

# TP 4 - Mesure du moment d'inertie d'un solide

MENARD Alexandre - VIEILLEDENT Florent

La mécanique des milieux continus (solides déformables et fluides) trouvent une forte application dans les milieux industriels notamment automobile afin de produire des véhicules toujours plus sûr face aux risques d'accidents, et qui consomment le moins possible en optimisant l'écoulement de l'air. Les avancées permettent aujourd'hui de produire des véhicules atteignant des vitesses presque équivalentes à des avions de ligne. Ici, nous étudierons une branche plus idéalisée de la mécanique des milieux continus à savoir la mécanique des solides indéformables, applicable sur des solides simples. Notre travail consistera alors à déterminer le moment d'inertie de plusieurs solides grâce à la période d'oscillation de ces derniers. Au préalable, nous mesurerons le couple généré par le ressort ainsi que la constante de torsion du ressort.

## 1 Mesure des grandeurs caractéristiques

### 1.1 Théorie

On définit un repère polaire de centre  $O$  confondu avec l'axe, et on note  $\theta = 0$  rad la position d'équilibre. On repère le point de la mesure en  $M$ , tel que  $O\vec{M} = r\vec{u}_r$ . En admettant que la force de rappel s'applique orthoradialement avec  $\vec{F} = -F(r, \theta)\vec{u}_\theta$ , on exprime alors le moment  $\vec{M}$  de  $\vec{F}$  :

$$\begin{aligned}\vec{M} &= O\vec{M} \wedge \vec{F} & \vec{M} \cdot \vec{u}_z &= -D\theta \\ &= -rF(r, \theta)\vec{u}_z\end{aligned}\tag{1}$$

A priori, la formule précédente laisse suggérer que le couple est dépendant de  $r$ , mais la seconde dépendant de  $\theta$  s'oppose à cette dépendance ( $D$  étant constant en  $kg.m^2.s^{-2}$ ). Nous vérifierons alors que le produit  $rF(r)$  donne toujours la même valeur à  $\theta$  fixe (voir partie (1.2)). Enfin, à l'aide du théorème du moment cinétique, on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{D}{I}\theta = 0\tag{2}$$

On en déduit alors la période en posant  $\omega^2 = \frac{D}{I}$  :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}\tag{3}$$

### 1.2 Mesure du couple

Pour mesurer le couple à un angle  $\theta$  fixe, on pose une potence à environ  $\theta \approx 90^\circ$  de la position d'équilibre pour maintenir un angle quasi constant entre les mesures sur des  $r$  différents. On fixe le dynamomètre à distance  $r$  sur la barre puis l'on tire jusqu'à ce que la barre heurte la potence. On relâche progressivement le dynamomètre afin d'obtenir la force minimale pour toucher la potence (car si l'on tire trop, on mesurera la force de réaction de la potence en plus de celle du ressort spirale). On relève alors une plage de force où la barre commence à se décoller ce qui nous donnera une valeur moyenne et une incertitude sur notre mesure. On relève la force en  $r = 5, 10, 15, 20, 25cm$ .

Lors de la mesure, on s'assure également que le dynamomètre est horizontal et perpendiculaire à la barre, car dans le cas contraire, le ressort du dynamomètre devra produire une force plus grande que nécessaire pour compenser la composante orthoradiale de  $\vec{F}$  (voir figure 1).

