分解与重组：让解题充满张力*

盐城师范学院数学与统计学院 (224002) 段志贵
南京师范大学教师教育学院 (210023) 陈馨悦

数学教育家乔治·波利亚在他的《数学的发现》一书中，构画了一幅具有指导价值的"我们该怎样思考"解题思维导图[1].这幅图以"菱形"为基本框架，位于菱形四个顶点的分别是"动员"、"组织"、"分离"和"组合"，四条边则分别标有"辨认"、"回忆"、"充实"以及"重组"，位于菱形中心的是"预见"[2].其中，"分离"与"重组"可谓是解题思维中的关键，它们直接影响着解题的进程.如果把这幅图与波利亚的"怎样解题表"相比对，"分离"与"重组"相当于"怎样解题表"中的第二步——"拟定(解题)计划".在解题中，"分解"与"重组"是一对矛盾统一体，它们既互相对立，又相互转化.分解是矛盾的主要方面，我们通过不断地分离——重组，再分离——再重组，以至预见解题思路，形成解题策略和具体的解题方法.那么，在数学解题中，怎样对问题进行恰当的分解与重组呢？

1. 拆分主干，化解解题难点

所谓拆分主干，指的是把待处理的复杂问题分解为若干个较简单的或较为熟悉的小问题，再把所有这些小问题的解合并起来，求出原问题的解的一种方法.比如立体几何中我们通过分割法去求一个几何体的体积，就是把待求的几何体分割成若干个可求的小几何体，分别求出它们的体积，再累加起来.当然这只是一种直观的解释，其实数学其它模块问题的求解中我们同样也可以通过拆分问题的主干化解难点，并逐个击破，最后实现问题整体上的解决.

例1 已知$a>0,b>0,c>0$，求证：$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\geqslant 27abc$.

分析：问题涉及到a、b、c三个字母，从待证不等式左右两边观察可以发现这三个字母处于同等地位，无主次之分，直觉猜想可以把待证不等式分解为三个形式相似的"子"不等式进行证明，即分别证明$a^2+a+1\geqslant 3\sqrt[3]{a^3}=3a$，$b^2+b+1\geqslant 3\sqrt[3]{b^3}=3b$，$c^2+c+1\geqslant 3\sqrt[3]{c^3}=3c$.而这三个"子"不等式比较容易证明，从而实现了原不等式的证明.

事实上，由于$a>0$，则根据均值不等式有$a^2+a+1\geqslant 3\sqrt[3]{a^3}=3a$.同理可得另外两个结构相同的不等式.我们再把这三个式子相乘，即有$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\geqslant 27abc$.

例2 当x为哪些值时，函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)$是增函数？

分析：原函数可分解为$y=\log_{\frac{1}{2}}u$，$u=x^2-5x+6$.依据题意，为了函数$y=\log_{\frac{1}{2}}u$在特定区间上递增，则$u=x^2-5x+6$需要在x的某定义区间上递减.由$u=x^2-5x+6=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}$，知$u$在$(-\infty,\frac{5}{2})$上递减.又由题意$x^2-5x+6>0$，解得$x<2$或$x>3$，故$u$的递减区间必须满足$x<2$.故$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)$在$(-\infty,2)$内递增.

2. 分类讨论，开启解题通道

所谓分类讨论，指的是在处理数学问题的过程中，当问题所给出的对象不能统一研究时，需要根据对象本质属性的异同，将对象划分成有限个相对具体、方便解决的不同情况，按照不同类别进行分别研究与求解，然后综合各种情况得到原问题的结论.分类讨论是对问题进行分解的常用方法.科学地对问题进行分类讨论，有助于将问题化难为易，化繁为简[3].

例3 解不等式$\frac{(x+4a)(x-6a)}{2a+1}>0$($a$为常数，$a\neq-\frac{1}{2}$).

* 基金项目：江苏省教育学会重点课题"苏北初中数学名师个案跟踪研究"(项目编号：16B9J4YC9)；盐城师范学院教育教学改革重点课题"师范类专业认证背景下的数学教学论课程教学改革的探索和思考"(项目编号：2018YCTUJGZ011).

分析:本题参数 a 并没有明确告知,给问题的求解带来极大的麻烦.直接求解必然行不通,必须对参数 a 进行分类讨论.事实上,本题参数 a 决定了 $2a+1$ 的符号和两根 $-4a$、$6a$ 的大小,故需要着眼于 $2a+1$ 的正负性首先进行讨论,然后再结合解题过程中出现的 $-4a$、$6a$ 的正负性(或取零)进行讨论.

