

ÉCOLE INTERNATIONALE DES SCIENCES
DU TRAITEMENT DE L'INFORMATION

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Résolution numérique d'équations différentielles



Bara DIOUKHANE
Quentin DUCASSE

Semestre 2
Promotion 2022

Table des matières

1	Description des méthodes de résolutions d'équation différentielle	3
1.1	Schéma d'Euler	3
1.2	Schéma de Runge-Kutta d'ordre 2	3
1.3	Schéma numérique d'ordre supérieur	3
2	Résolution de diverses équations différentielles	4
2.1	Résolution de l'équation 1	4
2.2	Résolution de l'équation 2	7
3	Problème d'Application : Propagation d'une épidémie	11
3.1	Résolution du système lorsque $\beta = 0.5$ et $\lambda = 10$ avec la méthode de Euler	11
3.2	Analyse de l'évolution des fonctions selon les valeurs de λ et β	12

Introduction

D'après Wikipédia, en mathématiques, une équation différentielle est une équation dont la ou les inconnues sont des fonctions. Elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. C'est un cas particulier d'équation fonctionnelle. Au travers de ce travail pratique, nous allons étudier la résolution d'équations différentielles. Pour cela, nous analyserons trois méthodes de résolutions : le schéma de Euler, le schéma de Runge-Kutta d'ordre deux et le schéma numérique d'ordre supérieur. Ainsi, Dans un premier temps, nous définirons et présenterons les caractéristiques des fonctions correspondants aux trois méthodes. Dans un second temps, Nous résoudrons plusieurs équations différentielles avec ces trois méthodes puis comparerons leur efficacité. Enfin, dans un dernier temps, nous analyserons la propagation d'une épidémie en modélisant cette propagation par des équations différentielles. Nous en déduirons l'évolution de la population au fil du temps lors de l'épidémie.

1 Description des méthodes de résolutions d'équation différentielle

Le schéma d'euler, le schéma de Runge-Kutta et le schéma numérique d'ordre supérieur sont toutes les trois des méthodes approximatives pour résoudre des équations différentielles.

1.1 Schéma d'Euler

Soit n un entier naturel et f une application de classe C^1 sur $I \times \mathbb{R}^n$. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et t_0 un point intérieur de I . On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Soit t un point intérieur de I tel que $t > t_0$ et $\sigma = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ une subdivision de $[t_0, t]$. On appelle schéma d'Euler explicite sur (2) associé à σ la suite récurrente finie $(y_i)_{0 \leq i \leq N}$ définie par :

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{i+1} = y_i + (t_{i+1} - t_i) \cdot f(t_i, y_i) \forall i \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket \end{cases} \quad (1)$$

1.2 Schéma de Runge-Kutta d'ordre 2

Soit n un entier naturel et f une application de classe C^1 sur $I \times \mathbb{R}^n$. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et t_0 un point intérieur de I . On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Soit t un point intérieur de I tel que $t > t_0$ et $\sigma = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ une subdivision de $[t_0, t]$. On appelle schéma de Runge-Kutta d'ordre deux sur (4) associé à σ la suite récurrente finie $(y_i)_{0 \leq i \leq N}$ définie par :

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0) \\ y_{i+1} = y_i + (t_{i+1} - t_i) \cdot f(t_i + \frac{t_{i+1}-t_i}{2}, y_i + \frac{t_{i+1}-t_i}{2} f(t_i, y_i)) \forall i \in \llbracket 0; N-1 \rrbracket \end{cases} \quad (2)$$

On montre que, à chaque itération, l'erreur d'approximation est de l'ordre de h^2 , $h = (t_{i+1} - t_i)$ étant le pas d'intégration.

1.3 Schéma numérique d'ordre supérieur

La fonction `ode`, prédéfinie dans Scilab permet de résoudre numériquement des équations différentielles ordinaires en proposant divers schémas d'intégration numérique.

2 Résolution de diverses équations différentielles

Pour résoudre une équation différentielle de manière numérique il suffit de représenter la courbe représentative de la solution de l'équation par l'intermédiaire de suites numériques.

2.1 Résolution de l'équation 1

Soit (E_1) l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) = -t^2 y(t) - t^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

Application du schéma d'Euler

On applique le Schéma d'Euler sur l'équation .

Nous avons décidé de tester trois différentes subdivisions pour le paramètre t (défini dans l'introduction) qui sont respectivement 0.1, 0.2, 0.3.

