Estadística Descriptiva e Introducción a la probabilidad

Relación 3

Daniel Alconchel Vázquez

Nars El Farissi

Mario García Márquez

Alberto Díaz Cencillo

Javier Garrues Apecechea

1. Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro(M), autobús (A), y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son:

M: 0.3; A: 0.2; C: 0.15; M y A: 0.1; M y C: 0.05; A y C: 0.06; M, A y C: 0.01

Calcular las probabilidades siguientes:

- **a) que una persona viaje en metro y no en autobús**
- **b) que una persona tome al menos dos medios de transporte**
- **c) que una persona viaje en metro o en coche, pero no en autobús**
- **d) que viaje en metro, o bien en autobús y en coche**
- **e) que una persona vaya a pie**

a)

$$P(M \cap \overline{A}) = P(M - A) = P(M) - P(M \cap A) = 0.3 - 0.1 = 0.2$$

b)

$$P(M \cap A) + P(P \cap C) - P(A \cap M \cap C) + P(A \cap C) - P(A \cap M \cap C) = \\ = 0.1 + 0.05 - 0.01 + 0.06 - 0.01 = 0.19$$

c)

$$P((M \cup C) \cap \overline{A}) = P((M \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A})) = P(M \cap \overline{A}) + P(C \cap \overline{A}) - P(\overline{A} \cap M \cap C) = \\ = P(M - A) + P(C - A) - P((M \cap C) - A) = \\ = P(M) - P(M \cap A) + P(C) - P(C \cap A) - P(M \cap C) + P(M \cap C \cap A) = \\ = 0.3 - 0.1 + 0.15 - 0.06 - 0.05 + 0.01 = 0.25$$

d)

$$P(M \cup (A \cap C) = P(M) + P(A \cap C) - P(M \cap A \cap C) = 03 + 006 - 0.01 = 0.35$$

e) Nos falta información. El enunciado incita a suponer este suceso como le complementario de los otros tres, pero eso supondría que es el único transporte complementario, es decir, sería como decir que ir en moto o en barco no son medios de transportes. Pese a ello, calculemos la probabilidad como el complementario de los tres sucesos:

$$P(pie) = 0.55$$

2.Sean A, B y C tres sucesos de un espacio probabilístico (Ω, *A*, P), tales que P(A) = 0,4, P(B) = 0,2, P(C) = 0,3 P(A ∩ B) = 0,1, P((A ∪ B) ∩ C) = ∅. Calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) sólo ocurre A

b) ocurren los tres sucesos

c) ocurren A y B, pero no C

d) por lo menos dos ocurren

e) ocurren dos y no más

f) no ocurren más de dos

g) ocurren por lo menos uno

h) ocurre sólo uno

i) no ocurre ninguno

a)

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,1 = 0,3$$

b)

$$P((A \cup B) \cap C) = \emptyset \implies P(A \cap C \cup B \cap C) = \emptyset \implies P(A \cap C) = \emptyset, P(A \cap C) = \emptyset \implies \\ \implies P(A \cap B \cap C) = \emptyset$$

c)

$$P((A \cap B) \cap \overline{C}) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = 0,1 - \emptyset = 0,1$$

d)

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) + \cancel{P(B \cap C)} - P(\cancel{(A \cap B)} \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ = P(A \cap B) + \cancel{P(A \cap C)} - \cancel{P((A \cap B) \cap (A \cap B))} = 0,1$$

e) Como la intersección de C con el resto de elementos es 0, entonces el único caso es:

$$P(A \cap B) = 0,1$$

f) Aprovechando el apartado B

$$\cancel{P(A \cap B \cap C)} = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$$

g)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - \cancel{P((A \cup B) \cap C)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) = \\ = 0,4 + 0,2 + 0,3 + 0,1 - 0,1 = 0,8$$

h)

$$P(A - B) + P(B - A) + P(C) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) = \\ = 0,4 - 0,1 + 0,2 - 0,1 + 0,3 = 0,7$$

i)

$$1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)]=1-0,4-0,2+0,1-0,3=0,2$$

