

概率论与数理统计

核心公式整理

——完整版复习讲义——

整理者: Duckweed-yhb

个人博客: <https://duckweed-yhb.github.io/>

GitHub: <https://github.com/Duckweed-yhb>

联系邮箱: 3071974740@qq.com

日期: 2026 年 2 月 23 日

目录

1	随机事件与概率	1
1.1	条件概率与独立性	1
2	随机变量及其分布	1
2.1	七种常用分布表	1
2.2	分布函数与概率密度	2
2.3	正态分布	2
3	多维随机变量及其分布	2
3.1	联合分布函数	3
3.2	边缘分布	3
3.3	独立性	4
3.4	二维随机变量函数的分布	4
4	随机变量的数字特征与极限定理	5
4.1	数学期望	5
4.2	方差	5
4.3	协方差与相关系数	6
4.4	矩	6
4.5	大数定律与中心极限定理	7
5	数理统计的基本概念	7
5.1	常用抽样分布	7
5.2	样本均值与方差的分布	8
6	参数估计	8
6.1	点估计	8
6.2	估计量的评价标准	9
6.3	区间估计	9
7	拓展：伽马函数	9
8	例题索引	10

1 随机事件与概率

1.1 条件概率与独立性

定理 1.1 (泊松逼近定理): 如果 $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ 使得 $np = \lambda$ 保持为正常数, 则

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

对 $k = 0, 1, 2, \dots$ 一致地成立。

符号说明: C_n^k : 组合数; p : 单次试验成功概率; λ : 泊松分布参数; e : 自然常数。

2 随机变量及其分布

2.1 七种常用分布表

注: 将图片命名为“七种常用分布表.jpg”放在同目录下

分布	分布列或概率密度	数学期望	方差
0—1 分布 $B(1, p)$	$P(X=k) = p^k q^{1-k} (k=0, 1),$ $0 < p < 1, p+q = 1.$	p	pq
二项分布 $B(n, p)$	$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} (k=0, 1, \cdots, n),$ $0 < p < 1, p+q = 1.$	np	npq
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} (k=0, 1, 2, \cdots),$ $\lambda > 0.$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$P(X=k) = q^{k-1} p (k=1, 2, \cdots),$ $0 < p < 1, p+q = 1.$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
均匀分布 $U[a, b]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ $\lambda > 0.$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$ $-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0.$	μ	σ^2

2.2 分布函数与概率密度

定义 2.1 (分布函数): 设 X 为随机变量, 称 $F(x) = P(X \leq x)$ 为 X 的分布函数 (x 为任意实数)。

符号说明: $F(x)$: 分布函数; $P(\cdot)$: 概率运算符。

定义 2.2 (概率密度): 设 $F(x)$ 是 X 的分布函数, 若存在非负函数 $f(x)$ 使得

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

则称 X 为连续型随机变量, $f(x)$ 为其概率密度。

符号说明: $f(x)$: 概率密度; dt : 微分符号。

2.3 正态分布

定义 2.3 (标准正态分布): 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中 $\mu = 0, \sigma = 1$ 时为标准正态分布 $N(0, 1)$, 其概率密度与分布函数:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty) \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (-\infty < x < +\infty)\end{aligned}$$

符号说明: $\varphi(x)$: 标准正态 PDF; $\Phi(x)$: 标准正态 CDF; π : 圆周率。

性质 2.1 (标准正态分布的对称性): $\varphi(x)$ 是偶函数, 满足:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

性质 2.2 (一般正态分布的标准化): 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, 区间概率:

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) \quad (x_1 < x_2)$$

符号说明: μ : 均值; σ : 标准差; $F(x)$: 一般正态 CDF。

定理 2.1 (随机变量函数的概率密度): 设 X 为连续型随机变量, 概率密度 $f(x)$, $Y = g(X)$ 。若 $g(x)$ 逐段严格单调, 反函数 $h_i(y)$ 且导数连续, 则

$$f_Y(y) = \sum_i f(h_i(y)) |h'_i(y)|$$

(无意义的 y 处, $f_Y(y) = 0$)

符号说明: $f_Y(y)$: Y 的概率密度; $h'_i(y)$: 反函数导数; $|\cdot|$: 绝对值。

3 多维随机变量及其分布

3.1 联合分布函数

定义 3.1 (二维联合分布函数): 设 (X, Y) 为二维随机变量, x, y 为任意实数, 称

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

为 (X, Y) 的联合分布函数。

符号说明: $F(x, y)$: 二维联合分布函数。

性质 3.1 (联合分布函数的基本性质): 1. 有界性: $0 \leq F(x, y) \leq 1$;

