A° interior de A:

$x \in A^\circ$ si $\exists r > 0 : B(x,r) \subset A$

$\bar{A}$ adherencia de A:

$x \in \bar{A}$ si $\forall \varepsilon > 0$ se verifica $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\exists \{a_n\}$ en A tal que $\{a_n\} \to x$

A' acumulación de A:

$x \in A'$ si $\forall \varepsilon > 0$ se verifica $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$\exists \{a_n\}$ en A, $a_n \neq x$, tal que $\{a_n\} \to x$

$Fr(A)$ frontera de A:

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$

A abierto $\Leftrightarrow$ $A^\circ = A$

A cerrado $\Leftrightarrow$ $\bar{A} = A$

$A^\circ \subset A \subset \bar{A}$

sea (E,d) espacio métrico y $\{x_n\}$ convergente

$\{x_n\} \to x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$

$\Rightarrow x_n \in B(x,\varepsilon)$

$\Rightarrow \{d(x_n,x)\} \to 0$

sean (E,d) y (F,ρ) espacios métricos y

$f: E \to F$ aplicación y $a \in E$. Se dice que f es continua en a si:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in B(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$

$: f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$

$\forall \{x_n\}$ en E, $\{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a)$

f lipschitziana si $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq M \cdot d(x,y) \quad \forall x,y \in E$$

si $M = 1 \Rightarrow f$ no expansiva $\Rightarrow f$ continua ($F = E$

si $0 < M < 1 \Rightarrow f$ contractiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ no expansiva $\Rightarrow f$ continua

si f es continua $\Rightarrow$ una restricción

a $A \subset E$ es continua

(f continua $\Rightarrow f_{|A}$ continua)

Carácter local: si $f_{|A}$ continua en a y $a \in A^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ continua en a.

A abierto y $f_{|A}$ continua $\Rightarrow f$ continua en A

La imagen inversa por f, función continua, de un abierto es abierto. Análogo para los subconjuntos cerrados.

Sean (E, d) y (F, ρ) espacios métricos, $A \subset E$, $f: A \to F$ y $\alpha \in A'$, se dice que f tiene límite en α si $\exists L \in F$ tal que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A, 0 < d(x, \alpha) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), L) < \varepsilon$

$L = \lim_{x \to \alpha} f(x)$

f tiene límite en $\alpha \iff [\forall \{x_n\}$ en A, $x_n \neq \alpha$, $\{x_n\} \xrightarrow{d} \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}$ converge $]$

Caráct. local: Si $\alpha \in A^0 \Rightarrow [f$ tiene límite en $\alpha \iff$

$\iff f$ tiene límite en α según A y coinciden $]$

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos, $B \subset A \subset E$, $f: A \to F$ y $\alpha \in B'$, diremos que f tiene límite según B si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in B, 0 < d(x,\alpha) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), L) < \varepsilon$$

$$L = \lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \in B}} f(x)$$

Si el límite según dos subconjuntos es distinto $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists$ lím.

Bocadillo: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y

$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} h(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \to \alpha} g(x)$

Sean E, F espacios métricos, $A \subset E$, $f: A \to F$ y $a \in A$, entonces:

- $a \notin A' \Rightarrow f$ continua en a
- $a \in A' \Rightarrow [f$ continua en $a \iff f(a) = \lim_{x \to a} f(x)]$

Sea (E,d) espacio métrico y $A\subset E$. Un recubrimiento por abiertos de A es una familia $\{O_i : i\in I\}$ de abiertos de E : $A\subset \bigcup_{i\in I} O_i$

Dados dos recubrimientos $\{O_i : i\in I\}$ y $\{G_j : j\in J\}$: $O_i \in \{G_j : j\in J\}$ $\forall i\in I \Rightarrow$
$\Rightarrow \{O_i : i\in I\}$ subrecubrimiento

A compacto si de todo recubrimiento puede extraerse un subrecubrimiento finito de A.

