CHƯƠNG I

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

(tuần 1: Tổng cộng có 2 tiết lý thuyết và 2 tiết hướng dẫn bài tập/thực hành)

1. ĐỊNH NGHĨA ĐỒ THỊ

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc bao gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh này. Chúng ta phân biệt các loại đồ thị khác nhau bởi ***kiểu*** và ***số lượng*** cạnh nối hai đỉnh nào đó của đồ thị.

Định nghĩa 1.

Đơn đồ thị vô hướng G = (V,E) bao gồm V là tập các đỉnh, và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.

Định nghĩa 2.

Đa đồ thị vô hướng G= (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh, và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh. Hai cạnh e_1 và e_2 được gọi là cạnh lặp nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.

Định nghĩa 3.

Giả đồ thị vô hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử (không nhất thiết phải khác nhau) của V gọi là cạnh. Cạnh e được gọi là khuyên nếu nó có dạng e = (u, u).

Định nghĩa 4.

Đơn đồ thị có hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung.

Định nghĩa 5.

Đa đồ thị có hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung. Hai cung e_1, e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.

Trong các phần tiếp theo chủ yếu chúng ta sẽ làm việc với đơn đồ thị vô hướng và đơn đồ thị có hướng. Vì vậy, để cho ngắn gọn, ta sẽ bỏ qua tính từ **đơn** khi nhắc đến chúng.

2. CÁC THUẬT NGỮ CƠ BẢN

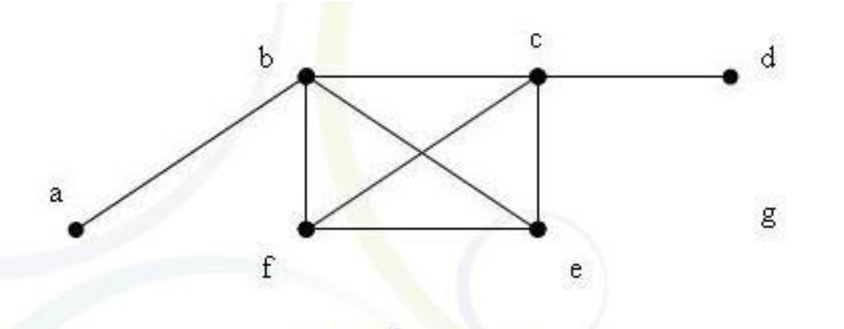
Định nghĩa 1.

Hai đỉnh u và v của đồ thị vô hướng G được gọi là kề nhau nếu (u,v) là cạnh của đồ thị G. Nếu e = (u, v) là cạnh của đồ thị ta nói cạnh này là liên thuộc với hai đỉnh u và v, hoặc *cũng nói là nối đỉnh u và đỉnh v, đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là các đỉnh đầu của cạnh (u, v).*

Để có thể biết có vao nhiêu cạnh liên thuộc với một đỉnh, ta đưa vào định nghĩa sau

Định nghĩa 2.

Ta gọi bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó và sẽ ký hiệu là deg(v).



Hình 1. Đồ thị vô hướng

Thí dụ 1.

Xét đồ thị cho trong hình 1, ta có

$$deg(a) = 1, deg(b) = 4, deg(c) = 4, deg(f) = 3,$$
$$deg(d) = 1, deg(e) = 3, deg(g) = 0$$

Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 được gọi là đỉnh treo. Trong ví dụ trên đỉnh g là đỉnh cô lập, a và d là các đỉnh treo. Bậc của đỉnh có tính chất sau:

Định lý 1.

Giả sử G = (V, E) là đồ thị vô hướng với m cạnh. Khi đó tông bậc của tất cả các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

Thí dụ 2.

Đồ thị với n đỉnh có bậc là 6 có bao nhiêu cạnh?

Giải: Theo định lý 1 ta có $2m = 6n$. Từ đó suy ra tổng các cạnh của đồ thị là 3n.

Hệ quả.

Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ (nghĩa là có bậc là số lẻ) là một số chẵn.

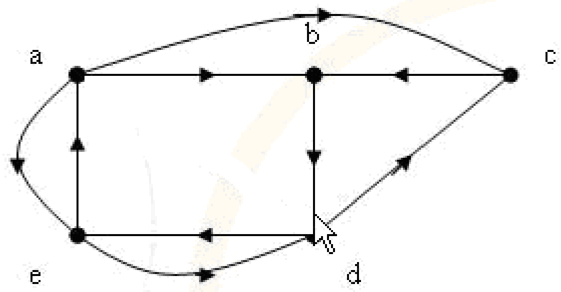
Định nghĩa 3.

Nếu e = (u, v) là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau, và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v hoặc cũng nói cung này là đi ra khỏi đỉnh u và vào đỉnh v. Đỉnh u(v) sẽ được gị là đỉnh đầu (cuối) của cung (u,v).

Tương tự như khái niệm bậc, đối với đồ thị có hướng ta có khái niệm bán bậc ra và bán bậc vào của một đỉnh.

Định nghĩa 4.

Ta gọi bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh v trong đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi nó (đi vào nó) và ký hiệu là $deg^+(v)$ ($deg^-(v)$)



Hình 2. Đồ thị có hướng

Thí dụ 3.

Xét đồ thị cho trong hình 2. Ta có

$$deg^-(a)=1, deg^-(b)=2, deg^-(c)=2, deg^-(d)=2, deg^-(e) = 2.$$

$$deg^+(a)=3, deg^+(b)=1, deg^+(c)=1, deg^+(d)=2, deg^+(e)=2.$$

Do mỗi cung (u, v) sẽ được tính một lần trong bán bậc vào của đỉnh v và một lần trong bán bậc ra của đỉnh u nên ta có:

Định lý 2.