On obtient le résultats suivant :

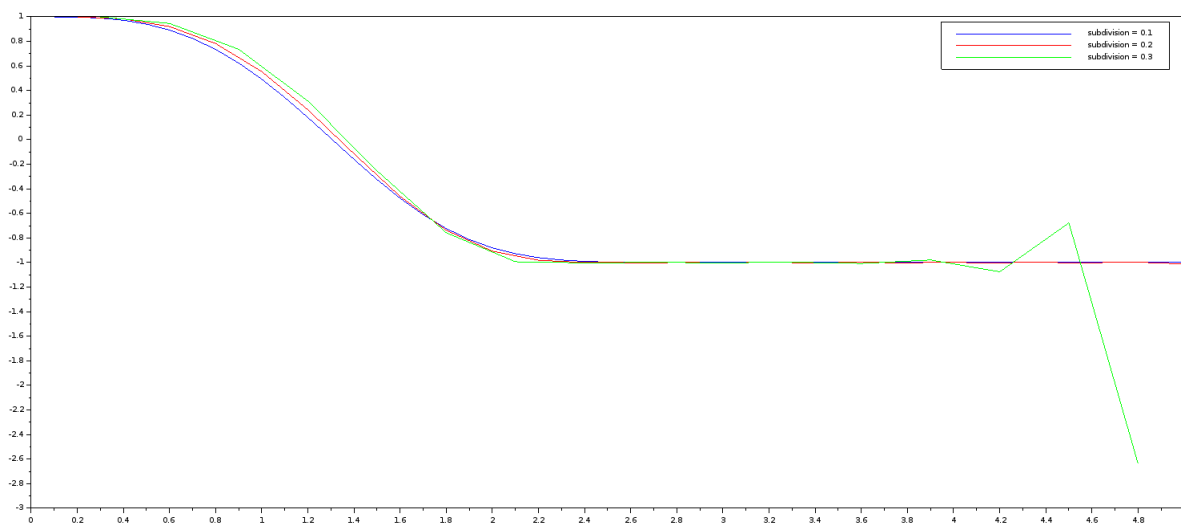


FIGURE 1 – Application du schéma d'Euler sur (E_1) sur l'intervalle $[0,5]$ avec diverses subdivisions

En analysant l'allure des trois courbes selon la subdivision, On remarque que $f(x)$ tend vers -1 lorsque x tend vers l'infini. Quel que soit la valeur de la subdivision sur l'intervalle $[0,5]$, les trois courbes se superposent presque parfaitement (sauf la courbe verte qui diverge en l'infini à cause de certaines imprécisions de cette méthodes numériques).

Application du schéma de Runge-Kutta d'ordre 2

Ensuite, On effectue la même application au Schéma Runge-Kutta d'ordre 2 .

De la même manière nous avons appliqué le schéma de Runge-Kutta pour les 3 même subdivisions que celle du schéma d'Euler vu précédemment. On obtient le résultats suivant :

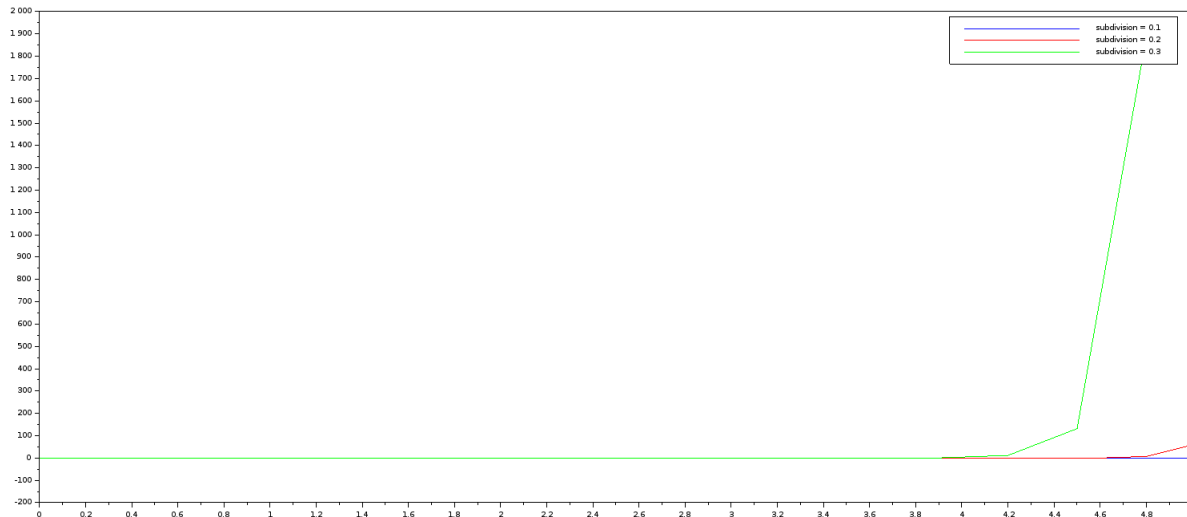


FIGURE 2 – Application du schéma de Runge-Kutta sur (E_1) sur l'intervalle $[0, 5]$ avec diverses subdivisions

On peut remarquer que les fonctions (représentées par les trois courbes) convergent vers -1 lorsque x tend vers l'infini tout comme dans le cas d'Euler. (les courbes sont cependant un peu différentes de celles vues précédemment). On remarque que les écarts entre les courbes sont cependant moins importants que ceux observés avec la méthode d'Euler.

Donc on peut conjecturer, par analyse graphique que cette méthode est légèrement plus précise que celle d'Euler.

