数学解题观察的有效视角

段志贵
（江苏省盐城师范学院数学与统计学院，224000）

黄 琳
（青海师范大学数学与统计学院，810016）

著名数学教育家波利亚（1887－1985）曾经说过，“观察可能导致发现．观察将揭示某种规律、模式或定律”．从信息加工的角度看，数学活动中的观察就是有目的、有选择地对各种数学材料进行概括的知觉过程，其成果就是数学材料的外部特征和整体特征．通过观察，把外部事物的各种信息反映到人的大脑里．但这绝不是一种机械的条件反射，伴随着观察同时会发生一系列的心理活动，如注意、感知、记忆、想象等，而且其中一定还存在着积极的思维活动．

所谓数学解题中的观察，本质上就是审题，所谓审题就是有目的、有步骤、有方法地对数学题目进行剖析．它要求观察者通过观察能了解到题目的条件是什么？（特别不能遗漏隐蔽条件和特殊情况），问题的结论是什么（或者要求是什么）？题目中有无图形？如果有图形还要对照观察图形中各元素（如边、角、面积等），最好将各相应量能标在图上．在此基础上，发现并获取必要的信息．许多时候，问题本质没有改变，观察的角度换了，理解起来容易得多了．当观察所获取的信息比较熟悉，与自己掌握的解题模式很接近，与自己的认知结构相合拍，那么解题者就能进入试探过程，大部分这类问题便可获得解决．本文试图通过对典型例题的由表及里的分析，探索和揭示出数学解题观察的几个有效视角．

一、数与式的观察

数与式是数学问题表达最基本的符号．一个数学问题所呈现出的数与式及其关系是区别于其它问题的典型特征，问题所给的数与式及其关系，常常给问题的求解指出探索的思路．因此，只要仔细观察、善于发现数与式的内在联系，往往就能找到问题解决的突破口．一般说来，数学的特征有整数、无理数、质数、勾股数、数的组成、数的整除性等；式的典型特征有共轭因式，互为倒数因式，对偶式等．

例1 设$A=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$．求$A$的末位数字．

分析 此题若企图把等式右边各个因数相乘是极不现实的．观察所给式子的特征，容易想到用$(2-1)$去乘等式两边进行试探：

$(2-1)A=(2-1)(2+1)(2^2+1)\cdots(2^{64}+1)=2^{128}-1=(2^4)^{32}-1=16^{32}-1$.

因16^{32}的末位数字是6，所以A的末位数字是5.

本题还有一个观察的视角，就是敏锐地捕捉到A中一个因式(2^2+1)是5，其它所有的各项都是奇数，因此，A的末尾数字是5.

例2 解方程

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4.$$

分析 观察方程左边两个代数式中的底数的数字特征，不难发现$\sqrt{2+\sqrt{3}}$与$\sqrt{2-\sqrt{3}}$互为倒数．如令$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=y$，则问题可纳入解$y+\frac{1}{y}=0$型方程的模式，不难求出的值，从而解出$x=\pm 2$.

二、图形特征的观察

数学解题往往离不开图形．不同的图形显现出不同的性质，反映出不同的的已知条

件. 注意观察图形特征,可以发现图形中隐含的元素特点及其相互间重要关系,同时也有利于运用数形结合方法,在解题中获得优解.

例 3　已知 x、$y \in \mathbf{R}$,且 $x^2 + y^2 = 4$,求 $x + y$ 的最大值和最小值.

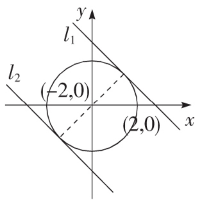

图 1

分析　观察已知式知它表示一个以原点为圆心,以 2 为半径的圆(如图 1),于是问题转化为当点(x,y)在圆上运动时,$x + y = b$ 在 y 轴上的截距 b 的最值问题. 再借助于图形进一步观察,可得结论:

当且仅当直线 $x + y = b$ 运动到 l_1 位置与圆相切时,取得最大值;运动到 l_2 位置与圆相切时,取得最小值. 由此不难求得 $x + y$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$,最小值为 $-2\sqrt{2}$.

三、条件与结论的观察

数学题目浩如烟海、形式各异,但基本结构都包含“条件”“结论”两部分. 在数学问题的叙述中,几乎所有的题目都不会直接地把与解题有关的全部信息明确显示出来,因此找出关键词句和挖掘隐含条件并了解它们的意义,就易于发现解题的方向,其“巧”就会由此而生.

例 4　已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 满足 $A + C = 2B$,$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$,求 $\cos\frac{A - C}{2}$ 的值.

