类比——数学解题的引擎

段志贵，宁耀莹
（盐城师范学院数学与统计学院；南京师范大学教师教育学院）

摘　要：类比是一种重要的解题方法．类比可以沟通数学问题之间的联系，有助于问题解法的生成．在中学数学解题中，常见、常用的类比方式主要包括：结构化类比，探求数学解题本质；模式化类比，寻找数学解题路径；特殊化类比，捕获数学解题灵感；跨学科类比，开阔数学解题视野．

关键词：类比法；数学解题；数学思维

德国哲学家康德认为，类比在人类认识世界、改造世界的活动中具有特殊的地位和作用．他指出每当理智缺乏可靠论证的思路时，类比这个方法往往能指引我们前进．所谓类比指的是根据两个对象或两类事物间存在着一些相同或相似的属性，猜测它们之间也可能具有其他一些相同或相似的属性的思维方法．通过类比，可以发现新的数学知识，可以寻求到解决数学问题的方法和途径，可以培养学生的发散思维、创造思维，以及合情推理能力．

在数学解题中，类比也是一种重要的思想方法．它是从特殊到特殊的一种思维方法．类比可以沟通数学问题之间的联系，有助于问题解法的生成．在中学数学解题中，常见以及常用的类比方式主要包括结构化、模式化、特殊化、跨学科四种．

一、结构化类比，探求数学解题本质

所谓结构化类比，指的是基于问题结构的相似特征，把待求解的问题通过联想与一些最基本的、广为熟悉的简单题目做比较，以获得解题灵感或解题思路．这些题目可以是公式、定理，也可以是一些常见、常用的题型．例如，三角形两边之和大于第三边；勾股定理及其逆定理；二倍角的正切公式，等等．也许每个人在基本题型上的表述不尽相同，但基本内涵都大致相同．基本题型结构意在探求本质，揭示数学问题中蕴涵着的最基本的数学思想．在具体解题中，也许没有唾手可得的类比对象，但是通过观察以及对曾经解决过的问题的快速扫描，往往能够寻找到部分关联或结构相似的问题，在不断地比较和分析中，有可能把原来的问题转变为具有类比性质的新的问题求解，或产生新的思路使原问题得以解决．

例 1　证明不等式 $\log_a(a+b)>\log_{(a+c)}(a+b+c)$，$a>1$，$b>0$，$c>0$.

可以发现不等式左右两边的结构完全相同，差别仅仅在于右边对数的底数和真数比左边多一个 c．因此我们考虑构造函数，$f(x)=\log_x(x+b)$ $\left(x\in(1,\ +\infty)\right)$，这样待证不等式就是要证明 $f(a)>f(a+c)$，但是由于 $c>0$，故 $a<a+c$，所以我们必须证明 $f(x)$ 是减函数．

因为 $f(x)=\log_x(x+b)=\dfrac{\ln(x+b)}{\ln x}$，所以 $f'(x)=$

$$\frac{\frac{1}{x+b}\ln x-\frac{1}{x}\ln(x+b)}{\ln^2 x}=\frac{x\ln x-(x+b)\cdot\ln(x+b)}{x(x+b)\ln^2 x}.$$

上式中分母显然为正，易证得 $x\ln x<(x+b)\cdot\ln(x+b)$．所以 $f'(x)<0$．

因而 $f(x)$ 在区间 $(1,\ +\infty)$ 内是减函数，所以有

收稿日期：2018—08—25
基金项目：江苏省教育厅高校品牌专业建设工程资助项目——盐城师范学院数学与应用数学专业（PPZY2015C211）．
作者简介：段志贵（1966— ），男，教授，主要从事数学方法论、数学课程与教学论研究．

$f(a)>f(a+c)$.

例2 判断：以过椭圆的焦点的弦为直径的圆，和椭圆相应的准线的位置关系.

此题的结构和要求，使我们联想到关于抛物线的一个结论：以过抛物线焦点弦为直径的圆，必和抛物线的准线相切. 几乎相同的条件，在不同的曲线下结论会发生什么变化？观察在抛物线条件下对此题的证明.

设焦点为点 F，过焦点的弦为 AB，曲线的离心率为 e，A，B 两点到准线的距离分别为 m，n. 则 AB 中点 M 到准线的距离 d 等于 $\frac{m+n}{2}$. 由抛物线的定义可得 $|AF|=m$，$|BF|=n$. 所以有 $d=\frac{m+n}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2}=\frac{1}{2}|AB|$. 因此，以过抛物线焦点的弦为直径的圆，必和抛物线的准线相切.