Application du schéma numérique d'ordre supérieur

Toujours de la même façon, on applique la fonction 'ode' avec le logiciel Scilab pour déterminer la fonction y .

Avec cette commande, on obtient :

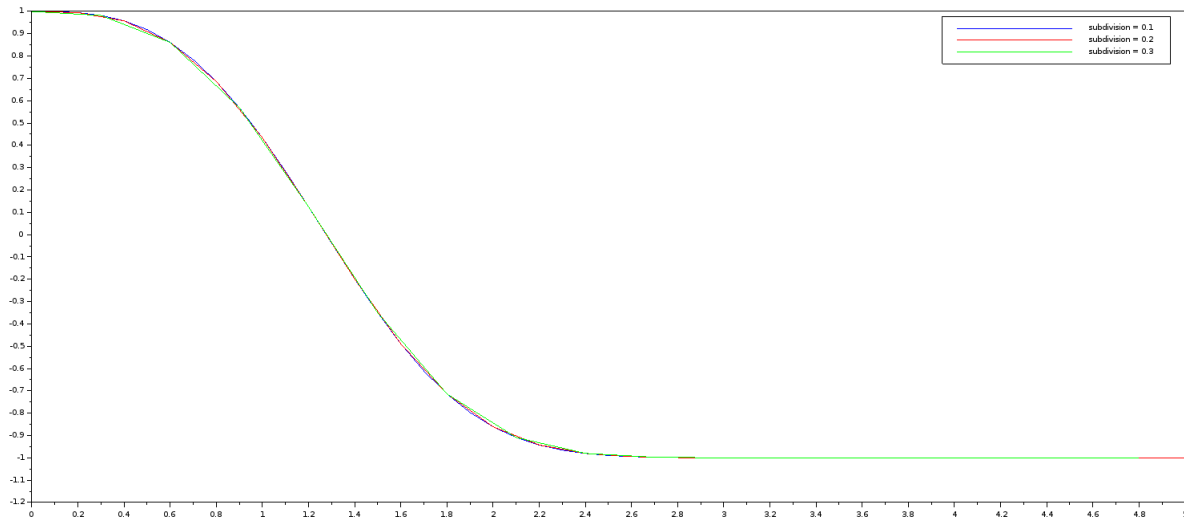


FIGURE 3 – Application du schéma d'ordre supérieur sur (E_1) sur l'intervalle $[0,5]$ avec diverses subdivisions

De même, les 3 fonctions (représentées par les 3 courbes) tendent vers -1 en l'infini. Cependant l'écart entre les 3 courbes est négligeable donc cela signifie que cette méthode est extrêmement précise. Donc cette méthode est la plus précise des 3 méthodes. Il est donc conseillé de l'utiliser en priorité sur Scilab pour résoudre des équations différentielles.

Comparaison des trois méthodes de résolutions d'équations différentielles

On a vu qu'il existe trois principales méthodes numériques pour résoudre des équations différentielles : Le schéma d'Euler, le schéma de Runge-Kutta et le schéma d'ordre supérieur (décrits dans l'introduction) Nous allons appliquer ces trois méthodes sur une même subdivision sur l'intervalle $[0,5]$ pour pouvoir comparer leur précision

Nous avons choisi la subdivision 0.1 de façon arbitraire. On obtient le résultat suivant :

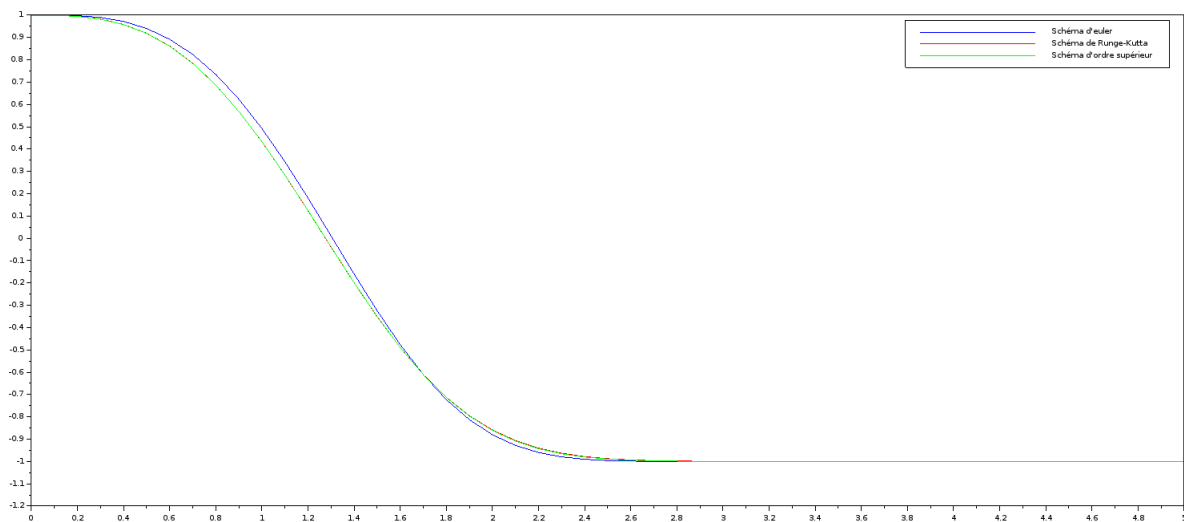


FIGURE 4 – Comparaison des 3 schéma sur l'intervalle $[0,5]$ avec une subdivision de 0.1

On observe que les trois courbes sont fortement semblables et se superposent quasiment. Donc même si ces 3 schémas ne sont pas autant précis les uns que les autres, de manière générale ces méthodes numériques restent d'excellentes alternatives pour résoudre E1.

