类型 4　已知 $x, y\in\mathbf{R}_+$，$\frac{a_1}{x}+\frac{b_1}{y}=c_1$，**求** a_2x+b_2y **的最小值，其中** $a_1, b_1, a_2, b_2\in\mathbf{R}_+$，$c_1$ **为常数．**

例 4　已知 $x, y\in\mathbf{R}_+$，$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1$，求 $x+2y$ 的最小值．

思路 1　本题可用均值不等式及 1 的代换，将 $(x+2y)\times 1$ 展开为 $10+\frac{16y}{x}+\frac{x}{y}$．

思路 2　构造柯西不等式关键使其出现定值，由于 $\frac{8}{x}\times x=8$，$\frac{1}{y}\times 2y=2$ 是定值．

解　令 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{\frac{8}{x}}, \sqrt{\frac{1}{y}})$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{x}, \sqrt{2y})$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{\frac{8}{x}}\times\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1}{y}}\times\sqrt{2y}=3\sqrt{2}$，

$|\boldsymbol{a}|=\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x+2y}$，

又 $\because|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，$\therefore 3\sqrt{2}\le 1\times\sqrt{x+2y}$，

$\therefore x+2y\ge 18$，当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{8}{x}}}=\frac{\sqrt{2y}}{\sqrt{\frac{1}{y}}}$ 取“=”，

即 $x=12$，$y=3$ 时，$x+2y$ 取最小值 18．

变式　已知 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in\mathbf{R}_+$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=3$，求证：$\frac{x_1^{\ 2}}{3+x_1}+\frac{x_2^{\ 2}}{3+x_2}+\ldots+\frac{x_n^{\ 2}}{3+x_n}\ge\frac{3}{n+1}$．

思路　构造柯西不等式使其出现定值，虽然 $\frac{x_1}{\sqrt{3+x_1}}\times\sqrt{3+x_1}$，$\frac{x_2}{\sqrt{3+x_2}}\times\sqrt{3+x_2}$，…，$\frac{x_n}{\sqrt{3+x_n}}\times\sqrt{3+x_n}$ 不是定值，但将 n 个式子相加发现它们的和是已知的 $x_1+x_2+\cdots+x_n=3$，从而构造也就顺利了．

解　令 $\boldsymbol{a}=(\frac{x_1}{\sqrt{3+x_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{3+x_2}}, \cdots, \frac{x_n}{\sqrt{3+x_n}})$，

$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3+x_1}, \sqrt{3+x_2}, \cdots, \sqrt{3+x_n})$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{x_1}{\sqrt{3+x_1}}\times\sqrt{3+x_1}+\frac{x_2}{\sqrt{3+x_2}}\times\sqrt{3+x_2}+\cdots$

$+\frac{x_n}{\sqrt{3+x_n}}\times\sqrt{3+x_n}=3$，

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\frac{x_1^{\ 2}}{3+x_1}+\frac{x_2^{\ 2}}{3+x_2}+\ldots+\frac{x_n^{\ 2}}{3+x_n}}$，

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(3+x_1)+(3+x_2)+\ldots+(3+x_n)}=\sqrt{3(n+1)}$，

又 $\because|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，

即 $\frac{x_1^{\ 2}}{3+x_1}+\frac{x_2^{\ 2}}{3+x_2}+\ldots+\frac{x_n^{\ 2}}{3+x_n}\ge\frac{3}{n+1}$，

当且仅当 $\frac{\frac{x_1}{\sqrt{3+x_1}}}{\sqrt{3+x_1}}=\frac{\frac{x_2}{\sqrt{3+x_2}}}{\sqrt{3+x_2}}=\cdots=\frac{\frac{x_n}{\sqrt{3+x_n}}}{\sqrt{3+x_n}}$ 取“=”，即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{3}{n}$ 时，命题成立．

对于柯西不等式，学生刚学一般会感到心中无数，其实借助向量构造最主要是构造两个向量，而在这其中最关键的也决定构造能否成功的最好衡量标准是 $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 这三个值只要能出现两个定值，构造也就水到渠成了．

