数学教育

章士藻数学学习观探究

段志贵，王嘉俊
（盐城师范学院数学与统计学院，224002）

《数学之友》分两期先后刊登了《章士藻数学教育思想初探》[1]和《章士藻数学教育思想渊源及其时代意义》[2]两篇文章.透过这两篇文章，我们了解到章士藻先生的成长历程、主要数学教育思想及其产生的背景等，能够从中真切地感悟到章先生“既是研究者又是实践者”，“他是 20 世纪最后 30 年中数学教育界一位具有代表性的人物.”[3]章先生的的数学教育思想十分丰富，深入探讨章先生的这些教育思想对指导基层数学教师开展教学研究活动，特别是农村中小学数学教学与研究活动，具有十分重要的理论价值和实践意义.本文拟对章先生的数学学习观作更进一步的探讨.

概括地说，章先生的数学学习观蕴含在章先生若干著作中，他的必须辩证地认识数学的本质、培养直接兴趣是学好数学的关键、学会数学思维是学习数学的前提、掌握数学思想方法比数学知识更重要、正确审题是提高解题能力的基础、数学应用必须符合生产与生活实际等六个方面，是其数学学习观的集中表现.

1　必须辩证地认识数学的本质

章先生在《中学数学教育学》一书中说“数学中充满辩证法，我们应辩证地认识数学的客观基础.这就是说，数学中研究的数与形来源于客观实际，数学的发展对于社会实践的依赖性与它在一定阶段上的相对独立性”[4].数学中存在众多的概念与运算，如加与减，乘与除，三角与反三角，乘方与开方，精确与相似，平行与相交，形与数，正与负，已知与未知，有理与无理，等与不等，收敛与发散，变换与逆变换等等，这些是互逆的运算.互逆的两种运算是通过具体的数学形式将实际生活中正与负的矛盾反映出来，它们之间是相互独立又是相互依存的，在一定条件下可以相互转换.他提出，数学中充满着种种矛盾，具体表现在：

（1）“1”与多的矛盾

“1”是多的单位.在 1 与多的对立统一中，“1”中有多，多中有“1”.“1”可结合成多，多可分解为“1”，这种 1 与多之间可合可分，可聚可散的特点在数学中比比皆是.

例如，在计算$(a+2b+3c)(a+2b-3c)$与解方程$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$中，都是将$(a+2b)$与$\sqrt{x^2+5x+1}$看成整体“1”，而在后来化简与求解时又需要将他们还原成“多”，体现了“多化作 1，1 还原成多”的辩证思想.

（2）“零”与“非零”（即“有”与“无”）的矛盾

“零与非零”，“无与有”是相对统一的.“无”是“有”的一种特殊情况，一种特殊的“有”.在实践中，在描述任何一个量的变化时，“有”与“无”总是等同的，它们两者缺一不可，处于一个统一体中.

（3）直与曲的矛盾

“直”与“曲”在中小学教学中是两个不同的概念.在几何学中，“直”的曲率为零，而“曲”的曲率不为零.在代数学中，“直”可以表示为线性方程，“曲”即为非线性方程，可以说两者之间的区别是显而易见的，然而这种区别在特殊的条件下，相互之间又是可以转化的.

首先，我们可以看到大量以直代曲的实例.例如，钳工用手挫可以挫出一个圆形工件，他们每挫一下是直的，但从整体上看都是曲的.又如，以x_0附近可微函数可以用线性函数来近似替代，即$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x(\Delta x\to 0)$.

其次，在某些情况下，用特定的“曲”来近似的代替“直”或用非线性函数来代替线性函数，也能易于对问题的处理或计算.例如，当两轮的直径相差较大时，采用近似公式计算皮带总长就是这样的.

