

ÁRVORES BALANCEADAS

Balanceamento AVL

1

Árvores Balanceadas

- Árvores Binárias de Busca
 - Utilização
 - Minimizar o número de comparações efetuadas, no pior caso, para uma busca com chaves de probabilidades de ocorrência idênticas.
 - Restrições
 - Aplicações estáticas \Rightarrow Ideal
 - Aplicações dinâmicas \Rightarrow Desaconselhável

2

Árvores Balanceadas

- Árvores Binárias de Busca

- Problema

- Sucessivas inserções e retiradas de nós em uma ABB fazem com que existam diferenças sensíveis entre os níveis das suas folhas, o que acarreta grandes diferenças de performance no acesso às informações.
 - Pior caso: Árvores assimétricas.

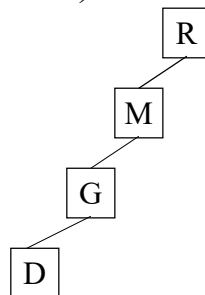
3

Árvores Balanceadas

- Árvores Binárias de Busca

- Problema (cont.)

- Pior caso: Árvores assimétricas(semelhante a uma lista linear).



4

Árvores Balanceadas

- Árvores Binárias de Busca

- Alternativa

- Tornar a árvore novamente completa, tão logo tal característica seja perdida após uma inclusão ou remoção.
 - Balanceamento.

5

Árvores Balanceadas

- Definição (*Rigorosa*)

- Uma árvore é dita balanceada quando, para qualquer nó, as suas sub-árvores à esquerda e à direita possuem a mesma altura;
 - Isso equivale a dizer que todas as suas folhas estão no mesmo nível;
 - Ou seja, que a árvore está completa.

6

Árvores Balanceadas

- Definição (*Rigorosa*)
 - Problema
 - Alto custo de reestruturação da árvore.
 - Solução pouco eficiente e, na maioria das vezes, impossível.

7

Árvores Balanceadas

- Definição (*Menos rigorosa*)
 - Uma árvore é considerada balanceada quando, para cada nó **n**, as alturas das sub-árvores à direita e à esquerda diferem, no máximo, de um.
 - Essa diferença é chamada de “*fator de balanceamento*” do nó **n** (*FatBal(n)*).

8

Árvores Balanceadas

- Definição (*Menos rigorosa*)
 - Conceito introduzido em 1962 pelos matemáticos russos Adelson-Velskii e Landis.
 - Conhecidas como *árvores AVL*.

9

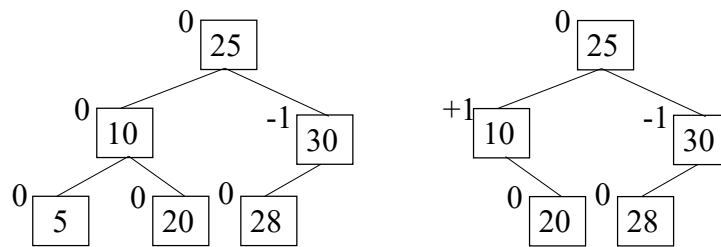
Árvores AVL

- Características Básicas
 - O fator de balanceamento deve constar em cada nó de uma árvore AVL.
 - $\text{FatBal}(n) = \text{Negativo} \Rightarrow$ sub-árvore à esquerda mais alta.
 - $\text{FatBal}(n) = \text{Positivo} \Rightarrow$ sub-árvore à direita mais alta.
 - $\text{FatBal}(n) = \text{Zero} \Rightarrow$ sub-árvores à esquerda e à direita com mesma altura.

10

Árvores AVL

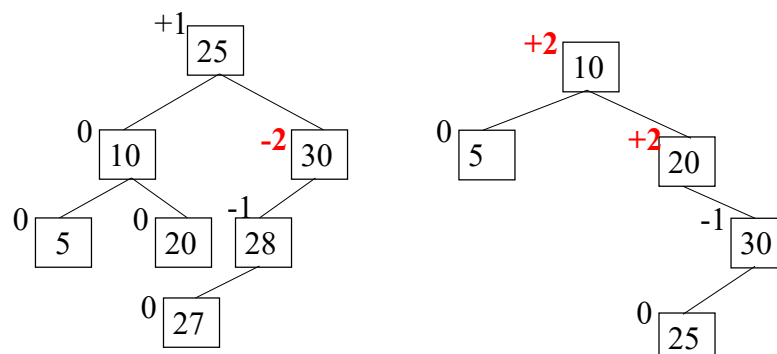
- Exemplos de Árvores Balanceadas



11

Árvores AVL

- Exemplos de Árvores Não Balanceadas



12

Árvores AVL

- Exemplos de aplicações de árvores AVL
 - Redes de comunicação de dados
 - Envio de pacotes ordenados e/ou redundantes
 - Codificação de Huffman
 - Compressão e descompressão de arquivos