3.Se sacan dos bolas sucesivamente sin devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas distinguibles y 2 blancas distinguibles.

a) Describir el espacio de probabilidad asociado a este experimento.

b) Descomponer en sucesos elementales los sucesos: *la primera bola es roba, la segunda bola es blanca* y calcular la probabilidad de cada uno de ellos.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra alguno de los sucesos considerados en el apartado anterior?

a) Aplicando lo aprendido en combinatoria:

- No hay repetición
- No intervienen todos los elementos
- Influye el orden

Luego, se trata de una variación sin repetición:

$$V_5^2 = \frac{5!}{3!} = 20$$

Luego, nuestro espacio muestras será:

$$\Omega = \{R_1R_2, R_1R_3, R_2R_3, R_2R_1, R_3R_1, R_3R_2, R_1B_1, B_1R_1, R_1B_2, B_2R_1, R_2B_1, B_1R_2, R_2B_2, B_2R_2, \\ R_3B_1, B_1R_3, R_3B_2, B_2R_3, B_1B_2, B_2B_2\}$$

b)

Tomamos el siguiente subconjunto A:

A = "Primera bola roja"

$$A = \{R_1R_2, R_1R_3, R_2R_3, R_2R_1, R_3R_1, R_3R_2, R_1B_1, R_1B_2, R_2B_1, R_2B_2, R_3B_1R_3B_2\}$$
$$\#A = 12$$
$$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Tomamos ahora el subconjunto B:

B = "Segunda bola blanca"

$$B = \{R_1B_1, R_1B_2, R_2B_1, R_2B_2, R_3B_1, R_3B_2, B_1B_2, B_2B_1\}$$
$$\#B = 8$$
$$P(B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

c)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{6}{20} = \frac{7}{10}$$

4. Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer dos bolas simultáneamente sean de distinto color?

A = "Sacar bola blanca"

B = "Sacar bola negra"

C = "Sacar bolas de distinto color"

$$\begin{gathered}P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cap\overline{B})-P(\overline{A}\cap B)=P(A)+P(B)-P(A-B)-P(B-A)=\\=P(A)+P(B)-P(A)+P(A\cap B)-P(B)+P(B\cap A)=\\=P(A)P(B)+P(B)P(A)=\frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b-1}\end{gathered}$$

5.Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 rojas. Se extraen 2 bolas simultáneamente. Calcular la probabilidad de obtener:

a) dos bolas rojas

b) dos blancas

c) una blanca y otra roja

a)

$$P(2\ rojas) = P(1^{\circ} roja^{\circ} \cap 2^{\circ} roja) = \frac{3}{8}\frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

b)

$$P(2\ blancas) = P(1^{\circ} blanca \cap 2^{\circ} blanca) = \frac{5}{1}\frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

c)

$$P(1\ blanca\ otra\ roja) = P(1^{\circ}\ blanca \cap 2^{\circ}\ roja) \cup (1^{\circ}\ roja \cap 2^{\circ}\ blanca) = \frac{5}{8}\frac{3}{7} + \frac{3}{8}\frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{15}{28}$$

Podemos hacerlo también de la siguiente forma:

$$P(2\ rojas) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{\frac{3!}{2!(3-2)!}}{\frac{8!}{2!(8-2)!}} = \frac{3}{28}$$

$$P(2\ blanco) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{\frac{5!}{2!(5-2)!}}{\frac{8!}{2!(8-2)!}} = \frac{5}{14}$$

De esta forma vemos que podemos resolver un mismo problema usando probabilidades condicionadas o usando conocimientos de combinatoria, axiomática de Kolmogorov y la regla de Laplace. A partir de ahora, usaremos el procedimiento que resulte más práctico y sencillo dependiendo de la situación.

