Corso di Geometria (gruppo H-Z) A.A. 2019-2020
Laurea in Informatica

Vettor liberi o geometrici nello spazio della geometria elementare

Questa nota propone una introduzione molto breve dei *vettori liberi (o geometrici)*, a partire dai vettori applicati (o segmenti orientati), nello spazio della geometria elementare (o spazio euclideo elementare). La lettera $\mathcal{F}$ denoterà l'insieme dei punti dello spazio della geometria elementare.

Per la definizione e le principali proprietà dei vettori applicati (visti coppie di punti) si fa riferimento all'Esempio 4.1 del libro di testo consigliato per questo corso. L'insieme di tutti i vettori applicati sarà denotato con la lettera $\mathcal{V}$. Quindi,

$$\mathcal{V} = \{(P, Q) \mid P, Q \in \mathcal{F}\}.$$

Si ricordi che un vettore applicato è univocamente determinato da una *direzione*, un *verso*, una *lunghezza* (o *modulo* o *norma* o *intensità*) e da un *punto di applicazione* (o primo estremo). Un vettore applicato del tipo (P, P), in cui il punto di applicazione coincide con il secondo estremo, è detto *vettore nullo* (applicato in P). Un vettore nullo ha lunghezza nulla e, per convenzione, ha direzione e verso arbitrari.

Consideriamo la seguente relazione su $\mathcal{V}$, detta *relazione di equipollenza*:

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \supseteq \mathcal{R} := \{((P, Q), (S, T)) \mid (P, Q) \text{ e } (S, T) \text{ hanno uguali direzione, verso e lunghezza}\}.$$

Si può domostrare che questa è una relazione di equivalenza. Allora, possiamo considerare le classi di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza, ossia i sottoinsiemi di $\mathcal{V}$ del seguente tipo:

$$[(P, Q)]_{\mathcal{R}} = \{(P', Q') \in \mathcal{V} \mid (P', Q')\mathcal{R}(P, Q)\}.$$

Un qualsiasi vettore applicato (S, T) che appartiene a $[(P, Q)]_{\mathcal{R}}$ si dice *rappresentante* di $[(P, Q)]_{\mathcal{R}}$. L'insieme delle classi di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza $\mathcal{R}$ si dice *insieme quoziente* di $\mathcal{V}$ modulo $\mathcal{R}$:

$$\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{R}} := \Big\{[(P, Q)]_{\mathcal{R}} \mid (P, Q) \in \mathcal{V}\Big\}.$$

Definizione. Un *vettore libero* è una classe di equivalenza $[(P, Q)]_{\mathcal{R}}$ rispetto alla relazione di equipollenza $\mathcal{R}$ e si denoterà con il simbolo $\overrightarrow{PQ}$.

L'insieme dei vettori liberi sarà denotato con la lettera $\mathbf{V}$, per cui $\mathbf{V} := \dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{R}}$.

$P \longrightarrow Q \qquad (P, Q) \neq (P', Q'), \qquad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST} = \{(P, Q), (S, T), \dots\}$
$S \longrightarrow T$

Nell'Esempio 4.1 del testo consigliato per questo corso, con $\mathcal{F}(O)$ si denota l'insieme dei vettori applicati in un punto O e su $\mathcal{F}(O)$ sono definite una operazione interna $+$ (addizione) e una operazione esterna $\cdot$ (moltiplicazione) con operatori nel campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Si può dimostrare che $(\mathcal{F}(O), +, \cdot)$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Ricordiamo che, se (P, Q) è un vettore applicato in un punto P e O è un altro punto, allora esiste un unico punto T tale che il vettore applicato (O, T) è equipollente a (P, Q) (postulato euclideo del trasporto). Quindi, preso un punto O esiste un vettore applicato (O, T) che appartiene alla classe di equivalenza di (P, Q), ossia esiste un rappresentante di $[(P, Q)]_{\mathcal{R}}$ applicato in O. Allora, si può dimostrare che sono ben definite le seguenti operazioni su $\mathbf{V}$

$+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{P'Q'} := [(O, T) + (O, T')]_{\mathcal{R}}$,
dove $(O, T) \in [(P, Q)]_{\mathcal{R}}$ e $(O, T') \in [(P', Q')]_{\mathcal{R}}$, e
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tale che $\alpha \cdot \overrightarrow{PQ} := [\alpha \cdot (O, T)]_{\mathcal{R}}$,
dove $(O, T) \in [(P, Q)]_{\mathcal{R}}$.

Si può dimostrare che $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.