Giả sử G = (V, E) là đồ thị có hướng. Khi đó

Tổng tất cả các bán bậc ra bằng tổng tất cả các bán bậc vào bằng số cung.

Đồ thị vô hướng thu được bằng cách bỏ qua hướng trên các cung được gọi là *đồ thị vô hướng tương ứng* với đồ thị có hướng đã cho.

3. ĐƯỜNG ĐI. CHU TRÌNH. ĐỒ THỊ LIÊN THÔNG

Định nghĩa 1.

Đường đi độ dài n *từ đỉnh u đến đỉnh v, trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị vô hướng G = (V, E) là dãy* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$

trong đó $u = x_0$, $v = x_n$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

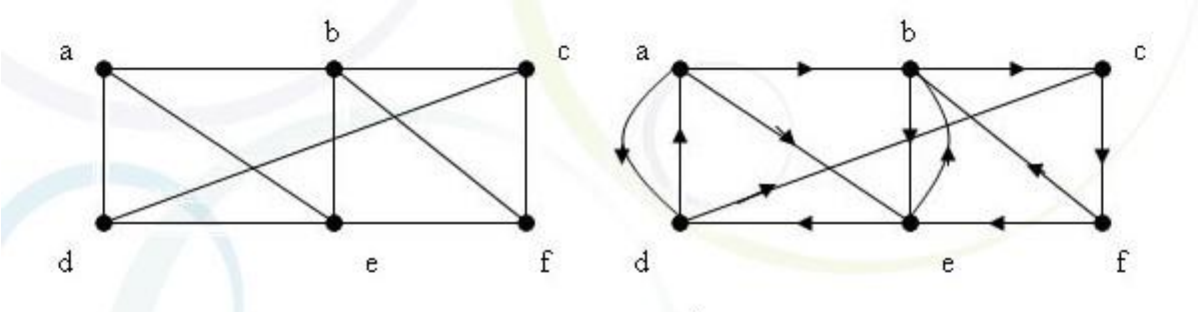
Đường đi nói trên còn có thể biểu diễn dưới dạng dãy các cạnh:

$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là u = v) được gọi là ***chu trình****. Đường đi hay chu trình được gọi là* ***đơn*** *nếu như không có cạnh nào bị lặp lại.*

Thí dụ 1.

Trên đồ thị vô hướng cho trong hình 1: a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (c,e) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó 2 lần.



Hình 1. Đường đi trên đồ thị

Khái niệm đường đi và chu trình trên đồ thị có hướng được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong trường hợp đồ thị vô hướng, chỉ khác là ta có chú ý đến hướng trên các cung.

Định nghĩa 2.

Đường đi độ dài n *từ đỉnh u đến đỉnh v, trong đó, n là số nguyên dương, trên đồ thị có hướng G = (V, E) là dãy* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$

trong đó $u = x_0$, $v = x_n$, $(xi, x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Đường đi nói trên còn có thể biểu diễn dưới dạng dãy các cung:

$(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là u = v) được gọi là ***chu trình****. Đường đi hay chu trình được gọi là* ***đơn*** *nếu như không có cạnh nào bị lặp lại.*

Thí dụ 2.

Trên đồ thị có hướng cho trong hình 1: a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (c,e) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó 2 lần.

Định nghĩa 3.

Đồ thị vô hướng G = (V, E) được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.

Định nghĩa 4.

Ta gọi đồ thị con của đồ thị G = (V, E) là đồ thị H = (W, F), trong đó $W \subseteq V$ *và* $F \subseteq E$.

Trong trường hợp đồ thị là không liên thông, nó sẽ rã ra thành một số đồ thị con liên thông đôi một không có đỉnh chung. Những đồ thị con liên thông như vậy ta sẽ gọi là các ***thành phần liên thông*** của đồ thị.

Định nghĩa 5.

*Đỉnh v được gọi là **đỉnh rẽ nhánh** nếu việc loại bỏ v cùng với các cạnh liên thuộc với nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Cạnh e được gọi là **cầu** nếu việc loại bỏ nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.*

Định nghĩa 6.

Đồ thị có hướng G = (V, E) được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.

Định nghĩa 7.

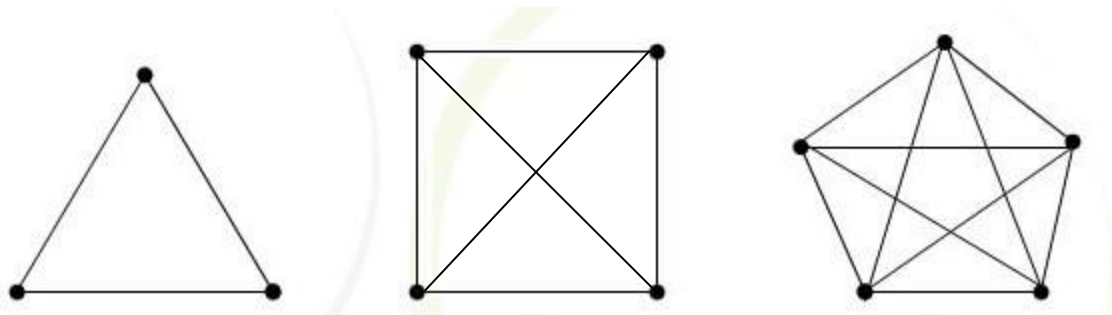
Đồ thị có hướng G = (V, E) được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là vô hướng liên thông.

4. MỘT SỐ DẠNG ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Đồ thị đầy đủ.

Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu bởi K_n, là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kỳ của nó luôn có cạnh nối.

Các đồ thị K_3, K_4, K_5 cho trong hình dưới đây.



Hình 1. đồ thị đầy đủ K_3, K_4, K_5

Đồ thị đầy đủ K_n có tất cả n(n-1)/2 cạnh, nó là đơn đồ thị có nhiều cạnh nhất.

