Teorema

$T: V \to W$, $\dim V = n$, $\dim W = m$

Siano $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ e $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ basi ordinate di V e W rispettivamente.

Esiste una matrice $A \in M_{m \times n}(K)$ t.e.:

$\forall u \in V$, $(x_1, \dots, x_n) = \phi_{\mathcal{B}}(u)$, $(y_1, \dots, y_m) = \phi_{\mathcal{B}'}(T(u))$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Questa equazione si dice "Rappresentazione di T rispetto alle basi B e B' "

Proprieta' che caratterizza le matrici associate.

Oss

La matrice A del teorema precedente è UNICA.

La matrice A che rappresenta l'applicazione lineare T: V -> W nelle basi fissate B e B' si dice

matrice associata a T in $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

e si indica con $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T)$.

Esempio:

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2[x]$$

$$(a,b) \longrightarrow a+b+(a-b)x+(2a+b)x^2$$

è un'appl. lineare.

Considero

$\mathcal{B} = \big((1,1),(1,-1)\big)$ base ordinata di $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}' = (1, x, x^2)$ base ordinata di $\mathbb{R}^2[x]$

Rappresentiamo T nelle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Dobbiamo quindi trovare $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ t.e.

$$\tilde{T}_A = \phi_{\mathcal{B}'} \circ T \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

e sappiamo che le colonne di A sono le immagini mediante $\tilde{T}_A$ dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$

1^a colonna $\qquad \phi_{\mathcal{B}'}\Big(T(\phi_{\mathcal{B}}^{-1})\big((1,0)\big)\Big) =$

$$\underset{(1,1) \,=\, 1\cdot(1,1)+0\cdot(1,-1)}{\parallel}$$

$$= \phi_{\mathcal{B}'}\left(T((1,1))\right) = \phi_{\mathcal{B}'}\left(2+3x^2\right) = (2,0,3)$$

2° colonne $\quad \phi_{\mathcal{B}'}\left(T(\phi_{\mathcal{B}}^{-1})((0,1))\right) =$

$$\underset{\displaystyle (1,-1) = 0\cdot(1,1) + 1(1,-1)}{\|}$$

$$= \phi_{\mathcal{B}'}\left(T((1,1))\right) = \phi_{\mathcal{B}'}\left(2x+x^2\right) = (0,2,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$