Teorema

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

A si può ridurre a gradini mediante un numero finito di operazioni elementari

Dim

Se $A = \underline{0}$, A è già ridotta a gradini.

Altrimenti, procedo per induzione sul numero di righe non nulle.

- $h = 0$, $A = \underline{0}$, - $h > 0$. Allora:

  - Individuiamo il minimo indice di una colonna non nulla $\to j_1$

  - Sulla colonna $\underline{a}_{j_1}$ individuo il minimo indice di un elemento non nullo $\to r_1$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} & & & j_1 & \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ r_1 \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \\
 & & & a^{r_1}_{j_1} & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & \vdots &
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Allora: $\underline{a}^1 \longleftrightarrow \underline{a}^{r_1}$

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a^{r_1}_{j_1} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \\
0 & \cdots & 0 & \vdots &
\end{pmatrix}$$

Rinomino gli elementi della matrice:

Devo "annullare" tutti gli ele stanno qui

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a^1_{j_1} & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots & a^2_{j_1} & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^m_{j_1} & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}$$

Quindi mi serve $a^2_{j_1} + \alpha a^1_{j_1} = 0$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-a^2_{j_1}}{a^1_{j_1}}$$

Posso allora fare

$$a^2 = a^2 + \left(\frac{-a^2_{j_1}}{a^1_{j_1}}\right) \cdot a^1$$

$$a^2 + \left(\frac{-a^2_{j_1}}{a^1_{j_1}}\right) \cdot a^1 = \left(0, \dots, 0, a^2_{j_1}, a^2_{j_1+1}, \dots, a^2_n\right) + \left(\frac{-a^2_{j_1}}{a^1_{j_1}}\right)\left(0, \dots \dots, 0, a^1_{j_1}, \dots, a^1_n\right) = \left(0, \dots, 0, 0, a^2_{j_1+1} - \frac{a^2_{j_1}}{a^1_{j_1}} a^1_{j_1+1}, \dots \dots, -\frac{a^2_{j_1}}{a^1_{j_1}} a^1_n\right)$$

$$\forall\, r \geq 2,\ a^r \longrightarrow a^r + \left(-\frac{a^r_{j_1}}{a^1_{j_1}}\right) a^1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{a^1_{j_1}} & \cdots \cdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \boxed{F} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

ha al più h-1 righe non nulle

Quindi per ipotesi di induzione posso supporre di poter ridurre F a gradini mediante un numero finito di operazioni elementari. $\square$