

NAIST(情報科) 入試過去問題集(数学) 解答例

注意：shirayu.net 様の過去問題集 <https://www.shirayu.net/note/naist/data/exam.pdf> の解答例です。必ずしも正しい答えが書いてあるとは限らない&全て解いているわけではないので、参考程度にとどめてください。線形代数, 解析学, 確率となっていますが, 平成 31 年度 4 月入学者用に行った 7 月の試験では線形代数, 解析学のみでした。問題閲覧時間は 10 分, 面接で解く時間は 12 分でした。

1. 線形代数

(1) 線形写像は $f: V \rightarrow V'$ において, $f(0) = 0'$ を満たすが, $f(0) = a \neq 0$. よって, f は線形写像ではない。

(4) $T = A - \lambda E$ として,

$$\text{固有方程式 } |T| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 \\ 1 & -9 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 41 = 0$$

$$\therefore \lambda = \frac{-5 \pm 3\sqrt{21}}{2}$$

固有ベクトルは省略。

(6) A.

$$AN = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad NA = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C. 二項定理より

$$(A + N)^k = \sum_{r=0}^k {}_k C_r A^{k-r} N^r = A^k + kA^{k-1}N + \frac{k(k-1)}{2!} A^{k-2}N^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} A^{k-3}N^3 + \dots$$

$$= \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & a^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$\therefore (A + N)^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} a^{k-2} \\ 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}$$

(7) A. $\lambda = 2, 5$

$$\lambda_1 = 2 \text{ のとき, } T_1 x_1 = 0, x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ として}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = k_1 \text{ とすると, } \alpha_2 = -k_1$$

$$\therefore x_1 = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (k_1 \neq 0)$$

$\lambda_2 = 5$ のとき, $\beta_1 = k_2$ とすると

$$\therefore x_2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (k_2 \neq 0)$$

B. $k_1 = k_2 = 1$ として

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

C.

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$\therefore A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 5^n & -2^n + 5^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n & 2^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}$$

(8) n が偶数のとき

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n が奇数のとき

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(9) A.

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

B.

$$\begin{pmatrix} 5\alpha + \beta & 3\alpha \\ 8\alpha & 6\alpha + \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha = -\frac{1}{6}, \beta = \frac{11}{6}$$

(10) A.

$$a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = 0$$

$$\therefore a \perp b \perp c$$

B. a, b, c の正規直交基底を u_1, u_2, u_3 とすると

$$u_1 = \frac{1}{\|a\|}a, \quad u_2 = \frac{1}{\|b\|}b, \quad u_3 = \frac{1}{\|c\|}c$$

※ a, b, c は互いに直交しているのでグラムシュミットは不要

C. $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$ として, $a \cdot d = b \cdot d = c \cdot d = 0$ となる d は

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(11) 下記を n 行 n 列の場合で示せば良いんだが...

$${}^tA = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$a + c = 1$ より, $b = \pm\sqrt{c - c^2}$. よって

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - c - \lambda & \pm\sqrt{c - c^2} \\ \pm\sqrt{c - c^2} & c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\therefore \lambda = 0, 1$$

(12) B.

$$A^2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^2 P^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^2 = P^{-1}EP = E$$

$$\therefore \lambda = \pm 1$$

(15) A.

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B.

$$W(W^2 + W + E) = W0$$

$$W^3 + W^2 + W = 0$$

$$W^3 + (W^2 + W + E) - E = 0$$

$$W^3 = E$$

よって

$$\begin{aligned} W^{100} + W^{50} &= (W^3)^{33}W + (W^3)^{16}W^2 \\ &= W + W^2 \\ &= W + (-W - E) \\ &= -E \end{aligned}$$

(16) A. 2通りの解法

1) $||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = 2$ (点 A, B, C を角とする平行四辺形の面積)

$$\therefore \frac{2}{2} = 1$$

2) 点 A, B, C はすべて $y = 1$ の xz 平面上の点なので, xz 平面だけでみると, 底辺 2 高さ 1 の三角形.