参考文献

[1]安振平．一组优美的代数不等式．中学数学教学参考：上旬，2013 (3)：63
[2]林群．平面向量在解题中的应用例说．福建中学数学，2012 (5)，40-41
[3]祁海波．向量法在高中数学中的应用．考试：高考数学版，2010 (7-8)：103-105
[4]万平方．向量应用“四化” ．中学数学：高中版，2009 (8) :40-43
[5]刘绍学．普通高中课程标准实验教科书：数学选修 4-5．北京：人民教育出版社，2008

直觉起步　构造突破

——一道国际数学竞赛题引发的思维跃进

段志贵　　盐城师范学院数学科学学院（224002）

一个有价值的数学问题的解决，往往需要调动我们全部的智慧去提取已知、捕获念头，分析条件，拟定出有效的解题方案．根据笔者的体验，直觉的念头，直觉的延伸，到依据题设与结论的精细构造，对于问题解决将会起到极大地推进作用．以下以一道竞赛题为例，作具体分析．

这是一道非常特别的三角证明题，1963 年出现在第 5 届国际数学奥林匹克（IMO）竞赛试卷上，近

半个世纪来，这道题从未失去它应有的光环．当我们把它重新捡起，分析其中蕴含的丰富的数学思想方法，有着十分重要的意义．

题目 证明$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$．

通过审题，我们至少关注到以下三点：一是左边 3 项都是余弦值；二是 3 个角度之间存在着特殊关系；三是第 2 项前为负号．由于题目字数较少，因此，题意不难明了．

1 直觉变式，着力化归

在最初的审题后，直觉告诉我们，可以尝试用和差化积公式把等式左边化简，即把等式左边一、三两项利用和差化积公式，通过恒等变形，整理化简，得：左边$=2\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}$

$$=\frac{\cos\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}-\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}-\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$\underline{\underline{\text{积化和差}}}\frac{\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{1}{2}=\text{右边}.$$

直觉延伸：开始阶段把分子分母同乘以$\sin\frac{\pi}{7}$，也许可行．事实上，

$$\text{左边}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

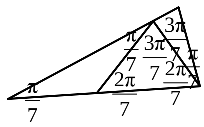
$$=\frac{1}{2}.$$

上述直觉与直觉延伸，虽然解决了问题，但过程比较复杂，特别是有关计算还是比较繁琐的．能否有更巧妙的方法呢？

2 数形结合，活跃思维

进一步审题，我们会有这样的直觉念头：三个角之间有关联，这里面有没有可突破的切口呢？

基于数形结合思想，从角的特殊性引发思维，我们可以探索能否构造一个三角形，使其中有$\frac{\pi}{7}$、$\frac{2\pi}{7}$、$\frac{3\pi}{7}$．也许在不断地尝试过程中，我们会得到以下图形：



上图中，$OA=OB$，$OC=CD=DB=BA$，

不妨设为1，则$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{1}{2}OD$，

$\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{1}{2}CB$，$\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}AD$．

沿着这样一条路径，我们不难求得：

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}(OD-CB+AD)$$

$$=\frac{1}{2}(OA-CB)=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}.$$

3 接近联想，巧造复数

既然数形结合能够解决本题，那么向量法也许可行．于是进一步延伸我们的直觉，可以思考怎样用向量表示$\cos\frac{\pi}{7}$、$\cos\frac{2\pi}{7}$、$\cos\frac{3\pi}{7}$．事实上，这样的思维延伸可能无功而近．

不过，我们由向量可以会想到利用复数解题．这里涉及到怎样构造复数的问题了．复数的计算有一个特殊性，这就是实部与虚部的计算“互不干涉”，本题的计算能否利用这一性质在实部（基于题设中都是余弦三角函数值）上做文章呢？

不妨构造复数$\varepsilon=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$，

则$\varepsilon^2=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，

$\varepsilon^3=\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}$，……

然而，$\varepsilon-\varepsilon^2+\varepsilon^3=\varepsilon(1-\varepsilon+\varepsilon^2)=\varepsilon\frac{(1-\varepsilon+\varepsilon^2)(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon}$

