变通:让解题有更充分的预见[①]

段志贵

(盐城师范学院数学与统计学院 224002)

许多人熟知波利亚的怎样解题表,却对他的解题思维图解并不十分清楚.在《数学的发现》一书中,波利亚分析了解题思维的作用,提出了面对数学问题的思维路径,构画了“我们该怎样思考”一图[1].这是一张正方形图解,位于四个顶点的分别是“动员”、“组织”、“分离”和“组合”,四条边上安排是“辨认”、“回忆”、“充实”以及“重新配置”,位于正方形中心的是“预见”,这些都是这张图解的关键词.这里的“重新配置”,简单地说,就是改变问题构思的“结构”[1].“穷则变,变则通”,根据问题求解的需要对问题的条件和结论做出必要的变动,把相关因素进行合理的再调配、再组合,这种依情况变化而做出解题改变的思维策略,就是人们常说的变通.

数学解题中的变通策略,其实质就是当我们遇到问题且难以直接用所学到的公式定理去解决时,对原问题的相关要素或关系作等价或同构式的转换,以实现解题的更好预见.变通的思维不完全等同于化归、类比等具体的数学思想方法,贯穿于变通思维其中的是开放、灵活、调适与机动,通过改变问题思考的方式去发现解决问题的方法.一般说来,常常用于数学问题解决的变通策略有以下六种.

1 变审题视角,读懂问题立意

许多问题难于入手,往往是我们不能很好地理解题意.需要我们通过调整角度重新审视问题的条件与结论,才能更准确地认识问题本质.例如,已知“直线 l 和圆 O 相切”,就是已知“点 O 到直线 l 的距离等于半径”;要证“a,b,c 中至少有一个为1”,只要证“$(a-1)(b-1)(c-1)=0$”就行了;限定“$ABCD$ 四人排成一行,A 不准排在首位”,换个角度,就是要求“$ABCD$ 四人排成一行,B 排在首位,或 C 排在首位,或 D 排在首位”[2].问题本质没有改变,认识的角度换了,理解起来容易得多了.

例1 当 a 为何值时,由不等式 $1<x\leqslant 2$ 可以得到 $x^2-2ax+a<0$?

分析 转化问题的表述,上面的问题即:$f(x)=x^2-2ax+a$ 在区间$(1,2]$上是负的.再转化一下,即“区间$(1,2]$位于 $f(x)=0$ 的两根之间”,也就是“区间$(1,2]$两个端点在 $f(x)=0$ 的两根之间”.于是得:$f(1)\leqslant 0$,$f(2)<0$.于是 $1-a\leqslant 0$,$4-3a<0$,解之得,$a>\frac{4}{3}$.

例2 满足不等式 $|x^2-4x+p|+|x-3|\leqslant 5$ 的 x 的最大值为3,求 p.

分析 若不仔细审题,可能会直接讨论去掉绝对值符号,找出对应方程的根,再对根进行大小讨论来化解问题,这样做显然不简单.事实上,从题设不等式解的最大值含义去解读已知条件,就会发现适合不等式 $|x^2-4x+p|+|x-3|\leqslant 5$ 的 x 的最大值为3,所以 $x-3\leqslant 0$,故 $|x-3|=3-x$.所以,原命题等价于“已知适合不等式 $|x^2-4x+p|\leqslant 2+x$ 的 x 的最大值为3,求 p.”这一命题只含有一个绝对值,解决起来容易得多了.

若 $|x^2-4x+p|=-x^2+4x-p$,则原不等式为 $x^2-3x+p+2\geqslant 0$,其解集不可能为

① 基金项目:江苏省教育厅高校品牌专业建设工程资助项目——盐城师范学院数学与应用数学专业(PPZY2015C211);江苏省教育学会“十三五”教育科研规划重点课题——苏北初中数学名师个案跟踪研究(201609);江苏省中小学教学研究重点课题——新时期初中数学教师专业知识发展研究(JK9-Z074).

