Übungszettel 3

Alexandros Parotsidi
Oskar Stanschus

Aufgabe 1

$$t = (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \tag{1}$$

a) i) Wahrheitstabelle

a	b	c	$b \to c$	$a \to b$	$a \to c$	$(b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))$	t
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Die Aussage ist eine Tautologie, da sie immer wahr ist.

ii)

$$t \equiv (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \tag{2}$$
$$\equiv (\neg a \lor (\neg b \lor c)) \to ((\neg a \lor b) \to (\neg a \lor c)) \tag{3}$$
$$\equiv (\neg a \lor (\neg b \lor c)) \to (\neg(\neg a \lor b) \lor (\neg a \lor c)) \tag{4}$$
$$\equiv (\neg a \lor (\neg b \lor c)) \to ((a \land \neg b) \lor (\neg a \lor c)) \tag{5}$$
$$\equiv \neg(\neg a \lor (\neg b \lor c)) \lor ((a \land \neg b) \lor (\neg a \lor c)) \tag{6}$$
$$\equiv (a \land \neg(\neg b \lor c)) \lor ((a \land \neg b) \lor (\neg a \lor c)) \tag{7}$$
$$\equiv (a \land (b \land \neg c)) \lor ((a \land \neg b) \lor (\neg a \lor c)) \tag{8}$$
$$\equiv (a \land b \land \neg c) \lor (a \land \neg b) \lor (\neg a \lor c) \tag{9}$$
$$\equiv a \land (b \land \neg c) \lor a \land \neg b \lor \neg a \lor c \tag{10}$$
$$\equiv a \land ((b \land \neg c) \lor \neg b) \lor \neg a \lor c \tag{11}$$

$$\equiv a \wedge ((\neg b \vee b) \wedge (\neg c \vee \neg b)) \vee \neg a \vee c \tag{12}$$
$$\equiv a \wedge (1 \wedge (\neg c \vee \neg b)) \vee \neg a \vee c \tag{13}$$
$$\equiv a \wedge (\neg c \vee \neg b) \vee \neg a \vee c \tag{14}$$

$t := (\neg a \vee c)$ hilft

$$\equiv (a \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c) \tag{15}$$
$$\equiv (a \wedge \neg c) \vee (\neg a \vee c) \vee (a \wedge \neg b) \tag{16}$$
$$\equiv ((\neg a \vee c) \vee a) \wedge ((\neg a \vee c) \vee \neg c) \vee (a \wedge \neg b) \tag{17}$$
$$\equiv (1 \vee c) \wedge (\neg a \vee 1) \vee (a \wedge \neg b) \tag{18}$$
$$\equiv 1 \wedge 1 \vee (a \wedge \neg b) \tag{19}$$
$$\equiv 1 \vee (a \wedge \neg b) \tag{20}$$
$$\equiv 1 \tag{21}$$

lol ist noch wahr

wow, sehr cool

elegant

1) $t_1 \equiv \neg(x_1 \vee \neg x_2) \vee \neg(x_1 \rightarrow x_3)$

$$t_1 \equiv \neg(x_1 \vee \neg x_2) \vee \neg(x_1 \rightarrow x_3) \tag{22}$$
$$\equiv (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \tag{23}$$
$$\equiv \neg x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \neg x_3 \quad \equiv t_4 \tag{24}$$

Die Umformung wird durch die *de Morganische Regel* und die *doppelte Negation* gerechtfertigt.
Da das logische ündßtärker als das logische öderïst, sind die Klammern nicht notwendig.
Daraus folgt, dass t_1 semantisch gleich zu t_4 ist.

2) $\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$

$$t_2 \equiv \neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2) \tag{25}$$
$$\equiv (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2) \tag{26}$$
$$\equiv \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2) \quad \equiv t_3 \tag{27}$$

Die Umformung wird durch die *de Morganische Regel* und die *Absorption* gerechtfertigt.
Das Ergebnis aus der Umformung entspricht t_3. Also sind t_2 und t_3 semantisch gleich.

