

## CHƯƠNG 2

### BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ TRÊN MÁY TÍNH

(tuần 2: Tổng cộng có 2 tiết lý thuyết và 2 tiết hướng dẫn bài tập/thực hành)

Để lưu trữ đồ thị và thực hiện các thuật toán khác nhau với đồ thị trên máy tính cần phải tìm những cấu trúc dữ liệu thích hợp để mô tả đồ thị. Việc chọn cấu trúc dữ liệu nào để biểu diễn đồ thị có tác động rất lớn đến hiệu quả của thuật toán. Vì vậy, việc chọn lựa cấu trúc dữ liệu để biểu diễn đồ thị phụ thuộc vào từng tình huống cụ thể (bài toán và thuật toán cụ thể). Trong mục này chúng ta sẽ xét một số phương pháp cơ bản được sử dụng để biểu diễn đồ thị trên máy tính.

#### 1. MA TRẬN KÈ. MA TRẬN TRỌNG SỐ

Xét đơn đồ thị vô hướng  $G = (V, E)$ , với tập đỉnh  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , tập cạnh  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Ta gọi ma trận kè của đồ thị  $G$  là ma trận.

$$A = \{a_{i,j} : i, j = 1, 2, \dots, n\}$$

Với các phần tử được xác định theo qui tắc sau đây:

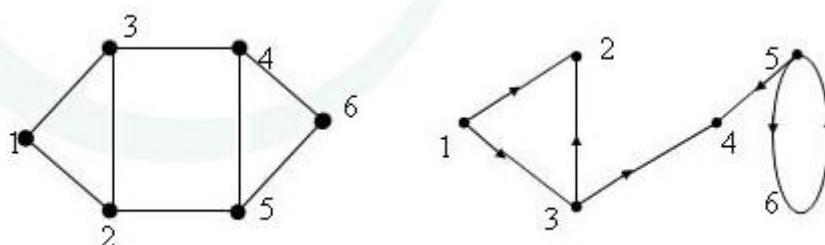
$$a_{i,j} = 0, \text{ nếu } (i,j) \in E \text{ và}$$

$$a_{i,j} = 1, \text{ nếu } (i,j) \notin E, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

**Thí dụ 1.** Ma trận trận kè của đồ thị vô hướng cho trong hình 1 là:

1    2    3    4    5    6

1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	0	1	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0



### Hình 1. Đồ thị vô hướng $G$ và Đồ thị có hướng $G_1$

**Các tính chất của ma trận kè:**

1) Rõ ràng ma trận kè của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, tức là  $a[i,j]=a[j,i]$ ,  $i,j=1,2,\dots,n$ .

2) Tổng các phần tử trên dòng  $i$  (cột  $j$ ) của ma trận kè chính bằng bậc của đỉnh  $i$  (đỉnh  $j$ ).

**Ma trận kè của đồ thị có hướng**

Được định nghĩa một cách hoàn toàn tương tự.

**Thí dụ 2.**

Đồ thị có hướng  $G_1$  cho trong hình 1 có ma trận kè là ma trận sau:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	0

Lưu ý rằng ma trận kè của đồ thị có hướng không phải là ma trận đối xứng.

**Chú ý:**

Trên đây chúng ta chỉ xét đơn đồ thị. Ma trận kè của đa đồ thị có thể xây dựng hoàn toàn tương tự, chỉ khác là thay vì ghi 1 vào vị trí  $a[i,j]$  nếu  $(i,j)$  là cạnh của đồ thị, chúng ta sẽ ghi  $k$  là số cạnh nối hai đỉnh  $i, j$ .

**Ma trận trọng số**

Trong rất nhiều vấn đề ứng dụng của lý thuyết đồ thị, mỗi cạnh  $e=(u,v)$  của đồ thị được gắn với một con số  $c(e)$  (còn viết là  $c(u,v)$  - gọi là trọng số của cạnh  $e$ ). Đồ thị trong trường hợp như vậy được gọi là đồ thị có trọng số. Trong trường hợp đồ thị có trọng số, thay vì ma trận kè, để biểu diễn đồ thị ta sử dụng ma trận trọng số.

$$C = \{c[i,j], i,j=1, 2, \dots, n\}$$

$$\text{với } c[i,j] = c(i,j) \text{ nếu } (i,j) \in E$$

$$\text{và } c[i,j] = 0 \text{ nếu } (i,j) \notin E$$

trong đó số  $\theta$ , tùy từng trường hợp cụ thể, có thể được đặt bằng một trong các giá trị sau:  
 $0, +\infty, -\infty$ .

