МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра Алгоритмическая математика

ОТЧЕТ
по индивидуальному домашнему заданию №1
по дисциплине «Алгебра и геометрия»
Тема: Многочлены и комплексные числа. Вариант 3

Студент гр. 4361 ____________________ Артемьев Д. Н.

Преподаватель ____________________ Михальченко А. В.

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Цель работы

Требуется решить третий вариант индивидуального домашнего задания по теме «Многочлены и Комплексные числа», смотреть рисунок 1.

Индивидуальное домашнее задание по дисциплине "Алгебра и геометрия".
Тема: "Многочлены и комплексные числа". Вариант 3

1) Найти многочлен, принимающий в точках $-3, -2, -1, 1$ значения $-2, -3, 0, -6$ соответственно
2) Решить при всех комплексных значениях параметра w уравнение
$(w^2 + 3iw - (6 - 2i)) \cdot z = w^2 - (3 - 4i)w - (2 + 6i)$
3) Решить уравнение $x^6 - 4x^5 - 3x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$ на множестве комплексных чисел
4) Решить уравнение $z^3 = -3 + 3i$ и представить решение в алгебраической форме
5) Решить уравнение $z^3 = -2 + 2i$, вещественная и мнимая части одного из корней которого - целые числа

Рисунок 1 – Условия варианта

Первое задание

Требуется найти многочлен $A(x)$ по значениям в следующих точках, смотреть таблицу 1:

Таблица 1 – Значения в точках

Точка	-3	-2	-1	1
Значение	-2	-3	0	-6

Для нахождения многочлена по значениям в точках можем воспользоваться теоремой об интерполяции многочленов по Лагранжу и леммой о базисных многочленах Лагранжа.

$A(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot l_i(x)$, где $y_i = A(x_i)$, а $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Теперь подставим значения из условия:

$$A(x) = \frac{(-2)(x+2)(x+1)(x-1)}{(-3+2)(-3+1)(-3-1)} + \frac{(-3)(x+3)(x+1)(x-1)}{(-2+3)(-2+1)(-2-1)} + 0 + \frac{(-6)(x+3)(x+2)(x+1)}{(1+3)(1+2)(1+1)} =$$

$$= \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - x - 2) - (x^3 + 3x^2 - x - 3) - \frac{1}{4}(x^3 + 6x^2 + 11x + 6);$$

$A(x) = -x^3 - 4x^2 - 2x + 1.$

Ответ: $A(x) = -x^3 - 4x^2 - 2x + 1.$

Второе задание

Нужно выяснить, какие значения может принимать z в $\big(w^2 + 3iw -$ $-(6 - 2i)\big) \cdot z = w^2 - (3 - 4i)w - (2 + 6i)$.

Рассмотрим, при каких случаях выражение с параметром в левой части равно нулю:

$w^2 + 3iw - (6 - 2i) = 0;$

$w = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 + 4(6-2i)}}{2};$

$w = \frac{-3i + \sqrt{15-8i}}{2}, \frac{-3i - \sqrt{15-8i}}{2}.$

Получим, что $z = \frac{w^2 - (3-4i)w - (2+6i)}{w^2 + 3iw - (6-2i)}$, $w \notin \left\{\frac{-3i + \sqrt{15-8i}}{2}; \frac{-3i - \sqrt{15-8i}}{2}\right\}$.

Найдём, чему равен $\sqrt{15 - 8i}$, чтобы преобразовать знаменатель:

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \end{cases};$

$\sqrt{15 - 8i} = -4 + i.$

Получаем, что знаменатель равен нулю при $w \in \{-2 - i;\ 2 - 2i\}$.

Рассмотрим, при каких случаях числитель равен нулю:

$w^2 - (3 - 4i)w - (2 + 6i) = 0;$

$w = \frac{3 - 4i \pm \sqrt{(3-4i)^2 + 4(2+6i)}}{2};$

$w \in \{2 - 2i; 1 - 2i\}.$

Знаменатель можно представить в виде $(w + 2 + i)(w - 2 + 2i)$.

А числитель в виде $(w - 2 + 2i)(w - 1 + 2i)$. Видим, что $(w - 2 + 2i)$ есть и в левом, и в правом выражении с параметром, значит, при значении $2 -$ $-2i$ z может принимать любые значения. Теперь рассмотрим, чему будет равно z, если ни знаменатель, ни числитель не обращается в ноль.

$z = \frac{(w-2+2i)(w-1+2i)}{(w-2+2i)(w+2+i)} = \frac{w-1+2i}{w+2+i}$

Получаем, что при $w = -2 - i$ решений нет, при $w = 1 - 2i$ получится ноль, при $w = 2 - 2i$ z может принимать любые значения, при остальных значениях $z = \frac{w-1+2i}{w+2+i}$.

Ответ: при $w = -2 - i$ решений нет, при $w = 1 - 2i$ получится ноль, при $w = 2 - 2i$ z может принимать любые значения, при остальных значениях $z = \frac{w-1+2i}{w+2+i}$.

Третье задание

Надо найти корни уравнения $x^6 - 4x^5 - 3x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 4x - 5 = 0$ на множестве комплексных чисел. Найдём рациональные корни при помощи теоремы о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами и схемы Горнера. Ищем корни вида $\frac{p}{q}$, где q делит $l(A)$, а p делит $s(A)$, в нашем уравнении $l(A) = 1$, $s(A) = -5$. $p = \{\pm 1; \pm 5\}$, $q = \{\pm 1\}$, получается, что $\frac{p}{q} =$ $= \{\pm 5; \pm 1\}$. Проверим каждое из возможных значений при помощи схемы Горнера, смотреть таблицы 2-5.

