V spazio vettoriale finitamente generato su campo K, $\dim(V) = n \neq 0$.

Sia $X = \{w_1, \dots, w_t\} \subseteq V$ lin. indip.

Se $t < n$, allora $\exists \{w_{t+1}, \dots, w_n\} \subseteq V$ tale che

$$X \cup \{w_{t+1}, \dots, w_n\} \text{ è una base di } V$$

<u>Dim</u> $t < n$, X non è una base. Siccome X è lin. indip, allora X <u>non</u> è un sistema di generatori di V.

Quindi:

$$\mathcal{L}(X) \subsetneq V \Rightarrow \exists\, w_{t+1} \in V \setminus \mathcal{L}(X)$$

Allora per la proposizione precedente:

$$X_1 = X \cup \{w_{t+1}\} \text{ è lin. indip.}$$

$$|X_1| = t+1$$

Se $t+1 = n$, per l'osservazione X_1 è base.

Altrimenti, ossia se $t+1 < n$, allora X_1 <u>non</u> è base di V.

Per cui:

$$\mathcal{L}(X_1) \subsetneq V \Rightarrow \exists\, w_{t+2} \in V \setminus \mathcal{L}(X_1)$$

Allora, per la proposizione precedente:

$$X_2 = X_1 \cup \{w_{t+2}\} = \{w_1, \dots, w_t, w_{t+1}, w_{t+2}\} \text{ è lin. indip.}$$

E procedo in questo modo fino a quando ho aggiunto $n-t$ vettori a X e trovo:

$$X_{n-t} = \{w_1, \dots, w_t, w_{t+1}, \dots, w_n\} \text{ lin. indip.}$$

$$|X_{n-t}| = n = \dim V.$$