构造:让解题突破思维瓶颈①

段志贵

(盐城师范学院数学与统计学院 224002)

构造方法作为一种数学方法,能够具体反映出在数学发现过程中所表现出来的创造性思维[1].构造法解题的实质是根据数学问题的条件或结论的特征,用条件中的元素为“原件”,用已知数学关系为“支架”,构造出一种相关的数学对象、一种新的数学形式,从而使问题转化并得到解决[2].

不同于一般的逻辑方法,构造法属于非常规思维.这一思维体现在当某些数学问题在使用通常办法,按定势思维去解决很难奏效时,依据问题的相关特征或性质,从新的角度,用新的观点观察、分析、解释对象,抓住反映问题条件与结论之间的内在联系,把握问题的背景、结构等关系上的特点,构造出满足条件或结论的新的数学对象,或构造出一种新的问题形式.通过构造,使得原问题中隐晦不清的关系和性质在新构造的数学对象(或问题形式)中清楚地表现出来,从而突破思维瓶颈,借助该数学对象(或问题形式)简捷地解决问题.

1 挖掘背景构造,让解题思路明晰

许多问题的编拟都有一些特定的背景,要么是某个概念或数学公式,要么是某个已经解决了的实际问题,要么是一个基本思想的应用等[3].有些问题,当孤立地运用题设条件难以获得解题思路时,不妨把所考虑的问题置于特定的背景下,构造原题的原形,往往可得到简捷巧妙的解法.构造法往往要通过仔细观察、分析,去发现问题各个环节以及其中的联系,从而为寻求解法创造条件,因此构造法体现了发现的思想.

例 1 已知 a,b,c,x 都是实数,且 $a<b<c$,求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值.

分析 $|x-a|$ 的几何意义是,在数轴上表示 x 与 a 两数之间的距离,因此要求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值就是要在数轴上找一点 x,使其到 a,b,c 的距离之和最短.当 x 取在 b 以外的地方时,三条线段 $|x-a|$,$|x-b|$,$|x-c|$ 都有重叠部分,所以当 x 取在 b 点时 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 有最小值,最小值为 $|c-a|$.

例 2 求证:$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$(其中 $n\in\mathbf{N}^+$).

分析 构造数列模型

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{3n+1}-1,$$

则有

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{3n+4}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{3n+4}+\frac{1}{3n+2}-\frac{2}{3n+3}\\&=\frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}>0,\end{aligned}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.

又因 $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-1=\frac{1}{12}>0$,

故 $a_n>0$(其中 $n\in\mathbf{N}^+$),即原不等式得证.

对于某些关于自然数的不等式问题,与数列有着密切的联系,这时可构造有关数列模型,利用其单调性解决.具体地说,欲证含有与自然数 n 有关的不等式 $f(n)>g(n)$,可以构造数列模型 $a_n=f(n)-g(n)$,证明数列 $\{a_n\}$ 是单调递增,且 $a_1>0$.当然本题也可以用数学归纳法或其它方法进行

① 基金项目:江苏省教育厅高校品牌专业建设工程资助项目——盐城师范学院数学与应用数学专业(PPZY2015C211);盐城师范学院教育教学改革重点课题(2018YCTUJGZ011)阶段性研究成果.

证明，但相比之下，用构造数列模型去证，显然更为简洁.

例 3　已知 α、β、γ 均为锐角，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，求证：$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant 3\sqrt{2}$.

分析　由题设条件，可以作一个三度(长度、宽度和高度)分别为 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 的长方体，原问题就可以建立在这个长方体内进行讨论和证明了.

