联想：数学解题的重要思维形式

盐城师范学院　段志贵

摘　要：研究联想的目的在于使主体能自觉地强化联想意识，遵循联想规律思考问题．数学联想是探索数学解题途径的向导；是将数学题设向结论转化的桥梁；是寻求数学习题巧思妙解的摇篮；是提升数学解题思维层次的阶梯．数学解题过程中常常采用的联想方法有：形似联想、构造性联想、逆向联想、一般化联想、回归定义联想以及特殊化联想等．

关键词：联想　思维　数学联想　数学解题

古希腊哲学家亚里斯多德曾指出："我们的思维是从与正在寻求的事物相类似的事物、相反的事物或与它相近的事物开始的，以后便追寻与它相关联的事物，由此而产生联想．"在数学中，联想是打开解题方法之门的一把钥匙，是接通解题思路的桥梁，因此，把联想拓展和运用到数学解题中来，具有十分重要的意义．

1　联想及数学联想的内涵

所谓联想，指的是一种自觉的有目的思维活动，是由当前感知或思考的事物，想起有关的另一种事物，或由此再想象起其他事物的心理活动．在思维活动中，由此物而想到彼物这个思维进程的最基本的构成环节都是由联想构成的．如由眼前的山峰而想到世界最高峰珠穆朗玛峰；由眼前的天体想到广阔的宇宙空间；由卫星围绕行星（行星围绕恒星）运转而想到电子围绕原子核运转等等．可以说，思维进程中由此物想到他物的每一步都必须通过联想来构成．诸如，在抽象思维中，概念的形成要通过头脑对若干同类事物"由此及彼，由表及里"的联想（并进行分析比较，这种分析比较也可以分解为具体的若干联想步骤），然后加以"去粗取精，去伪存真"的改造制作，才能构成概念．由概念与概念之间的关系构成判断，由判断与判断之间的关系构成推理，也都同样需要由联想来实现．在形象思维中，由此事物的表象想到彼事物的表象，进而构成新的形象乃至形象体系，也要通过联想来实现．在灵感思维中，由眼前的或某种事物的引发，瞬间沟通与其他事物的联系，从而产生新奇的形象或巧妙的构思等．无论思维过程多么复杂，每个环节的中间跨度有多大，都是由具体的不同类型的联想构成的，这是不以思维主体是否自觉地意识到这一点为转移的．

联想是有规律可循的．研究联想的目的在于使主体能自觉地强化联想意识，遵循联想规律思考问题，从而提高思维效率与质量．基于这一着眼点，我们把联想寓于数学学习之中加以讨论．前苏联教育心理学家克鲁捷茨基认为："数学能力就是用数学材料去形成概括的、简短的、灵活可逆的数学联想的能力．"所谓数学联想，指的是以观察为基础，根据所研究

的对象或问题的特点，联系已有的知识、技能、经验进行想象的思维方法．它是一种再现性现象，是进行类比、模拟、归纳、猜想等似真推理的基础．针对具体数学问题，根据联想的方向、方位、角度的不同，我们可以联想有关定义、公理、定理、公式、性质、法则等数学事实，可以联想到已经解决的熟悉问题，可以将一般问题联想到特殊情况，可以将特殊问题联想到一般情况，可以将数的问题联想到形问题，又可以将形的问题联想到数的问题，可以用高等数学的观点、思想、方法联想解决初等数学的问题，又可以将初等数学的观点、思想、方法移植到高等数学中去等等．这里，著名数学教育波利亚在《怎样解题》一书中拟定的解题策略，是运用数学联想的高度概括，成为世人的典范．

2 数学联想在数学解题中的作用

2.1 数学联想是探索数学解题途径的向导

不论什么问题，只要有路可循，即使复杂、曲折，总可沿路逐步地走向欲达的目标，最伤脑筋的则是面对问题茫茫然不知从何下手，其原因不外是，遇到的题目，其面貌与我们学过的知识、会做的题型，相差悬殊；或者是与我们所掌握的解题方法联系不上．解题之难，也就在于没有一个普遍又行之有效的办法，去打破这无从下手的窘况．处于山重水复疑无路的时候，不妨跳出原来局限的范围，联想到与之相近的知识或类似的问题，并着力去发掘它们内在的联系，由此及彼，以收“他山之石，可以攻玉”的效果；甚至联想到与它的反面进行对比，相反相成，受到有益的启示，如此这般地进行联想，就有可能出现柳暗花明的局面．因此，当我们面临难题，百思不得其解的时候，广泛地进行联想，倒是值得一试的法宝．

例 1 已知 $\begin{cases} a\sec\theta - x\tan\theta = y \\ b\sec\theta + y\tan\theta = x \end{cases}$，求证：$x^2+y^2=a^2+b^2$

