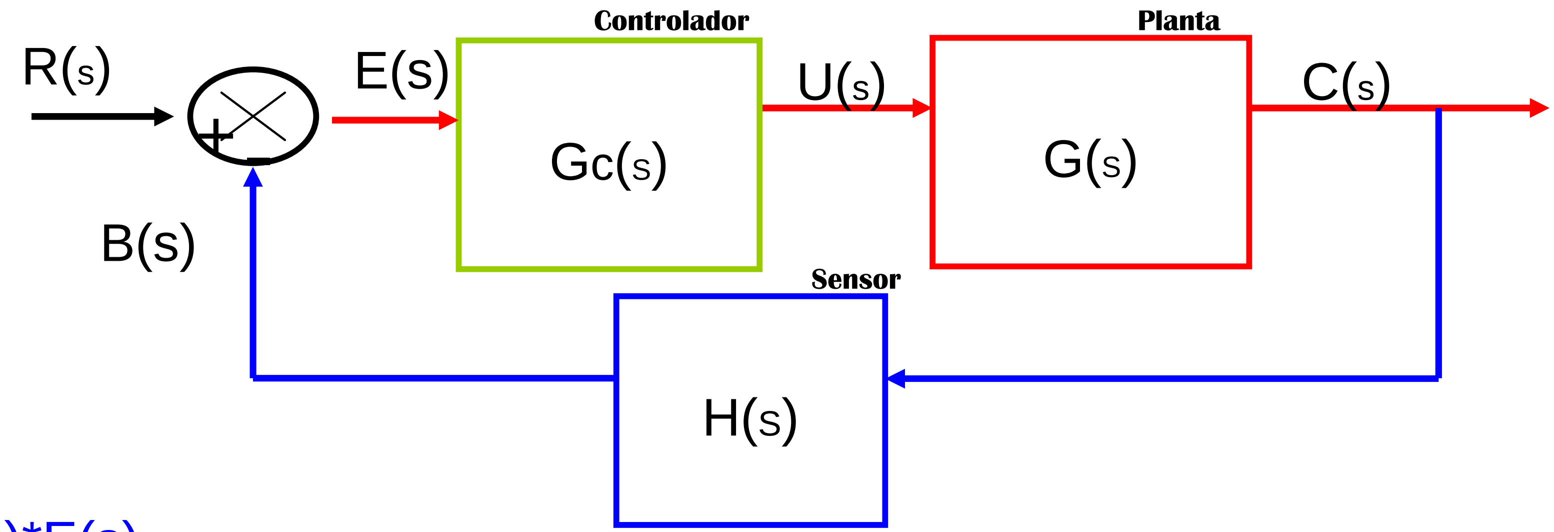
Função de Transferência de Malha Fechada



$C(s) = G(s) * \underline{U(s)}$

$C(s) = G(s) * Gc(s) * \underline{E(s)}$

$C(s) = G(s) * Gc(s) * [\, R(s) - \underline{B(s)\,]}$

$\underline{C(s) =} G(s) * Gc(s) * [\, R(s) - H(s) * \underline{C(s)\,]}$

$\underline{C(s)} + G(s) * Gc(s) * H(s) * \underline{C(s)} = G(s) * Gc(s) * R(s)$

$\underline{C(s)}\,[\, 1 + G(s) * Gc(s) * H(s)\,] = G(s) * Gc(s) * \underline{R(s)}$

Função de Transferência de Malha Fechada

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s) * Gc(s)}{1 + Gc(s) * G(s) * H(s)}}$$

Função de Transferência de Malha Fechada

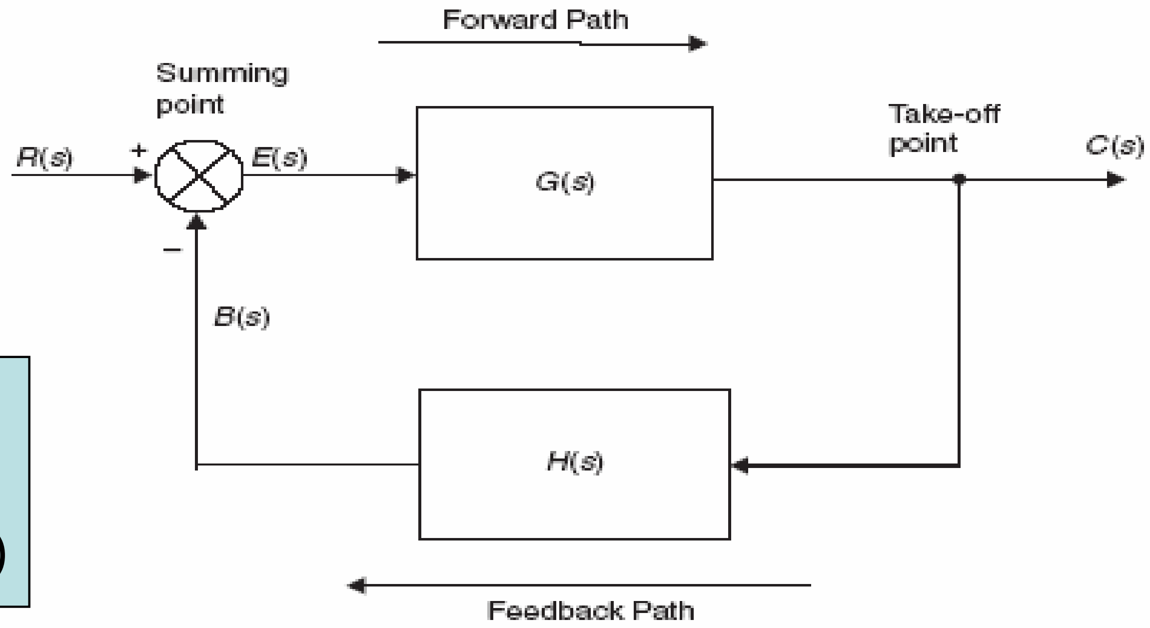
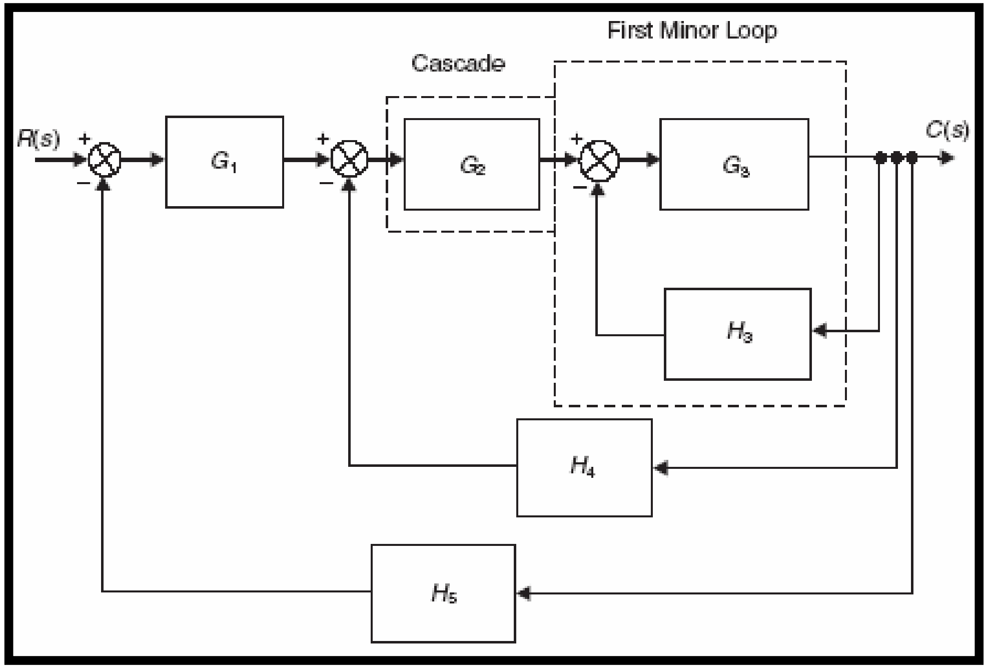