$\{x \mid x \leqslant 3\}$的子集,所以必有$|x^2-4x+p|=x^2-4x+p$.原不等式化为$x^2-4x+p+3-x\leqslant 0$,即$x^2-5x+p-2\leqslant 0$.令$x^2-5x+p-2=(x-3)(x-m)$,可得$m=2,p=8$.

2　变破题方法,理解隐含条件

有一些问题,读起来感觉并不难懂,但就是无从下手.这可能就是我们对题目本身的隐含条件认识和挖掘的还不到位.有的题目冗长,读了就过去;有的条件或待求结论本身藏着条件,但没有突显出来;有的题目借助图形不明说出条件;还有的题目创新或自定义概念等等.这就需要我们在解题的各个环节,注意对隐含条件的充分理解.

例 3　直线$m:y=kx+2k+1$与直线$n:2x+y-4=0$的交点在第一象限内,求k的值.

分析　本题拿到手,一般人的思维方式是将所给两直线方程联立,求得交点$\left(\frac{3-2k}{k+2},\frac{8k+2}{k+2}\right)$,再解不等式$\frac{3-2k}{k+2}>0$及$\frac{8k+2}{k+2}>0$,这个运算量比较大.如果我们从动态的角度看待题意,把直线m看作围绕点$Q(-2,1)$旋转的一束直线(即动直线),直线l是过$A(0,4)$、$B(2,0)$的定直线,现要求二线交点在第一象限(如图1),即交点P只能在开线段AB上运动,即动直线QP的斜率k满足$k_{QB}<k<k_{QA}$,易求$k_{QB}=-\frac{1}{4}$,$k_{QA}=\frac{3}{2}$,所以$-\frac{1}{4}<k<\frac{3}{2}$.

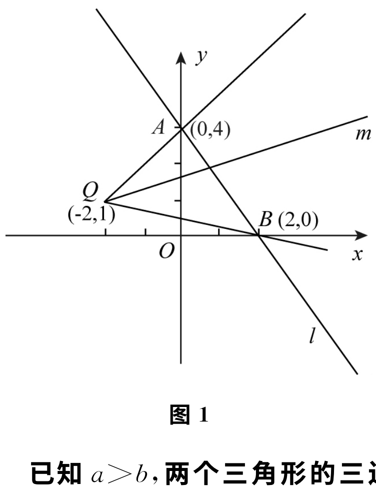

图 1

例 4　已知$a>b$,两个三角形的三边分别为a、a、b,b、b、a,并且这两个三角形的最小内角都等于α,求α和$\frac{a}{b}$的值.

分析　根据已知条件,我们可以利用余弦定理在这两个三角形中分别建立起a,b的关系式,再化为$\frac{a}{b}$的方程,然后通过解一元三次方程可以求出来,但这样做的运算量比较大,过程也相对较繁杂.如果我们注意到两个三角形中有相等的边,则可尝试把边长为a,a,b的三角形叠放到另一个三角形上,就会发现本题的隐含关系是叠放后的图形为一等腰三角形,如图2所示.

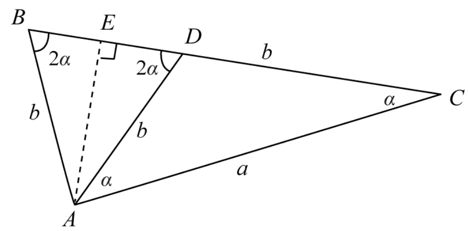

图 2

因为$a>b$,作$AE\perp BC$,则$BE=\frac{a-b}{2}$.$CE=\frac{a+b}{2}$,故$b^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=a^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,

即$ab=a^2-b^2$.由此可得$\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,且$5\alpha=180°$,所以$\alpha=36°$.

