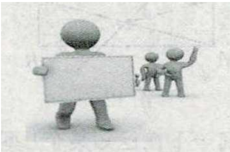
L型图形均分直线作法探析



江苏省盐城师范学院数学科学学院(224002) 殷志贵
南京师范大学教师教育学院(210023) 陈馨悦

L型图形很好理解. 所谓均分直线，指的是在这个L型图形上作出一条直线，使这条直线把这个L型图形分割成面积相等的两部分.

一、特殊的L型图形的均分

首先，让我们从一道简单的L型图形题目说起：图1是一个L型图形，它由4个边长为1的小正方形组成.

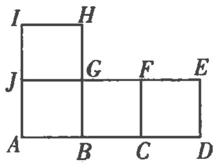


图1

我们知道，对于正方形、长方形、圆等规则图形，很容易对它们的面积进行二等分，只要找到这个规则图形的中心点，过中心点的任意一条直线均可将所给的规则图形分割成面积相等的两部分(如图2、3、4所示)；

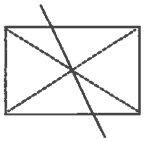


图2

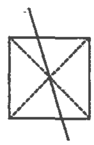


图3

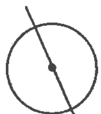


图4

但如果要求分割的是一个不规则图形(图1即为一个较简单的不规则图形)，不难想到的是，首先用切割的方法将不规则图形切割成若干个规则图形，再对这些规则图形的面积均分，最后分析这些规则图形的面积均分直线的交点以寻求不规则图形的面积均分直线的方法.

对于图1，我们可将其分割成两个规则图形，即两个矩形. 如图5，将L型图形分为矩形*ABHI*和矩形*BDEG*，接下来分别作这两个矩形的两条对角线，找到这两个矩形的中心点*P*和*Q*，并过这两个中心点作一条直线l_1，此时直线l_1分别将矩形*ABHI*和矩形*BDEG*分为面积相等的两部分，用S_{KLHI}表示四边形*KLHI*的面积，则有$S_{KLHI}=S_{ABLK}$，$S_{BDML}=S_{LMEG}$，因此$S_{ADMK}=S_{KMEGHI}$，即直线l_1为所求不规则L型图形的面积均分直线.

也许有人说还有另一种分割方法，如图6所示，用同样的方法得到直线l_2，需要说明的是，直线l_2分割图形后，实质上是三块，两块分离的图形面积之和等于第三块. 因为同一部分并不连体，所以在这里，我们认为直线l_2并不符合要求，应予以舍弃.

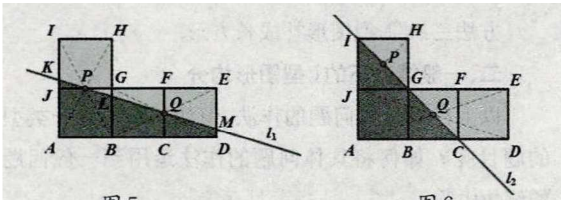


图5 图6

我们还可以发现，图1中，左上角的小正方形*JGHI*和右下角的小正方形*CDEF*的面积是一样的，那么我们只需要找到剩下的两个小正方形组成的矩形*ACFJ*的中心点*P*，过这个中心点*P*的直线l_3就是所求不规则L型图形的面积均分直线，如图7-1所示. 需要注意的是，直线l_3与线段*EJ*的交点*M*只能在线段*FG*上(*M*可以与*G*或*F*重合)，与此同时，直线l_3与线段*AD*的交点*K*只能在线段*AB*上(*K*可以与*B*或*A*重合)，一旦直线l_3与左上角的小正方形*JGHI*或者右下角的小正方形*CDEF*相交时，l_3就不是所要求的不规则L型图形的面积均分直线了，如图7-2、7-3所示.

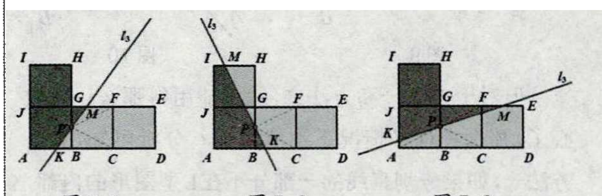


图7-1 图7-2 图7-3

当然，我们还可以将图1中的不规则图形补充成一个规则的矩形*ADKI*，分别找到矩形*GEKH*和矩形*ADKI*的中心点*P*和*Q*，过*P*、*Q*作直线l_4，直线l_4分别将矩形*GEKH*和矩形*ADKI*分为面积相等的两部分，则

有 $S_{GQMH}=S_{QEKM}$，$S_{ANMI}=S_{NDKM}$，于是 $S_{ANMI}-S_{GQMH}=S_{NDKM}-S_{QEKM}$，即 $S_{ANQGHI}=S_{NDEQ}$，因此直线 l_4 为所求不规则L型图形的面积均分直线，如图8所示.

