解题探索

# 基于数学直觉的解题发现

段志贵（盐城师范学院数学科学学院，224000）　刘进（江苏省盐城中学，224000）

庞加莱说："逻辑用于论证，直觉可用于发明."凯德洛夫则更明确的说："没有任何一个创造行为能离开直觉活动."直觉是人们认识世界的重要方式，是发明的根源.为了从哲学高度考察数学的认识过程及数学教学活动，我们必须考察数学认识过程中的直觉活动，因此深入研究直觉在数学解题发现中的具体应用具有十分重要的意义.

## 1　数学直觉对于解题发现的意义

直觉即灵感，千百年来，人们对灵感的理论解释众说纷纭，波利亚没有纠缠于定义的推敲，而结合数学问题的解决过程及数学的发现过程对灵感作了合乎情理的描述：在解题活动中我们要设法"预测到解，或解的某些特征，或某一条通向它的小路.如果这种预见突然闪现在我们面前，我们就把它称为有启发性的想法或灵感."，并经常用"蹦入"，"闯进"，"闪出"等形象化的名词来描述灵感.

纵观数学史，数学直觉思维经常出现在数学学习和研究之中，比如庞加莱在地质考察旅行途中，在踩上旅行车踏板的一刹那，突然直觉认识到 *Fuchs* 函数的变换方法；哥德巴赫从 $4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=7+3$ 这几个特殊的式子，直觉出著名的哥德巴赫猜想"每个不小于4的偶数都可以表示为两个素数之和"；高斯被一条定理证明折磨了两年之久后突然产生了灵感，获得了成功.数学推理的严谨性和顺序性让人觉得：似乎在数学推理中，是不需要直觉思维的.其实不然，笛卡尔曾考察过直觉和推理，他认为，在数学推理的每一步中直觉力都是不可或缺的，凡是有数学思维活动的地方都存在着数学直觉.

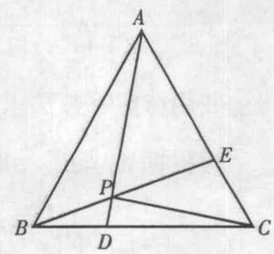
波利亚认为，"一个重大的发现可以解决一个重大的问题，但在求解任何问题的过程中，也都会有点滴的发现"，"求解一个问题的主要成绩是构想出一个解题计划的思路，这个思路可能是逐渐形成的，或者在明显失败的尝试和一度犹豫不决之后，突然闪现出一个好念头"，这就明确指出了数学直觉在发现数学问题解决的过程中起着重要的作用.

## 2　基于数学直觉的解题发现方法

### 2.1　顺藤摸瓜

笛卡尔把数学推导看作"一条结论的链"，一条相继的步骤序列，强调每一步的直觉洞察力.无独有偶，庞加莱曾经从"序"的角度谈整体把握法，他认为，一旦直觉到这个序，就再也不必害怕会忘掉任何一个元素，以至一眼之下就能领悟整个推理.由此可见，解题时从整体上把握推理过程，把握好推理的一列序，一条链，就可以顺着这个序，这条链，发现解题思路，即"顺藤摸瓜".

**例1** 如图所示，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，$D, E$ 分别是 $BC, AC$ 边上的点，且 $BD=\frac{BC}{3}$，$AD$ 与 $BE$ 相交于点 $P$.




求证：$CP\perp AD$.

观察题中条件、结论以及图形的结构特征，借助直觉洞察力，我们可以推测出解决问题的"序"：

(1)证明 $\triangle ABD\cong\triangle BCE$；

(2)证明 $P, D, C, E$ 四点共圆；

(3)证明 $CD$ 是四边形 $PDCE$ 的外接圆的直径，从而 $CP\perp AD$.

事实上，这的确是一个有效的程序.根据这个序，我们就有了解题思路，只要一步步推导，一步步证明，就能顺利解决问题.

### 2.2　浮现类题

波利亚说，为了解题，我们必须回忆各式各样的基本事实，回忆以前解答过的问题，已知的定理和定义，从记忆中吸取这样有关的内容可称之为"动员"，.考察问题过程中，如果洞察到熟悉的某种模式或某个例题，就能回忆起某些有用的东西，把相关知识动员起来，以帮助我们发现解题思路.

