Teorema

Un sottoinsieme X di V è linearmente dipendente se e solo se $\exists x \in X : x \in \mathcal{L}(X \setminus \{x\})$. Inoltre, in tal caso, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{x\})$.

Dim

$X = \{\underline{0}\} \Rightarrow \underline{0} \in \mathcal{L}(\emptyset) = \mathcal{L}(\{\underline{0}\} \setminus \{\underline{0}\})$.

Assumiamo allora $X \neq \underline{0}$. Supponiamo esista $x \in X$ tale che:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda^i x_i$$

essendo $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ una m-pla di scalari e $(x_1, \dots, x_m)$ una m-pla di vettori di $X \setminus \{x\}$ distinti a due a due.

Ne consegue che

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^m x_m - x = x - x = 0$$

cioé che la $(m+1)$-pla $(x_1, \dots, x_m, x)$ di vettori distinti di x è linearmente indipendente.

Viceversa, sia X linearmente dipendente. Ció equivale ad affermare l'esistenza di una m-pla $(x_1, \dots, x_m)$

di vettori distinti di X, e di una n-pla $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ di scalari non tutti nulli, tali che:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i x_i = 0$$

Inoltre, dal momento che $X \neq \{0\}$, possiamo supporre $n \geq 2$. Fissiamo ora un indice $J \in \mathbb{N}_n$ tale che $\lambda^J \neq 0$. Si ottiene

↳ n della n-upla

allora:

$$(\lambda^J)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda^J)^{-1} \lambda^i x_i = 0$$

posto $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $\alpha^i = (\lambda^J)^{-1} \cdot \lambda^i$, dal momento che $\alpha^J = (\lambda^J)^{-1} \cdot \lambda^J = 1$ si ha:

$$x_J = \sum_{i \in \mathbb{N}_n \setminus \{J\}} (-\alpha^i) x_i$$

essendo evidentemente $(x_1, \dots, x_{J-1}, x_{J+1}, \dots, x_n)$ una $(n-1)$-pla di vettori di $X \setminus \{x_J\}$. Ciò prova che

$$x_J \in \mathcal{L}(X \setminus \{x_J\}) \qquad \blacksquare$$