Mathematik für Ingenieure

Eine Einführung mit Anwendungs- und Alltagsbeispielen

26. Januar 2021

Vorwort zu den Lösungen

Auf vielfachen Wunsch wurden zu den Aufgaben des Buchs „Mathematik für Ingenieure“ ausführliche Lösungen erstellt. Sie sollen den Studierenden eine Hilfe sein, wenn sie bei der Bearbeitung der Aufgaben nicht mehr weiterkommen bzw. ihre Lösungswege kontrollieren wollen. Ich bitte um Nachsicht, wenn sich in den umfangreichen Lösungen an der einen oder anderen Stelle ein Fehler eingeschlichen hat, und in diesem Fall um entsprechende Nachricht. Ich möchte mich sehr herzlich bei den Lesern, insbesondere bei Frau Tamara Lamm und Herrn Jean-Marie Wittwer, bedanken, die mich auf diverse Fehler aufmerksam gemacht haben.

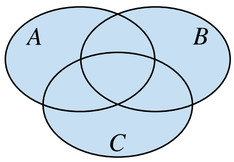
Karlsruhe, im Januar 2021 Klaus Dürrschnabel

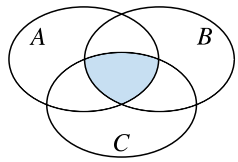
Lösungen zu den Aufgaben

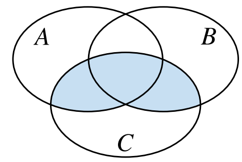
1 Zahlenbereiche

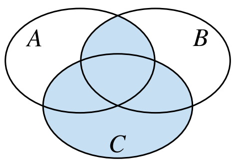
Abschnitt 1.1 – Mengen

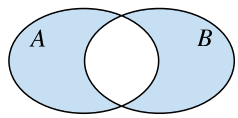
1.1

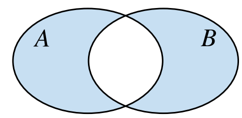
a) 

b) 

c) 

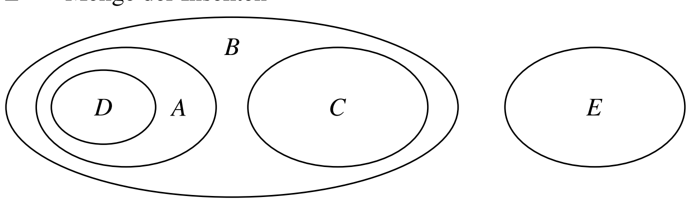
d) 

e) 

f) 

1.2

a) A = Menge der Vögel
B = Menge der Wirbeltiere
C = Menge der Säugetiere
D = Menge der Raubvögel
E = Menge der Insekten



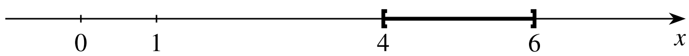
$A \subset B \qquad C \subset B \qquad D \subset A \qquad D \subset B$

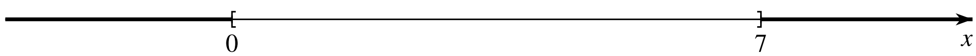
b) a = Kohlmeise
b = Löwe
c = Maikäfer
d = Frosch

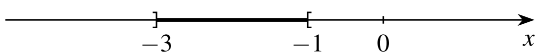
$a \in A, a \in B \qquad b \in B, b \in C \qquad c \in E \qquad d \in B$

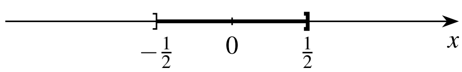
Abschnitt 1.3 – Reelle Zahlen

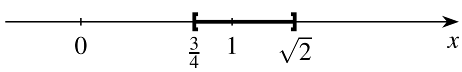
1.3

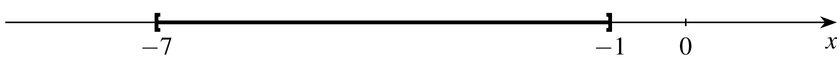
a) 

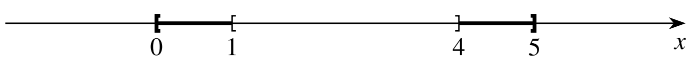
b) 

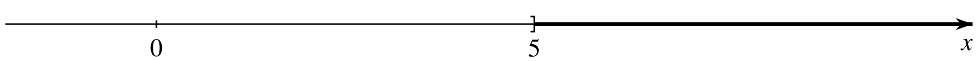
c) 

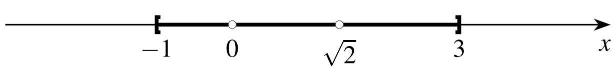
d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

i) 

1.4

$[1,3] \subset [1,2]\cup]2,3]$

$]1,3[\subset [1,3], [1,3[,]1,3], [1,2]\cup]2,3]$

$[1,3[\subset [1,3], [1,2]\cup]2,3]$

$]1,3] \subset [1,3], [1,2]\cup]2,3]$

$[1,2]\cup]2,3] \subset [1,3]$

$]1,2[\cup]2,3[\subset [1,3],]1,3[, [1,3[,]1,3], [1,2]\cup]2,3]$

1.5

a)
$$\begin{aligned} x+4 &\geq 3x-6 \\ 10 &\geq 2x \\ x &\leq 5 \end{aligned}$$
Lösungmenge: $L =]-\infty,5]$

b)
$$\begin{aligned} 2x+\frac{5}{2} &< 1-\frac{1}{4}x \\ \frac{9}{4}x &< -\frac{3}{2} \\ x &< -\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$
Lösungsmenge: $L = \left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[$

c)
$$\begin{aligned} x^2+2x-3 &\leq 0 \\ x^2+2x+1 &\leq 4 \\ (x+1)^2 &\leq 4 \\ -2 \leq x+1 &\leq 2 \\ -3 \leq x &\leq 1 \end{aligned}$$
Lösungsmenge: $L = [-3,1]$

d)
$$\begin{aligned} x^2-4x &> 0 \\ x\cdot(x-4) &> 0 \\ x,x-4 &> 0 \quad \text{oder} \quad x,x-4 < 0 \\ x-4 &> 0 \quad \text{oder} \quad x < 0 \\ x &> 4 \quad \text{oder} \quad x < 0 \end{aligned}$$
Lösungsmenge: $L =]-\infty,0[\cup]4,\infty[$

e) *1. Fall:* $x > 0, x-3 > 0$ bzw. $x > 3$

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x} &> \frac{3}{x-3}\\
5(x-3) &> 3x\\
5x-15 &> 3x\\
2x &> 15\\
x &> \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Teillösungsmenge $L_1 = \left]\frac{15}{2},\infty\right[$

2. Fall: $x < 0, x-3 < 0$ bzw. $x < 0$

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x} &> \frac{3}{x-3}\\
5 &< \frac{3x}{x-3}\\
5(x-3) &> 3x\\
5x-15 &> 3x\\
2x &> 15\\
x &> \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Teillösungsmenge $L_2 = \emptyset$

3. Fall: $x > 0, x-3 < 0$ bzw. $0 < x < 3$

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x} &> \frac{3}{x-3}\\
5 &> \frac{3x}{x-3}\\
5(x-3) &< 3x\\
5x-15 &< 3x\\
2x &< 15\\
x &< \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

Teillösungsmenge $L_3 =]0,3[$

Zusammen ergibt sich als Lösungsmenge der Ungleichung:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]0,3[\cup \left]\frac{15}{2},\infty\right[$$

f) *1. Fall:* $x-5>0$ bzw. $x>5$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-6}{x-5} &> 2 \\ x^2-6 &> 2(x-5) \\ x^2-6 &> 2x-10 \\ x^2-2x &> -4 \\ x^2-2x+1 &> -3 \\ (x-1)^2 &> -3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Teillösungsmenge $L_1 = \,]5,\infty[$

2. Fall: $x-5<0$ bzw. $x<5$

$$\begin{aligned} \frac{x^2-6}{x-5} &> 2 \\ x^2-6 &< 2(x-5) \\ x^2-6 &< 2x-10 \\ x^2-2x &< -4 \\ x^2-2x+1 &< -3 \\ (x-1)^2 &< -3 \quad \text{unmöglich!} \end{aligned}$$

Teillösungsmenge $L_2 = \emptyset$

Zusammen ergibt sich als Lösungsmenge der Ungleichung:

$$L = L_1 \cup L_2 = \,]5,\infty[$$

g) *1. Fall:* $2x+3>0$ bzw. $x>-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x+3} &> 0 \\ 2x &> 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Teillösungmenge $L_1 = \,]0,\infty[$

2. Fall: $2x+3<0$ bzw. $x<-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x+3} &> 0 \\ 2x &< 0 \\ x &< 0 \end{aligned}$$

Teillösungsmenge $L_2 = \left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[$

Zusammen ergibt sich als Lösungsmenge der Ungleichung:

$$L = L_1 \cup L_2 = \left]-\infty,-\frac{3}{2}\right[\cup \,]0,\infty[$$

h) *1. Fall:* $x > 0, x+3 > 0$ bzw. $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} &\geq \frac{x}{x+3} \\ (x+3)^2 &\geq x^2 \\ x^2+6x+9 &\geq x^2 \\ 6x+9 &\geq 0 \\ 6x &\geq -9 \\ x &\geq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Teillösungsmenge $L_1 =]0,\infty[$

2. Fall: $x < 0, x+3 < 0$ bzw. $x < -3$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} &\geq \frac{x}{x+3} \\ x+3 &\leq \frac{x^2}{x+3} \\ (x+3)^2 &\geq x^2 \\ x^2+6x+9 &\geq x^2 \\ 6x+9 &\geq 0 \\ 6x &\geq -9 \\ x &\geq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Teillösungsmenge $L_2 = \emptyset$

3. Fall: $x < 0, x+3 > 0$ bzw. $-3 < x < 0$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x} &\geq \frac{x}{x+3} \\ x+3 &\leq \frac{x^2}{x+3} \\ (x+3)^2 &\leq x^2 \\ x^2+6x+9 &\leq x^2 \\ 6x+9 &\leq 0 \\ 6x &\leq -9 \\ x &\leq -\frac{3}{2} \\ L_3 &= \left]-3, -\tfrac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

Teillösungsmenge $L_3 = \left]-3, -\frac{3}{2}\right]$

Zusammen ergibt sich als Lösungsmenge der Ungleichung:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left]-3, -\tfrac{3}{2}\right] \cup]0,\infty[$$

i)
$$\begin{aligned}
(x-a)(a-x) &\leq 2ax \\
-(x-a)^2 &\leq 2ax \\
-\left(x^2-2ax+a^2\right) &\leq 2ax \\
-x^2+2ax-a^2 &\leq 2ax \\
-x^2-a^2 &\leq 0 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Lösungsmenge: $L = \mathbb{R}$

1.6

Alternative A: $1{,}04(x-20) = 1{,}04x-20{,}80$
Alternative B: $1{,}05(x-150) = 1{,}05x-157{,}50$
Alternative C: $1{,}065(x-900) = 1{,}65x-958{,}50$
Alternative A gegen Alternative B

$$\begin{aligned}
1{,}04x-20{,}80 &> 1{,}05x-157{,}50 \\
136{,}70 &> 0{,}01x \\
x &< 13\,670
\end{aligned}$$

Alternative A gegen Alternative C

$$\begin{aligned}
1{,}04x-20{,}80 &> 1{,}065x-958{,}50 \\
937{,}70 &> 0{,}025x \\
x &< \frac{937{,}70}{0{,}025} = 37\,508
\end{aligned}$$

Alternative B gegen Alternative C

$$\begin{aligned}
1{,}05x-157{,}50 &> 1{,}065x-958{,}50 \\
801 &> 0{,}015x \\
x &< \frac{801}{0{,}015} = 53\,400
\end{aligned}$$

Zusammen: Optimal ist

- Alternative A für einen Anlagebetrag zwischen 0 € und 13 670 €
- Alternative B für einen Anlagebetrag zwischen 13 670 € und 53 400 €
- Alternative C für einen Anlagebetrag über 53 400 €.

Bei 40 000 € ist Alternative B empfehlenswert, bei 60 000 € Alternative C.

1.7

Die eine Seitenlänge in Meter wird mit $a > 0$ bezeichnet. Die zweite Seite hat dann in Meter die Seitenlänge $b = \frac{400}{a}$. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} 2a + 2\frac{400}{a} &\leq 100 \\ a + \frac{400}{a} &\leq 50 \\ a^2 + 400 &\leq 50a \\ a^2 - 50a + 400 &\leq 0 \\ a^2 - 50a + 625 &\leq 225 \\ (a-25)^2 &\leq 225 \\ -15 &\leq a - 25 \leq 15 \\ 10 &\leq a \leq 40 \end{aligned}$$

Die Seitenlängen müssen also zwischen 10 und 40 m liegen.

Abschnitt 1.4 – Komplexe Zahlen

1.8

a) $(3+2i)+(5-7i) = 3+2i+5-7i = 8-5i$

b) $(-3+7i)-(1-i) = -3+7i-1+i = -4+8i$

c) $(1+2i)(2+i) = 2+i+4i+2i^2 = 2+5i-2 = 5i$

d) $(3-i)(-2-3i) = -6-9i+2i+(-3) = -9-7i$

e) $\left(\sqrt{3}+i\right)\left(-3+\sqrt{3}i\right) = -3\sqrt{3}+3i-3i-\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$

f) $\left(\sqrt{2}-2i\right)^2 = 2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 2i+(-4) = -2-4\sqrt{2}i$

g) $\sqrt{-4} = \sqrt{4\cdot(-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$

h) $\overline{7-12i} = 7+12i$

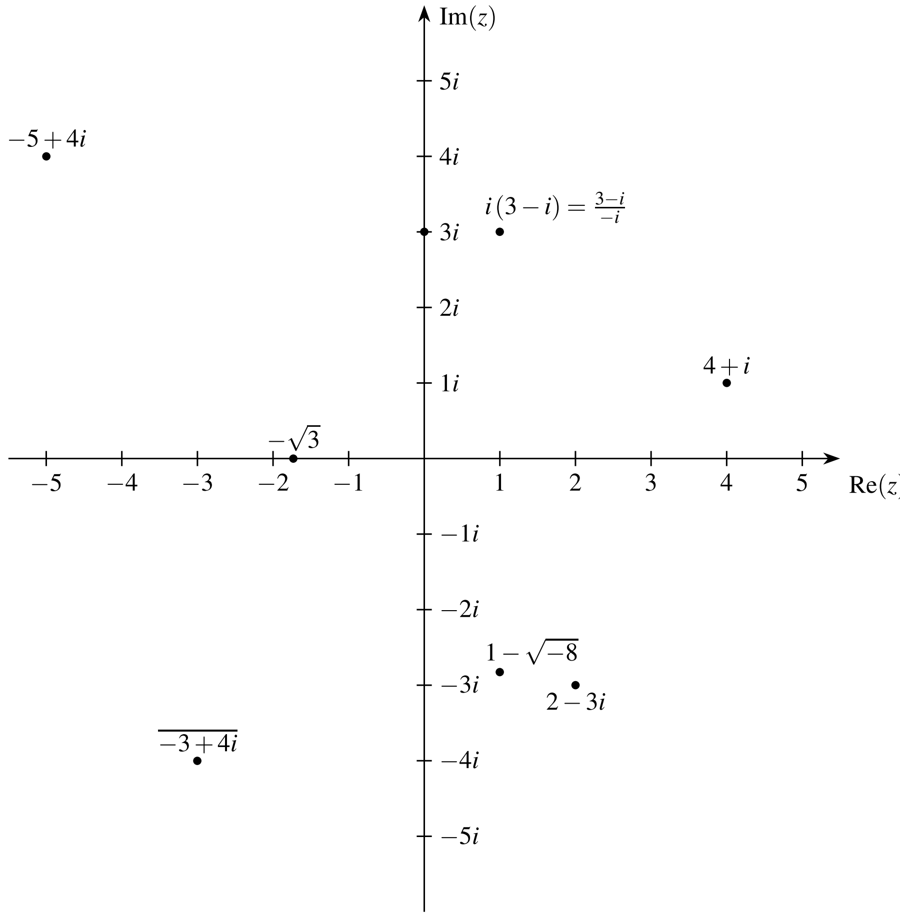
i) $\overline{(3+i)(1+3i)} = \overline{3+9i+i+(-3)} = \overline{10i} = -10i$

j) $\dfrac{5-10i}{3+4i} = \dfrac{(5-10i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{15-20i-30i+(-40)}{3^2-(4i)^2)} = \dfrac{-25-50i}{9+16}$
$= \dfrac{-25-50i}{25} = -1-2i$

k) $\dfrac{-2-5i}{8-6i} = \dfrac{(-2-5i)(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} = \dfrac{-16-12i-40i-(-30)}{64-(-36)} = \dfrac{14-52i}{100}$
$= \dfrac{7}{50} - \dfrac{13}{25}i$

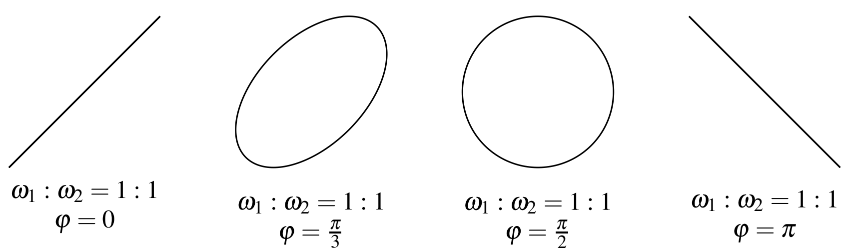
l) $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{1-(-1)} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

1.9

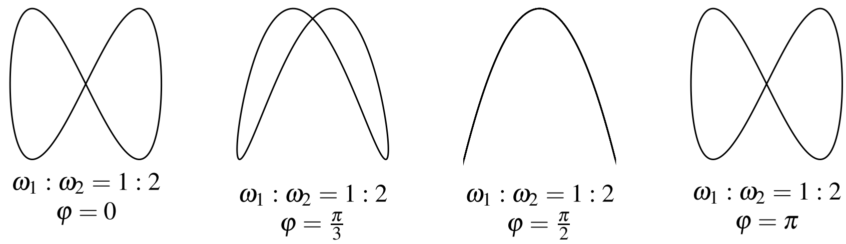

Im(z)
5i
4i
3i
2i
1i
−1i
−2i
−3i
−4i
−5i
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5
Re(z)
−5+4i
i(3−i) = (3−i)/(−i)
4+i
−√3
1−√−8
2−3i
$\overline{-3+4i}$

1.10

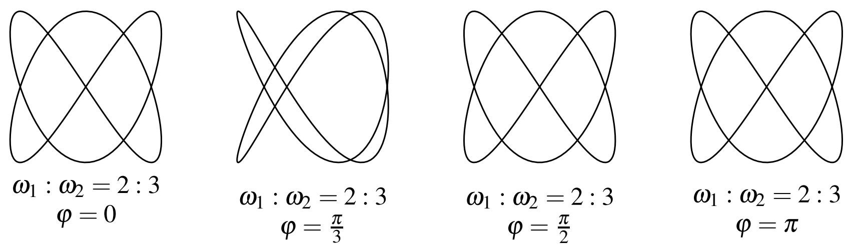
a)


$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$
$\varphi = 0$
$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$
$\varphi = \frac{\pi}{3}$
$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$
$\varphi = \frac{\pi}{2}$
$\omega_1 : \omega_2 = 1 : 1$
$\varphi = \pi$

b)



c)



1.11

a) $|1-i| \;=\; \sqrt{1^2+(-1)^2} \;=\; \sqrt{2}$

$\arg(1-i) \overset{1>0}{=} \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) \;=\; \arctan(-1) \;=\; -\frac{\pi}{4}$

b) $\left|1+\sqrt{3}i\right| \;=\; \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} \;=\; \sqrt{4} \;=\; 2$

$\arg\left(1+\sqrt{3}i\right) \overset{1>0}{=} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \;=\; \arctan\left(\sqrt{3}\right) \;=\; \frac{\pi}{3}$

c) $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right| \;=\; \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} \;=\; \sqrt{1} \;=\; 1$

$\arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) \overset{-\frac{\sqrt{3}}{2}<0}{=} \pi+\arctan\left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \;=\; \pi+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \;=\; \pi+\frac{\pi}{6} \;=\; \frac{7}{6}\pi$

d) $|-4i| \;=\; \sqrt{0^2+(-4)^2} \;=\; 4$

$\arg(-4i) \;=\; -\frac{\pi}{2}$

1.12

a) $z \;=\; 2\cdot(\cos(\pi)+i\sin(\pi)) \;=\; 2\cdot(-1+i\cdot 0) \;=\; -2$

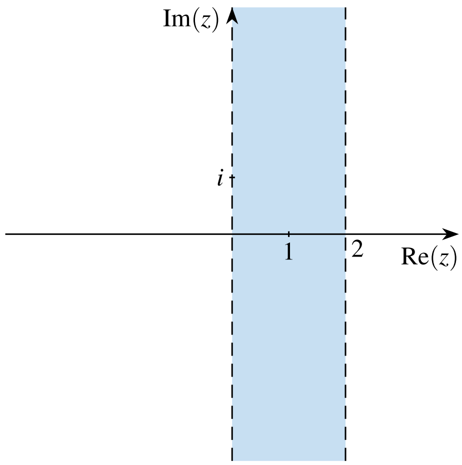
b) $z \;=\; \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \;=\; \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \;=\; 1+i$

c) $z \;=\; 4\cdot\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) \;=\; 4\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \;=\; -2+2\sqrt{3}i$

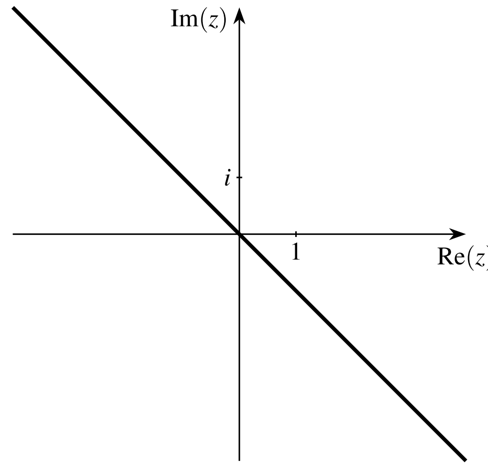
d) $z \;=\; 8\cdot\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right) \;=\; 8\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \;=\; 4\sqrt{3}-4i$

1.13

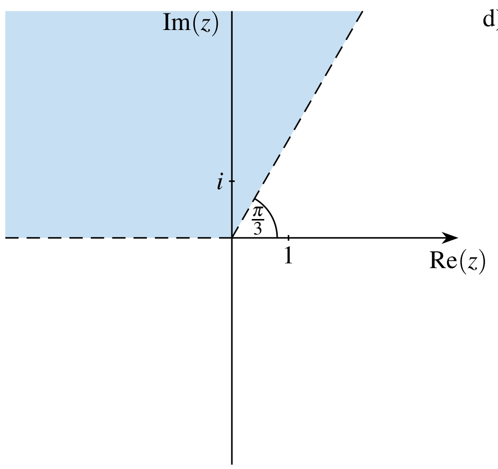
a)



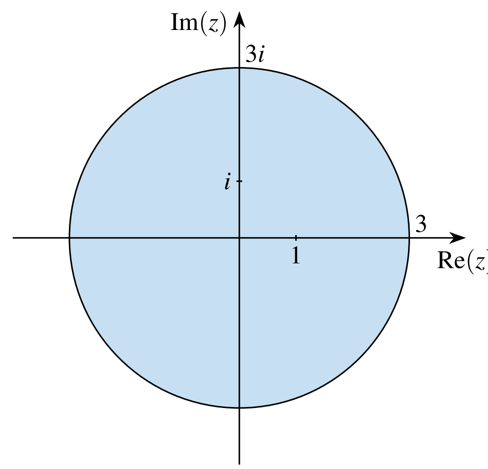
b)



c)



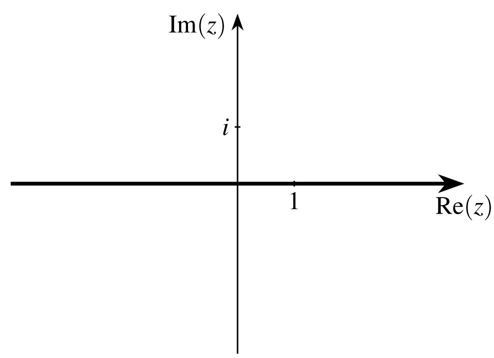
d)



e) Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\bar{z}} &= 1 \\ \Longrightarrow \quad z &= \bar{z} \end{aligned}$$

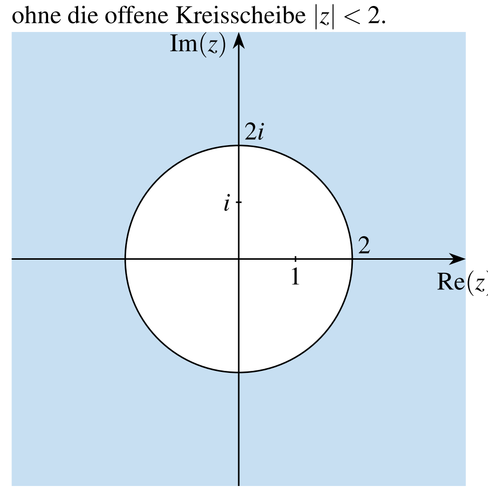
Die konjugiert komplexe Zahl ist nur für reelle Zahlen mit der ursprünglichen identisch. Aus diesem Grund sind die gesuchten Zahlen gerade die auf der reellen Achse.



f) Es gilt:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

Demzufolge handelt es sich bei den Zahlen mit $z \cdot \bar{z} \geq 4$ um die komplexe Zahlenebene ohne die offene Kreisscheibe $|z| < 2$.



1.14

a) Es ist:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1 \\ \arg(z) &= \arg(i) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} i^{93} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{93} = \cos\left(93 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(93 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot 1 = i \end{aligned}$$

b) Es ist:

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2} = \sqrt{1} = 1$$
$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)^{1000} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{1000}\\ &= \cos\left(1000\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(1000\cdot\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos(250\pi)+i\sin(250\pi)\\ &= \cos(0)+i\sin(0) = 1+i\cdot 0 = 1\end{aligned}$$

c) Es ist:

$$|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$
$$\arg(z) = \pi+\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi+\arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \pi-\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

Damit:

$$\begin{aligned}\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12} &= \left(2\cdot\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right)^{12}\\ &= 2^{12}\cdot\left(\cos\left(12\cdot\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(12\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right)\\ &= 4096\cdot(\cos(8\pi)+i\sin(8\pi)) = 4096\cdot(\cos(0)+i\sin(0))\\ &= 4096\cdot(1+i\cdot 0) = 4096\end{aligned}$$

d) Es ist:

$$|z| = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}}$$
$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}(1-i)\right)^{25} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{25}\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}}\right)^{25}\cdot\left(\cos\left(-25\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-25\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \frac{2^{12}\sqrt{2}}{2^5}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2^7\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\\ &= 2^7\cdot(1-i) = 128-128i\end{aligned}$$

1.15

a) Für den Ausdruck z unter der Wurzel gilt:

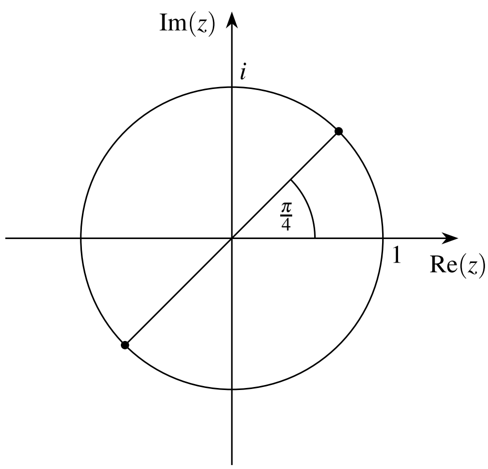
$$|z| = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$$
$$\arg(z) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\sqrt{i} &= \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \sqrt{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right), \qquad k=0,1\end{aligned}$$

Also lauten die Wurzeln:

$$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$$
$$w_1 = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$$



b) Für den Ausdruck z unter der Wurzel gilt:

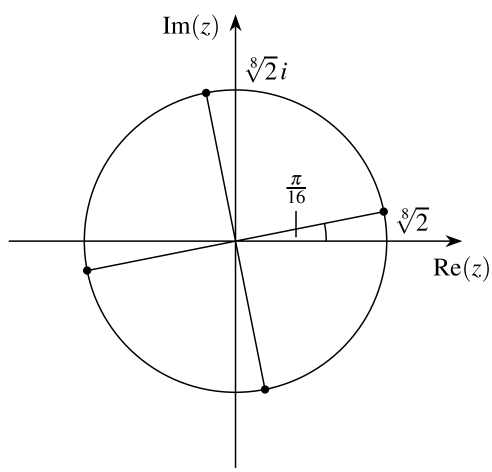
$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\\ \arg(z) &= \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{1+i} &= \sqrt[4]{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}\\ &= \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)\right), \qquad k=0,1,2,3\end{aligned}$$

Also lauten die Wurzeln:

$$\begin{aligned}w_0 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)\\ w_1 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right)\\ w_2 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{16}\right)\right)\\ w_3 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{25\pi}{16}\right)+i\sin\left(\frac{25\pi}{16}\right)\right)\end{aligned}$$



c) Für den Ausdruck z unter der Wurzel gilt:

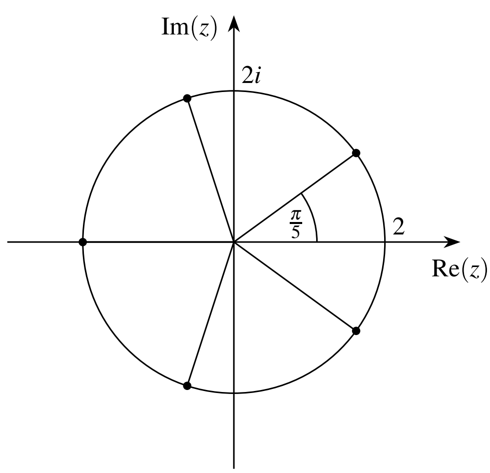
$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(-32)^2+0^2} = 32 \\ \arg(z) &= \pi + \arctan\left(\frac{0}{-32}\right) = \pi - \arctan(0) = \pi \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{-32} &= \sqrt[5]{32\,(\cos(\pi)+i\sin(\pi))} \\ &= \sqrt[5]{32}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right)\right), \qquad k=0,1,2,3,4 \end{aligned}$$

Also lauten die Wurzeln:

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \\ w_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) \\ w_2 &= 2\,(\cos(\pi)+i\sin(\pi)) = 2\,(-1+i\cdot 0) = -2 \\ w_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right) \\ w_4 &= 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right) \end{aligned}$$



d) Für den Ausdruck z unter der Wurzel gilt:

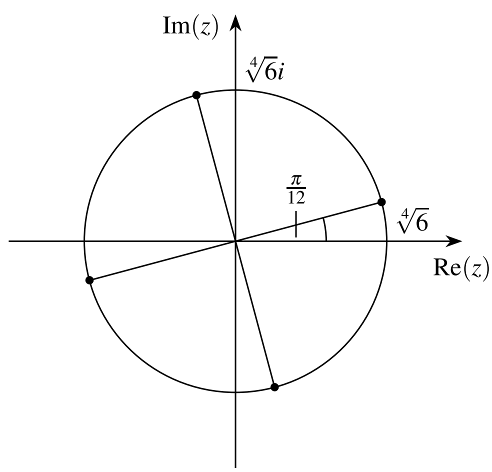
$$|z| = \sqrt{3^2 + \sqrt{27}^2} = 6$$
$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\sqrt{27}}{3}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{3+\sqrt{27}i} &= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right), \qquad k = 0,1,2,3
\end{aligned}$$

Also lauten die Wurzeln:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \\
w_1 &= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
w_2 &= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)\right) \\
w_3 &= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3}{2}\pi\right)\right)
\end{aligned}$$



e) Für den Ausdruck z unter der Wurzel gilt:

$$|z| = \sqrt{16^2 + \left(-16\sqrt{3}\right)^2} = 32$$

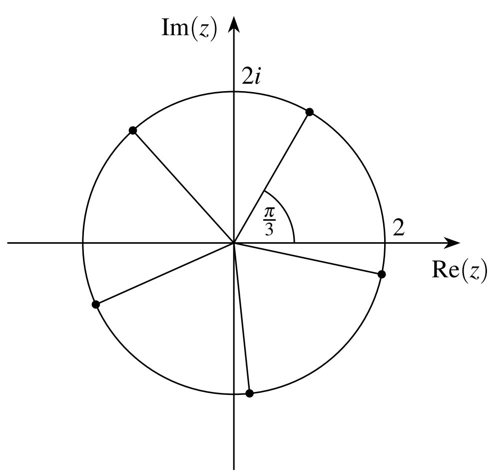
$$\arg(z) = 2\pi + \arctan\left(\frac{-16\sqrt{3}}{16}\right) = 2\pi - \arctan(-\sqrt{3}) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{16\left(1-\sqrt{3}\,i\right)} &= \sqrt[5]{32\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right)} \\
&= \sqrt[5]{32}\left(\cos\left(\frac{\frac{5}{3}\pi + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5}{3}\pi + 2k\pi}{5}\right)\right) \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right) \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi + 6k\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi + 6k\pi}{15}\right)\right), \quad k = 0,1,2,3,4
\end{aligned}$$

Also lauten die Wurzeln:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
w_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{15}\right)\right) \\
w_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{17\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{15}\right)\right) \\
w_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{23\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{15}\right)\right) \\
w_4 &= 2\left(\cos\left(\frac{29\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{29\pi}{15}\right)\right)
\end{aligned}$$



f) Für den Ausdruck z unter der Wurzel gilt:

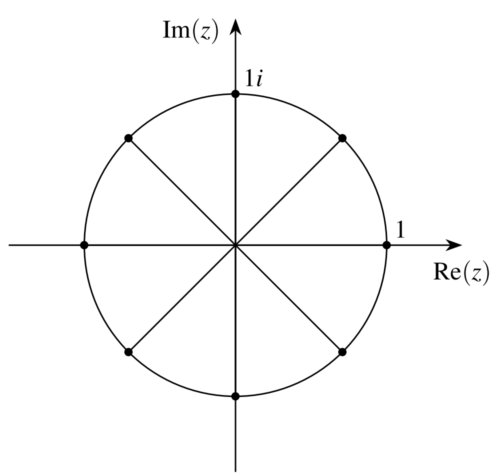
$$|z| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$
$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = \arctan(0) = 0$$

Damit:

$$\begin{aligned}\sqrt[8]{1} &= \sqrt[8]{(\cos(0)+i\sin(0))}\\ &= \cos\left(\frac{0+2k\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{8}\right)\\ &= \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right), \qquad k=0,1,2,3,4,5,6,7\end{aligned}$$

Also lauten die Wurzeln:

$$\begin{aligned}w_0 &= \cos(0)+i\sin(0) = 1+i\cdot 0 = 1\\ w_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\\ w_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0+i\cdot 1 = i\\ w_3 &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\\ w_4 &= \cos(\pi)+i\sin(\pi) = -1+i\cdot 0 = -1\\ w_5 &= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i\\ w_6 &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0-i\cdot 1 = -i\\ w_7 &= \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}i\end{aligned}$$



1.16

a) Polardarstellung von $z = 1$:

$$z = 1 \cdot (\cos(0) + i\sin(0))$$

Damit ergeben sich die dritten Wurzeln:

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}k\pi\right), \qquad k = 0,1,2 \end{aligned}$$

Die dritten Wurzeln aus $z = 1$ lauten also:

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos(0) + i\sin(0) = 1 \\ w_1 &= \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\ w_2 &= \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \end{aligned}$$

b) $z = 1$ ist offensichtlich keine Lösung der Gleichung. Damit ist folgende Umformung möglich:

$$\begin{aligned} & (1+z)^3 = (1-z)^3 \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{(1+z)^3}{(1-z)^3} = 1 \\ \Longleftrightarrow\quad & \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^3 = 1 \end{aligned}$$

Substitution $t := \frac{1+z}{1-z}$ liefert:

$$t^3 = 1$$

Die Lösungen dieser Aufgabe kennen wir aus (a):

$t_0 = 1$: Dann gilt nacheinander:

$$\begin{aligned} \frac{1+z}{1-z} &= 1 \\ 1+z &= 1-z \\ 2z &= 0 \\ z &= 0 \qquad \text{1. Lösung} \end{aligned}$$

$t_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$: Dann gilt nacheinander:

$$\begin{aligned}
\frac{1+z}{1-z} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\
1+z &= (1-z)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) \\
1+z &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\sqrt{3}iz \\
\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{3}iz &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\
z\left(1+\sqrt{3}i\right) &= -3 + \sqrt{3}i \\
z &= \frac{-3+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(-3+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} \\
&= \frac{-3+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+3}{1+3} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} \\
&= \sqrt{3}i \qquad \text{2. Lösung}
\end{aligned}$$

$t_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$: Dann gilt nacheinander:

$$\begin{aligned}
\frac{1+z}{1-z} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\
1+z &= (1-z)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) \\
1+z &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sqrt{3}iz \\
\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\sqrt{3}iz &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\
z\left(1-\sqrt{3}i\right) &= -3 - \sqrt{3}i \\
z &= \frac{-3-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(-3-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} \\
&= \frac{-3-3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3}{1+3} = \frac{-4\sqrt{3}i}{4} \\
&= -\sqrt{3}i \qquad \text{3. Lösung}
\end{aligned}$$

Die drei Lösungen der Gleichung lauten also:

$$z_0 = 0 \qquad z_1 = \sqrt{3}i \qquad z_2 = -\sqrt{3}i$$

1.17

Die Phasenverschiebung beträgt

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2\pi f CR}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2\pi\cdot 50\cdot 20\cdot 10^{-6}\cdot 885}\right)$$
$$= 0{,}178 \mathrel{\hat{=}} 10{,}2^\circ.$$

1.18

Die momentane Stromstärke bei einer angelegten Spannung $U_0 \sin\omega t$ ergibt sich durch die formale Verwendung des Ohm'schen Gesetzes zu

$$I = \frac{U}{R+R_L} = \frac{U_0\sin(\omega t)}{R+i\omega L} = \frac{U_0\sin(\omega t)(R-i\omega L)}{(R+i\omega L)(R-i\omega L)} = \frac{U_0\sin(\omega t)}{R^2+\omega^2L^2}(R-i\omega L).$$

Daraus ergibt sich die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung als

$$\varphi = \arg(I)-\arg(U) = \arg(R-i\omega L)-\arg(1) = \arg(R-i\omega L)-0,$$

d. h. es ist

$$\tan(\varphi) = \tan\big(\arg(R-i\omega L)\big) = -\frac{\omega L}{R}.$$

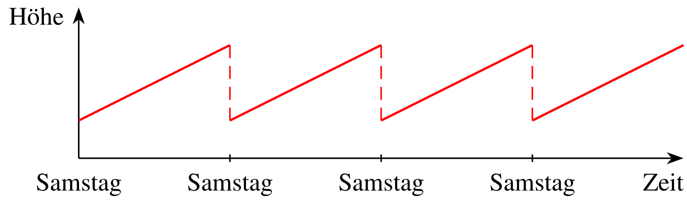
bzw.

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\omega L}{R}\right) = -\arctan\frac{\omega L}{R}.$$

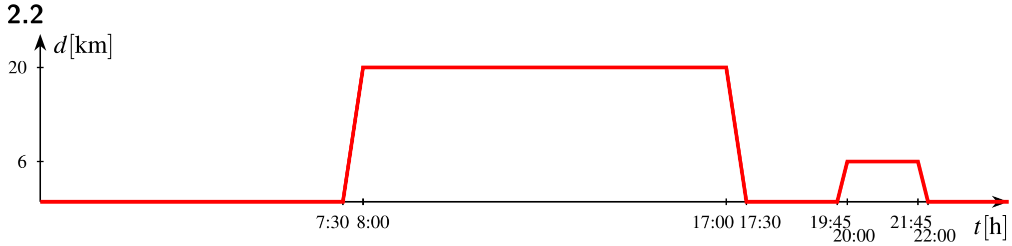
2 Funktionen

Abschnitt 2.1 – Funktionen als Modelle der Wirklichkeit

2.1

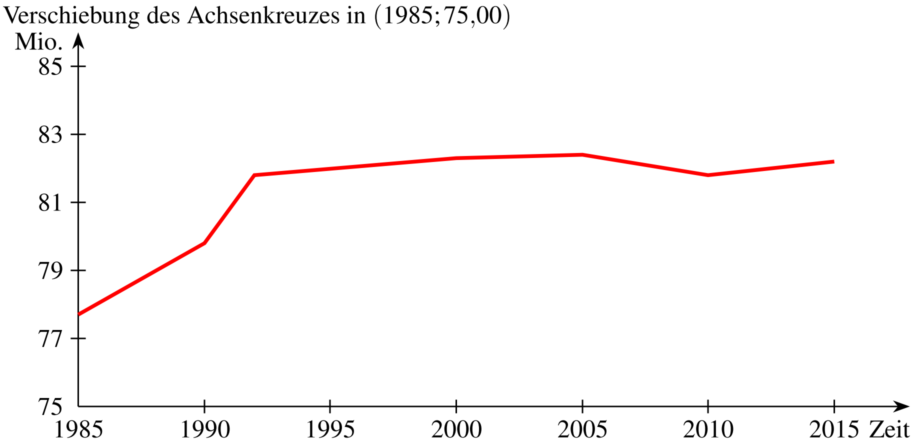


2.2



2.4

Verschiebung des Achsenkreuzes in (1985;75,00)



Abschnitt 2.2 – Der Funktionsbegriff

2.5

a) Funktion, da jedem x genau ein y zugeordnet wird.
b) Keine Funktion, da fast allen x zwei y-Werte zugeordnet werden.
c) Keine Funktion, da an der Stelle mit dem vertikalen Abschnitt diesem x unendlich viele y-Werte zugeordnet werden.
d) Funktion, da jedem x genau ein y zugeordnet wird (trotz der Sprünge).

2.6

a) $A = \mathbb{R}$
b) $A = [-1,\infty[$
c) $A = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
d) $A =]-\infty,-2] \cup [2,\infty[= \mathbb{R}\backslash]-2,2[$
e) $A = \mathbb{R}\backslash\{2,-2\}$
f) $A = \mathbb{R}$

2.7

a) Es gilt $y = \pm\sqrt{x}$, also liegt keine Funktion vor.
b) Es gilt $y = x$, also liegt eine Funktion vor.
c) Jedem x wird genau ein y zugeordnet. Also liegt eine Funktion vor.
d) Es gilt $1{,}6^2 + 1{,}04 = 3{,}6 = 3 \cdot 1{,}6 - 1{,}2$. Damit wird dem Wert $x = 1{,}6$ mit beiden Vorschriften der gleiche y-Wert zugeordnet. Es liegt eine Funktion vor.

2.8

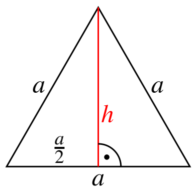
Bezeichnet man die Rechteckseiten mit a,b, so gilt

$$d(a) = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{12}{a}\right)^2}.$$

Vollständige Beschreibung der Funktion:

$$d : \begin{cases}]0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \sqrt{a^2 + \frac{144}{a^2}} \end{cases}$$

2.9



Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{a}{2}\right)^2+h^2 &= a^2\\ h^2 &= a^2-\left(\tfrac{a}{2}\right)^2\\ h &= \sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\end{aligned}$$

Damit ist

$$A(a) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Definitionsbereich: $]0,\infty[$, Zielbereich: $\mathbb{R}$, Wertebereich: $]0,\infty[$
Also:

$$A:\begin{cases}]0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ a & \longmapsto & \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\end{cases}$$

$$A(2) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}\approx 1{,}73$$

2.10

$\sqrt{\dfrac{2(p-p_0)}{\rho}}$ ist definiert, wenn $p-p_0\geq 0$ bzw. $p\geq p_0$. Dies bedeutet, dass es keine Flüssigkeit von Stellen niedrigeren Drucks zu Stellen höheren Drucks fließt.

2.11

Das Differenzvolumen Z ergibt sich als

$$Z = \frac{4}{3}\pi(r+1)^3-\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3+3r^2+3r+1)-\frac{4}{3}\pi r^3 =; \frac{4}{3}\pi\left(3r^2+3r+1\right)$$

Damit lautet die Funktion $Z(r)$ abhängig vom Startradius r

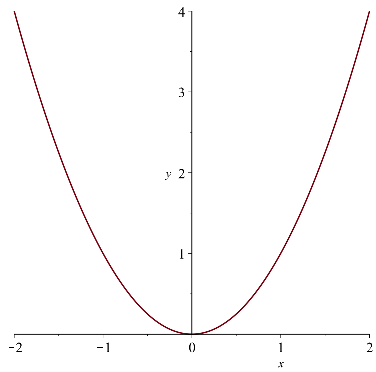
$$Z:\begin{cases}]0,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ r & \longmapsto & \frac{4}{3}\pi\left(3r^2+3r+1\right).\end{cases}$$

Wertebereich: $]0,\infty[$
$$Z(8) = \frac{868}{3}\pi\approx 909$$

Abschnitt 2.3 – Eigenschaften von Funktionen

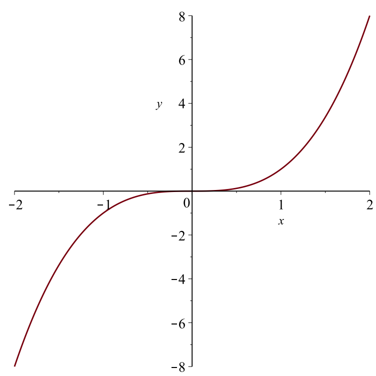
2.12

a)



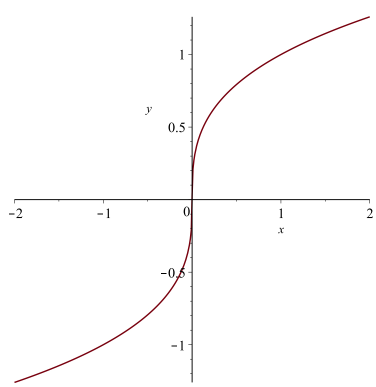
f ist nicht injektiv und nicht surjektiv.

b)



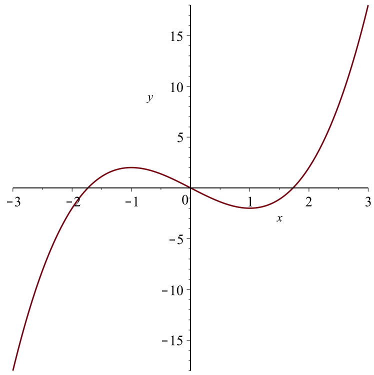
f ist bijektiv.

c)



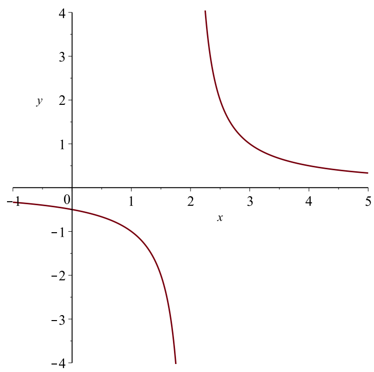
f ist bijektiv.

d)



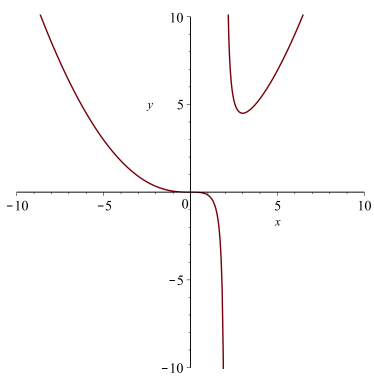
f ist surjektiv und nicht injektiv.

e)



f ist injektiv und nicht surjektiv.

f)



f ist surjektiv und nicht injektiv.

2.13

a) Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} y &= 3x-2 \\ y+2 &= 3x \\ x &= \frac{y+2}{3} \end{aligned}$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$, Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

b) Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+3}{x-3} \\ xy-3y &= x+3 \\ xy-x &= 3y+3 \\ x(y-1) &= 3y+3 \\ x &= \frac{3y+3}{y-1} \end{aligned}$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+3}{x-1}$, Definitionsbereich: $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

c) Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-7}{3x-6} \\ 3xy-6y &= x-7 \\ 3xy-x &= 6y-7 \\ x(3y-1) &= 6y-7 \\ x &= \frac{6y-7}{3y-1} \end{aligned}$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \dfrac{6x-7}{3x-1}$, Definitionsbereich: $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$

d) Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} y &= 8-2x^3 \\ 2x^3 &= 8-y \\ x^3 &= 4-\frac{y}{2} \\ x &= \sqrt[3]{4-\frac{y}{2}} \end{aligned}$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4-\frac{x}{2}}$, Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

e) Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{6-3x} \\ y^2 &= 6-3x, \qquad y \geq 0 \\ 3x &= 6-y^2, \qquad y \geq 0 \\ x &= 2-\frac{y^2}{3}, \qquad y \geq 0 \end{aligned}$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = 2-\frac{x^2}{3}$, Definitionsbereich: $[0,\infty[$

f) Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{5x-2}{3x+1}} \\ y^2 &= \frac{5x-2}{3x+1}, \qquad y \geq 0 \\ 3xy^2+y^2 &= 5x-2, \qquad y \geq 0 \\ 3xy^2-5x &= -y^2-2, \qquad y \geq 0 \\ x(3y^2-5) &= -y^2-2, \qquad y \geq 0 \\ x &= \frac{-y^2-2}{3y^2-5} = \frac{y^2+2}{5-3y^2} \end{aligned}$$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{5-3x^2}$, Definitionsbereich: $[0,\infty[\setminus\left\{\sqrt{\frac{5}{3}}\right\}$

2.14

Berechnung der Umkehrfunktion:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{ax+b}{cx+d} \\
cxy+dy &= ax+b \\
cxy-ax &= -dy+b \\
x(cy-a) &= -dy+b \\
x &= \frac{-dy+b}{cy-a}
\end{aligned}
$$

Also muss gelten:

$$
f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} = \frac{ax+b}{cx+d} = f(x)
$$

Dies ist der Fall für $a=-d$.

2.15

Der Graph der Funktion muss symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden $y=x$ sein.
Beispiele: $y=\frac{1}{x}$, $y=-x+15$.

2.16

Zurückgelegter Weg nach 10 s:

$$
s(10) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 10^2 = 150\,[\mathrm{m}]
$$

Berechnung der Umkehrfunktion:

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}at^2 \\
t^2 &= \frac{2s}{a} \\
t &= \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{3}}
\end{aligned}
$$

Damit betragen die gesuchten Zeiten:

$$\begin{aligned} t(25) &= \sqrt{\frac{2\cdot 25}{3}} \approx 4{,}08\,[\mathrm{s}] \\ t(50) &= \sqrt{\frac{2\cdot 50}{3}} \approx 5{,}77\,[\mathrm{s}] \\ t(75) &= \sqrt{\frac{2\cdot 75}{3}} \approx 7{,}07\,[\mathrm{s}] \\ t(100) &= \sqrt{\frac{2\cdot 100}{3}} \approx 8{,}16\,[\mathrm{s}] \end{aligned}$$

2.17

a) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1$

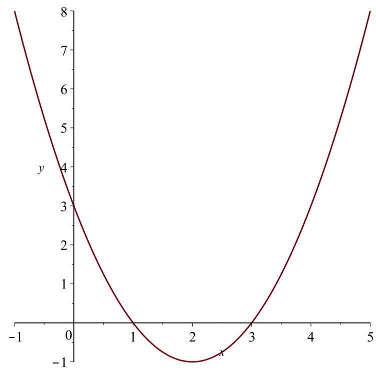
b) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(3x^4-2\right) = \sqrt{3x^4-2+2} = \sqrt{3x^4} = \sqrt{3}x^2$
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x+2}\right) = 3\sqrt{x+2}^4-2 = 3(x+2)^2-2$
$= 3(x^2+4x+4)-2 = 3x^2+12x+10$

c) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \sqrt[3]{x^2}$
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{x}\right) = \sqrt[3]{x}^2 = \sqrt[3]{x^2}$

d) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x}^2+\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}^2-1} = \dfrac{x+\sqrt{x}-3}{x-1}$
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x^2+x-3}{x^2-1}\right) = \sqrt{\dfrac{x^2+x-3}{x^2-1}}$

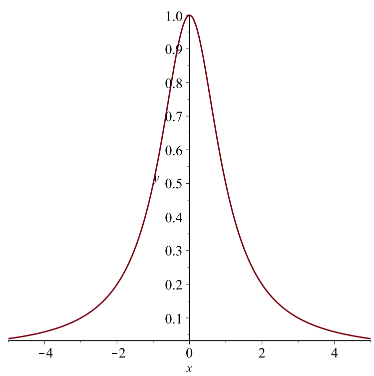
2.18

a)



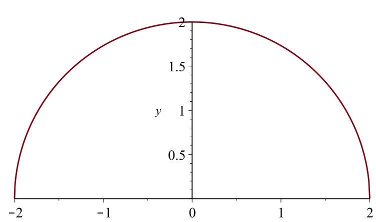
f ist nach unten beschränkt, nach oben nicht beschränkt und hat ein Minimum an der Stelle $(2,-1)$.

b)



f ist beschränkt, hat aber als Extremum nur ein Maximum an der Stelle $(0{,}1)$.

c)



f ist beschränkt, hat ein Maximum an der Stelle $(0{,}2)$ und zwei Minima an den Stellen $(-2{,}0)$, $(2{,}0)$.

2.19

a) Es sei $0 \leq x_1 < x_2$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{1}{10}\left(x_2^4 + 2x_2^2 + 4\right) - \frac{1}{10}\left(x_1^4 + 2x_1^2 + 4\right) \\ &= \frac{1}{10}\left(x_2^4 + 2x_2^2 + 4 - x_1^4 - 2x_1^2 - 4\right) = \frac{1}{10}\big(\underbrace{x_2^4 - x_1^4}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2 - x_1^2}_{\geq 0}\big) \\ &> 0, \end{aligned}$$

d. h. es ist $f(x_1) < f(x_2)$. Also ist f monoton wachsend.

b) Auflösen der Funktionsdarstellung nach x:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{10}\left(x^4 + 2x^2 + 4\right) \\ 10y &= x^4 + 2x^2 + 4 \\ 10y &= x^4 + 2x^2 + 1 + 3 \\ 10y &= \left(x^2 + 1\right)^2 + 3 \\ \left(x^2 + 1\right)^2 &= 10y - 3 \\ x^2 + 1 &= \sqrt{10y - 3} \\ x^2 &= \sqrt{10y - 3} - 1 \\ x &= \sqrt{\sqrt{10y - 3} - 1} \qquad (x \geq 0) \end{aligned}$$

Damit lautet die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion

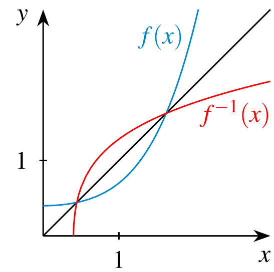
$$f^{-1}(x) = \sqrt{\sqrt{10x - 3} - 1}.$$

f^{-1} ist definiert, wenn

$$\begin{aligned} 10x - 3 \geq 0 \quad &\text{und} \quad \sqrt{10x - 3} - 1 \geq 0 \\ 10x \geq 3 \quad &\text{und} \quad \sqrt{10x - 3} \geq 1 \\ x \geq \frac{3}{10} \quad &\text{und} \quad 10x - 3 \geq 1^2 \\ x \geq \frac{3}{10} \quad &\text{und} \quad 10x \geq 4 \\ x \geq \frac{3}{10} \quad &\text{und} \quad x \geq \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ &x \geq \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Maximaler Definitionsbereich von f^{-1}: $\left[\frac{2}{5}, \infty\right[$

c)



3 Elementare Funktionen

Abschnitt 3.1 – Signum- und Betragsfunktion

3.1

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x+5| = 3\} \;=\; \{-8, -2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x-7| \leq 5\} \;=\;]-3,3[\cap [2,12] \;=\; [2,3[$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sgn}(x) + x > 0\} \;=\;]0,\infty[$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| - \operatorname{sgn}(x) \leq 1\} \;=\; [0,3]$

3.2

Abschnittsweise Schreibweise der Funktion f:

$$f(x) \;=\; x - 2|x| + (\operatorname{sgn}(x))^2 \;=\; \begin{cases} x - 2x + 1^2 = -x + 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 - 2\cdot 0 + 0^2 = 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ x + 2x + (-1)^2 = 3x + 1 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Damit lauten die Nullstellen von f: $1, 0, -\frac{1}{3}$

Abschnittsweise Schreibweise der Funktion g:

$$g(x) \;=\; \frac{x(x+|x|)}{2} + 2(x-|x|) - 2\operatorname{sgn}(x) \;=\; \begin{cases} \frac{x(x+x)}{2} + 2(x-x) - 2 = x^2 - 2 & \text{für} \quad x > 0 \\ \frac{0(0+0)}{2} + 2(0-0) - 2\cdot 0 = 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ \frac{x(x-x)}{2} + 2(x+x) + 2 = 4x + 2 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Damit lauten die Nullstellen von g: $\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}$

Abschnitt 3.2 – Ganze rationale Funktionen

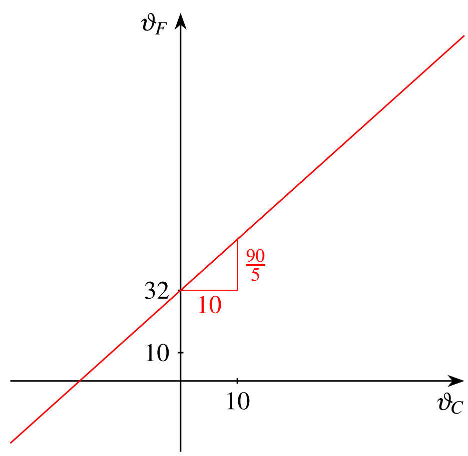
3.3

Allgemeine Geradengleichung: $y = a_1 x + a_0$
y-Achsenabschnitt: Absolutglied a_0
Steigung: Koeffizient a_1 von x
Nullstelle: $x = -\dfrac{a_0}{a_1}$

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
y-Achsenabschnitt	3	7	2	π	0	-1
Steigung	1	-2	$-\frac{3}{2}$	$-0{,}6$	$\frac{1}{100}$	100
Nullstelle	-3	$\frac{7}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}\pi$	0	$\frac{1}{100}$

3.4

a)



b) Wenn die Temperatur um 1 °Celsius steigt, steigt sie um $\frac{9}{5}$ °Fahrenheit. Bei 0 °Celsius beträgt die Temperatur 32 °Fahrenheit.

c) Auflösen der Gleichung nach ϑ_C:

$$\begin{aligned} \vartheta_F &= \frac{9}{5}\vartheta_C + 32 \\ \frac{9}{5}\vartheta_C &= \vartheta_f - 32 \\ \vartheta_C &= \frac{5}{9}\vartheta_F - \frac{160}{9} \end{aligned}$$

3.5

a) $l_0 = l(0) =$ Temperatur bei $0\,^\circ$C
b) $l(\vartheta) = l_0(1+\alpha\vartheta) = \underbrace{l_0}_{a_0} + \underbrace{l_0\alpha}_{a_1}\vartheta = a_0 + a_1\vartheta$

Es ist

$$l(38) = 6{,}4007$$
$$l(95) = 6{,}4007 + 0{,}0044 = 6{,}4051.$$

Damit ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{array}{rcl|l} 6{,}4007 &=& a_0 + a_1 \cdot 38 & - \\ 6{,}4051 &=& a_0 + a_1 \cdot 95 & + \\ \hline 0{,}0044 &=& a_1 \cdot 57 & \end{array}$$

Daraus ergibt sich:

$$a_1 = \frac{0{,}0044}{57} \approx 77{,}193 \cdot 10^{-6}\ \left[\tfrac{\mathrm{m}}{^\circ\mathrm{C}}\right]$$
$$a_0 = 6{,}4007 - a_1 \cdot 38 \approx 6{,}4007 - 77{,}193 \cdot 10^{-6} \cdot 38 = 6{,}3978\ [\mathrm{m}]$$

Also:

$$l(\vartheta) \approx 6{,}3978 + 77{,}193 \cdot 10^{-6} \cdot \vartheta$$
$$l(0) \approx 6{,}3978\ [\mathrm{m}]$$
$$l(20\,^\circ\mathrm{C}) \approx 6{,}3993\ [\mathrm{m}]$$
$$\alpha = \frac{a_1}{l_0} \approx 12{,}07 \cdot 10^{-6}\ \left[\tfrac{1}{^\circ\mathrm{C}}\right] \quad \text{(Eisen)}$$

3.6

Es gilt bei der Herstellung von x Stühlen

$$\text{Kosten}(x) = \text{Fixkosten} + \text{variable Kosten} \cdot x =: a_0 + a_1 x$$

Weiter gilt:

$$\text{Kosten}(800) = 102\,200 = a_0 + a_1 \cdot 800$$
$$\text{Kosten}(3\,500) = 342\,500 = a_0 + a_1 \cdot 3\,500$$

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten liefert

$$240\,300 = 2\,700\,a_1$$

bzw.

$$a_1 = 89.$$

Damit:

$$a_0 = 102\,200 - 89 \cdot 800 = 31\,000.$$

Demzufolge betragen die Fixkosten 31 000 € und die Kosten pro Stuhl 89 €.

3.7

Die Nullstellen der quadratischen Funktionen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

erhält man über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$$

Die Koordinaten des Scheitels $S(x_s|y_s)$ erhält man als

$$x_s = -\frac{a_1}{2a_2} \qquad y_s = f(x_s)$$

a) Nullstellen in diesem einfachen Fall:

$$x_{1/2}^2 = 9$$
$$x_{1/2} = \pm 3.$$

Scheitel:

$$x_s = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0$$
$$y_s = f(0) = 0^2 - 9 = -9$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet.

b) Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
x_{1/2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1 \\
x_1 &= -3, \qquad x_2 = -1
\end{aligned}
$$

Scheitel:

$$
\begin{aligned}
x_s &= -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2 \\
y_s &= f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1
\end{aligned}
$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet.

c) Nullstellen:

$$
x_{1/2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-1{,}125)}}{2 \cdot (-0{,}5)} = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2{,}25}}{1} = 1{,}5
$$

Scheitel:

$$
\begin{aligned}
x_s &= -\frac{1{,}5}{2 \cdot (-0{,}5)} = 1{,}5 \\
y_s &= f(1{,}5) = 0
\end{aligned}
$$

Die Parabel ist nach unten geöffnet.

3.8

a) Substitution $z = x^2$:

$$
z^2 - 8z + 16 = (z-4)^2
$$

Nullstellen in z:

$$
z_{1/2} = 4
$$

Nullstellen der biquadratischen Funktion:

$$
x_{1/2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2
$$

b) Substitution $z = x^2$:

$$z^2 - 20z + 64$$

Berechnung der Nullstellen:

$$z_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2} = 10 \pm 6$$

Nullstellen in z:

$$z_1 = 16, \qquad z_2 = 4$$

Nullstellen der biquadratischen Funktion:

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4, \qquad x_{3/4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2,$$

c) Substitution $z = x^2$:

$$-4z^2 + 6z + 18$$

Berechnung der Nullstellen:

$$z_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 18}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-6 \pm \sqrt{324}}{-8} = \frac{6 \mp 18}{8} = \frac{3 \mp 9}{4}$$

Nullstellen in z:

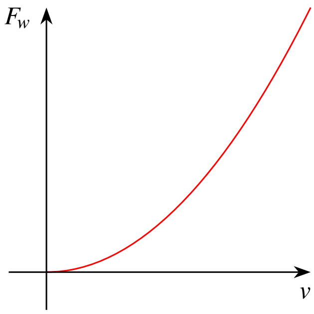
$$z_1 = -\frac{3}{2}, \qquad z_2 = 3$$

Nullstellen der biquadratischen Funktion nur aus $z_2 = 3$ möglich:

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

3.9

a) Quadratische Abhängigkeit von v, also handelt es sich um eine Parabel.



b) Es ist

$$F_w(2v) = \frac{1}{2}c_w A\rho(2v)^2 = 4\cdot\frac{1}{2}c_w A\rho v^2 = 4F_w(v),$$

d. h. eine Verdoppelung der Geschwindigkeit v bedeutet eine Vervierfachung des Luftwiderstands. Für eine Verdoppelung des Luftwiderstands muss für die neue Geschwindigkeit $\bar{v}$ gelten

$$F_w(\bar{v}) = \frac{1}{2}c_w A\rho\bar{v}^2 = 2F_w(v) = 2\cdot\frac{1}{2}c_w A\rho v^2,$$

bzw.

$$\begin{aligned}\bar{v}^2 &= 2v^2\\ \bar{v} &= \sqrt{2}v\end{aligned}$$

d. h. bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit um den Faktor $\sqrt{2}$ verdoppelt sich der Luftwiderstand.

c)

$v\,\left[\frac{km}{h}\right]$	50	90	120	180
$F_w\,[N]$	72	232	413	928

d) Man misst bei einer gegebenen Windgeschwindigkeit $\hat{=}$ Fahrgeschwindigkeit v die auf das Auto wirkende Kraft $\hat{=}$ Luftwiderstand F_w. Dann ergibt sich

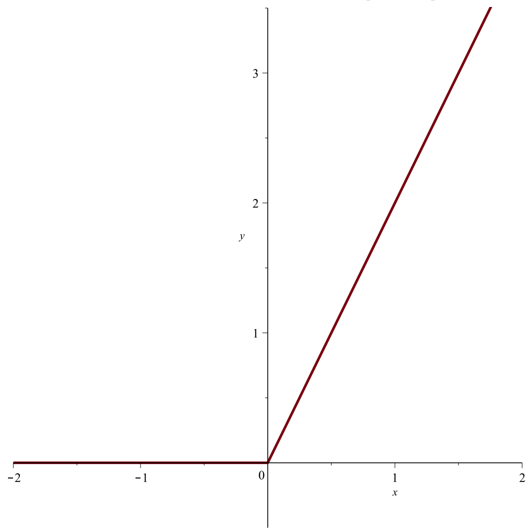
$$c_w = \frac{2F_w}{A\rho v^2}.$$

3.10

Abschnittsweise Schreibweise der Funktionen:

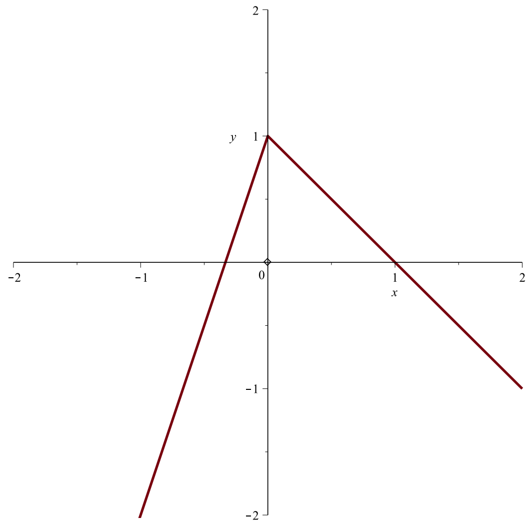
$$\begin{aligned} f(x) &= x + |x| \\ &= \begin{cases} x + (-x) = 0 & \text{für } x < 0 \\ x + x = 2x & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Damit lauten die Nullstellen von f: $]-\infty,0]$



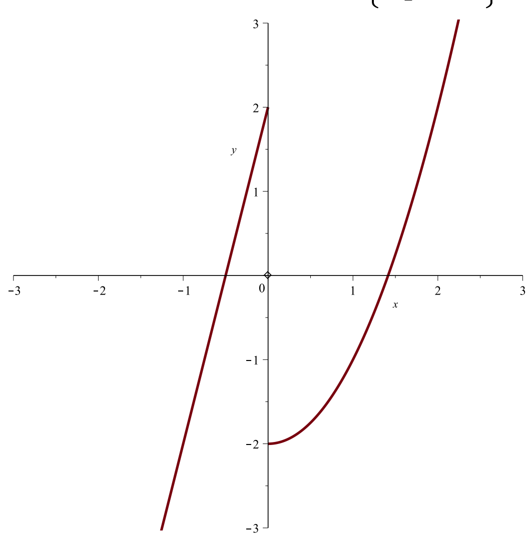
$$\begin{aligned} g(x) &= x - 2|x| + (\operatorname{sgn}(x))^2 \\ &= \begin{cases} x - 2(-x) + (-1)^2 = 3x + 1 & \text{für } x < 0 \\ 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 & \text{für } x = 0 \\ x - 2x + 1^2 = -x + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Damit lauten die Nullstellen von g: $\left\{-\frac{1}{3}, 0, 1\right\}$



$$h(x) = \frac{x(x+|x|)}{2} + 2(x-|x|) - 2\,\mathrm{sgn}(x)$$
$$= \begin{cases} \frac{x(x+(-x))}{2} + 2(x-(-x)) - 2\cdot(-1) & = 4x+2 \quad \text{für} \quad x<0 \\ \frac{0(0+0))}{2} + 2(0-0) - 2\cdot 0 & = 0 \quad \text{für} \quad x=0 \\ \frac{x(x+x))}{2} + 2(x-x)) - 2\cdot 1 & = x^2-2 \quad \text{für} \quad x>0 \end{cases}$$

Damit lauten die Nullstellen von g: $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$



3.11

a)

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -5 & 2 \\ - & & -2 & 1 & 4 \\ \hline & 2 & -1 & -4 & 6 = f(-1) \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -5 & 2 \\ - & & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 1 & -5 & 2 = f(0) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -5 & 2 \\ - & & 2 & 3 & -2 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 = f(1) \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -5 & 2 \\ - & & 4 & 10 & 10 \\ \hline & 2 & 5 & 5 & 12 = f(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & -5 & 2 \\ - & & 6 & 21 & 48 \\ \hline & 2 & 7 & 16 & 50 = f(3) \end{array}$$

b) $x_1 = 1$ ist nach (a) eine Nullstelle.

$$\begin{array}{l} (2x^3+x^2-5x+2):(x-1) \;=\; 2x^2+3x-2 \\ \underline{2x^3-2x^2} \\ \quad 3x^2-5x \\ \quad \underline{3x^2-3x} \\ \qquad -2x+2 \\ \qquad \underline{-2x+2} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Die weiteren Nullstellen berechnen sich über:

$$2x^2+3x-2 \;=\; 0$$

$$x_{2/3} \;=\; \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} \;=\; \frac{-3\pm\sqrt{25}}{4} \;=\; \frac{-3\pm 5}{4}$$

$$x_2 \;=\; \frac{1}{2}, \qquad x_3 \;=\; -2$$

c) $f(x) \;=\; 2\,(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$

3.12

a) $f(x) \;=\; (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \;=\; x^4-5x^2+4$

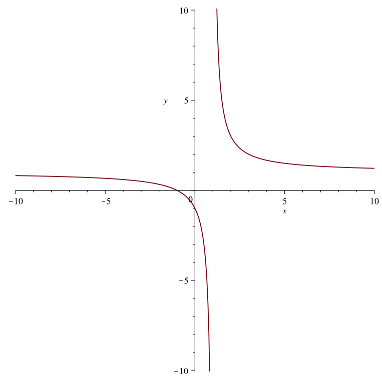
b)
$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\tfrac{4}{5}\right)^2(x+2)^3 \\ &= x^8+\tfrac{22}{5}x^7+\tfrac{1}{25}x^6-\tfrac{514}{25}x^5-\tfrac{356}{25}x^4+\tfrac{136}{5}x^3+\tfrac{384}{25}x^2-\tfrac{384}{25}x \end{aligned}$$

$g(x) = 25\cdot f(x)$ hat die gleichen Nullstellen, aber ganzzahlige Koeffizienten.

Abschnitt 3.3 – Gebrochene rationale Funktionen

3.13

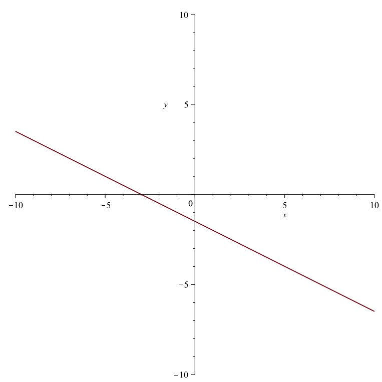
a)



Definitionsbereich: $A = \mathbb{R} \backslash \{1\}$

Pol an der Stelle $x = 1$

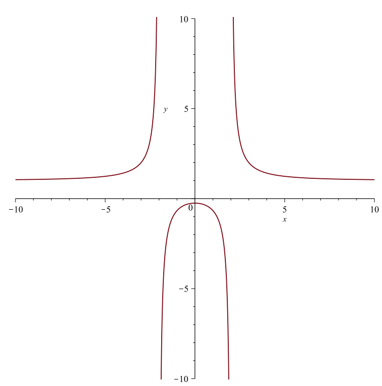
b)



Definitionsbereich: $A = \mathbb{R} \backslash \{3\}$

hebbare Lücke an der Stelle $x = 3$

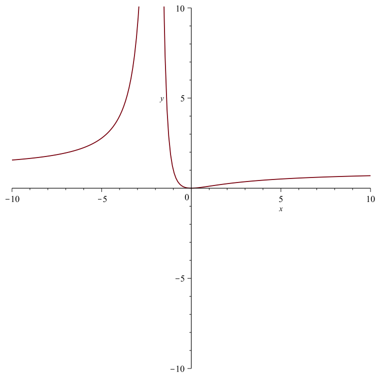
c)



Definitionsbereich: $A = \mathbb{R} \backslash \{2, -2\}$

Pol an der Stelle $x_1 = 2$ und Pol an der Stelle $x_2 = -2$

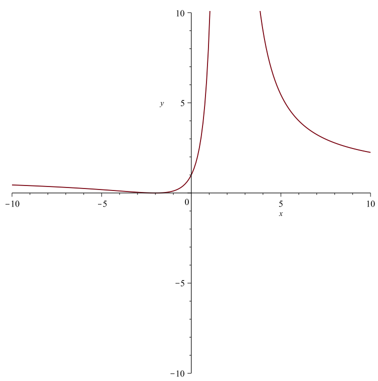
d)



Definitionsbereich: $A = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Pol an der Stelle $x_1 = -2$

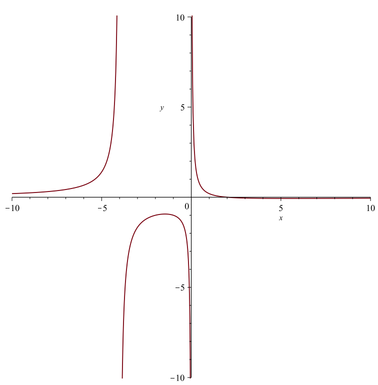
e)



$x^2 - 4x + 4 \;=\; (x-2)^2$
Definitionsbereich: $A = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

Pol an der Stelle $x_1 = 2$

f)



$$x^3 + 2x^2 - 8x \;=\; x(x^2 + 2x - 8)$$

$$x^2 + 2x - 8 \;=\; 0$$

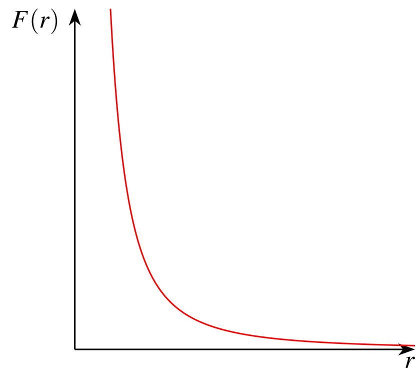
$$x_{1/2} \;=\; \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} \;=\; \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$=\; \frac{-2 \pm 6}{2} \;=\; -1 \pm 3$$

Definitionsbereich: $A = \mathbb{R}\setminus\{0,2,-4\}$

Pol an der Stelle $x_1 = 0$, hebbare Lücke an der Stelle $x_2 = 2$, Pol an der Stelle $x_3 = -4$

3.14

a) 

Die Anziehungskraft geht für $r \to 0$ gegen unendlich.

b) Einsetzen der gegebenen Werte:

$$F(6\,370 \cdot 10^3 + 8872) = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}973 \cdot 10^{24} \cdot 75}{(6\,370 \cdot 10^3 + 8872)^2}\,\mathrm{N} \approx 734{,}3\,\mathrm{N}$$

Abschnitt 3.4 – Allgemeine Potenz- und algebraische Funktionen

3.15

a) $x^3 \cdot x^2 = x^{3+5} = x^5$

b) $x^{-3} \cdot x^{\frac{9}{2}} = x^{-3+\frac{9}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

c) $\dfrac{x^{17}}{x^{19}} = x^{17-19} = x^{-2}$

d) $\left(x^3\right)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$

e) $x^{\left(3^2\right)=x^9}$

f) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}} = x^2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{2-\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$

g) $\dfrac{3x^{\frac{5}{2}}}{x\sqrt{9x}} = \dfrac{3x^{\frac{5}{2}}}{3x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = x$

h) $\dfrac{x^{2m}}{x^{(m+n)}} = x^{2m-(m+n)} = x^{m-n}$

3.17

Ganze rationale Funktionen $y = p(x)$ erfüllen die Gleichung

$$p(x) + (-1)y = 0.$$

Gebrochene rationale Funktionen $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ erfüllen die Gleichung

$$p(x) + \big(-q(x)\big)y = 0.$$

Abschnitt 3.5 – Trigonometrische Funktionen

3.18

a) Mit x der Winkel in Bogenmaß, α der Winkel in Grad (°) und t der Winkel in gon gilt:

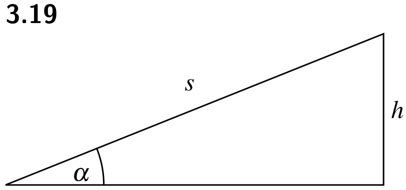
$$\begin{aligned} t &= \frac{400\,\text{gon}}{2\pi}\cdot x \\ t &= \frac{400\,\text{gon}}{360^\circ}\cdot \alpha \\ x &= \frac{2\pi}{400\,\text{gon}}\cdot t \\ \alpha &= \frac{360^\circ}{400\,\text{gon}}\cdot t \end{aligned}$$

b)

Bogenmaß	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
Grad	90°	180°	45°	30°	60°
gon	100 gon	200 gon	50 gon	$33{,}\overline{3}$ gon	$66{,}\overline{6}$ gon

Bogenmaß	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{11}{9}\pi$	$\frac{359}{360}\pi$	$\frac{9}{4}\pi$
Grad	9°	330°	220°	359°	405°
gon	10 gon	$366{,}\overline{6}$ gon	$244{,}\overline{4}$ gon	$398{,}8$ gon	450 gon

3.19



Es ist

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{s}$$

Dabei ist

$$s = v\cdot t = \frac{60\cdot 1\,000\,\text{m}}{3\,600\,\text{s}}\cdot 60\,\text{s} = 1\,000\text{m}$$

und

$$\alpha = \arctan(0{,}07).$$

Damit:

$$h = s\cdot\sin(\alpha) = 1\,000\text{m}\cdot\sin\left(\arctan(0{,}07)\right) \approx 69{,}83\,\text{m}$$

3.20

a) $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 52^\circ$

$c = \sqrt{(45{,}10-3{,}30)^2+(3{,}90-5{,}80)^2} \approx 41{,}84$

b) Nach dem Sinussatz gilt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha) \approx 50{,}78 \\ b &= \frac{c}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\beta) \approx 43{,}50 \end{aligned}$$

c) Die Seite c ist um einen Winkel φ zur x-Achse nach unten geneigt:

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{3{,}90 - 5{,}80}{45{,}10 - 3{,}30} \\ |\varphi| &= \left| \arctan\left(\frac{-1{,}90}{41{,}80}\right) \right| \approx 2{,}6^\circ \end{aligned}$$

Damit lauten die Koordinaten (x,y) von C

$$\begin{aligned} x &= 3{,}30 + b \cdot \cos(\alpha - |\varphi|) \approx 17{,}89 \\ y &= 5{,}80 + b \cdot \sin(\alpha - |\varphi|) \approx 46{,}78 \end{aligned}$$

3.21

a) Die Lösungen lauten:

$$\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \qquad \text{und} \qquad \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

b) Es ist $\tan x = 1$, wenn $\sin x = \cos x$.
Damit lauten alle Lösungen:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi$$

c) Es ist $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$, wenn $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oder $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.
Damit lauten alle Lösungen:

$$k\pi \qquad \text{und} \qquad \frac{\pi}{3} + k\pi$$

d) Es ist $\tan\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 1$, wenn $2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ bzw. $2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.
Damit lauten alle Lösungen:

$$-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

e) Es ist $\sqrt{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, wenn $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ bzw. $x-\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$ oder $x-\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}+2k\pi$.
Damit lauten alle Lösungen:

$$2k\pi \qquad \text{und} \qquad \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

f) Es ist $\sin(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$, wenn $\sin^2(x) = 1-\sin^2(x)$ und $\sin(x) \geq 0$ bzw. $\sin^2(x) = \frac{1}{2}$ und $\sin(x) \geq 0$ bzw. $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Damit lauten alle Lösungen:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{und} \qquad \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$$

3.22

a) Der Summand b in $f(x+b)$ bewirkt bei jeder Funktion eine Verschiebung um b entgegen der x-Achse.

b) Der Faktor a in $f(ax)$ bewirkt bei jeder Funktion eine Stauchung mit a in x-Richtung.

c) $f(ax+b)$ bedeutet eine Stauchung mit a in x-Richtung und eine Verschiebung um b entgegen der x-Achse.

3.23

Es genügt, den Leuchtanteil auf dem Intervall $[0,\pi]$ des Arguments $\varphi = 2\pi f t$ der Sinusfunktion zu untersuchen. Die Lampe zündet, wenn

$$\begin{aligned} 230\sqrt{2}\sin(\varphi_Z) &= 150 \qquad \text{und} \qquad \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \varphi_Z &= \arcsin\left(\frac{150}{230\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}479. \end{aligned}$$

Die Lampe löscht, wenn

$$\begin{aligned} 230\sqrt{2}\sin(\varphi_L) &= 90 \qquad \text{und} \qquad \varphi > \frac{\pi}{2} \\ \varphi_L &= \pi - \arcsin\left(\frac{90}{230\sqrt{2}}\right) \approx 2{,}861. \end{aligned}$$

Der Anteil, in welchem die Glimmlampe leuchtet, beträgt also

$$\frac{\varphi_L - \varphi_Z}{\pi} \approx 0{,}758 = 75{,}8\,\%.$$

3.24

a) Überall beträgt die Periode 365 Tage, d. h. es ist

$$a = \frac{2\pi}{365} \approx 0{,}0172$$

. Am 21. März, also für $t = 80$, gilt $\sin(at + b) = 0$ bzw. $at + b = 0$. Damit ist

$$b = -80a = -80\frac{2\pi}{365} = -\frac{32}{73}\pi \approx -1{,}377.$$

b) Für den längsten Tag gilt

$$16{,}5 = 12 + c \cdot 1,$$

d. h. es ist

$$c = 4{,}5$$

und der kürzeste Tag hat die Dauer

$$12 - c = 12 - 4{,}5 = 7{,}5.$$

c) In den Fällen $c \geq 12$ oder $x \leq -12$ würde die Dauer des Tages zeitweise mehr als 24 Stunden bzw. weniger als 0 Stunden dauern. Real wird in diesem Fall die sinusförmige Funktion $L(t)$ nach oben durch den Wert 24 bzw. nach unten durch den Wert 0 gekappt.

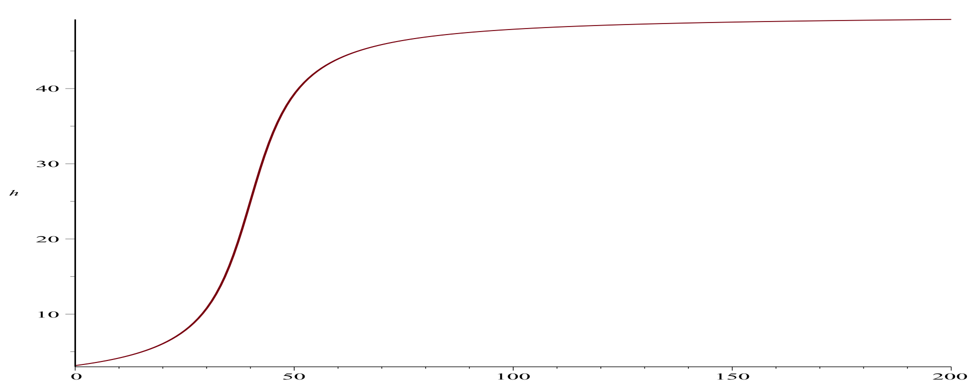
3.25

$$\sin(\arccos(x)) \overset{\arccos(x)\in[0,\pi]}{=} \sqrt{\sin^2((\arccos(x))} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(\arcsin(x)) \overset{\arcsin(x)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{=} \sqrt{\cos^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$$

3.26

a)



b) Maximale Höhe:

$$h_{max} = 25 + \frac{50}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 25 + 25 = 50\,[\mathrm{m}]$$

Damit ergibt sich nach 200 bzw. 1 000 Jahren:

$$\begin{aligned} h(200) &= 25 + \frac{50}{\pi} \arctan\left(\frac{200-40}{8}\right) = 25 + \frac{50}{\pi}\arctan(20) \approx 49{,}20\,[\mathrm{m}] \\ &\approx 98{,}4\,\%\, h_{max} \\ h(1\,000) &= 25 + \frac{50}{\pi} \arctan\left(\frac{1\,000-40}{8}\right) = 25 + \frac{50}{\pi}\arctan(120) \approx 49{,}87\,[\mathrm{m}] \\ &\approx 99{,}7\,\%\, h_{max} \end{aligned}$$

Der Zeitpunkt mit 90 % der Maximalhöhe erhält man über folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} h(t) &= 25 + \frac{50}{\pi} \arctan\left(\frac{t-40}{8}\right) = 0{,}9 \cdot 50 = 45 \\ \frac{50}{\pi} \arctan\left(\frac{t-40}{8}\right) &= 20 \\ \arctan\left(\frac{t-40}{8}\right) &= \frac{2}{5}\pi \\ \frac{t-40}{8} &= \tan\left(\frac{2}{5}\pi\right) \\ t &= 40 + 8\tan\left(\frac{2}{5}\pi\right) \approx 64{,}6\,[\mathrm{a}] \end{aligned}$$

Für 95 % ergibt sich analog:

$$t = 40 + 8\tan\left(\frac{45}{100}\pi\right) \approx 90{,}5\,[\mathrm{a}]$$

c) Höhe zum Zeitpunkt der Pflanzung:

$$h(0) = 25 + \frac{50}{\pi} \arctan\left(\frac{-40}{8}\right) = 25 + \frac{50}{\pi}\arctan(-5) \approx 3{,}14\,[\mathrm{m}]$$

Die arctan-Funktion hat an der Stelle $x = 0$ die stärkste Steigung. Demzufolge ist das Wachstum maximal, wenn $\frac{t-40}{8} = 0$, also für $t = 40\,[\mathrm{m}]$.

Abschnitt 3.6 – Exponentialfunktion und Logarithmus

3.27

a) $2^5 = 32$

b) $4^3 = 64$

c) $2^10 = 1\,024$

d) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

e) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000}$

f) $16^{2,5} = 16^{\frac{5}{2}} = \sqrt{16}^5 = 4^5 = 1\,024$

g) $81^{1,25} = 81^{\frac{5}{4}} = \left(3^4\right)^{\frac{5}{4}} = 3^5 = 243$

h) $2{,}25^{0,5} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$

3.28

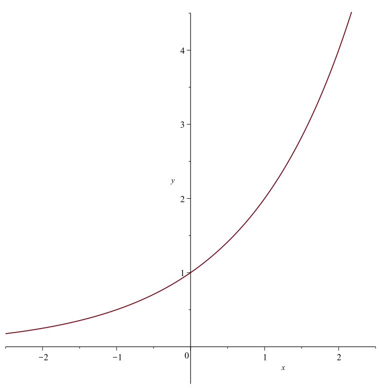
$1\,\text{KB} = 2^{10}\,\text{Byte} = 1\,024\,\text{Byte}$

$1\,\text{MB} = 2^{10}\,\text{KB} = 2^{20}\,\text{Byte} = 1\,048\,576\,\text{Byte}$

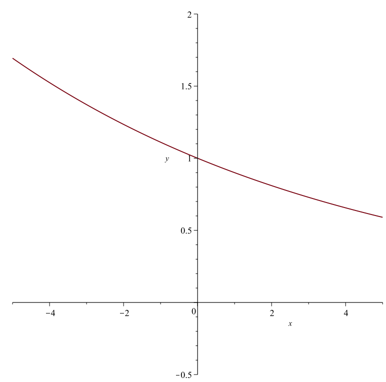
$1\,\text{GB} = 2^{10}\,\text{MB} = 2^{30}\,\text{Byte} = 1\,073\,741\,824\,\text{Byte}$

3.29

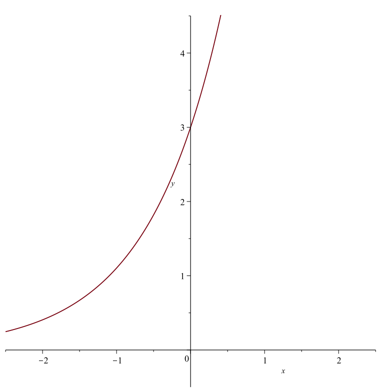
a)



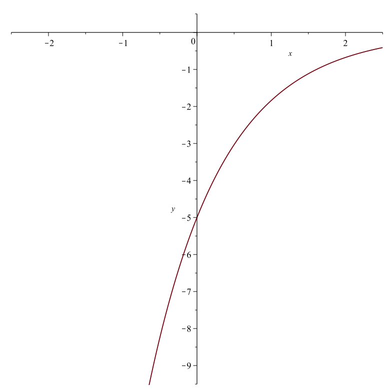
b)



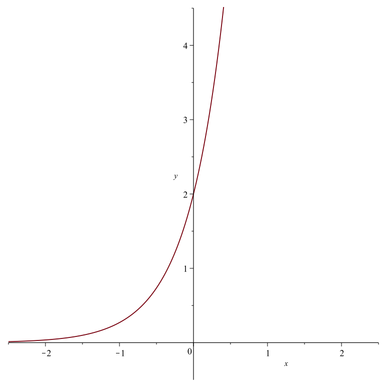
c)



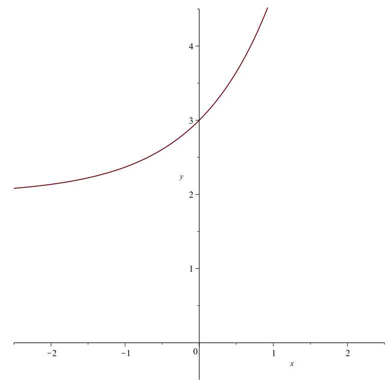
d)



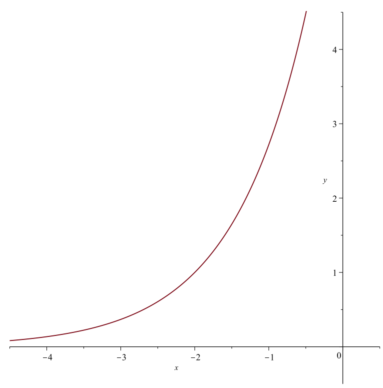
e)



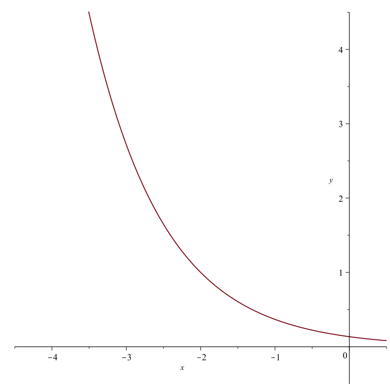
f)



g)



h)



3.30

a) Äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned} e^x &\geq 100 \\ x &\geq \ln(100) \approx 4{,}6 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist ab $x = 5$ gültig.

b) Äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned} e^{2x} &\geq 1\,000 \\ 2x &\geq \ln(1\,000) \\ x &\geq \frac{\ln(1\,000)}{2} \approx 3{,}5 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist ab $x = 4$ gültig.

c) Äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned} e^{20x} &\leq 0{,}001 \\ 20x &\leq \ln(0{,}001) \\ x &\leq \frac{\ln(0{,}001)}{20} \approx -0{,}3 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist bis $x = -1$ gültig.

d) Äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned} e^{x} &\geq 10^9 \\ x &\geq \ln\left(10^9\right) = 9\ln(10) \approx 20{,}7 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist ab $x = 21$ gültig.

e) Äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned} e^{-x} &\leq 10 \\ -x &\leq \ln(10) \\ x &\geq -\ln(10) \approx -2{,}3 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist ab $x = -2$ gültig.

f) Äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned} 3e^{10x} &\leq 8^8 \\ e^{10x} &\leq \frac{8^8}{3} \\ 10x &\leq \ln\left(\frac{8^8}{3}\right) \\ x &\leq \frac{\ln\left(\frac{8^8}{3}\right)}{10} \approx 1{,}6 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist bis $x = 1$ gültig.

g) Äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned} -2e^{-5x} &\geq -10^{-6} \\ 2e^{-5x} &\leq 10^{-6} \\ e^{-5x} &\leq \frac{10^{-6}}{2} \\ -5x &\leq \ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right) \\ x &\geq -\frac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right)}{5} \approx 2{,}9 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist ab $x = 3$ gültig.

h) Äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned}
3e^{-\sqrt{x}} &\leq 10^{12} \\
e^{-\sqrt{x}} &\leq \frac{10^{12}}{3} \\
-\sqrt{x} &\leq \ln\left(\frac{10^{12}}{3}\right) \\
\sqrt{x} &\geq \underbrace{-\ln\left(\frac{10^{12}}{3}\right)}_{\leq 0} \\
x &\geq 0
\end{aligned}$$

Die Ungleichung ist ab $x = 0$ gültig.

i) Äquivalente Umformung:

$$\begin{aligned}
e^x \cdot e^{\sqrt{x}} &\geq 10^4 \\
e^{\frac{3}{2}x} &\geq 10^4 \\
\frac{3}{2}x &\geq \ln\left(10^4\right) = 4\ln(10) \\
x &\geq \frac{8}{3}\ln(10) \approx 6{,}1
\end{aligned}$$

Die Ungleichung ist ab $x = 7$ gültig.

