Estadística Descriptiva e Introducción a la probabilidad

Relación 4

Daniel Alconchel Vázquez
Nars El Farissi
Mario García Márquez
Alberto Díaz Cencillo
Javier Garrues Apecechea

1. **En una batalla naval, tres destructores localizan y disparan simultánemaente a un submarino. La probabilidad de que el primer destructor acierte el disparo es de 0.6, la de que lo acierte el segundo es de 0.3 y la de que lo acierte el tercero 0.1. ¿Cuál es la probabilidad de que el submarino sea alcanzado por algún disparo?**

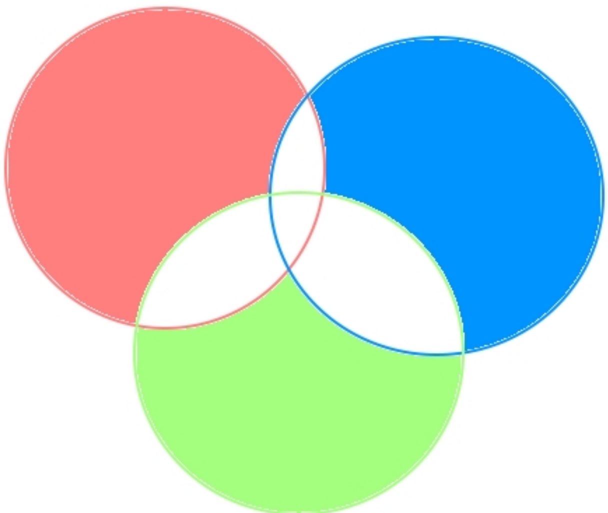
   A = "Lo alcanza el primer destructor"

   B = "Lo alcanza el segundo destructor"

   C = "Lo alcanza el tercer destructor"

   Lo primero es notar que lostres destructores son independientes entre sí. Esto se debe, a que si uno acierta no influye en la probabilidad de que otro acierte.

$$P(Submarino\ sea\ alcanzado) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - \\ -P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0,6 + 0,3 + 0,1 - (0,6 \cdot 0,3) - (0,6 \cdot 0,1) - \\ -(0,3 \cdot 0,1) + (0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,1) = \frac{187}{250} = 0,748$$



2. **Un estudiante debe pasar durante el curso 5 pruebas selectivas. La probabilidad de pasar la primera es 1/6. La probabilidad de pasar la i-ésima, habiendo pasado las anteriores es de 1/(7-i). Determinar laprobabilidad de que el alumno apruebe el curso.**

$$P(Aprobar\ i - \text{é}sima\ prueba) = P(A_i) = \frac{1}{7-i}$$

Podemos ver que los sucesos son independientes. Ya que aprobar o no aprobar una prueba no influye en la probabilidad de aprobar el resto de pruebas, por lo que:

$$P(Aprobar\ el\ curso) = P(\bigcap_{i=1}^{5} A_i) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{720}$$

3. **En una ciudad, el 40% de las personas tienen pelo rubio, el 25% tienen ojos azules y el 5% el pelo rubio y los ojos azules. Se selecciona una persona al azar. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:**

   a) tener el pelo rubio si se tiene los ojos azules

   b) tener los ojos azules si se tiene el pelo rubio

   c) no tener pelo rubio ni ojos azules

   d) tener exactamente una de estas características

A = "Tener pelo rubio"

B = "Tener ojos azules"

a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,25} = \frac{1}{5} = 0,2$$

b)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,05}{0,4} = \frac{1}{8} = 0,125$$

c)

$$1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - 0,4 - 0,25 + 0,05 = 0,4$$

d)

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,4 + 0,25 - 2 \cdot 0,05 = 0,55$$

4. **En una población de moscas, el 25% presentan mutación en los ojos, el 50% presentan mutación en las alas, y el 40% de las que presentan mutación en los ojos presentan mutación en las alas.**

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mosca elegida al azar presente al menos una de las mutaciones?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que presente mutación en los ojos pero no en las alas?

