3. Übungszettel Julia Quattara 06.11.2023

1.

Milka?

a(i)

a	b	c	a→b	a→c	b→c	(a→b)→(a→c)	a→(b→c)
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

✓ ✓ ✓

$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$

1
1
1
1
1
1
1
1

= Tautologie ✓

a(ii)

$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$ Auflösen der Implikation

$\Leftrightarrow (\neg a \lor (\neg b \lor c)) \to ((\neg a \lor b) \to (\neg a \lor c))$ " " ↓ ✓

$\Leftrightarrow \neg(\neg a \lor (\neg b \lor c)) \lor (\neg(\neg a \lor b) \lor (\neg a \lor c))$ De Morgan & Doppelte Negation ↓

$\Leftrightarrow (a \land b \land \neg c) \lor (a \land \neg b) \lor \neg a \lor c$ Assoziativität ↓

$\Leftrightarrow (\neg c \land (a \land b)) \lor (a \land \neg b) \lor \neg a \lor c$ " " ↓

SUS

$\Leftrightarrow (\neg c \lor c) \land (a \land b) \lor a \land \neg b \lor \neg a$ Komplementierung & Distributivität ↓

$\Leftrightarrow 1 \land a \land (b \lor \neg b) \lor \neg a$ Absorption & Komplementierung ↓

$\Leftrightarrow 1 \land a \land 1 \lor \neg a$ Komplementierung ↓

$\Leftrightarrow 1 \land 1 \land 1$ $\Leftrightarrow$ 1 ⇒ Tautologie

Folgefehler

Kann man so nicht machen

4.5 / 6

b)

(1) $\neg(x_1 \lor \neg x_2) \lor \neg(x_1 \to x_3)$ Implikation umformen

$\Leftrightarrow \neg(x_1 \lor \neg x_2) \lor \neg(\neg x_1 \lor x_3)$ De Morgan & Doppelte Negation

$\Leftrightarrow \neg x_1 \land x_2 \lor x_1 \land \neg x_3$ ⇒ $T_1 \Leftrightarrow T_4$ ✓

2. $\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$ De Morgan

$\iff \neg x_1 \vee \neg x_2 \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$ Absorption

$\iff \neg x_1 \vee x_3 \wedge x_2 \quad \equiv \quad (t2 \iff t3)$

1 und 4 sowie 2 und 3 sind semantisch äquivalent, da sich ein Term der Paare in den anderen umformen lässt. Die Wahrheitstabellen beider Terme sind somit übereinstimmend.

4/4 sehr schön

2.)

a) $\neg \forall x \forall y : P(x,y) \iff \exists x \exists y : \neg P(x,y)$

b) $\neg \forall x \exists y \forall z : P(x,y,z) \iff \exists x \forall y \exists z : \neg P(x,y,z)$

c) $\neg(\exists x \exists y : \neg P(x,y) \wedge \forall x \forall y : Q(x,y))$

$\iff \forall x \forall y : \neg\neg P(x,y) \wedge \forall x \forall y : Q(x,y)$

$\iff \forall x \forall y : P(x,y) \vee \exists x \exists y : \neg Q(x,y)$ super

d) $\neg \forall x : (\exists y \forall z : P(x,y,z) \wedge \exists z \forall y : P(x,y,z))$

$\iff \exists x : \neg(\exists y \forall z : P(x,y,z) \wedge \exists z \forall y : P(x,y,z))$

$\iff \exists x : (\forall y \exists z : \neg P(x,y,z) \vee \forall z \exists y : \neg P(x,y,z))$

super

3. $U = \mathbb{N} \quad Q(x,y,z) : x + y > z$

a) $\forall z \exists y \forall x : Q(x,y,z)$

Wahre Aussage. Gegenspieler belegt $z = c \in \mathbb{N}$, wir belegen $y = \underset{\in \mathbb{N}}{c+1}$. Egal welche Belegung der Gegenspieler für x wählt: $x + c + 1 > c$ wird immer wahr sein.

3/3

$x \geq 0$

b) $\forall x \exists y \forall z : Q(x,y,z)$ n-n

falsche Aussage $\neg(\forall x \exists y \forall z : Q(x,y,z) : x + y > z$

$\iff \exists x \forall y \exists z : \neg Q(x,y,z) : x + y \leq z$

Wir wählen $x = 1$, Gegenspieler belegt $y = b$ und wir belegen z mit $b + 1$.

Die Aussage ~~$1+b+1$~~ $1+b \leq b+1$ ✓ 4/4
ist bei jeder beliebigen Belegung von b wahr.
Somit ist bewiesen, dass die ursprüngliche Aussage falsch war.

c) $\forall z \exists y \exists z: Q(x,y,z): x+y > z \wedge Q(z,y,x): z+y > x$

wahre Aussage: Gegenspieler wählt $x = a \in \mathbb{N}$

Wir wählten $y = a$ und $z = a$

$$x + x > x \wedge x + x > x \Leftrightarrow 2x > x \wedge 2x > x$$

Für jede beliebige Belegung für $x \in \mathbb{N}_0$ wird diese Aussage wahr.

2/3

was ist mit $x = a = 0$?

17.5/20

BRUNNEN