13

Árvores AVL

- Operações específicas
 - Inserção
 - Remoção

14

Árvores AVL

- Inserção
 - Sempre ocorre nas folhas;
 - Pode ocasionar:
 - o aumento da altura da sub-árvore onde o nó foi inserido;
 - a alteração dos fatores de balanceamento dos nós daquela sub-árvore.

15

Árvores AVL

- Algoritmo de Inserção
 - Efetuar a inserção
 - Ajustar os fatores de balanceamento
 - Verificar a quebra do equilíbrio
 - Se a árvore não estiver balanceada, corrigir a estrutura através de movimentações dos nós (*Rotações*).

16

Árvores AVL

- Rotação

- Principais nós envolvidos:

- **Nó A**: Nó ancestral mais próximo do nó inserido que possuía fator de balanceamento diferente de zero antes da inserção.
 - **Nó B**: Filho de A na sub-árvore onde ocorreu a inserção.

- Tipos de Rotação

- Simples
 - Dupla

17

Árvores AVL

- Rotação Simples

- Utilizada quando a inserção ocorre do “*lado de fora*”.

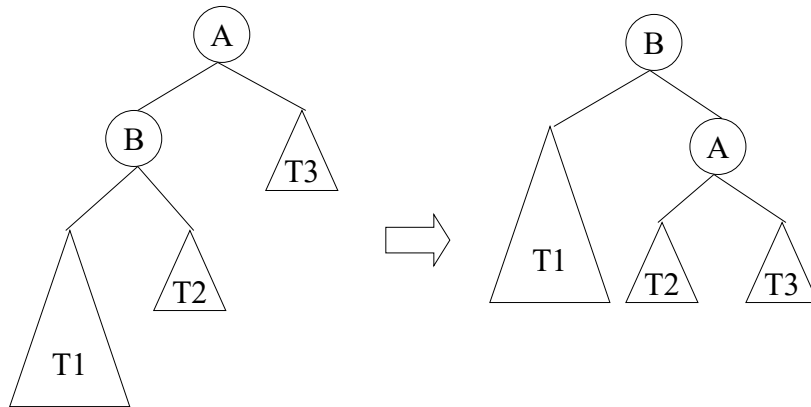
- Dado um nó A, podemos ter:

- **Caso 1**: Inserção na sub-árvore à esquerda do filho à esquerda de A \Rightarrow Rotação simples à direita.
 - **Caso 2**: Inserção na sub-árvore à direita do filho à direita de A \Rightarrow Rotação simples à esquerda.

