直觉:数学解题的精灵

盐城师范学院数学与统计学院 (224002) 段志贵
南京师范大学教师教育学院 (210023) 陈馨悦
青海师范大学数学与统计学院 (810008) 黄云鹤

在数学思维活动中,直觉是一种特殊的思维活动,它既不同于逻辑,又不同于经验,是一种介于逻辑与经验之间的,有一定色彩的创造性思维活动,数学直觉在数学解题过程中往往可以发挥关键性的作用.

1 解题直觉的意义

严格意义上说,数学的直觉是指人们运用已有的知识、经验和技能,通过观察、联想、类比、归纳、猜测等方法对所研究的事物做出一种比较迅速的直接综合判断.它是对数学对象中的关系和结构的直接领悟.它不受固定逻辑规则约束,对事物迅速识别,未经一步步的推理、分析,就能对问题突然领悟、理解或给出答案.直觉应用到数学解题之中,以其高度省略、简化和浓缩的方式洞察数学关系,促成解题思路的形成,从而有效推进解题计划的拟定和解题方法的获得.

例1 设 x,y,z 均为实数,且 $x+y+z=xyz$. 求证:$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

分析:在本题中,已知等式和求证的等式分别是三项和与三项积,比较容易把它与三角形具有 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ 的性质联系起来.同时,题目待求结论中的项 $\frac{2x}{1-x^2}$ 又与 $\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 具有相似性.于是想到这个题目的结论可以转化为要证:$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\tan 2B\tan 2C$.

有了这一思路,问题的最终解法便获得了非常可靠的抓手.怎么就想到转换为三角,想到正切二倍角公式,想到设 $x=\tan A, y=\tan B, z=\tan C$? 这就是解题直觉!

本质上说,解题直觉是一种认知激活——解题者认知被问题表征系统所激活."三项和三项积相等"是问题的一个表征,客观上让人想到"$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$",这是曾经的认知被激活.再由结论中的"三项和三项积相等"以及类似正切二倍角公式的表征,从而想到对问题的假设,想到把问题转化为证明三角恒等式,这便形成了解题直觉.

显然,解题直觉的产生建立在对所涉及到的知识与技能有一定的理解和掌握基础之上,解题直觉的涌现也并非一蹴而就,往往伴随着对思维障碍的突破,存在于坚持不懈地探索与发现之中.

2 解题直觉的呈现

2.1 在探寻解法的过程中突现灵感

在探索和发现数学问题解法的过程中,针对一些已知的关系与结构,有时特定的某一条件会给我们留下特别的印象,盘旋于脑海,在搜索其它知识模块的过程中,如果能够产生某个交集,则可以使认识上产生一个飞跃,这种飞跃并不都具有逻辑性,但结果却是令人兴奋的,有时便形成了爆发性的顿悟,这种顿悟,就是一种解题直觉.

例2 集合 $\left\{23,-34,57,\frac{18}{17},86,-75,\frac{3}{7},-1\right\}$ 的每一个非空子集的元素乘积(单元素集取元素本身)之和是多少?

分析:看似复杂的题目,随着单元素集、两元素集的尝试,就会突然感觉到在所有子集中存在一个特殊的元素 -1,当出现这些 $23,-34,57,\frac{18}{17},86,-75,\frac{3}{7}$ 单元素集时,只要取其中任一个数与 -1 搭配,形成的乘积正好是原来数的相反数.以此类推,可以得到 $23,-34,57,\frac{18}{17},86,-75,\frac{3}{7}$ 中任意几个数的乘积,必定存在一个相反数,相加之后正好为0,最后只剩下一个数,也就是 -1 所以原题的答案是 -1.

2.2 在演绎推理的过程中超越规则

当演绎推理与直觉交织在一起时,一般不是依三段论规则按步前进,而是采用比较迅速,比较"自由"的方式向前延伸.一种是原有逻辑程序的简化和压缩,多表现为在大脑中迅速检索到一种"思维块"并直接做出判断;另一种是推理之链中包含有不合三段论规则的判断,这些看似支离破碎的判断,其实都是逻辑与直觉混合起作用的结果,它们

往往也会促成解题念头的形成.

