



CUỘC THI TOÁN MÔ HÌNH 2024 VÒNG 1

02 tháng 7- 30 tháng 7, 2024

Tên đội thi: Chúng tôi lộn
Thời gian thực hiện: 19/07/2024 - 27/07/2024

Nhóm tác giả:
Nguyễn Đức Dũng - THPT chuyên Biên Hoà
Lưu Hiếu An - THPT chuyên Thái Nguyên
Nguyễn Văn Hoàng - THPT chuyên Bắc Ninh

Mục lục

1	Giới thiệu	2
2	Mô hình bài toán với <i>hard constraints</i>	2
2.1	Phát biểu bài toán dưới mô hình toán học	2
2.2	Xử lý các ràng buộc nghiêm ngặt (<i>hard constraints</i>)	2
2.3	Xây dựng mô hình	3
2.4	Đánh giá mô hình	3
3	Mở rộng mô hình bài toán với <i>soft constraints</i>	4
3.1	Xử lý các ràng buộc không nghiêm ngặt (<i>soft constraints</i>) . . .	4
3.2	Xây dựng mô hình	5
3.3	Đánh giá mô hình	6
3.4	Mô hình đánh giá các giải pháp	7
4	Đánh giá điều kiện đề bài và hướng phát triển	8
4.1	Đánh giá các giải pháp, điều kiện bài toán và đưa ra giải pháp phù hợp	8
4.2	Hướng phát triển của vấn đề đặt ra trong thực tế	9

1 Giới thiệu

Mô hình toán ứng dụng trong vận hành y tế, đặc biệt là trong việc sắp xếp ca trực, là một ứng dụng quan trọng giúp tối ưu hóa việc phân bổ và quản lý nhân lực y tế, đảm bảo sự hiệu quả và chất lượng trong dịch vụ chăm sóc bệnh nhân. Các khía cạnh chính của mô hình toán trong việc sắp xếp ca trực trong lĩnh vực y tế là: tối ưu hóa lịch trực, dự báo nhu cầu và tài nguyên, quản lý các ràng buộc và yêu cầu, tối ưu hóa chi phí và hiệu quả, đảm bảo chất lượng chăm sóc.

Và "vấn đề phân công y tá" - hay gọi là *NRP - Neonatal Resuscitation Program* cũng là một trong số đó. Trước nhiệm vụ này, chúng ta sẽ cùng bắt tay vào mô hình, và giải quyết bài toán phân công cho 8 điều dưỡng làm trong 28 ngày mà BTC đã đưa ra. Cùng với đó là đánh giá về các *hard constraints*, *soft constraints* để đưa ra một lịch trình cho là hợp lý và tối ưu nhất.

2 Mô hình bài toán với *hard constraints*

2.1 Phát biểu bài toán dưới mô hình toán học

Vấn đề đưa ra yêu cầu ta lập ra một lịch trình kích thước 8 cột, 28 hàng cho trạm xá. Tuy nhiên, ta có thể mô hình lại dưới các biến số và các điều kiện như sau:

Ký hiệu	Định nghĩa
$employees$	Tên các điều dưỡng và phân loại theo thời gian làm việc
$days$	Các ngày trong lịch trình, từ ngày thứ nhất đến ngày thứ 28
$shift$	Ca trực trong một buổi: ngày (S) và đêm (T)
$x_{e,d,s}$	Trạng thái làm việc của điều dưỡng e trong ngày d ca s : 0 nếu nghỉ và 1 nếu đi làm

2.2 Xử lý các ràng buộc nghiêm ngặt (*hard constraints*)

Các ràng buộc nghiêm ngặt (*hard constraints*) là những quy tắc bắt buộc tuân thủ trong quá trình xây dựng lịch trình. Nếu bất kì ràng buộc nghiêm ngặt

nào bị vi phạm, giải pháp không được chấp nhận.