3.31

Die D-Mark existierte 54 Jahre, d. h. die Preise stiegen auf das $1{,}027^{54} \approx 4{,}2$-Fache. Demzufolge hatte die D-Mark bei ihrer Ablösung noch eine Kaufkraft von $\frac{1}{1{,}027^{54}} \approx 0{,}24 = 24\,\%$ der ursprünglichen Kaufkraft.
Berechnung der Halbwertszeit der Kaufkraft:

$$\begin{aligned}
2 &= 1{,}027^t = e^{t \cdot \ln(1{,}027)} \\
\ln(2) &= t \cdot \ln(1{,}027) \\
t &= \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}027)} \approx 26\,[\mathrm{a}]
\end{aligned}$$

3.32

a) Stromstärken:

$$\begin{aligned}
t = 0\,\mathrm{s}: \quad & I(0\,\mathrm{s}) &=& \tfrac{U}{R}\cdot e^{-\frac{0\,\mathrm{s}}{RC}} &=& 2{,}40\cdot 10^{-6}\,\mathrm{A} &:=& I_0\\
t = 0{,}25\,\mathrm{s}: \quad & I(0{,}25\,\mathrm{s}) &=& \tfrac{U}{R}\cdot e^{-\frac{0{,}25\,\mathrm{s}}{RC}} &=& 8{,}83\cdot 10^{-7}\,\mathrm{A} &\approx& 0{,}37\cdot I_0\\
t = 0{,}5\,\mathrm{s}: \quad & I(0{,}5\,\mathrm{s}) &=& \tfrac{U}{R}\cdot e^{-\frac{0{,}5\,\mathrm{s}}{RC}} &=& 3{,}25\cdot 10^{-7}\,\mathrm{A} &\approx& 0{,}14\cdot I_0\\
t = 1\,\mathrm{s}: \quad & I(1\,\mathrm{s}) &=& \tfrac{U}{R}\cdot e^{-\frac{1\,\mathrm{s}}{RC}} &=& 4{,}40\cdot 10^{-8}\,\mathrm{A} &\approx& 0{,}02\cdot I_0\\
t = 10\,\mathrm{s}: \quad & I(10\,\mathrm{s}) &=& \tfrac{U}{R}\cdot e^{-\frac{10\,\mathrm{s}}{RC}} &=& 1{,}02\cdot 10^{-23}\,\mathrm{A} &\approx& 4\cdot 10^{-18}\cdot I_0
\end{aligned}$$

b) Zur Halbwertszeit gilt

$$\frac{U}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{2}I(0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{U}{R}$$

bzw.

$$e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{2}.$$

Daraus erhalten wir

$$-\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

bzw.

$$t = -RC\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -5\cdot 10^{6}\,\Omega\cdot 50\cdot 10^{-9}\,\mathrm{F}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}17\,\mathrm{s}.$$

3.33

a) Verschiebung um 3 in y-Richtung.

b) Dehnung um den Faktor 2 in y-Richtung.

c) Spiegelung an der x-Achse.

d) Spiegelung an der y-Achse.

e) Spiegelung an der y-Achse und anschließend an der x-Achse = Punktspiegelung am Ursprung.

f) Verschiebung um 2 in x-Richtung.

g) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x)$, also Spiegelung an der x-Achse.

h) $y = 2\ln\left(\sqrt{x}\right) = 2\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}\ln(x) = \ln(x)$, also Identität.

i) $y = \ln(2) \cdot \log_2(x) = \ln(2) \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \ln x$, also Identität.

3.34

Bei einem Außenradius von $r_a = 13{,}6\,\mathrm{mm}$ ergibt sich eine Außentemperatur von

$$\vartheta(13{,}6) = 357^\circ - 993^\circ \ln\left(\frac{13{,}6}{12{,}6}\right) \approx 281^\circ.$$

In der Wandmitte beträgt die Temperatur

$$\vartheta(13{,}1) = 357^\circ - 993^\circ \ln\left(\frac{13{,}1}{12{,}6}\right) \approx 318^\circ.$$

Damit an der Außenwand eine Temperatur von 80° herrscht, muss sein:

$$\begin{aligned}
80^\circ &= 357^\circ - 993^\circ \ln\left(\frac{r_a}{12{,}6}\right)\\
\ln\left(\frac{r_a}{12{,}6\,\mathrm{mm}}\right) &= \frac{357^\circ - 80\circ}{993^\circ}\\
\frac{r_a}{12{,}6\,\mathrm{mm}} &= e^{\frac{277}{993}}\\
r_a &= 12{,}6\,\mathrm{mm} \cdot e^{\frac{277}{993}} \approx 16{,}7\,\mathrm{mm}
\end{aligned}$$

3.35

Es gilt:

$$\begin{aligned}
F_R &= \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)\\
10^{F_R} &= \frac{I}{I_0}\\
I &= I_0 \cdot 10^{F_R}
\end{aligned}$$

Damit gilt für das Verhältnis der Auslenkungen I_C in Chile und I_S in San Francisco:

$$\frac{I_C}{I_S} = \frac{I_0 \cdot 10^{9,5}}{I_0 \cdot 10^{8,3}} = \frac{10^{9,5}}{10^{8,3}} \approx 15{,}8$$

d. h. das Erdbeben in Chile hatte eine um den Faktor 15,8 höhere Auslenkung gegenüber dem in San Francisco.

3.36

a) Bei der Hörbarkeitsschwelle I_0 gilt:

$$L(I_0) = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = 10 \cdot \lg(1) = 10 \cdot \frac{\ln(1)}{\ln(10)} = 0\,[\mathrm{dB}]$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} L &= \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ 10^L &= \frac{I}{I_0} \\ I &= I_0 \cdot 10^L \end{aligned}$$

Damit gilt für das Verhältnis der Intensitäten I_R zu I_S

$$\frac{I_R}{I_S} = \frac{I_0 \cdot 10^{12}}{I_0 \cdot 10^8} = \frac{10^{12}}{10^8} = 10^4 = 10\,000,$$

d. h. Rockmusik hat eine um den Faktor 10 000 höhere Schallintensität gegenüber einem Staubsauger.

Kontrolle durch Ausrechnen der Schallintensitäten:

$$\begin{aligned} I_S &= I_0 \cdot 10^8 = 10^{-12} \cdot 10^8 \cdot = 10^{-4} = 0{,}0001 \left[\frac{\mathrm{Watt}}{\mathrm{m}^2}\right] \\ I_R &= I_0 \cdot 10^{12} = 10^{-12} \cdot 10^{12} = 1 \left[\frac{\mathrm{Watt}}{\mathrm{m}^2}\right] \\ &= 10\,000 \cdot 0{,}0001 = 10\,000\, I_S \end{aligned}$$

3.37

a) $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$

b) $\cosh(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

c) $\cosh(x) + \sinh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^x}{2} = e^x$

d) $\cosh(x) - \sinh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$

e) $\sinh(x)\cosh(y)+\cosh(x)\sinh(y) \;=\; \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}+\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$

$$= \frac{e^xe^y+e^xe^{-y}-e^{-x}e^y-e{-}xe{-}y+e^xe^y-e^xe^{-y}+e^{-x}e^y-e{-}xe{-}y}{4}$$

$$= \frac{2e^xe^y-2e^{-x}e^{-y}}{4} \;=\; \frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2} \;=\; \sinh(x+y)$$

f) Nach (e) gilt: $\sinh(2x) \;=\; \sinh(x+x) \;=\; \sinh(x)\cosh(x)+\cosh(x)\sinh(x) \;=\; 2\sinh(x)\cosh(x)$

g) $\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sin(y)$

$$= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

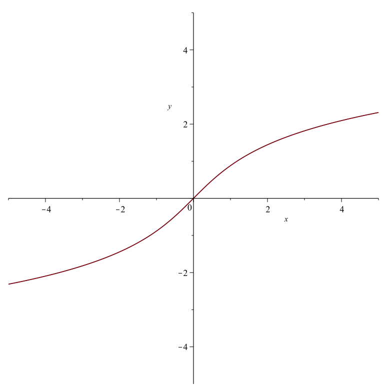
$$= \frac{e^xe^y+e^xe^{-y}+e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}+e^xe^y-e^xe^{-y}-e^{-x}e^y+e^{-x}e^{-y}}{4}$$

$$= \frac{2e^xe^y+2e^{-x}e^{-y}}{4} \;=\; \frac{e^{x+y}+e^{x-y}}{2} \;=\; \cosh(x+y)$$

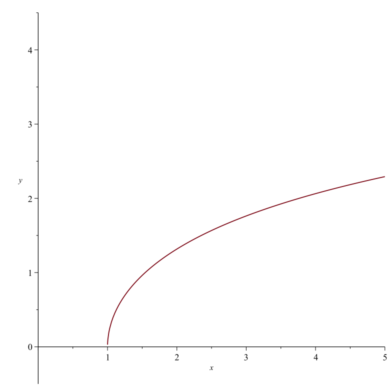
h) Nach (e) gilt: $\cosh(2x) \;=\; \cosh(x+x) \;=\; \cosh(x)\cosh(x)+\sinh(x)\sinh(x) \;=\; \cosh^2(x)+\sinh^2(x)$

3.38

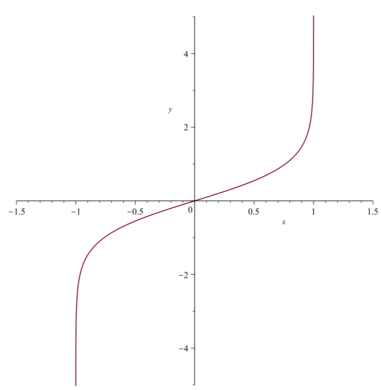
a)



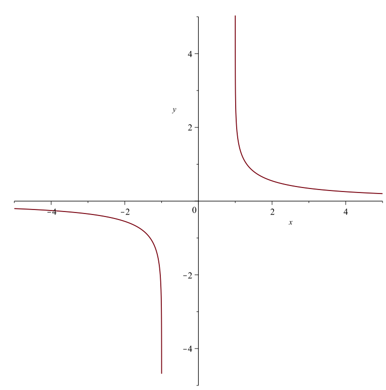
b)



c)



d)



3.39

a) $e^{\pi i} = e^0(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 1(-1 + i \cdot 0) = -1$

b) $e^{\frac{\pi}{2}i} = e^0\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1(0 + i) = i$

c) $e^{\frac{\pi}{4}i} = e^0\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$

d) $e^{1-\frac{\pi}{3}i} = e^1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = e\left(\frac{1}{2} + i \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right) = \frac{e}{2} - \frac{e}{2}\sqrt{3}\,i$

e) $e^{2+4\pi i} = e^2(\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)) = e^2(1 + i \cdot 0) = e^2$

f) $e^{1+i} = e^1(\cos(1) + i\sin(1)) = e\cos(1) + e\sin(1)i \approx 1{,}469 + 2{,}287\,i$

3.40

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \qquad \sin(\varphi) = -\frac{i}{2}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

$$\cosh(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right) \qquad \sinh(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right)$$

Damit gilt:

a) $\cos(y) = \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right) = \cosh(iy)$

b) $\sin(y) = -\frac{i}{2}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right) = -i \cdot \frac{1}{2}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right) = -i\sinh(iy)$

c) $\cos(iy) = \frac{1}{2}\left(e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i^2y} + e^{-i^2y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right) = \cosh(y)$

d) $-i\sin(iy) = -i\left(-\frac{i}{2}\left(e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}\right)\right) = \frac{i^2}{2}\left(e^{i^2y} - e^{-i^2y}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{-y} - e^{y}\right)$
$= \frac{1}{2}\left(-e^{-y} + e^{y}\right) = \sinh(y)$

4 Lineare Gleichungssysteme

Abschnitt 4.2 – Das Gauß'sche Eliminationsverfahren

4.1

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&-1\\0&1&-1&0\\3&1&0&5\end{array}\right)\begin{array}{l}(-3)\\ \\ +\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&-1\\0&1&-1&0\\0&7&-3&8\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ (2)\ (-7)\\ +\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&0\\0&0&4&8\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mid\cdot\frac{1}{2}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&-1\\0&1&-1&0\\0&0&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ (2)\\ \ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}x_1&=1\\x_2&=2\\x_3&=2\end{aligned}$$

b) Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{10}{3}\\x_2&=\frac{8}{3}\\x_3&=-1\end{aligned}$$

c) Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned}x_1&=-2\\x_2&=19\\x_3&=0\\x_4&=2\end{aligned}$$

d) Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{53}{2} \\ x_2 &= -45 \\ x_3 &= -27 \\ x_4 &= -\frac{69}{2} \\ x_5 &= 8 \end{aligned}$$

4.2

a) Ansatz:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Einsetzen der bekannten Stützstellen:

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = a_0 \\ 6 &= f(1) = a_0 + a_1 + a_2 \\ 0 &= f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \end{aligned}$$

LGS für a_0, a_1, a_2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 12 \\ a_2 &= -6 \end{aligned}$$

Damit lautet das gesuchte Polynom

$$f(x) = -6x^2 + 12x.$$

b) Ansatz:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Einsetzen der bekannten Stützstellen:

$$\begin{aligned} 2 &= f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ 1 &= f(0) = a_0 \\ -2 &= f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ 5 &= f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \end{aligned}$$

LGS für a_0, a_1, a_2:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 5 \end{array}\right)$$

Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -4 \\ a_2 &= -1 \\ a_3 &= 2 \end{aligned}$$

Damit lautet das gesuchte Polynom

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 1.$$

c) Ansatz:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Einsetzen der bekannten Stützstellen:

$$\begin{aligned} 63 &= f(-3) = a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 \\ -1 &= f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ -7 &= f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \\ -49 &= f(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 \end{aligned}$$

LGS für a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 9 & -27 & 63 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -7 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & -49 \end{array}\right)$$

Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= -5 \\ a_2 &= 2 \\ a_3 &= -1 \end{aligned}$$

Damit lautet das gesuchte Polynom

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 3.$$

d) Ansatz:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

Einsetzen der bekannten Stützstellen:

$$\begin{aligned}
114 &= f(-3) = a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 + 81a_4\\
-4 &= f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4\\
-2 &= f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4\\
14 &= f(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4\\
120 &= f(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4
\end{aligned}$$

LGS für a_0, a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -3 & 9 & -27 & 81 & 114\\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -4\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2\\
1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 14\\
1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 120
\end{array}\right)$$

Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
a_1 &= 1\\
a_2 &= -5\\
a_3 &= 0\\
a_4 &= 2
\end{aligned}$$

Damit lautet das gesuchte Polynom

$$f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x.$$

4.3

Bezeichnungen:

Alter des Vaters:	v
Alter der Mutter:	m
Alter der 1. Tochter:	t_1
Alter der 2. Tochter:	t_2

Die Eltern und ihre beiden Töchter sind zusammen 150 Jahre alt:

$$v + p + t_1 + t_2 = 150$$

Der Vater ist 3 Jahre älter als die Mutter:

$$v = m + 3$$

Der Vater ist doppelt so alt wie die ältere Tochter:

$$v = 2t_1$$

Die Töchter sind zusammen genau so alt wie die Mutter:

$$t_1 + t_2 = m$$

Also gilt zusammen:

$$\begin{aligned} v + m + t_1 + t_2 &= 150 \\ v - m &= 3 \\ v - 2t_1 &= 0 \\ m - t_1 - t_2 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung des LGS mittels Gauß-Elimination liefert:
Alter des Vaters: $v = 52$
Alter der Mutter: $m = 49$
Alter der 1. Tochter: $t_1 = 26$
Alter der 2. Tochter: $t_2 = 23$

4.4

Anzahl der Kühe: k
Anzahl der Schweine: s
Anzahl der Hühner: h
Anzahl der Enten: e
Ich besitze insgesamt 630 Tiere.

$$k + s + h + e = 630$$

Die Tiere haben 1680 Beine.

$$4k + 4s + 2h + 2e = 1680$$

Auf dem Hof sind doppelt so viele Kuhhörner wie Schweineohren.

$$2k = 2 \cdot 2s$$

Es gibt 18-mal so viele Hühnerbeine wie Entenschnäbel

$$2h = 18e$$

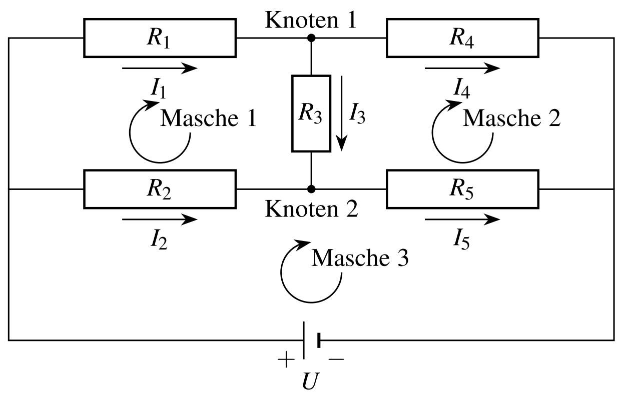
Zusammen:

$$\begin{aligned} k + s + h + e &= 630 \\ 4k + 4s + 2h + 2e &= 1680 \\ 2k - 4s &= 0 \\ 2h - 18e &= 0 \end{aligned}$$

Lösung des LGS mittels Gauß-Elimination liefert:

Anzahl der Kühe:	$k = 140$
Anzahl der Schweine:	$s = 70$
Anzahl der Hühner:	$h = 378$
Anzahl der Enten:	$e = 42$

4.5



Knoten 1:

$$I_1 - I_3 - I_4 = 0$$

Knoten 2:

$$I_2 + I_3 - I_5 = 0$$

Masche 1:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_2 I_2 &= 0 \\ 5I_1 - 10I_2 + 10I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Masche 2:

$$\begin{aligned} R_4 I_4 - R_5 I_5 - R_3 I_3 &= 0 \\ -10I_3 + 10I_4 - 5I_5 &= 0 \end{aligned}$$

Masche 3:

$$\begin{aligned} R_2 I_2 + R_5 I_5 - 12 &= 0 \\ 10I_2 + 5I_5 &= 12 \end{aligned}$$

Zusammen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
I_1 & & & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
 & & I_2 & + & I_3 & & & - & I_5 & = & 0 \\
5I_1 & - & 10I_2 & + & 10I_3 & & & & & = & 0 \\
 & & & - & 10I_3 & + & 10I_4 & - & 5I_5 & = & 0 \\
 & & 10I_2 & & & & & + & 5I_5 & = & 12
\end{array}$$

Lösung des LGS mittels Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
5 & -10 & 10 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 10 & -5 & 0 \\
0 & 10 & 0 & 0 & 5 & 12
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
(-5) \\
\\
+ \\
\\
\\
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & -10 & 15 & 5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 10 & -5 & 0 \\
0 & 10 & 0 & 0 & 5 & 12
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
(10)\quad(-10) \\
+ \\
\\
\qquad\qquad +
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 25 & 5 & -10 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 10 & -5 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 0 & 15 & 12
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\\
\mid \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \\
\\
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0{,}5 & 0 \\
0 & 0 & 25 & 5 & -10 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 0 & 15 & 12
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
+ \\
\quad + \\
(1)\quad(-1)\quad(-25)\quad(10) \\
\qquad\qquad + \\
\qquad\qquad\qquad +
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & -2 & 0{,}5 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1{,}5 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0{,}5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 30 & -22{,}5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -10 & 20 & 12
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\\
\\
\mid \cdot \left(-\frac{1}{10}\right))
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & -2 & 0{,}5 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -1{,}5 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0{,}5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1{,}2 \\
0 & 0 & 0 & 30 & -22{,}5 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
+ \\
\quad + \\
\qquad + \\
(2)\quad(-1)\quad(1)\quad(-30) \\
\qquad\qquad\qquad +
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -3{,}5 & -2{,}4 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 1{,}2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1{,}5 & -1{,}2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1{,}2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 37{,}5 & 36
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
\\
\\
\mid \cdot \frac{1}{37{,}5})
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3{,}5 & -2{,}4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1{,}5 & -1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}96 \end{array}\right) \begin{array}{llll} \leftarrow + & & & \\ & \leftarrow + & & \\ & & \leftarrow + & \\ & & & \leftarrow + \\ (3{,}5) & (-0{,}5) & (1{,}5) & (2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3{,}5 & -2{,}4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}5 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1{,}5 & -1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}96 \end{array}\right)$$

Also lauten die gesuchten Stromstärken:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0{,}96\,\text{A} \\ I_2 &= 0{,}72\,\text{A} \\ I_3 &= 0{,}24\,\text{A} \\ I_4 &= 0{,}72\,\text{A} \\ I_5 &= 0{,}96\,\text{A} \end{aligned}$$

4.6

a) Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned} x_1 &= -16 + 5\lambda \\ x_2 &= 24 - 7\lambda \\ x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

b) Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + 2\lambda \\ x_2 &= -5 - 3\lambda \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= 6 \end{aligned}$$

c) Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -\frac{4}{5} & -1 & \frac{\alpha}{2} \\ 1 & 4 & 5 & \frac{25}{4} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & \frac{25}{4} \\ 4 & -\frac{4}{5} & -1 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-4) \\ + \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & \frac{25}{4} \\ 0 & -\frac{84}{5} & -21 & \frac{\alpha}{5} - 25 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & \frac{25}{4} \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -\frac{84}{5} & -21 & \frac{\alpha-125}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ (-1) \; \left(\frac{21}{5}\right) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha+1}{5} \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist unlösbar für

$$\frac{\alpha+1}{5} \neq 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha \neq -1$$

Ab jetzt $\alpha = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mid \tfrac{1}{4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \mid \tfrac{1}{4}$$

Setze:

$$x_3 = \lambda = \text{beliebig}$$

Lösung des LGS:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{4} \\ x_2 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{4}\lambda \\ x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

d) Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & -1 & -7 & -3 \\ 2 & -6 & -1 & -1 & 1 & 7 \\ -2 & 6 & 7 & 1 & -7 & -19 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -6 & -1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -7 & -3 \\ -2 & 6 & 7 & 1 & -7 & -19 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -6 & -1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -6 & -1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -7 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ (1)\;(-3) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -6 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid (-1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -6 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ (1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -6 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

Setze:

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda = \text{beliebig} \\ x_5 &= \mu = \text{beliebig} \end{aligned}$$

Lösung des LGS:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 3\lambda - 2\mu \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= -2 + \mu \\ x_4 &= -3 - 4\mu \\ x_5 &= \mu \end{aligned}$$

4.7

a) Reaktionsgleichung:

$$x_1\mathrm{Fe} + x_2\mathrm{O}_2 \longrightarrow x_3\mathrm{Fe}_2\mathrm{O}_3$$

Bilanz der Elemente Fe, O:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 \\ 2x_2 &= 3x_3 \end{aligned}$$

Zusammen:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung des LGS mittels Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\lambda \\ x_2 &= \tfrac{3}{2}\lambda \\ x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

Die erste ganzzahlige Lösung ergibt sich für $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Reaktionsgleichung mit möglichst kleinen Zahlen:

$$4\mathrm{Fe} + 3\mathrm{O}_2 \longrightarrow 2\mathrm{Fe}_2\mathrm{O}_3$$

b) Reaktionsgleichung:

$$x_1 C_6H_{12}O_6 + x_2 O_2 \longrightarrow x_3 CO_2 + x_4 H_2O$$

Bilanz der Elemente C, H, O:

$$\begin{aligned} 6x_1 &= x_3 \\ 12x_1 &= 2x_4 \\ 6x_1 + 2x_2 &= 2x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Zusammen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 6x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0 \\ 12x_1 & & & & & - & 2x_4 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Lösung des LGS mittels Gauß-Elimination liefert:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{6}\lambda \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

Die erste ganzzahlige Lösung ergibt sich für $\lambda = 6$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 6 \\ x_3 &= 6 \\ x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Reaktionsgleichung mit möglichst kleinen Zahlen:

$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \longrightarrow 6CO_2 + 6H_2O$$

c) Reaktionsgleichung:

$$x_1 C_3H_5N_3O_9 \longrightarrow x_2 CO_2 + x_3 H_2O + x_4 N_2 + x_5 O_2$$

Bilanz der Elemente C, H, N, O:

$$\begin{aligned} 3x_1 &= x_2 \\ 5x_1 &= 2x_3 \\ 3x_1 &= 2x_4 \\ 9x_1 &= 2x_2 + x_3 + 2x_5 \end{aligned}$$

Zusammen:

$$\begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & - \; x_2 & & & & = 0 \\ 5x_1 & & - 2x_3 & & & = 0 \\ 3x_1 & & & - 2x_4 & & = 0 \\ 9x_1 & - 2x_2 & - \; x_3 & & - 2x_5 & = 0 \end{array}$$

Lösung des LGS mittels Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\,(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

In diesem Fall ist es sinnvoll, die Variable x_1 als letzte zu behandeln (Rechenaufwand).

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (2) \\ \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\,\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\,\left(-\frac{1}{2}\right) \\ |\,\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\,\left(-\frac{1}{2}\right) \\ |\,\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

Setze:

$$x_1 = \lambda = \text{beliebig}$$

Lösung des LGS:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda \\ x_2 &= 3\lambda \\ x_3 &= \tfrac{5}{2}\lambda \\ x_4 &= \tfrac{3}{2}\lambda \\ x_5 &= \tfrac{1}{4}\lambda \end{aligned}$$

Die erste ganzzahlige Lösung ergibt sich für $\lambda = 4$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 12 \\ x_3 &= 10 \\ x_4 &= 6 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

Reaktionsgleichung mit möglichst kleinen Zahlen:

$$4C_3H_5N_3O_9 \longrightarrow 12CO_2 + 10H_2O + 6N_2 + O_2$$

4.8

a) Es gilt

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11} \cdot 0 & + & \alpha_{12} \cdot 0 & + & \ldots & + & \alpha_{1n} \cdot 0 & = & 0 \\ \alpha_{21} \cdot 0 & + & \alpha_{22} \cdot 0 & + & \ldots & + & \alpha_{2n} \cdot 0 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot 0 & + & \alpha_{m2} \cdot 0 & + & \ldots & + & \alpha_{mn} \cdot 0 & = & 0, \end{array}$$

d. h. $(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (0,0,\ldots,0)$ löst das homogene LGS.
Es sei nun $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n) \neq (0,0,\ldots,0)$ eine weitere Lösung des homogenen LGS. Dann gilt für das Vielfache $(\lambda\bar{x}_1,\lambda\bar{x}_2,\ldots,\lambda\bar{x}_n)$

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\lambda\bar{x}_1 + \alpha_{12}\lambda\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\lambda\bar{x}_n &= \lambda\left(\alpha_{11}\bar{x}_1 + \alpha_{12}\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\bar{x}_n\right) = 0 \\ \alpha_{21}\lambda\bar{x}_1 + \alpha_{22}\lambda\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\lambda\bar{x}_n &= \lambda\left(\alpha_{21}\bar{x}_1 + \alpha_{22}\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\bar{x}_n\right) = 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}\lambda\bar{x}_1 + \alpha_{m2}\lambda\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\lambda\bar{x}_n &= \left(\alpha_{m1}\bar{x}_1 + \alpha_{m2}\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\bar{x}_n\right) = 0, \end{aligned}$$

d. h. alle Vielfachen sind auch Lösung des homogenen LGS.

b) Es sei jetzt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine spezielle Lösung eines beliebigen LGS, d. h. es gilt:

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \ldots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array}$$

Weiter sei $\left(x_{1,h}, x_{2,h}, \ldots, x_{n,h}\right)$ eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS, d. h. es gilt:

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}x_{1,h} & + & \alpha_{12}x_{2,h} & + & \ldots & + & \alpha_{1n}x_{n,h} & = & 0 \\ \alpha_{21}x_{1,h} & + & \alpha_{22}x_{2,h} & + & \ldots & + & \alpha_{2n}x_{n,h} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_{1,h} & + & \alpha_{m2}x_{2,h} & + & \ldots & + & \alpha_{mn}x_{n,h} & = & 0 \end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}(x_1+x_{1,h}) + \alpha_{12}(x_2+x_{2,h}) + \ldots + \alpha_{1n}(x_n+x_{n,h}) \\ = & (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n) + \left(\alpha_{11}x_{1,h} + \alpha_{12}x_{2,h} + \ldots + \alpha_{1n}x_{n,h}\right) \\ = & \beta_1 + 0 \;=\; \beta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{21}(x_1+x_{1,h}) + \alpha_{22}(x_2+x_{2,h}) + \ldots + \alpha_{2n}(x_n+x_{n,h}) \\ = & (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n) + \left(\alpha_{21}x_{1,h} + \alpha_{22}x_{2,h} + \ldots + \alpha_{2n}x_{n,h}\right) \\ = & \beta_2 + 0 \;=\; \beta_2 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{m1}(x_1+x_{1,h}) + \alpha_{m2}(x_2+x_{2,h}) + \ldots + \alpha_{mn}(x_n+x_{n,h}) \\ = & (\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n) + \left(\alpha_{m1}x_{1,h} + \alpha_{m2}x_{2,h} + \ldots + \alpha_{mn}x_{n,h}\right) \\ = & \beta_m + 0 \;=\; \beta_m \end{aligned}$$

$\left(x_1+x_{1,h}, x_2+x_{2,h}, \ldots, x_n+x_{n,h}\right)$ ist also auch Lösung des ursprünglichen LGS.

c) Es seien $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ Lösungen eines beliebigen LGS. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}(\bar{x}_1-x_1) + \alpha_{12}(\bar{x}_2-x_2) + \ldots + \alpha_{1n}(\bar{x}_n-x_n) \\ = & (\alpha_{11}\bar{x}_1 + \alpha_{12}\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{1n}\bar{x}_n) - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n) \\ = & \beta_1 - \beta_1 \;=\; 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{21}(\bar{x}_1-x_1) + \alpha_{22}(\bar{x}_2-x_2) + \ldots + \alpha_{2n}(\bar{x}_n-x_n) \\ = & (\alpha_{21}\bar{x}_1 + \alpha_{22}\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{2n}\bar{x}_n) - (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n) \\ = & \beta_2 - \beta_2 \;=\; 0 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{m1}(\bar{x}_1-x_1) + \alpha_{m2}(\bar{x}_2-x_2) + \ldots + \alpha_{mn}(\bar{x}_n-x_n) \\ = & (\alpha_{m1}\bar{x}_1 + \alpha_{m2}\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\bar{x}_n) - (\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n) \\ = & \beta_m - \beta_m \;=\; 0 \end{aligned}$$

Also ist

$$(\bar{x}_1-x_1, \bar{x}_2-x_2, \ldots, \bar{x}_n-x_n) \;=:\; \left(x_{1,h}, x_{2,h}, \ldots, x_{n,h}\right)$$

eine Lösung des zugehörigen homogenen LGS. Damit ist

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) &= (x_1 + \bar{x}_1 - x_1, x_2 + \bar{x}_2 - x_2, \ldots, x_n + \bar{x}_n - x_n) \\ &= \left(x_1+x_{1,h}, x_2+x_{2,h}, \ldots, x_n+x_{n,h}\right). \end{aligned}$$

5 Vektorrechnung

Abschnitt 5.2 – Vektoren im Anschauungsraum

5.2

a) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}+\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $\vec{b}-\vec{a}+\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

f) $3\vec{a} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

g) $2\vec{b}+3\vec{c} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

h) $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -22 \\ 11 \end{pmatrix}$

i) $$2\vec{a}-\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{3}{2}\vec{c}\right) = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{19}{2} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -\frac{15}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$$

5.3

a) Berechnung der Seitenlängen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{6^2+(-1)^2} = \sqrt{37}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Das Dreieck ist also weder gleichseitig noch gleichschenklig.

b) Berechnung der Seitenlängen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = 2$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$$

Das Dreieck ist also gleichseitig mit der Seitenlänge 2.

c) Berechnung der Seitenlängen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2+5^2+4^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-5)^2+4^2+3^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-8)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{66}$$

Das Dreieck ist also gleichschenklig mit der Schenkellänge $5\sqrt{2}$.

d) Berechnung der Seitenlängen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2+6^2} = 10$$

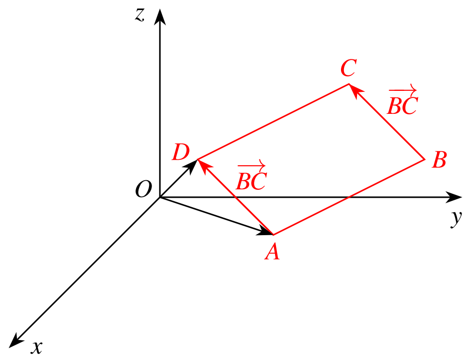
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2+6^2} = 10$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Das Dreieck ist also gleichschenklig mit der Schenkellänge 10.

5.4

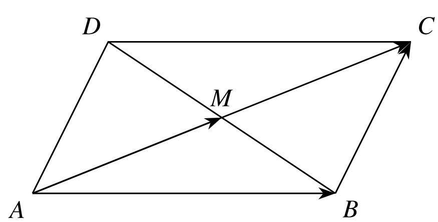
a)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)\\ &= \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes D lauten also $D(7|8|9)$.

b)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\\ &= \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\4\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M lauten also $M\left(\frac{9}{2}\middle|4\middle|\frac{7}{2}\right)$.

5.5

Bei der 1. Reflexion wird die y-Komponente umgedreht, d. h. als Richtung ergibt sich

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} r_x \\ -r_y \\ r_z \end{pmatrix}.$$

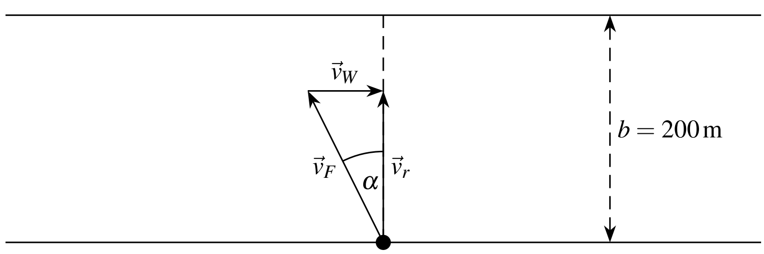
Bei der 2. Reflexion wird die z-Komponente umgedreht, d. h. als Richtung ergibt sich

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} r_x \\ -r_y \\ -r_z \end{pmatrix}.$$

Bei der 3. Reflexion wird schließlich die x-Komponente umgedreht, d. h. als ausfallende Richtung ergibt sich

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -r_x \\ -r_y \\ -r_z \end{pmatrix} = -\vec{r}.$$

5.6



Winkelberechnung:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{v}_W|}{|\vec{v}_F|}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{v}_W|}{|\vec{v}_F|}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{9}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}340 \approx 19{,}5^\circ$$

Resultierende Geschwindigkeit:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_r|}{|\vec{v}_F|}$$

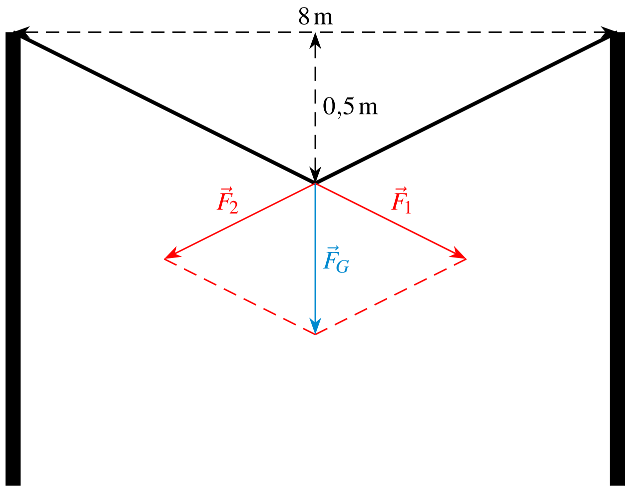
$$|\vec{v}_r| = |\vec{v}_F| \cdot \cos(\alpha) = 9 \cdot \cos(19{,}5^\circ) = 8{,}49 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

Benötigte Zeit:

$$|\vec{v}_r| = \frac{b}{t}$$

$$t = \frac{b}{|\vec{v}_r|} = \frac{200}{8{,}49} = 23{,}6\ [s]$$

5.7



Bezeichnungen:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_{1,h} \\ F_{1,v} \end{pmatrix}$$
$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{2,h} \\ F_{2,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{1,h} \\ F_{1,v} \end{pmatrix}$$
$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{G,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_G$$
$$\begin{pmatrix} F_{1,h} \\ F_{1,v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_{1,h} \\ F_{1,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Aus der 2. Komponente:

$$2F_{1,v} = -30$$
$$F_{1,v} = -15$$

Aus der Geometrie (Ähnlichkeit):

$$\frac{-F_{1,v}}{F_{1,h}} = \frac{0{,}5}{\frac{8}{2}}$$
$$F_{1,h} = -F_{1,v} \cdot 8 = -(-15) \cdot 8 = 120$$

Damit ist die Gesamtkraft in den Seilabschnitten (in N)

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_{1,h} \\ F_{1,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ -15 \end{pmatrix}$$
$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -F_{1,h} \\ F_{1,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -120 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Betragsmäßig gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = \sqrt{120^2 + 15^2} \approx 120{,}9\ [\mathrm{N}]$$

5.8

Die drei Seile teilen sich die vertikale Komponente des Weihnachtssterns. Das bedeutet, dass die vertikale Kraft in jedem Seil

$$F_v = \frac{240}{3} = 80\,[\mathrm{N}]$$

beträgt. Wie in Aufgabe 7 ergibt sich aus der Geometrie (Ähnlichkeit) für die horizontale Kraft F_h in den Seilen:

$$\begin{aligned} \frac{F_v}{F_h} &= \frac{2}{4} \\ F_h &= \frac{4}{2} \cdot 80 = 160\,[\mathrm{N}] \end{aligned}$$

Betragsmäßig gilt damit nach dem Satz des Pythagoras für die Kräfte in den Seilen

$$F = \sqrt{160^2 + 80^2} \approx 178{,}9\,[\mathrm{N}]\,.$$

Abschnitt 5.3 – Allgemeine Vektorräume

5.9

Die Assoziativität gilt wegen der Assoziativität in $\mathbb{R}$. Das neutrale Element ist die 1. Damit fehlen für die Eigenschaften einer kommutativen Gruppe die Abgeschlossenheit (es könnte 0 das Ergebnis einer Multiplikation sein) sowie das inverse Element. Diese beiden Eigenschaften ergeben sich aus der Verknüpfungstafel:

·	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Also ist die tatsächlich Verknüpfung abgeschlossen und die inversen Elemente lauten

$$1^{-1} = 1 \qquad 2^{-1} = 4 \qquad 3^{-1} = 5 \qquad 4^{-1} = 2 \qquad 5^{-1} = 3 \qquad 6^{-1} = 6.$$

5.10

Gruppeneigenschaften bzgl. + inklusive Kommutativität
Abgeschlossenheit:

$$\begin{aligned}
&p(x)+q(x)\\
&\quad = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m\\
&\quad = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots\\
&\in V \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Assoziativität:

$$\begin{aligned}
&\big((p(x)+q(x)\big)+r(x)\\
&\quad = (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n)+(c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_lx^l)\\
&\quad = (a_0+b_0+c_0)+(a_1+b_1+c_1)x+(a_2+b_2+c_2)x^2+\ldots\\
&\quad = (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m+c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_lx^l)\\
&\quad = p(x)+\big(q(x)+r(x)\big) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Kommutativität (vorgezogen, damit beim neutralen und inversen Element nur eine Seite nachgewiesen werden muss):

$$\begin{aligned}
&p(x)+q(x)\\
&\quad = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m\\
&\quad = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots\\
&\quad = (b_0+a_0)+(b_1+a_1)x+(b_2+a_2)x^2+\ldots\\
&\quad = b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m+a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\\
&\quad = q(x)+p(x) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Neutrales Element:
$o(x) = 0$ ist neutrales Element, da

$$p(x)+0 = p(x). \quad \checkmark$$

Inverses Element:
$-p(x)$ ist inverses Element, da

$$p(x)+(-p(x)) = p(x)-p(x) = 0. \quad \checkmark$$

Vektorraumeigenschaften
S-Multplikation abgeschlossen:

$$\begin{aligned}
\alpha p(x) &= \alpha\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\right)\\
&= (\alpha a_0)+(\alpha a_1)x+(\alpha a_2)x^2+\ldots(\alpha a_n)x^n\\
&\in V \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Die übrigen Vektorraumgesetze gelten, da sie für beliebige Funktionen gelten (die Gesetze gelten für jedes $x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
1p(x) &= p(x)\\
\alpha(\beta p(x)) &= (\alpha\beta)\,p(x)\\
(\alpha+\beta)\,p(x) &= \alpha p(x)+\beta p(x)\\
\alpha\,(p(x)+q(x)) &= \alpha p(x)+\alpha q(x) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

5.11

Gruppeneigenschaften bzgl. + inklusive Kommutativität
Abgeschlossenheit:

$$\begin{aligned}
&p(x)+q(x)\\
&\quad= a_0+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)+a_2\cos(2x)+b_2\sin(2x)+\ldots+a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\\
&\qquad+c_0+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+\ldots+c_m\cos(mx)+d_m\sin(mx)\\
&\quad= (a_0+c_0)+(a_1+c_1)\cos(x)+(b_1+d_1)\sin(x)+(a_2+c_2)\cos(2x)+(b_2+d_2)\sin(2x)+\ldots\\
&\in V \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Assoziativität:

$$\begin{aligned}
&\big((p(x)+q(x)\big)+r(x)\\
&\quad= \big(a_0+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)+a_2\cos(2x)+b_2\sin(2x)+\ldots+a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\\
&\qquad+c_0+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+\ldots+c_m\cos(mx)+d_m\sin(mx)\big)\\
&\qquad+e_0+e_1\cos(x)+f_1\sin(x)+e_2\cos(2x)+f_2\sin(2x)+\ldots+e_l\cos(lx)+f_l\sin(lx)\\
&\quad= (a_0+c_0+e_0)+(a_1+c_1+e_1)\cos(x)+(b_1+d_1+f_1)\sin(x)\\
&\qquad+(a_2+c_2+e_2)\cos(2x)+(b_2+d_2+f_2)\sin(2x)+\ldots\\
&\quad= a_0+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)+a_2\cos(2x)+b_2\sin(2x)+\ldots+a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\\
&\qquad+\big(c_0+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+\ldots+c_m\cos(mx)+d_m\sin(mx)\\
&\qquad+e_0+e_1\cos(x)+f_1\sin(x)+e_2\cos(2x)+f_2\sin(2x)+\ldots+e_l\cos(lx)+f_l\sin(lx)\big)\\
&\quad= p(x)+\big(q(x)+r(x)\big) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Kommutativität (vorgezogen, damit beim neutralen und inversen Element nur eine Seite nachgewiesen werden muss):

$$\begin{aligned}
&p(x)+q(x)\\
&\quad= a_0+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)+a_2\cos(2x)+b_2\sin(2x)+\ldots+a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\\
&\qquad+c_0+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+\ldots+c_m\cos(mx)+d_m\sin(mx)\\
&\quad= (a_0+c_0)+(a_1+c_1)\cos(x)+(b_1+d_1)\sin(x)+(a_2+c_2)\cos(2x)+(b_2+d_2)\sin(2x)+\ldots\\
&\quad= (c_0+a_0)+(c_1+a_1)\cos(x)+(d_1+b_1)\sin(x)+(c_2+a_2)\cos(2x)+(d_2+b_2)\sin(2x)+\ldots\\
&\quad= c_0+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+\ldots+c_m\cos(mx)+d_m\sin(mx)\\
&\qquad+a_0+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)+a_2\cos(2x)+b_2\sin(2x)+\ldots+a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\\
&\quad= q(x)+p(x) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Neutrales Element:
$o(x) = 0$ ist neutrales Element, da

$$p(x)+0 = p(x). \quad \checkmark$$

Inverses Element:
$-p(x)$ ist inverses Element, da

$$p(x)+(-p(x)) = p(x)-p(x) = 0. \quad \checkmark$$

Vektorraumeigenschaften
S-Multplikation abgeschlossen:

$$\begin{aligned} \alpha p(x) &= \alpha\,(a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x) + \ldots + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \\ &= (\alpha a_0) + (\alpha a_1)\cos(x) + (\alpha b_1)\sin(x) + (\alpha a_2)\cos(2x) + (\alpha b_2)\sin(2x) + \ldots \\ &\quad + (\alpha a_n)\cos(nx) + (\alpha b_n)\sin(nx) \\ &\in V \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die übrigen Vektorraumgesetzt gelten, da sie für beliebige Funktionen gelten (die Gesetze gelten für jedes $x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} 1p(x) &= p(x) \\ \alpha\,(\beta p(x)) &= (\alpha\beta)\,p(x) \\ (\alpha+\beta)\,p(x) &= \alpha p(x) + \beta p(x) \\ \alpha\,(p(x)+q(x)) &= \alpha p(x) + \alpha q(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

5.12

Gruppeneigenschaften bzgl. + inklusive Kommutativität
Abgeschlossenheit verletzt, da z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Assoziativität gilt aufgrund der gültigen Assoziativität bei der Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$.
Das neutrale Element existiert nicht:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Damit gibt es auch kein inverses Element.
Die Kommutativität gilt aufgrund der gültigen Kommutativität bei der Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$.

Vektorraumeigenschaften
S-Multiplikation nicht abgeschlossen (also nicht immer definiert), da z. B.

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Die übrigen Vektorraumeigenschaften

$$\begin{aligned} 1\vec{a} &= \vec{a} \\ \alpha\,(\beta\vec{a}) &= (\alpha\beta)\,\vec{a} \\ (\alpha+\beta)\,\vec{a} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \\ \alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right) &= \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \end{aligned}$$

gelten, da diese für normale Vektoren im $\mathbb{R}^2$ gelten.

5.13

Der Nullvektor $\vec{0}$ bildet tatsächliche einen Vektorraum, da $(\vec{0},+)$ eine abelsche Gruppe ist (kritisch ist nur die Abgeschlossenheit, die aber trivialerweise erfüllt ist), die S-Multiplikation abgeschlossen und die 4 Vektorraumaxiome aufgrund der induzierten S-Multiplikation erfüllt sind.

Abschnitt 5.4 – Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

5.14

a) Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich durch Gauß-Elimination

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

d. h. es gibt nur die triviale Darstellung des Nullvektors. Die Vektoren sind linear unabhängig.

b) Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 - \phantom{\tfrac{5}{2}}\lambda_2 &= 0 \\ -10\lambda_1 + \tfrac{5}{2}\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich durch Gauß-Elimination

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu \\ \lambda_2 &= 4\mu, \end{aligned}$$

d. h. es gibt eine nicht triviale Darstellung des Nullvektors. Die Vektoren sind linear abhängig.

c) Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 6\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich durch Gauß-Elimination

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 26\mu \\ \lambda_2 &= -9\mu \\ \lambda_3 &= 7\mu, \end{aligned}$$

d. h. es gibt eine nicht triviale Darstellung des Nullvektors. Die Vektoren sind linear abhängig.

d) Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich durch Gauß-Elimination

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

d. h. es gibt nur die triviale Darstellung des Nullvektors. Die Vektoren sind linear unabhängig.

e) Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \\ -4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -4\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 4\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich durch Gauß-Elimination

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

d. h. es gibt nur die triviale Darstellung des Nullvektors. Die Vektoren sind linear unabhängig.

f) Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 \phantom{{}-7\lambda_3} + \lambda_4 &= 0 \\ -4\lambda_2 - 7\lambda_3 - \lambda_4 &= 0 \\ 4\lambda_1 \phantom{{}+3\lambda_2} + 4\lambda_3 - 8\lambda_4 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \phantom{{}+4\lambda_3} + 4\lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich durch Gauß-Elimination

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu \\ \lambda_2 &= -2\mu \\ \lambda_3 &= \mu \\ \lambda_4 &= \mu, \end{aligned}$$

d. h. es gibt eine nicht triviale Darstellung des Nullvektors. Die Vektoren sind linear abhängig.

5.15

Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2+3a \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + (2+3a)\lambda_3 &= 0 \\ a\lambda_1 - \lambda_2 - \qquad\quad \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_2 + \qquad\quad 3\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

Lösung mittels Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3+\alpha & 0 \\ a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ (-1) \quad (-a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2+3a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (3) \quad (2) \,|\, (-1) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Darstellung lautet ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \qquad\qquad &= 0 \\ \lambda_2 + \quad \lambda_3 &= 0 \\ 3a\lambda_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist nur dann nicht trivial lösbar, wenn $a = 0$.
Demzufolge sind die Vektoren für $a = 0$ linear abhängig und ansonsten linear unabhängig.

5.16

In einem Vektorraum ist der Nullvektor $\vec{0}$ linear abhängig, da es eine nicht triviale Darstellung des Nullvektors gibt: Z. B. ist

$$3 \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

5.18

Ansatz

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) \\ &= \lambda_1(1+x+x^2) + \lambda_2(2+2x^2) + \lambda_3 x \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_3)x + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x^2 \end{aligned}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} \lambda_1 + 2\lambda_2 & & = 0 \\ \lambda_1 & + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & & = 0 \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich durch Gauß-Elimination

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2\mu \\ \lambda_2 &= \mu \\ \lambda_3 &= 2\mu, \end{aligned}$$

d. h. es gibt eine nicht triviale Darstellung der Null. Die Polynome sind linear abhängig.

5.19

Linearkombination des Nullvektors:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) + \lambda_4 p_4(x) \\ &= \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \sin(2x) + \lambda_4 \cos(2x) \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = 0$ bzw. $x = \pi$:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \sin(0) + \lambda_2 \cos(0) + \lambda_3 \sin(0) + \lambda_4 \cos(0) \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 \cdot 1 \\ &= \lambda_2 + \lambda_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \sin(\pi) + \lambda_2 \cos(\pi) + \lambda_3 \sin(2\pi) + \lambda_4 \cos(2\pi) \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot (-1) + \lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 \cdot 1 \\ &= -\lambda_2 + \lambda_4 \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist auch

$$\lambda_2 = 0.$$

Einsetzen von $x = \frac{\pi}{2}$ in die Linearkombination:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_3 \sin(\pi) + \lambda_4 \cos(\pi) \\ &= \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 \cdot (-1) \\ &= \lambda_1 - \lambda_4 \\ &\overset{\lambda_4=0}{=} \lambda_1 \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = \frac{\pi}{4}\pi$ in die Linearkombination des Nullvektors:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \lambda_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \lambda_3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda_4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \lambda_1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \lambda_2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \lambda_3 \cdot 1 + \lambda_4 \cdot 0 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\lambda_2 + \lambda_3 \\ &\overset{\lambda_1=0,\lambda_2=0}{=} \lambda_3 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

d. h. es gibt nur die triviale Darstellung der Null. $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ sind linear unabhängig.

5.20

Bei Ruhe gilt

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{0},$$

d. h. wir haben eine nicht triviale Darstellung des Nullvektors. Folglich sind die vektoriellen Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_k$ linear abhängig.

Abschnitt 5.5 – Basis und Dimension

5.21

a) Eine Basis des Anschauungsraums umfasst 3 Vektoren. Die 2 Vektoren können daher keine Basis sein.

b) Eine Basis des Anschauungsraums besteht aus 3 linear unabhänigen Vektoren. Zu überprüfen bleibt also die lineare Unabhängigkeit der 3 Vektoren.
Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_2 \phantom{{}+\lambda_3} & = & 0 \\ \phantom{\lambda_1 +{}} \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 \phantom{{}+\lambda_2} + \lambda_3 & = & 0 \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich durch Gauß-Elimination

$$\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0, \end{array}$$

d. h. es gibt nur die triviale Darstellung des Nullvektors. Die Vektoren sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis.

c) Eine Basis des Anschauungsraums besteht aus 3 linear unabhänigen Vektoren. Zu überprüfen bleibt also die lineare Unabhängigkeit der 3 Vektoren.
Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Daraus resultiert das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_2 \phantom{{}+\lambda_3} & = & 0 \\ \phantom{\lambda_1 +{}} \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 \quad \lambda_2 \phantom{{}+\lambda_3} & = & 0 \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich durch Gauß-Elimination

$$\begin{array}{lcr} \lambda_1 & = & \mu \\ \lambda_2 & = & -\mu \\ \lambda_3 & = & \mu, \end{array}$$

d. h. es gibt eine nicht triviale Darstellung des Nullvektors. Die Vektoren sind linear abhängig und bilden daher keine Basis.

d) Eine Basis des Anschauungsraums umfasst 3 Vektoren. Die 4 Vektoren können daher keine Basis sein.

5.22

Da die Anzahl der Basisvektoren im $\mathbb{R}^3$ stets 3 ist, muss jeweils nur die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren überprüft werden.

a) Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 \phantom{{}- \lambda_3} &= 0 \\ + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 \phantom{{}+\lambda_2} + a\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matrizenschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2) \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-1) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist also dann nur trivial lösbar, wenn

$$\begin{aligned} 1-2a &\neq 0 \\ a &\neq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also bilden die 3 Vektoren für $a \neq \frac{1}{2}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 6 \\ a \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 6\lambda_1 - a\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ a\lambda_1 - \lambda_2 + a\lambda_3 &= 0 \\ 7\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matrizenschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -a & 3 & 0 \\ a & -1 & a & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\,(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -a & 3 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ (a)\ (-2) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 7+2a & 0 & 4+2a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 1+2a+a^2 & 0 & 1+2a+a^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ (1+a)^2 & 0 & (1+a)^2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\,\frac{1}{(1+a)^2} \end{array}$$

Für $a = -1$ gibt es offensichtlich eine nicht triviale Lösung. Ab jetzt sei $a \neq -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 6-a^2 & 0 & 3-a^2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (a)\ (-(-6-a^2)) \\ +\ \ + \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses LGS ist nur noch trivial lösbar, d. h. die 3 Vektoren sind dann linear unabhängig. Also bilden die 3 Vektoren für $a \neq -1$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

5.23

Zu lösen ist jeweils

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

mit den in den Aufgabenteilen gegebenen Vektoren $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Durch Gaußelimination im zugehörigen linearen Gleichungssystem erhält man nachfolgende Lösungen.

a) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, also

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, also

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, also

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

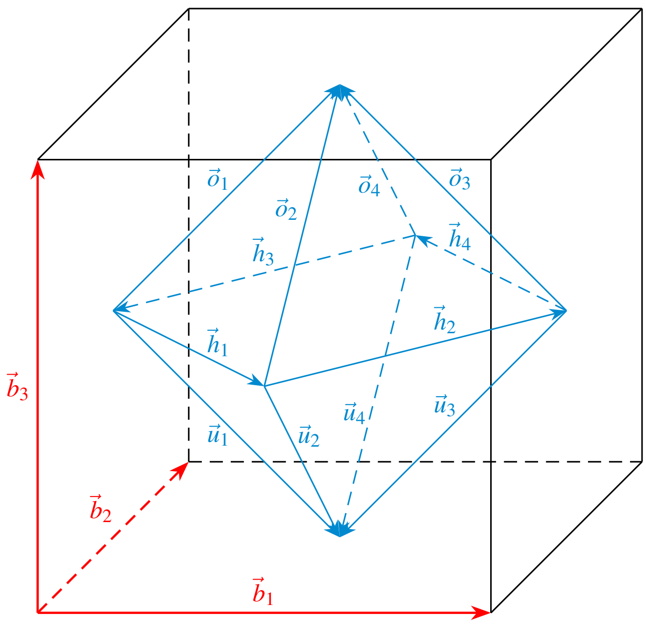
d) $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 1$, also

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

e) $\lambda_1 = -\frac{7}{2}2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, also

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5.24



Es ist:

$$\begin{aligned}
\vec{h}_1 &= \left(\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = \frac{1}{2}\vec{b}_1 - \frac{1}{2}\vec{b}_2 \\
\vec{h}_2 &= \left(\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2 \\
\vec{h}_3 &= \left(\frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) - \left(\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}_1 - \frac{1}{2}\vec{b}_2 \\
\vec{h}_4 &= \left(\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) - \left(\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2 \\
\vec{o}_1 &= \left(\vec{b}_3 + \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3 \\
\vec{o}_2 &= \left(\vec{b}_3 + \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = \frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3 \\
\vec{o}_3 &= \left(\vec{b}_3 + \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2\right) - \left(\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3 \\
\vec{o}_4 &= \left(\vec{b}_3 + \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2\right) - \left(\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3 \\
\vec{u}_1 &= \left(\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = \frac{1}{2}\vec{b}_1 - \frac{1}{2}\vec{b}_3 \\
\vec{u}_1 &= \left(\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = \frac{1}{2}\vec{b}_2 - \frac{1}{2}\vec{b}_3 \\
\vec{u}_3 &= \left(\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2\right) - \left(\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}_1 - \frac{1}{2}\vec{b}_3 \\
\vec{u}_4 &= \left(\frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2\right) - \left(\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_3\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}_2 - \frac{1}{2}\vec{b}_3
\end{aligned}$$

5.25

Es werden hier nur die Basen angegeben. Der Nachweis der linearen Unabhängigkeit und der Erzeugendeneigenschaft ist leicht einzusehen.

a) Basis:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Dimension von V beträgt demzufolge 1.

b) Basis:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Dimension von V beträgt demzufolge 2.

c) Basis:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Dimension von V beträgt demzufolge 3.

d) Basis:

$$\vec{b}_1 = 1, \quad \vec{b}_2 = x^2, \quad \vec{b}_3 = x^4$$

Die Dimension von V beträgt demzufolge 3.

5.26

Linearkombination des Nullvektors:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\4\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-4\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\3\\-8\\1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\-7\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda_5\begin{pmatrix}1\\-1\\-8\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & & & & + & \lambda_5 & = & 0\\
 & - & 4\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & - & 7\lambda_4 & - & \lambda_5 & = & 0\\
4\lambda_1 & & & - & 8\lambda_3 & + & 4\lambda_4 & - & 8\lambda_5 & = & 0\\
2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & & & + & 4\lambda_5 & = & 0
\end{array}$$

Matrizenschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&0&1&0\\0&-4&3&-7&-1&0\\4&0&-8&4&-8&0\\2&3&1&0&4&0\end{array}\right)\begin{array}{l}(-4)\;(-2)\\ \\ +\\ +\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&0&1&0\\0&-4&3&-7&-1&0\\0&-4&-8&4&-12&0\\0&1&1&0&2&0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&2&0\\0&-4&-8&4&-12&0\\0&-4&3&-7&-1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ (-1)\;(4)\;(4)\\ +\\ +\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-1&0&-1&0\\0&1&1&0&2&0\\0&0&-4&4&-4&0\\0&0&7&-7&7&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \mid\left(-\frac{1}{4}\right)\\ \mid\frac{1}{7}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&-1&0&-1&0\\0&1&1&0&2&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ +\\ (1)\;(-1)\;(-1)\\ +\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&-1&0&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Ausgeschrieben:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 \quad + \quad - \lambda_4 \qquad & = & 0 \\ \lambda_2 \qquad + \lambda_4 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Offensichtlich kann man λ_4 und λ_5 frei wählen, d. h. die Vektoren sind linear abhängig.
Lässt man den letzten Vektor weg, so ergibt sich mit den gleichen Umformungen noch immer ein frei wählbares λ_4. Die lineare Abhängigkeit ist also nach wie vor gegeben.
Lässt man die letzten 2 Vektoren weg, so ergibt sich mit den gleichen Umformungen jetzt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Jetzt haben wir also lineare Unabhängigkeit. Da die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren 3 ist, ist die Dimension des Untervektorraums ebenfalls 3 und diese ersten 3 Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Untervektorraums.

5.27

a) Aufgrund der Eigenschaften eines magischen Quadrats muss gelten:

$$\begin{array}{lllllllllll} \alpha_{11} & + \alpha_{12} & + \alpha_{13} & & & & & & & = & s \\ & & & \alpha_{21} & + \alpha_{22} & + \alpha_{23} & & & & = & s \\ & & & & & & \alpha_{31} & + \alpha_{32} & + \alpha_{33} & = & s \\ \alpha_{11} & & & + \alpha_{21} & & & + \alpha_{31} & & & = & s \\ & \alpha_{12} & & & + \alpha_{22} & & & + \alpha_{32} & & = & s \\ & & \alpha_{13} & & & + \alpha_{23} & & & + \alpha_{33} & = & s \\ \alpha_{11} & & & & + \alpha_{22} & & & & + \alpha_{33} & = & s \\ & & \alpha_{13} & & + \alpha_{22} & & + \alpha_{31} & & & = & s \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich handelt es sich um einen Vektorraum, der durch die drei Vektoren auf der rechten Seite aufgespannt wird (s, μ und ν sind beliebig). Aus der 5., 8. und 9. Komponente erkennt man, dass die Vektoren linear unabhängig sind, d. h. die Dimension des Vektorraums ist 3.

b) Die drei Matrizen sind offensichtlich magische Quadrate mit der Summe 3. Nachzuweisen ist noch die lineare Unabhängigkeit:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das entstehende lineare Gleichungssystem könnte man mit Gauß-Elimination lösen. Effektiver ist aber die direkte Methode.
Aus dem Element in der ersten Zeile und zweiten Spalte:

$$\begin{aligned} 2\nu &= 0 \\ \nu &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem Element in der zweiten Zeile und 3. Spalte:

$$\begin{aligned} 2\mu &= 0 \\ \mu &= 0 \end{aligned}$$

Also bleibt:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h.

$$\lambda = 0.$$

Damit gilt also

$$\lambda = \mu = \nu = 0,$$

d. h. die drei Vektoren (Matrizen) sind linear unabhängig. Wegen der Dimension 3 des Vektorraums bilden diese Matrizen eine Basis der magischen Quadrate.

6 Produkte von Vektoren

Abschnitt 6.1 – Das Skalarprodukt

6.1

$W = 80\,\mathrm{N} \cdot 1\,000\,\mathrm{m} \cdot \cos 30^\circ = 80 \cdot 1\,000 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{Nm} = 40\,000\sqrt{3}\,\mathrm{J} \approx 69\,282\,\mathrm{J}$

6.2

Es gilt

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

a)

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right|} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60^\circ$$

b)

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{3 \cdot 12 + 4 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{36 + 20}{\sqrt{25}\sqrt{169}} = \frac{56}{5 \cdot 13} = \frac{56}{65}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{56}{65}\right) \approx 0{,}533 \mathrel{\hat{=}} 30{,}5^\circ$$

c)

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{(-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-4)}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}} = \frac{6 - 4}{\sqrt{10}\sqrt{20}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{200}} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \approx 1{,}429 \mathrel{\hat{=}} 81{,}9^\circ$$

d)

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \mathrel{\widehat{=}} 60°$$

e)

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{2\cdot(-1)+1\cdot 4+2\cdot 2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+4^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}\sqrt{21}}$$

$$= \frac{6}{3\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{21}}\right) \approx 1{,}119 \mathrel{\widehat{=}} 64{,}1°$$

f)

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\right|} = \frac{5\cdot 1+3\cdot 0+(-1)\cdot 5}{\sqrt{5^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+0^2+5^2}} = \frac{0}{\sqrt{35}\sqrt{26}} = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \mathrel{\widehat{=}} 90°$$

6.3

Zwei Vektoren sind zueinander orthogonal, wenn

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

a) Orthogonalität gilt, wenn:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\t\\0\end{pmatrix} = 2\cdot 6+3\cdot t+1\cdot 0 = 12+3t = 0$$

$$t+4 = 0$$

$$t = -4$$

b) Orthogonalität gilt, wenn:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \begin{pmatrix} -3 \\ t^2 \\ 4t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ t \end{pmatrix} = (-3)\cdot 8 + t^2\cdot 4 + 4t\cdot t = -24+4t^2+4t^2 \\
&= -24+8t^2 = 0 \\
t^2-3 &= 0 \\
t^2 &= 3 \\
t &= \pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

6.3

Im Fall $\vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$ ist die Aussage richtig. Ansonsten folgt nacheinander:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi) \\
\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 &= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\cos^2(\varphi) \\
\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|^2 &= \vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}^{\,2}\cdot\cos^2(\varphi)
\end{aligned}$$

Wegen $\cos^2(\varphi)\leq 1$ folgt damit tatsächlich

$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|^2 \leq \vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}^{\,2}.$$

6.5

a) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ist sinnvoll. Es handelt sich um das Skalarprodukt der zwei Vektoren $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ und $\vec{c}$.

b) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ist sinnvoll. Es handelt sich um die S-Multiplikation des Skalars $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ mit dem Vektor $\vec{c}$.

c) $\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ ist nicht sinnvoll. Den Vektor $\vec{a}$ kann man nicht mit dem Skalar $\vec{b}\cdot\vec{c}$ addieren.

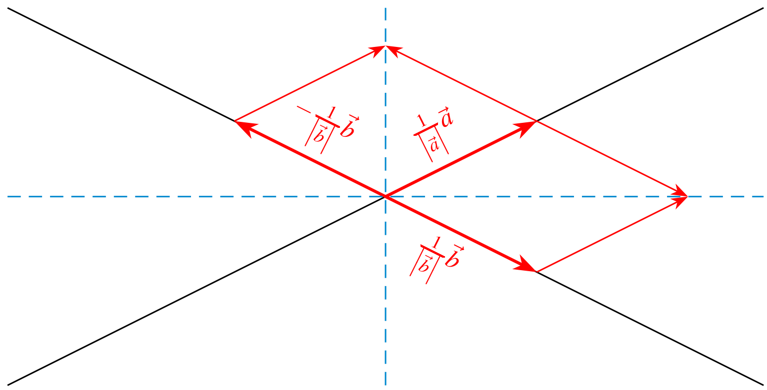
d) $|\vec{a}|\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$ ist sinnvoll. Es handelt sich das gewöhnliche Produkt der Skalare $|\vec{a}|$ und $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$.

e) $\left(|\vec{a}|\,\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ist sinnvoll. Es handelt sich das Skalarprodukt der Vektoren $\left(|\vec{a}|\,\vec{b}\right)$ und $\vec{c}$.

f) $\vec{a}\,\vec{b}+|\vec{a}|\,\vec{c}$ ist nicht sinnvoll. Das Skalar $\vec{a}\,\vec{b}$ kann man nicht mit dem Vektor $|\vec{a}|\,\vec{c}$ addieren.

6.6

Die Richtung der Winkelhalbierenden erhält man durch Addition der Summe bzw. Differenz der auf 1 normierten Richtungsvektoren der Geraden.



Richtungsvektor der 1. Winkelhalbierenden:

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}+\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

Richtungsvektor der 2. Winkelhalbierenden:

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}-\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

Skalarprodukt dieser beiden Richtungsvektoren der Winkelhalbierenden:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}+\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}-\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}\right)\\
&= \frac{1}{|\vec{a}|^2}\vec{a}^2-\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\cdot\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}+\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}\cdot\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}-\frac{1}{|\vec{b}|^2}\vec{b}^2\\
&= \frac{1}{\sqrt{\vec{a}^2}^2}\vec{a}^2-\frac{1}{\sqrt{\vec{b}^2}^2}\vec{b}^2\\
&= \frac{1}{\vec{a}^2}\vec{a}^2-\frac{1}{\vec{b}^2}\vec{b}^2\\
&= 1-1\\
&= 0
\end{aligned}$$

Die zwei Richtungsvektoren sind also orthogonal, d. h. die Winkelhalbierenden sind orthogonal.

6.7

Wir können den Einheitswürfel mit den Ecken (0|0|0), (1|0|0), (1|1|0), (0|1|0), (0|0|1), (1|0|1), (1|1|1), (0|1|1) wählen. Zwei Diagonalen sind dann z.B. durch die Richtungsvektoren

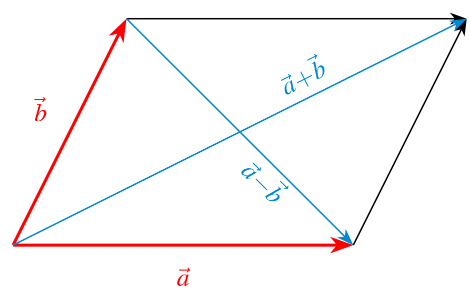
$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\
\vec{s} &= \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

gegeben. Damit erhalten wir für den Schnittwinkel φ:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi) &= \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{1\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{3}\\
\cos(\varphi) &= \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1{,}231 \mathrel{\hat{=}} 70{,}5^\circ
\end{aligned}$$

6.8

a) Skizze mit den Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ sowie $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$:



Die Parallelogrammgleichung

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$$

besagt also, dass im von $\vec{a},\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm die Summe der Diagonalenquadrate gleich der Summe der Seitenquadrate ist.

b) Beweis der Parallelogrammgleichung durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2\\
&= \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2} + \vec{a}^{\,2} - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2}\\
&= 2\vec{a}^{\,2} + 2\vec{b}^{\,2}\\
&= 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2
\end{aligned}$$

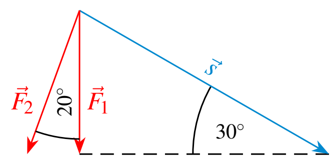
Abschnitt 6.2 – Das Vektorprodukt

6.9

Das Drehmoment berechnet sich gemäß

$$M = \left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F} \times \vec{s}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot |\vec{s}| \cdot \sin(\varphi) = 60\,\mathrm{N} \cdot 0{,}18\,\mathrm{m} \cdot \sin(\varphi) = 10{,}8 \cdot \sin(\varphi)\,\mathrm{Nm}$$

wobei φ der von $\vec{F}$ und $\vec{s}$ eingeschlossene Winkel ist.
Schematische Zeichnung:



1. Vertikale Kraft $\vec{F}_1$*:* $\varphi_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$$M_1 = 10{,}8 \cdot \sin(60^\circ)\,\mathrm{Nm} = 10{,}8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{Nm} = 5{,}4\sqrt{3}\,\mathrm{Nm} \approx 9{,}35\,\mathrm{Nm}$$

2. Schräge Kraft $\vec{F}_2$*:* $\varphi_2 = 90^\circ - 30\circ + 20\circ = 80^\circ$

$$M_2 = 10{,}8 \cdot \sin(80^\circ)\,\mathrm{Nm} \approx 10{,}8 \cdot 0{,}985\,\mathrm{Nm} \approx 10{,}64\,\mathrm{Nm}$$

6.10

a)
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \\ -\big(1 \cdot 0 - 0 \cdot 1\big) \\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ -\big(2 \cdot 0 - 1 \cdot 3\big) \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot (-6) - 6 \cdot 8 \\ -\big(2 \cdot (-6) - 6 \cdot 0\big) \\ 2 \cdot 8 - (-3) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

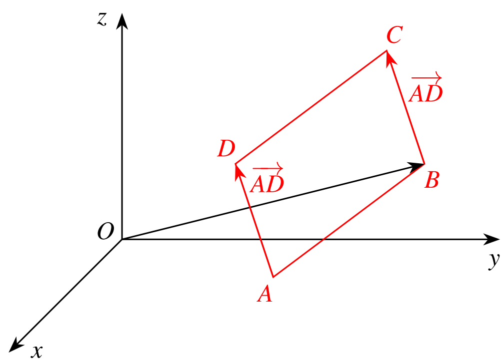
d)
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - (-2) \cdot (-\frac{1}{2}) \\ -\big((-1) \cdot 3 - (-2) \cdot \frac{1}{2}\big) \\ (-1) \cdot (-\frac{1}{2}) - 3 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6.11

Die Länge des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gerade der Flächeninhalt des von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Demzufolge ergibt sich genau dann die Länge null und damit der Nullvektor $\vec{0}$, wenn die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ in die gleiche oder in genau entgegengesetzte Richtungen weisen oder mindestens einer der beiden Vektoren der Nullvektor ist.

6.12

Überlegungsfigur:



Offensichtlich gilt:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Punktes C lauten also $(1|-1|7)$, d. h. für

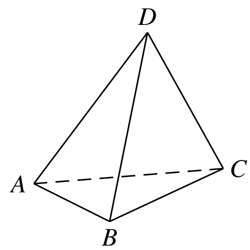
$$t = 1$$

ist das Viereck ein Parallelogramm.
Als Flächeninhalt ergibt sich:

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 - 4 \cdot (-4) \\ -\big((-3) \cdot 3 - 4 \cdot 1\big) \\ (-3) \cdot (-4) - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{13^2 + 13^2 + 13^2} = 13\sqrt{3}$$

6.13



Die Oberfläche ist die Summe der 4 Dreiecksflächen.

a) Es ist:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Dreiecksfläche ABC:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 0\cdot 0 \\ -((-1)\cdot 1 - 0\cdot(-1)) \\ (-1)\cdot 0 - 1\cdot(-1) \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\sqrt{1^2+1^2+1^2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Dreiecksfläche ABD:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 0\cdot 1 \\ -((-1)\cdot 1 - 0\cdot 0) \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\sqrt{1^2+1^2+1^2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. Dreiecksfläche ACD:

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\cdot1-1\cdot1\\-\big((-1)\cdot1-1\cdot0\big)\\(-1)\cdot1-0\cdot0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

4. Dreiecksfläche BCD:

$$
\begin{aligned}
A_4 &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}(-1)\cdot1-1\cdot0\\-\big(0\cdot1-1\cdot1\big)\\0\cdot0-(-1)\cdot1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Damit ist die Gesamtfläche:

$$
A = A_1+A_2+A_3+A_4 = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464
$$

b) Es ist:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix}2-1\\1-0\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\
\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix}3-1\\0-0\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \\
\overrightarrow{AD} &= \begin{pmatrix}2-1\\-1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \\
\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix}3-2\\0-1\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \\
\overrightarrow{BD} &= \begin{pmatrix}2-2\\-1-1\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1. Dreiecksfläche ABC:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\cdot 0-1\cdot 1\\ -(1\cdot 0-1\cdot 2)\\ 1\cdot 1-1\cdot 2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6}
\end{aligned}$$

2. Dreiecksfläche ABD:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\cdot(-1)-1\cdot(-1)\\ -(1\cdot(-1)-1\cdot 1)\\ 1\cdot(-1)-1\cdot 1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

3. Dreiecksfläche ACD:

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\cdot(-1)-1\cdot(-1)\\ -(2\cdot(-1)-1\cdot 1)\\ 2\cdot(-1)-0\cdot 1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{14}
\end{aligned}$$

4. Dreiecksfläche BCD:

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}(-1)\cdot(-2)-0\cdot(-2)\\ -(1\cdot(-2)-0\cdot 0)\\ 1\cdot(-2)-(-1)\cdot 0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Damit ist die Gesamtfläche:

$$A = A_1+A_2+A_3+A_4 = \frac{1}{2}\sqrt{6}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{14}+\sqrt{3} \approx 6{,}242$$

6.14

1. Formel:
Berechnung der linken und der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) &= \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right] = \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] \\
&= b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 + a_1b_2c_3 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 - a_3b_2c_1 \\
&= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1 \\
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} &= \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right] \\
&= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1
\end{aligned}$$

Da auf beiden Seiten das gleiche Ergebnis steht, gilt die Gleichheit.

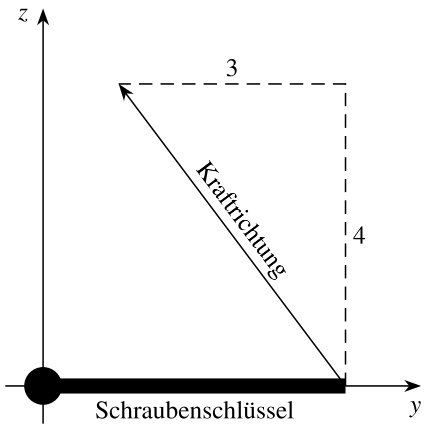
2. Formel:
Berechnung der linken und der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix} \\
\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} &= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&\quad - \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&\quad - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3c_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 - a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_1c_1b_2 + a_2c_2b_2 + a_3c_3b_2 - a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 - a_3b_3c_2 \\ a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 + a_3c_3b_3 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Da auf beiden Seiten das gleiche Ergebnis steht, gilt die Gleichheit.

6.15

a)



b) Als Drehmoment ergibt sich:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{s} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} (-3) \cdot 0 - 4 \cdot (-0.2) \\ -\big(0 \cdot 0 - 4 \cdot 0\big) \\ 0 \cdot (-0{,}2) - (-3) \cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$= \alpha \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit das Drehmoment betragsmäßig 40 Nm beträgt, muss folglich

$$\alpha \cdot 0{,}8 = 40$$
$$\alpha = \frac{40}{0{,}8} = 50$$

gelten. Damit beträgt die angreifende Kraft

$$\vec{F} = 50 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -150 \\ 200 \end{pmatrix}$$

bzw. betragsmäßig

$$F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{0^2 + (-150)^2 + 200^2} = 250\ [\mathrm{N}]\,.$$

Abschnitt 6.3 – Das Spatprodukt

6.16

$$\begin{aligned}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] &= \left[\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\right]\\ &= (-2)\cdot 0\cdot 1+2\cdot(-2)\cdot(-2)+1\cdot 1\cdot 1-(-2)\cdot 0\cdot 1-1\cdot(-2)\cdot(-2)-1\cdot 1\cdot 2\\ &= 3\end{aligned}$$

6.17

a) Es gilt

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},$$

d. h. jeweils 4 Kanten sind parallel. Es handelt sich um einen Spat.

b) Das Volumen des Spates beträgt

$$\begin{aligned}&\left[\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right]\\ &= 3\cdot 3\cdot 1+(-2)\cdot 2\cdot 1+1\cdot(-3)\cdot(-2)-1\cdot 3\cdot 1-(-2)\cdot 2\cdot 3-1\cdot(-3)\cdot(-2)\\ &= 14\end{aligned}$$

6.18

a) $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} \overset{\text{(Aufg. 6.14)}}{=} \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

b) $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] \overset{\text{(a)}}{=} \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} = \left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]$

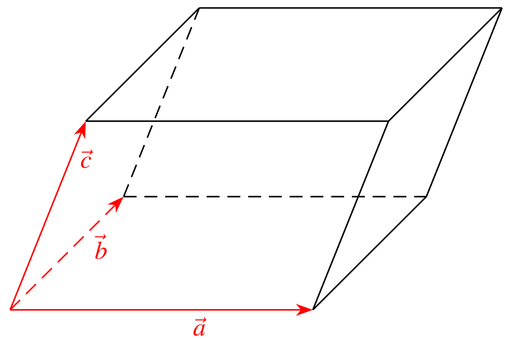
Zyklisches Vertauschen $\vec{a}\to\vec{b}\to\vec{c}\to\vec{a}$:

$\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right] = \left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right]$

c) $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c} = -\left[\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right] \overset{\text{(b)}}{=} -\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right] \overset{\text{(b)}}{=} -\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right]$

6.19

a) Das Spatprodukt berechnet gerade das Volumen des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spats.



Dieses Volumen ist aber genau dann null, wenn $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ in einer Ebene liegen, also linear abhängig sind.

b) Es gilt

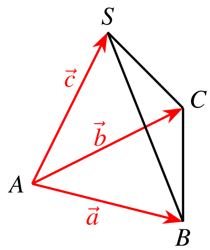
$$\begin{aligned}
\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] &= \left[\begin{pmatrix}6\\t\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\t\\4\end{pmatrix}\right]\\
&= 6\cdot(-1)\cdot 4+t\cdot t\cdot 7+3\cdot t\cdot 2-7\cdot(-1)\cdot 3-2\cdot t\cdot 6-4\cdot t\cdot t\\
&= -24+7t^2+6t+21-12t-4t^2\\
&= 3t^2-6t-3\\
&= 3\left(t^2-2t-1\right)
\end{aligned}$$

Demzufolge sind die 3 Vektoren linear abhängig wenn

$$\begin{aligned}
3\left(t^2-2t-1\right) &= 0\\
t &= \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2} = 1\pm\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

6.20

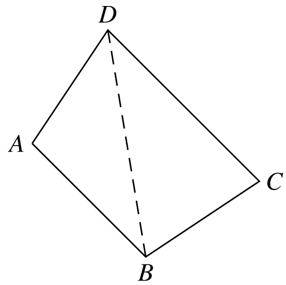
a)



Das Volumen der Pyramide berechnet sich als:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \\
&= \frac{1}{6}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-2 \\ 1-0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-2 \\ 1-0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left(0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 4\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 1\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(0+4+0-1-0-0\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Die viereckige Grundfläche $ABCD$ wird in 2 Dreiecke ABD und BCD aufgeteilt.



Dann ergibt sich das Gesamtvolumen als die Summe der Volumina der Pyramide über den 2 Dreiecksflächen:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AS}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 7-2 \\ 4-2 \\ 0-0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-2 \\ 5-2 \\ 0-0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-2 \\ 3-0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{6}(5\cdot 3\cdot 3+0\cdot 0\cdot 0+0\cdot 2\cdot 0-0\cdot 3\cdot 0-0\cdot 0\cdot 5-3\cdot 2\cdot 0) \\
&= \frac{15}{2} \\
V_2 &= \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BS}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 4-7 \\ 8-4 \\ 0-0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-7 \\ 5-4 \\ 0-0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-7 \\ 2-4 \\ 3-0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{6}\Big((-3)\cdot 1\cdot 3+(-5)\cdot(-2)\cdot 0+(-5)\cdot 4\cdot 0 \\
&\qquad -0\cdot 1\cdot(-5)-0\cdot(-2)\cdot(-3)-3\cdot 4\cdot(-5)\Big) \\
&= \frac{1}{6}(-9+60) \\
&= \frac{17}{2}
\end{aligned}$$

Damit beträgt das Gesamtvolumen der Pyramide

$$V = V_1+V_2 = \frac{15}{2}+\frac{17}{2} = 16.$$

7 Analytische Geometrie

Abschnitt 7.2 – Parameterdarstellung von Geraden

7.1

Allgemeine Parameterdarstellung der Geraden durch die Punkte P und Q:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)$$

a) $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d) $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

f) Vertauschung der Rollen $P \leftrightarrow Q$:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}$$

7.2

a) $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Schnitt mit der (x,y)-Ebene muss $z = 0$ sein, d. h. es ist $\lambda = -2$. Damit ergibt sich

$S_{xy}(2\,|\,4\,|\,0)$.

Für den Schnitt mit der (x,z)-Ebene muss $y = 0$ sein, d. h. es ist $\lambda = -6$. Damit ergibt sich

$S_{xz}(-2\,|\,0\,|\,-4)$.

Für den Schnitt mit der (y,z)-Ebene muss $x = 0$ sein, d. h. es ist $\lambda = -4$. Damit ergibt sich

$S_{xz}(0\,|\,2\,|\,-2)$.

b)
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Schnitt mit der (x,y)-Ebene muss $z = 0$ sein, was nicht möglich ist. Damit existiert kein Schnittpunkt mit der (x,y)-Ebene.
Für den Schnitt mit der (x,z)-Ebene muss $y = 0$ sein, d. h. es ist $\lambda = \frac{3}{2}$. Damit ergibt sich

$S_{xz}\,(1\,|\,0\,|-1)\,.$

Für den Schnitt mit der (y,z)-Ebene muss $x = 0$ sein, d. h. es ist $\lambda = 2$. Damit ergibt sich

$S_{xz}\,(0\,|-1\,|-1)\,.$

c)
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 3\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich handelt es sich um eine Gerade durch den Ursprung. Das bedeutet, dass der Schnittpunkt mit allen Koordinatenebenen der Ursprung $O(0|0|0)$ ist.

7.3

Die Geraden

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \vec{p} + \lambda \cdot \vec{r} \\ h: \quad \vec{x} &= \vec{q} + \mu \cdot \vec{s} \end{aligned}$$

sind parallel, wenn die beiden Richtungsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ in die gleiche Richtung weisen, also Vielfache voneinander sind.
Ist zudem $\vec{q} - \vec{p}$ ein Vielfaches eines und damit auch des anderen Richtungsvektors, so sind die Geraden identisch.

7.4

a) Die beiden Geraden g_1, g_2 seien zur Geraden

$$h: \quad \vec{x} = \vec{q} + \mu \cdot \vec{r}$$

parallel. Damit erlauben sie eine Parameterdarstellung mit dem gleichen Richtungsvektor, also

$$\begin{aligned} g_1: \quad \vec{x} &= \vec{p}_1 + \lambda_1 \cdot \vec{r} \\ g_2: \quad \vec{x} &= \vec{p}_2 + \lambda_2 \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Also sind für beide Geraden g_1, g_2 die Richtungsvektoren gleich, d. h. die Geraden g_1, g_2 sind parallel.

Die Aussage ist also wahr.

b) Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} h: \quad \vec{x}; &= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ g_1: \quad \vec{x}; &= \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ g_2: \quad \vec{x}; &= \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

g_1, g_2 sind orthogonal zur Geraden h, aber nicht zueinander parallel. Die Aussage ist also falsch!

c) Es seien g,h parallel, d. h. sie erlauben die Parameterdarstellung mit dem gleichen Richtungsvektor.

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \vec{p} + \lambda \cdot \vec{r} \\ h: \quad \vec{x} &= \vec{q} + \mu \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Ferner haben g und h einen gemeinsamen Schnittpunkt P mit dem Ortsvektor

$$\vec{p} = \vec{p} + \lambda_0 \cdot \vec{r} = \vec{q} + \mu_0 \cdot \vec{r}$$

mit konkreten $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$. Also gilt:

$$\vec{q} = \vec{p} + (\lambda_0 - \mu_0) \cdot \vec{r}$$

Damit kann man die Gerade h folgendermaßen umparametrisieren:

$$\begin{aligned} h: \quad \vec{x} &= \vec{q} + \mu \cdot \vec{r} = \vec{p} + (\lambda_0 - \mu_0) \cdot \vec{r} + \mu \cdot \vec{r} = \vec{p} + \underbrace{(\mu + \lambda_0 - \mu_0)}_{=: \bar{\lambda}} \cdot \vec{r} \\ &= \vec{p} + \bar{\lambda} \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Mit μ durchläuft auch $\bar{\lambda} = \mu + \lambda_0 - \mu_0$ ganz $\mathbb{R}$. Damit ist die letzte Parameterdarstellung von h identisch zu der von g, d. h. die zwei Geraden sind gleich.

Die Aussage ist also wahr.

7.5

a) Geradendarstellung durch P,Q:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfung, ob R auf der Geraden liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda &= 7 \\ 2 + \lambda &= 5 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2\lambda &= 6 \\ \lambda &= 3 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist $\lambda = 3$ lösbar, d. h. der Punkt R liegt auf der Geraden PQ. Die drei Punkte liegen also auf einer Geraden.

b) Geradendarstellung durch P,Q:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Überprüfung, ob R auf der Geraden liegt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 3 - \lambda &= 1 \\ -1 + 2\lambda &= 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \\ 2\lambda &= 1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, d. h. der Punkt R liegt nicht auf der Geraden PQ. Die drei Punkte liegen also auf keiner Geraden.

c) Geradendarstellung durch P,Q:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Überprüfung, ob R auf der Geraden liegt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 2 + \lambda &= 0 \\ \lambda &= -2 \\ 3 - \lambda &= 1 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \lambda &= -2 \\ \lambda &= -2 \\ -\lambda &= -2 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, d. h. der Punkt R liegt nicht auf der Geraden PQ. Die drei Punkte liegen also auf keiner Geraden.

d) Geradendarstellung durch P,Q:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -7 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}$$

Überprüfung, ob R auf der Geraden liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -7 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 1 - 3{,}5\lambda &= 0 \\ 2 - 7\lambda &= 0 \\ -3 + 10{,}5\lambda &= 0 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 3{,}5\lambda &= 1 \\ 7\lambda &= 2 \\ 10{,}5\lambda &= 3 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem ist $\lambda = \frac{2}{7}$ lösbar, d. h. der Punkt R liegt auf der Geraden PQ. Die drei Punkte liegen also auf einer Geraden.

7.6

Man führt $\lambda := x$ als Parameter ein. Dann lautet die Parameterdarstellung

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ a_0 + a_1\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt lässt sich die Parameterdarstellung einer Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

in eine affine Funktion umformen, wenn die Gerade nicht parallel zur y-Achse ist, also wenn $r_1 \neq 0$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} x &= p_1 + \lambda r_1 \\ y &= p_2 + \lambda r_2 \end{aligned}$$

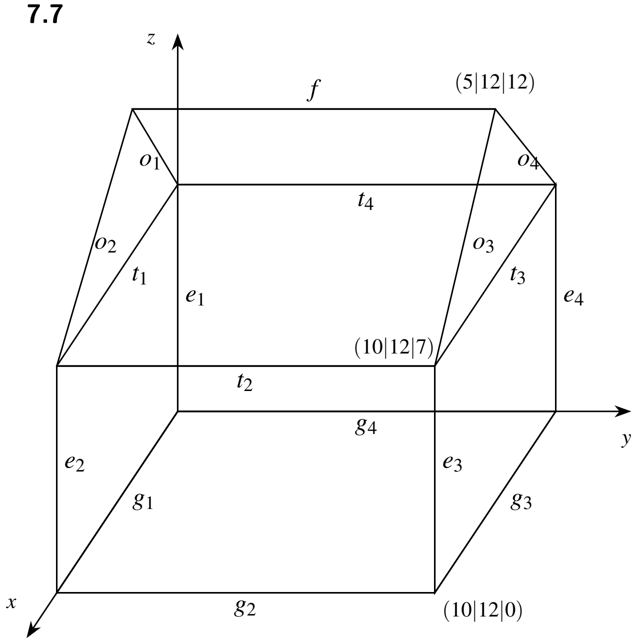
Aus der 1. Gleichung erhält man wegen $r_1 \neq 0$

$$\lambda = -\frac{p_1}{r_1} + \frac{1}{r_1}x.$$

Eingesetzt in die 2. Gleichung, ergibt sich die affine Funktion

$$y = p_2 + \left(-\frac{p_1}{r_1} + \frac{1}{r_1}x\right) r_2 = \left(p_2 - \frac{p_1 r_2}{r_1}\right) + \frac{r_2}{r_1}x.$$

7.7



Grundlinien:

$$g_1: \quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}10]$$

$$g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}12]$$

$$g_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}10]$$

$$g_4: \quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}12]$$

Vertikale Ecklinien:

$$e_1: \quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}7]$$

$$e_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}7]$$

$$e_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}7]$$

$$e_4: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}7]$$

Traufen:

$$t_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}10]$$

$$t_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}12]$$

$$t_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}10]$$

$$t_4: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}12]$$

Ortgänge:

$$o_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}5]$$

$$o_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}5]$$

$$o_3: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}5]$$

$$o_4: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}5]$$

First:

$$t_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in [0{,}12]$$

Abschnitt 7.3 – Parameterdarstellung von Ebenen

7.8

Allgemeine Parameterdarstellung der Ebene durch die Punkte P, Q, R:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR} \\ &= \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) + \mu \cdot \left(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}\right) \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \mu \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \mu \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \mu \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d)
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix} \right) + \mu \left(\begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix} \right)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{33}{2} \\ -\sqrt{2} - \sqrt{\pi} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\pi \\ -17 \\ \frac{2}{3} - \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

7.9

Durch die drei Fußpunkte der Tischbeine sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte P,Q,R gegeben. Diese Punkte bestimmen eindeutig eine Ebene, mit der Parameterdarstellung

$$\varepsilon: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR}.$$

Diese Ebene stimmt natürlich mit der Fußbodenebene überein. Da alle Fußpunkte P,Q,R in der Ebene liegen, ist ein Wackeln nicht möglich. Dafür müsste es einen weiteren Fußpunkt außerhalb der Ebene ε geben.