（4）常量与变量的矛盾

数学中常量与变量是两个十分重要的不同概念，它们既有区别，又有一定的联系.常量在特定的条件下具有相应的任意性.例如，公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$中，$a$、

基金项目：江苏省大学生创新创业训练计划 2013 年立项项目（省级一般项目）：章士藻数学教育思想研究，编号：201310324038Y.

b、α、β 等都是任意常数,正由于这些常数的任意性,才使这些式子能成为公式,具有广泛应用的可能.

然而,变量与常量之间又可以相互转化. 在特定的条件之下,变量可视为常量,具有不变性. 例如,在求解多元函数 $z=x^2+2x^3y^4+a^xy^3$ 的偏导数时,都必须把除去一个自变量外的其余自变量作为变量来进行处理的.

数学中常常是通过变量来研究常量的. 例如,在二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中,常量 a、b、c 的值就确定了二次函数图像的形状和位置;在直角坐标变换下,二次曲线 $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+2Dx+2Ey+F=0$ 的系数虽然都是变量,然而 I_1、I_2、I_3 是不变量,k 是半不变量,方程 $f(x,y)=0$ 的类型以及有关曲线的形状、大小等都可通过 I_1、I_2、I_3 等表示出来,而且通过各种不同变量下的不变量可刻画更多几何学的特征.

$$I_1=A+C,I_2=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix},I_3=\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix},$$

$$K=\begin{vmatrix}A & D\\ D & F\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}C & E\\ E & F\end{vmatrix}$$

(5)有限与无限的矛盾

数学中量的有限与无限是对实际生活中有限与无限事物的客观反映. 人们经常通过有限来认识无限. 无限一方面以有限的总和而存在,作为一切有限的对立物而存在;另一方面又以描述量的变化过程存在.

这里,有限与无限有着本质的区别. 例如,无限集能与它的真子集建立一一对应关系,但是在有限集中却截然不同. 例如,正偶数数集可以和它的任意真子集建立一一对应关系. 但是在有限数集下就不可以了. 再如,交换律和结合律在数的有限和中成立. 但在无限和式中,就不可以任意运用这两个定律,否则将出现错误的结果.

相反地,有限与无限之间在一定条件下也可以相互转化,正是由于这种转化,使得其成为数学应用于实际的有力手段,成为数学解题的有力杠杆. 例如,在微积分中求曲边图形的面积,求曲顶立体的体积,求变力所做功等就是实行无限向有限的转化. 在无穷级数理论中,一个无穷级数,在收敛的情况下有确定的和(无限→有限);另一方面,一个有限形式的函数在一定条件下又可展开为一个无限和的极限(有限→无限),例如,

$$e^x=\sum_{\substack{k=0\\ -\infty<x<+\infty}}^{+\infty}\frac{x^k}{k!};$$

$$\sin x=\sum_{\substack{k=0\\ -\infty<x<+\infty}}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$\cos x=\sum_{\substack{k=0\\ -\infty<x<+\infty}}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

章先生的以上论述,对我们辩证地认识数学的本质,了解数学来源的客观基础,处理运算与逆运算之间的对立关系,从而提高分析、解决问题的能力,具有极其重要的意义.

2　培养直接兴趣是学好数学的关键

章先生曾在数学教育类核心期刊《教育探索》"培养直接兴趣是学好数学的关键"一文中指出,兴趣是人们渴望认识某些事物或进行某项活动的意识倾向,且和一定的情感联系着,大致可分为直接兴趣与间接兴趣两大类,其中直接兴趣是由于对事物本身感到需要而引起的,只有将间接兴趣转化为直接兴趣,才能真正进入兴趣的境界[5].

对于如何培养直接兴趣,章先生提出了以下措施,具体是:

(1)上好导言课

导言课,是一门课程或一个章节的起始部分,通常以介绍学习的意义、学习的内容、学习的方法为主. 对初中代数课而言,虽然在小学里已接触以字母表示数,但不了解其任意性、限制性、确定性,可通过具体实例讲解表达公式与算理的重要性、简捷性,讲解列方程解四则应用题的优越性,以激发学生学习代数的兴趣. 对初中几何课而言,可通过如何测知残缺圆形物体的圆心、半径,如何测知河对岸两地的距离,以及测知建筑物、旗杆的高度等,以激发学生学习几何的兴趣. 而这种导言课应更多地体现在每一章节起始的教学之中.