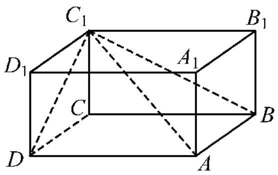

图 1

由于长方体一条对角线和与它过同一顶点的三条棱所成角的余弦值的平方和等于 1，为此可构造一个长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，如图 1 所示，使 $\angle C_1AD=\alpha$，$\angle C_1AB=\beta$，$\angle C_1AA_1=\gamma$. 设 $AD=a$，$AB=b$，$AA_1=c$，则

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a},\tan\beta=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b},$$

$$\tan\gamma=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{c}.$$

由基本不等式，得

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{bc}}{a}+\frac{\sqrt{ca}}{b}+\frac{\sqrt{ab}}{c}\right)$$

$$\geqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{bc}}{a}\frac{\sqrt{ca}}{b}\frac{\sqrt{ab}}{c}}=3\sqrt{2}$$（当 $a=b=c$ 时取等号）.

2　数形转换构造，让解题云开雾散

数形结合是数学中常用的思想方法. 在解题中，数与形的转换经常用到. 通过数形结合，构造某种数学形式，使条件与结论的关系很简洁明了的展现出来，直观、具体，从而使问题得到解决.

例 4　证明 $\sin 5°+\sin 77°+\sin 149°+\sin 221°+\sin 293°=0$.

分析　此题若作为"三角"问题来处理，当然也可以证出来，但从题中的数量特征来看，发现这些角都依次相差 $72°$，联想到正五边形的内角关系，由此构造一个正五边形，如图 2 所示.

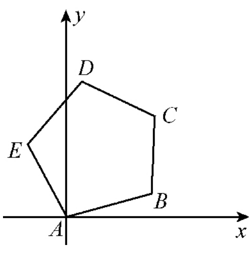

图 2

由于$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}=\mathbf{0}$，从而，各个向量在 y 轴上的分量之和亦为 0，故知原式成立.

这里，正五边形作为建模的对象恰到好处地体现了题中角度的数量特征. 需要解题者具有敏锐的观察力与想象能力. 如果没有一定的建模训练，是很难"创造"出如此简洁、优美的证明的.

例 5　设 x、y、z 为实数，且满足 $0<x$、y、$z<\frac{\pi}{2}$. 证明：

$$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z$$
$$>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$$

分析　先化简结论得

$\frac{\pi}{4}+\sin x\cos y+\sin y\cos z>\sin x\cos x+\sin y\cos y+\sin z\cos z$，

即

$\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y\cdot(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z$.

$\frac{\pi}{4}$是一个单位圆面积的$\frac{1}{4}$，结合问题所给已知条件 $0<x$、y、$z<\frac{\pi}{2}$，可以把问题放在$\frac{1}{4}$个单位圆上考虑，这便是本题的背景所在.

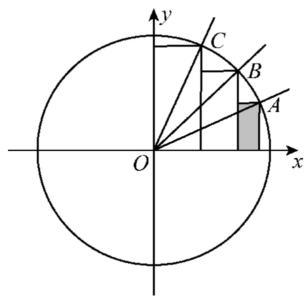

图 3

作单位圆如图 3 所示，因为 $0<x$、y、$z<\frac{\pi}{2}$，设 OA、OB、OC 与 x 轴夹角分别为 x、y、z，则最右端小矩形面积为 $\sin x(\cos x-\cos y)$. 同理可得另外两个矩形面积分别为 $\sin y\cdot(\cos y-\cos z)$，$\sin z\cos z$. 由图 3 易知，三个矩形的面积的和小于

四分之一圆的面积，即

$\frac{\pi}{4} > \sin x(\cos x - \cos y) + \sin y \cdot (\cos y - \cos z) + \sin z \cos z$.

例 6 求函数 $y = |x + 2 - \sqrt{1 - x^2}|$ 的单调区间和值域.