(1) 当 $2a+1>0$ 时,$a>-\frac{1}{2}$;

当 $a>0$ 时,$(x+4a)(x-6a)>0$,解得 $x<-4a$ 或 $x>6a$;

当 $a=0$ 时,$x^2>0$,解得 $x\neq 0$;

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时,$(x+4a)(x-6a)>0$,解得 $x<6a$ 或 $x>-4a$.

(2) 当 $2a+1<0$ 时,$a<-\frac{1}{2}$,由 $(x+4a)(x-6a)<0$ 解得 $6a<x<-4a$.

例 4　已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=32n-n^2$,则数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和是什么?

分析:虽然 $\{a_n\}$ 是一个等差数列,但它的前 16 项为正项,从第 17 项起每项皆为负项,这就使得 $\{|a_n|\}(n=1,2,\cdots,16)$ 与 $\{|a_n|\}(n\geqslant 17)$ 成为两个不同的数列.

两类不同情形须区分对待,抓住这一点可知结论应分为 $n\leqslant 16$ 与 $n\geqslant 17$ 两段给出,由此得 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 $S_n=\begin{cases}32n-n^2(n\leqslant 16),\\512-32n+n^2(n\geqslant 17).\end{cases}$

3. 局部变动,带动解题突破

局部变动,是一种特殊而重要的分解方法,其处理方法是暂时固定问题中的一些可变因素,使之不变,在此基础上先研究另一些可变因素对求解问题的影响,取得局部的成果后,再从原先保持不变的因素里取出一些继续研究,直到问题全部获解[4].

例 5　求证:圆的所有内接三角形中以正三角形之面积为最大.

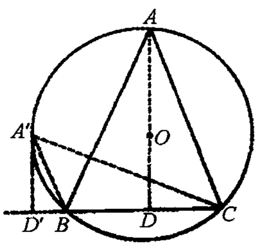

图 1

分析:如图 1 所示,圆的内接三角形的三个顶点 A、B、C 均可在圆周上任意变动.根据题意,我们可以先把 B、C 暂时保持不动,只让 A 点在圆周上任意变动,那么 $|BC|$ 就暂时被认为是定值,三角形面积的大小就取决于 A 点到 BC 的距离,即 BC 边上的高 AD.

当高 AD 通过圆心时,其值最大,即知当 $AB=AC$ 时三角形面积最大;再把 A、C 固定,让 B 点变动,同样可得 $AB=BC$ 时三角形面积最大.根据两次变动的结果可知只有当 $AB=BC=CA$ 时三角形面积最大.

例 6　试求任一三位数与其各位数字之和的商的最小值.

分析:不妨设三位数为 $100x+10y+z$,它与其各位数字之和的商为 w,其中 $1\leqslant x\leqslant 9,1\leqslant y\leqslant 9,1\leqslant z\leqslant 9$,于是 $w=\frac{100x+10y+z}{x+y+z}=1+\frac{9(11x+y)}{x+y+z}$①.在①式中,若固定 x,y,让 z 变化,则当 $z=9$ 时,w 取最小值,故 $z=9$.这时,$w=1+\frac{9(11x+y)}{x+y+9}=10+\frac{9(10x-9)}{x+y+9}$②.在②式中,若固定 x,让 y 变化,则当 $y=9$ 时,w 取最小值,故 $y=9$.于是有 $w=10+\frac{9(10x-9)}{x+18}=100-\frac{1701}{x+18}$③.在③式中,要使 w 取得最小值,只有 x 取最小值 1,故三位数为 199,这个三位数与其各位数字之和的最小值为 $w_{\min}=\frac{199}{1+9+9}=10\frac{9}{19}$.

4. 逐步逼近,冲击解题目标

所谓逐步逼近指的是为了解决一个数学问题,首先从与该问题的实质内容有着本质联系的某些容易着手的条件或某些减弱的条件出发,再逐步地扩大(或缩小)范围,逐步逼近,以至最后达到问题所要求的解[5].

例 7　在 503 后面添三个数字,使所得的六位数能被 7、9、11 整除.

分析:本题如果用常规方法,从整数的整除性特征入手去考虑,所得的六位数如何才能被 7、9、11 整除,解答起来比较困难.不妨着眼于整体,采用逐步逼近的方法考虑.