2.2 Résolution de l'équation 2

Soit (E_2) l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) \frac{1-t^2 y(t)}{t} \\ y(1) = 0.5 \end{cases} \quad (4)$$

Application du schéma d'Euler

De même nous avons décidé d'appliquer le schéma d'Euler avec les 3 mêmes différentes subdivisions qui sont 0.1, 0.2 et 0.3. On obtient les résultats suivants :

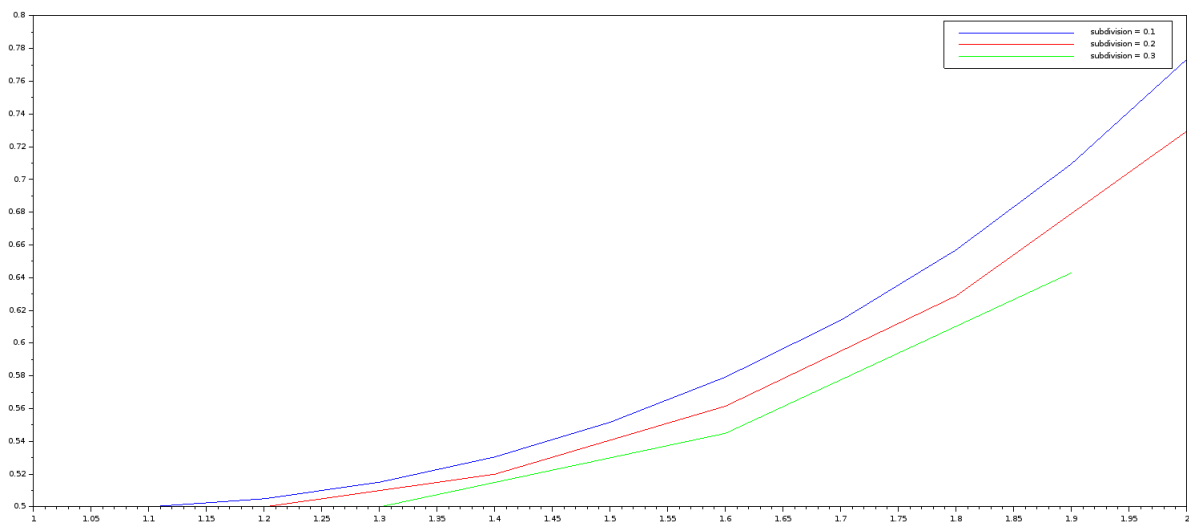


FIGURE 5 – Application du schéma de Euler sur (E_2) sur l'intervalle $[1,2]$ avec diverses subdivisions

Les trois courbes semblent tendre vers l'infini, bien que celle-ci soient assez différentes (elle ne se superposent pas). On remarque que le schéma d'Euler n'est pas une méthode très efficace pour résoudre E_2 .

Application du schéma de Runge-Kutta

Ensuite, on effectue la même application au schéma Runge-Kutta d'ordre 2.

De la même manière, nous avons appliqué le schéma de Runge-Kutta sur E_2 avec toujours les mêmes subdivisions. On obtient les résultats suivants :

