# NAIST(情報科)入試過去問題集(数学)解答例

注意：shirayu.net 様の過去問題集 `https://www.shirayu.net/note/naist/data/exam.pdf` の解答例です．必ずしも正しい答えが書いてあるとは限らない&全て解いているわけてはないので, 参考程度にとどめてください．線形代数, 解析学, 確率となっていますが, 平成 31 年度 4 月入学者用に行った 7 月の試験では線形代数, 解析学のみでした．問題閲覧時間は 10 分, 面接で解く時間は 12 分でした．

1. **線形代数**

(1) 線形写像は $f: V \to V'$ において, $f(0) = 0'$ を満たすが, $f(0) = a \neq 0$. よって, $f$ は線形写像ではない．

(4) $T = A - \lambda E$ として,

$$\text{固有方程式 } |T| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 1 & -9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 41 = 0$$

$$\therefore\ \lambda = \frac{-5 \pm 3\sqrt{21}}{2}$$

固有ベクトルは省略.

(6) A.

$$AN = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ NA = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B.

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C. 二項定理より

$$(A+N)^k = \sum_{r=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_r A^{k-r} N^r = A^k + kA^{k-1}N + \frac{k(k-1)}{2!}A^{k-2}N^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}A^{k-3}N^3 + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 0 & a^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\therefore\ (A+N)^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}a^{k-2} \\ 0 & a^k & ka^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}$$

(7) A. $\lambda = 2, 5$

$\lambda_1 = 2$ のとき, $T_1 x_1 = 0, x_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ として

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$\alpha_1 = k_1$ とすると, $\alpha_2 = -k_1$

$$\therefore\ x_1 = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\ (k_1 \neq 0)$$

$\lambda_2 = 5$ のとき, $\beta_1 = k_2$ とすると

$$\therefore\ x_2 = k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ (k_2 \neq 0)$$

B. $k_1 = k_2 = 1$ として

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

C.

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

$$\therefore\ A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 5^n & -2^n + 5^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n & 2^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}$$

(8) $n$ が偶数のとき

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n$ が奇数のとき

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(9) A.

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

B.

$$\begin{pmatrix} 5\alpha + \beta & 3\alpha \\ 8\alpha & 6\alpha + \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \alpha = -\frac{1}{6},\ \beta = \frac{11}{6}$$

(10) A.

$$a \cdot b = a \cdot c = b \cdot c = 0$$

$$\therefore\ a \perp b \perp c$$

B. $a, b, c$ の正規直交基底を $u_1, u_2, u_3$ とすると

$$u_1 = \frac{1}{||a||}a,\ u_2 = \frac{1}{||b||}b,\ u_3 = \frac{1}{||c||}c$$

※ $a, b, c$ は互いに直交しているのでグラムシュミットは不要

C. $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$ として, $a \cdot d = b \cdot d = c \cdot d = 0$ となる $d$ は

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(11) 下記を $n$ 行 $n$ 列の場合で示せれば良いんだが...

$$ {}^tA = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} $$

$$ A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} $$

$a+c=1$ より, $b=\pm\sqrt{c-c^2}$. よって

$$ |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-c-\lambda & \pm\sqrt{c-c^2} \\ \pm\sqrt{c-c^2} & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)=0 $$

$$ \therefore\ \lambda = 0,\ 1 $$

(12) B.

$$ A^2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^2 P^{-1} = E $$

$$ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^2 = P^{-1}EP = E $$

$$ \therefore\ \lambda = \pm 1 $$

(15) A.

$$ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

$$ \therefore\ a = -\frac{1}{2},\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} $$

B.

$$ \begin{aligned} W(W^2+W+E) &= W0 \\ W^3+W^2+W &= 0 \\ W^3+(W^2+W+E)-E &= 0 \\ W^3 &= E \end{aligned} $$

よって

$$ \begin{aligned} W^{100}+W^{50} &= (W^3)^{33}W + (W^3)^{16}W^2 \\ &= W+W^2 \\ &= W+(-W-E) \\ &= -E \end{aligned} $$

(16) A. 2 通りの解法

1) $||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|| = 2$　(点 A, B, C を角とする平行四辺形の面積)

$$ \therefore\ \frac{2}{2} = 1 $$

2) 点 A, B, C はすべて $y=1$ の $xz$ 平面上の点なので, $xz$ 平面だけでみると, 底辺 2 高さ 1 の三角形.