4/4

3) $t_3 \equiv \neg x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$

4) $t_4 \equiv \neg x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \neg x_3$

10/10

Aufgabe 2

1) $t_1 \equiv \neg\forall x \forall y : P(x,y)$

$$t_1 \equiv \neg\forall x \forall y : P(x,y) \tag{28}$$
$$\equiv \exists x \exists y : \neg P(x,y) \tag{29}$$

2) $t_2 \equiv \neg\forall x \exists y \forall z : P(x,y,z)$

$$t_2 \equiv \neg\forall x \exists y \forall z : P(x,y,z) \tag{30}$$
$$\equiv \exists x \forall y \exists z : \neg P(x,y,z) \tag{31}$$

3) $t_3 \equiv \neg(\exists x \exists y : \neg P(x,y) \land \forall x \forall y : Q(x,y))$

$$t_3 \equiv \neg(\exists x \exists y : \neg P(x,y) \land \forall x \forall y : Q(x,y)) \tag{32}$$
$$\equiv \neg(\exists x \exists y : \neg P(x,y)) \lor \neg(\forall x \forall y : Q(x,y)) \tag{33}$$
$$\equiv \forall x \forall y : P(x,y) \lor \exists x \exists y : \neg Q(x,y) \tag{34}$$

4) $t_4 \equiv \neg\forall x : (\exists y \forall z : P(x,y,z) \land \exists z \forall y : P(x,y,z))$

$$t_4 \equiv \neg\forall x : (\exists y \forall z : P(x,y,z) \land \exists z \forall y : P(x,y,z)) \tag{35}$$
$$\equiv \exists x : \neg(\exists y \forall z : P(x,y,z) \land \exists z \forall y : P(x,y,z)) \tag{36}$$
$$\equiv \exists x : \neg(\exists y \forall z : P(x,y,z)) \lor \neg(\exists z \forall y : P(x,y,z)) \tag{37}$$
$$\equiv \exists x : \forall y \exists z : \neg P(x,y,z) \lor \forall z \exists y : \neg P(x,y,z) \tag{38}$$

Aufgabe 3

$Q(x,y,z) : x + y > z$ mit drei Variablen über dem Universum $U = N$

1) $t_1 = \forall z \exists y \forall x : Q(x,y,z)$

Beweiser vs. Gegenspieler

Gegenspieler:

$z = a \epsilon \mathbb{N}$

$x = b \epsilon \mathbb{N}$

Beweiser:

$y = (a+1) \epsilon \mathbb{N}$

Reihenfolge ist wichtig!

Überprüfen der Aussage:

$$b + (a + 1) > a \tag{39}$$
$$b + a + 1 > a \tag{40}$$
$$b + 1 > 0 \tag{41}$$
$$b > -1 \tag{42}$$
$$b \epsilon \mathbb{N} \tag{43}$$

3/3

Der Wahrheitswert der Aussage ist richtig, weil der Beweiser *gewinnt*

2) $t_2 = \forall x \exists y \forall z : Q(x, y, z)$

Beweiser vs. Gegenspieler

Gegenspieler:

$x = a \epsilon \mathbb{N}$

$z = b \epsilon \mathbb{N}$

Beweiser:

$y = (b + 1) \epsilon \mathbb{N}$

Überprüfen der Aussage:

Das geht nicht! Reihenfolge!

0/4

$$a + (b + 1) > b \tag{44}$$
$$a + b + 1 > b \tag{45}$$
$$a + 1 > 0 \tag{46}$$
$$a > -1 \tag{47}$$
$$a \epsilon \mathbb{N} \tag{48}$$

Der Wahrheitswert der Aussage ist richtig, weil der Beweiser *gewinnt*

3) $t_3 = \forall x \exists y \exists z : Q(x, y, z) \wedge Q(z, y, x)$

Beweiser vs. Gegenspieler

Umformungen?

Gegenspieler:

$x = a \epsilon \mathbb{N}$

Beweiser:

$y = 1$

$z = a \epsilon \mathbb{N}$

okay

Überprüfen der Aussage:

$$a + 1 > a \tag{49}$$

$x+y>z \Rightarrow a+1>a$ ✓

$$1 > 0 \tag{50}$$

$z+y>x \Rightarrow a+1>a$ ✓

Der Wahrheitswert der Aussage ist richtig, weil der Beweiser *gewinnt*

2.5/3

15.5/20