Sia V finitamente generato. $V \neq \{\underline{0}\}$

Dimostriamo che V ha una base finita mediante il metodo di <u>ESTRAZIONE</u> di una base da un sistema di generatori.

$$S = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V, \quad \mathcal{L}(S) = V$$

- Se S è linearmente indipendente, allora essendo per ipotesi sistema di generatori, è anche una base di V.

- Se S è linearmente dipendente, per il teorema precedente esiste $u_n \in S$ tale che

$$\mathcal{L}(S \setminus \{u_n\}) = \mathcal{L}(S) = V$$

Quindi $\underbrace{S \setminus \{u_n\}}_{S'} = \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ è un sistema di generatori di V.

- Se S' è lin. indip., allora essendo per <u>costruzione</u> un sistema di generatori di V, è anche una <u>BASE</u> di V

- Altrimenti, S' è lin. dip. e per il teorema precedente esiste u_{n-1} tale che

$$S'' = S' \setminus \{u_{n-1}\} = \{u_1, \dots, u_{n-2}\}, \quad \mathcal{L}(S' \setminus \{u_{n-1}\}) = \mathcal{L}(S')$$

e si reitera il procedimento togliendo sempre altri vettori finché non si ottiene una base

<u>Esempio:</u> $\mathbb{R}^3$ $S=\{(1,0,1),(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$

Si può dimostrare che $\mathcal{L}(S)=\mathbb{R}^3$.

- Vediamo se è lin. dip. o indip.

$$\overset{(-2)}{\alpha_1}(1,0,1)+\overset{(2)}{\alpha_2}(1,1,1)+\overset{(-2)}{\alpha_3}(0,1,0)+\overset{(0)}{\alpha_4}(0,0,1)=(0,0,0)$$

$$(\alpha_1,0,\alpha_1)+(\alpha_2,\alpha_2,\alpha_2)+(0,\alpha_3,0)+(0,0,\alpha_4)$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0 \to \alpha_1=-\alpha_2\\ \alpha_2+\alpha_3=0 \to \alpha_3=-\alpha_2\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0 \to \alpha_4=0\end{cases}$$

Per esempio poniamo $\alpha_2=2\neq 0$

Quindi, S è lin dip.

Se invece poniamo $\alpha_2=1$

$$(1,1,1)=(1,0,1)+(0,1,0)+(0,0,1)\in\mathcal{L}(S\setminus\{(1,1,1)\})$$

Quindi possiamo definire S' senza $(1,1,1)$:

$$S' = S \setminus \{(1,1,1)\} = \{(1,0,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

- Vediamo se S' é lin. indip.

$$\begin{cases} \alpha + \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha = -\alpha_2 \rightarrow \alpha = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = -\alpha_1 \rightarrow \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi é lin. indip. e scopriamo che S' é una base