

Ejercicios tipo de geometría

- Suma e intersección de subespacios:

1) Estudiar dimensión (puede estar en función de un parámetro)

- Si te dan un sistema de generadores estudias la dependencia lineal de los vectores
- Si te dan ecuaciones cartesianas, pasalas a forma matricial y estudias el rango

2) Calcular la suma

- Juntas las bases de los dos espacios y quitas los vectores l.d.
- $\dim(U+W) = \text{nº vectores de la base}$

3) Calcular la intersección

- Juntas las ecuaciones cartesianas de los espacios y quitas las l.d.
- $\dim(U \cap W) = \dim(U) - \text{nº ecuaciones}$ (Recuerda que la intersección es un subespacio)

4) Suma directa

$$\left. \begin{array}{l} U \cap W = \{0\} \\ U + W = V(K) \end{array} \right\} \Rightarrow U \oplus W$$

Casos que debes recordar:

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

$$\dim(U) = \dim(V) - \text{nº ecuaciones implícitas} \quad (U \text{ subespacio de } V)$$

$$\dim(U) = \text{nº vectores de una base de } U$$

Dependencia lineal

$$\dim(M_n(K)) = n^2$$

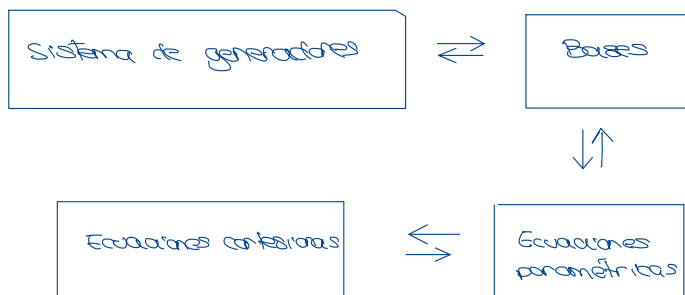
Matrices

$$\dim(S_n(K)) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Matrices simétricas

$$\dim(A_n(K)) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Matrices asimétricas



- Ejercicio de dual:

* Te dan x formas lineales de $V^*(K)$ y te piden calcular una base β^* con dichas formas y ampliando con las formas que necesites

1) Consideras β_C y $\beta_C^* = \{w^1, \dots, w^n\}$

2) Consideras cada forma como c.l. de $\beta_C^* \Rightarrow \psi^i = a_0 w^1 + \dots + a_n w^n, i \in \{1, \dots, x\}$

3) Aplicas cada forma a los elementos de β_C y te queda un sistema de ecuaciones con incógnitas $a_0 \dots a_n$ y lo resuelves

4) Añade, si hubiese falta, las formas l.c. que necesites para formar una base.

* Calcular la base \bar{B} de la cual \bar{B}^* es dual

1) Como $\dim(V(K)) = \dim(V^*(K)) = n$ consideras $\bar{B} = \{n \text{ elementos}\}$

2) Aplicas a cada vector de \bar{B} las formas de \bar{B}^* (Recuerda que $\psi^i(v_i) = 1$ y $\psi^i(v_j) = 0$)

3) Resuelves los sistemas y obtienes los vectores de \bar{B} .

* Dar las coordenadas de un vector en función de \bar{B} usando las propiedades del dual:

1) Sea $\bar{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ expresas w como c.l. $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

2) Aplicando las propiedades del dual ($\bar{B}^* = \{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^n\}$)

$$\lambda_1 = \psi^1(w) = (\text{coordenadas de la forma}) \begin{pmatrix} \psi^1(v_1) \\ \psi^1(v_2) \\ \vdots \\ \psi^1(v_n) \end{pmatrix} = \text{valor}$$

↓ así n veces

Cosas a recordar:

- Definición de espacio dual

- Matriz asociada a la base dual (Recuerda usar la inversa para calcular)

- Sean: $\begin{cases} B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } V \\ B^* = \{\psi^1, \dots, \psi^n\} \text{ base dual de } B \end{cases}$

Sea $v \in V$: $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow a_j = \psi^j(v)$ $j \in \{1, \dots, n\}$

- Sea $\phi \in V^*$: $\phi = b_1 \psi^1 + \dots + b_n \psi^n$

$$\phi(v_1) = (b_1 \psi^1 + b_2 \psi^2 + \dots + b_n \psi^n)(v_1) = \underbrace{b_1 \psi^1(v_1)}_1 + \underbrace{b_2 \psi^2(v_1)}_0 + \dots + \underbrace{b_n \psi^n(v_1)}_0 \Rightarrow \phi(v_1) = b_1$$

- Cambios de base

* Ejercicio de buscar $f: V(K) \rightarrow V(K)$ endomorfismo que verifique x condiciones:

1) Los vectores del núcleo se aplican en 0

2) Los vectores de la imagen en donde quieras que no sea nulo (piensa en el resto de condiciones)

3) Añade vectores l.c. para formar base de $V(K)$ y quales f , ten en cuenta las condiciones del enunciado. Si no te dicen nada te recomiendo aplicarlas en el 0.

