LEZIONE QUINDICI: 14 maggio 2020, 9,00 - 11,00

ESERCITAZIONE sugli argomenti trattati nelle precedenti lezioni

(1) Dal foglio 2, esercizio 3.

Quale dei seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$\underline{0} \in$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\underline{0} \in$

$$u, v \in H \iff \exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R} : u = \begin{pmatrix} ab & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} cd & d \\ c-d & 0 \end{pmatrix}$$

$$u + v = \begin{pmatrix} ab & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cd & d \\ c-d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab+cd & b+d \\ a-b+c-d & 0 \end{pmatrix} \in H \iff$$

$$\iff (a+c-\cancel{(b+d)}+\cancel{b+d})(b+d) = ab+cd \iff$$

$$\iff (a+c)(b+d) = ab+cd \iff \cancel{ab}+ad+cb+\cancel{cd} = \cancel{ab}+\cancel{cd}$$

$$\boxed{ab = (a-b+b)b} \qquad \iff \quad ad + cb = 0$$

questa condizione non si verifica per ogni scelta dei valori assunti da a, b, c, d, quindi non si verifica per ogni scelta di vettori $u, v \in H$.

Per esempio: $\quad a = 1 = d \quad c = 1, b = 0$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in H, \quad v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in H \quad u+v = \begin{pmatrix} \overset{2}{\cancel{1}} & 1 \\ \underset{2-1}{\underset{\shortparallel}{1}} & 0 \end{pmatrix} \notin H$$

H non è linearmente chiuso, per cui non è sottosp. vett.

Vediamo cosa possiamo ricavare da K:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \neq \emptyset \quad \text{perché } \underline{0} \in K$$

$$u, v \in K \iff \exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R} : u = \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} c+d & d \\ c-d & c \end{pmatrix}$$

$$u + v = \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & d \\ c-d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d & b+d \\ a-b+c-d & a+c \end{pmatrix} \in K \iff$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c+d = a+c+b+d \; \checkmark \\ a-b+c-d = a+c-(b+d) \; \checkmark \end{cases} \quad \text{è vero, } \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall u \in K$

$$\lambda u = \lambda \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a+b) & \lambda b \\ \lambda(a-b) & \lambda a \end{pmatrix} \in K \iff$$

$$\iff \begin{cases} \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b \; \checkmark \\ \lambda(a-b) = \lambda a - \lambda b \; \checkmark \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ ossia } \forall u \in K$$

Quindi, K è linearmente chiuso, per cui è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

(2) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con base ordinata $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Quindi, $\dim(V) = 4$.

(1) Determinare un sottosp. vett. di V con dimensione 3 e uno con dimensione 2, che contengano il vettore $u = 2e_1 - e_2 + e_4$ e rappresentarli rispetto a $\mathcal{B}$.

Osserviamo che $u \neq \underline{0}$ perché $\{e_1, e_2, e_4\}$ è lin. indip.

$\{u\}$ è lin. indip. e possiamo "completarlo" in un insieme lin. indip. di cardinalità 3.

$$\phi_{\mathcal{B}}(u) = (2, -1, 0, 1) \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 $\Downarrow$ $\{u, v, w\}$ lin. indip.

$$v = \phi_{\mathcal{B}}^{-1}((0,1,1,0)) = e_2 + e_3$$

$$w = \phi_{\mathcal{B}}^{-1}((0,0,1,1)) = e_3 + e_4$$

$U = \mathcal{L}(u, v, w)$ è un sottosp. di V con $\dim U = 3$ e $u \in U$

Una studentessa suggerisce di considerare:

$U' = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_4)$ e questo è un ottimo suggerimento.

Con la stessa idea, possiamo prendere:

$W = \mathcal{L}(2e_1 - e_2, e_4)$ con $\dim W = 2$ e $u \in W$.

Adesso rappresentiamo U, U' e W. In realtà, rappresentiamo

$$\phi_{\mathcal{B}}(U) = \mathcal{L}((2,-1,0,1), (0,1,1,0), (0,0,1,1)), \quad \phi_{\mathcal{B}}(U') = \mathcal{L}((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1))$$

$$\phi_{\mathcal{B}}(W) = \mathcal{L}((2,-1,0,0), (0,0,0,1)).$$

CONTINUA...