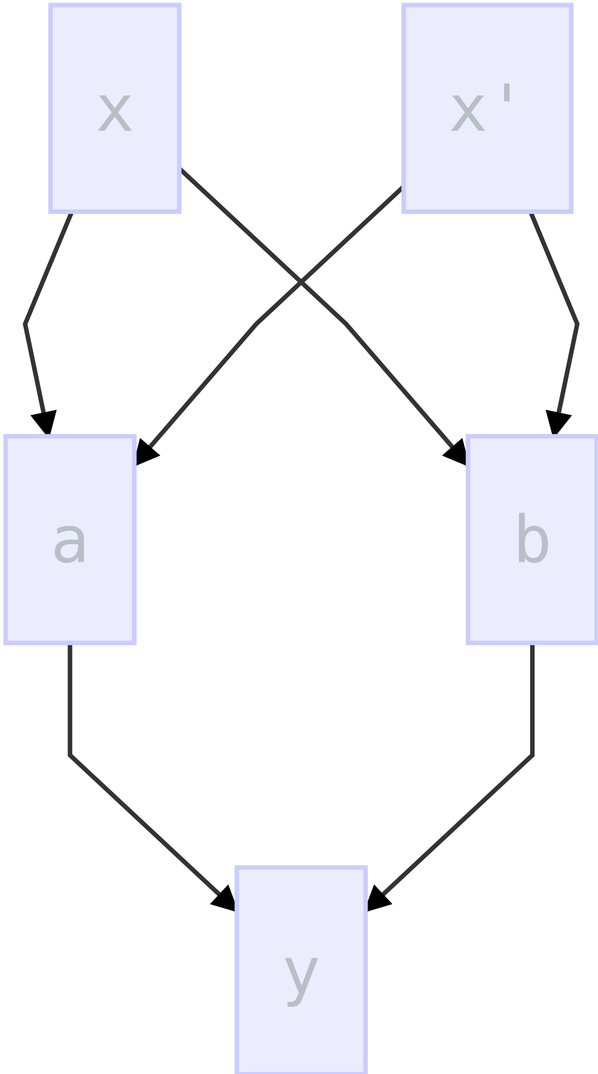
- **BHK-интерпретация (Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation).** Пусть заданы высказывания α, β, тогда:
  - мы считаем $\alpha \& \beta$ доказанным, если у нас есть доказательство α и есть доказательство β
  - мы считаем $\alpha \vee \beta$ доказанным, если у нас есть доказательство α или доказательство β, и мы точно знаем какое

- мы считаем $\alpha \to \beta$ доказанным, если из доказательства α мы можем построить доказательство β
- мы считаем $\perp$ (aka 0) утверждением не имеющим доказательства
- $\neg\alpha$ есть сокращение $\alpha \to \perp$. Мы считаем $\neg\alpha$ доказанным, если мы умее из доказательства α получить противоречие

- **Решётка.** Частично-упорядоченное(рефлексивно, транзитивно, антисимметрично) множество $\langle M, \sqsubseteq \rangle$, в котором, для любых a, b определены две операции:
  - верняя грань a, b: $a + b = c$, наименьший c, что $a \sqsubseteq c, b \sqsubseteq c$
  - нижняя грань a, b: $a * b = c$, наибольший c, что $c \sqsubseteq a, c \sqsubseteq b$
  - example: $a + b = x, a * b = y$



- наименьший и минимальный:
  x-наименьший, если для всех $t \in M: \ x \sqsubseteq t$
  x-минимальный, если нет такого $t \in M: \ t \sqsubseteq x$
  example: x, x' : никакой не наименьший, но оба минимальные



- **Дистрибутивная решетка.** Для любых a, b, c: $(a + b) * c = a * c + b * c$
  - Решетка дистрибутивна т. и т. т., когда при любых $a, b, c : a * b + c = (a * c) + (b * c)$
- **Импликативная решётка.** Решетка с псевдодополнением.
  - Операция псевдополнения. $c = a \to b$, c - это такой наибольший t, что $t * a \sqsubseteq b$
  - В импликативной решетке есть наибольший элемент
- **Псевдобулева алгебра (ака алгебра Гейтинга).** Импликативная решетка с 0
  - 0 - наименьший элемент решетки
- **Булева алгебра.** Псевдобулева алгебра, в которой для любых a: $a + (a \to 0) = 1$

4. Алгебра Линденбаума. Полнота интуиционистского исчисления высказываний в псевдобулевых алгебрах.

sd

5. **Модели Крипке. Сведение моделей Крипке к псевдобулевым алгебрам. Нетабличность интуиционистского исчисления высказываний.**

s

6. **Гёделева алгебра. Операция $\Gamma(A)$. Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний.**

s

7. **Исчисление предикатов. Общезначимость, следование, выводимость. Теорема о дедукции в исчислении предикатов.**

s

8. **Непротиворечивые множества формул. Доказательство существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов.**

s

9. **Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Доказательство полноты исчисления предикатов.**

s

10. **Теории первого порядка, структуры и модели. Аксиоматика Пеано. Арифметические операции. Формальная арифметика.**

s

11. **Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции. Функция Аккермана. Примитивная рекурсивность арифметических функций, функций вычисления простых чисел, частичного логарифма.**

s

12. **Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Представимость примитивов N, Z, S, U в формальной арифметике.**

s

13. **Бета-функция Гёделя. Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в формальной арифметике.**

s

14. **Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.**

s

15. **Непротиворечивость и ω-непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики, её неформальный смысл.**

s

16. **Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера, её неформальный смысл. Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте арифметики, $Consis$. Неформальное пояснение метода доказательства.**

s