教研新干线

基于小学数学开放题教学的直觉思维的培养*

◆ 盐城师范学院数学科学学院　段志贵

段志贵：盐城师范学院数学科学学院副教授，数学系副主任，全国数学教育研究会理事．主持及作为主要参与者完成省级研究课题7项，获江苏省教学成果一、三等奖各1项，主持完成校级研究课题5项，获盐城市自然科学三等奖1项，发表论文30余篇，其中核心期刊5篇，主编参编教材4部。

一般说来，开放题相对于封闭题（问题的已知条件和结论都有确定的要求，即指条件明确，答案固定的习题）而存在，指的是一类条件、结论及其解题策略都开放的问题。开放题不必有解，答案也不必唯一，条件可以多余。解题者在开放题解题过程中不但能巩固旧知识，还能自己去发现新问题。追溯开放题的研究历史，早先源于日本为探索一种更高目标的教学评价方法。随着研究的深入，人们认识到开放题不仅可以作为更高目标的评价手段，而且具有潜在的教育教学价值。当前，开放题与开放题教学在全世界数学教育界得到了广泛的重视，人们越来越感受到开放题教学在培养智力、提高学生能力，特别是在发展学生数学思维上的特殊作用。基于这一认识，本文拟就小学数学开放题教学如何培养学生的直觉思维投石问路，期待与同行专家交流。

一、开放题的特点与数学直觉思维的诱发机制

1. 开放题的几个特点。从结构形式上看，开放题具有非完备性和不确定性。如果我们从解答过程和解题策略这个角度来审视，开放题还具有以下特性：

一是挑战性。解答开放题时，必须打破原有的思维模式，展开联想和想象的翅膀，从多角度、多方位寻找答案。

二是探究性。开放题的解答没有固定的、现成的模式可循，解题者不能用常规方法去套用，必须经过主动的思索，自己来设计解题方案。

三是发展性。从皮亚杰发生认识论的观点看，开放题能引起学生认知结构的顺应，从而使学生的认知结构发生质的变化，使他们的知识水平和数学能力得到较大程度的发展。

四是层次性。开放题解答的多样性，决定了它能够满足不同层次水平学生的需求，使他们都能在自己的能力范围内解决问题。一般在解答开放题的过程中，还可能引出新的高层次问题，或可能引申推广出更一般的问题。

2. 数学直觉思维的诱发机制。国内外许多专家学者在直觉思维的诱发机制上有过颇具见地的观点。徐利治教授指出“数学直觉是可以后天培养的。实际上每个人的数学直觉也是不断提高的”。美国科学家赖德提出直觉思维的产生可能来源于①对通常思维方式和传统问题处理方法的质疑；②勇气与喜好冒险及不怕犯错误；③经验；④精细的准备；⑤思维的紧张；⑥捕捉灵感等 。

一般说来，数学直觉思维具有或然性、跳跃性、整体性以及创造性等特点。数学直觉的发生源于特定认知结构被激活。一个主体的数学认知结构是通过把数学对象与原有知识和经验结合起来，经过同化和顺应，经过显意识和潜意识的相互作用，不知不觉自然而然地建构起来的。它随着主体数学认知实践的深入和主体各方面的发展而逐步深化完善。数学认识过程中，如果数学对象的有限信息反映了主体相应数学认知结构的一定特征，那么在某种适宜的环境条件下，就能借助大脑直接激活该数学认

*本文系江苏省教育科学“十二五”规划重点课题《数学开放题教学促进小学生思维发展的研究》（课题编号：C-a/2011/02/07）的阶段性研究成果。

知，产生对数学对象本质的洞察和领悟，这就是直觉；相反，则“熟视无睹”，产生不了任何有价值的数学思维。这就是面对同样一个数学问题，在经过长时间思考之后，有的人有直觉思维的突然显现，而有的人则反映迟钝，在他人提示后才恍然大悟的根源所在。

二、基于数学开放题的挑战性特点，在教学中诱发学生的或然性直觉

现代教学论指出，从本质上讲，产生学习的根本原因是问题。没有问题也就难以诱发和激起求知欲，没有问题，感觉不到问题的存在，学生就不会去深入思考，那么学习也只能是表层和形式的。数学开放题中的问题具有挑战性，适合激发学生学习的兴趣，点燃他们直觉的火花，诱发他们的或然性直觉。如：