事实上,该六位数既然能被 7、9、11 整除,也应该被 7、9、11 的最小公倍数 693 整除,反过来,如果这个六位数能被 693 整除,那么它一定能被 7、9、11 整除.于是,可以建立解题目标:503□□□ ÷ 693 = A①,其中 A 表示的是一个值为整数的商.

设法在 503 的后面添入适当的数字使①成立.

不妨设添入的三个数是999(最大的三个数字),得到503999 ÷ 693 = 727……188②. 再观察②,发现②比①多了余数188,这时只要在999中减去188就能整除,而999 - 188 = 811. 于是有503811 ÷ 693 = 727③. ③与解题目标①相一致了,由503811得到题目的一个解——811,由于811大于693,因此还可以从811中再减去693,得到118,于是又得到问题的另一个解.

基于上述解题过程可以看到,企图一次性求得答案是不现实的. 而利用逐步逼近法,首先找到公倍数,建立解题目标,然后尝试得到符合条件的一个较大的数,在此基础上,再寻找其他符合条件的答案,逐步实现解题目标.

例8　设$f(x)$是一个定义在有理数数集上的实值函数,对于任意的x和y,都满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$. 求证:对一切有理数,都有$f(x)=kx$,其中k为实常数.

分析:在$f(x+y)=f(x)+f(y)$中,令$x=y=1$,则$f(2)=2f(1)$;若取$x=y=0$,就有$f(0)=2f(0)$,即有$f(0)=0=f(1)\times 0$. 由此猜测$k=f(1)$,即对一切有理数x,有$f(x)=f(1)\times x$.

我们首先从正整数切入,采用逐步逼近的方法渐进解题目标.

(1)首先考虑x为任意正整数n的情形,$f(n)=f(1)\times n$,可以用数学归纳法证明成立,这里略去不证.

(2)接着证明x为任意负整数时亦成立. 事实上,$0=f(0)=f[n+(-n)]=f(n)+f(-n)$,知$f(-n)=-f(n)=f(1)\times(-n)$. 至此,对一切整数$x$,都有$f(x)=f(1)\times x$.

(3)再考虑x为整数的倒数的情形. 假设n为正整数,反复运用等式$f(x+y)=f(x)+f(y)$可得$f(1)=f(\frac{1}{n})+f(\frac{n-1}{n})=2f(\frac{1}{n})+f(\frac{n-2}{n})=\cdots=nf(\frac{1}{n})$,即$f(\frac{1}{n})=f(1)\times\frac{1}{n}$. 又$0=f(0)=f(\frac{1}{n}-\frac{1}{n})=f(\frac{1}{n})+f(-\frac{1}{n})$,知$x$为负整数的倒数的情形成立. 故对一切整数$x$的倒数,也都有$f(x)=f(1)\times x$.

(4)再设x为任意有理数,记$x=\frac{m}{n}$,其中m和n是互质的整数,$n>0$. 此时有$f(\frac{m}{n})=f(\frac{1}{n})+f(\frac{m-1}{n})=2f(\frac{1}{n})+f(\frac{m-2}{n})=\cdots=m\times f(\frac{1}{n})=f(1)\times\frac{m}{n}$. 故对一切有理数$x$,都有$f(x)=f(1)\times x$.

可以看到,本例证明过程被分解为逐层递进的几个阶段,每一个阶段都有一个小目标,每个小目标的实现即形成接近下一个小目标的台阶,沿着台阶拾级而上,逐步逼近了问题获解的总目标.

需要强调的是研究分解与重组,不能脱离整体. 恰恰相反,科学的分解与重组都应该是在整体思想指导下进行. 只要我们善于观察,从做中学,在学中做,勤于总结其中的规律,就一定能把这一策略灵活运用到数学解题之中,为顺利解决相关数学问题打下坚实的基础.

参考文献

[1]G·波利亚. 数学的发现——对解题的理解、研究和讲授[M]. 刘景麟,等,译. 北京:科学出版社,2013.

[2]段志贵. 变通:让解题有更充分的预见[J]. 数学通报,2017,56(12).

[3]段志贵. 数学解题研究[M]. 北京:清华大学出版社,2018.

[4]单墫. 解题研究[M]. 南京:南京师范大学出版社,2002.

[5]罗增儒. 数学解题学引论(第三版)[M]. 西安:陕西师范大学出版社,2016.