Anna Fey Winkler, Maximilian Jagodzinski

Übung 03, Abgabe 06.11.23, 13:00

Aufgabe 1 Logische Umformungen

(a) Zeigen Sie dass der folgende Ausdruck (auch bekannt als Frege'scher Kettenschluss) eine Tautologie ist.

(i) Durch Ausfüllen einer Wertetabelle

$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$

a	b	c	$(a \rightarrow$	$(b \rightarrow c))$	$\rightarrow$	$((a \rightarrow b)$	$\rightarrow$	$(a \rightarrow c))$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

?

(ii) Durch logisch äquivalente Umformungen

$(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$
$\equiv \neg(\neg a \vee (\neg b \vee c)) \vee (\neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee c))$ | Umformen
$\equiv (\neg\neg a \wedge \neg\neg b \wedge \neg c) \vee ((\neg\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c)$ | de Morgan
$\equiv (a \wedge b \wedge \neg c) \vee ((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c))$ | dopp. Negation
$\equiv a \wedge b \wedge \neg c \vee (a \wedge \neg b) \vee \neg a \vee c$ | Assoziativität
$\equiv a \wedge b \wedge \neg c \vee (\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee \neg b) \vee c$ | Distributivität
$\equiv a \wedge b \wedge \neg c \vee \neg a \vee \neg b \vee c$ | Distributivität, Assoziativität
$\equiv (\neg a \vee a) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c) \vee \neg b \vee c$ | Distributivität
$\equiv (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg c) \vee \neg b \vee c$
$\equiv \neg a \vee (b \wedge \neg c) \vee \neg b \vee c$ | Distributivität
$\equiv \neg a \vee (\neg b \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg c) \vee c$
$\equiv \neg a \vee \neg b \vee (\vee c)$
$\equiv \neg a \vee \neg b \vee wahr$

3.5/4

(b) Von den folgenden vier Termen sind je zwei semantisch äquivalent. Welche Paare sind das? Begründen Sie Ihre Antwort durch Angabe, Anwendung und Benennung der Booleschen Gesetze aus der Vorlesung.

$(1) \neg(x_1 \vee \neg x_2) \vee \neg(x_1 \rightarrow x_3)$
$(2) \neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$
$(3) \neg x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$
$(4) \neg x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \vee \neg x_3$

$(1)\neg(x_1 \vee \neg x_2) \vee \neg(x_1 \rightarrow x_3)$
$\equiv (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \rightarrow \neg x_3)$ | de Morgan
$\equiv (\neg x_1 \wedge x_2) \vee x_1 \vee \neg x_3$ | $(\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta)$
$\equiv \neg x_1 \wedge x_2 \vee x_1 \vee \neg x_3$ | Äquivalent zu $(4)(\neg x_1 \wedge x_2) \vee x_1 \vee \neg x_3$

$(2)\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$
$\equiv \neg x_1 \vee \neg x_2 \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$ | de Morgan
$\equiv \neg x_1 \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_2 \wedge x_3)$ | Kommutativität, Absorbtion
$\equiv \neg x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$ | Äquivalent zu $(3)\neg x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$

Aufgabe 2 Negationsnormalform

Bringen Sie die folgenden Formeln in Negationsnormalform.

$(a)\neg\forall x \forall y : P(x, y)$
$(b)\neg\forall x \exists y \forall z : P(x, y, z)$
$(c)\neg(\exists x \exists y : \neg P(x, y) \wedge \forall x \forall y : Q(x, y))$
$(d)\neg\forall x : (\exists y \forall z : P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y : P(x, y, z))$

(a)
$\neg\forall x \forall y : P(x, y)$
$\equiv \exists x \neg\forall y : P(x, y)$
$\equiv \exists x \exists y : \neg P(x, y)$

(b)
$\neg\forall x \exists y \forall z : P(x, y, z)$
$\equiv \exists x \neg\exists y \forall z : P(x, y, z)$
$\equiv \exists x \forall y \neg\forall z : P(x, y, z)$
$\equiv \exists x \forall y \exists z : \neg P(x, y, z)$

(c)
$\neg(\exists x \exists y : \neg P(x, y) \wedge \forall x \forall y : Q(x, y))$
$\equiv \neg\exists x \exists y : \neg P(x, y) \vee \neg\forall x \forall y : Q(x, y))$ | de Morgan
$\equiv \forall x \forall y : P(x, y) \vee \exists x \exists y : \neg Q(x, y))$ | dopp. Negation

(d)
$\neg\forall x : (\exists y \forall z : P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y : P(x, y, z))$
$\equiv \exists x : \neg(\exists y \forall z : P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y : P(x, y, z))$
$\equiv \exists x : (\neg\exists y \forall z : P(x, y, z) \vee \neg\exists z \forall y : P(x, y, z))$ | de Morgan
$\equiv \exists x : \forall y \exists z : \neg P(x, y, z) \vee \forall z \exists y : \neg P(x, y, z))$ | Negationsnormalform

fein

Aufgabe 3 Quantoren

(a) Zeige, dass $\forall z \exists y \forall x : Q(x,y,z) : x+y>z$ eine wahre Aussage ist
Gegenspieler: z = a
Gegenspieler: x = b
Beweiser: y = c = a + 1
$b+c>a$
$b+a+1>a$ ist wahr.

Reihenfolge ist richtig!

$b \geq 0$

$b+a+1 \geq a+1 > a$

2/3

(b) Zeige, dass $\forall x \exists y \forall z : Q(x,y,z) : x+y>z$eine falsche Aussage ist
Negationsnormalform: $\exists x \forall y \exists z : \neg Q(x,y,z) : x+y \leq \ z$
Gegenspieler: y = b
Beweiser: x = a = 1
Beweiser: z = c = 1 + b
$a+b \leq \ c$
$1+b \leq \ 1+b$ ist wahr, also muss für $\forall z \exists y \forall x : Q(x,y,z) : x+y>z$ falsch sein.

Nach Reihenfolge def.

4/4

(c) Zeige, dass $\forall x \exists y \exists z : Q(x,y,z) \wedge Q(z,y,x) : x+y>z$ eine wahre Aussage ist
$\forall x \exists y \exists z : Q(x,y,z) \wedge Q(z,y,x) : (x+y>z) \wedge (z+y>x)$
Gegenspieler: x = a
Beweiser: y = b = a + 1 + c
Beweiser: z = c = 1
$(a+b>c) \wedge (c+b>a)$
$(a+(a+1+1)>1) \wedge (1+(a+1+1)>a)$ ist wahr.

das dürft ihr nicht, c ist zum Def von y nicht bekannt

1/3

16.5/20