(88) $\sum_{n\geq 1} a_n, \sum_{n\geq 1} b_n$ convergentes, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} (\alpha a_n + \beta b_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Recordemos que una serie es una sucesión:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) \right\} = \left\{\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k \right\} = \alpha \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\} + \beta \left\{ \sum_{k=1}^{n} b_k \right\} \to \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(89) Supongamos que la serie $\sum_{n\geq 1} (a_n + b_n)$ es convergente. ¿Qué se puede decir de la convergencia de las series $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$?

No podemos afirmar nada, ya que puede ocurrir que las dos no converjan y la suma converja, o que una converje entonces la otra también converge.

$\sum_{n\geq 1} a_n$	$a_n = b_{n+1} - b_n$ $\sum_{k=1}^{n} a_k = b_{n+1} - b_1$	Cuando los términos de la suma se anulan, menos el primero y último

(90) Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ es convergente y calcula su suma

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2(n+1)} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

$$(n+1)n(n+1-n) = n(n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \longrightarrow 1$$

Se van cancelando todos los términos menos el 1º y el último

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = 1$$

(92) Probar las siguientes igualdades:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) = \log 2$ Serie armónica alternada

$$S_{4n} = \sum_{n=1}^{4n} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right)$$

Asocio términos de 4 en 4

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \longrightarrow \log 2$$

$\rightarrow$ Como la serie armónica converge a $\log 2$ y S_{4n} es una parcial suya, entonces S_{4n} también converge a $\log 2$

b) $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{\log 2}{2}$

Ahora vamos sumando de dos en dos, por lo que se hace igual que antes

Como curiosidad, si sumamos ambas series:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) = \log 2 \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{\log 2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{3}{2} \log 2$$

Estamos realizando una permutación y como la serie armónica alternada no es absolutamente convergente, la suma no es constante.

(93) Sea $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Prueba que las series $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n}$ ambas convergen o ninguna converge.

Usamos el criterio de comparación para comparar la convergencia de la 2ª serie con la primera

$\frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$ (Es evidente)

$\frac{a_n}{1+a_n} = b_n \Rightarrow a_n = b_n + a_n b_n \Rightarrow a_n(1-b_n) = b_n \overset{(n\geq n_0)}{\Rightarrow} a_n = \frac{b_n}{1-b_n} \leq 2b_n$

$\{b_n\} \to 0 \qquad n \geq n_0 \Rightarrow b_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - b_n \geq \frac{1}{2}$

Por el criterio de comparación, si converge una converge otra

b) Supuesto que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. ¿Qué puede decirse de las series $\sum_{n\geq 1} a_n^2$ y $\sum_{n\geq 1} \sqrt{a_n a_{n+1}}$

Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge
$\Downarrow$
$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq 1 \Rightarrow \underline{a_n^2 \leq a_n}$

Las potencias positivas conservan el orden, por lo que cualquier potencia positiva converge y más rápido que a_n.

$\sum_{n\geq 1} \sqrt{a_n a_{n+1}} \qquad \sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$

Por el criterio de comparación esa serie converge.

(94) Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos. Se supone que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. Prueba que $\{n a_n\} \to 0$

Sugerencia: Si $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, entonces $\{S_{2n} - S_n\} \to 0$

$S_{2n} - S_n = \underbrace{a_{2n} + a_{2n-1} + \cdots + a_{n+1}}_{\substack{n \text{ sumandos} \\ (\text{desde } n+1 \text{ hasta } n+n)}}$ a_{2n} es el más pequeño, ya que las a_n decrecen

$0 \leq \underset{\downarrow\, 0}{n a_{2n}} \leq \underset{\downarrow\, 0}{\underbrace{S_{2n}} - S_n}$

$\{2n a_{2n}\} \to 0$

(Faltaría demostrar que los impares convergen para que S_n converja.)

(95) $0 < a_n$

$\{a_n\} \uparrow \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} x_n$

Aplicamos el criterio del cociente:

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a_{n+1}}$

Dos opciones:

Depende de si está mayorado

$\{a_n\} \to +\infty \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \to 0$

$\{a_n\} \to L > 0 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \to \frac{1}{L}$ $\begin{cases} L > 1 \text{ converge} \\ L < 1 \text{ no converge} \end{cases}$

En caso $L = 1 \Rightarrow a_n \leq 1 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \geq 1 \Rightarrow$ No converge

96) $0 < a_n$

$\{a_n\} \downarrow$ $\qquad \sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n}}_{x_n}$

Aplicando criterio del cociente:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a_{n+1}}$$

$\{a_n\} \to L \qquad L = 0 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \longrightarrow +\infty$

$0 < L < 1 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \longrightarrow \frac{1}{L} > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ no converge

$L > 1 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \longrightarrow \frac{1}{L} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ converge

$L = 1 \qquad a_n \geq 1$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \longrightarrow 1$$

Como para $L = 1$ el criterio del cociente falla, usamos el de Raabe:

$1 + \frac{1}{n}$

$1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

$R_n = n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = n\left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right) = n\left(\frac{1}{n+2}\right) = \frac{n}{n+2} \leq 1 \Rightarrow$ por el criterio de Raabe, la serie diverge.

97) $a_{2n} = \frac{1}{2^{2n-1}} \qquad a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n}}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{(-1)^n}}{2^n}$$

$$0 < \frac{2^{(-1)^n}}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Usando el criterio del cociente:

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 2$$

$$\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{1}{2^{2n+2}} \cdot 2^{2n-1} = \frac{1}{8}$$

$\overline{\lim} \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = 2 \qquad \underline{\lim} \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \frac{1}{8}$

Usando el criterio de la raíz

$\sqrt[2n]{a_{2n}} = \frac{1}{2^{1-\frac{1}{2n}}} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = \frac{1}{2^{\frac{2n}{2n-1}}} \longrightarrow \frac{1}{2}$

99) a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \frac{a_n}{b_n} = \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}\, n^2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \longrightarrow e$

$\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2} < \frac{3}{n^2} \qquad a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$

$b_n = \frac{1}{n^2}$

e) $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$a_n > 0, \quad b_n > 0$ $\qquad\qquad (1+x_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x_n$

$\sum a_n \quad \sum b_n \qquad a_n \sim b_n$

$$\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)\frac{1}{n} =$$

$$= \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{2/3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{n^{5/3}}}$$

Serie de Riehman de razón asintóticamente equivalente a la que nos dan

n) $\sum_{n\geq 1} \frac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}}\cdot 9^n$ $\quad x_n$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{((n+3)!)^3}{(n+2)^{3n+3}}\cdot 9^{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{3n}}{((n+2)!)^3}\cdot\frac{1}{9^n} = 9\underbrace{\frac{(n+3)^3}{(n+2)^3}}_{\to 1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n} \sim$$

$$\sim 9\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}$$

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n} \to e^{L} \iff 3n\left(\frac{n+1}{n+2} - 1\right) = 3n\left(\frac{-1}{n+2}\right) \longrightarrow -3 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n} \longrightarrow \frac{1}{e^3} \Longrightarrow 9\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n} \longrightarrow \frac{9}{e^3} < 1$$