分析 本题我们可以局限于三角学的范围内，运用 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ 去导出所证的不等式，但比较麻烦．如果联想到 $\sqrt{x^2+y^2}$ 、$\sqrt{a^2+b^2}$ 在解析几何中都表示某点到原点的距离，而坐标系的旋转并不改变到原点的距离，因此可以猜想：已知的条件应与旋转变换有关，将上式分别乘以 $\cos\theta$，则得

$\begin{cases} b = x\cos\theta - y\sin\theta \\ a = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$，（b，a）、（x，y）正是同一点在坐标系旋转 θ 角时的新、旧坐标．这样，既容易证明，又看出原题是如何编造出来的．

2.2 数学联想是将数学题设向结论转化的桥梁

在数学中，转化是最常用的手段．因为通过适宜的转化，费解的可以变得易懂，生疏

的能够换成熟悉的，从而收到以简驭繁、化难为易的效果，因此，恰当的转化在解题中能发挥巨大的威力． 但是，怎样去转化，特别是朝哪个方向去转化？常常是实现转化的关键，对此，广泛地联想就可引导我们去作转化的尝试——设法沟通联想的对象

例 2 设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，证明：

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\ge 9$$

分析 本题可以采用三角变换进行证明，但比较繁琐．如果联想到代数中一个常见的不等式：“设 a、b、c 是正数，且 a+b+c=1，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 9$”，与本例相比，它们的结论都是“$\ge 9$”，启发我们去转化已知的条件，为此，应将原式第二项拆成两项，并使分母总和为 1，如此尝试，即得

$$\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}=\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\beta},$$

代入原式便达到了我们转化的目的．

2.3 数学联想是寻求数学习题巧思妙解的摇篮

在数学中，我们常常赞赏某些解法巧妙，其原因多是因为它没有墨守常规，而是针对题目的特点出人意料地联想到与之相似的问题，因而给人以新鲜、巧妙之感．

例 3 设$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}=0$，

求证：a、b、c 中至少有两个相等.

分析 本题可以先通分，然后将分子整理、化简为（a-b）（b-c）（c-a）=0，于是得证．但是，分子最终的结果虽然简单，可是计算显然较繁．为避免繁琐的计算，我们可以观察欲证的式子的左边的三项有同一形式——分子是二数之差、分母是该二数之积再加 1，展开联想的翅膀，飞到三角的领域，就会发现正切的差角公式也恰好是这种特点的形式，于是可得一新的证法.

令$\tan\alpha=a$，$\tan\beta=b$，$\tan\gamma=c$，α、β、γ都在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上，

则原题条件变为

$\tan(\alpha-\beta)+\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)=0$.

又由$(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)=0$可知：

$\tan(\alpha-\beta)\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)=0$，

所以$\tan(\alpha-\beta)$、$\tan(\beta-\gamma)$、$\tan(\gamma-\alpha)$至少有一个为 0，故原题得证.

2.4 数学联想是提升数学解题思维层次的阶梯

演算、论证的技能虽是学习数学很重要的基本功，然而对数学的发展来说，更重要的还在于发现，除了从实际中发现数学问题以外，解题过程中，也常常存在着发现问题的机遇，关键在于我们是否有心，如果不满足于解出题来，就会进而考虑，题目的条件是否可以减弱，结论是否还可以加强？这样就有可能将原题改进和推广．一般说来，原题产生的过程中，就曾力求做到条件最少、结论最强．然而，这种努力也因局限于当时所处的时间和范围，未必达到尽善尽美．如果我们有意地进行多方面的联想，那就有可能打破原来所处的局限，受到联想之物的启示，使题目能够改进，问题得以发展．限于篇幅，这里不去举例说明了.

3 数学解题中的数学联想方法

巴甫洛夫说：“解题时的联想，就是找出与题目某些特点很接近的或很相似的原理、方法、结论或命题来，变通使用这些知识和方法，观察能否解决或趋于解决问题.”具体地说，数学解题中我们根据不同的题设条件可以运用以下几种数学联想方法：

3.1 形似联想

分析题目的特点，找出此问题与其他问题形式上的类似点，转化为其他问题求解．这种解决问题的思路，称之为形似联想．

例 4 若 x∈R，求函数 y=$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$的值域．

分析 此题不论从正面还是反面去解都很困难，不易发现其规律，但若将其与两点间的距离公式相比较，即刻便可求解．通过变形整理，

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2}-\sqrt{(x-\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

不难发现函数值 y 是点 A（x，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）与 B（$-\frac{1}{2}$，0）、C（$\frac{1}{2}$，0）两点间距离之差．即 y=$|AB|-|AC|$．通过联想，若 x∈R，且 A、B、C 三点坐标分别为 A（x，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）与 B（$-\frac{1}{2}$，0）、C（$\frac{1}{2}$，0），则求$|AB|-|AC|$的所有可能值即是 y 值域．

3.2 构造性联想

当我们遇到一个数学问题时，往往需要调整思维的视角，在更广阔的背景下，考察联想问题中涉及的代数或几何元素及其关系．将构成此问题的代数或几何模型进行类比联想，转化为其他问题求解，这种解决问题的思路，谓之构造联想．