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \text{底辺} \cdot \text{高さ} = 1$$

B. $D(0, 2, 1)$ は丁度 $\triangle ABC$ の底辺 BC 上の midpoint の真上にある.

$$\therefore 1$$

$$\text{C. } V = \frac{1}{3} \cdot \text{底面} \cdot \text{高さ} = \frac{1}{3}$$

(18) 掃き出し法 $(A|E) \rightarrow (E|A^{-1})$ より

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} & -\frac{a_3}{a_1} & -\frac{a_4}{a_1} & -\frac{1}{a_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(19) 掃き出し法より

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -b & b^2 & -b^3 \\ 0 & 1 & -b & b^2 \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -b & b^2 & -b^3 \\ 0 & 0 & -b & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ とすると, } AB = BA.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 & -2b^3 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ から, 二項定理より}$$

$$\therefore T^n = (A + B)^n = A + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}B^3 = (\text{略})$$

(20) A.

$$x_1 \cdot x_2 = ||x_1|| ||x_2|| \cos \theta$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{B. } x_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ として, } x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3 = 0 \text{ を求める. } a = 1 \text{ において}$$

$$\therefore x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(21) A. 略) $a = k$ において

$$\therefore x_3 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

B. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = v$ より

$$\therefore c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3$$

(22) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, $\text{tr}(X \pm Y) = \text{tr}(X) \pm \text{tr}(Y)$ より

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$$

$$\text{tr}(E) = n \text{ より}$$

$$\therefore \text{tr}(AB - BA) \neq \text{tr}(E) \Rightarrow AB - BA \neq E$$

2. 解析学

(1) $\frac{0}{0}$ の不定形より, ロピタルの定理から

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

(2) 部分積分より

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \frac{3}{2}x(x-1)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{10}(x-1)^{\frac{5}{3}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3) 問題文が $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ の間違いであつたと思いたい. しかし, そうなると $\Gamma(0)$ は計算できない... 謎

(4) $H = 2F$ より

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$\therefore (x+3)(x-1) + y^2 = 0$$

(5) $\tan x = t$ とおくと, $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$, $x: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$ は $t: 0 \rightarrow \infty$, $\infty \rightarrow 0$. よって

$$\int_0^\pi \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} dx = \int_0^\infty \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt + \int_\infty^0 \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = 1 - 1 = 0$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(x) dx = 0 \text{ より, } f(x) \text{ は } \pi \text{ の周期関数}$$

(6) $0 = vt - 50t^2$ より, $t = \frac{v}{50}$

$$\therefore x = vt + \frac{1}{2}(-50)t^2 = \frac{v^2}{100}$$

(7)

$$\int x^n \log x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C$$

(8) 別解であれば...

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx \\ 2 \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= x\sqrt{x^2 + 1} + \log |x + \sqrt{x^2 + 1}| \\ \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \{ x\sqrt{x^2 + 1} + \log |x + \sqrt{x^2 + 1}| \} \end{aligned}$$

(9) $t = \log x$ より, $e^t dt = dx$.

$$\int \sin(\log x) dx = \int e^t \sin t dt$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \text{ より}$$

$$\int e^t \sin t dt = \int \frac{e^{t(1+i)} - e^{t(1-i)}}{2i} dt = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + C$$

$$\therefore \frac{e^t}{2} \{ \sin(\log x) - \cos(\log x) \} + C$$

(11) 特性方程式 $t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = -3, 1$ より

$$f(x) = Ae^{-3x} + Be^x$$

$$f(0) = A + B = 0$$

$$f'(x) = -3Ae^{-3x} + Be^x$$

$$= 3Be^{-3x} + Be^x$$

$$f'(0) = 3B + B = 4$$

$$\therefore B = 1, A = -1$$

$$\therefore f(x) = e^x - e^{-3x}$$

(13) 特性方程式 $t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \pm i$ より

$$f(x) = e^x \{ A \cos x + B \sin x \}$$

$$f(0) = A = 0$$

$$f'(x) = B \cos x$$

$$f'(0) = B = 2$$

$$\therefore f(x) = 2e^x \sin x$$

(15) (9) と同じ

$$\therefore \frac{e^t}{2} \{ \sin x - \cos x \} + C$$

(16) 接線の方程式: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$0 - a^3 = 3a^2(x - a)$$

$$x = \frac{2}{3}a$$

$$\therefore \begin{cases} (0, 0) & (a = 0) \\ (\frac{2}{3}a, 0) & (a \neq 0) \end{cases}$$

(17)

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{x^2}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{-x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{(1-x^2)x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\} dx \\ \frac{3}{2} \int x \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{x^2}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \int \left\{ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\} dx \\ \int x \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{2}{3} \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x\{(\log x)^2 - 2 \log x + 2\} + C\end{aligned}$$

