Teorema Sia $A \in M_{m\times n}(K)$ ridotta a gradini:

Allora rango(A) = numero di pivot di A = numero di righe non nulle di A

Dim Per induzione sulle h righe non nulle di A.

$h=0 \Rightarrow A = \underline{0}$ e rango$(A) = 0 = h$

$h-1 \Rightarrow h$

non nullo

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & a^1_{j_1} & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a^2_{j_2} & \cdots & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & a^h_{j_h} & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 & \cdots & 0 & \cdots\ 0 \end{array}\right)$$

$\leftarrow$ è ridotta a gradini ed ha $h-1$ righe non nulle

Allora, per ipotesi di induzione, rango$(F) = h-1$ e questo vuol dire che le sue righe non nulle sono lin. indip.:

$S = \{a^2, \ldots\ldots, a^h\}$ è lin indip

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ lin. indip} \\ a^1 \notin \mathcal{L}(S) \end{array}\right) \Longrightarrow \underline{\{a^1\} \cup S} \text{ e lin. indip.}$$

$\uparrow$ insieme righe non nulle di A

$\Downarrow$

$$\Downarrow$$

$$\dim\left(\mathcal{L}\left(\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots \ldots, \underline{v}^h\right)\right) = h \qquad \Longrightarrow \quad h = \text{rango}\,(A)$$

$$\parallel$$

$$\mathcal{L}\left(\underline{v}^1, \underline{v}^2, \ldots\ldots, \underline{v}^h, \underline{0}, \ldots\ldots, \underline{0}\right)$$

$$\square$$