Siano V, W spazi vett. su K

Sia $T: V \longrightarrow K$ una applicazione

def T applicazione o trasformazione lineare se:

1) $\forall u, v \in V, \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$

2) $\forall u \in V, \forall \alpha \in K \quad T(\alpha u) = \alpha T(u)$

In realtà è sufficiente che il campo su cui è definito V sia contenuto in quello di W

Esempi

- $Id_V : V \longrightarrow V$ è appl. lineare
  $u \rightsquigarrow u$

- $f : V \longrightarrow W$ l'applicazione nulla è lineare
  $u \rightsquigarrow \underline{0}_W$

- $g : V \longrightarrow W \qquad W \neq \emptyset$
  $u \rightsquigarrow w$ fissato

$\forall u \in V \quad , \quad g(u) = w$

<u>g non è lineare</u>

$g(2u) = w \neq 2g(u) = 2w$

• $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(a,b,c) \rightsquigarrow (a-b, a+c+2)$

<u>Non è lineare</u>

↳ Vediamo perché

$T(0_{\mathbb{R}^3}) = (0,2) \neq \underline{0}_{\mathbb{R}^2}$

Proprietà importanti

a) $T: V \longrightarrow W$ lineare $\Longrightarrow T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

Infatti: $T(\underline{0}_V) = T(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

b) Le applicazioni "conservano" le combinazioni lineari, ossia:

$T: V \longrightarrow W$ appl. lineari

$\forall u_1, \ldots\ldots, u_t \in V \quad , \quad \forall \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_t \in K$

$T(\alpha_1 u_1 + \ldots\ldots + \alpha_t u_t) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots\ldots + \alpha_t T(u_t)$

Procediamo per induzione su t:

$t=1$, basta considerare le proprietà che T soddisfa per definizione:

$$T(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 T(u_1)$$

(2)

$t-1 \Rightarrow t$ per ipotesi di induzione,

$$T(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{t-1} u_{t-1}) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_{t-1} T(u_{t-1}) =$$

$$= T((\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{t-1} u_{t-1}) + \alpha_t u_t) \underset{(1)}{=} T(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{t-1} u_{t-1}) + T(\alpha_t u_t)$$

$$= \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_{t-1} T(u_{t-1}) + \alpha_t T(u_t).$$

ipotesi di induzione + (2)

<u>Esempio</u> sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.:

$$f((1,1)) = (3,0,1), \quad f((0,1)) = (2,0,0), \quad f((1,2)) = (1,0,0)$$

Osservazione: $(1,2) = (1,1) + (0,1)$, ma $f((1,2)) \neq f((1,1)) + f((0,1))$

f <u>non</u> è lineare

$T: V \longrightarrow W$ appl. lineare

- Se $V = W$, T si dice operatore lineare oppure ENDOMORFISMO
- Se T è un endomorfismo ed è biiettivo, si dice AUTOMORFISMO
- Se T è iniettivo si dice MONOMORFISMO
- Se T è suriettivo si dice EPIMORFISMO
- Se T è biiettivo si dice ISOMORFISMO