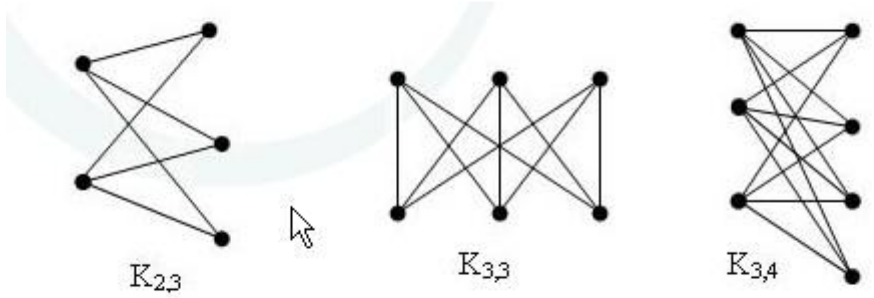
Đồ thị hai phía.

Đơn đồ thị G=(V,E) được gọi là hai phía nếu như tập đỉnh V của nó có thể phân hoạch thành hai tập X và Y sao cho mỗi cạnh của đồ thị chỉ nối một đỉnh nào đó trong X với một đỉnh nào đó trong Y. Khi đó ta sẽ sử dụng ký hiệu $G=(X \cup Y, E)$ để chỉ đồ thị hai phía với tập đỉnh $X \cup Y$.

Định lý sau đây cho phép nhận biết một đơn đồ thị có phải là hai phía hay không.

Định lý 1.

Đơn đồ thị là đồ thị hai phía khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.



Hình 2. Đồ thị hai phía

Đồ thị phẳng.

Đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu ta có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài ở đỉnh. Cách vẽ như vậy sẽ được gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị. Thí dụ đồ thị K_4 là phẳng, vì có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài ở đỉnh (xem hình 6).

Hình 3. Đồ thị K_4 là đồ thị phẳng

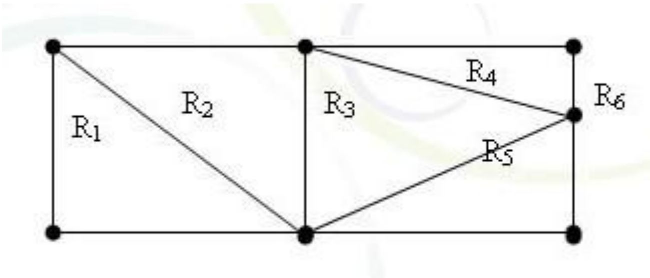
Một điều đáng lưu ý nếu đồ thị là phẳng thì luôn có thể vẽ nó trên mặt phẳng với các cạnh nối là các đoạn thẳng không cắt nhau ngoài ở đỉnh (ví dụ xem cách vẽ K_4 trong hình 6). Để nhận biết xem một đồ thị có phải là đồ thị phẳng có thể sử dụng định lý Kuratovski, mà để phát biểu nó ta cần một số khái niệm sau: Ta gọi một phép chia cạnh (u,v) của đồ thị là việc loại bỏ cạnh này khỏi đồ thị và thêm vào đồ thị một đỉnh mới w cùng với hai cạnh (u,w), (w, u) . Hai đồ thị G(V,E) và H=(W,F) được gọi là đồng cấu nếu chúng có thể thu được từ cùng một đồ thị nào đó nhờ phép chia cạnh.

Định lý 2 (Kuratovski).

Đồ thị là phẳng khi và chỉ khi nó không chứa đồ thị con đồng cấu với $K_{3,3}$ hoặc K_5.

Trong trường hợp riêng, đồ thị $K_{3,3}$ hoặc K_5 không phải là đồ thị phẳng. Bài toán về tính phẳng của đồ thị $K_{3,3}$ là bài toán đố nổi tiếng về ba căn hộ và ba hệ thống cung cấp năng lượng cho chúng: Cần xây dựng hệ thống đường cung cấp năng lượng với mỗi một căn hộ nói trên sao cho chúng không cắt nhau.

Đồ thị phẳng còn tìm được những ứng dụng quan trọng trong công nghệ chế tạo mạch in. Biểu diễn phẳng của đồ thị sẽ chia mặt phẳng ra thành các miền, trong đó có thể có cả miền không bị chặn. Thí dụ, biểu diễn phẳng của đồ thị cho trong hình 7 chia mặt phẳng ra thành 6 miền $R_1, R_2, \ldots . R_6$.



Hình 4. Các miền tương ứng với biểu diễn phẳng của đồ thị

Euler đã chứng minh được rằng các cách biểu diễn phẳng khác nhau của một đồ thị đều chia mặt phẳng ra thành cùng một số miền. Để chứng minh điều đó, Euler đã tìm được mối liên hệ giữa số miền, số đỉnh của đồ thị và số cạnh của đồ thị phẳng sau đây.

Định lý 3 (Công thức Euler).

Giả sử G là đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh, m cạnh. Gọi r là số miền của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của G. Khi đó

$$r = m-n + 2$$

Có thể chứng minh định lý bằng qui nạp. Xét thí dụ minh hoạ cho áp dụng công thức Euler.

Thí dụ.:

Cho G là đồ thị phẳng liên thông với 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc là 3. Hỏi mặt phẳng bị chia làm bao nhiêu phần bởi biểu diễn phẳng của đồ thị G?

Giải:

Do mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc là 3, nên tổng bậc của các đỉnh là 3x20=60. Từ đó suy ra số cạnh của đồ thị m=60/2=30.

