从直觉到构造：数学解题的突破

段志贵

（盐城师范学院数学科学学院）

对于某些数学问题，用直接的方法去求解或证明将是一件十分烦琐的事，在有些情况下甚至难以解决．但若应用构造思想，把要求解的结果或待证明的结论直观地用某种方式构造出来，或者在条件与结论间构造出一座解决问题的“桥梁”，往往能得到意想不到的效果．然而，诚如前苏联科学家凯德洛夫所说“没有任何一个创造性行为能离开直觉活动”，实现这类问题基于构造的解题突破，许多时候我们需要直觉作为“帮手”．不同的数学问题实现构造的方法是灵活的，没有固定的程序和模式，那么我们应当怎样把一个问题从直觉入手，去实现构造，以获得问题解决的突破呢？

1　分析原题背景，尝试解题入口

有些数学问题，在孤立地运用题设条件难以求解时，不妨把问题于特定的背景下，构造问题的原型，寻求解题的入口. 不同的数学背景会使人产生不同的联想和思考方法. 对一个比较复杂的数学问题，在直觉的引领下，我们若能把它放在更大的背景中思考，也许一个看似复杂的问题，可能会变成一个简单的特例，便于抽象出更一般的结论和发现新的结论，由此萌发问题解决的构造思想的雏形.

例 1　设 n 为正整数，证明: $\dfrac{2^{2n}}{2n} \le C_{2n}^{n} \le 2^{2n}$.

分析　这个问题貌似很难下手．事实上，如果企图通过演算寻找思路，一定会非常繁琐，然而通过观察，也许我们可能会发现 C_{2n}^{n} 为 $(x+y)^{2n}$ 展开式的第 $n+1$ 项的系数（直觉从这里开始），依此直觉我们猜想本题的解决可能与二项式定理有关．基于此，下一步思维围绕怎样使用二项式定理来证明而展开．于是，首先写出下列二项式定理（从这里开始实施即为实施构造）:

$$(x+y)^{2n} = C_{2n}^{0}x^{2n} + C_{2n}^{1}x^{2n-1}y + \cdots + C_{2n}^{n}x^{n}y^{n} + \cdots + C_{2n}^{2n}y^{2n},$$

可以看出，C_{2n}^{n} 为二项展开式最大项系数．进一步延伸思维触角：不妨令 $x = y = 1$，有

$$(1+1)^{2n} = C_{2n}^{0} + C_{2n}^{1} + \cdots C_{2n}^{n} + \cdots + C_{2n}^{2n},$$

在此大背景下，立即可以得出　　　　　　　　.

例 2　已知：如图1，在 ΔABC 中 $AB = AC, \angle BAC = 90^{\circ}$，$BD$ 是中线 $AF \perp BD$ 交 BC 于点 E，求证: $BE = 2EC.$

分析　通过审题不难发现本题中“ΔABC 是等腰直角三角形”这个特征，直觉告诉我们可以把它放到正方形和圆中进行证明（直觉从这里开始），基于此，在解题中，我们可以首先尝试把问题基于正方形或圆相关的背景之中（开始构造）.

方法一：将ΔABC置入正方形中，如图2．正方形$ABHC$中，将AE延长线交HC于点G，易证$CG=AD$，$\Delta ABE \backsim \Delta GCE$，$\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{AB}{GC}$，所以，$\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{AB}{GC}=\dfrac{AB}{AD}=2$，即$BE=2EC$.

