Mathematical Logic Questions

1. Исчисление высказываний. Общезначимость, следование, доказуемость, выводимость. Корректность, полнота, непротиворечивость. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.

- **Общезначимость($\models \alpha$) .** Общезначимое высказывание - высказывание, которое истинно при любой оценке пропозициональных переменных.
- **Следование($\Gamma \models \alpha$).** Пусть $\Gamma = \gamma_1, \gamma_2, \ \ldots, \gamma_n$. Тогда α следует из Γ, если при истинной оценке Γ (каждого высказывания из Γ) следует истинность α.
- **Доказуемость($\vdash \alpha$) .** Высказывание α доказуемо, если существует доказательство $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ и α_k совпадает с α

  Доказательство. Доказательство в исчислении высказываний — это некоторая конечная последовательность выражений (высказываний) $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, что каждое из высказываний α_i либо является аксиомой, либо получается из других утверждений $\alpha_{P_1}, \alpha_{P_2}, \ldots, \alpha_{P_n}$ $(P_1 \ldots P_n < i)$ по правилу вывода.
- **Выводимость($\Gamma \vdash \alpha$).** Высказывание α выводимо из списка гипотез Γ, если существует вывод $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$ и α_k совпадает с α.

  Вывод. Доказательство, в котором могут использоваться гипотезы.
  Ака. Вывод в исчислении высказываний — это некоторая конеч-
  ная последовательность выражений (высказываний) $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, что каждое из высказываний α_i либо является аксиомой, либо получается из других утверждений $\alpha_{P_1}, \alpha_{P_2}, \ldots, \alpha_{P_n}$ $(P_1 \ldots P_n < i)$ по правилу вывода, либо является гипотезой из списка Γ.
- **Корректность($\vdash \alpha \ \Rightarrow \ \models \alpha$).** Если высказывание доказуемо, то оно общезначимо
- **Полнота($\models \alpha \ \Rightarrow \ \vdash \alpha$).** Если высказывание общезначимо, то оно доказуемо.
- **Непротиворечивость.**
- **Теорема о дедукции.** Пусть имеется Γ, α, β. Утверждение $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

  (если из списка высказываний Γ выводится импликация α и β, то можно перестроить вывод таким образом, что из из Γ, α выводимо β и наоборот)

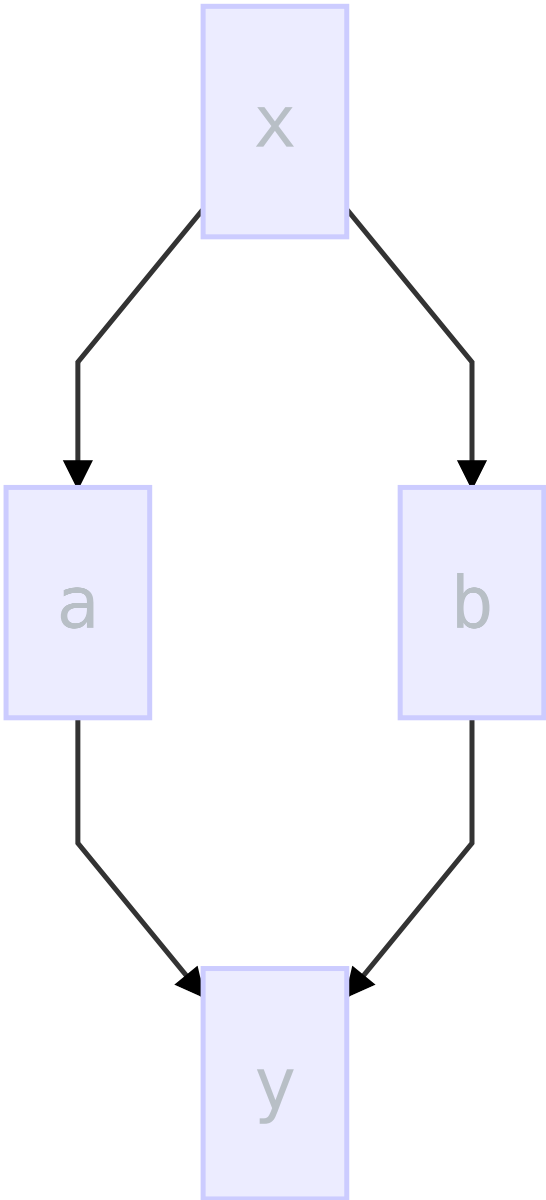
2. Теорема о полноте исчисления высказываний.

