Doble Grado en Informática y Matemáticas – Ejercicios y cuestiones teóricas

1. Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series.

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{6^n n!}{\sqrt[5]{n}\,11\cdot 17\cdot 23\cdots(5+6n)};\qquad b)\ \sum_{n\geqslant 2}(-1)^{n+1}\log\frac{n^2+n+1}{n^2+1}$$

2. Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series.

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{5^n n!}{\sqrt[4]{n}\,9\cdot 14\cdot 19\cdots(4+5n)};\qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$$

3. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ Una función continua verificando que $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ para todo $x\in[-1,1]$. Prueba que hay algún $c\in[-1,1]$ tal que $f(c)=c^3$.

4. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ para todo $x\in[-1,1]$. Prueba que hay algún $c\in[-1,1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c)=\dfrac{1}{4}(c^3+3c)$.

5. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función creciente y continua en $[a,b]$ tal que $a\leqslant f(x)\leqslant b$ para todo $x\in[a,b]$. Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1=f(a),\quad x_{n+1}=f(x_n)\quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}$$

converge a un punto $u\in[a,b]$ tal que $f(u)=u$.

6. Sea $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ la función definida para todo $x\in]0,1[$ por $f(x)=\dfrac{2x-1}{x(x-1)}$. Calcula el conjunto imagen $f(]0,1[)$.

7. Sea $f:]-1,1]\to\mathbb{R}$ la función dada para todo $x\in]-1,1]$ por $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$.

   a) Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio que debes enunciar, el conjunto $f(]-1,1])$.

   b) Calcula, usando un resultado sobre continuidad y monotonía que debes enunciar, el conjunto $f([-1/2,1/2])$.

8. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, pongamos $M=\text{máx}\,f([a,b])$, $m=\text{mín}\,f([a,b])$ y supongamos que $f(a)=f(b)$ y que $m<f(a)<M$. Prueba que f toma todo valor de $]m,M[$ en al menos dos puntos de $[a,b]$.

9. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y creciente. Prueba que para todo conjunto acotado y no vacío, $A\subset\mathbb{R}$, se verifica que $\sup f(A)=f(\sup A)$.

10. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a<f(x)<b$ para todo $x\in[a,b]$. Definamos $x_1=a$, y $x_{n+1}=f(x_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a un número $\beta\in]a,b]$ tal que $\beta=\sup f([a,\beta[)$. Además $\beta\leqslant f(\beta)$. Si suponemos que f es continua en β entonces $\beta=f(\beta)$.

11. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, indicando el resultado de teoría que lo justifica, o proporcionando una prueba o un contraejemplo.

    1) Hay un conjunto $A\subseteq\mathbb{R}$ que no es vacío y cuyo conjunto de minorantes es un intervalo del tipo $]-\infty,a[$.

2) Una sucesión monótona no acotada no tiene ninguna sucesión parcial convergente.

3) Una sucesión no acotada no puede tener una sucesión parcial convergente.

4) Una sucesión monótona que tenga una parcial convergente es convergente.

5) Existe una sucesión de números reales $\{x_n\}$ acotada y que verifica que $|x_n - x_m| \geqslant 10^{-10}$ siempre que $n \neq m$.

6) Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $\{x_{n+1} - x_n\}$ es convergente. Entonces la sucesión $\{x_n/n\}$ es convergente.

7) Si una sucesión $\{x_n\}$ es tal que $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \to 1$ entonces $\{x_n\} \to 1$.

8) Una sucesisón de números reales está acotada si, y sólo si, tiene una sucesión parcial convergente.

9) Una sucesión que no tiene ninguna sucesión parcial convergente tampoco tiene ninguna sucesión parcial acotada.

10) Toda función definida en un intervalo cuya imagen es un intervalo es continua.

11) Toda función inyectiva cuya imagen es un intervalo es continua.

12) La función inversa de una función estrictamente monótona definida en un intervalo es continua.

13) La función inversa de una función continua e inyectiva es continua.

14) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva y continua en un intervalo no vacío I entonces f^{-1} es continua en $J = f(I)$.

15) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, I es un intervalo y $J = f(I)$ es un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua en J.

16) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, $f(A)$ un intervalo, y f^{-1} es continua, entonces f es continua.

17) Si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una serie convergente de términos positivos, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente.

18) Toda serie de términos positivos mayorada es convergente.

19) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua que no está mayorada ni minorada, entonces $f(A) = \mathbb{R}$.

20) Toda función polinómica o se anula en algún punto o alcanza un máximo o un mínimo absolutos en $\mathbb{R}$.

21) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y verifica que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ entonces f es constante.

22) Hay una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que es continua y verifica que $f[0,1] = [2,3[$.

23) Toda función continua en un intervalo alcanza en algún punto de dicho intervalo un valor mínimo.

24) Si $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y se verifica que la sucesión $\{x_n - x_{n-1}\}$ converge a 0 entonces $\{x_n\}$ es convergente.

25) Toda sucesión estrictamente creciente verifica la condición de Cauchy.

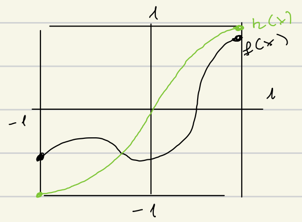
26) Toda serie convergente es una sucesión acotada.

27) Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen términos x_p y x_q de dicha sucesión tales que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

28) Si $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente verificando que $f(0) = 0$ y que $\{f(1 - (1/n))\} \to 1$, entonces $f([0,1[) = [0,1[$.

3. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ Una función continua verificando que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = c^3$.

Si hacemos un dibujillo orientativo:



Cualquier función continua que vaya de $(-1,-1)$ a $(1,1)$

Consideramos $h(x) = x^3$ y calculamos la diferencia $f(x) - h(x) = g(x)$

g continua

$g: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(-1) = f(-1) + 1 \geqslant 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$

Si $g(-1) = 0$ o $g(1) = 0$, entonces hemos acabado. $\Rightarrow c = -1$ o $c = 1$

En otro caso $g(-1) > 0$ y $g(1) < 0$, en cuyo caso, el Teorema de Bolzano $\exists c \in]-1, 1[\ / \ g(c) = 0$

El caso más sencillo:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $a \leq f(x) \leq b \ \forall x \in [a,b]$

$\exists c \in [a,b]: f(c) = c$

$f(x) = x$, $g(x) = f(x) - x$ ¿$\exists c \ / \ g(c) = 0$?

$g(a) = f(a) - a \geq 0$
$g(b) = f(b) - b \leq 0$

Si $g(a) = 0$ o $g(b) = 0$ hemos terminado. En otro caso $g(a) > 0$, $g(b) < 0$, en cuyo caso el Teorema de Bolzano dice $\exists c \in]a, b[\ / g(c) = 0$

5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua en $[a, b]$ tal que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo $x \in [a, b]$. Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_1 = f(a), \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Equivale a:

$$\begin{cases} \{x_n\} \longrightarrow u \in [a,b] \\ f(u) = u \end{cases}$$

$a \leq x_1 \Rightarrow$ Como f es creciente $\Rightarrow$ $f(a) = x_1 \leq f(x_1) = x_2$ $\Rightarrow$ Se deduce que la sucesión es creciente.

Si consideramos el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}\}$

$1 \in A \Rightarrow x_1 \leq x_2$

$n \in A \ / \ x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow f(x_n) \leq f(x_{n+1}) \Rightarrow x_{n+1} \leq x_{n+2} \Rightarrow n+1 \in A$

Luego se verifica que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente

$x_n \leq b$ $\quad \{x_n\} \longrightarrow u \leq b$ $\quad a \leq u \leq b$

Tomando límites en $x_{n+1} = f(x_n)$ $\Rightarrow$ $\boxed{u = f(u)}$ Definición de continuidad en u.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Prueba que para todo conjunto acotado y no vacío, $A \subset \mathbb{R}$, se verifica que $\sup f(A) = f(\sup A)$.

$\alpha = \sup A$, luego si $x \in A \Rightarrow x \leq \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(\alpha)$, luego $f(\alpha)$ es un mayorante de los valores de $f(A) \Rightarrow \underline{\sup f(A) \leq f(\alpha)}$

Por la caracterización del supremo y el ínfimo:

$$\alpha = \lim \{x_n\} \underset{A}{\cap} \Rightarrow f(\alpha) = \lim \{f(x_n)\} \underset{f(A)}{\cap} \Rightarrow \underline{f(\alpha) = \sup f(A)}$$

Otra forma:

$\lambda = \sup f(A) < f(\alpha)$

$\alpha - \delta$, α, x

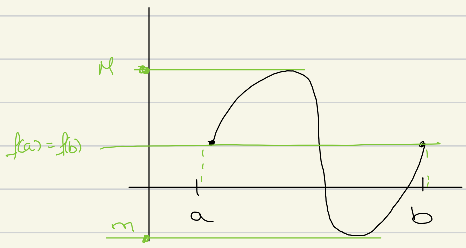
$\alpha - \delta < \underset{A}{x} \leq \alpha \Rightarrow 0 \leq f(\alpha) - f(x) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{f(x) > f(\alpha) - \varepsilon > \lambda}$!!!

