# Rappresentazione delle applicazioni lineari tra spazi vett. finit. gen.

$V, W$ spazi vettoriali finiti generati su un campo $K$

$T: V \longrightarrow W$ appl. lineare $\qquad \dim V = n$

$\dim W = m$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base ordinata di $V$ $\qquad \Phi_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow K^n$

$\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ base ordinata di $W$ $\qquad \Phi_{\mathcal{B}'}: W \longrightarrow K^m$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}'}"] \\ K^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}"] \arrow[r] & K^m \end{tikzcd}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}'} \circ T \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} : K^n \longrightarrow K^m$$
$$\| $$
$$\tilde{T}$$

In questo modo vediamo che ogni appl. lineare tra spazi vett. f.g. può essere "ricondotta" o "descritta" mediante un'applicazione lineare tra spaz. vett. numerici:

- $A \in M_{m \times n}(K)$ $\qquad \tilde{T}_A : K^n \longrightarrow K^m$

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(K)$$

è un'applicazione lineare. Vediamo

$$Th: \forall \overset{=u}{(x_1, \dots, x_n)}, \overset{=v}{(x'_1, \dots, x'_n)} \in K^n, \ \tilde{T}_A(u+v) = \tilde{T}_A(u) + \tilde{T}_A(v)$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n), \forall \lambda \in K, \ \tilde{T}_A(\lambda u) = \lambda \tilde{T}_A(u)$$

$$\tilde{T}_A(\lambda u) \overset{def.}{=} A\left[\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] = \lambda A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \tilde{T}_A(u).$$

$$\tilde{T}_A(u+v) \overset{def.}{=} A\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}\right] = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} =$$

$$\overset{def.}{=} \tilde{T}_A(u) + \tilde{T}_A(v)$$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \qquad m=3, \ n=2$$

$$\tilde{T}_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2) \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{T}_A((x_1,x_2)) = (3x_1+x_2,\ 2x_1-2x_2,\ x_1-3x_2) \in \mathbb{R}^3$$

$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}$

Consideriamo la base canonica di $\mathbb{R}^2$: $((1,0),(0,1))$.

$\tilde{T}_A((1,0)) = (3,2,1)$ è la prima colonna di $A$

$\tilde{T}_A((0,1)) = (1,-2,-3)$ è la seconda colonna di $A$

Quindi, le colonne di $A$ costituiscono un sist. di gen. di $\operatorname{Im} \tilde{T}_A$, in particolare:

$$\dim \operatorname{Im} \tilde{T}_A = \text{rango}(A)$$

Cosa possiamo dire riguardo al nucleo?

$$\operatorname{Ker}(\tilde{T}_A) = \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0 \right\} : \quad A\overset{=x}{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}} = 0$$

Quindi $\Sigma_0 : A_x = 0 \qquad S_0 = \operatorname{Ker} \tilde{T}_A$

Abbiamo osservato che $\dim S_0 = n - \text{rango}(A)$

Allora otteniamo: $\dim \operatorname{Ker} \tilde{T}_A + \dim \operatorname{Im} \tilde{T}_A =$

$= n - \text{rango}(A) + \text{rango}(A) = n$

Questo è vero per ogni matrice $A \in M_{m \times n}(K)$

$$\tilde{T}_A : K^n \longrightarrow K^m$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}$$

$((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$

base canonica di $K^n$

$$\tilde{T}_A((1,0,\dots,0)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{T}_A((0,1,0,\dots,0)) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_2 \\ \vdots \\ a^m_2 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\tilde{T}_A((0,\dots,1)) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_n \\ \vdots \\ a^m_n \end{pmatrix}$$

E si puo' ripetere quanto detto nel caso dell'esempio.

Si puo' inoltre osservare che, essendo $\operatorname{Ker}\tilde{T}_A$ uguale al sottospazione vettoriale delle soluzioni di Ax = 0,

$$\operatorname{Ker}\tilde{T}_A = \tilde{T}_A^{-1}(\{\underline{0}\})$$