



涂荣豹

# 教学生学会思考是数学教学的根本\*

——访南京师范大学涂荣豹教授

段志贵(盐城师范学院数学与统计学院)

**摘要:**涂荣豹教授新构建的“数学教学设计原理”是一个完整的逻辑体系。他主张教育要让学生爱学、会学;教“怎样思考”,教“怎样才能想到”是数学教学的首要任务;数学教学要以寻找思路为核心;反思性数学教学是一种有效的教学方式和学习方式。

**关键词:**教学设计原理;学会思考;反思性教学

**文章编号:**1002-2171(2019)1/2-0008-04

2018年9月15日晚,借全国数学教育研究会与《数学教育学报》《数学通报》《数学之友》等联合举办《章士藻数学教育文集》(第2版)首发式之际,笔者在盐城师范学院访谈了全国数学教育研究会原理事长、《数学之友》杂志主编、《数学教育学报》编委会常务副主任、南京师范大学博士生导师涂荣豹教授。访谈围绕数学教学本质的三个相关问题展开(以下访谈过程,笔者简称“段”,涂荣豹教授简称“涂”)。

## 1 数学教学的本质是要教学生学会思考

段:涂老师好!对教育的本质,许多专家都有不同的理解或表述,您在数学教育界乃至基础教育界具有一定的影响力,现请您谈一谈您对教育的理解。

涂:我认为教育的根本目标是培养人,教育科学发展观的核心体现在培养什么样的人。“文革”前,我国的教育方针是“培养德、智、体全面发展的社会主义劳动者”。依我的理解,自我负责、有社会责任感是受教育者应该具有的基本要素,全面发展则是受教育者能够成为合格社会公民的基本条件,进而具有国家和民族、人类和历史、现在和未来的视野,这与我国现在发展中小学生核心素养的教育目标是是一致的。

当前教育的症结在“目中无人”。教育在本质上就是要激发学生的学习热情,让学生爱学、好学,充满好奇心、求知欲,提高学习兴趣,始终抱有探求世界的

积极态度。教师应该尽最大努力爱护、培养和激励学生的学习热情,使学生学会学习,即掌握学习的方法,学会自己独立地获取知识,学会研究问题的方法,学会思考,学会从不知开始,一步一步地达到问题的核心,直至最终的构建和解决。因此在教育教学中,要努力发展学生的认识力<sup>[1]</sup>。这个认识力主要是指对世界(客观世界和主观世界)各种事物的认识能力,其中包括想象力、洞察力、判断力、预见力、创造力等。

段:在您看来,数学是一门怎样的学科?数学教学的本质是什么?

涂:数学是一门十分特殊的学科,正如张奠宙先生所说,“数学的对象是抽象的形式化的思想材料”,数学最大的特殊就在于它是“思想材料”,不像其他学科大多是“物化的形态”。对思想材料主要不是进行“物质实验”,而是进行“思想实验”“思想活动”。“思想实验”实质上是在人的大脑里用各种思维方式和方法,对“思想材料”进行“思维加工”的心理活动。这种心理活动用通俗的话说就是“思考”,可见数学教学活动就是学生在教师的带领下进行思维活动<sup>[2]</sup>。所以,数学教学的本质就是“教学生学会思考”。现在提出的数学核心素养:数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析,其实就是曾经的数学素质,就是通常说的数学的思维能力和思维能力。思维即是“思考”,数学素养的本质应当是数学思考,数学教学的首

\* 基金项目:本文系江苏省教育厅高校品牌专业建设工程资助项目(编号:PPZY2015C211)阶段性成果。

要任务就是要教学生“怎样思考”。经常听到学生说：“老师讲的我都会，但自己做就不会了。”什么原因？教师没有把“让他自己会做”的方法教给他。首先是解决“你是怎么想到的”，然后解决“怎样让他也想到”。好的教师“想给学生听”“想给学生看”，差的教师“做给学生看”或让基础好的学生做给基础一般的学生看。我们要教大多数学生能想到的方法，教本原的方法，有技巧也要教技巧是怎么想出来的。如求“ $1+2+3+\dots+100=?$ ”要想高斯怎么会想到“首尾相加乘以项数除以2”的，而不是仅仅学习这一操作。因此，教“怎样思考”、教“怎样才能想到”是数学教学的首要任务<sup>[3]</sup>。