7.10

a) Die Gerade g ist parallel zur Ebene ε, wenn sich der Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden aus den Richtungsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$ linear kombinieren lässt. Führt zusätzlich der Ortsvektor $\vec{q}$ zu einem Punkt der Ebene ε, liegt die Gerade g in der Ebene ε.

b) Die Ebene ε_2 ist parallel zur Ebene ε_1, wenn sich die Richtungsvektoren $\vec{r}_2, \vec{s}_2$ der Ebene ε_2 aus den Richtungsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{s}_1$ der Ebene ε_1 linear kombinieren lassen. Führt zusätzlich der Ortsvektor $\vec{p}_2$ zu einem Punkt der Ebene ε_1, so sind die beiden Ebenen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ identisch.

7.11

a) Ebenendarstellung durch A,B,C:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}\\ &= \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Überprüfung, ob D in der Ebene liegt:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned}1 + \lambda + \mu &= 3\\ 2 \qquad + 2\mu &= 4\\ 0 + \lambda + 3\mu &= 4\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\lambda + \mu &= 2\\ 2\mu &= 2\\ \lambda + 3\mu &= 4\end{aligned}$$

Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&2&2\\1&3&4\end{array}\right)\begin{array}{l}(-1)\\ \qquad \mid\frac{1}{2}\\ +\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&2\\0&1&1\\0&2&2\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ (-1)\;(-2)\\ \qquad +\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{array}\right)\begin{array}{l}+\\ (-1)\;(-2)\\ \qquad +\end{array}$$

Ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1\\ \mu &= 1\end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat also eine Lösung, d. h. der Punkt D liegt in der Ebene ABC. Die vier Punkte liegen also in einer Ebene.

b) Ebenendarstellung durch A,B,C:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Überprüfung, ob D in der Ebene liegt:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} \lambda \quad &= 0 \\ \mu &= 0 \\ -\mu &= 2 \end{aligned}$$

Aus den letzten 2 Gleichungen sieht man sofort, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat, d. h. der Punkt D liegt nicht in der Ebene ABC. Die vier Punkte liegen also nicht in einer Ebene.

c) Ebenendarstellung durch A,B,C:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Überprüfung, ob D in der Ebene liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 1 - \lambda - \mu &= 1 \\ -1 - \lambda + 2\mu &= 2 \\ -\mu &= -1 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} -\lambda - \mu &= 0 \\ -\lambda + 2\mu &= 3 \\ -\mu &= -1 \end{aligned}$$

Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$
\left(\begin{array}{rr|r} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right)
\begin{array}{l} (-1)\,|\,(-1) \\ + \\ \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ |\,\frac{1}{3} \\ |\,\frac{1}{2} \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
\begin{array}{l} + \\ (-1)\;(-1) \\ + \end{array}
$$

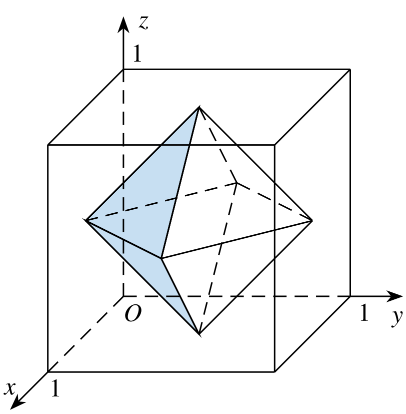
$$
\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Ausgeschrieben:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -1 \\
\mu &= 1
\end{aligned}
$$

Das Gleichungssystem hat also eine Lösung, d. h. der Punkt D liegt in der Ebene ABC. Die vier Punkte liegen also in einer Ebene.

7.12



Beginnend mit den schraffierten Seitenflächen ergeben sich folgende Parameterdarstellung gemäß "Rechte-Hand-Richtung":

Unten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda, \mu \le 1, \lambda + \mu \le 1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda, \mu \le 1, \lambda + \mu \le 1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda, \mu \le 1, \lambda + \mu \le 1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda, \mu \le 1, \lambda + \mu \le 1$$

Oben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda, \mu \le 1, \lambda + \mu \le 1$$

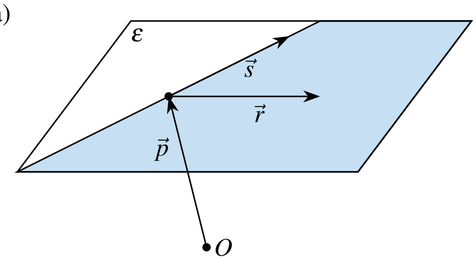
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda, \mu \le 1, \lambda + \mu \le 1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda, \mu \le 1, \lambda + \mu \le 1$$

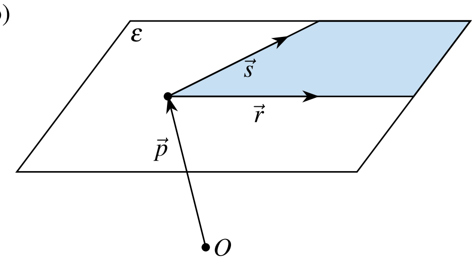
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \lambda, \mu \le 1, \lambda + \mu \le 1$$

7.13

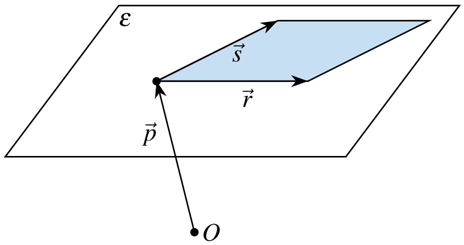
a)



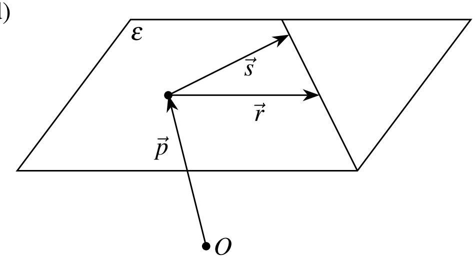
b)



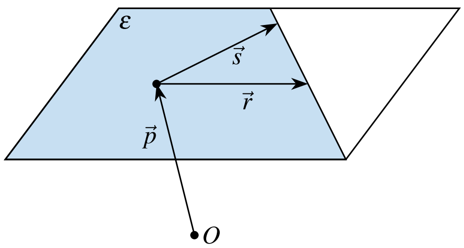
c)



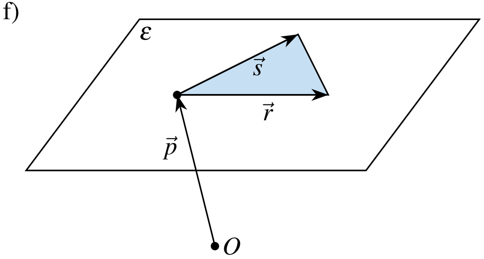
d)



e)



f)



Abschnitt 7.4 – Hyperebenen in Gleichungsform

7.14

a) Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda \\ y &= 1+\lambda \end{aligned}$$

Aus der 2. Gleichung:

$$\lambda = y-1$$

Eingesetzt in 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} x &= 2(y-1) = 2y-2 \\ x-2y &= -2 \end{aligned}$$

b) Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= 2-\lambda \\ y &= 1+4\lambda \end{aligned}$$

Aus der 1. Gleichung:

$$\lambda = 2-x$$

Eingesetzt in 2. Gleichung:

$$\begin{aligned} y &= 1+4(2-x) = 9-4x \\ 4x+y &= 9 \end{aligned}$$

c) Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3+\lambda \end{aligned}$$

Aus der 2. Gleichung:

$$\lambda = y-3$$

Eingesetzt in 1. Gleichung:

$$x = 1 \qquad\qquad (\lambda \text{ kann/braucht nicht eliminiert werden})$$

d) Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\lambda \\ y &= -1-4\lambda \end{aligned}$$

Aus der 2. Gleichung:

$$\lambda = -\frac{y+1}{4} = -\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}$$

Eingesetzt in 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4}y-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}y+\frac{1}{6} = \frac{1}{6}y+\frac{2}{3} \\ x-\frac{1}{6}y &= \frac{2}{3} \\ 6x-y &= 4 \end{aligned}$$

7.15

a) Mit $\lambda = x$ ergibt sich $y = -3 + \lambda$ und damit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Mit $\lambda = x$ ergibt sich $y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda$ und damit

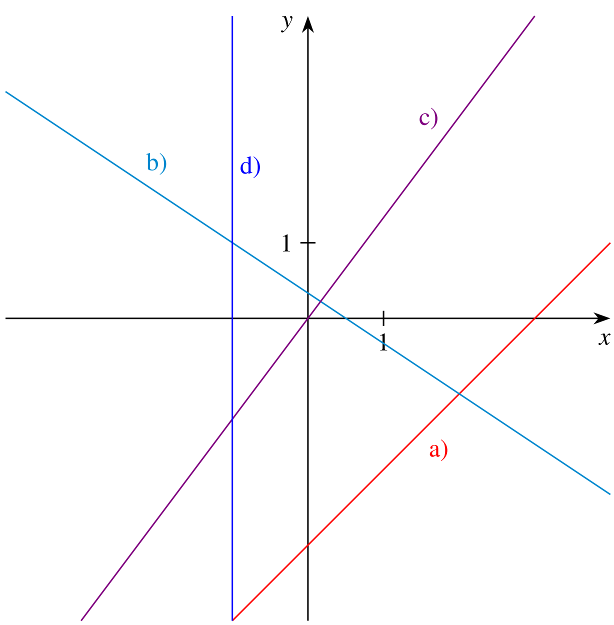
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Mit $\lambda = x$ ergibt sich $y = \frac{3}{4}\lambda$ und damit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

d) Mit $\lambda = y$ und $x = -1$ ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



7.16

Idee: Bestimmung einer Parameterdarstellung von g und h:

1. Fall: $b \neq 0$
Dann lassen sich die Koordinatengleichungen folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} g: \quad y &= \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \\ h: \quad y &= \frac{d}{b} - \frac{a}{b}x \end{aligned}$$

Einführung von x als Parameter λ bzw. μ:

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{c}{b} - \frac{a}{b}\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{b} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix} \\ h: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \frac{d}{b} - \frac{a}{b}\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{b} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beide Geraden g,h haben also den gleichen Richtungsvektor, d. h. sie sind parallel.

2. Fall: $b = 0$
Dann lauten die Koordinatengleichungen

$$\begin{aligned} g: \quad ax &= c \\ h: \quad ax &= d. \end{aligned}$$

Dabei ist $a \neq 0$. Damit:

$$\begin{aligned} g: \quad x &= \frac{c}{a} \\ h: \quad x &= \frac{d}{a} \end{aligned}$$

Einführung von y als Parameter λ bzw. μ:

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ h: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{a} \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{b} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beide Geraden g,h haben also wieder den gleichen Richtungsvektor, d. h. sie sind parallel.

7.17

a) Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 1-\mu \\ z &= 2+2\lambda+2\mu \end{aligned}$$

Aus der 1. und 2. Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda &= x \\ \mu &= 1-y \end{aligned}$$

Eingesetzt in 3. Gleichung:

$$z = 2+2x+2(1-y) = 2+2x+2-2y = 2x-2y+4$$

Koordinatengleichung:

$$2x-2y-z = -4$$

Rekonstruktion einer Parameterdarstellung:

$$z = 4+2x-2y$$

Setze:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &:= x \\ \bar{\mu} &:= y \end{aligned}$$

Damit erhält man als Parameterdarstellung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \\ 4+2\bar{\lambda}-2\bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \bar{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \bar{\mu}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 1+\lambda+\mu \\ z &= 2+2\mu \end{aligned}$$

Aus der 1. und 3. Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda &= x \\ \mu &= \frac{z}{2}-1 \end{aligned}$$

Eingesetzt in 2. Gleichung:

$$y = 1+x+\frac{z}{2}-1 = x+\frac{z}{2}$$

Koordinatengleichung:

$$\begin{aligned} x-y+\frac{z}{2} &= 0 \\ 2x-2y+z &= 0 \end{aligned}$$

Rekonstruktion einer Parameterdarstellung:

$$z = -2x+2y$$

Setze:

$$\begin{aligned} &\bar{\lambda} := x \\ &\bar{\mu} := y \end{aligned}$$

Damit erhält man als Parameterdarstellung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \\ -2\bar{\lambda}+2\bar{\mu} \end{pmatrix} = \bar{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \bar{\mu}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= -\lambda + 3\mu \\ y &= 1 + 4\lambda - 2\mu \\ z &= -1 + 2\lambda \end{aligned}$$

Aus der 3. und 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z \\ \mu &= \frac{1}{3}(x+\lambda) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}z \end{aligned}$$

Eingesetzt in 2. Gleichung:

$$y = 1 + 2 + 2z - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}z$$

Koordinatengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x + y - \frac{5}{3}z &= \frac{8}{3} \\ 2x + 3y - 5z &= 8 \end{aligned}$$

Rekonstruktion einer Parameterdarstellung:

$$z = -\frac{8}{5} + \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y$$

Setze:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &:= x \\ \bar{\mu} &:= y \end{aligned}$$

Damit erhält man als Parameterdarstellung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \\ -\frac{8}{5} + \frac{2}{5}\bar{\lambda} + \frac{3}{5}\bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix} + \bar{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \bar{\mu}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

d) Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= 1+\frac{1}{2}\lambda+\mu \\ y &= -3 \\ z &= \sqrt{2}-\lambda-\frac{1}{2}\mu \end{aligned}$$

Aus der 1. Gleichung:

$$\mu = x-1-\frac{1}{2}\lambda$$

Eingesetzt in die zwei übrigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= -3 \\ z &= \sqrt{2}-\lambda-\frac{1}{2}\left(x-1-\frac{1}{2}\lambda\right) = \frac{1}{2}+\sqrt{2}-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\lambda \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann nach λ aufgelöst werden, doch lässt sich dieses λ nicht mehr in die 1. Gleichung einsetzen. Damit bleibt als Koordinatengleichung:

$$y = -3$$

Rekonstruktion einer Parameterdarstellung:
Setze:

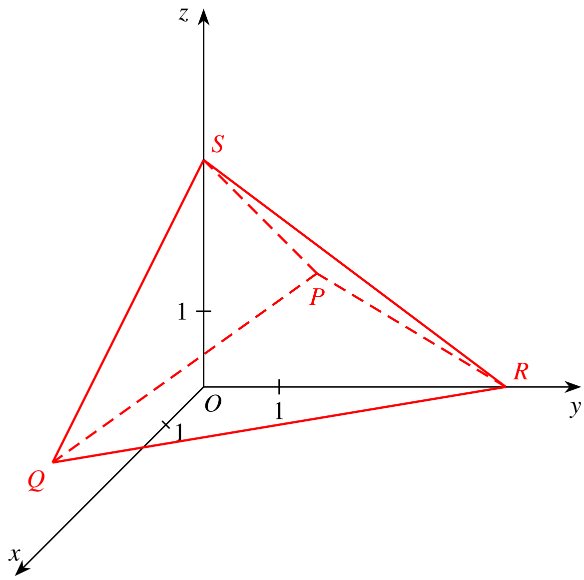
$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &:= x \\ \bar{\mu} &:= z \end{aligned}$$

Damit erhält man als Parameterdarstellung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ -3 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{\lambda}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{\mu}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.18

a)



b) Ebenendarstellung durch P,Q,R:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{PR} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Ebene erfüllt offensichtlich die Gleichung

$$z = 0.$$

Ebenendarstellung durch P,Q,S:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PQ} + \mu \overrightarrow{PS} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= -3 + 5\lambda + 3\mu \\ y &= -\lambda \\ z &= 3\mu \end{aligned}$$

Aus der 2. und 3. Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda &= -y \\ \mu &= \frac{1}{3}z \end{aligned}$$

Eingesetzt in 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} x &= -3 - 5y + z \\ x + 5y - z &= -3 \end{aligned}$$

Ebenendarstellung durch P,R,S:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{PR} + \mu \overrightarrow{PS} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= -3 + 3\lambda + 3\mu \\ y &= 4\lambda \\ z &= 3\mu \end{aligned}$$

Aus der 2. und 3. Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{4}y \\ \mu &= \frac{1}{3}z \end{aligned}$$

Eingesetzt in 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} x &= -3 + \frac{3}{4}y + z \\ 4x - 3y - 4z &= -12 \end{aligned}$$

Ebenendarstellung durch Q,R,S:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \overrightarrow{OQ} + \lambda \overrightarrow{QR} + \mu \overrightarrow{QS} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x &= 2 - 2\lambda - 2\mu \\ y &= -1 + 5\lambda + \mu \\ z &= 3\mu \end{aligned}$$

Aus der 3. und 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{3}z \\ \lambda &= 1 - \frac{1}{2}x - \mu = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}z \end{aligned}$$

Eingesetzt in 2. Gleichung:

$$\begin{aligned} y &= -1 + 5\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}z\right) + \frac{1}{3}z \\ y &= 4 - \frac{5}{2}x - \frac{4}{3}z \\ 15x + 6y + 8z &= 24 \end{aligned}$$

Abschnitt 7.5 – Schnittprobleme

7.19

Auf die Anfertigung der Skizzen wird hier aus Platzgründen verzichtet.

a) Für den Schnittpunkt gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 1 + \lambda &= 3 - \mu \\ 2 - \lambda &= 1 + 2\mu \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= 2 \\ -\lambda - 2\mu &= -1 \end{aligned}$$

Das Gauß-Eliminationsverfahren ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda &= 3 \\ \mu &= -1 \end{aligned}$$

Damit lautet der Ortsvektor zum Schnittpunkt

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d. h. der Schnittpunkt hat die Koordinaten $P(4|-1)$.

b) Umformung der Geradengleichungen in die Form $y = a_1 x + a_0$:

$$\begin{aligned} g_1: \quad y &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \\ g_2: \quad y &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Gleichsetzen der y-Werte zur Berechnung des x-Werts:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} &= 2x + 3 \\ -\frac{10}{3} &= \frac{5}{3}x \\ 5x &= -10 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Berechnung des zugehörigen y-Werts durch Einsetzen:

$$y = \frac{1}{3} \cdot (-2) - \frac{1}{3} = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$$

Der Schnittpunkt hat also die Koordinaten $P(-2|-1)$.

c) Umformung der Geradengleichung von g_2 in die Form $y = a_1 x + a_0$:

$$g_2: \quad y = -2x + 1$$

Herleitung einer Parameterdarstellung von g_2. Setze dazu $x = \mu$. Damit

$$g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Für den Schnittpunkt gilt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} 5 - 3\lambda &= \mu \\ -1 + 2\lambda &= 1 - 2\mu \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} -3\lambda - \mu &= -5 \\ 2\lambda + 2\mu &= 2 \end{aligned}$$

Das Gauß-Eliminationsverfahren ergibt:

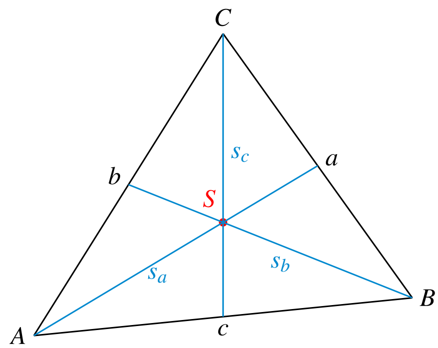
$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \\ \mu &= -1 \end{aligned}$$

Damit lautet der Ortsvektor zum Schnittpunkt

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d. h. der Schnittpunkt hat die Koordinaten $P(-1|3)$.

7.20



Berechnung von Parameterdarstellungen der Seitenhalbierenden:

$$\begin{aligned}
s_a: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + \lambda\left[\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right] = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\left[\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\10\\-4\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\\
s_b: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OB} + \mu\left[\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right] = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} + \mu\left[\begin{pmatrix}-2\\10\\-4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\-8\\-1\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\6\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}\\
s_c: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OC} + \nu\left[\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right] = \begin{pmatrix}6\\10\\2\end{pmatrix} + \nu\left[\begin{pmatrix}-2\\-8\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix}6\\10\\2\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\-9\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Berechnung des Schnittpunkts $s_a \cap s_b$:

$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\6\\-\frac{9}{2}\end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned}
4 + 3\lambda &= 8 - 3\mu\\
2 + 3\lambda &= 6\mu\\
1 + 3\lambda &= 6 - \tfrac{9}{2}\mu
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
3\lambda + 3\mu &= 4\\
3\lambda - 6\mu &= -2\\
6\lambda + 9\mu &= 10
\end{aligned}$$

Gauß-Elimination ergibt

$$\lambda = \frac{2}{3}$$
$$\mu = \frac{2}{3}.$$

Damit lautet der Ortsvektor zum Schnittpunkt

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d. h. der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(6|4|3)$.
Man könnte jetzt analog überprüfen, ob $s_b \cap s_c$ und $s_c \cap s_a$ auf den gleichen Schnittpunkt S führen.
Einfachere Alternative: Man prüft, ob der auf den Seitenhalbierenden s_a, s_b liegende $S(6|4|3)$ auf der dritten Seitenhalbierenden s_c liegt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das ist offensichtlich für $\nu = \frac{2}{3}$ erfüllt, d. h. S liegt tatsächlich auch auf der dritten Seitenhalbierenden.

7.21

Für einen Schnittpunkt gilt:

$$\begin{pmatrix} c \\ -2 \\ c \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} c \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 1 \\ c \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2c \\ 2 \\ -c \end{pmatrix}$$

In Koordinaten:

$$\begin{aligned} c + c\lambda &= -c - 2c\mu \\ -2 - \lambda &= 1 + 2\mu \\ c + \lambda &= c - c\mu \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} c\lambda + 2c\mu &= -2c \\ -\lambda - 2\mu &= 3 \\ \lambda + c\mu &= 0 \end{aligned}$$

Gauß-Elimination mit Vertauschung der 1. und letzten Zeile:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ c & 2c & -2c \end{array}\right) \begin{array}{l} (1) \quad (-c) \\ + \\ \quad\quad + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & 0 \\ 0 & c-2 & 3 \\ 0 & 2c-c^2 & -2c \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid \frac{1}{c} \end{array}$$

1. Fall: $c \neq 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & 0 \\ 0 & c-2 & 3 \\ 0 & 2-c & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (1) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & 0 \\ 0 & c-2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Offensichtlich gibt es in diesem Fall keine Lösung und damit kein Schnittpunkt.
2. Fall: $c = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (1) \\ + \end{array}$$

In diesem Fall gibt es eine Lösung und damit einen Schnittpunkt.

Parallelität tritt auf, wenn die beiden Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, also wenn

$$\begin{pmatrix} -2c \\ 2 \\ -c \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} c \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Komponente erkennt man, dass $\nu = -2$ gelten muss. Dann ist auch die Gleichheit der 1. Komponente erfüllt. Aus der 3. Komponente ergibt sich dann

$$-c = -2$$

bzw.

$$c = 2.$$

Um zu überprüfen, ob in diesem Fall die beiden Geraden identisch sind, können wir z. B. überprüfen, ob der Basispunkt der 2. Geraden g_2 auf der 1. Gerade g_1 liegt, also ob

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Komponente erkennt man, dass $\lambda = 0$ gelten muss. Aber dann ergibt sich ein Widerspruch in der 1. und 2. Komponente, d. h. die zwei Geraden sind nicht identisch.

Zusammenfassend gilt also: Die zwei Geraden
- schneiden sich für $c = 0$,
- sind parallel, aber nicht identisch für $c = 2$,
- sind windschief für $c \neq 2$, $c \neq 0$.

7.22

a) Für den Schnitt gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten mit den Parametern auf einer Seite:

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \nu &= 2 \\ \lambda \qquad - \nu &= 0 \\ -\lambda - \mu - 2\nu &= 1 \end{aligned}$$

Das Gauß-Eliminationsverfahren ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda &= -3 \\ \mu &= 8 \\ \nu &= -3 \end{aligned}$$

Damit lautet der Ortsvektor zum Schnittpunkt

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

d. h. der Schnittpunkt hat die Koordinaten $P(-3|-2|5)$.

b) Für den Schnitt gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten mit den Parametern auf einer Seite:

$$\begin{aligned} -\mu + \nu &= -1 \\ -\lambda + \mu \qquad &= 0 \\ 2\lambda \qquad - 2\nu &= 0 \end{aligned}$$

Das Gauß-Eliminationsverfahren ergibt, dass es keine Lösung gibt. Demzufolge existiert kein Schnittpunkt.

c) Umformung der Ebenengleichung in eine Parametersdarstellung. Dazu:

$$\begin{aligned} \mu &:= x \\ \nu &:= y \end{aligned}$$

Dann lautet die Ebene wegen $z = 2 + 2x + y = 2 + 2\mu + \nu$

$$\varepsilon: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Schnitt gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten mit den Parametern auf einer Seite:

$$\begin{aligned} 2\lambda - \mu \phantom{{}-\nu} &= -1 \\ -\lambda \phantom{{}-\mu} - \nu &= 1 \\ 2\lambda - 2\mu - \nu &= -3 \end{aligned}$$

Das Gauß-Eliminationsverfahren ergibt:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \\ \mu &= 5 \\ \nu &= -3 \end{aligned}$$

Damit lautet der Ortsvektor zum Schnittpunkt

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

d. h. der Schnittpunkt hat die Koordinaten $P(5|-3|9)$.

d) Umformung der Ebenengleichung in eine Parametersdarstellung. Dazu:

$$\mu := y$$
$$\nu := z$$

Dann lautet die Ebene wegen $x = 1 + 3y - 2z = 1 + 3\mu - 2\nu$

$$\varepsilon : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Schnitt gilt:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In Koordinaten mit den Parametern auf einer Seite:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda & - & 3\mu & + & 2\nu & = & 5 \\ 2\lambda & - & \mu & & & = & 1 \\ 3\lambda & & & - & \nu & = & -1 \end{array}$$

Das Gauß-Eliminationsverfahren ergibt:

$$\lambda = 0$$
$$\mu = -1$$
$$\nu = 1$$

Damit lautet der Ortsvektor zum Schnittpunkt

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d. h. der Schnittpunkt hat die Koordinaten $P(-4|-1|1)$.

7.23

a) *Schnitt mit der der Ebene $x = 0$:* x-Koordinate muss 0 sein:

$$\begin{aligned} -3+2\lambda+\mu &= 0 \\ \mu &= 3-2\lambda \end{aligned}$$

Damit lautet die Schnittgerade

$$\begin{aligned} g_x: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3-2\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schnitt mit der der Ebene $y = 0$: y-Koordinate muss 0 sein:

$$\begin{aligned} 2-\lambda+2\mu &= 0 \\ \lambda &= 2+2\mu \end{aligned}$$

Damit lautet die Schnittgerade

$$\begin{aligned} g_y: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (2+2\mu) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schnitt mit der der Ebene $z = 0$: z-Koordinate muss 0 sein:

$$\begin{aligned} 4+\lambda-2\mu &= 0 \\ \lambda &= -4+2\mu \end{aligned}$$

Damit lautet die Schnittgerade

$$\begin{aligned} g_z: \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-4+2\mu) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) *Schnitt mit der der Ebene* $x = 0$*:* x-Koordinate muss 0 sein. Also gilt:

$$\begin{aligned} -4y + 12z &= 12 \\ y &= -3 + 3z \end{aligned}$$

Mit $\lambda := z$ lautet die Schnittgerade

$$g_x: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schnitt mit der der Ebene $y = 0$*:* y-Koordinate muss 0 sein. Also gilt:

$$\begin{aligned} 3x + 12z &= 12 \\ x &= 4 - 4z \end{aligned}$$

Mit $\lambda := z$ lautet die Schnittgerade

$$g_x: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schnitt mit der der Ebene $z = 0$*:* z-Koordinate muss 0 sein. Also gilt:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 12 \\ x &= 4 + \frac{4}{3}y \end{aligned}$$

Mit $\lambda := y$ lautet die Schnittgerade

$$g_x: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7.24

a) Auf der Schnittgeraden gilt:

$$\begin{aligned} z &= h = 3 - \lambda + \mu \\ \mu &= h - 3 + \lambda \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Parameterdarstellung der Schnittgeraden:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (h - 3 + \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 - h \\ h \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) *Argumentative Überlegung:* Wenn zwei verschiedene Höhenebenen zwei nicht parallele Höhenlinien aus der Geländeebene ausschneiden würden, hätten diese Höhenlinien die linear unabhängigen Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Diese beiden in der Geländeebene liegenden Vektoren würden die Ebene aufspannen. Damit hätte die Ebene konstante Höhe, d. h. die Ebene wäre horizontal, was laut Voraussetzung nicht der Fall ist.
Rechnerische Lösung: Darstellung der Ebene:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{p} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s} \\ &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beide Richtungsvektoren können nicht eine verschwindende dritte Komponente $r_3 = 0$ und $s_3 = 0$ haben, da dann die Ebene horizontal wäre. Ohne Einschränkung ist $s_3 \neq 0$ (ansonsten vertauscht man die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{s}$).
Auf der Schnittgeraden gilt:

$$\begin{aligned} z = h &= p_3 + \lambda r_3 + \mu s_3 \\ \mu &= \frac{h - p_3 - \lambda r_3}{s_3} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Parameterdarstellung der Schnittgeraden:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \frac{h - p_3 - \lambda r_3}{s_3} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{s_3} \begin{pmatrix} p_1 s_3 + h s_1 - p_3 s_1 \\ p_2 s_3 + h s_2 - p_3 s_2 \\ h s_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 - \frac{r_3 s_1}{s_3} \\ r_2 - \frac{r_3 s_2}{s_3} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Richtungsvektoren all dieser Geraden undabhängig von h und damit identisch, d. h. die Höhenlinien sind parallel.

Abschnitt 7.6 – Abstandsberechnungen

7.25

a) Berechnung des Lotfußpunktes F von A auf g:

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{AF}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \left[\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1+\lambda\\-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
&= 1+\lambda+\lambda\\
&= 1+2\lambda
\end{aligned}$$

Also gilt für F

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

bzw. für den zugehörigen Ortsvektor

$$\vec{f} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Als Verbindungsvektor $\overrightarrow{AF}$ erhält man

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

und damit als gesuchten Abstand

$$d = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Berechnung des Lotfußpunktes F von A auf g:

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{AF}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\\
&= \left[\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3-3\lambda\\4+\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\\
&= -9+9\lambda+4+\lambda\\
&= -5+10\lambda
\end{aligned}$$

Also gilt für F

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

bzw. für den zugehörigen Ortsvektor

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Als Verbindungsvektor $\overrightarrow{AF}$ erhält man

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

und damit als gesuchten Abstand

$$d = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}.$$

c) Herleitung einer Parameterdarstellung von g. Setze dazu $\lambda := x_1$. Damit:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Berechnung des Lotfußpunktes F von A auf g:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{AF} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3+\lambda \\ \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \\ &= 3 + \lambda - \frac{3}{16} + \frac{9}{16}\lambda \\ &= \frac{45}{16} + \frac{25}{16}\lambda \end{aligned}$$

Also gilt für F

$$\lambda = -\frac{45}{25} = -\frac{9}{5}$$

bzw. für den zugehörigen Ortsvektor

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} - \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{72}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}.$$

Als Verbindungsvektor $\overrightarrow{AF}$ erhält man

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

und damit als gesuchten Abstand

$$d = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2.$$

d) Berechnung des Lotfußpunktes F von A auf g:

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{AF} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 5+2\lambda \\ -1-3\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= 10+4\lambda+3+9\lambda \\ &= 13+13\lambda \end{aligned}$$

Also gilt für F

$$\lambda = -1$$

bzw. für den zugehörigen Ortsvektor

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Als Verbindungsvektor $\overrightarrow{AF}$ erhält man

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit als gesuchten Abstand

$$d = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \sqrt{(-6)^2+3^2+2^2} = \sqrt{49} = 7.$$

7.26

b) Parameterdarstellung der drei Seiten

$$\begin{aligned}
c = AB: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \\
a = BC: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OB} + \lambda \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \\
b = CA: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OC} + \lambda \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Berechnung des Lotfußpunktes F_a von A auf a:

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{AF_a} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -7 + 5\lambda \\ 1 - 8\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&= -35 + 25\lambda - 8 + 64\lambda \\
&= -43 + 89\lambda
\end{aligned}$$

Also gilt für F_a

$$\lambda = \frac{43}{89}$$

bzw. für den zugehörigen Ortsvektor

$$\vec{f_a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{43}{89} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{126}{89} \\ \frac{190}{89} \end{pmatrix}.$$

Als Verbindungsvektor $\overrightarrow{AF_a}$ erhält man

$$\overrightarrow{AF_a} = \begin{pmatrix} \frac{126}{89} \\ \frac{190}{89} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{408}{89} \\ -\frac{255}{89} \end{pmatrix}$$

und damit als gesuchten Abstand

$$d_a = \left| \overrightarrow{AF_a} \right| = \sqrt{\left(-\frac{408}{89}\right)^2 + \left(-\frac{255}{89}\right)^2} = \frac{51}{89}\sqrt{89}.$$

Analoge Rechnungen ergeben sich für die anderen Höhen:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BF_b} &= \begin{pmatrix} \frac{357}{53} \\ -\frac{102}{53} \end{pmatrix} \\
d_b &= \left| \overrightarrow{BF_b} \right| = \frac{51}{53}\sqrt{53} \\
\overrightarrow{CF_c} &= \begin{pmatrix} \frac{51}{50} \\ \frac{357}{50} \end{pmatrix} \\
d_c &= \left| \overrightarrow{CF_c} \right| = \frac{51}{10}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

c) Die Höhen haben folgende Geradengleichungen:

$$\begin{aligned} h_a: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AF_a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{408}{89} \\ -\frac{255}{89} \end{pmatrix} \\ h_b: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OB} + \mu \overrightarrow{BF_b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{357}{53} \\ -\frac{102}{53} \end{pmatrix} \\ h_c: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OC} + \nu \overrightarrow{CF_c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \frac{51}{50} \\ \frac{357}{50} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schnitt $h_a \cap h_b$:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{408}{89} \\ -\frac{255}{89} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{357}{53} \\ -\frac{102}{53} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des entstehenden Gleichungssystem lautet

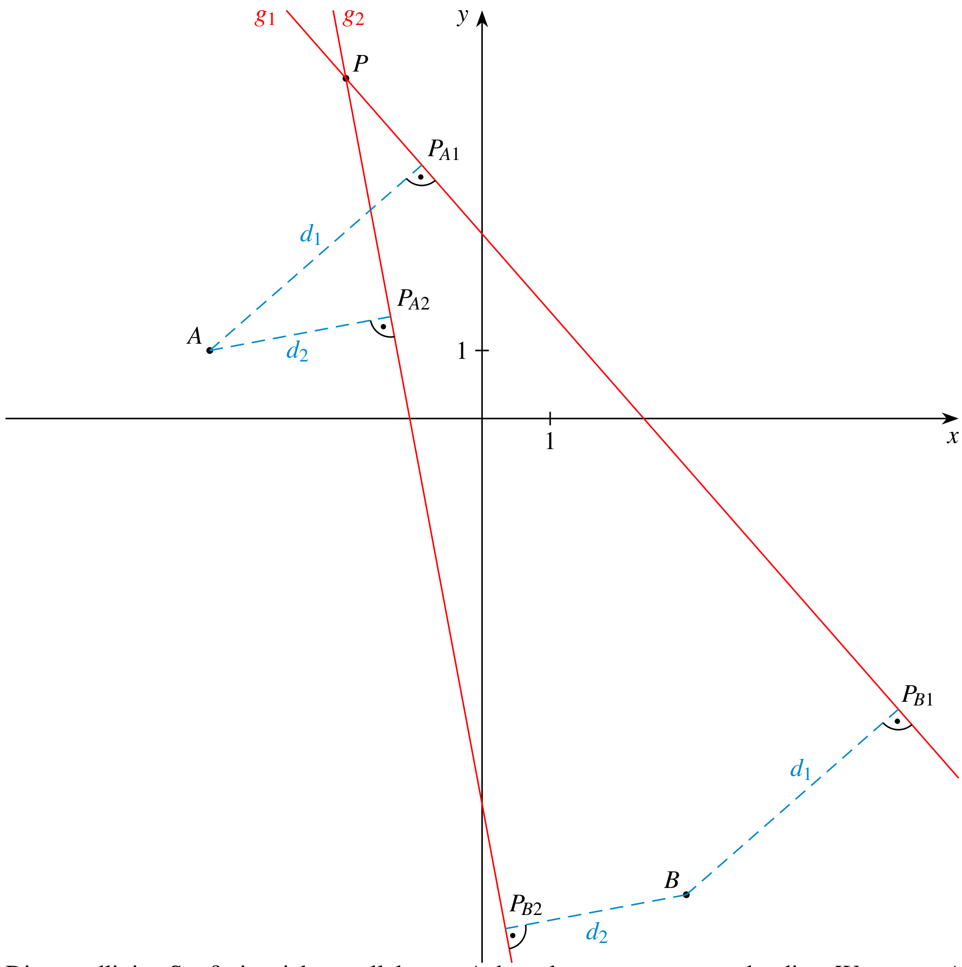
$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{623}{2\,601} \\ \mu &= \frac{2\,279}{2\,601} \end{aligned}$$

und ergibt den Schnittpunkt

$$H\left(\frac{250}{51} \,\middle|\, \frac{220}{51}\right)$$

Man prüft dann nach, dass dieser Punkt auch auf h_c liegt $\left(\nu = \frac{2\,300}{2\,601}\right)$.

7.27



Die geradlinige Straße ist nicht parallel zur y-Achse, da ansonsten entweder die x-Werte von A und B gleich sein müssten oder P als x-Wert den Wert genau in der Mitte der x-Werte von A und B haben müsste. Damit ist folgender Ansatz möglich:

$$g: \quad \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des Lotfußpunktes P_A von A auf der Geraden g:

$$\begin{aligned}
0 &= \vec{r} \cdot (\vec{p} + \lambda \vec{r} - \vec{a}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= 1 \cdot (-2 + \lambda + 4) + r_2 \cdot (5 + \lambda r_2 - 1) \\
&= -2 + \lambda + 4 + 5r_2 + \lambda r_2^2 - r_2 \\
&= \lambda(1 + r_2^2) + 2 + 4r_2 \\
\lambda &= -\frac{2 + 4r_2}{1 + r_2^2}
\end{aligned}$$

Damit lautet der Ortsvektor zum Lotfußpunkt P_A:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_A &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{2 + 4r_2}{1 + r_2^2} \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 - \frac{2+4r_2}{1+r_2^2} \\ 5 - \frac{2r_2+4r_2^2}{1+r_2^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Berechnung des Abstands von A zur Geraden g = Abstand von A zu P_A:

$$
\begin{aligned}
d_A^2 &= \overrightarrow{AP_A}^2 \\
&= \left(\begin{pmatrix} -2-\frac{2+4r_2}{1+r_2^2} \\ 5-\frac{2r_2+4r_2^2}{1+r_2^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 \\
&= \begin{pmatrix} 2-\frac{2+4r_2}{1+r_2^2} \\ 4-\frac{2r_2+4r_2^2}{1+r_2^2} \end{pmatrix}^2 \\
&= 4-4\frac{2+4r_2}{1+r_2^2}+\frac{(2+4r_2)^2}{(1+r_2^2)^2}+16-8\frac{2r_2+4r_2^2}{1+r_2^2}+\frac{(2r_2+4r_2^2)^2}{(1+r_2^2)^2} \\
&= 20-\frac{8+16r_2+16r_2+32r_2^2}{1+r_2^2}+\frac{4(1+2r_2)^2+4r_2^2(1+2r_2)^2}{(1+r_2^2)^2} \\
&= \frac{20(1+r_2^2)^2-(8+32r_2+32r_2^2)(1+r^2)+4(1+2r_2)^2+4r_2^2(1+2r_2)^2}{(1+r_2^2)^2} \\
&= \frac{20(1+r_2^2)^2-(8+32r_2+32r_2^2)(1+r^2)+4(1+2r_2)^2(1+r_2^2)}{(1+r_2^2)^2} \\
&= \frac{20(1+r_2^2)-(8+32r_2+32r_2^2)+4(1+2r_2)^2}{1+r_2^2} \\
&= \frac{20+20r_2^2-8-32r_2-32r_2^2+4+16r_2+16r_2^2}{1+r_2^2} \\
&= \frac{16-16r_2+4r_2^2}{1+r_2^2} \\
&= 4\frac{4-4r_2+r_2^2}{1+r_2^2} \\
&= 4\frac{(2-r_2)^2}{1+r_2^2} \\
d_A &= 2\frac{|2-r_2|}{\sqrt{1+r^2}}
\end{aligned}
$$

Bestimmung des Lotfußpunktes P_B von B auf der Geraden g:

$$
\begin{aligned}
0 &= \vec{r}\cdot\left(\vec{p}+\lambda\vec{r}-\vec{b}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}\right) \\
&= 1\cdot(-2+\lambda-3)+r_2\cdot(5+\lambda r_2+7) \\
&= -2+\lambda-3+5r_2+\lambda r_2^2+7r_2 \\
&= \lambda(1+r_2^2)-5+12r_2 \\
\lambda &= -\frac{-5+12r_2}{1+r_2^2}
\end{aligned}
$$

Damit lautet der Orstvektor zum Lotfußpunkt P_B:

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_B &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}-\frac{-5+12r_2}{1+r_2^2}\begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2-\frac{-5+12r_2}{1+r_2^2} \\ 5-\frac{-5r_2+12r_2^2}{1+r_2^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Berechnung des Abstands von B zur Geraden g = Abstand von B zu P_B:

$$\begin{aligned}
d_B^2 &= \overrightarrow{BP_B}^2 \\
&= \left(\begin{pmatrix} -2 - \frac{-5+12r_2}{1+r_2^2} \\ 5 - \frac{-5r_2+12r_2^2}{1+r_2^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \right)^2 \\
&= \begin{pmatrix} -5 - \frac{-5+12r_2}{1+r_2^2} \\ 12 - \frac{-5r_2+12r_2^2}{1+r_2^2} \end{pmatrix}^2 \\
&= 25 + 10\frac{-5+12r_2}{1+r_2^2} + \frac{(-5+12r_2)^2}{(1+r_2^2)^2} + 144 - 24\frac{-5r_2+12r_2^2}{1+r_2^2} + \frac{(-5r_2+12r_2^2)^2}{(1+r_2^2)^2} \\
&= 169 + \frac{-50+120r_2+120r_2-288r_2^2}{1+r_2^2} + \frac{(-5+12r_2)^2+(-5r_2+12r_2^2)^2}{(1+r_2^2)^2} \\
&= \frac{169(1+r_2^2)^2+(-50+240r_2-288r_2^2)(1+r_2^2)+(-5+12r_2)^2+r^2(-5+12r_2)^2}{(1+r_2^2)^2} \\
&= \frac{169(1+r_2^2)^2+(-50+240r_2-288r_2^2)(1+r_2^2)+(-5+12r_2)^2(1+r^2)}{(1+r_2^2)^2} \\
&= \frac{169(1+r_2^2)+(-50+240r_2-288r_2^2)+(-5+12r_2)^2}{1+r_2^2} \\
&= \frac{169+169r_2^2-50+240r_2-288r_2^2+25-120r_2+144r_2^2}{1+r_2^2} \\
&= \frac{144+120r_2+25r_2^2}{1+r_2^2} \\
&= \frac{(12+5r_2)^2}{1+r_2^2} \\
d_B &= \frac{|12+5r_2|}{\sqrt{1+r^2}}
\end{aligned}$$

Die Straße g hat von A und B den gleichen Abstand, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
d_A &= d_B \\
d_A^2 &= d_B^2 \\
4\frac{(2-r_2)^2}{1+r_2^2} &= \frac{(12+5r_2)^2}{1+r_2^2} \\
4(2-r_2)^2 &= (12+5r_2)^2 \\
2(2-r_2) &= \pm(12+5r_2) \\
4-2r_2 &= \pm(12+5r_2)
\end{aligned}$$

1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
4-2r_2 &= +(12+5r_2) \\
-8 &= 7r_2 \\
r_2 &= -\frac{8}{7}
\end{aligned}$$

Also lautet die Gerade g_1:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} 4-2r_2 &= -(12+5r_2) \\ 16 &= -3r_2 \\ r_2 &= -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

Also lautet die Gerade g_2:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

7.28

a) Bestimmung des Lotfußpunktes F über Orthogonalität des Lots zu den Richtungsvektoren von ε:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich nach etwas Rechnung

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{43}{7} \\ \mu &= -\frac{9}{7} \end{aligned}$$

und damit

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -\frac{86}{7} \\ -\frac{27}{7} \\ \frac{137}{7} \end{pmatrix}.$$

Als Abstand von A zu ε ergibt sich demzufolge

$$d = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{72}{7} \\ -\frac{48}{7} \\ \frac{144}{7} \end{pmatrix} \right| = 24.$$

b) Bestimmung des Lotfußpunktes F über Orthogonalität des Lots zu den Richtungsvektoren von ε:

$$\left(\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\3\\4\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} = 0$$
$$\left(\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\3\\4\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich nach etwas Rechnung

$$\lambda = 0$$
$$\mu = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Als Abstand von A zu ε ergibt sich demzufolge

$$d = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\-2\\-4\end{pmatrix}\right| = 6.$$

c) Herleitung einer Parameterdarstellung von ε:

$$\lambda := x$$
$$\mu := z$$

Dann ergibt sich wegen $y = 9+2x-2z = 9+2\lambda-2\mu$

$$\varepsilon: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Bestimmung des Lotfußpunktes F über Orthogonalität des Lots zu den Richtungsvektoren von ε:

$$\left(\begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\12\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = 0$$
$$\left(\begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\5\\12\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich nach etwas Rechnung

$$\lambda = 5$$
$$\mu = 8$$

und damit

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}5\\3\\8\end{pmatrix}.$$

Als Abstand von A zu ε ergibt sich demzufolge

$$d = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 6.$$

7.29

Herleitung einer Parameterdarstellung der Grundfläche $\varepsilon = ABC$:

$$\begin{aligned}\varepsilon: \quad \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Bestimmung des Lotfußpunktes F über Orthogonalität des Lots zu den Richtungsvektoren von ε:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich nach etwas Rechnung

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{2} \\ \mu &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und damit

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Als Abstand von S zu ε ergibt sich demzufolge

$$d = \left|\overrightarrow{SF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 4\sqrt{3}.$$

7.30

Falls die g nicht zu ε parallel ist, muss es einen Schnittpunkt geben, d. h. das Einsetzen der Geradendarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in die Ebenengleichung muss eine eindeutige Lösung für λ haben. Es ergibt sich

$$(3-\lambda)+2(3+2\lambda)-3(-2+\lambda) = 15 \neq 1,$$

d. h. die Ebenengleichung ist für kein λ erfüllt. Also sind g und ε parallel.

Für die Abstandsbestimmung zwischen den zwei Gebilden brauchen wir nur den Abstand des Basispunktes $P(3|3|-2)$ von g zu ε.
Herleitung einer Parameterdarstellung von ε:

$$\begin{aligned} \lambda &:= y \\ \mu &:= z \end{aligned}$$

Dann ergibt sich wegen $x = 1-2y+3z = 1-2\lambda+3\mu$

$$\varepsilon : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung des Lotfußpunktes F von P über die Orthogonalität des Lots zu den Richtungsvektoren von ε:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich nach etwas Rechnung

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ \mu &= 1 \end{aligned}$$

und damit

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Abstand von P zu ε ergibt sich demzufolge

$$d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14}.$$

7.31

Das Gemeinlot steht senkrecht auf beiden Geraden. Bestimmung der Lotfußpunkte F_g, F_h über die Orthogonalität zu den Richtungsvektoren:

$$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich nach etwas Rechnung

$$\lambda = \frac{16}{7}$$
$$\mu = \frac{44}{7}$$

und damit

$$\overrightarrow{OF_g} = \begin{pmatrix} \frac{275}{7} \\ \frac{82}{7} \\ \frac{39}{7} \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OF_h} = \begin{pmatrix} \frac{271}{7} \\ \frac{88}{7} \\ \frac{51}{7} \end{pmatrix}$$

Als Abstand von g zu h ergibt sich demzufolge

$$d = \left|\overrightarrow{F_gF_h}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix}\right| = 2$$

und als Parameterdarstellung des Gemeinlots

$$\vec{x} = \overrightarrow{OF_g} + \lambda \overrightarrow{F_gF_h} = \begin{pmatrix} \frac{275}{7} \\ \frac{82}{7} \\ \frac{39}{7} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix}.$$

7.32

Berechnung der beiden Armbewegungen:

$$
\begin{aligned}
g: \quad \vec{x} &= \vec{a} + \lambda\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\left(\begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}60 \\ 1{,}40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}60 \\ 1{,}40 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h: \quad \vec{x} &= \vec{c} + \mu\left(\vec{d} - \vec{c}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}20 \end{pmatrix} + \mu\left(\begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}40 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}20 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}20 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}40 \\ -1{,}20 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Lotfußpunkte F_g, F_h über die Orthogonalität zu den Richtungsvektoren:

$$
\begin{aligned}
\left(\lambda \begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}60 \\ 1{,}40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}20 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}40 \\ -1{,}20 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}60 \\ 1{,}40 \end{pmatrix} &= 0 \\
\left(\lambda \begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}60 \\ 1{,}40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}20 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}40 \\ -1{,}20 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1{,}60 \\ 1{,}40 \\ -1{,}20 \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich nach etwas Rechnung

$$
\begin{aligned}
\lambda &\approx 0{,}4468 \\
\mu &\approx 0{,}4755
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OF_g} &\approx \begin{pmatrix} 0{,}715 \\ 0{,}715 \\ 0{,}626 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{OF_h} &\approx \begin{pmatrix} 0{,}761 \\ 0{,}666 \\ 0{,}629 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Als Abstand der beiden Bahnen ergibt sich somit

$$
d = \left|\overrightarrow{F_g F_h}\right| \approx \left|\begin{pmatrix} 0{,}046 \\ -0{,}049 \\ 0{,}004 \end{pmatrix}\right| \approx 0{,}067\,[\mathrm{m}],
$$

d. h. der geforderte Mindestabstand von 0,10 m wird nicht eingehalten.

Abschnitt 7.7 – Winkelberechnungen

7.33

Der Winkel φ zwischen den Geraden g,h ergibt sich als Winkel zwischen den Richtungsvektoren.

a)
$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1\cdot 1+0\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$$

b)
$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right|} = \frac{1\cdot 1+2\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2}} = -\frac{3}{5}$$
$$\varphi = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) \approx 2{,}214 \mathrel{\hat{=}} 126{,}9°$$

Als Schnittwinkel zweier Geraden wird üblicherweise derjenige der beiden möglichen angegeben, der kleiner als $\pi \mathrel{\hat{=}} 180°$ ist:

$$\tilde{\varphi} = \pi - \varphi \approx 0{,}927 \mathrel{\hat{=}} 53{,}1°$$

c) Umwandlung von h in eine Parameterdarstellung. Setze dazu $\lambda := x$. Dann gilt

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{7}{3}\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}.$$

Damit:

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\right|} = \frac{5\cdot 1+3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{\sqrt{5^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2}} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90°$$

d)

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right|} = \frac{1\cdot 1+(-1)\cdot 0+3\cdot 3}{\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+3^2}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{10}{11}}$$

$$\varphi = \arccos\left(\sqrt{\frac{10}{11}}\right) \approx 0{,}306 \mathrel{\hat{=}} 17{,}5^\circ$$

e)

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-9\\6\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-3\\-9\\6\end{pmatrix}\right|} = \frac{1\cdot(-3)+3\cdot(-9)+(-2)\cdot 6}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-9)^2+6^2}}$$

$$= \frac{-42}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{126}} = \frac{-42}{\sqrt{2\cdot 7\cdot 2\cdot 7\cdot 3^2}} = \frac{-42}{2\cdot 7\cdot 3} = -1$$

$$\varphi = \pi \mathrel{\hat{=}} 180^\circ$$

Da man als Winkel üblicherweise den $\leq 90^\circ$ wählt, beträgt der Winkel zwischen g und h

$$\psi = \pi-\varphi = \pi-\pi = 0 \mathrel{\hat{=}} 0^\circ.$$

7.34

Der Winkel φ zwischen einer Geraden g und einer Ebene ε kann man berechnen, indem man den Winkel $\frac{\pi}{2}-\varphi$ zwischen einem Normalenvektor $\vec{n}$ auf ε und dem Richtungsvektor $\vec{r}$ von g berechnet.

a) Ein Normalenvektor auf ε ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Wir erhalten den Winkel $\frac{\pi}{2}-\varphi$ zwischen Normale $\vec{n}$ und Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden g:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{1\cdot 0+1\cdot(-1)+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}} = 0$$

Daraus:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90^\circ$$

Damit beträgt der Schnittwinkel φ zwischen g und ε

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \mathrel{\hat{=}} 0^\circ$$

b) Ein Normalenvektor auf ε ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 35 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ zwischen Normale $\vec{n}$ und Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden g:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 35 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 15 \\ 35 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{1 \cdot 15 + 5 \cdot 35 + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 4^2} \cdot \sqrt{15^2 + 35^2 + (-5)^2}} = \frac{170}{\sqrt{42} \cdot \sqrt{1\,475}}$$

Daraus:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi \approx 0{,}819 \mathrel{\hat{=}} 46{,}9^\circ$$

Damit beträgt der Schnittwinkel φ zwischen g und ε

$$\varphi \approx \frac{\pi}{2} - 0{,}819 \approx 0{,}752 \mathrel{\hat{=}} 43{,}1^\circ$$

c) Herleitung einer Parameterdarstellung von ε. Setze dazu $\mu := x$, $\nu := y$. Dann gilt:

$$\varepsilon: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit lautet ein Normalenvektor auf ε

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten für den Winkel $\frac{\pi}{2}-\varphi$ zwischen Normale $\vec{n}$ und Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden g:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) &= \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{r}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\2\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\2\\1\end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+1\cdot 2+1\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2^2+1^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Daraus:

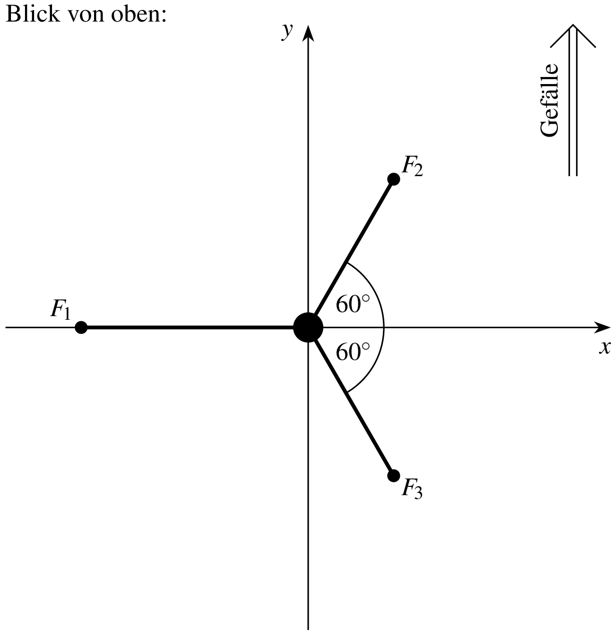
$$\frac{\pi}{2}-\varphi = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90^\circ$$

Damit beträgt der Schnittwinkel φ zwischen g und ε

$$\varphi = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} \approx 0 \mathrel{\hat{=}} 0^\circ.$$

7.35

Blick von oben:



Berechnung der Fußpunkte der Seile:
Für den Fußpunkt in der (x,z)-Ebene gilt:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 30^2 \\ y+z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich

$$x = \pm 30 \qquad y = 0 \qquad z = 0.$$

Wegen der Symmetrie des Problems zur (y,z)-Ebene darf man die erste Lösung vernachlässigen. Als 1. Fußpunkt erhält man somit

$$F_1\,(-30\,|\,0\,|\,0)\,.$$

Für die beiden weiteren Fußpunkte gilt:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 30^2 \\ y+z &= 0 \\ \frac{y}{x} &= \pm\tan(60^\circ) = \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich aufgrund der Situation im Gelände $(x > 0)$:

$$x \approx 11{,}34 \qquad y \approx \pm 19{,}64 \qquad z \approx \mp 19{,}64$$

Damit lauten die beiden weiteren Fußpunkte:

$$F_2\,(11{,}34\,|\,19{,}64\,|\,-19{,}64) \qquad F_3\,(11{,}34\,|\,-19{,}64\,|\,19{,}64)$$

Berechnung der Richtungsvektoren der Seile:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -120 \end{pmatrix} \\ \vec{r}_2 &= \begin{pmatrix} 11{,}34 \\ 19{,}64 \\ -19{,}64 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}34 \\ 19{,}64 \\ -139{,}64 \end{pmatrix} \\ \vec{r}_3 &= \begin{pmatrix} 11{,}34 \\ -19{,}64 \\ 19{,}64 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}34 \\ -19{,}64 \\ -100{,}36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berechnung des Winkels der Stahlseile zum Sendemasten:
Der Sendemast hat die Richtung

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -120 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich als Winkel der Stahlseile zum Sendemasten:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \arccos\left(\frac{\vec{r}_1\cdot\vec{m}}{|\vec{r}_1|\cdot|\vec{m}|}\right) \approx 0{,}245 \mathrel{\hat{=}} 14{,}0^\circ\\
\varphi_2 &= \arccos\left(\frac{\vec{r}_2\cdot\vec{m}}{|\vec{r}_2|\cdot|\vec{m}|}\right) \approx 0{,}161 \mathrel{\hat{=}} 9{,}2^\circ\\
\varphi_3 &= \arccos\left(\frac{\vec{r}_3\cdot\vec{m}}{|\vec{r}_3|\cdot|\vec{m}|}\right) \approx 0{,}222 \mathrel{\hat{=}} 12{,}7^\circ
\end{aligned}$$

Berechnung des Winkels der Stahlseile zur Geländeebene:
Parameterdarstellung der Ebene:

$$\vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Normalenvektor auf die Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich als Winkel der Stahlseile zur Geländeebene:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\vec{r}_1\cdot\vec{n}}{|\vec{r}_1|\cdot|\vec{n}|}\right) \approx 0{,}756 \mathrel{\hat{=}} 43{,}3^\circ\\
\psi_2 &= \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\vec{r}_2\cdot\vec{n}}{|\vec{r}_2|\cdot|\vec{n}|}\right) \approx 0{,}643 \mathrel{\hat{=}} 36{,}9^\circ\\
\psi_3 &= \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\vec{r}_3\cdot\vec{n}}{|\vec{r}_3|\cdot|\vec{n}|}\right) \approx 0{,}970 \mathrel{\hat{=}} 55{,}6^\circ
\end{aligned}$$

7.36

Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren.
Normalenvektoren auf die Koordinatenebenen:

$$(x,y)\text{-Ebene:}\quad \vec{n}_{(xy)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(x,z)\text{-Ebene:}\quad \vec{n}_{(xz)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(y,z)\text{-Ebene:}\quad \vec{n}_{(yz)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Normalenvektor auf die gesuchte Ebene ε:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Damit gilt für die Winkel zwischen ε und den Koordinatenebenen:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_{xy}) &= \frac{\vec{n}\cdot\vec{n}_{xy}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}_{xy}|} = \cos\left(\frac{n_3}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}\cdot 1}\right) = \cos\left(\frac{n_3}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right)\\
\cos(\varphi_{xz}) &= \frac{\vec{n}\cdot\vec{n}_{xz}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}_{xz}|} = \cos\left(\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}\cdot 1}\right) = \cos\left(\frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right)\\
\cos(\varphi_{yz}) &= \frac{\vec{n}\cdot\vec{n}_{yz}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}_{yz}|} = \cos\left(\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}\cdot 1}\right) = \cos\left(\frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right)
\end{aligned}$$

Damit die drei Winkel gleich sind, muss also gelten:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_{xy}) &= \cos(\varphi_{xz}) = \cos(\varphi_{xy})\\
n_3 &= n_2 = n_1
\end{aligned}$$

Wähle z. B.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt benötigen wir 2 Richtungsvektoren, die orthogonal hierzu sind, z. B.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

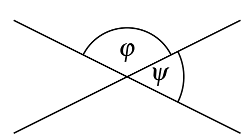
Damit lautet eine Parameterdarstellung der gesuchten Ebene:

$$\varepsilon: \quad \vec{x} = \lambda\vec{r}+\mu\vec{s} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Schnittwinkel ergibt sich zu

$$\varphi_{xy} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^1}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}955 \mathrel{\hat{=}} 54{,}7^\circ.$$

Allerdings gibt es wegen der zwei möglichen Schnittwinkel φ,ψ mit $\psi = \pi - \varphi$ zwischen zwei Ebenen weitere Möglichkeiten. Es kann damit auch gelten:



$$\begin{aligned}
\cos(\varphi_{xy}) &= \cos(\varphi_{xz}) = -\cos(\varphi_{xy})\\
n_1 &= n_2 = -n_3
\end{aligned}$$

Wähle dann

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Ebene entsteht aus ε durch Drehen um π um die z-Achse.
Weitere Möglichkeit:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_{xy}) &= -\cos(\varphi_{xz}) = \cos(\varphi_{xy}) \\ n_1 &= -n_2 = n_3 \end{aligned}$$

Wähle dann

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Ebene entsteht aus ε durch Drehen um $-\frac{\pi}{2}$ um die z-Achse.
Weitere Möglichkeit:

$$\begin{aligned} -\cos(\varphi_{xy}) &= \cos(\varphi_{xz}) = \cos(\varphi_{xy}) \\ n_1 &= -n_2 = n_3 \end{aligned}$$

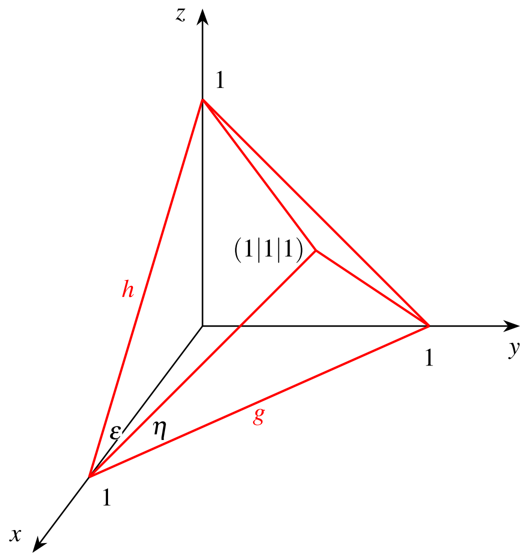
Wähle dann

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Ebene entsteht aus ε durch Drehen um $\frac{\pi}{2}$ um die z-Achse.
Alle weiteren Kombinationen führen auf die gefundenen 4 Ebenen.

7.37

a)



b) Parameterdarstellung der beiden Geraden g,h in der (x,y)- und (x,z)-Ebene:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich als Schnittwinkel = Winkel zwischen den Richtungsvektoren:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{(-1)\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60^\circ$$

c) Parameterdarstellung der Ebene ε durch h und den Punkt $(1|1|1)$:

$$\varepsilon: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt für den Winkel β zwischen g und ε:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) &= \frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{(-1)\cdot(-1)+1\cdot 1+0\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\
\frac{\pi}{2}-\beta &= \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\
\beta &= \frac{\pi}{2}-\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 0{,}955 \mathrel{\hat{=}} 54{,}7^\circ
\end{aligned}$$

d) Parameterdarstellung der Ebene η durch g und den Punkt $(1|1|1)$:

$$\eta: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

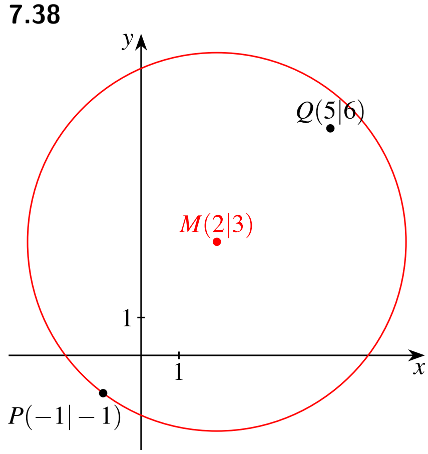
$$\vec{n}_\eta = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Damit gilt für den Winkel γ zwischen ε,η = Winkel zwischen $\vec{n}_\varepsilon,\vec{n}_\eta$:

$$\begin{aligned}
\cos(\gamma) &= \frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{(-1)\cdot 1+1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \\
\gamma &= \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1{,}231 \mathrel{\hat{=}} 70{,}5^\circ
\end{aligned}$$

Abschnitt 7.8 – Kreis und Kugel

7.38



Gleichung des Kreises:

$$k: \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

Überprüfung, ob P,Q auf dem Kreis liegen durch Einsetzen der entsprechenden Koordinaten in die Kreisgleichung:

$$P: \quad ((-1)-2)^2 + ((-1)-3)^2 = (-3)^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 \quad \checkmark$$

P liegt also auf dem Kreis.

$$Q: \quad (5-2)^2 + (6-3)^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 16 \neq 5^2$$

Q liegt also nicht auf dem Kreis, sondern wegen $16 < 19$ innerhalb des Kreises.

7.39

a) Mittelpunkte M_1, M_2 und Radien r_1, r_2 der Kreise:

$$k_1: \quad M_1(1|-3), \quad r_1 = \sqrt{16} = 4$$
$$k_2: \quad M_2(-3|0), \quad r_2 = \sqrt{9} = 3$$

Bestimmung des Abstand der Mittelpunkte:

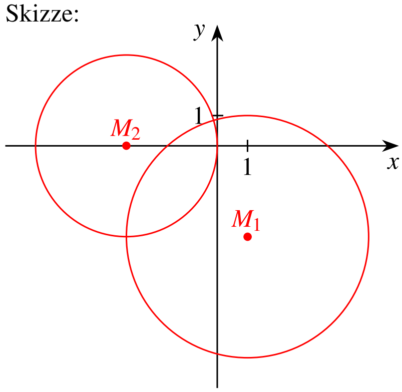
$$d = \sqrt{(-3-1)^2 + (0-(-3))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Für die Summe der Radien gilt

$$r_1 + r_2 = 4 + 3 = 7 > d,$$

d. h. die zwei Kreise schneiden sich in 2 Punkten.

Skizze:



b) Quadratische Ergänzung für den Kreis k_2:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2+2x+y^2-16y+40 \\ &= x^2+2x+1-1+y^2-16y+64-64+40 \\ &= (x+1)^2+(y-8)^2-25 \end{aligned}$$

Damit lautet die Kreisgleichung

$$k_2: \qquad (x+1)^2+(y-8)^2 = 25.$$

Mittelpunkte M_1, M_2 und Radien r_1, r_2 der Kreise:

$$\begin{aligned} k_1: &\quad M_1(-6|-4), \quad r_1 = \sqrt{16} = 8 \\ k_2: &\quad M_2(-1|8), \quad r_2 = \sqrt{9} = 5 \end{aligned}$$

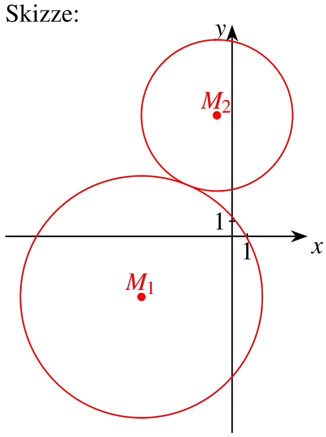
Bestimmung des Abstand der Mittelpunkte:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-1-(-6))^2+(8-(-4))^2} = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} \\ &= \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

Für die Summe der Radien gilt

$$r_1+r_2 = 8+5 = 13 = d,$$

d. h. die zwei Kreise berühren sich in einem Punkt.
Skizze:



c) Quadratische Ergänzung für den Kreis k_1:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 26x + y^2 + 22y + 34 \\ &= x^2 - 26x + 169 - 169 + y^2 + 22y + 121 - 121 + 34 \\ &= (x-13)^2 + (y+11)^2 - 256 \end{aligned}$$

Damit lautet die Kreisgleichung

$$k_1: \qquad (x-13)^2 + (y+11)^2 = 256.$$

Quadratische Ergänzung für den Kreis k_2:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 16x + y^2 - 30y \\ &= x^2 + 16x + 64 - 64 + y^2 - 30y + 225 - 225 \\ &= (x+8)^2 + (y-15)^2 - 289 \end{aligned}$$

Damit lautet die Kreisgleichung

$$k_2: \qquad (x+8)^2 + (y-15)^2 = 289.$$

Mittelpunkte M_1, M_2 und Radien r_1, r_2 der Kreise:

$$\begin{aligned} &k_1: \quad M_1(13|-11), \quad r_1 = \sqrt{256} = 16 \\ &k_2: \quad M_2(-8|15), \quad r_2 = \sqrt{289} = 17 \end{aligned}$$

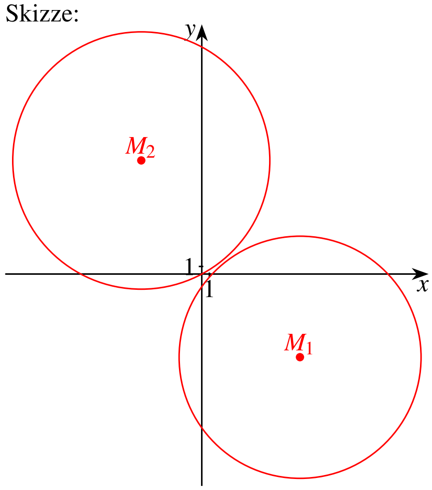
Bestimmung des Abstand der Mittelpunkte:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-8-13)^2 + (15-(-11))^2} = \sqrt{(-21)^2 + 26^2} = \sqrt{441+676} \\ &= \sqrt{1117} \approx 33{,}4 \end{aligned}$$

Für die Summe der Radien gilt

$$r_1 + r_2 = 16 + 17 = 33 < d,$$

d. h. die zwei Kreise schneiden und berühren sich nicht.
Skizze:



7.40

Gesucht ist der Mittelpunkt eines Kreis durch die Punkte mit den Koordinaten

$$K\,(7{,}0\,|\,50{,}9) \qquad M\,(11{,}8\,|\,48{,}3) \qquad B\,(13{,}3\,|\,52{,}6)\,.$$

Ansatz:

$$(x-m_1)^2+(y-m_2)^2 \;=\; r^2$$

Die Koordinaten der drei Punkte müssen diese Kreisgleichung lösen. Also setzt man dieses Koordinaten ein und erhält ein nicht lineares Gleichungssystem für die unbekannten Größen m_1, m_2, r:

$$\begin{aligned}(7{,}0-m_1)^2+(50{,}9-m_2)^2 &= r^2\\ (11{,}8-m_1)^2+(48{,}3-m_2)^2 &= r^2\\ (13{,}3-m_1)^2+(52{,}6-m_2)^2 &= r^2\end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$m_1 \;=\; 10{,}3 \qquad m_2 \;=\; 51{,}2 \qquad r \;=\; 3{,}3$$

Eine zweite mögliche Lösung ist sinnlos, da dort der Radius r negativ ist.
Der Treffpunkt hat also die Koordinaten

$$M\,(10{,}3\,|\,51{,}2)\,.$$

Die Teilnehmer haben jeweils eine Entfernung von 3,3 Längeneinheiten zu fahren (war nicht gefragt, wird aber automatisch mitgeliefert).

7.41

Gesucht ist im Wesentlichen der Radius r der Kugel, also der Abstand des Mittelpunkts M von der Ebene ε, sowie der Berührpunkt = Lotfußpunkt F von M auf die Ebene ε.
Ansatz für den Ortsvektor zum Lotfußpunkt:

$$\vec{f} \;=\; \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}1+\lambda\\-2+2\lambda+\mu\\1-\lambda-\mu\end{pmatrix}$$

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{MF}$ steht senkrecht auf den beiden Spannvektoren $\vec{r},\vec{s}$ der Ebene ε.

$$\begin{aligned}0 &= \left(\vec{m}-\vec{f}\right)\cdot\vec{r} \;=\; \begin{pmatrix}1-(1+\lambda)\\3-(-2+2\lambda+\mu)\\-1-(1-\lambda-\mu)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\\ 0 &= \left(\vec{m}-\vec{f}\right)\cdot\vec{s} \;=\; \begin{pmatrix}1-(1+\lambda)\\3-(-2+2\lambda+\mu)\\-1-(1-\lambda-\mu)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich nach etwas Rechnung

$$\begin{aligned}\lambda &= 1\\ \mu &= 2.\end{aligned}$$

Damit lautet der Ortsvektor zum Lotfußpunkt = Berührpunkt der Kugel mit der Ebene ε:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt = Berührpunkt hat also die Koordinaten $F(2|2|-2)$.
Berechnung des Kugelradius:

$$\begin{aligned}r = d(F,M) &= \sqrt{\left(\vec{f}-\vec{m}\right)^2} = \sqrt{(2-1)^2+(2-3)^2+(-2-(-1))^2}\\ &= \sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Damit lautet die Kugelgleichung

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 3.$$

7.42

Gesucht sind die Punkte P auf der Geraden g, welche gleichzeitig die Geradengleichung als auch die Kreisgleichung erfüllen. Dazu setzt man die Parameterdarstellung der Geraden in die Kreisgleichung ein.

a)

$$\begin{aligned}9 &\stackrel{!}{=} ((0+2\lambda)-2)^2+((-1+2\lambda)-1)^2+((4-\lambda)-3)^2\\ &= 9\lambda^2-18\lambda+9\end{aligned}$$

Also muss gelten:

$$\begin{aligned}9\lambda^2-18\lambda &= 0\\ \lambda^2-2\lambda &= 0\\ \lambda(\lambda-2) &= 0\\ \lambda &= 0 \qquad \text{oder} \qquad \lambda = 2\end{aligned}$$

Damit ergeben sich als Schnittpunkte P_1, P_2 die Punkte mit den Ortsvektoren

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}\\ \vec{p}_2 &= \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

b)
$$
\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} (11-7\lambda)^2 - 2(11-7\lambda) + (-6+8\lambda)^2 + 4(-6+8\lambda) \\
&\quad + (-24+15\lambda)^2 - 6(-24+15\lambda) - 155 \\
&= 338\lambda^2 - 1\,014\lambda + 676 \\
&= 338\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)
\end{aligned}
$$

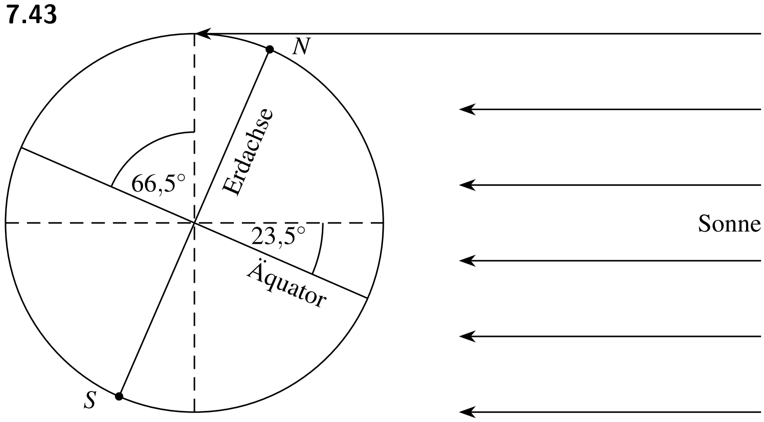
Also muss gelten:

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \\
\lambda &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 1}{2} \\
\lambda &= 1 \qquad \text{oder} \qquad \lambda = 2
\end{aligned}
$$

Damit ergeben sich als Schnittpunkte P_1, P_2 die Punkte mit den Ortsvektoren

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_1 &= \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -24 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \\
\vec{p}_2 &= \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -24 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

7.43



Der obigen Skizze entnimmt man, dass ab 66,5° nördlicher Breite die Sonne nicht untergeht. Ab diesem Breitengrad kann man folglich zur Sommersonnenwende die Mitternachtssonne beobachten.

8 Matrizen

Abschnitt 8.1 – Transformationen in der Ebene und im Raum

8.1

a)

$$3A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ -3 & 9 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \\ 0 & -9 & 15 \end{pmatrix}$$

b)

$$-A+2B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 4 & -10 \\ -2 & -8 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 14 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 6 & -16 \\ -1 & -11 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 14 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

c)

$$AC = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -8 \\ -7 & 11 \\ 5 & -2 \\ 13 & -4 \end{pmatrix}$$

d)

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \\ 7 & -5 \\ 41 & -18 \end{pmatrix}$$

e)

$$DA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -6 & 14 \end{pmatrix}$$

f)

$$(2A-B)C = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 17 \\ -1 & 10 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -7 & -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & -23 \\ -16 & 31 \\ 8 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

g)

$$DAC = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -16 & -6 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & 28 \end{pmatrix}$$

h)

$$(2D)(2A-3B)(-C) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & -10 & 27 \\ 1 & 18 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -21 & -6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -166 & 36 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 732 & -424 \end{pmatrix}$$

8.2

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & -\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrizenprodukte sind genau dann gleich, wenn

$$\begin{array}{ll} & \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 \quad \text{und} \quad 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0 \\ \text{bzw.} & \cos^2(\alpha) = 1 \wedge \sin^2(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = 0 \vee \cos(\alpha) = 0 \\ \text{bzw.} & \cos(\alpha) = \pm 1 \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = 0 \\ \text{bzw.} & \alpha = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

8.3

a) Wechselmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{60}{100} & \frac{10}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{75}{100} & \frac{10}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{10}{100} & \frac{60}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & \frac{70}{100} \end{pmatrix}$$

Ausgangsanteile:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{25}{100} \\ \frac{25}{100} \\ \frac{25}{100} \\ \frac{25}{100} \end{pmatrix}$$

Marktanteile nach einer Woche:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{60}{100} & \frac{10}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{75}{100} & \frac{10}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{10}{100} & \frac{60}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & \frac{70}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{25}{100} \\ \frac{25}{100} \\ \frac{25}{100} \\ \frac{25}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{21}{80} \\ \frac{9}{40} \\ \frac{21}{80} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}2625 \\ 0{,}225 \\ 0{,}2625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25\% \\ 26{,}25\% \\ 22{,}5\% \\ 26{,}25\% \end{pmatrix}$$

Marktanteile nach zwei Wochen:

$$A^2\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{60}{100} & \frac{10}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{75}{100} & \frac{10}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{10}{100} & \frac{60}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & \frac{70}{100} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \frac{25}{100} \\ \frac{25}{100} \\ \frac{25}{100} \\ \frac{25}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{99}{400} \\ \frac{433}{1600} \\ \frac{17}{80} \\ \frac{431}{1600} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}2475 \\ 0{,}270625 \\ 0{,}2125 \\ 0{,}269375 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 24{,}75\% \\ 27{,}06\% \\ 21{,}25\% \\ 26{,}94\% \end{pmatrix}$$

b) Für den Vektor $\vec{m}$ der Marktanteile muss gelten:

$$\begin{aligned} A\vec{m} &= \vec{m} \\ A\vec{m} - \vec{m} &= \vec{0} \\ A\vec{m} - E\vec{m} &= \vec{0} && (E = \text{Einheitsmatrix}) \\ \underbrace{(A - E)}_{=:\,B}\vec{m} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Zu lösen ist also das LGS

$$B\vec{m} = \vec{0}$$

mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{40}{100} & \frac{10}{100} & \frac{20}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & -\frac{25}{100} & \frac{10}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{10}{100} & -\frac{40}{100} & \frac{10}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & -\frac{30}{100} \end{pmatrix}.$$

Lösung mit einem Computeralgebrasystem:

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \cdot t \\ \frac{10}{7} \cdot t \\ 1 \cdot t \\ \frac{48}{35} \cdot t \end{pmatrix}$$

Normierung wegen $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{6}{5} \cdot t + \frac{10}{7} \cdot t + 1 \cdot t + \frac{48}{35} \cdot t &= 1 \\ t &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Also sind die Marktanteile der Märkte gegeben durch

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{25} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{48}{175} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ 0{,}2857 \\ 0{,}2 \\ 0{,}2743 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24\% \\ 28{,}57\% \\ 20\% \\ 27{,}43\% \end{pmatrix}.$$

c) Es ist die gleiche Rechnung wie in (b) durchzuführen, wobei jetzt die Übergangsmatrix A folgendermaßen aussieht:

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} \frac{60}{100} & \frac{10}{100} & \frac{20}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{75}{100} & \frac{10}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{10}{100} & \frac{60}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & \frac{85}{100} \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Matrix B jetzt

$$B_{neu} = \begin{pmatrix} -\frac{40}{100} & \frac{10}{100} & \frac{20}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{10}{100} & -\frac{25}{100} & \frac{10}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{10}{100} & \frac{10}{100} & -\frac{40}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{5}{100} & \frac{10}{100} & -\frac{15}{100} \end{pmatrix}.$$

Als Lösung von $B_{neu}\vec{m} = \vec{0}$ ergibt sich jetzt

$$m_{neu} = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \bar{m}_3 \\ \bar{m}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \cdot t \\ \frac{10}{7} \cdot t \\ 1 \cdot t \\ \frac{96}{35} \cdot t \end{pmatrix}.$$

Normierung wegen $\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 + \bar{m}_4 = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{6}{5} \cdot t + \frac{10}{7} \cdot t + 1 \cdot t + \frac{96}{35} \cdot t &= 1 \\ t &= \frac{35}{223} \end{aligned}$$

Also sind die Marktanteile der Märkte gegeben durch

$$m_{neu} = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \bar{m}_3 \\ \bar{m}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{42}{223} \\ \frac{50}{223} \\ \frac{35}{223} \\ \frac{96}{223} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}1883 \\ 0{,}2242 \\ 0{,}1570 \\ 0{,}4305 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18{,}83\% \\ 22{,}42\% \\ 15{,}70\% \\ 43{,}05\% \end{pmatrix}.$$

8.4

Es ist:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}
(AB)^T &= \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} \end{pmatrix} \right)^T \\
&= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21}+\alpha_{13}\beta_{31}+\alpha_{14}\beta_{41} & \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}+\alpha_{23}\beta_{31}+\alpha_{24}\beta_{41} \\ \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}+\alpha_{13}\beta_{32}+\alpha_{14}\beta_{42} & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}+\alpha_{23}\beta_{32}+\alpha_{24}\beta_{42} \\ \alpha_{11}\beta_{13}+\alpha_{12}\beta_{23}+\alpha_{13}\beta_{33}+\alpha_{14}\beta_{43} & \alpha_{21}\beta_{13}+\alpha_{22}\beta_{23}+\alpha_{23}\beta_{33}+\alpha_{24}\beta_{43} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned}
B^T A^T &= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} & \beta_{42} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} & \beta_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta_{11}\alpha_{11}+\beta_{21}\alpha_{12}+\beta_{31}\alpha_{13}+\beta_{41}\alpha_{14} & \beta_{11}\alpha_{21}+\beta_{21}\alpha_{22}+\beta_{31}\alpha_{23}+\beta_{41}\alpha_{24} \\ \beta_{12}\alpha_{11}+\beta_{22}\alpha_{12}+\beta_{32}\alpha_{13}+\beta_{42}\alpha_{14} & \beta_{12}\alpha_{21}+\beta_{22}\alpha_{22}+\beta_{32}\alpha_{23}+\beta_{42}\alpha_{24} \\ \beta_{13}\alpha_{11}+\beta_{23}\alpha_{12}+\beta_{33}\alpha_{13}+\beta_{43}\alpha_{14} & \beta_{13}\alpha_{21}+\beta_{23}\alpha_{22}+\beta_{33}\alpha_{23}+\beta_{43}\alpha_{24} \end{pmatrix} \\
&= (AB)^T
\end{aligned}$$

8.5

Es sei A eine (m,n)-Matrix, also eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten.
Durch die Transposition gehen Zeilen in Spalten über und umgekehrt. Das heißt, A^T ist eine (n,m)-Matrix mit n Zeilen und m Spalten.
Da bei symmetrischen Matrizen $A = A^T$ gilt, muss insbesondere die Zeilenzahl von A und A^T übereinstimmen, d. h. es muss

$$m = n$$

gelten.

Abschnitt 8.2 – Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation

8.6

Die Durchführung des Gauß-Eliminationsverfahrens ergibt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{13}{3} & \frac{11}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 15 & -\frac{11}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 7 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

8.7

Das lineare Gleichungssystem lautet als Matrizenprodukt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung der Inversen A^{-1} mittels Gauß-Elimination ergibt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

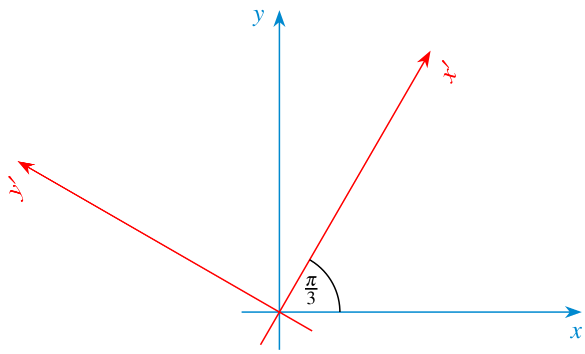
Damit lautet die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Abschnitt 8.4 – Koordinatentransformation

8.8

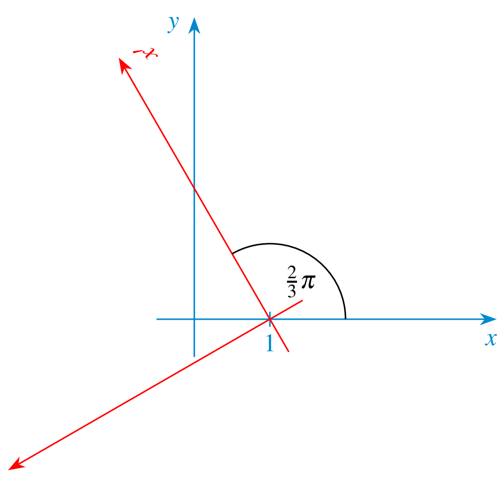
a)



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

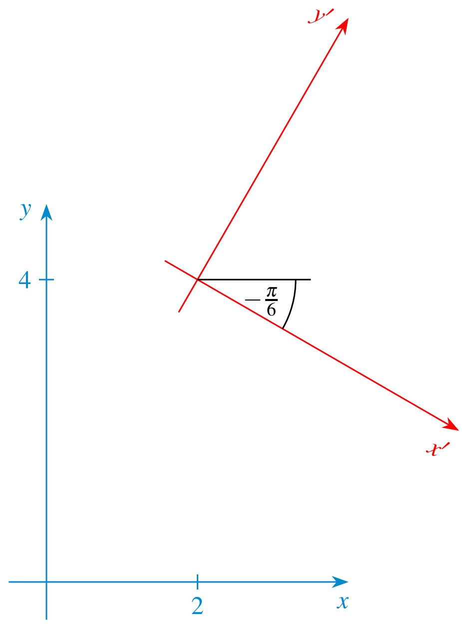
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & \sin(\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & \sin(\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)



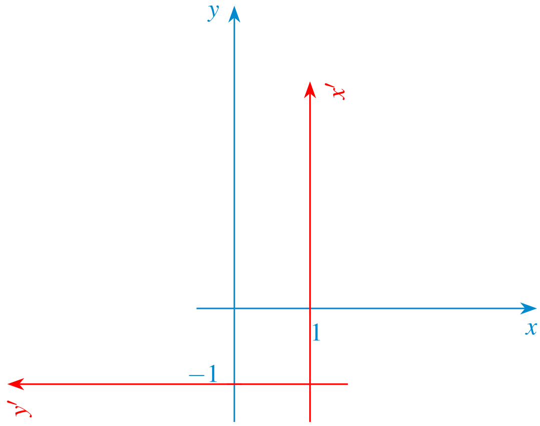
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) & \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) & \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{6}) & -\sin(-\frac{\pi}{6}) \\ \sin(-\frac{\pi}{6}) & \cos(-\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{6}) & \sin(-\frac{\pi}{6}) \\ -\sin(-\frac{\pi}{6}) & \cos(-\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{6}) & \sin(-\frac{\pi}{6}) \\ -\sin(-\frac{\pi}{6}) & \cos(-\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-\sqrt{3} \\ -1-2\sqrt{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

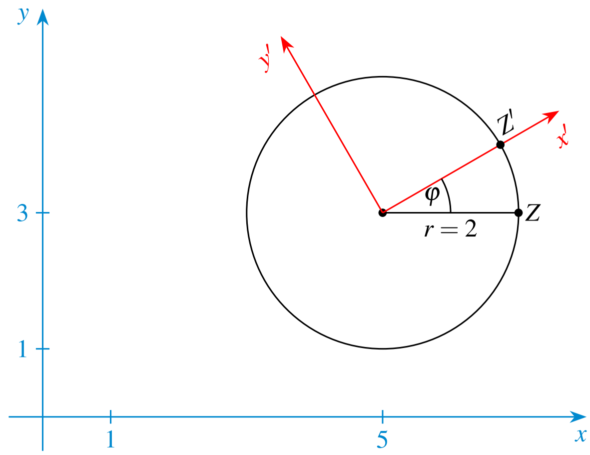
d)



$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ -\sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

8.9

a)



b) Die Winkelgeschwindigkeit beträgt

$$\omega = \frac{2\pi}{20\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Damit beträgt der Winkel φ zum Zeitpunkt t

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t.$$

Berechnung der Koordinaten des gedrehten Punktes Z' abhängig von der Zeit t mittels der Koordinatentransformation $(x',y') \longrightarrow (x,y)$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) & -\sin(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) & \cos(\varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) & -\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) & \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) + 5 \\ 2\sin\left(\frac{\pi t}{10}\right) + 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Einsetzen der gesuchten Zeiten:

$$\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6{,}90 \\ 3{,}62 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x(5) \\ y(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(8) \\ y(8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3{,}38 \\ 4{,}18 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x(16) \\ y(16) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}62 \\ 1{,}10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(24) \\ y(24) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5{,}62 \\ 4{,}90 \end{pmatrix}$$

8.10

Die Koordinatentransformation des (y,z)-Koordinatensystems in (y',z') durch Drehung um den Ursprung O lautet

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Da die x-Koordinate bei der Koordinatentransformation fest bleibt, ergibt sich also insgesamt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Transformation in umgekehrter Richtung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Abschnitt 8.5 – Abbildungen

8.11

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) *1. Schritt:* Verschiebung um $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Drehzentrum im Urspung O

2. Schritt: Drehung um $\frac{3}{2}\pi$ um O

3. Schritt: Verschiebung um $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) & -\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) & \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) *1. Schritt:* Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Streckzentrum im Urspung O

2. Schritt: Streckung mit dem Faktor 2 mit Zentrum O

3. Schritt: Verschiebung um $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

d) Die Punkte $P(-4|2)$ und $P'(5|2)$ liegen 3 Einheiten über der Scherungsachse $y=-1$. Damit beträgt der Scherungsparameter $\alpha = \frac{5-(-4)}{3} = 3$.

1. Schritt: Verschiebung um $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ Scherungsachse auf der x-Achse
2. Schritt: Scherung entlang der x-Achse mit dem Parameter $\alpha = 3$
3. Schritt: Verschiebung um $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e) Zuerst Spiegelung, dann Drehung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jetzt zuerst die Drehung und dann die Spiegelung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Reihenfolge der Spiegelung und der Drehung darf also nicht vertauscht werden.

f) *1. Schritt:* Verschiebung um $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\longrightarrow$ Spiegelachse geht durch den Ursprung O
2. Schritt: Drehung um $\frac{\pi}{4}\pi$ um O
$\longrightarrow$ Spiegelachse fällt mit der x-Achse zusammen
3. Schritt: Achsenspiegelung an der x-Achse
4. Schritt: Drehung um $-\frac{\pi}{4}\pi$ um O
5. Schritt: Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8.12

Ansatz:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Paare für $\vec{x}, \vec{x}'$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \vec{c}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ergibt ein lineares Gleichungssystem für die Komponenten a,b,c,d,e,f:

$$\begin{array}{rrrrrl}
10a & & & & +\,e = & 2 \\
 & & 10c & & +\,f = & -4 \\
5a & & & & +\,e = & -1 \\
 & & 5c & & +\,f = & 0 \\
 & 10b & & & +\,e = & 4 \\
 & & & 10d & +\,f = & 10
\end{array}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$a = \frac{3}{5} \qquad b = \frac{4}{5}, \qquad c \; -\frac{4}{5}, \qquad d = \frac{3}{5}, \qquad e = -4, \qquad f = 4$$

Also lautet die Transformation

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

8.13

a) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & 0 & \sin(\pi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\pi) & 0 & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c) *1. Schritt:* Verschiebung um $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\longrightarrow$ Drehachse geht durch den Ursprung O
2. Schritt: Drehung um die z-Achse um $\frac{\pi}{4}$
$\longrightarrow$ Drehachse fällt mit der x-Achse zusammen
3. Schritt: Drehung um die x-Achse um $\frac{2}{3}\pi$
4. Schritt: Drehung um die z-Achse um $-\frac{\pi}{4}$
5. Schritt: Verschiebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) & -\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ 0 & \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) & \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4} \end{pmatrix}.$$

d) Umwandlung von ε in Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \mu \\ z &= -\lambda + 2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit sind folgende Schritte notwendig:
1. Schritt: Verschiebung um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\longrightarrow$ Spiegeleben geht durch den Ursprung O
2. Schritt: Drehung um die y-Achse um $-\frac{\pi}{4}$
$\longrightarrow$ Spiegelebene fällt mit der (x,y)-Ebene zusammen
3. Schritt: Spiegelung an der (x,y)-Ebene
4. Schritt: Drehung um die y-Achse um $\frac{\pi}{4}$
5. Schritt: Verschiebung um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & 0 & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8.14

a) Darstellung einer Geraden g:

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Eingesetzt in die Abbildungsvorschrift:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v} = \vec{p} + \lambda \vec{r} + \vec{v} = (\vec{p} + \vec{v}) + \lambda \vec{r}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Das Ergebnis ist also wieder eine Gerade (Aufpunkt $(\vec{p}+\vec{v})$, Richtungsvektor $\vec{v}$), d. h. eine Verschiebung ist geradentreu.

b) Wieder Darstellung einer Geraden g:

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{r}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Eingesetzt in die Abbildungsvorschrift:

$$\vec{x}' = A\vec{x} = A(\vec{p} + \lambda \vec{r}) = A\vec{p} + A(\lambda \vec{r}) = A\vec{p} + \lambda A\vec{r}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Das Ergebnis ist also wieder eine Gerade (Aufpunkt $A\vec{p}$, Richtungsvektor $A\vec{r}$), d. h. eine Matrizentransformation ist geradentreu.

c) Alle elementaren Transformationen mit Ausnahme der Verschiebung lassen sich im affinen Raum als Matrizentransformation darstellen. Da nach (a) und (b) alle Matrizentransformationen und Verschiebungen geradentreu sind, sind alle elementaren Transformationen geradentreu.

