теория сложности

literature:

- Arora Barak "Complexity Modern Approach" (1st part)
- Garry Johnson "Трудно разрешенные задачи"
- site: compendium of NP-complete problems

outline:

NP-полнота

Характеристики сложности вычисления.
Есть распознователи $(\Sigma^* \to B)$ и преобразователи $(\Sigma^* \to \Sigma^*)$

- время: $T(n) = O(f(n))$
- память: $S(n)$
- random: $R(n)$

$DTIME(f) = \{L \mid \exists\, program\ p:$
$1.\ x \in L \implies p(X) = 1, x \notin L \implies p(x) = 0$
$2.\ n = |x| \implies T(p, x) = O(f(n))\}$

$h = (01)^* \in DTIME(n)$

$\widetilde{DTIME}(f) = \{h \mid \dots\}$

палинромы: $Pal \in DTIME_{RAM}(n)$
$Pal \notin DTIME_{TM}(n)$

$P = \cup_{f-polynom} DTIME(f) = \cup_{i=0}^{\infty} DTIME(n^i)$

$p(n)q(n) : p+q, p*q, p(q(n))$
$L_1 L_2 \in P : L_1 \cup L_2 \in P, L_1 \cap L_2 \in P, \overline{L_1} \in P, L_1 L_2 \in P, L_1^* \in P$

концепция недетрминированных вычислений

Допускается $\iff$ $\exists$ последовательность переходов, которая приводит к допуску
недетерминировання программа p(x) допускает $\iff$ $\exists$ последовательность недетерминированных выборов, приводящая к допуску
p(x) не допускает $\iff$ $\forall$ последовательности выборов не допуск

def *NTIME(f)* = $\{L \mid \exists$ недетерминированная программа p
$1)\ p(x) - acc \iff x \in L;\ 2)\ T(p, x) = O(f(n))\}$

> **ex** задача о гамильтоновом цикле
>
> ```
> p(G)
>  vis[1..n]: arr of bool
>  s = 1
>  for i = 1..n
>      u = ?{1..n}
>      if (vis[u]) return false
>      if (su not in EG) return false
>      vis[u] = true
>      s = u
>  if (s ≠ 1) return false
>  return true
> ```

> **ex** `isComposite(z)`, $n = \lceil \log_B z \rceil$, где B - это основание системы счисления
>
> ```
> a = ?{2..z-1}  // T = logn
> if z % a = 0   // poly(logn)
>  return true
> return false
> ```

Нельзя свопнуть бранчи и сделать проверку на простоту, потому что это `true` и `false` не симметричны в недетерминированных вычислениях (нельзя даже `isPrime(n): return !isComposite(n)`)

---

def NP = $\cup_{f-polynome}\ NTIME(f)$, *nondeterministic polynomial*
stat $P \subset NP$

? $P = NP$

неформально: класс P - класс задач, которые можно решить за полином, класс NP - класс задач, решение которых можно проверить за полином

Σ_1 - класс языков, в которых можно формализовать класс решения, которое можно проверить за полином
$\Sigma_1 = \{L \mid \exists$ полином p, работающая за полином программа R(x, y) - детерминированная
$x \in L \iff \exists\, y$ (называют *сертификат*): $|y| \le p(|x|)\ and\ R(x, y) = 1$
$x \notin L \implies \forall\, y\ (|y| \le p(|x|))\ R(x, y) = 0\}$

> **ex** гамильтонов цикл $Ham \in \Sigma_1$

```
R(G, y):
 y as arr[1..n] of int
 // we can add: y = ?arr[i..n] of {1..n} // O(n)
 vis = arr[1..n] of bool
 for i = 1..n
     if (y[i] y[i mod n+1] not in EG) return false
     if vis[y[i]] return false
     vis[y[i]] = true
 return true
```

Th $NP = \Sigma_1$

$L \in NP, L \in \Sigma_1$

неформально: NP - определение на языке недетерминированных формат, Σ_1 - определение на языке сертификатов

