解题探索

特殊化解题:路在何方

宁耀莹[1],段志贵[2]

(1. 南京师范大学 教师教育学院,210046;盐城师范学院 数学与统计学院,224000)

特殊化解题方法是突破数学解题瓶颈、探求数学解题思路的一种常用方法,主要路径有寻找特殊关系、寻找特殊对象、寻找特殊取值、寻找特殊位置等.

在数学解题中,特殊化也是一种重要的思想方法. 一方面,问题的特殊情形往往比它的一般情形易于解出;另一方面,由于特殊情形的解与一般情形的解往往有共性,特殊情形的解往往能给出怎样解一般情形带来启示. 对数学中的某些特殊图形、特殊关系和某些概念及其性质的特殊形态掌握得越多、越熟练,就越易发现问题中的特殊因素. 一般来说,特殊化解题常用的路径有寻找特殊关系、寻找特殊对象、寻找特殊取值、寻找特殊位置等.

1 寻找特殊关系,从特殊关系中寻求突破

在问题结构中常常存在一些特殊的关系,抓住这些特殊关系往往就能直接切中问题要害,找到解决问题的突破口,但这类特殊关系有时却难以察觉.

例 1 已知函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=2018$,求 $f^{-1}(x)+f^{-1}(2018-x)$ 的值.

分析 由题目要求的式子的形式,很容易联想到 $f(x)+f(2a-x)$,而从这个形式容易联想到一个特殊关系:点对称. 再看看已知条件,就可以联想到 $f(a+x)+f(a-x)=2b$,由此我们找到解题的方向,从点对称这一特殊关系入手. 由已知式 $f(x)+f(-x)=2018$ 可知,在对称关系式 $f(a+x)+f(a-x)=2b$ 中取 $a=0$,$b=1009$,得函数 $y=f(x)$ 的图象关于点(0,1009)对称. 再根据原函数与反函数的特殊关系,知函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于点(1009,0)对称,所以 $f^{-1}(x+1009)+f^{-1}(1009-x)=0$,将上式中的 x 用 $x-1009$ 替换,得 $f^{-1}(x)+f^{-1}(2018-x)=0$.

例 2 求证:任何整数都可以表示为 5 个整数的立方和的形式.

分析 题中的"任何整数"是不易入手思考的,为此先考虑特殊情形:$n=0,1,2,3,4,5$ 时,结论是显然的;当 $n\geqslant 6$ 时,随着 n 值的增大,困难也就越大.

此时不妨先考虑某一类特殊整数,同时将和数的个数也减少一个,于是可以得到以下特殊的数量关系,

$$(n+1)^3+(-n)^3+(-n)^3+(n-1)^3=6n,$$

这就是说,能被 6 整除的任何整数均可以表示为 4 个整数的立方和.

由此在所作等式上进一步考虑以下关系,得

$$6n=6n+0^3,$$
$$6n+1=6n+1^3,$$
$$6n+2=6(n-1)+2^3,$$
$$6n+3=6(n-4)+3^3,$$
$$6n+4=6(n+2)+(-2)^3,$$
$$6n+5=6(n+1)+(-1)^3.$$

这样,结论就得到了证明.

2 寻找特殊对象,从特殊对象中寻求突破

对数学问题中的特殊对象的探索,有可能帮助我们形成问题解决的宏观思路. 如果一时找不到解题的思路而难以入手时,不妨先从特殊对象入手,摸索出解决问题的大致思路.

例 3 将 10 个相同的小球装入 3 个编号为 1、2、3 的盒子(每次要把 10 个球装完),要求每个盒子里球的个数不少于盒子的编号数,这样的装法种数有多少种?

分析 许多人在本题中很难找到问题的切入点,并非缺少知识,而在于思维的惯性,一定要用排列组合原理才可行,通过简单启发,相对而言,3 号盒子较复杂,能否先解决它(特殊)是求解本题的关键.

事实上,3 号盒子装 7 个时,有 1 种装法(2 号盒子装 2 个、1 号盒子装 1 个);3 号盒子装 6 个时,有 2 种装法(2 号盒子装 2 个、1 号盒子装 2 个;2 号盒子装 3 个、1 号盒子装 1 个);依次分析可得共有装法 $1+2+3+4+5=15$(种).

例 4 是否存在一个二次函数 $y=f(x)$,使得对一切 $x\in[-1,1]$ 有 $|f(x)|\leqslant 1$,且 $|f(2)|>8$. 若存

基金项目:江苏省教育学会"十三五"教育科研规划重点课题——苏北初中数学名师个案跟踪研究(16B9J4YC9).

