Etape 3

vendredi 6 juin 2025 16:24

Objectif

Résoudre analytiquement l'équation de Schrodinger indépendante du temps dans le cas d'un puits de potentiel rectangulaire fini situé sur $[0,a]$, afin de determiner le coefficient de transmission T en fonction des paramètres a, V_0, E

Modèle

Le potentiel est défini par

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

On considère une particule incidente depuis la gauche avec une énergie $E>0$ L'équation de Schrodinger indépendante du temps est

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

Conditions de continuité

On impose la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée à $x=0$ et $x=a$

- À $x=0$

(1) $A+B = C+D$
(2) $ik(A-B) = iq(C-D)$

- À $x=a$

(3) $Ce^{iqa} + De^{-iqa} = Ee^{ika}$
(4) $iq(Ce^{iqa} - De^{-iqa}) = ikEe^{ika}$

Résolution algébrique détaillée

combinaison des equations à $x=0$

- $(1) \times k \Rightarrow k(A+B) = k(C+D)$ (5)

- $(5)+(2) \Rightarrow k(A+B) + ik(A-B) = k(C+D) + iq(C-D)$
$\Rightarrow 2kA = C(k+q) + D(k-q)$
$\Rightarrow A = \dfrac{C(k+q) + D(k-q)}{2k}$

- $(5)-(2) \Rightarrow k(A+B) - ik(A-B) = k(C+D) - iq(C-D)$
$\Rightarrow 2kB = C(k-q) + D(k+q)$
$\Rightarrow B = \dfrac{C(k-q) + D(k+q)}{2k}$

Combinaison des équations à $x=a$

- $(3)\times q \Rightarrow q(Ce^{iqa}+De^{-iqa}) = qEe^{ika}$ (6)
- $(6)+(4) \Rightarrow 2qCe^{iqa} = (q+k)Ee^{ika}$

$$\Rightarrow C = \frac{(k+q)}{2q}Ee^{ia(k-q)}$$

- $(6)-(4) \Rightarrow 2qDe^{-iqa} = (q-k)Ee^{ika}$

$$\Rightarrow D = \frac{(q-k)}{2q}Ee^{ia(k+q)}$$

<u>expression de A.</u>

On remplace C et D dans l'expression obtenue précédement pour A

$$A = \frac{C(k+q)+D(k-q)}{2k}$$

Avec

$$C = \frac{k+q}{2q}Ee^{i(k-q)a}, \qquad D = \frac{q-k}{2q}Ee^{i(k+q)a}$$

On calcule

$$A = \frac{1}{2k}\left[\frac{(k+q)^2}{2}Ee^{i(k-q)a} + \frac{(k-q)^2}{2q}Ee^{i(k+q)a}\right]$$

$$A = \frac{E}{4kq}\left[(k+q)^2e^{i(k-q)a} + (k-q)^2e^{i(k+q)a}\right]$$

<u>simplification en cos et sin</u>

On factorise Ee^{ika}

$$A = \frac{Ee^{ika}}{4kq}\left[(k+q)^2e^{-iqa} + (k-q)^2e^{iqa}\right]$$

Utilisation de l'identité d'Euler

$$e^{-iqa}+e^{iqa} = 2\cos(aq), \quad e^{-iqa}-e^{iqa} = -2i\sin(aq)$$

On obtient

$$A = Ee^{ika}\left[\cos(aq) - i\sin(aq)\left(\frac{k^2+q^2}{2kq}\right)\right]$$

<u>Coefficient de transmission</u>

$$T = \left|\frac{E}{A}\right|^2 = \frac{1}{|A|^2}$$

$$T = \frac{1}{\cos^2(aq) + \sin^2(aq)\left(\frac{k^2+q^2}{2kq}\right)^2}$$