(2)运用激趣艺术

①介绍背景,以史激趣,以增强民族自豪感,激发学习数学的兴趣与热情,培养为人类科学进步作贡献的意愿.

②创设情景,以境激趣. 通过描述,让学生有身临其境之感,在和谐的教学环境下,进入思考的境地.

③提出悬念,以疑激趣. 让学生处于对接触事物感到困难而又急于了解的心理状态,从而产生揭示知识奥秘的浓厚兴趣.

④风趣幽默,以言激趣. 以含蓄、机智、幽默的语言,给学生以智慧的启迪,给枯燥的数学学习增添乐趣.

⑤追求和谐,以美激趣. 让学生体验数学的美感,从数学美的角度开拓思维,可有利于激发学生的学习兴趣.

⑥拓展引申,以变激趣. 运用变式教学,将一个问题进行拓展引申,可将思维引向深入,达到举一反三的目的.

例如,在求出方程 $x^2+y^2=0$ 的解后,可引导学生求出 $(x+y+1)^2+(x-2y-1)^2=0$, $|x+y+1|+|x-2y-1|=0$, $\sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-2y-1}=0$ 等方程的解;

再如,在证明了四个连续正整数之积与 1 的和为一个完全平方数之后,可引导作如下练习:

化简:$x(x+1)(x+2)(x+3)+1$,

计算:$\sqrt{25\cdot 26\cdot 27\cdot 28+1}$,

分解因式:$(3x-8)(3x-7)(3x-6)(3x-5)+1$,

解方程:$x(x+1)(x+2)(x+3)=-1$,

解不等式:$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)>143$,

求函数 $y=\dfrac{2x-7}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$ 的定义域等.

(3)重视应用

数与形是数学中两个最为重要的基本概念,它们是从现实世界的有关数量与形体的关系中逐步抽象出来的. 恩格斯说:"数学是从人的需要中产生的". 在数学教学中重视应用,有利于激发学生的学习兴趣. 数学教材中到处充满着联系实际的实例,关键是学会应用,重视应用,由"做数学"变为"用数学".

(4)让学生体会学习数学的乐趣

实践证明,由兴趣转化为乐趣,兴趣才能持久,且不断向更高层次发展. 乐趣要根据不同认知水平的学生,提出不同要求,使他们在各自的基础上都有所提高,不是生活在自疑、自卑之中,而是以自信、自尊的良好状态迎接新学习的开始,从而培养起顽强的意志和坚强的毅力. 这里较好的做法,例如在课堂提问中,设计不同难度的问题,让不同水平的学生回答. 在课外练习中,分为基本练习题、综合练习题以及课外思考题,对不同水平的学生提出不同的要求等[2].

在此,章先生关于培养直接兴趣的阐述,论点清晰,方法具体,做法有效,这对我们实施义务教育,提高学生学习数学的兴趣,是很好的启迪与借鉴.

3 学会数学思维是学习数学的前提

所谓思维,是人们一项复杂的心理活动过程,科学大师钱学森曾经说过:"思维科学、心理学和教育学是智力开发的基础."思维科学是培养人才的科学. 章先生在《中学数学教育学》第二章"中学数学思维"中说:"中学数学教育对学生的思维活动有着不可估量的作用,学会数学思维是学习数学的前提[6]."

章先生认为培养学生的思维品质是能否学会数学思维的关键,其中培养好学生思维的广阔性、深刻性、灵活性、批判性、组织性与创造性等品质尤为重要. 章先生对此阐述道:

对于思维的广阔性,例如,对"你能写出多少等于 1 的式子"让学生练习,不同的学生写出的结果也不一样. 有的只写出 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $a^0=1(a\neq 0)$, $i^{4n}=1$, $C_n^0=1$, $\log_a b\cdot\log_b a=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\int_0^1 2xdx=1$ 等为数不多的几种,而有的学生能写出几十甚至上百种. 可见,学生思维的广阔性是有很大差异性的.

