一道数学模考题的错解分析与反思

段志贵[1],陈兴鹏[1],黄云鹤[2]

(1.盐城师范学院数学与统计学院,江苏 盐城 224002;

2.青海师范大学数学与统计学院,青海 西宁 810000)

错误也是一种教学资源.数学解题中出现各种各样的错误是一件很正常的事,如果我们能够正视解题错误的存在,善于把解题错误作为一种学习资源去进行合理的开发与利用,往往能收到意想不到的效果.一方面,错解能够帮助我们查漏补缺,更好地掌握数学知识;另一方面,在纠错过程中能够学会养成良好的学习习惯,增强学好数学的信心.以下我们对一道数学模考题的错解进行分析,反思错误成因,探寻科学的解题路径,以丰富认识,加深对问题本质的理解.

1 问题呈现析题意

设方程 $x^2+ax+b-2=0(a、b\in \mathbf{R})$ 在 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ 上有实根,求 a^2+b^2 的取值范围[1].

通读题目,易知解决该题的关键在于对已知方程在给定区间内有实根的这一条件的理解与运用上.一元二次方程存在实根,则 $\Delta=a^2-4(b-2)\geqslant 0$,由此可直接用求根公式得到 x_1 和 x_2(不妨设 $x_1\leqslant x_2$),大多数同学发现题目所给条件恰好是两个区间,就想当然地认为 $x_1\in(-\infty,-2]$ 且 $x_2\in[2,+\infty)$,再据此做变形整理得到关于 a、b 的不等式,从而求解得到 a^2+b^2 的取值范围.事实上,已知条件"方程在 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ 上有实根"的含义是"至少有一实根在给定区间内",并不能简单地把两根分别设定在两个区间上.

(下转第38页)

(上接第36页)

解 因为 D 为圆外一点,由题意得 B,A,D 三点共线,设 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$,

所以 $\lambda+\mu=1$,

即 $\mu=1-\lambda(\lambda>0,\mu>0)$.

所以 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.

因为 C,O,D 三点共线,

设 $\overrightarrow{OD}=-\alpha\overrightarrow{OC}(\alpha>0)$,

因为 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$,

所以 $m=-\frac{\lambda}{\alpha},n=-\frac{1-\lambda}{\alpha}$.

所以 $m+n=-\frac{\lambda+1-\lambda}{\alpha}=-\frac{1}{\alpha}\in(-1,0)$.

平面向量是数形结合的完美典范,通过对三点共线向量式定理的研究与拓展,我们明白了该定理的内容及性质及该定理在处理共线、定值、最值或取值范围中的简单应用.教材是构建知识体系的基础,对教材上的经典例题的研究往往也会有新的发现和收获.我们不能仅仅以解决题目本身为目的,更要深入研究,在老师的引导下作更深层次的思考与探究,不仅可以提高我们分析问题、解决问题的能力,也对我们今后的学习有所帮助.

(责审 连四清)

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(上接第37页)

2 错因追溯查源头

进一步分析上述解题错误,可以发现更深层次值得注意的问题.题目的条件是"方程在$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$上有实根",而把题干理解成是在两区间内各有一个根,这是错误的根源.本质上说,这一错误源于对以下两种情形的疏忽:

一是明确两个根均在区间$(-\infty,-2]$内或者都在$[2,+\infty)$内,包含两根相等的特殊情况;二是明确有一个根在区间$(-\infty,-2]$内(另一根不用考虑,当然也可能在$(-\infty,-2]$内),或者有一个根在区间$[2,+\infty)$内(另一根不用考虑,当然也可能在$[2,+\infty)$内).严格意义上说,第一种情形是第二种情形的特殊形态.

明确一根在给定区间内

这才能说是对题意真正的准确理解.此时,要么较小的实根$x_1\leqslant-2$(不用考虑较大的实根),要么较大的实根$x_2\geqslant2$(不用考虑较小的实根).它们都满足题意要求,于是有

$$\frac{-a-\sqrt{a^2-4(b-2)}}{2}\leqslant-2,$$

或$$\frac{-a+\sqrt{a^2-4(b-2)}}{2}\geqslant2.$$

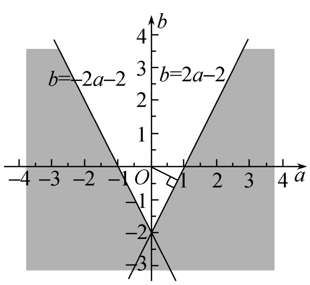

图1

化简得$2a+b\leqslant-2$或$2a-b\geqslant2$.依据所得的两个范围,结合图1求解,可得

$a^2+b^2=(d_{\min})^2=|OM|^2$

$$=\left(\frac{|2|}{\sqrt{1^2+(\pm2)^2}}\right)^2=\frac{4}{5}.$$

综合上述所有情形,本题待求的a^2+b^2的取值范围是$[\frac{4}{5},+\infty)$.