Ta chuyển các *hard constraints* thành các biểu thức điều kiện tuyến tính như sau:

1. Mỗi ngày, có 3 điều dưỡng ca sáng và 1 điều dưỡng ca đêm.

$$\sum_{e \in \text{employees}} x_{e,d,S} = 3$$

$$\sum_{e \in \text{employees}} x_{e,d,T} = 1$$

2. Mỗi điều dưỡng full-time làm 18 ca, và part-time làm 10 ca trong 4 tuần.

$$\sum_{d \in \text{days}} \sum_{s \in \text{shift}} x_{e,d,s} = 18 \quad (e: \text{full-time})$$

$$\sum_{d \in \text{days}} \sum_{s \in \text{shift}} x_{e,d,s} = 10 \quad (e: \text{part-time})$$

2.3 Xây dựng mô hình

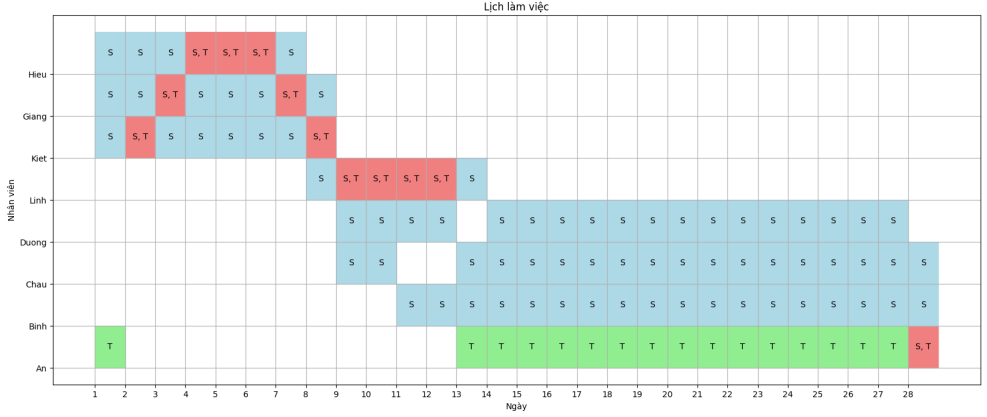
Tiếp theo, ta sử dụng ngôn ngữ lập trình *Python* trên *Google Colab*, kết hợp thư viện *OR-Tools* để giải các điều kiện tuyến tính. Không quá mất nhiều thời gian, để máy tính chạy ra một dữ liệu thỏa mãn các *hard constraints*.

Sau đó, ta sử dụng thư viện *matplotlib* để hình ảnh hoá sang một bảng 8×28 như sau (ký hiệu: S là ca sáng, T là ca đêm, S, T là cả ca sáng lẫn đêm) (hình 1 trang 4)

2.4 Đánh giá mô hình

Tuy bảng đã thỏa mãn các điều kiện ràng buộc, nhưng ta vẫn thấy một số bất cập như:

1. Các điều dưỡng phải làm cả ca sáng và ca đêm trong cùng một ngày (ví dụ: *Châu, Dương, Bình*).
2. Có một số nhân viên làm có tần suất làm việc giữa các tuần không đồng đều. Ví dụ: *Dương* vào tuần 1 không làm ca nào, đến tuần 3 làm 7 ca.



Hình 1: Lịch trình thỏa mãn *hard constraints*

- Có những nhân viên có thời gian làm một đợt liên tục quá dài. Ví dụ: *Binh* làm 18 ca liên tục trong 18 ngày liên tiếp.

Từ đó, hiển nhiên, ta sẽ phải thêm các ràng buộc khác để tạo ra được một bảng tối ưu hơn.

3 Mở rộng mô hình bài toán với *soft constraints*

3.1 Xử lý các ràng buộc không nghiêm ngặt (*soft constraints*)

Các ràng buộc không nghiêm ngặt (*soft constraints*) là những quy tắc được xây dựng dựa trên nhu cầu của đối tượng nghiên cứu, trong bài này là các điều dưỡng. Nếu bất kì ràng buộc nào bị vi phạm, giải pháp vẫn có thể được chấp nhận, nhưng sẽ làm nó kém tối ưu hơn.

