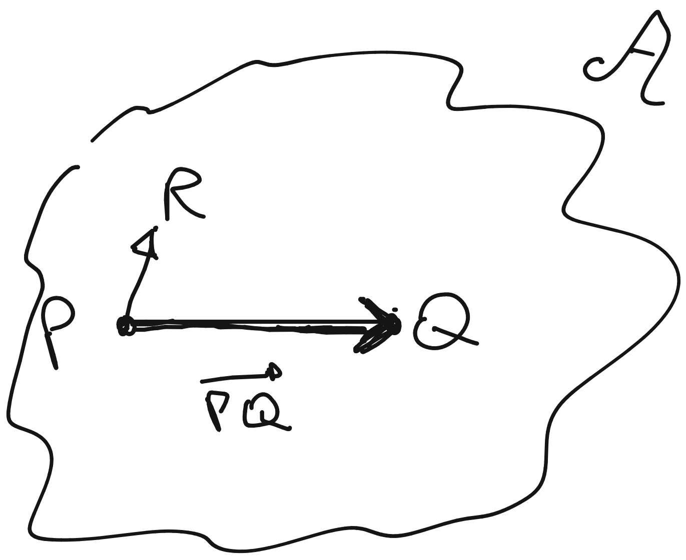
LEZIONE SEDICI: 15 maggio 2020 ore 14,00-16,00

Spazi affini: V spazio vett. su un campo K



$\mathcal{A}$ insieme

$\pi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V$

$(P, Q) \longmapsto \pi((P,Q)) =: \overrightarrow{PQ} = a$

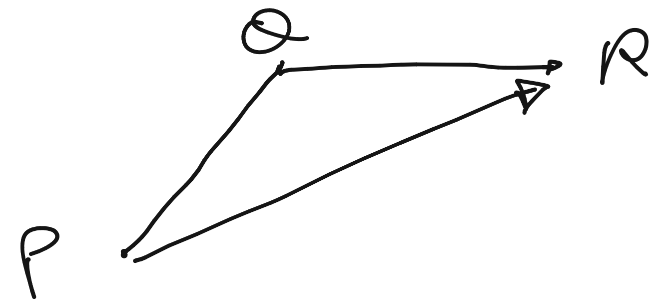
vettore applicato — vettore libero

$P + \overrightarrow{PQ} = Q$ $\qquad Q = P + a$

La terna $(V, \mathcal{A}, \pi)$ si dice spazio affine su K se:

(1) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall a \in V, \exists! X \in \mathcal{A} : \overrightarrow{AX} = a \quad (X = A + a)$

(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{A}, \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$



V si dice giacitura di $\mathcal{A}$

PROPRIETÀ:

(a) $Q, R \in \mathcal{A}, \quad \overrightarrow{QR} = \underline{0} \iff Q = R$

(b) $Q R \in \mathcal{A}, \quad -\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ}$

DIM: (a) "$\Longleftarrow$" per la (2) $\overrightarrow{RR} + \overrightarrow{RR} = \overrightarrow{RR}$

$$\left(\overrightarrow{RR} + \overrightarrow{RR}\right) + \left(-\overrightarrow{RR}\right) = \overrightarrow{RR} + \left(-\overrightarrow{RR}\right) = \underline{0}$$

$$\overrightarrow{RR} + \left(\overrightarrow{RR} + \left(-\overrightarrow{RR}\right)\right) = \overrightarrow{RR} + \underline{0} = \overrightarrow{RR}$$

"$\Longrightarrow$" $Q + \underline{0} = R$ per ipotesi. So anche che $\overrightarrow{QQ} = \underline{0}$, ossia che $Q + \underline{0} = Q$

Per la (1) $R = Q$

(b) Th: $-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ}$

$$\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RQ} \underset{\text{per la (2)}}{=} \overrightarrow{QQ} = \underline{0} \Rightarrow \overrightarrow{RQ} = -\overrightarrow{QR}$$

<u>Esempio</u>. V sp. vett su K, $\mathcal{A} = V$

$$\pi : V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, w) \longmapsto w - u$$

(V, V, π) è uno spazio affine.