分析　观察题目所求结论,可以看到要求的三角函数值中是一个复角的形式,且其中不含角 B,这就要求我们在解题时把条件中的单角化为复角,且把其中的角 B 消掉,故产生如下解法:

由已知 $B = 60°$,$A + C = 120°$,

$$\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -2\sqrt{2},$$

即　$\cos A + \cos C = -2\sqrt{2}\cos A\cos C$.

利用和差化积与积化和差公式,可得

$$\cos\frac{A - C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

此题基于观察,紧紧抓住条件与结论中角的差异进行分析,使得解题过程自然流畅,水到渠成.

四、结构相似性的观察

通常,一个数学问题定义的结构包含着研究对象和关系结构两个方面. 仔细观察问题的结构特征,便会联想有关的公式、定理、证题方法等,也就找到了沟通已知与未知的捷径. 如能观察到问题中的各种相似性,并设法消除不同表达形式下的差异,或者是发现问题中式子间的共同特征,就能够激发我们展开想象,进行类比,从而化归求解.

例 5　设 $f(x)$ 是$(0,1)$区间上的实函数,如果 $f(x)$ 满足条件

(1) $f(x) > 0$,对任何 $x \in (0,1)$;

(2) $\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(1-x)}{f(1-y)} \leqslant 2$,对任何 $x,y \in (0,1)$.

求证:$f(x)$ 必定是常数函数.

分析　要证 $f(x)$ 是常数函数,只须证对任何 $x,y \in (0,1)$ 恒有 $f(x) = f(y)$. 要由不等式条件(2)出发证明等量关系,启发我们应该寻找一对反向的不等式:

“若 $A \leqslant B$,$A \geqslant B$,则 $A = B$”.

观察条件(2)知 x,y 换位后仍然成立. 即有 $\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(1-y)}{f(1-x)} \leqslant 2$,再对比观察一下这个条件和条件(2)的结构特征,使我们不禁想起代数中的基本不等式:$a,b > 0$,$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geqslant 2$(等号仅当 $a = b$ 时成立). 由此出发,问题就容易解决了. 由基本不等式易知

$$\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(1-x)}{f(1-y)} + \frac{f(1-y)}{f(1-x)} \geqslant 4, \qquad ①$$

又由条件$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}\leqslant 2$，

知 $\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\leqslant 2$，

从而有

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(1-x)}{f(1-y)}+\frac{f(1-y)}{f(1-x)}\leqslant 4. \qquad ②$$

比较①和②式，当且仅当$f(x)=f(y)$，$f(1-x)=f(1-y)$时成立，所以$f(x)$必定是常数函数.

五、部分与整体的观察

在进行解题观察探索时，不能忽视整体，要有一个全局的观念统领解题过程. 同时，在注重整体的同时，还必须观察其部分的特点. 从整体中看部分，从部分中把握整体，只有这两方面都得以兼顾，才能真正抓住问题的关键，看出被观察题目的特点.

例6 如图2所示，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=2$，BC边上有100个不同的点$P_1,P_2,\cdots,P_{100}$，记$m_i=AP_i^2+BP_i\cdot CP_i(i=1,2,\cdots,100)$. 求$m_1+m_2+\cdots+m_{100}$的值.

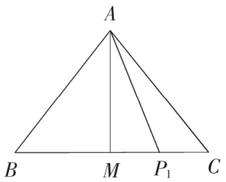

图2

分析 从整体来看待求式$m_1+m_2+\cdots+m_{100}$中项数多，可猜想各项间必有规律，为发现这一规律，我们观察特殊点. 抓住关键词"100个不同点"，考虑P_i恰取B或C时，易知有$AB^2=AC^2=4$.

再看一特例：取BC中点M，有

$$AM^2+BM\cdot CM=AB^2-BM^2+BM\cdot CM=AB^2=4.$$

由此可猜想m_i均为$4(i=1,\cdots,100)$且从上面的特例可找到解题方法：对任一点P_i，如图2可知

$$\begin{aligned}&AP_i^2+BP_i\cdot CP_i\\&=AM^2+MP_i^2+(BM+MP_i)(CM-MP_i)\\&=AM^2+MP_i^2+BM^2-MP_i^2\\&=AM^2+BM^2\\&=AB^2=4.\end{aligned}$$

故$m_1+m_2+\cdots+m_{100}=400$.

六、不同对象间的比较观察

比较是人脑中确定各种事物和关系的思维过程，俗话说"有比较才有鉴别"数学学习中的比较是将有可比意义的概念、题目、方法等组合在一起进行求同求异的观察分析，通过类比联想找到解决问题的思路和方法，这是一种知识间的同化策略.