En sachant que  $F_{dyn}$  et  $F'_{dyn}$  sont les forces mesurées par le dynamomètre (respectivement à l'horizontal et incliné), on a entre les deux cas :

$$\|\vec{F}\| = \|F_{dyn}\| < \|F'_{dyn}\| \Rightarrow \text{La mesure inclinée est incorrecte}\tag{4}$$

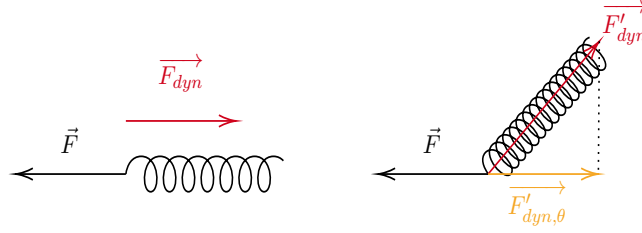


FIGURE 1 – Importance de l'alignement du dynamomètre

On résume l'ensemble des mesures expérimentales et des valeurs déduites dans le tableau (1) suivant :

|                         |            |            |            |            |            |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $r \pm 0.2$ (en cm)     | 5          | 10         | 15         | 20         | 25         |
| $F \pm 0.03$ (en N)     | 0.89       | 0.45       | 0.33       | 0.25       | 0.20       |
| $  \vec{M}  $ (en mN.m) | $46 \pm 3$ | $45 \pm 4$ | $50 \pm 5$ | $50 \pm 7$ | $50 \pm 8$ |

TABLE 1 – Couple du ressort pour différents rayons  $r$

Nous pouvons conclure que à l'incertitude près, l'ensemble des couples obtenus se situent dans un même intervalle. Le couple  $M = rF(r)$  est donc constant selon  $r$  pour  $\theta$  fixe. Cependant, il est important de noter que les mesures présentent un manque de précision majeur, il faudrait que la barre présente des crans à des rayons  $r$  précis afin de maintenir la position du crochet du dynamomètre. Nous n'avons d'ailleurs aucun moyen d'assurer l'horizontalité et la perpendicularité avec la barre du dynamomètre à part le jugement de l'expérimentateur.

### 1.3 Mesure de $D$ par méthode statique

On souhaite mesurer la constante de torsion  $D$  en mesurant la norme de la force exercée sur le dynamomètre pour une plage de valeurs de  $\theta$  à une distance  $r = 5 \pm 0.2\text{cm}$  qu'on conservera constante entre différents angles  $\theta$  en marquant un repère avec un feutre sur la barre. Pour la mesure, un expérimentateur positionne un rapporteur au dessus de la barre à l'équilibre, et le second tire ensuite la barre avec le dynamomètre jusqu'à un angle  $\theta$ . Nous estimons l'incertitude sur  $\theta$  à environ  $\delta\theta = 3^\circ = 0.5 \cdot 10^{-2}\text{rad}$  de part la lecture approximative et la position du rapporteur qui peut légèrement varier.

$$D = \frac{rF}{\theta} \quad (5)$$

**Remarque :** Les calculs seront **toujours** effectués en radians, bien que le tableau (2) indique les angles en degrés pour faciliter la compréhension de notre démarche.

|                               |             |            |            |            |            |            |            |            |
|-------------------------------|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\theta \pm 3$ (en $^\circ$ ) | 10          | 30         | 60         | 90         | 120        | 150        | 180        | 210        |
| $F \pm 0.03$ (en N)           | 0.08        | 0.26       | 0.58       | 0.86       | 1.08       | 1.30       | 1.62       | 1.88       |
| $D$ (en mN.m)                 | $23 \pm 16$ | $27 \pm 7$ | $28 \pm 4$ | $27 \pm 3$ | $26 \pm 2$ | $25 \pm 2$ | $26 \pm 2$ | $26 \pm 2$ |

TABLE 2 – Constante de torsion  $D$  selon l'angle  $\theta$

Malgré le manque de précision dû au matériel présent, nous pouvons conclure que  $D$  est bien indépendant de  $\theta$  et du couple  $M$  avec  $D = 26 \pm 2 \text{ mN.m}$ . Les mêmes améliorations que pour l'expérience précédente permettrait d'obtenir une meilleure précision. On ajoute que la présence d'une platine indiquant les angles sous la barre permettrait une meilleure lecture de l'angle, et donc une valeur de  $D$  avec des incertitudes plus petites.

