# Sistemi lineari omogenei

$\Sigma_0 : A x = 0$ in $n$ incognite

Abbiamo dimostrato che l'insieme $S_0$ delle soluzioni di $\Sigma_0$ è un sottospazio vettoriale numerico.

$$\dim S_0 = n - \operatorname{rango}(A) = \text{numero variabili libere.}$$

Esempio:

$$\Sigma_0 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \rho_2 = \rho_2 - 2\rho_1 \\ \rho_3 = \rho_3 - \rho_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{3} & \cancel{-3} & \cancel{-3} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_0' : \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2\overline{x_3} + \overline{x_4} + 2\overline{x_5} \\ -x_2 = -3\overline{x_3} + 3\overline{x_4} + 3\overline{x_5} \end{cases}$$

$x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$

$$S_0 = \{(-2x_3 + x_4 + 2x_5, 3x_3 - 3x_4 - 3x_5, x_3, x_4, x_5) \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

$$= (-2x_3, 3x_3, x_3, 0, 0) + (x_4, -3x_4, 0, x_4, 0) + (2x_5, -3x_5, 0, 0, x_5)$$

$$= x_3(-2, 3, 1, 0, 0) + x_4(1, -3, 0, 1, 0) + x_5(2, -3, 0, 0, 1)$$

$$S_0 = \mathcal{L}((-2, 3, 1, 0, 0), (1, -3, 0, 1, 0), (2, -3, 0, 0, 1))$$

$$(\ldots, x_3, x_4, x_5) \quad (\ldots 1, 0, 0) \quad (\ldots 0, 1, 0) \quad (\ldots 0, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim S_0 = 3 = \text{numero variabili indipendenti}$$

Quindi, sappiamo che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite su un campo K e' un sottospazio vettoriale di K^n.

Vale anche il viceversa.