сведения

def сводим B к A *по Тьюрингу*: A, B - языки, C - сложностный класс, $B \in C^A$ (C *с оракулом* A). не считая вызова функции `isInA(x): Bool`, остальные ограничения класса C учитываются.

def сведение по *Куку-Левину* (*Тьюрингу за полином*) $B \in P^A$

def *сведене по Карпу* (*m-сведение*): язык B сводится к A ($B \leq A$), если $\exists$ вычислимая за полином функция f такая, что $x \in B \iff f(x) \in A$

ex $IND = \{\langle G, k\rangle |$ в $G\ d$ независимое множество размера k }

$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle |$ в $G \exists$ клика размера k}

$IND \leq CLIQUE$

$f(\langle G, k\rangle) = \langle \overline{G}, k\rangle$ // за полином

в G и множестве размера k $\iff$ в $\overline{G}$ $\exists$ клика размера k

$VCOVER = \{\langle G, k\rangle |$ в G $\exists$ вершинное покрытие размера k }

$IND \leq VCOVER$

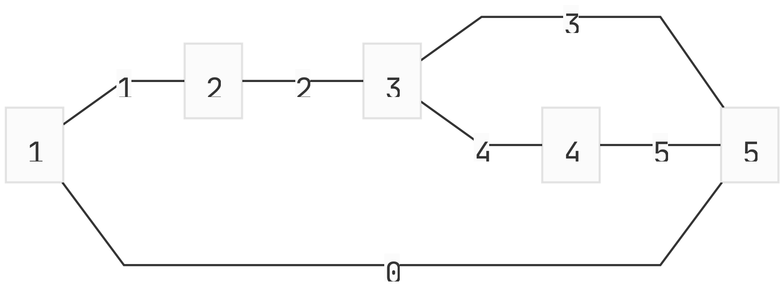
$f(\langle G, k\rangle) = \langle G, n - k\rangle$, где n - число вершин G

ex $SUBSETSUM = \{\langle [x_1, x_2, \dots, x_n], s\rangle \mid \exists I \subset \{1, 2, \dots, n\}, \sum_{i \in I} = s, x_i \in \mathbb{N}\}$

`dp[i][w]` - можно ли первые i $\Sigma = w$ // w - $2^{|s|}$

$VCOVER \leq SUBSETSUM$

пронумеруем вершины с единицы, рёбра – с нуля, битовыми масками каждой вершине сопоставляем рёбра



	6	5	4	3	2	1	0
x_1	1	0	0	0	0	1	1
x_2	1	0	0	0	1	1	0
x_3	1	0	1	1	1	0	0
x_4	1	1	1	0	0	0	0
x_5	1	1	0	1	0	0	1
s	3	2	2	2	2	2	2

$x_6 = 1$
$x_7 = 10$
$x_8 = 100$
$x_9 = 1000$
$x_{10} = 10000$
$x_{11} = 100000$
$f(\langle G, k\rangle)$, n - число вершин, m - число рёбер, $s = k22...2$, m двоек

f сводит VCOVER к SUBSETSUM
$\Rightarrow$: в G $\exists$ вершинное погрытие размера k
$\Leftarrow$: $[x_1 \dots, x_{n+n}]$, s $\exists$ решение $\Rightarrow$ в G $\exists$ вершинное покрытие размера k

def язык называется *NP-hard* (*NP-трудный*), если выполнены следующие условия:
$\forall B \in NP : B \leq A$
def A называется *NP-complete* (*NP-полный*), если:
1) $A \in NPH$
2) $A \in NP$
// $NPC = NPH \cap NP$

ex BH_{1N} (bounded halting unary nondeterministic)
$BH_{1N} = \{\angle m, x, 1^t\rangle$ | m – недетрминированння машина тьюринга, x – вход, t – ограничение времени: $\exists$ последоватеьность недетерминированння выборов машины Тьюринга m, что она допускается за t шагов: `m(x) = 1`}