Ta chuyển các *soft constraints* (trong đề đưa ra) thành các biểu thức điều kiện tuyến tính như sau:

- Một nhân viên không làm cả ca sáng và ca đêm trong một ngày.

Trước tiên ta thêm biến $y_{e,d} = x_{e,d,S} + x_{e,d,T}$

$$y_{e,d} \leq 1$$

Trong môi trường điều kiện 1, số ca làm nhân viên e ngày d chính là $y_{e,d}$.

2. Mỗi tuần, nhân viên full-time làm đúng 4-5 ca, nhân viên part-time là 2-3 ca.

$$4 \leq \sum_{7k+1 \leq d < 7k+8} y_{e,d} \leq 5 ; k = \overline{0,3} \text{ (} e : \text{full-time)}$$

$$2 \leq \sum_{7k+1 \leq d < 7k+8} y_{e,d} \leq 3 ; k = \overline{0,3} \text{ (} e : \text{part-time)}$$

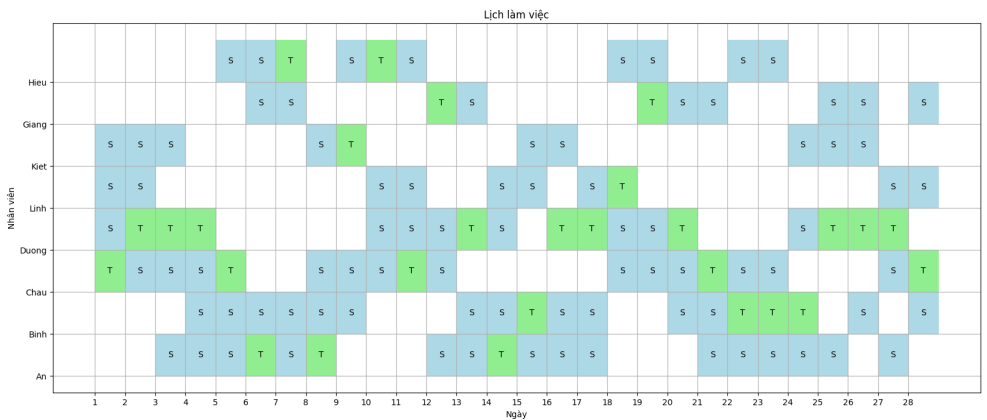
3. Một chuỗi ngày liên tiếp làm việc của nhân viên full-time sẽ làm việc 4 đến 6 ngày, trong khi con số này của nhân viên part-time sẽ là 2 đến 3 ngày.

Với e, d thỏa mãn $y_{e,d} = 1$ và $y_{e,d-1} = 0$ (tức người e sẽ bắt đầu đợt làm mới vào ngày d) thì:

$$\sum_{i=0}^3 y_{e,d+i} = 4; \sum_{i=0}^6 y_{e,d+i} \leq 6 \text{ (} e : \text{full-time)}$$

$$\sum_{i=0}^1 y_{e,d+i} = 2; \sum_{i=0}^3 y_{e,d+i} \leq 3 \text{ (} e : \text{part-time)}$$