例3　已知函数 $f(x)$ 对于一切实数 x,y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 成立,且当 $x>0$ 时,恒有 $f(x)<0$,试判断函数 $f(x)$ 的单调性.

分析:要证单调性,就是要考察 $f(x_2)-f(x_1)$ 是大于 0,还是小于 0. 再从题目条件出发,任取 x_1,x_2,使得 $x_1<x_2$,即 $x_2-x_1>0$,所以 $f(x_2-x_1)<0$. 于是,从这里解题直觉产生,并逐步向结论延伸,可以发现 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)<0$,所以函数 $f(x)$ 是单调递减的. 当然这一过程作为解题还不完备,还需要去进一步地完善充实.

2.3 在归纳总结的过程中跳跃进程

一个普遍性判断包含有被归纳的事实中所没有的内容,因而在由几个单称判断归纳出一个新的全称判断时,归纳进程必然会跳跃一下. 在处理数学问题时,无论是把问题特殊化,还是把特殊化了的问题化归到原来的一般问题,都需要直觉的跳跃.

例4　已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$,且有 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$,求这个数列的通项公式.

分析:对于熟悉数列各种解法的人来说,本题很简单,只需要由 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$ 取倒数得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$,然后利用等差数列通项公式即可很快求得 $a_n=\dfrac{1}{n}$. 而对一个刚开始学习数列的人来说,本题可以分别代入 $n=1,n=2,n=3,\cdots$,分别得到 $a_2=\dfrac{1}{2},a_3=\dfrac{1}{3},a_4=\dfrac{1}{4},\cdots$,直觉猜想出本题结论应当是 $a_n=\dfrac{1}{n}$.

2.4 在解题联想的过程中不落窠臼

依据解题中的相关对象或相似因素,或熟悉的解题模式,人们在解题中常常会做出某些跳跃式的自由联想,这些联想与解题者的经验有很大关系,有的联想极有可能帮助我们获得解题的有效线索.

例5　设 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$,若 $S=f\left(\dfrac{1}{2020}\right)+f\left(\dfrac{2}{2020}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2019}{2020}\right)$,求 S.

分析:基于经验,观察到本题是 2019 个连续自变量对应的函数值求和,可以联想到高斯"从 1 加到 100"采用的倒序相加法. 由此萌生直觉:是否存在 $f\left(\dfrac{k}{2020}\right)+f\left(\dfrac{2020-k}{2020}\right)=$ 常数 $(1\leqslant k\leqslant 2019)$ 这一关系呢? 这一直觉猜测,使解题思路明朗化了. 事实上,通过推算,我们不难获得 $f\left(\dfrac{k}{2020}\right)+f\left(\dfrac{2020-k}{2020}\right)=1(1\leqslant k\leqslant 2019)$. 于是 $S=\dfrac{2019}{2}$.

3 解题直觉的捕获

3.1 透视背景形成直觉

许多问题的解决往往要通过仔细观察分析,去发现问题各个环节以及其中的联系,尤其是要透过问题的表象,直觉捕获问题背后蕴藏的数学知识点和数学思想方法,真正感知到编题者命题的意图所在,为顺利解决问题奠定基础.

例6　设 $a\in\mathbf{R}$,若 $x>0$ 时均有 $[(a-1)x-1]\cdot(x^2-ax-1)\geqslant 0$,求 a 的值或取值范围.

分析:观察本题已知条件,可能看到本题的背景源自于两个简单的函数之积,一个是一次函数 $y_1=(a-1)x-1$,另一个是二次函数 $y_2=x^2-ax-1$,从两个函数入手,我们分别作出它们的函数图像,如图 1 所示,很快可以分析得到这两个函数都过定点 $P(0,-1)$.