$$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot 底辺 \cdot 高さ = 1$$

B. $D(0,2,1)$ は丁度 $\triangle ABC$ の底辺 $BC$ 上の中点の真上にある.

$$\therefore\ 1$$

C. $V=\frac{1}{3}\cdot 底面 \cdot 高さ = \frac{1}{3}$

(18) 掃き出し法 $(A|E)\to(E|A^{-1})$ より

$$\therefore\ A=\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} & -\frac{a_3}{a_1} & -\frac{a_4}{a_1} & -\frac{1}{a_1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(19) 掃き出し法より

$$T=\begin{pmatrix} 1 & -b & b^2 & -b^3 \\ 0 & 1 & -b & b^2 \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -b & b^2 & -b^3 \\ 0 & 0 & -b & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \text{とすると},\ AB=BA.$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 & -2b^3 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B^4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ \text{から, 二項定理より}$$

$$\therefore\ T^n=(A+B)^n=A+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}B^3=(\text{略}$$

(20) A.

$$x_1\cdot x_2=||x_1||||x_2||\cos\theta$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{2}$$

B. $x_3=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ として, $x_1\cdot x_3=x_2\cdot x_3=0$ を求める. $a=1$ とおいて

$$\therefore\ x_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(21) A. 略) $a=k$ とおいて

$$\therefore\ x_3=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

B. $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=v$ より

$$\therefore\ c_1=1,\ c_2=2,\ c_3=3$$

(22) $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$, $\mathrm{tr}(X\pm Y)=\mathrm{tr}(X)\pm\mathrm{tr}(Y)$ より

$$\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=0$$

$\mathrm{tr}(E)=n$ より

$$\therefore\ \mathrm{tr}(AB-BA)\neq\mathrm{tr}(E)\Rightarrow AB-BA\neq E$$

2. 解析学

(1) $\frac{0}{0}$ の不定形より, ロピタルの定理から

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) 部分積分より

$$\int\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx=\frac{3}{2}x(x-1)^{\frac{2}{3}}-\frac{9}{10}(x-1)^{\frac{5}{3}}+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(3) 問題文が $\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-1}dx$ の間違いであったと思いたい. しかし, そうなると $\Gamma(0)$ は計算できない... 謎

(4) $H=2F$ より

$$2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

$$\therefore\ (x+3)(x-1)+y^2=0$$

(5) $\tan x=t$ とおくと, $dx=\frac{1}{1+t^2}dt$, $x:0\to\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}\to\pi$ は $t:0\to\infty$, $\infty\to 0$. よって

$$\int_0^\pi\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}dx=\int_0^\infty\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt+\int_\infty^0\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}dt=1-1=0$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx=0\text{ より}, f(x)\text{ は}\pi\text{の周期関数}$$

(6) $0=vt-50t^2$ より, $t=\frac{v}{50}$

$$\therefore\ x=vt+\frac{1}{2}(-50)t^2=\frac{v^2}{100}$$

(7)

$$\int x^n\log x dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+C$$

(8) 別解であれば...

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+1}dx&=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx\\&=x\sqrt{x^2+1}-\int\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx\\2\int\sqrt{x^2+1}dx&=x\sqrt{x^2+1}+\log|x+\sqrt{x^2+1}|\\\int\sqrt{x^2+1}dx&=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+1}+\log|x+\sqrt{x^2+1}|\}\end{aligned}$$

(9) $t=\log x$ より, $e^t dt = dx$.

$$\int \sin(\log x)dx = \int e^t \sin t dt$$

$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ より

$$\int e^t \sin t dt = \int \frac{e^{t(1+i)} - e^{t(1-i)}}{2i} dt = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C$$

$$\therefore \ \frac{e^t}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\} + C$$

(11) 特性方程式 $t^2+2t-3=0 \Rightarrow t=-3,1$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= Ae^{-3x} + Be^x \\ f(0) &= A+B=0 \\ f'(x) &= -3Ae^{-3x} + Be^x \\ &= 3Be^{-3x} + Be^x \\ f'(0) &= 3B+B=4 \end{aligned}$$

$$\therefore \ B=1,\ A=-1$$

$$\therefore \ f(x) = e^x - e^{-3x}$$

(13) 特性方程式 $t^2+2t-3=0 \Rightarrow t=1\pm i$ より

$$f(x) = e^x\{A\cos x + B\sin x\}$$

$$f(0) = A = 0$$

$$f'(x) = B\cos x$$

$$f'(0) = B = 2$$

$$\therefore \ f(x) = 2e^x \sin x$$

(15) (9) と同じ

$$\therefore \ \frac{e^t}{2}\{\sin x - \cos x\} + C$$

(16) 接線の方程式：$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$$\begin{aligned} 0 - a^3 &= 3a^2(x-a) \\ x &= \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

$$\therefore \ \begin{cases} (0,0) & (a=0) \\ (\frac{2}{3}a, 0) & (a \neq 0) \end{cases}$$

(17)

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x^2}dx &= \frac{x^2}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{-x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\int \left\{\frac{(1-x^2)x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right\}dx \\ \frac{3}{2}\int x\sqrt{1-x^2}dx &= \frac{x^2}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\int \left\{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right\}dx \\ \int x\sqrt{1-x^2}dx &= \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}\int(\log x)^2dx &= x(\log x)^2-\int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= x\{(\log x)^2-2\log x+2\}+C\end{aligned}$$