再如,小张和小明两人分别从盐城、苏州两地同时开车匀速相向而行,相遇后,小张经 1 小时到达盐城地,小明经 4 小时到达苏州地,试问全程中两人各行几小时?

解一:设小张共行驶 x 小时,小明共行驶 y 小时,则相遇后小张行全程的 $\dfrac{1}{x}$,小明行全程的 $\dfrac{4}{y}$,于是有 $\begin{cases}x-1=y-4,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1,\end{cases}$ 解得 $x=3$(小时),$y=6$(小时).

解二:设相遇前两人各行驶了 x 小时,则有 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{x+4}=1$,解得 $x=2$(小时).

解三:设相遇前两人各行驶了 x 小时,由于速度一定,两人所用的时间成正比,所以有 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{x}$,解得 $x=2$(小时).

这里,第三种解法很为巧妙、独特,是创造性思维的结果[6].

章先生认为,培养学生的思维能力、提高学生的思维品质是一项历时长久而又极其艰巨的工作,需要从小从早抓起,需要将不同的学科、不同的方法结

合起来,在中学数学教学中的地位尤为重要.

4 掌握数学思想方法比数学知识更重要

章先生在新出版的教材《数学方法论简明教程》一书中说:"学数学不能仅仅停留在掌握概念、公式、法则上,而是要充分认识数学学科的特点与其基本的研究方法,必须明了学科之间的关系,揭示数学思维过程,了解知识的系统性.书要越读越薄,练习要广而精,学数学要达到知事理明通法,越学越简单有趣,这才是学好数学的体现[7].

章先生说,学好数学,关键在于掌握数学思想方法,它是数学的核心与灵魂.

世纪之交,章先生针对教学需要,开展了对数学思想方法的研究,在教学实践基础上编著了《数学方法论简明教程》一书.他认为"随着时代的进步,数学的发展,当今掌握数学思想方法比掌握数学知识更为重要";"在高校,特别是高师院校开设数学方法论课程十分必要,学习与研究数学方法论有利于促进数学的发展,有利于发挥数学的功能,有利于推进数学的教育改革"[7].

针对当前国内出版数学方法论方面著作与教材的状况,章先生分析大致有三类:"一是国外名著的译著;二是国内学者立足于整个数学,特别是高等数学思想方法研究的专著;三是中小学数学教师的研究心得,虽冠以数学方法论的美名,但大多数实为具体解题方法的介绍,一直缺乏针对中小学数学教师业务提高和高师院校教学需要的专著或教材."

关于数学方法的分类,章先生认为,按照抽象程度的不同,数学方法可分为具体方法、一般方法与数学思想方法.其中"具体方法适用范围小,操作具体,是最低层次的数学方法;一般方法具有较高层次,研究范围立足于整个数学,适用于数学的各个分支;数学思想方法是具体方法与一般方法的概括,是一种思维策略,制约着数学活动的意识取向,对方法的取舍、调节起着规范与调节作用."

关于数学方法论的研究对象与学科性质,目前学术界论述颇多,意见不一,这里章先生赞同"它是研究数学发现、发明的规律与原理的学说";"它既要注意同哲学、逻辑学、思维科学、方法学、数学史等相关科学的联系,又要注意同科学方法论、数学基础、思维科学、方法学、逻辑学、数学史等学科的区别".

章先生强调"数学方法论是一门新兴学科,应具有开放性的学科体系,伴随着数学与其他学科的发展,数学方法论的内容也在不断调节与充实.数学是一门历史悠久、分支繁多、层次鲜明的基础学科,数学方法论也有不同层次,作为高师院校课程的数学方法论应以初等数学的方法论为重点,在初等数学与高等数学的结合点上对数学方法论的若干基本问题展开研究."

