Estadística Descriptiva e Introducción a la Probabilidad

Relación 5

Daniel Alconchel Vázquez
Nars El Farissi
Mario García Márquez
Alberto Díaz Cencillo
Javier Garrues Apecechea

1. *Sea X una variable aleatoria con función masa de probabilidad* $P(X=i)=ki; i=1,\ldots,20.$

   a) Determinar el valor dek, la función de distribución y las siguientes probabilidades:

   $$P(X=4), P(X<4), P(3\leq X\leq 10), P(3<X\leq 10), P(3<X<10)$$

   b) Supongamos que un jugador gana 20 monedas si al observar esta variable obtiene un valormenor que 4, gana 24 monedas si obtiene el valor 4 y, en caso contrario, pierde una moneda. Calcular la ganancia esperada del jugador y decir si el juego le es favorable.

Apartado a

Tenemos X variable aleatoria discreta, por lo que sabemos que se cumple que $\sum_{i=1}^{20} p_i = 1$. De aquí extraemos:

$$\sum_{i=1}^{20} k\cdot i = 1 \implies k\cdot 210 = 1 \implies k = \frac{1}{210}$$

Por tanto, tenemos que $P(X=x_i)=\frac{i}{210}$. También, podemos afirmar:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si x<1} \\ \sum_{i=1}^{[x]} p_i & \text{si} \leq \text{x<20} \\ 1 & \text{si x} \geq 20 \end{cases}$$

Calculamos ahora las probabilidades que nos piden:

$$P(X=4) = P_4 = \frac{4}{210}$$

$$P(X<4) = F(4\text{-}) = F(3) = \sum_{i=1}^{20} \frac{i}{210} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

$$P(3\leq X\leq 10) = F(10) - F(3\text{-}) = F(10) - F(2) = \sum_{i=3}^{10} \frac{i}{210} = \frac{26}{105}$$

$$P(3<X\leq 10) = F(10\text{-}) - F(3) = \sum_{i=4}^{10} \frac{i}{210} = \frac{7}{30}$$

$$P(3<X<10) = F(10\text{-}) - F(3) = F(9) - F(3) = \sum_{i=4}^{9} \frac{i}{210} = \frac{13}{70}$$

Apartado b

Tenemos que :

MONEDAS GANADAS	X	PROBABILIDAD
+20 monedas	$X<4$	$P(X<4)=F(3)=\sum_{i=1}^{3}\frac{i}{210}=\frac{1}{35}$
+24 monedas	$X=4$	$P(X=4)=\frac{4}{210}$
-1 moneda	$X>4$	$P(X>4)=F(20)-F(4)=\sum_{i=5}^{20}\frac{i}{210}=\frac{20}{21}$

Definimos una nueva variable aleatoria Y, tal que $Y=h(X)$, de forma que Y toma los valores 20,24 y -1. Ahora tenemos entonces que:

Y	$P(Y = y_i)$
20	$P(Y=20) = P(X<4) = \frac{1}{35}$
24	$P(Y=24) = P(X=4) = \frac{4}{210}$
-1	$P(Y=-1) = P(X>4) = \frac{20}{21}$

Calculando la esperanza de la nueva variable:

$$E[Y] = \sum_i h(x_i)P[X = x_i] = \frac{20}{35} + \frac{96}{210} - \frac{20}{21} = 0,076$$

Como $E[Y] > 0$, (sabiendo que la esperanza es el centro de gravedad) el juego es favorable, aunque la ganancia esperada es relativamente baja.

---

2. *Sea X el número de bolas blancas obtenidas al sacar dos de una urna con 10 bolas de las que 8 son blancas. Calcular:*

   a) Función masa de probabilidad y función de distribución.

   b) Media, mediana y moda, dando la interpretación de cada una de estas medidas.

   c) Intervalo intercuartílico, especificando su interpretación.

Apartado a

Tenemos X, variable aleatoria discreta. Comenzamos calculando la probabilidad de sacar i bolas blancas, con $i = 0, 1, 2$ (Tres casos: Que no salga blanca, que salga una blanca o que salgan dos blancas).

