拓展延伸：在解题反思中发展数学思维

段志贵[1]，周延吉[2]，卫久钰[2]
（1. 盐城师范学院数学与统计学院；2. 青海师范大学数学与统计学院）

摘　要：解题反思有利于激活和生长数学思维．问题的拓展与延伸是解题反思的重要路径．问题的拓展与延伸的基本方略主要包括：改变问题的提问方式，变换思维模式；革新问题的相关背景，激活思维张力；类比问题的形式结构，引领思维生长；推广问题的应用范围，提升思维活力．

关键词：数学解题；数学方法论；数学思维

美国心理学家波斯纳提出的成长公式“经验 + 反思 = 成长”同样适用于解题能力的获得与提升．解题后的反思有利于激活数学认知，并生长相关数学思维．一方面，通过解题反思，探究解题错误的发生以及解法的发现过程，理清解题规律，理解解题关键，积累更多的解题经验；另一方面，对问题进行宏观上的进一步认识和理解，透过现象看本质，对问题进行必要的拓展和延伸，以使相关解题策略内化为个体后续解题自发的知识和能力．因此，拓展与延伸是发展数学解题思维的有效途径．一般来说，变换问题的提问方式、相关背景、形式结构和应用范围等是问题拓展与延伸的基本方略．

一、改变问题的提问方式，变换思维模式

对问题的拓展与延伸，首选的是改变问题的提问方式．诸如把单问改成分步设问，增加中间的设问；将结论隐蔽起来，把证明题改为探索题；等等．此外，增删已知条件、隐含条件明朗化、显性条件隐性化、直接条件间接化、抽象条件具体化和具体条件抽象化等，也都是改变问题提问方式的有效路径．

例1　已知a,b,m都是正数，且$a<b$，求证：$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

对于这道容易证明的不等式，我们可以改变提问的内容，逐步把思维引向深入．

问题1：如果$b>a>0$，$m_1>m_2>0$，那么$\frac{a+m_1}{b+m_1}>\frac{a+m_2}{b+m_2}$能成立吗？

问题2：如果$b>a>0$，$m_1>m_2>\cdots>m_n>0$，那么$\frac{a+m_1}{b+m_1}>\frac{a+m_2}{b+m_2}>\cdots>\frac{a+m_n}{b+m_n}$能成立吗？这个不等式串中的各式具有相同的结构，能联想到什么呢？

事实上，这组不等式体现了函数$y=\frac{a+x}{b+x}$在区间$[0,+\infty)$上是增函数．那么，再反过来思考：如果知道了函数$y=\frac{a+x}{b+x}$的单调性，是不是也就能够证明前面的一系列不等式？由此把不等式延伸到函数，增强了数学思维的厚度．

例2　若不等式$ax^2-2x+1>0$对任意$x\in\mathbf{R}$均成立，求实数a的取值范围．

根据数形结合思想，容易求得a的取值范围．在此基础上，我们可以变换出下列几个逐级延伸的题目．

变式1：若函数$f(x)=\lg(ax^2-2x+1)$的定义域为$\mathbf{R}$，求实数a的取值范围．

收稿日期：2020-02-17
基金项目：江苏省教育科学“十三五”规划2020年度重点自筹课题——数学学慢生“慢学习”的实践研究（B-b/2020/02/217）；盐城师范学院教育教学改革重点立项课题——师范类专业认证背景下的数学教学论课程教学改革的探索和思考（2018YCTUJGZ011）．
作者简介：段志贵（1966— ），男，教授，硕士生导师，主要从事数学方法论、数学课程与教学论研究．

变式2：若函数$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-x^2+x-2$在$\mathbf{R}$上单调递增，求实数$a$的取值范围.

变式3：若抛物线$y=ax^2$总是位于直线$y=2x-1$的上方，求实数a的取值范围.

变式4：若命题“$\exists x_0\in\mathbf{R}$使得不等式$ax_0^2-2x_0+1\leqslant 0$成立”是假命题，求实数a的取值范围.

