レーザービームの強度分布

鴨下正彦

2021 年 10 月 13 日

レーザービームの強度分布を近軸方程式を解くことで導出する方法をまとめる．

1　近軸近似

マクスウェル方程式から次式が得られる．

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\phi(\vec{r},t)=-\frac{\rho(\vec{r},t)}{\epsilon_0}, \\ \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\vec{A}(\vec{r},t)=-\mu_0\vec{j}(\vec{r},t). \end{cases}$$

以降，$\phi, \vec{A}$ をまとめて u という関数で表記する．真空中では波動方程式は，

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u(\vec{r},t)=0$$

となる．ビームが z 軸方向に入射しているとすると，そのビーム解は以下の方程式の近似解となる．($\vec{r}\equiv(x,y,z)$)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\tilde{u}(\vec{r},t)=0$$

このことを踏まえ，式 (1) の解を以下のように変数分離する．

$$u(\vec{r},t)=\psi(\vec{r},t)e^{i(kz-\omega t)}. \tag{1.1}$$

この式を式 (1) に代入すると，

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u(\vec{r}) \\ =&\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi(\vec{r})e^{i(kz-\omega t)} \\ =&e^{i(kz-\omega t)}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\psi(\vec{r}) \\ =&0 \end{aligned}$$

よって，

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\psi(x,y,z)=0.$$

近軸近似により，$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ を無視すると，

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\psi(x,y,z)=0 \tag{1.2}$$

が得られる．近軸のガウスビームの解は式 (1.2) を解くことで得られる．

2 基本モード

式 (1.2) の解 (モード) を計算する．解の形を

$$\psi(x,y,z)=A(z)\exp\left(i\frac{k}{2q(z)}(x^2+y^2)\right) \tag{2.1}$$

のように仮定し，$A(z),q(z)$ を求めることで，解 $\psi(x,y,z)$ を求める．

式 (2.1) を式 (1.2) に代入することで，

$$q'(z)=1,\quad \frac{A(z)}{q(z)}=-A'(z) \tag{2.2}$$

が得られる．ただし，$'$ は z による微分を表す．よって，解は実数 z_0,z_i を用いて，

$$\psi(x,y,z)=A(z)\exp\left(\frac{ik}{2(z+z_0+iz_i)}(x^2+y^2)\right) \tag{2.3}$$

のようになる．

ここで，実関数 $R(z),\omega(z)$ と波長 $\lambda=\frac{2\pi}{k}$ を使って q を便宜上，定義する．(q を実部と虚部に分けた)

$$\frac{1}{q(z)}\equiv\frac{1}{R(z)}+i\frac{\lambda}{\pi\omega(z)^2} \tag{2.4}$$

これを解に代入すると，$R(z)$ は波面の曲率，$\omega(z)$ は軸から離れるときの減衰パラメータである．

$$\begin{aligned}\psi(x,y,z)=&A(z)\exp\left(\frac{ik}{2(z+z_0+iz_i)}(x^2+y^2)\right)\\=&A(z)\exp\left(\frac{ik}{2R(z)}(x^2+y^2)-\frac{1}{\omega(z)^2}(x^2+y^2)\right)\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.1 ビームの広がり

式 (2.5) で $R(z),q(z)$ の具体的な形を求め，物理的な意味を明らかにする．以降では，z_0 は z 軸の取り方は任意のため $z_0=0$ とする．式 (2.2) から q は次式のように表される．

$$\frac{1}{q_0}=i\frac{\lambda}{\pi w_0^2}\qquad (w_0\equiv w(0)) \tag{2.6}$$

$$
\begin{aligned}
q =& z - i\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \qquad (\because q \equiv z + iz_i = q_0 + z) \\
\Rightarrow \frac{1}{q} =& \frac{z + i\frac{\pi w_0^2}{\lambda}}{z^2 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda}\right)^2}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

式 (2.4),(2.7) を比較することで，

$$
\begin{cases}
R(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{z\lambda}\right)^2\right], \\
\\
w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}.
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

ビームの広がり角 θ が λ を用いて表される．

$$
\begin{aligned}
w(z) \rightarrow \frac{\lambda}{\pi w_0}z \quad (z \rightarrow \infty) \\
\therefore \theta \sim \frac{\lambda}{\pi w_0}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

式 (2.8) から，$R(z), \omega(z)$ は，ビーム曲率，ビーム幅を表し，w_0 は $z = z_0 = 0$(ビームウェスト) における幅を表す．

2.2　グーイ位相

振幅 $A(z)$ は複素数である．$A(z)$ の虚部が平面波からの位相の遅れを表す．この位相の遅れをグーイ位相 (Gouy Phase) と呼ぶ．$A(z) \equiv e^{iP(z)}, A(0) = 1$ とすると，式 (2.2) より，

$$
\begin{aligned}
P(z) = i\ln\left(1 + i\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right) \\
A(z) = \frac{1}{1 + i\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}} = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}} = \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)e^{-i\phi}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

$$
where \;\; \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right) \tag{2.11}
$$

となる．

以上をまとめると，基本モードは以下のようになる．

レーザーの基本モード

$$u(x,y,z) = \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)\exp\left(i(kz-\phi)+\frac{ik}{2R(z)}(x^2+y^2)-\frac{1}{\omega(z)^2}(x^2+y^2)\right) \tag{2.12}$$

$$where \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)$$

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right], \quad w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}. \tag{2.13}$$