3.2 Xây dựng mô hình

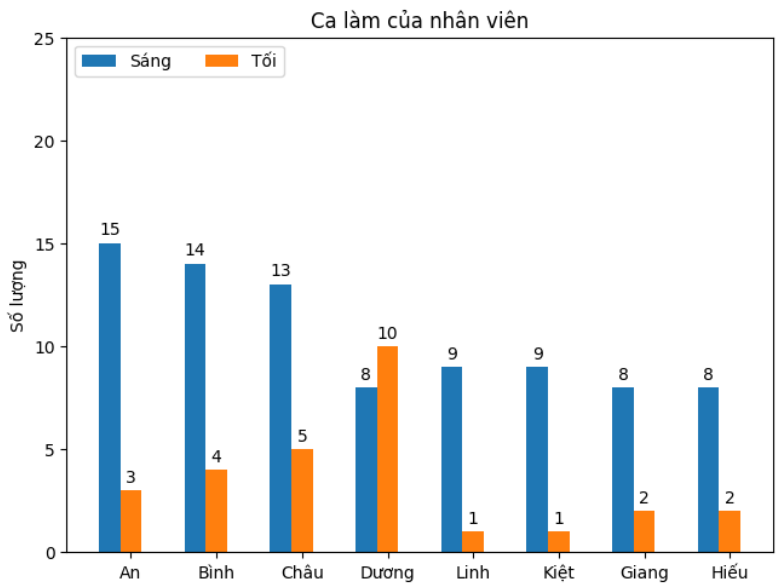


Hình 2: Lịch trình thỏa mãn thêm *soft constraints*

Tương tự như ở phần trước, sử dụng các công cụ lập trình giải thuật, ta đưa ra được một bảng ở hình 2.

3.3 Đánh giá mô hình

Vẫn sử dụng các cách tương tự, ta đưa ra được một bảng so sánh sự tương quan giữa số ca ngày và ca đêm của mỗi điều dưỡng (hình 3).



Hình 3: So sánh tương quan số ca ngày - đêm

Ta dễ dàng nhận thấy, *Dương* làm tối 10/18 ca tối, trong khi đó *Linh*, *Kiệt* chỉ là 1/10 ca tối. Vậy đương nhiên lịch trình này dù đã thỏa mãn các điều kiện đề bài, nhưng vẫn chưa thể coi là một lịch trình tốt.

3.4 Mô hình đánh giá các giải pháp

Ta sẽ xây dựng một hàm $f(x)$ (trong đó x là lịch trình đầu vào) để đánh giá tính tối ưu của lời giải, một lời giải được cho là tối ưu hơn nếu giá trị của hàm số tại lịch trình đó có kết quả ít hơn. Ở đây, một lời giải được gọi là không hợp lệ là lời giải vi phạm một trong các ràng buộc nghiêm ngặt (*hard constraints*). Ta chỉ xét tới các lịch trình đã thỏa mãn, và các điều kiện khảo sát thêm chỉ trong phần *soft constraints*.

Ta định nghĩa hàm $f(x)$ như sau:

$$f(x) = \frac{v_p}{p}$$

Trong đó:

1. v_p là số điều kiện vi phạm trong khảo sát
2. p là số điều kiện khảo sát.

Lưu ý, 2 lịch trình x_1, x_2 có thể đưa ra giá trị p_1, p_2 khác nhau. Ở đây, chúng tôi sẽ khảo sát 5 lịch làm việc và so sánh tính tối ưu giữa chúng. Bảng 3,4,5 được sinh ngẫu nhiên thỏa mãn *hard constraints*. Chi tiết các bảng chúng tôi để trong mục phụ lục.

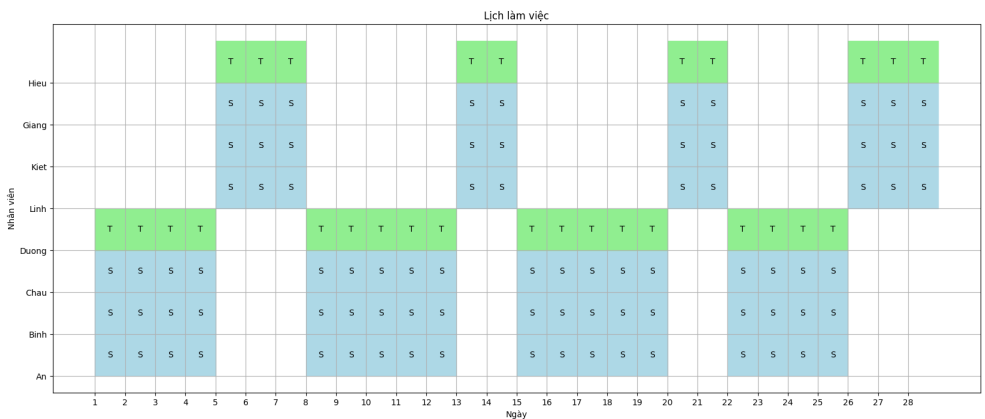
Lịch trình khảo sát	v_p	p	$f(x)$
Bảng 1 (hình 1)	51	267	0.191
Bảng 2 (hình 2)	0	286	0
Bảng 3	63	307	0.205
Bảng 4	67	309	0.217
Bảng 5	67	312	0.215