问题1：妈妈买了相同价格的糖，付了40元，售货员阿姨找回她4元，你知道妈妈买了几盒糖吗？

由于题中“一盒糖的价格”条件的缺失，需要学生根据实际情况及“糖的盒数是正整数”这一隐蔽条件进行合理的猜想，补充合理的条件。有些学生会脱口而出说不会。接着有学生想到了盒数是整数，说有9种可能，显然，这种显意识源于这位学生把4元当成了单价。又有学生说可以是3元5角，还可以是其它带有小数的单价……。面对同学们的一个个直觉思维展示，作为教师，也许我们最应当做的就是让发言的同学把自己的念头阐述清楚。想必每个学生都会把自己的答案与他人的答案相比较，然后纠正思维航向。一个个或然性的念头，就是一个个直觉，调整航向的过程，正是学生数学思维发展的过程。

三、基于数学开放题探究性的特点，在教学中引领学生的跳跃性直觉

在开放题中，要么条件不充分，要么结果不唯一，要么解题策略多样化。学生没有现成的解答模式去解决开放题，必须经过深刻地、主动地思考，从纷繁的信息中筛选有用的条件，自己设计方案，通过不断地尝试、探索、否定，捕获直觉念头。如：

> 从本质上讲，产生学习的根本原因是问题，没有问题也就难以诱发和激起求知欲，没有问题，感觉不到问题的存在，学生就不会去深入思考，那么学习也只能是表层和形式的。

问题2：在下列括号里填上适当的数，使两个分数单位的和等于$\frac{1}{6}$，即$\frac{1}{(\ )}+\frac{1}{(\ )}=\frac{1}{6}$，这样的分数单位你能找出几对？

本题明确了题目的目标状态，这就是要使得两个分数的和等于$\frac{1}{6}$。教师在出示这一题目后，学生一般可能会先在括号里添上介于1到5之间的数，然后再找另一个相加。此路不通再试，再算，想到了括号里应当填写大于6的数。也许有人会根据直觉填写上$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$，这是因为错把“+”当成“×”号。

如果有同学凭借跳跃直觉填上一个数，比如$\frac{1}{7}$，再用$\frac{1}{6}$减去$\frac{1}{7}$，找出一组，其它同学也会跟进。也许是受这一直觉的启发，有学生想到把$\frac{1}{6}$分子分母扩大2倍、3倍，或更多倍为$\frac{2}{12}$，$\frac{3}{18}$，…，分别“劈”出$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{18}$，…，再求出另一个分数的值即可。然而，通过讨论，我们发现这种方法并不能永远进行下去。后来，又有学生发现等式左右两个分数最大值可能是$\frac{1}{7}$，最小值只能达到$\frac{1}{42}$。至此，我们便可以找出符合题意的全部分数单位了。

四、基于数学开放题的发展性特点，在教学中培养学生的整体性直觉

许多开放性问题，当我们不断地追问，不断地丰富或变换其中概念的内涵或外延的时候，思维的高度必然会随之作必要的提升。开放题的这一发展性特点，要求解题者一定要站在整体的立场上，从问题的整体考虑，综合全局研究问题。如果我们平时关注这方面训练，在后来解决这一类问题时，整体性直觉就会油然而生。如学生刚学完笔算一个数乘一位数的第一节课（不进位和一次进位），屏幕上可以投影这样的问题：

问题3：□□□□×3=___。

有学生说：“可以填任何四位数”；有学生说：“千位不能填0，其他各位可填任何数”。这时，老师说：“如果要求只能进一次位呢？各数位上的□可以分别填上哪些数？”学生的思维被打开了，专注于问题解决中。一会儿，有的学生填出了2道，有的学生填出了5道，更