となる．ビームの広がり角は，

$$\theta \sim \frac{\lambda}{\pi w_0}. \tag{2.14}$$

w はビーム幅，w_0 はビームウェストの幅，$R(z)$ はビームの曲率，ϕ はグーイ位相を表す．

3 エルミートガウスモード

レーザービームは基本モード以外にも様々なモードがある．直交座標系では，これらのモードの強度分布はエルミート関数とガウス関数の積でかくことができる．解を

$$\psi(x,y,z) = \psi(x,z)\psi(y,z) \tag{3.1}$$

のように変数分離を行い，$\psi(x,z)$ の形状を，

$$\psi(x,z) = h_m\left(\frac{x}{p(z)}\right)A(z)e^{i\frac{k}{2q(z)}x^2} \tag{3.2}$$

と仮定する．これを式 (1.2) に代入することで，

$$\begin{aligned} e^{i\frac{k}{2q(z)}x^2}\Bigg[&A(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2A(z)\left(\frac{ik}{q(z)}\right)x\frac{\partial}{\partial x}+A(z)\left(\frac{ik}{q(z)}\right)^2x^2+A(z)\left(\frac{ik}{q(z)}\right) \\ &+2ik\frac{\partial}{\partial z}A(z)+2ikA(z)\frac{\partial}{\partial z}+2ikA(z)\left(-\frac{ikx^2q'(x)}{2q^2(z)}\right)\Bigg]h_m\left(\frac{x}{p(z)}\right)=0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

さらに，式 (2.2) から，

$$\begin{aligned} &\left[A(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2A(z)\left(\frac{ik}{q(z)}\right)x\frac{\partial}{\partial x}+2ikA(z)\frac{\partial}{\partial z}+A(z)\left(\frac{ik}{q(z)}\right)+2ik\frac{\partial A(z)}{\partial z}\right]h_m\left(\frac{x}{p(z)}\right)=0, \\ \therefore &\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{ik}{q(z)}\right)2x\frac{d}{dx}+2ik\frac{\partial}{\partial z}+2ik\frac{A'(z)}{A(z)}+\left(\frac{ik}{q(z)}\right)\right]h_m\left(\frac{x}{p(z)}\right)=0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる．

$$\frac{\partial}{\partial z}h_m\left(\frac{x}{p(z)}\right) = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x}h_m\left(\frac{x}{p(z)}\right) \quad \left(where \quad u = \frac{p'(z)}{p(z)}\right)$$
$$= -x\frac{p'(z)}{p(z)}\frac{\partial}{\partial x}h_m\left(\frac{x}{p(z)}\right) \tag{3.5}$$

であることを使うと，

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + ik\left(\frac{1}{q(z)} - \frac{p'(z)}{p(z)}\right)2x\frac{d}{dx} + \frac{ik}{q(z)}\left(1 + \frac{2q(z)}{A(z)}\frac{\partial A(z)}{\partial q}\right)\right]h_m\left(\frac{x}{p(z)}\right) = 0 \tag{3.6}$$

が得られる．この式をエルミートの微分方程式:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2x}{p^2}\frac{d}{dx} + \frac{2n}{p^2}\right]H_n(x/p) = 0 \tag{3.7}$$

と比較することで，

$$\begin{cases} ik\left(\frac{1}{q(z)} - \frac{p'(z)}{p(z)}\right) = -\frac{1}{p^2} \\ \frac{ik}{q(z)}\left(1 + \frac{2q(z)}{A(z)}\frac{\partial A(z)}{\partial q}\right) = \frac{2n}{p^2} \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} p'(z) = \frac{p}{q} - \frac{i}{kp} \\ \frac{2q}{A}\frac{dA}{dq} = -i\frac{2nq(z)}{p^2 k} - 1 \end{cases}$$

が得られる．ここで，

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{c}{w(z)} \tag{3.8}$$

という形を仮定してみると，

$$w'(z) = \frac{w(z)}{q(z)} - \frac{ic^2}{kw(z)}$$
$$= \frac{w(z)}{R(z)} = \frac{w(z)}{q(z)} - i\frac{2}{kw(z)} \tag{3.9}$$

となるので，$c = \sqrt{2}$ であることがわかる ($c = \sqrt{2}$ のときに，$R(z), w(z)$ が曲率，ビーム幅として解釈することができる)．上記の議論で x について考えたが，y についても同様の議論を行うことができる．

振幅 $A(z)$ は，

$$\frac{2q}{A}\frac{dA}{dq} = -i\frac{4nk}{qw(z)^2} - 1$$

から求めることができる．基本モードのときと同様に，虚部がグーイ位相である．

レーザーのエルミートガウスモード

$$\psi(x,y,z)$$
$$= A(z)H_m\left(\frac{x}{\sqrt{2}w(z)}\right)H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}w(z)}\right)\exp\left(i\frac{ik}{2R(z)}(x^2+y^2) - \frac{1}{w(z)^2}(x^2+y^2)\right) \tag{3.10}$$

4　ラゲールガウスモード

極座標系で考えると，レーザービームのモードはラゲール関数とガウス関数の積で書くことができる．

5　インスガウスモード

楕円座標系で考えると，レーザービームのモードはインス関数とガウス関数の積で書くことができる．