Le Quy Don Technical University
Institute of Information and Communication Technology

LINEAR ALGEBRA

My linear algebra notebook

Version 1.0

Author: Nguyen Duc Tuan

Major: Computer Science - Artificial Intelligence
School: Le Quy Don Technical University
Email: nguyenductuan07102007@gmail.com

Ngày 1 tháng 11 năm 2025

Mục lục

Chương 1

Ma trận

1.1 Các khái niệm cơ bản về ma trận

Định nghĩa Ma trận (Definition of a Matrix)

1.2 Định nghĩa chính tắc (Công thức Leibniz)

Đây là định nghĩa tổng quát và cơ bản nhất của định thức.

Cho A là một ma trận vuông cấp $n \times n$, với các phần tử được ký hiệu là a_{ij} (phần tử ở hàng i, cột j).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Định thức của A, ký hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$, được định nghĩa bằng **công thức Leibniz** như sau:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Giải thích các thành phần

- S_n: Là tập hợp tất cả các **hoán vị** σ của n số nguyên $\{1, 2, \ldots, n\}$. Một hoán vị σ là một cách sắp xếp lại thứ tự của các số này. Ví dụ, nếu $n = 3$, một hoán vị có thể là $\sigma = (2, 3, 1)$, nghĩa là $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, và $\sigma(3) = 1$.
- **sgn**(σ): Là **dấu của hoán vị** σ (signum).
  - $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$ nếu σ là một **hoán vị chẵn** (có thể thu được bằng một số chẵn các phép tráo đổi 2 phần tử).
  - $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ nếu σ là một **hoán vị lẻ** (có thể thu được bằng một số lẻ các phép tráo đổi 2 phần tử).
- $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$: Là tích của n phần tử của ma trận, được lấy sao cho: từ hàng 1 ta lấy phần tử ở cột $\sigma(1)$, từ hàng 2 ta lấy phần tử ở cột $\sigma(2)$, và cứ thế đến hàng n ta

lấy phần tử ở cột $\sigma(n)$. Điều này đảm bảo mỗi hàng và mỗi cột chỉ được đại diện đúng một lần trong mỗi tích.

Nói một cách dễ hiểu, định thức là tổng của tất cả $n!$ (n giai thừa) tích có thể có, mỗi tích được tạo thành từ n phần tử (mỗi hàng và mỗi cột chỉ lấy một phần tử), với dấu cộng hoặc trừ được quyết định bởi tính chẵn/lẻ của hoán vị các chỉ số cột.

1.3 Định nghĩa đệ quy (Khai triển Laplace)

Đây là một định nghĩa mang tính xây dựng và thường được dùng để tính toán định thức trong thực tế.

Trường hợp cơ sở

Nếu A là ma trận 1×1, $A = [a_{11}]$, thì $\det(A) = a_{11}$.

Bước đệ quy (cho $n > 1$)

Để định nghĩa định thức của ma trận A cấp $n \times n$, ta cần hai khái niệm:

1. **Ma trận con (Minor)**: **Ma trận con** A_{ij} (đôi khi ký hiệu là M_{ij}) là ma trận cấp $(n-1) \times (n-1)$ thu được bằng cách **xóa hàng** i **và cột** j của ma trận A.

2. **Phần bù đại số (Cofactor)**: **Phần bù đại số** C_{ij} của phần tử a_{ij} được định nghĩa là:
$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$
Dấu $(-1)^{i+j}$ tạo ra một "bàn cờ"dấu:
$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Với các khái niệm trên, định thức của A có thể được tính bằng cách **khai triển theo một hàng** i **bất kỳ** (từ 1 đến n):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in}$$

Hoặc, **khai triển theo một cột** j **bất kỳ** (từ 1 đến n):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}$$

Giá trị của định thức là duy nhất, không phụ thuộc vào hàng hay cột nào được chọn để khai triển. Định nghĩa này mang tính đệ quy vì $\det(A)$ (cấp n) được định nghĩa thông qua các $\det(A_{ij})$ (cấp $n-1$).