- Классическое исчисление высказываний полно.

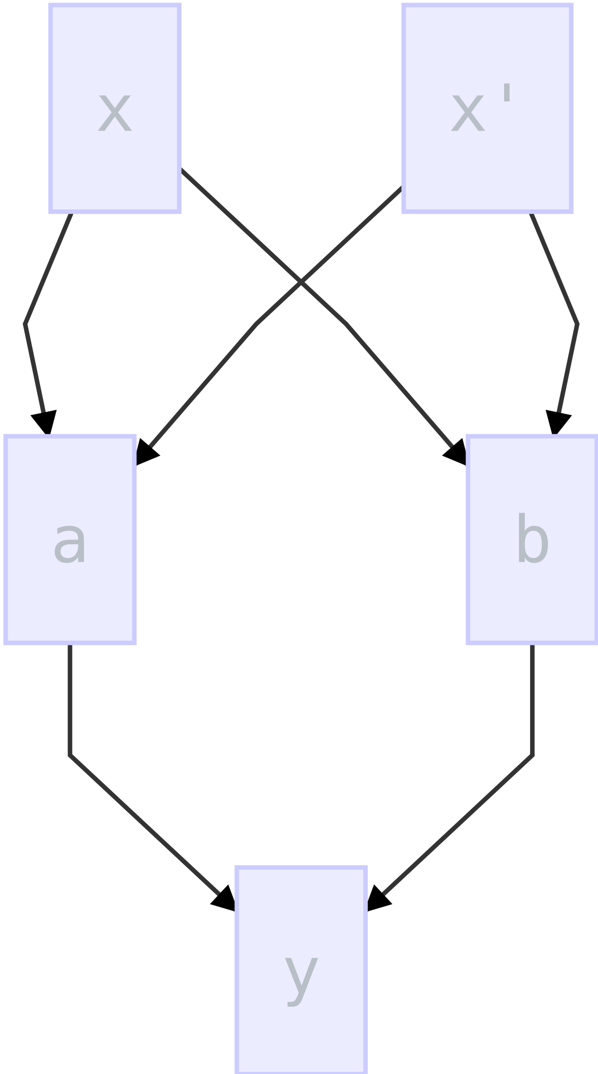
  Полнота($\models \alpha \ \Rightarrow \ \vdash \alpha$). Если высказывание общезначимо, то оно доказуемо.

3. Интуиционистское исчисление высказываний. BHK-интерпретация. Решётки. Булевы и псевдобулевы алгебры.

- **BHK-интерпретация (Brouwer-Heyting-Kolmogorov interpretation).** Пусть заданы высказывания α, β, тогда:
    - мы считаем $\alpha \& \beta$ доказанным, если у нас есть доказательство α и есть доказательство β
    - мы считаем $\alpha \vee \beta$ доказанным, если у нас есть доказательство α или доказательство β, и мы точно знаем какое
    - мы считаем $\alpha \rightarrow \beta$ доказанным, если из доказательства α мы можем построить доказательство β
    - мы считаем $\perp$ (aka 0) утверждением не имеющим доказательства
    - $\neg\alpha$ есть сокращение $\alpha \rightarrow \perp$. Мы считаем $\neg\alpha$ доказанным, если мы умее из доказательства α получить противоречие
- **Решётка.** Частично-упорядоченное(рефлексивно, транзитивно, антисимметрично) множество $\langle M, \sqsubseteq \rangle$, в котором, для любых a, b определены две операции:
    - верняя грань a, b: $a + b = c$, наименьший c, что $a \sqsubseteq c, b \sqsubseteq c$
    - нижняя грань a, b: $a * b = c$, наибольший c, что $c \sqsubseteq a, c \sqsubseteq b$
    - example: $a + b = x, a * b = y$