3 围魏救赵寻思路

显然,按照前文的思路求解本题,需要考虑多种情况,较为复杂,很容易忽略其中的某种情况而导致出错.那么为了寻求较为简便的方法,可否从已知条件的对立面出发,也就是先解决"已知方程$x^2+ax+b-2=0(a、b\in\mathbf{R})$在区间$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$上没有实根,求$a^2+b^2$的取值范围"这个问题,此时要么方程无解,要么方程的解都在区间$(-2,2)$内.

若方程无解,$\Delta=a^2-4(b-2)<0$,则$b>\frac{1}{4}a^2+2$;

若方程的解都在区间$(-2,2)$内,

则$\begin{cases}f(2)>0,\\f(-2)>0,\\-2<-\frac{a}{2}<2,\\f(-\frac{a}{2})\leqslant0,\end{cases}$即$\begin{cases}2a+b+2>0,\\-2a+b+2>0,\\-4<a<4,\\b\leqslant\frac{a^2}{4}+2.\end{cases}$

合并这两种情形在aOb坐标平面内表示的区域,再取其对立面存在的区域,即为原方程在$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$区间内有实根的$a、b$可行域,如图2所示的阴影部分.此时,

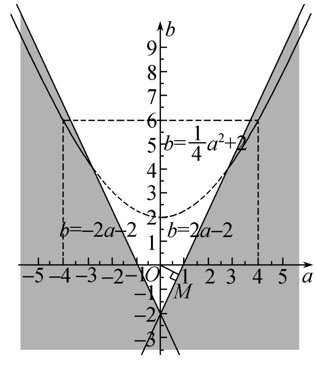

图2

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(a^2+b^2)_{\min}=|OM|^2=\left(\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}\right)^2=\frac{4}{5}.$$

4 另辟蹊径求正解

不妨转变一种思路，突破常规的解题方式，将题中的辅助变量转换成主元，而视原来的“主元”为参量，从而反客为主、另辟蹊径，以达到化繁为简之效[2].

具体而言，将原方程中的 a,b 视为主元，原变量 x 看作参量，方程 $x^2+ax+b-2=0$ 视为 aOb 坐标平面上的一条直线：$xa+b+x^2-2=0$，$P(a,b)$为直线上的点，则所求 a^2+b^2 即为$|PO|^2$.设 d 为点 O 到直线 l 的距离，由几何条件可知：

$$|PO|^2\geqslant d^2=\left(\frac{|x^2-2|}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2=\frac{(x^2+1-3)^2}{x^2+1}$$

$$=(x^2+1)+\frac{9}{x^2+1}-6.$$

因为 $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，令 $t=x^2+1$，所以 $t\in[5,+\infty)$，且易知函数 $t+\frac{9}{t}$ 在$[5,+\infty)$上为增函数，所以，$|PO|^2\geqslant(x^2+1)+\frac{9}{x^2+1}-6=t+\frac{9}{t}-6\geqslant5+\frac{9}{5}-6=\frac{4}{5}$.

等号成立的条件是$\begin{cases}|PO|=d,\\x^2+1=5,\end{cases}$ $x=\pm2$，亦即 $a=-\frac{4}{5}$，$b=-\frac{2}{5}$或者 $a=\frac{4}{5}$，$b=-\frac{2}{5}$.

所以$(a^2+b^2)_{\min}=\frac{4}{5}$.

显然变换主变量后的数形结合更简洁、直观.在一个含有多个变量的问题中，“客随主变”理所当然，但有时“喧宾夺主”也未尝不可，甚至能擦出不一样的火花.

5 回顾反思重提升

回顾本题的求解过程，我们有以下两点收获：

一是审题要清，这是正确解题的前提.本题给出的错解非常典型且常见，错误地理解了“在$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$上有实根”的含义，导致了“全盘皆输”.由此可见，面对一道题目，不能“想当然”、草草了事，要在理解题意、探究问题本质上下功夫，只有这样，才能保证解题在正确的航线上前进，才能保证解题能够到达成功的彼岸.

二是善于变通，这是正确解题的关键.解题不能仅着眼于准确无误的层面，探寻科学、高效的解题方法也至关重要.本题的求解运用了“正难则反”和“主元变换”两种策略，有效地帮助我们快速解题.因此，在数学解题中，我们要善于拨开问题的面纱，去粗取精，去伪存真，巧施变换，逆向助推，努力在陌生中找寻熟悉的光亮，着力发现题目条件之间的关联性及其联通纽带.

总之，数学解题是“山重水复”的过程，那怕一时解错了，也不可怕，只要我们及时总结，并深刻反思，在纠错中辨析，在反思中提高，最终就一定会迎来“柳暗花明又一村”的解题新境界.

参考文献

[1] 段志贵.数学解题研究——数学方法论的视角[M].北京：清华大学出版社，2018：165.

[2] 冯国明.数学解题中的“反客为主”[J].数学通报，2006(06)：53－54.

（责审　曹付生）

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net