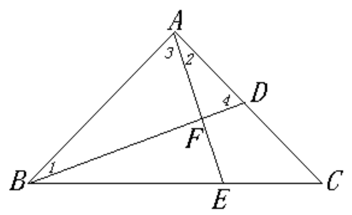

图 1

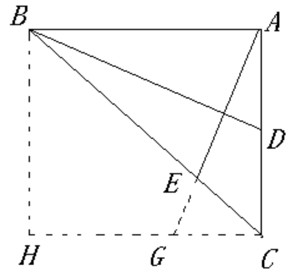

图 2

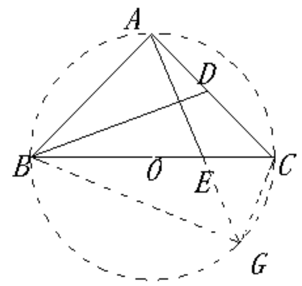

图 3

方法二：将ΔABC置入圆中，如图3．ΔABC内接于$\odot O$，AE延长线交$\odot O$于点G，连接BG、CG，易证$Rt\Delta ABD \cong Rt\Delta GBC$，所以，$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{GB}{GC}=2$.

显然，对于这么一个比较复杂的问题我们只要把它还原到它所在的大背景下看，解题的视野开阔，问题的解决变得容易多了.

2　通过数形转换，猜想解题捷径

华罗庚说过:“数缺形时少直观，形离数时难入微”，说明数与形是相辅相成，在一定的条件下可互相转化. 数形结合是数学中常用的思想方法．在解题中，经常萌生数与形相互转换的直觉，有时会给我们解题带来意想不到的惊喜．而数与形的转换，本质上说就是一种构造，是通过数形结合构造某种超越原题的数学形式，使数学条件和结论之间的关系很清晰地表现出来，直观具体从而使问题得到解决.

例 3 求函数$y=\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}$的最值.

分析 利用三角变换的方法来求解比较麻烦. 观察函数表达式，发现它与斜率公式$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$非常相似（直觉从这里开始），可否把本题与斜率相联系呢？就此萌发将本题转化为几何中的斜率问题来解决的想法（着手开始构造）：当我们取定点$A(2,2)$及动点$P(\cos x,\sin x)$，则动点P的轨迹是单位圆，于是问题变成求PA的斜率$k=\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}$的最值问题，也就是当直线$PA$与单位圆$x^2+y^2=1$相切时的斜率. 相对于原题来说，这一问题的难度大大降低了.

事实上，因为单位圆中斜率k的切线方程为$y=kx\pm\sqrt{1+k^2}$，切线通过点$A(2,2)$，故$2=2k\pm\sqrt{1+k^2}$，解得$k=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$，故$y_{\max}=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$，$y_{\min}=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$.

例 4 从6对老搭档运动员中选派5名出国参赛，要求被选的运动员任意两名都不是老搭档，求有多少种不同的选派方法？

分析 初读本题，可能感觉比较复杂，主要惑点在于“被选的运动员任意两名都不是老搭档”．可否把本题图示出来？（本能的直觉开始了）．然而，怎样图示才便利于解题呢？思维向前延伸，不同的选手用不同的点表示，它们之间有关系的用直线相连（构造进行时），于是在直觉的引领下，我们构造出一个如图 4 所示的六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$：用 6 种不同的颜色给六棱柱的 12 个顶点染色，使得同一侧棱的两端点同色，用来表示一对老搭档运动员．这样问题变更为只需求出从 12 个着色点中任取 5 个不同色的点的不同取法．显然这一变更使问题变得简单容易多了．

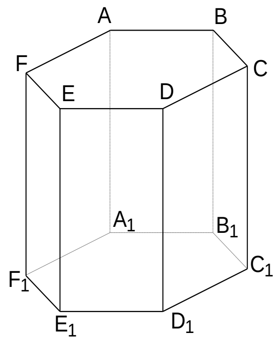

图 4

事实上，把解题分两个步骤完成：第一步，先求从 6 种颜色中任取 5 种的取法，共有 $C_6^5=6$ 种；第二步，因为图中的 6 个染色点中同色点各 2 个，所以第一步中的每一种取法均有 $(C_2^1)^5=32$ 种搭配方式，由乘法原理，完成这件事共有 $6\times 32=192$ 种方法，即选派 5 名运动员共有 192 种方法．