## 2 数学教学设计原理是一个完整的逻辑体系

段：从“教会思考的数学教育观”出发，您建构的数学教学设计原理有哪些？这些原理之间是否关联？

涂：我构建的“数学教学设计原理”主要包括“教学生学会思考”“用研究问题的一般方法教学”“用问题结构推进教学”“创设情境—提出问题”“从无到有探究”“用启发性提示语教学”“反思性教学”“归纳先导，演绎跟进”“解题教学以寻找思路为核心”等。这些原理是一个完整的逻辑体系<sup>[4]</sup>。

其中，居于中心地位的是“教学生学会思考”原理。“教学”就是教学生学，那么教师教学生学什么？本质上说，就是要教学生“学‘提出’问题”“学‘建构’概念”“学‘寻找’方法”“学‘研究’问题的一般方法”，学这些动词就是教学生学会思考。当然也要学知识，但最终目标是学会思考。这是总纲，是数学教学设计的总目标。

如何教学生学会思考？那就要用“研究问题的一般方法”教学。一般方法是指“提出问题—构建概念—寻找方法—提出假设—验证猜想—语言表述”这样的过程。数学新授课基本应该是这样的研究过程，其中第一步就是要提出问题。

提出什么样的问题？这就是“用问题结构推进教学”的原理，其中包括每课问题化，问题结构化，解题教学化。每一节课首先提出一个目标问题，并且逻辑地产生一系列子问题，通过子问题的最终解决实现目标问题的解决<sup>[5]</sup>。

问题从哪儿来？这就是“如何提出问题”，尤其是“如何由学生提出问题”，办法是“创设情境—提出问题”，其中包括创设情境的基本准则和基本方法。

问题提出以后如何解决？用“从无到有探究”的原理进行探究性教学，主要是引导式探究，即教师引导学生主动探究并解决问题。

教师如何引导？“用启发性提示语引导”的原理，即教师由远及近、由易到难地设计启发性问题，启发引导学生去主动探究。这些提示语(问题)包括元认知提示语、方法论提示语、认知性提示语。

除了用启发性提示语引导探究教学，还需要用“反思性教学”原理，教学生学会通过回顾、质疑、反诘、追问进行思考，这些反思方法属于元认知，可以实现对学生元认知能力的培养。

学会数学思考必须强调“归纳先导，演绎跟进”的原理，其原因在于“归纳体现了思考的创造性，演绎体现了思考的严谨性”，以期达到对学生理性思维的培养。

解题教学是用“以寻找思路为核心”的原理。寻找思路就是思考，如何寻找思路？我给出的方法是用“如何着手解题”和“如何理解题意”两套启发性提示语去寻找，其中的提示语基本都是元认知的问题，以期让学生学会运用这些提示语引导自己寻找解题思路。这同样也是对学生元认知能力的培养。

整个“数学教学设计原理”体现了上述的逻辑关系，形成一个完整的逻辑体系。

段：您刚刚提到“数学教学设计原理”体现了一个完整的逻辑关系，您可否具体解释一下这个逻辑关系？

涂：好的，这正是我要向你做进一步解释的地方。下面是“数学教学设计原理”构造的逻辑结构示意图(图1)。

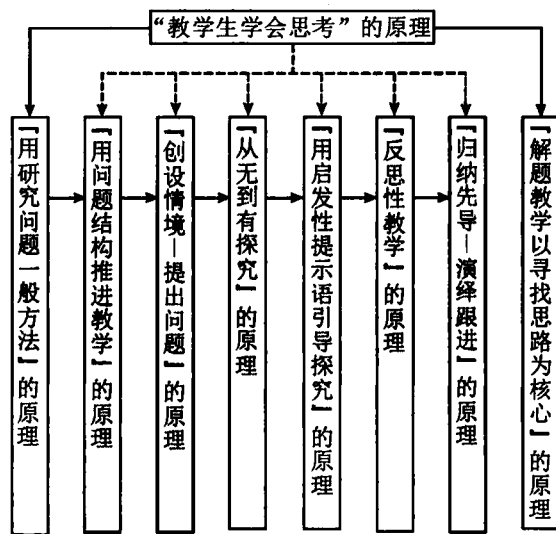


图1

段:我注意到您特别提出了解题教学要重视和加强“用启发性提示语引导”的原理,您可否就这一原理做具体的解释?