- наименьший и минимальный:
  x-наименьший, если для всех $t \in M: \ x \sqsubseteq t$
  x-минимальный, если нет такого $t \in M: \ t \sqsubseteq x$
  example: x, x' : никакой не наименьший, но оба минимальные



- **Дистрибутивная решетка.** Для любых a, b, c: $(a+b)*c = a*c+b*c$
  - Решетка дистрибутивна т. и т. т., когда при любых $a, b, c : a*b+c = (a*c)+(b*c)$
- **Импликативная решётка.** Решетка с псевдодополнением.
  - Операция псевдополнения. $c = a \to b$, c - это такой наибольший t, что $t*a \sqsubseteq b$
  - В импликативной решетке есть наибольший элемент
- **Псевдобулева алгебра (ака алгебра Гейтинга).** Импликативная решетка с 0
  - 0 - наименьший элемент решетки
- **Булева алгебра.** Псевдобулева алгебра, в которой для любых a: $a+(a \to 0) = 1$

4. Алгебра Линденбаума. Полнота интуиционистского исчисления высказываний в псевдобулевых алгебрах.

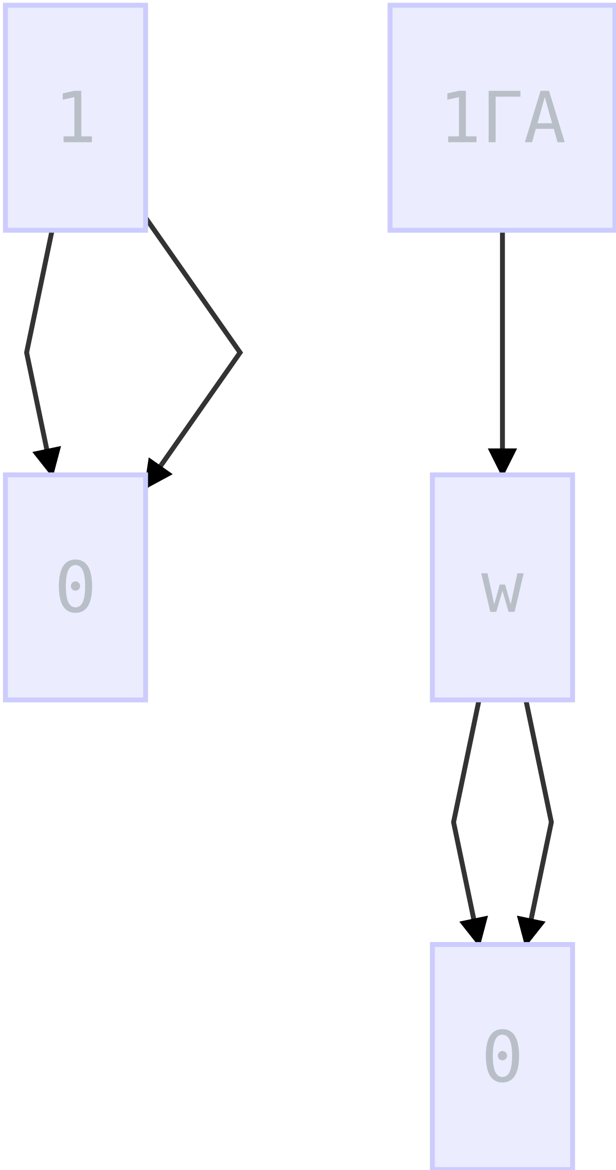
- **Алгебра Линдебаума.** Множество множеств (классов) факторизованных по отношению эквивалентности.
    - Определение. Возьмем множество всех формул ИИВ, тогда:
    1. $\alpha \sqsubseteq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$
    2. $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \sqsubseteq \beta$ и $\beta \sqsubseteq \alpha$
- Полнота ИИВ???

