Übung 3

Name: Nurhan, Lillie
Tutor: Daniel Yu
Tutorium: Do 10-12

Aufgabe 1:

a) $t = (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$

(i)

a	b	c	$x = a \to b$	$y = b \to c$	$z = a \to c$	$a \to y$	$x \to z$	t
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tautologie

(ii)

$(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$

$\Leftrightarrow (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to ((\neg a \vee b) \to (\neg a \vee c))$

$\Leftrightarrow (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to (\neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee c))$

De Morgan
$\Leftrightarrow (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to ((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \vee c))$

Assoziativ
$\Leftrightarrow (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to (((a \wedge \neg b) \vee \neg a) \vee c)$

Distributiv
$\Leftrightarrow (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to ((\underbrace{(a \vee \neg a)}_{\text{(immer wahr)}} \wedge (\neg b \vee \neg a)) \vee c)$

$\Leftrightarrow (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to ((\neg b \vee \neg a) \vee c)$

Kommutativ
$\Leftrightarrow (\neg a \vee (\neg b \vee c)) \to ((\neg a \vee \neg b) \vee c)$

Assoziativ
$\Leftrightarrow ((\neg a \vee \neg b) \vee c) \to ((\neg a \vee \neg b) \vee c)$

Tautologie

b) (1) $\neg(x_1 \vee x_2) \vee \neg(x_1 \to x_3) \overset{\text{De Morgan}}{\Leftrightarrow} (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee \neg(\neg x_1 \vee x_3)$

(De Morgan) $\Leftrightarrow (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_3)$

(Assoz.) $\Leftrightarrow \neg x_1 \wedge \neg x_2 \vee x_1 \wedge \neg x_3$ (4)

(2) $\neg(x_1 \wedge x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2) \overset{\text{De Morgan.}}{\Leftrightarrow} (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$

(Absorption) $\Leftrightarrow \neg x_1 \vee (x_3 \wedge x_2)$

(Komm.) $\Leftrightarrow \neg x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$ (3)

Somit sind also die äquivalenten Paare (1) und (4) und (2) und (3).

10/10

Aufgabe 2:

a) $\neg \forall_x \forall_y : P(x,y) \equiv \exists_x \forall_y : \cancel{P}(x,y)$

$\exists x (\neg \forall y\ P(x,y))$

Noch nicht in NNF

(b) $\neg \forall_x \exists_y \forall_z : P(x,y,z) \equiv \exists_x \exists_y \forall_z : P(x,y,z)$

(c) $\neg(\exists_x \exists_y : \neg P(x,y) \wedge \forall_x \forall_y : Q(x,y))$
$\equiv \forall_x \forall_y : P(x,y) \vee \exists_x \exists_y : \neg Q(x,y)$ ✓

(d) $\neg \forall_x : (\exists_y \forall_z : P(x,y,z) \wedge \exists_z \forall_y : P(x,y,z))$
$\equiv \exists_x : \underbrace{(\exists_y \forall_z : P(x,y,z) \wedge \exists_z \forall_y : P(x,y,z))}_{\text{wie in a), b) das Problem}}$

Aufgabe 3.) Quantoren

a.) $\forall z \exists y \forall x : Q(x,y,z)$

"Für jedes z gibt es mindestens ein y und für alle x ist $Q(x,y,z)$ wahr."

Diese Aussage ist wahr, da egal welche Zahl z ist, es immer eine Zahl für y und für alle x gibt, somit $Q(x,y,z)$ wahr ist.

Beispiel: $z = 4$ $y = 3$ (beliebige Zahlen)

$x + 3 <= 7$ wenn wir für x 4 nehmen,

dann ... $4+3 > 7$ ("größer" als 7)

Sollt ihr für allg. z zeigen

1/3

b.) $\forall x \exists y \forall z : Q(x,y,z)$

"Für jedes x gibt es mindestens ein y und für alle z, für die $Q(x,y,z)$ wahr ist."

Ähnlich wie die Aufgabe davor ist diese Aussage auch wahr. Nur sind die Buchstaben x und z vertauscht.

Nein.

0/4

c.) $\forall x \exists y \exists z : Q(x,y,z) \wedge Q(z,y,x)$

"Für jedes x gibt es mindestens ein y und z, sodass $Q(x,y,z)$ und $Q(z,y,x)$ wahr sind ~~ist~~"

Diese Aussage ist wahr, da es möglich ist das eine Zahl für x gibt, für die auch eine Kombination von y und z existiert bei der $Q(x,y,z)$ und $Q(z,y,x)$ wahr sind

Beispiel: ~~z = 9, y = 5, x = 4~~

~~x = 5, y = 2, z = 6~~

~~Q(5,2,6) = 5+~~ $x = 4,\ y = 1,\ z = 5$

$Q(4,1,5) = 4+1 > 5$ (wahr)

$Q(5,1,4) = 5+1 > 4$ (wahr)

1/3

12/20