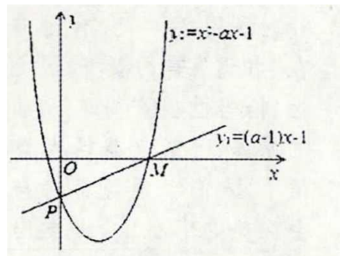

图 1

再把直线与 x 轴的另一个交点坐标代入到抛物线方程中去,就很快可求得本题的解了. 当然,要注意本题在真正实施求解的时候,为体现解题的完整与规范,首先要 a 分为 $a=1$ 和 $a\neq 1$ 这两种情况去讨论. 可以看出,对于这么一个比较难的问题我们只要把它还原到它所在的大背景下看就容易多了.

3.2 数形结合产生直觉

通俗地理解数形结合,就是使某些几何问题转化为代数问题,某些代数问题用更为直观的几何图形来解决. 数形结合是数学解题中常用的思想方法,在解题中,数与形的转换经常用到,通过数形结合构造某种数学形式,使数学题中的条件和结论的关系很清晰地表现出来,易于产生解题直觉,从而使问题得到解决

例7　设 $0<a<\dfrac{1}{4}$,解关于 x 方程 $x^2+2ax+\dfrac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}$.

分析:本题如果直接去掉这个方程的根号,将化为一个系数含有参数 a 的四次方程,不容易求解. 直觉告诉我们要考虑借助函数的图像来分析,也就是把方程两边看作关于 x 的函数 $y=x^2+2ax+\dfrac{1}{16}$

(1)和 $y=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$(2),再试图求出它们的图像的交点的横坐标.这两个函数的解析式的形式有某些相似,直觉又启发我们将(2)式变形,不难得到 $x=y^2+2ax+\frac{1}{16}$.显然这个函数与函数(1)互为反函数,而互为反函数的两个函数图像交于 $y=x$ 上,所以,本题可以转化为解方程 $x^2+2ax+\frac{1}{16}=x$,得 $x_{1,2}=\frac{1-2a}{2}\pm\sqrt{(\frac{1-2a}{2})^2-\frac{1}{16}}$.

3.3 审美赏析产生直觉

对于一个特定的数学问题,在我们寻找解题路径时利用数学美,有时亦能收获特别的解题直觉.在“和谐”美的背景下,追求统一性、对称性、不变性、恰当性;在“简单”美的情境下,思考如何用简单的原理、公式来概括大量的事实;在“奇异”美的感悟下,人们会涌现奇特与新颖的感受,所有这些都会在美的感召下,迸发出智慧的火花,这火花就是数学直觉.法国大数学家阿达玛说过:“数学直觉的本质是某种‘美感’或‘美的意识’,‘美的意识’越强,发现和辨别隐蔽和谐关系的直觉也就越强”.审美直觉可以激发灵感,发现数学美,利用数学简单美、对称美、和谐美和奇异美来解决问题.

例8 设 $(5+2\sqrt{6})^n=a_n-\sqrt{6}b_n(a_n,b_n\in\mathbf{N})$,求证:$a_n^2-6b_n^2=1$.

分析:本题即欲证 $(a_n+\sqrt{6}b_n)(a_n-\sqrt{6}b_n)=1$,直觉告诉我们也许要构造 $5+2\sqrt{6}$ 的对偶式 $5-2\sqrt{6}$.事实上,由 $(5+2\sqrt{6})^n=a_n-\sqrt{6}b_n$,知 $(5-2\sqrt{6})^n=a_n+\sqrt{6}b_n$,故 $a_n^2-6b_n^2=(5+2\sqrt{6})^n(5-2\sqrt{6})^n=1$.

3.4 结构相似产生直觉

所谓结构相似我们也可以看作是类比构造,它是通过比较所研究问题的对象之间或这些对象与已学过的知识间存在的形式上的相同或相似性得到启发,产生直觉,在此基础上构造一种兼有两者共同特点的数学形式,运用这种数学形式的丰富内涵达到解决问题的目的.

