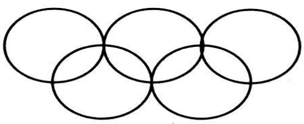
一道国际小学数学竞赛题的求解

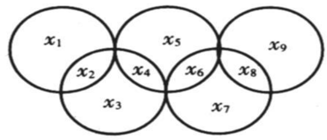
江苏省盐城师范学院数学科学学院
经济开发区世墩小学(224002) 段志贵
顾翠红

2004 年 9 月, 在意大利举办的第二届国际小学数学竞赛。最后一道题目是这样的:

将数字 1~9 不重复地填入下图由五个圆圈所围的九个区域中, 每个区域内只能恰填入一个数字, 使得每个圆圈内数字的总和都相等。请问共有多少组不同的答案? 并请画出所有可能的答案。



在网上很容易搜索到这一题目, 但找不到它的具体解法. 不揣浅陋, 笔者运用逐步尝试法给出一种解答, 以期抛砖引玉。



事实上, 这道题, 找出一组或者两组答案, 还不是一件困难的事, 困难在于需要确定出共有多少组不同的答案。

不妨把这九个数字分别用 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 和 x_9 表示, 则:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9=45 \qquad (※)$$

$$x_1+x_2=x_2+x_3+x_4=x_4+x_5+x_6=x_6+x_7+x_8=x_8+x_9 \qquad (※※)$$

设(※※)的值为 k, 有 $x_1=k-x_2$, $x_2=k-x_2-x_4$, $x_5=k-x_4-x_6$, $x_7=k-x_6-x_8$, $x_9=k-x_8$, 代入

换 2 本乙种练习簿。即一次需要用(1+2=)3(本)甲种练习簿换成 1 本丙种练习簿和 2 本乙种练习簿。而换一次付的钱数就会减少(7×3-2-3×2=)13(角)。因此需要换(117÷13=)9(次), 也就是说丙种练习簿是(1×9=)9(本), 乙种练习簿是(2×9=)18(本)。那么甲种练习簿是(47-9-18=)20(本)。

3. 一物对一物连一物的连带假设置换。

例 4 老师给全班同学分苹果, 一组每人分 7 个, 二组每人分 5 个, 三组每人分 6 个。如果一组人数是二组的 2 倍, 二组和三组一共有 25 人, 并且苹果的总数是 319 个, 那么全班总人数是多少人?

解 假设 25 人都是三组的(一组和二组的人数都是 0), 那么苹果的总数是(6×25=)150(个)。苹果总数比实际少(319-150=)169(个)。这样需要把一部分三组的人换成二组的人, 而换成二组的 1 人, 就会同时增加(1×2=)2(人)一组的。因为换一次, 苹果增加(7×2-6+5=)13(个), 所以需要换(169÷13=)13(次)。也就是说二组的有(1×13=)13(人), 而一组的有(13×2=)26(人), 三组的有(25-13=)12(人)。

这些都是三物之间的假设置换, 用口诀可以概括为: 三物也可作置换, 其中二物有关联。假设全是第三物, 差额肯定会出现。一物换二有讲究, 二物务必同时换。换多换少有比例, 看好条件是关键。换了一回差减少, 最终换得差减完。

三、习题精选

1. 某中学共 30 个班级, 各班的人数只可能是 44、45 或 46 人。已知全校的学生总人数为 1352, 且 44 人的班级比 45 人的班级多 2 个。求这个中学里, 44 人的班、45 人的班、46 人的班各有多少个? (提示: 先假设 44 人的班去掉 2 个, 再按照例 2 的思路解答)

2. 学校组织新年游艺晚会, 用于奖品的铅笔、圆珠笔和钢笔共 232 支, 价值 100 元, 其中铅笔的数量是圆珠笔的 4 倍, 已知每支铅笔 0.2 元, 每支圆珠笔 0.9 元, 每支钢笔 2.1 元。问: 三种笔各有多少支? (提示: 先假设 232 支都是钢笔, 再用(1+4=)5(支)钢笔换 1 支圆珠笔和 4 支铅笔。)

3. 李老师家进行装修, 小圆灯泡每个 5 元, 普通灯泡每个 2 元, 节能灯泡每个 17 元, 如果需要购买的普通灯泡个数是小圆灯泡的 3 倍多两个, 小圆灯泡和节能灯泡一共 21 个。如果一共花费了 295 元, 那么每种灯泡各买了多少个? (提示: 先假设少购买 2 个普通灯泡, 再按照例 4 的思路解答)

4. 有若干人参加劳动, 一部分人抬土, 其余的人挑土, 共用去 27 根扁担和 44 个筐。问: 抬土和挑土的各多少人? (提示: 抬土是一根扁担一个筐, 挑土是一根扁担两个筐)