在上述四个变式中，我们依据相关概念、公式、定理及其推理规则对原问题进行了文字语言、图形语言和符号语言之间的转换与延伸，使问题的提问方式发生了改变．虽然问题的本质并没有发生根本性变化，但是对知识与能力的考查力度显然得到了加强.

二、革新问题的相关背景，激活思维张力

诚如波利亚所说，货源充足和组织良好的知识库是一个解题者的重要资本，良好的组织易于用上所提供的知识，这甚至可能比知识广泛更为重要．在解题的拓展与延伸中，从不同的问题背景出发，从知识的不同模块入手，进行重组和加工，有助于巩固所学数学知识，并盘活知识覆盖面，激活思维张力．这也是实现问题拓展与延伸的又一重要路径.

例3　已知$x>0$，$y>0$，$2x+y=2$，求$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值.

基于不同的视角和知识点，该题可以引申与推广如下.

（1）在原有知识覆盖领域将条件与结论调换.

变式1：已知$x>0$，$y>0$，$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=2$，求$2x+y$的最小值.

（2）结合对数函数进行拓展.

变式2：已知函数$y=-2\log_a(x-1)+1\ (a>0,且a\neq 1)$的图象恒过定点$A$，且点$A$在直线$mx+ny-4=0$上，其中$mn>0$，求$\frac{2}{m}+\frac{1}{n}$的最小值.

根据题意，可知点A的坐标为$(2,1)$．代入直线方程，得$2m+n=4$．该题转化为：若$2m+n=4$，且$mn>0$，求$\frac{2}{m}+\frac{1}{n}$的最小值.

（3）结合直线方程进行延伸.

变式3：已知直线l过点$P(2,1)$且与x轴和y轴的正半轴分别交于点A,B．求直线l在两个坐标轴上的截距之和的最小值.

可设所求直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，由于直线过点$P(2,1)$，可得$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$．所以上述问题转化为：已知$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1(a>0,b>0)$，求$a+b$的最小值.

（4）结合直线与圆的位置关系进行加工.

变式4：若直线$2ax-by+2=0(a>0,b>0)$始终平分圆$x^2+y^2+2x-4y+1=0$的周长，求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值.

若直线平分圆的周长，则此直线必过圆心$(-1,2)$．将圆心的坐标代入直线的方程，整理，得$a+b=1$．上述问题转化为：若$a+b=1$，且$a>0,b>0$，求$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值.

（5）结合算术进行改编.

变式5：在算式“$9\times\triangle+1\times\square=48$”中的△和□内，分别填入两个正整数，使这两个正整数的倒数和最小，这两个数应分别为________.

该问题可以转化为：已知$x,y\in\mathbf{N}^*$，$9x+y=48$，若$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$取最小值，试求出相应的x,y的值.

（6）结合三角函数进行推广.

变式6：求$y=\frac{2}{\sin^2x}+\frac{8}{\cos^2x}$的最小值.

该问题可以转化为：设$a=\sin^2x>0$，$b=\cos^2x>0$若$a+b=1$（因为$\sin^2x+\cos^2x=1$），求$\frac{2}{a}+\frac{8}{b}$的最小值.

例4　如图1，$ABCD$是正方形，其每边长为1．在正方形$ABCD$内，$\odot O$与$\odot O'$互相外切，并且$\odot O$与AB，AD两边相切，$\odot O'$与CB，CD两边相切.

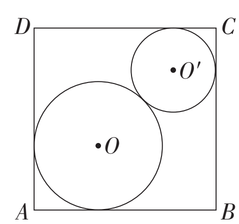

图1

（1）求这两个圆的半径之和.

（2）当两个圆的半径各为多长时，两个圆的面积之和最小？当两个圆的半径各为多长时，两个圆的面积之和最大？证明你的结论.

