融审美于数学解题之中

江苏省盐城师范学院数学与统计学院(224000) 殷志贵

数学美是数学科学本质力量的感性与理性的显现,是人类展示出来的一种征服自然的思维结构的呈现.它是一种真实的美,是反映客观世界并能动地改造客观世界的科学美.数学美不仅有表现的形式美,而且有内容美与严谨美;不仅有具体的公式、定理美,而且有结构美与整体美;不仅有语言精巧美,而且有方法美与思路美;不仅有逻辑抽象美,而且有创造美与应用美.

当然,数学美不但给人以赏心悦目的享受,更重要的是数学美能够启迪人们去探索,去追求,去解决更多的数学问题,从而给人以智慧和力量.因此,深入挖掘数学美的潜在功能,发挥数学美的独特作用,对于指导和帮助人们去探寻数学问题的解题思路具有十分重要的意义.

基金项目:江苏省教育厅高校品牌专业建设工程资助项目——盐城师范学院数学与应用数学专业(PPZY2015C211).

(接上页)容量、快节奏的刷题演练实现知识的全面辐射、技能的反复强化,学生始终处于被支配的低层次"同化"状态,学生的思维过于碎片化,主动思辨和质疑的能力也在逐渐退化,尤其对于"运算"的执行力大大降低,常常望"算"兴叹.其次,从进阶目标来看,改变高耗低能的现状急不可待,教师必须控制容量,放慢节奏,以培养学生的学科核心素养为教学导向,引领学生逐步向高阶思维发展.再有,从进阶策略思考,解析几何解题教学中涉及的问题多元表征、算法设计与分析、变式研究、背景溯源等都是提升学生数学核心素养的有效载体,以此搭"阶",聚焦关键的运算节点,立足"微探究",突破"微难点".

譬如,节点一,第(1)题求椭圆方程,用待定系数法,建立关于 a, b 的二元方程组求解,比较符合学生的思维习惯,但运算成本偏高,容易出错.能否优化呢?倘若回归椭圆定义,用椭圆上已知点到两焦点的距离之和等于 $2a$ 直接求 a,显然简化了运算.又如,节点二,第(2)题引参的方式,标准答案上是按"设点 P"展开的,即便如此,圆上的点还有两种设法:直角坐标 (x_0, y_0) 或三角参数式 $(\sqrt{3}\cos\alpha, \sqrt{3}\sin\alpha)$,如何选择取决于算理的支撑:直角坐标简明,但字母较多,消元时容易迷失,参数形式变量单一,但三角化简要求较高.教师可以引导学生结合自身的认知经验选择合适的(接上页)设点方式,积累基本活动经验.此处是按"设直线 $y=kx+m$"引入变量的,以初中熟悉的一次函数为思维进阶的逻辑起点,切合学生的最近发展区.再如,节点三,直线与圆的相切如何合理表征?几何视角,利用"$d=r$"建立 k, m 的关系,简约清晰;代数视角,将直线方程代入圆方程消元后,利用"$\Delta=0$"建立关系,这与直线与椭圆的相切、相交的表征形式构成算法的"一致性操作".教师要善于为学生的思维训练创造合适的契机,帮助学生建构板块化和结构化的思维系统.最后,节点四,求 AB 弦长的时候,利用韦达定理整体代入,设而不求,追求算法的合理性和必要性,避免盲目地求出两点坐标,陷入"死算"的泥沼.显然,通过对算法设计、运算节点的"微探究",对运算方向监控,对运算长度预估,对运算难点转化,学生的思维品质和数学运算素养都将获得可持续性的发展.

4.结束语

高考试题的命题风格总是在原有的基础上适度创新,稳中求变,所以日常的教学策略也须与时俱进,不断优化.教学需要基于学情合理定位,尊重不同层次学生的认知基础,让思维层级不同的学生在高考中都能获得不同程度的成功体验.今年的江苏卷赋予教师丰富的内涵和真知灼见的启示:能力立意,素养导向,执行数学思维的多重训练,呼唤数学本质的理性回归.

一、美的意愿,让解题增添乐趣

数学解题的本质,就是根据问题中所给的信息(包括文字信息、图形信息、数字信息、符号信息以及其他显性信息、隐藏信息),进行分解、组合、变换、编码和加工处理,最终发现"条件"与"结论"之间的必然联系.心理学原理告诉我们,数学解题中的审美活动能够带来一系列的深度与自由度的体验.数学审美作为一种主要途径完成对数学问题的认知及问题解决过程的牵引,它帮助人们获取并体验从问题困境中走出来的那种审美快感,积累基于迷茫境地绝地逢生的审美经验.在数学问题解决过程中,若能从应用数学审美的角度出发,审视问题结构的和谐性,追求问题解决方案的简单性、奇异性、新颖性,挖掘命题结论的统一性,我们学习数学及解决数学问题就会增添无穷的乐趣.

