(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_3 = r_3 - 2r_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \rightarrow x - y = \frac{8}{2} \rightarrow x = \frac{8}{2} + y \\ 3z - t = 1 \rightarrow \cancel{-2} z = -\frac{1}{2} \\ -5z + t = 0 \rightarrow t = 5z \rightarrow t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{2} + y - y + 2z + t = 1 \rightarrow 0 = \frac{8}{2} - \frac{8}{2} \rightarrow 0 = 0 \\ z = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ in quanto l'insieme di soluzioni non è una quadrupla.

(2) S è un sistema di generatori $\iff \forall v \in V$ $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in K$ t.c. $v = \lambda v + \ldots\ldots + \lambda v_t$

③

$$T(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \longrightarrow (x+y-z,\ 2x-y+t,\ x-2y+z+t) \in \mathbb{R}^3$$

Base Ker

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_3 = r_3 - r_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x + y \\ -3y + 2x + 2y + t \to t = y - 2x \end{cases}$$

$$\text{Base } (x, y, x+y, y-2x)$$

$((0,1,1,1), (2,3,5,-1))$

$\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}^4 = ((0,1,1,1), (2,3,5,-1), (0,0,1,0),$
$(0,0,0,1))$

Base Im

$(1,0,0,0) = (1,2,1)$

$(0,1,0,0) = (1,-1,-2)$

$(0,0,1,0) = (-1,0,1)$

$(0,0,0,1) = (0,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 = r_3 + r_1]{r_2 = r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$r_4 = 2r_4 - r_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$ $r_3 = r_3 + \frac{2}{3} r_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$

Base Im $\left((1,2,1), (0,-3,-3) \right)$

ii) Dire se T è iniettivo o suriettivo

$T: (x,y,z,t) \longrightarrow (x+y-z, 2x-y+t, x-2y+z+t)$

Iniettiva $\iff \forall\, x, y \quad x = y \Rightarrow T(x) = T(y)$

Non iniettivo perché il nucleo è composto da due elementi. (non banale)

Suriettivo $\iff \operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^3$

Bho, secondo me sì ma a caso.

iii) $(1,2,1) \in \operatorname{Im}(T) \iff \alpha(1,2,1) + \beta(0,-3,-3)$

Ovviamente appartiene in quanto $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ verificano la condizione

(4) $\mathcal{B}' = ((1,1),(1,0))$

$\mathcal{B} = ((1,-2),(2,1))$

$(1,-2) = (\alpha+\beta, \alpha) \longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 1 \rightarrow \beta = 3 \\ \alpha = -2 \end{cases}$

$(2,1) = (\alpha+\beta, \alpha) \longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 2 \rightarrow \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow$ Found it

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$(1-\lambda \cdot -1-\lambda \cdot 1-\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot (-1-\lambda)$

Questo esercizio lo odio, non credo lo farò.

(6)

$A = (2, -1) \quad B = (2, 2)$

$(2-2, 2-(-1)) = (0, 3)$

$$\begin{cases} x = 2 + 0t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$$

$A + t(B - A) \to$ parametrica

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \to \text{equazione cartesiana}$$

$x = x_1$ siccome $x_1 = x_2$

$x = 2$

ii) due rette si dicono ortogonali $\iff$ il prodotto scalare tra i loro vettori è uguale a 0

$$y = 1$$

7

$$s: (x, y, z) = (1, 2, -4) + (2, 1, 1)t$$

$$r: \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

i) Due rette sono sghembe quando non sono parallele e non sono incidenti, ovvero quando non sono complanari.

ii)
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -4 + t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2z + 9 \\ y = 6 + z \\ t = z + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2z = 9 \\ y - z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 = 3r_3 + r_2]{r_2 = r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ 1 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$r_4 = r_4 + r_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 = r_4 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Il rango è massimo, quindi le rette sono sghembe.

(8) $P(1, -1, 2)$ $\quad H: 2x - y + z - 3 = 0$

i) Scrivo l'equazione del piano in forma generica:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Dovendo essere parallelo a

$$2x - y + z - 3 = 0$$

Per essere paralleli devono avere coefficienti proporzionali, scriviamo:

$$2\,cost\,\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{x} - cost\,\underset{\substack{\downarrow \\ -1}}{y} + cost\,\underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{z} - d = 0$$

$$2\,cost + cost + 2\,cost - d = 0$$

Trovo la d

$$+d = +2cost + cost + 2cost \to d = 5cost$$

Otteniamo, ponendo $cost = 1$

$$2x - y + z - 5 = 0$$