Derivada

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f: A \to \mathbb{R}$ se dice que f es derivable en el punto $a \in A \cap A'$ si existe el $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. En dicho caso, el límite recibe el nombre de derivada en a y se nota como $f'(a)$.

Diremos que una función es derivable en un conjunto cuando lo sea en todos los puntos de dicho conjunto.

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. ELSA:

1) f derivable en a
2) Existe un número real L cumpliendo que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-f(a)-L(x-a)| < \varepsilon|x-a|$

En caso de que se cumpla $f'(a) = L$.

Condición necesaria

Si $f: A \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$, entonces f es continua en a.

Mejor aproximación afín

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. ELSA:

1) f es derivable en a
2) f es continua en a y existe una función afín, tal que $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$

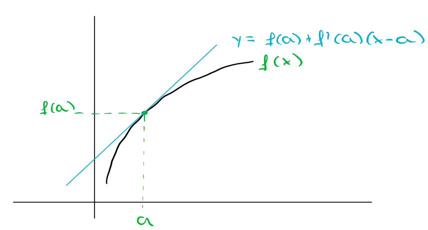
En caso de que se cumpla:

$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

Interpretación geométrica

Se interpreta como la recta tangente al punto a de la función f. Su expresión viene dada por

$y = f(a) + f'(a)(x-a)$



Carácter local y derivadas laterales

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A \cap A'$. ELSA:

1) f es derivable en a.
2) Dado $r > 0$, la restricción de f a $]a-r, a+r[\cap A$ es derivable en a.

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ y sea $a \in A \cap A'$. Supongamos que $a \in A_+'$ ($a \in A_-'$). Diremos que f es derivable por la derecha (por la izquierda) si $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\left(\exists \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right)$

Una función es derivable en un punto $\Leftrightarrow$ $\exists$ todas las derivadas que tengan sentido y coinciden.

Reglas de derivación

Sean $f, g: A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $a \in A \cap A'$:

1) $f+g$ es derivable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2) fg es derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3) Si $g(a) \neq 0$, $1/g$ es derivable en a $\left(\frac{1}{g}\right)'= \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$
4) El cociente f/g es derivable en a y $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Todas se pueden demostrar mediante el uso de límites por ejemplo:

$$(f+g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a)$$

Regla de la cadena

Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ dos funciones verificando que:

1) f es derivable en $a \in A \cap A'$
2) $f(A) \subset B$ y $b = f(a) \in B \cap B'$
3) g derivable en $f(a)$

Entonces $g \circ f$ es derivable en a y $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$

Consideramos $g_b: B \to \mathbb{R}$ como $g_b(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(b)}{y-b} & \text{si } y \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b \end{cases}$

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{g_b(f(x))(f(x) - f(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} g_b(f(x)) \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$

$$= g'(f(a)) f'(a)$$

Función inversa

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y sea $B = f(A)$. Supongamos que f es derivable en $a \in A \cap A'$. Entonces $b = f(a) \in B'$. ELSA:

1) $f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es contínua en b
2) f^{-1} es derivable en b

Además, en caso de ser cierto, se cumple $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

> Sea I un intervalo y sea $f: I \to \mathbb{R}$ contínua e inyectiva. Sea $B = f(A)$. Supongamos f es derivable en $b = f(a)$. Entonces $b \in B'$ y ELSA:
>
> 1) $f'(a) \neq 0$
> 2) f^{-1} es derivable en b