2. 单调不减性: $x_1 < x_2 \implies F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$, $y_1 < y_2 \implies F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$;

3. 极限性质: $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$;

4. 右连续性: $F(x, y) = F(x^+, y) = F(x, y^+)$;

5. 非负性: $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ 时, $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$ 。

3.2 边缘分布

定义 3.2 (边缘分布函数): 设 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则:

- X 的边缘分布函数: $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$;
- Y 的边缘分布函数: $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$ 。

符号说明: $F_X(x)$: X 边缘 CDF; $F_Y(y)$: Y 边缘 CDF; \lim : 极限运算符。

定义 3.3 (二维离散型随机变量的联合分布列): 设 (X, Y) 所有可能取值为 (x_i, y_j) ($i, j = 1, 2, \dots$), 记

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

为联合分布列, 满足: 非负性 $p_{ij} \geq 0$; 规范性 $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$; 边缘分布列 $p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}, p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$ 。

符号说明: p_{ij} : 联合概率; $p_{i\cdot}/p_{\cdot j}$: 边缘概率; \sum : 求和运算符。

定义 3.4 (二维连续型随机变量的联合概率密度): 设 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 若存在非负函数 $f(x, y)$ 使得

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

则称 $f(x, y)$ 为联合概率密度, 边缘概率密度:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

符号说明: $f(x, y)$: 二维联合 PDF; $f_X(x)/f_Y(y)$: 边缘 PDF。

3.3 独 立 性

定义 3.5 (随机变量的独立性): 若对任意实数 x, y , 有 $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, 则称 X 与 Y 相互独立 (记为 $X \perp Y$)。

符号说明: \perp : 独立符号。

性质 3.2 (独立性的充要条件):

- 连续型: $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$;
- 离散型: $p_{ij} = p_{i.}p_{.j} (\forall i, j)$ 。

3.4 二 维 随 机 变 量 函 数 的 分 布

性质 3.3 (和的分布 (卷积公式)): 若 $X \perp Y$, 概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$, 则 $Z = X + Y$ 的概率密度:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y) dy$$

符号说明: $f_Z(z)$: $Z = X + Y$ 的概率密度。

性质 3.4 ($\max\{X, Y\}$ 与 $\min\{X, Y\}$ 分布 (独立情形)): 设 X 与 Y 相互独立, 边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$:

1. 最大值 $M = \max\{X, Y\}$ 分布函数:

$$F_M(m) = F_X(m) \cdot F_Y(m)$$

连续型概率密度:

$$f_M(m) = f_X(m) \cdot F_Y(m) + F_X(m) \cdot f_Y(m)$$

2. 最小值 $N = \min\{X, Y\}$ 分布函数:

$$F_N(n) = 1 - [1 - F_X(n)] \cdot [1 - F_Y(n)]$$

连续型概率密度:

$$f_N(n) = f_X(n) \cdot [1 - F_Y(n)] + [1 - F_X(n)] \cdot f_Y(n)$$

符号说明: $\max\{X, Y\}$: 最大值; $\min\{X, Y\}$: 最小值; $f_M(m)/f_N(n)$: 对应 PDF。

例 3.1 (\max/\min 分布计算示例): 设 X, Y 独立同分布于 $U(0, 1)$, 则:

$$\bullet F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

• $M = \max\{X, Y\}$ 的分布函数 (CDF):

$$F_M(m) = \begin{cases} 0, & m < 0 \\ m^2, & 0 \leq m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}$$

- $N = \min \{X, Y\}$ 的分布函数 (CDF):

$$F_N(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1 - (1 - n)^2, & 0 \leq n \leq 1 \\ 1, & n > 1 \end{cases}$$

定义 3.6 (瑞利分布): 设 X 服从参数为 $\sigma > 0$ 的瑞利分布, 则:

- PDF: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$
- CDF: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$

符号说明: σ : 瑞利分布参数; PDF: 概率密度; CDF: 分布函数。

4 随机变量的数字特征与极限定理

4.1 数 学 期 望

定义 4.1 (数学期望):

- 离散型: $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ (条件 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$);
- 连续型: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ (条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty$).