Từ các giá trị của $f(x)$ trong bảng trên, bảng 2 là bảng tối ưu nhất và cũng chính là bảng chính xác nhất với yêu cầu bài toán, ngược lại thì bảng 5 là bảng không "tối ưu" nhất trong các lời giải.

4 Đánh giá điều kiện đề bài và hướng phát triển

4.1 Đánh giá các giải pháp, điều kiện bài toán và đưa ra giải pháp phù hợp

Thực ra, không quá khó để tìm ra một giải pháp khác mà không cần sử dụng máy tính, tiêu biểu như bảng hình 4.

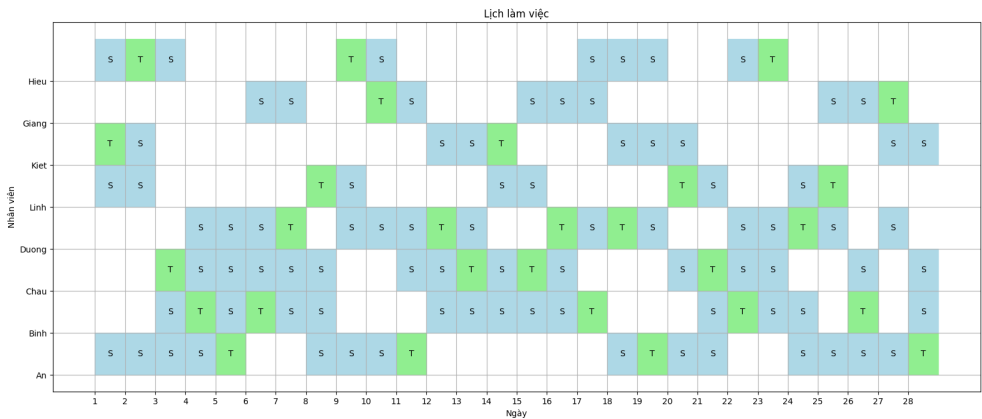


Hình 4: Lịch trình khác 1

Tuy nhiên, lịch trình đó thực chất không thực tế tại ở những ngày chỉ toàn nhân viên part-time sẽ tồn tại nhiều rủi ro do thiếu kiến thức và kinh nghiệm. Cùng với đó, trong vấn đề ta đang giải quyết theo các ràng buộc cho trước, ta chưa thấy được sự khác biệt giữa ca ngày và ca đêm. Tức với điều kiện: 3 người ca ngày + 1 người ca đêm, và mỗi người không làm cả ca ngày và đêm trong cùng 1 buổi, bài toán sẽ vẫn tương đương nếu coi 4 người cùng ca ngày. Bằng trải nghiệm thực tế, chúng tôi sẽ sẽ đặt ra thêm các ràng buộc mới để thu được lịch trình tốt hơn.

1. Một ngày luôn có ít nhất một điều dưỡng full-time hoạt động ca sáng.
2. Điều dưỡng full-time làm 4-5 ca đêm, điều dưỡng part-time làm 2-3 ca đêm trong 28 ngày.
3. Không ai làm 2 ca đêm liên tiếp.

Từ đó, ta tạo ra một lịch trình, được đánh giá chủ quan rằng "thực tiễn" hơn lịch trình hình 5.