Fig. 4.1 Block diagram of a closed-loop control system. $R(s)$ = Laplace transform of reference input $r(t)$; $C(s)$ = Laplace transform of controlled output $c(t)$; $B(s)$ = Primary feedback signal, of value $H(s)C(s)$; $E(s)$ = Actuating or error signal, of value $R(s) - B(s)$; $G(s)$ = Product of all transfer functions along the forward path; $H(s)$ = Product of all transfer functions along the feedback path; $G(s)H(s)$ = Open-loop transfer function; $\otimes$ = summing point symbol, used to denote algebraic summation; $\bullet$ = Signal take-off point; $\rightarrow$ = Direction of information flow.

$$G_{mf}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)*H(s)}$$

Na realimentação as ações de correção/controle baseiam-se na diferença entre o desempenho real e o desempenho desejado !!!

Redução de Diagramas de Blocos



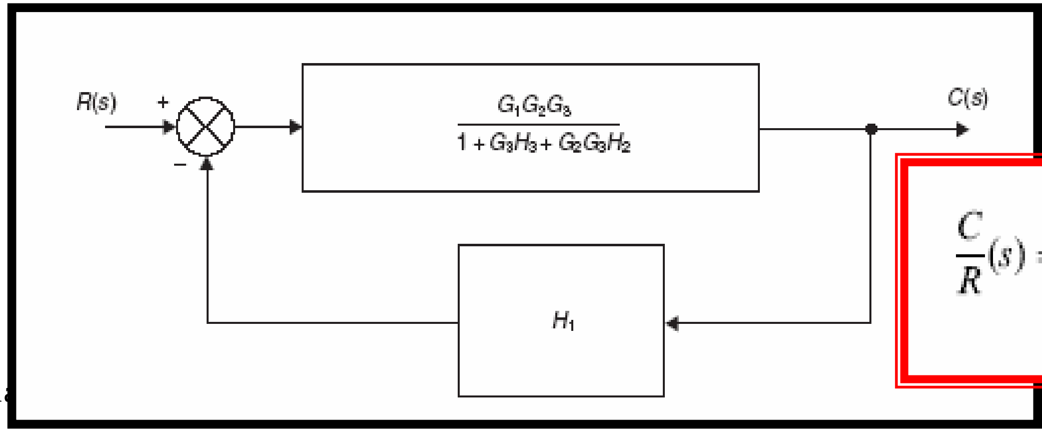
$$G_{m1} = \frac{G_3}{1 + G_3 H_3}$$

$$G_2 G_{m1} = \frac{G_2 G_3}{1 + G_3 H_3}$$

$$G_{m2} = \frac{\frac{G_2 G_3}{1+G_3 H_3}}{1 + \frac{G_2 G_3 H_2}{1+G_3 H_3}}$$

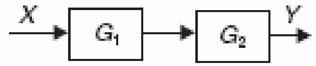
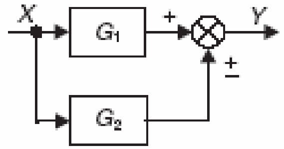
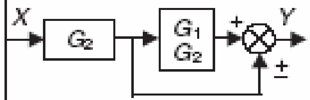
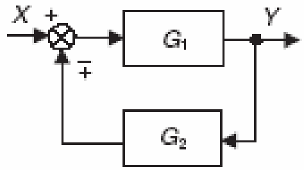
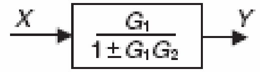
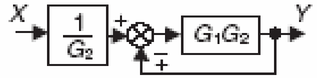
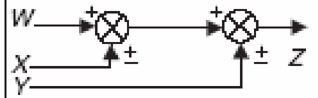
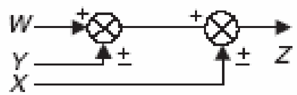
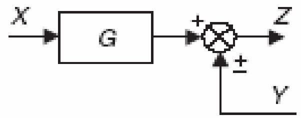
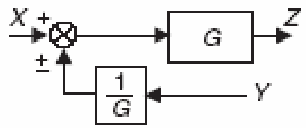
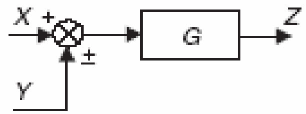
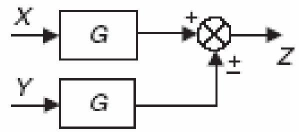
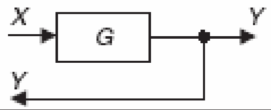
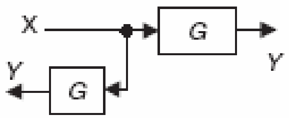
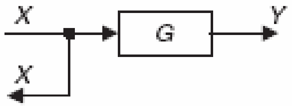
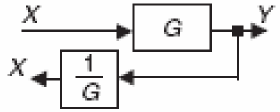
$$G_{m2} = \frac{G_2 G_3}{1 + G_3 H_3 + G_2 G_3 H_2}$$

$$G_1 G_{m2} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_3 H_3 + G_2 G_3 H_2}$$



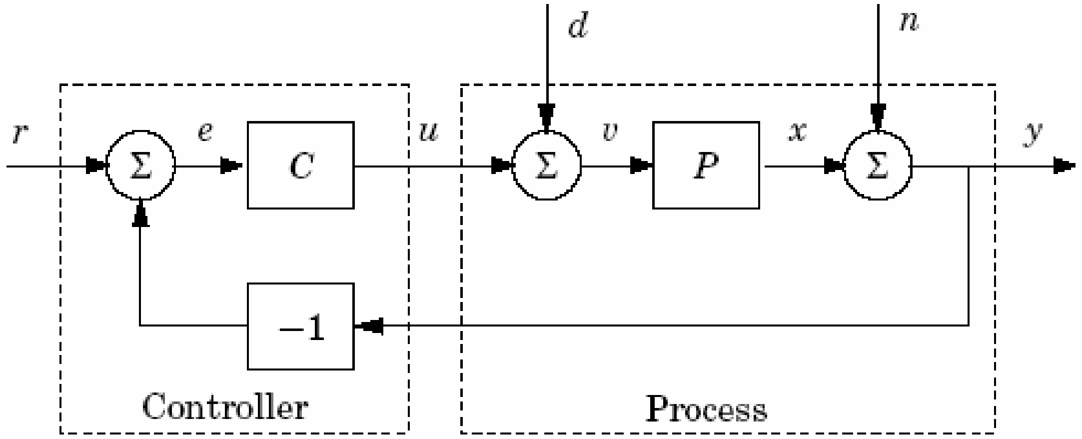
$$\boxed{\frac{C}{R}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_3(s)H_3(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)H_1(s)}}$$