$P[X=0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$

$P[X=1] = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{45}$

$P[X=2] = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$

Con estos datos podemos calcular la función de distribución:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{45} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{17}{45} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si x} \geq 2 \end{cases}$$

Apartado b

- Comenzamos calculando la mediana. Sabemos que $P(X \leq Me) = 0,5$, por lo que $Me = 2$. La mediana se interpreta como el valor de x_i que deja por debajo el 50% de la probabilidad.
- Calculamos ahora la moda. Para ello tomamos el valor tal que $P(X = x_i)$ es el máximo de los p_i, por lo que la $M_o = 2$. La moda se interpreta como el valor de x_i con mayor probabilidad.
- Vamos ahora con la media, que se trata de la esperanza matemática y la cuál representa el centro de gravedad de la probabilidad de una variable aleatoria.

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{2} x_i \cdot P(X = x_i) = \frac{8}{5}$$

Apartado c

Calculamos el cuartil de orden 3 y el de orden 1:

- $Q_3 = P_{75} = P(X \leq x_i) = 0,75 \implies Q_3 = 2$
- $Q_1 = P_25 = P(X \leq xi) = 0,25 \implies Q_3 = 1$

Luego, el $R_i = Q_3 - Q_1 = 2 - 1 = 1$.

---

3. *El número de lanzamientos de una moneda hasta salir cara es una variable aleatoria con distribución* $P(X = x) = 2^{-x}, x = 1, 2, \ldots$

   a) Probar que la función masa de probabilidad está bien definida.

   b) Calcular la probabilidad de que el número de lanzamientos necesarios para salir cara está entre 4 y 10.

   c) Calcular los cuartiles y la moda de las distribución, interpretando los valores.

   d) Calcular la función generatriz de momentos y, a partir de ella, el número medido de la lanzamientos necesarios para salir cara y las desviación típica.

Nos encontramos con X, variable aleatoria discreta:

Apartado a

Se tiene que cumplir:

- $P(X = x_i) \geq 0 \; \forall i \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-x_i} = 1$

Para el primer punto es evidente que se cumple la condición, ya que la función 2^{-x_i} es siempre positiva.

El segundo punto también se cumple, ya que se trata de una serie geométrica de razón $\frac{1}{2} < 1$, por lo que la serie es convergente y converge a 1.

Como se cumplen las dos condiciones, podemos afirmar que la función masa de probabilidad está bien definida.

Apartado b

$$P(4 \leq x \leq 10) = \sum_{i=4}^{10} p_i = \frac{127}{1024}$$

Apartado c

Sabemos que el percentil de orden $n, n = 1, 2, \ldots, 100$ se calcula como $P(X \leq x_i) = \frac{n}{100} \implies P_n = x_i$. Luego:

- $P(X \leq x_i) = 0,25 \implies x_i = 1 \implies Q_1 = 1$
- $P(X \leq x_i) = 0,5 \implies x_i = 1 \implies Q_1 = [1, 2)$
- $P(X \leq x_i) = 0,75 \implies x_i = 2 \implies Q_1 = [2, 3)$

Para calcular la moda, al ser X variable aleatoria discreta, tomamos el valor $x_i : P(X = x_i) = m\acute{a}x\{p_i\}$, por lo que, como la funcion 2^{-x_i} es decreciente, el máximo valor se encuentra en $x_1 = 1 \implies M_o = 1$.

Apartado d

- Comenzamos calculando la función generatiz de momentos:

$$M_x(t)=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{2^x}=\sum_{x=1}^{\infty}(\frac{e^t}{2})^x=\frac{\frac{e^t}{2}}{1-\frac{e^t}{2}}$$

Dicha serie converge absolutamente ∀ t: t < $log(2)$, por lo que converge en un entorno del cero y, por tanto, existe la función generatriz de momentos.

- Calculamos ahora la esperanza:

$$E[X]=M_X'(t)=\frac{\frac{e^t}{2}\cdot(1-\frac{e^t}{2})-\frac{e^t}{2}\cdot\frac{-e^t}{2}}{(1-\frac{e^t}{2})^2}$$

Sustituyendo por $t=0 \implies E[X]=2$.