(20) ウォリスの定理から

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^2 \cos \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= 1 - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(22)

$$\begin{aligned}xy \frac{dy}{dx} &= y^2 - 1 \\ \frac{y}{y^2 - 1} dy &= \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{2} \log |y^2 - 1| &= \log |x| + C\end{aligned}$$

$C = \log C$ として

$$y^2 - 1 = \pm Cx^2$$

$\pm C = C$ として

$$y = \pm \sqrt{Cx^2 + 1}$$

(23) A.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0\end{aligned}$$

B.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= (\sqrt{0+1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{1+1} - \sqrt{1}) + (\sqrt{2+1} - \sqrt{2}) + \dots \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k+1} = \infty\end{aligned}$$

(24) \log をとって

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log \left(\frac{3^x + 5^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{3^x + 5^x}{2} \right)}{x}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形より, ロピタルの定理を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{3^x + 5^x}{2} \right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3^x \log 3 + 5^x \log 5}{2}}{\frac{3^x + 5^x}{2}} \\ &= \frac{\log 3 + \log 5}{2} = \log \sqrt{3 \cdot 5}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x + 5^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\log \left(\frac{3^x + 5^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\log \sqrt{15}} = \sqrt{15}$$

(25)

$$\int x(x^2 + 1)^k dx = \frac{(x^2 + 1)^{k+1}}{2(k+1)} + C$$

(26)

$$\begin{aligned}xy' \log x &= xy \\ \frac{1}{y} dy &= \frac{1}{\log x} dx \\ \log |y| &= \int \frac{1}{\log x} dx\end{aligned}$$

求まらない

(27) A.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

B.

$$\int t^{n+1} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2(n+2)} (2x+1)^{n+2} + C$$

(28)

$$\begin{aligned}xy' \log x &= y \log y \\ \frac{1}{y \log y} dy &= \frac{1}{x \log x} dx \\ \log(\log |y|) &= \log(\log |x|) + C\end{aligned}$$

$C = \log C$ として

$$\begin{aligned}\log |y| &= \log |x|^C \\ y &= \pm x^C\end{aligned}$$

(29) A.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

(30)

$$\int e^a x \cos(bx) dx = \frac{e^a}{b} \{x \sin(bx) + \frac{1}{b} \cos(bx)\}$$

3. 確率

(1) AINST の順. N が先頭になった時の一番最初の文字列は NAIST.

$$\therefore 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1 = 49 \text{ 番目}$$

(2) A. C×2, E×2, I, N, S

$$\therefore \frac{7!}{2!2!1!1!1!} = 1260 \text{ 通り}$$

B. CC を 1 つの文字として

$$\therefore \frac{6!}{1!2!1!1!1!} = 360 \text{ 通り}$$

C. 全事象 - C が連続する事象 - E が連続する事象 + C と E が連続する事象

$$\therefore \frac{7!}{2!2!1!1!1!} - \frac{6!}{1!2!1!1!1!} - \frac{6!}{2!1!1!1!1!} + \frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 660 \text{ 通り}$$

(3)

a が 6 の時, 10 通り
 a が 5 の時, 6 通り
 a が 4 の時, 3 通り
 a が 3 の時, 1 通り

$$\therefore \frac{10 + 6 + 3 + 1}{6^3} = \frac{5}{64}$$

(5)

$$\text{赤玉} : \frac{1}{7} \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right), \text{青玉} : \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}\right), \text{白玉} : \frac{4}{7} \cdot \left(1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}\right)$$

(7) A. n 人のじゃんけんでは k 人が勝つ確率は

$$\frac{{}_nC_k \cdot 3}{3^n}$$

$$\therefore \frac{{}_5C_4}{3^4} + \frac{{}_5C_3}{3^4} + \frac{{}_5C_2}{3^4} + \frac{{}_5C_1}{3^4} = \frac{10}{27}$$

B. 一人がグーを出して 3 人勝つときの組み合わせは、グー 2 人パー 3 人 or グー 3 人チョキ 2 人より

$$\therefore \frac{5!}{2!3!} \cdot 2 = 20$$

確率は

$$\therefore \frac{20}{3^5}$$

(8) A.

$$\frac{{}_3C_1 \cdot 2}{6^2} = \frac{1}{6}$$

B.

$$\begin{aligned} \mu &= E[X] = \sum_{i=0}^n x_i P_i \\ &= (2+3+5) \cdot 10,000 \cdot \frac{1}{6} + (1+4+6) \cdot 100 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10100}{6} \end{aligned}$$

