grado $p=k$ $\quad p(n) = a n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0 = a n^k \Big(\underset{\downarrow \atop 1}{1} + \underbrace{\frac{a_{k-1}}{a}}_{\downarrow \atop 0} \cdot \frac{1}{n} + \cdots + \underbrace{\frac{a_1}{a} \frac{1}{n^{k-1}}}_{\downarrow \atop 0} + \frac{a_0}{a} \frac{1}{n^k} \Big) \longrightarrow 1$

grado $q = \ell$

A eso le llamamos $a n\, p_1(n)$

$$\frac{\log(p(n))}{\log(q(n))} =$$

$p(n) = a n^k p_1(n)$ $\qquad \lim p_1(n) = 1$

$q(n) = b n^\ell q_1(n)$ $\qquad \lim q_1(n) = 1$

$$= \frac{k\log(n) + \log(a p_1(n))}{\ell \log(n) + \log(b q_1(n))} \longrightarrow \frac{k}{\ell}$$

El límite de cociente de los polinomios es el cociente de los grados y ¡no se justifica!

---

85 $\quad x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$

$$\underline{\lim}\{x_n\}\, \underline{\lim}\{y_n\} \overset{\text{ya probado}}{\leq} \underline{\lim}\{x_n y_n\} \overset{\text{ya probado}}{\leq} \underline{\lim}\{x_n\}\, \overline{\lim}\{y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n\}\, \overline{\lim}\{y_n\}$$

$\alpha_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$, $\beta_n = \sup\{y_k : k \geq n\}$

$\gamma_n = \inf\{x_k y_k : k \geq n\}$

Por definición, $\lim \gamma_n = \underline{\lim}\{x_n y_n\}$, $\lim \alpha_n = \underline{\lim}\{x_n\}$, $\lim \beta_n = \overline{\lim}\{y_n\}$

Queremos probar que $\gamma_n \leq \alpha_n \beta_n$

$\gamma_n \leq x_k y_k \quad \forall k \geq n$ (es evidente)

$\gamma_n \leq \cancel{x_k y_k} \leq x_k \beta_n \quad \forall k \geq n$

si $\beta_n = 0$ todo vale 0, pero si $\beta_n \neq 0$

$$\frac{\gamma_n}{\beta_n} \leq x_k \Rightarrow \frac{\gamma_n}{\beta_n} \leq \alpha_n \Rightarrow \boxed{\gamma_n \leq \alpha_n \beta_n}$$

Tomando límites se conservan las desigualdades y habríamos acabado

$\lambda_n = \sup\{x_k y_k : k \geq n\}$

$\lim\{\lambda_n\} = \overline{\lim}\{x_n y_n\}$

Quiero probar $\alpha_n \beta_n \leq \lambda_n$

$\alpha_n y_k \leq x_k y_k \leq \lambda_n \quad \forall k \geq n \Rightarrow y_k \leq \dfrac{\lambda_n}{\alpha_n}$

si $\alpha_n = 0$ para infinitos valores de n nos queda una evidencia $0 \leq \lim\{x_n y_n\} \leq \overline{\lim}\{x_n\}\, \overline{\lim}\{y_n\}$

Por lo que suponemos $\alpha_n > 0$:

$$y_n \leq \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \Rightarrow \beta_n \leq \frac{\lambda_n}{\alpha_n}$$

$\{x_n\} \to x > 0 \iff \underline{\lim}\{x_n\} = \overline{\lim}\{x_n\} = x$

$x\,\underline{\lim}\{y_n\} \le \underline{\lim}\{x_n y_n\} \le \underline{\lim}\{y_n\} \quad \underset{\substack{\parallel \\ x}}{\overline{\lim}\{x_n\}} \Rightarrow \underline{\lim}\{x_n y_n\} = x\,\underline{\lim}\{y_n\}$

$\overline{\lim}\{x_n y_n\} = x\,\overline{\lim}\{y_n\}$