例7 设$a>0$，$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$比较下列四个数的大小：

$$\sqrt{1+a},\frac{1}{1-\frac{b}{2}},1+\frac{a}{2},\frac{1}{\sqrt{1-b}}.$$

分析 对于这四个数如果用求差的方法比较大小，要进行$C_4^2=6$次比较，才能得到答案. 是否可先估计一下这四个数的大小关系呢?不妨用代值的方法来试验一下.

因为$a>0$，不妨设$a=1$，由$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$，得$b=\frac{1}{2}$. 于是有

$$\sqrt{1+a}=\frac{1}{\sqrt{1-b}}=\sqrt{2},$$

$$\frac{1}{1-\frac{b}{2}}=\frac{4}{3},$$

$$1+\frac{a}{2}=\frac{3}{2}.$$

由此可以猜想，对于满足$a>0$，$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$的一切$a$、$b$值都有

$$\frac{1}{1-\frac{b}{2}}<\frac{1}{\sqrt{1-b}}=\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}.$$

对于这一猜想结论再进行证明，只需作三次比较即可(证明略).

七、极端情形的观察

数学问题的表现形式是多种多样的，在有些情况下我们理不清或想像不出问题所给条件与结论的具体形态，从而影响我们对问题的判断. 此时我们可以考虑利用已知问题的某种特殊形式来思考分析，这就是一种利用极端情形来观察与解决问题的方法.

例 8 如图 3，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a > 0)$ 图象经点 $M(1-\sqrt{2},0)$、$N(1+\sqrt{2},0)$、$P(0,k)$ 三点，若 $\angle MPN$ 是钝角，求 a 的取值范围.

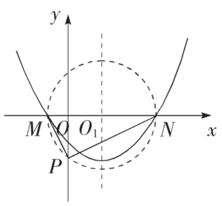

图 3

分析 若利用余弦定理，并由 $-1 < \cos\angle MPN < 0$，则将得到一个较复杂的不等式. 那么钝角的极限状态是什么？显然直角是钝角的极限情形.

事实上，当 $\angle MPN$ 为直角时，则点 P 在以 MN 为直径的圆周 $\odot O_1$ 上，于是 P 为该圆与 y 轴的交点. 如图 3，由勾股定理不难得 $k = \pm 1$.

当 $\angle MPN$ 为钝时，点 P 在 $\odot O_1$ 内，由 $a > 0$ 知：点 P 应在 y 的负半轴上，把 $P(0,k)$ 的坐标代入 $y = a(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$，得 $a = -k$，因此，$0 < a < 1$.

八、尝试与实验的观察

尝试与实验在物理化学中经常用到. 在数学解题中，有时通过尝试或实验，我们也可以把某些数学难题探索到一些有用的特点. 基于一次次的尝试或有效的实验进行观察，能够帮助我们厘清变化的规律，从而获得猜测及有益的解题体验. 在此基础上对其正确性进行推断，以达到解决问题的目的.

例 9 试证：只有一个质数 p，使 $p+10$，$p+14$ 仍是质数.

分析 当问题较为抽象，思路、方法难寻时，不妨将问题具体化，进行尝试与实验观察，使思路清晰，方法便捷.

取 $p = 2$ 时，$p+10 = 12$，$p+14 = 16$，不是质数；

取 $p = 3$ 时，$p+10 = 13$，$p+14 = 17$，是质数；

取 $p = 5$ 时，$p+10 = 15$，$p+14 = 19$，不全是质数；

取 $p = 7$ 时，$p+10 = 17$，$p+14 = 21$，不全是质数；

取 $p = 11$ 时，$p+10 = 21$，$p+14 = 25$，不是质数.

通过证明，当 $p = 3k+1$ 时，$p+14 = 3k+15 = 3(k+5)$ 是合数；

当 $p = 3k+2$ 时，$p+10 = 3k+12 = 3(k+4)$ 是合数；

故只有当 $p = 3k(k \in \mathbf{N})$ 时，才有可能使 $p+10$，$p+14$ 都为质数，而 $p = 3k$ 中的质数只有 3 这一个.

所以只有一个质数 3，使 $p+10$，$p+14$ 仍是质数.

学会采用不同的观察视角，就是掌握许多种不同的观察方法. 基于不同的观察方法，有可能得到许多不同有效的解题途径. 如果我们能够把这些不同的观察视角及观察方法融合于日常的解题训练中，一定会在潜移默化中逐步灵活地理解题意，更深刻地感悟解题路径，最终实现灵活自如地去解决数学问题.

（本文系江苏省教育厅高校品牌专业建设工程资助项目——盐城师范学院数学与应用数学专业（PPZY2015C211）之高师“数学解题研究”课程建设阶段性成果）