Vì vậy, theo công thức Euler, số miền cần tìm là

$$r=30-20+2=12.$$

Bài toán tô màu đồ thị

Cho đơn đồ thị vô hướng G. Hãy tìm cách gán mỗi đỉnh của đồ thị một màu sao cho hai đỉnh kề nhau không bị tô bởi cùng một màu. Một phép gán màu cho các đỉnh như vậy được gọi là một phép tô màu đồ thị. Bài toán tô màu đòi hỏi tìm phép tô màu với số màu phải sử dụng là ít nhất. Số màu ít nhất cần dùng để tô màu đồ thị được gọi là sắc số của đồ thị.

Hãy lập trình cho bài toán này.

Thuật giải 1:

Dùng màu thứ nhất tô cho tất cả các đỉnh của đồ thị mà có thể tô được, sau đó dùng màu thứ hai tô tất cả các đỉnh của đồ thị còn lại có thể tô được và cứ như thế cho đến khi tô hết cho tất cả các đỉnh của đồ thị.

```
m=1;
số đỉnh đã được tô=0;
mọi đỉnh đều chưa được tô
do
{       for i=1 to n
        if  đỉnh i là chưa xét và có thể tô được bằng màu m then
                {       tô đỉnh i bằng màu m
                        tăng số đỉnh đã được tô lên 1 đơn vị
                }
        m++
}
while (số đỉnh đã được tô<n)
```

Thuật giải 2:

```
Tính bậc của tất cả các đỉnh
while (còn đỉnh chưa được tô )
{
-Tìm đỉnh(chưa được tô) có bậc lớn nhất. Chẳng hạn đó là đỉnh i0.
-tìm màu để tô đỉnh i0, Chẳng hạn đó là màu j.
-Ngăn cấm việc tô màu j  cho các đỉnh kề với đỉnh i0
-tô màu đỉnh i0 là j.
-Gán bậc của đỉnh được tô 0.
}
```

Chú ý:Các thuật toán trên chưa cho ta sắc số của một đồ thị G, nó chỉ giúp ta một cách tiếp cận để tìm sắc số của một đồ thị. Để tìm sắc số của một đồ thị thì sau khi tô màu xong ta phải sử dụng các định lý, các tính chất đã học của lý thuyết đồ thị để khẳng định số màu được dùng là ít nhất và từ đó suy ra sắc số của đồ thị. Bài toán tìm sắc số của một đồ thị là một bài toán khó và không phải đồ thị nào cũng tìm được sắc số của nó một cách dễ dàng.

Gợi ý cài đặt cho thuật giải 2

Dữ liệu vào được lưu trên một trận vuông c[i][j].

Nếu c[i][j]=1 thì hai thành phố i,j là kề nhau. c[i][j]=0 thì hai thành phố i,j không kề nhau.

Thuật toán

Tính bậc của tất cả các đỉnh

while (còn đỉnh chưa được tô)

{

-Tìm đỉnh(chưa được tô) có bậc lớn nhất; chẳng hạn đó là đỉnh i0.

-tìm màu để tô đỉnh i0; chẳng hạn đó là màu j.

-Ngăn cấm việc tô màu j cho các đỉnh kề với đỉnh i0

-Tô màu đỉnh i0 là j.

-Gán bậc của đỉnh được tô 0.

}

Mã giả:

+Danh sách bảng màu cho các đỉnh được cho là 1 và bậc của các đỉnh cho là 0.

```
for (int i=1;i<=n;i++)
 {
   for (int j=1;j<=n;j++)
           mau[i][j]=1;
           dinh[i]=0;
           bac[i]=0;
 }
```

+Tính bậc cho mỗi đỉnh của đồ thị ban đầu

```
for (i=1;i<=n;i++)
for (int j=1;j<=n;j++)
        if (c[i][j]==1)
              bac[i]=bac[i]+1;

+i= 0                // là số đỉnh được tô tại thời điểm đang xét
```

```
//Lặp lại đoạn sau đến khi nào số đỉnh đã được tô bằng n thì dừng lại
{
    // tìm đỉnh có bậc cao nhất tại thời điểm đang xét
    // Tìm đỉnh (CHUA XET) có bậc cao nhất
       maxtemp=-1;
```

```
for (int j=1;j<=n;j++)
if (bac[j]>maxtemp && dinh[j]==0)
        {
                maxtemp=bac[j];
                i0=j;
        }
```

//tìm và tô màu cho đỉnh có bậc cao nhất (giả sử đó là i0) và tô màu cho đỉnh này (giả sử đó là màu j)

```
//Tìm và tô màu cho đỉnh có bậc cao nhất – màu m
j=1;
while (mau[i0][j]==0)
        j++;
```

//bậc của các đỉnh kề với đỉnh i0 thì trừ đi 1 và ngăn cấm việc tô màu j các đỉnh kề với đỉnh i0

```
for (int k=1;k<=n;k++)
if (c[i0][k]==1)
        {
                bac[k]--;
                mau[k][j]=0;
        }
```

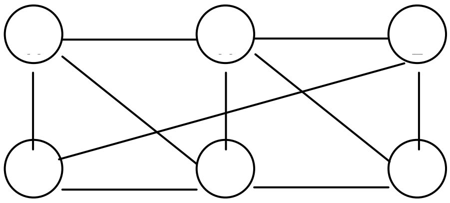
//Bậc của đỉnh được tô thì cho 0

```
dinh[i0]=j;
bac[i0]=0;
i++;
}
```

TÍNH LIÊN THÔNG.