3　变题柱元素,转换问题主元

绝大多数数学问题中的变量都不唯一,通常情况下,会有一些变量处于题柱角色,它们是解决矛盾的主要方面,称之为主元;其他的元素则处于问题解决的次要和服从地位,称为次元.在一些问题所给条件或结论中,往往掩盖主元次元之间的关系,把相关变量搅拌在一起,增加解题难度.因此,在解题中如果能迅速准确地找出主要元素,并突出主要元素,则可能解题目标指向更清晰,更有利于抓住问题的要害,将复杂问题简单化.特别地,在我们讨论某些含参问题时,要学会转换题柱元素角色,但通过变换主元,调整设定参数,以避免讨论,把握解题思路,实现解题过程的优化与高效.

例 5　已知方程$ax^2-2(a-3)x+a-2=0$中的a为负整数,试求使方程的解至少有一个为整数时的a值.

分析　依据常规方法,我们可以先求出$x=\frac{(a-3)\pm\sqrt{9-4a}}{a}$,再对$a$进行分类讨论,显然这

一过程十分繁琐.如果我们在拟定解题计划时,首先考虑改变 x 与 a 的地位,将原方程视为关于 a 的方程,则有 $(x-1)^2a=2-6x$,显见 $x\neq1$,故 $a=\frac{2-6x}{(x-1)^2}$.因为 a 为负整数,故 $a\leqslant-1$,所以 $2-6x\leqslant-(x-1)^2$,即 $x^2-8x+3\leqslant0$.解得 $4-\sqrt{13}\leqslant x\leqslant4+\sqrt{13}$,$x$ 可取的整数分别是 $2,3,4,5,6,7$,代入 $a=\frac{2-6x}{(x-1)^2}$ 中进行验算,求得符合题意的 a 值为 $-10,-4$.

例6　设不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对满足 $|m|\leqslant2$ 的一切实数 m 恒成立,求实数 x 的取值范围.

分析　调查发现,许多同学拿到这道题目会陷入一种思维定式,即不假思索对不等式进行分类讨论,这样做容易走入困境,找不到确定 x 的头绪.倘若换一个角度去思考,以 m 为主元,设 $f(m)=(x^2-1)m-(2x-1)<0$,则问题转化为求一次函数(或常数函数)$f(m)$ 的值在区间 $[-2,2]$ 内恒定负数参数 x 应满足的条件.要使 $-2\leqslant m\leqslant2$ 时,$f(m)<0$ 恒成立,只要使 $\begin{cases}f(-2)<0\\f(2)<0\end{cases}$,即 $\begin{cases}-2(x^2-1)-(2x-1)<0\\2(x^2-1)-(2x-1)<0\end{cases}$.从而解得 $x\in(\frac{\sqrt{7}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2})$.

4　变题源背景,回归概念定义

许多问题的编拟都有一些特定的背景,要么是某个概念或数学公式,要么是某个已经解决了的实际问题,要么是一个基本思想的应用等.在这其中,数学概念的背景,最值得重视和加强.任何一个数学问题的编拟与解决,数学概念不可或缺.一些特定的问题中,概念既是推导公式、定理的依据,也是解题常用的一把钥匙.所以对于一些特定的数学问题,如能回到数学概念所定义的形式中去,往往能获得题设一些具有本质特征的属性,达到合理运算、准确判断、灵活解题的目的[2].因此,对概念的厘清和定义的把握,是对问题本质的一种最好的理解.

然而有些问题的解决,表面上看对定义的依赖性不强,但是如能透过题意,挖掘其中的基本元素间的关系,亦能帮助我们把握问题的实质,厘清变量间错综复杂的关系.因此,回到定义中去考虑,借助定义所反映的数学表达式进行调节转化,是把问题化难为易、化繁为简的又一行之有效的解题策略.

例7　将7个同样的白球全部放入4个不同的盒子内(可以有盒子不放),问共有多少种不同的放法?

分析　本题题意并不费解,但求解起来似乎并不容易.有些学生看到题目,就考虑分情况讨论,这一过程将会十分繁琐.可以考虑改变原问题情境,把原问题"放到不同的盒子内"等价地改编为"排列组合中的插板"问题,因而可以直接利用组合的定义进行解答.

