

数学“慢学习”的教育价值与教学策略^①

华云锋¹ 段志贵²

(1. 江苏省盐城经济技术开发区实验学校 224007; 2. 盐城师范学院数学与统计学院 224002)

目前,课堂教学已经广泛使用现代化教学手段,呈现大容量、快节奏的画风,学生俨然成为活动的主体、课堂的主人.然而,通过课堂观察我们不难发现,不是每位同学都能生动、活泼、主动地学习,部分学生反应迟钝,思维滞后,进程缓慢,以至于失去了学习的兴趣.因此,如何尊重个体差异,关注全体学生的发展,有针对性地放慢学习节奏,注重学习体验和数学思考,便成为我们需要迫切关注和研究的重要课题.

1 “慢学习”是“慢教育”研究的一个常态课题

美国著名心理作家迪安·德尔·塞斯托(Dean Del Sesto)在《快行动,慢思考》一书中讲到,人们需要一种慢而深的思考方式,以应付越来越忙碌的学习生活^[1].日本初中数学教学经常采用丰富多彩的形式帮助学生提出问题和组织数学活动,给学生足够的思考和探究时间.学生的创新思维与探索精神是在慢节奏中培养和形成的.

我国对“慢教育”也有一定的研究.张文质先生在《教育是慢的艺术》一书中阐述了“慢教育”的含义,教育是生命的潜移默化的过程,其变化是缓慢的、细微的,它需要生命的积淀^[2].上海大学王卿文教授说过,学数学只有慢,不片面地追求速度,反复思考,才能深入理解、透彻领会,真正掌握数学的精髓和真谛.他认为学好数学有诀窍,要达到精深,不能多和快,只能少且慢.中国科学院孙斌勇院士谈学数学体会时说,“学数学不要求快,一定要学慢学细”.数学家丘成桐说过,“快没什么用,做好的学问需要时间.”

“慢学习”就是进行细致化学习、体验式学习、思考式学习,因为它基于自主分析、独立思考,所

以学得明晰、想得深刻、悟得透彻.只要给学生有“想”和“悟”的时间,让他们充分体验和展示,知识迁移就能顺应而生.有了潜移默化、润物无声的“慢工”,才能换来后期解决问题的“快攻”.

节奏慢下来,思维跟上去,宝贵的是思想、眼光,而不只是进度,我们应让“慢教育”成为新的价值理念,让“慢学习”成为“慢教育”研究的一个常态课题.

2 数学“慢学习”的教育价值

2.1 “慢学习”尊重学生个体差异

每位学生是一个独立的个体,所以其学习方式、学习意志以及学习能力都存在着明显的差异性.由于个体存在特质,所以不同学生在学习过程中往往表现出不同的状态,少数同学思维敏捷反应迅速,更多的同学需要思考片刻,才能理解、明白.

“慢学习”是基于学情的一种课堂关怀,慢是为了使学生有充分的学习体验、充分的认知理解、充分的思维训练.有的教学环节只有组织学生学慢学细、学通学透,才能理解本质、领悟精髓,慢而细、慢而深的学习才是新教育视角下的一种“生本”课堂形态.

“慢学习”没有大容量,没有快节奏,只有适切的内容,适宜的节奏.它是基于学生差异化学情及思维特点进行的体验式、互动式学习.“慢学习”能够激活学生的学习内力,发展思维能力,完善自我人格.

2.2 “慢学习”把自主权还给学生

数学课堂教学,除了教给学生应知应会,更要培养学生安安静静的自主思考能力、热情友好的

^① 江苏省教育科学“十三五”规划课题《初中数学学慢生“慢学习”的实践研究》(编号:B-b/2020/02/217)和盐城师范学院教育教学改革重点课题“师范类专业认证背景下的数学教学论课程教学改革的探索和思考”(编号:2018YCTUJGZ011).

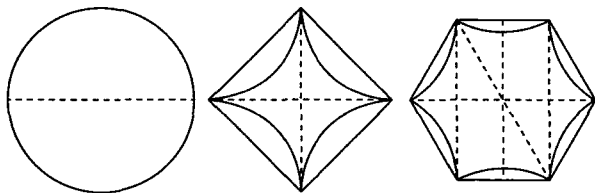
合作与交流能力.课堂上,学生需要时间思考,需要时间体验,需要时间表达,需要时间辨析.比如,学习多项式的因式分解时,很多同学对公式产生混淆,会犯各种错误,有的因为公式特征认知偏差导致“张冠李戴”,如 $9a^2 - b^2 = (3a - b)^2$;有的因为没有理解乘法公式与因式分解之间的逻辑关系导致“无功而返”,如 $(m^2 + 1)^2 - 4m^2 = (m^2 + 1 + 2m)(m^2 + 1 - 2m) = (m + 1)^2(m - 1)^2 = (m^2 - 1)^2$.如果我们引导学生先通过自主思考找出出错原因,辨析公式特征及各自的差异性,再相互交流、彼此共享,就能学有所得.不是老师在前面“牵着”学生走,也不是老师在后面“赶着”学生走,而是老师融入到学生成长共同体中导学助学、领学促学.