Định nghĩa: Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v, với n là một số nguyên dương, trong đồ thị (giả đồ thị vô hướng hoặc đa đồ thị có hướng) G=(V,E) là một dãy các cạnh (hoặc cung) e_1, e_2, ..., e_n của đồ thị sao cho $e_1=(x_0,x_1)$,$e_2=(x_1,x_2)$, ...,$e_n=(x_{n-1},x_n)$, với $x_0=u$ và $x_n=v$. Khi đồ thị không có cạnh (hoặc cung) bội, ta ký hiệu đường đi này bằng dãy các đỉnh x_0, x_1, ..., x_n. Đường đi được gọi là chu trình nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh. Đường đi hoặc chu trình gọi là đơn nếu nó không chứa cùng một cạnh (hoặc cung) quá một lần. Một đường đi hoặc chu trình không đi qua đỉnh nào quá một lần (trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối của chu trình là trùng nhau) được gọi là đường đi hoặc chu trình sơ cấp. Rõ ràng rằng một đường đi (t.ư. chu trình) sơ cấp là đường đi (t.ư. chu trình) đơn.

Thí dụ

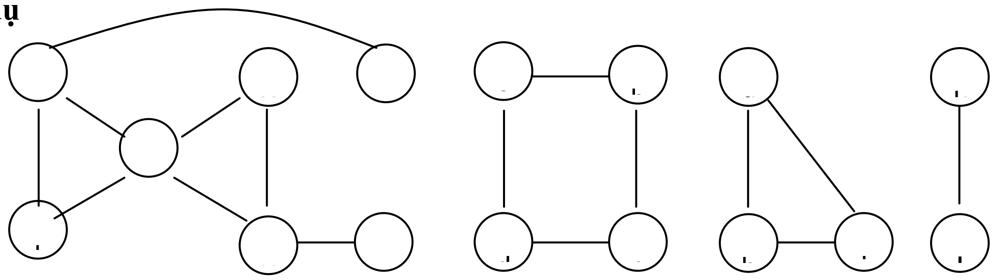


Trong đơn đồ thị trên, x, y, z, w, v, y là đường đi đơn (không sơ cấp) độ dài 5; x, w, v, z, y không là đường đi vì (v, z) không là cạnh; y, z, w, x, v, u, y là chu trình sơ cấp độ dài 6.

Định nghĩa: Một đồ thị (vô hướng) được gọi là liên thông nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

Một đồ thị không liên thông là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông, mỗi cặp các đồ thị con này không có đỉnh chung. Các đồ thị con liên thông rời nhau như vậy được gọi là các thành phần liên thông của đồ thị đang xét. Như vậy, một đồ thị là liên thông khi và chỉ khi nó chỉ có một thành phần liên thông.

Thí dụ

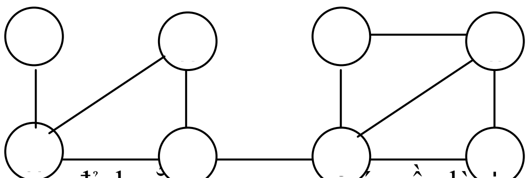


G G’

Đồ thị G là liên thông, nhưng đồ thị G’ không liên thông và có 3 thành phần liên thông.

Định nghĩa: Một đỉnh trong đồ thị G mà khi xoá đi nó và tất cả các cạnh liên thuộc với nó ta nhận được đồ thị con mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị G được gọi là đỉnh cắt hay điểm khớp. Việc xoá đỉnh cắt khỏi một đồ thị liên thông sẽ tạo ra một đồ thị con không liên thông. Hoàn toàn tương tự, một cạnh mà khi ta bỏ nó đi sẽ tạo ra một đồ thị có nhiều thành phần liên thông hơn so với đồ thị xuất phát được gọi là cạnh cắt hay là cầu.

Thí dụ



Trong đồ thị trên, các đỉnh cắt là v, w, s và các cầu là (x,v), (w,s).

Mệnh đề: Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị liên thông luôn có đường đi sơ cấp.

Chứng minh: Giả sử u và v là hai đỉnh phân biệt của một đồ thị liên thông G. Vì G liên thông nên có ít nhất một đường đi giữa u và v. Gọi $x_0, x_1, ..., x_n$, với $x_0=u$ và $x_n=v$, là dãy các đỉnh của đường đi có độ dài ngắn nhất. Đây chính là đường đi sơ cấp cần tìm. Thật vậy, giả sử nó không là đường đi đơn, khi đó $x_i=x_j$ với $0 \le i < j$. Điều này có nghĩa là giữa các đỉnh u và v có đường đi ngắn hơn qua các đỉnh $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_j, ..., x_n$ nhận được bằng cách xoá đi các cạnh tương ứng với dãy các đỉnh $x_i, ..., x_{j-1}$.

Mệnh đề: Mọi đơn đồ thị n đỉnh ($n \geq 2$) có tổng bậc của hai đỉnh tuỳ ý không nhỏ hơn n đều là đồ thị liên thông.

Chứng minh: Cho đơn đồ thị G=(V,E) có n đỉnh ($n \geq 2$) và thoả mãn yêu cầu của bài toán. Giả sử G không liên thông, tức là tồn tại hai đỉnh u và v sao cho không có đường đi nào nối u và v. Khi đó trong đồ thị G tồn tại hai thành phần liên thông là G_1 có n_1 đỉnh và chứa u, G_2 chứa đỉnh v và có n_2 đỉnh. Vì G_1, G_2 là hai trong số các thành phần liên thông của G nên $n_1+n_2 \leq n$. ta có:

$$\deg(u)+\deg(v) \leq (n_1 - 1)+(n_2 - 1) = n_1+n_2-2 \leq n-2 < n.$$

Điều mâu thuẫn ở trên dẫn đến kết luận là đồ thị G phải liên thông.

Hệ quả: Đơn đồ thị mà bậc của mỗi đỉnh của nó không nhỏ hơn một nửa số đỉnh là đồ thị liên thông.

Mệnh đề: Nếu một đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ thì hai đỉnh này phải liên thông, tức là có một đường đi nối chúng.

