ii) $a_i = 1 \wedge a_j = 1 \wedge a_k \neq 1$

$\forall a \in m[a_1, a_2, a_3, \dots a_{n-1}]$

$\exists_i \in [0, n-1)\ \exists j \in (i, n-1]$

$\forall x \in [0, n-1] \setminus \{i, j\}$

3. Übungszettel

1. Logische Umformungen

a) (i)

a	b	c	$b \to c$	$a \to (b \to c)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

✓

a	b	c	$a \to b$	$a \to c$	$((a \to b) \to (a \to c))$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

a	b	c	$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tautologie

$\square$

2/2

fin

ii) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$

$\equiv \neg(a \to (b \to c)) \vee ((a \to b) \to (a \to c))$

$\equiv \neg(\neg a \vee (b \to c)) \vee (\neg(a \to b) \vee (a \to c))$

$\equiv \neg(\neg a \vee (\neg b \vee c)) \vee (\neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee c))$ ✓

$\equiv (a \wedge b \wedge \neg c) \vee ((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c))$ ✓

$\equiv (a \wedge b \wedge \neg c) \vee ((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c))$

$\equiv (b \wedge a \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee c$ ✓

$\equiv (b \wedge a \wedge \neg c) \vee \underbrace{(a \vee \neg a)}_{1} \wedge (\neg b \vee \neg a) \vee c$

$\equiv (b \wedge a \wedge \neg c) \vee (\neg b \vee \neg a \vee c) \equiv 1$ $\square$

✓ super

evtl $t = (b \wedge a \wedge \neg c)$

4/4

b) (1) $\equiv \neg(x_1 \vee \neg x_2) \vee \neg(x_1 \to x_3)$ (de Morgansche Regel, Implikation)

$\equiv (\neg x_1 \wedge x_2) \vee \neg(\neg x_1 \vee x_3)$ (de Morgansche Regel) ✓

$\equiv (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) = t_4$ (Distributivität) ✓

(2) $\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$ (die Morgansche Regel) ✓

$\equiv (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$

$\equiv \neg x_1 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \vee (x_3 \wedge x_2)$ (Absorption) ✓

$\equiv \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$

(3) $\neg x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$ ✓

(4) $\neg x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge \neg x_3$

t(2) und t(3) sind semantisch äquivalent

t(1) und t(4) sind semantisch äquivalent ✓ 4/4

2. Negationsnormalform 10/10

(a) $\neg \forall x \forall y : P(x,y) \equiv \exists x \exists y : \neg P(x,y)$ ✓

(b) $\neg \forall x \exists y \forall z : P(x,y,z) \equiv \exists x \forall y \exists z : \neg P(x,y,z)$ ✓

(c) $\neg(\exists x \exists y : \neg P(x,y) \wedge \forall x \forall y : Q(x,y))$

$\equiv \forall x \forall y : P(x,y) \vee \exists x \exists y : \neg Q(x,y))$ ✓

(d) $\neg \forall x : (\exists y \forall z : P(x,y,z) \wedge \exists z \forall y : P(x,y,z))$

$\equiv \exists x : \neg (\exists y \forall z : P(x,y,z) \wedge \exists z \forall y : P(x,y,z))$

$\equiv \exists x : (\forall y \exists z : \neg P(x,y,z) \vee \forall z \exists y : \neg P(x,y,z))$ ✓

3. Quantoren

x, y, z über dem Universum $U = \mathbb{N}$

a) $\forall z \exists y \forall x : x + y > z$

Gegenspieler: $z = a$ ✓

Beweiser: $y = a + 1$ ✓

Gegenspieler: $x = \cancel{a+2}$ b / ist irgendeine Variable

Gegenspieler setzt $z = a$. Beweiser setzt $y = a + 1$.

$\Rightarrow x + a + 1 > a$

~~Da~~ $x, y, z \in \mathbb{N}$, kann Gegenspieler keine negative Zahl setzen. Daher ✓ $x \geq 0$ ist die Aussage für beliebiges x wahr. Als Beispiel $x = a + 2$ gewählt. Als konkrete Zahlen könnten wir z.B. $z = 7$, $y = 8$, $x = 2$ ✓

Hier ist wichtig, dass Beweiser eine größere Zahl setzt, als Gegenspieler. Das heißt, wir können beweisen.

okay, aber bitte nicht so machen, wir beliebige Variable b arbeiten.

3/3

b) $\forall x \exists y \forall z: x+y>z$

Wir können die Aussage nicht beweisen => negieren.

$\exists x \forall y \exists z: x+y \le z$

Beweiser setzt: $x=a$

Gegenspieler setzt: $y=a+10$

Beweiser setzt: $z=2a+15$

$a+a+10 \le 2a+15$

$2a+10 \le 2a+15$

Hier setzt der Beweiser erst. Dann setzt Gegenspieler: $y=a+10$. Aber Beweiser kann so ein z auswählen, dass die Aussage als wahr bewertet wird und z größer ist, als x+y. Beweiser könnte z.B. 2 auswählen. Gegenspieler okay $y=12$. Und Beweiser $z=15$.

verwirrt, oben aber alles richtig

hast du oben gemacht

4/4

c) $\forall x \exists y \exists z: x+y>z \wedge z+y>x$

Gegenspieler setzt: $x = a$ okay

Beweiser setzt: $y = a+2$ okay

Beweiser setzt: $z = a+1$ okay

Wir zeigen, dass:

$a + a+2 > a+1$

$2a + 2 > a+1 \Rightarrow a+1 > 0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$

wahr, da $a \in \mathbb{N}$ ✓

und:

$a+1 + a+2 > a$

$2a + 3 > a$ s.o.

wahr, da $a \in \mathbb{N}$

Das könnten wir auch so zeigen:

Gegenspieler: $x = 3$

Beweiser: $y = 5$

Beweiser: $z = 4$

$\Rightarrow 3+5 > 4 \wedge 5+4 > 3$

$8 > 4 \wedge 9 > 3$ ✓

wahr