NAIST(情報科)2016年入試過去問解答例

注意：y-sira 様の過去問 `https://github.com/y-sira/naist-is-entrance-exam-math` の解答例です．必ずしも正しい答えが書いてあるとは限らないので参考程度にとどめてください．

解析

第 1 回 7/7 (1)

正項級数の収束性の比較判定法

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

で, $0 \leq a_n \leq b_n$ $(n \geq N)$ を満たすとき, 次が成立する．

$$T \text{ が収束するとき}, S \text{ も収束する}. \ S \text{ が発散するとき}, T \text{ も発散する}.$$

よって,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4+3n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{2}{n^2}}{n^2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\frac{1+\frac{2}{n^2}}{n^2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} < \frac{1+\frac{2}{n^2}}{n^2} < \frac{1+2}{n^2} = 3 \cdot \frac{1}{n^2}$$

$a_n = \dfrac{1+\frac{2}{n^2}}{n^2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$, $b_n = 3 \cdot \dfrac{1}{n^2}$ とすると, $0 < a_n < b_n$ を満たし, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は $p = 2$ で収束する．
従って, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^4+3n+1}$ は収束する．

第 1 回 7/8 (1)

おそらく, $t = \pi - x$ として解け．の間違い．
$dx = -dt$, $x : 0 \to \pi$, $t : \pi \to 0$ より,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt)\\ &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}2\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx\\ &= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}dx\\ \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx\end{aligned}$$

$\cos x = u$ とおいて, $-\sin x dx = du$, $x : 0 \to \pi$, $u : 1 \to -1$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{-1}{1+u^2}du\\ &= \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

代数

第 1 回 7/7 (2)

1.

ジョルダン標準形.

$Ax = \lambda x$ より, $(A - \lambda E)x = 0$. $T = A - \lambda E$ とおいて, 固有方程式 $|T| = 0$ から, $\lambda = \alpha$.

よって, $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ とおいて, $Tx = 0$ から

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = k_1$ とおいて

$$\therefore\ x = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1 \neq 0)$$

$Tx' = x$ により $x' = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ を求めると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\beta_1 = k_2$ とおいて

$$\therefore\ x' = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0)$$

2.

$k_1 = k_2 = 1$ とおいて,

$$P = \begin{pmatrix} x & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} P^{-1}A^nP &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}^n \\ &= \alpha^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^n &= P \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ \therefore\ A^n &= \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

第 1 回 7/8 (1)

$ad-bc$ と $a+d$ を求めよ. の間違い?

ケーリー・ハミルトンの定理 $A^2-(a+s)A+(ad-bc)E=0$ より

$$\begin{aligned} ad-bc &= 7 \\ a+d &= -3 \\ b+c &= ? \end{aligned}$$