涂:数学解题教学是数学教学的重要成分,教学生学习如何解数学题也就成为数学教学的重要任务。前面说过,解题教学要以寻找思路为核心,在具体解题教学过程中怎样让学生从无到有地寻找思路?“用启发性提示语引导”自然就是一种重要的解题教学原理。教师通过适当的引导语给学生以必要的提示和暗示,学生通过自己的思维活动获得提示和暗示。一般说来,教师的启发性提示语有认知性提示语、元认知提示语和方法论提示语三种,主要是运用启发性提示语发问,核心是问题,关键是要让学生通过对启发性问题的思考寻找解题思路。其实教师不仅在解题教学中运用启发性提示语,更要在新授课教学中运用启发性提示语。

段:涂老师,为了让广大读者更深入地理解您的这一数学教学设计原理,您能否简要回顾一下这一思想产生的历史背景与构建进程?

涂:说到原理研究的历程,就要追溯到20世纪90年代。当时我国数学教育界的前辈们呼吁创建我国自己的数学教育理论体系,他们身体力行做了大量的奠基性工作。受他们的感召,我心中滋生了为实现这个目标尽己之力的念头。那时虽进行了10多年的中外教育理论的钻研,但我逐步意识到,要创建中国的数学教育理论,不仅要借鉴外国先进的教育理念,更要从中国数学教育的实践中去发掘探索<sup>[6]</sup>。于是从1998年起,我便带领研究生不断地进入各类中学数学课堂,甚至进入中学的政治课和语文课的课堂(他们也教学生学会思考),并结合自己负责的江苏省高考数学阅卷工作的经历,对大量数学教学案例和数学解题中的现象进行深入地观察思考。在“同课异构”案例研究的过程中,我于2000年前后初步构建了“案例研究的分析系统框架”;于2005年前后逐渐产生了“教学生学会思考”的基本认识,并提出了数学教学的启发性提示语理论;在此基础上,于2010年前后构建出数学教学设计原理的雏形;经过实践—理论—实践—理论的往复,最终于2016年基本完成了“中学数学教学设计原理”的构建。

回过头来看,这个工作其实并不是一蹴而就的,而是一个从无到有、去粗取精、日臻完善的长期过程。“原理”是从大量的历史经验和现实实验中直接顿悟

出来的;“原理”是直觉思维的产物,得到原理并没有逻辑通道;“原理”是理论的出发点,是不证自明,是人类思维的“自由创造”;“原理”是具有普遍意义的基本规律,是在大量观察、实践基础上,经过归纳、概括而得出的,既能指导实践,又必须接受实践的检验。我对原理的建构经历正是这样的过程。当然,这个数学教学设计原理仍然有待进一步提升,还需要我做更多的努力,我也诚邀同仁们给予斧正和帮助。

### 3 应该重视学生的反思性数学学习

段:您在2000年曾在《数学教育学报》发表过题为《试论反思性数学学习》的文章,这篇文章在数学教育界反响很大,至今被引用达400多次。您可否介绍一下什么是反思性数学学习,在数学教学中如何带领学生进行反思性数学学习?

涂:学生的反思性学习应该来自教师的反思性教学。反思性教学,顾名思义就是教师引导学生进行反向思考。反思性数学教学是教师引导学习者对自身数学学习活动的过程,以及数学活动过程中涉及的有关的事物(材料、信息、思维、结果等)进行反向思考。这是一种有效的教学方式和学习方式<sup>[7]</sup>。

反思性数学学习的基本特征是它的探究性,就是在考察自己活动的经历中探究其中的问题和答案,重构自己的理解,激活个人的智慧,并在活动所涉及的各个方面的相互作用下,产生超越已有信息以外的信息。反思性数学学习的优势是可以帮助学生从例行公事的行为中解放出来,帮助他们学会数学学习;可以使学生的数学学习活动成为有目标、有策略的主动行为;可以使学生的学习成为探究性、研究性的活动,增强学生的分析问题、解决问题的能力,提高个人的创造力;可以有利于学生在学习活动中获得个人体验,使他们变得更加成熟,促进他们的全面发展和可持续发展<sup>[8]</sup>。