Da das Bild einer Geraden unter elementaren Transformation wieder eine Gerade ist, kann man darauf wieder eine elementare Transformation anwenden und erhält wieder eine Gerade usw. D. h., dass auch alle aus elementaren Transformationen zusammengesetzte Transformationen wieder geradentreu sind.

Abschnitt 8.6 – Determinanten

8.15

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 15 - 8 = 7$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 0 - (-1) \cdot 3 = 0 + 3 = 3$

c)
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) \cdot 0 \\ &= 17 \end{aligned}$$

d) $\begin{vmatrix}1&1&1\\3&2&-25\\5&7&-9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\3&-1&-28\\5&2&-14\end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Zeile}}{=} 1\begin{vmatrix}-1&-28\\2&-14\end{vmatrix} = (-14)\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}$

(-1)

$= (-14)\cdot(-1\cdot 1-2\cdot 2) = 70$

e) $\begin{vmatrix}2&0&3&1\\1&2&-2&0\\2&0&5&0\\-1&0&-3&-5\end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 2. Spalte}}{=} 2\begin{vmatrix}2&3&1\\2&5&0\\-1&-3&-5\end{vmatrix} \begin{matrix}(5)\\ \\ \\ \end{matrix} = 2\begin{vmatrix}2&3&1\\2&5&0\\9&12&0\end{vmatrix}$

$\overset{\text{Entw. 3. Spalte}}{=} 2\cdot 1\begin{vmatrix}2&5\\9&12\end{vmatrix} = 2\cdot(2\cdot 12-9\cdot 5) = -42$

f) $\begin{vmatrix}2&1&4&-1\\1&0&3&2\\1&-1&0&3\\4&2&1&0\end{vmatrix} \begin{matrix}(2)&(3)\\ & \\ & \\ & \end{matrix} = \begin{vmatrix}2&1&4&-1\\5&2&11&0\\7&2&12&0\\4&2&1&0\end{vmatrix}$

$\overset{\text{Entw. 4. Spalte}}{=} -(-1)\begin{vmatrix}5&2&11\\7&2&12\\4&2&1\end{vmatrix} \begin{matrix}(-1)\\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}5&2&11\\2&0&1\\-1&0&-10\end{vmatrix}$

$\overset{\text{Entw. 2. Spalte}}{=} (-2)\begin{vmatrix}2&1\\-1&-10\end{vmatrix} = (-2)\cdot(2\cdot(-10)-(-1)\cdot 1) = 38$

8.16

a) $\begin{vmatrix}\alpha_{11}&0&0&\cdots&0\\0&\alpha_{22}&0&\cdots&0\\0&0&\alpha_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\alpha_{nn}\end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} \alpha_{11}\begin{vmatrix}\alpha_{22}&0&\cdots&0\\0&\alpha_{33}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\alpha_{nn}\end{vmatrix}$

$\overset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\begin{vmatrix}\alpha_{33}&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\alpha_{nn}\end{vmatrix} = \ldots$

$= \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\ldots\alpha_{n-2,n-2}\begin{vmatrix}\alpha_{n-1,n-1}&0\\0&\alpha_{nn}\end{vmatrix} = \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\ldots\alpha_{n-2,n-2}\cdot\alpha_{n-1,n-1}\cdot\alpha_{nn}$

b) $$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \ldots$$

$$= \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \ldots \alpha_{n-2,n-2} \begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \ldots \alpha_{n-2,n-2} \cdot \alpha_{n-1,n-1} \cdot \alpha_{nn}$$

c) $$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \cdots & \alpha_{n1} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{(b)}}{=} \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \ldots \alpha_{n-2,n-2} \cdot \alpha_{n-1,n-1} \cdot \alpha_{nn}$$

8.17

Wegen

$$\det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right) = \det\left(AA^{-1}\right) = \det E = 1$$

gilt

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}.$$

8.18

a) Nullspalte in der i-ten Spalte von A:

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & 0 \cdot 0 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 \cdot 0 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 0 \cdot 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Wegen $\det A = \det A^T$ verschwindet damit auch die Determinante einer Matrix, wenn sie eine Nullzeile enthält.

b) Zwei Zeilen von A identisch:

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \; (-1) \; = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{(a)}}{=} 0$$

Wegen $\det A = \det A^T$ verschwindet damit auch die Determinante einer Matrix, wenn sie zwei identische Spalten enthält.

c) Die k-te Spalte sei die Summe der i-ten Spalte und der j-ten Spalte:

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1i}+\alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2i}+\alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{ni} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{ni}+\alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(1)$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & \alpha_{1i}+\alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1i}+\alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{2i}+\alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2i}+\alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{ni} & \cdots & \alpha_{ni}+\alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{ni}+\alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{(b)}}{=} 0$$

Wegen $\det A = \det A^T$ gilt die entsprechende Aussage natürlich auch für Zeilen.

8.19

Wir zeigen die äquivalente Aussage: Wenn ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, dann hat die Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

eine nicht verschwindende Determinante.
Wenn wir eine eindeutige Lösung haben, lässt sich mit elementaren Zeilenoperationen die Gauß-Normalform mit Einheitsmatrix erreichen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & \beta_n \end{array}\right)$$

geht über in

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_1 \end{array}\right).$$

Dabei wurden

- Zeilen mit einer Konstanten $c \neq 0$ multipliziert $\longrightarrow$ Multiplikation des Werts der Determinante mit dem Faktor c;
- Vielfache einer Zeile zu einer anderen addiert $\longrightarrow$ keine Änderung des Werts der Determinante;
- Zeilen vertauscht $\longrightarrow$ Änderung des Vorzeichens der Determinante.

Wäre jetzt

$$\det A = 0,$$

so wäre also auch der Wert der umgeformten Determinante 0, was aber offensichtlich wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \det E = 1 \neq 0$$

nicht der Fall ist. Also gilt tatsächlich

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

8.20

Die aufwendige Berechnung der Determinanten wird aus Platzgründen nicht explizit durchgeführt.

a)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$$

b)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-24}{-14} = \frac{12}{7} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} \frac{4}{-14} = -\frac{2}{7}$$

c)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-25}{-25} = 1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-25}{-25} = 1$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-50}{-25} = 2$$

d)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

e)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{60}{12} = 5 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \qquad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{48}{12} = 4$$

8.21

Es ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}\begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} & 0 \\ 0 & -\alpha_{21}\alpha_{12} + \alpha_{22}\alpha_{11} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E
\end{aligned}$$

und damit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix}.$$

9 Eigenwerte

Abschnitt 9.2 – Eigenwerte und Eigenvektoren

9.1

a) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -4$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A-\lambda_k E)\vec{x} = \vec{0}$.

Als Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$ ergeben alle sich nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -4$ ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_{-4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-4-\lambda)-(-6)(-2) = \lambda^2+4\lambda-12 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1} = \frac{-4\pm 8}{2} = -2\pm 4$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = -6$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A-\lambda_k E)\vec{x} = \vec{0}$.

Als Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$ ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -6$ ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_{-6} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 7 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left(-\tfrac{13}{2}-\lambda\right)-\left(-\tfrac{7}{2}\right)\cdot 7 = \lambda^2+\tfrac{5}{2}\lambda-\tfrac{3}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4\cdot 1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}}{2\cdot 1} = \frac{-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}}{2} = -\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = -3$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A-\lambda_k E)\vec{x}=\vec{0}$.
Als Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -3$ ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_{-3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Entw. 3. Spalte}}{=} (7-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (7-\lambda)\left[(6-\lambda)(3-\lambda)-(-2)(-2)\right] = (7-\lambda)\left[\lambda^2-9\lambda+14\right] \stackrel{!}{=} 0$$

Erster Eigenwert:

$$\lambda_1 = 7$$

Berechnung der weiteren Eigenwerte:

$$\lambda^2-9\lambda+14 = 0$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{9\pm\sqrt{81-4\cdot 1\cdot 14}}{2\cdot 1} = \frac{9\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{9\pm 5}{2}$$

$$\lambda_2 = 7, \qquad \lambda_3 = 2$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A-\lambda_k E)\vec{x}=\vec{0}$.
Als Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$ ergeben sich alle nicht verschwindende Linearkombinationen von

$$\vec{x}_{7,1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_{7,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenvektoren zu $\lambda_3 = 2$ ergeben alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \overset{2\cdot 1.\,\text{Spalte zur 2.}}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4-2\lambda & -6 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-2)\cdot 2.\,\text{Zeile zur 1.}}{=} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -10 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. 2. Spalte}}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & -10 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(7-\lambda)(-4-\lambda)-3\cdot(-10)\right] = (2-\lambda)\left[-28-7\lambda+4\lambda+\lambda^2+30\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2-3\lambda+2\right] \overset{!}{=} 0$$

Erster Eigenwert:

$$\lambda_1 = 2$$

Berechnung der weiteren Eigenwerte:

$$\lambda^2-3\lambda+2 = 0$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{3\pm 1}{2}$$

$$\lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 1$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A-\lambda_k E)\vec{x}=\vec{0}$.
Als Eigenvektoren zu $\lambda_1=\lambda_2=2$ ergeben sich alle nicht verschwindende Linearkombinationen von

$$\vec{x}_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_{2,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenvektoren zu $\lambda_3=1$ ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

f) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{(-1)\cdot 2.\,\text{Zeile zur 3.}}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{3.\,\text{Spalte zur 2.}}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{(-1)\cdot 1.\,\text{Zeile zur 2.}}{=} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Sarrus}}{=} (3-\lambda)(1-\lambda)^2-(-1+\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda)^2+(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda)+1\right] = (1-\lambda)\left[3-3\lambda-\lambda+\lambda^2+1\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2-4\lambda+4\right] = (1-\lambda)\left[\lambda-2\right]^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2=\lambda_3=2$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A-\lambda_k E)\vec{x}=\vec{0}$.

Als Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenvektoren zu $\lambda_2=\lambda_3=2$ ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9.2

a) Scherung in x-Richtung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (\alpha \neq 0)$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\lambda = 1$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A - 1E)\vec{x} = \vec{0}$.
Als Eigenvektoren ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau die Scherungsrichtung.
Scherung in y-Richtung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (\alpha \neq 0)$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\lambda = 1$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A - 1E)\vec{x} = \vec{0}$.
Als Eigenvektoren ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau die Scherungsrichtung.

Offensichtlich geben die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1$ stets genau die Scherungsrichtung an.

b) Sicherheitshalber Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)^2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\lambda = 1$$

Also ist tatsächlich $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert.
Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A - 1E)\vec{x} = \vec{0}$.
Als Eigenvektoren ergeben sich alle nicht verschwindende Vielfache von

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Richtung gibt nach (a) die Scherungsrichtung an.

c) Scherung entlang der (x,y)-Ebene:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad ((\alpha,\beta) \neq (0,0))$$

Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 1-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda = 1$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(A-1E)\vec{x} = \vec{0}$.
Als Eigenvektoren ergeben sich alle nicht verschwindende Linearkombinationen von

$$\vec{x}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau die (x,y)-Ebene, also die Ebene, entlang derer geschert wird.

Die analogen Ergebnisse ergeben sich bei den anderen Scherungen entlang der (x,z)-Ebene und entlang der (y,z)-Ebene.

9.3

Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\begin{vmatrix} \cos(\varphi)-\lambda & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)-\lambda \end{vmatrix} = (\cos(\varphi)-\lambda)^2 - \sin(\varphi)\,(-\sin(\varphi))$$

$$= \cos^2(\varphi) - 2\cos(\varphi)\cdot\lambda + \lambda^2 + \sin^2(\varphi) \overset{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)=1}{=} \lambda^2 - 2\cos(\varphi)\cdot\lambda + 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2\cos(\varphi) \pm \sqrt{4\cos^2(\varphi) - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \cos(\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(\varphi) - 1}$$

Wegen $|\cos(\varphi)| \leq 1$ gibt es nur dann reelle Eigenwerte, wenn

$$\cos^2(\varphi) = 1$$
$$\cos(\varphi) = \pm 1$$
$$\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi = \pi \qquad (\varphi \in [0,2\pi[)\,.$$

Unterscheidung der beiden Fälle $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$.

1. Möglichkeit: $\varphi = 0$
In diesem Fall ist der einzige Eigenwert

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cos(0) = 1.$$

Die Abbildungsmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich bei $\vec{x}' = A\vec{x}$ um die identische Abbildung (Drehung um 0°), d. h. für alle Vektoren $\vec{x}$ gilt

$$A\vec{x} = \vec{x}.$$

Demzufolge sind alle Vektoren ($\neq 0$) Eigenvektoren.

2. Möglichkeit: $\varphi = \pi$
In diesem Fall ist der einzige Eigenwert

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cos(\pi) = -1.$$

Die Abbildungsmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich bei $\vec{x}' = A\vec{x}$ um eine Punktspiegelung am Ursprung (Drehung um 180°), d. h. für alle Vektoren $\vec{x}$ gilt

$$A\vec{x} = -\vec{x}.$$

Demzufolge sind alle Vektoren ($\neq 0$) Eigenvektoren.

9.4

Ellipsengleichung:

$$\frac{31}{3\,600}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{360}xy + \frac{7}{1\,200}y^2 = 1$$

Matrizenschreibweise:

$$(x,\ y)\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{31}{3\,600} & \frac{\sqrt{3}}{720} \\ \frac{\sqrt{3}}{720} & \frac{7}{1\,200} \end{pmatrix}}_{=:\,A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

Die Eigenwerte von A sind die Kehrwerte der Quadrate der Halbachsenlängen, die zugehörigen Eigenvektoren geben die Richtungen der Hauptachsen an.
Die Eigenwerte von A und der zugehörigen Eigenvektoren werden mit dem üblichen Verfahren bestimmt. Es ergibt sich:

1. Eigenwert: $\lambda_1 = \frac{1}{100}$
Die zugehörigen Eigenvektoren sind die nicht verschwindenden Vielfachen von

$$\vec{x}_{\frac{1}{100}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Eigenwert: $\lambda_2 = \frac{1}{225}$
Die zugehörigen Eigenvektoren sind die nicht verschwindenden Vielfachen von

$$\vec{x}_{\frac{1}{225}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für die Halbachsenlänge a der großen Hauptachse:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= \lambda_2 = \frac{1}{225} \\ a &= \sqrt{225} = 15 \end{aligned}$$

Die zugehörige Richtung ist gegeben durch

$$\vec{x}_{\frac{1}{225}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Für die Halbachsenlänge b der kleinen Hauptachse gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2} &= \lambda_1 = \frac{1}{100} \\ b &= \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

Die zugehörige Richtung ist gegeben durch

$$\vec{x}_{\frac{1}{100}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9.5

Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren mit dem üblichen Verfahren ergibt:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 8 \qquad \vec{x}_{8,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_{8,2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jetzt Orthogonalisierung der Vektoren $\vec{x}_{8,1}, \vec{x}_{8,2}$. Dazu machen wir den Ansatz

$$\vec{e}_3 = \alpha \vec{x}_{8,1} + \beta \vec{x}_{8,2}.$$

Daraus:

$$0 = \vec{x}_{8,1} \cdot (\alpha \vec{x}_{8,1} + \beta \vec{x}_{8,2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha - \sqrt{3}\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 5\alpha - 2\sqrt{3}\beta$$

Eine Lösung ist z. B. $\alpha = 6$, $\beta = 5\sqrt{3}$.
Damit lautet eine Basis aus Eigenvektoren

$$\vec{e}_1 = \vec{x}_{8,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \vec{x}_{8,2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Die Abbildungsmatrix in einem Koordinatensystem mit Achsen in Richtung dieser Eigenvektoren lautet

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

9.6

Für die Kräfte F_1,F_2,$F3$ auf die Massenpunkte gilt

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2D & D & 0 \\ D & -2D & D \\ 0 & D & -2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Damit keine Energie zwischen den Massenpunkten ausgetauscht wird, muss

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gelten, d. h. λ Eigenwert der obigen Matrix sein.
Die Berechnung der Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren ergeben folgende Möglichkeiten:
1. Eigenwert:

$$\lambda_1 = -2D, \qquad \text{zugehöriger Eigenvektor:} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall schwingen die 1. und 3. Masse entgegengesetzt, die 2. Masse ist in Ruhe.
2. Eigenwert:

$$\lambda_2 = (-2+\sqrt{2})D, \qquad \text{zugehöriger Eigenvektor:} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall schwingen die 1. und 3. Masse gleich, die 2. Masse um $\sqrt{2}$ stärker in die gleiche Richtung.
3. Eigenwert:

$$\lambda_3 = (-2-\sqrt{2})D, \qquad \text{zugehöriger Eigenvektor:} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall schwingen die 1. und 3. Masse gleich, die 2. Masse um $\sqrt{2}$ stärker in die entgegengesetzte Richtung.

10 Grenzwerte

Abschnitt 10.1 – Folgen

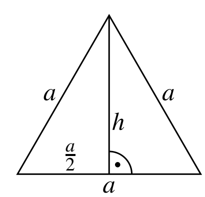
10.1

Das nächste Folgenglied ergibt sich immer als Summe der beiden vorangegangenen Folgenglieder. Damit lauten die ersten Glieder der Fibonacci-Folge:

$$(a_n) = (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1\,597,2\,584,4\,181,6\,765,\ldots)$$

10.2

Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnet sich nach dem Satz der Pythagoras:



$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 &= a^2\\ h^2 &= a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\\ h &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot a\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a:

$$A(a) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot a = \frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot a^2$$

Flächeninhalt der 0. Figur:

$$a_0 = A(1) = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

Flächeninhalt der 1. Figur:

$$a_1 = 3\cdot A\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2^2} = 3\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4^2}\sqrt{3}$$

Flächeninhalt der 2. Figur:

$$a_2 = 3^2\cdot A\left(\frac{1}{2^2}\right) = 3^2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2^4} = 3^2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4^2} = \frac{3^2}{4^3}\sqrt{3}$$

Flächeninhalt der 3. Figur:

$$a_3 = 3^3\cdot A\left(\frac{1}{2^3}\right) = 3^3\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2^6} = 3^3\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4^3} = \frac{3^3}{4^4}\sqrt{3}$$

Allgemein der Flächeninhalt der n-ten Figur:

$$a_n = 3^n\cdot A\left(\tfrac{1}{2^n}\right) = 3^n\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2^{2n}} = 3^n\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4^n} = \frac{3^n}{4^{n+1}}\sqrt{3}$$

Abschnitt 10.2 – Der Grenzwertbegriff bei Folgen

10.3

a) falsch. Gegenbeispiel: $(a_n) = (1,-1,1,-1,1,-1,\ldots) = ((-1)^n)$ ist divergent, aber die Folgenglieder gehen nicht gegen ∞.

b) richtig. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt nach den Rechenregeln zur Berechnung Grenzwerten von Folgen

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; a+b,$$

d. h. die gliedweise Summe der beiden Folgen ist konvergent.

c) falsch. Gegenbeispiel: $(a_n) = (b_n) = (1,2,3,4,5,\ldots)$. Die Folgen a_n und b_n sind divergent, aber die gliedweise Differenz

$$(a_n - b_n) \;=\; (0,0,0,0,0,\ldots)$$

ist konvergent.

d) falsch. Gegenbeispiel: Die Folge $\left(1-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\ldots\right)$ hat ständig wachsende Glieder, aber es ist

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) \;=\; 1-0 \;=\; 1.$$

e) richtig. Es sei (a_n) eine konvergente Folge und es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Nach der Grenzwertdefinition gibt es zu $\varepsilon = 1$ eine Stelle n_0 mit der Eigenschaft, dass für alle $n \geq n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ gilt. Demzufolge gilt

$$a_n \;\geq\; a-1 \qquad \text{und} \qquad a_n \;\leq\; a+1 \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Wir bezeichnen $M := \max\{a_0,a_1,\ldots,a_{n_0-1}\}$ und $m := \min\{a_0,a_1,\ldots,a_{n_0-1}\}$. Dann gilt für alle Folgenglieder a_n

$$a_n \;\geq\; \min\{m,a-1\} \;=:\; c \qquad\qquad a_n \;\leq\; \max\{M,a+1\} \;=:\; d,$$

d. h. es gilt

$$a_n \;\in\; [c,d] \quad \text{für alle Folgenglieder } a_n.$$

10.4

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n+3n^2}{4+5n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3}{\frac{4}{n^2}+5} = \frac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-7\sqrt{n}}{4n-2n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-7n^{\frac{1}{2}}}{4n-2n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-\frac{7}{n^{\frac{5}{2}}}}{\frac{4}{n^2}-2} = \frac{0}{-2} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n\sqrt{n}-n+\pi\sqrt{n}}{-\pi n\sqrt{n}+\sqrt{2}\sqrt{n}+e} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^{\frac{3}{2}}-n+\pi n^{\frac{1}{2}}}{-\pi n^{\frac{3}{2}}+\sqrt{2}n^{\frac{1}{2}}+e} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{\pi}{n}}{-\pi+\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{e}{n^{\frac{3}{2}}}}$

$= \frac{2}{-\pi} = -\frac{2}{\pi}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\frac{5}{2n}\right)\left(3-\frac{6}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\frac{5}{2n}\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(3-\frac{6}{n}\right) = 2\cdot 3 = 6$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^8 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1}\right)^8 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^8 = \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{3^8}{2^8} = \frac{6\,561}{256}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^6}{(2n^2-n+1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(2n+1)^2}{2n^2-n+1}\right)^3 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{2n^2-n+1}\right)^3$

$= \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+4n+1}{2n^2-n+1}\right)^3 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}\right)^3 = 8$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}-\frac{3n^2}{4n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{4n+1} = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n^2}}}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{4+\frac{1}{n}}}_{=-\infty}$

$= -\infty$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+a}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+a-n}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} = \frac{a}{\sqrt{\infty}+\sqrt{\infty}} = \frac{a}{\infty+\infty} = 0$

10.5

Die Folge lautet

$$(p_n) = \left(n \frac{\Delta V\, p_0}{V_S} \right).$$

Demzufolge ist

$$p_1 = \frac{\Delta V\, p_0}{V_S} \qquad p_2 = 2\frac{\Delta V\, p_0}{V_S} \qquad p_3 = 3\frac{\Delta V\, p_0}{V_S}.$$

Für $n \to \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \left(n \underbrace{\frac{\Delta V\, p_0}{V_S}}_{=const.} \right) = \frac{\Delta V\, p_0}{V_S} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} n}_{=\infty} = \infty.$$

10.6

a) Für den Grenzwert a gilt:

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{2}{3}a \\ \frac{5}{3}a &= 1 \\ a &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

b) Für den Grenzwert a gilt:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{64}{a}} \\ a^2 &= \frac{64}{a} \\ a^3 &= 64 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

c) Für den Grenzwert a gilt:

$$\begin{aligned} a &= a(2-a) \\ a &= 2a - a^2 \\ a^2 &= a \\ a &= 0 \quad \text{oder} \quad a = 1 \end{aligned}$$

Für alle Folgenglieder $0 < a_n \leq 1$ gilt

$$a_{n+1} = 2a_n - a_n^2 = -(a_n^2 - 2a_n + 1) + 1 = -(a_n - 1)^2 + 1 \leq 1.$$

Damit kann die erste Lösung $a = 0$ kann keine Lösung des Problems sein, da

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n - a_n^2 - a_n = a_n - a_n^2 = 0$$

gilt, d. h. die Folgenglieder werden größer. Also ist

$$a = 1.$$

d) Für den Grenzwert a gilt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a^2 - 2}{a + 3} \\ a(a+3) &= a^2 - 2 \\ a^2 + 3a &= a^2 - 2 \\ 3a &= -2 \\ a &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

10.7

a) Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt äquivalent:

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &< \varepsilon \\ |q^n| &< \varepsilon \\ |q|^n &< \varepsilon \\ \ln(|q|^n) &< \ln(\varepsilon) \\ n\ln(|q|) &< \ln(\varepsilon) \\ n &\overset{|q|<1}{>} \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)} \end{aligned}$$

Wählt man also ein $n_0 > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)}$, so ist man ab diesem n_0 mit a_n näher als ε an 0, d. h. die Folge ist eine Nullfolge.

Für $|q| > 1$ wächst der Betrag $|q^n| = |q|^n$ über alle Grenzen. Im Fall $q > 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, im Fall $q < -1$ existiert der Grenzwert wegen des oszillierenden Vorzeichens nicht.

Für $q = 1$ lautet die Folge $(q^n) = (1^n) = (1,1,1,1,\ldots)$, d. h. es ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.
Für $q = -1$ lautet die Folge $(q^n) = ((-1)^n) = (1,-1,1,-1,\ldots)$, d. h. der Grenzwert existiert nicht.

b) Die Flächeninhalte A_n ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_1 &= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \\ A_2 &= 8 \cdot \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \\ A_3 &= 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{9^2}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^3 \\ &\vdots \\ A_n &= \left(\frac{8}{9}\right)^n \end{aligned}$$

Damit ergibt sich im Grenzfall

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^3 \overset{(a)}{=} 0.$$

Abschnitt 10.3 – Die Euler'sche Zahl *e*

10.8

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2} = e^2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\to e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}_{\to 1} = e\cdot 1 = e$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}} \overset{(b)}{=} \frac{1}{e}$

10.9

Die Schulden erhöhen sich um folgende Faktoren:

Typ A: $1+0{,}067 = 1{,}06700$

Typ B: $\left(1+\frac{0{,}066}{4}\right)^{4} \approx 1{,}06765$

Typ C: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}065}{n}\right)^{n} = e^{0{,}065} = 1{,}06716$

Bei der Variante A erhöht sich der Schuldenstand innerhalb eines Jahres am geringsten (ohne Tilgung), d. h. man entscheidet sich für diese Variante.

Abschnitt 10.4 – Der Grenzwertbegriff bei Funktionen

10.10

a) $f(3)=0$ ist möglich, da die Funktion an dieser Stelle einen Sprung auf $f(3)=0$ haben kann.

c) Der linksseitige Grenzwert an der Stelle 3 hat den Wert -2, der rechtsseitige Grenzwert den Wert 1. Der Grenzwert exististert nicht, da die einseitigen Grenzwerte nicht übereinstimmen.

d) $\lim\limits_{x\to 3-} f(x) = -2$ bedeutet, dass an der Stelle 3 der linksseitige Grenzwert den Wert -2 hat.
$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = -2$ bedeutet, dass an der Stelle -3 der Grenzwert den Wert -2 hat.

10.11

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x}{2x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+3}{2x-1} = \dfrac{3}{-1} = -3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{\frac{3}{2}}+2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{\frac{1}{2}}+2}{1} = \dfrac{2}{1} = 2$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x^4+x^6}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{2x^4+x^6}{x^4}} = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{2+x^2}{1}} = \sqrt{\dfrac{2}{1}} = \sqrt{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{(2+x)^2}-\frac{1}{4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{4-(2+x)^2}{(2+x)^2\cdot 4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-(2+x)^2}{4x(2+x)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-(4+4x+x^2)}{4x(4+4x+x^2)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4x-x^2}{16x+16x^2+4x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-4-x}{16+16x+4x^2} = \dfrac{-4}{16} = -\dfrac{1}{4}$

10.12

a) $x=-1$ ist Nullstelle von Zähler und Nenner. Daher kann man den Faktor $(x-1)$ in Zähler und Nenner abspalten.

Zähler: z. B. mit der Lösungsformel:

$$
\begin{aligned}
x^2+x-2 &= 0\\
x_{1/2} &= \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2}\\
x_1 &= 1, \qquad x_2 = -2
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$$

Nenner: z. B. mit Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^2+2x-3):(x-1) = x+3\\
\underline{x^2-x}\\
\quad\;\; 3x-3\\
\quad\;\; \underline{3x-3}\\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Also gilt:

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

Zusammen:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x}^{\to 1}+2}{\underbrace{x}_{\to 1}+3} = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4}$$

b) Man substituiert $t := x-1$, d. h. es ist

$$x = t+1.$$

Damit:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \lim_{t+1\to 1}\frac{(t+1)^2+(t+1)-2}{(t+1)^2+2(t+1)-3} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2+3t}{t^2+4t} = \lim_{t\to 0}\frac{t+3}{t+4} = \frac{3}{4}$$

10.13

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0}2\frac{\sin(2x)}{2x} \overset{t:=2x}{=} \lim_{\frac{t}{2}\to 0}2\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{t\to 0}2\frac{\sin(t)}{t} = 2\cdot 1 = 2$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\right) = 1\cdot\frac{1}{1} = 1$$

d) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{t:=\frac{\pi}{2}-x}{=} \lim_{\frac{\pi}{2}-t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t)}{-t} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = -1$$

10.14

a) Aus dem Impulserhaltungssatz:

$$u_2 = \frac{m_1v_1+m_2v_2-m_1u_1}{m_2}$$

Eingesetzt in den Energieerhaltungssatz:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1v_1+m_2v_2-m_1u_1}{m_2}\right)^2\\
m_1v_1^2+m_2v_2^2 &= m_1u_1^2+m_2\frac{m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2+m_1^2u_1^2+2m_1v_1m_2v_2-2m_1^2v_1u_1-2m_2v_2m_1u_1}{m_2^2}\\
m_1v_1^2+m_2v_2^2 &= m_1u_1^2+\frac{m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2+m_1^2u_1^2+2m_1v_1m_2v_2-2m_1^2v_1u_1-2m_2v_2m_1u_1}{m_2}\\
m_1v_1^2+m_2v_2^2 &= m_1u_1^2+\frac{m_1^2}{m_2}v_1^2+m_2v_2^2+\frac{m_1^2}{m_2}u_1^2+2m_1v_1v_2-2\frac{m_1^2}{m_2}v_1u_1-2m_1v_2u_1\\
m_1m_2v_1^2 &= m_1m_2u_1^2+m_1^2v_1^2+m_1^2u_1^2+2m_1m_2v_1v_2-2m_1^2v_1u_1-2m_1m_2v_2u_1\\
m_2v_1^2 &= m_2u_1^2+m_1v_1^2+m_1u_1^2+2m_2v_1v_2-2m_1v_1u_1-2m_2v_2u_1\\
(m_2+m_1)u_1^2-(2m_1v_1+2m_2v_2)u_1+(m_1v_1^2+2m_2v_1v_2-m_2v_1^2) &= 0
\end{aligned}$$

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{(2m_1v_1+2m_2v_2)\pm\sqrt{(-(2m_1v_1+2m_2v_2))^2-4(m_2+m_1)(m_1v_1^2+2m_2v_1v_2-m_2v_1^2)}}{2(m_2+m_1)}\\
&= \frac{2m_1v_1+2m_2v_2}{2(m_1+m_2)}\\
&\pm\frac{\sqrt{4m_1^2v_1^2+8m_1m_2v_1v_2+4m_2^2v_2^2-4m_2m_1v_1^2-8m_2^2v_1v_2+4m_2^2v_1^2-4m_1^2v_1^2-8m_1m_2v_1v_2+4m_1m_2v_1^2}}{2(m_1+m_2)}\\
&= \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\pm\frac{\sqrt{4m_2^2v_2^2-8m_2^2v_1v_2+4m_2^2v_1^2}}{2(m_1+m_2)}\\
&= \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\pm\frac{2m_2\sqrt{v_2^2-2v_1v_2+v_1^2}}{2(m_1+m_2)}\\
&= \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\pm\frac{m_2\sqrt{(v_1-v_2)^2}}{m_1+m_2}\\
&= \frac{m_1v_1+m_2v_2\pm m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2}
\end{aligned}
$$

1. Lösung:

$$
u_{1/1} = \frac{m_1v_1+m_2v_2+m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_1v_1+m_2v_1}{m_1+m_2} = \frac{(m_1+m_2)v_1}{m_1+m_2} = v_1
$$

Daraus ergibt sich

$$
u_{2/1} = \frac{m_1v_1+m_2v_2-m_1v_1}{m_2} = \frac{m_2v_2}{m_2} = v_2.
$$

Die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß sind identisch, d. h. es findet kein Stoß statt $\longrightarrow$ physikalisch nicht sinnvoll.

2. Lösung:

$$
u_{1/2} = \frac{m_1v_1+m_2v_2-m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2} = \frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2}
$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
u_{2/2} &= \frac{m_1v_1+m_2v_2-m_1\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2}}{m_2}\\
&= \frac{(m_1v_1+m_2v_2)(m_1+m_2)-m_1(m_1-m_2)v_1-2m_1m_2v_2}{(m_1+m_2)m_2}\\
&= \frac{m_1^2v_1+m_1m_2v_1+m_1m_2v_2+m_2^2v_2-m_1^2v_1+m_1m_2v_1-2m_1m_2v_2}{(m_1+m_2)m_2}\\
&= \frac{2m_1m_2v_1+m_2^2v_2-m_1m_2v_2}{(m_1+m_2)m_2} = \frac{2m_1v_1+m_2v_2-m_1v_2}{m_1+m_2}\\
&= \frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}.
\end{aligned}
$$

b) $\lim\limits_{m_1\to 0} u_1 = \lim\limits_{m_1\to 0} \dfrac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} = \dfrac{-m_2v_1+2m_2v_2}{m_2} = -v_1+2v_2$

$\lim\limits_{m_1\to 0} u_2 = \lim\limits_{m_1\to 0} \dfrac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2} = \dfrac{m_2v_2}{m_2} = v_2$

Im Fall $m_1 \to 0$ wird die Masse m_1 mit der um $2v_2$ erniedrigten Geschwindigkeit in umgekehrter Richtung zurückgestoßen, während die Geschwindigkeit der Masse m_2 unverändert bleibt.

$\lim\limits_{m_2\to 0} u_1 = \lim\limits_{m_2\to 0} \dfrac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} = \dfrac{m_1v_1}{m_1} = v_1$

$\lim\limits_{m_2\to 0} u_2 = \lim\limits_{m_2\to 0} \dfrac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2} = \dfrac{-m_1v_2+2m_1v_1}{m_1} = -v_2+2v_1$

Im Fall $m_2 \to 0$ wird die Masse m_2 um $v_1 - v_2$ beschleunigt, während die Geschwindigkeit der Masse m_1 unverändert bleibt.

$\lim\limits_{m_1\to\infty} u_1 = \lim\limits_{m_1\to\infty} \dfrac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} = \lim\limits_{m_1\to\infty} \dfrac{(1-\frac{m_2}{m_1})v_1+2\frac{m_2}{m_1}v_2}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \dfrac{v_1}{1} = v_1$

$\lim\limits_{m_1\to\infty} u_2 = \lim\limits_{m_1\to\infty} \dfrac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2} = \lim\limits_{m_1\to\infty} \dfrac{(\frac{m_2}{m_1}-1)v_2+2v_1}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \dfrac{-v_2+2v_1}{1} = -v_2+2v_1$

Im Fall $m_1 \to \infty$ bleibt die Geschwindigkeit von m_1 unverändert, während die Geschwindigkeit von m_2 auf das um v_2 verminderte Doppelte der Geschwindigkeit v_1 zunimmt.

$\lim\limits_{m_2\to\infty} u_1 = \lim\limits_{m_2\to\infty} \dfrac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} = \lim\limits_{m_2\to\infty} \dfrac{(\frac{m_1}{m_2}-1)v_1+2v_2}{\frac{m_1}{m_2}+1} = \dfrac{-v_1+2v_2}{1} = -v_1+2v_2$

$\lim\limits_{m_2\to\infty} u_2 = \lim\limits_{m_2\to\infty} \dfrac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2} = \lim\limits_{m_2\to\infty} \dfrac{(1-\frac{m_1}{m_2})v_2+2\frac{m_1}{m_2}v_1}{\frac{m_1}{m_2}+1} = \dfrac{v_2}{1} = v_2$

Im Fall $m_2 \to \infty$ wird die Masse m_1 mit der um $2v_2$ erniedrigten Geschwindigkeit in umgekehrter Richtung zurückgestoßen, während die Geschwindigkeit der Masse m_2 unverändert bleibt.

Abschnitt 10.5 – Stetigkeit

10.15

a) Der Temperaturverlauf innerhalb eines Tages ist stetig, da die Temperatur sich nicht sprunghaft ändern kann.

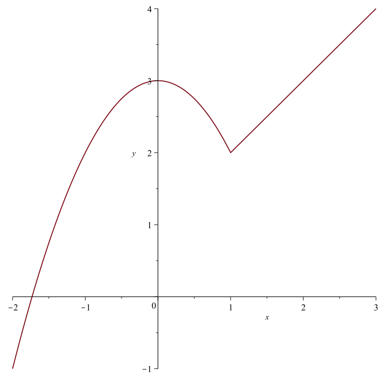
b) Die Höhe eines Flugzeugs über NN ist stetig, da das Flugzeug nicht sprunghaft die Höhe ändern kann, ohne alle Zwischenhöhen anzunehmen.

c) Die Parkgebühr ist nicht stetig. Sie ändert sich sprunghaft von einer Minute zur anderen (z. B. zu jeder vollen Stunde).

d) Die Geschwindigkeit bei einer Fahrt mit dem Auto ist stetig, da die Geschwindigkeit kontinuierlich zu- bzw. abnimmt.

10.16

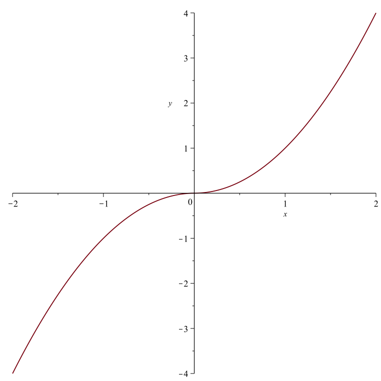
a)



$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} f(x) &= \lim_{x\to 1-}(-x^2+3) = -1^2+3 = 2\\
\lim_{x\to 1+} f(x) &= \lim_{x\to 1+}(x+1) = 1+1 = 2\\
f(1) &= 1+1 = 2
\end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = f(1)$, d. h. f ist an der Stelle $x_0 = 1$ stetig.

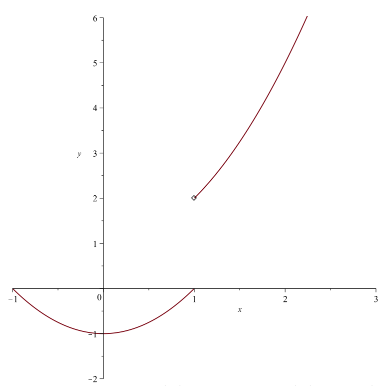
b)



$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x)\cdot x^2 = \lim_{x\to 0-}(-1)\cdot x^2\\
&= (-1)\cdot 0^2 = 0\\
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x)\cdot x^2 = \lim_{x\to 0+} 1\cdot x^2\\
&= 1\cdot 0 = 0\\
f(0) &= 0\cdot 0^2 = 0
\end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0)$, d. h. f ist an der Stelle $x_0 = 1$ stetig.

c)



$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-} f(x) &= \lim_{x\to 1-}\left(x^2+\frac{|x-1|}{x-1}\right)\\
&= \lim_{x\to 1-}\left(x^2+\frac{-(x-1)}{x-1}\right)\\
&= \lim_{x\to 1-}\left(x^2+(-1)\right) = 1^2-1 = 0\\
\lim_{x\to 1+} f(x) &= \lim_{x\to 1+}\left(x^2+\frac{|x-1|}{x-1}\right)\\
&= \lim_{x\to 1+}\left(x^2+\frac{x-1}{x-1}\right)\\
&= \lim_{x\to 1+}\left(x^2+1\right) = 1^2+1 = 2\\
f(1) &= 2
\end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = f(1)$, d. h. f ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig.

10.17

Die einzige kritische Stelle ist $r = R$. Nun ist:

$$\begin{aligned}
\lim_{r \to R-} F(r) &= \lim_{r \to R-} G\frac{Mmr}{R^3} = G\frac{MmR}{R^3} = G\frac{Mm}{R^2} \\
\lim_{r \to R+} F(r) &= \lim_{r \to R+} G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{Mm}{R^2} \\
F(R) &= G\frac{Mm}{R^2}
\end{aligned}$$

Damit ist $\lim_{r \to R-} F(r) = \lim_{r \to R+} F(r) = F(R))$, d. h. F ist an der Stelle $r = R$ stetig. Da die Teilfunktionen innerhalb ihrer Bereiche auch stetig sind, ist die Gravitationskraft $F(r)$ eine stetige Funktion.

11 Differenzialrechnung

Abschnitt 11.1 – Der Ableitungsbegriff

11.1

a) $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2\right) = 3x_0^2$$

b) $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(3+\frac{2}{x_0+\Delta x}\right)-\left(3+\frac{2}{x_0}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2}{x_0+\Delta x}-\frac{2}{x_0}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2x_0-2(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0-2x_0-2\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{(x_0+\Delta x)x_0} = \frac{-2}{x_0\cdot x_0} = -\frac{2}{x_0^2}$$

c) $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x_0+\Delta x}{1-(x_0+\Delta x)}-\frac{x_0}{1-x_0}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(x_0+\Delta x)(1-x_0)-x_0(1-(x_0+\Delta x))}{(1-(x_0+\Delta x))(1-x_0)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0-x_0^2+\Delta x-x_0\Delta x-x_0+x_0^2+x_0\Delta x}{(1-x_0-\Delta x)(1-x_0)\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{(1-x_0-\Delta x)(1-x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(1-x_0-\Delta x)(1-x_0)}$$
$$= \frac{1}{(1-x_0)(1-x_0)} = \frac{1}{(1-x_0)^2}$$

d) $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)}-\sqrt{1+2x_0}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)}-\sqrt{1+2x_0}\right)\left(\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)}+\sqrt{1+2x_0}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)}+\sqrt{1+2x_0}\right)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+2(x_0+\Delta x))-(1+2x_0)}{\Delta x\left(\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)}+\sqrt{1+2x_0}\right)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+2x_0+2\Delta x-1-2x_0}{\Delta x\left(\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)}+\sqrt{1+2x_0}\right)}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)}+\sqrt{1+2x_0}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+2(x_0+\Delta x)}+\sqrt{1+2x_0}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+2x_0}+\sqrt{1+2x_0}} = \frac{2}{2\sqrt{1+2x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x_0}}$$

11.2

a) $$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\Delta x = 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{0-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-} 0 = 0$$

Also ist

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = 0.$$

b) $$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{((2+\Delta x)+3)-(2+3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(5+\Delta x)-5}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+} 1 = 1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{(3(2+\Delta x)-1)-(3\cdot 2-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{(5+3\Delta x)-5}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-} 3 = 3$$

Also existiert die Ableitung

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

nicht!

c) $$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\sin(0+\Delta x)+1)-(\sin 0+1)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sin\Delta x+1-0-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{((0+\Delta x)+1)-(0+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta x+1-0-1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-} 1 = 1$$

Also ist

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = 1.$$

11.3

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0+} 1 = 1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|0+\Delta x|-|0|)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0-} -1 = -1$$

Also existiert die Ableitung an der Stelle $x = 0$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}$$

nicht.

11.4

Geschwindigkeit, abhängig von der Zeit t:

$$v(t) = \frac{dh}{dt} = v_0 - gt$$

An der Stelle maximaler Höhe ist die Geschwindigkeit null:

$$\begin{aligned} 0 &= v(t_{max}) = v_0 - gt_{max} \\ t_{\max} &= \frac{v_0}{g} \end{aligned}$$

Die zugehörige Höhe beträgt

$$h_{\max} = h(t_{\max}) = v_0 t_{\max} - \frac{1}{2}gt_{\max}^2 = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Beim Aufprall auf dem Boden ist die Höhe null und $t > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= h(t_a) = v_0 t_a - \frac{1}{2}gt_a^2 \\ 0 &= v_0 - \frac{1}{2}gt_a \\ t_a &= \frac{2v_0}{g} \end{aligned}$$

Die zugehörige Geschwindigkeit beträgt

$$\begin{aligned} v_a &= v(t_a) = v_0 - gt_a \\ &= v_0 - g\frac{2v_0}{g} = v_0 - 2v_0 = -v_0, \end{aligned}$$

d. h. die Aufprallgeschwindigkeit ist genau so groß wie die Abwurfgeschwindigkeit, aber hat die umgekehrte Richtung.

11.5

Die zum Zeitpunkt t (in s) erfasste Kreisfläche beträgt in m^2

$$A(t) = \pi r(t)^2 \qquad \text{mit} \qquad r(t) = 0{,}6 \cdot t.$$

Somit ist

$$A(t) = \pi \cdot (0{,}6 \cdot t)^2 = 0{,}36\pi t^2.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
A(0) &= 0\,[\mathrm{m}^2]\\
A(1) &= 0{,}36\pi \cdot 1^2 = 0{,}36\pi \approx 1{,}13\,[\mathrm{m}^2]\\
A(2) &= 0{,}36\pi \cdot 2^2 = 1{,}44\pi \approx 4{,}52\,[\mathrm{m}^2]\\
A(3) &= 0{,}36\pi \cdot 3^2 = 3{,}24\pi \approx 10{,}18\,[\mathrm{m}^2]\\
A(4) &= 0{,}36\pi \cdot 4^2 = 5{,}76\pi \approx 18{,}10\,[\mathrm{m}^2]\\
A(5) &= 0{,}36\pi \cdot 5^2 = 9{,}00\pi \approx 28{,}27\,[\mathrm{m}^2]\,.
\end{aligned}$$

Die Vergrößerungsraten $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ betragen

$$\begin{aligned}
\frac{A(1)-A(0)}{1} &= 0{,}36\pi \approx 1{,}13 \left[\frac{\mathrm{m}^2}{s}\right]\\
\frac{A(2)-A(1)}{1} &= 1{,}08\pi \approx 3{,}39 \left[\frac{\mathrm{m}^2}{s}\right]\\
\frac{A(3)-A(2)}{1} &= 1{,}80\pi \approx 5{,}65 \left[\frac{\mathrm{m}^2}{s}\right]\\
\frac{A(4)-A(3)}{1} &= 2{,}52\pi \approx 7{,}92 \left[\frac{\mathrm{m}^2}{s}\right]\\
\frac{A(5)-A(4)}{1} &= 3{,}24\pi \approx 10{,}18 \left[\frac{\mathrm{m}^2}{s}\right].
\end{aligned}$$

Die Flächengeschwindigkeit beträgt

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}36\pi \cdot 2t = 0{,}72\pi t \approx 2{,}26t.$$

11.6

a) Durch die Vorrichtung werden die drei Durchschnittsgeschwindigkeiten zwischen den Zeiten des Durchfahrens der drei Lichtschranken gemessen (Lichtschranken 1/2, 2/3, 1/3).

b) Man könnte den Abstand zwischen den Lichtschranken verkleinern, doch dann würden auch die Zeitdifferenzen kleiner und damit die prozentuale Messungenauigkeit größer.

c) Die Geschwindigkeit beim Einfahren in die erste Lichtschranke beträgt

$$v_0 = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 72\,\frac{1\,000\,\text{m}}{3\,600\,\text{s}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Damit ergibt sich für die benötigten Zeiten t_1 und t_2 bis zum Durchqueren der beiden weiteren Lichtschranken:

$$\begin{aligned} s_{1/2} &= v_0 t_{1/2} - \frac{1}{2} a t_{1/2}^2 \\ t_{1/2} &= \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as_{1/2}}}{a} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 2as_{1/2}}}{a} \end{aligned}$$

Dabei ist natürlich die kleinere Zeitspanne maßgebend, d. h. das positive Vorzeichen entfällt. Durch Einsetzen der konkreten Werte $s_1 = 0{,}25\,\text{m}$ und $s_2 = 0{,}5\,\text{m}$ ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{20 - \sqrt{400 - 0{,}5a}}{a} \\ t_2 &= \frac{20 - \sqrt{400 - a}}{a} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich als schnellste Durchschnittsgeschwindigkeit $v_1$zwischen den ersten beiden Lichtschranken und als langsamste Durchschnittsgeschwindigkeit v_2 zwischen den letzten beiden Lichtschranken

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\Delta s}{t_1} = \frac{0{,}25}{\frac{20-\sqrt{400-0{,}5a}}{a}} = \frac{0{,}25a}{20 - \sqrt{400 - 0{,}5a}} \\ v_2 &= \frac{\Delta s}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}25}{\frac{20-\sqrt{400-a}}{a} - \frac{20-\sqrt{400-0{,}5a}}{a}} = \frac{0{,}25a}{\sqrt{400 - 0{,}5a} - \sqrt{400 - a}} \end{aligned}$$

Für eine Ungültigkeit der Messung muss gelten:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1{,}03 v_2 \\ \frac{0{,}25a}{20 - \sqrt{400 - 0{,}5a}} &= 1{,}03 \cdot \frac{0{,}25a}{\sqrt{400 - 0{,}5a} - \sqrt{400 - a}} \end{aligned}$$

Diese Gleichung für a löst man mit einem Computeralgebrasystem. Als Lösung ergibt sich

$$a \approx 44{,}6 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right].$$

11.7

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{p_A - p_E}{4\eta L}(R^2 - r^2)\right) = \frac{d}{dr}\left(\underbrace{\frac{p_A - p_E}{4\eta L}R^2}_{=const.} - \frac{p_A - p_E}{4\eta L}r^2\right) = -\frac{p_A - p_E}{4\eta L}\cdot 2r$$

$$= -\frac{p_A - p_E}{2\eta L}r$$

Abschnitt 11.2 – Der Ableitungsregeln

11.8

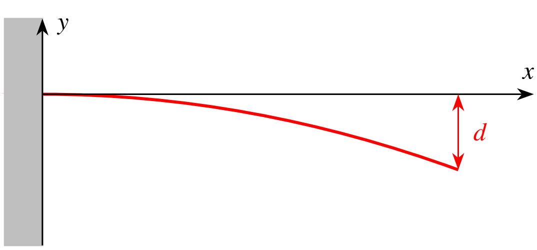
Für den Neigungswinkel $\varphi(x)$ gilt

$$\tan(\varphi(x)) = f'(x) = 18x^2 - 10x + 2$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\tan(\varphi(0)) &= 2 & \varphi &= \arctan(2) \approx 1{,}107 \mathrel{\hat{=}} 63{,}4^\circ \\
\tan(\varphi(1)) &= 10 & \varphi &= \arctan(10) \approx 1{,}471 \mathrel{\hat{=}} 84{,}3^\circ \\
\tan(\varphi(2)) &= 54 & \varphi &= \arctan(54) \approx 1{,}552 \mathrel{\hat{=}} 88{,}9^\circ \\
\tan(\varphi(3)) &= 134 & \varphi &= \arctan(134) \approx 1{,}563 \mathrel{\hat{=}} 89{,}6^\circ
\end{aligned}$$

11.9



$$f(L) = \frac{qL^4}{24EI}\left(-\left(\frac{L}{L}\right)^4 + 4\left(\frac{L}{L}\right)^3 - 6\left(\frac{L}{L}\right)^2\right)$$

$$= \frac{qL^4}{24EI}(-1+4-6) = \frac{qL^4}{24EI}\cdot(-3) = -\frac{qL^4}{8EI}$$

Damit beträgt die Durchbiegung

$$d = |f(L)| = \frac{qL^4}{8EI}$$

Es ist

$$f(x) = \frac{qL^4}{24EI}\left(-\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{L}\right)^2\right) = \frac{qL^4}{24EI}\left(-\frac{1}{L^4}x^4 + \frac{4}{L^3}x^3 - \frac{6}{L^2}x^2\right)$$

und damit

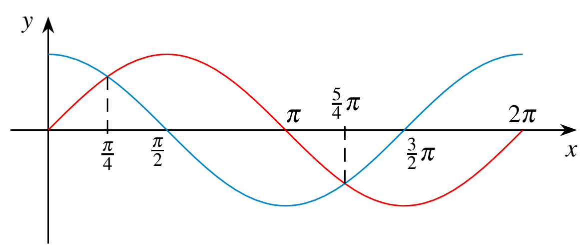
$$f'(x) = \frac{qL^4}{24EI}\left(-\frac{4}{L^4}x^3 + \frac{12}{L^3}x^2 - \frac{12}{L^2}x\right)$$

Die gesuchte Steigung $\tan\varphi$ ergibt sich damit als

$$\begin{aligned}\tan(\varphi) &= f'(L) = \frac{qL^4}{24EI}\left(-\frac{4}{L^4}L^3 + \frac{12}{L^3}L^2 - \frac{12}{L^2}L\right)\\ &= \frac{qL^4}{24EI}\left(-\frac{4}{L} + \frac{12}{L} - \frac{12}{L}\right) = \frac{qL^4}{24EI}\left(-\frac{4}{L}\right) = -\frac{qL^3}{6EI}\end{aligned}$$

11.10

Wegen der Periodizität von sin und cos Beschränkung auf das Intervall $[0,2\pi[$.



Schnittpunkte der beiden Kurven bei

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{5}{4}\pi \qquad \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Es ist

$$(\sin(x))' = \cos(x) \qquad (\cos(x))' = -\sin(x).$$

$x_1 = \frac{\pi}{4}$:
Steigungswinkel α_1 von $\sin x$:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_1) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \alpha_1 &= \arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx 0{,}615 \mathrel{\hat{=}} 35{,}3^\circ\end{aligned}$$

Steigungswinkel β_1 von $\cos x$:

$$\begin{aligned}\tan(\beta_1) &= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \beta_1 &= \arctan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx -0{,}615 \mathrel{\hat{=}} -35{,}3^\circ\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Schnittwinkel φ_1 zwischen $\sin x$ und $\cos x$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha_1 - \beta_1 = \arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx 0{,}615 - (-0{,}615)\\ &= 1{,}230 \mathrel{\hat{=}} 70{,}5^\circ.\end{aligned}$$

$x_2 = \frac{5}{4}\pi$:
Aufgrund von

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x) \qquad\qquad \cos(x+\pi) = -\cos(x)$$

ergibt sich: Steigungswinkel α_2 von $\sin(x)$:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_2) &= \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \alpha_2 &= \arctan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx -0{,}615 \mathrel{\hat{=}} -35{,}3^\circ\end{aligned}$$

Steigungswinkel β_2 von $\cos(x)$:

$$\begin{aligned}\tan(\beta_2) &= -\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \beta_1 &= \arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx 0{,}615 \mathrel{\hat{=}} 35{,}3^\circ\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Schnittwinkel φ_2 zwischen $\sin x$ und $\cos x$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \alpha_2 - \beta_2 = \arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \approx -0{,}615 - 0{,}615\\ &= -1{,}230 \mathrel{\hat{=}} -70{,}5^\circ.\end{aligned}$$

11.11

a) $(f\cdot g\cdot h)' = ((f\cdot g)\cdot h)' = (f\cdot g)'\cdot h+(f\cdot g)\cdot h' = \left(f'\cdot g+f\cdot g'\right)\cdot h+f\cdot g\cdot h'$
$= f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$

b) $(f\cdot g)'' = \left((f\cdot g)'\right)' = \left(f'\cdot g+f\cdot g'\right)' = \left(f'\cdot g\right)'+\left(f\cdot g'\right)'$
$= f''\cdot g+f'\cdot g'+f'\cdot g'+f\cdot g'' = f''g+2f'g'+fg''$

11.12

a) $$(\cos(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(\frac{(x+\Delta x)+x}{2}\right)\sin\left(\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\right)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} -2\sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \underbrace{-\sin\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)}_{\to \sin(x)}\cdot\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\to 1} = -\sin(x)$$

b) $$(\cot(x))' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{\sin(x)\,(\cos(x))'-\cos(x)\,(\sin(x))'}{\sin^2(x)}$$
$$= \frac{\sin(x)\cdot(-\sin(x))-\cos(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x}$$
$$= -\left(\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)}+\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\right) = -\left(1+\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2\right) = -\left(1+\cot^2(x)\right)$$
$$= -\frac{\overbrace{\sin^2(x)+\cos^2(x)}^{=1}}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

c) $$(\cosh(x))' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\cdot(-1)\right) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$= \sinh(x)$$

d) $$(\coth(x))' = \left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\right)' = \frac{\sinh(x)\cdot(\cosh(x))'-\cosh(x)\cdot(\sinh(x))'}{\sinh^2(x)}$$
$$= \frac{\sinh^2(x)-\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = 1-\left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\right)^2 = 1-\coth^2(x)$$
$$= \frac{-\overbrace{\left(-\sinh^2(x)+\cosh^2(x)\right)}^{=1}}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$$

e) $y = \operatorname{arccot}(x)$ ist Umkehrfunktion von $x = \cot(y)$.

$$(\operatorname{arccot}(x))' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\cot(y)}{dy}} = \frac{1}{-(1+\cot^2(y))} = -\frac{1}{1+x^2}$$

f) $y = \arccos(x)$ ist Umkehrfunktion von $x = \cos(y)$.

$$(\arccos(x))' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\cos(y)}{dy}} = \frac{1}{-\sin(y)} = -\frac{1}{\underbrace{\sin(y)}_{\geq 0,\ \text{da } 0 \leq y \leq \pi}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

11.13

a) $\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \sqrt{x} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$

Alternative:

$y = x^2 \cdot \sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$

b) $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

c) $\frac{dy}{dx} = \left(x^2\right)' \cdot (\sin(x) \cdot \cos(x)) + x^2 \cdot (\sin(x) \cdot \cos(x))'$

$= 2x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + x^2 \cdot (\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)))$

$= 2x\sin(x)\cos(x) + x^2\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+3x) \cdot 2x - x^2 \cdot 3}{(1+3x)^2} = \frac{2x + 6x^2 - 3x^2}{(1+3x)^2} = \frac{2x+3x^2}{(1+3x)^2}$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - (1-\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$

$= -\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

h) $\frac{dy}{dx} = 4\left(2\sqrt{x}+x^3\right)^3 \cdot \left(2\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2\right) = 4\left(2\sqrt{x}+x^3\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3x^2\right)$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\sin(2x)}} \cdot (\sin(2x))' = \frac{1}{2\sqrt{\sin(2x)}} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}$

j) $\frac{dy}{dx} = \left(\tan^{\frac{1}{3}}(3x)\right)' = \frac{1}{3}\tan^{-\frac{2}{3}}(3x)\cdot\left(1+\tan^2(3x)\right)\cdot 3 = \frac{1+\tan^2(3x)}{\tan^{\frac{2}{3}}(3x)} = \frac{1+\tan^2(3x)}{\sqrt[3]{\tan^2(3x)}}$

k) $\frac{dy}{dx} = 1\cdot\sqrt{x^4+10}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^4+10}}\cdot 4x^3 = \sqrt{x^4+10}+\frac{2x^4}{\sqrt{x^4+10}}$

l) $\frac{dy}{dx} = \cos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos\left(\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\cdot\left(-\sin\left(\sqrt{x}\right)\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
$= \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2}$

m) $\frac{dy}{dx} = e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)$

n) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(\ln(x))}\cdot\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$

o) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

p) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\sqrt{x}^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

q) $\frac{dy}{dx} = \left(\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = -\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

r) $\frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{(1-x)\cdot 1-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}$
$= \frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{\frac{(1-x)+(1+x)}{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}$
$= \frac{1-x}{2}\cdot\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

s) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}\cdot 1 - x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1+x^2}$
$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1+x^2} - \sqrt{\frac{1}{\frac{(1+x^2)-x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
$= \frac{1}{1+x^2} - \sqrt{\frac{1+x^2}{1}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

t) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}} \cdot \frac{(1-\sin(x))\cdot\cos(x)-(1+\sin(x))\cdot(-\cos(x))}{(1-\sin(x))^2}$$
$$= \frac{1}{2\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}} \cdot \frac{\cos(x)-\sin(x)\cos(x)+\cos(x)+\sin(x)\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$$
$$= \frac{1-\sin(x)}{2(1+\sin(x))} \cdot \frac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))^2} = \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))(1-\sin(x))}$$
$$= \frac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

u) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}} \cdot \frac{(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b})\cdot\frac{1}{2\sqrt{ax+b}}\cdot a-(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b})\cdot\frac{1}{2\sqrt{ax+b}}\cdot a}{(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b})^2}$$
$$= \frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\left((\sqrt{ax+b}+\sqrt{b})-(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b})\right)\cdot a}{\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}\right)^2\cdot 2\sqrt{ax+b}}$$
$$= \frac{2\sqrt{b}\cdot a}{\left(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}\right)\cdot 2\sqrt{ax+b}}$$
$$= \frac{a\sqrt{b}}{((ax+b)-b)\cdot\sqrt{ax+b}} = \frac{a\sqrt{b}}{ax\cdot\sqrt{ax+b}} = \frac{\sqrt{b}}{x\cdot\sqrt{ax+b}}$$

11.14

a) $y = a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$
$$\frac{dy}{dx} = e^{x\cdot\ln(a)}\cdot\ln(a) = a^x\ln(a)$$

b) $y = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x}$$

c) $y = x^x = e^{x\cdot\ln(x)}$
$$\frac{dy}{dx} = e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\left(1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}\right) = e^{x\cdot\ln(x)}\cdot(\ln(x)+1) = x^x(\ln(x)+1)$$

d) $y = \log_x(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = 1 \frac{dy}{dx} = 0$

11.15

Es ist:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \dot{s}(t) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{gt}{v_0}\right)} \cdot \sinh\left(\frac{gt}{v_0}\right) \cdot \frac{g}{v_0} = v_0 \cdot \frac{\sinh\left(\frac{gt}{v_0}\right)}{\cosh\left(\frac{gt}{v_0}\right)} = v_0 \cdot \tanh\left(\frac{gt}{v_0}\right) \\
a(t) &= \dot{v}(t) = v_0 \cdot \left(1 - \tanh^2\left(\frac{gt}{v_0}\right)\right) \cdot \frac{g}{v_0} = g \cdot \left(1 - \tanh^2\left(\frac{gt}{v_0}\right)\right)
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - \overbrace{e^{-2x}}^{\to 0}}{1 + \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} v(t) &= \lim_{t\to\infty} v_0 \cdot \underbrace{\tanh\left(\frac{gt}{v_0}\right)}_{\to 1} = v_0 \\
\lim_{t\to\infty} a(t) &= \lim_{t\to\infty} g \cdot \left(1 - \underbrace{\tanh^2\left(\frac{gt}{v_0}\right)}_{\to 1^2}\right) = g \cdot (1-1) = 0
\end{aligned}$$

Die Konstante v_0 ist die asymptotische Endgeschwindigkeit des Körpers.

11.16

Der Entladestrom beträgt

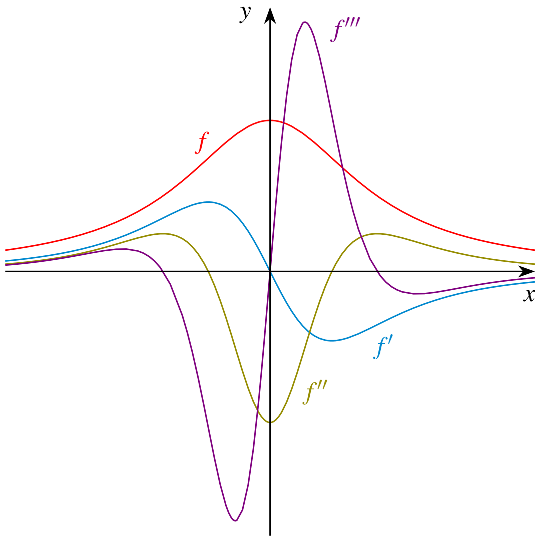
$$I(t) = \dot{Q}(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

12 Anwendungen der Differenzialrechnung

Abschnitt 12.1 – Monotonieuntersuchungen

12.1

b)



12.2

a) Es ist äquivalent:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x+6 \gtrless 0 \\ x &\lessgtr 3 \end{aligned}$$

Also gilt:

f ist monoton wachsend,wenn $x < 3$
f ist monoton fallend,wenn $x > 3$

b) Es ist äquivalent:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - 1 \gtrless 0 \\ x &\gtrless 0 \end{aligned}$$

Also gilt:

f ist monoton wachsend,wenn $x > 0$
f ist monoton fallend,wenn $x < 0$

c) Es ist äquivalent:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \sin(x) \gtrless 0$$
$$\sin(x) \lessgtr \frac{1}{2}$$

Also gilt:

$$f \text{ ist monoton wachsend,wenn } -\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$f \text{ ist monoton fallend,wenn } \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

d) Es ist äquivalent:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \gtrless 0$$
$$x \lessgtr 0$$

Also gilt:

f ist monoton wachsend,wenn $x < 0$
f ist monoton fallend,wenn $x > 0$

e) Es ist

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} > 0.$$

Also ist

f ist monoton wachsend auf dem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

f) Es ist:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) - x & \text{für} \quad x > 0 \\ \ln(-x) - x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$
$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{x} - 1 & \text{für} & x > 0 \\ -\frac{1}{-x} - 1 & \text{für} & x < 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{x} - 1$$

Weiter ist äquivalent:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \gtrless 0$$
$$\frac{1}{x} \gtrless 1$$

Also gilt:

f ist monoton wachsend,wenn $0 < x < 1$
f ist monoton fallend,wenn $x < 0$ oder $x > 1$

Abschnitt 12.2 – Extremwertprobleme

12.3

a) Bestimmung der stationären Stellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2+6x \overset{!}{=} 0 \\ x\cdot(3x+6) &= 0 \\ x_1 = 0, \qquad x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Weiter:

$$f''(x) = 6x+6$$

Damit:

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(0) = 6\cdot 0+6 = 6 > 0 \\ f''(x_2) &= f''(-2) = 6\cdot(-2)+6 = -12+6 = -6 < 0 \end{aligned}$$

Also liegt an der Stelle $x_1 = 0$ ein lokales Minimum vor mit dem Wert

$$f(x_1) = f(0) = 0^3+3\cdot 0^2+1$$

und an der Stelle $x_2 = -2$ ein lokales Maximum mit dem Wert

$$f(x_2) = f(-2) = (-2)^3+3\cdot(-2)^2+1 = -8+12+1 = 5.$$

Betrachtung der „Ränder“:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3+3x^2+1) = \lim_{x\to\infty} x^3\cdot\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = \infty\cdot 1 = \infty,$$

d. h. das lokale Maximum ist kein absolutes Maximum.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2+1) = \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = -\infty\cdot 1 = -\infty,$$

d. h. das lokale Minimum ist kein absolutes Minimum.

b) Bestimmung der stationären Stellen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x \cdot e^x + (x^2-3)e^x = (x^2+2x-3)e^x \stackrel{!}{=} 0 \\
x^2+2x-3 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = -1\pm 2 \\
x_1 &= 1, \qquad x_2 = -3
\end{aligned}$$

Weiter:

$$f''(x) = (2x+2)\cdot e^x + (x^2+2x-3)e^x = (x^2+4x-1)e^x$$

Damit:

$$\begin{aligned}
f''(x_1) &= f''(1) = (1^2+4\cdot 1-1)e^1 = 6e > 0 \\
f''(x_2) &= f''(-3) = ((-3)^2+4\cdot(-3)-1)e^{-3} = -\frac{2}{e^3} < 0
\end{aligned}$$

Also liegt an der Stelle $x_1 = 1$ ein lokales Minimum vor mit dem Wert

$$f(x_1) = f(1) = (1^2-3)e^1 = -2e$$

und an der Stelle $x_2 = -3$ ein lokales Maximum mit dem Wert

$$f(x_2) = f(-3) = ((-3)^2-3)e^{-3} = \frac{6}{e^3}.$$

Betrachtung der „Ränder“:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^2-3)e^x = \lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)e^x = \infty\cdot 1\cdot\infty = \infty,$$

d. h. das lokale Maximum ist kein absolutes Maximum.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\underbrace{(x^2-3)}_{\geq 0}\underbrace{e^x}_{\geq 0} \geq 0,$$

d. h. das lokale Minimum ist ein absolutes Minimum.

c) Bestimmung der stationären Stellen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} - 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{1-2\ln(x)}{x} \overset{!}{=} 0 \\
1-2\ln(x) &= 0 \\
\ln(x) &= \frac{1}{2} \\
x &= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \qquad \text{stationäre Stelle}
\end{aligned}
$$

Weiter:

$$
f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + \ln(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} + 2\frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{-3+2\ln(x)}{x^2}
$$

Damit:

$$
f''(\sqrt{e}) = f''(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{-3+2\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{(e^{\frac{1}{2}})^2} = \frac{-3+2\cdot\frac{1}{2}}{e} = \frac{-2}{e} < 0
$$

Also liegt an der Stelle $x = \sqrt{e}$ ein lokales Maximum vor mit dem Wert

$$
f(\sqrt{e}) = f(e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) - \left(\ln(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.
$$

Betrachtung der „Ränder“:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\ln(x) - (\ln(x))^2\right) = \lim_{x\to\infty} \ln(x)\cdot(1-\ln(x)) = -\infty \\
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+}\left(\ln(x) - (\ln(x))^2\right) = \lim_{x\to 0+} \ln(x)\cdot(1-\ln(x)) = -\infty,
\end{aligned}
$$

d. h. das lokale Maximum ist ein absolutes Maximum.

d) Bestimmung der stationären Stellen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x^2-4)(2x+4)-(x^2+4x-21)(2x)}{(x^2-4)^2}\\
&= \frac{2x^3+4x^2-8x-16-2x^3-8x^2+42x}{(x^2-4)^2} = \frac{-4x^2+34x-16}{(x^2-4)^2} \stackrel{!}{=} 0\\
-4x^2+34x-16 &= 0\\
2x^2-17x+8 &= 0\\
x_{1/2} &= \frac{17\pm\sqrt{(-17)^2-4\cdot2\cdot8}}{2\cdot2} = \frac{17\pm\sqrt{289-64}}{4} = \frac{17\pm\sqrt{225}}{4} = \frac{17\pm15}{4}\\
x_1 &= 8, \qquad x_2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Weiter:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x^2-4)^2(-8x+34)-(-4x^2+34x-16)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4}\\
&= \frac{(x^2-4)(-8x+34)-(-4x^2+34x-16)4x}{(x^2-4)^3}\\
&= \frac{-8x^3+34x^2+32x-136+16x^3-136x^2+64x}{(x^2-4)^3}\\
&= \frac{8x^3-102x^2+96x-136}{(x^2-4)^3}
\end{aligned}
$$

Damit:

$$
\begin{aligned}
f''(x_1) &= f''(8) = \frac{8\cdot8^3-102\cdot8^2+96\cdot8-136}{(8^2-4)^3} = \frac{4\,096-6\,528+768-136}{60^3}\\
&= \frac{-1\,800}{216\,000} = -\frac{1}{120} < 0\\
f''(x_2) &= f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8\cdot\frac{1}{2^3}-102\cdot\frac{1}{2^2}+96\cdot\frac{1}{2}-136}{(\frac{1}{2^2}-4)^3} = \frac{1-\frac{51}{2}+48-136}{\left(-\frac{15}{4}\right)^3}\\
&= \frac{-\frac{225}{2}}{-\frac{3\,375}{64}} = \frac{225\cdot64}{3\,375\cdot2} = \frac{32}{15} > 0
\end{aligned}
$$

Also liegt an der Stelle $x_1 = 8$ ein lokales Maximum vor mit dem Wert

$$
f(x_1) = f(8) = \frac{8^2+4\cdot8-21}{8^2-4} = \frac{64+32-21}{60} = \frac{75}{60} = \frac{5}{4}.
$$

und an der Stelle $x_2 = \frac{1}{2}$ ein lokales Maximum mit dem Wert

$$
f(x_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2}-21}{\frac{1}{2^2}-4} = \frac{\frac{1}{4}+2-21}{\frac{1}{4}-4} = \frac{-\frac{75}{4}}{-\frac{15}{4}} = \frac{75\cdot4}{15\cdot4} = 5.
$$

Betrachtung des Verhaltens bei der Definitionslücke $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{\overbrace{x^2+4x-21}^{\to -9}}{\underbrace{x^2-4}_{0+}} = -\infty,$$

d. h. das lokale Minimum ist kein absolutes Minimum.

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-+} \frac{\overbrace{x^2+4x-21}^{\to -9}}{\underbrace{x^2-4}_{0-}} = \infty,$$

d. h. das lokale Maximum ist kein absolutes Maximum. Eine Untersuchung der zweiten Definitionslücke $x = -2$ und der „Ränder“ $x = \pm\infty$ ist damit überflüssig.

e) Bestimmung der stationären Stellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) + e^{-x}(-\sin(x)+\cos(x)) \\ &= e^{-x}(-\cos(x)-\sin(x)-\sin(x)+\cos(x)) = -2e^{-x}\sin(x) \overset{!}{=} 0 \\ \sin(x) &= 0 \\ x &= n\pi \qquad (n\in\mathbb{Z}) \qquad \text{stationäre Stellen} \end{aligned}$$

Weiter:

$$f''(x) = 2e^{-x}\sin(x) - 2e^{-x}\cos(x) = 2e^{-x}(\sin(x)-\cos(x))$$

Damit:

$$\begin{aligned} f''(n\pi) &= 2e^{-n\pi}(\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}-\cos(n\pi)) = -2e^{-n\pi}\cos(n\pi) \\ &= \begin{cases} -2e^{-n\pi}\cdot 1 = -2e^{-n\pi} < 0 & \text{für } n = 2k \text{ gerade} \\ -2e^{-n\pi}\cdot(-1) = 2e^{-n\pi} > 0 & \text{für } n = 2k+1 \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Wir haben also für $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) lokale Maxima mit den Werten

$$f(2k\pi) = e^{-2k\pi}(\cos(2k\pi)+\sin(2k\pi)) = e^{-2k\pi}(1+0) = e^{-2k\pi}.$$

Für $x = (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) haben wir lokale Minima mit den Werten

$$\begin{aligned} f((2k+1)\pi) &= e^{-(2k+1)\pi}(\cos((2k+1)\pi)+\sin((2k+1)\pi)) \\ &= e^{-(2k+1)\pi}(-1+0) = -e^{-(2k+1)\pi}. \end{aligned}$$

Die Extrema sind allesamt nicht absolut, da stets das nächst weiter links gelegene Maximum/Minimum größer/kleiner ist:

$$\begin{aligned} f(2(k-1)\pi) &= e^{-2(k-1)\pi} = e^{-2k\pi+2\pi} = e^{-2k\pi}\underbrace{e^{2\pi}}_{>1} \\ &> e^{-2k\pi} = f(2k\pi) \\ f((2(k-1)+1)\pi) &= -e^{-(2(k-1)+1)\pi} = -e^{-(2k+1)\pi+2\pi} = -e^{-(2k+1)\pi}\underbrace{e^{2\pi}}_{>1} \\ &< -e^{-(2k+1)\pi} = f((2k+1)\pi) \end{aligned}$$

f) Es ist $x \in [0{,}4]$. Damit:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\frac{1}{2\sqrt{4-x}} \cdot (-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x} - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{4-x}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sqrt{4-x} - 2\sqrt{x} = 0$$

$$\sqrt{4-x} = 2\sqrt{x}$$

$$4 - x = 4x$$

$$5x = 4$$

$$x = \frac{4}{5} \qquad \text{stationäre Stelle}$$

Weiter:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' - \left((4-x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(4-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1)$$

$$= -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Damit:

$$f''\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{\underbrace{4 \cdot (\frac{4}{5})^{\frac{3}{2}}}_{>0}} - \frac{1}{\underbrace{2(4-\frac{4}{5})^{\frac{3}{2}}}_{>0}} < 0,$$

d. h. an der Stelle $x = \frac{4}{5}$ liegt ein lokales Maximum vor mit dem Wert

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = \sqrt{\frac{4}{5}} + 2\sqrt{4 - \frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Betrachtung der Ränder, die dieses Mal zum Definitionsbereich gehören: Zwar sind die Ableitungen an den Rändern nicht definiert, doch ist

$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{2\underbrace{\sqrt{x}}_{\to 0+}} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} \right) = \infty - \frac{1}{2} = \infty,$$

d. h. am linken Rand $x = 0$ liegt ein lokales Minimum vor mit dem Wert

$$f(0) = \sqrt{(0)} + 2\sqrt{4-0} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ferner ist

$$\lim_{x \to 4-} f'(x) = \lim_{x \to 4-} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\underbrace{\sqrt{4-x}}_{\to 0+}} \right) = \frac{1}{4} - \infty = -\infty,$$

d. h. am rechten Rand $x = 4$ liegt ein lokales Minimum vor mit dem Wert

$$f(4) = \sqrt{4} + 2\sqrt{4-4} = 2.$$

Vergleich der lokalen Extremalwerte liefert: Das absolute Maximum liegt an der Stelle $x = \frac{4}{5}$, das absolute Minimum an der Stelle $x = 4$.

12.4

a) Gesucht ist das Maximum der Funktion

$$f(x) = x \cdot (12 - x) = 12x - x^2.$$

Bestimmung der stationären Stellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12 - 2x \stackrel{!}{=} 0 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Weiter ist

$$f''(x) = -2 < 0$$

insbesondere an der stationären Stelle, d. h. an der Stelle $x = 6$ liegt ein lokales Maximum vor mit dem Wert

$$f(6) = 6 \cdot (12 - 6) = 36.$$

Betrachtung der Ränder:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \cdot 12 = 0 < 36 \\ f(12) &= 12 \cdot 0 = 0 < 36 \end{aligned}$$

Also wird das Produkt maximal für $x = 6$ und damit $12 - x = 6$.

b) Gesucht ist das Minimum der Funktion

$$f(x) = x^2 + (12 - x)^2 = x^2 + 144 - 24x + x^2 = 2x^2 - 24x + 144.$$

Bestimmung der stationären Stellen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x - 24 \stackrel{!}{=} 0 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Weiter ist

$$f''(x) = 4 > 0$$

insbesondere an der stationären Stelle, d. h. an der Stelle $x = 6$ liegt ein lokales Minimum vor mit dem Wert

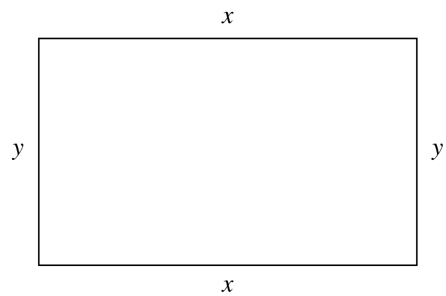
$$f(6) = 6^2 + (12 - 6)^2 = 72.$$

Betrachtung der Ränder:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 + 12^2 = 144 > 72 \\ f(12) &= 12^2 + 0^2 = 144 > 72 \end{aligned}$$

Also wird die Summe der Quadrate minimal für $x = 6$ und damit $12 - x = 6$.

12.5



a) Mit dem Umfang U gilt:

$$\begin{aligned} U &= 2x+2y \\ y &= \frac{U}{2}-x \end{aligned}$$

Gesucht ist also das Maximum der Funktion

$$A(x) = x\cdot\left(\frac{U}{2}-x\right) = \frac{U}{2}x-x^2.$$

Bestimmung der stationären Stellen:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{U}{2}-2x \stackrel{!}{=} 0 \\ x &= \frac{U}{4} \end{aligned}$$

Weiter ist

$$A''(x) = -2 < 0$$

insbesondere an der stationären Stelle, d. h. an der $x = \frac{U}{4}$ liegt ein lokales Maximum vor mit dem Wert

$$A\left(\frac{U}{4}\right) = \frac{U}{4}\cdot\left(\frac{U}{2}-\frac{U}{4}\right) = \frac{U^2}{16}.$$

Betrachtung der „Ränder“:

$$\begin{aligned} A(0) &= 0\cdot\left(\frac{U}{2}-0\right) = 0 < \frac{U^2}{16} \\ A\left(\frac{U}{2}\right) &= \frac{U}{2}\cdot\left(\frac{U}{2}-\frac{U}{2}\right) = 0 < \frac{U^2}{16} \end{aligned}$$

Also wird der Flächeninhalt maximal für $x = \frac{U}{4}$ und damit $y = \frac{U}{2} - x = \frac{U}{4}$, also im Fall eines Quadrats.

b) Mit dem Flächeninhalt A gilt:

$$\begin{aligned} A &= xy \\ y &= \frac{A}{x} \end{aligned}$$

Gesucht ist also das Minimum der Funktion

$$U(x) = 2x + 2\frac{A}{x}.$$

Bestimmung der stationären Stellen:

$$\begin{aligned} U'(x) &= 2 - 2\frac{A}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \\ x &= \sqrt{A} \end{aligned}$$

Weiter ist

$$U''(x) = 4\frac{A}{x^3} > 0$$

insbesondere an der stationären Stelle, d. h. an der Stelle $x = \sqrt{A}$ liegt ein lokales Minimum vor mit dem Wert

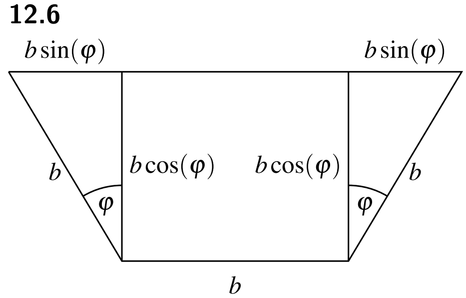
$$U\left(\sqrt{A}\right) = 2\sqrt{A} + 2\frac{A}{\sqrt{A}} = 4\sqrt{A}.$$

Betrachtung der „Ränder“:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} U(x) &= \lim_{x\to 0+} \left(2x + 2\frac{A}{x}\right) = \infty \\ \lim_{x\to\infty} U(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(2x + 2\frac{A}{x}\right) = \infty \end{aligned}$$

Also wird der Umfang minimal für $x = \sqrt{A}$ und damit $y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$, also im Fall eines Quadrats.

12.6



Flächeninhalt des Querschnitts:

$$A(\varphi) = b \cdot b\cos(\varphi) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b\cos(\varphi) \cdot b\sin(\varphi) = b^2(\cos(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\varphi))$$

Bestimmung des maximalen Querschnitts:

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{d\varphi} &= b^2(-\sin(\varphi) + (-\sin(\varphi))\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\cos(\varphi)) \\
&= b^2\left(-\sin(\varphi) - \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right) \\
&= b^2\left(-\sin(\varphi) - \sin^2(\varphi) + 1 - \sin^2(\varphi)\right) \\
&= -b^2\left(2\sin^2(\varphi) + \sin(\varphi) - 1\right) \\
&\stackrel{!}{=} 0 \\
2\sin^2(\varphi) + \sin(\varphi) - 1 &= 0 \\
\sin(\varphi_{1/2}) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}
\end{aligned}$$

Stationäre Stellen:

$$\begin{aligned}
\sin(\varphi_1) &= \frac{1}{2} && \text{also } \varphi_1 = \frac{\pi}{6} \\
\sin(\varphi_2) &= -1 && \text{unmöglich, da } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Die einzig stationäre Stelle ist also $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2A}{d\varphi^2} &= -b^2(4\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \cos(\varphi)) \\
\frac{d^2A}{d\varphi^2}\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -b^2\left(4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = -b^2\left(4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\
&= -\frac{3}{2}\sqrt{3}b^2 < 0
\end{aligned}$$

An der stationären Stelle liegt ein lokales Maximum des Flächeninhalt vor mit dem Wert

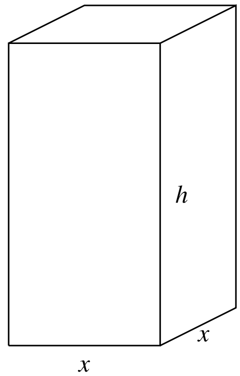
$$A\left(\frac{\pi}{6}\right) = b^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = b^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}b^2.$$

Betrachtung der Ränder:

$$\begin{aligned}
A(0) &= b^2(\cos(0) + \cos(0)\sin(0)) = b^2(1+0) = b^2 < \frac{3}{4}\sqrt{3}b^2 \\
A\left(\frac{\pi}{2}\right) &= b^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = b^2(0+0) = 0 < \frac{3}{4}\sqrt{3}b^2
\end{aligned}$$

Das gefundene lokale Maximum liefert also den absolut maximalen Querschnitt.

12.7



Alle Berechnungen erfolgen in der Einheit cm. Mit der Breite x und der Höhe h der Verpackung ergibt sich:

$$V = x^2 \cdot h = 1\,000$$
$$h = \frac{1\,000}{x^2}$$

Damit beträgt die zu minimierende Oberfläche:

$$A(x) = 2 \cdot 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{1\,000}{x^2} = 4x^2 + \frac{4\,000}{x}$$

Bestimmung der stationären Stellen:

$$A'(x) = 8x - \frac{4\,000}{x^2} \stackrel{!}{=} 0$$
$$x^3 = 500$$
$$x = \sqrt[3]{500} = 5\sqrt[3]{4}$$

Weiter ist:

$$A''(x) = 8 + \frac{8\,000}{x^3}$$
$$A''\left(\sqrt[3]{500}\right) = 8 + \frac{8\,000}{500} = 24 > 0$$

Damit haben wir ein lokales Minimum der Oberfläche bei der Breite

$$x_{opt} = 5\sqrt[3]{4} \approx 7{,}94\,[\mathrm{cm}]$$

und der Höhe

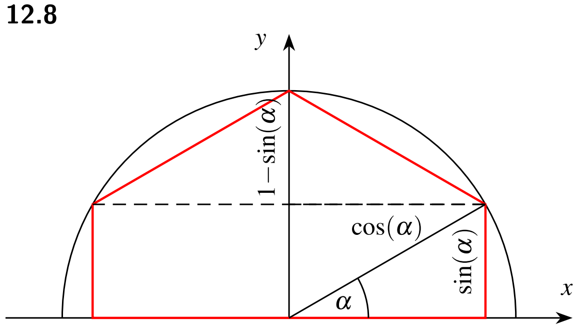
$$h_{opt} = \frac{1\,000}{x_{opt}^2} = \frac{1\,000}{500^{\frac{2}{3}}} = 10\sqrt[3]{4} \approx 15{,}87\,[\mathrm{cm}].$$

Betrachtung der „Ränder“:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} A(x) &= \lim_{x\ to0+} \left(4x^2 + \frac{4\,000}{x}\right) = \infty \\
\lim_{x\to\infty} U(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(4x^2 + \frac{4\,000}{x}\right) = \infty
\end{aligned}$$

Also wird der endliche Wert der Oberfläche $A_{opt} = 4x_{opt}^2 + \frac{4\,000}{x_{opt}}$ (der genaue Wert ist nicht gefragt) für $x \to 0+$ und $x \to \infty$ nicht unterboten. Die gefundene Breite x_{opt} und Höhe h_{opt} liefern also die minimale Oberfläche.

12.8



Flächeninhalt abhängig vom Winkel α:

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= A_{\text{Rechteck}} + A_{\text{Dreieck}} \\
&= 2\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\cdot 2\cos(\alpha)\cdot(1-\sin(\alpha)) \\
&= 2\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) + \cos(\alpha) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) \\
&= \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) + \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Suche nach den lokalen Extrema:

$$\begin{aligned}
A'(\alpha) &= (-\sin(\alpha))\cdot\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\alpha) \\
&= -\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) - \sin(\alpha) \\
&= -\sin^2(\alpha) + \left(1 - \sin^2(\alpha)\right) - \sin(\alpha) \\
&= -2\sin^2(\alpha) - \sin(\alpha) + 1 \\
&\overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Lösung:

$$\sin(\alpha_{1/2}) = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-4} = -\frac{1 \pm 3}{4}$$

Stationäre Stellen:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1) &= -1 && \text{unmöglich, da } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \sin(\alpha_2) &= \frac{1}{2} && \Longrightarrow \alpha_2 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Die einzig stationäre Stelle ist also $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} A''(\alpha) &= -4\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha) \\ A''\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} < 0 \end{aligned}$$

An der stationären Stelle liegt also ein lokales Maximum vor mit dem Wert

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}299.$$

Anteil der ausgefüllten Halbkreisfläche:

$$\frac{A\left(\frac{\pi}{6}\right)}{A_{\text{Halbkreis}}} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}827 = 82{,}7\,\%$$

Überprüfung, ob der Flächeninhalt bei der Annäherung an die Ränder überboten wird:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\to 0} A(\alpha) &= \lim_{\alpha\to 0}(\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) = \cos(0)\sin(0) + \cos(0) = 1\cdot 0 + 1 \\ &= 1 < \frac{3}{4}\sqrt{3} \\ \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} A(\alpha) &= \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}(\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\cdot 1 + 0 \\ &= 0 < \frac{3}{4}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Das gefundene lokale Maximum ist also sogar das absolute Maximum des Flächeninhalts.

12.9

Zu maximieren ist die Funktion

$$P(R) = \frac{RU_0^2}{(R_i+R)^2}.$$

Bestimmung der stationären Stellen:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(R_i+R)^2U_0^2 - RU_0^2 \cdot 2(R_i+R)}{(R_i+R)^4} = \frac{(R_i+R)U_0^2 - 2RU_0^2}{(R_i+R)^3} = \frac{(R_i-R)U_0^2}{(R_i+R)^3} \stackrel{!}{=} 0$$
$$R = R_i$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{dR^2} &= \frac{(R_i+R)^3 \cdot (-U_0^2) - (R_i-R)U_0^2 \cdot 3(R_i+R)^2}{(R_i+R)^4}\\ &= \frac{-U_0^2(R_i+R) - 3U_0^2(R_i-R)}{(R_i+R)^4} = \frac{2U_0^2(R-2R_i)}{(R_i+R)^4}\end{aligned}$$
$$\frac{d^2P}{dR^2}(R_i) = \frac{-2U_0^2R_i}{(2R_i)^4} < 0$$

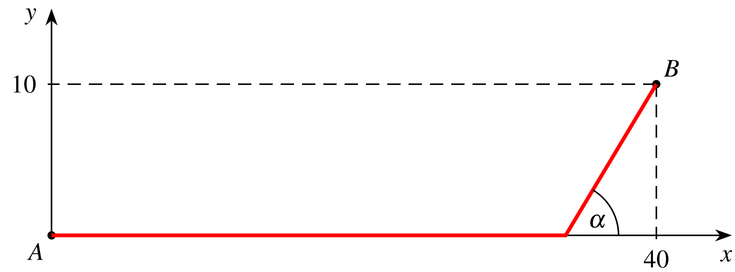
Also liegt für $R = R_i$ ein lokales Maximum der Leistung vor. An den "Rändern"gilt:

$$\lim_{R\to 0} P(R) = \lim_{R\to 0} \frac{RU_0^2}{(R_i+R)^2} = 0$$
$$\lim_{R\to\infty} P(R) = \lim_{R\to\infty} \frac{RU_0^2}{(R_i+R)^2} = \lim_{R\to\infty} \frac{U_0^2}{\frac{R_i^2}{R} + 2R_i + R} = 0$$

Damit wird die endliche Leistung dort nicht überboten, d. h. für $R = R_i$ wird die maximale Leistung entnommen.