分析 此题用常规方法求解，较为繁琐，转换思维视角，依条件构造解几模型，可获得新颖别致的解法. 将原函数式变形为

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{|x + 2 - \sqrt{1 - x^2}|}{\sqrt{2}} = \frac{|1 \cdot x + (-1)\sqrt{1 - x^2} + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}},$$

这样，$\frac{y}{\sqrt{2}}$ 是动点 $P(x, \sqrt{1 - x^2})$ 到直线 $X - Y + 2 = 0$ 的距离，P 点满足方程 $X^2 + Y^2 = 1 (0 \leqslant Y \leqslant 1)$，其轨迹是一个半圆；过 O 作直线 $X - Y + 2 = 0$ 的垂线分别交半圆、直线于 P_0、R，如图 4 所示，易求得 $P_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

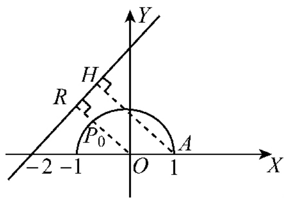

图 4

由图 4 可以看出以 P_0 为界，$\frac{y}{\sqrt{2}}$ 在 $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 上是递减的，在 $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$ 上是递增的. 即 $y = |x + 2 - \sqrt{1 - x^2}|$ 在 $x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 上为递减函数，在 $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ 上为递增函数. 半圆上的点到直线 $X - Y + 2 = 0$ 的最短距离为 $|PR| = \sqrt{2} - 1$，最大距离 $|AH| = \frac{|1 - 0 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，故所求值域为 $y \in [2 - \sqrt{2}, 3]$.

3 透析结构构造，让解题触类旁通

构造法体现了类比的思想，为了找出解题途径，要联系已有知识中与之类似的或与之相关的问题，从而为构造模型提供参照对象. 数学解题时，不妨先看看比比，察觉面对的问题与头脑中的"已知"之间在结构、规律等方面的相似因素，通过联想，类比构造出数学模型，找到解决问题的路径.

例 7 若 x、$y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$，且满足方程 $x^3 + \sin x - 2a = 0$ 和 $4y^3 + \sin y\cos y + a = 0$，求 $\cos(x + 2y)$.

分析 此题 x, y 分离在两个等式之中，看似无从着手，但深入研究已知条件，可以发现两个等式有一些相似的地方. 事实上，把第二个等式进行适当变形可得：

$$(2y)^3 + \sin 2y + 2a = 0,$$

与 $x^3 + \sin x - 2a = 0$ 相比较，容易发现两式结构相似，x 和 $2y$ 居于相同的"角色". 自然想到构造函数 $f(x) = x^3 + \sin x$，则两个条件分别变为：

$f(x) = 2a$ 和 $f(2y) = -2a$，即 $f(x) = -f(2y)$，

因为函数 $f(x) = x^3 + \sin x$ 是奇函数，

所以有 $f(x) = f(-2y)$，

又因为当 x、$y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时，

$f(x)$ 是单调递增的函数，

所以有 $x = -2y$，即 $x + 2y = 0$，

因此，$\cos(x + 2y) = 1$.

例 8 已知 a, b, c 为实数，且 $a + b + c = 0$，$abc = 1$. 求证：a、b、c 中必有一个大于 $\frac{3}{2}$.

分析 本题解题方法很多，但基于构造的解法相对容易、快捷. 事实上，由 $a + b + c = 0$ 及 $abc > 0$，知 a, b, c 中一正二负. 不妨设 $a > 0$，则题设条件可化为 $b + c = -a$，$bc = \frac{1}{a}$. 其结构类似韦达定理，所以可以构造一个以 b, c 为实根的一元二次方程 $x^2 + ax + \frac{1}{a} = 0$.

由于此方程有二个实根，故有 $\Delta = a^2 - \frac{4}{a} \geqslant 0$.

又 $a > 0$，得 $a \geqslant \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{32}{8}} > \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$.

例 9 设 $a_0 = 1$，$a_n = \frac{\sqrt{1 + a_{n-1}^2} - 1}{a_{n-1}} (n \in \mathbf{N}^+)$，求证：$a_n > \frac{\pi}{2^{n+2}}$.