**例2** 设 $r\neq 1$，求下列数列前 $n$ 项的和：

$$\frac{r}{(1+rx)(1+r^2x)},\ \frac{r^2}{(1+r^2x)(1+r^3x)},\ \cdots,$$

$\frac{r^n}{(1+r^nx)(1+r^{n+1}x)}$，…

这个数列的通项比较复杂，从分子来看，容易想到等比数列，但如果连续写几项，就会注意到求和的真正困难之处是通分，接着仔细分析分母的结构，发现每项的分母都是两个因子的积，且相邻两项的分母中前者的第二个因子恰为后者第一个因子，于是，头脑中闪现出一个简单的类似问题：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

由此便抓住了解决上面问题的关键：所给数列的一般项也可按分母的结构拆分为两个分式的差，且各项相加恰好能交错消去中间各项.

于是，令$\frac{r^n}{(1+r^nx)(1+r^{n+1}x)}=\frac{A_n}{1+r^nx}-\frac{B_n}{1+r^{n-1}x}$，

并用待定系数法求得$A_n=\frac{r^n}{1-r}$，$B_n=\frac{r^{n+1}}{1-r}$.

再根据$A_n=B_{n-1}$，即可得所求数列前$n$项和：

$$S_n=\frac{A_1}{1+rx}-\frac{B_n}{1+r^{n+1}x}=\frac{r}{1-r}\left(\frac{1}{1+rx}-\frac{r^n}{1+r^{n+1}x}\right).$$

本题运用类比，即借助直觉发现不同对象在功能、结构、形式上的相同属性，浮现恰当的类题，借此寻得解题思路.

### 2.3 拼凑一体

有些数学问题，若拘泥于细节，则难以突破，如果从整体上把握，洞察某些结构特征，问题也许就迎刃而解了. 直觉思维的一大特点就是从整体上把握考察对象，例如刘徽考察圆面积时，先观察圆内接正$3\times2^n$边形的面积$S_n$，他不是着眼于个别内接正多边形的面积，而是从整体上把握$S_n$的变化趋势，凭直觉确认了"$S_n$越大越接近于圆面积".

**例3** 求证：$n\times\sqrt[n]{n+1}<n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N},n>1)$.

如果用数学归纳法证明，在论证的第二步，"从$k$推到$k+1$"时，将碰到很大的困难，如果我们对求证式整体考察，不难发现这个不等式和平均不等式$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$在结构上有相似之处，只要把题中不等式的两端都除以$n$，结构上就更相似了，因此，将题中不等式改写为$\sqrt[n]{n+1}<\frac{1}{n}\left(n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$.

从结构上看，我们必须设法把右端括号中的$n+1$个数的和改写成$n$个数的和，而这$n$个数的积正好是$n+1$. 这的确是可以做到的，因为：

$$n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$=(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}.$$

因此，欲证的不等式可改写为$\sqrt[n]{n+1}<\frac{1}{n}\left(2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}\right)$.

该例题的解法，没有将所证不等式的元素分开来看，而将它看成一个整体，联想到平均不等式，通过一步步改写，逐渐向平均不等式靠拢，解题思路也越发清晰，从而解决了问题.

### 2.4 出奇制胜

在解题过程中，我们常常会碰到一些用常规方法无法求解或极为繁琐的题，陷入死胡同. 此时，尝试换一种思路，就会出现灵感，继而豁然开朗，出奇制胜.

**例4** 求证：$\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)}>\sqrt{n}(n\in\mathbf{N},n>1)$.

此题是一道与自然数相关的不等式证明题，可用数学归纳法证明，但是当我们详细观察问题后会发现，不等式左边的分子缺$4\times6\times\cdots\times(2n)$，分母缺$3\times5\times\cdots\times(2n-1)$，将其补上，可以得到：

$$\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)}\times\frac{4\times6\times8\times\cdots\times(2n)}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}=n.$$

注意到右端的$n$与原不等式右端的$\sqrt{n}$相关，即$n=\sqrt{n}\times\sqrt{n}$，从而直觉到只需证明$\frac{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)}>\frac{4\times6\times8\times\cdots\times(2n)}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}$即可，也就是说只要证明$\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}>\frac{6}{5}$，…，$\frac{2n-1}{2n-2}>\frac{2n}{2n-1}$，这些显然成立，从而原问题得证.

上述方法打破常规思路，借助直觉思维，构想出式子$\frac{4\times6\times8\times\cdots\times(2n)}{3\times5\times7\times\cdots\times(2n-1)}$，从而出奇制胜，发现

了一种新颖的解题思路.