A = "Mutación de ojos"

B = "Mutación de alas"

Para empezar tenemos que:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \implies P(A\cap B) = 0,4\cdot 0,25 = \frac{1}{10}$$

a)

$$P(A\cup B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) = 0,55$$

b)

$$P(A-B) = P(A) - P(A\cap B) = 0,25 - 0,1 = 0,15$$

5. **Una empresa utiliza dos sistemas alternativos, A y B, en la fabricación de un artículo, fabricando por el sistema A el 20% de su producción. Cuando a un cliente se le ofrece dicho artículo, la probabilidad de que lo compre es 2/3 si éste se fabricó por el sistema A y 2/5 si se fabricó por el sistema B. Calcular la probabilidad de vender un producto.**

Para empezar, si la probabilidad de usar el sistema de producción A es de 1/5, eso implica que la probabilidad de usar el sistema B es de 4/5.

A = "Usar sistema A"

B = "Usar sistema B"

C = "Comprar producto habiendo usado el sistema A"

D = "Comprar el producto habiendo usado el sistema B"

Luego, tenemos que:

$$P(Vender\ producto) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(D|B) = 0,2 \cdot \frac{2}{3} + 0,8 \cdot \frac{2}{5} = \frac{34}{75} = 0,45\overline{3}$$

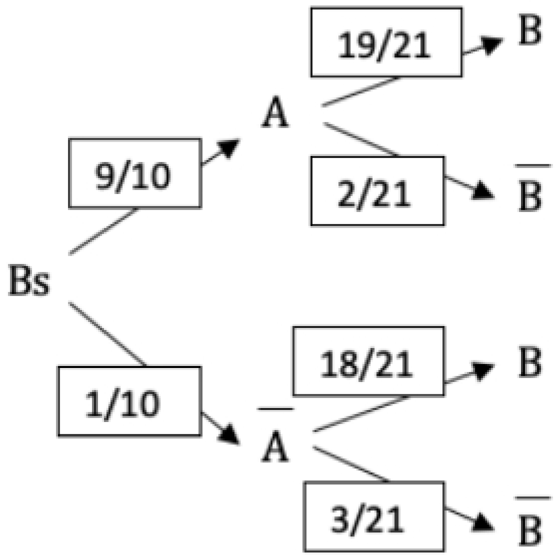
6. **Se consideran dos urnas: la primera con 20 bolas, de las cuales 18 son blancas, y la segunda con 10 bolas, de las cuales 9 son blancas. Se extrae una bola de la segunda urna y se deposita en la priera; si a continuación, se extrae una bola de ésta, calcular la probabilidad de que sea blanca.**

A = "Probabilidad de sacar bla blanca de la 2º caja"

B = "Probabilidad de sacar blanca en la1º caja"

C = "Probabilidad de que la bola extraida sea blanca"

Comenzamos haciendo un esquema ilustrativo de la situación:



Luego, tenemos que:

$$P(C) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = \frac{9}{10} = 0,9$$

7. **Se dispone de tres urnas con la siguiente composición de bolas blancas y negras:**

U_1**: 5B y 5N** U_2**: 6B y 4N** U_3**: 7B y 3N**

Se elige una urna al azar y se sacan cuatro bolas sin remplazamiento.

a) Calcular la probabilidad de que las cuatro sean blancas.

b) Si en las bolsas extraídas sólo hay una negra, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya elegido U_2**?**

A = "Sacar 4 blancas en la primera urna"

B = "Sacar 4 blancas en la segunda urna"

C = "Sacar 4 blancas en la tercera urna"

a)

$$P(Sacar\ 4\ Blancas) = P(U_1)P(A|U_1) + P(U_2)P(B|U_2) + P(U_3)P(C|U_3) =$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10}) + \frac{1}{3}(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10}) + \frac{1}{3}(\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10}) = \frac{11}{126}$$

b)

