

Laboratório 3 – Bolinha Refletida

Seja Q um quadrado com os seguintes vértices: (a, b), (c, d), (e, f) e (g, h). Para transforma-lo em um paralelogramo, basta aplicar a matriz de cisalhamento nesses vértices:

$$T(x, y) = (x + \lambda y, y) \text{ ou } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + \lambda y \\ y \end{bmatrix}$$

Obtemos os seguintes vértices:

$$\begin{aligned} v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} a + \lambda b \\ b \end{bmatrix} & v_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} c + \lambda d \\ d \end{bmatrix} \\ v_3 = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} e + \lambda f \\ f \end{bmatrix} & v_4 = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} g + \lambda h \\ h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo a matriz do quadrado Q será:

$$Q = \begin{bmatrix} a + \lambda b & b \\ c + \lambda d & d \\ e + \lambda f & f \\ g + \lambda h & h \end{bmatrix}$$

Agora, para que a bolinha respeite esse novo domínio, é necessário fazer uma verificação. Para verificar se a bolinha encosta nas arestas do paralelogramo, é calculado a distancia perpendicular entre a bolinha e cada aresta. Para cada aresta é realizado os seguintes passos:

Observação: Com intuito de apenas exemplificar os cálculos realizados, abaixo só consta os cálculos feitos para a aresta dos vértices 1 e 2. Os cálculos foram feitos para as demais arestas.

1. Calcular o vetor da aresta (v_a)

$$v_1 = \begin{bmatrix} a + \lambda b \\ b \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} c + \lambda d \\ d \end{bmatrix}$$

$$v_a = \begin{bmatrix} x_{v_2} - x_{v_1} \\ y_{v_2} - y_{v_1} \end{bmatrix}$$

$$v_a = \begin{bmatrix} c + \lambda d - a - \lambda b \\ d - b \end{bmatrix}$$

2. Normalizar o vetor da aresta (u)

$$v_a = \begin{bmatrix} c + \lambda d - a - \lambda b \\ d - b \end{bmatrix}$$

$$\text{comprimento} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$comprimento = \sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}$$

$$u = \left[\frac{\frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}}}{\frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}}} \right]$$

3. Calcular o vetor perpendicular (v_p)

$$v_p = \left[\begin{array}{c} -\frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \\ \frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \end{array} \right]$$

4. Calcular o vetor da bolinha em relação ao primeiro vértice da aresta (v_b)

$$v_a = \left[\begin{array}{c} c + \lambda d - a - \lambda b \\ d - b \end{array} \right] \quad c_b = \left[\begin{array}{c} x_b \\ y_b \end{array} \right]$$

$$v_b = \left[\begin{array}{c} x_b - (c + \lambda d - a - \lambda b) \\ y_b - (d - b) \end{array} \right]$$

$$v_b = \left[\begin{array}{c} x_b - c - \lambda d + a + \lambda b \\ y_b - d + b \end{array} \right]$$

5. Calcular a distância perpendicular (d_p)

$$v_b = \left[\begin{array}{c} x_b - c - \lambda d + a + \lambda b \\ y_b - d + b \end{array} \right] \quad v_p = \left[\begin{array}{c} -\frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \\ \frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \end{array} \right]$$

$$d_p = (x_b - c - \lambda d + a + \lambda b) \times -\frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} + (y_b - d + b) \times \frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}}$$

6. Calcular a distância paralela (d_{p_a})

$$d_{p_a} = (x_b - c - \lambda d + a + \lambda b) \times \frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} + (y_b - d + b) \times \frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}}$$

$$v_b = \begin{bmatrix} x_b - c - \lambda d + a + \lambda b \\ y_b - d + b \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \\ \frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \end{bmatrix}$$

Se a distância paralela for maior que 0 e o comprimento da aresta, e a distância perpendicular estiver dentro de uma tolerância, a bolinha está encostando na aresta e sua velocidade é refletida.

Para refletir a bolinha ao colidir com uma aresta, foi feito o seguinte:

1. Para calcular o vetor de reflexão (v_r), foi o produto escalar entre a velocidade da bolinha e o vetor perpendicular foi multiplicado por 2 e pelo vetor perpendicular.

$$velocidade = (v_x, v_y) \quad v_p = \begin{bmatrix} -\frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \\ \frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \end{bmatrix}$$

$$R = 2 \times (v_x \times -\frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}}) + v_y \times \frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}}$$

$$v_r = R \times v_p$$

$$v_r = 2 \times (v_x \times -\frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}}) + v_y \times \frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \times \begin{bmatrix} -\frac{d - b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \\ \frac{c + \lambda d - a - \lambda b}{\sqrt{(c + \lambda d - a - \lambda b)^2 + (d - b)^2}} \end{bmatrix}$$

2. Para achar a velocidade refletida foi subtraído o vetor de reflexão da velocidade da bolinha.

$$v_r = (v_{r_x}, v_{r_y}) \quad velocidade = (v_x, v_y)$$

$$velocidade_{refletida} = (v_x - v_{r_x}, v_y - v_{r_y})$$