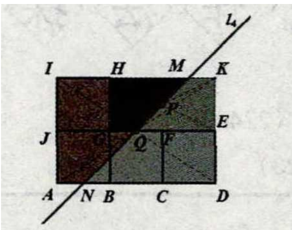


图8

至此，我们发现对于规则的L型图形，我们可以采用3种方法来二等分其面积.

方法一：将不规则图形分割为规则图形.

方法二：先寻找图形整体中面积相等的部分，再将剩下的部分二等分.

方法三：将L型图形补成长方形.

二、一般情况下的L型图形均分

以上是对具体问题的作法，但如何解决这一类型的题目呢？如何将具体问题的作法运用到一般问题的解决中呢？

如图9给定的L型图形，在不知道其中任何一条边的具体长度的情况下，如何对面积进行两等分分割？我们很自然地联想到，上述方法此时能延用吗？若能用，是否有限制条件呢？如果有限制条件，那么限制条件又是什么呢？

对于方法三，我们能直接沿用，没有任何其他的限制条件，如图10.

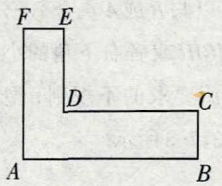


图9

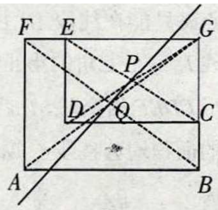


图10

但对于方法一和方法二，就不能用得那么让人放心了，那么在何种情况下不能用呢？分析可知，对于方法一，如果分割直线的一部分不在L型图形的内部，则L型图形会被分成三个部分，不满足将其“二等分”的要求，如图11、12所示；对于方法二，如果在所分的三个矩形中找不到两个面积相同的部分，如图13所示，我们无法确定 $S_{GDEF}=S_{HBCI}$，此时这种方法无法使用.

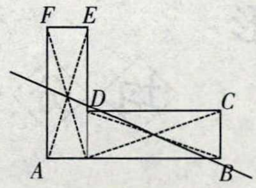


图11

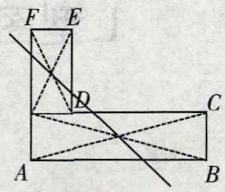


图12

再进一步拓展，我们来研究一下在已知某个L型图形的两条均分直线且这两条直线有交点的情况下，过这个交点的任意一条直线是否都是这个L型图形的面积均分直线呢？

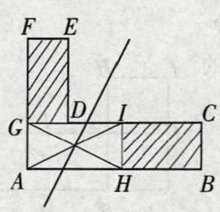


图13

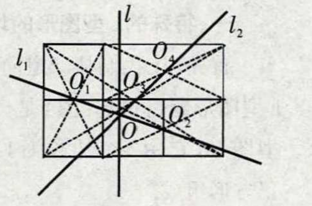


图14

如果假设不成立的话，找到反例就行，即找到不符合要求的直线就好．而对于一般图形，我们可以从特殊图形着手．不妨以上述图1为例进行讨论．我们把图5和图8作出来的两条均分直线画出来，找到它们的交点O，如图14所示，可以发现交点 O 在下端三个正方形中间一个的内部.过这个交点 O 作垂直于底边的直线，显然这条直线不能将所给图形平分成面积相等的两部分，即对于特殊的L型图形而言，过两条均分直线的交点的任意一条直线不一定还是这个L型图形的均分直线.

三、L型变形图形的均分

最后再进行进一步的扩充，如何对斜L型图形进行分割，方法是类似的，具体可参考L型一般图形的分法.

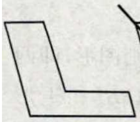


图15

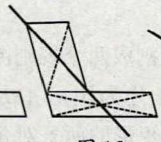


图16

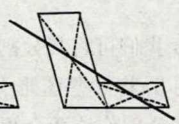


图17

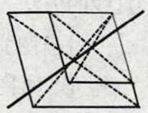


图18

可以看到，图16和图17是参照图5，图6的作法，并不一定可行，因为这样的分割形成的分割部分分散而不连体，因此不合要求.图18是参照图8的作法，所作直线始终符合要求.