12.10

a)



b) Die Wegstrecke auf der Straße sei x. Dann beträgt nach dem Satz des Pythagoras die Wegstrecke im Gelände

$$\sqrt{(40-x)^2+10^2} = \sqrt{(40-x)^2+100}$$

Benötigte Zeit T in Stunden, wenn der Geländewagen an der Stelle x abbiegt:

$$T(x) = \frac{x}{80} + \frac{\sqrt{(40-x)^2+100}}{40}$$

Berechnung der stationären Stellen von $T(x)$:

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{1}{80} + \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(40-x)^2+100}} \cdot 2(40-x) \cdot (-1) \\ &= \frac{\sqrt{(40-x)^2+100} - 2(40-x)}{80\sqrt{(40-x)^2+100}} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus:

$$\begin{aligned} \sqrt{(40-x)^2+100} - 2(40-x) &= 0 \\ \sqrt{(40-x)^2+100} &= 2(40-x) \\ (40-x)^2+100 &= 4(40-x)^2 \\ 3(40-x)^2 &= 100 \\ (40-x)^2 &= \frac{100}{3} \\ 40-x &= \sqrt{\frac{100}{3}} \\ x &= 40 - \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 34{,}226\,[\mathrm{km}] \end{aligned}$$

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
T''(x) &= -\frac{40\sqrt{(40-x)^2+100}\cdot(-1)-(40-x)\cdot\frac{20}{\sqrt{(40-x)^2+100}}\cdot 2(40-x)\cdot(-1)}{1\,600\,((40-x)^2+100)}\\
&= -\frac{-40\sqrt{(40-x)^2+100}+\frac{40(40-x)^2}{\sqrt{(40-x)^2+100}}}{1\,600\,((40-x)^2+100)}\\
&= -\frac{-40((40-x)^2+100)+40(40-x)^2}{1\,600\,((40-x)^2+100)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -\frac{-4\,000}{1\,600\,((40-x)^2+100)^{\frac{3}{2}}}\\
&= \frac{4\,000}{1\,600\,((40-x)^2+100)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
T''\left(40-\frac{10}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\,000}{1\,600\left(\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2+100\right)^{\frac{3}{2}}} > 0.
$$

Es handelt sich bei der stationären Stelle also um ein lokales Minimum der Zeit mit dem Wert

$$
\begin{aligned}
T\left(40-\frac{10}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{40-\frac{10}{\sqrt{3}}}{80}+\frac{\sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2+100}}{40} = \frac{40\sqrt{3}-10}{80\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{\frac{100}{3}+100}}{40}\\
&= \frac{4\sqrt{3}-1}{8\sqrt{3}}+\frac{10\sqrt{\frac{1}{3}+1}}{40} = \frac{1}{2}-\frac{1}{8\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{\frac{4}{3}}}{4}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{8\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{\frac{1}{3}}}{4} = \frac{1}{2}-\frac{1}{8\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{3}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}\sqrt{3} \approx 0{,}717\,[\mathrm{h}].
\end{aligned}
$$

Betrachtung der Ränder:

$$
\begin{aligned}
T(0) &= 0+\frac{\sqrt{40^2+100}}{40} = \frac{\sqrt{1\,700}}{40} = \frac{10\sqrt{17}}{40} = \frac{\sqrt{17}}{4} \approx 1{,}03\,[\mathrm{h}]\\
T(40) &= \frac{40}{80}+\frac{\sqrt{100}}{40} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75\,[\mathrm{h}]
\end{aligned}
$$

An der Stelle

$$
x = 40-\frac{10}{\sqrt{3}} \approx 34{,}226\,[\mathrm{km}]
$$

wird also das absolute Minimum der Fahrzeit angenommen. Der Winkel α, unter welchem der Geländewagen weiterfahren muss, beträgt

$$
\alpha = \arctan\left(\frac{10}{40-\left(40-\frac{10}{\sqrt{3}}\right)}\right) = \arctan\left(\frac{10}{\frac{10}{\sqrt{3}}}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60^\circ.
$$

12.11

Es ist:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{k=1}^{n} 2\,(x - x_k) \\
&= 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + 2(x - x_3) + \ldots + 2(x - x_n) \\
&= 2(x - x_1 + x - x_2 + x - x_3 + \ldots + x - x_n) \\
&= 2(nx - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_n) \\
&= 2\left(nx - \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \\
&\overset{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

Daraus:

$$
\begin{aligned}
nx - \sum_{k=1}^{n} x_k &= 0 \\
x &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n} \qquad \text{stationäre Stelle}
\end{aligned}
$$

Weiter:

$$f''(x) = 2n > 0 \qquad \text{unabhängig von } x$$

Also ist insbesondere an der stationären Stelle $f''(x) > 0$, d. h. es liegt ein lokales Minimum von f vor.
Untersuchung der „Ränder“:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x - x_k)^2}_{\to\infty} = \infty \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x - x_k)^2}_{\to\infty} = \infty
\end{aligned}
$$

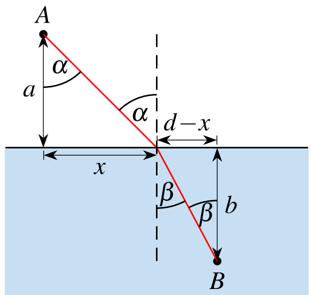
Beim Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

liegt demzufolge das absolute Minimum der Funktion f vor.

Abschnitt 12.3 – Der Regenbogen

12.12



Wegen der Geschwindigkeitsdefinition $v = \frac{s}{t}$ beträgt die benötigte Laufzeit von A nach B:

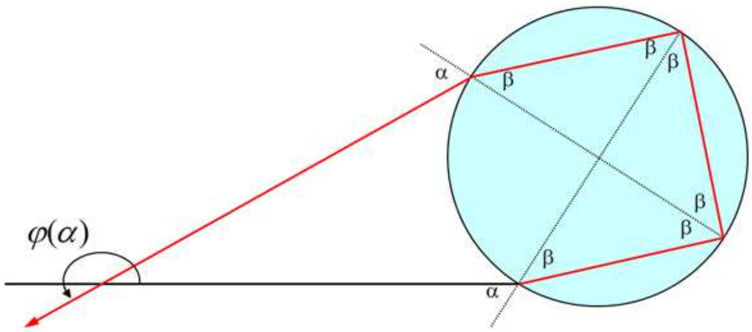
$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_0} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c}$$

Daraus ergibt sich notwendigerweise für ein lokales Minimum der Laufzeit $T(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dx} &= \frac{x}{c_0\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = \frac{\sin(\alpha)}{c_0} - \frac{\sin(\beta)}{c} \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\sin(\alpha)}{c_0} &= \frac{\sin(\beta)}{c} \\
\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} &= \frac{c_0}{c} = \frac{c_0}{\frac{c_0}{n}} = n
\end{aligned}$$

Da die Laufzeit nicht negativ und damit nicht beliebig klein werden kann, für $x \to \pm\infty$ aber beliebig groß wird, muss das Minimum der Laufzeit existieren. Wir haben nur eine Möglichkeit für das Minimum, nämlich die gefundene stationäre Stelle.

12.13



a) Der Umlenkungswinkel beträgt

$$\varphi = (\alpha-\beta)+(\pi-2\beta)+(\pi-2\beta)+(\alpha-\beta) = 2\pi+2\alpha-6\beta.$$

Mit dem umgeformten Snellius-Brechungsgesetz

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{n}\right)$$

ergibt sich daraus

$$\varphi = 2\pi+2\alpha-6\arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{n}\right).$$

b) Bestimmung der stationären Stellen des Umlenkunkungswinkels:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\alpha} &= 2-6\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin(\alpha)}{n}\right)^2}}\cdot\frac{\cos(\alpha)}{n} \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{1}{\frac{\sqrt{n^2-\sin^2(\alpha)}}{n}}\cdot\frac{\cos(\alpha)}{n} &= \frac{1}{3} \\
\cos(\alpha) &= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{n^2-(1-\cos^2(\alpha))} \\
\cos^2(\alpha) &= \frac{1}{9}\left(n^2-1+\cos^2(\alpha)\right) \\
\frac{8}{9}\cos^2(\alpha) &= \frac{n^2-1}{9} \\
\cos^2(\alpha) &= \frac{n^2-1}{8}
\end{aligned}$$

Wegen $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \sqrt{\frac{n^2-1}{8}} \\ \alpha &= \arccos\left(\sqrt{\frac{n^2-1}{8}}\right) \end{aligned}$$

Wenn man sich von einem Computeralgebrasystem das Schaubild von $\varphi(\alpha)$ zeichnen lässt bzw. das Kriterium mit der 2. Ableitung benutzt, erkennt man, dass es sich um ein lokales Minimum des Umlenkungswinkels handelt. Dies ist aufgrund der umgekehrten Umlenkung gegenüber dem Primärregenbogen auch einleuchtend.
Als bevorzugter Umlenkungswinkel ergibt sich abhängig von der Farbe:

$$\begin{aligned} \varphi_{rot} &= 2\pi + 2\alpha - 6\arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{1{,}331}\right) \approx 4{,}021 \mathrel{\hat{=}} 230{,}4^\circ \\ \varphi_{violett} &= 2\pi + 2\alpha - 6\arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{1{,}344}\right) \approx 4{,}079 \mathrel{\hat{=}} 233{,}7^\circ \end{aligned}$$

Demzufolge werden diese Farben bevorzugt um

$$230{,}4^\circ - 180^\circ = 50{,}4 \ \ldots \ 233{,}7^\circ - 180^\circ = 53{,}7$$

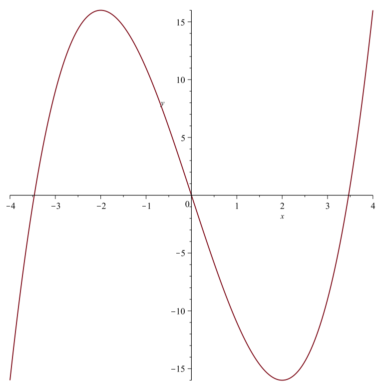
mehr als 180° umgelenkt, d. h. sie fallen unter diesem bevorzugten Öffnungswinkel zur Sonneneinfallsrichtung bevorzugt ins Auge. Allerdings ist dieses Mal der Öffnungswinkel für violett größer als für rot. Die Farbreihenfolge ist gegenüber dem Primärregenbogen umgedreht.

Abschnitt 12.4 – Wendepunkte und Kurvendiskussion

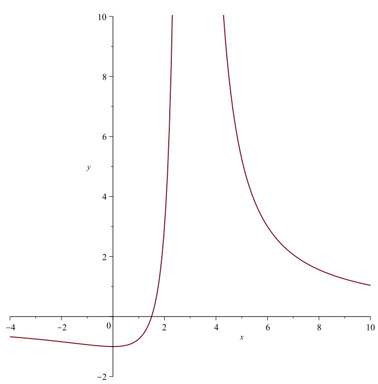
12.15

Bei dieser Aufgabe wird aus Platzgründen auf die vollständige Rechnung verzichtet. Es werden lediglich die Ergebnisse angegeben.

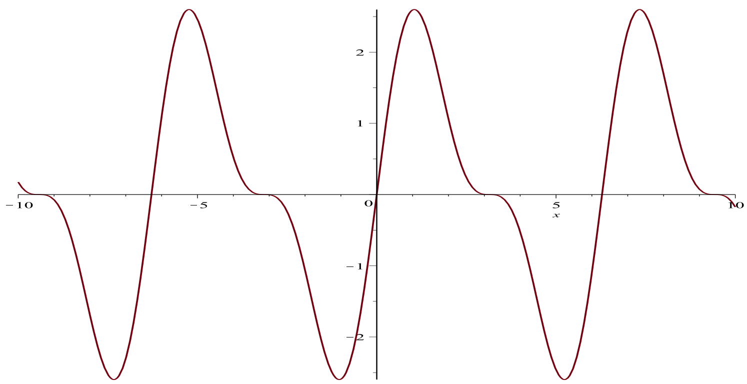
a) Definitionsbereich $A = \mathbb{R}$
$f(-x) = -f(x)$, d. h. Punktsymmetrie zum Ursprung, keine Periodizität
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Nullstellen 0, $\pm 2\sqrt{3}$
$f(0) = 0$
lokales Maximum bei $(-2|16)$, lokales Minimum bei $(2|-16)$
Wendepunkt an der Stelle $(0|0)$ mit der Steigung -12



b) Definitionsbereich $A = \mathbb{R}\backslash\{3\}$
keine Symmetrie, keine Periodizität
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Nullstelle $\frac{3}{2}$
$f(0) = -1$
lokales Minimum bei $(0|-1)$
Wendepunkt an der Stelle $\left(-\frac{3}{2}|-\frac{8}{9}\right)$ mit der Steigung $-\frac{8}{81}$



c) Definitionsbereich $A = \mathbb{R}$
$f(-x) = -f(x)$, d. h. Punktsymmetrie zum Ursprung, Periode 2π
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existieren nicht
Nullstellen $k\pi$
$f(0) = 0$
lokale Maxima an den Stellen $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \middle| \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, lokale Minima an den Stellen $\left(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi \middle| -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$
Wendepunkte an den Stellen $(2k\pi|0)$ mit der Steigung 4, $((2k+1)\pi|0)$ mit der Steigung 0, $\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \middle| \frac{3}{8}\sqrt{15}\right)$ mit der Steigung $-\frac{9}{4}$, $\left(-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \middle| -\frac{3}{8}\sqrt{15}\right)$ mit der Steigung $-\frac{9}{4}$ (jeweils $k \in \mathbb{Z}$)



Abschnitt 12.5 – Regel von Bernoulli-de l'Hospital

12.16

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+1}{2x+2} = \dfrac{2\cdot 1+1}{2\cdot 1+2} = \dfrac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\ln(1+x^2)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin(x)}{x} \cdot \dfrac{1+x^2}{2}\right) = 1 \cdot \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\cos(ax)}{b\cos(bx)} = \dfrac{a\cdot 1}{b\cdot 1} = \dfrac{a}{b}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(\ln(x))}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x^2\ln(x)} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+a)}{\ln(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x+a}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+a} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{a}{x}} = \dfrac{1}{1+0} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot\ln(x) = -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\ln(x)}{x^{-\frac{1}{2}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0}2\sqrt{x} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}-1}{1\cdot\ln(x)+(x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x)}{\ln(x)+1-\frac{1}{x}}$
$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{1}{\cos(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x^2\cos(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin(x)}{2x\cos(x)-x^2\sin(x)}$
$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos(x)}{2\cos(x)-4x\sin(x)+x^2\cos(x)} = \dfrac{-1}{2-0+0} = -\dfrac{1}{2}$

12.17

a) Mit Bernoulli-de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x^3+\sin(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+2x}}\cdot 2-\frac{1}{2\sqrt{1-2x}}\cdot(-2)}{3x^2+\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+2x}}+\frac{1}{\sqrt{1-2x}}}{3x^2+\cos(x)}$$
$$= \frac{1+1}{0+1} = 2$$

Ohne Bernoulli-de l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{x^3+\sin(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x})}{(x^3+\sin(x))(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)-(1-2x)}{(x^3+\sin(x))(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4x}{(x^3+\sin(x))(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{4}{\left(x^2+\frac{\sin(x)}{x}\right)(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x})}\\ &= \frac{4}{(0+1)(\sqrt{1}+\sqrt{1})} = \frac{4}{2} = 2\end{aligned}$$

b) Mit Bernoulli-de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2)x+x^3}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan^2(2x))\cdot 2+3x^2}{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2+2\tan^2(2x)+3x^2}{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}$$
$$= \frac{2+0+0}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2$$

Ohne Bernoulli-de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)+x^3}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\tan(2x)+x^3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\tan(2x)+x^3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\tan(2x)+x^3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(2x)}{2x}+\frac{x^2}{2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{1}{\cos(2x)}+\frac{x^2}{2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$$
$$= (1\cdot 1+0)\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right) = 2$$

c) Mit Bernoulli-de l'Hospital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\sqrt{x^2-\cos(x)}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin(x)}{1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-\cos(x)}}(2x+\sin(x))} = \frac{-1}{1-\frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-0}}(2\frac{\pi}{2}+1)}$$
$$= \frac{-1}{1-\frac{1}{\pi}(\pi+1)} = \frac{-1}{1-1-\frac{1}{\pi}} = \pi$$

Ohne Bernoulli-de l'Hospital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\sqrt{x^2-\cos(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)\left(x+\sqrt{x^2-\cos(x)}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-\cos(x)}\right)\left(x+\sqrt{x^2-\cos(x)}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)\left(x+\sqrt{x^2-\cos(x)}\right)}{x^2-(x^2-\cos(x))} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)\left(x+\sqrt{x^2-\cos(x)}\right)}{\cos(x)}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x+\sqrt{x^2-\cos(x)}\right) = \frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-0} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

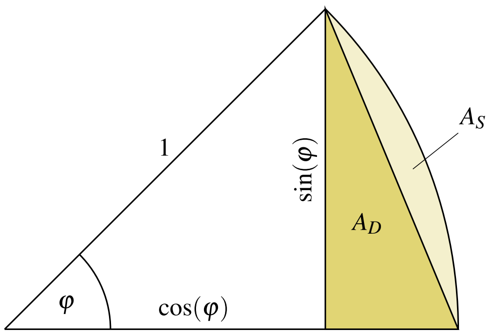
12.18

Mit der Regel Bernoulli-de l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Trotzdem war die Herleitung in Kapitel 10.4 mit den Dreiecken nicht überflüssig, da für die Herleitung der Ableitung $(\sin x)' = \cos x$ in 11.2.3 genau der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ benutzt wurde.

12.19



$$\begin{aligned} A_D &= \frac{1}{2}(1-\cos(\varphi))\sin(\varphi) \\ A_S &= \frac{\phi}{2\pi}\cdot\pi\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin(\varphi) \\ &= \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin(\varphi) \end{aligned}$$

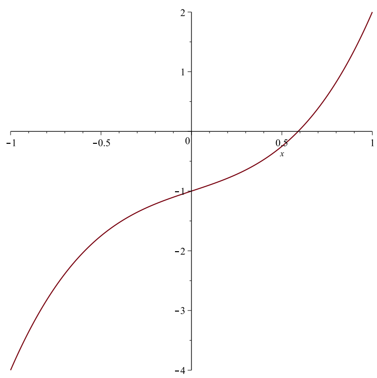
Damit ist:

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi\to 0}\frac{A_D}{A_S} &= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos(\varphi))\sin(\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{2}\sin(\varphi)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{(1-\cos(\varphi))\sin(\varphi)}{\varphi-\sin(\varphi)} \\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi)+(1-\cos(\varphi))\cos(\varphi)}{1-\cos(\varphi)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin^2(\varphi)+\cos(\varphi)-\cos^2(\varphi)}{1-\cos(\varphi)} \\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\varphi\to 0}\frac{2\sin(\varphi)\cos(\varphi)-\sin(\varphi)-2\cos(\varphi)(-\sin(\varphi))}{\sin(\varphi)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{4\sin(\varphi)\cos(\varphi)-\sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} \\ &= \lim_{\varphi\to 0}\frac{4\cos(\varphi)-1}{1} = 4\cdot 1-1 = 3 \end{aligned}$$

Abschnitt 12.6 – Newton-Verfahren

12.20

a) Skizze für die gesuchte Nullstelle:



Suche die Nullstelle von

$$f(x) = 2x^3 + x - 1.$$

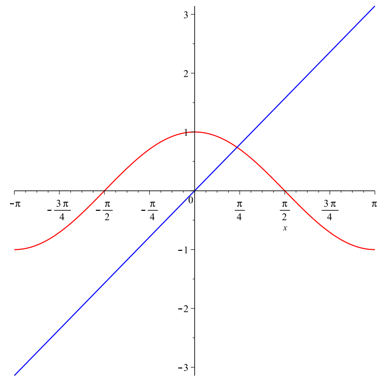
Newton-Iteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^3 + x_n - 1}{6x^2 + 1}$$

Wähle als Startwert $x_0 = 1$. Dann ergibt sich nacheinander:

0,714 285 714 285 714
0,605 168 700 646 087
0,590 022 042 266 484
0,589 754 594 320 578
0,589 754 512 301 467
0,589 754 512 301 457
0,589 754 512 301 459
0,589 754 512 301 459

b) Skizze für den gesuchten Schnittpunkt:



Suche die Nullstelle von

$$f(x) = \cos(x) - x.$$

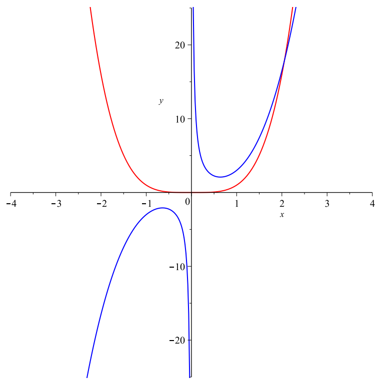
Newton-Iteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\sin(x_n) - 1}$$

Wähle als Startwert $x_0 = 1$. Dann ergibt sich nacheinander:

0,750 363 867 840 245
0,739 112 890 911 362
0,739 085 133 385 284
0,739 085 133 215 161
0,739 085 133 215 160

c) Skizze für den gesuchten Schnittpunkt:



Suche die Nullstelle von

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - \frac{1}{x}.$$

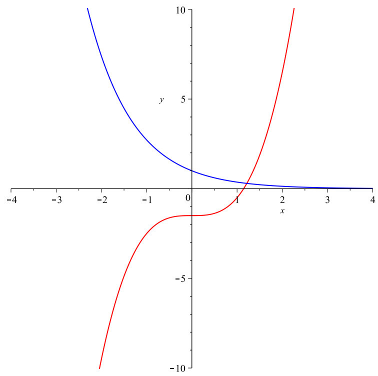
Newton-Iteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 2x_n^3 - \frac{1}{x_n}}{4x_n^3 - 6x_n^2 + \frac{1}{x_n^2}}$$

Wähle als Startwert $x_0 = 3$. Dann ergibt sich nacheinander:

2,507 186 858 316 222
2,209 173 888 657 540
2,080 867 732 287 493
2,056 764 190 354 845
2,055 968 246 147 220
2,055 967 396 713 785
2,055 967 396 712 818
2,055 967 396 712 818

d) Skizze für den gesuchten Schnittpunkt:



Suche die Nullstelle von

$$f(x) = x^3 - 1{,}5 - e^{-x}.$$

Newton-Iteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 1{,}5 - e^{-x_n}}{3x_n^2 + e^{-x_n}}$$

Wähle als Startwert $x_0 = 2$. Dann ergibt sich nacheinander:

1,475 526 257 147 971
1,256 031 803 794 150
1,216 819 288 045 548
1,215 656 004 134 891
1,215 655 002 467 284
1,215 655 002 466 541
1,215 655 002 466 541

12.21

a) Es ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - a \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Damit lautet die Newton-Iteration:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \left(\frac{x_n}{2} - \frac{a}{2x_n}\right) = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{aligned}$$

Die Newton-Iteration für die Gleichung $x^2 - a = 0$ stimmt also mit dem Heron-Verfahren überein.

b) Die Iterationsreihenfolge lautet mit dem Startwert $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) = 4{,}500\,000\,000 \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) = 3{,}138\,888\,889 \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_2}\right) = 2{,}843\,780\,728 \\ x_4 &= \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{a}{x_3}\right) = 2{,}828\,468\,572 \\ x_5 &= \frac{1}{2}\left(x_4 + \frac{a}{x_4}\right) = 2{,}828\,427\,125 \\ x_6 &= \frac{1}{2}\left(x_5 + \frac{a}{x_5}\right) = 2{,}828\,427\,125 \end{aligned}$$

Damit ist die gewünschte Genauigkeit von 9 Nachkommastellen erreicht.

12.22

Zu lösen ist die Gleichung

$$\rho_H \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \rho_W \cdot \frac{1}{3}\pi h^2(3r-h)$$

nach der Eintauchtiefe h. Mit den konkreten Werten ergibt sich in der Einheit m:

$$\begin{aligned} 750 \cdot \frac{4}{3}\pi 0{,}09^3 - 1\,000 \cdot \frac{1}{3}\pi h^2(0{,}27-h) &= 0 \\ 2{,}187 - 270h^2 + 1\,000h^3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Newton-Iteration lautet somit

$$h_{n+1} = h_n - \frac{2{,}187 - 270h_n^2 + 1\,000h^3}{-540h_n + 3\,000h_n^2}.$$

Mit dem Startwert $h_0 = 0{,}09$ ergibt sich als Iterationsfolge mit einer Genauigkeit von 3 Nachkommastellen (eine höhere Genauigkeit ist nicht sinnvoll):

$$\begin{aligned} &0{,}120 \\ &0{,}121 \\ &0{,}121 \end{aligned}$$

Die Eintauchtiefe beträgt also 12,1 cm.

13 Unbestimmtes Integral

Abschnitt 13.1 – Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

13.1

Es handelt sich um den freien Fall mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und der Anfangshöhe $h_0 = 0\,\text{m}$. Die Beschleunigung wirkt in negativer Richtung. Damit gilt:

$$\ddot{h}(t) \;=\; \dot{v}(t) \;=\; -g$$

Am höchsten Punkt gilt:

$$\begin{aligned} v(t) \;&=\; -gt + v_0 \;=\; 0 \\ t \;&=\; \frac{v_0}{g} \;=\; \frac{15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \;\approx\; 1{,}53\,\text{s} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als maximale Höhe

$$h_{max} \;=\; -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0 \;=\; -\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(1{,}53\,\text{s})^2 + 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 1{,}53\,\text{s} \;\approx\; 11{,}47\,\text{m}.$$

13.2

a) $\displaystyle\int 2x\,dx \;=\; x^2 + C$

b) $\displaystyle\int \left(x^2+4\right)\,dx \;=\; \frac{1}{3}x^3 + 4x + C$

c) $\displaystyle\int \left(x^3 - 12x + 4\right)\,dx \;=\; \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 4x + C$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{2}{x} + x\right)\,dx \;=\; 2\ln(|x|) + \frac{1}{2}x^2 + C$

e) $\displaystyle\int \left(-2\sqrt{x}\right)\,dx \;=\; -2\int x^{\frac{1}{2}} \;=\; -2\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right) \;=\; -\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \bar{C}$

f) $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x}\,dx \;=\; \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)\,dx \;=\; \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

g) $\displaystyle\int \frac{3}{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\,dx \;=\; 3\int\left(\frac{1}{x} + x^{\frac{-2}{3}}\right) \;=\; 3\left(\ln(|x|) + \frac{3}{1}x^{\frac{1}{3}} + C\right) \;=\; 3\ln(|x|) + 9\sqrt[3]{x} + \bar{C}$

h) $\displaystyle\int e^{x+a}\,dx \;=\; \int e^x\cdot e^a\,dx \;=\; e^a\int e^x\,dx \;=\; e^a\left(e^x + C\right) \;=\; e^{x+a} + \bar{C}$

i) $\displaystyle\int \left(x^3 + 5\cos(x) + \frac{2}{1+x^2}\right)\,dx \;=\; \frac{1}{4}x^4 + 5\sin(x) + 2\arctan(x) + C$

13.3

a) Es seien $F(x), G(x) = F(x) + C$ zwei Stammfunktionen von $f(x)$ mit der geforderten Eigenschaft

$$\begin{aligned} F(x_0) &= y_0 \\ G(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} G(x_0) - F(x_0) &= y_0 - y_0 = 0 \\ F(x_0) + C - F(x_0) &= 0 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$G(x) = F(x) + 0 = F(x),$$

d. h. die beiden Stammfunktionen F und G stimmen überein.

b) Die allgemeine Stammfunktion von $f(x)$ lautet

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,dx = \int \frac{2x^3+1}{x^2}\,dx = \int \left(2x + x^{-2}\right)\,dx = x^2 + \frac{1}{-1}x^{-1} + C \\ &= x^2 - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

Einsetzen der Zusatzbedingung:

$$\begin{aligned} 2 &= F(2) = 2^2 - \frac{1}{2} + C = \frac{7}{2} + C \\ C &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Die gesuchte Stammfunktion lautet also

$$F(x) = x^2 - \frac{1}{x} - \frac{3}{2}.$$

Abschnitt 13.2 – Integrationsmethoden

13.4

a) $\displaystyle\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx = \underbrace{x}_{f}\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\underbrace{\sin(x)}_{g}\,dx = x\sin(x) - (-\cos(x)+C)$

$= x\sin(x)+\cos(x)+\bar{C}$

b) $\displaystyle\int \underbrace{(x^3+2x)}_{f}\underbrace{\sinh(x)}_{g'}\,dx = \underbrace{(x^3+2x)}_{f}\underbrace{\cosh(x)}_{g} - \int \underbrace{(3x^2+2)}_{f'=\bar{f}}\underbrace{\cosh(x)}_{g=\bar{g}'}\,dx$

$\displaystyle= (x^3+2x)\cosh(x) - \left(\underbrace{(3x^2+2)}_{\bar{f}}\underbrace{\sinh(x)}_{\bar{g}} - \int \underbrace{6x}_{\bar{f}'}\underbrace{\sinh(x)}_{\bar{g}}\,dx\right)$

$\displaystyle= (x^3+2x)\cosh(x) - \underbrace{(3x^2+2)}_{\bar{f}}\underbrace{\sinh(x)}_{\bar{g}} + \int \underbrace{6x}_{\bar{f}'=\bar{\bar{f}}}\underbrace{\sinh(x)}_{\bar{g}=\bar{\bar{g}}'}\,dx$

$\displaystyle= (x^3+2x)\cosh(x) - (3x^2+2)\sinh(x) + \underbrace{6x}_{\bar{\bar{f}}}\underbrace{\cosh(x)}_{\bar{\bar{g}}} - \int \underbrace{6}_{\bar{\bar{f}}'}\underbrace{\cosh(x)}_{\bar{\bar{g}}}\,dx$

$= (x^3+2x)\cosh(x) - (3x^2+2)\sinh(x) + 6x\cosh(x) - 6\sinh(x) + C$

$= (x^3+8x)\cosh(x) + (-3x^2-8)\sinh(x) + C$

c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx = \int \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{f'}\underbrace{\ln(x)}_{g}\,dx = \underbrace{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}_{f}\underbrace{\ln(x)}_{g} - \int \underbrace{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}_{f}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x) - \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\displaystyle= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x) - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln(x) - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C$

d) $\displaystyle\int \underbrace{\sin(x)}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f}\underbrace{\sin(x)}_{g} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'}\underbrace{\sin(x)}_{g}\,dx$

Daraus:

$$2\int x\cos(x)\,dx = \sin^2(x)+C$$

$$\int x\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)+\bar{C}$$

e) $$\int \sin^2(x)\,dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f}\underbrace{\sin(x)}_{g'}\,dx = \underbrace{\sin(x)}_{f}\underbrace{(-\cos(x))}_{g} - \int \underbrace{\cos(x)}_{f'}\underbrace{(-\cos(x))}_{g}\,dx$$
$$= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + \int (1-\sin^2(x))\,dx$$
$$= -\sin(x)\cos(x) + \int 1\,dx - \int \sin^2(x)\,dx$$
$$= -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$$
Daraus:
$$2\int \sin^2(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x) + x + C$$
$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \bar{C}$$

f) $$\int \ln^2(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{f}\underbrace{\ln(x)}_{g'}\,dx = \underbrace{\ln(x)}_{f}\underbrace{(x\ln(x)-x)}_{g} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'}\underbrace{(x\ln(x)-x)}_{g}\,dx$$
$$= x(\ln(x))^2 - x\ln(x) - \int (\ln(x)-1)\,dx = x(\ln(x))^2 - x\ln(x) - (x\ln(x)-x-x) + C$$
$$= x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + C$$

13.5

a) $$\int x^2 \sin\left(x^3\right)\,dx$$

Substitution:
$$u = x^3$$
$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \qquad du = 3x^2\,dx \qquad dx = \frac{du}{3x^2}$$
Damit:
$$\int x^2\sin\left(x^3\right)\,dx = \int x^2\sin(u)\,\frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int \sin(u)\,du = \frac{1}{3}(-\cos(u)) + C = -\frac{1}{3}\cos\left(x^3\right) + C$$

b) $$\int \frac{6x}{\sqrt{3x^2+2}}\,dx$$

Substitution:
$$u = 3x^2+2$$
$$\frac{du}{dx} = 6x \qquad du = 6x\,dx \qquad dx = \frac{du}{6x}$$
Damit:
$$\int \frac{6x}{\sqrt{3x^2+2}}\,dx = \int \frac{6x}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{6x} = \int u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{3x^2+2} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$

Substitution:

$$u = \sqrt{x}$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \qquad dx = 2\sqrt{x}\,du$$

Damit:

$$\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sin(u)}{u}\,2\sqrt{x}\,du = 2\int \frac{\sin(u)}{u}\,u\,du = 2\int \sin(u)\,du = 2(-\cos(u))+C$$
$$= -2\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx$

Substitution:

$$u = \ln(x)$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad du = \frac{1}{x}\,dx \qquad dx = x\,du$$

Damit:

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,dx = \int \frac{\cos(u)}{x}\,x\,du = \int \cos(u)\,du = \sin(u)+C = \sin(\ln(x))+C$$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{(e^x)^2}{e^x+1}\,dx$

Substitution:

$$u = e^x$$
$$\frac{du}{dx} = e^x \qquad du = e^x\,dx \qquad dx = \frac{du}{e^x}$$

Damit:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{u^2}{u+1}\,\frac{du}{e^x} = \int \frac{u^2}{u+1}\,\frac{du}{u} = \int \frac{u}{u+1}\,du$$

Substitution:

$$v = u+1$$
$$\frac{dv}{du} = 1 \qquad dv = du$$

Damit:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{u}{u+1}\,du = \int \frac{v-1}{v}\,dv = \int \left(1-\frac{1}{v}\right)dv = v-\ln(|v|)+C$$
$$= u+1-\ln(|u+1|)+C = e^x+1-\ln\left(|\underbrace{e^x+1}_{>0}|\right)+C = e^x-\ln(e^x+1)+\underbrace{1+C}_{=:\bar{C}}$$
$$= e^x-\ln(e^x+1)+\bar{C}$$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Substitution:

$$u = \arcsin(x) \qquad \text{bzw.} \qquad x = \sin(u), \qquad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{dx}{du} = \cos(u) \qquad\qquad dx = \cos(u)\,du$$

Damit:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}\cos u\,du = \int \frac{\cos(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}}\,du \overset{-\frac{\pi}{2}\le u\le\frac{\pi}{2}}{=} \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)} = \int 1\,du$$
$$= u + C = \arcsin(x) + C$$

13.6

a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-2x}\,dx$

Bestimmung der Nullstellen des Nenners:

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

Also zwei verschiedene Nullstellen: $x_1 = 0, x_2 = 2$
Ansatz:

$$\frac{x+2}{x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A}{x^2-2x}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{rcl} A+B &=& 1 \\ -2A &=& 2 \end{array}\right\}\text{Lineares Gleichungssystem}$$

Lösung mit Gauß-Elimination oder Computeralgebrasystem:

$$A = -1$$
$$B = 2$$

Also:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

Auswertung der beiden Integrale:

1)
$$\int \frac{1}{x}\, dx \;=\; \ln(|x|)+C_1$$

2)
$$\int \frac{1}{x-2}\, dx$$

Substitution:

$$u \;=\; x-2$$
$$\frac{du}{dx} \;=\; 1 \qquad\qquad dx \;=\; du$$

$$\int \frac{1}{x-2}\, dx \;=\; \int \frac{1}{u}\, du \;=\; \ln(|u|)+C_2 \;=\; \ln(|x-2|)+C_2$$

Insgesamt:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x}\, dx \;=\; -\left(\ln(|x|)+C_1\right)+2\left(\ln(|x-2|)+C_2\right) \;=\; -\ln(|x|)+2\ln(|x-2|)+C$$

b)
$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}\, dx$$

Bestimmung der Nullstellen des Nenners:

$$x^2-2x+1 \;=\; (x-1)^2$$

Also eine doppelte Nullstelle: $x_1 = 1$
Ansatz:

$$\frac{x+1}{x^2-2x+1} \;=\; \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2} \;=\; \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} \;=\; \frac{Ax+(-A+B)}{x^2-2x+1}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{rcl} A & = & 1 \\ -A+B & = & 1 \end{array}\right\}\text{Lineares Gleichungssystem}$$

Lösung mit Gauß-Elimination oder Computeralgebrasystem:

$$A = 1$$
$$B = 2$$

Also:

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}\, dx \;=\; \int \frac{1}{x-1}\, dx+\int \frac{2}{(x-1)^2}\, dx \;=\; \int \frac{1}{x-1}\, dx+2\int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

Auswertung der beiden Integrale:

1) $$\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

Substitution:

$$u = x-1$$
$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad dx = du$$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|)+C_1 = \ln(|x-1|)+C_1$$

2) $$\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx$$

Substitution:

$$u = x-1$$
$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad dx = du$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2}\,du = \int u^{-2}\,du = -u^{-1}+C_2 = -\frac{1}{u}+C_2$$
$$= -\frac{1}{x-1}+C_2$$

Insgesamt:

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,dx = \ln(|x-1|)+C_1-2\left(\frac{1}{x-1}+C_2\right)$$
$$= \ln(|x-1|)-\frac{2}{x-1}+C$$

c) $$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$$

Polynomdivision, damit Grad(Zähler) ¡ Grad(Nenner):

$$\begin{array}{l} x^3 : (x^2-1) = x+\dfrac{x}{x^2-1} \\ \underline{x^3-x} \\ \quad\;\; x \end{array}$$

Somit:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \int \left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2+\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2+\int \frac{x}{(x+1)(x-1)}\,dx$$

Zwei verschiedene Nullstellen des Nenners: $x_1 = -1, x_2 = 1$

Ansatz:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x+(-A+B)}{x^2-1}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 1 \\ A-B &= 0 \end{aligned}\right\}\text{Lineares Gleichungssystem}$$

Lösung mit Gauß-Elimination oder Computeralgebrasystem:

$$A = \frac{1}{2}$$
$$B = \frac{1}{2}$$

Also:

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-1)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

Auswertung der beiden Integrale:

1) $$\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

Substitution:

$$u = x+1$$
$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad dx = du$$

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|)+C_1 = \ln(|x+1|)+C_1$$

2) $$\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

Substitution:

$$u = x-1$$
$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad dx = du$$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|)+C_2 = \ln(|x-1|)+C_2$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(\ln(|x+1|)+C_1)+\frac{1}{2}(\ln(|x-1|)+C_2) \\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ln(|x+1|)+\frac{1}{2}\ln(|x-1|)+C\end{aligned}$$

d)
$$\int \frac{6x^2-26x+8}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$$

Bestimmung der Nullstellen des Nenners. Durch Probieren: $x_1 = 3$ ist Nullstelle. Durch Polynomdivision erhält man

$$(x^3-3x^2-x+3):(x-3) \;=\; x^2-1 \;=\; (x-1)(x+1).$$

Also lauten die weiteren Nullstellen: $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$

Ansatz:

$$\begin{aligned}
\frac{6x^2-26x+8}{x^3-3x^2-x+3} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\\
&= \frac{A(x-1)(x+1)+B(x-3)(x+1)+C(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)(x+1)}\\
&= \frac{(A+B+C)x^2+(-2B-4C)x+(-A-3B+3C)}{x^3-3x^2-x+3}
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr}
A & + & B & + & C & = & 6\\
 & - & 2B & - & 4C & = & -26\\
-A & - & 3B & + & 3C & = & 8
\end{array}\right\}\text{Lineares Gleichungssystem}$$

Lösung mit Gauß-Elimination oder Computeralgebrasystem:

$$A=-2$$
$$B=3$$
$$C=5$$

Also:

$$\int \frac{6x^2-26x+8}{x^3-3x^2-x+3}\,dx \;=\; -2\int\frac{1}{x-3}\,dx+3\int\frac{1}{x-1}\,dx+5\int\frac{1}{x+1}\,dx$$

Gleichzeitige Auswertung aller 3 Integrale:

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx$$

Substitution:

$$u \;=\; x-a$$
$$\frac{du}{dx} \;=\; 1 \qquad\qquad dx \;=\; du$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx \;=\; \int\frac{1}{u}\,du \;=\; \ln(|u|)+C_i \;=\; \ln(|x-a|)+C_i$$

Damit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x^2-26x+8}{x^3-3x^2-x+3}\,dx &= -2\,(\ln(|x-3|)+C_1)+3\,(\ln(|x-1|)+C_2)+5\,(\ln(|x+1|)+C_3)\\
&= -2\ln(|x-3|)+3\ln(|x-1|)+5\ln(|x+1|)+C
\end{aligned}$$

e) $$\int \frac{1}{x^4+3x^3+3x^2+x}\,dx$$

Bestimmung der Nullstellen des Nenners. Es ist:

$$x^4+3x^3+3x^2+x \;=\; x(x^3+3x^2+3x+1) \;=\; x(x+1)^3$$

Also haben wir eine einfache Nullstelle $x_1=0$ und eine dreifache Nullstelle $x_2=-1$.

Ansatz:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+3x^3+3x^2+x} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}\\ &= \frac{A(x+1)^3+Bx(x+1)^2+Cx(x+1)+Dx}{x(x+1)^3}\\ &= \frac{(A+B)x^3+(3A+2B+C)x^2+(3A+B+C+D)x+A}{x^4+3x^3+3x^2+x}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{rcl} A+B & = & 0\\ 3A+2B+C & = & 0\\ 3A+B+C+D & = & 0\\ A & = & 1 \end{array}\right\}\text{Lineares Gleichungssystem}$$

Lösung mit Gauß-Elimination oder Computeralgebrasystem:

$$\begin{aligned}A&=1\\ B&=-1\\ C&=-1\\ D&=-1\end{aligned}$$

Also:

$$\int \frac{1}{x^4+3x^3+3x^2+x}\,dx \;=\; \int \frac{1}{x}\,dx-\int \frac{1}{x+1}\,dx-\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx-\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$$

Auswertung der Integrale:

1) $$\int \frac{1}{x-a}\,dx$$

Substitution:

$$u \;=\; x-a$$

$$\frac{du}{dx} \;=\; 1 \qquad\qquad dx \;=\; du$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx \;=\; \int \frac{1}{u}\,du \;=\; \ln(|u|)+C_i \;=\; \ln(|x-a|)+C_i$$

2) $$\int \frac{1}{(x+1)^k}\,dx \qquad (k \neq 1)$$

Substitution:

$$\begin{aligned} u &= x+1 \\ \frac{du}{dx} &= 1 \qquad\qquad dx = du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)^k}\,dx &= \int \frac{1}{u^k}\,du = \int u^{-k}\,du = \frac{1}{-k+1}u^{-k+1} + C_i \\ &= \frac{1}{(-k+1)u^{k-1}} + C_i = -\frac{1}{(k-1)(x+-1)^{k-1}} + C_i \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{x^4+3x^3+3x^2+x}\,dx \\ &= (\ln(|x|)+C_1) - (\ln(|x+1|)+C_2) - \left(-\frac{1}{x+1}+C_3\right) - \left(-\frac{1}{2(x+1)^2}+C_3\right) \\ &= \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C \end{aligned}$$

f) $$\int \frac{2x^3+2x+24}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$$

Bestimmung der Nullstellen des Nenners. Es ist:

$$(x^2+1)(x^2+9) = (x-i)(x+i)(x-3i)(x+3i)$$

Komplexe Nullstellen: $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = 3i$, $x_4 = -3i$

Ansatz:

$$\begin{aligned} &\frac{2x^3+2x+24}{(x^2+1)(x^2+9)} \\ &= \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+i} + \frac{C}{x-3i} + \frac{D}{x+3i} \\ &= \frac{A(x+i)+B(x-i)}{(x-i)(x+i)} + \frac{C(x+3i)+D(x-3i)}{(x-3i)(x+3i)} \\ &= \frac{\bar{A}x+\bar{B}}{x^2+1} + \frac{\bar{C}x+\bar{D}}{x^2+9} \\ &= \frac{\left(\bar{A}x+\bar{B}\right)(x^2+9) + \left(\bar{C}x+\bar{D}\right)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+9)} \\ &= \frac{\left(\bar{A}+\bar{C}\right)x^3 + (\bar{B}+\bar{D})x^2 + \left(9\bar{A}+\bar{C}\right)x + (9\bar{B}+\bar{D})}{(x^2+1)(x^2+9)} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{rrrrcr} \bar{A} & & +\bar{C} & & = & 2 \\ & \bar{B} & & +\bar{D} & = & 0 \\ 9\bar{A} & & +\bar{C} & & = & 2 \\ & 9\bar{B} & & +\bar{D} & = & 24 \end{array}\right\}\text{Lineares Gleichungssystem}$$

Lösung mit Gauß-Elimination oder Computeralgebrasystem:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= 0\\ \bar{B} &= 3\\ \bar{C} &= 2\\ \bar{D} &= -3\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+2x+24}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx &= \int \frac{3}{x^2+1}\,dx + \int \frac{2x-3}{x^2+9}\,dx\\ &= 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{1}{3\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}\,dx\end{aligned}$$

Auswertung der Integrale:

1) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C_1$$

2) $$\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx$$

Substitution:

$$u = x^2+9$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|) + C_2 = \ln(|x^2+9|) + C_2 = \ln(x^2+9) + C_2$$

3) $$\int \frac{1}{3\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}\,dx$$

Substitution:

$$u = \frac{x}{3}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3} \qquad dx = 3du$$

$$\int \frac{1}{3\left(1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right)}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(u) + C_3 = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C_3$$

Damit gilt insgesamt:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+2x+24}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx &= 3\left(\arctan(x)+C_1\right) + \ln(x^2+9) + C_2 - \left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C_3\right)\\ &= 3\arctan(x) + \ln(x^2+9) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C\end{aligned}$$

13.7

a) $\int \arctan(x)\,dx = \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{f}\,dx = x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Substitution:

$$u = 1+x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad du = 2x\,dx \qquad dx = \frac{du}{2x}$$

Damit:

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,dx &= x \cdot \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{u}\frac{du}{2x} = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(|u|) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(|\underbrace{1+x^2}_{>0}|) + C \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

b) $\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx$

Ansatz: $\quad m = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad n = \frac{\alpha-\beta}{2}$

Dann: $\quad m+n = \alpha, \qquad n = m-n = \beta$

Somit:

$$\begin{aligned}\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx &= \int \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}x\right)\,dx \\ &= \int \sin\left(\frac{\alpha x+\beta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha x-\beta x}{2}\right)\,dx \\ &\overset{\text{Hinweis}}{=} \int \frac{1}{2}\left(\cos(\beta x) - \cos(\alpha x)\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \cos((m-n)x)\,dx - \frac{1}{2}\int \cos((m+n)x)\,dx\end{aligned}$$

Substitutionen:

$$u = (m-n)x$$

$$\frac{du}{dx} = m-n \qquad du = (m-n)\,dx \qquad dx = \frac{du}{m-n}$$

$$v = (m+n)x$$

$$\frac{du}{dx} = m-n \qquad dv = (m+n)\,dx \qquad dx = \frac{dv}{m+n}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx &= \frac{1}{2}\int \cos(u)\,\frac{du}{m-n} - \frac{1}{2}\int \cos(v)\,\frac{dv}{m+n} \\
&= \frac{1}{2(m-n)}\int \cos(u)\,du - \frac{1}{2(m+n)}\int \cos(v)\,dv \\
&= \frac{1}{2(m-n)}\sin(u) - \frac{1}{2(m+n)}\sin(v) + C \\
&= \frac{1}{2(m-n)}\sin((m-n)x) - \frac{1}{2(m+n)}\sin((m+n)x) + C
\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^4(x)}$

Es ist:

$$\begin{aligned}
\tan^2(x) &= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{1-\sin^2(x)} \\
\sin^2(x) &= \tan^2(x) - \tan^2(x)\sin^2(x) \\
\sin^2(x)(1+\tan^2(x)) &= \tan^2(x) \\
\sin^2(x) &= \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}
\end{aligned}$$

Analog ist:

$$\begin{aligned}
\tan^2(x) &= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\
\tan^2(x)\cos^2(x) &= 1-\cos^2(x) \\
\cos^2(x)(\tan^2(x)+1) &= 1 \\
\cos^2(x) &= \frac{1}{1+\tan^2(x)}
\end{aligned}$$

Also:

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^4(x)}\,dx = \int \frac{(1+\tan^2(x))(1+\tan^2(x))^2}{\tan^2(x)\cdot 1}\,dx = \int \frac{(1+\tan^2(x))^3}{\tan^2(x)}\,dx$$

Substitution:

$$\begin{aligned}
u &= \tan(x) \\
\frac{du}{dx} &= 1+\tan^2(x) \qquad du = (1+\tan^2(x))\,dx \qquad dx = \frac{du}{1+\tan^2(x)}
\end{aligned}$$

Damit:

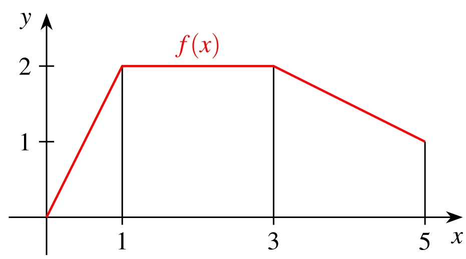
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^4(x)} &= \int \frac{(1+u^2)^3}{u^2}\,\frac{du}{1+\tan^2(x)} = \int \frac{(1+u^2)^3}{u^2}\,\frac{du}{1+u^2} \\
&= \int \frac{(1+u^2)^2}{u^2}\,du = \int \frac{1+2u^2+u^4}{u^2}\,du \\
&= \int \left(\frac{1}{u^2}+2+u^2\right)\,du = -\frac{1}{u}+2u+\frac{1}{3}u^3+C \\
&= -\frac{1}{\tan(x)}+2\tan(x)+\frac{1}{3}\tan^3(x)+C \\
&= -\cot(x)+2\tan(x)+\frac{1}{3}\tan^3(x)+C
\end{aligned}$$

14 Bestimmtes Integral

Abschnitt 14.1 – Flächeninhaltsproblem und bestimmtes Integrals

14.1

a)



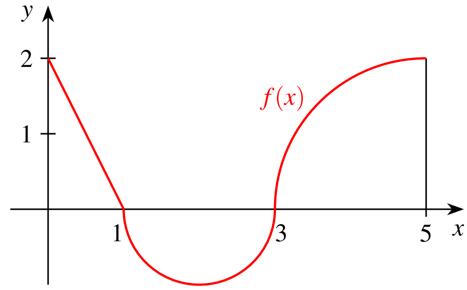
$$\int_1^3 f(x)\,dx = A_{\text{Rechteck}} = (3-1)\cdot 2 = 4$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}\cdot(1-0)\cdot 2 = 1$$

$$\int_3^5 f(x)\,dx = A_{\text{Trapez}} = \frac{2+1}{2}\cdot(5-3) = 3$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = 1+4+3 = 8$$

b)



$$\int_0^1 f(x)\,dx = A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = -A_{\text{Halbkreis}} = -\frac{1}{2}\cdot \pi\cdot 1^2 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_3^5 f(x)\,dx = A_{\text{Viertelskreis}} = \frac{1}{4}\cdot \pi\cdot 2^2 = \pi$$

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = -\frac{\pi}{2}+\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = 1-\frac{\pi}{2}+\pi = 1+\frac{\pi}{2}$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx = -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3}{4}\pi$$

14.2

Umrechung der Geschwindigkeit von $50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 50\cdot\frac{1\,000\text{m}}{60^2\text{s}} = \frac{125}{9}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Damit beträgt die zurückgelegte Strecke in Meter:

$$\int_0^{20} \frac{\frac{125}{9}}{20} t\,dt + \frac{125}{9}\cdot 120 + \int_0^{30} \left(\frac{125}{9} - \frac{\frac{125}{9}}{30} t\right)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 20^2\cdot\frac{125}{9\cdot 20} + \frac{125}{9}\cdot 120 + \frac{125}{9}\cdot 30 - \frac{1}{2}\cdot 30^2\cdot\frac{125}{9\cdot 30}$$
$$= \frac{18\,125}{9} \approx 2014\ [\text{m}]$$

Abschnitt 14.2 – Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

14.3

a) $$\int_1^3 \left(x+x^3\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2}+\frac{81}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{18+81-2-1}{4} = 24$$

b) $$\int_{-1}^1 \left(-3x^7+5x^3+2x^2\right)\,dx = \left[-\frac{3}{8}x^8+\frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^1$$
$$= \left(-\frac{3}{8}+\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{8}+\frac{5}{4}-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

c) $$\int_1^5 \left(x-\frac{1}{x^2}\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}\right]_1^5 = \left(\frac{25}{2}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{56}{5}$$

d) $$\int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\,dx = \int_1^4 \left(2x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)\,dx = \left[4x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[4\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4$$
$$= \left(4\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2\right)-\left(4+\frac{2}{3}\right) = \frac{26}{3}$$

e) $$\int_{-4}^{-1} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)\,dx = \left[-\frac{1}{x}-2\ln(|x|)\right]_{-4}^{-1} = (1-2\ln(1))-\left(\frac{1}{4}-2\ln(4)\right)$$
$$= 1-0-\frac{1}{4}+2\ln\left(2^2\right) = \frac{3}{4}+4\ln(2)$$

f) Es ist äquivalent:

$$x^2-x = x(x-1) < 0$$
$$(x>0 \text{ und } x-1<0) \text{ oder } \underbrace{(x<0 \text{ und } x-1>0)}_{\text{unmöglich}}$$
$$0<x<1$$

Somit:
$$\int_{-1}^1 |x^2-x|\,dx = \int_{-1}^0 \left(x^2-x\right)\,dx+\int_0^1 \left(-x^2+x\right)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= 0-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0 = 1$$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}\,dx$

Substitution:

$$u = 1+\cos(x)$$

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x) \qquad du = -\sin(x)\,dx \qquad dx = -\frac{du}{\sin(x)}$$

Transformation der Grenzen:

$$u(0) = 1+\cos(0) = 1+1 = 2$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1+0 = 1$$

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}\,dx = \int_{u=2}^{u=1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{u}}\left(-\frac{du}{\sin(x)}\right) = -\int_2^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\left[2\sqrt{u}\right]_2^1$$

$$= -\left(2-2\sqrt{2}\right) = -2+2\sqrt{2}$$

h) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x)-3)}\,dx$

Substitution:

$$u = \ln(x)-3$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad du = \frac{1}{x}\,dx \qquad dx = x\,du$$

Transformation der Grenzen:

$$u(e) = \ln(e)-3 = 1-3 = -2$$

$$u\left(e^2\right) = \ln(e^2)-3 = 2\ln(e)-3 = 2\cdot 1-3 = -1$$

$$\int_{x=e}^{x=e^2} \frac{1}{x(\ln(x)-3)}\,dx = \int_{u=-2}^{u=-1} \frac{1}{xu}\,x\,du = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{u}\,du = [\ln(|u|)]_{-2}^{-1} = \ln(1)-\ln(2) = -\ln(2)$$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,dx$

Partialbruchzerlegung: Nenner $= x^2-2x+1 = (x-1)^2$, d. h. doppelte Nullstelle $x_1 = 1$.
Ansatz:

$$\frac{x+1}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax+(-A+B)}{x^2-2x+1}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A \quad\; &= 1 \\ -A+B &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: $A = 1$, $B = 2$

Damit:

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx$$

Auswertung der beiden Integrale mittels der Substitution

$$\begin{aligned} u &= x-1 \\ \frac{du}{dx} &= 1 \qquad\qquad du = dx \end{aligned}$$

Transformation der Grenzen:

$$\begin{aligned} u(-1) &= -1-1 = -2 \\ u(0) &= 0-1 = -1 \end{aligned}$$

Damit:

$$\int_{x=-1}^{x=0} \frac{1}{x-1}\,dx = \int_{u=-2}^{u=-1} \frac{1}{u}\,du = [\ln(|u|)]_{-2}^{-1} = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$$

$$\int_{x=-1}^{x=0} \frac{2}{(x-1)^2}\,dx = \int_{u=-2}^{u=-1} \frac{2}{u^2}\,du = \left[-\frac{2}{u}\right]_{-2}^{-1} = 2-1 = 1$$

Insgesamt ist also

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,dx = -\ln(2)+1.$$

14.4

a) Rechnung in m und s unter Weglassung dieser Einheiten:

$$\begin{aligned} \ddot{s}(t) &= \dot{v}(t) = a = 3 \\ v(t) &= 3t + \underbrace{v_0}_{=0} = 3t \qquad\qquad v_0 = \text{Anfangsgeschwindigkeit} \\ v(10) &= 3 \cdot 10 = 30 \left[\frac{\mathrm{m}}{s}\right] \end{aligned}$$

Umrechnung in die Einheit $\frac{\mathrm{km}}{h}$:

$$30\,\frac{\mathrm{m}}{s} = 30\,\frac{\frac{\mathrm{km}}{1000}}{\frac{\mathrm{h}}{3\,600}} = 30 \cdot \frac{3\,600}{1\,000}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 108\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

b) Gefahrene Strecke s_{0_10} nach 10 Sekunden (= Fläche unter der v-Kurve):

$$s_{0\_10} = \int_0^{10} v(t)\,dt = \int_0^{10} 3t\,dt = \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^{10} = \frac{3}{2} \cdot 100 - 0 = 150\ [\mathrm{m}]$$

Gefahrene Strecke s_{5_10} in den zweiten 5 Sekunden:

$$\begin{aligned} s_{5\_10} &= \int_5^{10} v(t)\,dt = \int_5^{10} 3t\,dt = \left[\frac{3}{2}t^2\right]_5^{10} = \frac{3}{2} \cdot 100 - \frac{3}{2} \cdot 25 \\ &= 150 - 37{,}5 = 112{,}5\ [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

14.5

1. Fläche

$$A = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{3x}\,dx$$

Substitution:

$$\begin{aligned} u &= 3x \\ \frac{du}{dx} &= 3 \qquad\qquad du = 3\,dx \qquad\qquad dx = \frac{1}{3}\,du \end{aligned}$$

Transformation der Grenzen:

$$\begin{aligned} u(0) &= 3 \cdot 0 = 0 \\ u(1) &= 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_{x=0}^{x=1} \sqrt{3x}\,dx = 2 \cdot \int_{u=0}^{u=3} \sqrt{u}\,\frac{1}{3}\,du = \frac{2}{3}\int_0^3 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{9}\left(3\sqrt{3} - 0\right) = \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 5{,}468 \end{aligned}$$

2. Fläche

$$A = 2 \cdot \int_2^3 \sqrt{3x}\,dx$$

Substitution:

$$u = 3x$$

$$\frac{du}{dx} = 3 \qquad du = 3\,dx \qquad dx = \frac{1}{3}\,du$$

Transformation der Grenzen:

$$u(2) = 3 \cdot 2 = 6$$
$$u(3) = 3 \cdot 3 = 9$$

$$A = 2 \cdot \int_{x=2}^{x=3} \sqrt{3x}\,dx = 2 \cdot \int_{u=6}^{u=9} \sqrt{u}\,\frac{1}{3}\,du = \frac{2}{3}\int_6^9 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_6^9$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}6^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{9}\left(9\sqrt{9} - 6\sqrt{6}\right) = \frac{4}{9}\left(27 - 6\sqrt{6}\right) = 12 - \frac{8}{3}\sqrt{6}$$
$$\approx 5{,}468$$

3. Fläche
Umkehrfunktion:

$$x = \sqrt{4y}$$

$$A = \int_1^3 \sqrt{4y}\,dy$$

Substitution:

$$u = 4y$$

$$\frac{du}{dy} = 4 \qquad du = 4\,dy \qquad dy = \frac{1}{4}\,du$$

Transformation der Grenzen:

$$u(1) = 4 \cdot 1 = 4$$
$$u(3) = 4 \cdot 3 = 12$$

$$A = \int_{y=1}^{y=3} \sqrt{4x}\,dy = \int_{u=4}^{u=12} \sqrt{u}\,\frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}\int_4^{12} u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{12}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}12^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{6}\left(12\sqrt{12} - 4\sqrt{4}\right) = \frac{1}{6}\left(24\sqrt{3} - 8\right) = 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}$$
$$\approx 5{,}595$$

4. Fläche
Umkehrfunktion:

$$x = \ln(y+2)$$
$$A = \int_0^3 \ln(y+2)\,dy$$

Substitution:

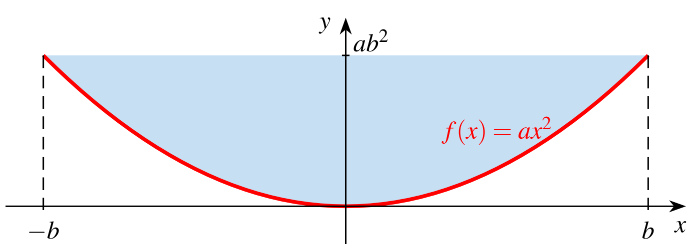
$$u = y+2$$
$$\frac{du}{dy} = 1 \qquad\qquad du = dy$$

Transformation der Grenzen:

$$u(0) = 0+2 = 2$$
$$u(3) = 3+2 = 5$$

$$A = \int_{y=0}^{y=3} \ln(y+2)\,dy = \int_{u=2}^{u=5} \ln(u)\,du = [u\ln(u)-u]_2^5 = (5\ln(5)-5)-(2\ln(2)-2)$$
$$= 5\ln(5)-2\ln(2)-3 \approx 3{,}661$$

14.6



Die Querschnittsfläche ergibt sich als Differenz des Rechtecks mit der Breite b und der Höhe $f(b) = ab^2$ und der Fläche unter der Parabel:

$$A_{\text{max}} = A_{\text{Rechteck-max}} - A_{\text{Parabel-max}} = 2b\cdot ab^2 - \int_{-b}^{b} ax^2\,dx = 2ab^3 - \left[\frac{a}{2}x^3\right]_{-b}^{b}$$
$$= 2ab^3 - \left(\frac{a}{2}b^3 - \frac{a}{2}(-b)^3\right) = 2ab^3 - ab^3 = ab^3$$

Berechnung des x-Wertes zur halben Maximalhöhe $y = \frac{ab^2}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{ab^2}{2} &= ax^2 \\ x^2 &= \frac{b^2}{2} \\ x &= \pm\frac{b}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Querschnittsfläche bei halber Füllhöhe:

$$\begin{aligned} A_{\text{halb}} &= A_{\text{Rechteck-halb}} - A_{\text{Parabel-halb}} = 2\frac{b}{\sqrt{2}} \cdot a\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 - \int\limits_{-\frac{b}{\sqrt{2}}}^{\frac{b}{\sqrt{2}}} ax^2\,dx \\ &= \frac{ab^3}{\sqrt{2}} - \left[\frac{a}{2}x^3\right]_{-\frac{b}{\sqrt{2}}}^{\frac{b}{\sqrt{2}}} = \frac{ab^3}{\sqrt{2}} - \left(\frac{ab^3}{4\sqrt{2}} - \left(-\frac{ab^3}{4\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{ab^3}{\sqrt{2}} - \frac{ab^3}{2\sqrt{2}} = \frac{ab^3}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Verhältnis von A_{halb} zur Maximalfläche $A_{\max}$ = prozentualer Anteil der maximalen Wassermenge:

$$\frac{A_{\text{halb}}}{A_{\max}} = \frac{\frac{ab^3}{2\sqrt{2}}}{ab^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354 = 35{,}4\,\%$$

Abschnitt 14.3 – Uneigentliche Integrale

14.7

a) $$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right) = -0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b) $$\int\limits_{-\infty}^1 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^1 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^1 = \lim_{a\to-\infty}\left(e^1-e^a\right) = e-0 = e$$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+2x)^2}\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b \frac{1}{(1+2x)^2}\,dx$

Substitution:

$$\begin{aligned} u &= 1+2x \\ \frac{du}{dx} &= 2 \qquad\qquad du = 2dx \qquad\qquad dx = \frac{1}{2}du \end{aligned}$$

Transformation der Grenzen:

$$\begin{aligned} u(0) &= 1+2\cdot 0 = 1 \\ u(b) &= 1+2b \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+2x)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{1+2b}\frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{1+2b} = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{1+2b}+\frac{1}{1}\right) \\ &= \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 e^x\,dx + \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-x}\,dx$

$= \lim\limits_{a\to-\infty}[e^x]_a^0 + \lim\limits_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = \lim\limits_{a\to-\infty}(1-e^a) + \lim\limits_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right)$

$= 1-0-0+1 = 2$

e) $\int \underbrace{e^{-x}}_{f}\underbrace{\sin(x)}_{g'}\,dx = \underbrace{e^{-x}}_{f}\underbrace{(-\cos(x))}_{g} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{f'}\underbrace{(-\cos(x))}_{g}\,dx = -e^{-x}\cos(x) - \int \underbrace{e^{-x}}_{\bar f}\underbrace{\cos(x)}_{\bar g'}\,dx$

$= -e^{-x}\cos(x) - \left(\underbrace{e^{-x}}_{\bar f}\underbrace{\sin(x)}_{\bar g} - \int \underbrace{(-e^{-x})}_{\bar f'}\underbrace{\sin(x)}_{\bar g}\,dx\right)$

$= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin(x) - \int e^{-x}\sin(x)\,dx$

Daraus:

$$\begin{aligned} 2\int e^{-x}\sin(x)\,dx &= -e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) + C \\ \int e^{-x}\sin(x)\,dx &= -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) + \bar{C} \end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty e^{-x}\sin(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-x}\sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos(x)+\sin(x))\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-b}(\cos(b)+\sin(b)) + \frac{1}{2}e^{-0}(\cos(0)+\sin(0))\right) \\ &= 0+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx$

Substitution:

$$u = \arctan(x)$$
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \qquad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad dx = (1+x^2)du$$

Transformation der Grenzen:

$$u(0) = \arctan(0) = 0$$
$$u(b) = \arctan(b)$$

Damit:

$$\int_{x=0}^{x=\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{\arctan(b)} u\,du = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\arctan(b)}$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}(\arctan(b))^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0 = \frac{\pi^2}{8}$$

14.8

a) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^8 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \lim_{a\to 0+}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_a^8 = \lim_{a\to 0+}\left(\frac{3}{2}\cdot 8^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)$

$\displaystyle = \frac{3}{2}\cdot 2^2 - 0 = 6$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \lim_{a\to 0+}\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0+}\left(-2\cdot\frac{1}{\sqrt{1}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = \infty$

c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x-3}\,dx = \lim_{b\to 3-}\int_2^b \frac{1}{x-3}\,dx$

Substitution:

$$\begin{aligned} u &= x-3 \\ \frac{du}{dx} &= 1 \qquad\qquad du = dx \end{aligned}$$

Transformation der Grenzen:

$$\begin{aligned} u(2) &= 2-3 = -1 \\ u(b) &= b-3 \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{x-3}\,dx &= \lim_{b\to 3-}\int_{-1}^{b-3} \frac{1}{u}\,du = \lim_{b\to 3-}[\ln(|u|)]_{-1}^{b-3} = \lim_{b\to 3-}(\ln(|b-3|)-\ln(|-1|)) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \lim_{b\to\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\cos(x}{)}\sin(x)\,dx$

Substitution:

$$\begin{aligned} u &= \sin(x) \\ \frac{du}{dx} &= \cos(x) \qquad\qquad du = \cos(x)\,dx \qquad\qquad dx = \frac{du}{\cos(x)} \end{aligned}$$

Transformation der Grenzen:

$$\begin{aligned} u\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ u(b) &= \sin(b) \end{aligned}$$

Damit:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \lim_{b\to\pi-}\int_1^{\sin(b)} \frac{1}{u}\,du = \lim_{b\to\pi-}[-\ln(|u|)]_1^{\sin(b)} = \lim_{b\to\pi-}(-\ln|\sin(b)|+\ln(1)) = -\infty$$

e) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$

Die Funktion ist an der Stelle $x = 0$ nicht definiert, die uneigentliche Stelle liegt also innerhalb des Integratrionsbereichs.

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = \int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}}\, dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Auswertung des zweiten Integrals:

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{a\to 0+} \int\limits_{a}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0+} \int\limits_{a}^{2} \left[2\sqrt{x}\right]_{a}^{2} = \lim_{a\to 0+} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{a}\right) \\ &= 2\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Auswertung des ersten Integrals:

$$\int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}}\, dx = \lim_{b\to 0-} \int\limits_{-2}^{b} \frac{1}{\sqrt{-x}}\, dx$$

Substitution:

$$u = -x$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \qquad du = -dx \qquad dx = -du$$

Transformation der Grenzen:

$$u(-2) = -(-2) = 2$$
$$u(b) = -b$$

Damit:

$$\begin{aligned}\int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}}\, dx &= \lim_{b\to 0-} \int\limits_{2}^{-b} \frac{1}{\sqrt{u}}\,(-du) = -\lim_{b\to 0-} \int\limits_{2}^{-b} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = -\lim_{b\to 0-} \left[2\sqrt{u}\right]_{2}^{-b} \\ &= -\lim_{b\to 0-} \left(2\sqrt{-b} - 2\sqrt{2}\right) = -\left(0 - 2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Insgesamt:

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

f) $\int\limits_{-1}^{6} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx$

Die Funktion ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert, die uneigentliche Stelle liegt also innerhalb des Integratrionsbereichs.

$$\int\limits_{-1}^{6} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx = \int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx + \int\limits_{2}^{6} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx = \int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx + \int\limits_{2}^{6} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$$

Auswertung des ersten Integrals:

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{b\to 2-} \int\limits_{-1}^{b} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

Substitution:

$$u = 2-x$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \qquad du = -dx \qquad dx = -du$$

Transformation der Grenzen:

$$u(-1) = 2-(-1) = 3$$
$$u(b) = 2-b$$

Damit:

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{b\to 2-} \int\limits_{3}^{2-b} \frac{1}{\sqrt{u}}\,(-du) = -\lim_{b\to 2-} \int\limits_{3}^{2-b} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\lim_{b\to 2-} \left[2\sqrt{u}\right]_{3}^{2-b}$$
$$= -\lim_{b\to 2-} \left(2\sqrt{2-b} - 2\sqrt{3}\right) = -\left(0-2\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

Auswertung des zweiten Integrals:

$$\int\limits_{2}^{6} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+} \int\limits_{a}^{6} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$$

Substitution:

$$u = x-2$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad du = dx$$

Transformation der Grenzen:

$$u(a) = a-2$$
$$u(6) = 6-2 = 4$$

Damit:

$$\int\limits_{2}^{6} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+} \int\limits_{a-2}^{4} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{a\to 2+} \left[2\sqrt{u}\right]_{a-2}^{4} = \lim_{a\to 2+} \left(2\sqrt{4} - 2\sqrt{a-2}\right) = 4-0 = 4$$

Insgesamt:

$$\int_{-1}^{6} \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx \;=\; 2\sqrt{3}+4$$

14.9

a) Für $\alpha > 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{b^{\alpha-1}}+\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{1^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{\alpha-1} < \infty\end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}[\ln(|x|)]_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln(b)-\ln(1)) = \infty$$

Für $\alpha < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\right]_1^b\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}\cdot b^{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\cdot 1^{1-\alpha}\right) = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha}-1\right) = \infty\end{aligned}$$

b) Für $\alpha < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{a\to 0+}\int_a^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{a\to 0+}\left[\frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha}\right]_a^1\\ &= \lim_{a\to 0+}\left(\frac{1}{1-\alpha}\cdot 1^{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\cdot a^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}\end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0+}[\ln(|x|)]_a^1 = \lim_{a\to 0+}(\ln(1)-\ln(a)) = -(-\infty) = \infty$$

Für $\alpha > 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{a\to 0+}\int_a^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{a\to 0+}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha+1}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0+}\left[-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^1\\ &= \lim_{a\to 0+}\left(-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{1^{\alpha-1}}+\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) = \lim_{a\to 0+}\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{a^{\alpha-1}}-1\right) = \infty\end{aligned}$$

15 Numerische Ingegration

Abschnitt 15.2 – Trapezregel

15.1

Auf die rechnerisch aufwendige Durchführung der Trapezregel wird hier verzichtet. Es werden lediglich die Ergebnisse sowie die Formeln für die Fehlerabschätzung angegeben.

a) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(x^2\right)\, dx \approx 0{,}904\,524\,238$

Fehlerabschätzung bei Schrittweite h:

$$|\Delta F| = \frac{1-0}{12} h^2 \max_{0\leq x\leq 1} \left|f''(x)\right|$$

Es ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\sin\left(x^2\right) \\ f''(x) &= -2\sin\left(x^2\right) - 4x^2\cos\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Also:

$$|\Delta F| = \frac{1}{12} h^2 \max_{0\leq x\leq 1} \left|-2\sin\left(x^2\right) - 4x^2\cos\left(x^2\right)\right| \leq \frac{1}{12} h^2 (2+4) = \frac{1}{2} h^2$$

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln(x)}\, dx \approx 1{,}922\,421\,315$

Fehlerabschätzung bei Schrittweite h:

$$|\Delta F| = \frac{4-2}{12} h^2 \max_{2\leq x\leq 4} \left|f''(x)\right|$$

Es ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(\ln(x))^{-2} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(\ln(x))^2} \\ f''(x) &= \left(x(\ln(x))^2\right)^{-2} \cdot \left((\ln(x))^2 + x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{(\ln(x))^2 + 2\ln(x)}{x^2(\ln(x))^4} = \frac{\ln(x)+2}{x^2(\ln(x))^3} \end{aligned}$$

Also:

$$|\Delta F| = \frac{1}{6} h^2 \max_{2\leq x\leq 4} \left|\frac{\ln(x)+2}{x^2(\ln(x))^3}\right| \leq \frac{1}{6} h^2 \frac{\ln(4)+2}{4(\ln(2))^3} = \frac{1+\ln(2)}{12(\ln(2))^3} h^2 \approx 0{,}423\,679\,141 h^2$$

c) $\displaystyle\int_2^6 \frac{e^x}{x}\,dx \approx 81{,}035\,527\,786$

Fehlerabschätzung bei Schrittweite h:

$$|\Delta F| = \frac{6-2}{12}h^2 \max_{2\le x\le 6}\left|f''(x)\right|$$

Es ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \\ f''(x) &= \frac{x^2\left(e^x + (x-1)e^x\right) - (x-1)e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{xe^x + (x^2-x)e^x - 2(x-1)e^x}{x^3} \\ &= \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3} \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} |\Delta F| &= \frac{1}{3}h^2 \max_{2\le x\le 6}\left|\frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}\right| = \frac{1}{3}h^2 \max_{2\le x\le 6}\left|\frac{\left((x-1)^2+1\right)e^x}{x^3}\right| \\ &\le \frac{1}{3}h^2 \frac{\left((6-1)^2+1\right)e^6}{2^3} = \frac{26e^6}{24}h^2 = \frac{13e^6}{12}h^2 \approx 437{,}047\,860h^2 \end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_0^{0,8} \sqrt{1-x^4}\,dx \approx 0{,}765\,035\,485$

Fehlerabschätzung bei Schrittweite h:

$$|\Delta F| = \frac{0{,}8-0}{12}h^2 \max_{0\le x\le 0{,}8}\left|f''(x)\right|$$

Es ist:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} = -\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} \\ f''(x) &= -\frac{\sqrt{1-x^4}\cdot 6x^2 - 2x^3\cdot\left(-\frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\right)}{1-x^4} = -\frac{(1-x^4)6x^2 + 4x^6}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x^6-6x^2}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Also:

$$|\Delta F| = \frac{0{,}8}{12}h^2 \max_{0\le x\le 0{,}8}\left|\frac{2x^6-6x^2}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}\right| \le \frac{0{,}2}{3}h^2\left|\frac{2\cdot 0{,}8^6 - 6\cdot 0{,}8^2}{(1-0{,}8^4)^{\frac{3}{2}}}\right| \approx 0{,}487\,265\,899h^2$$

Abschnitt 15.3 – Kepler-Fassregel und Simpson-Regel

15.3

Es wird nur noch die Fehlerabschätzung besprochen.

a) Nach mehrmaligem Differenzieren ergibt sich:

$$f^{(4)}(x) = 16x^4\cos(x^2) + 48x^2\sin(x^2) - 12\cos(x^2)$$

Also:

$$\begin{aligned} |\Delta F| &= \frac{1-0}{180}h^4 \max_{0\le x\le 1}\left|16x^4\cos(x^2) + 48x^2\sin(x^2) - 12\cos(x^2)\right| \\ &\le \frac{1}{180}h^4(16+48+12) = \frac{19}{45}h^4 \approx 0{,}422\,222\,222h^4 \end{aligned}$$

b) Nach mehrmaligem Differenzieren ergibt sich:

$$f^{(4)}(x) = \frac{2\left(12 + 18\ln(x) + 11\,(\ln(x))^2 + 3\,(\ln(x))^3\right)}{x^4\,(\ln(x))^5}$$

Also:

$$\begin{aligned} |\Delta F| &= \frac{4-2}{180}h^4 \max_{2\le x\le 4}\left|\frac{2\left(12 + 18\ln(x) + 11\,(\ln(x))^2 + 3\,(\ln(x))^3\right)}{x^4\,(\ln(x))^5}\right| \\ &\le \frac{1}{90}h^4 \frac{2\left(12 + 18\ln(4) + 11\,(\ln(4))^2 + 3\,(\ln(4))^3\right)}{2^4\,(\ln(2))^5} \approx 0{,}286\,825\,992h^4 \end{aligned}$$

c) Nach mehrmaligem Differenzieren ergibt sich:

$$f^{(4)}(x) = \frac{e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)}{x^5}$$

Also:

$$\begin{aligned} |\Delta F| &= \frac{6-2}{180}h^4 \max_{2\le x\le 6}\left|\frac{e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)}{x^5}\right| \\ &\le \frac{1}{45}h^4 \frac{e^6(6^4 - 4\cdot 6^3 + 12\cdot 6^2 - 24\cdot 6 + 24)}{2^5} \approx 208{,}438\,209\,971h^4 \end{aligned}$$

d) Nach mehrmaligem Differenzieren ergibt sich:

$$f^{(4)}(x) = -\frac{12(5x^8+14x^4+1)}{(1-x^4)^{\frac{7}{2}}}$$

Also:

$$\begin{aligned} |\Delta F| &= \frac{0{,}8-0}{180}h^4 \max_{0\leq x\leq 0{,}8}\left|-\frac{12(5x^8+14x^4+1)}{(1-x^4)^{\frac{7}{2}}}\right| \\ &\leq \frac{0{,}8}{180}h^4 \cdot \frac{12(5\cdot 0{,}8^8+14\cdot 0{,}8^4+1)}{(1-0{,}8^4)^{\frac{7}{2}}} \approx 2{,}554\,285\,394h^4 \end{aligned}$$

15.5

mit Hilfe einer Stammfunktion

Substitution:

$$u = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \qquad du = 3x^2\,dx \qquad dx = \frac{1}{3x^2}\,du$$

Transformation der Grenzen:

$$u(0) = 0^3 = 0$$
$$u(1) = 1^3 = 1$$

Damit:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=1} x^2\cos\left(x^3\right)\,dx &= \int_{u=0}^{u=1} x^2\cos(u)\,\frac{1}{3x^2}\,du = \frac{1}{3}\int_0^1 \cos(u)\,du = \frac{1}{3}\left[\sin(u)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(\sin(1)-\sin(0)) = \frac{1}{3}\sin(1) \approx 0{,}280\,490\,328 \end{aligned}$$

mit Hilfe der Trapezregel (10 Teilintervalle)

Schrittweite: $h = 0{,}1$

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=1} x^2\cos\left(x^3\right)\,dx &\approx \frac{h}{2}\Big(f(0)+2f(0{,}1)+2f(0{,}2)+\ldots+2f(0{,}9)+f(1)\Big) \\ &= \frac{0{,}1}{2}\Big(0^2\cos 0^3+2\cdot\ 0{,}1^2\cos 0{,}1^3+2\cdot\ 0{,}2^2\cos 0{,}2^3+2\cdot\ 0{,}3^2\cos 0{,}3^3 \\ &\qquad +2\cdot\ 0{,}4^2\cos 0{,}4^3+2\cdot\ 0{,}5^2\cos 0{,}5^3+2\cdot\ 0{,}6^2\cos 0{,}6^3+2\cdot\ 0{,}7^2\cos 0{,}7^3 \\ &\qquad +2\cdot\ 0{,}8^2\cos 0{,}8^3+2\cdot\ 0{,}9^2\cos 0{,}9^3+1^2\cos 1^3\Big) \\ &= 0{,}279\,299\,255 \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\cos\left(x^3\right) - x^2\sin\left(x^3\right)\cdot 3x^2 \;=\; 2x\cos\left(x^3\right) - 3x^4\sin\left(x^3\right) \\
f''(x) &= 2\cos\left(x^3\right) - 2x\sin\left(x^3\right)\cdot 3x^2 - \left(12x^3\sin\left(x^3\right) + 3x^4\cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2\right) \\
&= 2\cos\left(x^3\right) - 18x^3\sin\left(x^3\right) - 9x^6\cos\left(x^3\right) \\
|\Delta F| &\le \frac{b-a}{12}\cdot h^2\cdot \max_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right| \;=\; \frac{1-0}{12}\cdot 0{,}1^2\cdot \max_{0\le x\le 1}\left|2\cos\left(x^3\right) - 18x^3\sin\left(x^3\right) - 9x^6\cos\left(x^3\right)\right| \\
&\le \frac{1}{12}\cdot 0{,}01\cdot(2+18+9) \;\approx\; 0{,}024
\end{aligned}$$

Exakter Fehler:

$$|\Delta F| \;=\; |0{,}279\,299\,255 - 0{,}280\,490\,328| \;=\; 0{,}001\,191\,073$$

mit Hilfe der Kepler-Fassregel

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{x=0}^{x=1} x^2\cos\left(x^3\right)\,dx \;\approx\; \frac{1-0}{6}\left(f(0) + 4f\left(\frac{0+1}{2}\right) + f(1)\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(0^2\cos\left(0^3\right) + 4\cdot\, 0{,}5^2\cos\left(0{,}5^3\right) + 1^2\cos\left(1^3\right)\right) \;=\; 0{,}255\,416\,662
\end{aligned}$$

Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= -2\sin\left(x^3\right)\cdot 3x^2 - \left(54x^2\sin\left(x^3\right) + 18x^3\cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2\right) - \left(54x^5\cos\left(x^3\right) - 9x^6\sin\left(x^3\right)\cdot 3x^2\right) \\
&= -60x^2\sin\left(x^3\right) - 108x^5\cos\left(x^3\right) + 27x^8\sin\left(x^3\right) \\
f^{(4)}(x) &= -120x\sin\left(x^3\right) - 60x^2\cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2 - \left(540x^4\cos\left(x^3\right) - 108x^5\sin\left(x^3\right)\cdot 3x^2\right) \\
&\qquad + 216x^7\sin\left(x^3\right) + 27x^8\cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2 \\
&= -120x\sin\left(x^3\right) - 720x^4\cos\left(x^3\right) + 540x^7\sin\left(x^3\right) + 81x^{10}\cos\left(x^3\right) \\
|\Delta F| &\le \frac{(b-a)^5}{2\,880}\cdot \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right| \\
&= \frac{1-0}{2\,880}\max_{0\le x\le 1}\left|-120x\sin\left(x^3\right) - 720x^4\cos\left(x^3\right) + 540x^7\sin\left(x^3\right) + 81x^{10}\cos\left(x^3\right)\right| \\
&\le \frac{1}{2\,880}\left(120+720+540+81\right) \;\approx\; 0{,}507
\end{aligned}$$

Exakter Fehler:

$$|\Delta F| \;=\; |0{,}255\,416\,662 - 0{,}280\,490\,328| \;=\; 0{,}025\,073\,666$$

mit Hilfe der Simpson-Regel

Schrittweite: $h = 0{,}1$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{x=0}^{x=1} x^2 \cos\left(x^3\right)\, dx \\
&\approx \frac{h}{3}\Big(f(0)+4f(0{,}1)+2f(0{,}2)+4f(0{,}3)+2f(0{,}4)+4f(0{,}5)+2f(0{,}6)+4f(0{,}7) \\
&\qquad +2f(0{,}8)+4f(0{,}9)+f(1)\Big) \\
&= \frac{0{,}1}{3}\Big(0^2\cos 0^3+4\cdot\, 0{,}1^2\cos 0{,}1^3+2\cdot\, 0{,}2^2\cos 0{,}2^3+4\cdot\, 0{,}3^2\cos 0{,}3^3 \\
&\qquad +2\cdot\, 0{,}4^2\cos 0{,}4^3+4\cdot\, 0{,}5^2\cos 0{,}5^3+2\cdot\, 0{,}6^2\cos 0{,}6^3+4\cdot\, 0{,}7^2\cos 0{,}7^3 \\
&\qquad +2\cdot\, 0{,}8^2\cos 0{,}8^3+4\cdot\, 0{,}9^2\cos 0{,}9^3+1^2\cos 1^3\Big) \\
&= 0{,}280\,439\,851
\end{aligned}
$$

Fehlerabschätzung:

$$
\begin{aligned}
|\Delta F| &\le \frac{b-a}{180}\cdot h^4\cdot \max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right| \\
&= \frac{1-0}{180}\cdot 0{,}1^4\cdot \max_{0\le x\le 1}\left|-120x\sin\left(x^3\right)-720x^4\cos\left(x^3\right)+540x^7\sin\left(x^3\right)+81x^{10}\cos\left(x^3\right)\right| \\
&\le \frac{1}{180}\cdot 0{,}0001\cdot(120+720+540+81) \\
&\approx 0{,}000\,812
\end{aligned}
$$

Exakter Fehler:

$$
|\Delta F| = |0{,}280\,439\,851 - 0{,}280\,490\,328| = 0{,}000\,050\,477
$$

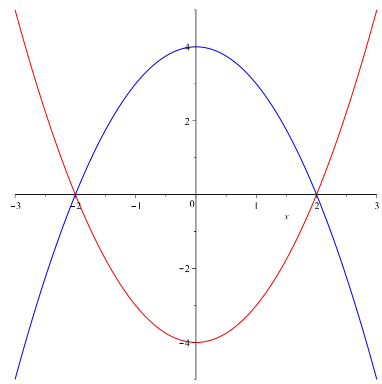
16 Anwendungen der Integralrechnung

Abschnitt 16.1 – Flächenberechnungen

Auf die explizite Berechnung der Stammfunktionen sowie das ausführliche Einsetzen der Integrationsgrenzen wird aus Platzgründen verzichtet.

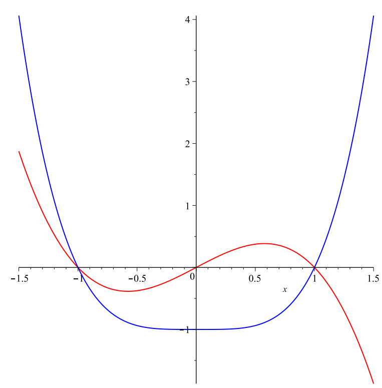
16.1

a)



$$A = \int_{-2}^{2} \left((-x^2+4)-(x^2-4)\right)\,dx = \int_{-2}^{2} \left(-2x^2+8\right)\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}$$

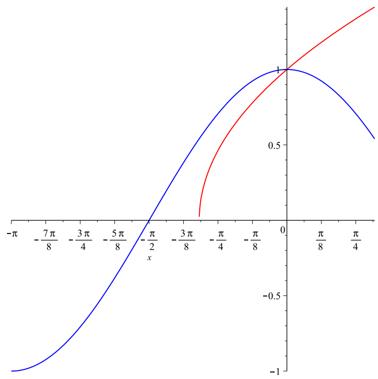
b)



$$A = \int_{-1}^{1} \left((-x^3+x)-(x^4-1)\right)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(-x^4-x^3+x+1\right)\,dx$$

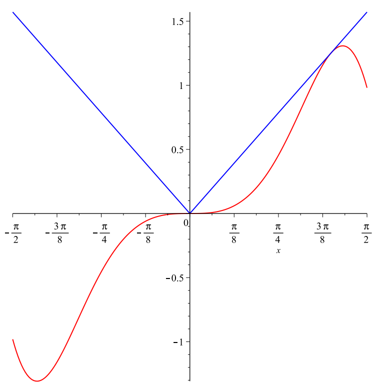
$$= \left[-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{5}$$

c)



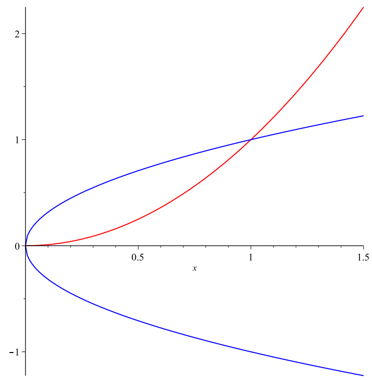
$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-1} \cos(x)\,dx + \int_{-1}^{0} \left(\cos(x) - \sqrt{x+1}\right)\,dx = [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{-1} + \left[\sin(x) - \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{1}{3}$$

d)



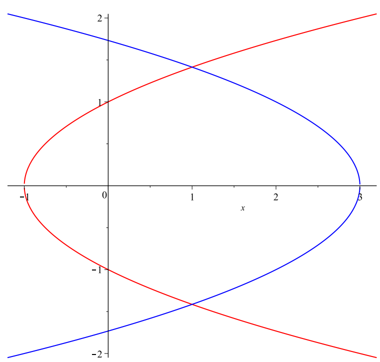
$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-x - x\sin(x^2)\right)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x - x\sin(x^2)\right)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{\cos^2(x)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\cos^2(x)}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

e)



$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\, dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

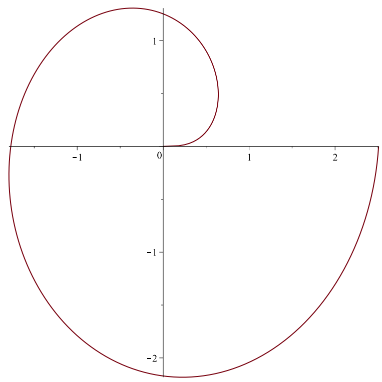
f)



$$A = 4\int_{-1}^{1} \sqrt{x+1}\, dx = 4\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = 4\cdot\frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

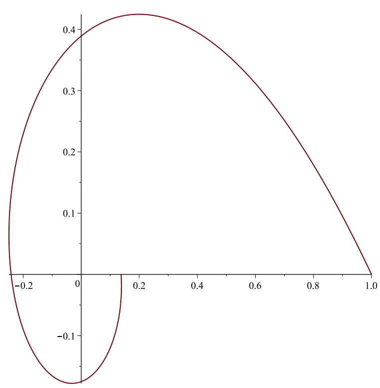
16.2

a)



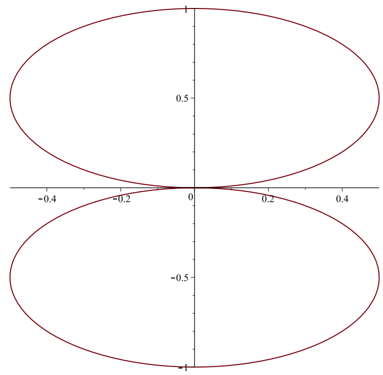
$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\varphi \, d\varphi = \left[\frac{1}{4}\varphi^2\right]_0^{2\pi} = \pi^2$$

b)



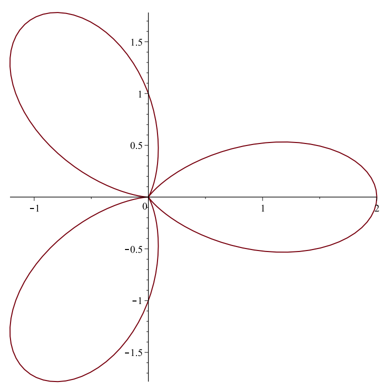
$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\varphi+1)^2} \, d\varphi = \left[-\frac{1}{2(\varphi+1)}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi+1}$$

c)



$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \sin^2(\varphi)\, d\varphi = \left[\frac{\varphi}{4} - \frac{1}{4}\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

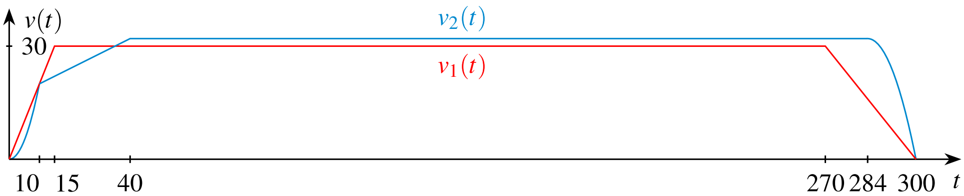
d)



$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot (1+\cos(3\varphi))^2\, d\varphi = \left[\frac{3}{4}\varphi + \frac{1}{3}\sin(3\varphi) + \frac{1}{12}\sin(3\varphi)\cos(3\varphi)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi$$

16.3

a)



b) Die überstrichene Fläche ist gerade der zurückgelegte Weg.
Auto 1:

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^{15} 2t\,dt + \int_{15}^{270} 30\,dt + \int_{270}^{300} (300-t)\,dt \\ &= \left[t^2\right]_0^{15} + [30t]_{15}^{270} + \left[300t - \frac{t^2}{2}\right]_{270}^{300} \\ &= 225 + 7\,650 + 450 \;=\; 8\,325 \;[\mathrm{m}] \end{aligned}$$

Auto 2:

$$\begin{aligned} s_2 &= \int_0^{10} 0{,}2t^2\,dt + \int_{10}^{40} (16+0{,}4t)\,dt + \int_{40}^{284} 32\,dt + \int_{284}^{300} \left(32 - 0{,}125(t-284)^2\right)\,dt \\ &= \left[\frac{0{,}2}{30}t^3\right]_0^{10} + \left[16t + 0{,}2t^2\right]_{10}^{40} + [32t]_{40}^{284} + \left[32t - \frac{0{,}125}{3}(t-284)^3\right]_{284}^{300} \\ &= 66{,}7 + 780 + 7\,808 + 341{,}3 \;=\; 8\,996 \;[\mathrm{m}] \end{aligned}$$

Das 2. Auto ist weiter gefahren.