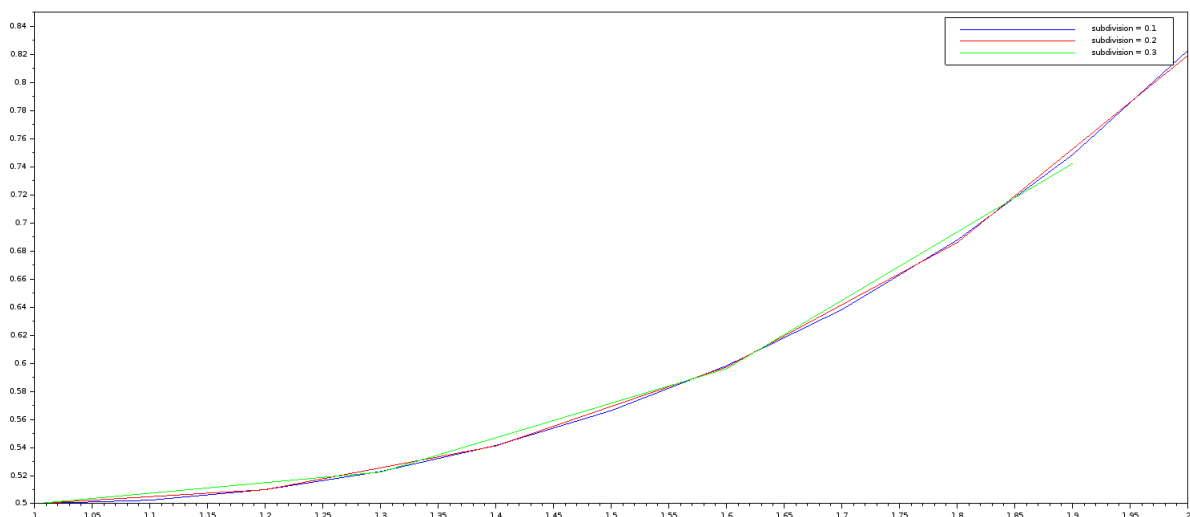


FIGURE 6 – Application du schéma de Runge-Kutta sur (E_2) sur l'intervalle $[1,2]$ avec diverses subdivisions

Tout comme dans le cas de Euler, Les trois fonctions tendent vers l'infini. Cependant, on peut remarquer que les courbes sont beaucoup plus semblables, elles se superposent quasiment contrairement au résultat du schéma d'Euler vu précédemment.

Donc on peut constater que le schéma de Runge-Kutta est beaucoup plus adapté pour résoudre E2 que le schéma d'Euler qui donne des résultats plus imprécis.

Application du schéma numérique d'ordre supérieur

Toujours de la même façon, on applique la fonction ode pour déterminer la fonction y .

On obtient :

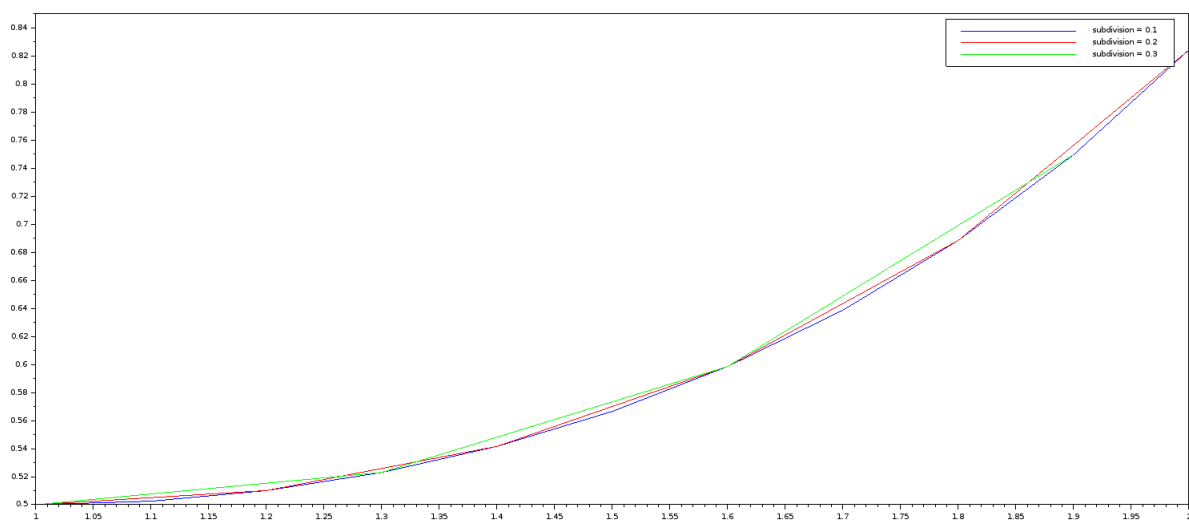


FIGURE 7 – Application du schéma d'ordre supérieur sur (E_1) sur l'intervalle $[0,5]$ avec diverses subdivisions

On remarque (comme pour l'analyse vu précédemment avec le schéma de Runge-Kutta) que cette méthode intégrée dans les fonctionnalités de Scilab est extrêmement précise. Les 3 courbes sont quasiment identiques et se superposent parfaitement. A l'oeil nu il est très difficile d'affirmer laquelle des deux méthodes numériques est la plus précise pour résoudre E2. Cependant en analysant de près les 2 graphiques on remarque que l'écart entre les 3 courbes sur la figure 6 est légèrement inférieur à celui de la figure 7. Donc pour résoudre E2 il est conseillé d'utiliser le schéma de Runge-Kutta.

Comparaison des deux méthodes de résolutions d'équations différentielles

On a réaliser des conjectures précédemment pour comparer les 3 méthodes numériques. Pour confirmer nos suppositions nous allons appliquer ces trois méthodes sur une meme subdivision sur l'intervalle $[1,2]$.

