

Árvores B⁺

Ana Eliza Lopes Moura

anaeliza.moura@unicap.br

1

Árvore B⁺

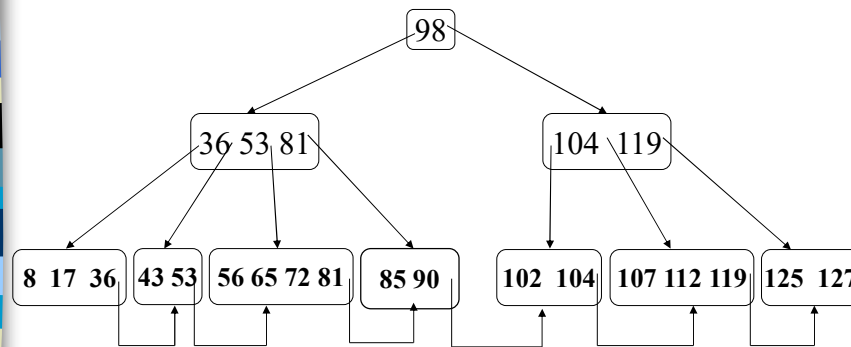
- A árvore B⁺ é uma variação da estrutura básica da árvore B.
- Características:
 - Todos os registros são mantidos em folhas;
 - Algumas chaves são repetidas em nós não-folha formando um índice;
 - As folhas são ligadas oferecendo um caminho sequencial para percorrer os registros.

anaeliza.moura@unicap.br

2

Árvore B⁺

□ Exemplo (só exibindo as chaves)



anaeliza.moura@unicap.br

3

Árvore B⁺

□ **Utilização**

- Muitos Bancos de Dados são construídos usando o mecanismo de Árvores B⁺: *SQLServer* e *Oracle*;

anaeliza.moura@unicap.br

4

Árvore B^+

□ Vantagem

- Mantém a eficiência da busca e da inserção da árvore B ;
- Aumenta a eficiência da localização do próximo registro na árvore de $O(\log_2 N)$ para $O(1)$;
- Não é necessário manter nenhum ponteiro de registro em nós não folha.

anaeliza.moura@unicap.br

5

Árvores B^+

□ Características dos Nós

- Seja uma página com N chaves:
 - Para qualquer chave y , pertencente à página apontada por A_0 , $y \leq C_1$;
 - Para qualquer chave y , pertencente à página apontada por A_i , $1 \leq i \leq N-1$, $C_i < y \leq C_{i+1}$;
 - Para qualquer chave y , pertencente à página apontada por A_N , $y > C_N$.

anaeliza.moura@unicap.br

6

Árvore B+

□ Inserção

– A inserção de um novo registro em uma árvore B+ é semelhante a inserção em uma árvore B: ocorre sempre em um nó folha.

– Passos:

- Localizar a folha dentro da qual o registro deve ser inserido;
- Localizar a posição de inserção dentro da folha;
- Inserir o registro;
- Se, após a inserção, a folha estiver completa, realizar a **cisão da página**.

anaeliza.moura@unicap.br

7

Árvore B+

□ Inserção (Exemplo)

- Inserir chave 85

85			
----	--	--	--
- Inserir chave 60

60		85		
----	--	----	--	--
- Inserir chave 52

52		60		85	
----	--	----	--	----	--
- Inserir chave 70 ⇐ **Realizar cisão**

anaeliza.moura@unicap.br

8

Árvore B+

□ Inserção -> Cisão de Página

– As **M-1** chaves serão divididas em dois grupos:

- as **(M-1 div 2)** chaves menores ficam na folha esquerda;
- as **(M-1 div 2)** chaves maiores ficam na folha direita;
- A maior chave da esquerda é copiada para o nó pai.

anaeliza.moura@unicap.br

9

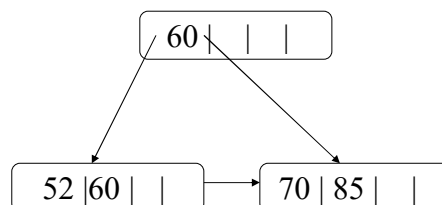
Árvore B+

□ Inserção (Exemplo - cont.)

– Inserir chave 70 (antes)

52 | 60 | 85 |

– Inserir chave 70 (depois)



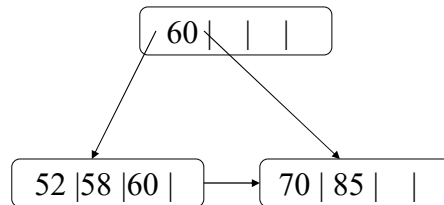
anaeliza.moura@unicap.br

10

Árvore B+

□ Inserção (Exemplo - cont.)