18

Árvores AVL

- Rotação Simples à Direita

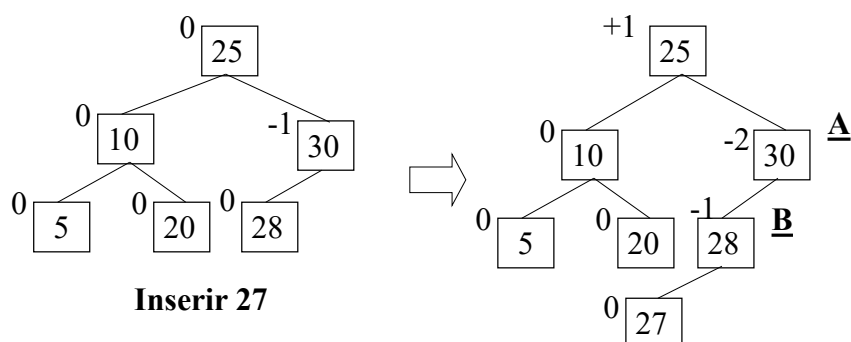


OBS: O nó foi inserido na sub-árvore T1

19

Árvores AVL

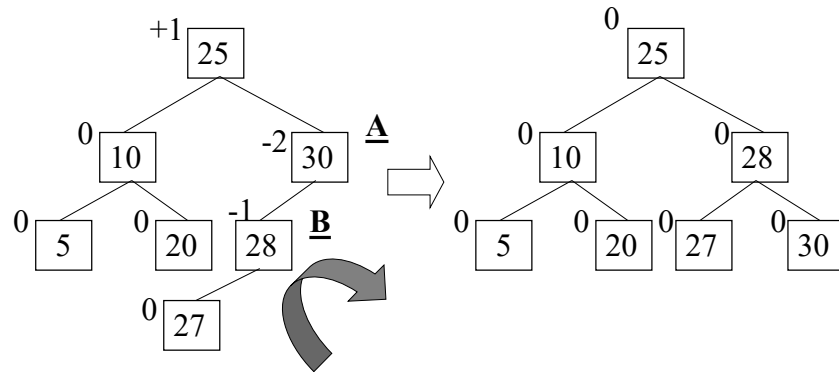
- Rotação Simples à Direita - Exemplo



20

Árvores AVL

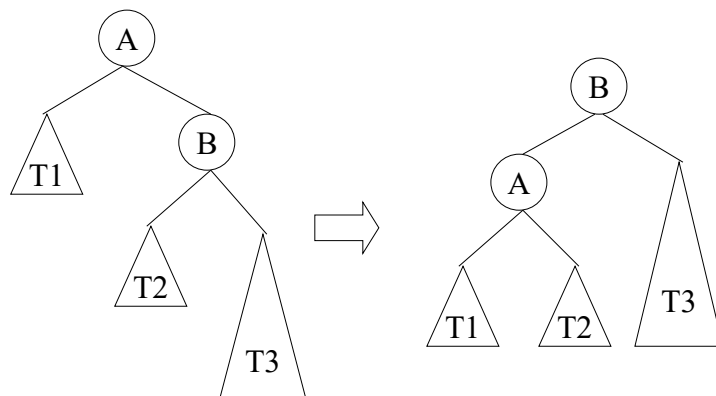
- Rotação Simples à Direita - Exemplo (cont.)



21

Árvores AVL

- Rotação Simples à Esquerda

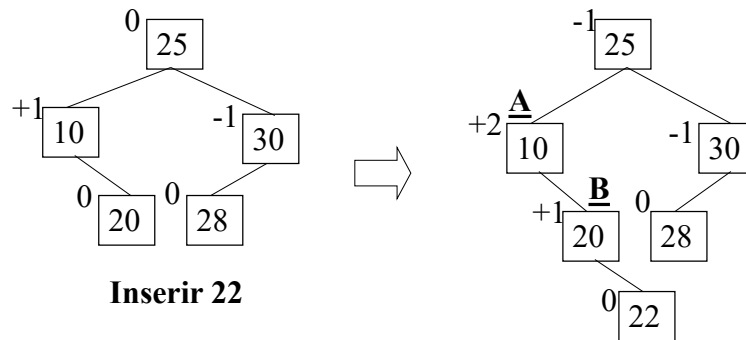


OBS: O nó foi inserido na sub-árvore T3

22

Árvores AVL

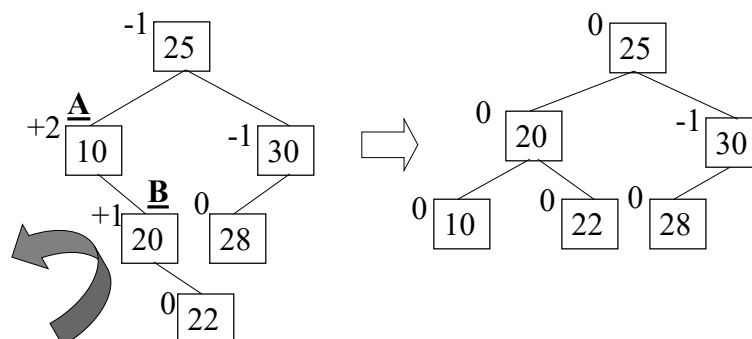
- Rotação Simples à Esquerda - Exemplo



23

Árvores AVL

- Rotação Simples à Esquerda - Exemplo (cont.)



24

Árvores AVL

- Rotação Dupla

- Utilizada quando a inserção ocorre do “*lado de dentro*” .

- Dado um nó A, podemos ter:

- **Caso 3**: Inserção na sub-árvore à direita do filho à esquerda de A \Rightarrow Rotação dupla à direita.
 - **Caso 4**: Inserção na sub-árvore à esquerda do filho à direita de A \Rightarrow Rotação dupla à esquerda.

