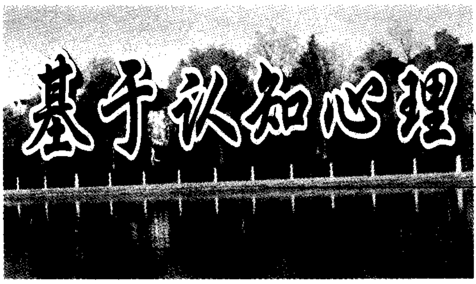

基于认知心理分析的数学直觉思维探究

◎段志贵（盐城师范学院数学科学学院　224002）

【摘要】在数学世界里直觉以其高度省略、简化、浓缩的方式洞察数学问题的实质.数学直觉思维具有非逻辑性、或然性、自发性等基本特征.基于数学问题的解决,直觉思维表征在初始审题过程中,闪现念头;在类比归纳过程中,自由跃进;在演绎推理过程中,创造规则.

【关键词】认知心理;直觉思维;问题解决;数学学习

【基金项目】江苏省盐城师范学院2008年度校级自然科学研究项目(08YCKL069).

所谓直觉是指人脑基于有限的事实和根据,调动一切已有知识经验,对客观事物的本质及其规律性联系做出迅速的识别,敏锐的洞察,直接的理解和整体的判断的思维过程.在数学世界里直觉以其高度省略、简化、浓缩的方式洞察数学问题的实质,激发数学家们的创造才智,可以说,数学的创造性活动始终离不开直觉.本文试图从认知心理的视角,分析数学直觉思维的内涵与本质,心理机制以及在此基础上探究直觉思维在数学问题解决中的呈现方式.

一、数学直觉思维的基本内涵

俄罗斯心理学家克鲁切茨斯基曾经对一位天才少年索尼娅进行跟踪研究.有一次,他让索尼娅解答一道证明题:276276,591591,112112,…这类数均能被13整除.克鲁切茨斯基观察发现索尼娅经10分钟无效地尝试,又把这些数用13来除,仍不得要领.经过片刻沉思,最后她突然说:"啊!我做出来了,所有这类数都可以写成$\overline{XYZXYZ}=\overline{XYZ000}+\overline{XYZ}=\overline{XYZ}(1000+1)$,而$13|1001$,所以它们均能被13整除."

在这个问题中,解题的关键是要找出构成这类数的共同规律:$\overline{XYZXYZ}=\overline{XYZ}\times1001$在索尼娅过去的经验里,是什么为她提示了有关这类数的一般规律呢?她说自己也不清楚.在前10分钟在读题,审题,怎么也找不出一个"出口",可是在10分钟以后的某一刻,索尼娅的思维的正负极接通了,她根据题设条件,产生了让人兴奋的"火花"——判断那一类数可以用数学字符表征,并表示成$\overline{XYZ}\times1001$,使得问题得以迅速解决.索尼娅解题过程与人们认识事物一样,是一个复杂的过程,需要经历若干阶段才能逐渐透过现象认识事物的本质,认识的最初阶段只能根据已有的部分事实及结果,对某类现象提出一种推测性判断,这种推测性判断就是直觉思维.因此,所谓的直觉思维,指的是人脑对于数学问题的结构及其关系的某种突然的领悟和洞察,是对数学问题中的未知量及其关系做出的一种似真判断.

二、数学直觉思维的本质

数学直觉思维虽然给人一种"知其然,不知其所以然"、"只可意会,难以言传"的感觉,但是,它并不是一种神秘而不可捉摸的主观幻象.深刻理解数学直觉思维的本质,对于我们有意识地培养和利用它具有十分重要的意义.