6.En una lotería de 100 billetes hay 2 que tienen premio.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar al menos un premio si se compran 12 billetes?

b) ¿Cuantos billetes habrá que comprar para que la probabilidad de ganar al menos un premio sea mayor que 4/5?

a)

A = "Probabilidad de que u billete sea ganador"

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{98}{12}}{\binom{100}{12}} = \frac{\frac{98!}{12!(98-12)!}}{\frac{100!}{12!(100-12)!}} = \frac{58}{75} \implies P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{17}{75}$$

b)

$$P(A) > \frac{4}{5} \implies \frac{1}{5} > P(\overline{A}) = \frac{\binom{98}{x}}{\binom{100}{x}} = \frac{\frac{98!}{x!(98-x)!}}{\frac{100!}{x!(100-x)!}} = \frac{98!}{x!(98-x)!} \cdot \frac{(100-x)!}{100!} \implies$$

$$\implies \frac{(100-x)!}{(98-x)! \cdot 99 \cdot 100} < \frac{1}{5} \implies 1980 > \frac{(100-x)!}{(98-x)!}$$

$$z(z+1) = 1980 \implies z = 44$$

$$m\acute{a}x\{z \in \mathbb{N} : z(z+1) < 1980\} = 43 \implies 100 - x = 44 \implies x = 56 \; billetes$$

7.Se consideran los 100 primeros números naturales. Se sacan 3 al azar.

a) Calcular la probabilidad de que en los 3 números obtenidos no exista ningún cuadrado perfecto.

b) Calcular la probabilidad de que exista al menos un cuadrado perfecto

c) Calcular la probabilidad de que exista un sólo cuadrado perfecto, que existan dos,y la de que los tres lo sean

Sabemos que en dicho intervalo existen 10 cuadrados perfectos:

$$\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$$

A = "Ningún cuadrado perfecto"

B = "1º no es cuadrado perfecto"

C = "2º no es cuadrado perfecto"

D = "3º no es cuadrado perfecto"

a)

$$P(A) = P(B \cap C \cap D) = P(B)P(C)P(D) = \frac{90}{100}\frac{89}{99}\frac{88}{98} = \frac{178}{245} = 0,7265$$

b)

$$P(Al\ menos\ un\ perfecto) = P(\overline{No\ perfecto}) = 1 - P(No\ perfecto) = \frac{67}{245} = 0,2735$$

c)

$$\begin{gathered} P(3\ perfectos) = P(1^{\circ}\ perfecto \cap 2^{\circ}\ perfecto \cap 3^{\circ}\ perfecto) = \\ = P(1^{\circ}\ perfecto)P(2^{\circ}\ perfecto)P(3^{\circ}\ perfecto) = \\ = \frac{10}{100}\frac{9}{99}\frac{8}{98} = \frac{2}{2695} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} P(2perfectos) = P(1^{\circ}\ perfecto \cap 2^{\circ}\ perfecto \cap 3^{\circ}\ no\ perfecto) + \\ +P(1^{\circ}\ perfecto \cap 2^{\circ}\ no\ perfecto \cap 3^{\circ}\ perfecto) + \\ +P(1^{\circ}\ no\ perfecto \cap 2^{\circ}\ perfecto \cap 3^{\circ}\ perfecto) = \\ = \frac{10}{100}\frac{9}{99}\frac{90}{98} + \frac{10}{100}\frac{90}{99}\frac{9}{98} + \frac{90}{100}\frac{10}{99}\frac{9}{98} = \frac{27}{1078} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} P(1\ perfectos) = P(1^{\circ}\ perfecto \cap 2^{\circ}\ no\ perfecto \cap 3^{\circ}\ no\ perfecto) + \\ +P(1^{\circ}\ no\ perfecto \cap 2^{\circ}\ perfecto \cap 3^{\circ}\ no\ perfecto) + P(1^{\circ}\ no\ perfecto \cap 2^{\circ}\ no\ perfecto \cap 3^{\circ}\ perfecto) = \\ = \frac{10}{100}\frac{90}{99}\frac{89}{98} + \frac{90}{100}\frac{10}{99}\frac{89}{98} + \frac{90}{100}\frac{89}{99}\frac{10}{98} = \frac{267}{1078} \end{gathered}$$