Chứng minh: Cho G=(V,E) là đồ thị thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ là u và v. Giả sử u và v không liên thông với nhau. Khi đó chúng phải thuộc hai thành phần liên thông nào đó của đồ thị G, G_1 chứa u và G_2 chứa v.

Bậc của đỉnh u trong G_1 cũng chính là bậc của u trong G, nên trong G_1 đỉnh u vẫn có bậc lẻ và G_1 có duy nhất một đỉnh bậc lẻ. Điều này mâu thuẫn. Vậy hai đỉnh u và v phải liên thông.

Mệnh đề: Cho G=(V,E) là một đồ thị liên thông. Khi đó một đỉnh của G là điểm khớp khi và chỉ khi trong G tồn tại hai đỉnh u và v sao cho mỗi đường đi nối u và v đều phải đi qua đỉnh này.

Chứng minh: *Điều kiện cần*: Giả sử đỉnh x là điểm khớp trong đồ thị G. Khi đó đồ thị con G_1 của G nhận được bằng cách xoá x và các cạnh liên thuộc với nó là không liên thông. Giả sử G_2, G_3 là hai trong các thành phần liên thông của G_1. Lấy u là đỉnh trong G_2 và v là đỉnh trong G_3. Do u, v thuộc hai thành phần liên thông khác nhau, nên trong G_1 các đỉnh u, v không liên thông. Nhưng trong G các đỉnh u, v lại liên thông, nên mọi đường đi nối u, v đều phải đi qua đỉnh x.

Điều kiện đủ: Giả sử mọi đường đi nối u, v đều đi qua đỉnh x, nên nếu bỏ đỉnh x và các cạnh liên thuộc với x thì đồ thị con G_1 nhận được từ G chứa hai đỉnh u, v không liên thông. Do đó G_1 là đồ thị không liên thông hay đỉnh x là điểm khớp của G.

Định lý: Cho G là một đơn đồ thị có n đỉnh, m cạnh và k thành phần liên thông. Khi đó

$$n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Chứng minh: Bất đẳng thức $n-k \leq m$ được chứng minh bằng quy nạp theo m. Nếu m=0 thì k=n nên bất đẳng thức đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng đến m−1, với $m \geq 1$. Gọi G' là đồ thị con bao trùm của G có số cạnh m_0 là nhỏ nhất sao cho nó có k thành phần liên thông. Do đó việc loại bỏ bất cứ cạnh nào trong G' cũng tăng số thành phần liên thông lên 1 và khi đó đồ thị thu được sẽ có n đỉnh, k+1 thành phần liên thông và m_0-1 cạnh. Theo giả thiết quy nạp, ta có $m_0-1 \geq n-(k+1)$ hay $m_0 \geq n-k$. Vậy $m \geq n-k$.

Bổ sung cạnh vào G để nhận được đồ thị G'' có m_1 cạnh sao cho k thành phần liên thông là những đồ thị đầy đủ. Ta có $m \leq m_1$ nên chỉ cần chứng minh

$$m_1 \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Giả sử G_i và G_j là hai thành phần liên thông của G'' với n_i và n_j đỉnh và $n_i \geq n_j > 1$ (*). Nếu ta thay G_i và G_j bằng đồ thị đầy đủ với n_i+1 và n_j-1 đỉnh thì tổng số đỉnh không thay đổi nhưng số cạnh tăng thêm một lượng là:

$$\left[\frac{(n_i+1)n_i}{2} - \frac{n_i(n_i-1)}{2}\right] - \left[\frac{n_j(n_j-1)}{2} - \frac{(n_j-1)(n_j-2)}{2}\right] = n_i - n_j + 1.$$

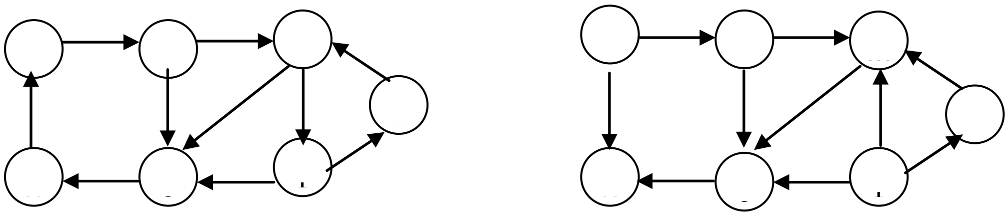
Thủ tục này được lặp lại khi hai thành phần nào đó có số đỉnh thoả (*). Vì vậy m_1 là lớn nhất (n, k là cố định) khi đồ thị gồm k-1 đỉnh cô lập và một đồ thị đầy đủ với n-k+1 đỉnh. Từ đó suy ra bất đẳng thức cần tìm.

Định nghĩa: Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông mạnh nếu với hai đỉnh phân biệt bất kỳ u và v của G đều có đường đi từ u tới v và đường đi từ v tới u.

Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng nền của nó là liên thông.

Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông một chiều nếu với hai đỉnh phân biệt bất kỳ u và v của G đều có đường đi từ u tới v hoặc đường đi từ v tới u.

Thí dụ



G G'

Đồ thị G là liên thông mạnh nhưng đồ thị G' là liên thông yếu (không có đường đi từ u tới x cũng như từ x tới u).

Mệnh đề: Cho G là một đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) với ma trận liền kề A theo thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$. Khi đó số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j trong đó r là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử dòng i cột j của ma trận A^r.

Chứng minh: Ta chứng minh mệnh đề bằng quy nạp theo r. Số các đường đi khác nhau độ dài 1 từ v_i tới v_j là số các cạnh (hoặc cung) từ vi tới v_j, đó chính là phần tử dòng i cột j của ma trận A; nghĩa là, mệnh đề đúng khi r=1.