25

Árvores AVL

- Rotação Dupla

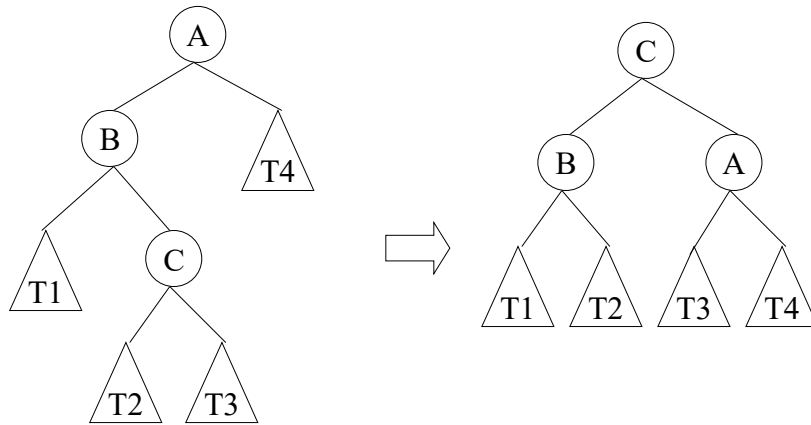
- Principais nós envolvidos:

- **Nó A**: Nó ancestral mais próximo do nó inserido que possuía fator de balanceamento diferente de zero antes da inserção.
 - **Nó B**: Filho de A na sub-árvore onde ocorreu a inserção.
 - **Nó C**: Filho de B na sub-árvore onde ocorreu a inserção.

26

Árvores AVL

• Rotação Dupla à Direita

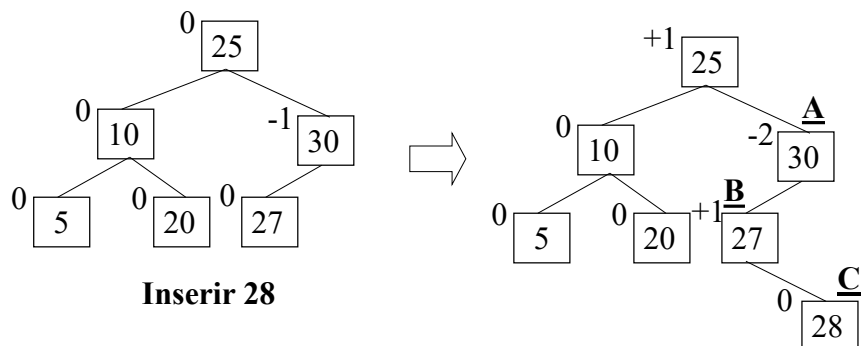


OBS: O nó foi inserido na sub-árvore de raiz C

27

Árvores AVL

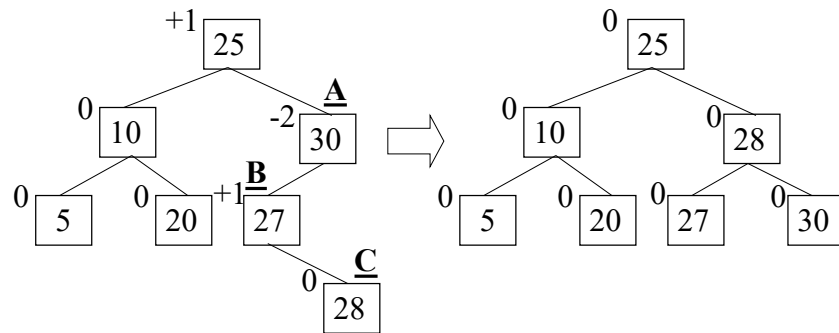
• Rotação Dupla à Direita - Exemplo



28

Árvores AVL

• Rotação Dupla à Direita - Exemplo(cont.)