Transformação De Diagramas de Blocos

Transformation	Equation	Block diagram	Equivalent block diagram
1. Combining blocks in cascade	$Y=(G_1G_2)X$		
2. Combining blocks in parallel; or eliminating a forward loop	$Y=G_1X \pm G_2X$		
3. Removing a block from a forward path	$Y=G_1X \pm G_2X$		
4. Eliminating a feedback loop	$Y=G_1(X \pm G_2Y)$		
5. Removing a block from a feedback loop	$Y=G_1(X \pm G_2Y)$		
6. Rearranging summing points	$Z=W \pm X \pm Y$		
7. Moving a summing point ahead of a block	$Z=GX \pm Y$		
8. Moving a summing point beyond a block	$Z=G(X \pm Y)$		
9. Moving a take-off point ahead of a block	$Y=GX$		
10. Moving a take-off point beyond a block	$Y=GX$		

Feedback e as Perturbações

Disturbances are an important aspect of control systems. In fact if there were no disturbances there is no reason to use feedback. In Figure there are two types of disturbances, labeled *d* and *n*. The disturbance labeled *d* is called a load disturbance and the disturbance labeled *n* is called measurement noise. Load disturbances drive the system away from its desired behavior. Measurement noise corrupts the information about the process variable obtained from the measurements.



$$y = x + n$$
$$x = k_p(u + d)$$
$$u = k_c(r - y)$$

$$x = \frac{k_p k_c}{1 + k_p k_c} r + \frac{k_p}{1 + k_p k_c} d - \frac{k_p k_c}{1 + k_p k_c} n$$
$$y = \frac{k_p k_c}{1 + k_p k_c} r + \frac{k_p}{1 + k_p k_c} d + \frac{1}{1 + k_p k_c} n$$
$$u = \frac{k_c}{1 + k_p k_c} r - \frac{k_p k_c}{1 + k_p k_c} d - \frac{k_c}{1 + k_p k_c} n$$

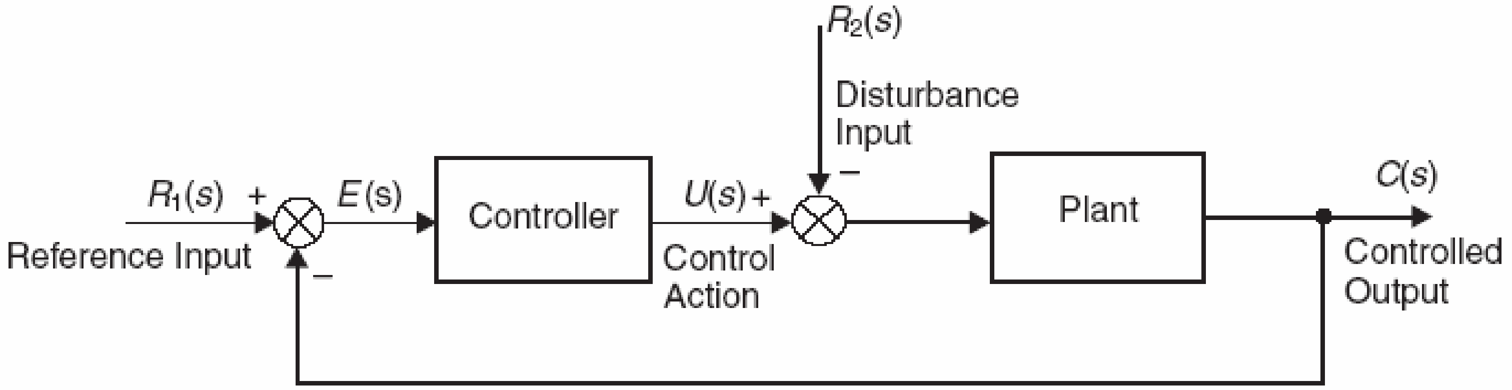
$\frac{PC}{1+PC}$, the complementary sensitivity function

$\frac{P}{1+PC}$, the load disturbance sensitivity function

$\frac{C}{1+PC}$, the noise sensitivity function

$\frac{1}{1+PC}$, the sensitivity function

CONTROLADORES PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA



Controlador Proporcional : $u(t) = K_1 e(t)$

Controlador Proporcional Integral : $u(t) = K_1 e(t) + K_2 \int e \mathrm{d}t$

Controlador Proporcional Integral Derivativo : $u(t) = K_1 e(t) + K_2 \int e \mathrm{d}t + K_3 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$

Controlador PID

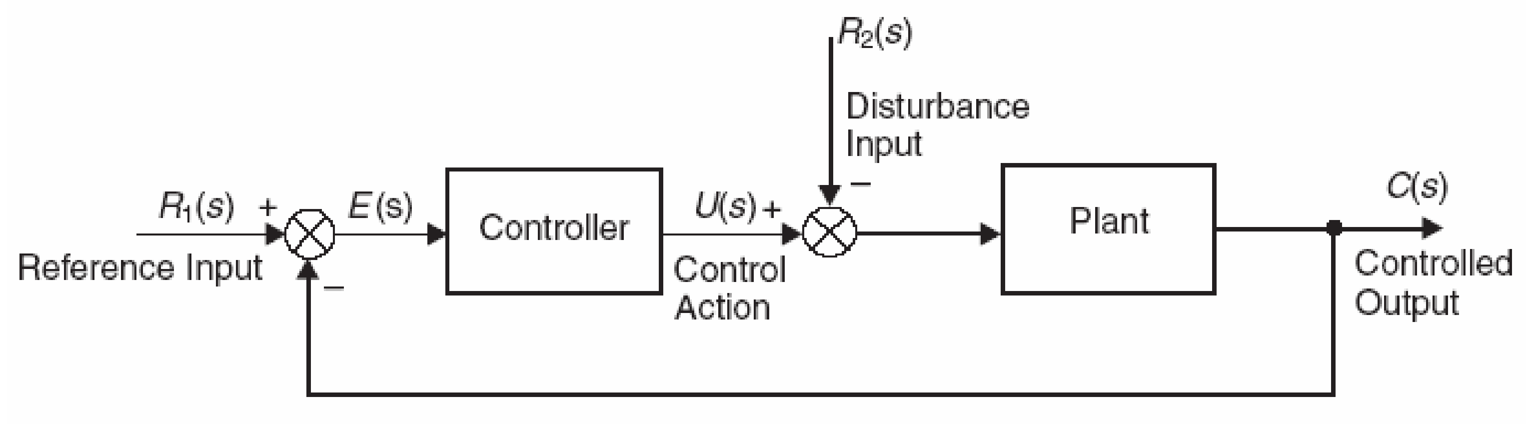
FT genérica de um controlador PID:

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I\, s} + T_D\, s \right)$$

em que:

K - ganho proporcional;
T_I - tempo integral;
T_D - tempo derivativo.