由此证明我们可以类比椭圆条件下的证明思路，利用椭圆的第二定义可得 $d=\frac{m+n}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2e}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}|AB|$. 因为椭圆的离心率 $0<e<1$，所以 $d>\frac{|AB|}{2}$. 则圆和准线相离. 我们还可以类比到双曲线 $e>1$，所以 $d<\frac{|AB|}{2}$. 则圆和准线相交.

二、模式化类比，寻找数学解题路径

模式化类比与结构化类比不同. 模式具有超越事物本身表象的特点. 数学概念、原理和方法都具有超越具体事物或特定现象的普遍意义. 根据数学研究对象与研究方法的特征，美国数学家斯蒂恩曾提出“数学是关于模式（Patterm）的科学”的数学观.

所谓模式化类比，指的是根据待解决问题的表象，去寻找可类比的相同性质的问题. 相同性质要么表现在解题方法上，要么表现在解题策略上. 例如，行程问题、溶液问题、劳力分配问题、购货价格问题、工程问题等，虽然它们的实际背景不相同，但都有着同一个模式：问题涉及三个基本量 a，b，c，且具有数量关系 $a=bc$. 有关解题的模式类比有很多，如余弦定理模式、斜率模式、距离模式、正方体模式，等等. 在数学学习中，总结、概括、发现基本模式是至关重要的.

例如，判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的取值决定了一元二次方程、一元二次不等式的解的情况，也决定了二次函数的形态. 于是 B^2-AC 就是一个与二次方程、不等式、函数有关的基本模式，看到形如 B^2-AC 的式子，便可以构造二次函数或方程来解决有关问题.

例3 已知 $f(x)=\lg\frac{1^x+2^x+\cdots+n^x\alpha}{n}$ $(n\geqslant 2)$，当 $\alpha\in[0,\ 1)$ 时，求证：$2f(x)<f(2x)$.

欲证 $2f(x)<f(2x)$，只需证明 $\left(1^x+2^x+\cdots+n^x\alpha\right)^2<n\left(1^{2x}+2^{2x}+\cdots+n^x\alpha\right)$. 待证不等式形式为 $B^2<AC$，故构造关于 T 的二次函数 $G(T)=nT^2-2\left(1^x+2^x+\cdots+n^x\alpha\right)T+\left(1^{2x}+2^{2x}+\cdots+n^{2x}\alpha\right)$.

因为 $G(T)=\left(T-1^x\right)^2+\left(T-2^x\right)^2+\cdots+\left(T-n^x\alpha\right)^2+n^{2x}\alpha-n^{2x}\alpha^2$，又因为 $\alpha\in[0,\ 1)$，所以 $G(T)$ 恒大于0. 所以 $G(T)$ 的判别式小于0. 原题得证.

例4 如图1，过四面体 $D-ABC$ 的底面上任一点 O 分别作 $OA_1\,/\!/\,DA$，$OB_1\,/\!/\,DB$，$OC_1\,/\!/\,DC$，点 A_1，B_1，C_1 分别是所作直线与侧面的交点，求证：$\frac{OA_1}{DA}+\frac{OB_1}{DB}+\frac{OC_1}{DC}$ 为定值.

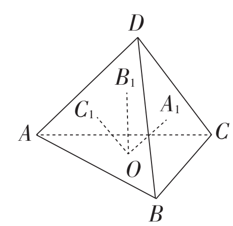

图1

基于问题的本质，把立体几何中的四面体与平面中的三角形相类比，首先探索平面三角形中的相关问题的解法. 过 $\triangle ABC$（底）边 AB 上任意一点 O 分别作 $OA_1\,/\!/\,AC$，$OB_1\,/\!/\,BC$，分别交 BC，AC 于点 A_1，B_1，看一下 $\frac{OA_1}{DA}+\frac{OB_1}{DB}$ 是否为定值. 这个问题很容易运用相似比推导出固定值为1. 然后，进一步思考可以发现，可以经过点 A，O 作 BC 的垂线，过点 B，O 作 AC 的垂线，也可以采用线段比转化为面积比的方法可以证明. 由此，类比到空间的图形，便有了证法.

不妨设平面 $OA_lDA\cap BC=M$，平面 $OB_lDB\cap AC=N$，平面 $OC_lDC\cap AB=L$，则 $\triangle MOA_1\backsim\triangle MAD$，$\triangle NOB_1\backsim\triangle NBD$，$\triangle LOC_1\backsim\triangle LCD$. 得 $\frac{OA_1}{DA}+\frac{OB_1}{DB}+\frac{OC_1}{DC}=\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OL}{CL}$.