例9 设 $0<a<l,0<b<l$.试证:$\sqrt{(l-b)^2+a^2}+\sqrt{(l-a)^2+b^2}\geqslant\sqrt{2}l$.

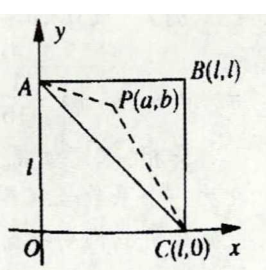

图2

分析:观察不等式左边的结构,有点像两个“距离”之和,不妨写成 $\sqrt{(l-b)^2+(0-a)^2}+\sqrt{(l-a)^2+(0-b)^2}$,而右边的像是边长为的正方形的对角线(或点(到原点的距离),于是直觉想到了构图(如图2所示):作正方形 $OABC$,在正方形内取一点 $P(a,b)$(因为 $0<a<l,0<b<l$),再用“三角形不等式”$AP+PC\geqslant AC$,即得欲证.

3.5 问题变式产生直觉

有些问题生疏隐晦,解题时需对问题作一番提炼、抽象和标准化,并根据对应同构原理,对其恰当赋义,构造出一个全新的数学模型,以找到有效的解题途径.这类模型的构想往往超越了问题的原有意境,因此需要更为丰富的想象力和创造力以及直觉能力.

例10 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $\cot\alpha+\cot\beta-\cot(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$,求 α,β 的值.

分析:本题所给的条件是一个含有两个未知数的方程,一般不能确定 α,β 的值,于是一种直觉就进入了我们脑海:可否将已知方程变形,化成一种特殊模式,诸如$(\quad)^2+(\quad)^2=0$;或者可否把原方程化成一个关于 $\cot\alpha$ 或 $\cot\beta$ 的二元一次方程,而其判别式 $\Delta=-(\quad)^2$.事实上,我们可将方程化成 $\cot^2\alpha+(\cot\beta-\sqrt{3})\cot\alpha+\cot^2\beta-\sqrt{3}\cot\beta+1=0$.这是关于 $\cot\alpha$ 的一元二次方程,根的判别式为 $\Delta=-(\sqrt{3}\cot\beta-1)^2$.由题意知 $\Delta=0$,从而求得 α,β 的值.

4 解题直觉的辩证思考

4.1 解题直觉具有相对性

数学离不开直觉,数学直觉在解题过程中起着重要的作用,然而正如庞加莱说的那样,“直觉是不难发现的,但它不能给我们以严格性,甚至不能给我们以可靠性,这一点越来越得到公认”.数学毕竟是一门严谨的科学,如果仅仅用数学直觉来研究它,不进行严格意义上的逻辑证明,那么得出来的结论肯定是有许多荒谬的.因此,解决数学问题,我们既要高度重视直觉,善于利用直觉,把直觉当成是指引解题方向的一个极其重要的工具,又要对直觉保持高度警惕,有些直觉可能会让我们的思维走进歧途,陷入解题误区.

4.2 解题直觉具有渊源性

直觉既不是从天而降,也不是无水之源、无本之木,它往往降临在那些具有广博的学科经验并且对知识奥妙执着追求的人身上.我们只有不断向外界学习、交流、吸取新信息,多做积累,并善于总结、概括和提炼,才能在问题解决的困顿中迸发出解题灵感.除此之外,还需要我们拥有耐心、恒心和韧

性,坚持不懈地从做中学,从学中做,由此当我们的认知结构一旦被激活,也就容易产生直觉了.当然我们讨论解题直觉,也不能不提到具体情境.正像哈密顿“四元数”故事发生在爱尔兰一座小桥上一样,解题直觉的产生与一定的情境相关联,我们拼命找寻的解答,有可能在不知不觉中的某个场景或某个状态下灵光闪现——解题的直觉来了.