- Calculamos por último la desviación típica:

$$E[X^2]=M_X''(t)=\frac{2e^t\cdot(e^t-2)^2-2e^t\cdot(e^t-2)\cdot e^t}{(e^t-2)^4}$$

Sustituyendo $t=0 \implies E[X^2]=6$. Por lo que:

$$Var[X]=E[X^2]-E[X]^2=2 \implies \sigma_x=\sqrt{2}$$

---

4. *Sea X una variable aleatoria con función de densidad*

$$f(X)=\begin{cases} k_1(x+1) & \text{si } 0\le \text{x} \le 4 \\ k_2x^2 & \text{si } 4<\text{x}\le 6\end{cases}$$

Sabiendo que $P(0\le X\le 4)=\frac{2}{3}$, determinar k_1, k_2 y deducir la función de distribución

Esta vez, X es una variable aleatoria continua. Comenzamos calculando k_1, k_2:

Por un lado tenemos que $P(0\le X\le 4)+P(4<X\le 6)=1 \implies P(4<X\le 6)=\frac{1}{3}$

- Como $P(0\le X\le 4)=\frac{2}{3} \implies \int_0^4 k_1(x+1)dx=\frac{2}{3}$, luego

$$P(0\le X\le 4)=\frac{2}{3} \implies \int_0^4 k_1(x+1)dx=k_1\cdot\frac{x^2}{2}+x\Big|_0^4 \implies 12k_1=\frac{2}{3} \implies k_1=\frac{1}{18}$$

- Como $P(4<X\le 6)=\frac{1}{3} \implies \int_4^6 k_2x^2dx=\frac{1}{3}$,luego

$$P(4<X\le 6)=\frac{1}{3} \implies \implies \int_4^6 k_2x^2dx=k_2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_4^6 \implies \frac{152k_2}{3}=\frac{1}{3} \implies k_2=\frac{1}{152}$$

Finalmente, tenemos que:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{18}\cdot(\frac{x^2}{2}+x)\Big|_0^x & \text{si } 0\le x\le 4 \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{152}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_4^6 & \text{si } 4<\text{x}<6 \\ 1 & \text{si x} \ge 6\end{cases}$$

---

5. *La dimensión en centímetros de los tornillos que salen de cierta fábrica es una variable aleatoria, X, con función de densidad*

$$f(x)=\frac{k}{x^2}, \quad 1\le x\le 10$$

a) Determinar el valor de k, y obtener la función de distribución.

b) Hallar la probabilidad de que la dimensión de un tornillo esté entre 2 y 5 cm.

c) Determinar la dimensión máxima del 50% de los tornillos con menor dimensión y la dimnesión mínima del 5% con mator dimensión.

d) Si Y denota la dimensión de los tornillos producidos en otra fábrica, con la misma media y desviación típica que X, dar un intervalo en el que tome valores la variable Y con una probabilidad mínima del 0.99.

Apartado a

- $P(1 \leq X \leq 10) = 1 \implies \int_1^{10} \frac{k}{x^2} dx = 1$, luego

$$P(1 \leq X \leq 10) = 1 \implies \int_1^{10} \frac{k}{x^2} dx = 1 \implies k \cdot \frac{-1}{x}\Big|_1^{10} = 1 \implies k = \frac{10}{9}$$

Por lo que tendremos que:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{10}{9} \cdot (1 - \frac{1}{x})\Big|_1^x & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{si x} > 10 \end{cases}$$

Apartado b

Como tenemos la función de distribución:

$$P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) = F(5) - F(2) = \frac{1}{3}$$

Apartado c

- Para determinar la dimensión máxima del 50% de los tornillos de menor dimensión calculamos el percentil 50. Sabemos que el percentil de orden $n, n = 1, 2, \ldots, 100$ se calcula como $P(X \leq x_i) = \frac{n}{100} \implies P_n = x_i$. Por lo que:

  $$P(X \leq x_i) = 0,5 \implies F(x_i) = 0,5 \implies \frac{10}{9} \cdot (1 - \frac{1}{x})\Big|_1^{x_i} = 0,95 \implies x_i = \frac{20}{11} \implies P_{50} = \frac{20}{11}\ cm$$

  Por lo que la dimensión máxima del 50% de los tornillos de menor dimensión es $\frac{20}{11}$ cm