如图2，在底面的$\triangle ABC$中，由于AM，BN，CL交于一点O，用面积法易证得$\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OL}{CL}=1$，所以$\frac{OA_1}{DA}+\frac{OB_1}{DB}+\frac{OC_1}{DC}=1$.

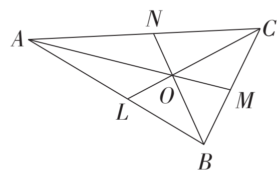

图2

三、特殊化类比，捕获数学解题灵感

所谓特殊化类比，是指将原命题中比较复杂的多元要素加以精减，从而找到简单的命题进行解答，通过运用多元的思维方式，将复杂问题类比为简单问题来求解.

例5 如a_1，a_2，…，a_n均为小于1的正数，且b_1，b_2，…，b_n是它们的一个新排列，则所有形如$(1-a_1)b_1$，$(1-a_2)b_2$，…，$(1-a_n)b_n$的数不可能都大于$\frac{1}{4}$.

对于这种一般性的问题，可以使用特殊化方法探路. 当$n=1$时，$(1-a_1)a_1=-a_1{}^2+a_1=-\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$. 为了使用这一结论，考虑类比使用整体思维的方法. 将所有的式子相乘，得$0<(1-a_1)b_1(1-a_2)b_2\cdots(1-a_n)b_n=(1-a_1)a_1(1-a_2)a_2\cdots(1-a_n)a_n\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

假设$(1-a_i)a_i>\frac{1}{4}$ $(i=1，2，\cdots，n)$，则$(1-a_1)b_1(1-a_2)b_2\cdots(1-a_n)b_n>\left(\frac{1}{4}\right)^n$. 从而引出矛盾，结论得证.

例6 已知$x_i\geqslant 0$ $(i=1，2，\cdots，n)$，且$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 求证：$1\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant\sqrt{n}$.

与此题类似的一道简单题目是：已知$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，且$x_1+x_2=1$，求证$1\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leqslant\sqrt{2}$.

本类比题的证明思路为：因为$2\sqrt{x_1x_2}\leqslant x_1+x_2=1$，所以$0\leqslant\sqrt{x_1x_2}\leqslant 1$. 则$1\leqslant x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}\leqslant 2$，即$1\leqslant\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2\leqslant 2$. 故$0\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\leqslant\sqrt{2}$.

类比解法，由基本不等式有$0\leqslant 2\sqrt{x_ix_j}\leqslant x_i+x_j$，$0\leqslant 2\sum\limits_{1<i<j<n}\sqrt{x_ix_j}\leqslant(n-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)=n-1$，故$1\leqslant x_1+x_2+\cdots+x_n+2\sum\limits_{1<i<j<n}\sqrt{x_ix_j}\leqslant n$，即$1\leqslant\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)^2\leqslant n$. 所以$1\leqslant\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant\sqrt{n}$.

四、跨学科类比，开阔数学解题视野

宏观世界的各学科之间并不孤立，它们具有内在的统一性和关联互补性. 如果能将其他学科的特性类比到数学解题中来，可能会收到意想不到的效果.

例7 A，B，C村庄各有学生a，b，c人，他们打算联合办一学校，问学校建在什么地方最合适（使所有学生走的路程总和最短）？

如图3，在标有三村位置的木板上，在表示三村的点处各钻一个孔，然后把三根系在一起的细绳从孔中穿过，再在他们下面分别拴上重为a，b，c的物品，当整个力学系统处于平衡位置时，三绳结点M的位置即为所求. 可以证明，M的位置是使$\frac{\sin\angle BMC}{a}=\frac{\sin\angle CMA}{b}=\frac{\sin\angle AMB}{c}$成立的点（可以用面积方法来证明这个结论，这里从略）.

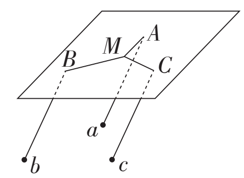

图3

例8 如图4，直线l为一条河，A，B分别为位于两岸的居民点，由于两岸的地理环境不同，汽车在两岸行驶速度设为v_A，v_B，如要使汽车由A到B所用的时间最少，应在何处架桥？