学生有自主支配的时间,才能逐步养成主动学习、积极思考的良好习惯.学生是课堂活动的主体,他们活动的时间和进程要体现自主化,老师要给予他们足够的时间和空间,发挥他们的主观能动性,让他们亲历亲为,体验解题过程的酸甜苦辣,慢慢积累成功的经验,也汲取失败的教训^[3].

2.3 “慢学习”注重学生学习体验

因为慢,才会有感受和体验;因为慢,才能有专注和深刻;因为慢,才能研机析理、学深悟透.这就是“慢慢来会比较快”的学习意境.数学课堂的慢教学就是要在课堂中适当延长学生思考过程,在“慢”中体验教学思维的灵巧,领悟教学思想的精深.

在“折纸——探索正多边形与圆的联系”实验教学中,可以组织学生动手操作,实现“体验、实践、获得”的新课程理念.通过数学实验,让学生发现和研究折叠圆形纸片的基本原理以及圆与正多边形的内在联系.如图,要折出正六形,其本质是折出一个 60° 的圆心角.可以进一步思考还能折出哪些正多边形(如正三角形、正十二边形等).本节体验式教学,在“做”中既训练学生实践能力和创新意识,又发展几何直观和推理能力,感受转化思想.



“慢学习”,是慢而不怠,像慢步,但不慢心.“慢学习”的初级阶段或许更适合采取模仿式学习,以学习和运用单一知识点解决问题为主;第二阶段是尝试通过“同伴教学”的形式,在观察和思考后进行关联分析和思路构建;第三阶段是通过合作、交流等形式,尝试解决一些简单的实际问题,并能把新知识链接到原有的知识结构中;第四阶段是自主实践探究学习,让探究成为“慢学习”的最好见证,让探究使“慢学习”的要义更深刻.

3 促进学生“慢学习”发生的教学策略

3.1 选择“慢学习”的合适路径

“慢学习”可以对学习的内容进行更好地消化、更好地理解,有益于培养学生分析问题和解决问题的能力.我们在设计教学任务时,要预设给学生思考的空间和交流合作的机会,体现“学为中心”的课程理念.

审题译题,训练联想能力.数学问题具有一定的抽象性,有时涉及的知识内容多,关键词之间关联度不明显,这就需要同学们在审题时进行联想、分析,积极寻找其间的相关信息,对于一个图形问题,往往在理解题意、形成解题思路需要花费较多时间,不能急于求成.

例如,已知点 P 的坐标为 $(m+1, m-1)$. (1)点 P 在直线 $y = x - 2$ 上吗? (2)若 $A(3, 0)$ 、 $B(0, 6)$,且点 P 在 $\triangle ABO$ 内部运动,试求 m 的取值范围.

在解决题(2)时,很多同学急于根据点 P 在 $\triangle ABO$ 内部运动这一条件,得出 $0 < m+1 < 3$, $0 < m-1 < 6$,再联立不等式解得 $1 < m < 2$.这样解就进入了思维误区,因为你在审题时孤立了题(1)信息,忽略了(1)(2)之间的联系.其实解决题(2)时要同时考虑两个因素:点 P 既在 $\triangle ABO$ 内部运动,又在直线 $y = x - 2$ 上运动,这才是抓住了问题的两个关键点.

定理证明,培养探索精神.如在证明勾股定理的教学中,学生既惊叹我国古代西周数学家商高的重大发现——勾三、股四、弦五(勾股定理的特例),又敬佩古希腊数学家毕达哥拉斯对这一定理成功证明的突破,更折服勾股定理至今已有数百种不同的证明方法.在老师的引导下,同学们可以进行慢而深的探索活动,尝试拼图法、等积法,再挑战割补法、搭桥法等,训练学生的图形分析能力

和思维创新能力. 同样, 对于一个公式产生的背景以及推导过程都要留给同学们充裕的思考时间, 进行猜想、推演, 而不是在出现公式之后老师再反复解释关键点和强调注意点.