- Para determinar la menor dimensión del 5% de los tornillos con mayor dimensión calculamos el percentil 95:

  $$P(X \leq x_i) = 0,95 \implies F(x_i) = 0,95 \implies \frac{10}{9} \cdot (1 - \frac{1}{x})\Big|_1^{x_i} = 0,95 \implies x_i = \frac{200}{29}$$
  $$\implies P_{50} = \frac{200}{29}\ cm$$

  Por lo que la dimensión mínima del 5% de los tornillos con mayor dimensión es $\frac{200}{29}$ cm

Apartado d

Dado que las dos variables aleatorias tienen la misma media y la misma desviación típica, podemos calcular dichos valores a través de los datos disponibles de la variable X:

$$m_1 = E[X] = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{1} 0\ dx + \int_1^{10} \frac{k}{x}\ dx + \int_{10}^{+\infty} 0\ dx = \frac{10 \cdot log(10)}{9}\ cm$$

$$m_2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{1} 0\ dx + \int_1^{10} k\ dx + \int_{10}^{+\infty} 0\ dx = 10\ cm^2 \implies$$
$$\implies \sigma_x = \sqrt{m_2 - m_1^2} = 1,859\ cm$$

Como la variable X es una variable aleatoria positiva (dimensión de tornillos), $\exists E[X]$ y $\exists E[X^2]$, entonces se cumples las hipótesis de la desigualdad de Markov y la desigualdad de Chebyshev. Aplicando esta segunda deisgualdad tenemos:

$$P(E[Y]-k\sigma_Y \leq X \leq E[Y]+k\sigma_x) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

Tomando $1-\frac{1}{k^2}=0.99 \implies k=10$. Por lo que el intervalo buscado es $[-16.02, 21.14]$, pero como la variable Y es positiva (ya que se trata de dimensiones de tornillos) $\implies [0, 21.14]$.

---

6. *Sea X una variable aleatoria con función de densidad*

$$f(X)=\begin{cases} \frac{2x-1}{10} & \text{si } 1<\text{x}\leq\ 2 \\ 0.4 & \text{si } 4<\text{x}\leq\ 6 \end{cases}$$

a) Calculas $P(1,5<X\leq 2),\ P(2,5<X\leq 3,5),\ P(4,5\leq X<5,5),\ P(1,2<X\leq 5,2)$

b) Dar la expresión general de los momentos no centrados y deducir el valor medio de X.

c) Calcular la función generatriz de momentos de X.

Apartado a

Comenzamos calculando:

$$\int_y^t \frac{2x-1}{10}\,dx=\frac{x^2-x}{10}\Big|_y^t \quad t\in[1,2]$$
$$\int_y^t 0,4\,dx=0,4\cdot x\Big|_y^t \quad t\in[4,6]$$

Por lo que tendremos que:

- $P(1,5<X\leq 2)=\frac{x^2-x}{10}\Big|_{1,5}^{2}=\frac{1}{8}$
- $P(2,5<X\leq 3,5)=0$
- $P(4,5\leq X<5.5)=0,4\cdot x\Big|_{4,5}^{5,5}=\frac{2}{5}$
- $P(1,2<X\leq 5,2)=\frac{x^2-x}{10}\Big|_{1,2}^{2}+0,4\cdot x\Big|_{4}^{5,2}=\frac{82}{125}$

Apartado b

Para calcular el valor medio de X tenemos que calcular el valor de la esperanza, por lo que:

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{1} 0\,dx+\int_1^2 \frac{2x^2-x}{10}\,dx+\int_2^4 0\,dx+\int_4^6 0,4x\,dx+\int_6^{+\infty} 0\,dx=$$
$$=\frac{2x^3}{30}-\frac{x^2}{20}\Big|_1^2+\frac{x^2}{5}\Big|_4^6=\frac{259}{60}$$

La expresión del momento de orden k no centrado será:

$$m_k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k\cdot f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{1} 0\,dx+\int_1^2 x^k\frac{2x-1}{10}\,dx+\int_2^4 0\,dx+\int_4^6 0,4x^k\,dx+\int_6^{+\infty} 0\,dx=$$
$$=\int_1^2 x^k\frac{2x-1}{10}\,dx+\int_4^6 0,4x^k\,dx$$