求解该题虽然有一定的难度，但是最终解决后会发现也许不是一件难事．基于该题的拓展与延伸，我们可以通过改变“正方形”入手．

问题1：如果把该题中的正方形改成矩形，你能得到什么结果？为什么？

问题2：如果把该题中的正方形改成棱长为1的正方体，把圆改成球，你能得到什么结果？为什么？

在对问题进行拓展与延伸的过程中，我们把原题中的“正方形”背景变化到“矩形”“正方体”．当然，还可以把问题的背景进一步向外延伸，如菱形、长方体等．随着问题蕴含的背景的不同，挑战性越来越大，数学思维的水平逐步从低阶走向了高阶．

例5　在一个密闭透明的圆柱型桶内装了一定体积的水．将圆柱桶分别直立、水平、倾斜放置时，写出水平面可能呈现出的所有几何形状，并画出相关情形的直观示意图．

类似于例4，我们可以对问题的背景进行改变，得到以下两个问题．

问题1：倘若把原问题中的圆柱换成圆锥，如何求解？

问题2：倘若把原问题中的圆柱换成一个长方体水槽，如图2所示，是否可以通过适当的摆放，使得水面成为正三角形、直角三角形、锐角三角形、钝角三角形、平行四边形、矩形、正方形、菱形、梯形、正五边形、正六边形呢？假设水槽里面的水量是水槽容积的$\frac{3}{4}$，是否可以在水槽上凿一个小洞，适当摆放水槽后，恰好流掉$\frac{1}{4}$的水？

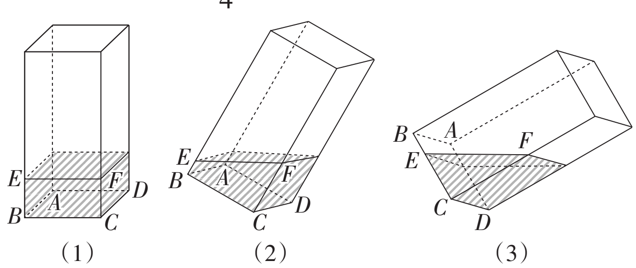

图2

三、类比问题的形式结构，引领思维生长

通过对问题的类比，把涉及问题本质的数学思想联系起来，也是对问题进行拓展和延伸的常用方法．这一类比关注的不一定是形式上的相似，而是问题本质的相同．所谓问题的本质相同，主要指的是问题中蕴涵的数学思想方面．一个问题以另一个问题作为类比对象进行拓展和延伸，既可以对相关知识体系有整体上的理解，又能使数学思维向纵深处发展．

例6　如图3，$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$不共线，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$（$t\in\mathbf{R}$）试用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$.

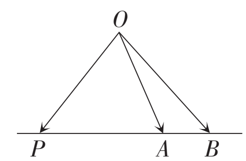

图3

根据题意，易得$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$（其中$x+y=1$）．它的逆命题如下，即问题1．

问题1：如果$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$不共线，点P满足关系式$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$（其中$x+y=1$），那么$P,A,B$三点共线．

我们可以把原问题类比到空间向量，得到新的命题，即问题2．

问题2：已知$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$不共面，$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$（$m\in\mathbf{R},n\in\mathbf{R}$），试用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$表示$\overrightarrow{OP}$.

很快我们就可以推出结论：$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（其中$x+y+z=1$）．这是空间向量基本定理的特殊情形，进一步类比原问题的逆命题（问题1），得到问题3．

问题3：对于空间中的任意一点O和不共线的三点A,B,C，试问满足向量关系式$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（其中$x+y+z=1$）的四点$P,A,B,C$是否共面？

例7　如图4，设双曲线$x^2-y^2=2\,020$的左、右顶点分别为点A_1,A_2，点P为双曲线右支上的一个点，且$\angle A_1PA_2=4\angle PA_1A_2$，求$\angle PA_1A_2$.

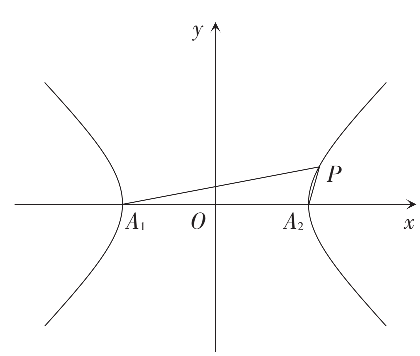

图4

在获得该题证明的基础上，基于类比法，我们可以进行以下推广与延伸.