– Inserir chave 58



– Inserir chave 37 ⇨ **Realizar cisão**

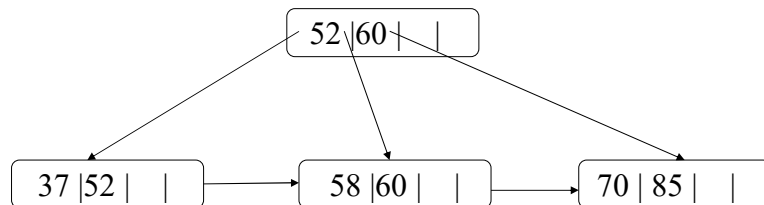
anaeliza.moura@unicap.br

11

Árvore B+

□ Inserção (Exemplo - cont.)

– Inserir chave 37 (depois)



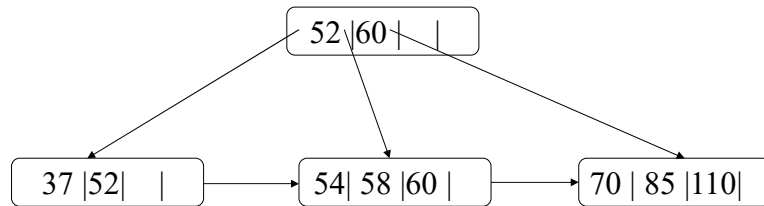
anaeliza.moura@unicap.br

12

Árvore B+

□ Inserção (Exemplo - cont.)

– Inserir chaves 54, 110



– Inserir chave 230 ⇨ **Realizar cisão**

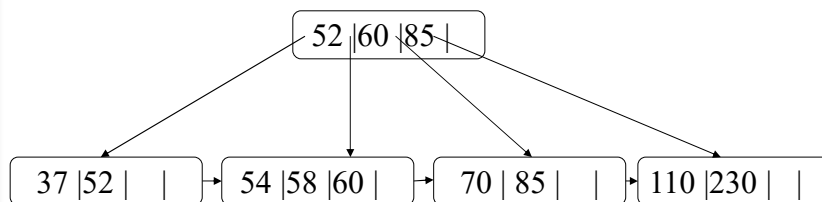
anaeliza.moura@unicap.br

13

Árvore B+

□ Inserção (Exemplo - cont.)

– Inserir chave 230 (depois)



– Inserir chave 56 ⇨ **Realizar cisão**

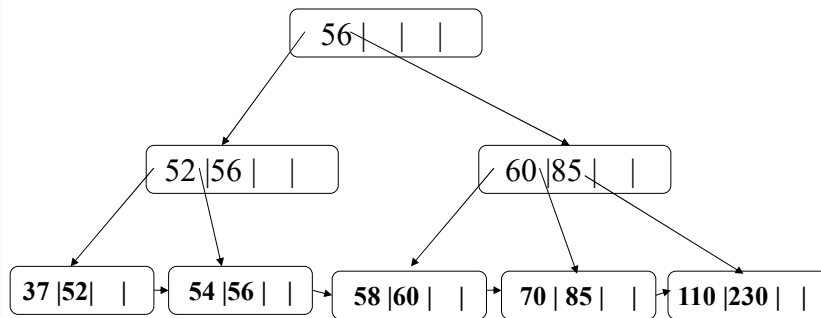
anaeliza.moura@unicap.br

14

Árvore B+

□ Inserção (Exemplo - cont.)

– Inserir chave 56 (depois)



anaeliza.moura@unicap.br

15

Árvore B+

□ Pesquisa

- Semelhante à pesquisa em árvore B;
- A pesquisa sempre leva a uma página folha;
- A pesquisa não pára se a chave procurada for encontrada em uma página índice.