在,请求出一个二次函数;若不存在,请说明理由.

分析 二次函数通常是给出一个等量关系,建立方程求解. 而本题则是不等式给出的问题,寻找突破口需要思维的引导,从特殊点 -1、0、1(端点及中点)出发进行的探索,是揭示本质的关键. 事实上,假设存在二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足题意,则有

$|f(1)|=|a+b+c|\leqslant 1$,

$|f(-1)|=|a-b+c|\leqslant 1$,

$|f(0)|=|c|\leqslant 1$.

又 $f(2)=4a+2b+c=3(a+b+c)+(a-b+c)-3c$,因此 $|f(2)|=|3f(1)+f(-1)-3f(0)|\leqslant 3|f(1)|+|f(-1)|+3|f(0)|\leqslant 3+1+3=7$,但题中要求 $|f(2)|>8$,故不存在满足题意的二次函数.

3 寻找特殊取值,从特殊取值中寻求突破

许多时候,代数式(或等式)中的字母取特殊值,可以让解题思路更清晰.

例 5 已知三角形的三边长分别是 m^2+m+1,$2m+1$,m^2-1,则该三角形是什么三角形?

分析 该题的关键就是找到三角形的最大角,根据最大角判断三角形的形状,大角对大边,所以问题化归为求出三角形的最大边长. 为此,赋值 n,也就是将 n 特殊化,用以判断三边的长度关系. 令 $m=2$,则有 $m^2+m+1>2m+1>m^2-1$,下面证三边长度的一般性结论.

由于 m^2+m+1,$2m+1$,m^2-1 是三角形的边长,所以有 $\begin{cases}m^2+m+1>0\\2m+1>0\\m^2-1>0\end{cases}$,解得 $m>1$.

故有 $(m^2+m+1)-(2m+1)=m^2-m=m(m-1)$,$(m^2+m+1)-(m^2-1)=m+2>0$,

所以,m^2+m+1 是三角形的最大边,设它所对应的角度是 α,则由余弦定理得

$$\cos\alpha=\frac{(2m+1)^2+(m^2-1)^2-(m^2+m+1)^2}{2(2m+1)(m^2-1)}$$

$$=-\frac{1}{2},$$

所以,$\alpha=120^\circ$,此三角形是钝角三角形.

例 6 $x,y\in\mathbf{R}$ 且满足 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$,求 $x+y$ 的值.

分析 本题难点是如何变形,不妨取 x 的一个特殊值进行探寻.

令 $x=0$(特殊化),得 $y+\sqrt{y^2+1}=1$,$y=0$ 找到目标 $x+y=0$. 由此进一步探索推理上的依据. 事实上,由 $x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\sqrt{y^2+1}-y$,得

$$x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}. \quad ①$$

同理,由 $y+\sqrt{y^2+1}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$,得

$$x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} \quad ②$$

①+②得 $2(x+y)=0$,所以 $x+y=0$.

4 寻找特殊位置,从特殊位置上寻求突破

各类几何问题中常有研究对象之间隐藏的或动态的关系与形式需要确定,在这里,特殊位置的利用具有非常特别的价值.

例 7 已知一大一小两个正方形 $ABCD$,$BEFG$,如图 1 所示,求 $\dfrac{AE}{DF}$.

分析 本题求两条线段的比值,可以先利用特殊图形的特殊位置进行探究,如图 2 和图 3 所示,小正方形 $BEFG$ 的边长分别是大正方形 $ABCD$ 的边长、对角线的一半,这时都有 $\dfrac{AE}{DF}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 注意到任何一个正方形的边长与对角线之比为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,再回到图 1,可以想办法证明 $\dfrac{AE}{DF}=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BE}{BF}$,于是作辅助线 BD、BF,易证 $\triangle ABE\sim\triangle BDF$,至此本题得到解决.

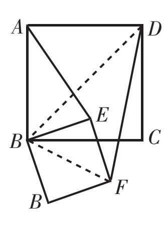

图 1

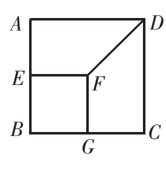

图 2

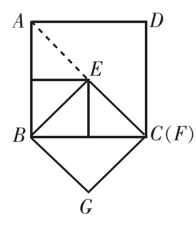

图 3

例 8 如图 4 所示,在 $\triangle ABC$ 中,P,Q,R 将其周长三等分,且 P,Q 在 AB 边上,求证 $\dfrac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\dfrac{2}{9}$.