## 3 对基于直觉的解题发现的辩证思考

### 3.1 直觉不一定正确

数学离不开直觉,数学直觉在解题过程中起着重要的作用,但数学毕竟是一门严谨的科学,如果仅仅用数学直觉来研究它,不进行严格的证明,那么肯定会闹出很多笑话,得出许多荒谬的结论.正像庞加莱所说:“直觉是不难发现的,但它不能给我们以严格性,甚至不能给我们以可靠性,这一点越来越得到公认.”不信我们看看下列问题.

(1)一个细胞进行繁殖分裂,每分钟由一个分裂成两个,若10分钟后细胞有1024个,请问:几分钟后细胞可以分裂成512个?

若你的回答是5分钟,那么你就被数学直觉骗了,正确答案应该是9分钟.

(2)我们在平面上画一条曲线,直觉将告诉我们,在曲线上除了少数几个点之外,其余的任何一点处都存在切线,然而这个结论却是错误的,数学家们早已构造出任何一点都没有切线的连续曲线了.

(3)假如有一条特别特别长的绳子,恰好可以绕地球赤道一周.现在把这根绳子再接长15米,绕着赤道一周悬在空中(如果能做到的话),那么如果说在赤道的任何地方,姚明都可以在绳子下自由穿过!你们相信吗?

凭借直觉我们肯定都不相信,因为我们怎么也想不通:地球半径这么大,而绳子仅仅接长15米,姚明那么高,怎么可能自由穿过.但是通过严谨的数学计算,我们会发现:这的确是可以做到的!

由此可见,数学直觉时常会作弄、欺骗我们,因此并不是所有直觉都正确,也不是所有问题都是可以借助直觉来解决.正如波利亚所说:“对于直觉,应当随意,但要留神.信任,但要警惕,不要上当受骗.”

### 3.2 直觉的产生需要条件

直觉既不是从天而降,也不是无水之源、无本之木.直觉思维的形成过程既包括显意识领域中逻辑思维的成份,又具有潜意识领域高度简约化和浓缩化的非逻辑特征,所以,直觉思维是在各种内、外部条件的综合作用下产生的.

(1)内部条件

① 良好的认知结构

波利亚强调潜意识活动中经验的基础作用:“如果我们对该论题知识贫乏,是不容易产生好念头的.如果我们完全没有知识,则根本不可能产生好念头.一个好念头的基础是过去的经验和已有的知识,仅仅靠记忆不足以产生好念头.但若不重新收集一些有关事实,则也不会出现好念头.”因此直觉往往降临在那些具有广博的经验知识并且对知识和科学技术有着执着追求的人身上,我们只有不断向外界学习、交流、吸取新信息,为解决问题存储足够的知识,且把这些知识都储备在潜意识中,才能在对所把握的信息材料进行组织加工时,形成具有内部规律性的整体结构,即认知结构.良好的认知结构具有信息量大、有序化程度高和开放性好等优点,这些良好的性能可以有效促进直觉思维的产生.

② 审美认知能力

数学直觉思维与数学美有着密切的关系.阿达玛认为,美感和美的意识是数学直觉的本质,这种美感就是对数学事物间的一种和谐关系以及和谐秩序的直觉意识.因而,数学美往往能使人们超越感觉经验阶段,而直接把握数学对象内在的和谐与秩序.人们在长期的数学认知实践活动和数学审美实践活动中,通过对数学知识的内化和美感经验的积淀,逐步形成和发展了数学审美的心理结构,使人们在进行数学直觉判断时,不仅遵循数学真理标准而且也遵循简单、和谐、有序、对称等数学美学标准,正如M.克莱因所说:“进行数学创造最主要的趋策力是对美的追求.”

③ 浓厚的认知兴趣和执着的探索精神

直觉思维的产生虽然表现出一瞬间的爆发,但它却是建立在锲而不舍的艰苦思索的基础上的,它需要我们长期冥思苦想,思想处于高度受激状态,那么一旦受到外界的特定信息刺激,就容易产生直觉.比如牛顿从苹果落地领悟到引力的作用;门捷列夫从梦的启示中设想了元素周期律;阿基米德在解“王冠之谜”时,思考了很久都没进展,然而受他在洗澡时浴桶水溢出的启发,却找到了表示物体在水中所受浮力大小与物体排水重量关系的阿基米德原理……

(2)外部条件

直觉思维的产生虽然离不开思维者头脑内部对各种知识快速的整合加工,但外部环境的诱发作用同样对直觉思维的产生具有重要作用,尤其是民主开放的外部环境.