Th $BH_{1N} \leq NPC$

1. $BH_{1N} \in NPH$
   $A \in NP$
   // def по Карпу
   m_A - недетерминированння машина Тьюринга, решающая A за полином
   $p(n) = cn^k$
   $f(x) = \langle m_A, x, q^{p(|x|)}\rangle$
   $x \in A \iff \exists$ последовательность выборов $m_A(x) = 1$ (за $p(|x|)$)
2. $BH_{1N} \in NP$

L $A \leqslant^k B, B \leqslant^k C \implies A \leqslant^k C$
$x \stackrel{t}\rightarrow f(x) \stackrel{t}\rightarrow g(f(x))$
con $A \in NPH, A \leqslant B \implies B \in NPH$

stat если $B \leqslant A$, $A \in NPH$
$NP \stackrel{t}\rightarrow BH_{1N} \stackrel{t}\rightarrow SAT$

def SAT $= \{\phi(x_q...x_n) \ | \ \exist x_1...x_n \ \phi(x_1...x_n) = 1, \phi - бф\}$

Th *(Кук, Левин)* SAT in NPC

$SAT \in NPC$

$BH_{1N} \leqslant SAT$
$\langle m, x, 1^t \rangle \ \stackrel{f}\mapsto \phi$

ϕ удовлетворяет $\iff$ $\exists$ последовательность недетерминированных выборов $m(x) = 1$, за время t

больше t шагов не будет, есть мгновенные описания машины $\alpha\#_q\beta$
дополним описания до длины t + 1
$q_0\vdash q_1\vdash...\vdash q_t$

табло вычислений: первая строка - стартовое состояние, $i \rightarrow i + 1, q_i \vdash q_{i + 1}$, допуск: последовательность до $\#_{acc}$

$\langle m, x, 1^t \rangle \ \in BH_{1N} \iff \exist$ допускающее табло вычислений

количество состояний $|Q| = z$, множество ленточного алфавита $|PT| = y$, $z + y = k$
заведём $(t + 1)^2 k$ переменных, x_{ijc} – верно ли, что в табло в i-й j-й ячейке записан символ 'c'

$\phi(x_{ijc}) = C \and S \and T \and N$

$C = \and{i, j = 0..t} \or_C ((\and \neg X_{ij\alpha}) \and X_{ijc})$

$S = X_{00\#_s} \and X_{01x_1} \and X_{02x_2} \and ... \and X_{0nx_n} \and X_{0(n+1)B} \and ...$

$T = X_{t0\#x} \or X_{t1\#_y} \or ... \or X_{tt\#_y}$

$N = (\and_{i, j} \and_{c_1 c_2 c_3 c_3 \notin Q} X_{i - 1, j -1, c_1} \and X_{i -1 , j, c_2} \and X_{i, j +1 , c_3} \and X_{i, j, c_4} \rightarrow c_1 = c_4) \and_{ijx} \and_{c_1...c_6...}$ допустимы

$qed \ \square$

язык CNFSAT

def $CNFSAT$ $= \{\phi \ | \phi$ в КНФ$, \phi \in SAT\}$
$(x_i\or \neg \ x_j ...) \and (\or\or\or) \and (\or)$
clause (клоз)
ex 2-SAT (ровно две) HornSAT (не более одной без отрицания)

Th CNFSAT in NPC

1. $CNFSAT \in NP$
2. $CNFSAT \in NPH$
   $SAT \leqslant CNFSAT$
   $\phi \stackrel {f\ \ (polynomial\ time)} \longrightarrow \psi$
   $\phi \in SAT \iff \psi = f(\psi) \in CNFSAT$

базис: $\and, \or, \neg$

строим дерево разбора нашей формулы ϕ:

- если у neg сын neg, то можем удалить
- neg -> and/or => neg <- and/or -> neg neg