On obtient le résultat suivant :

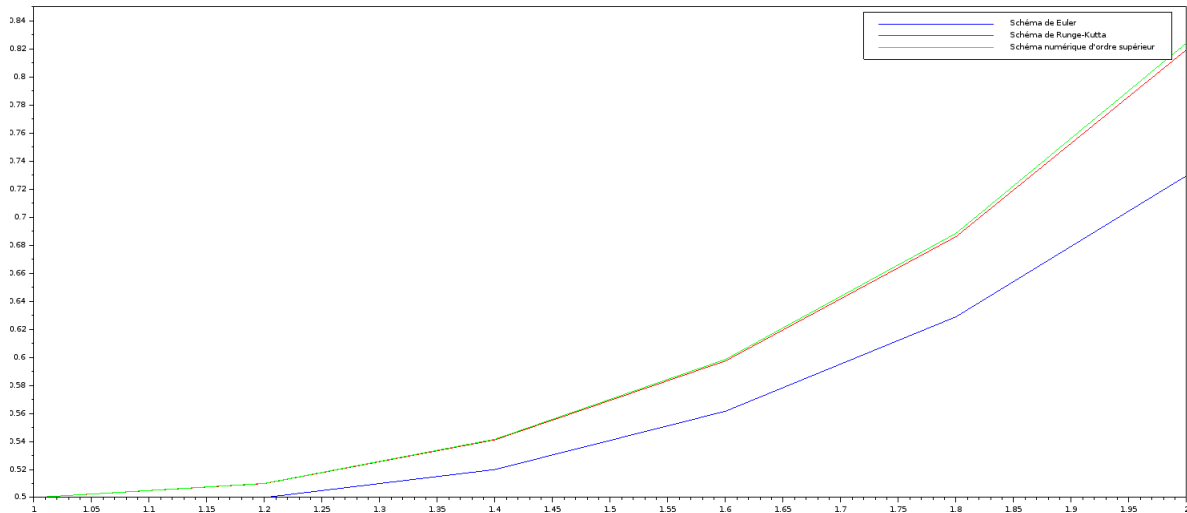


FIGURE 8 – Compraraision des 3 schéma sur l'intervalle $[1,2]$ avec une subdivison de 0.1

On remarque en analysant les fonctions que la méthode de Runge-Kutta et celle d'ordre supérieur sont semblables(ou quasiment). Cependant, on peut voir que fonction solution de E2 calculée grâce à la méthode d'euler croit plus lentement que celles calculées avec les deux autres méthodes . On peut donc constater une moins bonne efficacité de la méthode de Euler pour résoudre E2. La méthode de Runge-Kutta et celle intégrée dans les fonctionnalités de logiciel Scilab sont quasiment identique et sont donc parfaitement adaptées pour résoudre E2 On peut donc confirmer les hypothèses faites précédemment.

3 Problème d'Application : Propagation d'une épidémie

Après avoir analysé les différentes méthodes de résolution d'équation différentielles, nous allons les appliquer au cas d'un problème : celui de la propagation d'une épidémie. A l'aide des méthodes présentés plus haut, nous allons pouvoir simuler l'avancée d'une épidémie au sein d'une population. Nous allons ainsi étudier l'évolution de la population infectée, rétablie et saine selon les paramètres β et λ .

β est la somme entre la probabilité de contact entre une personne infectée et une personne saine et la probabilité que ce contact transmette le virus.

λ est le nombre de jour qu'un infecté met à se rétablir. On considère que le pourcentage de personnes infectées à l'état initial est de 20% (donc $I(0)=0.2$) et que celui de personnes saines est de 80% (donc $S(0)=0.8$). Ainsi il est logique que le nombre de personnes rétablies est nul au début de la simulation (donc $R(0)=0$).

3.1 Résolution du système lorsque $\beta = 0.5$ et $\lambda = 10$ avec la méthode de Euler

Nous avons, tout d'abord, décidé de choisir $\beta = 0.5$ et $\lambda = 10$. C'est à dire qu'en moyenne chaque personne a 50% de chance d'être en contact avec un malade et de transmettre la maladie et qu'il faut une dizaine de jours pour qu'un malade se rétablisse. En simulant l'évolution de la population, on obtient le résultat suivant :

