Esercizi 2

1. Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}^3$?

$X = \{\alpha(2,1,-1) + (1,0,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$Y = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$W = \{\alpha(1,-1,2) + \beta(2,1,1) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

2. Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathbb{R}[t]$ dello spazio vettoriale dei polinomi in una variabile t a coefficienti in $\mathbb{R}$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}[t]$?

$Z = \{at + a^2t^2 \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad T = \{a + (a+b)t + bt^2 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

3. Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dello spazio vettoriale delle matrici su $\mathbb{R}$ di tipo 2×2 è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a-b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Dato uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$ su un campo K, cosa è un sottospazio vettoriale di V?

5. Dati t vettori $v_1,\ldots,v_t$ di uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$ su un campo K, cosa vuol dire che un vettore v è combinazione lineare dei vettori assegnati?

6. Dato uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$ su un campo K, cosa è un sistema di generatori di V? Cosa vuol dire che V è finitamente generato?

7. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali?

$Y = \{a_0 + a_1x + a_0a_1x^2 \mid a_0,a_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2[x]$;
$T = \{(0,\alpha+\beta,\beta) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R});$$
$$X = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} | a,b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R});$$
$Z = \{a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,1,2) | a,b,c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Si osservi che Z è il sottospazio generato dai vettori $(1,0,1),(0,1,1),(1,1,2)$.

8. Dato uno spazio vettoriale $(V,+,\cdot)$ su un campo K e un insieme $S = \{v_1,\ldots,v_t\}$ di vettori di V, cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Cosa vuol dire che S è linearmente dipendente?

9. Si considerino i vettori $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,0,-2)$ dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ e si ponga $S = \{v_1,v_2,v_3\}$.

- (i) Osservare che il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2.
- (ii) Dire se S è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente. In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1,v_2,v_3?
- (iii) È vero che il vettore $w = (0,0,1)$ è combinazione lineare dei vettori di S? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1,v_2,w?
- (iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da S? Il sistema S è un sistema di generatori di $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$?

10. Dati i sottoinsiemi $S = \{(1,1,0),(0,1,1)\}$ e $T = \{(1,2,1),(1,0,-1),(0,0,0)\}$ dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, dimostrare che ciascun vettore di S è combinazione lineare dei vettori di T e che ciascun vettore di T è combinazione lineare dei vettori di S. È vero che $L(S) = L(T)$, ossia che S e T generano lo stesso spazio vettoriale?

11. Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}$ dei vettori liberi dello spazio delle geometria elementare, siano u_1 e u_2 due vettori linearmente indipendenti entrambi di lunghezza 1.

- (i) Posto $w = u_1 - 2u_2$, dire se il sistema $\{u_1,u_2,w\}$ è linearmente indipendente.
- (ii) Esibire un vettore libero che abbia lunghezza 3.
- (iii) I vettori u_1 e u_2 possono essere paralleli?