4.3 解题直觉具有层次性

根据解题过程中思维形式的难易,以及思维形式在人的思维习惯中出现的次序,解题直觉有经验型和思辨型之分.经验型从对问题的观察、实验、类比、归纳中萌发,基本都是对过往熟悉的知识、方法或解题策略的迁移,而思辨型直觉是指在运动变化、对立统一等哲学观念的基础上,通过对问题的深层次分析、探究与辨析后形成,比如对称性、整体性等美学思想,向量法、代数化等解析几何思想,它们高于经验型直觉层次,交织着半逻辑性推演,因而有时更加严谨,更为适用,但也并非无懈可击.

总之,面对较为综合、复杂的问题时,直觉指引不失为获得问题解法的一条有效通道.当然,我们还应注意到,随着解题计划的实施,原先的直觉可能需要调整和不断完善或改变.正如杨振宁教授所说,“直觉不断被修正的过程就是自我提升的过程”,直觉会带领我们把解题走向深入,带领我们把解题进行到底,带领我们走向解题更新的领域.

参考文献

[1]段志贵.数学解题研究——数学方法论的视角[M].北京:清华大学出版社,2018.

[2]史保怀.直觉思维在解题中的运用[J].中学数学教学参考,2000(5).

[3]樊恺.解决数学问题中的直觉[J].中学数学,1998(3):1-3.

[4]段志贵.基于认知心理分析的数学直觉思维探究[J].数学学习与研究,2011(22):100-101.

[5]许钦彪.谈数学直觉对数学学习的意义和作用[J].数学教学,2013(11):13-15.

[6]赵士元.直觉、严谨、联想——数学解题三大法宝[J].数学通报,2014,53(10):42-45.

例谈模型在解 2020 年高考试题中的应用*

西华大学理学院　(610039)　郭　洪

内江师范学院数学与信息科学学院　(641100)　刘成龙　程　双

李尚志教授指出:能够用现成公式加以变通解决不现成的问题,就是数学核心素养中的“数学建模”.具体来讲,数学建模素养是指由数学方法构建模型解决现实问题内涵的素养.数学模型作为用数学语言表达现实问题内涵的“平台”,它是将具体的数学关系抽象出来反应特定问题或事物系统的数学关系或结构.[1]实践表明,数学模型可以提升数学问题解决效率,减轻学生思维负荷,这与“多一点想,少一点算”的命题理念不谋而合.基于此,本文以 2020 年高考试题为例,谈谈模型的应用.

模型 1　极化恒等式模型[1]

在 $\triangle ABC$ 中,若点 D 为边 BC 的中点,则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2$.

例 1　(2020 年天津卷第 15 题)在四边形 $ABCD$ 中,$\angle B=60°$,$AB=3$,$BC=6$,且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}$,若 M,N 是线段 BC 上的动点,且 $|\overrightarrow{MN}|=1$,则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为________.

解析:取 MN 的中点 G,连接 DG,由极化恒等式 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=|\overrightarrow{DG}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{MN}|^2$,故当 $\overrightarrow{DG}\perp\overrightarrow{BC}$ 时,$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 取得最小值为 6.5.

模型 2　焦点弦模型

若直线 $y=k(x-\frac{p}{2})$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 交于 $A(x_A,y_A)$ 和 $B(x_B,y_B)$ 两点,则 $(y_A+y_B)k=2p$.

证明:联立 $y=k(x-\frac{p}{2})$ 与 $y^2=2px(p>0)$ 得 $k^2x^2-(k^2p+2p)x+\frac{p^2k^2}{4}=0$,于是 $x_A+x_B=\frac{k^2p+2p}{k^2}$,$x_A\cdot x_B=\frac{p^2}{4}$,故 $y_A+y_B=k[(x_A-\frac{p}{2})+(x_B$

* 内江师范学院本科生教学研究能力培养模式探索与实践(编号:YLZY201902).刘成龙系本文通讯作者.