Таблица 2 – Значение в точке 1

	1	-4	-3	-8	-9	-4	-5
1	1	-3	-6	-14	-23	-27	-32

Таблица 3 – Значение в точке -1

	1	-4	-3	-8	-9	-4	-5
-1	1	-5	2	-10	1	-5	0

Таблица 4 – Значение в точке 5

	1	-4	-3	-8	-9	-4	-5
5	1	1	2	2	1	1	0

Таблица 5 – Значение в точке -5

	1	-4	-3	-8	-9	-4	-5
-5	1	-9	42	-218	1081	-5409	27040

Получаем, что у нашего уравнения есть два вещественных корня: 5 и -1. По теореме Безу получается, что многочлен делится на $(x-5)$ и $(x+1)$. Разделив, получим $A(x) = (x+1)(x-5)(x^4 + 2x^2 + 1)$. Найдем комплексные корни $x^4 + 2x^2 + 1$. Заменим x^2 на t, получим $t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$, чтобы это выражение обращало в ноль, t должно быть равно -1, тогда x равно i, а по свойству комплексных корней вещественных многочленов $-i$ тоже является корнем.

Ответ: $x \in \{\pm i; 5; -1\}$.

Четвёртое задание

Требуется решить уравнение $z^3 = -3 + 3i$. Получим, что $z = \sqrt[3]{-3+3i}$, $\varphi = \arccos\left(-\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

$$\sqrt[3]{-3+3\mathrm{i}} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right) +\right.$$

$$\left.+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)\right),$$ где $k \in \overline{0, n-1}$, $n = 3$.

Получается, что у нас буде три значения в зависимости от k, рассмотрим каждое из них.

$$z_0 = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+0}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

$$z_1 = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) +\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right).$$

$$z_2 = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) +\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right).$$

Теперь приведем полученные значения в алгебраическую форму:

$$z_0 = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[6]{18}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{12}}{2} + \frac{\sqrt[3]{12}}{2}i;$$

$$z_1 = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right) = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[6]{18}\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\cdot\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = -\frac{\sqrt[6]{18}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + \frac{\sqrt[6]{18}(-\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}i;$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt[6]{3888}+\sqrt[3]{12}}{4} + \frac{-\sqrt[3]{12}+\sqrt[6]{3888}}{4}i;$$

$$z_2 = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right) = \sqrt[6]{18}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{18}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{\sqrt[6]{18}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} - \frac{\sqrt[6]{18}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}i;$$

$$\mathrm{z}_2 = \frac{\sqrt[6]{3888}-\sqrt[3]{12}}{4} - \frac{\sqrt[3]{12}+\sqrt[6]{3888}}{4}i.$$

Ответ: $z \in \left\{\frac{\sqrt[3]{12}}{2} + \frac{\sqrt[3]{12}}{2}i;\ -\frac{\sqrt[6]{3888}+\sqrt[3]{12}}{4} + \frac{-\sqrt[3]{12}+\sqrt[6]{3888}}{4}i;\ \frac{\sqrt[6]{3888}-\sqrt[3]{12}}{4} - \right.$

$\left. - \frac{\sqrt[3]{12}+\sqrt[6]{3888}}{4}i\right\}.$

Пятое задание

Необходимо решить уравнение $z^3 = -2 + 2i$, зная, что вещественная и мнимая часть одного из корней – целые числа.

Пусть $-2 + 2i = w$, а $z = x + yi$.

Получим $(x + yi)^3 = w$, тогда $|(x + yi)^3| = |w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Из этого получаем $(x^2 + y^2)^3 = 8, x^2 + y^2 = 2$. Чтобы найти подходящие значения, нужно подставить в систему

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -2 \\ 3x^2y - y^3 = 2 \end{cases}$$

все варианты x и y, то есть комбинации из ± 1. Проверим все четыре варианта (x, y).

$(1; 1)$ – пара подходит:

$$\begin{cases} 1 - 3 = -2 \\ 3 - 1 = 2 \end{cases};$$

$(1; -1)$ – пара не подходит:

$$\begin{cases} 1 - 3 = -2 \\ -3 + 1 = -2 \end{cases};$$

$(-1; 1)$ – пара не подходит:

$$\begin{cases} -1 + 3 = 2 \\ 3 - 1 = 2 \end{cases};$$

$(-1; -1)$ – пара не подходит:

$$\begin{cases} -1 + 3 = 2 \\ -3 + 1 = -2 \end{cases}.$$

Получаем, что первым значением корня будет являться $1 + i$. Рассмотрим $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Проверим, является ли оно значением корня третьей степени из единицы. $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right)$. Получаем, что

$$\sqrt[3]{1} \in \left\{\cos 0 + i\sin 0\,; \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}; \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right\}.$$

Раз ε является корнем из единицы третьей степени, воспользуемся тем, что $\sqrt[n]{z} = z_0 \cdot \varepsilon^k, k \in \overline{0, n-1}$, где $z_0 = 1 + i$ – одно из значений корня.

При k равному нулю, получим z_0.

$k = 1$:

$\sqrt[3]{-2+2i} = (1+i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \right.$ $\left. + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

$k = 2$:

$\sqrt[3]{-2+2i} = (1+i)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \right.$ $\left. + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

В условии не сказано, в какой форме представлять ответы, поэтому оставлю в тригонометрической.

Ответ: $z \in \left\{1+i; \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right); \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)\right\}$.