Sottospazi Euclidei e Varietà Lineari

Questa breve nota propone agli studenti dell'insegnamento di Geometria del corso di laurea in Informatica (gruppo H-Z) una dimostrazione del fatto che i sottospazi affini sono varietà lineari e viceversa.

Definition 0.1. Uno *spazio euclideo* è una terna $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ dove $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ è uno spazio vettoriale euclideo, $\mathcal{E}$ è un insieme e $\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \leftarrow \overrightarrow{\mathcal{E}}$ è un'applicazione che associa a ogni coppia (P, Q) di elementi di $\mathcal{E}$ il vettore $\overrightarrow{PQ} := \pi(P, Q)$ tale che

(1) $\forall A \in \mathcal{E}$, $\forall a \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\exists! X \in \mathcal{E}$ tale che $\overrightarrow{AX} = a$;
(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Definition 0.2. Dato uno spazio affine $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$, un sottoinsieme $\mathcal{H}$ di $\mathcal{E}$ si dice *sottospazio euclideo* di $\mathcal{E}$ se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(i) il sottoinsieme $\overrightarrow{\mathcal{H}} := \pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \{\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \mid P, Q \in \mathcal{H}\}$ di $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ è un sottospazio vettoriale di $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (detto *giacitura o spazio direttore* di $\mathcal{H}$)
(ii) $\forall A \in \mathcal{H}$, $\forall a \in \overrightarrow{\mathcal{H}}$, l'unico punto $X \in \mathcal{E}$ tale che $\overrightarrow{AX} = a$ appartiene ad $\mathcal{H}$.

Osservazione. Si noti che $\mathcal{H}$ è un sottospazio affine di $\mathcal{E}$ se e solo se la terna $(\overrightarrow{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi_{|\mathcal{H}\times\mathcal{H}})$ è uno spazio affine.

Definition 0.3. Dato un punto P_0 di $\mathcal{E}$ e un sottospazio vettoriale U di $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, il sottoinsieme

$$(P_0, U) := \{Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in U\}$$

e detto *varietà lineare* passante per P_0 e parallela a U.

Proposition 0.4.

(a) *Ogni varietà lineare è un sottospazio euclideo. Ossia, per ogni punto P_0 di $\mathcal{E}$ e sottospazio vettoriale U di $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, la varietà lineare (P_0, U) è un sottospazio affine di $\mathcal{E}$.*
(b) *Ogni sottospazio affine è una varietà lineare. Ossia, se $\mathcal{H}$ è un sottospazio affine di $\mathcal{E}$, allora per ogni punto P_0 di $\mathcal{H}$ si ha $(P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$.*

Proof. Prima di tutto osserviamo che il punto P_0 appartiene a (P_0, U) perché $\overrightarrow{P_0P_0} = \mathbf{0}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}} \in U$.

Per dimostrare l'enunciato (a), osserviamo prima il seguente fatto. Sia a un vettore di U e A un punto dell'insieme $(P_0, U) \subseteq \mathcal{E}$. Per la proprietà (1) sappiamo che esiste un solo punto $X \in \mathcal{E}$ tale che $\overrightarrow{P_0X} = a \in U$. Allora, per definizione il punto X appartiene in particolare a (P_0, U) e la proprietà (ii) risulta provata. Adesso basta provare che vale l'uguaglianza $\pi((P_0, U) \times (P_0, U)) = U$.

"$\subseteq$" Si consideri una coppia (P, Q) in $(P_0, U) \times (P_0, U)$. Per definizione si ha che i vettori $\overrightarrow{P_0P}$ e $\overrightarrow{P_0Q}$ appartengono a U e per la proprietà (2) si ha:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = -\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{P_0Q} \in U$$

perchè U è sottospazio vettoriale.

"$\supseteq$" Siccome la proprietà (ii) è stata già dimostrata per (P_0, U), possiamo dire che per ogni vettore a di U esiste un unico punto X di (P_0, U) tale che $a = \overrightarrow{P_0X} = \pi(P_0, X) \in \pi((P_0, U) \times (P_0, U))$ e abbiamo finito.

Adesso, dimostriamo l'enunciato (b) provando l'uguaglianza $(P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$.

"$\subseteq$" $P \in (P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}}) \iff \overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{H}} \Rightarrow P \in \mathcal{H}$, per la proprietà (ii).

"$\supseteq$" $P \in \mathcal{H} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \in \overrightarrow{\mathcal{H}} \Rightarrow P \in (P_0, \overrightarrow{\mathcal{H}})$. □