каждому поддереву соответствует преобразованная подформула $\phi_i(x_{i_1} ... x_{i_k})$, хотим построить следующее: $\psi_i(x_{i_1} ... x_{i_k}, y_1 ... y_{i_t})$
$\phi(\overline X) = 1 \implies \exist \overline y \psi(\overline x, \overline y) = 1$
$\phi(\overline X) = 0 \implies \forall \overline y \psi(\overline x, \overline y) = 0$

вершина	**brand new ψ**
X	$\phi = X, \psi = X$
neg X	$\phi = \neg X, \psi = \neg X$
and	$\phi_1 \and \phi_2, \psi_1 \and \psi_2$
or	$\psi_1 \or \psi_2$ не можем написать, потому что это не будет в КНФ новая переменная z: $(\psi_1 \or z) \and (\psi_2 \or \neg z)$

> получается, что число клозов равно числу листьев
> внутри каждого клоза число вхождений равно число переменных + или

#clauses = #leaves
#entries = #vars + #or
poly

$\square\ qed$

Th CNFSAT to 3SAT

> $3SAT =CNFSAT \and 3CNF$

1. $3SAT \in NP$
2. $3SAT \in NPH$
   $CNFSAT \leqslant 3SAT$

ψ	**X**
$(x \or y \or u) \and (x \or y \or \neg u)$	$x \or y$
ok	$x \or y \or z$
вспомогательные переменные k - 3 новые перменные: $(x_1 \or x_2 \or t_1) \and (\neg t_1 \or x_3 \or t_2) \and (\neg t_2 \or x_2 \or t_3) \and ... \and (\neg t_{k - 3} \or x_{k - 1} \or x_k)$	$x_1 \or x_2 \or ... \or x_k, k > 3$

$\square \ qed$

3SAT - superstar

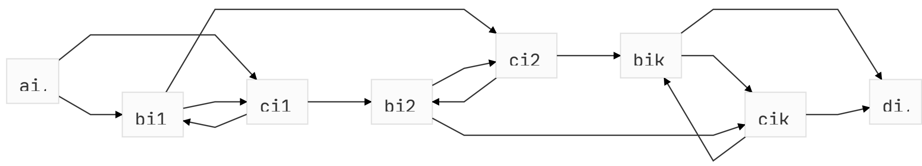
Th IND in NPC

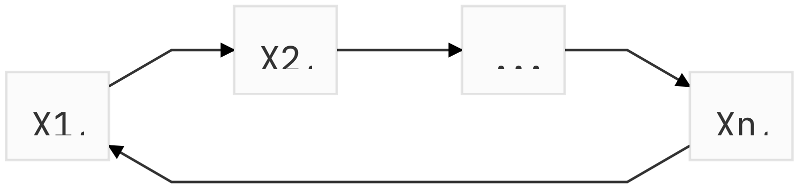
дана формула ϕ в 3КНФ, мы хотим вывести граф G и число k, такие что ϕ удовлетворима тогда и только тогда, когда в графе есть независимое множество размера k
$\phi \in 3SAT \iff \langle G, k \rangle \in IND$

в ϕ k clauses, граф построим из k triangles
в вершинах переменные, соответствующие claus'ам
соединим переменные с их отрицанием

$HAM = \{G \ | \ G -$ ориентированный граф, содержит Гамильтонов цикл}
$HAM\in NP$
$HAM \in NPH$

$\phi (x_1 x_2 ... x_n)$ k clauses
$x_i \rightarrow 2k + 2$ вершины





где X - это компонента предыдущего вида

диагональный метод

теоремы об иерахии

$DSPACE(f) = \{L \ | \ \exist$ программа p: $x \in L \implies p(x) = 1 \\ x \notin L \implies p(x) = 0$ $ S(p, x) = O(f(n))\}$
$PSACE = \cup_{p - polynom} DSPACE(p)$

Th NP subset PS subset EXP

thesis если p запускает q, q использует $O(f)$ памяти, то p может тоже для этого использовать$ O(f)$ памяти

