Sia $T: V \longrightarrow W$ appl. lineare

- $\operatorname{Ker} T = \{ u \in V \mid T(u) = \underline{0}_W \} \ni \underline{0}_V$

  ↓ oppure nucleo di T

- $\operatorname{Im} T = T(V) \subseteq W$

Proposizione $T: V \longrightarrow W$ appl. lin

i) T è suriettivo $\iff \operatorname{Im} T = W$

ii) T è iniettivo $\iff \operatorname{Ker} = \{\underline{0}_V\}$

Dim ii)

"$\Rightarrow$" per ipotesi $\forall u, v \in V$, $T(u) \neq T(v) \Rightarrow u \neq v$

Allora, $u \neq 0_V \Rightarrow T(u) \neq T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W \Rightarrow u \notin \operatorname{Ker} T$

Ma $0_V \in \operatorname{Ker} T$, quindi $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$

"$\Leftarrow$" Th: $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$ $\quad u, v \in V$

$T(u) = T(v) \Rightarrow T(u) - T(v) = \underline{0}_W$

$\Vert \leftarrow$ perché T è lineare

$T(u + (-v)) \Rightarrow u - v \in \operatorname{Ker} T = \{\underline{0}_V\}$ (per ipotesi)

$\Downarrow$

$u - v = \underline{0}_V \Rightarrow u = v$ ∎

Esempio

$$T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \rightsquigarrow (a_0 + 2a_1, a_1 - a_2, a_0 + 2a_2)$$

$$\ker T = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3} \right\} =$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid (a_0 + 2a_1, a_1 - a_2, a_0 + 2a_2) = (0,0,0) \right\}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \ker T \iff \begin{cases} a_0 + 2a_1 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ a_0 + 2a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2a_2 + 2a_2 = 0} \quad (3) \\ a_1 = a_2 \quad (1) \\ a_0 = -2a_2 \quad (2) \end{cases}$$

$$\iff a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = -2a_2 + a_2 x + a_2 x^2$$

Quindi

$$\ker T = \left\{ -2a_2 + a_2 x + a_2 x^2 \mid a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a_2 (-2 + x + x^2) \mid a_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}(-2 + x + x^2)$$

$\dim \ker T = 1$ $\qquad \ker T \neq \{ \underline{0}_{\mathbb{R}_{2}[x]} \}$

T non è iniettivo