Teorema fondamentale delle applicazioni lineari:

V, W spazi vettoriali su K

Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V e sia

$f : \mathcal{B} \longrightarrow W$ un'applicazione di $\mathcal{B}$ in W.

Allora, esiste un' <u>unica</u> appl. lineare T di V in W tale che:

$$T_{|\mathcal{B}} = f$$

ossia: $T(e_1) = f(e_1), \ldots, T(e_n) = f(e_n)$

<u>Dim</u> ESISTENZA. Definisco T nel seguente modo:

$$u \in V, \quad u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$$

Allora:

$$T(u) \overset{def.}{=} \alpha_1 \underbrace{T(e_1)}_{f(e_1)} + \ldots + \alpha_n \underbrace{T(e_n)}_{f(e_n)} \longleftarrow$$

vettore delle compon. di u in $\mathcal{B}$

Dimostriamo che l'appl. così definita è lineare.

$$v \in V \Rightarrow \exists! (\beta_1, \ldots, \beta_n) \mid v = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$$

$$u + v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n =$$

$= (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + \dots\dots + (\alpha_n + \beta_n) e_n$

$(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ è il vettore delle componenti in $\mathcal{B}$ di $u+v$

$$T(u+v) \overset{\text{def.}}{=} (\alpha_1 + \beta_1) T(e_1) + \dots\dots + (\alpha_n + \beta_n) T(e_n)$$

$$T(u) \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 T(e_1) + \dots\dots + \alpha_n T(e_n)$$
$$T(v) \overset{\text{def}}{=} \beta_1 T(e_1) + \dots\dots + \beta_n T(e_n) \implies$$

$$\implies T(u) + T(v) = \alpha_1 T(e_1) + \dots\dots + \alpha_n T(e_n) + \beta_1 T(e_1) + \dots\dots + \beta_n T(e_n) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) T(e_1) + \dots\dots + (\alpha_n + \beta_n) T(e_n) = T(u+v)$$

$\gamma \in K$, $\gamma u = \gamma(\alpha_1 e_1 + \dots\dots + \alpha_n e_n) = (\gamma \alpha_1) e_1 + \dots\dots + (\gamma \alpha_n) e_n$

$(\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n)$ vettore delle componenti di γu in $\mathcal{B}$

$$T(\gamma u) \overset{\text{def}}{=} \gamma\alpha_1 T(e_1) + \dots\dots + \gamma\alpha_n T(e_n)$$

$$\gamma T(u) = \gamma(\alpha_1 T(e_1) + \dots\dots + \alpha_n T(e_n)) = \gamma\alpha_1 T(e_1) + \dots\dots + \gamma\alpha_n T(e_n)$$

Quindi T è lineare

$$T(e_1) \overset{\text{def.}}{=} 1 \cdot T(e_1) + \dots\dots + 0 \cdot T(e_n) = f(e_1)$$

$e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots\dots + 0 \cdot e_n$ $\qquad$ $(1, 0, \dots\dots, 0)$ componenti di e_1 in B

$$T(e_2) \overset{\text{def.}}{=} 0 \cdot T(e_1) + 1 \cdot T(e_2) + \dots\dots + 0 \cdot T(e_n) = T(e_2) \overset{\text{def}}{=} f(e_2)$$

$e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \dots\dots + 0 \cdot e_n$

$(0, 1, 0, 0 \dots, 0)$ componenti di e_2 in B

$\vdots$

$$T(e_n) = f(e_n)$$

Unicità: Sia $T' : V \longrightarrow W$ appl. lineare tale che

$$T'_{|B} = f$$

$$\text{Th: } T'(u) = T(u), \quad \forall u \in V$$

$u = \alpha_1 e_1 + \dots\dots + \alpha_n e_n$, $\quad (\alpha_1, \dots\dots, \alpha_n)$ vett. delle componenti di u in B

$$T'(u) = T'(\alpha_1 e_1 + \dots\dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 T'(e_1) + \dots\dots + \alpha_n T'(e_n)$$

↑ T è lineare

$$= \alpha_1 f(e_1) + \dots\dots\dots + \alpha_n f(e_n) = T(u) \qquad \blacksquare$$