(20) ウォリスの定理から

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^2\cos\theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta\\ &= 1-\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(22)

$$\begin{aligned}xy\frac{dy}{dx} &= y^2-1\\ \frac{y}{y^2-1}dy &= \frac{1}{x}dx\\ \frac{1}{2}\log|y^2-1| &= \log|x|+C\end{aligned}$$

$C=\log C$ として

$$y^2-1=\pm Cx^2$$

$\pm C=C$ として

$$y=\pm\sqrt{Cx^2+1}$$

(23) A.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0\end{aligned}$$

B.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= (\cancel{\sqrt{0+1}}-\sqrt{0})+(\cancel{\sqrt{1+1}}-\cancel{\sqrt{1}})+(\cancel{\sqrt{2+1}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots\\ &= \lim_{k\to\infty}\sqrt{k+1}=\infty\end{aligned}$$

(24) log をとって

$$\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)}{x}$$

$\frac{0}{0}$ の不定形より, ロピタルの定理を用いて

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3^x\log 3+5^x\log 5}{2}}{\frac{3^x+5^x}{2}}\\ &= \frac{\log 3+\log 5}{2}=\log\sqrt{3\cdot 5}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\log\left(\frac{3^x+5^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\log\sqrt{15}}=\sqrt{15}$$

(25)

$$\int x(x^2+1)^kdx=\frac{(x^2+1)^{k+1}}{2(k+1)}+C$$

(26)

$$
\begin{aligned}
xy' \log x &= xy \\
\frac{1}{y}dy &= \frac{1}{\log x}dx \\
\log|y| &= \cancel{\int \frac{1}{\log x}dx} \quad \text{求まらない}
\end{aligned}
$$

(27) A.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

B.

$$\int t^{n+1} \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2(n+2)}(2x+1)^{n+2} + C$$

(28)

$$
\begin{aligned}
xy' \log x &= y \log y \\
\frac{1}{y \log y}dy &= \frac{1}{x \log x}dx \\
\log(\log|y|) &= \log(\log|x|) + C
\end{aligned}
$$

$C = \log C$ として

$$
\begin{aligned}
\log|y| &= \log|x|^C \\
y &= \pm x^C
\end{aligned}
$$

(29) A.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

(30)

$$\int e^a x \cos(bx)dx = \frac{e^a}{b}\{x \sin(bx) + \frac{1}{b}\cos(bx)\}$$

3. 確率

(1) AINST の順. N が先頭になった時の一番最初の文字列は NAIST.

$$\therefore\ 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1 = 49 \text{ 番目}$$

(2) A. C×2, E×2, I, N, S

$$\therefore\ \frac{7!}{2!2!1!1!1!} = 1260 \text{ 通り}$$

B. CC を 1 つの文字として

$$\therefore\ \frac{6!}{1!2!1!1!1!} = 360 \text{ 通り}$$

C. 全事象 −C が連続する事象 −E が連続する事象 +C と E が連続する事象

$$\therefore\ \frac{7!}{2!2!1!1!1!} - \frac{6!}{1!2!1!1!1!} - \frac{6!}{2!1!1!1!1!} + \frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 660 \text{ 通り}$$

(3)

$$
\begin{gathered}
a \text{ が } 6 \text{ の時}, 10 \text{ 通り} \\
a \text{ が } 5 \text{ の時}, 6 \text{ 通り} \\
a \text{ が } 4 \text{ の時}, 3 \text{ 通り} \\
a \text{ が } 3 \text{ の時}, 1 \text{ 通り}
\end{gathered}
$$

$$\therefore\ \frac{10+6+3+1}{6^3} = \frac{5}{64}$$

(5)

$$赤玉:\frac{1}{7}\cdot\left(1-\frac{5}{8}\right),\ 青玉:\frac{2}{7}\cdot\left(1-\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\right),\ 白玉:\frac{4}{7}\cdot\left(1-\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\right)$$

(7) A. $n$ 人のじゃんけんで $k$ 人が勝つ確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k\cdot 3}{3^n}$$

$$\therefore\ \frac{{}_5\mathrm{C}_4}{3^4}+\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{3^4}+\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{3^4}+\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{3^4}=\frac{10}{27}$$

B. 一人がグーを出して 3 人勝つときの組み合わせは, グー 2 人パー 3 人 or グー 3 人チョキ 2 人より

$$\therefore\ \frac{5!}{2!3!}\cdot 2=20$$

確率は

$$\therefore\ \frac{20}{3^5}$$

(8) A.