例1 求 $\tan 20°+4\sin 20°$ 的值.

分析 本题可以从纯粹的三角知识直接进行化简.这里从审美的视角寻求另一种让人心情愉悦的简洁解法.

考虑到三角式的角度为锐角,不妨构造直角三角形解之.如图1,作 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$,$\angle C=90°$,$\angle BAC=20°$,设 $AC=1$,则 $\tan 20°=BC$,$AB=\dfrac{1}{\cos 20°}$.设 $BC=x$,则 $\sin 20°=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,$\cos 20°=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

通过尝试,可以发现所得到的结论对解题无甚帮助,必须寻找其他关系.

因为 $20°$ 的3倍是个特殊角,故在 $\triangle ABC$ 基础上作含 $60°$ 的三角形 $\triangle ACD$,使 $\angle DAC=60°$,则 $\angle DAB=40°$,$\angle BDA=30°$.设 $AC=1$,则 $CD=\sqrt{3}$.

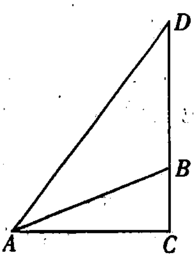

图1

在 $\triangle ADB$ 中,运用正弦定理得 $\dfrac{BD}{\sin 40°}=\dfrac{AB}{\sin 30°}$,$BD=2AB\cdot\sin 40°=4\sin 20°$.

因为,$BD+BC=CD=\sqrt{3}$,所以 $\tan 20°+4\sin 20°=\sqrt{3}$.

许多数学问题的求解,审美往往也会隐含其中.人们通过美的视角来分析数学问题的条件与结论,从中体会其中的内在美,并由此引发出问题的实质,从而能够更加充分的理解题意,掌握解题的关键,觅得更加有效的解题方法.

二、美的追求,让解题开阔思路

菲尔兹奖获得者丘成桐说:"数学家找寻美的境界,讲求简单的定律,解决实际问题,而这些因素都永远不会远离世界."以数学中的对称美为例,我们能够充分体验到美的追求能够促进我们开阔解题视野.

事实上,对称是最能给人以美感的形式之一,它是整体中各个部分之间的对等和匀称.数学形式和结构的对称性,数学命题关系中的对偶性都是对称美在数学中的反映.如圆形、球体、正多边形、旋转体和圆锥曲线等都给人以完美、对称的美感.数学解题可以从对称美的角度出发,或分析式子的对称、或变换调整对称元素关系、或补形构造对称等等,这常能打开我们的解题思路.

例2 已知三正数 x,y,z,满足 $x+y+z=1$.试求函数 $f(x,y,z)=(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})$ 的最小值.

分析 看到函数最值的问题,第一反应想到的是利用导数来解决,可这是一道三元函数的问题,我们一时无从下手.

通过观察,凭借审美的意识,根据 x,y,z 之间平起平坐的地位及函数 $f(x,y,z)$ 中各变量的轮换对称关系,我们可以大胆进行猜想,当 $x=y=z$ 时,函数 $f(x,y,z)$ 取得最小值64.

这个猜想难能可贵,有了这个猜想,再进一步验证,即证明不等式 $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{z})\geqslant 64$,以便判断猜想的正确与否.如此一来,就把这道本来是计算最值的问题转化成一道不等式的证明题,大大降低了原问题的难度.

事实上,$1+\dfrac{1}{x}=2+\dfrac{y+z}{x}\geqslant 2+2\dfrac{\sqrt{yz}}{x}\geqslant 4\sqrt{\dfrac{\sqrt{yz}}{x}}$,当时仅当 $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ 时成立.

同理,$1+\dfrac{1}{y}\geqslant 4\sqrt{\dfrac{\sqrt{xz}}{y}}$,$1+\dfrac{1}{z}\geqslant 4\sqrt{\dfrac{\sqrt{xy}}{z}}$.

将上述三式两边分别相乘便得要证的不等式.

三、美的引领,让解题避繁趋简

大数学家高斯曾经指出,数学学习一开始未必能

得到一个最简单、最美妙的证明，但正是这样的证明才能深入到数学王国的奇妙联系中去. 这是我们继续研究的动力，并且最能使我们有所发现. 事实上，追求简单、明快是数学发现的重要因素之一.

在数学学习与数学解题中，对简洁的追求，是一种能够直接的反映客观世界并能改变人们所处世界的科学美. 正如数学家解决实际问题，一般都是基于对问题简洁美的引领一样.

