Ejercicios de ejemplo:

Determina (forma de Lagrange) el único polinomio $p \in P_3$ de forma que $p(0) = 3$, $p(2) = 7$, $p(-2) = -9$, $p(-1) = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}}$$

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x+2)(x+1)}{(0-2)(0+2)(0+1)} = -\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{4}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x+2)(x+1)}{(2-0)(2+2)(2+1)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{24}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x+1)}{(-2-0)(-2-2)(-2+1)} = -\frac{x^3 - x^2 - 2x}{8}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x+2)}{(-1-0)(-1-2)(-1+2)} = \frac{x^3 - 4x}{3}$$

Por tanto el polinomio p buscado es:

$$p(x) = 3l_0(x) + 7l_1(x) - 9l_2(x) - \frac{1}{2} l_3(x) \qquad p(x) = \sum f(x_i) l_i(x)$$

Simplificando:

$$p(x) = \frac{x^3}{2} - x^2 + 2x + 3$$

Calcula los 4 nodos de Chebyshev del intervalo $[2, \frac{11}{4}]$

Comenzamos hallando los 4 nodos de Chebyshev del intervalo referencia, $[-1, 1]$ y, a continuación, mediante un conveniente isomorfismo afín, determinamos lo pedido:

(i) $[-1, 1]$, $N = 4$: $x_i = \cos \frac{2i+1}{8} \pi$, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\left\{ \cos \frac{\pi}{8}, \cos \frac{3\pi}{8}, \cos \frac{5\pi}{8}, \cos \frac{7\pi}{8} \right\}$$

o si se quiere, refiriendo los ángulos al 1^er^ cuadrante:

$$\left\{ \cos \frac{\pi}{8}, \cos \frac{3\pi}{8}, -\cos \frac{3\pi}{8}, -\cos \frac{\pi}{8} \right\}$$

(ii) $[2, \frac{11}{4}]$, $N = 4$. Sea $\phi : [-1, 1] \to [2, \frac{11}{4}]$ el isomorfismo afín caracterizado por la doble igualdad: $\phi(-1) = 2$ y $\phi(1) = \frac{11}{4}$

esto si $\phi(x) = \alpha x + \beta$, para ciertos α, β, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha+\beta = 2 \\ \alpha+\beta = \frac{11}{4} \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{3}{8} \\ \beta = \frac{19}{8} \end{array}\right. \qquad \beta =$$

Por tanto,

$$\phi(x) = \frac{3}{8}x + \frac{19}{8}$$

y los 4 nodos de Chebyshev en el intervalo $[2, \frac{11}{4}]$ son

$$\left\{ \frac{3}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{19}{8}, \ \frac{3}{8}\cos\frac{3\pi}{8} + \frac{19}{8}, \ -\frac{3}{8}\cos\frac{3\pi}{8} + \frac{19}{8}, \ -\frac{3}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{19}{8} \right\}$$

Calcula (forma de Newton) el único polinomio $p \in \mathbb{P}_3$ que verifica $j = 0,1,2,3 \Rightarrow p(x_j) = y_j$, para los datos

x_j	0	2	-2	-1
y_j	3	7	-9	$-\frac{1}{2}$

Los polinomios nodales para estos datos:

$w_0(x) = 1$, $\qquad w_0 = 1$

$w_1(x) = x$, $\qquad w_1 = (x-0)$

$w_2(x) = x(x-2) = x^2 - 2x$ $\qquad w_2 (x-0)(x-2)$

y

$w_3(x) = x(x-2)(x+2) = x^3 - 4x$

Para determinar el polinomio p, necesitamos también las diferencias divididas:

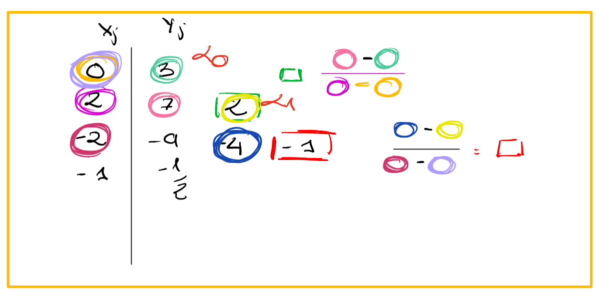
$$\begin{array}{c|cccc} 0 & \boxed{3} & & & \\ 2 & 7 & \boxed{2} & & \\ -2 & -9 & 4 & \boxed{-1} & \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{17}{2} & -\frac{3}{2} & \boxed{\frac{1}{2}} \end{array}$$

coeficiente $w_0(x)$

coeficiente $w_1(x)$

coeficiente $w_2(x)$

coeficiente $w_3(x)$



Así pues, el polinomio buscado es:

$p(x) = a_i w_i(x)$

$p(x) = 3 + 2x - (x^2 - 2x) + \frac{1}{2}(x^3 - 4x) = \frac{x^3}{2} - x^2 + 2x + 3$

Es interesante ver 4,5 y 7 en máxima