归纳公理与数学归纳法探究

200062 华东师范大学教育学院 段志贵

数学归纳法是一种重要的证明方法. 许多文献通过证法分析探寻数学归纳法的逻辑基础、证明方法等[1-5]. 本文试图从归纳公理出发,分析归纳公理在皮亚诺公理体系中的地位以及与数学归纳法之间的关系,由此进一步探讨数学归纳法的本质.

1 归纳公理的提出渊源于数学归纳法思想的萌生与发展

数学归纳法的理论基础(或依据)是归纳公理. 然而,归纳公理的建立是在19世纪末才完成的一项工作,而数学归纳法思想则可以追溯到公元前六世纪的毕达哥拉斯学派,当时有人研究了所谓的"三角数",通过归纳的方法得到了一般的结论 $a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$. 公元前三世纪的欧几里得在证明"质数的个数是无穷的"时提出的"若有 n 个质数,必有 $n+1$ 个质数",实际上也包含了数学归纳法的思想. 真正把数学归纳法作为一种证题方法用到数学证明中却是近代的事. 16世纪意大利数学家毛罗利科在他的《算术》一书中提出了一个"递归推理"原则,用以说明"$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ 对任何自然数 k 都成立". 不过他并没有对这一原则作出清晰的表述,所作的证明也仅限于对 $k=2,3,4$ 时进行的计算.

明确而清晰地阐述并使用了数学归纳法的是法国数学家、物理学家帕斯卡. 他在研究证明"帕斯卡三角形(二项展开式系数表)"等三个命题时,最先准确而清晰地指出了证明过程所必须且只需的两个步骤. 帕斯卡的证明方法正是现在的数学归纳法,他所提出的两个引理就是数学归纳法的两个步骤. 因此,在数学史上,人们认为帕斯卡是数学归纳法的创建人. 但由于帕斯卡的时代,尚没有建立表示自然数的符号,所以帕斯卡证明的第二步仍然只能以例子来陈述. 1686年,瑞士数学家雅·伯努利提出了表示任意自然数的符号,在他的《猜度术》一书中,给出并使用了现代形式的数学归纳法. 这样,数学归纳法开始得到世人的承认并得到数学界日益广泛的应用. 后来,英国数学家德·摩根给定了"数学归纳法"的名称.

数学归纳法的漫长的发展史对后来的自然数的公理化体系的建立具有十分重要的影响. 1889年,意大利数学家皮亚诺建立自然数的公理体系时,把数学归纳法思想作为自然数的公理之一(归纳公理)确立起来. 这才为数学归纳法奠定了坚实的理论基础. 我们回顾这段历史,不难得出这样的结论,这就是说归纳公理的提出渊源于数学归纳法思想的萌生与发展,反过来,它又为数学归纳法的证明提供必要的理论依据.

2 归纳公理是皮亚诺自然数公理化定义的一个必要条件

皮亚诺公理是按照我们习惯上的自然数列书写给出的. 首先我们写出数"1",即自然数列有一个起始数,公理(1)就是说明这一事实的;然后我们写出"1"的后继"2",再写出"2"的后继"3",…,如此继续,每一个自然数都有一个、并且只有一个自然数作为它的后继,公理(2)就是说明这一事实的;这样写下去不会出现循环,因为不同的自然数的后继也不相同,公理(3)就是说明这一事实的. 那么,怎样保证写下去不会遗漏一个自然数,并且假定我们有无限的时间和取之不尽的书写材料的话,不多不少,可以写出全部的自然数?事实上,归纳公理的建立,我们就可以写出全部自然数. 如果没有归纳法公理,则数列$\{1,3,5,\cdots\}$也可以作为自然数集,因为它显然满足前三条公理;又如设 M 是不小于1的实数的集合,令 M 中任一实数 a 的后继为 $a+1$,容易验证,集合 M 也满足皮亚诺公理的前三条. 从这个意义上说,在皮亚诺公理化定义中,归纳法公理并非可有可无,而是自然数定义不可缺少的一个条件.