分析 本题的题设中含有 $\sqrt{1 + a_{n-1}^2}$ 及结论中含有 π，这两个特征启发我们可以采用构造三

角函数的方法. 由于 $a_n>0$,因此考虑构造新数列 $\{\alpha_n\}$,使 $a_n=\tan\alpha_n$,其中 $\alpha_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.[4]

通过化简去掉了根号,即

$$\tan\alpha_n=\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha_{n-1}}-1}{\tan\alpha_{n-1}}=\frac{1-\cos\alpha_{n-1}}{\sin\alpha_{n-1}}=\tan\frac{\alpha_{n-1}}{2},$$

则 $\alpha_n=\frac{\alpha_{n-1}}{2}$.

又 $a_0=1$,$a_1=\sqrt{2}-1=\tan\frac{\pi}{8}$,从而 $\alpha_1=\frac{\pi}{8}$.

因此,数列 $\{\alpha_n\}$ 是以 $\frac{\pi}{8}$ 为首项,$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列

$$\alpha_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

考虑到当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,有 $\tan x>x$.

故 $a_n=\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}>\frac{\pi}{2^{n+2}}$.

事实上,对含有形如 $\sqrt{1\pm a_n^2}$, $\sqrt{1\pm a_n}$, $\frac{a_{n+1}\pm a_n}{1\mp a_na_{n+1}}$ 的问题,可尝试通过三角换元构造一个新数列,把一般数列问题化归为特殊数列问题.

4　运用化归构造,让解题冲出重围

构造法还体现了化归的思想,表现在把一个个零散的发现由表及里、由浅入深地集中和联系起来,通过恰当的方法加以处理,化归为已有的认识,自然形成了构造模型的方法. 事实上,有些问题生疏隐晦,按其本来面目无从入手. 这时,解题者应充分把握问题的本质,并对问题作一番提炼、抽象与纯化,对其进行恰当赋义,化归为一个全新的数学问题. 新的数学问题往往超越了原问题的背景或意境,提供了更广阔的思维空间,为问题最终获得解决架设了一条通道.

例 10　已知函数 $y=\sin x+\sqrt{1+\cos^2 x}$ 求函数的最值.

分析　许多人拿到此题最大的困惑是如何去掉根号,这看起来很难. 但注意观察 $\sin x$ 和 $\sqrt{1+\cos^2 x}$ 的关系,可发现 $\sin^2 x+(\sqrt{1+\cos^2 x})^2=2$,则可令

$$\begin{cases}\sin x=\sqrt{2}\cos\theta\\ \sqrt{1+\cos^2 x}=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}\quad\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}\right),$$

这样 $y=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,

而 $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi$,$0\leqslant\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$.

所以函数的最大值为 2,最小值为 0.

可以看到,利用三角函数性质进行构造,可以巧妙地摆脱问题中根号带来的困惑.

例 11　从 6 对老搭档运动员中选派 5 名出国参赛,要求被选的运动员任意两名都不是老搭档,求有多少种不同的选派方法?

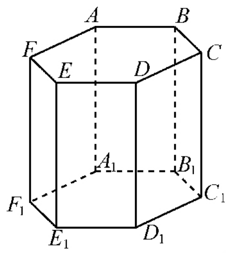

图 5

分析　构造六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$,如图 5 所示,用 6 种不同的颜色给六棱柱的 12 个顶点染色,使得同一侧棱的两端点同色,用来表示一对老搭档运动员. 于是问题被巧妙地化归为:求从 12 个着色点中任取 5 个不同色的点的不同取法即可. 这可分两个步骤完成:

第一步,先求从 6 种颜色中任取 5 种的取法,共有 $C_6^5=6$ 种;

第二步,因为图中的 6 个着色点中的同色点各 2 个,所以第一步中的每一种取法均有 $(C_2^1)^5=32$ 种搭配方式.

故由分步乘法计数原理,完成这件事共有 $6\times 32=192$ 种方法,即选派 5 名运动员共有 192 种方法.

例 12　求 r 元方程 $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ 非负整数解的组数.