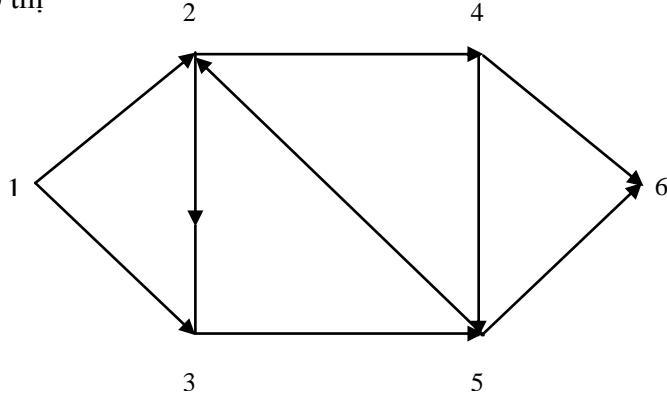
Ưu điểm lớn nhất của phương pháp biểu diễn đồ thị bằng ma trận kè (hoặc ma trận trọng số) là để trả lời câu hỏi: Hai đỉnh  $u, v$  có kè nhau trên đồ thị hay không, chúng ta chỉ phải thực hiện một phép so sánh; nhược điểm lớn nhất của phương pháp này là: không phụ thuộc vào số cạnh của đồ thị, ta luôn phải sử dụng  $n^2$  đơn vị bộ nhớ để lưu trữ ma trận kè của nó.

## 2.2. Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh

Xét  $G = (V, E)$  là đơn đồ thị có hướng, giả sử  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Ma trận liên thuộc đỉnh – cạnh có  $n$  dòng (1 dòng ứng với 1 đỉnh) và  $m$  cột (1 cột ứng với 1 cạnh). Trong đó

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu đỉnh } i \text{ là đỉnh đầu của cung } e_j \\ -1 & \text{nếu đỉnh } i \text{ là đỉnh cuối của cung } e_j \\ 0 & \text{nếu đỉnh } i \text{ không là đầu mút của cạnh } e_j \end{cases}$$

Ví dụ: Xét đồ thị



	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,5)	(4,6)	(5,2)	(5,6)
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	0	0	0	-1	0
3	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	-1	0	1	1	0	0
5	0	0	0	0	-1	-1	0	1	1
6	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1

### 2.3.DANH SÁCH CẠNH (CUNG)

Trong trường hợp đồ thị thưa (đồ thị có số cạnh m thoả mãn bất đẳng thức:  $m < 6n$ ) người ta thường dùng cách biểu diễn đồ thị dưới dạng danh sách cạnh.

Trong cách biểu diễn đồ thị bởi danh sách cạnh (cung) chúng ta sẽ lưu trữ danh sách tất cả các cạnh (cung) của đồ thị vô hướng (có hướng). Một cạnh (cung)  $e = (x,y)$  của đồ thị sẽ tương ứng với hai biến  $Dau[e]$ ,  $Cuo[i][e]$ . như vậy, để lưu trữ đồ thị ta cần sử dụng  $2m$  đơn vị bộ nhớ. Nhược điểm của cách biểu diễn này là để xác định những đỉnh nào của đồ thị là kè với một đỉnh cho trước chúng ta phải làm  $c\sim m$  phép so sánh (khi duyệt qua danh sách tất cả các cạnh của đồ thị).

*Chú ý:* Trong trường hợp đồ thị có trọng số ta cần thêm  $m$  đơn vị bộ nhớ để lưu trữ trọng số của các cạnh.