Recuerda:

- Endomorfismo: Aplicación del espacio en sí mismo

- $\ker(f) = \{v \in V(K) : f(v) = 0\}$ y es un subespacio del dominio

$$f: V \rightarrow V$$

- $\text{Im}(f) = \{f(v) \in V(K) : v \in V(K)\}$ y es un subespacio del codominio

- Matriz asociada a una aplicación lineal respecto bases B y B'

* Calcular bases del $\text{an}(U)$: $(U \text{ subespacio de } V(K))$

1) Obtengo una base de U .

2) Amplio hasta tener una base de $V(K)$

3) Considero su base dual

4) $\dim(\text{an}(U)) = \dim(V(K)) - \dim(U)$

5) Aplico la propiedad del dual para ver las formas que pertenecen al anulador

6) Calcular las formas que pertenecen al anulador y la expreso como funciones

Recordar:

$$\text{an}(U) = \{ \varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \ \forall u \in U \}, \quad U \text{ subespacio de } V(K)$$

$$\text{an}(W) = \{ v \in V \mid w(v) = 0 \ \forall w \in W \}, \quad W \text{ subespacio de } V(K)$$

Propiedades del anulador:

$$\text{an}(\text{an}(S)) = S, \quad S \text{ subconjunto de } V(K)$$

$$\text{an}(\text{an}(U)) = U, \quad U \text{ subespacio vectorial}$$

$$\dim(\text{an}(U)) = \dim V - \dim U$$

$$\text{an}(U+W) = \text{an}(U) \cap \text{an}(W)$$

$$\text{an}(U \cap W) = \text{an}(U) + \text{an}(W)$$

$$U \subseteq W \Rightarrow \text{an}(W) \subseteq \text{an}(U)$$

$$\text{an}(V) = \{ \varphi \circ f \Rightarrow \text{an}(\{ \vec{0} \}) = V^*$$

$$\text{an}(V^*) = \{ \vec{0} \} \Rightarrow \text{an}(\{ \varphi \circ f \}) = V$$

* Calcular la aplicación traspuesta:

- Si te dan la matriz de f la traspone y listo

- Si no te dan la matriz de f :

$$\begin{aligned} 1) \text{ Tienes } f: V \rightarrow V', \text{ pues } f^t: V^* \rightarrow (V')^* \\ w \longmapsto f^t(w) \end{aligned}$$

2) Sacas la matriz asociada a bases B y B' de V y V' .

3) Traspone dicha matriz.

4) Compones la matriz traspuesta en la forma lineal que te dan y obtienes un vector por columnas

5) Traspone el vector y lo multiplicas por $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ y te sale la ecuación de $f^t(w)$
Más corto:

1) Defines f^t

2) Compones la forma $w(f(x_1, \dots)) = \text{ecuación de } f^t(w)$

Recordar:

Concepto de aplicación traspuesta

$$\text{Ker}(f^t) = \text{an}(\text{Im}(f))$$

$$\text{Im}(f^t) = \text{an}(\text{Ker}(f))$$

$$\text{rg}(f^t) = \text{rg}(f)$$

$$\text{traza}(f^t) = \text{traza}(f)$$

$$\text{Im}(f) = \text{an}(\text{Ker}(f^t))$$

$$\text{Ker}(f) = \text{an}(\text{Im}(f^t))$$

Los ejercicios de aplicaciones lineales son un poco lo más variado. tenéis que recordar:

- concepto de aplicación lineal $f: V \rightarrow V'$
- Concepto de núcleo e imagen y saber hallar bases de los mismos
- f inyectiva $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$
- f sobreyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = V'$
- f inyectiva \Leftrightarrow las dos condiciones anteriores se verifican
- $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$
- Matriz asociada a una aplicación lineal
- dos matrices A y C son equivalentes \Leftrightarrow tienen el mismo rango
- Matriz de cambio de base