直觉思维的产生需要思维具有广阔性和开放性的品质,而在民主开放、平等自由的交流环境中更利于形成这样的思维品质,在这种气氛中,交流者头脑

中的思想元素可以自由沟通，互相刺激，激起联想，引起反馈，在信息的交流碰击中迸发出直觉思维的火花. 例如，上世纪 30 年代，法国著名的布尔巴基学派，这个学派由一些青年数学家组成，他们每次聚会，总是先由一人宣读写好的初稿，然后是严肃认真而又非常苛刻的讨论，在讨论中"大喊大叫"、争论，有时全盘否定，直到换一个人重写，这样多次反复，一些新的思想就在争论中产生. 显然，在互相切磋、畅所欲言的学术氛围和广泛的学术交流中有利于直觉思维的产生.

3.3 *直觉具有层次性*

根据解题过程中思维形式的难易，以及思维形式在人的思维习惯中出现的次序，直觉思维被分为经验型直觉思维和哲学型直觉思维.

经验型直觉思维是指在观察、类比 、归纳、演绎等基础之上产生的直觉思维. 它主要的体现是知识的迁移，这是人们在解决问题过程中经常用到的一种思维方式. 不过由于经验来源于实践，经常会受到历史背景与科学环境的约束，再加上知识有时还会存在负迁移，从而经验型直觉思维具有很大的局限性，不够严谨，所以，我们在解决问题时，既要勤于总结经验、充分利用经验，又要具体问题具体分析.

哲学型直觉思维是指在普遍存在的运动变化、对立统一等哲学观念的基础上产生的直觉思维. 具体体现为对称性、整体性等美学思想. 这些往往是通过后天的训练养成的. 它比经验型直觉思维更高一个层次，并且更加严谨.

因此，我们要辩证的看待直觉在数学解题中的作用，正确把握直觉和逻辑在数学解题发现中的关系，即在对数学问题进行逻辑分析的基础上产生直觉，并且由直觉导出的解题结论或解题方法需要通过逻辑推理的方法进行证实，从而肯定其正确性.

**参考文献：**


[1] 刘云章，唐志华. 数学 教学 哲学[M]. 大连：大连理工大学出版社，2009：80.

[2] 刘云章，马复. 数学直觉与发现. 合肥：安徽教育出版社，1991：51 - 70.

[3] (美)波利亚. 怎样解题[M]. 北京：科学出版社，1987：10 - 15.

[4] 史保怀. 直觉思维在解题中的运用[J]. 中学数学教学参考，2000，(5)：20 - 21.

[5] 邓东皋，孙小礼，张祖贵编. 数学与文化[M]. 北京：北京大学出版社，1990：63 - 88.

[6] 郑毓信. 数学方法论[M]. 南宁：广西教育出版社，2003：35 - 40.

[7] 马波. 中学数学解题研究[M]. 北京：北京师范大学出版社，2011：22 - 37.

[8] 徐利治. 数学方法论选讲[M]. 武汉：华中理工大学出版社，1988：19 - 28.

[9] 樊恺. 解决数学问题中的直觉[J]. 中学数学，1998，(3)：1 - 3.

[10] 徐利治. 数学直觉的意义及作用[M]. 大连：大连理工大学出版社，1989：5 - 16.


(上接第 66 页)

数学实验不仅仅体现在新授课的教学中，在数学测验以及升学考试中也更多地体现了类似上例的操作思考型数学实验. 这种教学方式，有利于调动学生的创造性思维和积极性，为学生提供了更多要学的数学知识与已有经验建立内部联系的实践机会. 在这些自主探究过程中，要经常提出一些能激发学生创造欲望和创造兴趣的问题，尽量给学生多一些动手的机会，让学生在手脑并用的活动中迸发出创造的火花来.

总之，随着新课改的稳定推进，教师在学生实验中应该大胆尝试，通过实验真正做到："学生力所能及，教师避之；学生力所难及，教师助之；学生力所不及，教师为之"的新课程理念. 所以，加强数学实验教学，是提高数学教学质量的十分有效的途径，对提高学生抽象逻辑思维能力很有帮助，为以后的更高层次的学习打下坚实基础.

让学生在活动中学习，而不只是停留在做"数学题". 在苏科版义务教育数学教科书的栏目设计中，就提供了很多让学生动手"做"数学的素材，开辟了"试一试""做一做""数学实验室""议一议"等栏目，让学生经历这些操作的流程，让学生在"做"数学的过程中'发现'数学规律、数学结论，获得数学思想和方法，学会学习、学会思考，让学生通过"做"数学变得聪明起来.

**参考文献：**


[1] 董林伟. 初中数学实验教学的理论与实践[M]. 南京：江苏科学技术出版社，2012.