Hình 5: Lịch trình khác 2

4.2 Hướng phát triển của vấn đề đặt ra trong thực tế

Trong các mô hình toán ứng dụng trong lĩnh vực y tế, dữ liệu đầu vào là điều kiện cơ bản mà mô hình dựa vào để tạo ra các dự đoán, phân tích và đưa ra các quyết định. Điều đó yêu cầu nguồn dữ liệu chính xác đầy đủ và nhất quán, đồng thời cần có một phương pháp tính toán hợp lý để có thể tính toán ra lịch trình đúng (hoặc gần đúng) trong một thời gian đủ nhỏ (từ vài giây đến 1 tiếng với nguồn dữ liệu lớn).

Với cách nhóm chúng tôi đang sử dụng, ta có thể tăng số điều dưỡng (khoảng 100) và thêm nhiều điều kiện ràng buộc (có thể mang tính cá nhân hóa hơn những gì ta đang làm), trong khoảng thời gian không dài tìm ra được một lịch trình thỏa mãn (hoặc phủ định sự tồn tại đó). Đương nhiên, do vấn đề thời gian và sự cân bằng giữa các cá nhân, ta vẫn sẽ ưu tiên các điều kiện chung cho toàn bộ hoặc các nhóm lớn.

Tuy nhiên, nếu xảy ra sự thay đổi đột xuất (theo tính cá nhân, hoặc toàn bộ), việc tìm kiếm một lịch trình thay đổi ngay tại thời điểm đó (giữ nguyên thời gian trước) là một vấn đề khác, mà nhóm chúng tôi đã và đang tìm cách giải quyết triệt để.

Lời kết

Bản báo cáo đã phân tích cụ thể lịch công tác cho trạm xá từ **thứ 2 ngày 05/08/2024** đến **chủ nhật ngày 01/09/2024**, đồng thời chỉ ra các khía cạnh của mô hình toán trong việc sắp xếp ca trực trong lĩnh vực y tế.

Về ưu điểm, mô hình xây dựng có ý nghĩa là giúp tối ưu hóa phân bổ và quản lý nhân lực y tế, từ đó đảm bảo sự hiệu quả và chất lượng trong dịch vụ chăm sóc bệnh nhân. Các khía cạnh lợi ích mà ta có thể đề cập tới trong mô hình toán này là: tối ưu hóa lịch trực, dự báo nhu cầu và tài nguyên, quản lý các ràng buộc và yêu cầu, tối ưu hóa chi phí và hiệu quả, do đó đảm bảo chất lượng chăm sóc. Đồng thời có khả năng phát triển mô hình để áp dụng với quy mô lớn hơn. Tuy nhiên cần phải cẩn thận sử dụng các mô hình này để kiểm nghiệm kết quả trong thời gian dài, vì trong những trường hợp có thể xảy ra biến cố làm thay đổi dữ liệu. Vì thế nhược điểm của mô hình này sẽ là về cho kế hoạch dài hạn trong tương lai và đó cũng là tình hình chung của nhiều mô hình khác.

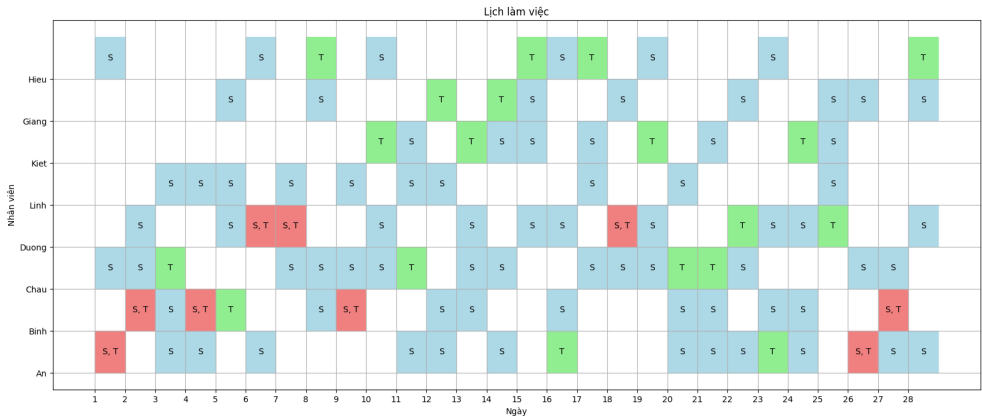
Nhóm tác giả đã sử dụng quy hoạch tuyến tính mới mẻ, mô hình hóa dữ liệu và xử lý dữ liệu hiệu quả. Đây có thể là giải pháp mang nhiều thuận lợi để giải quyết bài toán liên quan đến sắp xếp các ca trực cho trạm xá hoặc bệnh viện nhỏ.