多的学生填出了10几道，还有学生说可能有50多道吧。待学生交流后，老师又问：你有什么发现吗？有学生说："乘3要进位，填的数必须比4大。"有学生说："只要第一个因数上有一位数大于4就行。"还有学生说："哪一位上填4，前一位就不能填3，因为如果填了，那就要二次进位了。"我们不要求每个学生都能填出几十道，甚至几百道，但只要学生去思考了，去实践了就好；我们也不要求每个学生都要找出填写数的规律，但只要学生能聆听别人发言，能互相学习，从这道题中有尽可能大的获得就好！老师的启发，一定会加深不同层次学生对本题的进一步认识和理解。至此，我们将不会惊讶于学生基于整体考虑，提出"老师，那么要求不进位的话，□中可以填什么数呢？""老师，如果要求进两位，□中可以填什么数呢？"等问题了。

这一案例教学，从数学开放题发展性特点出发，教师不断地把问题引向深入，把学生的直觉思维带向全面，更具整体性，促进了学生由对数学现象的认识到对数学本质理解和掌握。

五、基于数学开放题的层次性特点，在教学中激活学生的创造性直觉

数学开放题能引起学生认知结构的巨大变化，而且由于开放题涉及的知识点综合性强，浅层次可以只达到数学知识的理解和掌握，高层次可以上升到数学知识的运用，数学思想方法的领悟，以及发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力，使不同的学生在开放题中可以得到不同的收获，不同的发展。基于开放题的层次性特点，可以让学生体验到成功感，愉快感，满足感，增进学习数学的积极性和主动性。由于课堂教学的时间有限，学生主体本身具有不同的层次性和差异性，教学内容的深浅不一，因此选用的开放题应满足切入点低、容易控制、适合学生的实际等要求，要能适应不同层次的学生，决不能把开放题教学搞成偏题、难题的讲练。要通过解开放题，让所有的学生都认为"自己能行"，都能得到相应的发展。具体教学设计上，要控制好题目的难易程度并分层次给学生进行评价，让不同学生在数学开放题学习过程中学习有区别的数学，都有学好数学的信心，都能在各自"最近发展区"有创造性潜能的直觉闪现。如：

> 基于开放题的层次性特点，可以让学生体验到成功感，愉快感，满足感，增进学习数学的积极性和主动性。

问题4：一个乡去年原计划造林12公顷，实际造林14公顷，谁能通过计算说明这个乡造林任务完成得怎样？

不同层次的学生可能会列出不一样的算式：

(1)14−12=2(公顷)，该乡实际比原计划多造林2公顷；

(2)$14\div12=1\frac{1}{6}$，该乡实际造林是原计划的$1\frac{1}{6}$倍；

(3)$14\div12\approx1.167=116.7\%$，该乡完成原计划的116.7%；

(4)$(14-12)\div12=\frac{1}{6}$，实际造林比原计划增加了$\frac{1}{6}$；

(5)$(14-12)\div12\approx0.167=16.7\%$，实际造林比原计划增加了16.7%。

本题解题策略开放。一般说来，学生知识理解与掌握的不一样，所采用的解题策略也各不相同。本题前四道算式都可能有学生根据已有旧知对问题作出自己的直觉判断与运算，而第五道算式的出现，则体现了学生智力的个体差异了。当大多数同学还停留在原有知识水平时，有一小部分同学已将旧知迁移到新知中去了。基于上述五个算式的开放性解题策略的讨论,既可以顺利完成这一知识点的教学任务,又培养了学生的创造性直觉思维。

波利亚在谈到解题经验积累时曾说过,"在你找到第一个蘑菇时，继续观察，也许就能发现一堆蘑菇。"基于以上开放题各类不同的特点，学生们的直觉思维不断跃进，解题思路不断拓宽，可以肯定地说，长期以往，坚持不懈地用好开放题进行教学，孩子们在数学上的直觉思维一定会获得长足的发展。

然而，正如庞加莱所说，"直觉是不难发现的，但它不能给我们以严格性，甚至不能给我们以可靠性"。数学直觉时常会作弄、欺骗我们，并不是所有直觉都是正确的。因此，在开放题教学中，作为教师，我们要着意培养学生的直觉思维，与此同时，还要有宽容之心，容许学生在直觉上犯错，要充分保护学生在开放性问题解题过程中的直觉自信心。

（编辑：陈诚）