CONTROLADORES PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA - PROPORCIONAL



Suponha a planta de primeira ordem: $G(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$

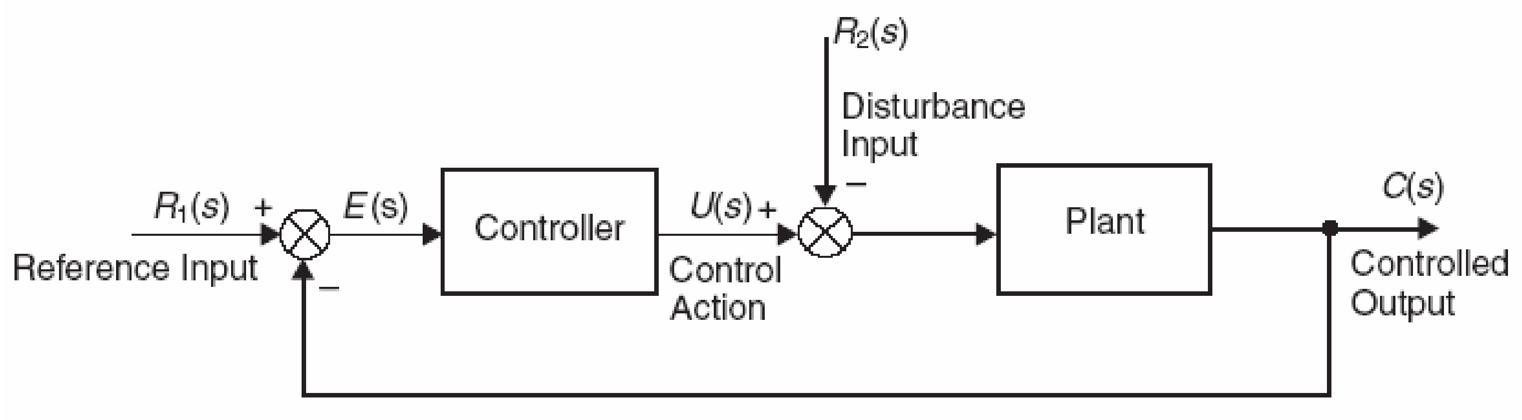
Suponha o controle proporcional, $u(t)=K_1 * e(t)$ então:

$$C(s) = \frac{\left(\frac{K_1 K}{1+K_1 K}\right) R_1(s) - \left(\frac{K}{1+K_1 K}\right) R_2(s)}{\left\{1 + \left(\frac{T}{1+K_1 K}\right) s\right\}}$$

Se $R_2(t)=0$ e $R_1(t)$ for um degrau então:

$$c(t) = \left(\frac{K_1 K}{1 + K_1 K}\right) \quad \text{as } t \to \infty.$$

CONTROLADORES PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA - PROPORCIONAL

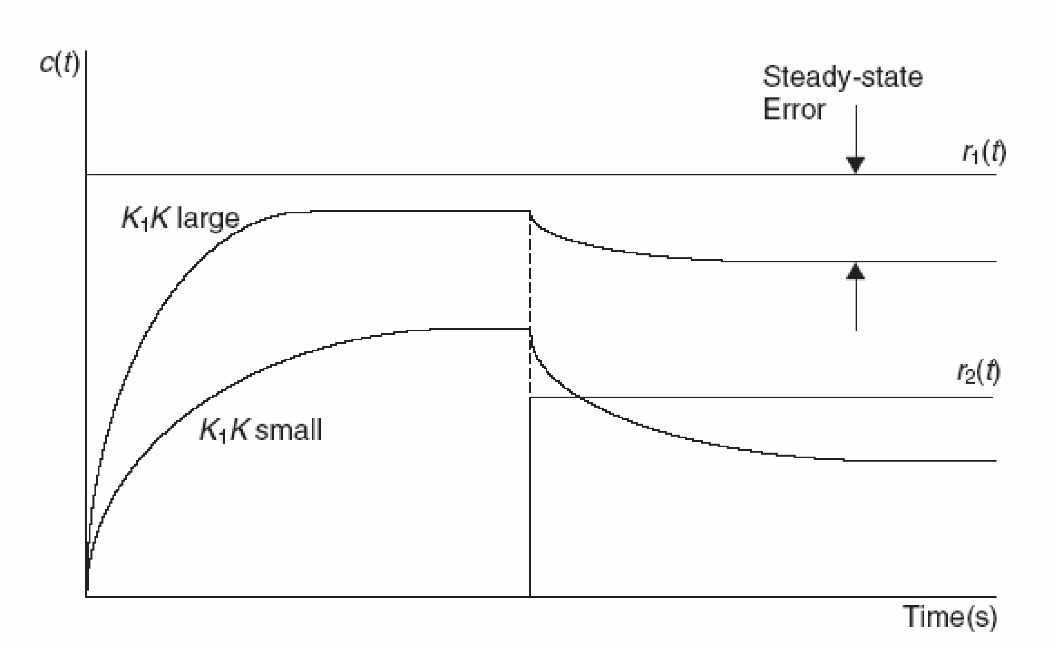


Se $R_2(t)=0$ e $R_1(t)$ for um degrau então: $$c(t) = \left(\frac{K_1 K}{1 + K_1 K}\right) \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

Se $R_1(t)=0$ e $R_2(t)$ for um degrau então: $$c(t) = -\left(\frac{K}{1 + K_1 K}\right) \quad \text{as } t \rightarrow \infty.$$

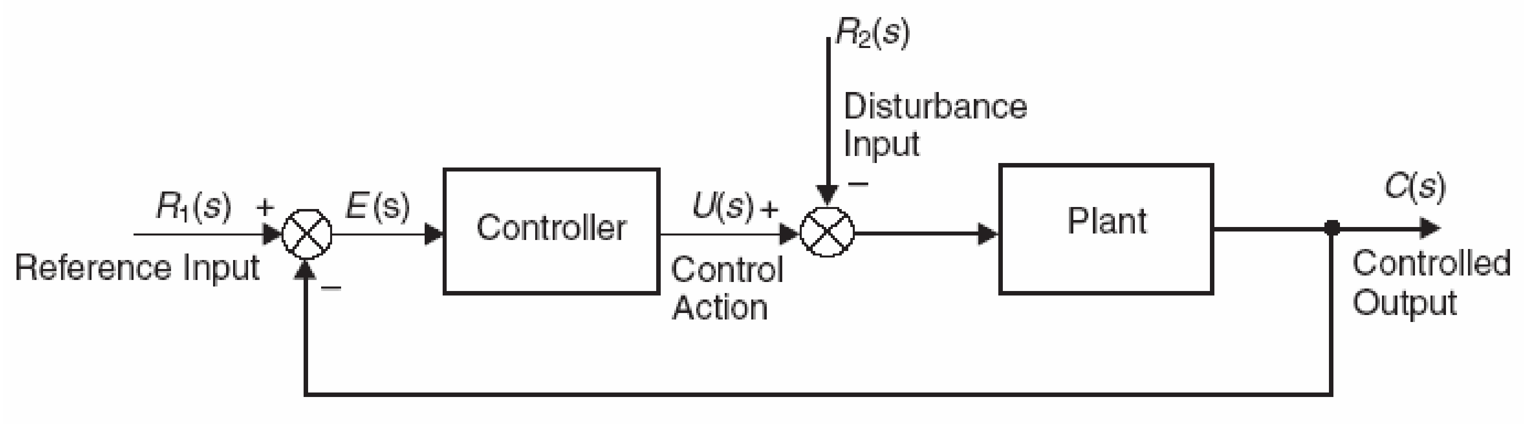
Logo $$\begin{cases} \left(\frac{K_1 K}{1 + K_1 K}\right) = 1 \\ \left(\frac{K}{1 + K_1 K}\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{K_1 * K >> 1.0}$$

Controlador Proporcional



- Para sistemas de primeira ordem , o controlador proporcional sempre apresenta erro em regime permanente.
- Aumentando o ganho de malha aberta (K_1) o erro pode diminuir, mas nunca será eliminado.
- Um ganho elevado diminui o transiente mas pode causar instabilidade, especialmente em sistemas de ordem elevada.