$=\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^3)}{1+\varepsilon}$运算量大，找不到规律．可是，在运算过程中，很快发现ε^5与ε^2的实部互相反数，由此我们思考能否计算$\varepsilon+\varepsilon^3+\varepsilon^5$呢？事实上，

$$\varepsilon+\varepsilon^3+\varepsilon^5=\frac{\varepsilon(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4)(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon^2}=\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^6)}{1-\varepsilon^2}$$

$$=\frac{\varepsilon-\varepsilon^7}{1-\varepsilon^2}=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}=\frac{1}{1-\varepsilon}，$$

而 $\dfrac{1}{1-\varepsilon}=\dfrac{1}{1-\cos\dfrac{\pi}{7}-i\sin\dfrac{\pi}{7}}=\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}}{2(1-\cos\dfrac{\pi}{7})}$．

把实部相比照，显然有

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}，$$

即 $\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{2}$．

4　重构向量，突破束缚

复数解法使用了 $\cos\dfrac{2\pi}{7}=-\cos\dfrac{5\pi}{7}$ 这一关系式，由是我们不难想到：

$$\cos\frac{2\pi}{7}=-\cos\frac{5\pi}{7}，\ \cos\frac{\pi}{7}=-\cos\frac{6\pi}{7}，$$

$$\cos\frac{3\pi}{7}=-\cos\frac{4\pi}{7}，\ \cdots$$

于是想到：$\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}$

$$=-(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7})．$$

既然正负量可以转换或抵销，那么构造向量去求解就有可能的了．

沿着这一思路，我们可以在单位圆上取分布均匀的 7 个点，构造 7 个方向不一却“合力平衡”的向量．不妨设为

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=，\ \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_7=，\ \cdots$$

$$\boldsymbol{a}_7=(\cos\frac{14\pi}{7},\sin\frac{14\pi}{7})．$$

显然，有 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_7=\boldsymbol{0}$，

则 $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}+\cos\dfrac{8\pi}{7}$

$$+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}+\cos\frac{14\pi}{7}=0．$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}=-1．$$

易得 $\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{2}$．

5　拓宽思路，推广结论

利用向量求解告诉我们解题的关键是：在单位圆上找出均匀分布的 7 个向量，它们的横坐标之和为 0．由此，不难想到单位圆上有多个与上述性质一样的向量，也应当一样得到类似的结论．

为便于思考，我们构造在单位圆上有 $2n+1$ 个分布均匀“合力平衡”的向量，一样可以得到以下结论：

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cdots+\cos\frac{(4n+2)\pi}{2n+1}=0．（※）$$

化简得 $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}-\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2}．（※※）$$

对于这一结论，我们还可以根据第三部分所述的解题模式用构造复数的方法加以证明．

事实上，若设 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}+i\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}$，则 $\varepsilon^{2n+1}=1$，于是 $\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{2n+1}=\dfrac{\varepsilon(1-\varepsilon^{2n+1})}{1-\varepsilon}=0$．再进一步，我们很快就可以得到（※）式和（※※）式．

回顾上述解题过程，我们不难发现数学题目只是思维活动的载体，解决问题的过程也就是思维活动的过程．

回顾和反思本题解题过程，不难发现，直觉思维不仅能帮助我们正确、合理地运用逻辑推理手段进行思考，还能够引发我们变换思考角度， 实现认识上的飞跃．

与此同时，根据所给问题的特点和需要，把题设条件中的相互关系构造出来，往往能化繁为简，化难为易，独辟蹊径，收到简洁明快、出奇制胜的效果．因此，从直觉到构造，可以说是解决较抽象数学问题的一般思想方法．

通过上述解题思维的发散，我们更加深刻地理解波利亚所说的话，“在你找到第一个蘑菇时，继续观察，也许就能发现一堆蘑菇．”从这道证明题出发，我们的解题思路不断拓宽，思维不断跃进，是不是一样收获很大?

（本文系盐城师范学院自然科学研究项目“从直觉到构造：数学问题解决的突破与实现”【编号：08YCKL069】阶段性研究成果．