例3 解不等式 $\sqrt{3\log_a x-2}<2\log_a x-1(a>0, a\neq 1)$.

分析 本题代数法求解也许能够得出答案，但难度显而易见，由此引发我们考虑有没有比较容易的解法呢? 事实上，如果想到数形结合，想到运用图象，则使问题变得简洁明了，避免了代数法繁琐的计算过程，从而具体直观地解决问题.

不妨令 $t=\log_a x$，在同一坐标系中作函数 $y=\sqrt{3t-2}$ 及 $y=2t-1$ 的图象. 解方程 $\sqrt{3t-2}=2t-1$，得 $t_1=\frac{3}{4}$，$t_2=1$.

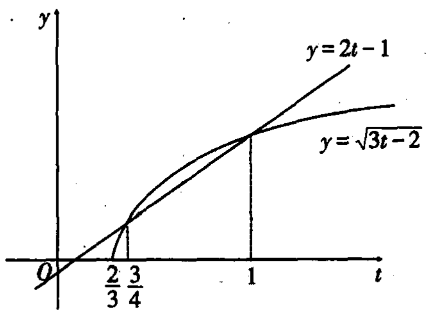

图2

如图2所示，由方程的解可知 $\sqrt{3t-2}<2t-1$ 的解为 $\frac{2}{3}\leq t<\frac{3}{4}$ 或 $t>1$，即 $\frac{2}{3}\leq\log_a x<\frac{3}{4}$ 或 $\log_a x>1$.

当 $0<a<1$ 时，$a^{\frac{3}{4}}<x\leq a^{\frac{2}{3}}$ 或 $0<x<a$；

当 $a>1$ 时，$a^{\frac{2}{3}}\leq x<a^{\frac{3}{4}}$ 或 $x>a$.

所以，不等式的解集合为:

$0<a<1$ 时，$x\in\left(a^{\frac{3}{4}},a^{\frac{2}{3}}\right]\cup(0,a)$；

$a>1$ 时，$x\in\left[a^{\frac{2}{3}},a^{\frac{3}{4}}\right)\cup(a,+\infty)$.

简洁美在这道题目中的应用很巧妙，从要解决的问题中抓住关键，理清关系，善于利用公式简化问题，把复杂的关系，慢慢梳理，打通主干线，找到清晰的思路，为问题的最终解决奠定了基础.

四、美的赏析，让解题滋生智慧

数学美的内容非常丰富. 就数学问题解决来说，形式美与严谨美，结构美与整体美，方法美与思路美，创造美与应用美等，都是数学解题中数学美的表征. 限于篇幅，我们从具体问题的条件与结论的分析审视数学解题中的结构美与整体美. 许多数学问题的条件或结论极具美感，表现在题目的条件或结论中的部分与部分、部分与整体之间的协调与统一上. 通过对问题结构中条件与结论的分析，部分与整体的通透审视，我们能够在领略数学的独特魅力的同时，滋生出特别的解题思路和灵巧的解题技巧.

例4 已知:

$\sin A+\sin B+\sin C=0, \cos A+\cos B+\cos C=0$，

求证: $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=3\sin(A+B+C)$，

$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=3\cos(A+B+C)$.

分析 通过观察，已知和求证四个等式排列井然有序，显得极为和谐. 凭直觉判断，如果对求证的等式任一边贸然展开，都会破坏这种和谐的形式，引起极为复杂的运算，于是想到另辟蹊径. 基于结构的联想，不难发现可构造复数.

不妨令 $Z_1=\cos A+i\sin A, Z_2=\cos B+i\sin B, Z_3=\cos C+i\sin C$，则由已知，可以得到 $Z_1+Z_2+Z_3=0$，于是 $Z_1^3+Z_2^3+Z_3^3=(\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C)+i(\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C)$，

$Z_1Z_2Z_3=\cos(A+B+C)+i\sin(A+B+C)$.

故只需证明: $Z_1^3+Z_2^3+Z_3^3=3Z_1Z_2Z_3$.

事实上，由因式分解:

$Z_1^3+Z_2^3+Z_3^3-3Z_1Z_2Z_3=(Z_1+Z_2+Z_3)(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2-Z_1Z_2-Z_2Z_3-Z_3Z_1)=0$.

五、美的灵动，让解题突破桎梏

现实生活中的客观实体为数学创造了良好的模型，因此数学的结构在一定的领域内具有相对的稳定性. 然而，客体世界发展到一定地步，就会产生一种破坏性的力量. 在数学中，这种"破坏"是美学中的新思想、新理论、新方法对原有习惯的一种美的突破，常常被称之为奇异美. 这种奇异性包含着新颖和出乎意料的含义，也就是说，那些被称为奇异的事物所引起的

不仅是赞叹,而且是惊愕和诧异.因为它们是如此地出乎常识或预料.