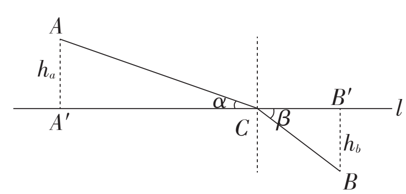

图4

假如选择在河岸点C处架桥，使汽车由A到B所用时间最少，把河两岸类比为以1为边界的两种不同物质，光线在这两种物质中传播的速度分别为v_A，v_B，把汽车行进路线类比为由A射到B的光线，由光行最速原理，光道路应由A经C折射到B，再由折射定理有$\frac{v_A}{\sin\alpha}=\frac{v_B}{\sin\beta}=\frac{1}{k}$. 从而有$\tan\alpha=\frac{kv_A}{\sqrt{1-(kv_A)^2}}$，$\tan\beta=\frac{kv_B}{\sqrt{1-(kv_B)^2}}$. 因为$A'B'=A'C+CB'=AA'\tan\alpha+BB'\tan\beta=\frac{kv_Ah_a}{\sqrt{1-(kv_A)^2}}+\frac{kv_Bh_b}{\sqrt{1-(kv_B)^2}}$. 从中求出$k$，即可求出$\alpha$，$\beta$，

于是点 C 确定.

类比是数学发现和创造的一种的思维方法，其在把已知事物的性质推广到类似的事物方面有着重要的作用. 数学的发展历程中存在很多类比的影子，特别是在数学解题中，巧用类比的方法能够使数学的解题思路开阔，路径容易探求，也能使学生的学习由被动变为主动. 但是，需要注意的是运用类比法解题，只是提供给我们联想与发现的方法，并不能代替严格意义上的推理论证.

参考文献：

[1] 李爱清. 通过类比联想寻找解题思路和方法[J]. 数学通报，2006(2)：40-43.

[2] 段志贵，黄琳. 数学解题观察的有效视角[J]. 高中数学教与学，2018(12)：44-47.

[3] 华佳. 打破高中学生解题思路的“瓶颈”[J]. 数学之友，2018(2)：78-79，81.

[4] 段志贵. 变通：让解题有更充分的预见[J]. 数学通报，2017，56(12)：50-54.

[5] 罗增儒. 数学解题学引论（第三版）[M]. 西安：陕西师范大学出版社，2016.

[6] 段志贵. 从直觉到构造：数学解题的突破[J]. 中学数学教学参考（上旬），2010(11)：34-36.

（上接第57页）

即 $\ln(n+1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}$.

猜想得证.

例7 （2013年大纲卷·理21(2)）设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，证明：$a_{2n}-a_n+\frac{1}{4n}>\ln 2$.

证明：由命题3知，当 $x>1$ 时有 $\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

令 $x=t^2$，可得 $2\ln t<t-\frac{1}{t}(t>1)$.

再令 $t=\frac{k+1}{k}$，得 $2\ln\frac{k+1}{k}<\frac{k+1}{k}-\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$，

即 $\ln\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$.

分别令 $k=n，n+1，n+2，\cdots，2n-1$，得到 n 个不等式，

两边叠加，化简，得 $\ln 2n-\ln n<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}$，

即 $\ln 2<\left(a_{2n}-a_n\right)+\frac{1}{4n}$.

问题得证.

【评注】从例6、例7可以看出，对数平均不等式的单变量形式在证明数列不等式时特别有效，其中的关键是给 x 赋一个恰当的值. 例如，例6中的不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)$，先将不等式的左边看成数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $a_n=\frac{1}{n+1}$；再将不等式的右边看成数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\ln(n+1)$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_{n+1}-S_n=\ln(n+1)-\ln n$；当 $n=1$ 时，$b_1=S_1=\ln 2$，适合上式. 由此可得放缩的目标为 $\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$，自然就知道应该给 x 赋一个什么值.

与此类似的试题如下.

（2012年辽宁卷·理21(2)）证明：当 $0<x<2$ 时，$\ln(x+1)+\sqrt{x+1}-1<\frac{9x}{x+6}$.

（2012年天津卷·理20(3)）设 $n\in\mathbf{N}^*$，求证 $\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}-\ln(2n+1)<2$.

（2010年湖北卷·理21(3)）求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}\ (n\geqslant 1)$.

以上几道例题都是依托对数平均不等式命制而成的，背景深刻. 事实上，很多高考试题都有着深刻的背景，不少试题都是从初等数学研究的成果中选取的素材，并以此为基础，将其变抽象为具体，进行加工与调整而形成的，这是一种常见的命题途径. 在教学过程中，要揭去它们的“面纱”，揭示它们的背景及本质，这样既能缩短解决同类问题的思维流程，更能激发学生的学习兴趣，从而培养他们深入思考问题和钻研问题的学习习惯.

参考文献：

[1] 邢友宝. 极值点偏移问题的处理策略[J]. 中学数学教学参考（上旬），2014(7)：19-22.