把题目中双曲线方程中的“2 020”改成任意正实数，不影响结论. 在这一改变下，还可以把方程改成$y^2-x^2=a^2\ (a>0)$，得到类比1.

类比1：设双曲线$y^2-x^2=a^2\ (a>0)$的两个顶点分别为B_1,B_2，点P为双曲线下支上的一点，且$\angle B_1PB_2=4\angle PB_1B_2$，求$\angle PB_2B_1$.

更进一步地，可以把双曲线的方程改为一般的情形，即$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$. 据此对原题进行改编，得到类比2.

类比2：设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$的左、右顶点分别为点$A_1,A_2$，点$P$为双曲线上异于顶点的一个动点. 那么，直线$PA_1,PA_2$的斜率的乘积是定值吗？说明你的理由.

基于发散思维，我们可以运用类比的方法把双曲线拓展延伸到椭圆，把原题进行改编，得到类比3.

类比3：设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左、右顶点分别为点$A_1,A_2$，点$P$为椭圆上异于顶点的一个动点，则直线$PA_1,PA_2$的斜率的乘积是定值.

类比该题的思考方法，也可以思考这样的问题.

类比4：圆上任意一点P与一个直径的两个端点A,B（点P与点A,B互异）的连线的斜率之积等于-1，那么类比椭圆，你可以得到什么结论呢？

具体一点，就是：如图5所示，设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，弦$CD$过椭圆的中心$O$，点$P$是椭圆上与点$C,D$互异的一个动点，试判断$k_{PC}k_{PD}$是否为定值，并写出证明过程.

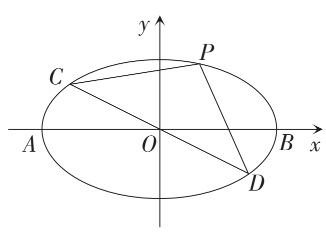

图5

把上述结论从椭圆类比到双曲线，又得到类比5.

类比5：过双曲线中心的弦的两个端点与双曲线上异于该端点的任意一点的连线的斜率之积为定值. 当焦点在x轴上时，该定值为e^2-1；当焦点在y轴上时，该定值为$\frac{1}{e^2-1}$.

四、推广问题的应用范围，提升思维活力

推广问题的应用范围，也是数学问题拓展与延伸的重要手段. 一方面，可以对问题进行一般化处理，使问题具有普遍性意义；另一方面，我们还要尝试着拓展相关定理或公式在不同背景条件下的应用模式，以加深对定理和公式的形式内涵、模式变换、适用范围等方面的认识、理解和掌握.

例8　设a,b,c为三个非负实数，试证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

证明：由题设和均值不等式，有

$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2a^2+2b^2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$.

同理，得$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(b+c)$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(c+a)$.

于是有$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+b+c+c+a)=\sqrt{2}(a+b+c)$.

上述不等式可以推广如下（一般仅当诸a_i相等且非负时等号成立）.

（1）推广字母的适用范围.

易证例8中的a,b,c可以为任意实数，当且仅当$a=b=c\geqslant0$时等号成立.

（2）推广根号的个数.

变式1：设$a_i\ (i=1,2,\cdots,n)$为任意实数，求证：$\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}^2+a_n^2}+\sqrt{a_n^2+a_1^2}\geqslant\sqrt{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

变式2：设$\sum_{i\neq j}\sqrt{a_i^2+a_j^2}$表示取一切$i\neq j$的形如$\sqrt{a_i^2+a_j^2}$的各个项之和，则$\sum_{i\neq j}\sqrt{a_i^2+a_j^2}\geqslant\frac{n-1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{n}a_j$.

证明：由均值不等式，得$\sum_{i\neq j}\sqrt{a_i^2+a_j^2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i\neq j}(a_i+a_j)=\frac{n-1}{\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{n}a_j$.