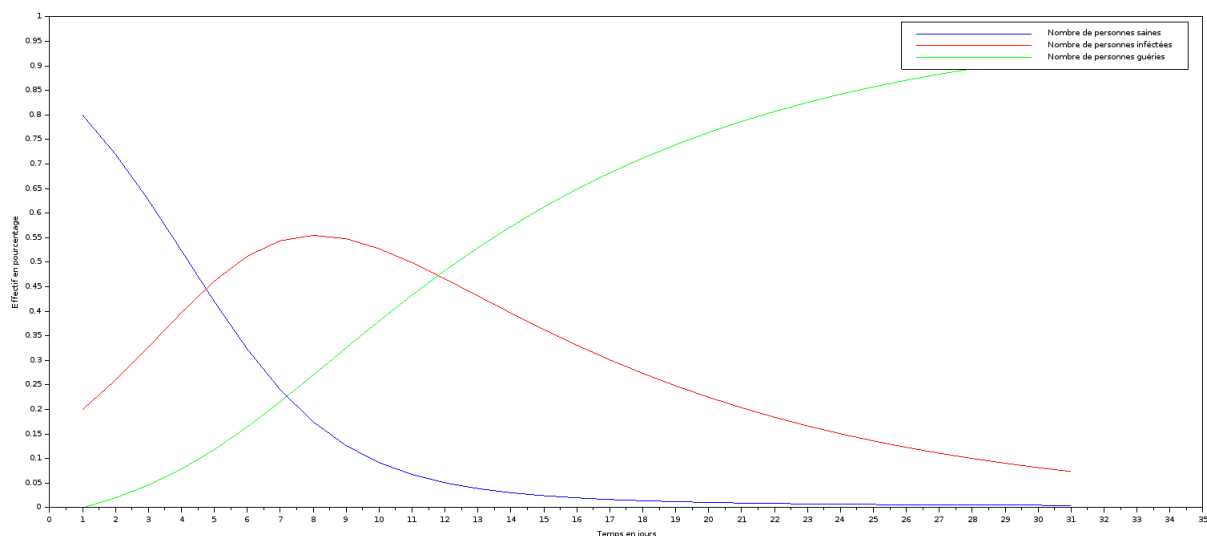


FIGURE 9 – Résolution numérique par la méthode d'Euler explicite du système d'équations différentielles

La fonction I représentative du nombre de personnes infectées en fonction du temps (représentée par la courbe rouge) croît progressivement entre le premier jour du moi et aux alentours du dixième jour. Ainsi, on observe un pic vers le 10^{ème} jour. Puis I décroît pour avoisiner 0.

Au départ le nombre de personne infecté est relativement bas (20% de chance) mais comme il y a 50% de chance de transmettre la maladie le virus se propage rapidement sur les 10 premiers jours.

Après le dixième jour, de nombreux malades guérissent car la durée moyenne de rétablissement est de 10

jours. C'est pourquoi il y a de moins en moins de personnes malades au fil du temps, et le virus disparaît.

La fonction S représentative du nombre de personne saine en fonction du temps (représentée par la courbe bleue) décroît très rapidement. La fonction S est une fonction strictement décroissante. En effet, au départ le nombre de personne saine est très important (80% de chance d'être une personne saine). Puis plus le temps passe plus le nombre de personne saine diminue car il est quasiment impossible de ne pas tomber malade (on rappelle que chaque personne a 50% de tomber malade). C'est pourquoi à la fin du mois aucune personne n'est saine. Ainsi toutes les personnes saines deviennent des personnes malades puis deviennent des personnes rétablies. Ainsi à l'inverse de S , la fonction R représentative du nombre de personne rétablies en fonction du temps (représentée par la courbe verte) est une fonction strictement croissante. Au départ le nombre de personne rétablie est nul car $R(1)=0$. Au fil du temps chaque personne saine devient malade et il vient que chaque malade devient une personne rétablie au bout de 10 jours. Donc au final l'unique population est composée de personnes rétablies à la fin du mois.

3.2 Analyse de l'évolution des fonctions selon les valeurs de λ et β

Pour comparer les fonctions I , S et R selon les valeurs de λ et β , nous allons faire varier une des deux constantes tout en maintenant l'autre constante, puis l'inverse, afin d'observer l'incidence qu'à chacune des constantes sur l'évolution du système.

Variation de λ

En fixant $\beta = 0.5$, Nous allons voir l'évolution du système lorsque l'on fait varier λ par rapport à l'étude effectuée précédemment. Nous avons choisi de tester $\lambda = 25$. On pose S' , R' et I' les nouvelles fonction qui dépendent respectivement du nouveau λ Voici le résultat :