提出问题, 发展创新能力. 提出问题是需要发散思维和创新意识. 由于问题提出的过程和形式是开放的, 所以对于认知能力较弱的学生来说也能积极参与其中; 而对于能力较强的学生而言, 提出问题可以挖掘他们更大的学习潜力. 如, 某商场经营某种文具, 进价为每件 20 元. 试营销阶段发现, 当销售单价是 25 元时, 每天的销售量为 250 件; 销售单价每上涨 1 元, 每天的销售量就减少 10 件. 接下来, 耐心等待学生从不同视角分析、思考并提出各个层级的问题. 有的学生提出关于销售量的一次函数问题, 有的学生提出关于销售利润的二次函数问题, 可谓“智者智仁者仁”. 问题提出后, 老师可以组织学生自主思考尝试解决, 也可以通过同伴教学、合作交流获得互助共享.

渗透思想, 强化策略形成. 数学思想方法是数学学科的精髓, 是学好数学的必备素养. 教育不像工业, 而更像农业, 需要根据植物的生长规律进行浇灌、培育. 慢学习追求的是知识的获得过程, 而数学思想方法教学注重的是感悟和浸润. 如, 一个数学问题中出现比较多的研究对象以及比较复杂的数量关系时, 我们不妨借助设元或者设变量的方法(方程或者函数思想), 将复杂问题转化为简单问题(转化思想), 还可以从不同视角分层次、分类别进行问题研究(分类思想), 可见不同的数学思想方法也可以协同运用、巧妙融合, 这就是理解数学本质的学习, 也是通过“慢学习”获得解题策略的价值体现.

3.2 确立“慢学习”的有效方式

数学学习中, 学生掌握知识、培养能力的方式是多样的, 一是溯源, 通过对情境问题的表象认知和属性归纳, 抽象出新概念的要义; 二是内化, 通过对所学知识的实践运用, 转化为数学学习技能, 从而理解知识的内涵和数学的本质; 三是后延, 通过思维拓展或者微探究等形式让思维的理性上升为思维的悟性, 形成解题策略和思想. 数学中的知识点都不是孤立的, 它会经历“走出森林、驰于平原、隐于高地”的美丽过程.

3.2.1 活水有源, 涓涓细流

行到水穷处, 坐看云起时. 学习知识, 既要注重日积月累, 也要明白知识的源头, 生于何地, 长向何方. 如法则、定理从何而来? 有的源于定义, 有的依于公理(基本事实). 概念之间、定理之间往往是有联系的, 教师在教学过程中要给学生足够的思维时空, 让学生经历数学概念的抽象过程和定理的证明过程, 不能急于给出数学家发现的结论. 如果教师能够通过巧妙、合理的设计引导学生追溯数学家思维方式, 发现问题研究的源头, 那将是极具教学价值的.

在“矩形的判定”这节课的教学中, 教师可以提出如下问题: 同学们, 根据你们已有的学习经验, 你们应该从什么角度来探究矩形的判定定理呢? 我们期盼学生经过深思熟虑后的回答: 首先从矩形的定义角度, 再从矩形性质的逆命题角度进行探究. 这样的回答至少有两层意义: 一是矩形的定义、性质和判定之间有着密切的关系, 二是矩形性质、判定的源头是矩形的定义, 它们是基于定义的发散、生成性研究.

再如, 运用对称性的知识解决“将军饮马”问题的数学依据就是基本事实: 两点之间线段最短. 同样, “两直线平行, 内错角相等”是根据基本事实“两直线平行, 同位角相等”进行证明的, 十分便捷, 正如丘成桐教授所说“利用简单的公理, 却能推出美妙的定理(或结论), 实在令人神往.”

3.2.2 载体顺应, 以达内化

知识要转变为能力, 必须要经过“内化”的过程. 饭菜吃下去要有一个“消化”的时间, 这是生理规律, 同样记忆到大脑中的知识要形成结构化的知识网络, 就要联系之前所学内容, 这离不开“同化、顺应”的基本环节.

苏科版八年级上册“6.1 函数”的教学中, 在抽象属性、概括共性、揭示概念后, 要组织学生通过实践运用环节达成“实现内化、理解本质”的课堂目标, 教者设计了以下 3 个问题.

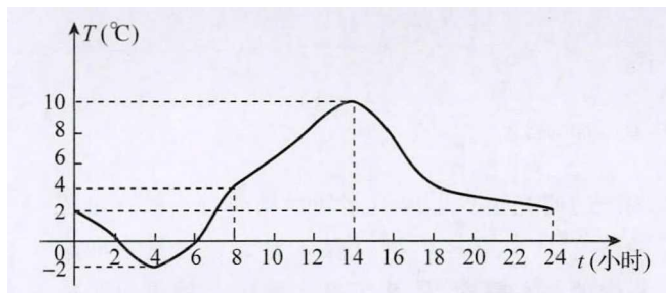
问题 1: 用 40 cm 长的绳子围成一个长方形, 这个长方形的长是宽的函数吗? 面积是长的函数吗?