Abschnitt 16.2 – Volumina von Rotationskörpern

16.3

a) $V \;=\; \pi \int_0^h \sqrt{x}^2\,dx \;=\; \pi \int_0^h x\,dx \;=\; \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^h \;=\; \frac{1}{2}\pi h^2$

b) $V \;=\; \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx \;=\; \pi \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{\pi^2}{2}$

c) $V \;=\; \pi \int_1^3 \left(\frac{3}{4-x}\right)^2 dx \;=\; \pi \left[\frac{9}{4-x}\right]_1^3 \;=\; 6\pi$

16.5

Der Meridian des Rotationsellipsoids lautet

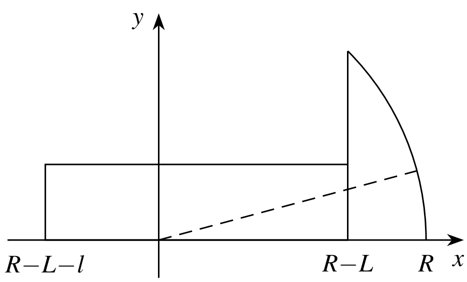
$$y = f(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Damit ergibt sich als Volumen:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} \\ &= \pi b^2 \left(a - \frac{a^3}{3a^2} - (-a) + \frac{(-a)^3}{3a^2}\right) = \pi b^2 \left(a - \frac{a}{3} + a - \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2 \end{aligned}$$

16.6

Wahl eines geeigneten Koordinatensystems:



Damit beträgt das Volumen

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kugelkappe}} \\ &= \pi \int_{R-L-l}^{R-L} \left(\frac{d}{2}\right)^2 dx + \pi \int_{R-L}^{R} \sqrt{R^2-x^2}^{\,2} \, dx \\ &= \pi \int_{R-L-l}^{R-L} \frac{d^2}{4} \, dx + \pi \int_{R-L}^{R} (R^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{d^2}{4} x\right]_{R-L-l}^{R-L} + \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3\right]_{R-L}^{R} \\ &= \pi \left(\frac{d^2}{4}(R-L) - \frac{d^2}{4}(R-L-l)\right) + \pi \left(\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) - \left(R^2(R-L) - \frac{1}{3}(R-L)^3\right)\right) \\ &= \pi \frac{d^2}{4} l + \pi \left(\frac{2}{3}R^3 - R^3 + R^2 L + \frac{1}{3}R^3 - R^2 L + R L^2 - \frac{1}{3} L^3\right) \\ &= \pi \left(\frac{d^2}{4} l + R L^2 - \frac{1}{3} L^3\right). \end{aligned}$$

16.7

Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ gemäß

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

in n Teile und ersetzen in den Teilintervallen $[x_{k-1},x_k]$ das Volumen durch senkrechte Prismen mit der Länge $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ und dem quadratischen Grundriss mit der halben Seitenlänge $r_k = f(\xi_k)$, wobei ξ_k eine Zwischenstelle im Intervall $[x_{k-1},x_k]$ ist. Mit dieser Annäherung gilt näherungsweise

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} (2r_k)^2 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 4\big(f(\xi_k)\big)^2 \cdot \Delta x_k = 4\sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\Delta x_k \\ &\xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}]{} 4\int_a^b f^2(x)\,dx. \end{aligned}$$

Für eine quadratische Pyramide mit der Grundseite a und der Höhe h lautet die Funktion

$$f(x) = \tan(\alpha x) = \frac{\frac{a}{2}}{h}x = \frac{a}{2h}x, \qquad 0 \le x \le h.$$

Damit beträgt das Volumen der ganzen Pyramide

$$V = 4\int_0^h \left(\frac{a}{2h}x\right)^2 dx = 4\frac{a^2}{4h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{a^2 h}{3}.$$

Das Volumen der oberen Hälfte der Pyramide beträgt

$$V_{oH} = 4\int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{a}{2h}x\right)^2 dx = \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{h}{2}} = \frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{h^3}{24} = \frac{a^2 h}{24} = \frac{1}{8}V.$$

Damit liegt $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ des Volumens der Pyramide in der unteren Hälfte.

Abschnitt 16.3 – Physikalische Anwendungen

16.8

Für die Auslenkung s benötigt man die Gegenkraft

$$F_G = D \cdot s.$$

Damit beträgt die Arbeit zum Auslenken der Feder auf s_0

$$W = \int_0^{s_0} D\cdot s\,ds = \left[\frac{1}{2}Ds\right]_0^{s_0} = \frac{1}{2}Ds_0^2.$$

16.9

Die benötigte Arbeit beträgt:

$$\begin{aligned} W &= \int_R^\infty G\frac{Mm}{s^2}\,ds = GMm\lim_{b\to\infty}\int_R^b \frac{1}{s^2}\,ds = GMm\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}\right]_R^b \\ &= GMm\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{R}\right) = G\frac{Mm}{R} = 6{,}670\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1}{6\,370\cdot 10^3} \approx 62{,}6\ [\mathrm{Nm}] \end{aligned}$$

16.10

Der „Umfang" beträgt abhängig von der Tiefe h

$$U(h) = 500 - 2\cdot\frac{100}{50}h = 500-4h.$$

Die Kraft auf die Staumauer beträgt somit

$$\begin{aligned} F &= \rho g\int_0^{50} U(h)\cdot h\,dh = \rho g\int_0^{50}\left(500h-4h^2\right)\,dh = \rho g\left[250h^2-\frac{4}{3}h^3\right]_0^{50} \\ &= 1\,000\cdot 9{,}81\cdot\left(250\cdot 50^2-\frac{4}{3}\cdot 50^3\right) \approx 4{,}496\cdot 10^9\ [\mathrm{N}]\,. \end{aligned}$$

16.11

a) Die Masse des Drehzylinders beträgt

$$M_{\text{Zylinder}} = \rho\cdot V_{\text{Zylinder}} = \rho\pi r^2 h.$$

Bis zur Höhe x:

$$M(x) = \rho\pi r^2\cdot x$$

Als Massenänderung ergibt sich daraus

$$f(x) = \frac{dM}{dx} = \rho\pi r^2.$$

Als Schwerpunktskoordinate auf der Rotationsachse ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M_{\text{Zylinder}}}\int_0^h xf(x)\,dx = \frac{1}{\rho\pi r^2 h}\int_0^h x\rho\pi r^2\,dx = \frac{1}{h}\int_0^h x\,dx = \frac{1}{h}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h \\ &= \frac{1}{h}\cdot\frac{h^2}{2} = \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

b) Die Masse der quadratischen Pyramide beträgt

$$M_{\text{Pyramide}} = \rho \cdot V_{\text{Pyramide}} = \rho \cdot \frac{1}{3}a^2 h = \frac{\rho}{3}a^2 h.$$

Von der Spitze aus gemessen bis zur Tiefe x:

$$M(x) = \frac{\rho}{3}\left(a\frac{x}{h}\right)^2 x = \frac{\rho a^2}{3h^2}x^3$$

Als Massenänderung ergibt sich daraus

$$f(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{\rho a^2}{h^2}x^2.$$

Als Schwerpunktskoordinate auf der Symmetrieachse ergibt sich somit von der Spitze aus gemessen

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{M_{\text{Pyramide}}}\int_0^h x f(x)\,dx = \frac{1}{\frac{\rho}{3}a^2 h}\int_0^h x\frac{\rho a^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{3}{h^3}\int_0^h x^3\,dx = \frac{3}{h^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^h \\ &= \frac{3}{h^3}\cdot\frac{h^4}{4} = \frac{3}{4}h\end{aligned}$$

bzw. von der Basis her gemessen

$$\bar{x}_{\text{Basis}} = h - \frac{3}{4}h = \frac{h}{4}.$$

c) Die Masse des Drehkegelstumpfes beträgt

$$M_{\text{Kegelstumpf}} = \rho \cdot V_{\text{Kegelstumpf}} = \rho \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h - \rho \cdot \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\frac{h}{2} = \frac{7}{24}\rho\pi r^2 h.$$

Von der Spitze aus gemessen bis zur Tiefe x $(x \geq \frac{h}{2})$:

$$M(x) = \rho \cdot \frac{1}{3}\pi\left(r\frac{x}{h}\right)^2 x - \rho \cdot \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\frac{h}{2} = \frac{\rho\pi r^2}{3}\left(\frac{x^3}{h^2} - \frac{h}{8}\right)$$

Als Massenänderung ergibt sich daraus

$$f(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{\rho\pi r^2}{h^2}x^2.$$

Als Schwerpunktskoordinate auf der Symmetrieachse ergibt sich somit von der Spitze aus gemessen

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{M_{\text{Kegelstumpf}}}\int_{\frac{h}{2}}^h x f(x)\,dx = \frac{1}{\frac{7}{24}\rho\pi r^2 h}\int_{\frac{h}{2}}^h x\frac{\rho\pi r^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{24}{7h^3}\int_{\frac{h}{2}}^h x^3\,dx \\ &= \frac{24}{7h^3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{\frac{h}{2}}^h = \frac{24}{7h^3}\left(\frac{h^4}{4} - \frac{h^4}{16\cdot 4}\right) = \frac{24}{7h^3}\cdot\frac{15h^4}{16\cdot 4} = \frac{45}{56}h\end{aligned}$$

bzw. von der Basis her gemessen

$$\bar{x}_{\text{Basis}} = h - \frac{45}{56}h = \frac{11}{56}h.$$

d) Die Masse der Halbkugel beträgt

$$M_{\text{Halbkugel}} = \rho \cdot V_{\text{Halbkugel}} = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2\rho\pi}{3} r^3.$$

Bis zur vom Äquator aus gemessene Höhe x laut Formelsammlung:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{2\rho\pi}{3} r^3 - \rho \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot (r-x)^2 \cdot (3r-(r-x)) \\ &= \frac{2\rho\pi}{3} r^3 - \frac{\rho\pi}{3}(r-x)^2(2r+x) = -\frac{\rho\pi}{3} r^3 + \rho\pi r^2 x - \frac{\rho\pi}{3} x^3 \end{aligned}$$

Als Massenänderung ergibt sich daraus

$$f(x) = \frac{dM}{dx} = \rho\pi r^2 - \rho\pi x^2 = \rho\pi\left(r^2 - x^2\right).$$

Als Schwerpunktskoordinate über dem Kugelmittelpunkt ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M_{\text{Zylinder}}} \int_0^r x f(x)\, dx = \frac{1}{\frac{2\rho\pi}{3} r^3} \int_0^r \rho\pi x \left(r^2 - x^2\right)\, dx \\ &= \frac{3}{2r^3} \int_0^r (r^2 x - x^3)\, dx = \frac{3}{2r^3} \left[\frac{r^2}{2} x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{3}{2r^3} \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}\right) = \frac{3}{8} r. \end{aligned}$$

Abschnitt 16.4 – Wahrscheinlichkeitsrechnung

16.12

a) Es muss gelten:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^2 c x^3\, dx = \left[c \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = c\frac{16}{4} - 0 = 4c$$

Also ist

$$c = \frac{1}{4}.$$

b) Wahrscheinlichkeit für eine Abgabe in der letzten Viertelstunde:

$$\begin{aligned} P(1{,}75 < x \leq 2) &= \int_{1{,}75}^{2} f(x)\, dx = \int_{1{,}75}^{2} \frac{1}{4} x^3\, dx = \left[\frac{1}{16} x^4\right]_{1{,}75}^{2} \\ &= 1 - \frac{1}{16} \cdot 1{,}75^4 \approx 0{,}414 = 41{,}4\% \end{aligned}$$

c) Der Erwartungswert beträgt:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{4} x^3\, dx \overset{\text{Maple}}{=} \frac{8}{5} = 1{,}6\ [h]$$

16.13

b) 5 % der Sollfüllmenge von 700 ml sind 35 ml.
Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung von maximal 5 % von der Sollfüllmenge von 700 ml:

$$\begin{aligned} p(700-35 \le x \le 700+35) &= \int_{700-35}^{700+35} f(x)\, dx \\ &= \int_{665}^{735} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 25}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-700}{25}\right)^2}\, dx \\ &\overset{\text{CAS}}{\approx} 0{,}838 = 83{,}8\,\% \end{aligned}$$

Damit diese Wahrscheinlichkeit 99 % beträgt, muss für σ gelten:

$$0{,}99 = \int_{665}^{735} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-700}{\sigma}\right)^2}\, dx$$

Ein Computeralgebrasystem liefert als Lösung:

$$\sigma \approx 13{,}6\ [\text{ml}]$$

17 Reihen

Abschnitt 17.1 – Der Reihenbegriff

17.1

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

c) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3^2)^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{9^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8}$

e) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$
$= \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} = 2+\sqrt{2}$

f) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(-2)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(-2)\cdot(-2)^k} = \frac{1}{(-2)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(-2)}\right)^k = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$
$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{5^{2k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^{2k}} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(5^2)^k}$
$= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{25}\right)^k = \frac{1}{5}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{25}\right)^k - \left(-\frac{1}{25}\right)^0\right)$
$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{25}}-1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\frac{26}{25}}-1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{25}{26}-1\right)$
$= \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{26}\right) = -\frac{1}{5\cdot 26} = -\frac{1}{130}$

h) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{(-7)^{2k-1}} = \sum_{k=2}^{\infty} (-7) \cdot \frac{6}{(-7)^{2k}} = (-7) \cdot 6 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{((-7)^2)^k}$

$= -42 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{49^k} = -42 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{49}\right)^k - \left(\frac{1}{49}\right)^0 - \left(\frac{1}{49}\right)^1 \right)$

$= -42 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{49}} - 1 - \frac{1}{49} \right) = -42 \left(\frac{1}{\frac{48}{49}} - \frac{50}{49} \right)$

$= -42 \left(\frac{49}{48} - \frac{50}{49} \right) = -\frac{7 \cdot 49}{8} + \frac{6 \cdot 50}{7} = -\frac{343}{8} + \frac{300}{7}$

$= -\frac{2\,401 + 2\,400}{56} = -\frac{1}{56}$

17.2

a) $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \ldots = q\left(q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots\right)$

$= q \sum_{k=0}^{\infty} q^k = q \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q}$

b) $\sum_{k=n_0}^{\infty} q^k = q^{n_0} + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + q^{n_0+3} + q^{n_0+4} + \ldots$

$= q^{n_0}\left(q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots\right) = q^{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = q^{n_0} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q^{n_0}}{1-q}$

c) $\sum_{k=n_0}^{\infty} cq^k = cq^{n_0} + cq^{n_0+1} + cq^{n_0+2} + cq^{n_0+3} + cq^{n_0+4} + \ldots$

$= cq^{n_0}\left(q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots\right) = cq^{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = cq^{n_0} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{cq^{n_0}}{1-q}$

17.3

Gesamtweg in m:

$$\begin{aligned}
L &= 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}98^2 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}98^3 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}98^4 \cdot 0{,}1 + \ldots \\
&= 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 \left(0{,}98 + 0{,}98^2 + 0{,}98^3 + 0{,}98^4 + \ldots\right) \\
&= 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}98 \left(0{,}98^0 + 0{,}98^1 + 0{,}98^2 + 0{,}98^3 + \ldots\right) \\
&= 0{,}1 + 0{,}196 \sum_{k=0}^{\infty} 0{,}98^k = 0{,}1 + 0{,}196 \cdot \frac{1}{1-0{,}98} = 0{,}1 + 0{,}196 \cdot \frac{1}{0{,}02} \\
&= 0{,}1 + 0{,}196 \cdot 50 = 0{,}1 + 9{,}8 = 9{,}9\,[\mathrm{m}]
\end{aligned}$$

Die Auslenkung beträgt unter 1 mm, wenn:

$$\begin{aligned} 0{,}1 \cdot 0{,}98^k &< 0{,}001 \\ 0{,}98^k &< 0{,}01 \\ \ln\left(0{,}98^k\right) &< \ln(0{,}01) \\ k \ln(0{,}98) &< \ln(0{,}01) \end{aligned}$$

Wegen $\ln(0{,}98) < 0$ folgt daraus:

$$k > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}98)} \approx 227{,}9$$

Also gilt: Mit der 228. Halbschwingung nach dem 1. Nulldurchgang ist die Auslenkung unter 1 mm.

17.4

Für Zenon war es undenkbar, dass eine Summe mit unendlich vielen positiven Summanden (konkret die Summe der von Achilles zurückgelegten Längen und die damit verbundenen Zeiten) endlich bleibt.
Die Länge bis zum Überholungspunkt beträgt

$$\begin{aligned} L &= 1 + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \left(\frac{1}{12}\right)^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^k \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{11}{12}} = \frac{12}{11} \text{ [Stadien].} \end{aligned}$$

17.5

a) $$\begin{aligned} 0{,}\overline{1} &= 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 + \ldots \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots \\ &= \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \ldots \\ &= \frac{1}{10}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^0 + \left(\frac{1}{10}\right)^1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{10}{9} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 0{,}\overline{9} &= 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + 0{,}00009 + \ldots \\ &= 9 \cdot (0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 + \ldots) \\ &\overset{(a)}{=} 9 \cdot \frac{1}{9} = 1 \end{aligned}$$

c) $0{,}\overline{15} = 0{,}15 + 0{,}0015 + 0{,}000015 + 0{,}00000015 + \ldots$

$$= \frac{15}{100} + \frac{15}{10\,000} + \frac{15}{1\,000\,000} + \frac{15}{100\,000\,000} + \ldots$$

$$= \frac{15}{100^1} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \frac{15}{100^4} + \ldots$$

$$= \frac{15}{100}\left(\left(\frac{1}{100}\right)^0 + \left(\frac{1}{100}\right)^1 + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$= \frac{15}{100}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{15}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{15}{100}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{15}{100}\cdot\frac{100}{99}$$

$$= \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

d) $-0{,}00\overline{31} = -(0{,}0031 + 0{,}000031 + 0{,}00000031 + 0{,}0000000031 + \ldots)$

$$= -\left(\frac{31}{10\,000} + \frac{31}{1\,000\,000} + \frac{31}{100\,000\,000} + \frac{31}{10{,}000\,000\,000} + \ldots\right)$$

$$= -\left(\frac{31}{100^2} + \frac{31}{100^3} + \frac{31}{100^4} + \frac{31}{100^5} + \ldots\right)$$

$$= -\frac{31}{100^2}\left(\left(\frac{1}{100}\right)^0 + \left(\frac{1}{100}\right)^1 + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$= -\frac{31}{100^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^k = -\frac{31}{100^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = -\frac{31}{100^2}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$= -\frac{31}{100^2}\cdot\frac{100}{99} = -\frac{31}{9\,900}$$

e) $1{,}6\overline{123} = 1{,}6 + 0{,}0123 + 0{,}0000123 + 0{,}0000000123 + 0{,}0000000000123 + \ldots$

$$= 1{,}6 + \left(\frac{123}{10\,000} + \frac{123}{10\,000\,000} + \frac{123}{10\,000\,000\,000} + \frac{123}{10\,000\,000\,000\,000} + \ldots\right)$$

$$= 1{,}6 + \frac{123}{10\,000}\left(1 + \frac{1}{1\,000} + \frac{1}{1\,000\,000} + \frac{1}{1\,000\,000\,000} + \ldots\right)$$

$$= 1{,}6 + \frac{123}{10\,000}\left(\left(\frac{1}{1\,000}\right)^0 + \left(\frac{1}{1\,000}\right)^1 + \left(\frac{1}{1\,000}\right)^2 + \left(\frac{1}{1\,000}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$= 1{,}6 + \frac{123}{10\,000}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1\,000}\right)^k = 1{,}6 + \frac{123}{10\,000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1\,000}}$$

$$= 1{,}6 + \frac{123}{10\,000}\cdot\frac{1}{\frac{999}{1\,000}} = 1{,}6 + \frac{123}{10\,000}\cdot\frac{1\,000}{999} = \frac{16}{10} + \frac{123}{9\,990}$$

$$= \frac{15\,984 + 123}{9\,990} = \frac{16\,107}{9\,990} = \frac{5\,369}{3\,330}$$

17.6

Die Reihe

$$1-1+1-1+1-1+1-1+-\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

ist nicht konvergent, da

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k$$

nicht existiert. Aus diesem Grund ist die Argumentationskette an dieser Stelle unzulässig.

Abschnitt 17.2 – Konvergenzkriterien

17.7

a) Leibniz-Kriterium:

1.) Die Reihe ist alternierend: Wegen $\frac{1}{\sqrt{k}} > 0$ ✓

2.) Die Reihenglieder bilden betragsmäßig eine Nullfolge:

$$\lim_{k\to\infty}|a_k| = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = 0$$

3.) $(|a_k|)$ ist monoton (fallend):

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| &\leq |a_k| \\ \frac{1}{\sqrt{k+1}} &\leq \frac{1}{\sqrt{k}} \\ \sqrt{k} &\leq \sqrt{k+1} \quad ✓ \end{aligned}$$

Die Reihe ist also konvergent.

b) Leibniz-Kriterium:

1.) Die Reihe ist alternierend: Wegen $k \geq 1$ ist $\frac{1}{2k-1} > 0$ ✓

2.) Die Reihenglieder bilden betragsmäßig eine Nullfolge:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}} = \frac{0}{2} = 0$$

3.) $(|a_k|)$ ist monoton (fallend):

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| &\leq |a_k| \\ \frac{1}{2(k+1)-1} &\leq \frac{1}{2k-1} \\ \frac{1}{2k+1} &\leq \frac{1}{2k-1} \\ 2k-1 &\leq 2k+1 \\ -1 &\leq 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die Reihe ist also konvergent.

c) Divergenzkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k+3} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2+\frac{3}{k}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Demzufolge gilt für die Folge der Summanden

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0,$$

d. h. die Reihe ist divergent.

d) Leibniz-Kriterium:

1.) Die Reihe ist alternierend: Wegen $k > \ln(k)$ für $k \geq 2$ ist $\frac{1}{k-\ln(k)} > 0$ ✓

2.) Die Reihenglieder bilden betragsmäßig eine Nullfolge:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k-\ln(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{\ln(k)}{k}}$$

Es ist nach der Regel von Bernoulli-de l'Hospital

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k)}{k} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{1} = 0$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \frac{0}{1-0} = 0$$

3.) $(|a_k|)$ ist monoton (fallend):

$$\begin{aligned}
|a_{k+1}| &\leq |a_k| \\
\frac{1}{(k+1)-\ln(k+1)} &\leq \frac{1}{k-\ln(k)} \\
k-\ln(k) &\leq (k+1)-\ln(k+1) \\
-\ln(k) &\leq 1-\ln(k+1) \\
\ln(k+1)-\ln(k) &\leq 1 \\
\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) &\leq 1 \\
\frac{k+1}{k} &\leq e^1 \\
1+\frac{1}{k} &\leq e \quad \text{wegen } k \geq 2 \checkmark
\end{aligned}$$

Die Reihe ist also konvergent.

e) Divergenzkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)} = \frac{1}{\cos(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Demzufolge gilt für die Folge der Summanden

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0,$$

d. h. die Reihe ist divergent.

f) Leibniz-Kriterium:

1.) Die Reihe ist alternierend: Wegen $\frac{k}{(k-3)^2+1} > 0$ ✓

2.) Die Reihenglieder bilden betragsmäßig eine Nullfolge:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{(k-3)^2+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k^2-6k+10} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{6}{k}+\frac{10}{k^2}} = 0$$

3.) $(|a_k|)$ ist monoton (fallend):

$$\begin{aligned}
|a_{k+1}| &\leq |a_k| \\
\frac{k+1}{((k+1)-3)^2+1} &\leq \frac{k}{(k-3)^2+1} \\
(k+1)\left((k-3)^2+1\right) &\leq k\left((k-2)^2+1\right) \\
(k+1)(k^2-6k+10) &\leq k(k^2-4k+5) \\
k^3-6k^2+10k+k^2-6k+10 &\leq k^3-4k^2+5k \\
0 &\leq k^2+k-10 \\
0 &\leq \left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-10 \\
\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 &\geq \frac{41}{4}
\end{aligned}$$

Wegen $k > 0$ ist dies äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
k+\frac{1}{2} &\geq \frac{\sqrt{41}}{2} \\
k &\geq \frac{\sqrt{41}-1}{2} \qquad \text{wegen } k \geq 4 \checkmark
\end{aligned}$$

Die Reihe ist also konvergent.

17.8

Es ist

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+3}{(10k+5)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+3}{100k^2+100k+25} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{3}{k^2}}{100+\frac{100}{k}+\frac{25}{k^2}} = \frac{1}{100}.$$

Demzufolge gilt für die Folge der Summanden

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0,$$

d. h. die Reihe ist divergent.
Dies ist kein Widerspruch zum Leibniz-Kriterium, da für die Anwendbarkeit des Leibniz-Kriteriums die Summenglieder notwendig betragsmäßig eine Nullfolge bilden müssen, was hier nicht erfüllt ist.

17.9

a) Für alle $k \geq 2$ gilt $0 \leq \ln k \leq k$ und damit

$$\frac{1}{\ln(k)} \geq \frac{1}{k}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ist zudem

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 = \infty,$$

d. h. wir haben eine divergente Minorante. Nach dem Minorantenkriterium ist damit

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)} = \infty,$$

also divergent.

b) Für alle $k \geq 0$ gilt $2^k + k \geq 2^k$ und damit

$$\left|\frac{1}{2^k + k}\right| = \frac{1}{2^k + k} \leq \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Als geometrische Reihe ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

konvergent, d. h. wir haben eine konvergente Majorante. Nach dem Majorantenkriterium ist damit auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + k}$$

konvergent.

c) Für alle $k \geq 2$ gilt $\sqrt{k^2-k} \leq \sqrt{k^2}$ und damit

$$\frac{1}{\sqrt{k^2-k}} \geq \frac{1}{\sqrt{k^2}} = \frac{1}{k}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ist zudem

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 = \infty,$$

d. h. wir haben eine divergente Minorante. Nach dem Minorantenkriterium ist damit

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2-k}} = \infty,$$

also divergent.

d) Für alle $k \geq 2$ gilt $k^k \geq 2^k$ und damit

$$\left|(-k)^{-k}\right| = \frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Als geometrische Reihe ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

konvergent, d. h. wir haben eine konvergente Majorante der Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-k)^{-k}$. Damit ist auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-k)^{-k} = (-1)^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-k)^{-k}$$

konvergent (ein zusätzlicher Summand macht nichts aus).

17.10

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)\cdot 2^k}{k \cdot 2^{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k+1}{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{k}}{2}$

$= \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} < 1$

Die Reihe ist konvergent.

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{\frac{(-3)^{k+1}}{2(k+1)+1}}{\frac{(-3)^k}{2k+1}}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\frac{3^{k+1}}{2(k+1)+1}}{\frac{3^k}{2k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{3^{k+1}\cdot(2k+1)}{3^k\cdot(2k+3)} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{3(2k+1)}{2k+3}$

$= \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{6k+3}{2k+3} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{6+\frac{3}{k}}{2+\frac{3}{k}} = \dfrac{6+0}{2+0} = \dfrac{6}{2} = 3 > 1$

Die Reihe ist divergent.

c) $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\frac{100^{k+1}}{1\cdot2\cdots k\cdot(k+1)}}{\frac{100^k}{1\cdot2\cdots k}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{100^{k+1}\cdot1\cdot2\cdots k}{100^k\cdot1\cdot2\cdots k\cdot(k+1)} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{100}{k+1} = 0 < 1$

Die Reihe ist konvergent.

d) $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\frac{1\cdot2\cdots k\cdot(k+1)}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{1\cdot2\cdots k}{k^k}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1\cdot2\cdots k\cdot(k+1)\cdot k^k}{1\cdot2\cdots k\cdot(k+1)^{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(k+1)\cdot k^k}{(k+1)^{k+1}}$

$= \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k^k}{(k+1)^k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$

$= \dfrac{1}{e} < 1$

Die Reihe ist konvergent.

17.11

a) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\dfrac{1}{k^{k-1}}} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\dfrac{k}{k^k}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{k^k}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\overbrace{\sqrt[k]{k}}^{\to 1}}{k} = 0 < 1$

Die Reihe ist konvergent.

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\dfrac{2k-1}{k}\right)^k} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2k-1}{k} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{k}}{1} = 2 > 1$

Die Reihe ist divergent.

c) $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\left(\sqrt[k]{k-1}-\dfrac{1}{2}\right)^k\right|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\sqrt[k]{k-1}-\dfrac{1}{2}\right)^k}$

$= \lim\limits_{k\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt[k]{k-1}}_{\to 1}-\dfrac{1}{2}\right) = 1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} < 1$

Die Reihe ist konvergent.

d) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{3k+3}\right)^{k^2}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\left(\frac{k}{3k+3}\right)^{k^2}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{k}{3k+3}\right)^{k^2\cdot\frac{1}{k}}$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{3k+3}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3+\frac{3}{k}}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\right) = 0\cdot\frac{1}{e} = 0 < 1$$

Die Reihe ist konvergent.

17.12

Gehen wir zunächst davon aus, dass $\alpha < 1$ gilt. Es existiert damit eine Zahl c mit der Eigenschaft

$$\alpha < c < 1.$$

Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \alpha$ existiert eine Stelle k_0, ab welcher

$$\sqrt[k]{|a_k|} < c$$

bzw.

$$|a_k| < c^k$$

gilt. Nun ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} c^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{1}{1-c}$$

konvergent und damit konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_{k_0+i}| = a_{k_0} + a_{k_0+1} + a_{k_0+2} + a_{k_0+3} + \ldots = \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|.$$

Da einige weitere Summanden $a_0, a_1, \ldots, a_{k_0-1}$ nur eine Erhöhung der Reihensumme um die entsprechenden Werte bewirken und das Konvergenzverhalten nicht beeinflussen, muss auch die ursprüngliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$$

konvergent sein.

In dem Fall, dass $\alpha > 1$ ist, gilt ab einem gewissen k_0

$$\sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

und damit für alle $k > k_0$

$$|a_k| > 1^k = 1 \neq 0.$$

Dies bedeutet insbesondere, dass die Folge der Summanden (a_k) keine Nullfolge ist. Nach dem Divergenzkriterium kann keine Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ vorliegen, die Reihe ist divergent. $\square$

17.13

a) Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2\cdot 2^k}{k^2\cdot 2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+0}{1}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$$

Die Reihe ist konvergent.

b) Divergenzkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k}{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{k}}} = \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1 \neq 0$$

Die Reihe ist divergent.

c) Wurzelkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\sin^k\left(\frac{1}{k}\right)\right|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\underbrace{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}_{>0}\right|^k} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k} = \lim_{k\to\infty}\sin\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$= \sin(0) = 0 < 1$$

Die Reihe ist konvergent.

d) Minorantenkriterium:

$$a_k = \frac{k}{k^2-1} > \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

und es ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 = \infty.$$

Damit ist auch

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-1} = \infty.$$

Die Reihe ist divergent.

e) Wurzelkriterium:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}\right)^{\frac{1}{k}}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2\cdot\frac{1}{k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}} = \frac{1}{e} < 1$$

Die Reihe ist konvergent.

f) Leibniz-Kriterium:

1.) Die Reihe ist alternierend: Wegen $\frac{\ln(k)}{k} > 0$ ✓

2.) Die Reihenglieder bilden betragsmäßig eine Nullfolge:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k)}{k} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}}{1} = 0$$

3.) $(|a_k|)$ ist monoton (fallend):
Es ist

$$\left(\frac{\ln k}{k}\right)' = \frac{k\cdot\frac{1}{k} - \ln(k)\cdot 1}{k^2} = \frac{1-\ln(k)}{k^2} < 0 \qquad \text{für } k > 1.$$

Demzufolge ist die Folge $(|a_k|) = \frac{\ln(k)}{k}$ monoton fallend.

Die Reihe ist also konvergent.

g) Wurzelkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{4k-3}{\sqrt{k\cdot 3^k}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{4k-3}}{\sqrt[k]{\sqrt{k\cdot 3^k}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{4k-3}}{\left((k\cdot 3^k)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{k}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{4k-3}}{(k\cdot 3^k)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{4k-3}}{k^{\frac{1}{2k}}\,(3^k)^{\frac{1}{2k}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{4k-3}}{\left(k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{k\cdot\frac{1}{2k}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\overbrace{\sqrt[k]{4k-3}}^{\to 1}}{\Big(\underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1}\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

Die Reihe ist konvergent.

h) Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{k^2\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{k^2\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1}\right)^2\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}$$

$$= \left(\frac{1+0}{1}\right)^2\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{k+1}}}}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}{\frac{\pi}{2^k}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{\frac{\pi}{2^{k+1}}}}^{\to 1}}{\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}{\frac{\pi}{2^k}}}_{\to 1}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Die Reihe ist konvergent.

18 Potenzreihen

Abschnitt 18.1 – Der Begriff der Potenzreihe

18.1

Für die Funktion $f(x) = \sin x$ lautet der exakte Wert an der Stelle $x = 0{,}3$ gemäß Taschenrechner

$$\sin(0{,}3) = 0{,}2955202067.$$

Das 1. Näherungspolynom

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x$$

stimmt bis zur 1. Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ überein:

$$\begin{aligned} p_1(0) &= a_0 = f(0) = \sin(0) = 0 \\ p_1'(0) &= a_1 = f'(0) = \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x \\ p_1(0{,}3) &= 0{,}3 \end{aligned}$$

Das 2. Näherungspolynom

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

stimmt bis zur 2. Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ überein:

$$\begin{aligned} p_2(0) &= a_0 = f(0) = \sin(0) = 0 \\ p_2'(0) &= a_1 = f'(0) = \cos(0) = 1 \\ p_2''(0) &= 2a_2 = f''(x) = -\sin(0) = 0 \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x \\ p_2(0{,}3) &= 0{,}3 \end{aligned}$$

Das 3. Näherungspolynom

$$p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

stimmt bis zur 3. Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ überein:

$$\begin{aligned} p_3(0) &= a_0 = f(0) = \sin(0) = 0 \\ p_3'(0) &= a_1 = f'(0) = \cos(0) = 1 \\ p_3''(0) &= 2a_2 = f''(0) = -\sin(0) = 0 \\ p_3'''(0) &= 6a_3 = f'''(0) = -\cos(0) = -1 \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 \\ p_3(0{,}3) &= 0{,}2955 \end{aligned}$$

Das 4. Näherungspolynom

$$p_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

stimmt bis zur 4. Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ überein:

$$\begin{aligned} p_4(0) &= a_0 &&= f(0) &&= \sin(0) &&= 0 \\ p_4'(0) &= a_1 &&= f'(0) &&= \cos(0) &&= 1 \\ p_4''(0) &= 2a_2 &&= f''(0) &&= -\sin(0) &&= 0 \\ p_4'''(0) &= 6a_3 &&= f'''(0) &&= -\cos(0) &&= -1 \\ p_4^{(4)} &= 24a_4 &&= f^{(4)}(0) &&= \sin(0) &&= 0 \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} p_4(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 \\ p_4(0{,}3) &= 0{,}2955 \end{aligned}$$

Das 5. Näherungspolynom

$$p_5(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

stimmt bis zur 5. Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$ überein:

$$\begin{aligned} p_5(0) &= a_0 &&= f(0) &&= \sin(0) &&= 0 \\ p_5'(0) &= a_1 &&= f'(0) &&= \cos(0) &&= 1 \\ p_5''(0) &= 2a_2 &&= f''(0) &&= -\sin(0) &&= 0 \\ p_5'''(0) &= 6a_3 &&= f'''(0) &&= -\cos(0) &&= -1 \\ p_5^{(4)} &= 24a_4 &&= f^{(4)}(0) &&= \sin(0) &&= 0 \\ p_5^{(5)} &= 120a_5 &&= f^{(5)}(0) &&= \cos(0) &&= 1 \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} p_5(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \\ p_5(0{,}3) &= 0{,}29552025 \end{aligned}$$

Die geforderte Genauigkeit erreicht.

18.2

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^k \;=\; 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + 5^2x^5 + \ldots$

Konvergenzradius:

$$r \;=\; \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \;=\; \lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{(k+1)^2} \;=\; \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \;=\; \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^2$$

$$=\; \left(\frac{1}{1+0}\right)^2 \;=\; 1$$

Also: Konvergenz für $|x| < 1$
Divergenz für $|x| > 1$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot 1^k \;=\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 \;=\; 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots$
Divergenz (Summanden bilden keine Nullfolge)

$x = -1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot (-1)^k \;=\; -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + - \ldots$$

Divergenz (Summanden bilden keine Nullfolge)

Also ist der Konvergenzbereich $B = \,]-1,1[$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k \;=\; \frac{2}{1}x + \frac{2^2}{2}x^2 + \frac{2^3}{3}x^3 + \frac{2^4}{4}x^4 + \frac{2^5}{5}x^5 + \ldots$

Konvergenzradius:

$$r \;=\; \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \;=\; \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2^k}{k}}{\frac{2^{k+1}}{k+1}} \;=\; \lim_{k\to\infty}\frac{2^k(k+1)}{2^{k+1}k} \;=\; \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{2k}$$

$$=\; \lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{2} \;=\; \frac{1+0}{2} \;=\; \frac{1}{2}$$

Also: Konvergenz für $|x| < \frac{1}{2}$
Divergenz für $|x| > \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Divergenz (harmonische Reihe)

$x = -\frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k} 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + - \ldots$$

Konvergenz (alternierende harmonische Reihe, Leibniz-Kriterium)

Also ist der Konvergenzbereich $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

c) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} = \frac{x}{\sqrt{1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \frac{x^5}{\sqrt{5}} + \ldots$$

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k+1}{k}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{k}}{1}} = \sqrt{\frac{1+0}{1}} = 1$$

Also: Konvergenz für $|x| < 1$
Divergenz für $|x| > 1$

$x = 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} 1^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Divergenz (Minorantenkriterium)

$x = -1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + - \ldots$$

Konvergenz (alle 3 Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums erfüllt)

Also ist der Konvergenzbereich $B = [-1, 1[$.

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k \;=\; 1^1 x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + 4^4 x^4 + 5^5 x^5 + \ldots$

Konvergenzradius:

$$r \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k^k}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \;=\; 0$$

Eine Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt 0 konvergiert auf jeden Fall für $x = 0$.
Also ist der Konvergenzbereich $B = \{0\}$.

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{1\cdot 2\cdots k} x^k \;=\; \frac{10}{1}x + \frac{10^2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{10^3}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{10^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{10^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 + \ldots$

Konvergenzradius:

$$\begin{aligned} r \;&=\; \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{10^k}{1\cdot 2\cdots k}}{\frac{10^{k+1}}{1\cdot 2\cdots k\cdot (k+1)}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{10^k \cdot 1\cdot 2\cdots k\cdot (k+1)}{10^{k+1}\cdot 1\cdot 2\cdots k} \\ &=\; \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{10} \;=\; \infty \end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzbereich $B = \mathbb{R}$.

f) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k+1}} x^k \;=\; \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 + \frac{3^3}{2^4}x^3 + \frac{3^4}{2^5}x^4 + \frac{3^5}{2^6}x^5 + \ldots$

Konvergenzradius:

$$r \;=\; \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3^k}{2^{k+1}}}{\frac{3^{k+1}}{2^{k+2}}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{3^k 2^{k+2}}{3^{k+1} 2^{k+1}} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{2}{3} \;=\; \frac{2}{3}$$

Also: Konvergenz für $|x| < \frac{2}{3}$
Divergenz für $|x| > \frac{2}{3}$

$x = \frac{2}{3}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{3^k} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}$$

Divergenz (Summanden bilden keine Nullfolge)

$x = -\frac{2}{3}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k+1}} \left(-\frac{2}{3}\right)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k+1}} \cdot (-1)^k \frac{2^k}{3^k} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2} \;=\; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + - \ldots$$

Divergenz (Summanden bilden keine Nullfolge)

Also ist der Konvergenzbereich $B = \left]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right[$.

g) $\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k(x-1)^k = 1-2(x-1)+2^2(x-1)^2-2^3(x-1)^3+2^4(x-1)^4-+\ldots$ Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(-2)^k}{(-2)^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{-2}\right| = \frac{1}{2}$$

Also: Konvergenz für $|x-1| < \frac{1}{2}$
Divergenz für $|x-1| > \frac{1}{2}$

$x = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\left(\frac{3}{2}-1\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot 2^k\cdot\frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$
$$= 1-1+1-1+1-1+-\ldots$$

Divergenz (Summanden bilden keine Nullfolge)

$x = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\left(\frac{1}{2}-1\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\cdot\frac{1}{(-2)^k} = \sum_{k=0}^{\infty}1$$

Divergenz (Summanden bilden keine Nullfolge)

Also ist der Konvergenzbereich $B = \left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$.

h) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}(x+3)^k = 0+\frac{1^4}{3^1}(x+3)+\frac{2^4}{3^2}(x+3)^2-\frac{3^4}{3^3}(x+3)^3+\frac{4^4}{3^4}(x+3)^4-+\ldots$

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k^4}{3^k}}{\frac{(k+1)^4}{3^{k+1}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{k^4\cdot 3^{k+1}}{(k+1)^4\cdot 3^k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^4\cdot 3$$
$$= 3\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^4 = 3\left(\frac{1}{1+0}\right)^4 = 3$$

Also: Konvergenz für $|x+3| < 3$
Divergenz für $|x+3| > 3$

$x = -3+3 = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}(0+3)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}3^k = \sum_{k=0}^{\infty}k^4$$
$$= 0+1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\ldots$$

Divergenz (Summanden bilden keine Nullfolge)

$x = -3-3 = -6$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}(-6+3)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}(-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}(-1)^k3^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kk^4$$
$$= 0-1^4+2^4-3^4+4^4-5^4+-\ldots$$

Divergenz (Summanden bilden keine Nullfolge)

Also ist der Konvergenzbereich $B =]-6{,}0[$.

18.3

Nach dem Wurzelkriterium für Zahlenreihen ist für ein beliebiges, aber festes x die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $\left\{\begin{matrix}\text{konvergent}\\ \text{divergent}\end{matrix}\right\}$, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\cdot|x|^k} = \lim_{k\to\infty} |x| \sqrt[k]{|a_k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \left\{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right\} 1,$$

also wenn

$$|x| \left\{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}\right\} \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = r.$$

Abschnitt 18.2 – Potenzreihen und Funktionen – Satz von Taylor

18.4

a) Es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^k.$$

Es liegt eine geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ mit $q = -x^2$ vor. Die geometrische Reihe konvergiert genau für $|q| < 1$, in unserem Fall also für

$$\begin{aligned} \left|-x^2\right| &< 1 \\ x^2 &< 1 \\ -1 < x &< 1. \end{aligned}$$

Der Konvergenzbereich der gegebenen Reihe ist demzufolge

$$B = \,]-1,1[.$$

b) Die Reihensumme der geometrischen Reihe ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

In unserem Fall gilt folglich für $|x| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^k = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

c) Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$$

Gliedweise Integration der Potenzreihe:

$$\begin{aligned} \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \right) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + - \ldots + C \end{aligned}$$

Integration von $\frac{1}{1+x^2}$:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + D$$

Also gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C = \arctan(x) + D$$

Einsetzen des speziellen Wertes $x = 0$:

$$C = D$$

Damit gilt letztendlich:

$$\begin{aligned} \arctan(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + - \ldots \end{aligned}$$

18.5

a)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos(x) & f(0) &= 1\\
f'(x) &= -\sin(x) & f'(0) &= 0\\
f''(x) &= -\cos(x) & f''(0) &= -1\\
f'''(x) &= \sin(x) & f'''(0) &= 0\\
f^{(4)}(x) &= \cos(x) & f^{(4)}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

Damit lautet das Taylor-Polynom 4. Grades:

$$
\begin{aligned}
T_4(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4\\
&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\\
&= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{x^2} & f(0) &= 1\\
f'(x) &= e^{x^2}2x \;=\; 2xe^{x^2} & f'(0) &= 0\\
f''(x) &= 2e^{x^2} + 2xe^{x^2}2x \;=\; (2+4x^2)e^{x^2} & f''(0) &= 2\\
f'''(x) &= 8xe^{x^2} + (2+4x^2)e^{x^2}2x \;=\; (12x+8x^3)e^{x^2} & f'''(0) &= 0\\
f^{(4)}(x) &= (12+24x^2)e^{x^2} + (12x+8x^3)e^{x^2}2x \;=\; (12+48x^2+16x^4)e^{x^2} & f^{(4)}(0) &= 12
\end{aligned}
$$

Damit lautet das Taylor-Polynom 4. Grades:

$$
\begin{aligned}
T_4(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4\\
&= 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4\\
&= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & f(1) &= 1^{\frac{1}{2}} = 1\\
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & f'(1) &= \frac{1}{2}1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\\
f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & f''(1) &= -\frac{1}{4}1^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\\
f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} & f'''(1) &= \frac{3}{8}1^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} & f^{(4)}(1) &= -\frac{15}{16}1^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}
\end{aligned}
$$

Damit lautet das Taylor-Polynom 4. Grades:

$$
\begin{aligned}
T_4(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4\\
&= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(x-1) - \frac{\frac{1}{4}}{2!}(x-1)^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}(x-1)^3 - \frac{\frac{15}{16}}{4!}(x-1)^4\\
&= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4
\end{aligned}
$$

18.6

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4 & f(0) &= a_0\\ f'(x) &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3 & f'(0) &= a_1\\ f''(x) &= 2a_2+6a_3x+12a_4x^2 & f''(0) &= 2a_2\\ f'''(x) &= 6a_3+24a_4x & f'''(0) &= 6a_3\\ f^{(4)}(x) &= 24a_4 & f^{(4)}(0) &= 24a_4 \end{aligned}$$

Damit lautet das Taylor-Polynom 4. Grades:

$$\begin{aligned} T_4(x) &= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4\\ &= a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{2a_2}{2!}x^2+\frac{6a_3}{3!}x^3+\frac{24a_4}{4!}x^4\\ &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4 \end{aligned}$$

Das Taylor-Polynom stimmt mit dem Ausgangspolynom überein.

b)
$$\begin{aligned} f(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots\ldots+a_nx^n\\ f'(x) &= 1a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots\ldots+na_nx^{n-1}\\ f''(x) &= 2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots\ldots+n(n-1)x^{n-2}\\ f'''(x) &= 3\cdot 2\cdot 1a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\ldots\ldots+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\\ &\vdots\\ f^{(k)}(x) &= k!a_k+(k+1)k\cdots 2a_{k+1}+(k+2)(k+1)\cdots 3a_{k+2}+\ldots\ldots+n(n-1)\ldots(n-k+1)a_nx^{n-k}\\ &\vdots\\ f^{(n)}(x) &= n!a_n\\ f^{(n+1)}(x) &= 0\\ f^{(n+2)}(x) &= 0\\ &\vdots \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} f(0) &= a_0 = 0!a_0\\ f'(0) &= a_1 = 1!a_1\\ f''(0) &= 2a_2 = 2!a_2\\ f'''(0) &= 3!a_3\\ &\vdots\\ f^{(k)}(0) &= k!a_k\\ &\vdots\\ f^{(n)}(0) &= n!a_n\\ f^{(n+1)}(0) &= 0\\ f^{(n+2)}(0) &= 0\\ &\vdots \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} a_k & \text{für} \quad k \leq n \\ 0 & \text{für} \quad k > n. \end{cases}$$

Somit ergibt sich als MacLaurin-Reihe

$$T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots a_n x^n = f(x),$$

d. h. die MacLaurin-Reihe stimmt mit dem gegebenen Polynom überein.

18.7

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \\
&= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\
&\quad + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
T_n'(x) &= \frac{f'(x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 2(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot 3(x-x_0)^2 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} \cdot 4(x-x_0)^3 \\
&\quad + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n(x-x_0)^{n-1} \\
T_n''(x) &= \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot 2! + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot 3 \cdot 2(x-x_0) + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} \cdot 4 \cdot 3(x-x_0)^2 + \ldots\ldots \\
&\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n \cdot (n-1)(x-x_0)^{n-2} \\
T_n'''(x) &= \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot 3! + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2(x-x_0) + \ldots\ldots \\
&\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n \cdot (n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3} \\
&\vdots \\
T_n^{(k)}(x) &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k! + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} \cdot k!(x-x_0) + \ldots\ldots \\
&\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n \cdot (n-1)(n-2)(n-k+1) \cdots (x-x_0)^{n-k} \\
&\vdots \\
T_n^{(n)}(x) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot n!
\end{aligned}$$

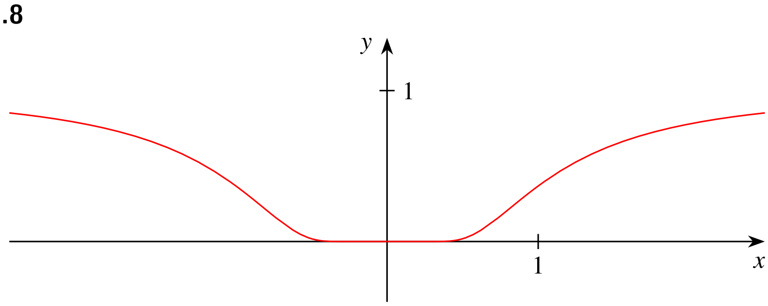
Damit gilt

$$
\begin{aligned}
T_n(x_0) &= f(x_0) \\
T_n'(x_0) &= \frac{f'(x_0)}{1!} = f'(x_0) \\
T_n''(x_0) &= \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot 2! = f''(x_0) \\
T_n'''(x_0) &= \frac{f'''(x_0)}{3!}\cdot 3! = f'''(x_0) \\
&\vdots \\
T_n^{(k)}(x_0) &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot k! = f^{(k)}(x_0) \\
&\vdots \\
T_n^{(n)}(x_0) &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot n! = f^{(n)}(x_0),
\end{aligned}
$$

d. h. alle Ableitungen von T_n bis zur Ordnung n stimmen mit den entsprechenden Ableitungen von f an der Stelle x_0 überein.

18.8

a)



b) Berechnung der Ableitung über die Definition als Differenzialquotient:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}-0}{\Delta x} \overset{t=\frac{1}{\Delta x}}{=} \lim_{t\to\pm\infty} t\cdot e^{-t^2} \\
&= \lim_{t\to\pm\infty}\frac{t}{e^{t^2}} = 0
\end{aligned}
$$

c) Für $x \neq 0$ ist

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Jetzt Berechnung der 2. Ableitung über die Definition als Differenzialquotient:

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(0+\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{(\Delta x)^3} e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}} - 0}{\Delta x} \\ &\overset{t=\frac{1}{\Delta x}}{=} \lim_{t \to \pm\infty} \frac{2t^4}{e^{t^2}} = 0 \end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ ist

$$f''(x) = -\frac{6}{x^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Jetzt Berechnung der 3. Ableitung über die Definition als Differenzialquotient:

$$\begin{aligned} f'''(0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(0+\Delta x) - f''(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(-\frac{6}{(\Delta x)^4} + \frac{4}{(\Delta x)^6}\right) e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}} - 0}{\Delta x} \\ &\overset{t=\frac{1}{\Delta x}}{=} \lim_{t \to \pm\infty} \frac{-6t^5 + 4t^7}{e^{t^2}} = 0 \end{aligned}$$

Diese Schritte wiederholen sich bei jeder höheren Ableitung. Immer ergibt sich

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{a_0 + a_1 t + \ldots + a_l t^l}{e^{t^2}} = 0.$$

Damit lautet das n-te Taylor-Polynom von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} x^k = 0.$$

d) Das Taylor-Polynom $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ verschwindet identisch. Damit ist für $x \neq 0$ stets

$$\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = \lim_{n \to \infty} \big(f(x) - T_n(x)\big) = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0.$$

Abschnitt 18.3 – Wichtige Potenzreihenentwicklungen

18.9

MacLaurin-Reihe der Exponentialfunktion:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Einsetzen von $x = 1$:

$$\begin{aligned} e = e^1 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \frac{1^5}{5!} + \frac{1^6}{6!} + \frac{1^7}{7!} + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \ldots \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = -1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} = e^{-1} &= 1 + \frac{(-1)}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \frac{(-1)^5}{5!} + \frac{(-1)^6}{6!} + \frac{(-1)^7}{7!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + - \ldots \end{aligned}$$

18.10

Es ist:

$$(\sinh(x))' = \cosh(x) \qquad \sinh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \qquad \cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= 0 + \frac{1}{1!}x + 0x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + 0x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + 0x^8 + \frac{1}{9!}x^9 + \ldots \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \ldots \end{aligned}$$

Bei einem beliebigen, aber festen x gilt wegen $f^{(k)} = \sinh(x)$ bzw. $f^{(k)} = \sinh(x)$, $|\sinh(x)| \leq \cosh(x)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ für das Restglied

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{\cosh(\xi)}{(n+1)!} |x|^{n+1} \\ &\leq \cosh(x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

d. h. die gefundene MacLaurin-Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$.

Differenzieren der sinh-Reihe:

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= (\sinh(x))' = \left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{11}}{11!}+\dots\right)' \\ &= 1+\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}+\frac{7x^6}{7!}+\frac{9x^8}{9!}+\frac{11x^{10}}{11!}+\dots \\ &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^{10}}{10!}+\dots\end{aligned}$$

Da man innerhalb des Konvergenzbereichs gliedweise differenzieren darf, gilt die Konvergenz auf ganz $\mathbb{R}$.

18.11

a) $$\begin{aligned}e^{-ix} &= 1+\frac{(-ix)}{1!}+\frac{(-ix)^2}{2!}+\frac{(-ix)^3}{3!}+\frac{(-ix)^4}{4!}+\frac{(-ix)^5}{5!}+\frac{(-ix)^6}{6!}+\frac{(-ix)^7}{7!}+\dots \\ &= 1-i\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}+i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-i\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}+i\frac{x^7}{7!}+--++--\dots \\ &= \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\dots\right)-i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+-\dots\right) \\ &= \cos(x)-i\sin(x)\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}e^{ix}+e^{-ix} &= \left(1+\frac{ix}{1!}+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\frac{(ix)^7}{7!}+\dots\right) \\ &\quad +\left(1+\frac{(-ix)}{1!}+\frac{(-ix)^2}{2!}+\frac{(-ix)^3}{3!}+\frac{(-ix)^4}{4!}+\frac{(-ix)^5}{5!}+\frac{(-ix)^6}{6!}+\frac{(-ix)^7}{7!}+\dots\right) \\ &= 2+2\frac{(ix)^2}{2!}+2\frac{(ix)^4}{4!}+2\frac{(ix)^6}{6!}+\dots \\ &= 2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\dots\right) \\ &= 2\cos(x)\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\cosh(ix) &= 1+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(-ix)^6}{6!}+\dots \\ &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\dots \\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\sinh(ix) &= ix+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\frac{(ix)^7}{7!}+\dots \\ &= ix-i\frac{x^3}{3!}+i\frac{x^5}{5!}-i\frac{x^7}{7!}+-\dots \\ &= i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-i\frac{x^7}{7!}+-\dots\right) \\ &= i\sin(x)\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\cos(ix) &= 1-\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^4}{4!}-\frac{(-ix)^6}{6!}+-\dots\\ &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\dots\\ &= \cosh(x)\end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned}\sin(ix) &= ix-\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^5}{5!}-\frac{(-ix)^7}{7!}+-\dots\\ &= ix+i\frac{x^3}{3!}+i\frac{x^5}{5!}+i\frac{x^7}{7!}+\dots\\ &= i\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+i\frac{x^7}{7!}+\dots\right)\\ &= i\sinh(x)\end{aligned}$$

18.12

Mit der Substitution $t=x-1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln(1+t)\\ &= t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^6}{6}+-\dots\\ &= (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\frac{1}{5}(x-1)^5-\frac{1}{6}(x-1)^6+-\dots\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}(x-1)^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= \sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(x-1)^k\\ &= 1+\frac{1}{1!\cdot 2^1}(x-1)-\frac{1}{2!\cdot 2^2}(x-1)^2+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}(x-1)^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!\cdot 2^4}(x-1)^4+-\dots\end{aligned}$$

Da der Konvergenzbereich für t jeweils $]-1,1]$ ist, lautet der Konvergenzbereich für $x=1+t$ jeweils

$$]0,2]\,.$$

18.13

a)

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!} - \frac{(x^2)^6}{6!} + \frac{(x^2)^8}{8!} - \frac{(x^2)^{10}}{10!} + - \dots$$
$$= 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \frac{x^{16}}{8!} - \frac{x^{20}}{10!} + - \dots$$

Da die Kosinusreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert auch diese Reihe auf ganz $\mathbb{R}$.

b)

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{-x^2}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \frac{(-x^2)^4}{4!} + \frac{(-x^2)^5}{5!} + \dots$$
$$= 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + - \dots$$

Da die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert auch diese Reihe auf ganz $\mathbb{R}$.

c)

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \frac{(2x)^9}{9!} - \frac{(2x)^{11}}{11!} + - \dots$$
$$= 2x - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5 - \frac{2^7}{7!}x^7 + \frac{2^9}{9!}x^9 - \frac{2^{11}}{11!}x^{11} + - \dots$$

Da die Sinusreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert, konvergiert auch diese Reihe auf ganz $\mathbb{R}$.

d)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k$$

Als binomische Reihe konvergiert die Potenzreihe auf dem Intervall $]-1,1]$.

e)

$$\ln(2+x^2) = \ln\left(2 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$$
$$= \ln(2) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^6}{6} + - \dots\right)$$
$$= \ln(2) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^6}{3 \cdot 2^3} - \frac{x^8}{4 \cdot 2^4} + \frac{x^{10}}{5 \cdot 2^5} - \frac{x^{12}}{6 \cdot 2^6} + - \dots$$

Die Logarithmusreihe $\ln(1+x)$ konvergiert auf dem Intervall $]-1,1]$. Folglich konvergiert die gegebene Reihe für

$$\frac{x^2}{2} \leq 1$$
$$x^2 \leq 2$$
$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

18.14

a) $$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1-x^2+x^4-x^6+-\ldots$$

Die geometrische Reihe konvergiert auf dem Intervall $]-1,1[$. Folglich konvergiert die gegebene Reihe für

$$\begin{aligned} x^2 &< 1 \\ -1 < x &< 1. \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int \left(1-x^2+x^4-x^6+-\ldots\right)dx \\ &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\ldots+C. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)+D.$$

Also:

$$\arctan(x)+D = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\ldots+C$$

Einsetzen von $x=0$:

$$C = D$$

Somit ist

$$\arctan(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+-\ldots.$$

Da man innerhalb des Konvergenzbereichs gliedweise integrieren und differenzieren darf, kann der Konvergenzradius r sich nicht ändern, d. h. es ist

$$r = 1.$$

Lediglich an den Rändern kann Konvergenz hinzukommen:

$x=1:\quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\ldots$ Konvergenz (Leibniz-Kriterium)

$x=-1:\quad -1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-+\ldots$ Konvergenz (Leibniz-Kriterium)

Also konvergiert die arctan-Reihe für

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Abschnitt 18.4 – Anwendungen

18.15

a)
$$\begin{aligned} e^{0,5} &= 1+\frac{0,5}{1!}+\frac{0,5^2}{2!}+\frac{0,5^3}{3!}+\frac{0,5^4}{4!}+\frac{0,5^5}{5!}+\frac{0,5^6}{6!}+\frac{0,5^7}{7!}+\dots \\ &\approx 1{,}648\,721\,271 \end{aligned}$$

Bei $\frac{0,5^{10}}{10!}$ hat man diese Genauigkeit.

b)
$$\begin{aligned} e^{-1} &= 1+\frac{(-1)}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\frac{(-1)^5}{5!}+\frac{(-1)^6}{6!}+\frac{(-1)^7}{7!}+\dots \\ &= 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+-\dots \\ &\approx 0{,}367\,879\,441\,2 \end{aligned}$$

Bei $\frac{(-1)^{13}}{13!}$ hat man diese Genauigkeit.

c)
$$\begin{aligned} \cos(0{,}2) &= 1-\frac{0,2^2}{2!}+\frac{0,2^4}{4!}-\frac{0,2^6}{6!}+-\dots \\ &\approx 0{,}980\,066\,577\,8 \end{aligned}$$

Bei $\frac{0,2^6}{6!}$ hat man diese Genauigkeit.

d)
$$\begin{aligned} \sin(24^\circ) &= \sin\left(\frac{24}{180}\pi\right) = \frac{24}{180}\pi-\frac{\left(\frac{24}{180}\pi\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{24}{180}\pi\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{24}{180}\pi\right)^7}{7!}+-\dots \\ &\approx 0{,}406\,736\,643\,0 \end{aligned}$$

Bei $\frac{\left(\frac{24}{180}\pi\right)^9}{9!}$ hat man diese Genauigkeit.

e)
$$\begin{aligned} \sinh(1) &= 1+\frac{1^3}{3!}+\frac{1^5}{5!}+\frac{1^7}{7!}+\dots \\ &\approx 1{,}175\,201\,194 \end{aligned}$$

Bei $\frac{1^{13}}{13!}$ hat man diese Genauigkeit.

f)
$$\begin{aligned} \ln(1{,}5) &= \ln(1+0{,}5) = 0{,}5-\frac{0,5^2}{2}+\frac{0,5^3}{3}-\frac{0,5^4}{4}+\frac{0,5^5}{5}-\frac{0,5^6}{6}+-\dots \\ &\approx 0{,}405\,465\,108\,1 \end{aligned}$$

Bei $\frac{0,5^{28}}{28}$ hat man diese Genauigkeit.

g) $$\begin{aligned}\ln(0{,}1) &= \ln(1-0{,}9)\\ &= -0{,}9-\frac{(-0{,}9)^2}{2}+\frac{(-0{,}9)^3}{3}-\frac{(-0{,}9)^4}{4}+\frac{(-0{,}9)^5}{5}-\frac{(-0{,}9)^6}{6}+-\ldots\\ &= -0{,}9-\frac{0{,}9^2}{2}-\frac{0{,}9^3}{3}-\frac{0{,}9^4}{4}-\frac{0{,}9^5}{5}-\frac{0{,}9^6}{6}-\ldots\\ &\approx -2{,}302\,585\,093\end{aligned}$$

Bei $\frac{0{,}9^{175}}{175}$ hat man diese Genauigkeit.

h) $$\begin{aligned}\sqrt{56} &= (49+7)^{\frac{1}{2}} = 7\left(1+\frac{7}{49}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 7\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{7}{49}\right)^k\\ &\approx 7{,}483\,314\,774\end{aligned}$$

Bei $\binom{\frac{1}{2}}{9}\left(\frac{7}{49}\right)^9$ hat man diese Genauigkeit.

i) $$\begin{aligned}\sqrt[3]{28} &= (27+1)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1+\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= 3\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{k}\left(\frac{1}{27}\right)^k\\ &\approx 3{,}036\,588\,972\end{aligned}$$

Bei $\binom{\frac{1}{3}}{5}\left(\frac{1}{27}\right)^5$ hat man diese Genauigkeit.

j) $$\begin{aligned}\ln(2{,}25) &= \ln(1{,}5^2) = 2\ln(1{,}5) = 2\ln(1+0{,}5)\\ &= 2\left(0{,}5-\frac{0{,}5^2}{2}+\frac{0{,}5^3}{3}-\frac{0{,}5^4}{4}+\frac{0{,}5^5}{5}-\frac{0{,}5^6}{6}+-\ldots\right)\\ &\approx 0{,}810\,930\,216\,2\end{aligned}$$

Bei $\frac{0{,}5^{28}}{28}$ hat man diese Genauigkeit.

18.16

Erste Alternative:

$$\begin{aligned}\sqrt{24} &= 4\left(1+\frac{8}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 4\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{8}{16}\right)^{k}\\ &\approx 4{,}898\,979\,486\end{aligned}$$

Bei $\binom{\frac{1}{2}}{22}\left(\frac{8}{16}\right)^{22}$ hat man diese Genauigkeit.

Zweite Alternative:

$$\begin{aligned}\sqrt{24} &= 5\left(1-\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 5\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(-\frac{1}{25}\right)^{k}\\ &\approx 4{,}898\,979\,486\end{aligned}$$

Bei $\binom{\frac{1}{2}}{5}\left(-\frac{1}{25}\right)^{5}$ hat man bereits diese Genauigkeit.

Strategie: Zur Berechnung von $\sqrt{n}$ sucht man zunächst die nächst kleinere Quadratzahl p und die nächst größere Quadratzahl q von n. Ist $\frac{n-p}{p} \leq \frac{q-n}{q}$, so arbeitet man mit dem Ansatz $\sqrt{p}\left(1+\frac{n-p}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$, ansonsten mit $\sqrt{q}\left(1-\frac{q-n}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$.

18.17

a) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\ldots-1}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\ldots}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2!}+\frac{x^2}{4!}--\frac{x^4}{6!}+-\ldots}{1}\\ &= \frac{-\frac{1}{2!}}{1} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)}{1-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots}{-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}-\ldots}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots}{-1-\frac{x}{2!}-\frac{x^2}{3!}-\frac{x^3}{4!}-\ldots}$$
$$= \frac{1}{-1} = -1$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\ln(1+x)}{\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\ldots\right)}{x^3-\frac{\left(x^3\right)^3}{3!}+-\ldots}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{4}-+\ldots}{x^3-\frac{x^9}{3!}+-\ldots}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{4}-+\ldots}{x^3-\frac{x^9}{3!}+-\ldots}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-+\ldots}{1-\frac{x^6}{3!}+-\ldots}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-x\left(\frac{1}{x}-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^5}{5!}-+\ldots\right)}{1-\left(1-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^4}{4!}-+\ldots\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1-1+\frac{\frac{1}{x^2}}{3!}-\frac{\frac{1}{x^4}}{5!}+-\ldots}{1-1+\frac{\frac{1}{x^2}}{2!}-\frac{\frac{1}{x^4}}{4!}+-\ldots}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3!x^2}-\frac{1}{5!x^4}+-\ldots}{\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{4!x^4}+-\ldots}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!x^2}+-\ldots}{\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!x^2}+-\ldots}$$
$$= \frac{\frac{1}{3!}}{\frac{1}{2!}} = \frac{2!}{3!} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{3}$$

18.18

a) $$\int_0^1 \frac{1-\cos(x)^2}{x^4}\,dx = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^4}{4!}-\frac{(x^6)^2}{6!}+-\ldots\right)}{x^4}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{\frac{x^4}{2!}-\frac{x^8}{4!}+\frac{x^{12}}{6!}-+\ldots}{x^4}\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{6!}-+\ldots\right)dx$$
$$= \left[\frac{x}{2!}-\frac{x^5}{5\cdot 4!}+\frac{x^9}{9\cdot 6!}-+\ldots\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2!}-\frac{1}{5\cdot 4!}+\frac{1}{9\cdot 6!}-+\ldots$$
$$\approx 0{,}491\,819\,096$$

b) $$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^3}}\,dx = \int_0^{0,5} \left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{4}}\,dx = \int_0^{0,5} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{4}}{k}(-x^3)^k\,dx$$
$$= \int_0^{0,5} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{4}}{k} x^{3k}\,dx = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{4}}{k} \frac{x^{3k+1}}{3k+1}\right]_0^{0,5}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{4}}{k} \frac{0{,}5^{3k+1}}{3k+1}$$
$$\approx 0{,}504\,093\,059$$

c) $$\int_{0,25}^{0,75} \frac{x^2-\sin(x^2)}{x^6}\,dx = \int_{0,25}^{0,75} \frac{x^2-\left(x^2-\frac{(x^2)^3}{3!}+\frac{(x^2)^5}{5!}-\frac{(x^7)^2}{7!}+-\ldots\right)}{x^6}\,dx$$
$$= \int_{0,25}^{0,75} \frac{\frac{x^6}{3!}-\frac{x^{10}}{5!}+\frac{x^{14}}{7!}-+\ldots}{x^6}\,dx$$
$$= \int_{0,25}^{0,75} \left(\frac{1}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^8}{7!}-+\ldots\right)dx$$
$$= \left[\frac{x}{3!}-\frac{x^5}{5\cdot 5!}+\frac{x^9}{9\cdot 7!}-+\ldots\right]_{0,25}^{0,75}$$
$$= \left(\frac{0{,}75}{3!}-\frac{0{,}75^5}{5\cdot 5!}+\frac{0{,}75}{9\cdot 7!}-+\ldots\right)-\left(\frac{0{,}25}{3!}-\frac{0{,}25^5}{5\cdot 5!}+\frac{0{,}25}{9\cdot 7!}-+\ldots\right)$$
$$\approx 0{,}082\,941\,103$$

18.19

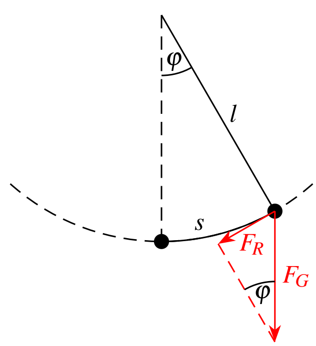
$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(t)-1}{t}\,dt &= \int \frac{1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\frac{t^8}{8!}-\frac{t^{10}}{10!}+-\ldots-1}{t}\,dt\\ &= \int \frac{-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\frac{t^8}{8!}-\frac{t^{10}}{10!}+-\ldots}{t}\,dt\\ &= \int\left(-\frac{t}{2!}+\frac{t^3}{4!}-\frac{t^5}{6!}+\frac{t^7}{8!}-\frac{t^9}{10!}+-\ldots\right)dt\\ &= -\frac{t^2}{2\cdot 2!}+\frac{t^4}{4\cdot 4!}-\frac{t^6}{6\cdot 6!}+\frac{t^8}{8\cdot 8!}-\frac{t^{10}}{10\cdot 10!}+-\ldots+C.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir als „Potenzreihendarstellung" des Integralkosinus

$$\begin{aligned}\mathrm{Ci}\,(x) &= \gamma+\ln(x)+\left[-\frac{t^2}{2\cdot 2!}+\frac{t^4}{4\cdot 4!}-\frac{t^6}{6\cdot 6!}+\frac{t^8}{8\cdot 8!}-\frac{t^{10}}{10\cdot 10!}+-\ldots\right]_0^x\\ &= \gamma+\ln(x)-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\frac{x^6}{6\cdot 6!}+\frac{x^8}{8\cdot 8!}-\frac{x^{10}}{10\cdot 10!}+-\ldots.\end{aligned}$$

18.20

a)



Im rechtwinkligen Kraftdreieck gilt:

$$\begin{aligned}\frac{F_R}{F_G} &= \sin(\varphi)\\ F_R &= F_G\sin(\varphi) = mg\sin(\varphi)\end{aligned}$$

b) Für kleine Winkel $\varphi=\frac{s}{l}$ gilt

$$\sin(\varphi) = \varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}+-\ldots \approx \varphi = \frac{s}{l}.$$

Damit ist

$$F_R = mg\sin(\varphi) \approx mg\varphi = mg\frac{s}{l}.$$

Bezeichne F_R den exakten Wert der Rückstellkraft und $F_{R,N}$ die Näherung, so ergibt sich als Fehler

$$\frac{F_{R,N}-F_R}{F_R} = \frac{mg\sin(\varphi)-mg\frac{s}{l}}{mg\sin\varphi} = \frac{\sin(\varphi)-\frac{s}{l}}{\sin\varphi}.$$

Auflistung der gesuchten prozentualen Fehler:

φ	1°	5°	10°	30°
$\frac{F_{R,N}-F_R}{F_R}$	0,005%	0,13%	0,51%	4,7%

18.21

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\tanh(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.\end{aligned}$$

Damit ist für $h\to\infty$

$$\lim_{h\to\infty} v = \lim_{h\to\infty}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\cdot 1} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}},$$

d. h. für große h gilt näherungsweise tatsächlich

$$v \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}(\tanh(x))' &= \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\right)' = \frac{\cosh(x)\cosh(x)-\sinh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}\\ &= 1-\tanh^2(x)\\ (\tanh(x))'' &= \left(1-\tanh^2(x)\right)' = -2\tanh(x)(\tanh(x))' = -2\tanh(x)(1-\tanh^2(x))\\ &= -2\tanh(x)+2\tanh^3(x)\end{aligned}$$

d. h. es ist

$$\begin{aligned}\tanh(x) &= \tanh(0)+\frac{1-\tanh^2(0)}{1!}x+(-2\tanh(0)+2\tanh^3(0))x^2+\dots\\ &= 0+x+0\cdot x^2+\dots.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für kleine h mittels Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\left(\frac{2\pi h}{\lambda}+0\cdot\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)^2+\dots\right)}\\ &\approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\cdot\frac{2\pi h}{\lambda}} = \sqrt{gh}\end{aligned}$$

19 Fourier-Reihen und Fourier-Transformation

Abschnitt 19.1 – Trigonometrische Reihen

19.2

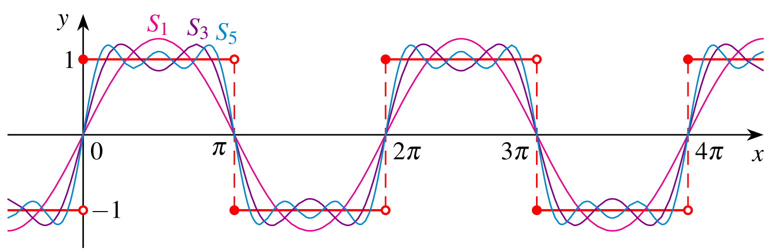
Die ersten Summanden lauten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \left(1-(-1)^k\right)}{k\pi} \sin(kx) \;=\; \frac{4}{\pi}\sin(x) + \frac{4}{3\pi}\sin(3x) + \frac{4}{5\pi}\sin(5x) + \frac{4}{7\pi}\sin(7x) + \dots.$$

Es handelt sich um die Annäherung der Rechteckkurve

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \\ -1 & \text{für} \quad \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

aus Beispiel 1 in Kapitel 19.2.



Abschnitt 19.2 – Fourier-Reihen

19.3

Form der Fourier-Reihe:

$$f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

a)
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} 1\,dx = \frac{1}{\pi}[x]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{\pi}(2\pi-\pi) = 1$$

Für $k \geq 1$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \cos(kx)\,dx \overset{k\neq 0}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_\pi^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}+\frac{1}{k}\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}\right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin(kx)\,dx \overset{k\neq 0}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_\pi^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}+\frac{1}{k}\underbrace{\cos(k\pi)}_{=\pm 1}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\cos(k\pi)\right) = \frac{1}{k\pi}\left(-1+(-1)^k\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{k\pi}(-1+1) = 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{k\pi}(-1-1) = -\frac{2}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\left(-1+(-1)^k\right)\sin(kx)$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sin(x)-\frac{2}{3\pi}\sin(3x)-\frac{2}{5\pi}\sin(5x)-\frac{2}{7\pi}\sin(7x)-\dots$$

b)
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi-x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[2\pi x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(4\pi^2-\frac{4\pi^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi^2 = 2\pi$$

Für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - x)\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(2\pi\cos(kx) - x\cos(kx)\right)\,dx \\
&\overset{\text{Formelsamml.}}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{k}\sin(kx) - \left(\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x\sin(kx)}{k}\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\pi}{k}\sin(kx) - \frac{\cos(kx)}{k^2} - \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k}\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} - \frac{\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1}}{k^2} - \frac{2\pi\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}}{k} - \frac{2\pi}{k}\underbrace{\sin(0)}_{=0} + \frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{k^2} + \frac{0\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{k}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - x)\sin(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(2\pi\sin(kx) - x\sin(kx)\right)\,dx \\
&\overset{\text{Formelsamml.}}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{k}\cos(kx) - \left(\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x\cos(kx)}{k}\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{k}\cos(kx) - \frac{\sin(kx)}{k^2} + \frac{x\cos(kx)}{k}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{k}\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} - \frac{\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}}{k^2} + \frac{2\pi\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1}}{k} + \frac{2\pi}{k}\underbrace{\cos(0)}_{=1} + \frac{\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{k^2} - \frac{0\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{k}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{k} + \frac{2\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}\right) = \frac{2}{k}
\end{aligned}$$

Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \pi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin(kx) \\
&= \pi + 2\sin(x) + \frac{2}{2}\sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) + \frac{2}{4}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x) + \ldots
\end{aligned}$$

c)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} + \left[2\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 0 + 4\pi^2 - \frac{4\pi^2}{2} - 2\pi^2 + \frac{pi^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\pi^2 = \pi$$

Für $k \geq 1$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)\cos(kx)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi\cos(kx) - x\cos(kx))\,dx\right)$$

$$\overset{\text{Formelsamml.}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{2\pi}{k}\sin(kx) - \frac{\cos(kx)}{k^2} - \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k}}{k^2} + \frac{\overbrace{\pi\sin(k\pi)}^{=0}}{k} - \frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{k^2} - \frac{\overbrace{0\sin(0)}^{=0}}{k}\right.$$

$$\left. + \frac{2\pi}{k}\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} - \frac{\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1}}{k^2} - \frac{\overbrace{2\pi\sin(2k\pi)}^{=0}}{k} - \frac{2\pi}{k}\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} + \frac{\overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k}}{k^2} + \frac{\overbrace{\pi\sin(k\pi)}^{=0}}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{2}{k^2}\right) = 2\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx + \int\limits_\pi^{2\pi}(2\pi - x)\sin(kx)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx + \int\limits_\pi^{2\pi}(2\pi\sin(kx) - x\sin(kx))\,dx\right)\\
&\overset{\text{Formelsamml.}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{2\pi}{k}\cos(kx) - \frac{\sin(kx)}{k^2} + \frac{x\cos(kx)}{k}\right]_\pi^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg(\frac{\overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}}{k^2} - \frac{\pi\overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k}}{k} - \frac{\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{k^2} + \frac{\overbrace{0\cos(0)}^{=1}}{k}\\
&\qquad - \frac{2\pi}{k}\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} - \frac{\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}}{k^2} + \frac{2\pi\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1}}{k} + \frac{2\pi}{k}\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + \frac{\overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}}{k^2} - \frac{\pi\overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k}}{k}\Bigg)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^k}{k} - \frac{2\pi}{k} + \frac{2\pi}{k} + \frac{2\pi}{k}(-1)^k - \frac{\pi(-1)^k}{k}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die explizite Berechnung der b_k hätte man sich sparen können, da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}\cos(kx)\\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{1^2\pi}\cos(x) - \frac{4}{3^2\pi}\cos(3x) - \frac{4}{5^2\pi}\cos(5x) - \frac{4}{7^2\pi}\cos(7x) - \ldots
\end{aligned}$$

d)
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2\right)dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\left(\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{2x}{\pi}+1\right)\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{2x}{\pi}\right)dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^3}{3\pi^2}+\frac{x^2}{\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{8\pi^3}{3\pi^2}+\frac{4\pi^2}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{8}{3}\pi+4\pi\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Für $k \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2\right)\cos(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\left(\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{2x}{\pi}+1\right)\right)\cos(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{2x}{\pi}\right)\cos(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} x^2\cos(kx)\,dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(kx)\,dx\right)\\
&\overset{\text{Formelsamml.}}{=} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{2x}{k^2}\cos(kx)+\left(\frac{x^2}{k}-\frac{2}{k^3}\right)\sin(kx)\right]_0^{2\pi}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2}+\frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{4\pi}{k^2}\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}+\left(\frac{4\pi^2}{k}-\frac{2}{k^3}\right)\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}-\frac{0}{k^2}\underbrace{\cos(0)}_{=1}-\left(\frac{0}{k}-\frac{2}{k^3}\right)\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1}}{k^2}+\frac{2\pi\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}}{k}-\frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{k^2}-\frac{0\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{k}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{4\pi}{k^2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{4}{k^2}\right) = -\frac{4}{k^2\pi}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2\right)\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\left(\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{2x}{\pi}+1\right)\right)\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{2x}{\pi}\right)\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}x^2\sin(kx)\,dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin(kx)\,dx\right)\\
&\overset{\text{Formelsamml.}}{=} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{2x}{k^2}\sin(kx)-\left(\frac{x^2}{k}-\frac{2}{k^3}\right)\cos(kx)\right]_0^{2\pi}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k^2}-\frac{x\cos(kx)}{k}\right]_0^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{4\pi}{k^2}\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}-\left(\frac{4\pi^2}{k}-\frac{2}{k^3}\right)\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}-\frac{0}{k^2}\underbrace{\sin(0)}_{=0}+\left(\frac{0}{k}-\frac{2}{k^3}\right)\underbrace{\cos(0)}_{=1}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}}{k^2}-\frac{2\pi\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1}}{k}-\frac{\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{k^2}+\frac{0\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{k}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{4\pi^2}{k}-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{2}{k^3}+\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{2}{k^3}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{k}\right) \;=\; 0
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die explizite Berechnung der b_k hätte man sich sparen können, da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{k^2\pi^2}\right)\cos(kx)\\
&= \frac{2}{3}-\frac{4}{1^2\pi^2}\cos(x)-\frac{4}{2^2\pi^2}\cos(2x)-\frac{4}{3^2\pi^2}\cos(3x)-\frac{4}{4^2\pi^2}\cos(4x)-\ldots
\end{aligned}$$

19.4

Ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung, so gilt $f(-x)=-f(x)$. Demzufolge ist

$$f(-x)\cdot\cos(-kx) \;=\; -f(x)\cdot\cos(kx),$$

d. h. $f(x)\cos kx$ hat einen zum Ursprung punktsymmetrischen Graphen. Demzufolge ist

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\right) \\
&\overset{\text{Periode } 2\pi}{=} \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx)\,dx\right) \\
&\overset{\substack{\text{Punktsym-}\\ \text{metrie}}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx - \int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Die Argumentation lässt sich analog auf p-periodische Funktionen übertragen.

19.5

Allgemeine Form der Fourier-Reihe:

$$
f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right) + b_k\cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\right)
$$

a) Periode: $p = 1$

$$
a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{4}} 2\,dx = 2\,[2x]_0^{\frac{1}{4}} = 2\left(\frac{1}{2}-0\right) = 1
$$

Für $k \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\,dx = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{1}x\right)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{4}} 2\cos(2k\pi x)\,dx \\
&= 2\left[\frac{2}{2k\pi}\sin(2k\pi x)\right]_0^{\frac{1}{4}} = 2\left(\frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{k\pi}\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\,dx = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{1}x\right)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{4}} 2\sin(2k\pi x)\,dx \\
&= 2\left[-\frac{2}{2k\pi}\cos(2k\pi x)\right]_0^{\frac{1}{4}} = 2\left(-\frac{1}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k\pi}\underbrace{\cos(0)}_{=1}\right) = \frac{2-2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}
\end{aligned}
$$

Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \cos(2k\pi x) + \frac{2-2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \sin(2k\pi x) \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi x) + \frac{2}{\pi}\sin(2\pi x) + \frac{4}{2\pi}\sin(4\pi x) \\
&\quad - \frac{2}{3\pi}\cos(6\pi x) + \frac{2}{3\pi}\sin(6\pi x) + \frac{2}{5\pi}\cos(10\pi x) + \frac{2}{5\pi}\sin(10\pi x) \\
&\quad + \frac{4}{6\pi}\sin(12\pi x) + \ldots
\end{aligned}$$

b) Periode: $p = 2$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (x-1)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{2}x\right)\,dx \\
&= \int_0^2 (x-1)^2\cos(k\pi x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2\cos(k\pi x) - 2x\cos(k\pi x) + \cos(k\pi x)\right)\,dx \\
&\overset{\text{F.S.}}{=} \left[\frac{2x}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x) + \left(\frac{x^2}{k\pi} - \frac{2}{k^3\pi^3}\right)\sin(k\pi x) - 2\left(\frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2} + \frac{x\sin(k\pi x)}{k\pi}\right) + \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\right]_0^2 \\
&= \left(\frac{4}{k^2\pi^2}\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + \left(\frac{4}{k\pi} - \frac{2}{k^3\pi^3}\right)\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} - 2\left(\frac{\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1}}{k^2\pi^2} + \frac{2\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}}{k\pi}\right) + \frac{1}{k\pi}\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}\right) \\
&\quad - \left(\frac{0}{k^2\pi^2}\underbrace{\cos(0)}_{=1} + \left(\frac{0}{k\pi} - \frac{2}{k^3\pi^3}\right)\underbrace{\sin(0)}_{=0} - 2\left(\frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{k^2\pi^2} + \frac{0\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{k\pi}\right) + \frac{1}{k\pi}\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right) \\
&= \frac{4}{k^2\pi^2} - \frac{2}{k^2\pi^2} + \frac{2}{k^2\pi^2} = \frac{4}{k^2\pi^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{2}x\right)\,dx \\
&= \int_0^2 (x-1)^2\sin(k\pi x)\,dx = \int_0^2 \big(x^2\sin(k\pi x) - 2x\sin(k\pi x) + \sin(k\pi x)\big)\,dx \\
&\overset{\text{F.S.}}{=} \left[\frac{2x}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x) - \left(\frac{x^2}{k\pi} - \frac{2}{k^3\pi^3}\right)\cos(k\pi x) - 2\left(\frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2} - \frac{x\cos(k\pi x)}{k\pi}\right) - \frac{1}{k\pi}\cos(k\pi x)\right]_0^2 \\
&= \left(\frac{2}{k^2\pi^2}\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0} - \left(\frac{4}{k\pi} - \frac{2}{k^3\pi^3}\right)\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} - 2\left(\frac{\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}}{k^2\pi^2} - \frac{2\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1}}{k\pi}\right) - \frac{1}{k\pi}\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}\right) \\
&\quad - \left(\frac{0}{k^2\pi^2}\underbrace{\sin(0)}_{=0} - \left(\frac{0}{k\pi} - \frac{2}{k^3\pi^3}\right)\underbrace{\cos(0)}_{=1} - 2\left(\frac{\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{k^2\pi^2} - \frac{0\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{k\pi}\right) - \frac{1}{k\pi}\underbrace{\cos(0)}_{=1}\right) \\
&= -\frac{4}{k\pi} + \frac{2}{k^3\pi^3} + \frac{4}{k\pi} - \frac{1}{k\pi} - \frac{2}{k^3\pi^3} + \frac{1}{k\pi} = 0
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die explizite Berechnung der b_k hätte man sich sparen können, da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Fourier-Reihe:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}\cos(k\pi x) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4}{1^2\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{4}{2^2\pi^2}\cos(2\pi x) + \frac{4}{3^2\pi^2}\cos(3\pi x) + \frac{4}{4^2\pi^2}\cos(4\pi x) + \ldots
\end{aligned}
$$

19.6

a) Die Koeffizienten der Reihenentwicklung werden bei Taylor-Reihen mit Hilfe der einfachen Differenziation berechnet, während man bei Fourier-Reihen die aufwendige Integration benötigt.

b) Die Konvergenz erfolgt simultan auf ganz $\mathbb{R}$ und nicht zunächst lokal um die Entwicklungsstelle.