## 1.4 Mesure de $D$ par méthode dynamique

On propose ensuite de mesurer le moment d'inertie  $I_b$  de la barre ainsi que la constante de torsion  $D$  à l'aide de la période  $T$  de la barre avec deux masses  $m$  se situant symétriquement par rapport à l'axe de rotation sur la barre à une distance  $r_{masse}$  variable de l'axe au centre de masse de ces dernières, on prendra le centre géométrique des cylindres comme centre de masse. Il nous faut alors exprimer  $T$  comme une fonction de  $r_{masse}$  pour obtenir  $I_b$  et  $D$ . On commence par exprimer le moment d'inertie total  $I_{tot}$  du système :

$$I_{tot} = I_{masse} + I_b = 2mr_{masse}^2 + I_b \quad (6)$$

Avec la formule de la période (3), on en déduit :

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{I_{tot}}{D} = ar_{masse}^2 + b, \quad a = \frac{2m}{D}, b = \frac{I_b}{D}$$

Par régression linéaire, on obtient  $a$  et  $b$ , ce qui nous permet de remonter à  $D$  et  $I_b$  avec :

$$D = \frac{2m}{a} \quad I_b = \frac{2mb}{a} \quad (7)$$

On installe les deux masses de masse  $m = 212 \pm 0.1g$  (obtenue sur une balance) en  $r_{masse}$  avec une incertitude  $\delta r = 0.2cm$  donnée par la règle et sa légère instabilité. Pour mesurer la période, le même expérimentateur fait faire un demi-tour approximatif<sup>1</sup> à la barre, puis lâche cette dernière en démarrant le chronomètre pour limiter les temps de réaction. Enfin, il coupe le chronomètre lorsque la barre revient à un angle maximal du même côté que son point de départ<sup>2</sup>. On répète 10 fois la mesure de la période en relançant la barre et cela pour chaque distance  $r_{masse}$  afin d'obtenir une valeur moyenne et une incertitude statistique. On reporte les périodes moyennes pour chaque  $r_{masse}$  dans le graphique (2) et le tableau (4) ainsi que les détails de calcul en partie (4.1).

En conclusion, nous obtenons bien une droite comme prédit par la théorie, avec  $D = 24.7 \pm 0.2mN.m$ , qui conserve l'ordre de grandeur trouvé en partie (1.3), cependant, la méthode dynamique utilisant la période est bien plus précise car elle nous permet d'obtenir une valeur de  $D$  précise au dixième contre une précision à l'unité pour la méthode statique. De plus, elle nous permet de trouver le moment d'inertie de la barre de  $I_b = 3.93 \pm 0.09g.m^2$ . Notre mesure pourrait encore gagner en précision en utilisant une caméra.

## 2 Moment d'inertie de plusieurs solides

Dans cette dernière partie, on se propose de déterminer le moment d'inertie de différents solides via la période de rotation, puis de comparer les valeurs à la théorie. Pour cela, nous avons besoin des expressions des différents moments d'inerties que l'on peut trouver à la fin de l'énoncé du TP. Nous donnons un exemple de calcul pour une boule dans la partie (4.3)

On commence par lister la masse et les dimensions de chacun des solides à l'aide d'une balance imposant une incertitude  $\delta m = 0.1g$ . On mesure les différents rayons  $r$  des solides avec une règle, on impose alors une incertitude sur les rayons de  $\delta r = 0.2cm$ . Cependant, pour la boule nous conserverons la même incertitude mais nous utiliserons le rayon fourni car il aurait fallu un fil pour mesurer la circonférence de la boule.