Apartado c

$$M_x(t) = E[e^{xt}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx = \int_1^2 e^{tx} \frac{2x-1}{10}\, dx + \int_4^6 0,4e^{tx}\, dx =$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \left(2 \left(x \cdot e^{tx} - \frac{e^{tx}}{t^2} \right) - \frac{e^{tx}}{t} \right) \Big|_1^2 + 0,4 \cdot \frac{e^{tx}}{t} \Big|_4^6 < \infty\ \forall t \in \mathbb{R} \implies \exists M_x(t)$$

---

7. *Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa ha estimado que la demanda de sus clientes, en miles de unidades del producto, se comporta semanalmente con arreglo a una ley de probabilidad dada por la función de densidad:*

$$f(x) = \frac{3}{4}(2x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 2$$

a) ¿Qué cantidad deberá tener dispuesta a la venta al comienzo de cada semana para poder satisfacer plenamente la demanda con probabilidad 0,5?

b) Pasado ciero tiempo, se observa que la demanda ha crecido, estimándose que e ese momento se distribuye según la función de densidad:

$$f(y) = \frac{3}{4}(4y - y^2 - 3), \quad y \leq y \leq 3$$

Los empresarios sospechan que este crecimiento no ha afectado a la dispersión de la demans, ¿Es cierrta esa sospecha?

Apatado a

Este apartado equivale a calcular el percentil 50. Sabemos que el percentil de orden $n, n = 1, 2, \ldots, 100$ se calcula como $P(X \leq x_i) = \frac{n}{100} \implies P_n = x_i$. Por lo que:

$$P(X \leq x_i) = 0,5 \implies \frac{3}{4} \int_0^{x_i} 2x - x^2\, dx = \frac{3}{4} x \Big|_0^2 - \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} \Big|_0^x = 0,5 \implies -x^3 + 3x - 2 = 0 \implies$$
$$\implies x = -2 (No\ válido)\ o\ x_i = 1 \implies P_{50} = 1$$

Por lo que será necesario prepar 1000 unidades del producto.

Apartado b

Para ver si la sospecha es cierta, calculamos el coeficiente de variación de ambas variables aleatorias y miramos si son iguales. Para ello realicemos los siguientes cálculos:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 0\, dx + \int_0^2 2x^2 - x^3\, dx + \int_2^{+\infty} 0\, dx = \frac{3}{4} \frac{2x^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{3}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 1$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y)\, dy = \int_{-\infty}^1 0\, dy + \int_1^3 \frac{3}{4} \cdot y \cdot (4y - y^2 - 3)\, dy + \int_3^{+\infty} 0\, dx =$$
$$= \frac{3}{4} \frac{4y^3}{3} \Big|_1^3 - \frac{3}{4} \frac{y^4}{4} \Big|_1^3 - \frac{3}{4} \frac{3y^2}{2} \Big|_1^3 = 2$$

$$m_2[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 0\, dx + \int_0^2 2x^3 - x^4\, dx + \int_2^{+\infty} 0\, dx = \frac{3}{4} \frac{2x^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{3}{4} \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = 1,2$$

$$m_2[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f(y)\, dy = \int_{-\infty}^1 0\, dy + \int_1^3 \frac{3}{4} \cdot y^2 \cdot (4y - y^2 - 3)\, dy + \int_3^{+\infty} 0\, dx =$$
$$= \frac{3}{4} y^4 \Big|_1^3 - \frac{3}{4} \frac{y^5}{5} \Big|_1^3 - \frac{3}{4} y^3 \Big|_1^3 = \frac{21}{5}$$

$$Var[X] = m_2[x] - E[X]^2 = 0,2 \implies \sigma_x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$Var[Y] = m_2[y] - E[Y]^2 = 0,2 \implies \sigma_y = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Por lo que tendremos que:

$$CV[X] = \frac{\sigma_x}{E[X]} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{1} \neq \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{\sigma_y}{E[Y]} = CV[Y]$$

Luego, el crecimiento, al contrario de lo que sospechan los empresarios, si ha afectado a la dispersión de la demanda.

