公理化思想的萌发与完善探析

◎段志贵 (盐城师范学院数学科学学院 224002)

【摘要】毕达哥拉斯凭直观经验,武断地认为一切线段的长都是有理数,从而引起了数学史上第一次危机.为解决这一危机,两千多年前的先知们找到了一个极为平凡的办法,这就是公理化的方法.现代数学公理化思想是基于对古典公理化体系的完善.从认识论的角度来看,任何公理系统的原始概念和公理的选取必须反映现实对象的本质和关系.许多"定义"可以采用公理化方法,若干数学理论中的定理、命题叙述都具有公理化形式,进一步地说,一切数学学科都可以看成是公理化的.

【关键词】数学思想;公理化;直观;演绎系统;探析

所谓数学系统的公理化方法,就是选取少数不加定义的原始概念(基本概念)和无条件承认的相互制约的规定(公理)作为出发点,再以严格的逻辑推演,使某一数学分支成为演绎系统的方法.公理化方法的建立具有分析、归纳和总结数学知识的作用,它把分散的、杂乱的、支离片断的几何知识整理成为一门完整的、严密的、系统的科学体系,它可以将一门数学分支的基础分析得清清楚楚,从而有利于比较各门数学在实质上的异同,从而促进和推动新理论的产生.然而,公理是怎么得来的呢?现代公理化方法是怎样完善的?公理体系是怎样构造的?广义公理化思想的内涵是什么?等问题,都需要进一步探究,以明辨事理,掌握要义,更深刻地体会和理解数学公理化思想的本质.

一、古典公理化思想渊源于对直观、直觉思维的反思

从古希腊"科学之父"泰勒斯开始,人们基本就不再仅仅利用直观和实验来寻求数学结论,而将演绎推理引入进了数学.然而,人的思维毕竟少不了直观、直觉,许多结论因为是凭借直观和直觉往往会在推理过程中的思想转换或前提条件认识的含糊处出错.大约公元前5世纪,毕达哥拉斯凭直观经验,武断地认为一切线段的长都是有理数.也就是认为所有实数都是有理数,但很快就有人证明了如$\sqrt{2}$就不是有理数,从而引起了数学史上第一次危机.第一次数学危机的教训在哪里?那就是单凭直观、经验并不可靠.这点对当时的哲学和数学都起到了警示的作用.

直观、常识虽不可靠,但人们的思维往往逃不脱它的影响,怎么办?两千多年前的先知找到了一个极为平凡的办法,没想到这个办法被数学沿用至今,一直未被突破,有的只是发展和完善,这就是公理化的方法.朴素地说,公理化就是把隐藏祸患的、含含糊糊的(常常是直观认为可靠的)地方摆到桌面上来,当去掉的明确去掉、当承认的公开承认,使之明朗化.在此基础上证明最可靠.公元前450年左右,希波克拉底总结已有几何学知识写成《原本》.希波克拉底之后,柏拉图和欧多克斯大量采用了以公理为论据的几何证明方法.大约公元3世纪,希腊哲学家和逻辑学家亚里士多德总结了几何学与逻辑学的丰富资料,系统地研究了三段论,以数学及其他演绎的学科为例,把完全三段论作为公理,由此推导出其他所有三段论法,从而使整个三段论体系成为一个公理系统.因此,亚里士多德在历史上提出了第一个成文的公理系统.据此,欧几里得在希波克拉底的《原本》(及在这之前或后的其他《原本》)的基础上,对命题作了巧妙的选择和合乎逻辑的排列,从而完成了数学史上的重要著作《几何原本》.他从古代的量地术和关于几何形体的原始直观中,用抽象分析方法提炼出一系列基本概念和公理.他总结概括出14个基本命题,其中有5个公设和9条公理,然后由此出发,运用演绎方法将当时所知的全部几何学知识推演出来,整理成为演绎体系.《几何原本》一书把亚里士多德初步总结出来的公理化方法应用于数学,整理、总结和发展了希腊古典时期的大量数学知识,在数学发展史上树立了一座不朽的丰碑.

公理学研究的对象、性质和关系称为"论域",这些对象、性质和关系,由初始概念表示.例如,欧氏《几何原本》中只需取"点""直线""平面""在……之上""在……之间""叠合"作为初始概念.前三个概念所表示的三类对象和后三个概念所表示的三种关系就是这种几何的论域.按照"一个公理系统只有一个论域"的观点建立起来的公理学,称为实质公理学.这种公理学是对经验知识的系统整理,公理一般具有自明性.因此,欧氏《几何原本》就是实质公理学的典范.尽管从今天看来它还不够严密,但其重要意义是开创了公理化数学的先河.