分析　解决这个问题,我们可以设计一个适当的数学问题模型,把问题直接化归到不重组合问题上,即:

把 n 个不加区分的球全部放入 r 个盒子里,每个盒子内的球数不限,也可以有空盒子,共有几

种不同放法？

设想 n 个球放在一条直线上，如图 6 所示，在两边插上固定挡板 A、B. 然后利用 $r-1$ 个活动板插入球与球或球与挡板之间的空隙（例如 C、D、E …）. 我们把从 A 板开始的每相邻两个挡板间的球数顺次记为 $x_1, x_2, \cdots, x_r$. 这就是方程的一组解.

图 6

可见，方程的解的组数，即是把 $r-1$ 块活动挡板所有不同的插入方法总数. 而挡板的插入总方法数又是[n(个球)$+(r-1)$(个活动挡板)]个位置中任取$(r-1)$个不同位置的方法数，即 C_{n+r-1}^{r-1}.

构造法解题的非常规性与创造性，使得常常需要非逻辑思维的参与，才能取得关键性的进展[5]，因此，直觉、灵感、想像等思维活动在构造解题中往往不可或缺. 同时，上述构造策略的揭示与方法的选取，也只是为了讨论问题的方便，具体解题时还需综合考虑问题本身相关的多个因素. 有的问题可以直接构造，有的则需要间接构造；有的需要构造条件，有的则需要构造反例；有的要考虑图形的构造，有的则着力于变量间关系的构造. 总言之，构造法解题并无定法，或许还要渗透着猜想、试验、归纳、类比、分类等基本的问题解决策略. 然后，构造法却也是有规律可循的，相信通过深入剖析问题所给背景与结构，灵活采用数形结合、建模化归等数学思想，借助于构造法，一定会突破思维瓶颈，为顺利快捷地完成解题任务创造有利的条件，奠定坚实的基础.

参考文献

[1] 叶留青. 中学数学解题的“构造”策略[J]. 数学通报，2000(12)：19－21

[2] 王延文. 构造性解题方法的心理分析及教学应用[J]. 数学教育学报，1993，2(2)：51－55

[3] 段志贵. 变通：让解题有更充分的预见[J]. 数学通报，2017，56(12)：50－54

[4] 波利亚. 数学的发现——对解题的理解、研究和讲授[M]. 北京：科学出版社，2013：245

[5] 何忆捷，熊斌. 中学数学中构造法解题的思维模式及教育价值[J]. 数学教育学报，2018，27(02)：50－53

（上接第 52 页）

（4）你能完成表 4 所示的课题研究报告吗？

表 4　课题研究报告

姓　名	所在小组
探究（一）	函数 $y=\frac{6}{x}+2$、$y=\frac{6}{x}-2$ 与 $y=\frac{6}{x}$ 图像间的关系是什么？
	结论：
探究（二）	函数 $y=\frac{6}{x-1}$、$y=\frac{6}{x+1}$ 与 $y=\frac{6}{x}$ 图像间的关系是什么？
	结论：
探究（三）	函数 $y=\frac{k}{x-m}+n(k,m,n\neq 0)$ 的图像与性质如何？
	结论：
感　悟	

评注　这个课题性问题的设计借鉴了苏科版义务教育教科书数学实验手册九年级全一册中的“实验 8　二次函数图像的平移”，该课题性问题的结论是变换法作函数图像的基础与依据，可为学生的后继学习打下伏笔. 该课题性问题的设置与解决，提高了学生的能力，发展了学生的素养.

通过实践，笔者认为基于问题驱动的单元复习课有易于提高学生认知、易于把握单元结构、易于提高解题能力、易于发挥主体作用等优点，值得提倡.

参考文献

[1] 王克亮. 高中数学教学“问题驱动”的探索与实践[M]. 苏州：苏州大学出版社，2017，11

[2] 董林伟. 义务教育教科书数学实验手册（九年级全一册）[M]. 南京：江苏凤凰科学技术出版社，2015