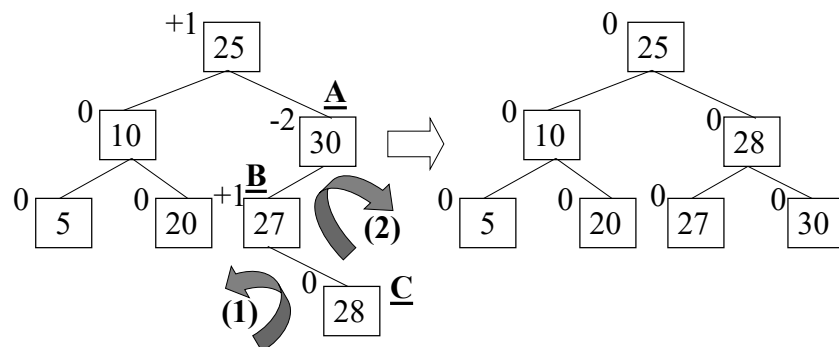


29

Árvores AVL

• Rotação Dupla à Direita - Observações

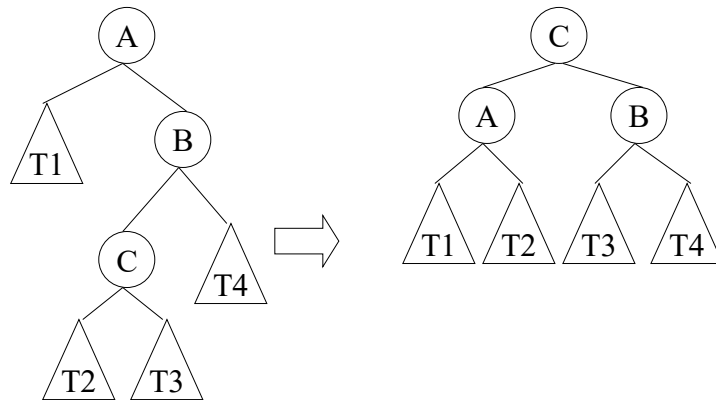
- Uma rotação dupla à direita é equivalente a uma rotação simples à esquerda seguida de uma rotação simples à direita.



30

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda

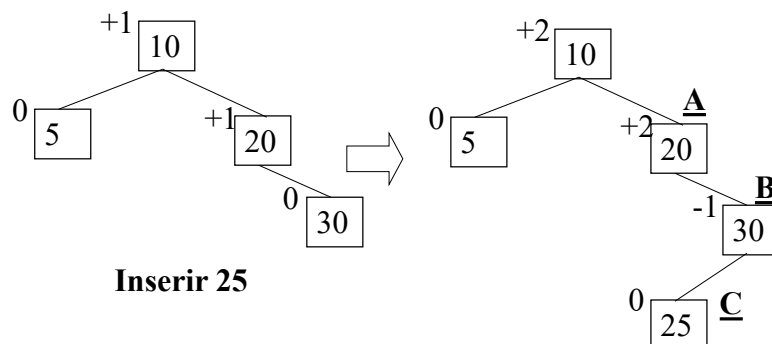


OBS: O nó foi inserido na sub-árvore de raiz C.

31

Árvores AVL

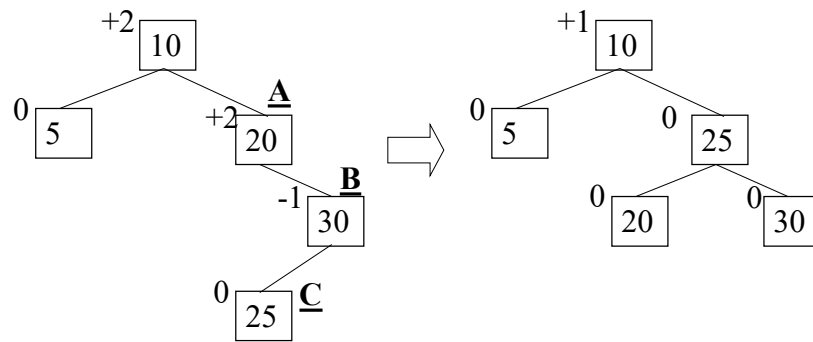
- Rotação Dupla à Esquerda - Exemplo



32

Árvores AVL

• Rotação Dupla à Esquerda - Exemplo(cont.)

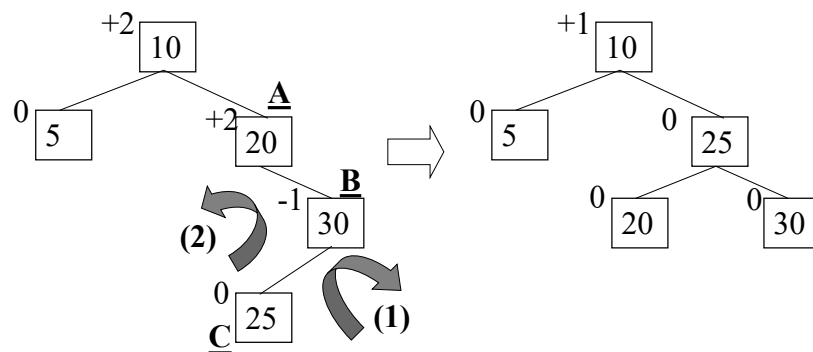


33

Árvores AVL

• Rotação Dupla à Esquerda - Observações

- Uma rotação dupla à esquerda é equivalente a uma rotação simples à direita seguida de uma rotação simples à esquerda.



34