Giả sử mệnh đề đúng đến r; nghĩa là, phần tử dòng i cột j của A^r là số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j. Vì $A^{r+1}=A^r.A$ nên phần tử dòng i cột j của A^{r+1} bằng

$$b_{i1}a_{1j}+b_{i2}a_{2j}+ ... +b_{in}a_{nj},$$

trong đó b_{ik} là phần tử dòng i cột k của A^r. Theo giả thiết quy nạp b_{ik} là số đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_k.

Đường đi độ dài r+1 từ v_i tới v_j sẽ được tạo nên từ đường đi độ dài r từ v_i tới đỉnh trung gian v_k nào đó và một cạnh (hoặc cung) từ v_k tới v_j. Theo quy tắc nhân số các đường đi như thế là tích của số đường đi độ dài r từ v_i tới v_k, tức là b_{ik}, và số các cạnh (hoặc cung) từ v_k tới v_j, tức là a_{kj}. Cộng các tích này lại theo tất cả các đỉnh trung gian v_k ta có mệnh đề đúng đến r+1.

Ghi chú về tài liệu tham khảo

Tóan rời rạc(Phần 2: Lý thuyết đồ thị) của tác giả Nguyễn Đức Nghĩa – Nguyễn Tô Thành.

Bài tập lý thuyết

1-1. Vẽ đồ thị (nếu tồn tại)

a. Vẽ một đồ thị có 4 đỉnh với bậc các đỉnh là 3, 2, 2, 1.

b. Vẽ các đồ thị mà mọi đỉnh của nó đều có bậc là lần lượt là k ($1 \leq k \leq 5$)

c. Vẽ các đồ thị mà mọi đỉnh của nó đều có bậc là 3 và có số đỉnh lần lượt là: 4,5,6,8.

d. Vẽ một đồ thị có 15 đỉnh và mỗi đỉnh của nó đều có bậc là 5.

1-2. a. Một đồ thị phẳng liên thông có 8 đỉnh, các đỉnh lần lượt có bậc là 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 6. Hỏi đồ thị có bao nhiêu cạnh ?

b. Một đơn đồ thị phẳng liên thông có 10 mặt, tất cả các đỉnh đều có bậc 4. Tìm số đỉnh của đồ thị.

c. Xét một đồ thị liên thông có 8 đỉnh bậc 3. Hỏi biểu diễn phẳng của đồ thị này sẽ chia mặt phẳng thành mấy miền.

d. Đơn đồ thị phẳng liên thông G có 9 đỉnh, bậc các đỉnh là 2,2,2,3,3,3,4,4,5. Tìm số cạnh và số mặt của G.

1-3. a. Một đồ thị có 19 cạnh và mỗi đỉnh đều có bậc ≥ 3, hỏi đồ thị này có tối đa bao nhiêu đỉnh ?

b. Cho một đồ thị vô hướng có n đỉnh. Hỏi đồ thị này có thể có tối đa bao nhiêu cạnh. Trong trường hợp số cạnh là tối đa thì mỗi đỉnh sẽ có bậc là bao nhiêu ?

c. Cho một đồ thị vô hướng có n đỉnh và 2n cạnh. Chứng minh rằng trong đồ thị này luôn tồn tại một đỉnh có bậc không nhỏ hơn 4.

d. Chứng minh rằng trong một đơn đồ thị vô hướng nếu không chứa chu trình thì sẽ luôn tồn tại ít nhất là hai đỉnh treo.

e. Chứng minh rằng nếu đồ thị G có chứa một chu trình có độ dài lẻ thì số màu của G ít nhất phải là 3.

1-4. a. Xét đồ thị vô hướng đơn có số đỉnh $n \geq 2$. Chứng minh rằng đồ thị có ít nhất 2 đỉnh cùng bậc với nhau.

b. Cho 1 đồ thị G có chứa đúng 2 đỉnh bậc lẽ (các đỉnh khác nếu có phải bậc chẵn) Chứng minh rằng 2 đỉnh này liên thông với nhau.

c. xét đồ thị vô hướng đơn có số đỉnh $n \geq 2$. Giả sử đồ thị không có đỉnh nào có bậc $< (n-1)/2$. Chứng minh rằng đồ thị này liên thông

d. Chứng minh rằng một đơn đồ thị vô hướng là hai phía nếu và chỉ nếu số màu của nó là 2.

1-5. Vẽ đồ thị phẳng liên thông

a. có 6 cạnh và 3 miền.

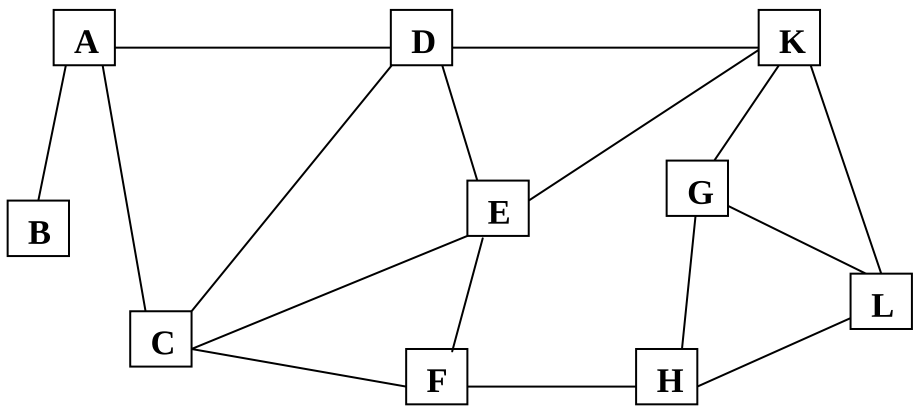
b. có 4 đỉnh và 5 miền.

c. có 6 đỉnh và 7 cạnh.

