Nelle ipotesi del lemma di Steinitz, $Y = \{w_1, \dots, w_n\} \subseteq W$ linearmente indipendente, allora $n \leq m$.

Vediamo alcune importanti conseguenze del lemma di Steinitz.

<u>Teorema di equipotenza delle basi</u>

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia B una sua base finita. Allora ogni altra base di V è equipotente a B, ossia:

$$\forall B' \subseteq V : B' \text{ è base di } V, \; m = |B| = |B'|$$

<u>Dim</u> B' base di V

Per assurdo $|B'| > |B|$, allora $\exists \{w_1, \dots, w_{m+1}\} \subseteq B'$

$$m+1 > m \Longrightarrow \{w_1, \dots, w_{m+1}\} \subseteq B' \text{ è lin. dip.}$$

(Per Steinitz)

$$\Downarrow$$

$$B' \text{ è lin. dip.}$$

$\longrightarrow$ assurdo

Quindi $|B'| \leq m = |B|$.

Scambiando il ruolo di B e B', otteniamo $|B| \leq |B'|$

e concludiamo: $|B| = |B'|$ $\boxed{E}$

<u>Definizione</u> Sia V finitamente generato su K.

La dimensione di V è la cardinalità di una sua qualsiasi base e si indica con:

$$\dim(V)$$

Esempio:

- $(K, +, \cdot)$ campo. $\forall n \in \mathbb{N}$, K^n spazio vettoriale numerico

$$B = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1)\}$$

base, canonica, di K, quindi $\dim(K^n) = n$