Th о ёмкости иерархии

${f \over g} \to 0$ тогда $\exist L: L \in DSPACE(g)\backslash DSPACE(f)$

$h = \sqrt{fg}, \ \ {h \over g} \to 0, \ \ {f \over h} \to 0$

$n = |\langle p, x\rangle|$

$L = \{\langle p, x \rangle \ | \ $неверно, что $(p(\langle p, x \rangle) = 1, $ использовав $h(n)$ памяти $)\}$

$L \in DSPACE(g)$

Пусть $L \notin DSPACE(f)$, q - разрешает L, используя $\leqslant c f(n)$, рассмотрим $n_0: h(n_0) > cf(n_0)$, $n_0 > |q|$

рассмотрим $x: |\langle q, x \rangle | = n_0$

$q(\langle q, x \rangle) = \ ?$

$q(\langle q, x \rangle) = q \implies \langle q, x \rangle \in L \implies !(q(\langle q, x \rangle) = 1 \ and \ S(q, \langle q, x \rangle) \leqslant cf(n) \langle h(n_0)) \implies q(\langle q, x \rangle) = 0$

$q(\langle q,x \rangle) = 0 \implies \langle q, x \rangle \notin L \implies q(\langle q, x \rangle) = 1$

Th о временной иерархии

DSPACE -> DTIME, память -> время

ломается немного первая часть, так что новое условие:

${f \over g} \to 0, \exist h: {f \over h} \to 0, {sim(h) \over g} \to 0. \ \ (sim(h) = O(g))$ (где $sim(f)$ - за сколько можно просимулировать программу, работающую за f) тогда $\exist L: L \in DTIME(g)\backslash DTIME(f)$

$h = \sqrt{fg}, \ \ {h \over g} \to 0, \ \ {f \over h} \to 0$

$n = |\langle p, x \rangle|$

$L = \{l\angle p, x \rangle \ | \ $неверно, что $(p(\langle p, x \rangle) = 1, $ использовав $h(n)$ времени $)\}$

$L \in DTIME(g)$

Пусть $L \notin DTIME(f)$, q - разрешает L, используя $\leqslant c f(n)$, рассмотрим $n_0: h(n_0) > cf(n_0)$, $n_0 > |q|$

рассмотрим $x: |\langle q, x \rangle| = n_0$

> **Implies** $P \neq EXP$
>
> $f = n^{\log_2 n} = 2^{(\log_2 n)^2}$
> $g = 2^n$
> ${f \over g} \to 0 \implies \exist L \in DTIME(g) \backslash DTIME(f)$ (первая часть $\implies L \in EXP$, вторая – $\implies L \notin P$)

Th (Бейкер, Гилл, Соловэй) BGS

$u = \{\langle p, x \rangle |\ \ p(x) = 1\}$
$uni(p, x) \to$ останавливается ли p на x

Вычисления с оракулом p^A – p с оракулом A

∃ оракул $A: p^A = NP^A$
∃ оракул $B: p^B \neq NP^B$

// **релятивизуется**, если доказательство остаётся верным, если всему фиксированному в программе добавить оракул

рассмотрим $A \in PSC$

$p^A \stackrel{1}\subset NP^A \stackrel{2}\subset PS^A \stackrel{3}\subset PS \stackrel{4}\subset P^A$:

1. любая недетерминированння программа частный случай детерминированной
2. релятивизуется
3. можем заменить вызов оракула на процедуру проверки
4. потому что взяли PSpace полный, любой сводится за полином и спросим у оракула

B $U_B = \{x \ | \ \exist y \in B\ \ \ |x| = |y|\}$

L $\forall B \ \ U_b \in NP^B$

Придумаем $B: U_B \notin P^B$

Теперь рассмотрим часть ∃ оракул $B : p^B \neq NP^B$:

Построим последовательность программ $q_1, q_2, q_3, ...$
$T(q_i)$ - полином
$\forall L \in P : \exist i: q_i$ разрешает L

Рассмотрим все коды исходных программ, упорядочим их лексикографически и запустим