A_n = "Elegir urna n"

P(A_n) = $\frac{1}{3}$

$P(B|A_1)$ = $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$ =$\frac{5}{34}$

$P(B|A_2)$ = $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7}$ =$\frac{2}{21}$

$P(B|A_1)$ = $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7}$ =$\frac{1}{8}$

Luego:

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_{n \in N} P(B|A_n)P(A_n)}$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} = \frac{\frac{2}{21 \cdot 3}}{\frac{1}{3} \cdot (\frac{5}{84} + \frac{2}{21} + \frac{1}{8})} = \frac{16}{47}$$

8. **La probabilidad de que se olvide inyectar el suero a un enfermo durante la ausencia del doctor es 2/3. Si se le inyecta el suero, el enfermo tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar, pero si no se le inyecta, la probabilidad de mejorar se reduce a 0.25. Al regreso, el doctor encuentra que el enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que no se le haya inyectado el suero?**

A = "Suero olvidado"

B = "Enfermo empeora"

$P(A) = \frac{2}{3}$

$P(A|\overline{B}) = \frac{1}{2}$

$P(A|B) = \frac{3}{4}$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0,75 \cdot \frac{2}{3}}{0,75 \cdot \frac{2}{3} + 0,5 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

9. **N urnas contienen cada una 4 bolas blancas y 6 negras, mientras otra urna contiene 5 blancas y 5 negras. De las N+1 urnas se elige una al azar y se extraen dos bolas sucesivamente, sin remplazamiento, resultando ser ambas negras. Sabiendo que la probabilidad de que queden 5 blancas y 3 negras en la urna elegida es 1/7, encontrar N.**

A = "Elergir la urna N+1"

B = "Extraer dos bolas negras sucesivamente sin remplazamiento"

Tenemos que:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

De donde:

$$P(A|B) = \frac{0,5 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{N+1}}{N \cdot 0,6 \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{N+1} + 0,5 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{N+1}}$$

Despejando N nos queda **N=4**

10. **Se dispone de 6 cajas, cada una con 12 tornillos; una caja tiene 8 buenos y 4 defectuosos; dos cajas tienen 6 buenos y 6 defectuosos y tres cajas tienen 4 buenos y 8 defectuosos. Se elige al azar una caja y se extraen 3 tornillos con remplazamiento, de los cuales 2 son buenos y 1 es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que la caja contuviera 6 buenos y 6 defectuosos?**

A = "8 buenas y 4 defectuosas"

B = "6 buenos y 6 defectuosos"

C = "4 buenos y 8 defectuosos"

M = "2 tornillos buenosy 1 defectuoso"

Tenemos que:

$$P(B|M) = \frac{P(M|B)P(B)}{P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) + P(M|C)P(C)}$$

Donde:

$$P(M|B)P(B) = \frac{6}{12}\frac{6}{12}\frac{6}{12}\frac{2}{6} = \frac{1}{24}$$
$$P(M|A)P(A) = \frac{8}{12}\frac{8}{12}\frac{4}{12}\frac{1}{6} = \frac{2}{81}$$
$$P(M|C)P(C) = \frac{4}{12}\frac{4}{12}\frac{8}{12}\frac{3}{6} = \frac{1}{27}$$

Por lo tanto:

$$P(B|M) = \frac{27}{67} = 0,4029$$

11. **Se seleccionan n dados con probabilidad $p_n = 1/2^2$, $n \in \mathbb{N}$. Si se lanzan estos n dados y se obtiene una suma de 4 puntos, ¿cuál es la probabilidad de haber seleccionado 4 dados?**

A_i = "Lanzar i dados"

B = "Sacar suma de 4"