19.7

a) $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(k\dfrac{2\pi}{p}x\right) + b_k \cos\left(k\dfrac{2\pi}{p}x\right)\right)$

Periode: $p = \pi$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot(\pi - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x - x^2\right)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\pi^2 - \frac{1}{3}\pi^3 - 0\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

Für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot(\pi - x)\cos\left(k\frac{2\pi}{\pi}x\right)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi x\cos(2kx) - x^2\cos(2kx)\right)\,dx \\
&\overset{\text{F.S.}}{=} \frac{2}{\pi}\left[\pi\left(\frac{\cos(2kx)}{4k^2} + \frac{x\sin(2kx)}{2k}\right) - \frac{2x}{4k^2}\cos(2kx) - \left(\frac{x^2}{2k} - \frac{2}{8k^3}\right)\sin(2kx)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left(\pi\left(\frac{\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1}}{4k^2} + \frac{\overbrace{\pi\sin(2k\pi)}^{=0}}{2k}\right) - \frac{2\pi}{4k^2}\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} - \left(\frac{\pi^2}{2k} - \frac{2}{8k^3}\right)\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(\pi\left(\frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1}}{4k^2} + \frac{\overbrace{0\sin(0)}^{=0}}{2k}\right) - \frac{0}{4k^2}\underbrace{\cos(0)}_{=1} - \left(\frac{0^2}{2k} - \frac{2}{8k^3}\right)\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4k^2} - \frac{2\pi}{4k^2} - \frac{\pi}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2k^2}\right) = -\frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Die explizite Berechnung der b_k kann man sich sparen, da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Es gilt

$$b_k = 0.$$

Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k^2}\right)\cos(2kx) \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2}\cos(2x) - \frac{1}{2^2}\cos(4x) - \frac{1}{3^2}\cos(6x) - \frac{1}{4^2}\cos(8x) - \ldots \\
&= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos(2kx)
\end{aligned}$$

b) Nachprüfen der Stetigkeit von f an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} x\cdot(\pi - x) = 0\cdot(\pi-0) = 0\\ \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} x\cdot(\pi - x) = 0\cdot(\pi-0) = 0\\ f(0) &= 0\cdot(\pi-0) = 0\end{aligned}$$

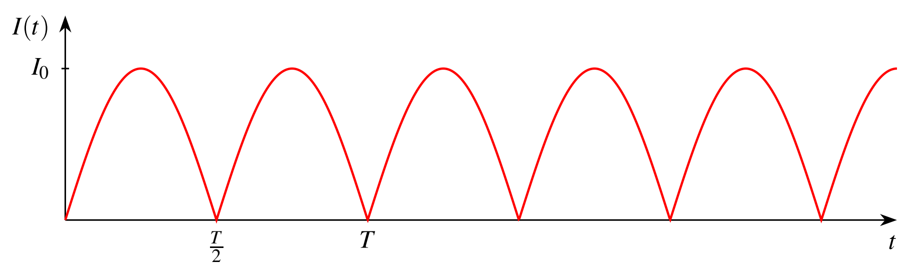
Demzufolge gilt „linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert = Funktionswert", d. h. f ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig. Folglich gilt:

$$\begin{aligned}0 = f(0) &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos(2k\cdot 0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\underbrace{\cos(0)}_{=1}\\ &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\end{aligned}$$

Damit ist tatsächlich

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

19.8



$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) + b_k\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\omega t) + b_k\cos(k\omega t)\right)$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T I_0|\sin(\omega t)|\,dt = \frac{2I_0}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}}\sin(\omega t)\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -\sin(\omega t)\,dt\right)\\ &= \frac{2I_0}{T}\left(\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\right) = \frac{2I_0}{T}\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\pi) + \frac{1}{\omega}\cos(0) + \frac{1}{\omega}\cos(2\pi) - \frac{1}{\omega}\cos(\pi)\right)\\ &= \frac{2I_0}{T}\cdot\frac{4}{\omega} = \frac{4I_0}{\pi}\end{aligned}$$

Für $k \geq 1$ mit Unterstützung eines Computeralgebrasystems (sonst zu aufwendig):

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T I_0|\sin(\omega t)|\cos(k\omega t)\,dt \\
&= \frac{2I_0}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t)\cos(k\omega t)\,dt + \int_0^{\frac{T}{2}}(-\sin(\omega t))\cos(k\omega t)\,dt\right) \\
&\overset{\text{CAS}}{=} \frac{2I_0}{T}\left(-\frac{1+(-1)^k}{\omega(k^2-1)} - \frac{1+(-1)^k}{\omega(k^2-1)}\right) = -\frac{2I_0\left(1+(-1)^k\right)}{(k^2-1)\pi}
\end{aligned}$$

Die explizite Berechnung der b_k kann man sich sparen, da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Es gilt

$$b_k = 0.$$

Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{2I_0}{\pi} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2I_0\left(1+(-1)^k\right)}{(k^2-1)\pi}\cos(k\omega t) \\
&= \frac{2I_0}{\pi} - \frac{4I_0}{(2^2-1)\pi}\cos(2\omega t) - \frac{4I_0}{(4^2-1)\pi}\cos(4\omega t) - \frac{4I_0}{(6^2-1)\pi}\cos(6\omega t) - \ldots
\end{aligned}$$

Abschnitt 19.3 – Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihen

19.9

Die Periode beträgt $p = 2\pi$. Damit ist

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{p}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{2\pi}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit

$$c_k = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)e^{-ik\frac{2\pi}{p}x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ik\frac{2\pi}{2\pi}x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

19.10

a) Periode: $p = 2\pi$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{p}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit

$$c_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,e^0\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{2\pi}\,[x]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\,(\pi - 0) = \frac{1}{2}$$

Für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,e^{-ik\frac{2\pi}{p}x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1\,e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-ik}e^{-ikx}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{i}{k}(\cos(kx) - i\sin(kx))\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{i}{k}(\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} - i\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0})\right) - \left(\frac{i}{k}(\underbrace{\cos(0)}_{=1} - i\underbrace{\sin(0)}_{=0})\right)\right) \\
&= \frac{i}{2k\pi}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{(-1)^k - 1}{2k\pi}i
\end{aligned}$$

Herleitung der reellen Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right) + b_k\sin\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\right)$$

Für $k = 0$:

$$a_0 = 2c_0 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

Für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{(-1)^k - 1}{2k\pi}i + \frac{(-1)^{-k} - 1}{2(-k)\pi}i = \frac{(-1)^k - 1}{2k\pi}i + \frac{(-1)^k - 1}{2(-k)\pi}i \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{2k\pi}i - \frac{(-1)^k - 1}{2k\pi}i = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= i\,(c_k - c_{-k}) = i\left(\frac{(-1)^k - 1}{2k\pi}i - \frac{(-1)^{-k} - 1}{2(-k)\pi}i\right) \\
&= i^2\left(\frac{(-1)^k - 1}{2k\pi} - \frac{(-1)^k - 1}{2(-k)\pi}\right) = -\left(\frac{(-1)^k - 1}{2k\pi} + \frac{(-1)^k - 1}{2k\pi}\right) \\
&= -\frac{(-1)^k - 1}{k\pi} = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi}
\end{aligned}$$

Reelle Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^k}{k\pi}\sin(kx) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sin(x) - \frac{2}{3\pi}\sin(3x) - \frac{2}{5\pi}\sin(5x) - \frac{2}{7\pi}\sin(7x) - \ldots
\end{aligned}$$

b) Periode: $p = 2\pi$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{p}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit

$$c_0 = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,e^0\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi^2 = \pi$$

Für $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,e^{-ik\frac{2\pi}{p}x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,e^{-ikx}\,dx \overset{\text{F.S.}}{=} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2}(-ikx-1)\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(kx) - i\sin(kx)}{-k^2}(-ikx-1)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1} - i\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}}{-k^2}(-2ik\pi-1)\right) - \left(\frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1} - i\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{-k^2}(0-1)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{k^2}(2k\pi i+1) - \frac{1}{k^2})\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi i}{k} = \frac{i}{k}$$

Herleitung der reellen Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right) + b_k\sin\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\right)$$

$$a_0 = 2c_0 = 2\pi$$

Für $k \geq 1$:

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{i}{k} + \frac{i}{-k} = \frac{i}{k} - \frac{i}{k} = 0$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = i\left(\frac{i}{k} - \frac{i}{-k}\right) = i\left(\frac{i}{k} + \frac{i}{k}\right) = i\left(2\frac{i}{k}\right) = \frac{2i^2}{k} = -\frac{2}{k}$$

Reelle Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{k}\right)\sin(kx)$$
$$= \pi - \frac{2}{1}\sin(x) - \frac{2}{2}\sin(2x) - \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{4}\sin(4x) - \ldots$$

c) Periode: $p = 2\pi$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{p}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,e^0\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} x + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} + \left[2\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 0 + 4\pi^2 - 2\pi^2 - 2\pi^2 + \frac{\pi^2}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\pi^2 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,e^{-ik\frac{2\pi}{p}x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} x\,e^{-ikx}\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}(2\pi - x)\,e^{-ikx}\,dx\right)\\
&\overset{\text{F.S.}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2}(-ikx-1)\right]_0^{\pi} + \left[-\frac{2\pi}{ik}e^{-ikx} - \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2}(-ikx-1)\right]_{\pi}^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{\cos(kx) - i\sin(kx)}{-k^2}(-ikx-1)\right]_0^{\pi} + \left[\frac{2\pi i}{k}(\cos(kx) - i\sin(kx)) + \frac{\cos(kx) - i\sin(kx)}{k^2}(-ikx-1)\right]_{\pi}^{2\pi}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\Bigg(\frac{\overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k} - i\overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}}{-k^2}(-ik\pi - 1) - \frac{\overbrace{\cos(0)}^{=1} - i\overbrace{\sin(0)}^{=0}}{-k^2}(0-1)\\
&\qquad \frac{2\pi i}{k}(\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1} - i\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}) + \frac{\overbrace{\cos(2k\pi)}^{=1} - i\overbrace{\sin(2k\pi)}^{=0}}{k^2}(-i2k\pi - 1)\\
&\qquad - \frac{2\pi i}{k}(\overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k} - i\overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}) - \frac{\overbrace{\cos(k\pi)}^{=(-1)^k} - i\overbrace{\sin(k\pi)}^{=0}}{k^2}(-ik\pi - 1)\Bigg)\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^k i\pi}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} + \frac{2\pi i}{k} - \frac{2\pi i}{k} - \frac{1}{k^2} - \frac{(-1)^k 2i\pi}{k} + \frac{(-1)^k i\pi}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2}\right)\\
&= \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}
\end{aligned}$$

Herleitung der reellen Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right) + b_k\sin\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\right)$$

$$a_0 = 2c_0 = \pi$$

Für $k \geq 1$:

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi} + \frac{(-1)^{-k} - 1}{(-k)^2} = 2\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}$$

$$b_k = 0 \qquad \text{(Achsensymmetrie zur } y\text{-Achse)}$$

Reelle Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}\cos(kx) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{1^2}\cos(x) - \frac{4}{3^2}\cos(3x) - \frac{4}{5^2}\cos(5x) - \frac{4}{7^2}\cos(7x) - \ldots \end{aligned}$$

d) Periode: $p = 2\pi$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{p}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\, e^{-ik\frac{2\pi}{p}x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^x\, e^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-ik)x}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-ik)2\pi}}{1-ik} - \frac{1}{1-ik}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{(1-ik)2\pi} - 1}{1-(ik)^2}(1+ik) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{2\pi - 2ik\pi} - 1}{1+k^2}(1+ik) \overset{\text{Periode } 2\pi i}{=} \frac{e^{2\pi} - 1}{2(1+k^2)\pi}(1+ik) \end{aligned}$$

Herleitung der reellen Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{p}x\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{p}x\right)\right)$$

Für k beliebig:

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2(1+k^2)\pi}(1+ik) + \frac{e^{2\pi} - 1}{2(1+(-k)^2)\pi}(1+i(-k)) = \frac{e^{2\pi} - 1}{(1+k^2)\pi} \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = i\left(\frac{e^{2\pi} - 1}{2(1+k^2)\pi}(1+ik) - \frac{e^{2\pi} - 1}{2(1+(-k)^2)\pi}(1+i(-k))\right) \\ &= i\frac{(e^{2\pi} - 1)ik}{(1+k^2)\pi} = \frac{(1-e^{2\pi})k}{(1+k^2)\pi} \end{aligned}$$

Reelle Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{2\pi} - 1}{(1+k^2)\pi}\cos(kx) + \frac{(1-e^{2\pi})k}{(1+k^2)\pi}\sin(kx)\right)$$

19.11

Im Periodenintervall $[0,T[$ gilt:

$$I(t) = \begin{cases} I_0 \sin(\omega t) & \text{für} \quad 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -I_0 \sin(\omega t) & \text{für} \quad \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$$

Komplexe Fourier-Reihe:

$$I(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$$

mit

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T I(t)\, e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin(\omega t)\cdot e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\, dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} \left(-I_0 \sin(\omega)t \cdot e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}\right)\, dt\right) \\
&= \frac{I_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-ik\omega t} \sin(\omega t)\, dt - \frac{I_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} \sin(\omega t)\cdot e^{-ik\omega t}\, dt
\end{aligned}$$

Nach Formelsammlung gilt

$$\int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right) + C.$$

Somit ist für $k \neq \pm 1$ (sonst ist die Formel nicht anwendbar):

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{I_0}{T}\left[\frac{e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)^2+\omega^2}\left(-ik\omega\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right)\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&\quad - \frac{I_0}{T}\left[\frac{e^{-ik\omega t}}{(-ik\omega)^2+\omega^2}\left(-ik\omega\sin(\omega t) - \omega\cos(\omega t)\right)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} \\
&= \frac{I_0}{T}\left[\frac{e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}}{(-k^2+1)\omega^2}\left(-ik\omega\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \omega\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&\quad - \frac{I_0}{T}\left[\frac{e^{-ik\frac{2\pi}{T}t}}{(-k^2+1)\omega^2}\left(-ik\omega\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \omega\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right)\right]_{\frac{T}{2}}^{T} \\
&= \frac{I_0}{T}\left(\frac{e^{-ik\pi}}{(1-k^2)\omega^2}\left(-ik\omega\sin(\pi) - \omega\cos(\pi)\right) - \frac{e^0}{(1-k^2)\omega^2}\left(-ik\omega\sin(0) - \omega\cos(0)\right)\right) \\
&\quad - \frac{I_0}{T}\left(\frac{e^{-ik2\pi}}{(1-k^2)\omega^2}\left(-ik\omega\sin(2\pi) - \omega\cos(2\pi)\right) - \frac{e^{-ik\pi}}{(1-k^2)\omega^2}\left(-ik\omega\sin(\pi) - \omega\cos(\pi)\right)\right) \\
&= \frac{I_0}{T(1-k^2)\omega^2}\left(e^{-ik\pi}(-0+\omega) - (-0-\omega)\right) \\
&\quad - \frac{I_0}{T(1-k^2)\omega^2}\left(e^{-ik2\pi}(-0-\omega) - e^{-ik\pi}(-0+\omega)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{I_0}{T(1-k^2)\omega^2}\left(\omega e^{-ik\pi}+\omega\right)-\frac{I_0}{T(1-k^2)\omega^2}\left(-\omega e^{-ik2\pi}-\omega e^{-ik\pi}\right)\\
&= \frac{I_0}{T(1-k^2)\omega^2}\left(\omega e^{-ik\pi}+\omega+\omega e^{-ik2\pi}+\omega e^{-ik\pi}\right)\\
&= \frac{I_0}{T(1-k^2)\omega}\left(e^{-ik2\pi}+2e^{-ik\pi}+1\right)\\
&= \frac{I_0}{T(1-k^2)\frac{2\pi}{T}}\left(e^{-ik2\pi}+2e^{-ik\pi}+1\right)\\
&= \frac{I_0}{2(1-k^2)\pi}\left(e^{-ik2\pi}+2e^{-ik\pi}+1\right)\\
&= \frac{I_0}{2(1-k^2)\pi}\left(\underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1}-i\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}+2\left(\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}-i\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}\right)+1\right)\\
&= \frac{I_0}{2(1-k^2)\pi}\left(2+2(-1)^k\right)\\
&= \frac{\left(1+(-1)^k\right)}{(1-k^2)\pi}I_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{I_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t}\sin(\omega t)\,dt-\frac{I_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} e^{-i\omega t}\sin(\omega t)\,dt\\
&= \frac{I_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t))\sin(\omega t)\,dt-\frac{I_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t))\sin(\omega t)\,dt\\
&= \frac{I_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(\cos(\omega t)\sin(\omega t)-i\sin^2(\omega t)\right)\,dt-\frac{I_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(\cos(\omega t)\sin(\omega t)-i\sin^2(\omega t)\right)\,dt\\
&\overset{\text{F.S.}}{=} \frac{I_0}{T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin^2(\omega t)-i\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}\\
&\quad -\frac{I_0}{T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin^2(\omega t)-i\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right)\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\\
&= \frac{I_0}{T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)-i\frac{t}{2}+\frac{i}{2\omega}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}\\
&\quad -\frac{I_0}{T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)-i\frac{t}{2}+\frac{i}{2\omega}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\\
&= \frac{I_0}{T}\left(\frac{1}{2\omega}\sin^2(\pi)-i\frac{T}{4}+\frac{i}{2\omega}\sin(\pi)\cos(\pi)-\frac{1}{2\omega}\sin^2(0)+i\cdot 0-\frac{i}{2\omega}\sin(0)\cos(0)\right)\\
&\quad -\frac{I_0}{T}\left(\frac{1}{2\omega}\sin^2(2\pi)-i\frac{T}{2}+\frac{i}{2\omega}\sin(2\pi)\cos(2\pi)-\frac{1}{2\omega}\sin^2(\pi)+i\frac{T}{4}-\frac{i}{2\omega}\sin(\pi)\cos(\pi)\right)\\
&= \frac{I_0}{T}\left(\frac{1}{2\omega}\cdot 0^2-i\frac{T}{4}+\frac{i}{2\omega}\cdot 0\cdot(-1)-\frac{1}{2\omega}\cdot 0^2+0-\frac{i}{2\omega}\cdot 0\cdot 1\right)\\
&\quad -\frac{I_0}{T}\left(\frac{1}{2\omega}\cdot 0^2-i\frac{T}{2}+\frac{i}{2\omega}\cdot 0\cdot 1-\frac{1}{2\omega}\cdot 0^2+i\frac{T}{4}-\frac{i}{2\omega}\cdot 0\cdot(-1)\right)\\
&= \frac{I_0}{T}\left(-i\frac{I_0}{4}i+i\frac{T}{2}-i\frac{T}{4}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{I_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{i\omega t}\sin(\omega t)\,dt - \frac{I_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} e^{i\omega t}\sin(\omega t)\,dt\\
&= \frac{I_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} (\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))\sin(\omega t)\,dt - \frac{I_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} (\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))\sin(\omega t)\,dt\\
&= \frac{I_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\cos(\omega t)\sin(\omega t)+i\sin^2(\omega t)\right)\,dt - \frac{I_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} \left(\cos(\omega t)\sin(\omega t)+i\sin^2(\omega t)\right)\,dt\\
&\overset{\text{F.S.}}{=} \frac{I_0}{T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin^2(\omega t)+i\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}\\
&\quad -\frac{I_0}{T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin^2(\omega t)+i\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right)\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\\
&= \frac{I_0}{T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+i\frac{t}{2}-\frac{i}{2\omega}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}\\
&\quad -\frac{I_0}{T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+i\frac{t}{2}-\frac{i}{2\omega}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_{\frac{T}{2}}^{T}\\
&= \frac{I_0}{T}\left(\frac{1}{2\omega}\sin^2(\pi)+i\frac{T}{4}-\frac{i}{2\omega}\sin(\pi)\cos(\pi)-\frac{1}{2\omega}\sin^2(0)-i\cdot 0+\frac{i}{2\omega}\sin(0)\cos(0)\right)\\
&\quad -\frac{I_0}{T}\left(\frac{1}{2\omega}\sin^2(2\pi)+i\frac{T}{2}-\frac{i}{2\omega}\sin(2\pi)\cos(2\pi)-\frac{1}{2\omega}\sin^2(\pi)-i\frac{T}{4}+\frac{i}{2\omega}\sin(\pi)\cos(\pi)\right)\\
&= \frac{I_0}{T}\left(\frac{1}{2\omega}\cdot 0^2+i\frac{T}{4}-\frac{i}{2\omega}\cdot 0\cdot(-1)-\frac{1}{2\omega}\cdot 0^2-0+\frac{i}{2\omega}\cdot 0\cdot 1\right)\\
&\quad -\frac{I_0}{T}\left(\frac{1}{2\omega}\cdot 0^2+i\frac{T}{2}-\frac{i}{2\omega}\cdot 0\cdot 1-\frac{1}{2\omega}\cdot 0^2-i\frac{T}{4}+\frac{i}{2\omega}\cdot 0\cdot(-1)\right)\\
&= \frac{I_0}{T}\left(i\frac{I_0}{4}i-i\frac{T}{2}+i\frac{T}{4}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Herleitung der reellen Fourier-Reihe:

$$
I(t) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)+b_k\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)\right) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\right)
$$

Für $k \neq 1$:

$$
\begin{aligned}
a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{\left(1+(-1)^k\right)}{(1-k^2)\pi} I_0 + \frac{\left(1+(-1)^{-k}\right)}{(1-(-k)^2)\pi} I_0 = \frac{\left(1+(-1)^k\right)}{(1-k^2)\pi} I_0 + \frac{\left(1+(-1)^k\right)}{(1-k^2)\pi} I_0 \\
&= 2\frac{\left(1+(-1)^k\right)}{(1-k^2)\pi} I_0 \\
b_k &= i\,(c_k - c_{-k}) = i\left(\frac{\left(1+(-1)^k\right)}{(1-k^2)\pi} I_0 - \frac{\left(1+(-1)^{-k}\right)}{(1-(-k)^2)\pi} I_0\right) \\
&= i\left(\frac{\left(1+(-1)^k\right)}{(1-k^2)\pi} I_0 + \frac{\left(1+(-1)^k\right)}{(1-k^2)\pi} I_0\right) = 0
\end{aligned}
$$

Für $k = 1$:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= c_k + c_{-k} = 0 + 0 = 0 \\
b_1 &= i\,(c_k - c_{-k}) = i\,(0-0) = 0
\end{aligned}
$$

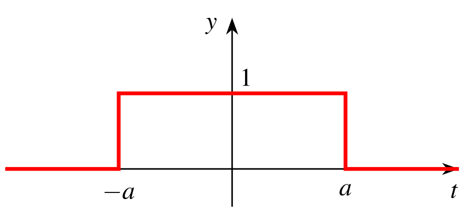
Reelle Fourier-Reihe:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{2}{\pi} I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\left(1+(-1)^k\right)}{(1-k^2)\pi} I_0 \cos(k\omega t) \\
&= \frac{2I_0}{\pi} + \frac{4I_0}{(1-2^2)\pi}\cos(2\omega t) + \frac{4I_0}{(1-4^2)\pi}\cos(4\omega t) + \frac{4I_0}{(1-6^2)\pi}\cos(6\omega t) - \ldots
\end{aligned}
$$

Abschnitt 19.4 – Fourier-Transformation

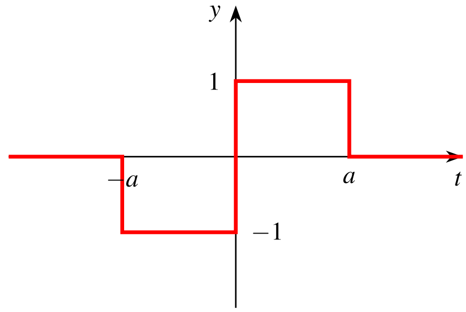
19.12

a)



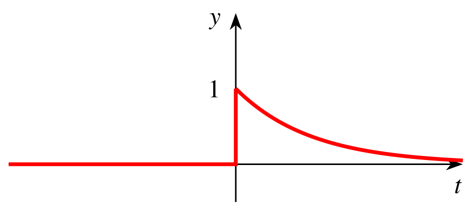
$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-a}^{a} = \left[\frac{i}{\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{i}{\omega} e^{-i\omega a} - \frac{i}{\omega} e^{i\omega a} = \frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}\right) \\
&= \frac{i}{\omega}\left((\cos(\omega a) - i\sin(\omega a)) - (\cos(\omega a) + i\sin(\omega a))\right) = \frac{i}{\omega}(-2i\sin\omega a) \\
&= \frac{2}{\omega}\sin(\omega a)
\end{aligned}
$$

b)



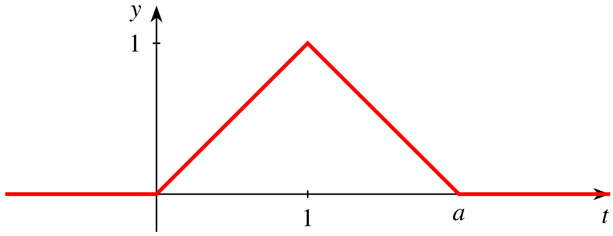
$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \;=\; \int_{-a}^{0} (-1)\cdot e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{a} 1\cdot e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \left[\frac{-1}{-i\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-a}^{0} + \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t}\right]_{0}^{a} \;=\; \left[-\frac{i}{\omega} e^{-i\omega t}\right]_{-a}^{0} + \left[\frac{i}{\omega} e^{-i\omega t}\right]_{0}^{a} \\
&= -\frac{i}{\omega} e^{0} + \frac{i}{\omega} e^{i\omega a} + \frac{i}{\omega} e^{-i\omega a} - \frac{i}{\omega} e^{0} \;=\; \frac{i}{\omega}\left(e^{i\omega a} + e^{-i\omega a} - 2\right) \\
&= \frac{i}{\omega}\left(\cos(\omega a) + i\sin(\omega a) + \cos(\omega a) - i\sin(\omega a) - 2\right) \;=\; \frac{i}{\omega}\left(2\cos(\omega a) - 2\right) \\
&= \frac{2}{\omega}\left(\cos(\omega a) - 1\right) i
\end{aligned}
$$

c)



$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \;=\; \int_{0}^{\infty} e^{-t}\cdot e^{-i\omega t}\, dt \;=\; \int_{0}^{\infty} e^{-t-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{(-1-i\omega)t}\, dt \;=\; \left[\frac{1}{(-1-i\omega)} e^{(-1-i\omega)t}\right]_{0}^{\infty} \;=\; \left[\frac{1}{(-1-i\omega)} e^{-t} e^{i\omega t}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \left[\frac{1}{(-1-i\omega)} e^{-t}\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right)\right]_{0}^{\infty} \;=\; \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{(-1-i\omega)} e^{-t}\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right)\right]_{0}^{b} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(-1-i\omega)}\underbrace{e^{-b}}_{\to 0}\left(\underbrace{\cos(\omega b)}_{\geq -1, \leq 1} - i\underbrace{\sin(\omega b)}_{\geq -1, \leq 1}\right) - \frac{1}{(-1-i\omega)} e^{0}\left(\underbrace{\cos(0)}_{=1} - i\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{(-1-i\omega)} \;=\; \frac{1}{1+i\omega} \;=\; \frac{1-i\omega}{(1+i\omega)(1-i\omega)} \;=\; \frac{1-i\omega}{1+\omega^2}
\end{aligned}
$$

d)



$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = \int_0^1 te^{-i\omega t}\,dt + \int_1^2 (2-t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_0^1 te^{-i\omega t}\,dt + \int_1^2 \left(2e^{-i\omega t} - te^{-i\omega t}\right)\,dt \\
&\overset{\text{F.S.}}{=} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2}(-i\omega t-1)\right]_0^1 + \left[\frac{2}{-i\omega}e^{-i\omega t} - \frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2}(-i\omega t-1)\right]_1^2 \\
&= \left[-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}(-i\omega t-1)\right]_0^1 + \left[2\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2}(-i\omega t-1)\right]_1^2 \\
&= -\frac{e^{-i\omega}}{\omega^2}(-i\omega-1) + \frac{1}{\omega^2}(-1) \\
&\quad + 2\frac{i}{\omega}e^{-i2\omega} + \frac{e^{-i2\omega}}{\omega^2}(-i2\omega-1) - 2\frac{i}{\omega}e^{-i\omega} - \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2}(-i\omega-1) \\
&= \frac{i}{\omega}e^{-i\omega} + \frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega} - \frac{1}{\omega^2} + 2\frac{i}{\omega}e^{-i2\omega} - 2\frac{i}{\omega}e^{-i2\omega} - \frac{1}{\omega^2}e^{-i2\omega} - 2\frac{i}{\omega}e^{-i\omega} \\
&\quad + \frac{i}{\omega}e^{-i\omega} + \frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega} \\
&= \frac{2}{\omega^2}e^{-i\omega} - \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}e^{-i2\omega} = \frac{-e^{-i2\omega} + 2e^{-i\omega} - 1}{\omega^2}
\end{aligned}$$

19.13

Frequenzverschiebungssatz:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left\{e^{i\omega_0 t} f(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega_0 t - i\omega_t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}\,dt = F(\omega-\omega_0)
\end{aligned}$$

Zeitverschiebungssatz:

$$\mathscr{F}\left\{f(t-t_0)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-i\omega t}\,dt$$

Substitution:

$$\begin{aligned} u &= t - t_0 \\ \frac{du}{dt} &= 1 & du &= dt \\ u(-\infty) &= -\infty - t_0 = -\infty & u(\infty) &= \infty - t_0 = \infty \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\left\{f(t-t_0)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+t_0)}\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u - i\omega t_0}\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}e^{-i\omega t_0}\,du = e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,du \\ &= e^{-i\omega t_0}F(\omega) \end{aligned}$$

19.14

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(t)\cos(\omega t) - if(t)\sin(\omega t)\big)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,dt = F_c(\omega) + iF_s(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} F(\omega) & = F_c(\omega) + iF_s(\omega) \\ F(-\omega) & = F_c(-\omega) + iF_s(-\omega) = F_c(\omega) - iF_s(\omega) \\ \hline \text{Addition:} & F(\omega) + F(-\omega) = 2F_c(\omega) \\ \text{Subtraktion:} & F(\omega) - F(-\omega) = 2iF_s(\omega) \end{array}$$

Also ist:

$$\begin{aligned} F_c(\omega) &= \frac{1}{2}\big(F(\omega) + F(-\omega)\big) \\ F_s(\omega) &= \frac{1}{2i}\big(F(\omega) - F(-\omega)\big) \end{aligned}$$

20 Differenzialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Abschnitt 20.1 – Funktionen mehrerer Veränderlicher

20.1

a) 2 Variable: Der Benzinverbrauch ist abhängig von der Entfernung s und der Geschwindigkeit v.

b) 2 Variable: Die Bodentemperatur ist abhängig von den Ortskoordinaten x,y.

c) 1 Variable: Die Temperatur in Grad Celsius ist abhängig von der Temperatur ϑ_F in Fahrenheit.

d) 4 Variable: Der aktuelle Luftdruck ist abhängig von den Lagekoordinaten x,y, der Höhe z und der Zeit t.

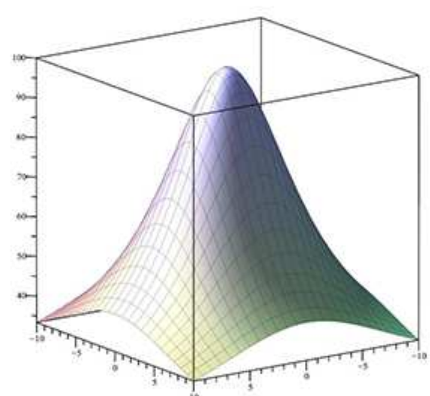
e) 3 Variable: Die Produktionskosten einer n-elementigen Charge ist Abhängig vom Umfang n, den Fixkosten K_{fix} und den Fertigungskosten pro Stück $K_{\text{Stück}}$.

f) n Variable: Der Mittelwert ist abhängig von den n Längenmessungen l_i, $i = 1 \ldots n$.

20.3

a) Das Teelicht befindet sich im Ursprung $(0{,}0)$.

b)



c) $\vartheta(0{,}0) = 100\,°\text{C}$ $\vartheta(6{,}8) \approx 42{,}9\,°\text{C}$ $\vartheta(10{,}0) \approx 42{,}9\,°\text{C}$ $\vartheta(-8{,}2) \approx 49{,}6\,°\text{C}$

d) Wenn man sich unendlich weit vom Teelicht entfernt, geht der zweite Summand gegen null ($x \to \pm\infty$ bzw. $x \to \pm\infty$). Der erste Summand bleibt davon unberührt. Die Temperatur strebt unabhängig von der Richtung gegen 20 °C.

e) Für die Isothermen gilt:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0 &= 20 + \frac{80}{1+0{,}025\,x^2+0{,}025\,y^2} \\
\vartheta_0 - 20 &= \frac{80}{1+0{,}025\,x^2+0{,}025\,y^2} \\
1+0{,}025\,x^2+0{,}025\,y^2 &= \frac{80}{\vartheta_0 - 20} \\
0{,}025(x^2+y^2) &= \frac{80}{\vartheta_0 - 20} - 1 \\
x^2+y^2 &= \frac{\frac{80}{\vartheta_0-20} - 1}{0{,}025} \\
x^2+y^2 &= \frac{80}{\vartheta_0 - 20} - 40
\end{aligned}$$

Es handelt sich bei den Isothermen um konzentrische Kreise um den Ursprung mit den Radien

$$r_\vartheta = \sqrt{\frac{80}{\vartheta_0 - 20} - 40}.$$

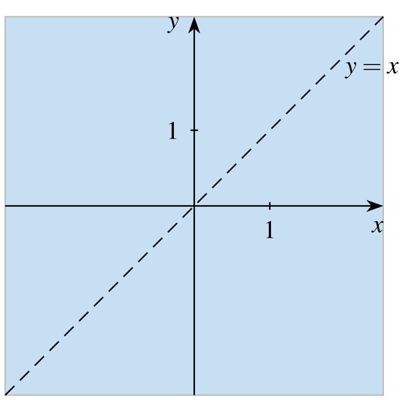
20.4

a) $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$ ist definiert, falls:

$$\begin{aligned}
x - y &\neq 0 \\
y &\neq x
\end{aligned}$$

Maximaler Definitionsbereich:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x\right\}$$

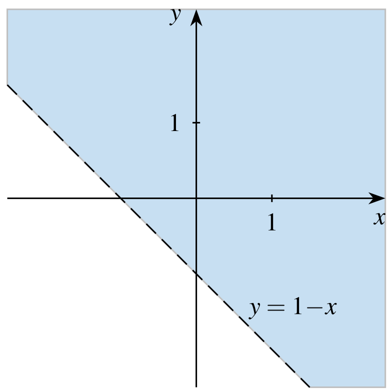


b) $f(x,y) = \ln(1-x+y)$ ist definiert, falls:

$$\begin{aligned} 1-x+y &> 0 \\ y &> x-1 \end{aligned}$$

Maximaler Definitionsbereich:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x-1\right\}$$

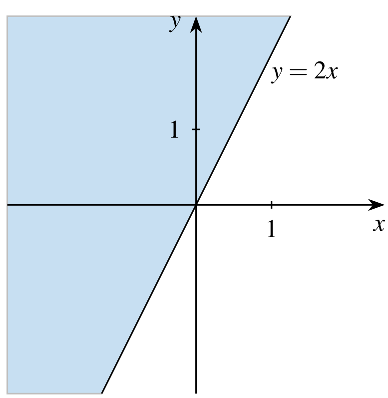


c) $f(x,y) = \sqrt{y-2x}$ ist definiert, falls:

$$\begin{aligned} y-2x &\geq 0 \\ y &\geq 2x \end{aligned}$$

Maximaler Definitionsbereich:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2x\right\}$$

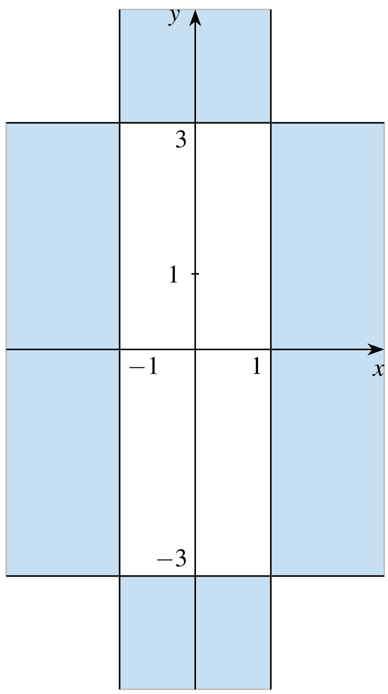


d) $f(x,y) = \sqrt{(x^2-1)(9-y^2)}$ ist definiert, falls:

$$\begin{aligned}
&\left(x^2-1\right)\left(9-y^2\right) \geq 0 \\
&\left(x^2-1 \geq 0 \text{ und } 9-y^2 \geq 0\right) \quad \text{oder} \quad \left(x^2-1 \leq 0 \text{ und } 9-y^2 \leq 0\right) \\
&\left(x^2 \geq 1 \text{ und } y^2 \leq 9\right) \quad \text{oder} \quad \left(x^2 \leq 1 \text{ und } y^2 \geq 9\right) \\
&(|x| \geq 1 \text{ und } |y| \leq 3) \quad \text{oder} \quad (|x| \leq 1 \text{ und } |y| \geq 3)
\end{aligned}$$

Maximaler Definitionsbereich:

$$\begin{aligned}
A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ &(x \geq 1 \text{ und } -3 \leq y \leq 3) \text{ oder } (x \leq -1 \text{ und } -3 \leq y \leq 3) \\
&\text{oder } (-1 \leq x \leq 1 \text{ und } y \geq 3) \text{ oder } (-1 \leq x \leq 1 \text{ und } y \leq -3)\big\}
\end{aligned}$$

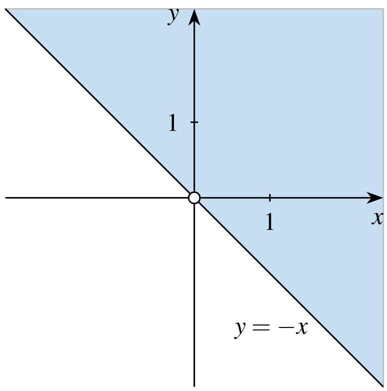


e) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y}$ ist definiert, falls:

$$x+y \geq 0 \text{ und } x-y \neq 0$$
$$y \geq -x \text{ und } x \neq y$$
$$y \geq -x \text{ und } (x,y) \neq (0,0)$$

Maximaler Definitionsbereich:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x \text{ und } (x,y) \neq (0,0)\right\}$$

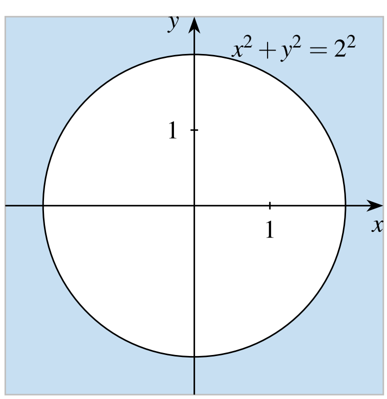


f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$ ist definiert, falls:

$$x^2+y^2-4 \geq 0$$
$$x^2+y^2 \geq 4$$

Maximaler Definitionsbereich:

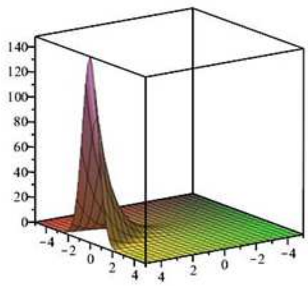
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geq 2^2\right\}$$



Abschnitt 20.2 – Der Stetigkeitsbegriff

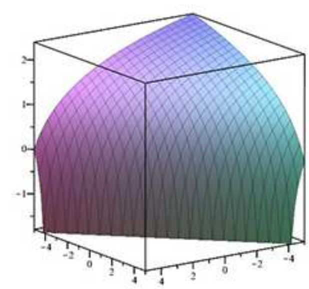
20.5

a)



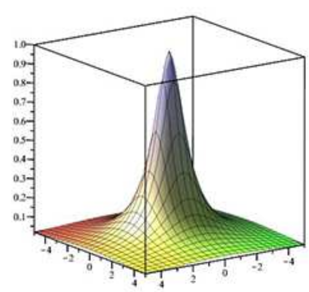
stetig

b)



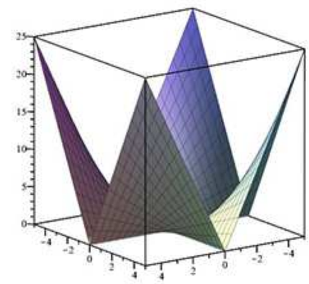
stetig

c)



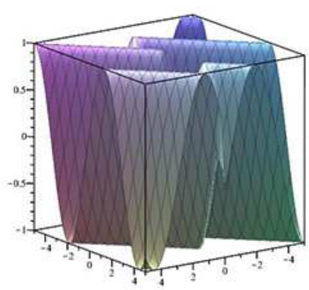
stetig

d)



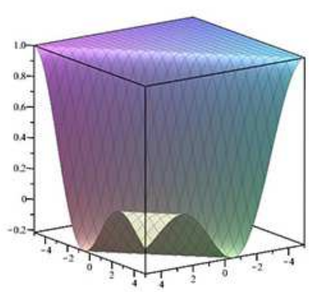
stetig

e)



nicht stetig

f)



stetig

20.6

Im Allgemeinen kann man keine Aussage über den Wert $f(-1,2)$ machen, da dort der Funktionswert beliebig definiert sein kann (Sprungstelle möglich). Nur im Fall der Stetigkeit an der Stelle $(1,2)$ kann man sagen, dass $f(1,2) = \lim\limits_{|(x,y)-(1,2)|\to 0} = -3$ gilt.

Abschnitt 20.3 – Partielle Ableitungen

20.7

a) $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -12x^2y^2 + 3y^4 - 3$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -8x^3y + 12xy^3 + 2$$

b) $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot y = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$$

c) $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2} - e^{2xy} \cdot 2y + 3 = \frac{1}{x+y^2} - 2ye^{2xy} + 3$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y^2} \cdot 2y - e^{2xy} \cdot 2x = \frac{2y}{x+y^2} - 2xe^{2xy}$$

d) $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x-y)\cos(2z)$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x-y) \cdot (-1) \cdot \cos(2z) = -\cos(x-y)\cos(2z)$$
$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \cos(x-y)(-\sin(2z)) \cdot 2 = -2\sin(x-y)\sin(2z)$$

e) $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{yz} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = 2e^{yz} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{yz} \cdot z + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2y = 2xze^{yz} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = 2xe^{yz} \cdot y + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2z = 2xye^{yz} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

f) $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{y^z}$$
$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^z}} \cdot y^{z-1} = \frac{xy^z}{2y\sqrt{y^z}} = \frac{xz\sqrt{y^z}}{2y}$$
$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x\sqrt{e^{z\ln(y)}}}{\partial x} = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{z\ln(y)}}} \cdot e^{z\ln(y)} \cdot \ln(y) = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^z}} \cdot \sqrt{y^z} \cdot \ln(y) = \frac{1}{2}x\sqrt{y^z}\ln(y)$$

20.8

a) $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{x^2+y^2}\cdot 0 - y\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 2x}{\left(e^{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{-2xye^{x^2+y^2}}{\left(e^{x^2+y^2}\right)^2} = -\frac{2xy}{e^{x^2+y^2}}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^{x^2+y^2}\cdot 1 - y\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 2y}{\left(e^{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{(1-2y^2)e^{x^2+y^2}}{\left(e^{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{1-2y^2}{e^{x^2+y^2}}$$

$(x,y) = (0,0)$:

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{0}{e^{(\Delta x)^2+0^2}}-0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{e^{0^2+(\Delta y)^2}}-0}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{e^{(\Delta y)^2}}}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{e^{(\Delta y)^2}} = \frac{1}{e^{0^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

b) $(x,y) \neq (-1,0)$:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\left((x+1)^2+y^2\right)\cdot 3(x+1)^2 - \left((x+1)^3-2y^3\right)\cdot 2(x+1)}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$= \frac{(x+1)\left((x^2+2x+1+y^2)\cdot 3(x+1) - (x^3+3x^2+3x+1-2y^3)\cdot 2\right)}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$= \frac{(x+1)\left(3x^3+6x^2+3x+3xy^2+3x^2+6x+3+3y^2-2x^3-6x^2-6x-2+4y^3\right)}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$= \frac{(x+1)\left(x^3+3x^2+3x+3xy^2+1+3y^2+4y^3\right)}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\left((x+1)^2+y^2\right)\cdot(-6y^2) - \left((x+1)^3-2y^3\right)\cdot 2y}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$= \frac{-\left(x^2+2x+1+y^2\right)\cdot 6y^2 - \left(x^3+3x^2+3x+1-2y^3\right)\cdot 2y}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$= \frac{-6x^2y^2-12xy^2-6y^2-6y^4-2x^3y-6x^2y-6xy-2y+4y^4}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$$= -\frac{6x^2y^2+12xy^2+6y^2+2y^4+2x^3y+6x^2y+6xy+2y}{\left((x+1)^2+y^2\right)^2}$$

$(x,y) = (-1,0)$:

$$
\begin{aligned}
f_x(-1,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(-1,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1+\Delta x,0) - f(-1,0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(-1+\Delta x+1)^3 - 2\cdot 0^3}{(-1+\Delta x+1)^2+0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 \\
f_y(-1,0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(-1,0+\Delta y) - f(-1,0)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(-1+1)^3 - 2\cdot(\Delta y)^3}{(-1+1)^2+(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-2(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2}}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\Delta y}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (-2) = -2
\end{aligned}
$$

20.9

a)
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial K} &= c\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} \\
\frac{\partial B}{\partial L} &= c(1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

Das Bruttosozialprodukt ändert sich mit dem investierten Kapital bzw. der geleisteten Arbeit gemäß der obigen Formeln.

b)
$$
\begin{aligned}
K\frac{\partial B}{\partial K} + L\frac{\partial B}{\partial L} &= K\cdot c\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} + L\cdot c(1-\alpha)K^{\alpha}L^{-\alpha} = c\alpha K^{\alpha}L^{1-\alpha} + c(1-\alpha)K^{\alpha}L^{1-\alpha} \\
&= cK^{\alpha}L^{1-\alpha} = B
\end{aligned}
$$

Bedeutung: Das Bruttosozialprodukt ist gleich dem investierten Kapital mal Änderungsrate des Bruttosozialprodukts mit dem Kapital + geleistete Arbeit mal Änderungsrate des Bruttosozialprodukts mit der Arbeit.

Abschnitt 20.2 – Der Stetigkeitsbegriff

20.10

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial m} &= \frac{RT}{V} \\
\frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{mR}{V} \\
\frac{\partial p}{\partial V} &= -\frac{mRT}{V^2}
\end{aligned}
$$

Der Druck ändert sich konstant bei variabler Masse und bei variabler Temperatur und erniedrigt sich mit $\frac{1}{V^2}$ bei variablem Volumen.

20.11

Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{R_2+R_1}{R_1R_2}\\ R &= \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\end{aligned}$$

Damit ist:

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{(R_1+R_2)\cdot R_2 - R_1R_2\cdot 1}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_1R_2+R_2^2-R_1R_2}{(R_1+R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2}$$

Der Zähler ist unabhängig von R_1. Daher ist $\frac{\partial R}{\partial R_1}$ maximal, wenn $R_1 = 0$, da dann der Nenner minimal wird.
Da die Formel für den Gesamtwiderstand R symmetrisch in R_1 und R_2 ist, erhält man durch Vertauschen von $R_1 \leftrightarrow R_2$:

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_2+R_1)^2}$$

$\frac{\partial R}{\partial R_2}$ ist maximal, wenn $R_2 = 0$, da dann der Nenner minimal wird.

Bei drei Widerständen gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} = \frac{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}{R_1R_2R_3}\\ R &= \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2}\end{aligned}$$

Damit ist:

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)\cdot R_2R_3 - R_1R_2R_3\cdot(R_3+R_2)}{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)^2} = \frac{R_2^2R_3^2}{(R_2R_3+R_1R_3+R_1R_2)^2}$$

Der Zähler ist unabhängig von R_1. Daher ist $\frac{\partial R}{\partial R_1}$ maximal, wenn $R_1 = 0$, da dann der Nenner minimal wird.

Verallgemeinerung auf n Widerstände:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots\frac{1}{R_n} = \frac{R_2R_3\cdots R_n+R_1R_3\cdots R_n+\ldots+R_1R_2\cdots R_{n-1}}{R_1R_2\cdots R_n}\\ R &= \frac{R_1R_2\cdots R_n}{R_2R_3\cdots R_n+R_1R_3\cdots R_n+\ldots+R_1R_2\cdots R_{n-1}}\end{aligned}$$

Als partielle Ableitung ergibt sich:

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2^2R_3^2\cdots R_n^2}{(R_2R_3\cdots R_n+R_1R_3\cdots R_n+\ldots+R_1R_2\cdots R_{n-1})^2}$$

Der Zähler ist unabhängig von R_1. Daher ist $\frac{\partial R}{\partial R_1}$ maximal, wenn $R_1 = 0$, da dann der Nenner minimal wird.

20.12

Wenn es eine Funktion f mit den gegebenen partiellen Ableitungen gäbe, so würde aufgrund der Tatsache

$$f_x(x,y) = x + y^2$$

folgen, dass f die Gestalt

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + g(y)$$

mit einer geeigneten Funktion $g(y)$ hat. Damit wäre

$$f_y(x,y) = 2xy + g'(y) \stackrel{!}{=} \sin(x) + 2xy,$$

d. h. es müsste gelten

$$g'(y) = \sin(x),$$

was nicht möglich ist, da $g(y)$ nur von y und nicht von x abhängt. Demzufolge gibt es keine Funktion f mit den geforderten partiellen Eigenschaften.

20.13

Aus

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right)$$

folgt:

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right)\\
f_y &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2y\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{\frac{y}{z}}\cdot\frac{1}{z}\\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{y}\\
f_z &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2z\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{\frac{y}{z}}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)\\
&= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{x}\cdot\operatorname{grad} f &= \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_x\\ f_y\\ f_z\end{pmatrix} = x\cdot f_x + y\cdot f_y + z\cdot f_z\\
&= x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) + y\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{y}\right)\\
&\quad + z\cdot\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) - \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}\right)\\
&= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\frac{y}{z} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
&\quad + \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\left(\ln\frac{y}{z}\right) - \sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
&= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right)\\
&= \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right)\\
&= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\ln\left(\frac{y}{z}\right)\\
&= f(x,y,z)
\end{aligned}$$

Abschnitt 20.4 – Totales Differenzial

20.14

a) $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dx = y\,dx + x\,dy$

b) $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dx = \frac{x+y-x}{(x+y)^2}dx - \frac{x}{(x+y)^2}dy = \frac{y}{(x+y)^2}dx - \frac{x}{(x+y)^2}dy$

c) $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dx = \left(e^{-\frac{y}{x}} + xe^{-\frac{y}{x}}\frac{y}{x^2}\right)dx - xe^{-\frac{y}{x}}\frac{1}{x}dy = \left(1+\frac{y}{x}\right)e^{-\frac{y}{x}}dx - e^{-\frac{y}{x}}dy$

d) Es ist $x^y = e^{y\ln x}$. Damit:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dx = yx^{y-1}dx + e^{y\ln(x)}\ln(y)\,dy = yx^{y-1}dx + x^y\ln(x)\,dy$$

e) $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx = \frac{df}{dx}dx = -\frac{1}{\operatorname{arccot}(x)}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$

f) $df = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}}\cdot 2x_i\,dx_i = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}}dx_i$

20.15

Das Volumen berechnet sich als

$$V(r,h) = \pi r^2\cdot h.$$

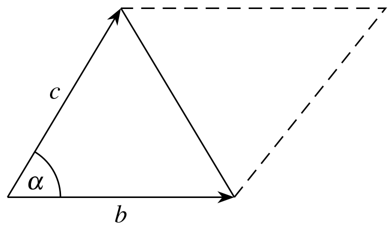
Damit:

$$dV = 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh$$

Als maximale Unsicherheit bei $r = 2\,\mathrm{m}$ und $h = 12{,}50\,\mathrm{m}$ ergibt sich bei den angegebenen Toleranzen nach dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\begin{aligned}|dV| &\le |2\pi rh|\cdot|dr| + |\pi r^2|\cdot|dh| = 2\pi\cdot 12{,}50\,\mathrm{m}\cdot 0{,}02\cdot 2\,\mathrm{m} + \pi\cdot 2^2\,\mathrm{m}^2\cdot 0{,}005\cdot 12{,}5\,\mathrm{m}\\ &\approx 7{,}07\,\mathrm{m}^3.\end{aligned}$$

20.16



$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot 40{,}3\cdot 21{,}7\cdot\sin(53{,}5^\circ) \approx 351{,}5\;\left[\mathrm{m}^2\right]$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial b} &= \frac{1}{2}\cdot c\cdot\sin(\alpha)\\ \frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{1}{2}\cdot b\cdot\sin(\alpha)\\ \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Totales Differenzial:

$$\begin{aligned}dA &= \frac{\partial A}{\partial b}db+\frac{\partial A}{\partial c}dc+\frac{\partial A}{\partial \alpha}d\alpha\\ &= \frac{1}{2}\cdot c\cdot\sin(\alpha)\,db+\frac{1}{2}\cdot b\cdot\sin(\alpha)\,dc+\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)\,d\alpha\end{aligned}$$

Fehlerabschätzung nach dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\begin{aligned}|dA| &\le \left|\frac{1}{2}\cdot c\cdot\sin(\alpha)\right|\cdot|db|+\left|\frac{1}{2}\cdot b\cdot\sin(\alpha)\right|\cdot|dc|+\left|\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)\right|\cdot|d\alpha|\\ &= \frac{1}{2}\cdot 21{,}7\cdot\sin(53{,}5^\circ)\cdot 0{,}2+\frac{1}{2}\cdot 40{,}3\cdot\sin(53{,}5^\circ)\cdot 0{,}1\\ &\qquad +\frac{1}{2}\cdot 40{,}3\cdot 21{,}7\cdot(\cos 53{,}3^\circ)\cdot 0{,}2^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\\ &= 4{,}3\;\left[\mathrm{m}^2\right]\end{aligned}$$

20.17

Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{g}+\frac{1}{b} = \frac{b+g}{gb}\\ f &= \frac{gb}{g+b} = \frac{9\cdot 5}{9+5} \approx 3{,}2\;[\mathrm{cm}]\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial g} &= \frac{(g+b)\cdot b - gb\cdot 1}{(g+b)^2} = \frac{b^2}{(g+b)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \frac{(g+b)\cdot g - gb\cdot 1}{(g+b)^2} = \frac{g^2}{(g+b)^2}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f}{\partial g}dg + \frac{\partial f}{\partial b}db\\ &= \frac{b^2}{(g+b)^2}dg + \frac{b^2}{(g+b)^2}db\end{aligned}$$

Fehlerabschätzung nach dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\begin{aligned}|df| &\le \left|\frac{b^2}{(g+b)^2}\right|\cdot|dg| + \left|\frac{g^2}{(g+b)^2}\right||db| = \frac{b^2}{(g+b)^2}\cdot|dg| + \frac{g^2}{(g+b)^2}|db|\\ &= \frac{5^2}{(9+5)^2} + \frac{9^2}{(9+5)^2} \approx 0{,}1 \text{ [cm]}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als relativer Fehler

$$\frac{|df|}{f} \approx 0{,}034 = 3{,}4\,\%.$$

20.18

Kugelvolumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Totales Differenzial der Funktion $V(\pi, r)$:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \pi}d\pi + \frac{\partial V}{\partial r}dr = \frac{4}{3}r^3\,d\pi + 4\pi r^2\,dr$$

Fehlerabschätzung nach dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$|dV| \le \left|\frac{4}{3}r^3\right|\cdot|d\pi| + \left|4\pi r^2\right|\cdot|dr| = \frac{4}{3}r^3\cdot|d\pi| + 4\pi r^2\cdot|dr|$$

Also darf maximal gelten:

$$
\begin{aligned}
0{,}005 \;&=\; \frac{|dV|}{V} \;=\; \frac{\frac{4}{3}r^3\cdot|d\pi|+4\pi r^2\cdot 0{,}001\,r}{\frac{4}{3}\pi r^3}\\
\frac{4}{3}r^3\cdot|d\pi|+4\pi r^2\cdot 0{,}001\,r \;&=\; 0{,}005\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\\
4|d\pi|+0{,}012\pi \;&=\; 0{,}02\pi\\
|d\pi| \;&=\; \frac{0{,}008}{4}\pi \;=\; 0{,}002\pi \;\approx\; 0{,}006
\end{aligned}
$$

Es genügen also 6 Dezimale von π.

20.19

Nein, Schlaumeier hat nicht Recht. Die maximale Abweichung der Funktion f muss nicht an einer der beiden Stellen $f(x+dx,y+dy)$ oder $f(x-dx,y-dy)$, sondern kann an jeder anderen Stelle innerhalb des Rechtecks $(x\pm dx, y\pm dy)$ angenommen werden.

20.20

a) Partielle Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} \;&=\; 4x^3+2\cos(y)\\
\frac{\partial F}{\partial y} \;&=\; -2x\sin(y)-\sqrt{2}\cos(y)\cos(z)\\
\frac{\partial F}{\partial z} \;&=\; \sqrt{2}\sin(y)\sin(z)
\end{aligned}
$$

Damit:

$$
dF \;=\; (4x^3+2\cos(y))\,dx+(-2x\sin(y)-\sqrt{2}\cos(y)\cos(z))\,dy+\sqrt{2}\sin(y)\,\sin(z)\,dz
$$

b) Auf der Funktion f gilt:

$$\begin{aligned} dF &= (4x^3+2\cos(y))\,dx+(-2x\sin(y)-\sqrt{2}\cos(y)\cos(z))\,dy+\sqrt{2}\sin(y)\,\sin(z)\,dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit gilt an der betrachteten Stelle $(x,y,z)=(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$:

$$\begin{aligned} dF\left(1,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right) &= \left(4+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)dx+\left(-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right))\,dy \\ &\quad +\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)dz \\ &= (4+2\cdot 0)\,dx+\left(-2\cdot 1-\sqrt{2}\cdot 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dy \\ &\quad +\sqrt{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,dz \\ &= 4\,dx-2\,dy+dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daraus:

$$dz = -4\,dx+2\,dy$$

Für Änderungen $dx=dy=0{,}1$ ergibt sich demzufolge als Änderung in z

$$dz = -4\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}1 = -0{,}4+0{,}2 = -0{,}2.$$

20.21

a) Partielle Ableitungen der Funktion $F(x,y)=y^2e^{x-y}-1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y^2e(x-y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2ye^{x-y}-y^2e^{x-y} = (2y-y^2)e^{x-y} \end{aligned}$$

Damit:

$$dF = y^2e(x-y)\,dx+(2y-y^2)e^{x-y}\,dy$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} dF(1,1) &= dx+dy = 0 \\ dy &= -dx \end{aligned}$$

Die Ableitung der implizit gegebenen Funktion $y=f(x)$ an der Stelle $x_0=1$ lautet demzufolge

$$f'(1) = \frac{dy}{dx} = -1.$$

b) Partielle Ableitungen der Funktion $F(x,y) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{y+1}\right) + y\tan(xy)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2\frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{y+1}} \cdot \frac{1}{(y+1)2\sqrt{x}} + y^2\left(1+\tan^2(xy)\right) \\
&= \frac{1}{x} + y^2\left(1+\tan^2(xy)\right) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -2\frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{y+1}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{(y+1)^2} + \tan(xy) + xy\left(1+\tan^2(xy)\right) \\
&= -\frac{2}{y+1} + \tan(xy) + xy\left(1+\tan^2(xy)\right)
\end{aligned}$$

Damit:

$$dF = \left(\frac{1}{x} + y^2\left(1+\tan^2(xy)\right)\right)dx + \left(-\frac{2}{y+1} + \tan(xy) + xy\left(1+\tan^2(xy)\right)\right)dy$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
dF(1,0) &= dx - 2dy = 0 \\
dy &= \frac{1}{2}dx
\end{aligned}$$

Die Ableitung der implizit gegebenen Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ lautet demzufolge

$$f'(1) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.$$

c) Partielle Ableitungen der Funktion $F(x,y,z) = xe^y + x\ln(z) - 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= e^y + \ln z \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= xe^y \\
&= \frac{x}{z}
\end{aligned}$$

Damit:

$$dF = (e^y + \ln(z))\,dx + xe^y\,dy + \frac{x}{z}\,dz$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
dF(1,0,e) &= 2dx + dy + \frac{1}{e}dz = 0 \\
dz &= -2e\,dx - e\,dy
\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen der implizit gegebenen Funktion $z = f(x,y)$ an der Stelle $(x_0,y_0) = (1,0)$ lauten demzufolge

$$\begin{aligned}
f_x(1,0) &= \frac{\partial z}{\partial x} = -2e \\
f_y(1,0) &= \frac{\partial z}{\partial x} = -e.
\end{aligned}$$

20.22

Betrachte

$$F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Totales Differenzial:

$$dF = \frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz$$

Somit ist wegen $F(x,y,z) = 0$

$$\begin{aligned} dF(x_0,y_0,z_0) &= \frac{2x_0}{a^2}dx + \frac{2y_0}{b^2}dy + \frac{2z_0}{c^2}dz = 0 \\ dz &= -\frac{c^2}{a^2}\frac{x_0}{z_0}dx - \frac{c^2}{b^2}\frac{y_0}{z_0}dy. \end{aligned}$$

Für die Tangentialebene ist $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$, $dz = z - z_0$:

$$z - z_0 = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{c^2}{b^2}\frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

Nun führen wir die Parameter

$$\begin{aligned} \lambda &= x - x_0 \\ \mu &= y - y_0 \end{aligned}$$

ein und erhalten

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \\ y &= y_0 + \mu \\ z &= z_0 - \lambda\frac{c^2}{a^2}\frac{x_0}{z_0} - \mu\frac{c^2}{b^2}\frac{y_0}{z_0} \end{aligned}$$

bzw. als Parameterdarstellung

$$\vec{x} == \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{c^2}{a^2}\frac{x_0}{z_0} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{c^2}{b^2}\frac{y_0}{z_0} \end{pmatrix}.$$

Abschnitt 20.5 – Richtungsableitung

20.23

a)
$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x+y)\cdot 1 - x\cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,2) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{18}$$

b)
$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(2z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\cos(z) + 2y\sin(2z)$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0,0,0) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(0,0,0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}$$

c)
$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x-y)\cos(2y+z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x-y)\cos(2y+z) - 2\sin(x-y)\sin(2y+z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(x-y)\sin(2y+z)$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\pi,0,-\pi) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(\pi,0,-\pi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}$$

d)
$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1\sqrt{x_2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1^2}{2\sqrt{x_2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_4 e^{x_3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = e^{x_3}$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(-1,1,0,2) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(-1,1,0,2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{-2-\frac{1}{2}-2+1}{2} = -\frac{7}{4}$$

20.24

a)
$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x+y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(3,-2) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(3,-2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(3-12) = -\frac{9}{5}$$

Maximale Steigung in Richtung

$$\operatorname{grad} f(3,-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit dem Wert

$$|\operatorname{grad} f(3,-2)| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}.$$

b) $$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+1}$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0,1) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(0,1) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{12}{13}$$

Maximale Steigung in Richtung

$$\operatorname{grad} f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Wert

$$|\operatorname{grad} f(0,1)| = 1.$$

c) $$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}\sin(y) + \frac{1}{2}y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x}\cos(y) + y(x-1)$$

Damit:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(-1,0) = \vec{e}\cdot \operatorname{grad} f(-1,0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} = \frac{4}{5}e$$

Maximale Steigung in Richtung

$$\operatorname{grad} f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix}$$

mit dem Wert

$$|\operatorname{grad} f(-1,0)| = e.$$

20.25

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2cx \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2cy\end{aligned}$$

und damit

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2cx \\ 2cy \end{pmatrix}.$$

An der Stelle $(x_0,y_0) = (2,1)$ gilt demzufolge

$$\operatorname{grad} f(2,1) = \begin{pmatrix} 4c \\ 2c \end{pmatrix}.$$

Für den steilsten Anstieg erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}|\operatorname{grad} f(2,1)| &= \sqrt{(4c)^2+(2c)^2} = \sqrt{16c^2+4c^2} = \sqrt{20c^2} = 2c\sqrt{5} \\ &\overset{!}{=} \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\end{aligned}$$

Daraus:

$$c = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Die Richtung des steilsten Anstiegs ist damit

$$\operatorname{grad} f(2,1) = \begin{pmatrix} 4c \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20.26

a) Die Temperatur beträgt

$$\vartheta(3,4) = 20\,^\circ\mathrm{C} + \frac{350\,^\circ\mathrm{C}}{1+3^2+4^2} \approx 33{,}5^\circ$$

b) Das Lagerfeuer befindet sich an der Stelle höchster Temperatur. Diese wird offensichtlich für $(x,y) = (0,0)$ erreicht:

$$\vartheta(0,0) = 20\,^\circ\mathrm{C} + \frac{350\,^\circ\mathrm{C}}{1+0^2+0^2} = 370^\circ$$

c) Der zur Richtung gehörende Einheitsvektor lautet

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist in °C:

$$\operatorname{grad}\vartheta = \begin{pmatrix} \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \\ \frac{\partial\vartheta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{700\cdot x}{(1+x^2+y^2)^2} \\ -\frac{700\cdot y}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad}\vartheta(3{,}4) = \begin{pmatrix} -\frac{700\cdot 3}{(1+3^2+4^2)^2} \\ -\frac{700\cdot 4}{(1+3^2+4^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{525}{169} \\ -\frac{700}{169} \end{pmatrix}.$$

Damit ändert sich die Temperatur bei der Bewegung gemäß

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(3{,}4) &= \vec{e}\cdot\operatorname{grad} f(3{,}4) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{525}{169} \\ -\frac{700}{169} \end{pmatrix} = -\frac{1\,750}{169\sqrt{5}} \\ &\approx -4{,}63\left[\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right]. \end{aligned}$$

d) Wir setzen die Richtung als Einheitsvektor an:

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \pm\sqrt{1-e_1^2} \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(3{,}4) &= \vec{e}\cdot\operatorname{grad} f(3{,}4) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \pm\sqrt{1-e_1^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{525}{169} \\ -\frac{700}{169} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{525e_1 \pm 700\sqrt{1-e_1^2}}{169} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 525e_1 \pm 700\sqrt{1-e_1^2} &= 0 \\ 525e_1 &= \mp 700\sqrt{1-e_1^2} \\ 525^2 e_1^2 &= 700^2(1-e_1^2) \\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 e_1^2 &= 1-e_1^2 \\ \frac{25}{16}e_1^2 &= 1 \\ e_1^2 &= \frac{16}{25} \\ e_1 &= \pm\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Probe durch Einsetzen in die Gleichung vor dem Quadrieren (da sind weitere Lösungen hinzugekommen):

$$525e_1 = \mp 700\sqrt{1-e_1^2}$$

Demzufolge müssen e_1 und $e_2 = \sqrt{1-e_1^2}$ verschiedene Vorzeichen haben.
Damit lauten die Richtungen, in welchen sich die Temperatur nicht ändert:

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \pm\frac{4}{5} \\ \mp\sqrt{1-\frac{16}{25}} \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$$

e) Die Richtung des steilsten Anstiegs ist

$$\operatorname{grad} f(3{,}4) = \begin{pmatrix} -\frac{525}{169} \\ -\frac{700}{169} \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Für den steilsten Anstieg erhalten wir damit

$$|\operatorname{grad} \vartheta(3{,}4)| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{525}{169} \\ -\frac{700}{169} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{525^2+700^2}{169^2}} = \frac{875}{169} \approx 5{,}2 \left[\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\right].$$

20.27

Es seien $\vec{e}_1 = \binom{a}{b}$ und $\vec{e}_2 = \binom{c}{d}$ Einheitsvektoren. Zu lösen ist das dann lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1} &= a f_x + b f_y \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2} &= c f_x + d f_y \end{aligned}$$

für die partiellen Ableitungen f_x, f_y. Dabei ist wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ dieses lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Im Beispiel sind $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ Einheitsvektoren. Damit:

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{2} f_x + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} f_y \\ -1 &= \tfrac{1}{2} f_x - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} f_y \end{aligned}$$

Als eindeutige Lösung ergibt sich

$$\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

20.28

a) Wegen $z = f(x,y)$ ist längs einer Höhenlinie $z = const$.

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0.$$

b) Wegen

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \operatorname{grad} f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

ist die Richtung der Höhenlinie $\binom{dx}{dy}$ orthogonal zum Gradienten und damit zur Richtung des steilsten Anstiegs.

Abschnitt 20.6 – Partielle Ableitungen höherer Ordnung

20.23

a)
$$\begin{aligned}
f_x &= -e^{-x}\cos(y)\\
f_y &= -e^{-x}\sin(y)\\
f_{xx} &= e^{-x}\cos(y)\\
f_{xy} &= e^{-x}\sin(y) \;=\; f_{yx}\\
f_{yy} &= -e^{-x}\cos(y)\\
f_{xxx} &= -e^{-x}\cos(y)\\
f_{xxy} &= -e^{-x}\sin(y) \;=\; f_{xyx} \;=\; f_{yxx}\\
f_{xyy} &= e^{-x}\cos(y) \;=\; f_{yxy} \;=\; f_{yyx}\\
f_{yyy} &= e^{-x}\sin(y)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
f_x &= \cos(x-y)\cos(2x+1) - 2\sin(x-y)\sin(2x+1)\\
f_y &= -\cos(x-y)\cos(2x+1)\\
f_{xx} &= -\sin(x-y)\cos(2x+1) - 2\cos(x-y)\sin(2x+1)\\
&\quad\; - 2\cos(x-y)\sin(2x+1) - 4\sin(x-y)\cos(2x+1)\\
&= -5\sin(x-y)\cos(2x+1) - 4\cos(x-y)\sin(2x+1)\\
f_{xy} &= \sin(x-y)\cos(2x+1) + 2\cos(x-y)\sin(2x+1) \;=\; f_{yx}\\
f_{yy} &= -\sin(x-y)\cos(2x+1)\\
f_{xxx} &= -5\cos(x-y)\cos(2x+1) + 10\sin(x-y)\sin(2x+1)\\
&\quad\; + 4\sin(x-y)\sin(2x+1) - 8\cos(x-y)\cos(2x+1)\\
&= -13\cos(x-y)\cos(2x+1) + 14\sin(x-y)\sin(2x+1)\\
f_{xxy} &= 5\cos(x-y)\cos(2x+1) - 4\sin(x-y)\sin(2x+1)\\
f_{xyx} &= \cos(x-y)\cos(2x+1) - 2\sin(x-y)\sin(2x+1)\\
&\quad\; - 2\sin(x-y)\sin(2x+1) + 4\cos(x-y)\cos(2x+1)\\
&= 5\cos(x-y)\cos(2x+1) - 4\sin(x-y)\sin(2x+1) \;=\; f_{yxx}\\
f_{xyy} &= -\cos(x-y)\cos(2x+1) + 2\sin(x-y)\sin(2x+1) \;=\; f_{yxy} \;=\; f_{yyx}\\
f_{yyy} &= \cos(x-y)\cos(2x+1)
\end{aligned}$$

c)
$$
\begin{aligned}
f_x &= \frac{z}{y}e^{\frac{x}{y}}\\
f_y &= -\frac{xz}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\\
f_z &= e^{\frac{x}{y}}\\
f_{xx} &= \frac{z}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\\
f_{xy} &= -\frac{z}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - \frac{xz}{y^3}e^{\frac{x}{y}} = -\frac{xz+yz}{y^3}e^{\frac{x}{y}}\\
f_{yx} &= -\frac{z}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - \frac{xz}{y^3}e^{\frac{x}{y}} = -\frac{xz+yz}{y^3}e^{\frac{x}{y}}\\
f_{xz} &= \frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} = f_{zx}\\
f_{yy} &= \frac{2xz}{y^3}e^{\frac{x}{y}} + \frac{x^2z}{y^4}e^{\frac{x}{y}} = \frac{2xyz+x^2z}{y^4}e^{\frac{x}{y}}\\
f_{yz} &= -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} = f_{zy}\\
f_{zz} &= 0\\
f_{xxx} &= \frac{z}{y^3}e^{\frac{x}{y}}\\
f_{xxy} &= -\frac{2z}{y^3}e^{\frac{x}{y}} - \frac{xz}{y^4}e^{\frac{x}{y}} = -\frac{xz+2yz}{y^4}e^{\frac{x}{y}}\\
f_{xyx} &= -\frac{z}{y^3}e^{\frac{x}{y}} - \frac{xz+yz}{y^4}e^{\frac{x}{y}} = -\frac{xz+2yz}{y^4}e^{\frac{x}{y}} = f_{yxx}\\
f_{xxz} &= \frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}} = f_{xzx} = f_{zxx}\\
f_{xyy} &= -\frac{y^3z-(xz+yz)3y^2}{y^6}e^{\frac{x}{y}} + \frac{(xz+yz)x}{y^5}e^{\frac{x}{y}} = \frac{x^2z+4xyz+2y^2z}{y^5}e^{\frac{x}{y}} = f_{yxy}\\
f_{yyx} &= \frac{2yz+2xz}{y^4}e^{\frac{x}{y}} + \frac{2xyz+x^2z}{y^5}e^{\frac{x}{y}} = \frac{x^2z+4xyz+2y^2z}{y^5}e^{\frac{x}{y}}\\
f_{xyz} &= -\frac{x+y}{y^3}e^{\frac{x}{y}} = f_{yxz}\\
f_{xzy} &= \frac{-1}{y^2}e^{\frac{x}{y}} + \frac{-x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} = -\frac{x+y}{y^3}e^{\frac{x}{y}} = f_{zxy}\\
f_{yzx} &= -\frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^3}e^{\frac{x}{y}} = -\frac{x+y}{y^3}e^{\frac{x}{y}} = f_{zyx}\\
f_{xzz} &= 0 = f_{zxz} = f_{zzx}\\
f_{yyy} &= \frac{y^4 2xz-(2xyz+x^2z)4y^3}{y^8}e^{\frac{x}{y}} - \frac{(2xyz+x^2z)x}{y^6}e^{\frac{x}{y}} = -\frac{x^3z+6x^2yz+6xy^2z}{y^6}e^{\frac{x}{y}}\\
f_{yyz} &= \frac{x^2+2xy}{y^4}e^{\frac{x}{y}}\\
f_{yzy} &= \frac{2x}{y^3}e^{\frac{x}{y}} + \frac{x^2}{y^4}e^{\frac{x}{y}} = \frac{x^2+2xy}{y^4}e^{\frac{x}{y}} = f_{zyy}\\
f_{yzz} &= 0 = f_{zyz} = f_{zzy}\\
f_{zzz} &= 0
\end{aligned}
$$

20.24

a)
$$\frac{\partial a}{\partial x} = \cos(x-ct) \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = -\sin(x-ct)$$
$$\frac{\partial a}{\partial t} = -c\cos(x-ct) \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -c^2\sin(x-ct)$$

Damit ist tatsächlich

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = -\sin(x-ct) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}.$$

b)
$$\frac{\partial a}{\partial x} = f'(x-ct)+g'(x+ct) \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = f''(x-ct)+g''(x+ct)$$
$$\frac{\partial a}{\partial t} = -cf'(x-ct)+cg'(x+ct) \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct)+c^2 g''(x+ct) = c^2\left(f''(x-ct)+g''(x+ct)\right)$$

Damit ist tatsächlich

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = f''(x-ct)+g''(x+ct) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}.$$

Abschnitt 20.7 – Divergenz und Rotation

20.31

a)
$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = 0+0+0 = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial xy}{\partial y} - \frac{\partial xz}{\partial z} \\ \frac{\partial yz}{\partial z} - \frac{\partial xy}{\partial x} \\ \frac{\partial xz}{\partial x} - \frac{\partial yz}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x \\ y-y \\ z-z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

b)
$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xe^y \\ ye^z \\ ze^x \end{pmatrix} = e^y+e^z+e^x = e^x+e^y+e^z$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xe^y \\ ye^z \\ ze^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial ze^x}{\partial y} - \frac{\partial ye^z}{\partial z} \\ \frac{\partial xe^y}{\partial z} - \frac{\partial ze^x}{\partial x} \\ \frac{\partial ye^z}{\partial x} - \frac{\partial xe^y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-ye^z \\ 0-ze^x \\ 0-xe^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ye^z \\ -ze^x \\ -xe^y \end{pmatrix}$$

c)
$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(x)\cdot\sin(y) \\ \ln(x)\cdot\cos(y) \\ z \end{pmatrix} = \frac{\sin(y)}{x} - \ln(x)\cdot\sin(y) + 1$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ln(x)\cdot\sin(y) \\ \ln(x)\cdot\cos(y) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial(\ln(x)\cdot\cos(y))}{\partial z} \\ \frac{\partial(\ln(x)\cdot\sin(y))}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial(\ln(x)\cdot\cos(y))}{\partial x} - \frac{\partial(\ln(x)\cdot\sin(y))}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\cos(y)}{x} - \ln(x)\cdot\cos(y) \end{pmatrix}$$

20.32

a) $\operatorname{div}\vec{F}$ ist sinnvoll, da man die Divergenz eines Vektorfeldes bilden kann.

b) $\operatorname{div} f$ ist unsinnig, da die Divergenz nur für Vektorfelder definiert ist.

c) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ ist sinnvoll. Der Gradient einer Funktion ist ein Vektorfeld, wovon man die Divergenz bilden kann.

d) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{F}$ ist sinnvoll. Die Rotation eines Vektorfeldes ist ein Vektorfeld, wovon man die Divergenz bilden kann.

e) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{F}$ ist sinnvoll. Die Rotation eines Vektorfeldes ist ein Vektorfeld, wovon man die Rotation bilden kann.

f) $\vec{F}\times\operatorname{rot}\vec{G}$ ist sinnvoll. Die Rotation des Vektorfeldes $\vec{G}$ ist ein Vektorfeld. Und das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektorfeldern kann man bilden.

g) $\operatorname{rot}\vec{F}\times\left(\operatorname{div}\operatorname{grad}\vec{G}\right)$ ist unsinnig. Man kann nicht den Gradienten des Vektorfeldes $\vec{G}$ bilden.

h) $f\cdot\operatorname{grad}\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G})$ ist sinnvoll. Man kann die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}\times\vec{G}$ bilden. Die Divergenz vom Ergebnis ist eine Funktion von 3 Veränderlichen, wovon man wieder den Gradienten bilden kann. Das entstehenden Vektorfeld kann mit der skalaren Funktion f S-multipliziert werden.

20.33

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{E} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - x\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} + \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - y\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - z\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} \right) \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\frac{2yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2}\frac{2yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{3}{2}\frac{2xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2}\frac{2xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{3}{2}\frac{2xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2}\frac{2xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

20.34

a)

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\operatorname{rot} f &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

21 Extrema bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

Abschnitt 21.1 – Extrema ohne Nebenbedingungen

21.1

a)
$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 3 \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= 3y^2 - 12 \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich 4 stationäre Stellen:

$$(1,2) \qquad (1,-2) \qquad (-1,2) \qquad (-1,-2)$$

Als Hesse-Matrix ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Definitheit von H_f an den stationären Stellen:

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\rightarrow$ lokales Minimum mit dem Wert $f(1,2) = 2$

$$H_f(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

indefinit $\rightarrow$ kein lokales Extremum

$$H_f(-1,2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

indefinit $\rightarrow$ kein lokales Extremum

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

negativ definit $\rightarrow$ lokales Maximum mit dem Wert $f(-1,-2) = 38$

Die lokalen Extrema sind nicht absolut, da z. B.

$$f(10,0) = 990 \qquad\qquad f(-10,0) = -950.$$

b)
$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2-3 \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= 6y^2-6y \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich 4 stationäre Stellen:

$$(1,0) \qquad (1,1) \qquad (-1,0) \qquad (-1,1)$$

Als Hesse-Matrix ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y-6 \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Definitheit von H_f an den stationären Stellen:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

indefinit $\rightarrow$ kein lokales Extremum

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\rightarrow$ lokales Minimum mit dem Wert $f(1,1) = 2$

$$H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

negativ definit $\rightarrow$ lokales Maximum mit dem Wert $f(-1,0) = 7$

$$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

indefinit $\rightarrow$ kein lokales Extremum

Die lokalen Extrema sind nicht absolut, da z. B.

$$f(10,0) = 975 \qquad\qquad f(-10,0) = -965.$$

c)
$$\begin{aligned} f_x &= -(x-1)(3x-1) \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= 4y \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich 2 stationäre Stellen:

$$(1,0) \qquad \left(\frac{1}{3},0\right)$$

Als Hesse-Matrix ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x+4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Definitheit von H_f an den stationären Stellen:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

indefinit $\rightarrow$ kein lokales Extremum

$$\mathrm{H}_f(\frac{1}{3},0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\rightarrow$ lokales Minimum mit dem Wert $f(\frac{1}{3},0) = -\frac{4}{27}$

Das lokale Minimum ist nicht absolut, da z. B.

$$f(10,0) = -810.$$

d)
$$\begin{aligned} f_x &= (2x - x^2 - y^2)e^{-x} \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= 2ye^{-x} \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich 2 stationäre Stellen:

$(0,0) \qquad (2,0)$

Als Hesse-Matrix ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-4x+x^2+y^2)e^{-x} & -2ye^{-x} \\ -2ye^{-x} & 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Definitheit von H_f an den stationären Stellen:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\to$ lokales Minimum mit dem Wert $f(0,0) = 0$

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

indefinit $\to$ kein lokales Extremum

Das lokale Minimum ist absolut, da

$f(x,y) \geq 0.$

e)
$$\begin{aligned} f_x &= e^{4y-x^2-y^2} \cdot (-2x) \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= e^{4y-x^2-y^2} \cdot (4-2y) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich 1 stationäre Stelle:

$(0,2)$

Als Hesse-Matrix ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4x^2-2)\, e^{4y-x^2-y^2} & (-8x+4xy)\, e^{4y-x^2-y^2} \\ (-8x+4xy)\, e^{4y-x^2-y^2} & (2-2y)\, e^{4y-x^2-y^2} \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Definitheit von H_f an den stationären Stellen:

$$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} -2e^4 & 0 \\ 0 & -2e^4 \end{pmatrix}$$

negativ definit $\to$ lokales Maximum mit dem Wert $f(0,0) = e^4$

Das lokale Maximum ist absolut, da

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{4y-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2+4y-4+4} = e^{-x^2-(y^2-4y+4)} \cdot e^4 \\ &= e^{\overbrace{-x^2-(y-2)^2}^{\leq 0}} \cdot e^4 \leq e^0 \cdot e^4 = e^4. \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} f_x &= (3x^2+2)\sin(y) \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= (x^3+2x)\cos(y) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich als stationäre Stellen:

$$(0{,}2k\pi) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Als Hesse-Matrix ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x\sin(y) & (3x^2+2)\cos(y) \\ (3x^2+2)\cos(y) & -(x^3+2x)\sin(y) \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Definitheit von H_f an den stationären Stellen:

$$H_f(0{,}2k\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

indefinit $\rightarrow$ kein lokales Extremum

21.2

$$\begin{aligned} f_x &= 4(x+a) \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= (y+b)^2 + 2y(y+b) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich zwei stationäre Stellen:

$$(-a,-b) \qquad \left(-a,-\frac{b}{3}\right)$$

Als Hesse-Matrix ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6y+4b \end{pmatrix}.$$

1. Fall: $(x_0,y_0) = (2,-1) = (-a,-b)$ bzw. $a = -2$ und $b = 1$
Überprüfung der Definitheit von H_f an der stationären Stelle $(-a,-b) = (2,-1)$:

$$H_f(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6\cdot(-1)+4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

indefinit $\rightarrow$ kein lokales Extremum

2. Fall: $(x_0,y_0) = (2,-1) = \left(-a,-\frac{b}{3}\right)$ bzw. $a = -2$ und $b = 3$
Überprüfung der Definitheit von H_f an der stationären Stelle $\left(-a,-\frac{b}{3}\right) = (2,-1)$:

$$H_f(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6\cdot(-1)+4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\rightarrow$ lokales Minimum mit dem Wert $f(2,-1) = -4$

21.3

a)
$$\begin{aligned} f_x &= \frac{y\sqrt{1-a^2}}{y^2+1-a^2}\, e^{-(x-a)^2} \cdot (-2(x-a)) \\ &= -2\frac{(x-a)y\sqrt{1-a^2}}{y^2+1-a^2}\, e^{-(x-a)^2} && \stackrel{!}{=} 0 \qquad (1) \\ f_y &= \frac{\left(y^2+1-a^2\right)\cdot\sqrt{1-a^2} - y\sqrt{1-a^2}\cdot 2y}{\left(y^2+1-a^2\right)^2}\, e^{-(x-a)^2} \\ &= \frac{\left(-y^2+1-a^2\right)\sqrt{1-a^2}}{\left(y^2+1-a^2\right)^2}\, e^{-(x-a)^2} && \stackrel{!}{=} 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Aus (1):

$f_x = 0 \quad$ wenn $\quad x = a \quad$ oder $\quad y = 0$

Aus (2):

$f_y = 0 \quad$ wenn $\quad y^2 = 1-a^2 \quad \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{1-a^2}$

Damit ergeben sich als stationäre Stellen:

$(a, \sqrt{1-a^2}) \qquad (a, -\sqrt{1-a^2})$

Zweite partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -2\frac{y\sqrt{1-a^2}}{y^2+1-a^2}\, e^{-(x-a)^2} - 2\frac{(x-a)y\sqrt{1-a^2}}{y^2+1-a^2}\, e^{-(x-a)^2}\,(-2(x-a)) \\ &= \left(-2\frac{y\sqrt{1-a^2}}{y^2+1-a^2} + 4\frac{(x-a)^2 y\sqrt{1-a^2}}{y^2+1-a^2}\right) e^{-(x-a)^2} \\ &= -2\,\frac{\left(1-2(x-a)^2\right) y\sqrt{1-a^2}}{y^2+1-a^2}\, e^{-(x-a)^2} \\ f_{xy} &= -2\,\frac{\left(y^2+1-a^2\right)\cdot(x-a)\sqrt{1-a^2} - (x-a)y\sqrt{1-a^2}\cdot 2y}{\left(y^2+1-a^2\right)^2}\, e^{-(x-a)^2} \\ &= -2\,\frac{\left(-y^2+1-a^2\right)(x-a)\sqrt{1-a^2}}{\left(y^2+1-a^2\right)^2}\, e^{-(x-a)^2} = f_{yx} \\ f_{yy} &= \frac{\left(y^2+1-a^2\right)^2\cdot(-2y)\sqrt{1-a^2} - \left(-y^2+1-a^2\right)\sqrt{1-a^2}\cdot 2\left(y^2+1-a^2\right)\cdot 2y}{\left(y^2+1-a^2\right)^4}\, e^{-(x-a)^2} \\ &= \frac{\left(y^2+1-a^2\right)\cdot(-2y)\sqrt{1-a^2} - \left(-y^2+1-a^2\right)\sqrt{1-a^2}\cdot 4y}{\left(y^2+1-a^2\right)^3}\, e^{-(x-a)^2} \\ &= -2\,\frac{\left((y^2+1-a^2)+2(-y^2+1-a^2)\right) y\sqrt{1-a^2}}{\left(y^2+1-a^2\right)^3}\, e^{-(x-a)^2} \\ &= -2\,\frac{\left(-y^2+3-3a^2\right) y\sqrt{1-a^2}}{\left(y^2+1-a^2\right)^3}\, e^{-(x-a)^2} \end{aligned}$$

Damit lautet die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\frac{\left(1-2(x-a)^2\right)y\sqrt{1-a^2}}{y^2+1-a^2}e^{-(x-a)^2} & -2\frac{\left(-y^2+1-a^2\right)(x-a)\sqrt{1-a^2}}{\left(y^2+1-a^2\right)^2}e^{-(x-a)^2} \\ -2\frac{\left(-y^2+1-a^2\right)(x-a)\sqrt{1-a^2}}{\left(y^2+1-a^2\right)^2}e^{-(x-a)^2} & -2\frac{\left(-y^2+3-3a^2\right)y\sqrt{1-a^2}}{\left(y^2+1-a^2\right)^3}e^{-(x-a)^2} \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Definitheit von H_f an den stationären Stellen:

$$H_f(a,\sqrt{1-a^2}) = \begin{pmatrix} -2\frac{1-a^2}{2-2a^2} & 0 \\ 0 & -2\frac{(2-2a^2)(1-a^2)}{(2-2a^2)^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2-2a^2} \end{pmatrix}$$

negativ definit $\to$ lokales Maximum mit dem Wert $f(a,\sqrt{1-a^2}) = \frac{1}{2}$

$$H_f(a,-\sqrt{1-a^2}) = \begin{pmatrix} 2\frac{1-a^2}{2-2a^2} & 0 \\ 0 & 2\frac{(2-2a^2)(1-a^2)}{(2-2a^2)^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2-2a^2} \end{pmatrix}$$

positiv definit $\to$ lokales Minimum mit dem Wert $f(a,-\sqrt{1-a^2}) = -\frac{1}{2}$

b) Für die Koordinaten der lokalen Maxima gilt

$$(x_M,y_M) = \left(a,\sqrt{1-a^2}\right)$$

gilt

$$x_M^2+y_M^2 = a^2+1-a^2 = 1,$$

d. h. diese Koordinaten liegen auf der oberen Hälfte ($y_M \geq 0$) des Einheitskreises.
Für die Koordinaten der lokalen Minima gilt

$$(x_m,y_m) = \left(a,-\sqrt{1-a^2}\right)$$

gilt

$$x_m^2+y_m^2 = a^2+1-a^2 = 1,$$

d. h. diese Koordinaten liegen auf der unteren Hälfte ($y_m \leq 0$) des Einheitskreises.
Also liegen alle Urbildkoordinaten (x_a,y_a) der lokalen Extrema von f auf dem Einheitskreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt.

21.4

Das Abstandsquadrat eines Flächenpunktes mit den Koordinaten $\left(x,y,\frac{1}{x^2y^2}\right)$ vom Ursprung lautet

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+\frac{1}{(xy)^2} = x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}.$$

Daraus:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - \tfrac{2}{x^3y2} \stackrel{!}{=} 0 \\ f_y &= 2y - \tfrac{2}{x^2y^3} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich 4 stationäre Stellen:

$$(1,1) \qquad (1,-1) \qquad (-1,1) \qquad (-1,-1)$$

Als Hesse-Matrix ergibt sich

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\frac{6}{x^4y^2} & \frac{4}{x^3y^3} \\ \frac{4}{x^3y^3} & 2+\frac{6}{x^2y^4} \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Definitheit von H_f an den stationären Stellen:

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\rightarrow$ lokales Minimum mit dem Wert $f(1,1) = 3$

$$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\rightarrow$ lokales Minimum mit dem Wert $f(1,-1) = 3$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\rightarrow$ lokales Minimum mit dem Wert $f(-1,1) = 3$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\rightarrow$ lokales Minimum mit dem Wert $f(-1,-1) = 3$

Da der minimale Abstand zum Ursprung existieren muss, wird an allen 4 stationären Stellen der minimale Abstand angenommen. Der Abstand wird also an den Stellen $(1|1|1)$, $(1|-1|1)$, $(-1|1|1)$, $(-1|-1|1)$ minimal mit dem Wert

$$d_{min} = \sqrt{3}.$$

21.5

Zu minimieren ist xyz mit $z = 60 - x - y$, also die Funktion

$$f(x,y) \;=\; x \cdot y \cdot (60 - x - y).$$

Daraus:

$$\begin{aligned} f_x &= y(60 - x - y) - xy \;=\; y(60 - 2x - y) \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= x(60 - x - y) - xy \;=\; x(60 - x - 2y) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich 4 stationäre Stellen:

$$(0,0) \qquad (60,0) \qquad (0,60) \qquad (20,20)$$

Als Hesse-Matrix ergibt sich

$$H_f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -2y & 60 - 2x - 2y \\ 60 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}.$$

Überprüfung der Definitheit von H_f an den stationären Stellen:

$$H_f(0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 60 \\ 60 & 0 \end{pmatrix}$$

indefinit $\to$ kein lokales Extremum

$$H_f(60,0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -60 \\ -60 & -120 \end{pmatrix}$$

indefinit $\to$ kein lokales Extremum

$$H_f(0,60) \;=\; \begin{pmatrix} -120 & -60 \\ -60 & 0 \end{pmatrix}$$

indefinit $\to$ kein lokales Extremum

$$H_f(20,20) \;=\; \begin{pmatrix} -40 & -20 \\ -20 & -40 \end{pmatrix}$$

negativ definit $\to$ lokales Maximum mit dem Wert $f(20,20) = 8\,000$

Das lokale Maximum muss das sicher existierende absolute Maximum sein. Das Tripel $(x,y,z) = (20,20,20)$ liefert also das maximale Produkt

$$20 \cdot 20 \cdot (60 - 20 - 20) \;=\; 8\,000.$$

21.6

Betrachte nur den Anteil ohne die führenden Konstanten, also

$$f(p_1,p_2) = \left(\frac{p_e}{p_a}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1$$

Mit einem Computeralgebrasystem ergibt sich:

$$f_{p_1} = \frac{(\kappa-1)\left(\left(\frac{p_1}{p_a}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}{\kappa \cdot p_1} \overset{!}{=} 0$$

$$f_{p_2} = \frac{(\kappa-1)\left(\left(\frac{p_e}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}{\kappa \cdot p_2} \overset{!}{=} 0$$

Daraus ergibt sich nur 1 stationäre Stelle:

$$(p_1,p_2) = \left(\left(\frac{p_e}{p_a}\right)^{\frac{1}{3}} p_a,\ \left(\frac{p_e}{p_a}\right)^{\frac{2}{3}} p_a\right)$$

Man könnte jetzt die Hesse-Matrix an dieser stationären Stelle auswerten, doch kann man auch anders argumentieren: Das Minimum der Energie W und damit der Funktion f muss existieren. Da wir nur einen Kandidaten für diese Stelle erhalten haben, muss diese Stelle das Minimum von f und damit des Energieverbrauchs liefern.

21.7

a) An der Stelle (x_0,y_0) gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e} = \vec{0} \cdot \vec{e} = 0$$

b) An der Stelle (x_0,y_0) gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \vec{e}} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{e}} \operatorname{grad} f \cdot \vec{e} = \operatorname{grad}(f_x e_1 + f_y e_2) \cdot \vec{e} \\
&= (f_x e_1 + f_y e_2)_x \cdot e_1 + (f_x e_1 + f_y e_2)_y \cdot e_2 \\
&= f_{xx} e_1^2 + f_{yx} e_2 e_1 + f_{yx} e_2 e_1 e_2 + f_{yy} e_2^2 \\
&= f_{xx} e_1^2 + 2 f_{xy} e_1 e_2 + f_{yy} e_2^2
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist:

$$\begin{aligned}
& f_{xx}\left(e_1 + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} e_2\right)^2 + \frac{e_2^2}{f_{xx}}\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) \\
&= f_{xx} e_1^2 + 2 f_{xx} \frac{f_{xy}}{f_{xx}} e_1 e_2 + f_{xx} \frac{f_{xy}^2}{f_{xx}} e_2^2 + \frac{e_2^2}{f_{xx}} f_{xx} f_{yy} - \frac{e_2^2}{f_{xx}} f_{xy}^2 \\
&= f_{xx} e_1^2 + 2 f_{xy} e_1 e_2 + f_{yy} e_2^2
\end{aligned}$$

c) Wegen der positiven Definitheit der Hesse-Matrix ist an der Stelle (x_0,y_0)

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial \vec{e}} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} > 0$$

Wegen der zweimal stetig partiellen Differenzierbarkeit gilt diese Ungleichung auch in einer Umgebung der stationären Stelle (x_0,y_0), d. h. die Steigung wächst bei einer Bewegung in jede Richtung $\vec{e}$. Wegen $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \vec{0}$ heißt dies, dass an der Stelle (x_0,y_0) ein lokales Minimum vorliegt, egal in welcher Richtung man sich auf der Fläche bewegt.

Abschnitt 21.2 – Lineare Regression

21.8

Zu minimierende Funktion:

$$f(L,D) = \sum_{k=1}^{5} \big(s_k - (L + D \cdot F_k)\big)^2 = \sum_{k=1}^{5} (s_k - L - D \cdot F_k)^2$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial L} &= \sum_{k=1}^{5} 2\,(s_k - L - D \cdot F_k) \cdot (-1) = \sum_{k=1}^{5} (-2s_k + 2L + 2DF_k) \\
&= -2\sum_{k=1}^{5} s_k + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{5} L}_{=5L} + 2D\sum_{k=1}^{5} F_k = -2\sum_{k=1}^{5} s_k + 10L + 2D\sum_{k=1}^{5} F_k \qquad \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial f}{\partial D} &= \sum_{k=1}^{5} 2\,(s_k - L - D \cdot F_k) \cdot (-F_k) = \sum_{k=1}^{5} \big(-2F_k s_k + 2LF_k + 2DF_k^2\big) \\
&= -2\sum_{k=1}^{5} F_k s_k + 2L\sum_{k=1}^{5} F_k + 2D\sum_{k=1}^{5} F_k^2 \qquad \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Im konkreten Fall ist (ohne Einheiten):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5} s_k &= 39{,}6+44{,}6+49{,}4+54{,}5+59{,}7 = 247{,}8\\
\sum_{k=1}^{5} F_k &= 10+20+30+40+50 = 150\\
\sum_{k=1}^{5} F_k s_k &= 10\cdot 39{,}6+20\cdot 44{,}6+30\cdot 49{,}4+40\cdot 54{,}5+50\cdot 59{,}7 = 7\,935\\
\sum_{k=1}^{5} F_k^2 &= 10^2+20^2+30^2+40^2+50^2 = 5\,500
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial L} &= \quad -2\cdot 247{,}8+10L+2\cdot 150D \overset{!}{=} 0\\
\tfrac{\partial f}{\partial D} &= -2\cdot 7\,935+2\cdot 150L+2\cdot 5\,500L \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{aligned}
L &= 34{,}53\ [\mathrm{cm}]\\
D &= 0{,}501\ \left[\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{N}}\right]
\end{aligned}$$

Liegt an dieser stationären Stelle tatsächlich ein Minimum vor? → 2. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial L^2} &= 10\\
\frac{\partial^2 f}{\partial D \partial L} &= 300 = \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial D}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial D^2} &= 11\,000
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Hesse-Matrix

$$\begin{aligned}
H_f(L,D) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial D\partial L}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial L\partial D} & \frac{\partial^2 f}{\partial D^2} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 10 & 300\\ 300 & 11\,000 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

unabhängig von der betrachteten Stelle.
Es gilt damit insbesondere an der stationären Stelle $(L,D) = (34{,}53;\ 0{,}501)$:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \det(10) = 10 > 0\\
D_2 &= \begin{vmatrix} 10 & 300\\ 300 & 11\,000 \end{vmatrix} = 10\cdot 11\,000 - 300^2 = 110\,000 - 90\,000\\
&= 20\,000 > 0
\end{aligned}$$

Also ist H_f positiv definit und damit liegt an der stationären Stelle $(L,D) = (34{,}53;\ 0{,}501)$ ein lokales Minimum der Summe der Abstandsquadrate vor. Da das absolute Minimum existieren muss (die Summe der Abstandsquadrate können nicht negativ werden) und nur ein Kandidat für das absolute Minimum existiert, muss das gefundene lokale Minimum das absolute Minimum von f sein. Der Wert des Minimums ist uninteressant, es interessieren lediglich die Werte L und D.

