Übung 3

Tuna Hadimioglu
Ivica Kopcalija

Aufgabe 1

ii) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ // $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ → Das wird benutzt.

$\equiv (\neg a \vee (b \to c)) \to ((\neg a \vee b) \to (\neg a \vee c))$

$\equiv (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to (\neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee c))$

$\equiv \neg(\neg a \vee (\neg b \vee c)) \vee (\neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee c))$

$\equiv (a \wedge (b \wedge \neg c)) \vee ((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c))$

$\equiv$ (Assoziativität) $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee c$

$\equiv$ (Kommutativität) $(\neg a \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b) \vee c$

Distributivität $(X \vee (\neg X \wedge Y) \equiv X \vee Y)$

$\equiv (\neg a \vee (b \wedge \neg c)) \vee (a \wedge \neg b) \vee c$

$\equiv$ (Kommutativität) $\equiv (\neg a \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee c)$ okay

Distributivität

$\equiv (\neg a \vee \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee c$

Distributivität $X \vee (\neg X \wedge Y) \equiv X \vee Y$ wobei $X = \neg b$ und $Y = \neg c$

$\neg a \vee (\neg b \vee (b \wedge \neg c)) \vee c \equiv \neg a \vee (\neg b \vee \neg c) \vee c$

$\equiv$ (Kommutativität) $(\neg a \vee \neg b \vee \underbrace{c \vee \neg c}_{\equiv 1})$

$\equiv ((\neg a \vee \neg b) \vee 1)$

$\equiv \underline{\underline{1}}$

feine Sache

i)

a	b	c	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\underbrace{(a \to \underbrace{(b \to c)}_{t_1})}_{t_2} \to \underbrace{(\overbrace{(a \to b)}^{t_3} \to \overbrace{(a \to c)}^{t_4})}_{t_5} = t$

- Für alle Belegungen wird zu 1. ⇒ Tautologie

6/6

b)

1) $\neg(x_1 \vee \neg x_2) \vee \neg(x_1 \to x_3)$

Kontraposition 2x

$\equiv (x_2 \to x_1) \to \neg(x_1 \to x_3)$

okay

4) $\neg x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \neg x_3$

deMorg. Regel 2x
Kontraposition 2x

$\equiv \neg(x_2 \to x_1) \vee \neg(x_1 \to x_3)$

Kontrapos.

$\equiv (x_2 \to x_1) \to \neg(x_1 \to x_3)$

okay

2) $\neg(X_1 \land X_2) \land \neg X_1 \lor (X_3 \land X_2)$ deMorg. Regel Absorbtion

$\equiv \neg X_1 \lor (X_3 \land X_2)$ Kontrapos. Assoziativ.

$\equiv \boxed{X_1 \rightarrow (X_2 \land X_3)}$ ✓

3) $\neg X_1 \lor (X_2 \land X_3)$ Kontrapos.

$\equiv \boxed{X_1 \rightarrow (X_2 \land X_3)}$ ✓

~~$\Rightarrow 1 \equiv 4$~~ und $2 \equiv 3$ $t_1 \equiv t_4,\ t_2 \equiv t_3$ 4/4

Aufgabe 2:

(a) $\neg\forall x \forall y : P(x,y) \equiv \exists x \exists y : \neg P(x,y)$ (~~De-morgansche Regel~~) ✓

(b) $\neg\forall x \exists y \forall z : P(x,y,z) \equiv \exists x \forall y \exists z : \neg P(x,y,z)$ (~~De-morgansche Regel~~) ✓

(c) $\neg(\exists x \exists y : \neg P(x,y) \land \forall x \forall y : Q(x,y))$

$\equiv (\forall x \forall y : P(x,y) \lor \exists a \exists b : \neg Q(x,y)) \equiv \forall x \forall y \exists a \exists b : P(x,y) \lor \neg Q(a,b)$ ✓

(d) $\neg\forall x : (\exists y \forall z : P(x,y,z) \land \exists z \forall y : P(x,y,z))$

$\equiv$ (De-morgansche Regel) $\equiv \exists x : (\forall y \exists z : \neg P(x,y,z) \lor \forall z \exists y : \neg P(x,y,z))$ ✓

$\equiv \exists x \forall y \exists z \forall a \exists b : \neg P(x,y,z) \lor \neg P(x,b,a)$

fein

3.

a) $\forall z \exists y \forall x : x+y>z$ wahr

Gegenspieler: $z=c,\ x=a$ $c,a \in \mathbb{N}$

Beweiser: $y=c+1$ ✓

$\Rightarrow a+c+1>c$ $a \geq 0$ fehlt 2.5/3

$\Leftrightarrow c > c-a-1$ □

b) $\forall x \exists y \forall z : x+y>z$ falsch

Negation: $\exists x \forall y \exists z : x+y \leq z$ ✓

Gegenspieler: $y=b$ $b,a \in \mathbb{N}$

Beweiser: $x=a,\ z=a-1$ zuerst x definieren -0.5

$\Rightarrow a+b \geq a-1$

$\Leftrightarrow a \geq a-1-b$ □

$\Rightarrow \forall x \exists y \forall z : x+y>z$ ist falsch

$b \geq 0$ fehlt -0.5 3/4

c) $\forall x \exists y \exists z : x+y>z \land z+y>x$

Gegenspieler: $x=a$ ✓ $a \in \mathbb{N}$

Beweiser: $y=a+1,\ z=0$ ✓

$\Rightarrow a+a+1>0$ ✓ $\land$ $0+a+1>a$ ✓

$\Leftrightarrow 2a+1>0$ $\land$ $a+1>a$ ✓ □

18.5