章先生根据教学与研究实践体会:"应该兼顾特殊与一般,对于高师教学与中学教师业务方面应进行大范围、深层次的培养,方便日常教学活动的应用以及学生的理解和学习,不仅有利于高师院校师生的教学活动,还有利于中学数学教学思想方法的理解,对中学数学教学思想方法具有一定的指导意义."

5 正确审题是提高解题能力的基础

章先生在《数学通讯》"谈谈数学审题的教学"一文中指出:"审题,是解题的基础.学生解题错误,通常是由于没有仔细审题或审题方法不当所造成的.为此提高解题能力,首先要养成认真审题的习惯,提高审题的能力[8]."

他认为正确审题:

(1)要明确题意

所谓明确题意,就是明确题目的实质.在阅读题目的过程中应明确以下几点:

①分清命题的语法结构

这是明确题意的重要一环,特别是对用语言叙述的命题尤为重要.常见一些学生不懂语法结构而导致了审题错误.例如"求不等式 $2x^2-5x-3<0$ 的正整数解的个数"是动宾结构,"求……个数","不等式 $2x^2-5x-3<0$ 的正整数解的"是"个数"的定语,题目本意是求不等式的正整数解的个数而不是求正整数的解.

②认清命题中关键字、词的意义

审题不能仅满足于了解题目的大致意思,还要过细地了解关键字、词的意义.例如"包含"与"包含于"、"除"和"除以"、"大于和不大于"、"增加"与"增加到"等等意义截然不同,若有疏忽,则"差之毫厘,失之千里",势必铸成大错.

③明辨命题的语气,体会命题的意图

例 给定双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$,过点 $B(1,1)$ 能否作直线 m,使与所给双曲线交于 Q_1 及 Q_2,且 B 是线段 Q_1Q_2 的中点?问是否存在这样的直线.如果存在,求出它的方程;如果不存在,请说明理由.

按常规解法,不难求得直线 m 的方程为 $2x-y$

$-1=0$,不少学生便由此断定所求直线 m 的存在,这就犯了盲从的错误. 实际上,直线 $2x-y-1=0$ 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 并不相交. 这只要将两方程联立,得 $2x^2-4x+3=0$,由判别式 $\Delta=16-24=-8<0$,便说明该直线与双曲线无公共交点,故所求直线 m 不存在. 其中直线 $2x-y-1=0$ 乃是解题过程中出现的增根,必须舍去.

④搞清题目中的"条件"与"结论"

在浩如烟海的数学题目中,虽然形式各异,但基本结构都包含有"条件"与"结论"两部分内容. 其中"若……,则……","如果……,那么……","已知……,求证……"型中,"若"、"如果","已知"后面为条件部分,"则"、"那么"、"求证"后面为结论部分.

对于"××是××的条件"这种类型,前面的"××"是条件,后面的"××"是结论;对于"××的条件是××"这种类型,则前面的"××"是结论,后面的"××"是条件.

(2)要挖掘隐含条件

所谓隐含条件,就是指对于题目中给出但不够明显,易忽略的条件,或隐含在题目中没有直接给出的条件. 对于前者,需将其化为明显的、可用的条件;对于后者,需将题意中的隐含条件挖掘出来. 从某些角度上来说,提高学生挖掘出隐含的条件,将不明显的条件转化为明显的条件,对于提高学生审题能力有很大帮助.

例如,已知方程 $x^2-(k-2)x+k^2+3k+5=0$ 两实根 x_1、x_2,求 $x_1^2+x_2^2$ 的极大值.

不少学生都由韦达定理,求得表达式 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19$,于是得出,当 $k=-5$ 时,$x_1^2+x_2^2$ 有极大值 9 的结论.