Chaque solide présente un trait noir, que nous utiliserons comme repère pour mesurer plus facilement la période. Pour la mesurer, un même expérimentateur fait tourner le solide d'un demi-tour, puis libère le solide et démarre le chronomètre en simultané. Une fois que le repère effectue un aller-retour, l'expérimentateur arrête le chronomètre lorsque le repère atteint un angle maximal<sup>3</sup>. On répète la mesure de

1. L'angle de départ n'influence pas la période, voire partie (4.2)

2. La présence de frottements impose une diminution de l'amplitude, il est donc normal qu'on n'observe pas un retour au point de départ, cependant, la période ne varie pas comme on le montre dans la partie (4.2)

3. Même remarque concernant l'angle que dans la partie précédente, voir partie (4.2)

la période 10 fois par solide pour obtenir une valeur moyenne ainsi qu'une incertitude tenant compte du temps de réaction de l'expérimentateur. On obtient la valeur de  $I_{th}$  par la formule présente dans la table Méca 3.1 du poly et  $I_{exp}$  issu de la formule (3) avec :

$$I_{exp} = \frac{DT^2}{4\pi^2} \quad (8)$$

On synthétise l'ensemble des mesures et des valeurs déduites dans le tableau suivant<sup>4</sup> :

| Solide         | $m \pm 0.1$ (g) | $r \pm 0.2$ (cm)                  | Période (s)     | $I_{exp}$ ( $g.m^2$ ) | $I_{th}$ ( $g.m^2$ ) |
|----------------|-----------------|-----------------------------------|-----------------|-----------------------|----------------------|
| Sphère         | 644.9           | 7.0                               | $1.34 \pm 0.02$ | $1.12 \pm 0.03$       | $1.26 \pm 0.07$      |
| Cylindre creux | 347.3           | $\frac{r_e}{r_i} = \frac{5}{4.6}$ | $1.08 \pm 0.02$ | $0.72 \pm 0.03$       | $0.8 \pm 0.1$        |
| Cylindre plein | 386.1           | 4.9                               | $0.81 \pm 0.02$ | $0.41 \pm 0.02$       | $0.46 \pm 0.04$      |

TABLE 3 – Caractéristiques des solides et résultats expérimentaux

En conclusion, nous pouvons voir que pour les deux cylindres, les valeurs expérimentales et théoriques sont en accord, nous pouvons donc conclure qu'ici, la théorie prédit correctement les valeurs expérimentales. Cependant, pour la sphère, les deux valeurs ne se croisent pas donc on ne retrouve pas la valeur théorique par l'expérience.

Les légers écarts à la théorie pourraient être dû à la présence de frottements mécaniques (roulements) peuvent réduire la période. L'incertitude sur la période est cohérente car de l'ordre du temps de réaction humain, mais il reste l'incertitude sur le moment où l'expérimentateur estime que le solide atteint l'angle maximal. Pour résoudre ce dernier problème, l'usage d'une caméra pourrait résoudre ce problème en suivant un repère comme nous l'avons fait à l'oeil. On obtiendrait alors une incertitude plus petite, et une valeur de la période plus précise. Pour la valeur théorique, l'usage de balance plus précise ainsi que des rayons avec une incertitude plus faible serait intéressant.

### 3 Conclusion

Finalement, nous avons réussi à valider les hypothèses expérimentales à savoir que le couple ne dépendait pas de  $r$  pour un angle  $\theta$  constant. Nous avons ensuite réussi à déterminer la constante de torsion du ressort  $D$  avec une méthode dite statique impliquant la mesure de l'angle et du couple, mais aussi avec une méthode dite dynamique utilisant pour seule mesure la période de rotation, ce qui nous permet d'en déduire  $D$  et le moment d'inertie  $I_b$  de notre barre. Les deux méthodes confirment que  $D$  est constant, mais la méthode dynamique reste à privilégier de part la précision obtenue au dixième près (contre une précision à l'unité pour la méthode statique). Enfin, grâce à ces mesures préalables, nous avons pu déduire par cette même méthode dynamique le moment d'une sphère et de deux cylindres. Dans l'ensemble, la théorie prédit correctement qualitativement et quantitativement, cependant, l'ensemble des expériences gagneraient en précision en introduisant des appareils tel qu'une caméra et une platine de mesure d'angle juste sous la barre. Enfin, on pourrait envisager de mesurer de ne plus mesurer des groupes de 10 périodes, mais d'un plus grand nombre, et de répéter ce groupe de mesures quelque fois afin de vérifier la dispersion de la période entre des expériences équivalentes pour juger de la qualité de la mesure.