二、现代数学公理化思想是基于对古典公理化体系的完善

公理犹如宪法,都是人们制定出来的,可以挑战,更可以修订或重订.这是欧氏几何产生出非欧几何,牛顿力学被修正成为相对论与量子力学,导致科学进展的理由.

19世纪80年代,非欧几何学得到了普遍承认之后,开始了对于几何学基础的探讨.当时已经非常清楚,欧几里得体系的毛病很多:首先,欧几里得几何学原始定义中的点、线、面等不是定义;其次,欧几里得几何学运用许多直观的概念,如"介于……之间"等没有严格的定义;另外,对于公理系统的独立性、无矛盾性、完备性没有证明.

为修订欧几里得《几何原本》公理体系,许多数学家做出了不懈的努力.19世纪80年代,德国数学家巴士曾提出一套公理系统,提出次序公理等重要概念,不过他的体系中有的公理不必要,有些必要的公理又没有,因此他的公理系统不够完美.皮亚诺和他的学生们也曾进行了一系列的研究,然而所建立的公理系统存在着一定的局限性.希尔伯特的《几何学基础》的出版,标志着数学公理化新时期的到来.1899年,希尔伯特的公理系统是其后一切公理化的楷模.希尔伯特的公理化思想极深刻地影响其后数学基础的发展,他的这部著作重版多次,已经成为一本广为流传的经典文献了.

希尔伯特的公理系统与欧几里得及其后任何公理系统的不同之处,在于它没有原始的定义,定义通过公理反映出来.这种思想他在1891年就有所透露.他说:"我们可以用

桌子、椅子、啤酒杯来代替点、线、面.”当然, 他的意思不是说几何学研究桌、椅、啤酒杯, 而是在几何学中, 点、线、面的直观意义要抛掉, 应该研究的只是它们之间的关系, 关系由公理来体现. 几何学是对空间进行逻辑分析, 而不诉诸直观. 在建立公理系统之后, 希尔伯特先后证明了公理系统的无矛盾性和独立性. 由于这些公理的独立性和无矛盾性, 因此可以增减公理或使其中公理变为否定, 并由此得出新的几何学. 比如平行公理换成其否定就得到非欧几何学; 阿基米德公理(大意是一个短线段经过有限次重复之后, 总可以超出任意长的线段)换成非阿基米德的公理就得到非阿基米德几何学.

三、基于公理化方法的演绎系统的构造

公理是对诸基本概念相互关系的规定, 这些规定必须是必要的而且是合理的. 因此, 一个严格完善的公理系统, 对于公理的选取和设置, 必须具备相容性(或称无矛盾性、协调性)、独立性以及完备性. 从理论上讲, 一个公理系统的上述三条要求是必要的, 同时也是合理的. 至于某个所讨论的公理系统是否满足或能否满足上述要求, 甚至能否在理论上证明满足上述要求的公理系统确实存在等, 则是另外一回事了. 应该指出的是, 对于一个较复杂的公理体系来说, 要逐一验证这三条要求相当困难, 甚至至今不能彻底实现.

根据上述三条要求, 如何来构造公理系统呢? 也就是说, 如何运用公理化方法将一门数学整理组织成一个演绎系统呢? 一般来说, 有三个步骤:

首先, 要积累大量的经验、数据和资料, 对这些经验资料进行分析归纳, 使之系统化, 最后上升为理论. 因为公理系统的建立是以大量的事实为基础, 以丰富的经验和已有的科学知识为前提的, 舍此无彼.

其次, 数学公理化的目的是要把一门数学整理成为一个演绎系统, 而这一系统的出发点就是一组基本概念和公理. 因此, 要建立一门数学的演绎系统, 就要在第一步的基础上, 从原有的资料、数据和经验中选择一些基本概念和确定一组公理, 然后由此来定义其他有关概念并证明有关命题. 选取的基本概念是不定义概念, 必须是无法用更原始、更简单的概念去确定其涵义的, 也就是说, 它是高度纯化的抽象, 是最原始最简单的思想规定.