3　运用审美赏析，激发解题灵感

阿达玛说过:“数学直觉的本质是某种‘美感’或‘美的意识’．美的意识越强，发现和辨证隐蔽的和谐关系的直觉也就越强.”数学美包含数学概念的简单性、统一性、结构系统的协调性、对称性、数学命题和数学模型的概括性、典型性和普遍性，还有数学中的奇异性．数学美有时离我们并不遥远，比如在问题解决过程中，数学研究中注重的“结构关联对偶化”，数学思考中体现的“以简驭繁”等在我们的思维中常有体现，因此，倘若我们具有一定的数学素养，基于数学美的赏析，我们也时常会产生某种直觉（直觉从这里产生），这种直觉更多的是灵感，体现在解题中，则让我们体会到思路的奇异巧妙，方法的透彻明了（构造思想在这里萌芽）．

例 5 设 $\left(5+2\sqrt{6}\right)^n=\left(a_n-\sqrt{6}b_n\right),\left(a_n,b_n\in N\right)$，求证：$a_n^2-6b_n^2=1$.

分析 本题即欲证 $\left(a_n+\sqrt{6}b_n\right)\left(a_n-\sqrt{6}b_n\right)=1$，直觉告诉我们要构造 $5+2\sqrt{6}$ 的对偶式 $5-2\sqrt{6}$，由 $\left(5+2\sqrt{6}\right)^n=\left(a_n-\sqrt{6}b_n\right)$，知 $\left(5-2\sqrt{6}\right)^n=\left(a_n+\sqrt{6}b_n\right)$，再推演，易得

$$a_n^2-6b_n^2=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n\left(5-2\sqrt{6}\right)^n=1.$$

例 6 求 $\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$ 的值.

分析 这是 1987 年全国高考题中的一道试题，其解法不止一种．在本题的求解探索过程中，倘若我们利用审美直觉来构造对偶式，则可能解题会容易得多．不妨设 $A=\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$，其对偶式为 $B=\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$，于是有

$$A\cdot B=\frac{1}{16}\sin 20^\circ\sin 60^\circ\sin 100^\circ\sin 140^\circ=\frac{1}{16}\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ=\frac{1}{16}B,$$

由于 $B\neq 0$，所以易知 $A=\dfrac{1}{16}$. 在本题求解过程中，对于式子 $B=\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$，我

们很难说清楚构造它的思维脉络. 这就是数学美，这就是一种审美直觉在数学构造解题中的作用.

4　联想结构相似，探寻解题方向

有些数学问题的已知条件或结论的外表形态与结构，让人容易想到相关的、相似的定义、定理、公式和图形等（直觉从这里产生），善于抓住这一直觉，也许会从中得到有益启发. 比如由$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$与一元二次方程的根的判别式相似，直觉想到借助于一元二次方程解题（开始构造）；由a^2+ac+c^2与余弦定理的内容相似，直觉想到余弦定理而构造三角形（开始构造）. 总言之，借助于所研究问题对象之间或这些对象与已学过的知识间存在着形式上、本质上的相同或相似性，构造一种兼有两者共同特点的数学形式.

例 7 设$a>b>0,c>b>0$，求证$\sqrt{c^2+ac+a^2}\le\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}$.

分析 a^2+ac+c^2，a^2-ab+b^2，b^2-bc+c^2与余弦定理的内容相似，联想到余弦定理，可构造三角形. 事实上，根据

$a^2-ab+b^2=a^2-2ab\cos60^\circ+b^2$，

$b^2-bc+c^2=b^2-2bc\cos60^\circ+c^2$，

$a^2-ac+c^2=a^2-2ac\cos120^\circ+c^2$，

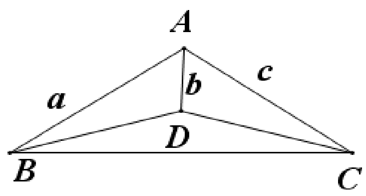

图 5

可以构造出以a,b为两边，夹角为60°的三角形，以a,c为两边，夹角为120°的三角形，此题即为三角形三边之间的关系问题了（如图 5 所示）. 在ΔBDC中，$BD+DC>BC$，即$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{c^2-bc+b^2}>\sqrt{a^2+ac+c^2}$. 若$D$在$BC$上，显然$BD+DC=BC$，因此$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{c^2-bc+b^2}\ge\sqrt{a^2+ac+c^2}$.

