

Sia V finitamente generato su K , $\dim(V) = n$

Sia W sottospazio di V . Allora:

1) W è finitamente generato (ovvio)

2) $\dim W \leq \dim V$ e $\dim W = \dim V \iff W = V$

3) $\dim W = 0 \iff W = \{0\} = \mathcal{L}(\emptyset)$

Dim

② \Leftarrow ovvio

\Rightarrow

$\exists B_W$ base di W , di dimensione $\leq n$ per Steinitz

Siccome $\underbrace{W \text{ è finitamente generato}}_{(1)}$ e $\underbrace{\dim W \leq \dim V}_{(2)}$

Sappiamo già che B_W è lin. indep. in V in quanto base di W . Inoltre

$$|B_W| = \dim W = \dim V = |B_V| \text{ e } B_W \text{ è base di } V$$

È allora ovvio che $W = V \iff$ Conseguenza \nearrow Steinitz

$$\textcircled{3} \quad \lim W = 0 \Rightarrow B_W = \emptyset. \quad \square$$