(一)数学直觉思维发生源于特定认知结构被激活

一般说来,一个主体的数学认知结构是通过把数学对象与原有知识和经验结合起来,经过同化和顺应,经过显意识和潜意识的相互作用,不知不觉自然而然地建构起来的.它随着主体数学认知实践的深入和主体各方面的发展而逐步深化完善.数学认识过程中,如果数学对象的有限信息反映了主体相应数学认知结构的一定特征,那么在某种适宜的环境条件下,就能借助大脑直接激活该数学认知,产生对数学对象本质的洞察和领悟;相反,则"熟视无睹",产生不了任何有价值的数学思维.这就是面对同样一个数学问题,在经过长时间思考之后,有的人有直觉思维的突然显现,而有的人则反映迟钝,在他人提示后恍然大悟的根源所在.可见对数学认知结构的激活是发生数学直觉思维的关键.因此,数学直觉经常发生在特定的时间或环境条件下,发生在反映数学对象本质非常深刻的高水平的数学认知结构上,发生在已被多次激活过、处于活跃期的数学认知结构上.

(二)数学直觉思维的实质是相关思维模的嵌入过程

思维模是指主体在认识过程中依据经验而确立的思维元素与其相应的思维框架(scheme)所形成的结构,这种结构由于经验的积累而形成模块.直觉思维的过程,乃是依据相似关联来检索大脑中所储存的模块,而后将其嵌入于所思考的问题之中,以形成新的模块.这种思维过程可图示如下:

$$
\begin{array}{c|c}
A_1,A_2,\cdots,A_n & M_1,\quad M_2,\quad\cdots,\quad M_n \\
\updownarrow\ \ \updownarrow\qquad\ \updownarrow & \updownarrow\qquad\quad\updownarrow\qquad\qquad\quad\updownarrow \\
B_1,B_2,\cdots,B_n & [M_1(B_1)],[M_2(B_2)],\cdots,[M_n(B_n)]
\end{array}
$$

图中竖线的右边是模块,其左边是与模块相对应的问题;上下两行相对应的字母,表示对应关系;方括号内的字母表示由被嵌入的新问题而形成的新模块.虽说直觉思维是直接(一步)完成嵌入的,但直接并非快速,因为对于模块的选择还需要有一个过程.由于这种选择具有明确的目的,因而使用定向思维往往易于检索有关信息;如其不然,则需要使思维向建构方向发展,用创造性的想象去联贯和构造它们.

(三)数学直觉思维具有逻辑性痕迹

许多人确信,数学直觉思维具有或然性、自发性、无意识性等基本特征,因而是非逻辑性的.事实上,在数学学科的发

展历程里，直觉思维显然需要一定的知识基础，很难想象一个没有基本初等数学知识的人会想到四元数. 数学基础与数学直觉思维之间一定存在某一逻辑通道，虽然这一通道有可能并不一定真正能够打通. 正如曹才翰教授所说："在数学中没有逻辑的思维是不能进行的. 即使能进行，那对认识和解决数学问题可能也是无用的." 产生数学直觉思维最重要的条件是人们对所研究的对象进行过长期的逻辑性思考，所以数学直觉思维是逻辑性特征. 但同时需要明确的是数学直觉思维是一种不连贯的跳跃式思维，通过数学直觉思维获得的认知是在逻辑依据不充分的前提下，对数学对象(结构及关系)做出的一种判断，虽然具有逻辑性，但并非完全依据逻辑规则，因而数学直觉得出的结论不完善，或是错误，都是在所难免的.

三、直觉思维在数学问题解决过程中的表征形态

问题解决是数学学科中最受关注的焦点，分析和探讨直觉思维在数学问题解决过程中的表征形态对于提高问题解决质量和速度具有十分重要的现实意义.基于认知心理分析，倘若我们把数学问题解决的解法发现分为初始审题、猜想判断和演绎推理三个阶段的话，则可以把数学直觉思维在问题解决过程中的表征形态鲜明地构画出来

(一)在初始审题的过程中，闪现念头

在初始审题阶段，题意往往会告诉我们这个题目好像见过，在哪里见记不得，也无需记清，但当时的解题方法是怎样的一种"念头"会被重新回忆，这便是一种直觉. 波利亚把解题过程中的每一个突然进展称为"好念头"，冒出一个好念头是一种"灵感活动"，在他的"怎样解题"表中的所有问题和建议都与它有关. 虽然每个人都体验过好念头的出现，但只能心领神会而难于言传，因为它往往是"潜意识"工作的结果.这就明确指出了，在发现数学问题解法的过程中，数学直觉思维的确起了重要的作用.