（3）推广根号内字母的个数.

变式3：设 $a_i\in\mathbf{R}\,(i=1,2,\cdots,n)$，则有不等式 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{i\neq j}a_j^2}\geqslant\sqrt{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i$. 其中，$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{i\neq j}a_j^2}=\sqrt{a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{a_1^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}+\cdots+\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2}$.

变式3可以用Cauchy不等式进行证明.

事实上，在Cauchy不等式 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2$ 中，令 $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$，即得 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.

所以 $\sqrt{a_1^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(a_1+a_3+\cdots+a_n\right)$.

同理，可得其他相应的不等式，再把这 n 个不等式累加求和，则变式3即可证得.

例9　求证：$\ln x\leqslant x-1$.

利用导数求极值容易证明该题的结论，这里略去不证. 值得重视的是这一不等式模型是很多高考试题的“源泉”，在许多问题的求解中都有应用.

应用1：已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1$. 求证：$(x-1)f(x)\geqslant0$.

证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x\ln x+(\ln x-x+1)<0$，原命题成立.

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$f(x)=\ln x+x\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)$.

用 $\frac{1}{x}$ 替代 $\ln x\leqslant x-1\,(x>0)$ 中的 x，得 $\ln x-1+\frac{1}{x}\geqslant0$.

所以 $(x-1)f(x)\geqslant0$.

应用2：设 $a_k,b_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 均为正数，证明：

（1）若 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant b_1+b_2+\cdots+b_n$，则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}\leqslant1$；

（2）若 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，则 $\frac{1}{n}\leqslant b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdots b_n^{b_n}\leqslant b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$.

证明：（1）由 $a_k>0$，$b_k>0$，可得

$b_k\ln a_k\leqslant b_k\left(a_k-1\right)$.

所以 $\sum_{k=1}^{n}b_k\ln a_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}b_k\left(a_k-1\right)\leqslant0$.

于是，有 $\ln\left(a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}\right)\leqslant0$.

所以 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}\leqslant1$.

（2）用 $\frac{1}{nb_k}$ 替代 a_k，得

$\left(\frac{1}{nb_1}\right)^{b_1}\left(\frac{1}{nb_2}\right)^{b_2}\cdots\left(\frac{1}{nb_n}\right)^{b_n}\leqslant1$，

即 $\frac{1}{n^{b_1+b_2+\cdots+b_n}\left(b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdots b_n^{b_n}\right)}\leqslant1$.

从而有 $\frac{1}{n}\leqslant b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdots b_n^{b_n}$.

同理，用 $\frac{b_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$ 替代 a_k，得

$\left(\frac{b_1}{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^{b_1}\left(\frac{b_2}{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^{b_2}\cdots\left(\frac{b_n}{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^{b_n}\leqslant1$.

所以 $b_1^{b_1}b_2^{b_2}\cdots b_n^{b_n}\leqslant b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$.

参考文献：

［1］波利亚. 怎样解题：数学教学法的新面貌[M]. 涂泓，冯承天，译. 上海：上海科技教育出版社，2002.

［2］波利亚. 数学的发现：对解题的理解、研究和讲授[M]. 刘景麟，曹之江，邹清莲，译. 北京：科学出版社，2006.

［3］段志贵. 数学解题研究：数学方法论的视角[M]. 北京：清华大学出版社，2018.

［4］单墫. 解题研究[M]. 南京：南京师范大学出版社，2002.

［5］罗增儒. 数学解题学引论：第三版[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2016.

［6］汤敬鹏. 课本例题的挖掘与拓展[J]. 中学数学教学参考（上旬），2009(11)：17-19.

［7］段志贵. 变通：让解题有更充分的预见[J]. 数学通报，2017，56(12)：50-54.

［8］江志杰. 基于数学解题变式的高三教学主张[J]. 中学数学教学，2013(1)：54-58.

［9］段志贵，宁耀莹. 类比——数学解题的引擎[J]. 中国数学教育（高中版），2018(12)：58-61.