ESERCIZI 11

1. Cosa è uno spazio vettoriale euclideo?

2. Spiegare quali delle seguenti applicazioni da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$:

(i) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

(ii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$

(iii) $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = -2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$

3. Dato il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da

$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, $\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

(i) determinare una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare dato;

(ii) determinare almeno due vettori che siano ortogonali al vettore $(1, -1, 2)$.

4. Dire cosa è uno spazio euclideo e cosa è un suo riferimento cartesiano.

5. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1, 1, 3)$ e $B(1, 1, 2)$. Determinare un punto C tale che il triangolo di vertici A, B e C sia rettangolo in B.

6. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, le rette $r : 3x - y + 2 = 0$, $r' : x + 2y - 1 = 0$ e $s : x - 5y + 4 = 0$ hanno un punto in comune? Determinare la retta ortogonale a s passante per il punto $A(1, 2)$ e la retta parallela a s passante per $A(1, 2)$. Le due rette determinate sono ortogonali?

7. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino le rette

$$s : \begin{cases} x + z + 2 & = & 0 \\ -x + 2y + 1 & = & 0 \end{cases} \quad \text{e } s' : \begin{cases} x & = & 1 + t \\ y & = & 2t \\ z & = & 1 + 2t \end{cases} \quad \text{e il punto } B(1, 0, 1).$$

(a) Calcolare un vettore direzionale di s.

(b) Dire se s e s' sono incidenti, parallele o sghembe e determinare la distanza tra s e s'

(c) Determinare il piano per B contenente s. Questo piano è parallelo a s'?

(d) Determinare una retta r passante per B e incidente s. Rappresentare il piano che contiene r ed s.

8. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $A(1, 0, 1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, 1, -1)$. Dire se i vettori AB e AC sono ortogonali. In caso di risposta negativa, determinare le coordinate di un punto D tale che AD sia ortogonale a AB.

9. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si consideri il piano $\pi : -x + y + 2z - 1 = 0$ e il punto $A(1, -1, 0)$.

(1) Determinare il piano per A parallelo a π.

(2) Determinare la retta ortogonale a π e passante per $P(-1, 0, 0)$.

(3) Determinare un qualsiasi piano ortogonale a π.

(4) Determinare un piano ortogonale a π e passante per A.

10. Fissato un riferimento cartesiano di un piano euclideo, si considerino la retta $r : x - y + 4 = 0$ e il punto $A(0, 2)$.

(i) Determinare la retta ortogonale a r e passante per A.

(ii) Determinare una retta che abbia distanza 2 da r.

11. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino la retta

$$s : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$ e il punto $P(1, -1, 0)$.

(a) Determinare il piano α ortogonale a s e passante per P.
(b) Determinare la distanza tra s e P.
(c) Determinare una retta r incidente s e una retta ortogonale sia a r sia a s.
(d) La retta $r' : (x, y, z) = (1, 0, 1) + (1, 2, 2)t$ è sghemba con s? Determinare la distanza tra r' e s. Determinare un piano parallelo sia a r' sia a s.

12. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, determinare due rette sghembe e calcolarne la distanza.

13. Fissato un riferimento cartesiano di uno spazio euclideo di dimensione 3, si considerino i punti $P(2, -3, 2)$ e $Q(0, 1, 1)$ e sia r la retta passante per P e Q.

(i) Rappresentare la retta r.
(ii) Rappresentare l'asse del segmento di estremi P e Q.
(iii) Rappresentare un piano parallelo alla retta r.
(iv) Rappresentare una retta ortogonale a r e passante per Q.
(v) Rappresentare il piano passante per P, Q e l'origine del riferimento.