λ, $f(\alpha) - \varepsilon$, $f(x)$

Se llega a una contradicción de que no puede ser menor estricto

8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, pongamos $M = \max f([a, b])$, $m = \min f([a, b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que $m < f(a) < M$. Prueba que f toma todo valor de $]m, M[$ en al menos dos puntos de $[a, b]$.



$f(x_0) = M$, $f(y_0) = m$ $\quad x_0, y_0 \in [a,b]$

$x_0 < y_0$

$f([x_0, y_0]) = [m, M]$, $f(\overbrace{]x_0, y_0[}) \supset]m, M[$

$f([a, x_0]) \supseteq [f(a), M]$

$f([y_0, b]) \supseteq [m, f(b)] = [m, f(a)]$

Luego, $f(\underbrace{[a, x_0] \cup [y_0, b]}) \supseteq [m, M]$

$\smile$ son intervalos disjuntos

6. Sea $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ la función definida para todo $x \in]0,1[$ por $f(x) = \dfrac{2x-1}{x(x-1)}$. Calcula el conjunto imagen $f(]0,1[)$.

f es continua porque es una función racional (menos en el 0 y el 1) y por lo que, en particular, será continua en dicho intervalo $(]0,1[)$. Como está definida en un intervalo, $f(]0,1[) = J$ es un intervalo.

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ $\quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{2}{n} - 1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)} = \dfrac{2-n}{\frac{1}{n}-1} = n \dfrac{n-2}{n-1} \longrightarrow +\infty \Rightarrow J$ no está mayorado

$M > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq n_0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) > M$

$\left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$ $\quad f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \dfrac{1 - \frac{2}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{2-n}{1-\frac{1}{n}} \longrightarrow -\infty$ $\quad \underline{m < 0}$ entonces

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ / $n \geq n_1$ $\quad f\left(1-\frac{1}{n}\right) < m \Rightarrow J$ no está minorado

Luego $J = \mathbb{R}$.

7. Sea $f:]-1,1] \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \in]-1,1]$ por $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$.

a) Calcula, haciendo uso del teorema del valor intermedio que debes enunciar, el conjunto $f(]-1,1])$.

b) Calcula, usando un resultado sobre continuidad y monotonía que debes enunciar, el conjunto $f([-1/2, 1/2])$.

a) $f(1) = 0$

$f(]-1,1]) = [0, +\infty]$

f es continua por ser composición de funciones continuas. $J = f(]-1,1])$, $J \subseteq \mathbb{R}_0^+$

Consideramos la sucesión $\left\{ -1 + \frac{1}{n^2} \right\} \Rightarrow f\left(-1 + \frac{1}{n^2}\right) = \sqrt{n\left(2 - \frac{1}{n^2}\right)} \longrightarrow +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ El intervalo J no está mayorado y $0 \in J$ y $J \subseteq \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow f(]-1,1]) = [0, +\infty[$

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } x, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ x \neq y \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ equivale a que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$f\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ (para que esto se verifique hay que probar que f es inyectiva)

$\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}} = \dfrac{1-y}{\sqrt{1+y}} \Leftrightarrow (1-x)\sqrt{1+y} = (1-y)\sqrt{1+x} \Leftrightarrow (1-x)^2(1+y) = (1-y)^2(1+x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Acabar ...

10. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a < f(x) < b$ para todo $x \in [a,b]$. Definamos $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a un número $\beta \in]a,b]$ tal que $\beta = \sup f([a,\beta[)$. Además $\beta \leqslant f(\beta)$. Si suponemos que f es continua en β entonces $\beta = f(\beta)$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a < f(a) = x_2 \qquad \{x_n\} \nearrow \\ x_n < b \end{array}\right\} \Rightarrow \{x_n\} \to \beta \leq b \qquad \beta \in]a,b]$$

$a \leq x < \beta \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\quad a \leq x < x_{n_0} < \beta \Rightarrow f(x) < f(x_{n_0}) = x_{n_0+1} < \beta \Rightarrow$ β es un mayorante de $f([a,\beta[)$, luego $\sup f([a,\beta[) \leq \beta$

$\varepsilon > 0$, $\quad \beta - \varepsilon < x_n \in f([a,\beta[)$ luego $\beta-\varepsilon$ no es un mayorante de $f([a,\beta[)$