5. Модели Крипке. Сведение моделей Крипке к псевдобулевым алгебрам. Нетабличность интуиционистского исчисления высказываний.

- ???
- Не существует полной табличной модели ИИВ

6. Гёделева алгебра. Операция $\Gamma(A)$. Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний.

- **Гёделева алгебра** Алгебра A - гёделева, если для любых $a, b \in A$ если $a + b = 1$, то $a = 1$ и $b = 1$.
- **Гёдевелизация ($\Gamma(A)$)** Добавление элемента, который больше всех



Алгебра с добавлением ω и $1_{\Gamma(A)}$. Причем если $a \in A$, то $\omega \geqslant a, 1_\Gamma(A) \geqslant a$ и $1_\Gamma(A) > \omega$

- Дизъюнктивность ИИВ. Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

7. Исчисление предикатов. Общезначимость, следование, выводимость. Теорема о дедукции в исчислении предикатов.

-

8. Непротиворечивые множества формул. Доказательство существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов.

s

9. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Доказательство полноты исчисления предикатов.

s

10. Теории первого порядка, структуры и модели. Аксиоматика Пеано. Арифметические операции. Формальная арифметика.

- **Теория первого порядка.** Теорией первого порядка назовем исчисление предикатов с дополнительными ("нелогическими" или "математическими")
  - предикатными и функциональными символами
  - аксиомами
    сущности, взятые из исходного исчисления высказываний, назовём логическими.
- **Структура.** ???
- **Модель.** ???
- **Формальная арифметика.** формальная арифметика - теория первого порядка, со следующими добавленными нелогическими:
  - двуместными функциональными символами $(+)$,$(*)$, одноместным функциональным символом $(')$, нульместным функциональным символом 0;
  - двуместным предикатным символом $(=)$;
  - восемью аксиомами:
    - $(A1)\ a = b \to a = c \to b = c$ (транзитивность равенства)
    - $(A2)\ a = b \to a' = b'$ (инъективность штриха)
    - $(A3)\ a' = b' \to a = b$ (инъективность штриха)
    - $(A4)\ \neg a' = 0$ (у нуля нет предшественников)
    - $(A5)\ a + 0 = a$ (определение сложения)
    - $(A6)\ a = b' = (a + b)'$ (определение сложения)
    - $(A7)\ a * 0 = 0$ (определение умножения)
    - $(A8)\ a * b' = a * b + a$ (определение умножения)
  - схемой аксиом индукции
    $\psi[x := 0]\&(\forall x.\,(\psi \to \psi[x := x'])) \to \psi$

11. Примитивно-рекурсивные и рекурсивные функции. Функция Аккермана. Примитивная рекурсивность арифметических функций, функций вычисления простых чисел, частичного логарифма.