// n – это длина входа

	n	**$2 n^2$**	**$3n^3$**	**…**	**kn^k**	**…**
p_1						
p_2						
…						
p_m					$p_m \ | \ TL= kn^k$	
…						

каждая из этих программ работает за полином

нумеруем эту табличку по диагонали

получим счётное множество пронумерованных программ

если программа не успела завершиться за TL, то говорим, что q_i возвращает 0

так же можем занумировать все программы с оракулами: $q_1^\bullet, q_2^\bullet, ..., q_n^\bullet, ...$

должны сделать $B : p^B \neq NP^B$

рассмотрим $B: U_B = \{x \ |\ \exist y : |x| = |y|, y \in B\}$

L $\forall B: U_B \in NP^B$

```
ub(x)
   y ← недетерминированно Sigma^|x|
   return check(y)
```

Построить $B: U_B \notin p^B$ (если построим такое B, то теорема БГС доказана)

$B_1: q_1^{B_1}$ не распознавала U_{B_1}

запустим q_1 с оракулом и будем выступать в роли оракула

$q_1^\bullet(x_1)$: спрашивает оракула $?y_1 \rightarrow NO$ (пишем в map наши ответы) $?y_2 \rightarrow NO \ ... \ ?y_k \rightarrow NO$

// выберем $x_`: T(q_1, x_1) < 2^{|x_1|}$

если результат программы $YES: \ \forall z \ |z| = |x_1|: z \notin B_1$
$NO: \ \exist z_1: q_1^\bullet(x_1)$ не задала вопрос про $z_1, \ |z_1| = |x_1|; \ z_1 \in B_1$

$B_1 \rightarrow B_2 \ q_1^{B_2}$ не распознаёт $U_{B_2}, q_2^{B_2}$ не распознаёт U_{B_2}
$T(q_2^\bullet, x_2) < 2^{|x_2|}, |x_2| > $ максимальной длины, для которого известно принадлежность B_1

теперь запускаем $q_2(x_2)$: спрашивает у нас: если спрашивали уже про это слово, то я то же самое и отвечаю, если нет, отвечаю NO и записываю

$B_k \ \forall i \leqslant k : q_i^{B_k}$ не распознаёт U_{B_k}

опять находим x_k и запускаем

тот же самый подход, что и выше, при запуске

этот процесс продолжается до бесконечности

для ответа БГС возьмём $B = \cup^\infty_{k = 1} B_k$

// релятивизация – это *барьер* доказательства $P \neq NP$

Th *Ладнера*

$P \neq NP \implies \exist L: L \notin P, L \notin NPC, L \in NP$

> иллюстрация, **не** доказательство
>
> *Blowing Holes in SAT*
>
> координатная ось с итерированным логарифмом
>
> $1 \rightarrow 10 \rightarrow 10^{10} \rightarrow 10^{10^{10}}$
>
> выбираем нечётные промежутки
>
> $SAT0 = SAT \ \cap\ EVEN$
>
> $EVEN = \{x \ | \ log^*_{10}|x|$ чётен }
>
> к нему сводится SAT:
>
> $\exist f : x \in SAT \iff f(x) \in SAT0$

так же, как в теореме БГС, у нас есть последовательность $q_1, q_2, ..., q_n, ...$, так же запускаем программу p_i с таймером jn^j и так же занумеровали программу по диагонали: $f_1 ... f_i ...$

все f_i работают за полином

$L = SAT \ \cap \ EVEN\ (SAT \ \cap \ \{\phi \ | \ |\phi|$ в "чёрном" куске $\})$

рассмотрели первый чёрный кусок, префикса которого достаточно, чтобы программа q_1 не разрешала L за полином

теперь рассмотрим некст белый кусок: добъёмся того, чтобы сведение f_1 неправильно сводило SAT к нашему языку

занумеруем формулы по возрастанию длины и дальше лексикографически: $\phi_1, \phi_2, ...$