---

8. *Calcular las funciones masa de probabilidad de las variables* $Y = X + 2$ *y* $Z = X^2$*, siendo* X *una variable aleatoria con distribución:*

   $$P(X=-2) = \tfrac{1}{5},\ \ P(X=-1) = \tfrac{1}{10},\ \ P(X=0) = \tfrac{1}{5},\ \ P(X=1) = \tfrac{2}{5},\ \ P(X=2) = \tfrac{1}{10}$$

   ¿Cómo afecta el cambio de X a Y en el coeficiente de variación?

X	$Y = X + 2$	$Z = X^2$
$P(X=-2) = \frac{1}{5}$	$P(Y=0) = P(X=-2)$	
$P(X=-1) = \frac{1}{10}$	$P(Y=1) = P(X=-1)$	$P(Z=1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{1}{2}$
$P(X=0) = \frac{1}{5}$	$P(Y=2) = P(X=0)$	$P(Z=0) = P(X=0)$
$P(X=1) = \frac{2}{5}$	$P(X=3) = P(X=1)$	$P(Z=2) = P(X=2) + P(X=-2) = \frac{3}{10}$
$P(X=2) = \frac{1}{10}$	$P(Y=4) = P(X=2)$	

Calculemos el coeficiente de variación de Y y de X:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot p_i = 0,1$$
$$E[Y] = \sum_i y_i \cdot p_i = 2,1$$
$$m_2[x] = \sum_i x^2 \cdot p_i = 1,7$$
$$m_2[y] = \sum_i x^2 \cdot p_i = 6,1$$
$$Var[x] = m_2[x] - E[X]^2 = 1,69$$
$$Var[Y] = m_2[y] - E[X]^2 = 1,69$$
$$CV[X] = \frac{\sqrt{1,69}}{0,1} = 13$$
$$CV[Y] = \frac{\sqrt{1,69}}{2,1} = \frac{13}{21}$$

Por lo que:

$$CV[X] = 21 \cdot CV[Y]$$

---

9. *Calcular las funciones de densidad de las variables* $Y = 2X + 3$ *y* $Z = |X|$*, siendo* X *una variable continua con función de densidad*

   $$f_X(x) = \frac{1}{4},\ \ -2 < x < 2$$

Tenemos X, una variable aleatoria continua, con $f(x)$ su función de densidad y $E = (-2, 2)$. Sabemos que $Y = h(X)$, de donde extraemos que $h^{-1}(y) = \frac{Y-3}{2} = X$.

Por otro lado tenemos que:

- $h(-2) = -1$
- $h(2) = 7$

Por lo que $E' = (-1, 7)$

Podemos definir $g(y) = f_x(h^-1(y))\left|\frac{dh^-1(y)}{dy}\right| \; \forall y \in E'$ y $g(y) = 0$ en otro caso:

$$g(y) = f(\frac{Y-3}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

En resumen:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si -1} < \text{x} < 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Vamos ahora con la variable Z. Nuevamente, sabemos $Z = h(X)$ y que $h^{-1}(z) = X$. Esta vez tenemos:

$$Z = |X| = \begin{cases} -x = h_1(x) & \text{si x} \leq 0 \\ x = h_2(x) & \text{si } 0 < \text{x} \end{cases}$$

Por otro lado tenemos que $h(E) = (0, 2)$.

$$g(z) = f_x(h_2^{-1}(z))\left|\frac{dh_2^-1(z)}{dz}\right| + f_x(h_1^{-1}(z))\left|\frac{dh_1^-1(z)}{dz}\right| = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2} \; \forall z \in (0, 2)$$

Finalmente tendremos que:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < \text{x} < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

---

10. *Si X es una variable aleatoria con función de densidad*

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2} \quad -\infty < x < \infty$$

hallar su función de distribución y la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) $P(|X| \leq 2)$

b) $P(|X| \leq 2 \text{ ó } X \geq 0)$

c) $P(|X| \leq 2 \; y \; X \leq -1)$

d) $P(X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0)$

e) $P(X \; es \; irracional)$

Podemos comenzar desdoblando la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } 0 < \text{x} < \infty \\ \frac{e^{x}}{2} & -\infty < \text{x} \leq \; 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{2}\, dx = \frac{e^x}{2}\Big|_{-\infty}^{0}$$
$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{2}\, dx = \frac{-e^{-x}}{2}\Big|_{0}^{\infty}$$