最后, 在确定了基本概念和公理之后, 就要由此出发, 经过演绎推理, 将一门数学展开成一个严格的理论系统. 也就是说, 对系统中的每一概念予以定义, 而每一个定义中引用的概念必须是基本概念或已定义过的概念; 对其他每一命题都给予证明, 而在证明中作为论据的命题必须是公理或者已经证明为真实的定理. 因此, 一门数学的演绎系统就是这门数学的基本概念、公理和定理所构成的逻辑的链条.

在上述过程中, 从认识论的角度来看, 任何公理系统的原始概念和公理的选取必须反映现实对象的本质和关系. 就是说, 应该有它真实的直观背景而不是凭空臆造. 其次, 从逻辑的角度看, 则不能认为一些概念和公理的任意罗列就能构成一个合理的公理系统, 而一个有意义的公理系统必须是一个逻辑相容的体系.

四、广义公理化思想的丰富内涵

数学的实质在于有一套提出问题和解决问题的普遍理论及方法. 理解和掌握公理化方法, 并不要求我们掌握严格的公理系统, 只要我们能在分析实际问题时, 凭着需要随时能想到建立数学模型、作形式化处理, 随时能想到公理化方法, 以使模型变得更为严格. 从这种意义上说, 公理化思想也可说成是广义公理化方法. 具体说这种广义性表现在以下几个方面.

第一, 许多“定义”可以采用公理化方法. 注意到在数学的形式系统中所用到的定义, 其叙述方式都是公理化的. 比如:

满足下列公理的函数 $C(x)$叫做余弦函数, 函数 $S(x)$叫做正弦函数:

(1)对 x的全体实数值有定义;

(2)满足函数方程 $C(x-y)=C(x)C(y)+S(x)S(y)$;

(3)当 $0<x<a$时, $C(x)>0$, $S(x)>0$;

(4)在开区间 $(0, a)$的端点, 有 $C(0)=S(a)=1$.

凡是公理化定义都可作为形式化系统的严格依据. 事实上一般拓扑学正是建立在这一定义上的, 因此这类定义的确具有公理化特征, 叫做公理化定义.

第二, 若干数学理论中的定理、命题叙述都具有公理化形式. 从广义讲, 数学中一般定理都是一些公理化形式系统. 它们的条件即是其公理, 甚至因为定理(相对于它的结论)是个完备系统, 其条件(公理)也自然满足协调性、独立性, 因此还可说定理中的条件(公理)是个公理系统. 从而也说一个定理是个完备的形式系统.

第三, 一切数学学科都可以看成是公理化的. 这是因为一切数学学科都是由公理化的定义, 公理化形式的定理、命题和随时需要而引入的新概念以及新的符号、约定、限制等, 再加上推理过程而成的形式系统, 因此可说成是建立在一系列的公理基础上的, 所以说是公理化的. 但若这一系列公理不能事前一次给定, 则很难论证它们之间的协调、独立和完备性, 特别因哥德尔用具有实证性的迭归方法无可辩驳地证明了数论的公理集不是公理系统, 整个数学也没有公理系统, 所以不能轻易说它们是(严格意义上的)公理系统, 而只能说是“公理化”的. 然而, 在数学中本质上任何一个定理都是由该学科中有关定义产生的结果, 换句话说数学中任何一个定理(或叫命题)都可经由有关定义而推出, 只是往往来得比较笨(繁琐、不经济)罢了, 当能借用别的定理而获得结论时, 往往比直接从定义出发更省事. 因此, 一切数学学科, 我们虽不能确保它们是完备的公理系统, 却依然可以把它们都看成是具有形式化特征的公理体系.

公理化思想不仅对数学的发展起重要的推动作用, 而且对于整个科学方法论的形成和发展也起到示范作用. 事实上, 今天的数学公理化思想对现代理论力学及各门自然科学理论, 以至社会科学理论的陈述都起到了积极的借鉴作用.

【参考文献】

[1]欧阳绛. 数学方法溯源[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2008: 161.

[2]解恩泽, 徐本顺. 数学思想方法[M]. 济南: 山东教育出版社, 1995: 148.

[3]张奠宙, 沈文选. 中学几何研究[M]. 北京: 高等教育出版社, 35.

[4][美]约翰·塔巴克. 数学和自然法则[M]. 北京: 商务印书馆, 2007: 序 7.

[5]高隆昌. 数学及其认识[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 36.

[6]王家铧, 沈文选. 几何课程研究[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 116.