$\phi_1 \stackrel{f_1} \rightarrow z_1 \\ \phi_2 \rightarrow z_2\\...$

найдётся формула $\phi_x \stackrel{f_1} \rightarrow z_x: \phi_x \in SAT \neq z_x = f_1(\phi_x) \in L$

найдётся такая ϕ_x потому, что если бы не нашлось, то получили бы противоречие в том, что SAT сводится за полиномальное время под действием f_1 к конечному языку

z_x лежит либо в первом чёрном отрезке, либо во втором белом
$n_2 = max(n_1 + 1, |z_x|)$

> **Lemma** $L \in NPC, F -$ конечный, $L \setminus F \in NPC$
> $L \leqslant L \setminus F$
>
> ```
> f(x):
>     if x in F
>         if x in L return YesWord
>         else return NoWord
>     else retun x
> ```

построим $BLACK$:

1. $x \in BLACK$ - зависит только ок $|X|$
2. $BLACK \in P$
3. $L \notin NPC, L \notin P$

разрешитель $BLACK$: (верно ли, что слова длины n принадлежат нашему языку, пусть работает за n)

```
black(x: String)
    a = black(|x|)
    return x in BLACK // основываясь на данных из массива a

black(n): List<Int>
// [n1, n2, ..., nk] - список всех границ, которые не превышают n
// ограничение по времени n^(большое число, пусть 100)
    if n = 0 return []
    a = black(n - 1)
    // black(n - 1) отработала за T ⩽ (n - 1)^100, T_left ⩾ 
n^99
    set Timer on n^99, if triggered return a
    if len(a) чётна:
        i = len(a) / 2 + 1
        for (phi - формула, |phi| ⩽ n):
            if (phi in SAT intersect BLACK ≠ q_i(phi))
                return a ++ [n]
    else // len(a) нечётна
        i = (len(a) - 1) / 2 + 1
        for (phi - формула, |f_i(phi)| ⩽ n):
            if (phi in SAT ≠ f_i(phi) in SAT intersect BLACK):
                return a ++ [n]
    return a
```

---

coNP

def $coNP$ $= L \ | \ \overline L \in NP$

> **ex** $SAT \in NP,\\ \overline{SAT} \in coNP$
>
> есть все слова Σ^*, среди них есть булевы формулы и давайте рассматривать только булевы формулы, они делятся на SAT и на $\overline {SAT}$, а на небулевы формулы забьём

> $\overline{SAT} = \{\phi \ | \ \forall \stackrel \rightarrow x: \phi(\stackrel \rightarrow x) = 0\} $

> **ex** $FACTORIZATION = \{\langle n, x \rangle \ |$ y $n \ \exist$ простой делитель $\leqslant x \} \in NP \cap coNP$
>
> (P candidate)

PSpace и PSpace полнота

def PS $= \cup_{p - polynom} DSPACE(p)$

$P \subset NP \subset PS \subset EXP$

def $L \in$ PSH : $\forall A \in PS: \ A \leqslant L \ (f \ - $ за полином $x \in A \iff f(x) \in L)$

def $L \in$ PSC: $1) \ L \in PSH \\ 2) L \in PS $

> **ex** булевы формулы с кваntора (матлог референс)
> $TQBF$ (True Quantified Boolean Formula) $= \{\phi \ | \ \phi \ - $ булева формула с кванторами, $Free(\phi) = \empty \ \ val(\phi) = 1\}$

TQBF in PSC

1. $TQBF \in PS$
   построим дерево разбора и храним множество значений текущих свободных переменных
2. $TQBF \in PSH$
   рассмотрим $L \in PS, \ L \leqslant TQBF$
   m - машина Тьюринга, разрешающая L, детерминированння, $S(m, x) \leqslant p(n) \ $//$ \ n = |x|$