例5 在锐角三角形ABC中,求证:$\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C$.

分析 依据例4看本题似乎不要轻易破坏$\cos A+\cos B+\cos C$和$\sin A+\sin B+\sin C$两个三角式.然而,具体问题具体分析,本题只从"外围"构造解决不了问题.同样基于数学美的思考,我们发现左右两边具有关于三个内角的轮换对称美,于是可以猜想:

$\cos A+\cos B<\sin A+\sin B$或$\cos A<\sin B$.

这两个猜想,任何一个如果得到证明的话,原题就证出来了.于是可以沿着这两种思路考虑以下证法

(1)因为$\triangle ABC$为锐角三角形,要证$\cos A+\cos B<\sin A+\sin B$,即证

$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}B<\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$,

即$\tan\frac{A+B}{2}>1$,$A+B>\frac{\pi}{2}$,显然成立.

(2)因为$\triangle ABC$为锐角三角形,要证$\cos A<\sin B$,即证$\cos A<\cos(\frac{\pi}{2}-B)$.

因为$A+B>\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B>0$.根据余弦函数的单调性容易证得.

在解决数学问题中,突破传统的思维束缚,别出心裁地奇思妙想,有时让人拍案叫绝,这也构成了数学解题的奇异美,恰是数学美应用到数学解题中的魅力所在.

例6 某轮船公司每天中午有一只轮船从哈佛开往纽约,并且在每天的同一时间也有一只轮船从纽约开往哈佛.船在途中所花的时间,来去都是7昼夜.问今天中午从哈佛开出的轮船,在整个航运途(不包括开出哈佛与到达纽约)中,将会遇到几只同一公司的轮船从对面开来?

分析 据说本题源自于近代科学史上发生过的一件有趣的事:十九世纪一次国际性会议上,来自世界各国的许多著名数学家共进早餐,法国数学家柳卡突然向在场的人们提出了这个被他称为"最困难"的问题(数学界称之为柳卡趣题).问题提出后,一时竟真的难住了数学家们,尽管他们为此进行过探讨和争论,但得到的答案莫衷一是.事后许久,才有一位数学家实验性地画出了一个简单到几乎连小学生都能看懂的图形,从而宣告问题的彻底解决.

许多人拿到这个题目,不知道如何下手,似乎船只与时间点太多而无法表示.事实上,采用下面这个特别的图示化,会起到意想不到的解题效果.

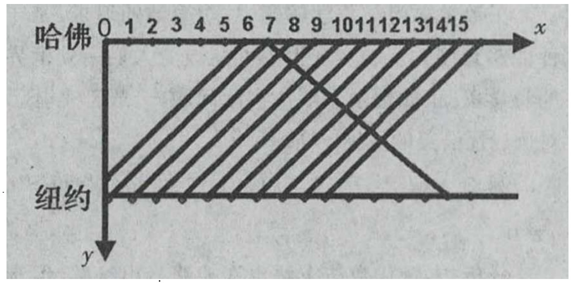

图3

如图3所示,在xOy平面上,Ox轴表示时间,Oy轴表示地点,以原点O代表哈佛,Oy上任取一点代表纽约,那么,轮船的"时间——位置曲线"就是图中的两组(左下到右上、左上到右下)平行线,分别代表轮船从纽约到哈佛和从哈佛到纽约.现在图中从左上到右下的那一条粗黑线表示从哈佛开往纽约的一只轮船的"时间——位置曲线",因为它与另一组平行线相交15次.所以,这只轮船将遇到15只轮船,其中2只是开出哈佛与到达纽约遇到的,其余13只是在海上相遇的.

相信阅读或思考了本题解题方法的人,都能体会到图示化在本题求解中的特别作用.在数学问题的探索中,"七桥问题"的解决也应当归功于图示化思想.当然数学美的灵动不仅有图示化,还有数字化,就是把现实问题用数字去刻画和表示,也会给问题解决带来极大的方便.

融审美于数学解题之中,不是为了解题而解题,而是从中体验数学学习和数学解题的乐趣,感悟数学美的奇异及其应用到数学解题中的优越.真正体会到其中的快乐,享受到数学美给解题带来的妙趣,需要刻苦钻研,潜心思考,日积月累.

参考文献:

[1] 宁连华.数学探究学习研究的特点及其思考[J].数学教育学报,2005(04):32-34.

[2] 华佳.打破高中学生解题思路的"瓶颈"[J].数学之友,2018(02):78-79+81.

[3] 波利亚.数学的发现——对解题的理解、研究和讲授[M].北京:科学出版社,2013:245.