CONTROLADORES PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA – PROPORCIONAL INTEGRAL



Suponha a planta de primeira ordem: $G(s)=\dfrac{K}{1+Ts}$

Suponha o controle PI, $u(t) = K_1 e(t) + K_2 \int e\,\mathrm{d}t$ então:

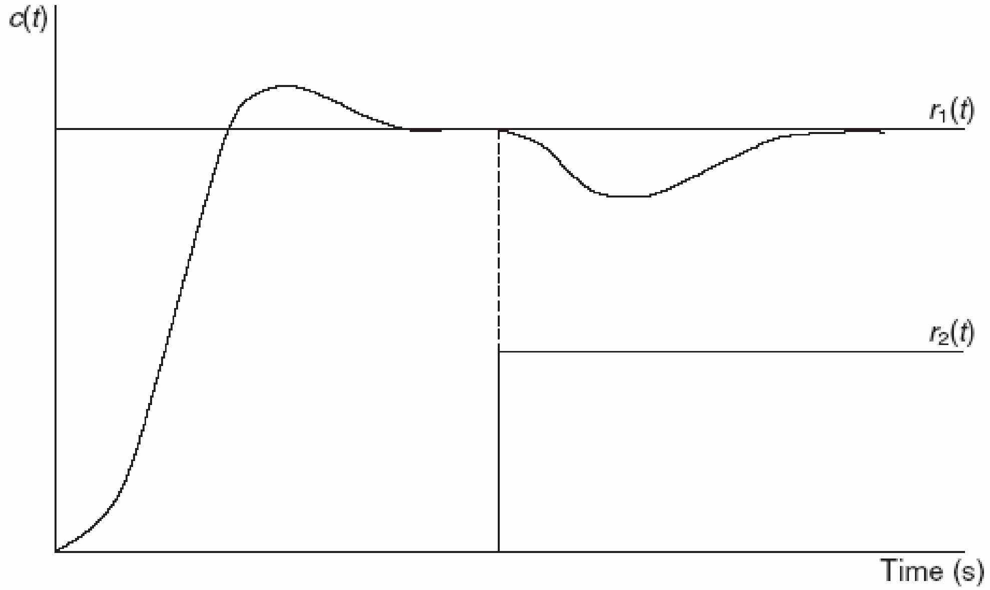
$$C(s) = \frac{(1 + T_i s)R_1(s) - T_i s R_2(s)}{\left(\frac{T_i T}{K_1 K}\right)s^2 + T_i\left(1 + \frac{1}{K_1 K}\right)s + 1}$$

CONTROLADORES PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA – PROPORCIONAL INTEGRAL

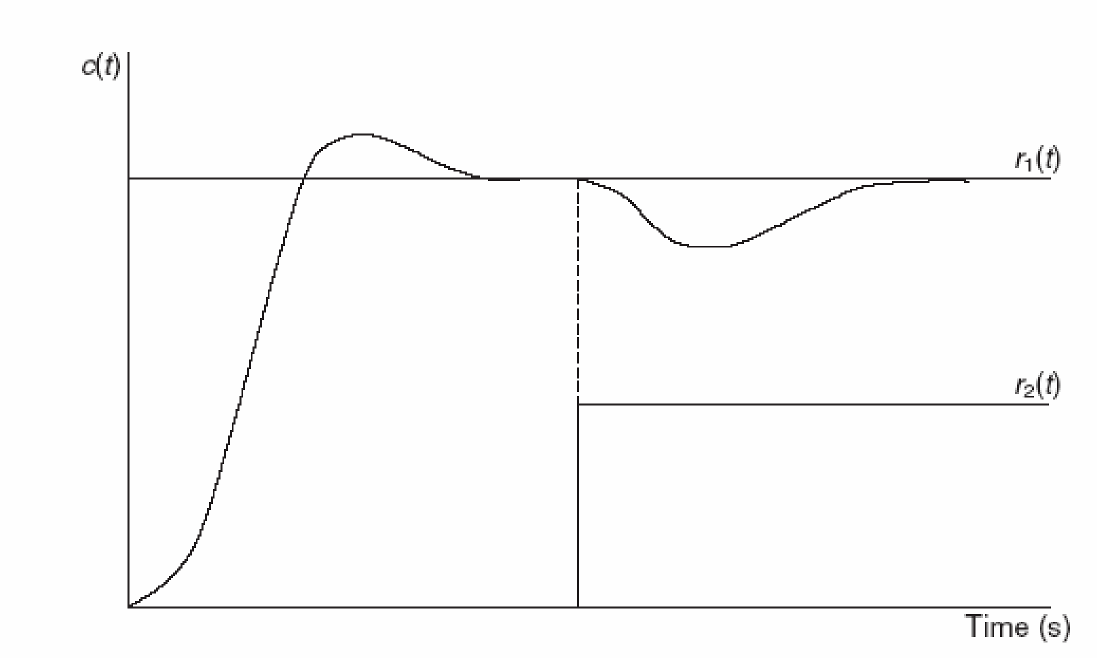
Dado que $$C(s) = \frac{(1 + T_i s)R_1(s) - T_i s R_2(s)}{\left(\frac{T_i T}{K_1 K}\right)s^2 + T_i\left(1 + \frac{1}{K_1 K}\right)s + 1}$$

Se tanto $R_1(t)$ como $R_2(t)$ forem degrau então:

$$c(t) = (1 + 0)r_1(t) - (0)r_2(t) \quad \text{as } t \to \infty$$



CONTROLADORES PARA SISTEMAS EM MALHA FECHADA – PROPORCIONAL INTEGRAL

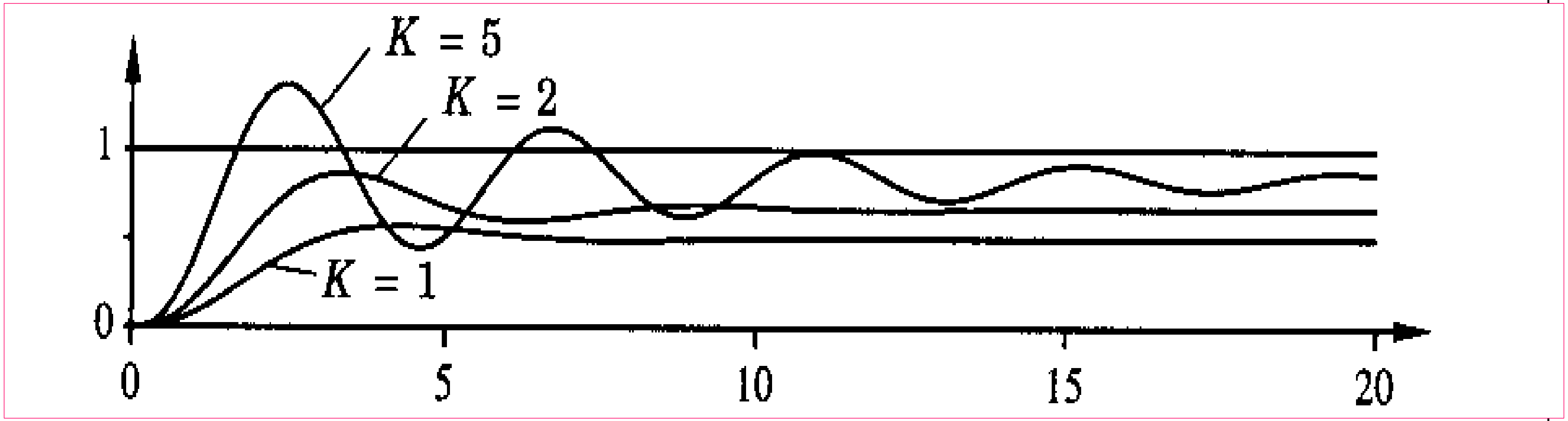


Para sistemas de primeira ordem o controlador PI produz erro zero em regime para entradas degrau. O controlador introduz um integrador (raiz na origem) na Função de Transferência de Malha Aberta.