(9) A.

$$f(x) = {}_nC_k p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p)$$

B.

$$\mu = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

(10) 10

(11) 定数項となるのは $x^6, \left(\frac{2}{x^2}\right)^3$ の時. よって二項定理より

$$\therefore {}_9C_6 x^6 \left(\frac{2}{x^2}\right)^3 = 672$$

(12) A. 100 の位が 1 で 10 の位が 2~9 で 1 の位が 2~9 の事象 + 100 の位が 2~9 で 10 の位が 0 か 1 で 1 の位が 2~9 の事象 + 100 の位が 2~9 で 10 の位が 2~9 で 1 の位が 0 か 1 の事象

$${}_1C_1 \cdot {}_8C_1 \cdot {}_8C_1 + {}_8C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_8C_1 + {}_8C_1 \cdot {}_8C_1 \cdot {}_2C_1 = 320 \text{ 通り}$$

B. 全事象 - 1 つも含まれない

$$9 \cdot 10 \cdot 10 - {}_8C_1 \cdot {}_8C_1 \cdot {}_8C_1 = 388 \text{ 通り}$$

(13) 出た目の最大値が 5 = 最大値が 5 以下 - 最大値が 4 以下

$$\therefore \frac{5^4 - 4^4}{6^4}$$

(14)

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_4C_1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{20}$$

(15) A. 多項定理より, 係数は

$$\frac{n!}{p!q!r!} \quad (n = p + q + r)$$

B. x の項となる条件は, $(p, q, r) = (0, 4, 3), (2, 1, 4)$.

$$\therefore \frac{7!}{0!4!3!} + \frac{7!}{2!1!4!} = 140$$

(16) A.

$$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

B.

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

C. 2 種類のみ $= 1 - 1$ 種類のみ $- 3$ 種類のみ

$$\therefore 1 - \frac{1}{36} - \frac{5}{9} = \frac{5}{12}$$

(17) ${}_nC_k p^k q^{n-k}$ より

$$\therefore {}_nC_{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)^3}{2n^{n-1}}$$

(19) A. $x = 1$ の時, $x = y$ が 6 パターン, $x = y$ の時以外での $x = z$ が 5 パターン, $x = y$ の時以外での $y = z$ が 5 パターン. よって

$$\frac{(2 \cdot 5 + 6) \cdot 6}{6^3}$$

(20) A.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

B.

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

C.

$$1 - \frac{3^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot n}{6^n}$$

(21) A. 赤 $\times 3$ を一つの塊として

$$\therefore \frac{6!}{1!2!3!} = 60 \text{ 通り}$$

B.

$$\frac{4!}{1!2!1!} \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_6C_1 \cdot {}_5C_1 = 720 \text{ 通り}$$

(22) A. $x = 18$ となる事象は 8 通り.

$$\therefore \frac{8}{6^3} = \frac{1}{27}$$

B. $x = 12$ となる事象は 15+25 通り.

$$\therefore \frac{40}{6^3} = \frac{5}{27}$$

C. 事象は 11 通り.

$$\therefore \frac{11}{6^3}$$

(23) A. 1-1, 2, 4, 5 となる確率

$$\therefore 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

B. 6 の倍数 \iff 2 の倍数 \cap 3 の倍数. 2 の倍数: $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\therefore \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \cdot \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

(24) A. $\frac{1}{10^2}$

B.

$$\frac{{}_1C_1 \cdot {}_9C_1 \cdot {}_9C_1 \cdot {}_9C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot 4}{10^5} = \frac{4 \cdot 9^3}{10^5}$$

(25) A. 5^3

B. 1 の位が 2 か 4 であれば良いので

$${}_5C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_2C_1 = 50 \text{ 通り}$$

C. 6 の倍数 \iff 1 の位が偶数 \cap 各桁の和が 3 の倍数.

$$\therefore 16 \text{ 通り}$$

(27) A. 失敗する確率 = 1 - 全て成功する確率

$$\therefore 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$$

B. 全て成功する確率 \cdot 誤判定しない確率 + 失敗する確率 \cdot 誤判定する確率

$$\therefore (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) + \{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\}p_3$$

(28) $f(X) = A \cos X$ ($-\frac{\pi}{2} \leq X \leq \frac{\pi}{2}$) が確率密度であるための必要条件から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X) dX = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A \cos X dX = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(X) dX = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X \cdot \frac{1}{2} \cos X dX = 0$$