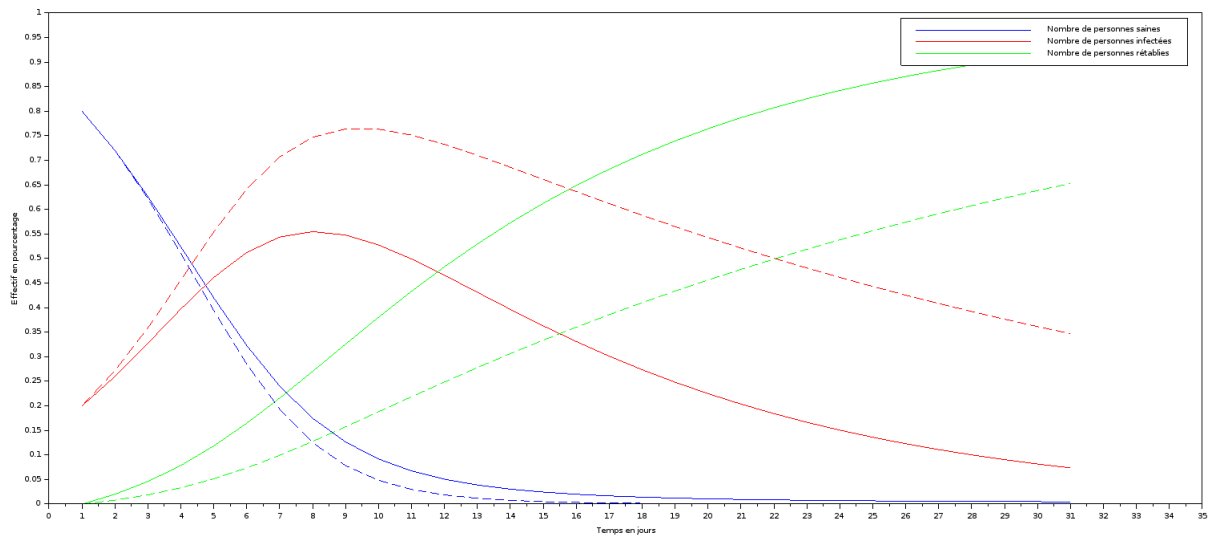


FIGURE 10 – Evolution de l'épidémie avec $\lambda = 25$

(Les fonctions S' , I' , R' sont représentées en pointillés)

En augmentant le nombre de jours durant lesquels l'infécté reste malade, on peut observer que cela entraîne une forte augmentation du nombre d'inféctés au fil du temps. De plus comme $\lambda = 25$ le temps de rétablissement est plus élevé que précédemment donc les personnes malades mettent plus de temps à se rétablir. Ce nombre plus élevé de personnes infectées entraîne plus de contacts avec les personnes saines et augmente les chances que des personnes saines tombent malade. Puis à la fin du mois toutes les personnes malades se rétablissent comme l'étude vue précédemment.

Variation de β

De la même manière, fixons $\lambda = 10$. Nous allons voir l'évolution du système lorsque l'on fait varier β par rapport à l'étude effectuée précédemment. Nous avons choisi de tester $\beta = 0.9$

C'est à dire qu'une personne à 90% de chance de tomber malade. Voici le résultat :

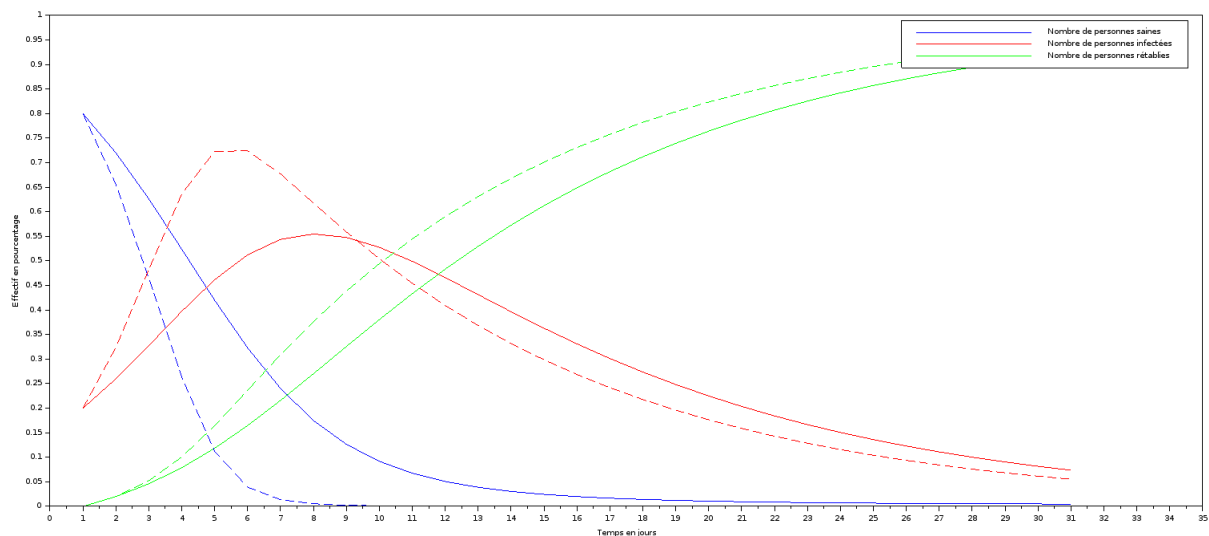


FIGURE 11 – Evolution de l'épidémie avec $\beta = 0.9$

(*en pointillés les fonctions S' , R' et I')

L'augmentation des probabilités qu'une personne rentre en contact avec un infecté et une personne saine facilite la propagation du virus. Le nombre de personne infecté augmente donc très rapidement. Puis au fil du temps les personnes infectées vont se rétablir. Le nombre de personnes infectées et ainsi comme l'étude précédente, le nombre de personne infecté devient nul à la fin du mois.

Conclusion

Il existe deux nombreuses méthodes pour résoudre des équations différentielles. Nous avons pu étudier la méthode de Euler, la méthode de Runge-Kutta et celle d'ordre supérieur. Cependant, elles ne donnent pas toutes des solutions de même précision. En effet, selon l'équation différentielle, certaines seront plus efficaces que d'autres. Ces méthodes permettent de résoudre des problèmes mathématiques ou physiques. Par exemple, la méthode de Euler nous a permis de simuler la propagation d'une épidémie.