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot 2}{6^2}=\frac{1}{6}$$

B.

$$\mu=E[X]=\sum_{i=0}^{n}x_iP_i$$
$$=(2+3+5)\cdot 10,000\cdot\frac{1}{6}+(1+4+6)\cdot 100\cdot\frac{1}{6}=\frac{10100}{6}$$

(9) A.

$$f(x)={}_n\mathrm{C}_kp^kq^{n-k}\quad(q=1-p)$$

B.

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}x_if(x_i)$$

(10) 10

(11) 定数項となるのは $x^6$, $(\frac{2}{x^2})^3$ の時. よって二項定理より

$$\therefore\ {}_9\mathrm{C}_6x^6(\frac{2}{x^2})^3=672$$

(12) A. 100 の位が 1 で 10 の位が 2〜9 で 1 の位が 2〜9 の事象 +100 の位が 2〜9 で 10 の位が 0 か 1 で 1 の位が 2〜9 の事象 +100 の位が 2〜9 で 10 の位が 2〜9 で 1 の位が 0 か 1 の事象

$${}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1+{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1+{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1=320\ 通り$$

B. 全事象 $-1$ つも含まれない

$$9\cdot 10\cdot 10-{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1=388\ 通り$$

(13) 出た目の最大値が 5= 最大値が 5 以下 $-$ 最大値が 4 以下

$$\therefore\ \frac{5^4-4^4}{6^4}$$

(14)

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_1}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{20}$$

(15) A. 多項定理より, 係数は

$$\frac{n!}{p!q!r!} \quad (n = p + q + r)$$

B. $x$ の項となる条件は, $(p, q, r) = (0, 4, 3)$, $(2, 1, 4)$.

$$\therefore \ \frac{7!}{0!4!3!} + \frac{7!}{2!1!4!} = 140$$

(16) A.

$$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

B.

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

C. 2 種類のみ =1−1 種類のみ −3 種類のみ

$$\therefore \ 1 - \frac{1}{36} - \frac{5}{9} = \frac{5}{12}$$

(17) ${}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$ より

$$\therefore \ {}_n\mathrm{C}_{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{(n-1)^3}{2n^{n-1}}$$

(19) A. $x = 1$ の時, $x = y$ が 6 パターン, $x = y$ の時以外での $x = z$ が 5 パターン, $x = y$ の時以外での $y = z$ が 5 パターン. よって

$$\frac{(2 \cdot 5 + 6) \cdot 6}{6^3}$$

(20) A.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

B.

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

C.

$$1 - \frac{3^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot n}{6^n}$$

(21) A. 赤 $\times 3$ を一つの塊として

$$\therefore \ \frac{6!}{1!2!3!} = 60 \text{ 通り}$$

B.

$$\frac{4!}{1!2!1!} \cdot {}_2\mathrm{C}_1 \cdot {}_1\mathrm{C}_1 \cdot {}_6\mathrm{C}_1 \cdot {}_5\mathrm{C}_1 = 720 \text{ 通り}$$

(22) A. $x=18$ となる事象は 8 通り.

$$\therefore\ \frac{8}{6^3}=\frac{1}{27}$$

B. $x=12$ となる事象は 15+25 通り.

$$\therefore\ \frac{40}{6^3}=\frac{5}{27}$$

C. 事象は 11 通り.

$$\therefore\ \frac{11}{6^3}$$

(23) A. $1-1,2,4,5$ となる確率

$$\therefore\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

B. 6 の倍数 $\iff$ 2 の倍数 $\cap$3 の倍数. 2 の倍数 : $1-(\frac{1}{3})^n$

$$\therefore\ \left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

(24) A. $\frac{1}{10^2}$

B.

$$\frac{{}_1\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_1\cdot{}_9\mathrm{C}_1\cdot{}_1\mathrm{C}_1\cdot 4}{10^5}=\frac{4\cdot 9^3}{10^5}$$

(25) A. $5^3$

B. 1 の位が 2 か 4 であれば良いので

$${}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1=50\ \text{通り}$$

C. 6 の倍数 $\iff$ 1 の位が偶数 $\cap$ 各桁の和が 3 の倍数.

$$\therefore\ 16\ \text{通り}$$

(27) A. 失敗する確率 $=1-$ 全て成功する確率

$$\therefore\ 1-(1-p_1)(1-p_2)$$

B. 全て成功する確率 $\cdot$ 誤判定しない確率 $+$ 失敗する確率 $\cdot$ 誤判定する確率

$$\therefore\ (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)+\{1-(1-p_1)(1-p_2)\}p_3$$

(28) $f(X)=A\cos X\ \left(-\frac{\pi}{2}\le X\le\frac{\pi}{2}\right)$ が確率密度であるための必要条件から

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(X)dX=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}A\cos XdX=1$$
$$A=\frac{1}{2}$$

$$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}X\cdot f(X)dX=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}X\cdot\frac{1}{2}\cos XdX=0$$