3 归纳公理下的数学归纳法与归纳法有质的不同

关于数学归纳法是归纳推理,还是演绎推理,争论很多[2].有人坚持认为是一种“归纳法”;有人认为不是“归纳法”但未明确归于“演绎法”(如称为递归推理等);有人把它直接归为“演绎法”,有人则把归纳与演绎加以结合称为“数学归纳——演绎法”.文[1]从数学归纳法与归纳公理之间的关系以及演绎法的推理形式出发,说明数学归纳法是一种演绎法,让人易于接受,但其中的说理依据尚需要补充和加强.

(1) 归纳公理建立前后数学归纳法内涵的变迁

数学归纳法早于归纳公理被人们所使用.从时间的角度上讲,归纳公理产生前后的数学归纳法性质是不一样的.归纳公理产生前数学归纳法是人们的理论探索,是“空中浮标”,虽经常使用,却未经证明,缺少理论基础;而在皮亚诺在完成自然数公理体系以后,数学归纳法具有理论基础,是经过建构理论证明了的一条定理,是解决其它数学问题的一个实用工具.

(2) 归纳公理下的数学归纳法与归纳法有质的不同

从时间角度上理解,归纳公理建立之前的“数学归纳法”的词义,由于没有经过严格意义上的(自身)证明,带有比较强烈的“归纳”色彩,毛罗利科用几个例子“证明 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ 对任何自然数 n 都成立”;帕斯卡指出的“证明过程所必须且只需的两个步骤(帕斯卡证明的第二步仍然只能以例子来陈述)”等虽然都是使用的初始阶段的数学归纳法,潜在的都蕴含着一种归纳思想诱因.事实上,人们想证明 $P(1)$、$P(2)$、$P(3)$、…、$P(k)$、…,所有的命题都成立,而试图总结出一个共同的属性——P 命题在任何(自然数)状况下都能成立,潜意识是在归纳,正如不完全归纳、完全归纳一样,解决问题的方向是部分推广到全部.然而缺少工具,只能是探求每一个数学问题的解答,而试图归纳出共性的目标,它的落脚点体现在归纳上.

然而,自从皮亚诺建立了自然数公理体系以后,情况就不一样了.这时,我们所说的数学归纳法不再是原始定义时的词义了,而是经过归纳公理证明了的一种科学证明方法,它是一种演绎推理的特殊情形.事实上,我们是用归纳公理这个一般性的前提推出数学归纳法原理这个个别性的结论.归纳公理必然蕴涵数学归纳法原理.而当我们用数学归纳法去证明某一个与自然数有关的命题时,又是用数学归纳法原理.这个一般性的前提去推出该命题成立这个个别性的结论.数学归纳法原理必然蕴涵该命题.所以,数学归纳法是一种演绎法.

本质上说,归纳法是的发现手段,它的结构是似真的,而数学归纳法则结构是真实的,是一种演绎的方法,两者属于不同的逻辑范畴.为说明起见,我们以命题 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$ 为例.这个等式从哪里来?不能否认,是在归纳猜测的基础上产生的,这其中的归纳思想占主导地位.但是,在完成了命题左边等于右边的归纳发现以后,归纳法再也“无能为力”了,这时的数学归纳法证明应运而生了.显然数学归纳法,是对归纳法“未尽”事业的继续,它不是在归纳,而是在证明.

正如世界数学名著[6]所说的那样,数学归纳法证明这个公式足够了,但这证明没有表明这个公式最初是怎么产生的.“由于这样一种证明方法并没有给出发现过程的线索,把它称为验证似乎更为合适.”这恰恰说明了数学归纳法只是在证明,而不再兼有发现的功能.所以,从归纳公理出现之日起,数学归纳法就已走出归纳法庇荫,脱胎换骨,演变成为一种演绎法.

参考文献

[1] 李宗俊.数学归纳法的本质[J].宜宾师范高等专科学校学报,2001,6(2):46-47
[2] 罗增儒.关于数学归纳法的逻辑基础[J].中学数学教学参考,2004,(8):17-18
[3] 申祝平.为“数学归纳法”正名[J].中学数学教学参考,1994,(5):38-39
[4] 胡重光.数学归纳法与匹亚诺公理[J].数学理论与应用 2005,25(4):152-154
[5] 平辛伦.数学归纳法史述[J].数学教学,1995,(1):34-36
[6] 左平,张饴慈译.什么是数学[M].上海:复旦大学出版社,2005.21-22