**Thí dụ 3.** Danh sách cạnh (cung) của đồ thị  $G$  ( $G_1$ ) cho trong hình 1 là:

Dau Cuoi

1 2

1 3

2 3

2 5

3 4

4 5

4 6

5 6

Dau Cuoi

1 2

1 3

3 2

3 4

5 4

5 6

6 5

Danh sách cạnh của  $G$

Danh sách cung của  $G_1$

### 2.4. DANH SÁCH KÈ

Trong rất nhiều vấn đề ứng dụng của lý thuyết đồ thị, cách biểu diễn đồ thị dưới dạng danh sách kè cũng là cách biểu diễn được sử dụng.

Trong cách biểu diễn này, với mỗi đỉnh  $v$  của đồ thị chúng ta lưu trữ danh sách các đỉnh kè với nó, mà ta sẽ ký hiệu là:

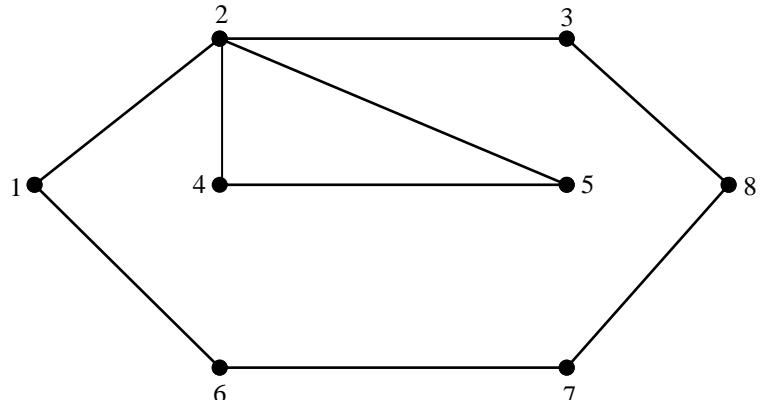
$$ke(v) = \{ u \in V : (v,u) \in E \}$$

## Bài tập lý thuyết

**2-1.** Cho đồ thị vô hướng liên thông G như hình vẽ bên.

a. Hãy biểu diễn đồ thị G bằng ma trận kề, danh sách cạnh.

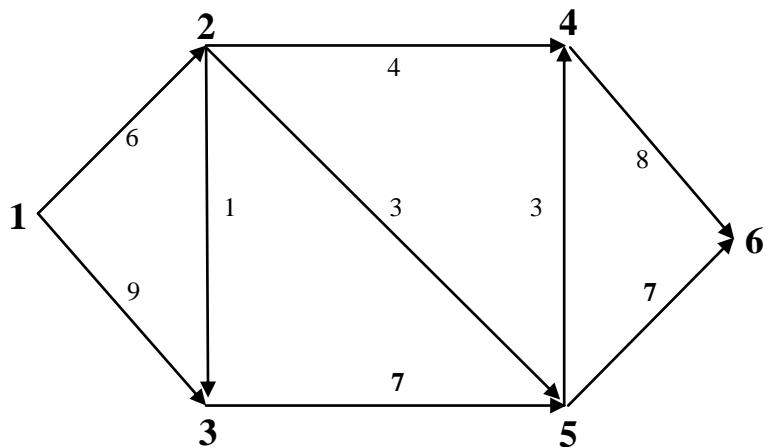
b. Số màu ít nhất cần dùng để tô màu một đồ thị được gọi là sắc số của đồ thị (bài toán tô màu). Hãy cho biết sắc số của đồ thị G trên.



**2-2.** Cho đồ thị G như hình vẽ bên:

a. Hãy biểu diễn đồ thị G bằng ma trận liên thuộc đỉnh - cạnh, ma trận trọng số, danh sách cung.

b. Gọi  $G'$  là đồ thị vô hướng thu được bằng cách loại bỏ hướng trên các cung của đồ thị G. Hãy cho biết sắc số  $k$  của  $G'$  và chỉ ra một cách tô màu  $G'$  với  $k$  màu.