Teorema Heine - Borel - Lebesgue: A compacto $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \{a_n\}$ en A $\exists \{a_{\sigma(n)}\} \to a \in A$

A compacto secuencialmente $\Leftrightarrow$ A compacto por recubrimiento.

En espacios métricos, recubrimiento por abiertos $\Rightarrow$ ~~compacto~~ secuencial.

compacto en e.m $\Rightarrow$ cerrado y acotado

Teorema Bolzano -Weierstrass en $\mathbb{R}^N$: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^N$ admite una subsucesión convergente.

La imagen de un subconjunto compacto por una función continua es compacto.

Teorema de Weierstrass: si (K,d) es un espacio métrico compacto, $K \neq \emptyset$, $f: K \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f tiene mínimos y máximos absolutos en K

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in K$$

Teorema de Hausdorff: En $\mathbb{R}^N$ dos normas cualesquiera son equivalentes.

Sean (E,d), (F,ρ) espacios métricos y $f: E \to F$ aplicación. Se dice que f es uniformement continua si:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x, y \in E, \ d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\{x_n\} \in E, \{y_n\} \in E, \{d(x_n, y_n)\} \to 0 \Rightarrow \{\rho(f(x_n), f(y_n))\} \to 0$

uniformemente continua $\Rightarrow$ continua.

Teorema de Heine: Sea $f: E \to F$ con E compacto y f continua $\Rightarrow$ f uniformemente continua.

Un conjunto C es conexo si la única partición de C en dos abiertos es la trivial

$C = \{\emptyset, C\}$

Un espacio métrico es conexo si los únicos abiertos y cerrados son el total y $\emptyset$

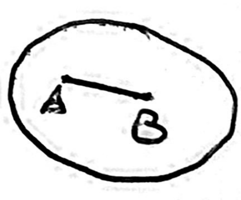
La imagen de un conexo por una función continua es conexo ($f(C)$ es un intervalo en e.m)

Los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son intervalos

Si $\{C_i : i \in I\}$ es una familia de conexos tal que $C_{i_0} \cap C_{i_1} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i \in I} C_i$ conexo

$C \subset X$ es convexo si verifica que:
$t \in [0,1]$, $x, y \in C \Rightarrow tx + (1-t)y \in C$

$[x,y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$



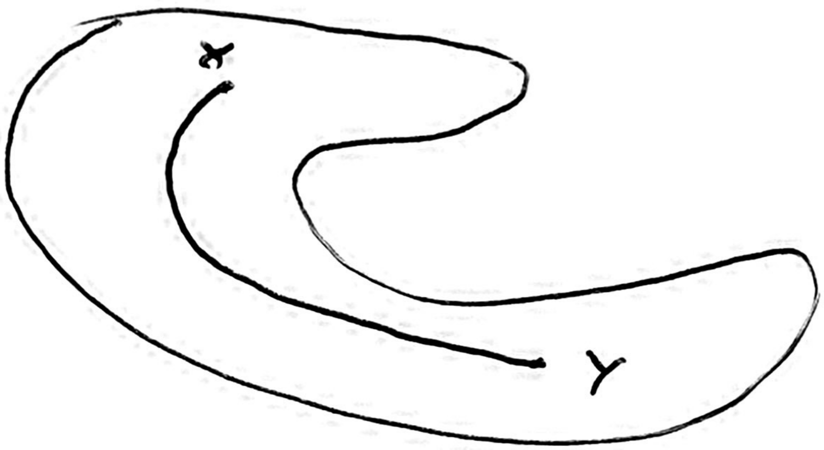
D

En un espacio normado, las bolas son convexas.

En $(X, \|\cdot\|)$ convexo $\Rightarrow$ conexo

Sea (E,d) espacio métrico, $A \subset E$. Se dice que A es arcoconexo si dados $x, y \in A$, $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $\gamma : [a,b] \to A$ tal que:

$$\gamma(a) = x \qquad \gamma(y) = b$$



Todo subconjunto convexo en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ y $(\mathbb{X}, d)$ $\Rightarrow$ arcoconexo.

convexo $\Rightarrow$ arcoconexo $\Rightarrow$ conexo