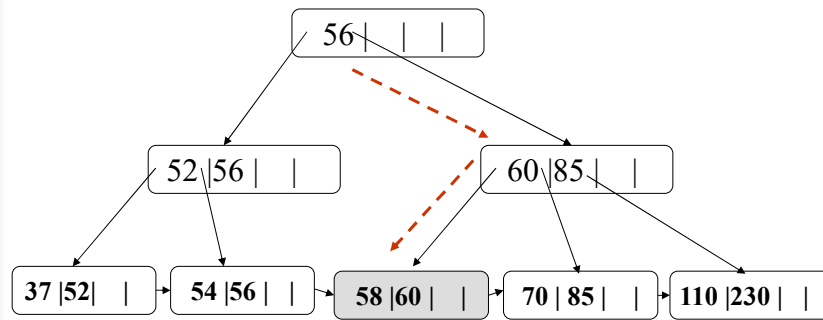
anaeliza.moura@unicap.br

16

Árvore B+

□ Pesquisa (Exemplo)

– Procurar chave 60



anaeliza.moura@unicap.br

17

Árvore B+

□ Remoção de uma chave X

– **Caso 1:** A chave X aparece apenas em um nó folha

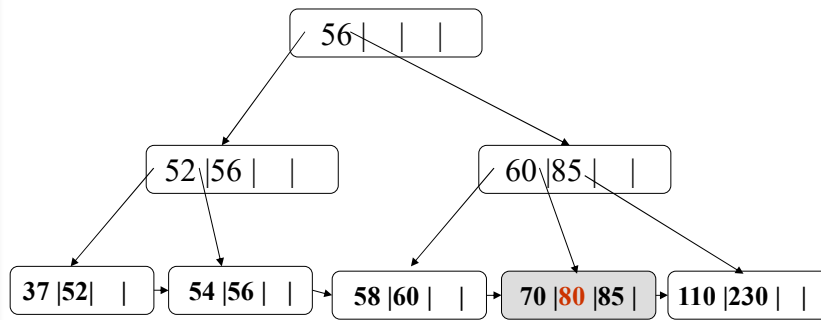
- A chave X e seu registro correspondente são simplesmente removidos e a folha é reorganizada;

anaeliza.moura@unicap.br

18

Árvore B+

- Remove a chave 80 (antes)

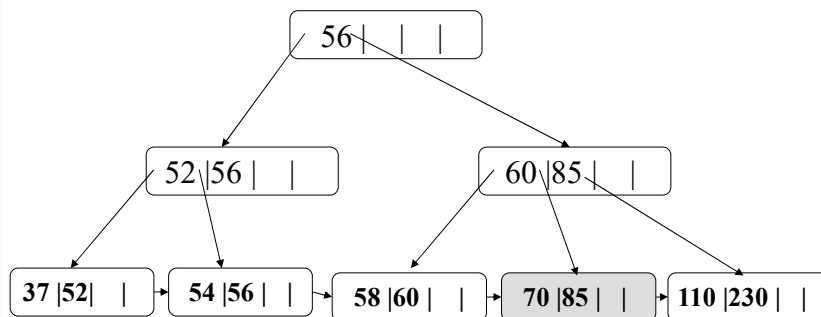


anaeliza.moura@unicap.br

19

Árvore B+

- Remove a chave 80 (depois)



anaeliza.moura@unicap.br

20

Árvore B+

□ Remoção de uma chave X (cont.)

– **Caso 2:** A chave X aparece também em nós internos (índice)

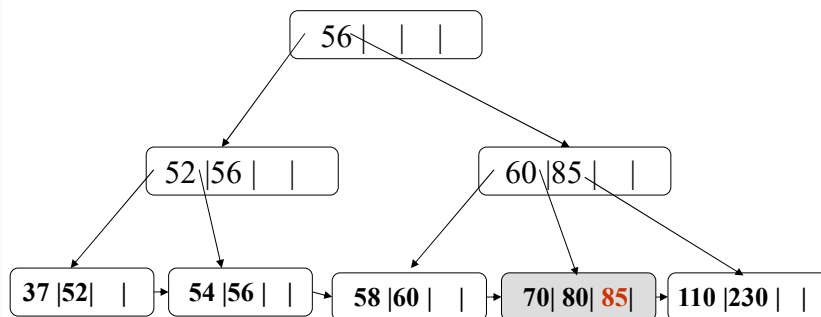
- A chave X e seu registro correspondente são removidos da folha;
- A folha é reorganizada;
- A chave X **não** é removida dos nós internos (não-terminais).

anaeliza.moura@unicap.br

21

Árvore B+

□ Remover a chave 85 (antes)

