24 GIU 2017

Soluzione del sistema lineare

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}^{A}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{B} \xrightarrow{\substack{2B-A \\ 2C-A}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{-5} & \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{2} \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D-B} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

C dipende da B

$$\begin{matrix} B+2C \\ 5A+B \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{A/5 \\ B/5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/5 & 0 & 7/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 4z = \frac{7}{5} \\ y - 2z = \frac{4}{5} \\ t = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{7}{5} - 4z \\ y = \frac{4}{5} + 2z \\ t = -3 \end{cases}$$

Soluzione del sistema

$S = \left\{\left(\frac{7}{5} - 4z, \frac{4}{5} + 2z, z, -3\right)\right\}$

Base W

$W = \{(0,0,0,1), (1,1,1,0)\}$

Il sistema è compatibile e ammette soluzioni

$\rho(A) = \rho(B)$ Il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa

---

Esercizio 2

V spazio vettoriale su campo K, $S = \{v_1, v_2 \dots v_t\}$ vettori di V

S è linearmente indipendente se la combinazione lineare

$h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 \dots + h_t v_t = 0$ con h scalari $\in \mathbb{R}$

e $h_1 = h_2 = \dots = h_m = 0$ è l'unica combinazione lineare il cui risultato sia il vettore nullo.

Un esempio di 3 vettori indipendenti $\in \mathbb{R}^4$

$V' = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$

Esercizio (3)

U sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1(1,0,-1,1)$, $u_2(1,1,2,1)$
$u_3(3,1,0,3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{B-A \\ C-3A}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

u_3 dipende linearmente da u_2

una base di $U = \{(u_1)\,(u_2)\}$
dimensione 2

(5)

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ è invertibile

$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ la matrice B è invertibile!

$\forall M \in M_{22} \ \exists M' \mid M \cdot M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ l'Id di M_{22} è elemento neutro di M_{22}

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[B-A]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[A+3B]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[B=-B]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(6)

$\det \begin{vmatrix} 1-t & -1 & 2 \\ 1 & 0-t & 1 \\ 0 & 1 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t) \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix}$

$(1-t)\left(t^2+t-1-1-t+2\right) = 0$

radici del polinomio caratteristico

$t = 0 \vee t = 1$ entrambi con $m_a = 1$ ed $\in \mathbb{R}$

L'Autospazio $V(0)$ coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(A - 0I)X = 0$ cioè il sistema

$\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x=-z \\ y=z \end{cases}$ Sol $S = \{(-z, z, z)\}$ con Base $W = \{(-1,1,1)\}$

dimensione della Base $= 1$ $m_g(0) = 1$

L'Autospazio $V(1)$ coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $(A - 1I)X = 0$

$\begin{cases} -y+2z=0 \\ x-y+z=0 \\ y=2z \end{cases}$ Sol $S = \{(z, 2z, z)\}$

Base $W = \{(1,2,1)\}$

dimensione della Base $= 1$ $m_g(1) = 1$

$\forall$ autovalore $r \in \mathbb{R}$ la $m_a = m_g = 1$ pertanto la matrice è diagonalizzabile e una Base composta degli autovettori di T è $L = \{(-1,1,1),(1,2,1)\}$