---

4. Précision sur les calculs d'incertitudes dans la partie (4.4)

## 4 Annexes

### 4.1 Mesure de $D$ par méthode dynamique, résultats et graphiques

| $r_{masse} \pm 0.2$ (en cm) | 7               | 12              | 17              | 22              | 27              |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $T_{moyenne}$ (en S)        | $3.09 \pm 0.02$ | $4.02 \pm 0.02$ | $5.07 \pm 0.02$ | $6.29 \pm 0.02$ | $7.42 \pm 0.02$ |

TABLE 4 – Période moyenne  $T_{moyenne}$  sur 10 mesures pour chaque distance  $r_{masse}$

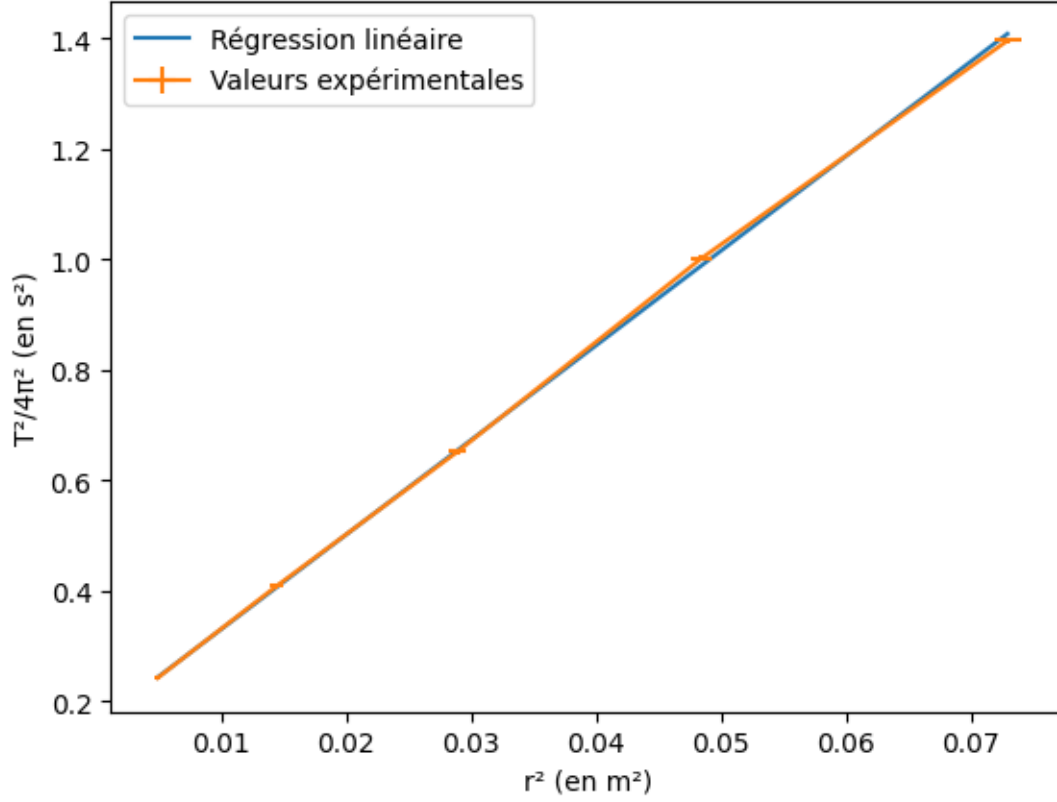


FIGURE 2 –  $\frac{T^2}{4\pi^2}$  en fonction de  $r^2$

**Remarque :** Les incertitudes sur  $T^2$  sont très faibles, et sont obtenues par la formule suivante :

$$\frac{\Delta T^2}{T^2} = 2 \frac{\delta T}{T} \quad (9)$$

Les incertitudes sur  $r^2$  et qui suivent sur  $D$  et  $I_b$  sont obtenues par cette même méthode.