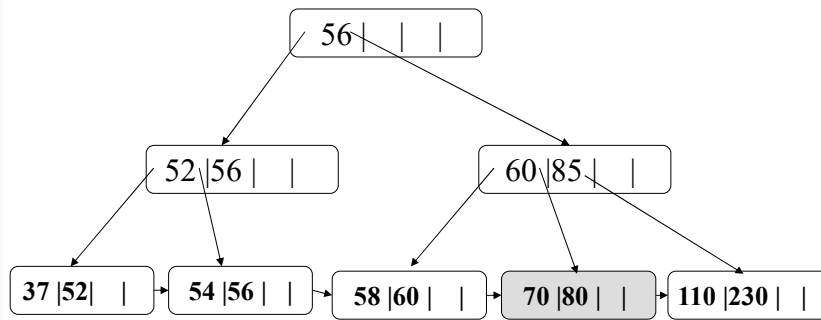


anaeliza.moura@unicap.br

22

Árvore B+

- Remove a chave 85 (depois)

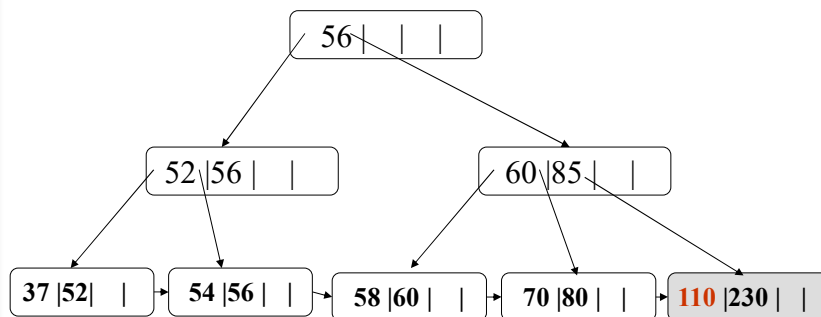


anaeliza.moura@unicap.br

23

Árvore B+

- Remove a chave 110 (antes)

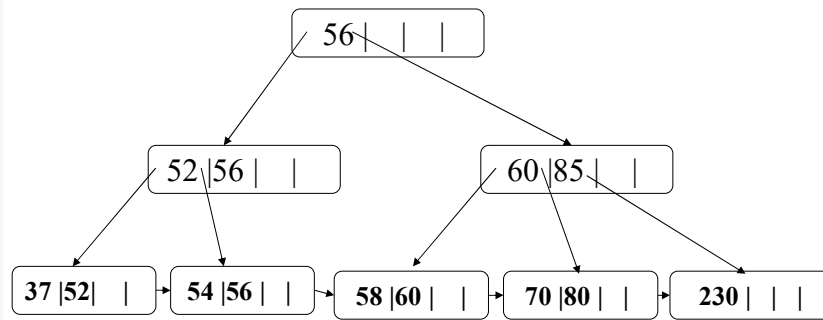


anaeliza.moura@unicap.br

24

Árvore B+

- ❑ Remover a chave 110 (depois)



anaeliza.moura@unicap.br

25

Árvore B+

- ❑ Remoção

- Quando uma chave e seu registro são retirados de um nó folha, o número de chaves restantes pode ser menor que $(M-1)/2$.
- Tratamentos:
 - Concatenação
 - Redistribuição

anaeliza.moura@unicap.br

26

Árvore B+

□ Remoção com Concatenação

- Duas páginas **P** e **Q** são chamadas **irmãos adjacentes** se têm o mesmo pai **W** e são apontadas por ponteiros adjacentes em **W**.
- **P** e **Q** podem ser concatenadas se são irmãos adjacentes e juntas possuem menos de **M-1** chaves.

anaeliza.moura@unicap.br

27

Árvore B+

□ Remoção com Concatenação

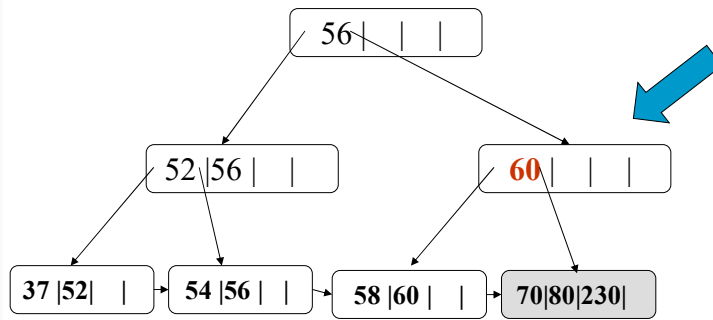
- A concatenação agrupa as entradas de duas páginas em uma só;
- No nó pai deixa de existir uma entrada: aquela da chave que se encontra entre os ponteiros para **P** e **Q**.
- Essa chave é simplesmente removida do nó pai.

anaeliza.moura@unicap.br

28

Árvore B+

- Remoção com Concatenação
 - Remover a chave 110 (cont.)