目前数学教学中最薄弱的正是数学的反思性教学这一环节,但它却是数学教学活动中十分重要的环节。数学对象的抽象性、数学活动的探索性、数学推理的严谨性和数学语言的特殊性,决定了正处于思维发展阶段的中学生不可能一次性地直接把握数学活动的本质,必须要经过多次地反复思考、深入研究、自我调节,即坚持反思性数学学习,才可能洞察数学活动的本质特征<sup>[9]</sup>。为此,在数学教学中,教师要给予适当的机会让学生对自己的思考过程进行反思,对学



# 以函数为例

## 谈高中数学教科书的情境创设

王 嵘(人民教育出版社中数室)

**摘 要:**基于高中数学必修教科书中情境创设的梳理,从情境素材来源和功能设置两个角度做了初步分类,并以指数函数和三角函数为例,说明如何结合数学知识的特点,选择情境素材和发挥情境功能。从而为思想的展开和思维的运用营造场景,让学生在知识的展开过程中获得思想和方法,在思维的运用过程中培养能力和素养。

**关键词:**情境创设;数学思维;教科书

**文章编号:**1002-2171(2019)1/2-0011-03

数学,通常给人的印象是一系列的定义、定理和证明。如果进一步,探究这些定义、定理和证明的来源,那么就是一系列的问题,所以有一种说法是,问题是数学的心脏。特别是中学阶段的数学,基本上是19世纪以前的数学,即最基础、最初等的数学,只要有问题,就可以介绍完所有的知识和方法。但是数学教育的终极目标是要培养学生的数学素养,这包括知

识和方法,能力和态度等。因此,中学数学教科书需要创设情境,为学生的数学学习呈现数学对象最初的景象、呈现客观事物变化的场景等,能让学生从这些景象和场景出发,思考、思考、再思考,发现问题和提出问题,探究和获得知识与方法。那么,情境创设的核心在于数学素养的提升,关键在于为展开知识和思维的双过程营造场景。为此,无论是情境素材的选择

习活动所涉及的知识进行反思,对学习所涉及的思想方法进行反思,对活动中有联系的问题进行反思,对题意的理解过程进行反思,对解题的思路、推理的过程、运算的过程、语言的表述等进行反思。反思性数学学习的形成当然要靠教师的示范、引导,但最重要的是要让学生学会自我反思,并在数学学习中自觉地进行反思,逐渐形成一种反思的意识和习惯。

### 4 结束语

对涂荣豹教授的访谈时间过得很快,许多问题还来不及细细展开。在近两个小时的访谈过程中,笔者与涂荣豹教授重点围绕什么才是数学教学的本质这一话题展开。涂教授突出重点,详细介绍了他的新著《数学教学设计原理的构建》一书,提出了数学教学的本质是要教学生学会思考、数学教学设计原理是一个完整的逻辑体系、应该重视学生的反思性数学学习等具有深刻教育意义的观点,相信大家读后一定会深受启发。

注:本访谈整理成文后经过了涂荣豹教授的审核

确认。

### 参考文献:

- [1] 涂荣豹. 数学教学设计原理的构建[M]. 北京:科学出版社,2018.
- [2] 宁连华,涂荣豹. 中国数学基础教育的继承与发展[J]. 数学教育学报,2012,21(6):6-9.
- [3] 涂荣豹. 试论反思性数学学习[J]. 数学教育学报,2000,9(4):17-21.
- [4] 常春艳,涂荣豹. 探析数学反思性教学的特征及本质[J]. 数学教育学报,2011,20(6):8-10.
- [5] 涂荣豹. 数学学习与数学迁移[J]. 数学教育学报,2006,15(4):1-5.
- [6] 涂荣豹. 专家知识的特征及其数学教学启示[J]. 数学教育学报,2005,14(4):13-16.
- [7] 涂荣豹. 论数学教育研究的规范性[J]. 数学教育学报,2003,12(4):2-5.
- [8] 涂荣豹,杨骞. 略论数学教育的科学价值[J]. 中国教育月刊,2002(4):35-37.
- [9] 涂荣豹. 谈提高对数学教学的认识——兼评两节数学课[J]. 中学数学教学参考,2006(1/2):4-8.