事实上,把7个白球排成一排,并插入3个黑球,如图3.在左边的第一个黑球前面只有1个白球,表示第一盒子放1个白球;第二个黑球与第一个黑球之间有3个白球,表示第二盒子放3个白球;依次类推,第三和第四两个盒子分别放2个和1个白球.同样,图4表示4个盒子放入的球数依次为0,4,0,3.

图3

图4

显然,白球放入盒子的方法与黑球所在位置之间有一一对应关系.而黑球所在的位置就相当于 $7+3=10$ 个无色的球中选出了3个涂上黑色(余下的7个涂上白色).因此,依据组合的定义,黑球不同位置的总数为 $C_{10}^3=120$,也就是说7个白球放入4个不同盒子共有120种放法.

例8　若点 A 的坐标为 $(3,2)$,F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点,点 P 在抛物线上移动,为使 $|PA|+|PF|$ 取最小值,求点 P 的坐标.

分析　容易作出草图如图5所示,显然 A 在抛物线开口方向内.能否作出准线,能否想到抛物线的定义,是解决本题的关键.

过 P 作到准线 $x=-\frac{1}{2}$ 的垂线段 PQ,则显然 $|PF|=|PQ|$,即 $|PA|+|PF|=|PA|+|PQ|$,所以从 A 点出发到准线距离最短的是 PA

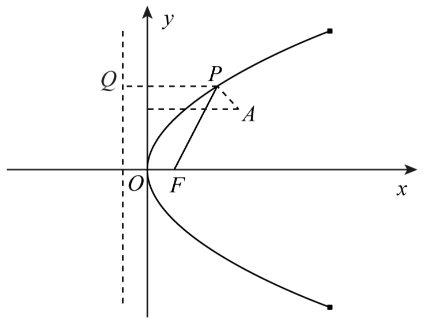

图 5

与 PQ 在同一条直线上，于是有点 A 到准线的距离为 $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$，点 P 是 AQ 与抛物线的交点，此时点 P 的坐标为 $P(2,2)$.

5　变题引线索，增设辅助参数

有些问题，初看上去似乎缺少条件，一时难以入手，或是已知条件较多，无从下手，这时，我们可以增加一些辅助参数，来拓宽思路寻求解题良策. 这一辅助参数，从更广泛的意义上说，包括增设的未知数，也包括一些辅助图形. 所谓的“设而不求”未知数，就是一种特别的辅助参数. 所有这些辅助参数的加入，为解题增添了活力，使得问题中的各变量之间的关系，特别是未知量与已知量之间的关系进一步明朗化，为最终实现问题的解决，奠定了基础.

例 9　有一个半径是 1 的圆，圆心在 x 轴上运动，抛物线方程是 $y^2=2x$，试问当这个圆运动到什么位置时，圆与抛物线在同一个交点处的两条切线相互垂直.

分析　依据解题常规，一般是这样思考的. 首先依据题意，不妨设圆的方程 $(x-a)^2+y^2=1$，与抛物线方程 $y^2=2x$ 联立解方程组，从中可以求得交点 $P(x_0,y_0)$ 的坐标，然后再分别计算点 P 处的两条切线的方程，并两直线相互垂直知他们的斜率之积为 -1. 求得 a 的值. 如果按照这一方案来解题，那是相当繁冗的，特别表现在计算量比较大. 本题也可以从另一个角度去思考，设而不求，从整体结构上去分析思考，也许能够事半功倍.

事实上，由题意易知在点 $P(x_0,y_0)$ 处抛物线的切线方程是 $yy_0=x+x_0$，圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的切线方程是 $xx_0-a(x+x_0)+a^2+yy_0=1$. 它们的斜率分别是 $k_1=\frac{1}{y_0}$ 和 $k_2=\frac{a-x_0}{y_0}$. 由 $k_1k_2=-1$，代入得 $y_0^2=x_0-a$. 又 $y_0^2=2x_0$，所以 $x_0=-a$. 而 $(x_0-a)^2+y_0^2=1$，所以 $(-2a)^2+(-2a)-1=0$，解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 因为 $a>1$ 时，圆与抛物线没有公共点，故 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 舍去. 所以圆心在 $(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0)$ 时，圆与抛物线在交点处的切线相互垂直. 这一解法虽然也考虑了交点，但设而不求，注重整体，避免了繁冗的运算，巧妙、优美.