8.En una carrera de relevos cada equipo se compone de 4 atletas. La sociedad deportiva de una colegio cuenta con 10 corredores y su entrenador debe forma un equipo de relevos que disputará el campeonato, y el orden en que participarán los seleccionados.

a) ¿Entre cuántos equipos distintos habrá que elegir el entrenador si los 10 corredores son igual valía? (Dos equipos con los mismos atletas en orden distinto se consideran diferentes)

b) Calcular la probabilidad de que un alumno cualquiera sea seleccionado

a)

- No intervienen todos los individuos(solo 4)
- Importa el orden
- No se pueden repetir personas

Luego se trata de variaciones sin repetición, por lo que tenemos:

$$V_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040\ equipos\ posibles$$

b)

$$P(Un\ alumno\ sea\ seleccionado) = \frac{4}{10} = 0,4$$

9.Una tienda compra bombillas en lotes de 300 unidades. Cuando un lote llega, se comprueban 60 unidades elegidas al azar, rachándose el envío si se supera la cifra de 5 defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote en el que haya 10 defectuosas?

$$P(5\ defectuosas) = \frac{\binom{10}{5}\binom{290}{55}}{\binom{300}{60}} = 0,02485$$
$$P(6\ defectuosas) = \frac{\binom{10}{6}\binom{290}{54}}{\binom{300}{60}} = 0,004826$$
$$P(7\ defectuosas) = \frac{\binom{10}{7}\binom{290}{53}}{\binom{300}{60}} = 0,000628$$
$$P(8\ defectuosas) = \frac{\binom{10}{8}\binom{290}{52}}{\binom{300}{60}} = 0,000052$$
$$P(9\ defectuosas) = \frac{\binom{10}{9}\binom{290}{51}}{\binom{300}{60}} = 0,0000025$$
$$P(10\ defectuosas) = \frac{\binom{10}{10}\binom{290}{50}}{\binom{300}{60}} = 0,0000000539$$
$$P(Aceptar\ un\ lote\ con\ 10\ defectuosas) = P(5\ defectuosas) + \ldots + P(10\ defectuosas) = 0,02979$$

Podemos resumirlo todo con la siguiente expresión:

$$\sum_{i=5}^{10} = \frac{\binom{10}{i}\binom{290}{60-i}}{\binom{300}{60}}$$

10.Una secretaria debe echar al correo 3 cartas; para ello, introduce cada carta en un sobre y escribe las direcciones al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos llegue una carta a su destino?

Comenzamos calculando la probabilidad de que llegue una carta:

$$P(A_i) = V_3^2 = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$$

Luego, tendremos que la probabilidad de que lleguen dos es:

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_m) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{6}$$

Luego la probabilidad de que lleguen las tres será:

$$P(Llegue\ al\ menos\ una) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) +$$
$$+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ampliación. Vamos a generalizar el ejercicio para el caso den cartas:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \frac{(n-1)!}{n!}$$
$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$$
$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!}$$
$$\vdots$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{(n-n)!}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Luego, tenemos que:

$$\frac{(n-1)!}{n!} \cdot n - \binom{n}{2} \cdot \frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3} \cdot \frac{(n-3)!}{n!} \ldots = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{-1^0}{0!} - \frac{1^1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{4!}$$
$$Tomando\ x = 1$$

$$e^1 = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$
$$1 - e^{-1} = -1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$
$$e^1 - 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$$

Por lo que en el límite:

$$
\begin{aligned}
P &\rightarrow 0,6321 \\
&\rightarrow 0,645 \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\rightarrow 0,666 \rightarrow \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$