然而这是错误的. 因为解题过程中忽略了题目中所没有给出的隐含条件——k 的取值范围,上述解法误将 k 的取值范围当作一切实数. 而实际上,k 受方程 $x^2-(k-2)x+k^2+3k+5=0$ 的制约,不能取一切实数. 由于 x_1、x_2 为方程的两实根,所以 $\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geqslant 0$,化简,得 $3k^2+16k+16\leqslant 0$,解得 $-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$. 这就是 k 的取值范围,也就是题意中所隐含的条件,$k=-5$ 不属于 k 的取值范围内,因而 $x_1^2+x_2^2$ 的极大值不是 19. 根据连续函数在闭区间上最大值的求法,不难求得 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值为 18.

(3)要结合形数结合审题

形数结合是审题的重要方法. 有时单从数(或形)的角度难以审清题意,如结合图形(或数)就可以审查清楚了,并且常能化难为易.

例如,m 为何值时,直线 $y=x+m$ 与半圆 $x^2+y^2=1(y\geqslant 0)$交于一点、两点、不相交?

作出相应图形(图 1). 本题意思就是求直线 $y=x+m$ 与半圆 $x^2+y^2=1(y\geqslant 0)$交于一点、两点或不相交时 m 的数值或取值范围. 由图可见:

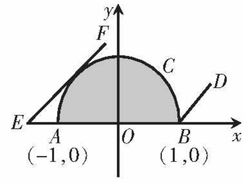

图 1

当直线为半圆的切线 EF 或与半圆交于 BC(包括 B 点但不包括 C 点)时,直线与半圆有一个交点;当直线位于 EF 与 AC 之间(包括 AC,不包括 EF)时,直线与半圆有两个交点;当直线位于 EF 上方或位于 BD 的下方(BD 平行于 AC)时,直线与半圆没有交点.

这样审明题意,就不难求得 m 的数值或取值范围了.

(4)要发现解题线索

审题是为了弄清题意,最终目的是为了解题,所以审题应为解题打下基础,创造条件. 通过审题发现解题线索,这是审题时值得注意的又一个问题.

例如,已知 $a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=m$,$b\sin^2\varphi+a\cos^2\varphi=n$,$a\tan\theta=b\tan\varphi(a\neq b)$,求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

审题时发现,所求结论不含 θ 与 φ,而已知条件中前两式却分别含有 θ 与 φ,第三式又是关于 θ 与 φ 的关系式. 可见,由前两式分别求得 $\tan\theta$ 与 $\tan\varphi$,代入第三式中消去 θ、φ,便不难得到所求结论[8].

6 数学应用必须符合生产与生活实际

章先生主张用活的方法学习活的数学,这在他的专著《中学数学教育学》与《数学方法论简明教程》中作了详细阐述,我们的体会:这就是在深刻理解有关基础知识、掌握有关基本技能的基础上,一要学会思维,数学是思维的体操,数学是进行思维训练的有效载体;二要明了数学的思维方法,这是数学的核心与灵魂. 这些思维的方式方法,数学的思想方法,不仅必须要体现在学习、研究数学之中,还要体现在教学、生产、生活的一切方面,做到活学活用.

章先生认为联系实际与应用不同. 在"关于数学应用教学的一点思考"一文中,曾介绍观摩教学

中的两例:

实例 1 李叔叔用总长为 24m 的篱笆圈地,现有一面靠墙、两面靠墙、不靠墙三种情况,请帮助李叔叔选择种植面积最大的方案?

学生经过讨论,得出如下结论.

一面靠墙、两面靠墙、不靠墙,分别以如图 2、3、4 所示面积最大.

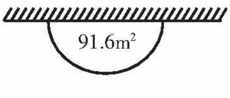

图 2

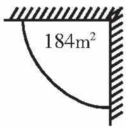

图 3

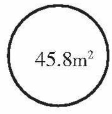

图 4

教师:同学们通过合作研究,得出一面靠墙用图 2,两面靠墙用图 3,不靠墙用图 4 时,面积最大. 而在这三种情况中,又以图 4 时,面积最大. 这样,我们通过集体的智慧,运用数学知识,就为李叔叔解决了圈地种菜的难题.