- **Примитивы:**
  1. Ноль. $Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, Z(x) = 0$
  2. Инкремент. $N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, N(x) = x'$
  3. Проекция. $V_i^n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, V_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$
  4. Подстановка. Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g_1, \dots, g_n : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$, то $S\langle f, g_1, \dots, g_n\rangle : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$, при этом:
  $$S\langle f, g_1, \dots, g_n\rangle(x_1, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))$$
  5. Примитивная рекурсия. Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$, то $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, при этом
  $$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n), y = 0 \\ g(x_1, \dots, x_n, y-1, R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y)), y > 0 \end{cases}$$
  6. Минимизация. Если $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, то $\mu\langle f\rangle : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, при этом
  $$\mu\langle f\rangle(x_1, \dots, x_n) = \text{такое минимальное число } y, \text{ что } f(x_1, \dots, x_n, y) = 0.$$
  $$\text{Если такого } y \text{ нет, то результат примитива неопределен}$$
- **Примитивно-рекурсивная функция.** Функция называется примитивно-рекурсивной, если возможно построить выражение только из первых пяти примитивов, такое, что оно при всех аргументах возвращает значение, равно значению требуемой функции.
- **Рекурсивная функция.** Если функция может быть выражена только из 6 примитивов, то она называется рекурсивной.
- **Функция Аккермана.**
$$A(m, n) = \begin{cases} n+1, \text{ если } m = 0 \\ A(m-1, 1), \text{ если } m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), \text{ если } m > 0, n > 0 \end{cases}$$
- Любая функция представимая в ФА рекурсивна (верно и обратное)
- Простые числа??
- Логарифм??

12. Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Представимость примитивов N, Z, S, U в формальной арифметике.

- **Выразимое отношение.** Отношение R называется выразимым (в формальной арифметике), если существует такая формула $\alpha(x_1, \dots x_n)$ с n свободными переменными, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_n$
  1. если $(k_1, \dots, k_n) \in R$, то доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$
  2. если $(k_1, \dots, k_n) \notin R$, то доказуемо $\neg\alpha(\overline{k_1}, \dots, \overline{k_n})$

- **Представимость.** Функция f от n аргументов называется представимой в формальной арифметике, если существует такая формула $\alpha(x_1, \ldots, x_{n+1})$ с $n+1$ свободной переменной, что для любых натуральных $k_1, \ldots, k_n$:
    1. $f(k_1, \ldots, k_n) = k_{n+1}$ тогда и только тогда, когда доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_{n+1}})$
    2. Доказуемо $\exists! b. \alpha(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n}, \overline{b})$,

       где $\exists! y. \alpha(y) = (\exists y. \alpha(y)) \& \forall a. \forall b. \alpha(a) \& \alpha(b) \to a = b$
- **Представимость примитива Z (Ноль).** Примитив Z представим в ФА
- **Представимость примитива N (Инкремент).** Примитив N представим в ФА
- **Представимость примитива S (Подстановка).** Примитив S представим в ФА
- **Представимость примитива U (Проекция).** Примитив U представим в ФА

13. Бета-функция Гёделя. Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в формальной арифметике.

- **β-функция Гёделя.** $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i+1) * c)$
- **Представимость примитива R (Примитивная рекурсия).** Примитив R представим в ФА
- **Представимость примитива M (Минимизация).** Примитив M представим в ФА
- **Представимость рекурсивных в формальной арифметике.** Рекурсивные функции представимы в формальной арифметике (индукция по длине док-ва)

14. Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.

- **Гёделева нумерация.** Будем называть Гёделевой нумераций следующую конструкцию. Пусть $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$-некоторый список оложительных натуральных чисел. Пусть p_i-простое число номер i, тогда Гёделева нумерация этого списка:

  $\ulcorner \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \urcorner = 2^{a_0} * 3^{a_1} * \ldots * p_{n-1}^{a_{n-1}}$
- Также мы можем составить Гёделеву нумерацию для всей программы, в тч для отдельных символов:

Номер	Символ
3	(
5	)
7	'
9	.
11	$\neg$
13	$\rightarrow$
15	$\vee$
17	$\&$
19	$\forall$
21	$\exists$
23	$\vdash$
$25 + 6k$	x_k
$27 + 6 * 2^k * 3^n$	f_k^n
$29 + 6 * 2^k * 3^n$	p_k^n

- **Рекурсивность функций представимых в ФА.** Рекурсивные функции представимы в ФА

15. Непротиворечивость и ω-непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики, её неформальный смысл.

- ???

16. Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера, её неформальный смысл. Формулировка второй теоремы Гёделя о неполноте арифметики, $Consis$. Неформальное пояснение метода доказательства.

- ???