21.9

a) Die Methode der kleinsten Quadrate funktioniert immer, wenn der Typ der anzunähernden Funktion bekannt und mit Parametern beschrieben werden kann, die durch die Datenreihen bestimmt werden.

b) Zu minimierende Funktion:

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \sum_{k=1}^{6}\left(I_k - \left(a - b\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{365}t_k + 0{,}03\right)\right)\right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{6}\left(I_k - a + b\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{365}t_k + 0{,}03\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \sum_{k=1}^{6} 2\left(I_k - a + b\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{365}t_k + 0{,}03\right)\right)\cdot(-1) \\ &= -2\sum_{k=1}^{6} I_k + 12a - 2b\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{2\pi}{365}t_k + 0{,}03\right) && \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \sum_{k=1}^{6} 2\left(I_k - a + b\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{365}t_k + 0{,}03\right)\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{365}t_k + 0{,}03\right) \\ &= -2\sum_{k=1}^{6} I_k\cos\left(\frac{2\pi}{365}t_k + 0{,}03\right) - 2aL\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{2\pi}{365}t_k + 0{,}03\right) \\ &\quad + 2b\sum_{k=1}^{5}\cos^2\left(\frac{2\pi}{365}t_k + 0{,}03\right) && \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Bei Einsetzen der konkreten Werte ergibt sich als als zu lösendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial a} &= -35{,}86 + 12a + 0{,}1679b \stackrel{!}{=} 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial b} &= -15{,}04 + 0{,}1679a + 5{,}914b \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems ergibt:

$$\begin{aligned} a &= 2{,}954 \\ b &= 2{,}460 \end{aligned}$$

Liegt an dieser stationären Stelle tatsächlich ein Minimum vor? $\longrightarrow$ 2. partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} &= 12 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} &= 0{,}1679 = \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} &= 5{,}914 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Hesse-Matrix

$$\begin{aligned}
H_f(L,D) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial D \partial L} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial L \partial D} & \frac{\partial^2 f}{\partial D^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12 & 0{,}1679 \\ 0{,}1679 & 5{,}914 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

unabhängig von der betrachteten Stelle.
Es gilt damit insbesondere an der stationären Stelle $(a,b) = (2{,}954;\ 2{,}460)$:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \det(12) = 12 > 0 \\
D_2 &= \begin{vmatrix} 12 & 0{,}1679 \\ 0{,}1679 & 5{,}914 \end{vmatrix} = 70{,}94 > 0
\end{aligned}$$

Also ist H_f positiv definit und damit liegt an der stationären Stelle $(a,b) = (2{,}954;\ 2{,}460)$ ein lokales Minimum der Summe der Abstandsquadrate vor. Da das absolute Minimum existieren muss und nur ein Kandidat für das absolute Minimum existiert, muss das gefundene lokale Minimum das absolute Minimum von f sein. Der Wert des Minimums ist uninteressant, es interessieren lediglich die Werte a und b.

Abschnitt 21.3 – Extrema mit Nebenbedingungen

21.10

a) Die Extrema existieren, da die Extrema der stetigen Funktion f auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1^2$ gesucht werden.
Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,\lambda) = (x+1)^2 + (y-1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2(x+1) + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2(y-1) + 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die stationären Stellen

$$\begin{aligned}
(x_1,y_1) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
(x_2,y_2) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Funktionswerte lauten:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 + 2\sqrt{2} \qquad \rightarrow \text{Maximum}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 - 2\sqrt{2} \qquad \rightarrow \text{Minimum}$$

b) Die Extrema existieren, da die Extrema der stetigen Funktion f auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ gesucht werden.
Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,z,\lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 1 + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 1 + 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 1 + 2\lambda z \stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 + z^2 - 3 \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die stationären Stellen

$$\begin{aligned}
(x_1,y_1,z_1) &= \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \\
(x_2,y_2,z_2) &= \left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Funktionswerte lauten:

$$f\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} \qquad \rightarrow \text{Maximum}$$

$$f\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} \qquad \rightarrow \text{Minimum}$$

c) Es existiert das Minimum, aber kein Maximum von f, da f auf der Ebene $x+2y-z=1$ beliebig groß, aber nicht beliebig klein werden kann.
Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x+2y-z-1)$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2x+\lambda \overset{!}{=} 0\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2y+2\lambda \overset{!}{=} 0\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= 2z-\lambda \overset{!}{=} 0\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= x+2y-z-1 \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die stationäre Stelle

$$(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right).$$

Der zugehörige minimale Funktionswert lautet

$$f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}.$$

d) Die Extrema existieren, da die Extrema der stetigen Funktion f auf der Schnittellipse des Zylinders $x^2+y^2=8$ mit der Ebene $z=y$ gesucht werden.
Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2x-y-z+\lambda_1(x^2+y^2-8)+\lambda_2(y-z)$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 2+2\lambda_1 x \overset{!}{=} 0\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -1+2\lambda_1 y+\lambda_2 \overset{!}{=} 0\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= -1-\lambda_2 \overset{!}{=} 0\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= x^2+y^2-8 \overset{!}{=} 0\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= y-z \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

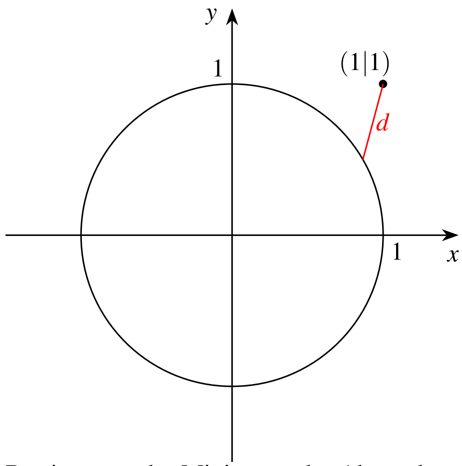
Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die stationären Stellen

$$\begin{aligned}
(x_1,y_1,z_1) &= (2,-2,-2)\\
(x_2,y_2,z_2) &= (-2,2,2).
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Funktionswerte lauten:

$$\begin{aligned}
f(2,-2,-2) &= 8 && \to \text{Maximum}\\
f(-2,2,2) &= -8 && \to \text{Minimum}
\end{aligned}$$

21.11



Aus der Anschauung ist klar, dass der minimale und maximale Abstand (und damit auch das minimale und maximale Abstandsquadrat) des Punktes $P(1|1)$ vom Kreis existieren muss.

Bestimmung des Minimums des Abstandsquadrats

$$d^2 = f(x,y) = (1-x)^2 + (1-y)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,\lambda) = (1-x)^2 + (1-y)^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= -2(1-x) + 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -2(1-y) + 2\lambda y \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \quad x^2 + y^2 - 1 \quad \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die stationären Stellen

$$(x_1,y_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad (x_2,y_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right).$$

Es ist

$$d^2(x_1,y_1) = f(x_1,y_1) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \qquad \to \text{Minimum}$$

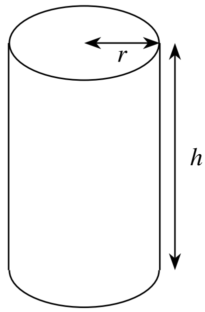
$$d^2(x_2,y_2) = f(x_2,y_2) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \qquad \to \text{Maximum}$$

bzw.

$$d(x_1,y_1) = d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1 \qquad \to \text{Minimum}$$

$$d(x_2,y_2) = d\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + 1 \qquad \to \text{Maximum}$$

21.12



Zu lösen ist das Minimierungsproblem der Oberfläche

$$A = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h \stackrel{!}{=} \text{min!}$$

unter der Nebenbedingung (Einheit cm)

$$g = V - 1\,000 = \pi r^2 \cdot h - 1\,000 = 0.$$

a) Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} F(r,h,\lambda) &= A(r,h) + \lambda g(r,h) \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r h + \lambda \left(\pi r^2 h - 1\,000\right) \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= 4\pi r + 2\pi h + 2\pi \lambda r h \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial F}{\partial h} &= 2\pi r + \pi \lambda r^2 \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \pi r^2 h - 1\,000 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ergibt als einzige stationäre Stelle

$$(r,h) = \left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}, 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \right) \approx (5{,}42;\ 10{,}84).$$

Da die Oberfläche nicht beliebig klein werden kann (beschränkt z. B. durch 0), muss die minimale Oberfläche existieren. Wir haben nur ein Kandidatenpaar für diese minimale Oberfläche. Demzufolge liefert das obige Radius-Höhen-Paar die minimale Oberfläche unter der gegebenen Nebenbedingung. Der Wert der minimalen Oberfläche ist nicht gefragt.

b) Aus der Nebenbedingung:

$$h = \frac{1\,000}{\pi r^2}$$

Eingesetzt in die Oberflächenformel:

$$A = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1\,000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} = A(r)$$

Berechnung der stationären Stellen mit der Ableitung:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus:

$$\begin{aligned} 4\pi r &= \frac{2\,000}{r^2} \\ r^3 &= \frac{500}{\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42 \qquad \text{stationäre Stelle} \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2A}{dr^2} &= 4\pi + \frac{4\,000}{r^3} \\ \frac{d^2A}{dr^2}\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) &= 4\pi + \frac{4\,000}{\frac{500}{\pi}} > 0. \end{aligned}$$

Es liegt also an der stationären Stelle $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ ein lokales Minimum vor. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} A(r) &= \lim_{r\to\infty}\left(2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}\right) = \infty + 0 = \infty \\ \lim_{r\to 0} A(r) &= \lim_{r\to\infty}\left(2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}\right) = 0 + \infty = \infty \end{aligned}$$

wird dieses lokale Minimum an den „Rändern“ nicht unterboten, d. h. es liegt ein absolutes Minimum vor.
Die zugehörige Höhe beträgt

$$h = \frac{1\,000}{\pi r^2} = \frac{1\,000}{\pi \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}^2} = 2\frac{500}{\sqrt[3]{\frac{500^2\pi^3}{\pi^2}}} = 2\frac{\sqrt[3]{500^3}}{\sqrt[3]{500^2\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 10{,}84.$$

21.13

Die Ecke des Rechtecks im 1. Quadranten ($x > 0, y > 0$) habe die Koordinaten (x,y).
Dann beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks

$$A(x,y) \;=\; 4 \cdot xy.$$

Die Ecke liegt auf der Ellipse, d. h. es gilt die Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \;=\; 0.$$

Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,\lambda) \;=\; 4xy + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 4y + 2\lambda\frac{x}{a^2} \overset{!}{=} 0\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 4x + 2\lambda\frac{y}{b^2} \overset{!}{=} 0\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ergibt als einzige stationäre Stelle

$$(x_0,y_0) \;=\; \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right).$$

Für $x \to 0$ und $x \to a$ geht der Flächeninhalt jeweils gegen null. Dazwischen wird irgendwo der maximale Flächeninhalt des Rechtecks angenommen und die einzige dafür in Frage kommende Stelle ist die oben gefundene Stelle. Demzufolge liefert das Paar $(x_0,y_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$ tatsächlich den maximalen Wert des Flächeninhalts des Rechtecks. Er beträgt

$$A_{max} \;=\; A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}b\right) \;=\; 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}b \;=\; 2ab.$$

21.14

a) Einfaches Extremalproblem ohne Nebenbedingung (außer $x^2+y^2<1$):

$$f(x,y) \;=\; x^2+2y^2-x \overset{!}{=} \text{extremal!}$$

Partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x &= 2x-1 \overset{!}{=} 0 \\ f_y &= \;\;4y \quad\;\; \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Also haben wir nur eine stationäre Stelle:

$$(x_0,y_0) \;=\; \left(\frac{1}{2},0\right)$$

Diese stationäre Stelle liegt insbesondere innerhalb des Einheitskreises $x^2+y^2<1$.

Zweite partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2 \\ f_{xy} &= 0 = f_{yx} \\ f_{yy} &= 4 \end{aligned}$$

Damit lautet die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

unabhängig von der betrachteten Stelle. Diese Matrix ist positiv definit, d. h. an der Stelle $(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},0\right)$ liegt ein lokales Minimum vor mit dem Wert

$$f\left(\frac{1}{2},0\right) \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot 0^2-\frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{4}-\frac{1}{2} \;=\; -\frac{1}{4}.$$

b) Extremalproblem

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x \stackrel{!}{=} \text{extremal!}$$

mit der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - x + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} F_x &= 2x - 1 + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \\ F_y &= 4y + 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0 \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

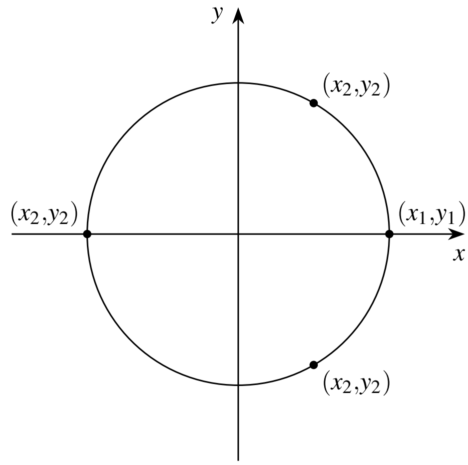
Daraus ergeben sich 4 stationären Stellen:

$$\begin{aligned} (x_1,y_1) &= (1,0) \\ (x_2,y_2) &= (-1,0) \\ (x_3,y_3) &= \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ (x_4,y_4) &= \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

mit den Funktionswerten

$$\begin{aligned} f(x_1,y_1) &= f(1,0) = 0 \\ f(x_2,y_2) &= f(-1,0) = 2 \\ f(x_3,y_3) &= f\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} \\ f(x_4,y_4) &= f\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Auf dem Einheitskreis wechseln sich lokale Maxima und lokale Minima von f ab. Durch Vergleich der Funktionswerte erkennt man: An den Stellen $(x_1,y_1) = (1,0)$ und $(x_2,y_2) = (-1,0)$ liegen lokale Minima vor, an den Stellen $(x_3,y_3) = \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $(x_4,y_4) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ liegen lokale Maxima vor.



c) Das absolute Minimum auf der Kreisscheibe $x^2+y^2 \leq 1$ ist der kleinste Wert der gefundenen lokalen Minima innerhalb bzw. auf dem Einheitskreis, also der kleinste Wert von

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0) &= f\left(\frac{1}{2},0\right) = -\frac{1}{4} \\ f(x_1,y_1) &= f(1,0) = 0 \\ f(x_2,y_2) &= f(-1,0) = 2. \end{aligned}$$

Demzufolge wird das absolute Minimum an der Stelle $(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{2},0\right)$ angenommen und beträgt

$$f(x_0,y_0) = f\left(\frac{1}{2},0\right) = -\frac{1}{4}.$$

Das absolute Maximum auf der Kreisscheibe $x^2+y^2 \leq 1$ ist der größte Wert der gefundenen lokalen Maxima innerhalb bzw. auf dem Einheitskreis, also der größte Wert von

$$\begin{aligned} f(x_3,y_3) &= f\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4} \\ f(x_4,y_4) &= f\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Da beide lokalen Maxima gleich groß sind, wird das absolute Maximum an den zwei Stellen $(x_3,y_3) = \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $(x_4,y_4) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und beträgt

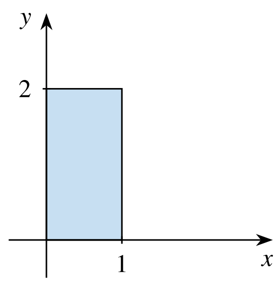
$$f(x_3,y_3) = f(x_4,y_4) = f\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

22 Bereichsintegrale

Abschnitt 22.2 – Bereichsintegrale über Normalbereichen

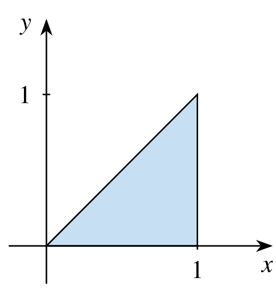
22.1

a)



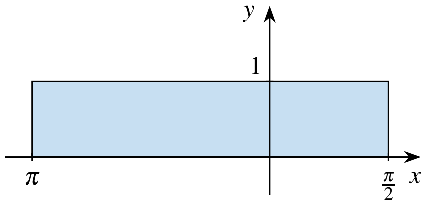
$$\begin{aligned}
\int_A e^{x+y}\, d(x,y) &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} e^{x+y}\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left[e^{x+y}\right]_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left(e^{x+2}-e^{x}\right) dx \\
&= \left[e^{x+2}-e^{x}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \left(e^{1+2}-e^{1}\right)-\left(e^{2}-e^{0}\right) \\
&= e^3-e^2-e+1
\end{aligned}$$

b)



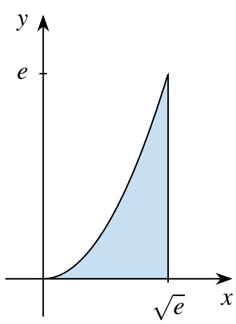
$$\begin{aligned}
\int_A xy\, d(x,y) &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} xy\, dy\, dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{2}x^3\, dx \\
&= \left[\frac{1}{8}x^4\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

c)



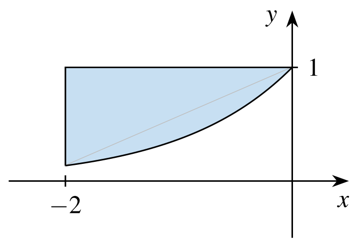
$$
\begin{aligned}
&\int_A y\cos(xy)\,d(x,y)\\
&= \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=-\pi}^{x=\frac{\pi}{2}} y\cos(xy)\,dx\,dy\\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left[\sin(xy)\right]_{x=-\pi}^{x=\frac{\pi}{2}}\,dy\\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) - \sin(-\pi y)\right)\,dy\\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) + \sin(\pi y)\right)\,dy\\
&= \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) - \frac{1}{\pi}\cos(\pi y)\right]_{x=0}^{x=1}\\
&= -\frac{2}{\pi}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \frac{1}{\pi}\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \frac{2}{\pi}\underbrace{\cos(0)}_{=1} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\cos(0)}_{=1}\\
&= 0 + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\\
&= \frac{4}{\pi}
\end{aligned}
$$

d)



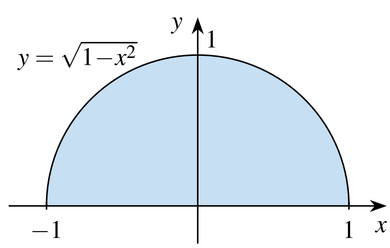
$$
\begin{aligned}
\int_A \frac{x}{y}\,d(x,y) &= \int_{y=0}^{y=e}\int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} \frac{x}{y}\,dx\,dy\\
&= \int_{y=0}^{y=e} \left[\frac{x^2}{2y}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\,dy\\
&= \int_{y=0}^{y=e} \left(\frac{y}{2y} - 0\right)\,dy\\
&= \int_{y=0}^{y=e} \frac{1}{2}\,dy\\
&= \left[\frac{1}{2}y\right]_{y=0}^{y=e}\\
&= \frac{e}{2}
\end{aligned}
$$

e)



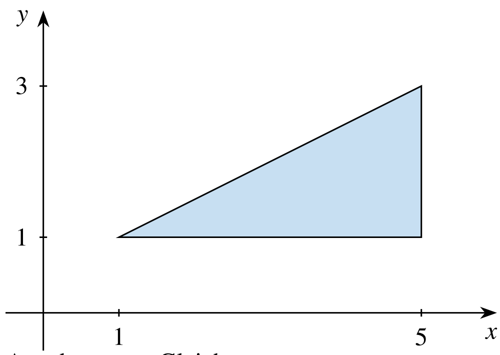
$$
\begin{aligned}
&\int_A e^{-x}\, d(x,y)\\
&= \int_{x=-2}^{x=0}\int_{y=e^x}^{y=1} e^{-x}\ln(y)\, dy\, dx\\
&= \int_{x=-2}^{x=0} \left[e^{-x}\left(y\ln(y)-y\right)\right]_{y=e^x}^{y=1} dx\\
&= \int_{x=-2}^{x=0} \left(e^{-x}\left(1\ln(1)-1\right)-e^{-x}\left(e^x\ln(e^x)-e^x\right)\right) dx\\
&= \int_{x=-2}^{x=0} \left(e^{-x}\left(0-1-e^x x+e^x\right)\right) dx\\
&= \int_{x=-2}^{x=0} \left(-e^{-x}-x+1\right) dx\\
&= \left[e^{-x}-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{x=-2}^{x=0}\\
&= (1-0+0)-\left(e^2-\frac{1}{2}\cdot 4-2\right)\\
&= 1-e^2+2+2\\
&= 5-e^2
\end{aligned}
$$

f)



$$
\begin{aligned}
\int_A x^3y^3\, d(x,y) &= \int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} x^3y^3\, dy\, dx\\
&= \int_{x=-1}^{x=1} \left[\frac{1}{4}x^3y^4\right]_{y=0}^{x=\sqrt{1-x^2}} dx\\
&= \int_{x=-1}^{x=1} \frac{1}{4}x^3\left(1-x^2\right)^2 dx\\
&= \frac{1}{4}\int_{x=-1}^{x=1} x^3\left(1-2x^2+x^4\right) dx\\
&= \frac{1}{4}\int_{x=-1}^{x=1} \left(x^3-2x^5+x^7\right) dx\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^6+\frac{1}{8}x^8\right]_{-1}^{\;1}\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

22.2



Bestimmung der Geradengleichung durch $A(1|1)$ und $B(5|3)$:

$$y = a_0 + a_1 x$$

Einsetzen der zwei Punkte

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 + a_1 \\ 3 &= a_0 + 5a_1 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung:

$$a_1 = 1 - a_0$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} 3 &= a_0 + 5(1 - a_0) \\ 3 &= -4a_0 + 5 \\ 4a_0 &= 2 \\ a_0 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit ist:

$$a_1 = 1 - a_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Geradengleichung:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

Der Normalbereich lautet somit:

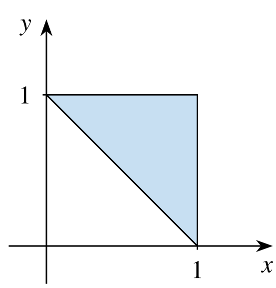
$$A = \left\{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 5 \text{ und } 1 \leq y \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right\}$$

Berechnung des Bereichsintegrals:

$$\begin{aligned}
\int_A xy\,d(x,y) &= \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=1}^{y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x} xy\,dy\,dx = \int_{x=1}^{x=5}\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=1}^{y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x} dx\\
&= \int_{x=1}^{x=5}\frac{1}{2}\left(x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^2-x\right)dx = \frac{1}{2}\int_{x=1}^{x=5}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3-x\right)dx\\
&= \frac{1}{8}\int_{x=1}^{x=5}\left(-3x+2x^2+x^3\right)dx = \frac{1}{8}\left[-\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_{x=1}^{x=5}\\
&= \frac{1}{8}\left(-\frac{75}{2}+\frac{250}{3}+\frac{625}{4}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{1}{8}\cdot\frac{-450+1\,000+1\,875+18-8-3}{12}\\
&= \frac{1}{8}\cdot\frac{2\,432}{12} = \frac{1}{8}\cdot\frac{608}{3} = \frac{76}{3}
\end{aligned}$$

22.3

a)



b) Der Normalbereich lautet somit:

$$A = \{(x,y)\mid 0\le x\le 1 \text{ und } 1-x\le y\le 1\}$$

Berechnung des Bereichsintegrals:

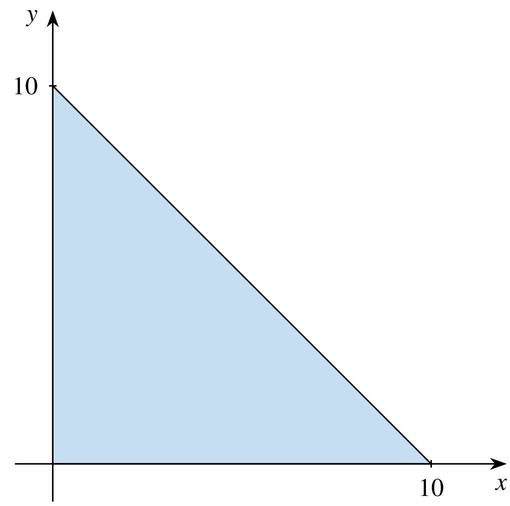
$$\begin{aligned}
\int_A d(x,y) &= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=1} dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}[y]_{y=1-x}^{y=1}\,dx = \int_{x=0}^{x=1}(1-(1-x))\,dx\\
&= \int_{x=0}^{x=1} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

22.4

Die Wartezeit an der Wurst-Fleisch-Theke wird mit x bezeichnet. Dann beträgt unter der Prämisse, dass der Kunde insgesamt maximal 10 Minuten wartet, die maximale Wartedauer an der Kasse $y = 10 - x$ (in Minuten). Demzufolge lautet der zugrunde liegende Normalbereich

$$A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 10 \text{ und } 0 \leq y \leq 10 - x\}$$

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Kunde maximal 10 Minuten wartet:



$$\begin{aligned}
p_A &= \int_A \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{5}-\frac{y}{2}}\, d(x,y) = \int_{x=0}^{x=10} \int_{y=0}^{y=10-x} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{5}-\frac{y}{2}}\, dy\, dx = \int_{x=0}^{x=10} \left[-\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}-\frac{y}{2}} \right]_{y=0}^{y=10-x} dx \\
&= \int_{x=0}^{x=10} \left(-\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}-\frac{10-x}{2}} + \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} \right) dx = \int_{x=0}^{x=10} \left(-\frac{1}{5} e^{\frac{3x-50}{10}} + \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} \right) dx \\
&= \left[-\frac{2}{3} e^{\frac{3x-50}{10}} - e^{-\frac{x}{5}} \right]_{x=0}^{x=10} = \left(-\frac{2}{3} e^{\frac{30-50}{10}} - e^{-\frac{10}{5}} \right) - \left(-\frac{2}{3} e^{\frac{-50}{10}} - e^{0} \right) \\
&= -\frac{2}{3} e^{-2} - e^{-2} + \frac{2}{3} e^{-5} + 1 = 1 - \frac{5}{3} e^{-2} + \frac{2}{3} e^{-5} \approx 0{,}779 = 77{,}9\,\%
\end{aligned}$$

22.5

a) Das Volumen eines (nicht unbedingt rotationssymmetrischen) Zylinders mit dem Grundflächeninhalt $|A|$ und der Höhe $h = 1$ berechnet sich gemäß der Formel

$$V = |A| \cdot h = |A| \cdot 1 = |A|.$$

Das Volumen des Zylinders der Höhe 1 erhält man auf der anderen Seite auch über das Bereichsintegral

$$V = \int_A 1\, d(x,y) = \int_A d(x,y).$$

Demzufolge gilt insgesamt

$$\int_A d(x,y) = V = |A|.$$

Die Überlegungen lassen sich auch um eine Dimension erhöhen, d. h. die entsprechende Formel gilt auch für das Volumen V eines dreidimensionalen Körpers:

$$\int_V d(x,y,z) \;=\; |V|.$$

b) Das Innere des Kreises $x^2+y^2=r^2$ lässt sich schreiben als Normalbereich:

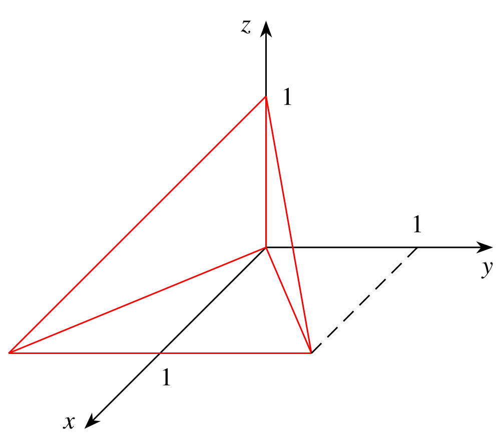
$$A \;=\; \left\{(x,y) \mid -r \le x \le r \text{ und } -\sqrt{r^2-x^2} \le y \le \sqrt{r^2-x^2}\right\}$$

Damit beträgt der Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}
|A| \;&=\; \int_A d(x,y) \;=\; \int_{x=-r}^{x=r} \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} dy\,dx \;=\; \int_{x=-r}^{x=r} [y]_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{y=\sqrt{r^2-x^2}}\,dx \\
&=\; \int_{x=-r}^{x=r} \left(\sqrt{r^2-x^2}+\sqrt{r^2-x^2}\right)dx \;=\; \int_{x=-r}^{x=r} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx \\
&\overset{\text{Formelsamml.}}{=}\; \left[2\cdot\frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right)\right]_{x=-r}^{x=r} \\
&=\; \left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_{x=-r}^{x=r} \;=\; 0+r^2\arcsin(1)-0-r^2\arcsin(-1) \\
&=\; r^2\cdot\frac{\pi}{2}-r^2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \pi r^2
\end{aligned}$$

22.6

a)



b)
$$\begin{aligned}
m &= \int_A (1-x-z)\,d(x,y) = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=-x}^{y=x}\int_{z=0}^{1-x}(1-x-z)\,dz\,dy\,dx\\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=-x}^{y=x}\left[z-xz-\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x} dy\,dx\\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=-x}^{y=x}\left((1-x)-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right) dy\,dx\\
&= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=-x}^{y=x}\left(\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right) dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{y}{2}-xy+\frac{x^2y}{2}\right]_{-x}^{x} dx\\
&= \int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{x}{2}-x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x}{2}-x^2+\frac{x^3}{2}\right) dx = \int_{x=0}^{x=1}\left(x-2x^2+x^3\right) dx\\
&= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Abschnitt 22.3 – Bereichsintegrale in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

22.7

a) Die Gleichung des einhüllenden Kreises lautet

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Mit Polarkoordinaten $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
(r\cos(\varphi))^2+\left((r\sin(\varphi))^2-\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2\\
r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)-r\sin(\varphi)+\frac{1}{4} &= \frac{1}{4}\\
r^2\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right) &= r\sin(\varphi)\\
r^2 &= r\sin(\varphi)\\
r &= \sin(\varphi)
\end{aligned}$$

b)

$$\int_A \left(x^2+y^2\right)\, d(x,y) \;=\; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{\sin(\varphi)} \left(r^2\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)\right)\cdot r\,dr\,d\varphi \;=\; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{\sin(\varphi)} r^3\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sin(\varphi)} d\varphi \;=\; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin^4(\varphi)}{4}\,d\varphi$$

$$\overset{\text{Formelsamml.}}{=} \left[\frac{3}{32}\varphi-\frac{1}{16}\sin(2\varphi)+\frac{1}{128}\sin(4\varphi)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$= \frac{3}{32}\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{16}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)+\frac{1}{128}\sin(3\pi)-\frac{3}{32}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{16}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{128}\sin(\pi)$$

$$= \frac{9}{128}\pi+\frac{1}{16}+0-\frac{3}{128}\pi+\frac{1}{16}-0 \;=\; \frac{3}{64}\pi+\frac{1}{8}$$

22.8

Der Bereich des Keil lautet in Zylinderkoordinaten

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$0 \le r \le R$$
$$0 \le z \le \frac{h}{2}+\frac{h}{2R}y \;=\; \frac{h}{2}+\frac{h}{2R}\cdot r\sin(\varphi) \;=\; \frac{h}{2}\left(1+\frac{r}{R}\sin(\varphi)\right).$$

Damit:

$$V \;=\; \int_A d(x,y,z) \;=\; \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{r=0}^{r=R}\int_{z=0}^{z=\frac{h}{2}\left(1+\frac{r}{R}\sin(\varphi)\right)} r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{r=0}^{r=R}[rz]_{z=0}^{z=\frac{h}{2}\left(1+\frac{r}{R}\sin(\varphi)\right)}\,dr\,d\varphi \;=\; \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{r=0}^{r=R} r\frac{h}{2}\left(1+\frac{r}{R}\sin(\varphi)\right)dr\,d\varphi$$

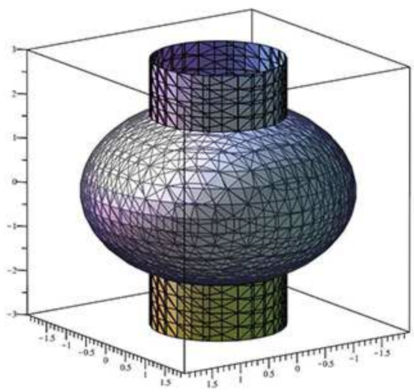
$$= \frac{h}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{r=0}^{r=R}\left(r+\frac{r^2}{R}\sin(\varphi)\right)dr\,d\varphi \;=\; \frac{h}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\left[\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3R}\sin(\varphi)\right]_{r=0}^{r=R}d\varphi$$

$$= \frac{h}{2}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\left(\frac{R^2}{2}+\frac{R^2}{3}\sin(\varphi)\right)d\varphi \;=\; \frac{h}{2}\left[\frac{R^2}{2}\varphi-\frac{R^2}{3}\cos(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}$$

$$= \frac{h}{2}\left(R^2\pi-\frac{R^2}{3}\cos(2\pi)-0+\frac{R^2}{3}\cos(0)\right) \;=\; \frac{h}{2}\left(R^2\pi-\frac{R^2}{3}+\frac{R^2}{3}\right) \;=\; \pi R^2\cdot\frac{h}{2}$$

22.9

a)



b) Der Bereich wir in Zylinderkoordinaten beschrieben durch:

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$
$$1 \le r \le 2$$
$$-\sqrt{4-r^2} \le z \le \sqrt{4-r^2}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
V &= \int_A d(x,y,z) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=1}^{r=2} \int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=1}^{r=2} [rz]_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=1}^{r=2} \left(r\sqrt{4-r^2}+r\sqrt{4-r^2}\right) dr\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=1}^{r=2} 2r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[-\frac{2}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=1}^{r=2} d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(-0+\frac{2}{3}(4-1)^{\frac{3}{2}}\right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} 2\sqrt{3}\,d\varphi = \left[2\sqrt{3}\varphi\right]_0^{2\pi} \\
&= 2\sqrt{3}\cdot 2\pi = 4\sqrt{3}\pi
\end{aligned}$$

22.10

Der Bereich der Käseglocke lautet in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ R_1 &\leq r \leq R_2 \\ 0 &\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} V &= \int_A d(x,y,z) = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=R_1}^{r=R_2} r^2 \cos(\vartheta)\, dr\, d\varphi\, d\vartheta \\ &= \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=R_1}^{r=R_2} \cos(\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cos(\vartheta)\, d\varphi\, d\vartheta \\ &= \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cos(\vartheta) \cdot \varphi\right]_0^{2\pi} d\vartheta = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cos(\vartheta) \cdot 2\pi\right) d\vartheta \\ &= \left[\frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \sin(\vartheta) \cdot 2\pi\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cdot 1 \cdot 2\pi - \frac{R_2^3 - R_1^3}{3} \cdot 0 \cdot 2\pi \\ &= \frac{2}{3}\pi \left(R_2^3 - R_1^3\right) \end{aligned}$$

23 Allgemeine Kurven

Abschnitt 23.1 – Der Kurvenbegriff

23.1

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} -t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in die linke Seite der impliziten Gleichung:

$$\begin{aligned}
&x(t) + x(t)\cdot y(t) - (y(t))^2 + 1 \\
&= -\frac{t^2}{1+t^2} + \left(-\frac{t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2} - \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + 1 \\
&= -\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2} + 1 \\
&= \frac{-t^2(1+t^2) - t^2 - 1 + (1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} \\
&= \frac{-t^2 - t^4 - t^2 - 1 + 1 + 2t^2 + t^4}{(1+t^2)^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

23.2

a) Mit dem Parameter $t = x$ ergibt sich als Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ a\cdot\cosh\left(\frac{t}{a}\right) \end{pmatrix}.$$

b) Für

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} a\ln(t) \\ \frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned}
y(t) - a\cdot\cosh\left(\frac{x(t)}{a}\right) &= \frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) - a\cdot\cosh\left(\frac{a\ln(t)}{a}\right) \\
&= \frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) - a\cdot\frac{e^{\ln(t)} + e^{-\ln(t)}}{2} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d. h. die Parameterdarstellung erfüllt die Gleichung der Kettenlinie. Da die x-Koordinate zudem ganz $\mathbb{R}$ durchläuft, wird auch wirklich die ganze Kurve dargestellt.

c) Die Parameterdarstellungen aus Aufgabenteil (a) und (b) sind verschieden, stellen aber die gleiche Kettenlinie dar. Demzufolge sind Parameterdarstellungen einer Kurve nicht eindeutig.

23.3

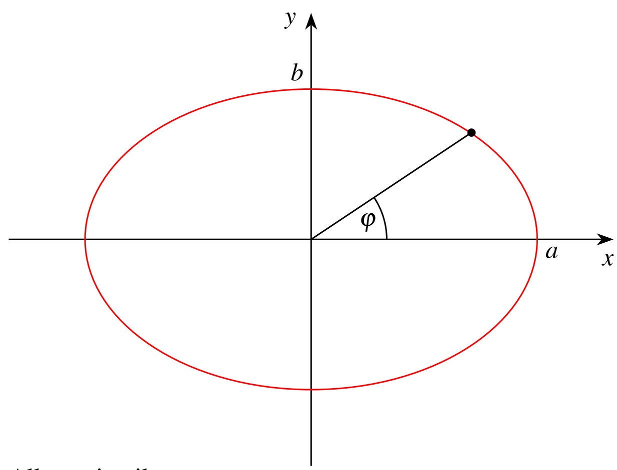
a)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in die linke Seite der impliziten Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{a^2} + \frac{y(t)}{b}^2 &= \frac{(a\cos(t))^2}{a^2} + \frac{(b\sin(t))^2}{b^2} \\ &= \frac{a^2\cos^2(t)}{a^2} + \frac{b^2\sin^2(t)}{b^2} \\ &= \cos^2(t) + \sin^2(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

b)



Allgemein gilt:

$$\tan(\varphi) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b\sin(t)}{a\cos(t)} = \frac{b}{a}\tan(t)$$

Im Fall $t = \frac{\pi}{4}$ gilt damit speziell

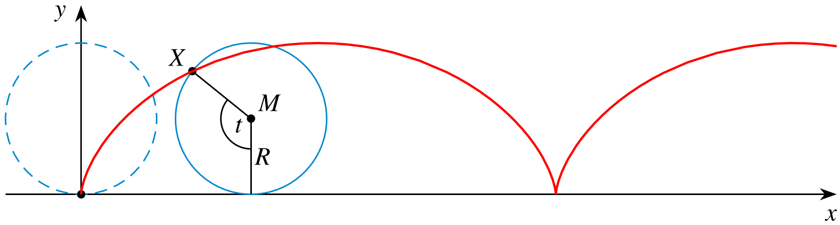
$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} \cdot 1 = \frac{b}{a} \neq 1 \qquad \text{für } a \neq b.$$

Auf der anderen Seite ist für $t = \frac{\pi}{4}$

$$\tan(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \neq \tan(\varphi).$$

Dies bedeutet, dass der Parameter t nicht mit dem Winkel φ übereinstimmt.

23.4



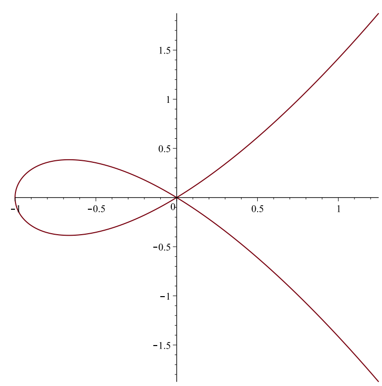
Man führt als Parameter den abgerollten Winkel t ein. Dann ist

$$\vec{x}(t) = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} Rt \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ -R\cos(t) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Abschnitt 23.2 – Tangentenvektor und Tangente

23.5

a)



b) Es ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\dot{\vec{x}}(-0{,}5) = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}25 \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{x}}(1{,}5) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5{,}75 \end{pmatrix}$$

c) Die Kurventangente ist parallel zur y-Achse, wenn

$$\dot{x}(t) = 2t = 0,$$

also wenn

$$t = 0.$$

Sie ist parallel zur x-Achse, wenn

$$\dot{y}(t) = 3t^2 - 1 = 0,$$

also wenn

$$t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

d) Es ist

$$\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 1^2 - 1 \\ 1^3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^2 - 1 \\ (-1)^3 - (-1) \end{pmatrix} = \vec{x}(-1),$$

d. h. die Kurve schneidet sich für $t = 1$ und $t = -1$ im Ursprung. Weiter ist

$$\dot{\vec{x}}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{x}}(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

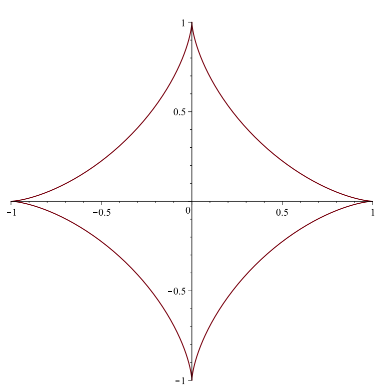
und damit das Skalarprodukt

$$\dot{\vec{x}}(1) \cdot \dot{\vec{x}}(-1) = 0.$$

Die Tangenten im Schnittpunkt sind zueinander orthogonal, d. h. die Kurve schneidet sich unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$.

23.6

a) Bild für $R = 1$ (die anderen Kurven ergeben sich durch Streckung mit R):



b) $$x^{\frac{2}{3}}(t)+y^{\frac{2}{3}}(t) = \left(R\cos^3(t)\right)^{\frac{2}{3}}+\left(R\sin^3(t)\right)^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}\cos^2(t)+R^{\frac{2}{3}}\sin^2(t)$$
$$= R^{\frac{2}{3}}\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right) = R^{\frac{2}{3}}$$

c) $$\dot{\vec{x}}(t) = R\begin{pmatrix} -3\cos^2(t)\sin(t) \\ 3\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

Der Tangentenvektor verschwindet, wenn

$$\cos(t) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \sin(t) = 0,$$

also für

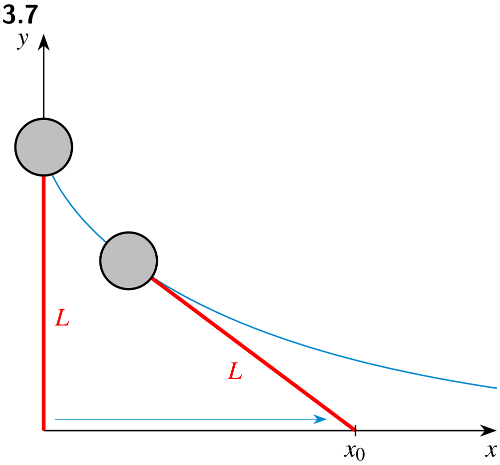
$$t = k\frac{\pi}{2}, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Die zugehörigen Kurvenpunkte sind bestimmt durch

$$\vec{x}(0) = R\begin{pmatrix} \cos^3(0) \\ \sin^3(0) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}(\tfrac{\pi}{2}) = R\begin{pmatrix} \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{x}(\pi) = R\begin{pmatrix} \cos^3(\pi) \\ \sin^3(\pi) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}(\tfrac{3}{2}\pi) = R\begin{pmatrix} \cos^3\left(\frac{3}{2}\pi\right) \\ \sin^3\left(\frac{3}{2}\pi\right) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ab dem Wert $t = 2\pi$ wiederholt sich die Kurve. Die Punkte mit verschwindender Tangente sind gerade die Spitzen der Kurve.

23.7



Idee: Wir weisen nach, dass bei der gegebenen Parameterdarstellung die Länge des Tangentenabschnitts zwischen der Uhr und der x-Achse immer konstant L ist.

Berechnung des Tangentenvektors:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= L\begin{pmatrix} t-\tanh(t) \\ \cosh^{-1}(t) \end{pmatrix} \\
\dot{\vec{x}}(t) &= L\begin{pmatrix} 1-(1-\tanh^2(t)) \\ -\cosh^{-2}(t)\cdot\sinh(t) \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} \tanh^2(t) \\ -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Parameterdarstellung der Tangente an der Stelle t:

$$\vec{x}(t)+\lambda\dot{\vec{x}}(t) = L\begin{pmatrix} t-\tanh(t) \\ \cosh^{-1}(t) \end{pmatrix} + \lambda\cdot L\begin{pmatrix} \tanh^2(t) \\ -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \end{pmatrix}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Berechnung des Schnittpunkts $(x_0(t)|0)$ der Tangente mit der x-Achse:

$$\vec{x}(t)+\lambda\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} Lt-L\tanh(t)+\lambda L\tanh^2(t) \\ \frac{L}{\cosh(t)}-\lambda L\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus:

$$\begin{aligned}
\frac{L}{\cosh(t)}-\lambda L\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} &= 0 \\
\lambda L\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} &= \frac{L}{\cosh(t)} \\
\lambda &= \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}
\end{aligned}$$

Damit ist der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse gegeben durch

$$\begin{aligned}
&L\begin{pmatrix} t-\tanh(t) \\ \cosh^{-1}(t) \end{pmatrix} + \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}\cdot L\begin{pmatrix} \tanh^2(t) \\ -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lt-L\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}+\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}\cdot L\cdot\frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} \\ \frac{L}{\cosh(t)}-\frac{\cosh(t)}{\sinh(t)}\cdot L\cdot\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} Lt-L\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}+L\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} \\ \frac{L}{\cosh(t)}-L\frac{1}{\cosh(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Berechnung des Abstands von der Berührstelle zum Schnittpunkt mit der x-Achse:

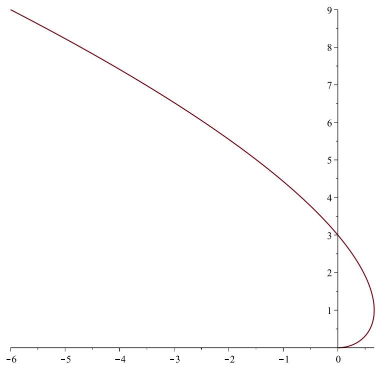
$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{\big(x(t)-x_0(t)\big)^2+\big(y(t)-0\big)^2} \\
&= \sqrt{\big(L(t-\tanh(t))-Lt\big)^2+\big(L\cosh^{-1}(t)-0\big)^2} \\
&= \sqrt{L^2(t-\tanh(t))^2-2L^2(t-\tanh(t))t+L^2t^2+\frac{L^2}{\cosh^2(t)}} \\
&= \sqrt{L^2t^2-2L^2t\tanh(t)+L^2\tanh^2(t)-2L^2t^2+2L^2t\tanh(t)+L^2t^2+\frac{L^2}{\cosh^2(t)}} \\
&= \sqrt{L^2\tanh^2(t)+\frac{L^2}{\cosh^2(t)}} = L\sqrt{\frac{\sinh^2(t)+1}{\cosh^2(t)}} = L\sqrt{\frac{\cosh^2(t)}{\cosh^2(t)}} \\
&= L
\end{aligned}$$

Die Länge des Abschnitts der Tangente an die Kurve zwischen dem Berührpunkt und der x-Achse ist also bei der beschriebenen Kurve $\vec{x}(t)$ immer konstant, d. h. die Taschenuhr beschreibt tatsächlich die beschriebene Kurve.

Abschnitt 23.3 – Bogenlänge und Bogenlängenparametrisierung

23.8

a)



$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{3}t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Damit ist:

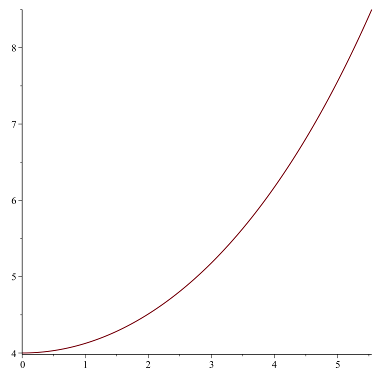
$$\dot{\vec{x}}^2(t) = \left(1-t^2\right)^2 + (2t)^2 = 1 - 2t^2 + t^4 + 4t^4 = 1 + 2t^2 + t^4 = \left(1+t^2\right)^2$$

Länge der Kurve:

$$L = \int_0^3 \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}\, dt = \int_0^3 \sqrt{(1+t^2)^2}\, dt = \int_0^3 \left(1+t^2\right)\, dt = \left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^3$$

$$= 3 + \frac{1}{3}3^3 - 0 - 0 = 3 + 9 = 12$$

b)



$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4\ln(t) \\ 2t + \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{t} \\ 2 - \frac{2}{t^2} \end{pmatrix}$$

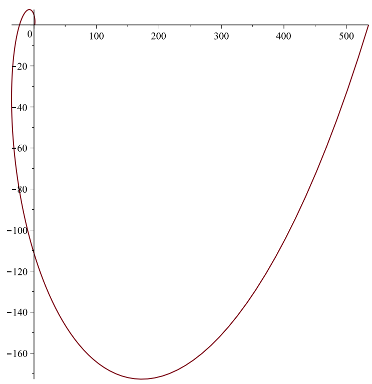
Damit ist:

$$\dot{\vec{x}}^2(t) = \left(\frac{4}{t}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{t^2}\right)^2 = \frac{16}{t^2} + 4 - \frac{8}{t^2} + \frac{4}{t^4} = 4\left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)$$
$$= 4\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2$$

Länge der Kurve:

$$L = \int_1^4 \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}\, dt = \int_1^4 \sqrt{4\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2}\, dt = \int_1^4 2\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\, dt$$
$$= 2\int_1^4 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\, dt = 2\left[t - \frac{1}{t}\right]_1^4 = 2\left(4 - \frac{1}{4} - 1 + 1\right) = \frac{15}{2}$$

c)



$$\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(t) - e^t \sin(t) \\ e^t \sin(t) + e^t \cos(t) \end{pmatrix}$$

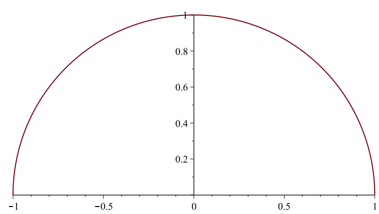
Damit ist:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^2(t) &= \left(e^t \cos(t) - e^t \sin(t)\right)^2 + \left(e^t \sin(t) + e^t \cos(t)\right)^2 \\ &= e^{2t}\cos^2(t) - 2e^{2t}\cos(t)\sin(t) + e^{2t}\sin^2(t) + e^{2t}\sin^2(t) + 2e^{2t}\sin(t)\cos(t) + e^{2t}\cos^2(t) \\ &= e^{2t}\left(\cos^2(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)\right) = 2e^{2t} \end{aligned}$$

Länge der Kurve:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^t\, dt \\ &= \sqrt{2}\left[e^t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - e^0\right) = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right) \end{aligned}$$

d)



$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{(1+t^2)\cdot 2-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2} \\ \frac{(1+t^2)\cdot(-2t)-(1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix} ;= \begin{pmatrix} \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \\ \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}^2(t) &= \left(\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{-4t}{(1+t^2)^2}\right)^2 = \frac{(2-2t^2)^2+(-4t)^2}{(1+t^2)^4} \\
&= \frac{4-8t^2+4t^4+16t^2}{(1+t^2)^4} = \frac{4+8t^2+4t^4}{(1+t^2)^4} = 4\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^4} \\
&= 4\frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^4} = 4\frac{1}{(1+t^2)^2}
\end{aligned}$$

Länge der Kurve:

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{4\frac{1}{(1+t^2)^2}}\,dt = \int_{-1}^{1} 2\frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\left[\arctan(t)\right]_{-1}^{1} = 2\left(\arctan(1)-\arctan(-1)\right) \\
&= 2\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi
\end{aligned}$$

23.9

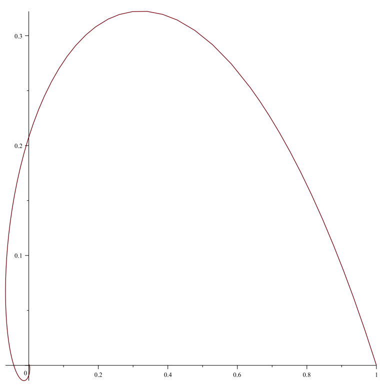
Es ist

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Damit beträgt die Länge der Kettenlinie

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\, dx \\
&\overset{\cosh u \geq 0}{=} \int_{-a}^{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)\, dx = \left[a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a} = a\sinh(1) - a\sinh(-1) \\
&\overset{\sinh(u)=\frac{e^u+e^{-u}}{2}}{=} a\left(\frac{e^1-e^{-1}}{2} - \frac{e^{-1}-e^1}{2}\right) = a\frac{e-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+e}{2} = a\left(e-\frac{1}{e}\right).
\end{aligned}$$

23.10



b) Durch Vergleich vom

$$e^{-t}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$$

stellt man fest, dass die Identitäten

$$\begin{aligned} r &= e^{-t} \\ \varphi &= t \end{aligned}$$

gelten. Damit gilt

$$r = e^{-t} = e^{-\varphi}.$$

c) Es ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \\ -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^{\,2}(t) &= \left(e^{-t}\right)^2 \left((-\cos(t) - \sin(t))^2 + (-\sin(t) + \cos(t))^2\right) \\ &= e^{-2t}\left(\cos^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) - 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)\right) \\ &= e^{-2t}\left(2\cos^2(t) + 2\sin^2(t)\right) \\ &= 2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Länge der Kurve ergibt sich somit als

$$\begin{aligned} L_k &= \int\limits_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}\,dt = \int\limits_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sqrt{2e^{-2t}}\,dt = \sqrt{2}\int\limits_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{-t}\,dt \\ &= \sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} dt = \sqrt{2}\left(-e^{-2(k+1)\pi} + e^{-2k\pi}\right) \\ &= \sqrt{2}e^{-2k\pi}\left(1 - e^{-2\pi}\right). \end{aligned}$$

Für $k = 0$ ist demzufolge

$$L_0 = \sqrt{2}\left(1 - e^{-2\pi}\right).$$

d) Berechnung der ab $t_0 = 0$ gemessenen Bogenlänge:

$$\begin{aligned} s &= \int\limits_0^t \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}\,dt = \int\limits_0^t \sqrt{2e^{-2t}}\,dt = \sqrt{2}\int\limits_0^t e^{-t}\,dt = \sqrt{2}\left[-e^{-t}\right]_0^t dt \\ &= \sqrt{2}\left(-e^{-t} + e^0\right) = \sqrt{2}\left(1 - e^{-t}\right) \end{aligned}$$

Berechnung der Umkehrfunktion $t = t(s)$:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{2}\left(1 - e^{-t}\right) \\ e^{-t} &= 1 - \frac{s}{\sqrt{2}} \\ t &= -\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) = t(s) \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Bogenlängenparametrisierung der Kurve

$$\begin{aligned} \vec{x}(s) &= e^{-t(s)}\begin{pmatrix} \cos(t(s)) \\ \sin(t(s)) \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(-\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ \sin\left(-\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{pmatrix} \\ &= \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ -\sin\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

23.11

a) Der Punkt X berührt die x-Achse, wenn

$$\begin{aligned} y(t) &= 0 \\ R(1-\cos(t)) &= 0 \\ \cos(t) &= 1 \\ t &= k\cdot 2\pi \qquad\qquad (k\in\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Der erste Berührpunkt nach der Startlage ergibt sich für $k=1$, also für

$$t = 2\pi.$$

Somit ergibt sich als Länge eines Zykloidenbogens

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}\,dt$$

Es ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = R\begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^2(t) &= R^2\big((1-\cos(t))^2+\sin^2(t)\big) = R^2\big(1-2\cos(t)+\underbrace{\cos^2(t)+\sin^2(t)}_{=1}\big) \\ &= R^2\big(2-2\cos(t)\big) = 2R^2\big(1-\cos(t)\big) = 2R^2\left(1-\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right) \\ &= 2R^2\left(\underbrace{1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}_{=\sin^2\frac{t}{2}}+\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 4R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Als Länge eines Zykloidenbogens ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{4R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = \int_0^{2\pi} 2R\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,dt, \qquad \left(\text{da } 0\le\frac{t}{2}\le\frac{2\pi}{2}=\pi\right) \\ &= \left[-4R\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = -4R\cos(\pi)+4R\cos(0) = 4R\cdot(-1)+4R\cdot 1 \\ &= 8R \end{aligned}$$

b) Der Bogenlängenparameter s berechnet sich als

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^t \sqrt{\dot{\vec{x}}^2(t)}\,dt = \int_0^t \sqrt{4R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt = \int_0^t 2R\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|\,dt \\
&= \int_0^t 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,dt, \qquad (\text{da } 0 \le \frac{t}{2} \le \frac{2\pi}{2} = \pi) \\
&= \left[-4R\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^t = -4R\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4R\cos(0) = 4R\left(1-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nacheinander:

$$\begin{aligned}
1-\cos\left(\frac{t}{2}\right) &= \frac{s}{4R} \\
\cos\left(\frac{t}{2}\right) &= 1-\frac{s}{4R} \\
\frac{t}{2} &= \arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right) \\
t &= 2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Bogenlängenparametrisierung durch Einsetzen in die ursprüngliche Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(s) = R\begin{pmatrix} 2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right) - \sin\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right) \\ 1-\cos\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right) \end{pmatrix}$$

c) Als Ableitung der Bogenlängenparametrisierung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{x}'(s) &= R\begin{pmatrix} -2\frac{1}{\sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{4R}\right) - \cos\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4R}\right) \\ \sin\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4R}\right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2}}\begin{pmatrix} 1-\cos\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right) \\ \sin\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\left|\vec{x}'(s)\right|^2 &= \frac{1}{4\left(1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)}\left(1-2\cos\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right)+\cos^2\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right)\right.\\
&\qquad\left.+\sin^2\left(2\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{4\left(1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)}\left(2-2\left(\cos^2\left(\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right)-\sin^2\left(\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\left(1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)}\left(1+\sin^2\left(\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right)-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2\left(1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)}\left(1+1-\cos^2\left(\arccos\left(1-\frac{s}{4R}\right)\right)-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2\left(1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)}\cdot\left(2-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2\left(1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)}\cdot 2\left(1-\left(1-\frac{s}{4R}\right)^2\right)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Also gilt tatsächlich auch

$$\left|\vec{x}'(s)\right| = 1.$$

Abschnitt 23.4 – Die Krümmung

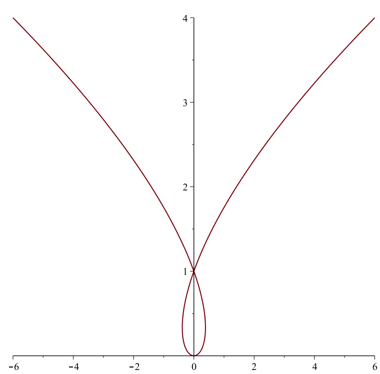
23.12

a) Es ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1-3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \qquad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -6t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 1-3t^2 & -6t \\ 2t & 2 \end{vmatrix}}{((1-3t^2)^2+(2t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2-6t^2+12t^2}{(1-6t^2+9t^4+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2+6t^2}{(1-2t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$



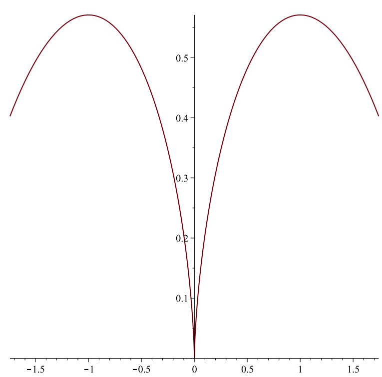
b) Es ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) - t\sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) + t\cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t\sin(t) \\ t\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) - t\cos(t) \\ \cos(t) - t\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Damit:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\begin{vmatrix} -t\sin(t) & -\sin(t) - t\cos(t) \\ t\cos(t) & \cos(t) - t\sin(t) \end{vmatrix}}{\left((-t\sin(t))^2 + (t\cos(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-t\sin(t)\cos(t) + t^2\sin^2(t) + t\cos(t)\sin(t) + t^2\cos^2(t)}{\left(t^2\cos^2(t) + t^2\sin^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t^2}{(t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{|t|}\end{aligned}$$

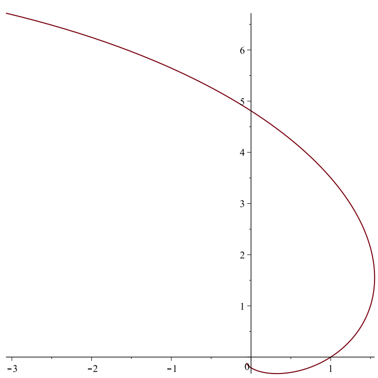


c) Es ist

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} e^t\cos(t) - e^t\sin(t) \\ e^t\sin(t) + e^t\cos(t) \end{pmatrix} \\
\ddot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} e^t\cos(t) - e^t\sin(t) - e^t\sin(t) - e^t\cos(t) \\ e^t\sin(t) + e^t\cos(t) + e^t\cos(t) - e^t\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^t\sin(t) \\ 2e^t\cos(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\begin{vmatrix} e^t\cos(t) - e^t\sin(t) & -2e^t\sin(t) \\ e^t\sin(t) + e^t\cos(t) & 2e^t\cos(t) \end{vmatrix}}{\left((e^t\cos(t) - e^t\sin(t))^2 + (e^t\sin(t) + e^t\cos(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2e^{2t}\cos^2(t) - 2e^{2t}\sin(t)\cos(t) + 2e^{2t}\sin^2(t) + 2e^{2t}\cos(t)\sin(t)}{\left(e^{2t}\cos^2(t) - 2e^{2t}\cos(t)\sin(t) + e^{2t}\sin^2(t) + e^{2t}\sin^2(t) + 2e^{2t}\sin(t)\cos(t) + e^{2t}\cos^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2e^{2t}}{(2e^{2t})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2e^{2t}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}e^t}
\end{aligned}$$

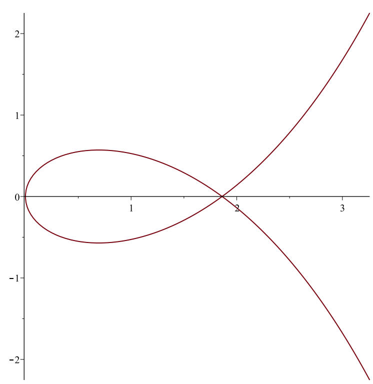


d) Es ist

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{2t}{1+t^2} \\ 1-\frac{2}{1+t^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 2t \\ -1+t^2 \end{pmatrix} \\
\ddot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{(1+t^2)\cdot 2-2t\cdot 2t}{(1+t^2)^2} \\ -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} \\ \frac{4t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+t^2)^2}\begin{pmatrix} 2-2t^2 \\ 4t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\frac{1}{(1+t^2)^3}\begin{vmatrix} 2t & 2-2t^2 \\ -1+t^2 & 4t \end{vmatrix}}{\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}\left((2t)^2+(-1+t^2)^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\begin{vmatrix} 2t & 2-2t^2 \\ -1+t^2 & 4t \end{vmatrix}}{\left((2t)^2+(-1+t^2)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{8t^2+2-2t^2-2t^2+2t^4}{(4t^2+1-2t^2+t^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(1+2t^2+t^4)}{(1+2t^2+t^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(1+t^2)^2}{(1+t^2)^3} \\
&= \frac{2}{1+t^2}
\end{aligned}$$



23.13

Es ist

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \\ -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix} \\
\ddot{\vec{x}}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t) \\ e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t}\sin(t) \\ -2e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\begin{vmatrix} -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) & 2e^{-t}\sin(t) \\ -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) & -2e^{-t}\cos(t) \end{vmatrix}}{\left((-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t))^2 + (-e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2e^{-2t}\cos^2(t) + 2e^{-2t}\sin(t)\cos(t) + 2e^{-2t}\sin^2(t) - 2e^{-2t}\cos(t)\sin(t)}{\left(e^{-2t}\cos^2(t) + 2e^{-2t}\cos(t)\sin(t) + e^{-2t}\sin^2(t) + e^{-2t}\sin^2(t) - 2e^{-2t}\sin(t)\cos(t) + e^{-2t}\cos^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{2e^{-2t}}{(2e^{-2t})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2e^{-2t}}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{-t}} \\
&= \frac{e^t}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Damit ist insbesondere

$$\kappa(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \lim_{t\to\infty}\kappa(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{\sqrt{2}} = \infty \qquad \lim_{t\to-\infty}\kappa(t) = \lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{\sqrt{2}} = 0$$

23.14

Es ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = R\begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \ddot{\vec{x}}(t) = R\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
[\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}] &= \begin{vmatrix} R(1-\cos(t)) & R\sin(t) \\ R\sin(t) & R\cos(t) \end{vmatrix} = R^2\begin{vmatrix} 1-\cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} \\
&= R^2\left(\cos(t) - \cos^2(t) - \sin^2(t)\right) = R^2\left(\cos(t) - 1\right) = R^2\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right) \\
&= R^2\left(-\left(1-\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = R^2\left(-\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= -2R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis aus Aufgabe 23.11 in Abschnitt 23.3

$$\dot{\vec{x}}^2(t) = 4R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

ergibt sich die Krümmung zu

$$\kappa(t) = \frac{[\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}]}{(\dot{\vec{x}})^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(4R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{8R^3\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{1}{4R\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Der Betrag der Krümmung wird minimal, wenn $\sin\frac{t}{2} = \pm 1$, also für $t = \pi$. Der zugehörige Kurvenpunkt hat die Koordinaten $(\pi R|2R)$.

23.15

Es ist

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}(t) &= \frac{R}{(1+t^2)^2}\begin{pmatrix} (1+t^2)\cdot 2-2t\cdot 2t \\ (1+t^2)\cdot 2t-(t^2-1)\cdot 2t \end{pmatrix} = \frac{R}{(1+t^2)^2}\begin{pmatrix} 2-2t^2 \\ 4t \end{pmatrix} \\
\ddot{\vec{x}}(t) &= \frac{R}{(1+t^2)^4}\begin{pmatrix} (1+t^2)^2\cdot(-4t)-(2-2t^2)\cdot 2(1+t^2)\cdot 2t \\ (1+t^2)^2\cdot 4-4t\cdot 2(1+t^2)\cdot 2t \end{pmatrix} \\
&= \frac{R}{(1+t^2)^3}\begin{pmatrix} (1+t^2)\cdot(-4t)-(2-2t^2)\cdot 4t \\ 4(1+t^2)-16t^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{R}{(1+t^2)^3}\begin{pmatrix} -4t-4t^3-8t+8t^3 \\ 4+4t^2-16t^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{R}{(1+t^2)^3}\begin{pmatrix} -12t+4t^3 \\ 4-12t^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
[\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}] &= \frac{R}{(1+t^2)^5}\begin{vmatrix} 2-2t^2 & -12t+4t^3 \\ 4t & 4-12t^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{R}{(1+t^2)^5}\left(8-24t^2-8t^2+24t^4+48t^2-16t^4\right) = \frac{R}{(1+t^2)^5}\left(8+16t^2+8t^4\right) \\
&= \frac{8R}{(1+t^2)^5}(1+t^2)^2 = \frac{8R}{(1+t^2)^3} \\
\dot{\vec{x}}^2(t) &= \frac{R^2}{(1+t^2)^4}\left((2-2t^2)^2+(4t)^2\right) = \frac{R^2}{(1+t^2)^4}\left(4-8t^2+4t^4+16t^2\right) \\
&= \frac{4R^2}{(1+t^2)^4}(1+t^2)^2 = \frac{4R^2}{(1+t^2)^2}.
\end{aligned}$$

Die Krümmung beträgt somit

$$\kappa(t) = \frac{[\dot{\vec{x}},\ddot{\vec{x}}]}{(\dot{\vec{x}})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{8R}{(1+t^2)^3}}{\left(\frac{4R^2}{(1+t^2)^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{8R}{(1+t^2)^3}}{\frac{8R^3}{(1+t^2)^3}} = \frac{1}{R}$$

Vermutlich handelt es sich um einen Kreis mit dem Radius R. Und tatsächlich ist

$$\begin{aligned}
x^2(t)+y^2(t) &= \frac{R^2}{(1+t^2)^2}\left((2t)^2+(t^2-1)^2\right) = \frac{R^2}{(1+t^2)^2}\left(4t^2+t^4-2t^2+1\right) \\
&= \frac{R^2}{(1+t^2)^2}\left(1+2t^2+t^4\right) = \frac{R^2}{(1+t^2)^2}(1+t^2)^2 \\
&= R^2.
\end{aligned}$$

23.16

a) Es ist

$$f'(x) = 2x \qquad f''(x) = 2.$$

Damit:

$$\kappa = \frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b) Es ist

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x.$$

Damit:

$$\kappa = \frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

c) Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Damit:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x^2})\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\\ &= -\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\end{aligned}$$

d) Es ist

$$f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \qquad f''(x) = \frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Damit:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{a}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(1+\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{a\left(\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{a\cosh^3\left(\frac{x}{a}\right)}\\ &= \frac{1}{a\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)}\end{aligned}$$

Abschnitt 23.5 – Das allgemeine Kurvenintegral

23.17

a)
$$\int_k \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}\cdot\dot{\vec{x}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(t)+\cos(t))\,dt$$
$$= [\cos(t)+\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos(0)-\sin(0) = 0+1-1-0 = 0$$

b)
$$\int_k \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^1 \vec{F}\cdot\dot{\vec{x}}\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t)-x(t) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2-t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^1 (t^2+2t^3-2t^2)\,dt = \int_0^1 (2t^3-t^2)\,dt = \left[\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

c)
$$\int_k \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_{-1}^1 \vec{F}\cdot\dot{\vec{x}}\,dt = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} e^y(t) \\ x(t)e^y(t) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} e^t \\ t^2e^t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_{-1}^1 (2te^t+t^2e^t)\,dt = \left[2e^t(t-1)+e^t(t^2-2t+2)\right]_{-1}^1 = \left[t^2e^t\right]_{-1}^1 = e-\frac{1}{e}$$

23.18

$$\int_k \frac{1}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}\dot{\vec{x}}\cdot d\vec{x} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}dt = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2}}\dot{\vec{x}}^2\,dt = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\dot{\vec{x}}^2}\,dt = L$$

23.19

Zunächst entlang der x-Achse und anschließend parallel zur y-Achse:
Die Kurve unterteilt sich in

$$k_1:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\qquad 0\le t\le x_1 \qquad\qquad k_2:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ t \end{pmatrix},\qquad 0\le t\le y_1$$

Damit:

$$\int_k \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^{x_1} \begin{pmatrix} 6x(t)y(t) \\ 3x^2(t)-3y^2(t) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{y_1} \begin{pmatrix} 6x(t)y(t) \\ 3x^2(t)-3y^2(t) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3t^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{y_1} \begin{pmatrix} 6x_1t \\ 3x_1^2-3t^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{x_1} 0\,dt + \int_0^{y_1} (3x_1^2-3t^2)\,dt = \left[3x_1^2t-t^3\right]_0^{y_1}$$
$$= 3x_1^2y_1-y_1^3$$

Zunächst entlang der y-Achse und anschließend parallel zur x-Achse:
Die Kurve unterteilt sich in

$$k_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le y_1 \qquad\qquad k_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le x_1$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\int\limits_k \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int\limits_0^{y_1} \begin{pmatrix} 6x(t)y(t) \\ 3x^2(t) - 3y^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} dt + \int\limits_0^{x_1} \begin{pmatrix} 6x(t)y(t) \\ 3x^2(t) - 3y^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int\limits_0^{y_1} \begin{pmatrix} 0 \\ -3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int\limits_0^{x_1} \begin{pmatrix} 6ty_1 \\ 3t^2 - 3y_1^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int\limits_0^{y_1} (-3t^2)\, dt + \int\limits_0^{x_1} 6ty_1\, dt = \left[-t^3\right]_0^{y_1} + \left[3t^2 y_1\right]_0^{x_1} \\
&= -y_1^3 + 3x_1^2 y_1
\end{aligned}$$

Auf einer Geraden zwischen den zwei Punkten:
Die Kurve lässt sich parametrisieren als

$$k : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 t \\ y_1 t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1$$

Damit:

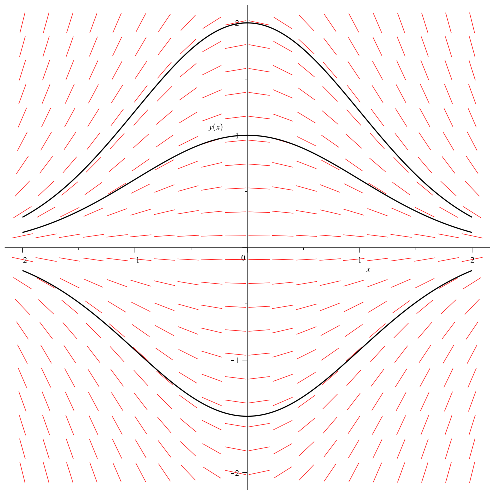
$$\begin{aligned}
\int\limits_k \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int\limits_0^{1} \begin{pmatrix} 6x(t)y(t) \\ 3x^2(t) - 3y^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} dt = \int\limits_0^{1} \begin{pmatrix} 6x_1 y_1 t^2 \\ 3x_1^2 t^2 - 3y_1^2 t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int\limits_0^{1} (6x_1^2 y_1 t^2 + 3x_1^2 y_1 t^2 - 3y_1^3 t^2)\, dt = \int\limits_0^{1} (9x_1^2 y_1 t^2 - 3y_1^3 t^2)\, dt \\
&= \left[3x_1^2 y_1 t^3 - y_1^3 t^3\right]_0^1 \\
&= 3x_1^2 y_1 - y_1^3
\end{aligned}$$

24 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

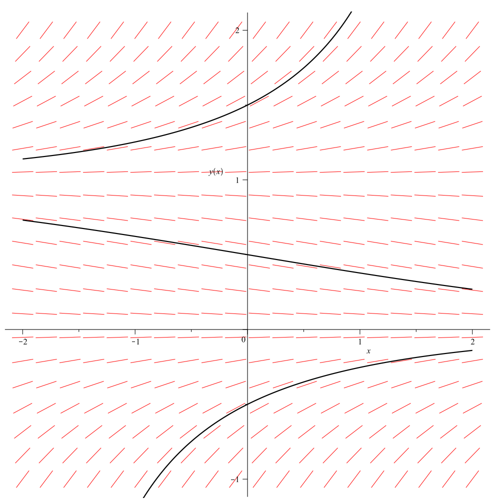
Abschnitt 24.1 – Der Begriff der Differenzialgleichung

24.1

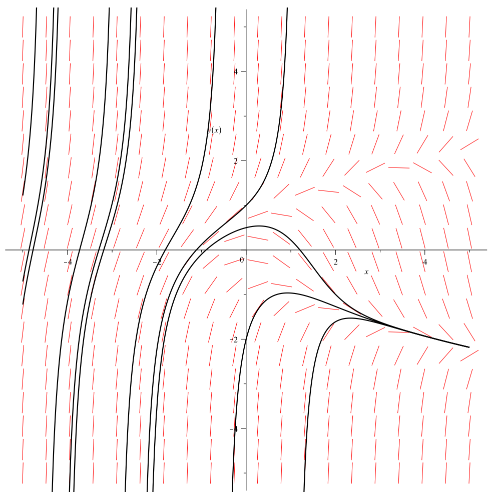
a)



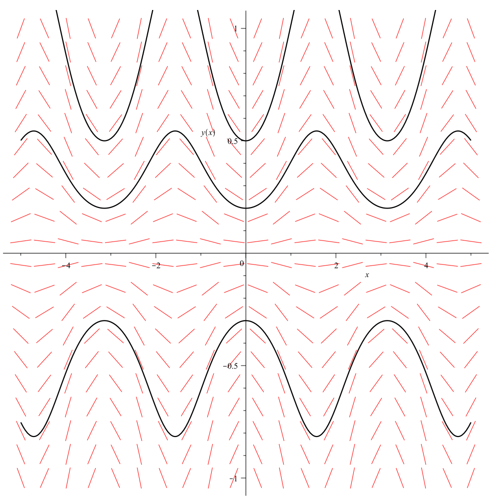
b)



c)



d)



24.2

a) Bestimmung der allgemeinen Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -xy \\
\frac{dy}{y} &= -x\,dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int x\,dx \\
\ln(|y|) &= -\frac{1}{2}x^2 + C \\
|y| &= e^{-\frac{1}{2}x^2 + C} \\
y &= \pm e^C e^{-\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}
$$

Da die Lösung $y = 0$ bei der Trennung der Veränderlichen entfiel, lautet die allgemeine Lösung

$$y = Ke^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Bestimmung der Konstante aus dem Anfangswert $y(0) = 1$:

$$1 = Ke^0 = K$$

Also lautet die Lösung

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

b) Bestimmung der allgemeinen Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= x^2(y^2+1) \\
\frac{dy}{1+y^2} &= x^2\,dx \\
\int \frac{dy}{1+y^2} &= \int x^2\,dx \\
\arctan(y) &= \frac{x^3}{3} + C \\
y &= \tan\left(\frac{x^3}{3} + C\right)
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Konstante aus dem Anfangswert $y(0) = -1$:

$$
\begin{aligned}
-1 &= \tan(C) \\
C &= \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Also lautet die Lösung

$$y = \tan\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\pi}{4}\right).$$

c) Bestimmung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2}y(y-1)\\
\frac{dy}{y(y-1)} &= \frac{1}{2}\,dx\\
\int \frac{dx}{y(y-1)} &= \int \frac{1}{2}\,dx\\
\ln\left(\left|\frac{y-1}{y}\right|\right) &= \frac{x}{2}+C\\
\left|\frac{y-1}{y}\right| &= e^{\frac{x}{2}+C}\\
1-\frac{1}{y} &= \pm e^{C}e^{\frac{x}{2}}\\
\frac{1}{y} &= 1\mp e^{C}e^{\frac{x}{2}}\\
y &= \frac{1}{\left(1\mp e^{C}e^{\frac{x}{2}}\right)}
\end{aligned}$$

Da die Lösung $y=1$ bei der Trennung der Veränderlichen entfiel, lautet die allgemeine Lösung neben der ebenfalls existierenden Triviallösung $y=0$

$$y = \frac{1}{\left(1+Ke^{\frac{x}{2}}\right)}, \qquad K\in\mathbb{R}.$$

Bestimmung der Konstante aus dem Anfangswert $y(0)=\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{1+K}\\
K &= 1
\end{aligned}$$

Also lautet die Lösung

$$y = \frac{1}{\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)}.$$

d) Bestimmung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y\sin(2x) \\
\frac{dy}{y} &= \sin(2x)\,dx \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \sin(2x)\,dx \\
\ln(|y|) &= -\frac{1}{2}\cos(2x)+C \\
|y| &= e^{-\frac{1}{2}\cos(2x)+C} \\
y &= \pm e^C e^{-\frac{1}{2}\cos(2x)}
\end{aligned}$$

Da die Lösung $y=0$ bei der Trennung der Veränderlichen entfiel, lautet die allgemeine Lösung

$$y = Ke^{-\frac{1}{2}\cos(2x)}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Bestimmung der Konstante aus dem Anfangswert $y(0)=1$:

$$\begin{aligned}
1 &= Ke^{-\frac{1}{2}} \\
K &= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}
\end{aligned}$$

Also lautet die Lösung

$$y = \sqrt{e}e^{-\frac{1}{2}\cos(2x)}.$$

e) Bestimmung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{xy}{1-x^2} \\
\frac{dy}{y} &= \frac{x}{1-x^2}\,dx \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{x}{1-x^2}\,dx \\
\ln(|y|) &= -\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|)+C = -\ln\left(\sqrt{|1-x^2|}\right)+C \\
|y| &= e^{-\ln\left(\sqrt{|1-x^2|}\right)+C} \\
y &= \pm e^C \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Da die Lösung $y=0$ bei der Trennung der Veränderlichen entfiel, lautet die allgemeine Lösung

$$y = K\frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Bestimmung der Konstante aus dem Anfangswert $y(2)=1$:

$$\begin{aligned}
1 &= K\frac{1}{\sqrt{|1-2^2|}} \\
K &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Also lautet die Lösung

$$y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{|1-x^2|}}$$

bzw. wegen dem Startwert $x_2 = 2$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

f) Bestimmung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned}
xy\frac{dy}{dx} &= -(y^2+1) \\
\frac{y}{y^2+1}\,dy &= -\frac{1}{x}\,dx \\
\int \frac{y}{y^2+1}\,dy &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\
\frac{1}{2}\ln(y^2+1) &= -\ln(|x|)+C \\
\ln\left(\sqrt{y^2+1}\right) &= -\ln(|x|)+C \\
\sqrt{y^2+1} &= e^{-\ln(|x|)+C} = \frac{e^C}{|x|} \\
y^2+1 &= \frac{e^{2C}}{x^2} \\
y &= \pm\sqrt{\frac{e^{2C}}{x^2}-1} \\
y &= \pm\sqrt{\frac{K}{x^2}-1}, \qquad K>0
\end{aligned}$$

Bestimmung der Konstante aus dem Anfangswert $y(-\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$:

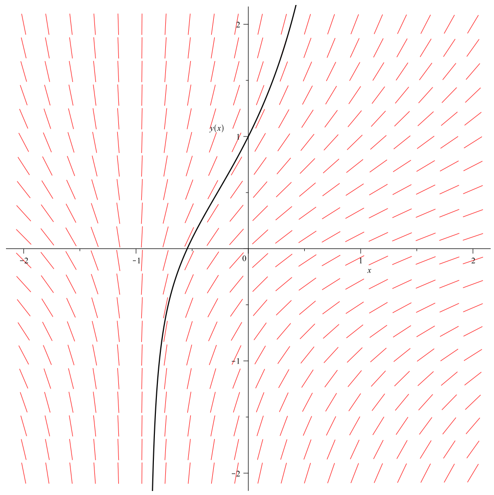
$$\begin{aligned}
\sqrt{3} &= +\sqrt{4K-1} \\
3 &= 4K-1 \\
K &= 1
\end{aligned}$$

Also lautet die Lösung wegen dem Startwert

$$y = +\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}.$$

24.3

a)



c) Bestimmung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1+y^2}{1+x} \\
\frac{1}{1+y^2}\,dy &= \frac{1}{1+x}\,dx \\
\int \frac{1}{1+y^2}\,dy &= -\int \frac{1}{1+x}\,dx \\
\arctan(y) &= \ln(|1+x|)+C \\
y &= \tan(\ln(|1+x|)+C)
\end{aligned}$$

Bestimmung der Konstante aus dem Anfangswert $y(0)=1$:

$$\begin{aligned}
1 &= \tan(C) \\
C &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Also lautet die Lösung wegen dem Startwert

$$y = \tan\left(\ln(|1+x|)+\frac{\pi}{4}\right).$$

24.4

a) *Schritt 1:* Lösung der homogenen Differenzialgleichung durch Trennung der Veränderlichen

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - 2y &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= 2y \\
\frac{dy}{y} &= 2\,dx \\
\int \frac{dy}{y} &= \int 2\,dx \\
\ln(|y|) &= 2x + C \\
|y| &= e^{2x+C} \\
y &= \pm e^C e^{2x}
\end{aligned}$$

Da die Lösung $y = 0$ bei der Trennung der Veränderlichen entfiel, lautet die allgemeine homogene Lösung

$$y = Ke^{2x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2: Variation der Konstanten zum Auffinden einer Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$$y_s = K(x)e^{2x}$$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned}
K'(x)e^{2x} + 2K(x)e^{2x} - 2K(x)e^{2x} &= e^x \\
K'(x)e^{2x} &= e^x \\
K'(x) &= e^{-x} \\
K(x) &= -e^{-x}
\end{aligned}$$

Damit lautet eine inhomogene Lösung:

$$y_s = -e^{-x}e^{2x} = -e^x$$

Schritt 3: Allgemeine Lösung:

$$y = -e^{-x} + Ke^{2x}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

b) *Schritt 1:* Lösung der homogenen Differenzialgleichung durch Trennung der Veränderlichen

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x} &= 0\\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x}\\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x}\\
\int\frac{dy}{y} &= -\int\frac{dx}{x}\\
\ln(|y|) &= -\ln(|x|)+C\\
|y| &= e^{-\ln(|x|)+C}\\
|y| &= \frac{e^C}{|x|}\\
y &= \pm\frac{e^C}{x}
\end{aligned}$$

Da die Lösung $y=0$ bei der Trennung der Veränderlichen entfiel, lautet die allgemeine homogene Lösung

$$y = \frac{K}{x}, \qquad K\in\mathbb{R}.$$

Schritt 2: Variation der Konstanten zum Auffinden einer Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$$y_s = \frac{K(x)}{x}$$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{K'(x)}{x}-\frac{K(x)}{x^2}+\frac{K(x)}{x^2} &= \frac{1}{x^2}\\
\frac{K'(x)}{x} &= \frac{1}{x^2}\\
K'(x) &= \frac{1}{x}\\
K(x) &= \ln(|x|)
\end{aligned}$$

Damit lautet eine inhomogene Lösung:

$$y_s = \frac{\ln(|x|)}{x}$$

Schritt 3: Allgemeine Lösung:

$$y = \frac{\ln(|x|)}{x}+\frac{K}{x} = \frac{\ln(|x|)+K}{x}, \qquad K\in\mathbb{R}$$

c) *Schritt 1:* Lösung der homogenen Differenzialgleichung durch Trennung der Veränderlichen

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + 2xy &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -2xy \\
\frac{dy}{y} &= -2x\,dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int 2x\,dx \\
\ln(|y|) &= -x^2 + C \\
|y| &= e^{-x^2+C} \\
y &= \pm \frac{e^{C-x^2}}{e}
\end{aligned}$$

Da die Lösung $y = 0$ bei der Trennung der Veränderlichen entfiel, lautet die allgemeine homogene Lösung

$$y = Ke^{-x^2}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2: Variation der Konstanten zum Auffinden einer Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$$y_s = K(x)e^{-x^2}$$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned}
K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2} + 2xK(x)e^{-x^2} &= 4xe^{x^2} \\
K'(x)e^{-x^2} &= 4xe^{x^2} \\
K'(x) &= 4xe^{2x^2} \\
K(x) &= e^{2x^2}
\end{aligned}$$

Damit lautet eine inhomogene Lösung:

$$y_s = e^{2x^2}e^{-x^2} = e^{x^2}$$

Schritt 3: Allgemeine Lösung:

$$y = e^{x^2} + Ke^{-x^2}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

d) *Schritt 1:* Lösung der homogenen Differenzialgleichung durch Trennung der Veränderlichen

$$\begin{aligned}
x\frac{dy}{dx}+y &= 0\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}\\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x}\\
\int\frac{dy}{y} &= -\int\frac{dx}{x}\\
\ln(|y|) &= -\ln(|x|)+C\\
|y| &= e^{-\ln(|x|)+C}\\
|y| &= \frac{e^C}{|x|}\\
y &= \pm\frac{e^C}{x}
\end{aligned}$$

Da die Lösung $y=0$ bei der Trennung der Veränderlichen entfiel, lautet die allgemeine homogene Lösung

$$y = \frac{K}{x}, \qquad K\in\mathbb{R}.$$

Schritt 2: Variation der Konstanten zum Auffinden einer Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$$y_s = \frac{K(x)}{x}$$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned}
x\left(\frac{K'(x)}{x}-\frac{K(x)}{x^2}\right)+\frac{K(x)}{x} &= x\cos(x)\\
K'(x) &= x\cos(x)\\
K(x) &= \cos(x)+x\sin(x)
\end{aligned}$$

Damit lautet eine inhomogene Lösung:

$$y_s = \frac{\cos(x)+x\sin(x)}{x}$$

Schritt 3: Allgemeine Lösung:

$$y = \frac{\cos(x)+x\sin(x)}{x}+\frac{K}{x} = \frac{\cos(x)+x\sin(x)+K}{x}, \qquad K\in\mathbb{R}$$

24.5

Schritt 1: Lösung der homogenen Differenzialgleichung durch Trennung der Veränderlichen:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

mittels Trennung der Veränderlichen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
L\frac{dI}{dt} &= -RI = 0 \\
\frac{L}{I}\,dI &= -\frac{R}{L}\,dt \\
\int \frac{1}{I}\,dI &= -\int \frac{R}{L}\,dt \\
\ln(|I|) &= -\frac{R}{L}t + C \\
|I| &= e^{-\frac{R}{L}t+C} \\
I &= \pm e^{C}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

Da die Lösung $I = 0$ bei der Trennung der Veränderlichen entfiel, lautet die allgemeine homogene Lösung

$$I = Ke^{-\frac{R}{L}t}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2: Variation der Konstanten zum Auffinden einer Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$$I_s = K(t)e^{-\frac{R}{L}t}$$

Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned}
L\left(K'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L}K(t)e^{-\frac{R}{L}t}\right) + RK(t)e^{-\frac{R}{L}t} &= U \\
LK'(t)e^{-\frac{R}{L}t} &= U \\
K'(t) &= \frac{U}{L}e^{\frac{R}{L}t} \\
K(t) &= \frac{U}{R}e^{\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

Damit lautet eine inhomogene Lösung:

$$I_s = \frac{U}{R}e^{\frac{R}{L}t}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$I = \frac{U}{R} + Ke^{-\frac{R}{L}t}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Schritt 3: Anfangsbedingung $I(0) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{U}{R} + K \\ K &= -\frac{U}{R} \end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$I = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Speziell gilt

$$\lim_{t\to\infty} I = \frac{U}{R}.$$

Abschnitt 24.3 – Schwingungsdifferenzialgleichung

24.6

Fall $k^2 - 4mD > 0$:
Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} m\lambda^2 + k\lambda + D &= 0 \\ \lambda_{1/2} &= \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mD}}{2m} \end{aligned}$$

Die Basislösungen lauten also

$$s_1 = e^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4mD}}{2m}} \qquad s_2 = e^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4mD}}{2m}}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$s = c_1 e^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4mD}}{2m}} + c_2 e^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4mD}}{2m}}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Fall $k^2 - 4mD = 0$:
Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} m\lambda^2 + k\lambda + D &= 0 \\ \lambda_{1/2} &= \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mD}}{2m} = -\frac{k}{2m} \end{aligned}$$

Die Basislösungen lauten also

$$s_1 = e^{-\frac{k}{2m}t} \qquad s_2 = te^{-\frac{k}{2m}t}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$s = c_1 e^{-\frac{k}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{k}{2m}t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

24.7

a) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$
$$\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2$$

Basislösungen:

$$s_1 = e^x \qquad y_2 = e^{-2x}$$

Allgemeine Lösung:

$$s = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

b) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Basislösungen:

$$s_1 = \cos(x) \qquad y_2 = \sin(x)$$

Allgemeine Lösung:

$$s = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

c) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$
$$(\lambda + 3)^2 = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

Basislösungen:

$$s_1 = e^{-3x} \qquad y_2 = xe^{-3x}$$

Allgemeine Lösung:

$$s = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

d) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} = -2 \pm 2i$$

Basislösungen:

$$y_1 = e^{-2x}\cos(2x) \qquad y_2 = e^{-2x}\sin(2x)$$

Allgemeine Lösung:

$$y = c_1 e^{-2x}\cos(2x) + c_2 e^{-2x}\sin(2x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

e) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 17}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2} = 1 \pm 4i$$

Basislösungen:

$$y_1 = e^{-x}\cos(4x) \qquad y_2 = e^{-x}\sin(4x)$$

Allgemeine Lösung:

$$y = c_1 e^{-x}\cos(4x) + c_2 e^{-x}\sin(4x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

f) Es handelt sich um eine Schwingungsdifferenzialgleichung für y'.
Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 3\lambda + \frac{9}{4} = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$$

Basislösungen für die Ableitungsfunktion:

$$y_1' = e^{-\frac{3}{2}x} \qquad y_2 = xe^{-\frac{3}{2}x}$$

Allgemeine Lösung der Ableitungsfunktion:

$$y' = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{3}{2}x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch Integration:

$$y = c_1\left(-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}\right) + c2\left(-\frac{2}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^{-\frac{3}{2}x} + c_3, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

24.8

Charakteristische Gleichung:

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{I}{C} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \cdot L \cdot \frac{I}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

1. Fall: $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, i$$

Die Basislösungen lauten also

$$I_1 = e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right) \qquad I_2 = e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right)$$

und damit die allgemeine Lösung

$$I = c_1 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right) + c_2 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Das System schwingt.

2. Fall: $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Die Basislösungen lauten also

$$I_1 = e^{\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} \qquad I_2 = e^{\left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$I = c_1 e^{\left(-\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Das System schwingt nicht.

3. Fall: $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0$:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{R}{2L}$$

Die Basislösungen lauten also

$$I_1 = e^{-\frac{R}{2L}t} \qquad I_2 = te^{-\frac{R}{2L}t}$$

und damit die allgemeine Lösung

$$I = c_1 e^{-\frac{R}{2L}t} + c_2 t e^{-\frac{R}{2L}t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Das System schwingt nicht.