例 5 已知 x∈R，求证

$$\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt{2-\sin 2x}+\sqrt{2+\cos^2 x-2\cos x}\geq\sqrt{10}.$$

分析 直接去证明此不等式很不容易，求两点间距离也不行．联想到$\sqrt{a^2+b^2}$就是复数 Z=a+bi 的模，于是联想到是否可以构造复数问题呢？将$\sqrt{1+\sin^2 x}$、$\sqrt{2-\sin 2x}$和$\sqrt{2+\cos^2 x-2\cos x}$分别为复数 Z_1=1+i sinx，Z_2=1+（cosx-sinx）i，Z_3=1+（1-COSx）i 的模，得到原题的复数模型．原题转化为 Z_1=1+isinx，Z_2=1+（cosx-sinx）i，Z_3=1+（1-cosx）i，求证：$|z_1|+|z_2|+|z_3|\geq\sqrt{10}$，这样，题目的证明就变得容易了．

此例题将代数问题构造为复数模型，另辟蹊径解决了问题，别具一格．

3.3 逆向联想

当正向思维受阻时，我们可以采用逆向思维，由正向思路转向逆向思路，由问题的正面联想到问题的反面等，此种解决问题的思路，谓之逆向联想.

例 6 试求常数 m 的范围，使抛物线 $y=x^2$ 的所有弦都不能被直线 y=m（x-3）平分.

分析 “不能”的反面是“能”. 垂直平分的弦就是曲线上两点关于直线对称的问题. 那么此问题可转化为：求 m 的取值范围，使得抛物线 $y=x^2$ 上存在两点，对称于直线 y=m（x-3），再求出 m 的取值范围相对于以 R 为全集的补集，即是问题的解.

3.4 一般化联想

分析题目特点，把题目作为范围更大的某类问题之特例，先探求这类大范围问题的解，再探求特例之解，这种解决问题的思路，谓之一般化联想.

例 7 解方程 $\sqrt{x^2+6x+18}+\sqrt{x^2-10x+34}=10$

分析 若采用原思维定势两边平方根麻烦，可以联想方程左边与椭圆方程形式相近. 不妨令 $9=y^2$，则原方程变为 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-5)^2+y^2}=10$. 这是以 F_1（-3，0）、F_2（5，0）为焦点，长半轴 a=5 的椭圆. 其标准方程为：$\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$，又 $y^2=9$，得 x=1.

此题无繁杂的解题过程，亦不须验根，甚为巧妙.

3.5 回归定义联想

定义和概念反映了事物的本质和属性. 有些题目表面看来深不可测，无从下手，但若联想定义内涵，回到定义中去，便会挖掘出优美之解.

例 8 已知双曲线过点 A（-2，4）和 B（4，4），它的一个焦点恰好是抛物线 $y^2=4x$ 之焦点，求其另一个焦点的轨迹.

分析 紧扣双曲线定义加以探索. A、B 两点到两个焦点之距离差的绝对值不是相等吗？于是，优美之解可以从定义中产生. F_1（1，0），设 F_2（x，y），由定义 $\left||AF_1|-|AF_2|\right|=\left||BF_1|-|BF_2|\right|$ 且 $|AF_1|=|BF_1|=5$.

当 $|AF_1|-|AF_2|=|BF_1|-|BF_2|$ 时， F_2 的轨迹是 AB 的垂直平分线，x=1（y≠0）

当 $|AF_1|-|AF_2|=-(|BF_1|-|BF_2|)$ 时，$|AF_2|+|BF_2|=10$，F_2 的轨迹是以 A、B 为焦点的椭圆，中心为（1，4），a=5，b=4，c=3，所以 F_2 的轨迹为 $\dfrac{(x-1)^2}{25}+\dfrac{(y-4)^2}{16}=1$（y≠0）.

3.6 特殊化联想

分析题目之特点，先探求此题目的一些特殊情况进行猜测，然后再讨论一般情况，这种解决问题的思路，谓之特殊化联想.

例 9 设 A、B 为抛物线 $y^2=2px$（p＞0）上的点，且 $\angle AOB=90^0$ (O 为原点)，则直线 AB 必过的定点坐标为_________.

分析 为探求直线 AB 所过定点坐标， 我们不妨先倒退到特殊化之情形，即从特殊状态分析．我们取 OA、OB 的倾角分别为 $\frac{\pi}{4}$、$-\frac{\pi}{4}$，显然 AB 的方程为 x=2p，它与 x 轴交点为 C（2p，0），可能就是本题有待探求的定点．然后进一步考虑到 OA 的倾角 α 任意时，AB 均过点 C 即可.

参考文献：

[1] 钟载硕．联想思维出新意[J]．理科考试研究(高中版)，2000(03):8-10.

[2] 李平龙．运用联想培养思维深刻性初探[J]．中学数学，1995(05):6-8.

[3] 李杰．联想解题的思维策略[J]．现代技能开发，2001(08):53-54.