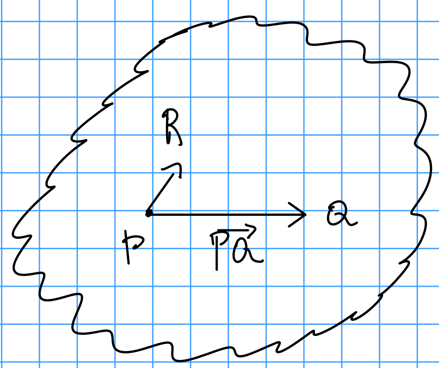
Spazi affini

V spazio vett su un campo K

A insieme



$\pi : A \times A \longrightarrow V$

$(P, Q) \longrightarrow \pi((P, Q)) =: \overrightarrow{PQ} = a$

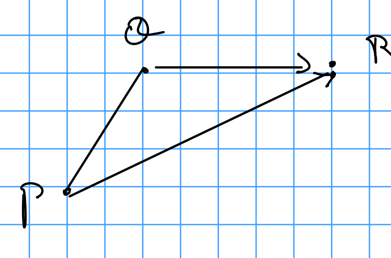
vettore applicato — vettore libero

$P + \overrightarrow{PQ} = Q$ $\qquad$ $Q = P + a$

Lo terno (V, A, π) si dice spazio affine su K se:

1) $\forall \bar{A} \in A, \forall a \in V, \exists!\, X \in A : \overrightarrow{AX} = a \quad (X = A + a)$

2) $\forall P, Q, R \in A, \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$



V si dice giacitura di A

Proprietà:

1) $Q, R \in A, \quad \overrightarrow{QR} = \underline{0} \iff Q = R$

2) $QR \in A$, $-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ}$

Dim

1) "$\Leftarrow$" per la proprietà 2 $\overrightarrow{RR} + \overrightarrow{RR} = \overrightarrow{RR}$

$$(\overrightarrow{RR}) + (-\overrightarrow{RR}) = \overrightarrow{RR} + (-\overrightarrow{RR}) = \underline{0}$$

$$\overrightarrow{RR} + (\overrightarrow{RR} + (-\overrightarrow{RR})) = \overrightarrow{RR} + \underline{0} = \overrightarrow{RR}$$

"$\Rightarrow$"

$Q + \underline{0} = R$ per ipotesi so anche che $\overrightarrow{QQ} = \underline{0}$, ossia che $Q + \underline{0} = Q$

Per 1 , $R = Q$

2) Th: $-\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RQ}$

$$\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{QQ} = \underline{0} \implies \overrightarrow{RQ} = -\overrightarrow{QR}$$

Esempio: V spazio vettoriale su K, $A = V$

$$\pi: V \times V \longrightarrow V$$
$$(u, w) \longrightarrow w - u$$

(V, V, π) è uno spazio affine.

1) $\forall \bar{A} \in A, \forall v \in V, \exists! X \in A : \overrightarrow{Ax} = v$

$\forall \underset{\text{punto}}{\overset{A}{u}} \in V, \forall \underset{\text{vettore}}{v} \in V, \; ? \exists! \; \underset{\text{punto}}{\overset{X}{w}} \in V : \pi(u, w) = v \, ? \;$ Sì!

Se w esiste, allora $\pi(u, w) = w - u$ e $w - u = v$

Allora:

$$w = u + v$$
$$(X = A + v)$$

2) $\forall \underset{u}{P}, \underset{w}{Q}, \underset{z}{R} \in A, \quad \pi((P, Q)) + \pi((Q, R)) = \pi((P, R))$

$$\pi((u, w)) + \pi((w + z)) = \cancel{w} - u + z - w = \underset{\pi((u, z))}{\underset{\parallel}{z - u}}$$

$V = \mathbb{R}^2 \qquad \overset{A \times A}{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}^2 = V$

$((a, b), (c, d)) \longrightarrow (c, d) - (a, b)$ (Spazio affine standard di dim 2 su $\mathbb{R}$)

$V = \mathbb{R}^3$ (Spazio affine standard di dim 3 su $\mathbb{R}$)