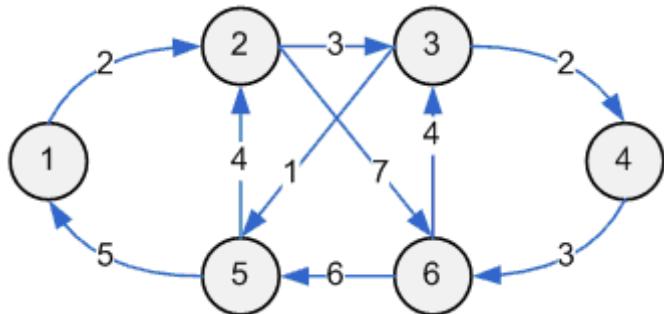
**2-3.** Xét đồ thị G gồm 8 đỉnh được cho bởi ma trận trọng số(các đỉnh của đồ thị được đánh số từ 1)

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 10 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 10 & 4 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -6 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Hãy biểu diễn đồ thị G bằng danh sách kề, danh sách cạnh.

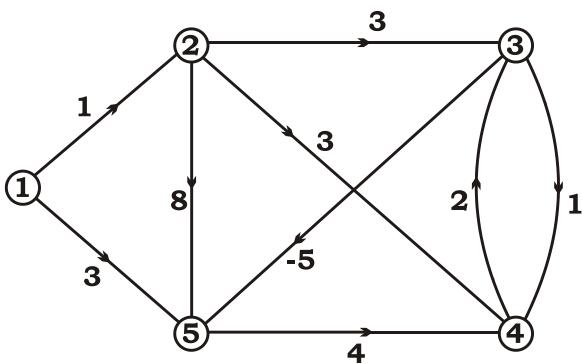
b. Đồ thị G có phải là đồ thị phẳng hay không? Chứng minh.

**2-4.** Xét đồ thị có hướng G gồm 6 đỉnh được cho bởi hình vẽ dưới đây:



- a. Hãy biểu diễn G bằng ma trận trọng số và ma trận liên thuộc đỉnh – cạnh.
- b. Gọi  $G'$  là đồ thị vô hướng được tạo bằng cách loại bỏ hướng trên các cung của  $G$ . Hãy cho biết sắc số  $k$  của  $G'$  và chỉ ra một cách tô màu  $G'$  với  $k$  màu.

**2-5.** Xét đồ thị có hướng  $G$  gồm 5 đỉnh được cho bởi hình vẽ dưới đây:



- a. Hãy biểu diễn  $G$  bằng ma trận trọng lượng và ma trận liên thuộc.
- b. Gọi  $G'$  là đồ thị vô hướng được tạo bằng cách loại bỏ hướng trên các cung của  $G$  (và bỏ cung  $(3,4)$  có trọng lượng là 1). Hãy cho biết sắc số  $k$  của  $G'$  và chỉ ra một cách tô màu  $G'$  với  $k$  màu.

### Bài tập thực hành

**2-6.** Lập trình nhập đồ thị với các phương pháp biểu diễn: ma trận kề, ma trận trọng số và danh sách cạnh, ma trận liên thuộc.

**2-7.** Lập trình cho phép chuyển đổi cấu trúc dữ liệu biểu diễn đồ thị dưới dạng ma trận trọng số qua dạng danh sách cạnh và ngược lại.

**2-8.** Lập trình cho phép chuyển đổi cấu trúc dữ liệu biểu diễn đồ thị dưới dạng ma trận kề qua dạng danh sách kề và ngược lại.

**2-9.** Cho đồ thị vô hướng được biểu diễn bằng ma trận kề. Dữ liệu được lưu trên file text dothi.inp có cấu trúc như sau:

Dòng đầu ghi số n, trong n dòng tiếp theo mỗi dòng ghi n số, các số cách nhau ít nhất một dấu cách. Hãy viết chương trình thực hiện các yêu cầu sau:

- a.Đọc ma trận kè từ file dothi.inp
  - b.Kiểm tra tính hợp lệ của ma trận (kiểm tra xem các giá a[i][i] có giá trị nào khác 0 hay không ? kiểm tra xem có giá trị nào mà a[i][j] khác a[j][i] hay không ?)
- 2-10.** Cho một đơn đồ thị. Hãy viết các hàm thực hiện các yêu cầu sau:
- a.Đồ thị là có hướng hay vô hướng ?
  - b.Tính bậc của mỗi đỉnh.
  - c.Kiểm tra xem có phải là đồ thị hai phía hay không?