Comportamento dos controladores PID

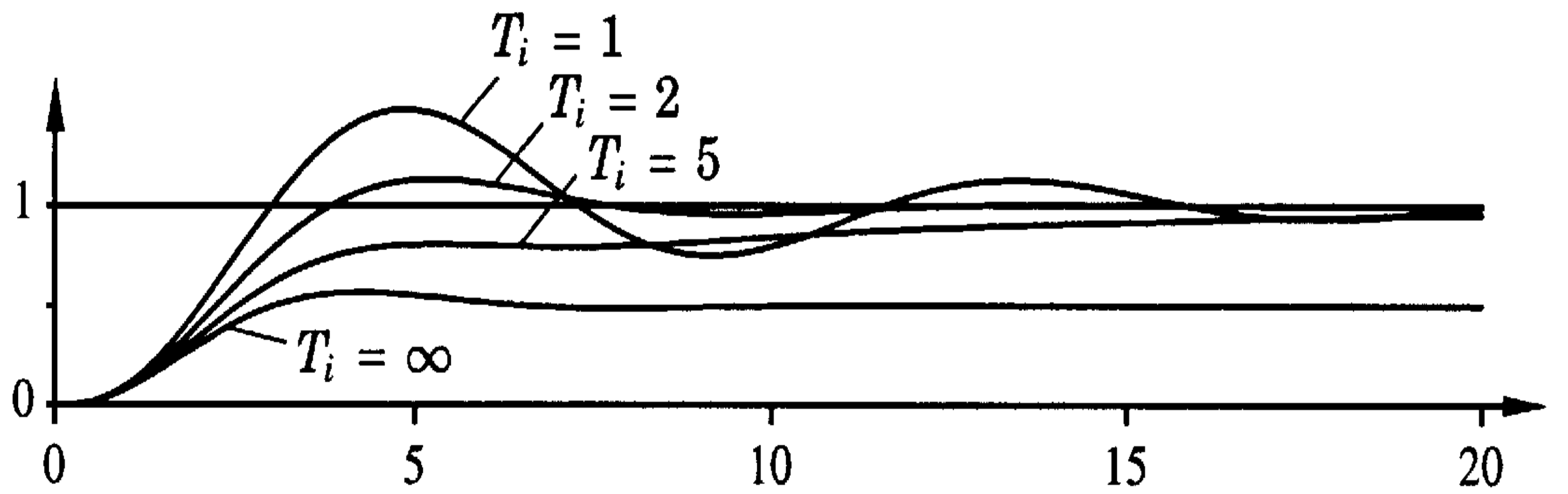
O comportamento dos controladores PID segue certas regras empíricas:

- Reduzindo a banda proporcional (equivalente a aumentar o ganho), o sistema responde mais rapidamente, mas tem um sobresinal maior:



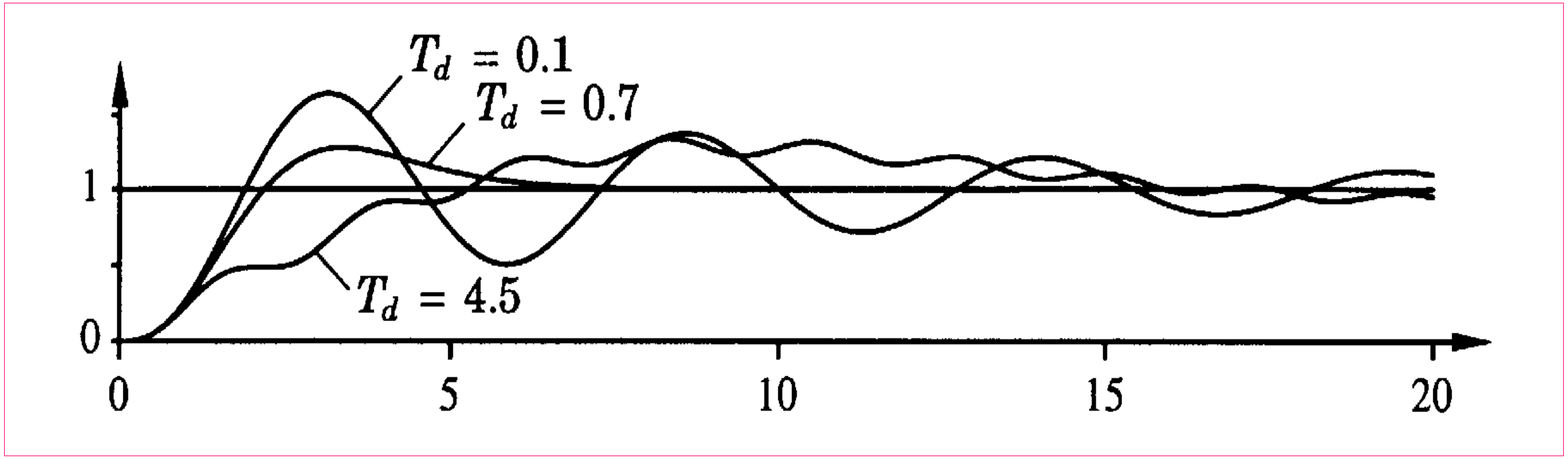
Saídas simuladas do sistema em malha fechada com vários valores de ganho do controlador proporcional.

Reduzindo a constante de tempo integral, o erro de regime do sistema cai mais rapidamente, mas o sistema torna-se mais instável, com maiores oscilações. O caso $T_i = \infty$ corresponde ao controle proporcional apenas.



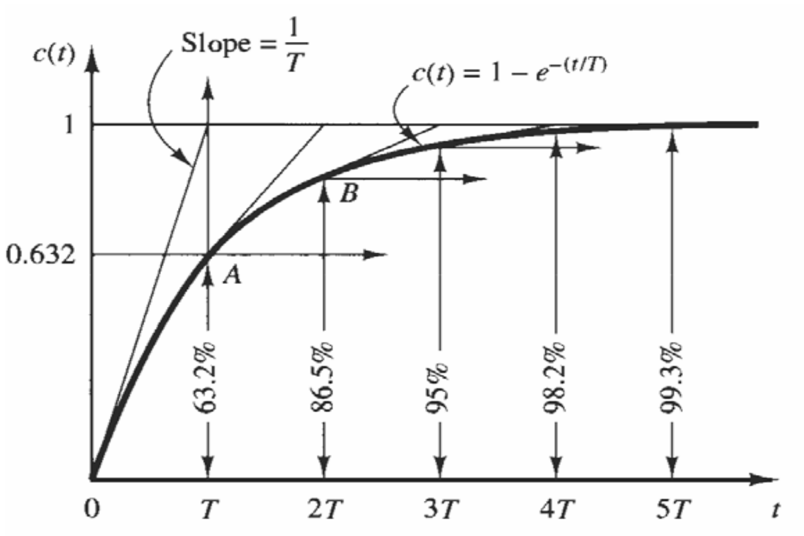
Saídas simuladas do sistema em malha fechada com controlador PI e vários valores do tempo integral. Ganho proporcional = 1.

- Aumentando a constante de tempo derivativo, o amortecimento do sistema aumenta até um certo ponto e depois volta a diminuir e o sistema torna-se instável.