Por lo que la función de distribución será:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}\Big|_{-\infty}^{x} & \text{si} - \infty < \text{x} < 0 \\ 1 - \frac{e^{-x}}{2}\Big|_{0}^{x} & 0 \ \leq \text{x} < \infty \end{cases}$$

Hallemos ahora las probabilidades que nos piden:

- $P(|X| \leq 2) = P(-2 \leq X \leq 2) = F(2) - F(-2) = 1 - e^{-2}$
- $P(|X| \leq ó\ X \geq 0) = P(X \geq -2) = F(\infty) - F(-2) = 1 - \frac{1}{2e^2}$
- $P(|X| \leq 2\ y\ X \leq -1) = P(-2 \geq X \geq -1) = F(1) - F(-2) = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{2}$
- $P(X^3 - X^2 - X - 2 \leq 0) = P((X-2)(X^2 + X + 1)) = P(X \geq 2) = 1 - \frac{1}{2e^2}$
- $P(X\ es\ irracional) = 0$. Si X es variable contínua, la probabilidad en un punto es nula.

---

11. *Sea X una variable aleatoria con una función de densidad*

$$f(x) = 1, \ \ 0 \leq x \leq 1$$

Encontrar la distribución de las variables:

a) $Y = \frac{X}{1+X}$

b) $Z = \begin{cases} -1 & \text{si } x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{si x} = \frac{3}{4} \\ 1 & \text{si x} > \frac{3}{4} \end{cases}$

Apartado a

Tenemos que $Y(1+X) = X \implies Y + YX - X = 0 \implies Y + X(Y-1) = 0 \implies X = \frac{Y}{1-Y}$

$$\begin{cases} y = 0 & \text{si x} = 0 \\ y = \frac{1}{2} & \text{si x} = 1 \end{cases}$$

Por lo que:

$$f_y(y) = f\Big(\frac{y}{1-y}\Big) \cdot \Big|\frac{1 - y - y(-1)}{(1-y)^2}\Big| = \frac{1}{(1-y)^2}$$
$$f_y = \begin{cases} \frac{1}{(1-y)^2} & y \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Apartado b

$$P(Z = -1) = P(X < \frac{3}{4}) = \int_0^{3/4} dx = \frac{3}{4}$$
$$P(Z = 0) = 0$$
$$P(Z = 1) = P(X > \frac{3}{4}) = \int_{3/4}^{1} dx = \frac{1}{4}$$

---

12. *Sea X una variable aleatoria simétrica con respecto el punto 2, y con coeficiente de variación 1. ¿Qué puede decirse acerca de las siguientes probabilidades?*

- $P(-8 < X < 12)$
- $P(-6 < X < 10)$

Tenemos que $CV[X] = 1 = \frac{\sqrt{Var[x]}}{E[X]} \implies \sqrt{Var[X]} = E[X]$ y como es simétrica respecto al dos $\implies E[X] = 2$

Como sabemos que $\exists CV_X \implies \exists Var[X] \implies \exists m_2 \implies \exists E[X^2]$. Por lo que tenemos que X es variable aleatoria y existe $E[X^2]\ y\ E[X]$, por lo que podemos aplicar las hipótesis de ladesigualdad de Chebyshev. Tenemos así:

$$P(|X - E[X]| < k \cdot \sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}\ \forall k > 0$$

Como tenemos $\sigma_x = \sqrt{Var[X]} = E[X]:$

$$P(|X - E[X]| < k \cdot E[X]) \geq 1 - \frac{1}{k^2}\ \forall k > 0$$

Por lo que de:

$$P(-k \cdot E[X] < X - E[X] < k \cdot E[X]) \geq 1 - \frac{1}{k^2}\ \forall k > 0 \implies$$
$$\implies P(-2k + 2 < X < 2k + 2) \geq 1 - \frac{1}{k^2},\ \forall k > 0$$

Ahora podemos calcular las probabilidades que nos piden:

$$P(-8 < X < 12) \geq 1 - \frac{1}{k^2}\ (Tomando\ k = 5) \implies P(-8 < X < 12) \geq 0,96$$
$$P(-6 < X < 12) \geq 1 - \frac{1}{k^2}\ (Tomando\ k = 4) \implies P(-6 < X < 12) \geq 0,9375$$