例 8 若$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，　S_n是它的前n项和. 证明$S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$.

分析 把结论化为$4S_n\cdot S_{n+2}<(2S_{n+1})^2$，其结构形式很类似一元二次方程的判别式$b^2-4ac$，因此可以尝试构造一元二次方程去解决，构造一元二次方程$S_nx^2+2S_{n-1}x+S_{n+2}=0$. 因为$S_n$是正项数列前$n$项的和，故$S_n>0$，欲证$S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$，只要证$(2S_{n+1})^2-4S_n\cdot S_{n+2}>0$. 为此只需证明方程$S_nx^2+2S_{n-1}x+S_{n+2}=0$有两个不等实数根即可. 事实上，不妨令$a_1=1$，当$q=1$时，则方程变形为$nx^2+2(n+1)x+(n+2)=0$，即$[nx+(n+2)](x+1)=0$，因而方程有两个不同的实数根；当$q\ne1$时，方程可变形为$(1-q^n)x^2+2(1-q^{n+1})x+(1-q^{n+2})=0$，即$(x+1)^2-q^n(x+q)^2=0$. 显然它也有两个不同的实数根.

5　改换问题面貌，捕获解题方法

有些问题生疏隐晦，按其本来面目无从入手，如果对问题作一些必要的改头换面，或提炼，或抽象，

或纯化，往往会有意想不到的感悟．这些感悟主要是把一个个零散的发现由表及里、由浅入深地集中和联系起来（产生直觉），再通过恰当的方法加以处理，化归为已有的认识，就自然形成了构造模型的方法（进入构造），这一构造思想一般超越了问题的原有意境，具有更为丰富的想象力和创造力．

例 9 设 $a_0=1$，$a_n=\dfrac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_{n-1}}\left(n\in N^+\right)$，求证：$a_n>\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$．

分析 本题的题设中含有 $\sqrt{1+a_{n-1}^2}$ 及结论中含有 π 这两个特征．直觉告诉我们，对含有形如 $\sqrt{1\pm a^2}$，$\sqrt{1\pm a_n}$，$\dfrac{a_{n+1}\pm a_n}{1\pm a_n a_{n+1}}$ 的问题，有时可尝试通过三角换元构造一个新数列，把一般数列化归为特殊数列问题.

事实上，由于 $a_n>0$，因此考虑构造新数列 $\{\alpha_n\}$，使 $a_n=\tan\alpha_n$，其中 $\alpha_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$．通过化简去掉根号，即 $\tan\alpha_n=\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\alpha_{n-1}}-1}{\tan\alpha_{n-1}}=\dfrac{1-\cos\alpha_{n-1}}{\sin\alpha_{n-1}}=\tan\dfrac{\alpha_{n-1}}{2}$，则 $\alpha_n=\dfrac{\alpha_{n-1}}{2}$．又 $a_0=1$，$a_1=\sqrt{2}-1=\tan\dfrac{\pi}{8}$，从而 $\alpha_1=\dfrac{\pi}{8}$．因此，数列 $\{\alpha_n\}$ 是以 $\dfrac{\pi}{8}$ 为首项，$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，$\alpha_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$，故 $a_n=\tan\dfrac{\pi}{2^{n+2}}>\dfrac{\pi}{2^{n+2}}$．

参考文献

[1]黄加卫．构造性方法解题——简约而不简单[J]．数学教学，2006(3):34-35.
[2]傅海伦．中国传统数学构造性思维及其现代意义[J]．自然杂志，2001(4):18-23.
[3]王延源．数学的构造性方法[J]．曲阜师范大学学报，1994(2):32-36.
[4]王延文．构造法解题的心理分析及教学应用[J]．数学教育学报，1993(2):25-31.