问题 2: “沙漏”是我国古代一种计量时间的仪器, 它是根据上面容器里的细沙漏到下面容器中的细沙数量来计量时间. 请说出这个变化过程

中,哪个是自变量?哪个是函数?

问题3:下图表示某一天的气温与时间关系的图像.请判断、辨别以下两个问题:

①气温是时间的函数;②时间是气温的函数.



问题1、2是为了通过“同化”形成对新知识的自我认同,这是必不可少的正向(顺应)强化环节;设计问题3是为了让同学们在辨析或者争论中形成共识,对函数概念中“唯一”这个核心词的理解会有较大帮助.

3.2.3 適切后延,品悟策略

根据学情,可以为学有余力的同学提供“问题微探究”环节,促进优生对数学问题的深刻理解,对数学思想的透彻品悟.通过对问题的探究在解决问题的过程中获得新知,获得感受,获得解决问题的方法和思想,从而获得核心素养的发展和关键能力的提升^[4].

如,在学习“圆的内接四边形性质”后,可以设计一个“角的存在性”问题,组织学生进行逐级探究:平面直角坐标系中,已知 $A(-1,4)$, $B(4,9)$. ①用尺规作图,在 y 轴上找一点 M ,使得 $\angle AMB=90^\circ$. ②若点 $P(n,0)$ 满足 $\angle APB=45^\circ$,求 n 的值. ③探究:在 y 轴上是否存在一点 Q ,使得 $AQ=QB$ 和 $\angle AQB=135^\circ$ 这两个结论同时成立?若存在,求出点 Q 的坐标,若不存在,请说明理由. 题①通过添加“辅助圆”,根据直径所对的圆周角是直角,便可作图找点;题②,受到题①借力“辅助

圆”的启发,画出以 AB 为弦、圆心角为 90° 的圆与 x 轴相交便可轻松求解. 题③的解题思路是先假定满足 $AQ=QB$ 和 $\angle AQB=135^\circ$ 结论之一,再探究是否得到另一个结论. 这个微探究题组,不仅培养学生数学发现的能力,也训练学生数学演绎的能力,这种在知识延伸处,发展学生的模型思想,形成“探索—发现—演绎”的解题策略,需要学生充分的数学分析和思考才能获得.

有自由之时间,才能有自由之思想. 数学教育应致力于促进学生更积极地进行思考,数学思维显然就属于“长时间的思考”^[5]. 数学课堂有思考才能灵动. 我们主张“慢学习”的初心就是根据所学内容进行体验式学习、思考式学习,学生需要充分的时间观察、感知和分析,便于学得细致、深入和透彻,并以期提高学生的认知能力、领悟能力和“慢学习”的质效.

“慢教育”的路还很漫长,“慢学习”能否有效实施取决于教师是否有尊重学生课堂权益的“学生立场”,是否有研究学生、研究学法的教育素养,是否有以爱育爱、静待花开的教育情怀. 我们愿为学生生命的健康成长培土浇水、育人育心,让“慢学习”成为初中数学教学中最美的生态景观.

参考文献

- [1] 迪安·德尔·塞斯托. 慢思考—快节奏生活下的自我修复[M]. 北京:北京联合出版有限责任公司,2017
- [2] 张文质. 教育是慢的艺术[M]. 上海:华东师范大学出版社,2019
- [3] 卓斌. 数学解题教学应让通解通法落地生根[J]. 数学通报,2018,57(2):45-49
- [4] 胡云飞. 核心素养视角下基于探究的概念教学设计与反思[J]. 数学通报,2017,56(11):33-36
- [5] 郑毓信. “数学思维”之深思[J]. 数学教育学报,2015,24(1):1-5.

(上接第31页)

- [30] Vinner, S. Concept definition, concept image and the notion of function[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1983, 14(3): 293-305
- [31] Dreyfus, V. T. Images and Definitions for the Concept of Function[J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1989, 20(4): 356-366
- [32] Kleiner, I. Functions: Historical and pedagogical aspects[J]. Science & Education, 1993, 2(2): 183-209
- [33] Malik, M. A. Historical and pedagogical aspects of the defi-

nition of function? [J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1980, 11(4): 489-492

- [34] 赵瑶瑶, 张小明. 关于历史相似性理论的讨论[J]. 数学教育学报, 2008(04): 53-56
- [35] 徐文彬, 杨玉东. “本原性问题”及其在数学课堂教学中的应用[J]. 数学教育学报, 2005, (03): 14-16
- [36] Jankvist, U. T. On empirical research in the field of using history in mathematics education[J]. ReLIME, 2009, 12(1), 67-101