Tema 4: Probabilidad Condicionada

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico arbitrario y A un suceso $(A \in \mathcal{A})$ tal que $P(A) > 0$. Para cualquier otro suceso $B \in \mathcal{A}$, se define la probabilidad condicionada de B a A o probabilidad de B condicionada a A como:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

De la propia definición:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) \quad \text{si } P(A) > 0 \quad \text{o} \quad P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B) \quad \text{si } P(B) > 0$$

Teorema de la probabilidad compuesta o regla de la multiplicación

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ con $P[\cap_{i=1}^{n-1} A_i] > 0$ entonces:

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \quad \dots \quad P\left[A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right]$$

"Probabilidad de A_i condicionada a que ha ocurrido todas las anteriores"

Teorema de la probabilidad total

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ un sistema completo de sucesos o partición de Ω con $P(A_n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea B un suceso cualquiera de $\mathcal{A}$, entonces

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)P(B \mid A_n)$$

Regla de Bayes o de la probabilidad inversa

$$P(A_n \mid B) = \frac{P(B \mid A_n)P(A_n)}{\sum_{n \in \mathbb{N}} P(B \mid A_n)P(A_n)}$$

Verosimilitud

Probabilidad a posteriori

Probabilidad a priori

Independencia de sucesos

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y $A \in \mathcal{A}$ con $P(A) > 0$. La ocurrencia del suceso A puede alterar la probabilidad de ocurrencia de cualquier otro suceso $B \in \mathcal{A}$. Al estudiar dichas probabilidades, pueden darse:

1) $P(B \mid A) \neq P(B)$, es decir, la ocurrencia del suceso A modifica la probabilidad de ocurrencia de B. Diremos entonces que B depende de A.
   - Si $P(B \mid A) > P(B)$, entonces A favorece a B
   - Si $P(B \mid A) < P(B)$, entonces A desfavorece a B

2) Si $P(B \mid A) = P(B)$, es decir, la ocurrencia del suceso A no tiene ningún efecto sobre B. Diremos entonces que B es independiente a A.

Caracterización de la independencia

Sea $A \in \mathcal{A}$ con $P(A) > 0$

Un suceso B es independiente de A $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Proposición

Si A y B son independientes, entonces:

1) A y $\bar{B}$ son independientes.
2) $\bar{A}$ y B son independientes.
3) $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

Independencia dos a dos

Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y una clase de sucesos $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ no vacía, diremos que los sucesos son independientes dos a dos si:

$$\forall A, B \in \mathcal{U}, \ A \neq B, \ A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

Independencia mutua

Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y una clase de sucesos $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ no vacía, diremos que sus sucesos son mutuamente (completamente o totalmente) independientes o simplemente independientes si para toda subcolección finita $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ de sucesos distintos de $\mathcal{U}$ se verifica:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$