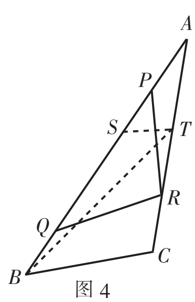

图 4

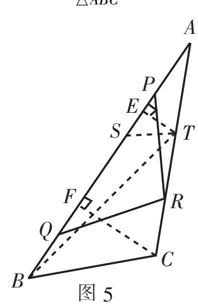

图 5

(下转第 65 页)

生 8：如图 5，$S_{CP_1DE}+S_{OEP_2F}<S_{\triangle OAP_1}+S_{\triangle P_1OP_2}+S_{\triangle P_2OB}$.

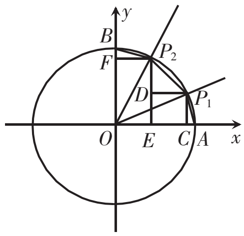

图 5

即：$\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y\cos y<\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin(y-x)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$，

$\sin 2x+\sin 2y-2\sin x\cos y<\sin x+\sin(y-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$，

$\sin 2x+\sin 2y<\sin x+\sin(x+y)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$.

得到：⑤$0<x<y<\frac{\pi}{2}$，$\sin 2x+\sin 2y<\sin x+\sin(x+y)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$.

同理比较②④可得：⑥$0<x_1<\cdots<x_n<\frac{\pi}{2}$，

$\sin 2x_1+\sin 2x_2+\cdots+\sin 2x_n<\sin x_1+\sin(x_1+x_2)+\cdots+\sin(x_{n-1}+x_n)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)$.

师：课后大家可以探究一些其它的比较方式并相互交流，相信大家还会有新的发现. 并附上一道课后思考题：怎样利用 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin x<x<\tan x$ 去证明 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin x+\tan x>2x$.

《普通高中数学课程标准（2017 年）》中提到：要将数学学科核心素养的培养贯穿于教学活动的全过程. 不管是哪种教学方式都需要要让学生养成良好的数学学习习惯，敢于质疑、善于思考，理解概念、把握本质，数形结合、明晰算理，理清知识的来龙去脉，建立知识之间的关联. 从而真正将提升学生的数学学科核心素养落实到位.

参考文献：

[1]［美］波利亚. 怎样解题［M］. 涂泓、冯承天译. 上海：上海科技教育出版社，2007，5.

[2] 中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准［M］. 北京：人民教育出版社，2017.

（上接第 62 页）

分析 由题可知，当点 Q 往点 B 方向移动时，R 点往 A 点方向移动，$\triangle PQR$ 的面积减小（底边不变高减小），当 Q 点移动到与 B 点重合的位置时，$\triangle PQR$ 变成 $\triangle BST$，这时它的面积最小，用静止的 $\triangle BST$ 代替动 $\triangle PQR$，于是只需证明 $\frac{S_{\triangle BST}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}$.

记 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，依题得 $BS=\frac{a+b+c}{3}$，又 $AS+AT=\frac{a+b+c}{3}$，$AS=c-\frac{a+b+c}{3}$，故 $AT=\frac{2(a+b+c)}{3}-c=\frac{2a+2b-c}{3}$.

过点 T 做 $TE\perp AB$，$CF\perp AB$，如图 5，则 $\frac{AT}{AC}=\frac{ET}{FC}$，

所以，$\frac{S_{\triangle BST}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{a+b+c}{3c}\cdot\frac{2a+2b-c}{3b}$.

由于 $a+b>c$，$a>0$ 考虑上式右边的式子，得到下面结论：

$(a+b+c)(2a+2b-c)>(c+c)\cdot(a+b)>2bc$，即得所需证的不等式.

在数学解题中，常由任意的特殊化了解问题，由系统的特殊化为一般情形提供基础，由巧妙的特殊化对一般性结论进行检验. 因此对于一些较复杂、较一般的问题，如果找不到问题解决的思路，可以先考虑一些简单的，特殊的情形，通过它们摸索出一些经验，或对答案作出一些估计，然后再设法解决问题本身. 巧用特殊化方法能够使学生容易探求解题思路，在数学解题中起到关键的作用，学生应当灵活运用.

参考文献：

[1]张凤清. 特殊化方法在数学解题中的应用［J］. 数学通报，2008，(8)：47－49.

[2]段志贵，宁耀莹. 类比—数学解题的引擎［J］. 中国数学教育，2018，(12)：58－61.

[3]段志贵，黄琳. 数学解题观察的有效视角［J］. 高中数学教与学，2018，(12)：44－47.

[4]段志贵. 变通：让解题有更充分的预见［J］. 数学通报，2017，56，(12)：50－54.

[5]段志贵. 数学解题研究——数学方法论的视角［M］. 北京：清华大学出版社，2018.