符号说明: $E(X)$: 数学期望; $|x|$: 绝对值。

性质 4.1 (数学期望的性质): 设 C 为常数, X, X_1, \dots, X_n 为随机变量:

1. $E(C) = C$;
2. $E(CX) = CE(X)$;
3. 线性性: $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$ (无需独立);
4. 独立乘积: 若 X_1, \dots, X_n 独立, 则 $E(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$ 。

符号说明: \prod : 乘积运算符。

4.2 方 差

定义 4.2 (方差):

$$\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

标准差: $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$ 。

符号说明: $\text{Var}(X)$: 方差; σ_X : 标准差; $\sqrt{\cdot}$: 平方根。

性质 4.2 (方差的性质): 设 C 为常数, X, Y, X_1, \dots, X_n 为随机变量:

1. $\text{Var}(C) = 0$;
2. $\text{Var}(CX) = C^2\text{Var}(X)$;
3. 独立和: 若 X_1, \dots, X_n 独立, 则 $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$;
4. $\text{Var}(XY) = \text{Var}(X)\text{Var}(Y) + \text{Var}(X)[E(Y)]^2 + \text{Var}(Y)[E(X)]^2$ ($X \perp\!\!\!\perp Y$);
5. $\text{Var}(X) = 0 \iff P(X = E(X)) = 1$ 。

符号说明: \iff : 充要条件。

4.3 协 方 差 与 相 关 系 数

定义 4.3 (协方差):

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

符号说明: $\text{Cov}(X, Y)$: 协方差。

性质 4.3 (协方差的性质): 1. 对称性: $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$;

2. 数乘: $\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(X, Y)$;

3. 可加性: $\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$ 。

定义 4.4 (相关系数):

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$$

若 $\rho_{XY} = 0$, 称 X 与 Y 不相关。

符号说明: ρ_{XY} : 相关系数; 不相关: 线性相关性为 0。

性质 4.4 (相关系数的性质): 1. 有界性: $|\rho_{XY}| \leq 1$;

2. $|\rho_{XY}| = 1 \iff P(Y = a + bX) = 1$ (线性相关);

3. 不相关等价: $\text{Cov}(X, Y) = 0 \iff \text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \iff E(XY) = E(X)E(Y)$ 。

4.4 矩

定义 4.5 (矩的定义): 1. 单个随机变量的矩:

- k 阶原点矩: $\alpha_k = E(X^k)$;
- k 阶中心矩: $\beta_k = E\{[X - E(X)]^k\}$;

2. 两个随机变量的混合矩:

- $k + l$ 阶混合原点矩: $\alpha_{k,l} = E(X^k Y^l)$;
- $k + l$ 阶混合中心矩: $\beta_{k,l} = E\{[X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^l\}$ 。

符号说明: k, l : 矩的阶数 (正整数)。

4.5 大数定律与中心极限定理

定理 4.1 (切比雪夫不等式): 对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$P[|X - E(X)| \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

符号说明: ε : 误差界; ε^2 : 平方。

定理 4.2 (伯努利大数定律): 设 Y_n 为 n 重伯努利试验成功次数, 成功概率 p , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Y_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

符号说明: Y_n : 成功次数; n : 试验次数; \lim : 极限。

定理 4.3 (辛钦大数定律): 若 X_1, X_2, \dots 独立同分布, $E(X_i) = \mu$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

符号说明: μ : 共同均值; $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$: 样本均值。

定理 4.4 (独立同分布中心极限定理): 若 X_1, X_2, \dots 独立同分布, $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right) \leq x\right) = \Phi(x)$$

定理 4.5 (棣莫弗-拉普拉斯定理): 设 $Y_n \sim B(n, p)$, $q = 1 - p$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) = \Phi(x)$$

符号说明: $B(n, p)$: 二项分布; q : 失败概率; \sqrt{npq} : 二项分布标准差。

5 数理统计的基本概念

5.1 常用抽样分布

定义 5.1 (χ^2 分布): 若 $X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp N(0, 1)$, 则 $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$ (自由度 n), 满足:

1. 可加性: $X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$ 独立, 则 $X + Y \sim \chi^2(m + n)$;
2. 期望: $E[Y] = n$; 方差: $\text{Var}(Y) = 2n$ 。