anaeliza.moura@unicap.br

29

Árvore B+

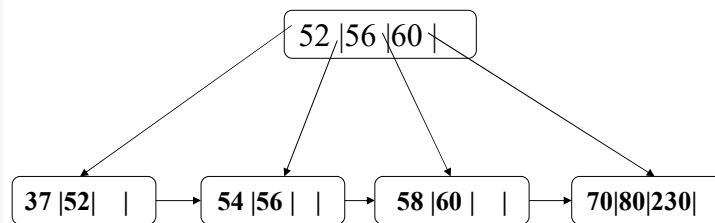
- Remoção com Concatenação
 - Como foi retirada uma chave do nó **W**, caso ele passe a ter menos de $(M-1)/2$ chaves, o processo se repete;
 - Ou seja, a concatenação é um processo propagável;
 - Se a propagação atingir a raiz, a árvore diminuirá de altura.

anaeliza.moura@unicap.br

30

Árvore B+

- Remoção com Concatenação
 - Remover a chave 110 (propagação)

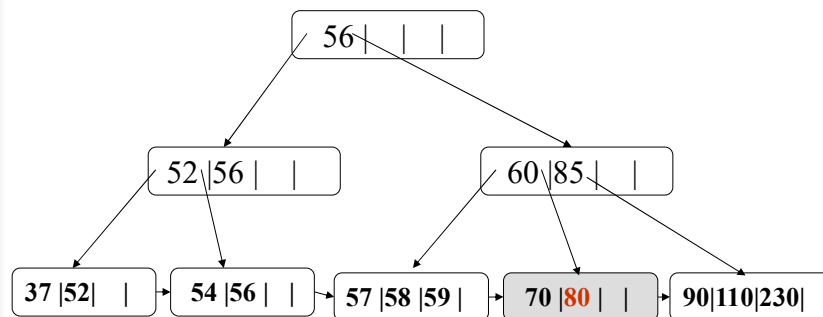


anaeliza.moura@unicap.br

31

Árvore B+

- Remover a chave 80 (antes)

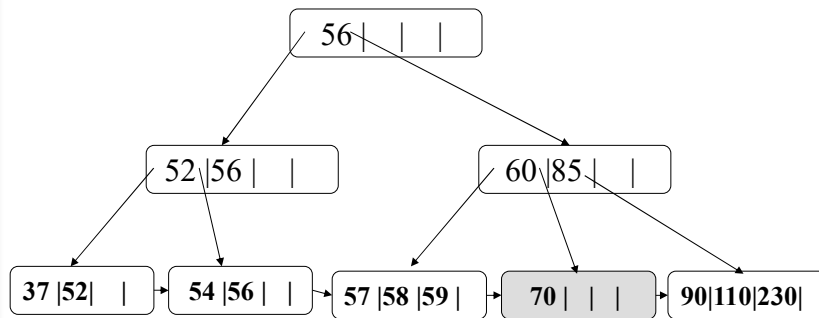


anaeliza.moura@unicap.br

32

Árvore B+

- ❑ Remover a chave 80 (depois)



anaeliza.moura@unicap.br

33

Árvore B+

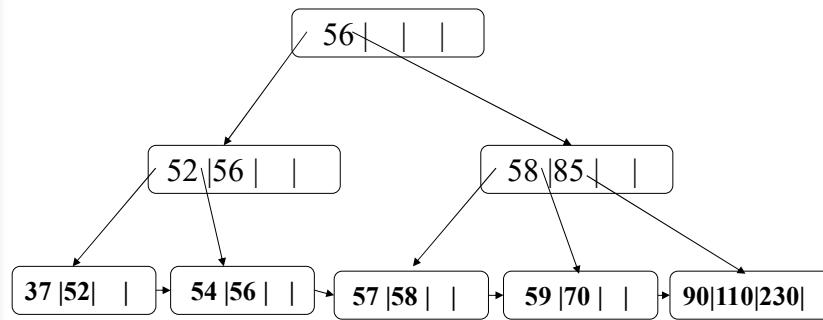
- ❑ Remoção com Redistribuição
 - Se a página **P** e seu irmão adjacente **Q** possuem em conjunto M-1 ou mais chaves, estas podem ser equilibradamente distribuídas:
 - Concatena-se **P** e **Q**;
 - Efetua-se a cisão da página resultante.

anaeliza.moura@unicap.br

34

Árvore B+

- Remove a chave 80 (redistribuição)



anaeliza.moura@unicap.br