例 10　设 x,y 均不为零且 $x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}$，$\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$. 求证：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

分析　本题实质上就是要从已知条件消去参数 θ. 这类命题变化较大，解题方法具有较大的灵活性. 如果用平方消去法和比较消去法推证，解题过程较为曲折. 注意到已知条件中的前一个等式在结构上的特征，引入辅助角 $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$，则容易把条件和结论联系起来.

事实上，由已知条件易得：

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\theta-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\theta=1.$$

令 $\varphi=\arctan\frac{x}{y}$，则 $\sin(\theta-\varphi)=1$，

所以 $\theta=\varphi+\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

于是，$\sin^2\theta=\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos^2\theta=\frac{x^2}{x^2+y^2}$，

$$\cos^2\theta=\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\sin^2\theta=\frac{y^2}{x^2+y^2},$$

所以，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

6　变难题形式，反向探求解法

有些问题难于求解，好比攻城，一条路径行不通，看看可不可以采用其他的办法，特别是逆向思维，从问题结论的反面入手. 罗巴切夫斯基从许多失败者的教训中看到了把欧氏第五公设作为定理直接来证明是不可能的，反向而行之，提出了一个和第五公设相矛盾的命题，用它来代替第五公设，终于发现了几何学的崭新天地——非欧几何学.

解题中的举反例、反证法、逆推法、排除法、同一法、补集思想等技巧,都可以说是正难则反策略在数学中的具体应用. 反向探求解法,可以避免相关知识的纵向深入或分类讨论,有效地实现了问题的等价转化,拓展了解法探求的思维空间,为问题解决打开了一个新的天地.

例11 已知三个方程 $x^2-mx+4=0$,$x^2-2(m-1)x+16=0$,$x^2+2mx+3m+10=0$ 中至少有一个方程有实根,求实数 m 的取值范围.

分析 若正面求解,三个方程至少有一个方程有实根,将出现7种可能,情况复杂,但其反面则只有一种情况:三个方程都没有实根,问题变得极为简单. 有

$$\begin{cases}\Delta_1=m^2-4\times4=(m-4)(m+4)<0,\\ \Delta_2=4\,(m-1)^2-4\times16=4(m-5)(m+3)<0,\\ \Delta_3=4m^2-4(3m+10)=4(m-5)(m+2)<0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}-4<m<4,\\-3<m<5,\\-2<m<5,\end{cases}$ 得 $-2<m<4$.

再求补集,得三个方程至少有一个方程有实根时实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$.

例12 设 AB 为过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦点的弦,试证抛物线上不存在关于直线 AB 对称的两点(不考虑 A、B 的自身对称).

分析 本题为存在性命题,可考虑反向思维. 不妨假设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$ 为抛物线上关于 AB 对称的两点. 根据已知条件,设直线 AB 的方程为 $y=k(x-\frac{1}{2}p)(k\in\mathbf{R},k\neq0)$,则有

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{k},$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=k\left[\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{2}p\right].$$

又因为,$y_1^2=2px_1$,$y_2^2=2px_2$,

所以,$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=2p(x_1-x_2)$.

易得,$-pk=\frac{1}{2}k(x_1+x_2)-\frac{1}{2}pk$.

所以,$x_1+x_2=-p$.

因为 $p>0$,所以 $x_1+x_2<0$. 这与已知 $x_1+x_2>0$ 矛盾,故原命题正确.

参考文献

[1]波利亚. 数学的发现——对解题的理解、研究和讲授[M]. 北京:科学出版社,2013:245

[2]陈永明名师工作室. 数学习题教学研究(修订版)[M]. 上海:上海教育出版社,2014:30-32