   $m(x) \ \ q_o \vdash q_1 \vdash q_2 \vdash ... \vdash q_t$

   $f : x \rightarrow \phi$

   $\phi \ -$ истина $\iff m(x) = 1$

   $X_{ijc} \ -$ ячейка (i, j) содержит символ c

   $Q_i = [X_{i0c_1}, X_{i1c_1}, ..., X_{ip(n)c_1}, X_{i0c_2}, ..., X_{ip(n)c_2}]$

   $S(Q_0) \ \cap \ T(Q_t) \ \cap \ C \ \cap \ N$

   введём синтаскический сахар: $\exist (\forall) Q_i := \exist (\forall) X_{i0c_1} , \exist (\forall) ...$

   $Q_i \vdash Q_{i + 1}$

   $\exist Q_0 \ \exist Q_1 \ .. \exist Q_t \ S(Q_0) \ \and \ T(Q_t) \ \and \ C \ \and \ Q_0 \vdash Q_1 \ \and\ Q_1 \vdash Q_2 \ \and\ ... \ \and\ Q_{t - 1} \vdash Q_t$

   выведенная формула плоха её длиной: $Q(Q_0), \ T(Q_t), \ Q_0 \vdash Q_1$ имеют длину $p(n)$, но последних кусков t, таким образом вся формула имеет длину $p(n) 2^{q(n)}$, а это не полиномиальное сведение

   $Q \vdash R$

   $\vdash \ -$ булева формула от $2 \ (p(n) + 1) \ z$ аргументов

   $Q \vdash R := Q \underbrace{\vdash U_1 \vdash U_2 ... \vdash U_{2^{m} - 1} \vdash R}_{2^m}$

$\vdash_m = \vdash^{2^m}$

$Q \vdash_m R = \exist \ T \ (Q \vdash_{m - 1} T \ \and \ T \vdash_{m - 1} R)$

$Q \vdash_m R = \exist \ T \ \forall A \ \forall B \ (\neg (A \vdash_{m - 1} B) \rightarrow (Q \neq A \or B \neq T) \and (T \neq A \or B \neq R))$

$len(m) = O(p(n)) + len(m - 1) \implies len(m) = O(p(n) \ m)$

$\square$

// PS proof template: $PS \rightarrow TQBF \rightarrow L$

Th NSPACE(f(n)) subset DSPACE(f(n)^2)

$f(n) \geqslant log(n)$
$NSPACE(f(n)) \subset DSPACE(f(n)^2)$

Доказательство:

Пусть $L \in NSPACE(f(n))$ ∃ недетерминирванная машина Тьюринга $x \in L \iff \exist$ последовательность недетерминированных выборов, m(x) = 1
$S(m, x) \leqslant f(n), \ n = len(x)$

вход – лента машины Тьюринга со словом x
рабочая – лента машины Тьюринга с $f(n)$
конфигурация машины Тьбринга кодируется:$ (pos, work)$, где $work = \alpha \#_p \beta$, длина $pos = log(n)$, а длина $work = f(n) + 1$, и тогда вся длина пары – $O(f(n))$

Существует ли последовательность переходов длиной $2^{c \ f(n)}$, которая q_0 переводит в допускающую конфигурацию q_t

заведём функцию (можно ли достичь): $Reach(q_s, q_t, k)$ (можно ли из q_s перейти за 2^k шагов до q_t ($q_s \vdash^{2^k} q_t$))

```
Reach(qs, qt, k):
    if (k = 0):
        return qs ⊢ qt
    for (qm - конфигурация машины Тьюринга m):
        if Reach(qs, qm, k - 1) and Reach (qm, qt, k - 1):
            return True
    return False
```

локальные переменные функции `Reach` занимают $f(n)$, суммарно памяти нам понадобится $O(k \ f(n))$

```
inL(x):
    qs - стартовая конфигурация m
    for (qt - допускающая конфиграция m):
        if Reach(qs, qt, c * f(|x|)):
            return 1
    return 0
```

q_s требует $f(n)$ памяти
вызов `Reach` требует $f(n)^2$ памяти
локальная переменная q_t требует $f(n)$ памяти

Следствие Th (*Сэвитча*)

$PS = NPS$