实例 2 如图 5,现有 A,B,C,D 四个工厂,位于正方形的顶点,正方形的边长为 2 公里,如何设计道路与他们相连,使其路程最短?(初二年级)

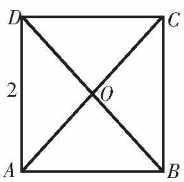

图 5

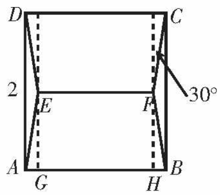

图 6

学生最初就图 5,得出方案一,最短路程为:$S=2\sqrt{2}AB=5.656$(公里)的结论;

后来,在老师启发下,根据图 6,学生通过计算:设 $BF=x$,则 $FH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$,由 $2FH=AB$,即 $2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=2$,解得 $x=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$,从而,得出方案二,最短路程为:$S=4x+(2-x)=2(1+\sqrt{3})\approx5.464$(公里).

教师:经过探究,显然,以图 6 进行设计,连接四个工厂的路程最短,从而铺设成本最低,这就显示了数学在解决实际问题的作用.

对此,章先生评议时指出:以上二节课,通过实例的探讨,确实学生思维得到充分发挥. 然而,令人不得不深思,这不是数学的应用,它与生产、生活实际情况并不符合.

章先生指出:就例 1 而言,植物的生长需要有阳光、肥料、水等条件. 在现实生活中除非围墙低矮,或有利于植物生长外,一般是不会选择靠墙种菜的,不然,这个选择对李叔叔来说毫无意义.

就实例 2 而言,据说曾是某年的全国初中数学竞赛题. 如是铺设下水道或电缆之类,尚有意义. 现为道路设计,那就要考虑车辆的交会问题,而工厂之间相距太近,方案二比方案一只缩短 192 米,却要通过两次红绿灯,显然方案二很难被工厂接受[9].

最后,章先生进一步指出:"数学应用是在一定条件下提出来的. 这里,一要消除认为联系实际就是应用的误区;二要消除认为理论研究成果就可作为实际应用的误区;三要消除数学应用仅有一种情况,一种方案的误区. 联系实际是表象的,而应用才是实质性的. 应用往往会出现没有最好只有更好的情况."可见,他对数学本质、数学学习与数学应用的理解是甚为精辟的.

参考文献:

[1]段志贵,王莉. 章士藻数学教育思想初探[J]. 数学之友,2015(24):1-3.

[2]段志贵,王莉. 章士藻数学教育思想渊源及其时代意义[J]. 数学之友,2016(4):1-6.

[3]章士藻. 数学教育探路人[N]. 江苏教育报(高教版). 2010-1-14.

[4]章士藻. 中学数学教育学[M]. 南京:江苏教育出版社,1991.

[5]章士藻. 章士藻数学教育文集[M]. 南京:东南大学出版社,2009.

[6]章士藻. 中学数学教育学[M]. 北京:高等教育出版社,2007.

[7]章士藻. 数学方法论简明教程[M]. 南京:南京大学出版社,2006.

[8]章士藻. 谈谈数学审题的教学[J]. 数学通讯,1984,3.

[9]章士藻. 关于数学应用的一点思考[J]. 数学通报,2005(11):37-38.

[10]郭曙光,段志贵. 精湛的思想　宝贵的财富　章士藻数学教育文集[M]. 南京:东南大学出版社,2008.

[11]曹一鸣. 一本数学教育的好教材[J]. 数学教育学报,2009,18(5):56.

[12]王光明. 春发其华　秋收其实[J]. 数学通报,2009(9):59.

[13]王光明. 数学教育研究方法与论文写作[M]. 北京:北京师范大学出版社,2010.

[14]章士藻. 试论中学数学教学法的性质、任务与体系[J]. 曲阜师范大学学报,1986(4):107-110.