(二)在类比归纳的过程中，自由跃进

有时直觉的产生并不在初始审题阶段在耐心的读题与思考过程中，我们需要类比和归纳帮助我们发现解法在类比和归纳的过程中时常会萌发一个个直觉一方面，归纳总结时产生直觉一个普遍性判断包含了被归纳的事实中所没有的内容，因而在由几个单称判断"归纳"出一个新的全称判断时，归纳进程必然会跳跃一下.此外，数学发现也不可能局限于这种从一个个单个陈述跳到普遍陈述，而是可能在对事物的观察中，根本就没有这种结论的陈述.这些用形式逻辑解释显得无能为力的地方，只能视为直觉思维创造的结果.另一方面，类比猜想时伴有直觉的产生.类比中作比较的两个对象只是相似关系，因此运用类比更可以做出不落案臼的跳跃式的自由联想.无论是由原对象找到类比对象，还是抓住两个对象能反映本质的相同属性，都是具有很大跳跃性的直觉判断，根本无法用形式逻辑解释清楚.

(三)在演绎推理的过程中，创造规则

有时数学问题的解法发现单靠类比与归纳很难实现，还需要我们不断地利用题设或结论去进行适当的推理演绎.这一阶段的演绎推理与直觉交织在一起时，一般不是依三段论规则按步前进，而是采用比较迅速，比较"自由"的方式进行，通常有两种情况：一种是原有逻辑程序的简化和压缩，多表现为在大脑中迅速检索到一种"思维块"并直接做出判断，把它展开也可分解为连续的三段论的推理之链；另一种是推理之链中包含有不合三段论规则的环节，例如其中有犯了"四概念"之类错误的推理，但仍然做出了有价值的判断.成功地做出这些判断，就是直觉起作用的结果.因此，在直觉思维中，非演绎的或超越演绎规则的思维创造不仅是允许的，甚至是合理和必要的.数学发现极其需要想象力的跳跃，从对象甲跳到对象乙，乃至跳到对象丙和对象丁，这样才会发现已有的知识系统中所没有包含的新东西.

(四)在数学审美的过程中，激发灵感

对于一个特定的数学问题，在我们寻找解题路径时利用数学的和谐美、简单美和奇异美，有时亦能收获特别的数学直觉. 在"和谐"美的情境下追求统一性、对称性、不变性、恰当性，在"简单"美的情境下，思考如何用简单的原理、公式来概括大量的事实，在"奇异"美的感悟下，人们会涌现奇特与新颖的感受，所有这些都会在美的感召下，迸发出智慧的火花，这火花就是数学直觉. 因此，"美感与直觉紧密相关"，"美感能力越强，数学直觉能力也越强，从而数学发现与发明的能力也越强."

(五)在反思回顾的过程中，完善认知

波利亚曾精辟地指出"没有任何问题可以解决得十全十美，总剩下些工作要做"，这就明确告诉我们解题后的反思是一个必要的过程. 事实上，一个优美的解题过程(方法)就像一个人一样，应该五官端正，四肢匀称，对于一个解题过程，如果发现各部分之间有明显的不协调之处，则往往有优先或简化的可能，这样的发现就是直觉. 有时当我们虽然把题目做出来了，但并不确认做得正确与否，我们也会寻求另一条路径与解题，比如我们时常会考虑要数形结合去检测答案是不是正确. 这一不同于原本解题的路径就是直觉，这一直觉不仅对修正与完善解题过程有作用，而且对于提高解题者解题能力都有着特别重要的意义.

【参考文献】

[1]李文兴，吴开朗.关于数学直觉思维的几个问题[J].数学传播，1996，20(3)：28.

[2]试论数学直觉思维的逻辑性及其培养[J].数学教育学报，1992，(1)：66.

[3]樊恺.解决数学问题中的直觉[J].中学数学，1998，(3)：1-3.

[4]徐利治，王光明.数学方法论选读[J].北京师范大学出版社，2010：124.