$P(B|A_1) = 1/6$

$P(B|A_2) = 3/36$

$P(B|A_3) = 1/72$

$P(B|A_4) = 1/6^4$

$P(A_1) = 1/2$

$P(A_2) = 1/4$

$P(A_3) = 1/8$

$P(A_4) = 1/16$

$$P(A_4|B) = \frac{P(B|A_4)P(A_4)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) + P(B|A_4)P(A_4)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6^4 \cdot 16}}{\frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{3}{36}\frac{1}{4} + \frac{1}{72}\frac{1}{8} + \frac{1}{6^4}\frac{1}{16}} = \frac{1}{2197}$$

12. **Se lanza una moneda; si sale cara, se introducen k bolas blancas en una urna y si sale cruz, se introducen 2k bolas blancas. Se hace una segunda tirada, poniendo en la urna h bolas negras si sale cara y 2h si sale cruz. De la urna así compuesta se toma una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?**

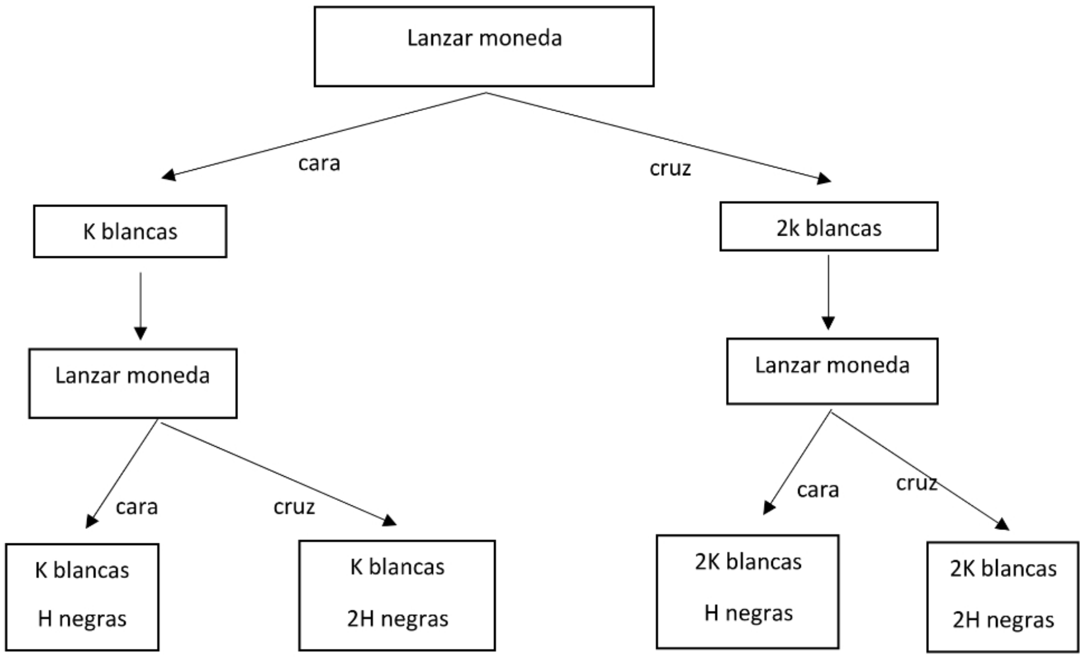
B = "Sacar una bola negra"

A_1 = "K blancas, H negras"

A_2 = "K blancas, 2H negras"

A_3 = "2K blancas, H negras"

A_4 ="2K blancas, 2H negras"



Entonces tenemos que:

$$P(B|A_1) = \frac{h}{k+h} \qquad P(B|A_2) = \frac{2h}{k+2h} \qquad P(B|A_3) = \frac{h}{2k+h} \qquad P(B|A_2) = \frac{2h}{2k+2h}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B|A_i)P(A_i) = \frac{1}{4} \cdot (\frac{h}{k+h} + \frac{2h}{k+2h} + \frac{h}{2k+h} + \frac{2h}{2k+2h}) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\frac{2h}{k+h} + \frac{2h}{k+2h} + \frac{h}{2k+h})$$