1-6. Giả sử có 6 cuộc mitting A,B,C,D,E,F cần được tổ chức. Mỗi cuộc mitting được tổ chức trong một buổi. Các cuộc mitting sau không được diễn ra đồng thời:BEF, CEF, ABE, CD, AD. Hãy bố trí các cuộc mitting vào các buổi sao cho số buổi diễn ra là ít nhất.

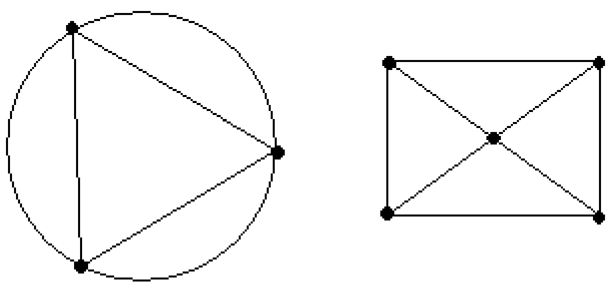
1-7. Chứng minh rằng một đồ thị đầy đủ có 5 đỉnh không là đồ thị phẳng.

1-8.Hãy tìm sắc số của đồ thị sau:

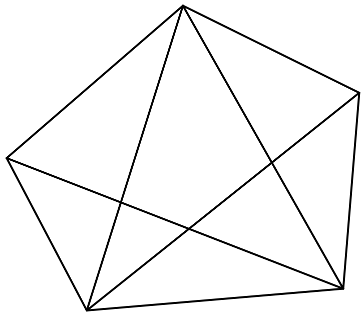


1-9.Có ba nhà ở gần ba cái giếng, từ mỗi nhà có đường đi thẳng đến mỗi giếng. Có lần do bất hòa với nhau, cả ba người này muốn tìm cách làm các con đường khác để đến các giếng sao cho các đường này không cắt nhau. Hỏi ý định này có thực hiện được không ? vì sao ?

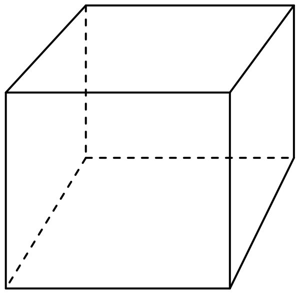
1-10.Tìm số đỉnh, cạnh và miền của các đồ thị sau:



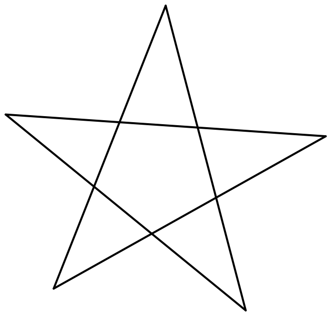
1-11.Với mỗi đồ thị sau đây hãy cho biết nó có phải là đồ thị phẳng hay không ? Nếu có hãy vẽ sao cho các cạnh của đồ thị đó không cắt nhau ngoài đỉnh.



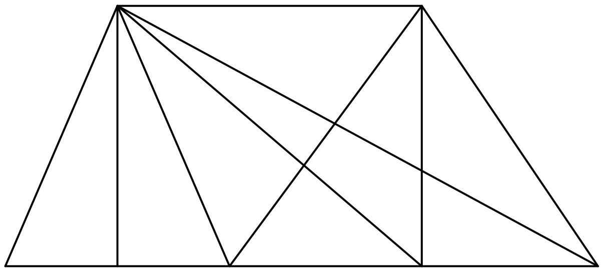
a)



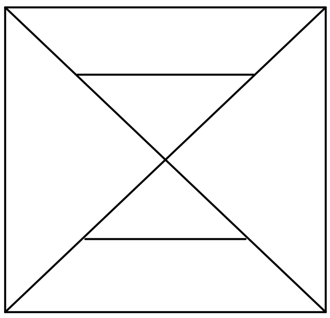
b)



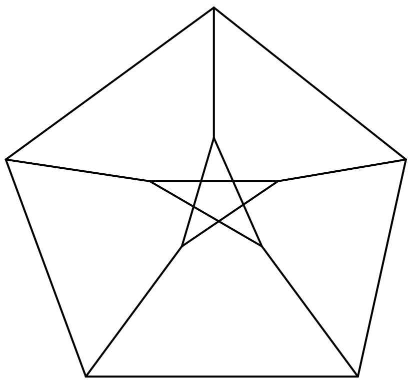
c)



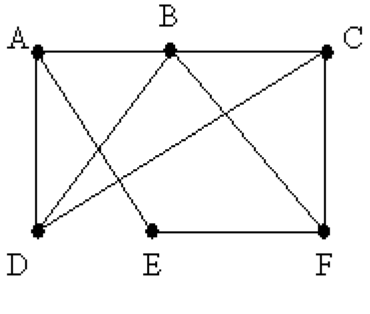
d)



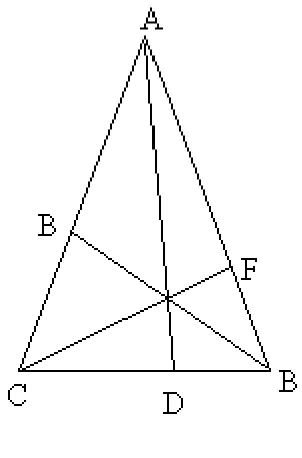
e)



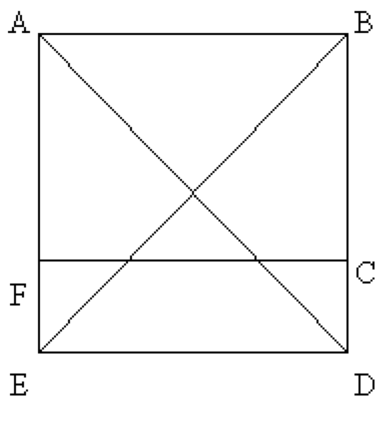
f)



g)



h)



i)