Tài liệu

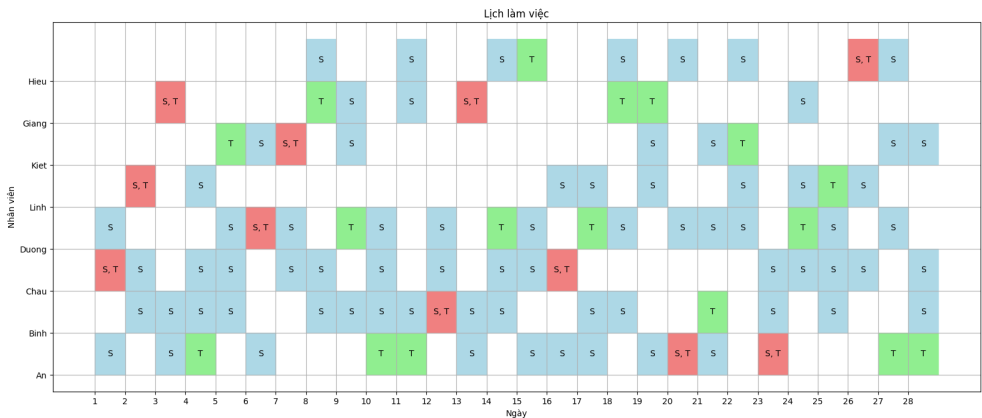
References

- [1] P. De Bruecker, J. Van den Bergh, J. Belien, E. Demeulemeester, Workforce planning incorporating skills: *European Journal of Operational Research*, 243(1), 1-16, 2015.
- [2] R. Soto, B. Crawford, E. Monfroy, W. Palma, F. Paredes, Nurse and paramedic rostering with constraint programming: A case study, *Romanian Journal of Information Science and Technology*, 16(1), 52-64, 2013.

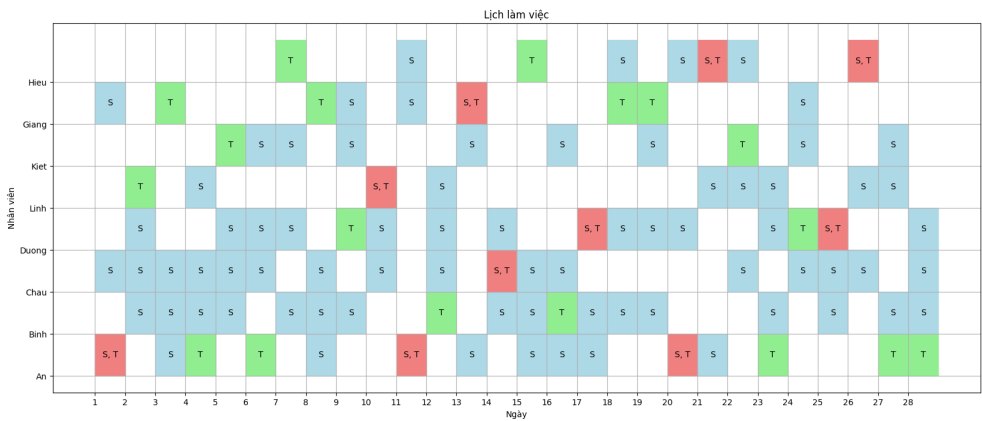
Phụ lục



Hình 6: Bảng 3 mục 3.4



Hình 7: Bảng 4 mục 3.4



Hình 8: Bảng 5 mục 3.4