符号说明: $\chi^2(n)$: 卡方分布; 自由度: 独立随机变量个数。

性质 5.1 ($\chi^2(k)$ 分布的期望与方差): 自由度为 k 的 χ^2 分布: $E[Y] = k$, $\text{Var}(Y) = 2k$ 。例如 $Y \sim \chi^2(8)$: $E[Y] = 8$, $\text{Var}(Y) = 16$, 由 $E[Y^2] = \text{Var}(Y) + (E[Y])^2$ 得 $E[Y^2] = 80$ 。

定义 5.2 (t 分布): 若 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ 且独立, 则

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

符号说明: $t(n)$: t 分布; $\sqrt{Y/n}$: 平方根。

定义 5.3 (F 分布): 若 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$ 且独立, 则

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$$

符号说明: $F(n_1, n_2)$: F 分布; n_1/n_2 : 自由度。

5.2 样本均值与方差的分布

性质 5.2 (正态总体的样本均值分布): 若 $X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

符号说明: \bar{X} : 样本均值; σ^2/n : 样本均值方差。

性质 5.3 (样本方差的分布): 若 $X_1, \dots, X_n \perp\!\!\!\perp N(\mu, \sigma^2)$, 则 \bar{X} 与 S^2 独立, 且

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S} \sim t(n-1)$$

符号说明: S^2 : 样本方差; $n-1$: 自由度。

性质 5.4 (两正态总体的抽样分布): 设 $X_1, \dots, X_{n_1} \perp\!\!\!\perp N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y_1, \dots, Y_{n_2} \perp\!\!\!\perp N(\mu_2, \sigma^2)$, 两组样本独立, 则

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中合并标准差: $S_w = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$ 。若方差未知且不相等, 则 $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$ 。

符号说明: S_w : 合并标准差; S_1^2/S_2^2 : 样本方差。

6 参数估计

6.1 点估计

定义 6.1 (矩估计法): 用样本矩替代总体矩求解未知参数:

1. 样本 k 阶原点矩: $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$;

2. 步骤：总体矩 $\alpha_k = q_k(\theta_1, \dots, \theta_m) \implies$ 解出 $\theta_j = h_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \implies$ 替换为 $\hat{\theta}_j = h_j(A_1, \dots, A_m)$ 。

符号说明： A_k ：样本矩； α_k ：总体矩； $\hat{\theta}_j$ ：矩估计量。

定义 6.2 (最大似然估计)： 1. 似然函数：

连续型： $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$,

离散型： $L(\theta) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i; \theta)$;

2. 对数似然：

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta)$$

3. 求解：令 $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = 0$ ，解得 $\hat{\theta}$ 。

符号说明： $L(\theta)$ ：似然函数； \ln ：自然对数； ∂ ：偏导数； $\hat{\theta}$ ：最大似然估计量。

6.2 估计量的评价标准

定义 6.3 (无偏性)：若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

符号说明：无偏：估计量均值等于真实参数。

6.3 区间估计

定义 6.4 (置信区间)：对未知参数 θ ，若 $P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$ ，则 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信水平 $1 - \alpha$ 的置信区间。

符号说明： $1 - \alpha$ ：置信水平； α ：显著性水平。

性质 6.1 (单个正态总体的置信区间)： 1. σ^2 已知， μ 的置信区间： $\left(\bar{x} - u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$;

2. σ^2 未知， μ 的置信区间： $\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$;

3. σ^2 的置信区间： $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$ 。

符号说明： $u_{\alpha/2}$ ：标准正态分位数； $t_{\alpha/2}(n-1)$ ：t 分布分位数； $\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ ：卡方分布分位数。

7 拓展：伽马函数

定义 7.1 (伽马函数)：对 $\alpha > 0$ ，定义 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ ，核心性质：

1. 递推公式： $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$;

2. 特殊值： $\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(n+1) = n!$;

3. 应用：伽马分布 $Ga(\alpha, \beta)$ 含 $\Gamma(\alpha)$ ， $\chi^2(n) \sim Ga\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 。

符号说明： $\Gamma(\alpha)$ ：伽马函数； $n!$ ：阶乘； $Ga(\alpha, \beta)$ ：伽马分布。

8 例题索引

概率论综合训练

第三章：5, 14, 16, 19, 21, 23, 27, 31

第六章：7, 8, 9

第四章：2, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 18, 22, 26, 29

第七章：9

第五章：3, 4, 7, 8, 14, 21, 23, 26, 31, 34, 35