La régression linéaire nous donne les coefficients  $a$  et  $b$  avec les incertitudes associées :

$$a = 17.1 \pm 0.2 s^2.m^{-2} \quad b = 0.159 \pm 0.004 s^2 \quad (10)$$

On en déduit alors les valeurs de  $D$  et  $I_b$  :

$$D = \frac{2m}{a} = 24.8 \pm 0.3 mN.m$$

$$I_b = \frac{2mb}{a} = 3.9 \pm 0.2 g.m^2$$

## 4.2 Période et frottements de l'air

Reprenons l'équation différentielle (2) :

$$\ddot{\theta} + \frac{D}{I}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{I} \quad (11)$$

En présence de frottements  $\vec{f} = -k\vec{v}$ , cette même équation prend la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{kr^2}{I}\dot{\theta} + \frac{D}{I}\theta = 0 \quad (12)$$

En effet, on a :

$$\vec{M}(\vec{f}) = O\vec{M} \wedge \vec{f} = r\vec{u}_r \wedge -kr\dot{\theta}\vec{u}_\theta = -kr^2\dot{\theta}\vec{u}_z \quad (13)$$

Pour simplifier, posons simplement que la force s'applique en bout de la barre, et on supposera donc un coefficient  $\alpha = kR^2$ , avec  $R$  la demi-longueur de la barre.

On se place dans le cas d'une oscillation pseudo-période, donc  $\lambda < \omega_0$ . Nous avons alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{I}\dot{\theta} + \frac{D}{I}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \quad 2\lambda = \frac{\alpha}{I}, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (14)$$

On notera la solution sans frottements  $\theta_{sf}(t)$  et celle avec frottements  $\theta_f(t)$ . On pose les conditions initiales pour les deux résolutions comme  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ . La résolution des équations différentielles donnent alors :

$$\theta_{sf}(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \quad (15)$$

$$\theta_f(t) = \theta_0 \exp(-\lambda t) \cos(\omega t) = A(t) \cos(\omega t) \quad (16)$$

On remarque qu'entre les deux expressions, seul un terme de décroissance exponentielle intervient pour rendre compte des frottements. Ainsi, seul l'amplitude se voit décroître, mais la période reste inchangée. On remarque également que l'angle de départ n'influence pas la période, mais uniquement l'amplitude de l'oscillation.

## 4.3 Moment d'inertie d'une boule

Soit une boule de rayon  $R$  et de masse volumique  $\rho$  uniforme. On a :

$$I_{boule} = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \rho(x^2 + y^2) dx dy \quad (17)$$

On passe en coordonnées sphériques :

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned}
 I_{boule} &= \iiint_V \rho(x^2 + y^2) dx dy \\
 &= \rho \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\phi \\
 &= \rho \int_{r=0}^R r^4 dr \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \\
 &= 2\pi\rho \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{4 \times 2\pi\rho R^5}{3 \times 5} \\
 &= \frac{2mR^3}{5}
 \end{aligned}$$

#### 4.4 Détails calculs d'incertitudes

Soit  $T_i$ , la i-ème mesure sur les 10 mesures effectuées par solide, on calcule la moyenne et l'incertitude sur  $T$  par :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_i \\
 \delta T &= \sqrt{\frac{1}{10 \times 9} \sum_{i=1}^{10} (T_i - T)^2}
 \end{aligned}$$

De part l'incertitude sur le temps de réaction de l'expérimentateur, on multipliera  $\delta T$  par un facteur  $t = 1.38$  selon la loi de Student pour monter l'incertitude de confiance de 68% à 80% pour être plus représentatif de la présence d'un temps de réaction de l'expérimentateur.