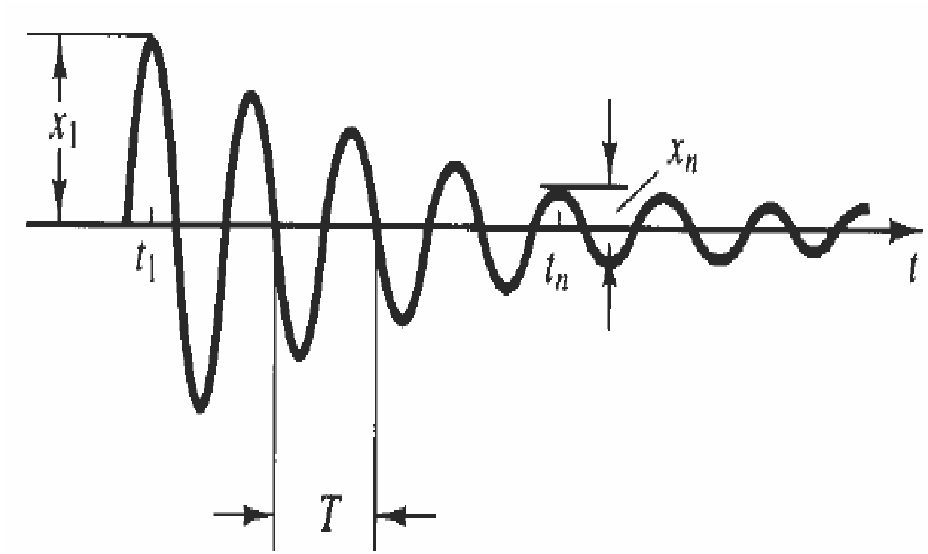


Saídas simuladas do sistema em malha fechada com controlador PID e vários valores do tempo derivativo. Ganho proporcional = 3. Tempo integral = 2.

Identificação de Sistemas Físicos



$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$



$$\frac{x_1}{x_n} = e^{(n-1)2\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\ln\frac{x_1}{x_n} = (n-1)\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

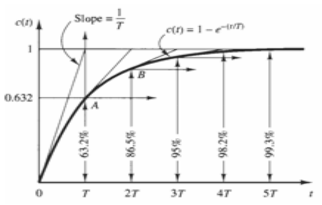
$$\zeta = \frac{\frac{1}{n-1}\left(\ln\frac{x_1}{x_n}\right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\frac{1}{n-1}\left(\ln\frac{x_1}{x_n}\right)\right]^2}}$$

$$w_d = \frac{2\pi}{T} = w_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$w_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$G(s) = \frac{w_n^2}{s + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Identificação de Sistemas Físicos



resposta monotônica e suave

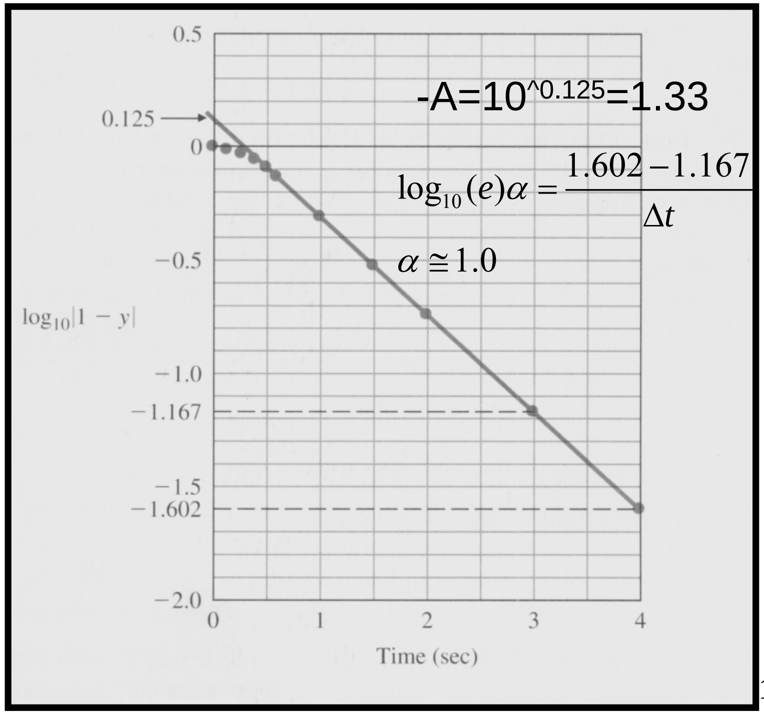
t	y(t)	t	y(t)
0.0	0	0.5	0.215
0.1	0.005	1.0	0.510
0.2	0.034	2.0	0.817
0.3	0.085	4.0	0.975
0.4	0.140	∞	1.00

$$y(t) = y(\infty) + Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + \ldots$$

$$y(t) - y(\infty) \cong Ae^{-\alpha t} \Rightarrow y(\infty) - y(t) \cong -Ae^{-\alpha t}$$

$$\log_{10}\left[y(\infty) - y(t)\right] \cong \log_{10}(-A) - \log_{10}(e)\alpha t$$

Equação de uma reta que resolvida para A e α gera:

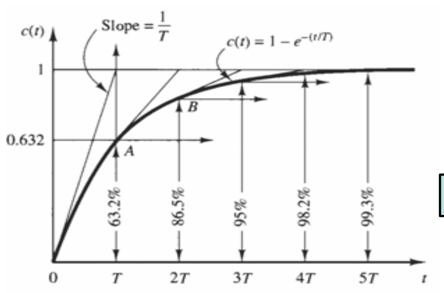


$$\log_{10}\left[y(\infty) + Ae^{-\alpha t} - y(t)\right] \cong \log_{10}(-B) - \log_{10}(e)\beta t$$

que pode ser resolvida para B e β.

... e o processo se repete pa C, γ, D, ...

Identificação de Sistemas Físicos



Resposta
monotônica e suave

$$y(t) \cong y(\infty) + Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + \ldots$$

$$\hat{y}(t) \cong 1 - 1.33e^{-t} + 0.33e^{-5.8t}$$

Portanto a Transformada de Laplace da resposta ao degrau é:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.33}{s+1} + \frac{0.33}{s+5.8} = G(s) * \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{-0.58s + 5.8}{s(s+1)(s+5.8)}$$

Ajuste de Controladores PID
(Ziegler – Nichols)

HIPÓTESE: O controlador e a planta são da forma:

Sistemas de 2ª ordem com delay

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$G(s) = \frac{K e^{-t_d s}}{\tau s + 1}$$

Há dois métodos de sintonia para tais sistemas:

(1) o do decaimento de 25% e o

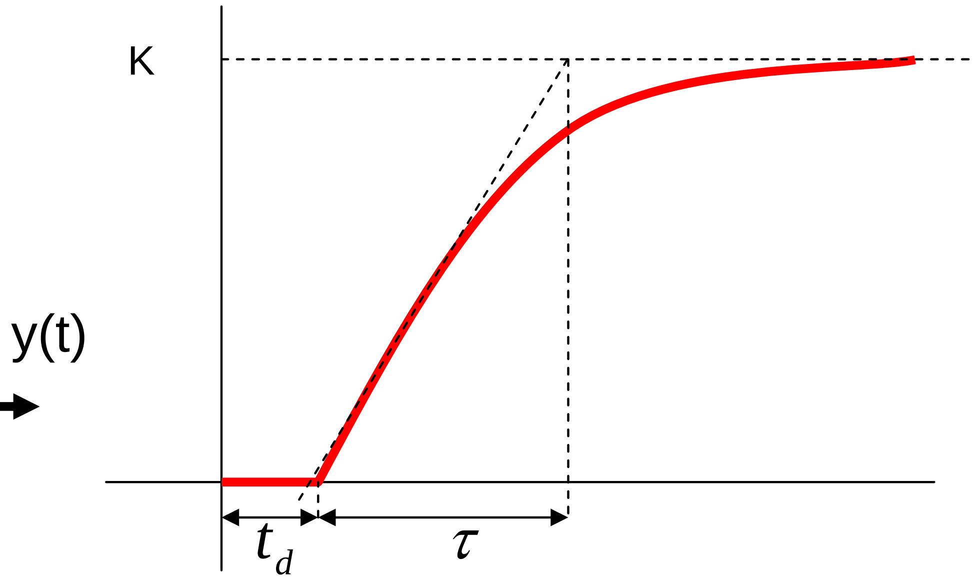
(2) do limite da estabilidade

Ajuste de Controladores PID
(Ziegler – Nichols : decaimento de 25%)

(1) decaimento de 25% (ζ = 0,21). O transiente dominante cai 25% depois de um período de oscilação.

Estratégia: *Excitar a planta com uma entrada ao degrau e identificar os parâmetros na resposta.*

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_d s}}{\tau s + 1}$$



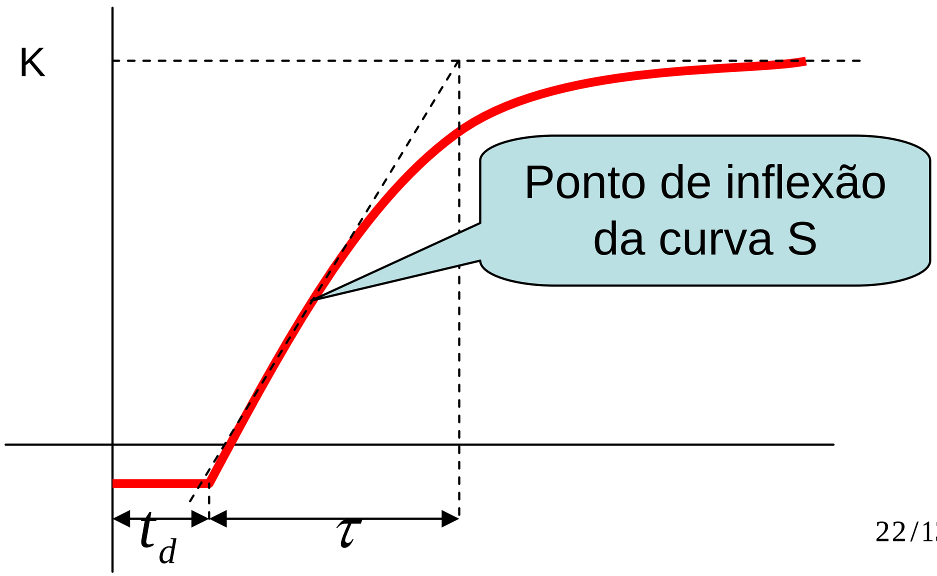
Ajuste de Controladores PID
(Ziegler – Nichols : decaimento de 25% $\Rightarrow \zeta = 0{,}21$)

Tipo de Controlador	Ganho
P	K_p=1/RL
PI	K_p=0.9/RL ; T_i=L/0.3
PID	K_p=1.2/RL ; T_i=2L ; T_d=0.5L

onde:

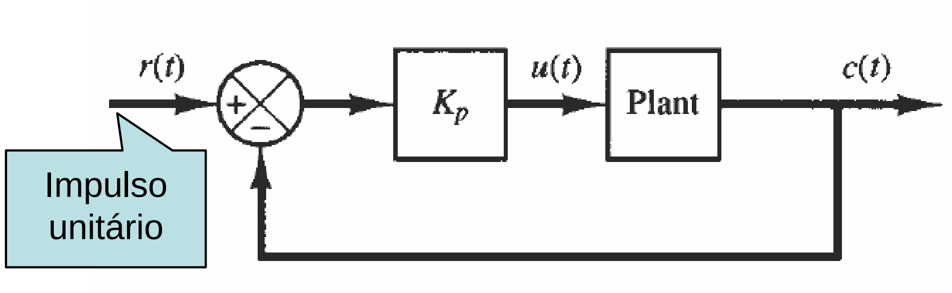
$$R = \frac{K}{\tau} \;;\; L = t_d \quad \text{e}$$

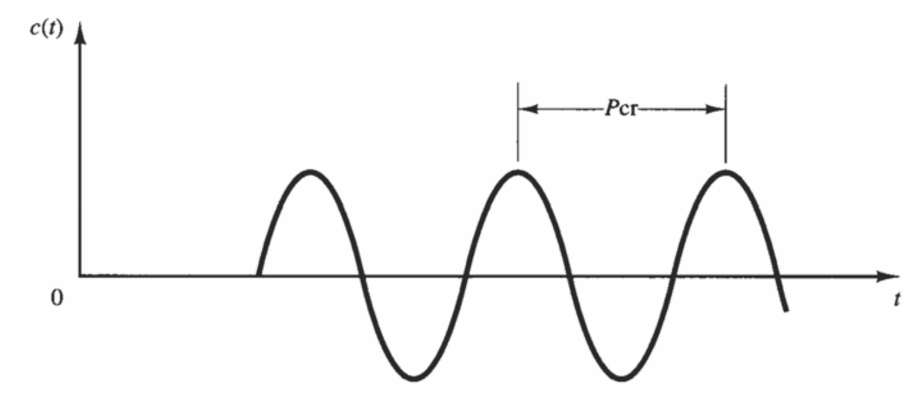
$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$



Ajuste de Controladores PID
(Ziegler – Nichols : limite da estabilidade)

IDÉIA: No diagrama, aumentar o ganho k_p até o valor de K_{cr} que é o ganho limite da estabilidade.





Os ganhos do controlador são:

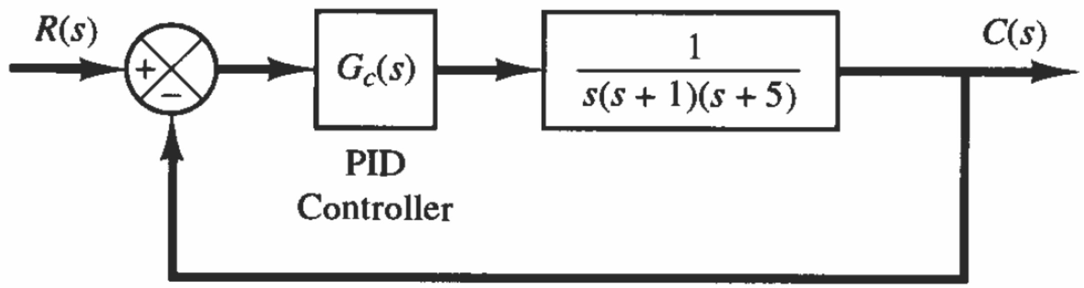
Type of Controller	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Ajuste de Controladores PID
(Ziegler – Nichols : Exemplos)

Observações:

1. Estas regras são largamente empregadas e podem ser aplicadas para sistemas com modelo conhecidos e desconhecidos, especialmente nestes últimos.
2. Para plantas que tenham integradores (pólo na origem) estas regras podem não funcionar !!
3. As plantas sintonizadas por este método apresentam overshoot entre 10 e 60%, ficando na média com 25%.

a)



b)