研究课

“6和7的加减法”案例及评析

河南省舞钢市教育局教研室(462500) 曹翠荣

我市第十一届优质课比赛,一节又一节课,听后感触颇深:同是一样的学生,一样的教学内容,一样的教学设施和场地,却因不一样的老师,不一样的设计,不一样的教学方法,而使课堂教学收到不一样的教学效果。现就人教版数学一年级上册《6和7的加减法》第二课时的一个成功案例,谈些看法。

一、案例描述

(一)导课,复习旧知。

师:同学们,今天能在这宽敞明亮的教室里给同学们讲课,我感到非常荣幸。为了感谢大家对我的支持,我特意从遥远的外太空带来一位外星朋友,你们想见吗?

生:想

师:这位外星朋友就在这扇门里,同学们只要打开这扇门,就能见到他。

师出示课件

4+1=	1+4=
3−1=	4−2=
2+2=	5−2=
3+1=	3+2=

(※),则得

$$5k-x_2-x_4-x_6-x_8=45$$

所以,$x_2+x_4+x_6+x_8=5k-45=5(k-9)$,即$x_2+x_4+x_6+x_8$是5的倍数.而对于1到9九个数中任意四个数之和最小值是10,最大值为30,故

$$k=11,12,13,14\text{或}15。$$

我们暂不考虑x_2,x_4,x_6和x_8的具体取值,把它们可能取值的数字放在一个括号里,则存在以下五种情形:

(1)$k=11$,$x_2+x_4+x_6+x_8=10$,有一个可能数组,是(1,2,3,4).

(2)$k=12$,$x_2+x_4+x_6+x_8=15$,有六个可能数组,它们是(1,2,3,9),(1,2,4,8),(1,2,5,7),(1,3,4,7),(1,3,5,6),(2,3,4,6).

(3)$k=13$,$x_2+x_4+x_6+x_8=20$,有十二个可能数组,它们是(1,2,8,9),(1,3,7,9),(1,4,6,9),(1,4,7,8),(1,5,6,8),(2,3,6,9),(2,3,7,8),(2,4,5,9),(2,4,6,8),(2,5,6,7),(3,4,5,8),(3,4,6,7).

(4)$k=14$,$x_2+x_4+x_6+x_8=25$,有六个可能数组,它们是(1,7,8,9),(2,6,8,9),(3,5,8,9),(3,6,7,9),(4,5,7,9),(4,6,7,8).

(5)$k=15$,$x_2+x_4+x_6+x_8=30$,有一个可能数组,是(6,7,8,9).

对于情形(1),显然$x_2\neq1$,当$x_2=2$时,$x_1=9$.

若$x_8=4$,则$x_4+x_6=4$,无解.故$x_8=3$,所以$x_9=8$;又$x_4+x_6=5$,故$x_5=6$.至此,不难验证出.即产生一组解为:

$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)=(9,2,5,4,6,1,7,3,8)$.

当$x_2=3$时,$x_1=8$.因$1+2=3$,故只能$x_8=2$,恰是前面分析的倒置,不能算是一种分布.

对于情形(2),显然$x_2\neq1,2,6$,同时若$x_2=3$,则$x_1=9$;$x_2=4$,则$x_1=8$;$x_2=5$,则$x_1=7$.所以(1,2,3,9),(1,2,4,8),(1,2,5,7)皆不存在.同理分析,可知(1,3,4,7),(1,3,5,6),(2,3,4,6)皆无解.不难验证出本题的另一组解:

对于情形(3),显然$x_2\neq1,2,3$,同时若$x_2=4$,则$x_1=9$;$x_2=5$,则$x_1=8$;$x_2=6$,则$x_1=7$.所以(1,4,6,9),(1,5,6,8),(2,4,5,9),(3,4,5,8),(3,4,6,7)皆不存在.同理分析,可知(1,2,8,9),(1,3,7,9),(1,4,7,8),(2,3,7,8)皆无解,不难验证有以下两组解:

$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)=(7,6,5,2,8,3,1,9,4)$,$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)=(9,4,1,8,3,2,5,6,7)$.

对于情形(4),显然$x_2\neq1,2,3,4,7$,同时若$x_2=5$,则$x_1=9$;$x_2=6$,则$x_1=8$.所以(2,6,8,9),(3,5,8,9),(4,5,7,9),(4,6,7,8)皆不存在.同理分析,可知(1,7,8,9),(1,3,7,9)也无解,不难验证有以下一组解:$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)=(8,6,1,7,4,3,2,9,5)$.

对于情形(5),若$x_2=6$,则$x_1=9$;$x_2=7$,则$x_1=8$.所以(6,7,8,9)不存在.

综上所述,本题共有4组不同的答案。