(1) $\forall A \in \mathcal{A}, \forall a \in V, \exists! X \in \mathcal{A} : \overrightarrow{AX} = a$

$\forall \underset{\text{punto}}{\overset{A}{u}} \in V, \forall \underset{\text{vettore}}{v} \in V,$? $\exists! \underset{\text{punto}}{\overset{X}{w}} \in V : \pi(u, w) = v$? SI:

Se w esiste, allora $\pi(u, w) = w - u$ e $w - u = v$

Allora: $w = u + v$
$(X = A + v)$

(2) $\forall \underset{u, w, z}{P, Q, R} \in \mathcal{A}$, $\pi((P,Q)) + \pi((Q,R)) = \pi((P,R))$

$$\pi((u,w)) + \pi((w,z)) = \cancel{w} - u + z - \cancel{w} = z - u \overset{\shortparallel}{} \pi((u,z))$$

$V = \mathbb{R}^2$ $\quad \overset{\mathcal{A} \times \mathcal{A}}{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = V$ (spazio affine standard di dim 2 su $\mathbb{R}$)

$$((a,b),(c,d)) \longmapsto (c,d) - (a,b)$$

$V = \mathbb{R}^3$ ... (spazio affine standard di dim 3 su $\mathbb{R}$)

$V = \overrightarrow{\mathbb{V}}$ vettori liberi, $\mathcal{A}$ = spazio della geometria elementare

Sistemi di riferimento:

Sia $(V, \mathcal{A}, \pi)$ uno spazio affine, con V sp. vett. f.g.

$\dim V = n$. In questo caso diciamo $\dim \mathcal{A} = n$.

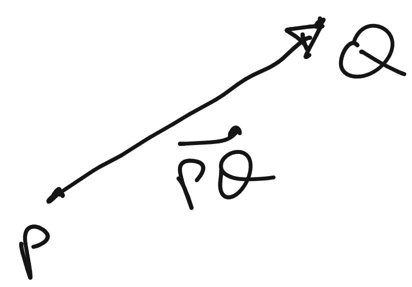
<u>Def.</u> Una coppia $(O, \mathcal{B})$ costituita da un punto O di $\mathcal{A}$ e da una base ordinata di V si dice riferimento cartesiano di $\mathcal{A}$. O si dice ORIGINE del riferimento

Dato un riferimento cartesiano $R = (O, \mathcal{B})$ di $\mathcal{A}$, le <u>coordinate</u> di un punto $P \in \mathcal{A}$ in R sono le componenti in $\mathcal{B}$ del vettore $\overrightarrow{OP}$:

$$P \equiv_R \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP}) \in K^n$$

<u>Proposizione</u>: $(V, \mathcal{A}, \pi)$ $\quad P, Q \in \mathcal{A}$ $\quad \overrightarrow{PQ}$

$$\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = (y_1, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_n)$$



dove $\quad P \equiv_R (x_1, \dots, x_n) \quad$ e $\quad Q \equiv_R (y_1, \dots, y_n)$

<u>DIM</u>: $\quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + (-\overrightarrow{OP})$

per la (2)

$$\phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OQ} + (-\overrightarrow{OP})) = \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OQ}) - \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{OP})$$

Esempio: $\dim V = 2$, $R = (O, \mathcal{B})$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, $O \in \mathcal{A}$

$P \equiv_R (2, 1)$, $\quad Q \equiv_R (3, -2)$ $\quad \phi_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{PQ}) = (1, -3)$

ossia $\quad \overrightarrow{PQ} = 1 \cdot e_1 + (-3)\, e_2$

$a \equiv_{\mathcal{B}} (-3, 5)$

$P + a = Q$: $\quad a = \overrightarrow{PQ} \qquad Q \equiv_R (2,1) + (-3,5) = (-1,6)$

Esempio: $\dim V = 3$, $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3))$ $O \in \mathcal{A}$

$R \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0, 3)$ $T \equiv_{\mathcal{R}} (2, 1, -1)$

$R \xrightarrow{a} ?$

$\overrightarrow{RT} \equiv_{\mathcal{B}} (1, 1, -4)$

$V \ni a \equiv_{\mathcal{B}} (2, 1, -2)$ $R + a = Q \equiv_{\mathcal{R}} (1, 0, 3) + (2, 1, -2) =$

$= (3, 1, 1)$

$(V, \mathcal{A}, \pi)$ $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$

$\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}')$

$P \in \mathcal{A}$ $P \equiv_{\mathcal{R}} (x_1, \dots, x_n)$

$P \equiv_{\mathcal{R}'} (x'_1, \dots, x'_n)$