**Lemma di Steintz.** *Siano $V$ uno spazio vettoriale su un campo $K$ e $W$ un suo sottospazio vettoriale finitamente generato. Se $n$ è la cardinalità di un sistema di generatori finito di $W$, ogni sottoinsieme di $W$ contenente $m > n$ vettori è linearmente dipendente.*

*Dim.* Per ipotesi, esiste un sistema di generatori di $W$ composto da $n$ vettori. Sia $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un tale sistema di generatori.

Dobbiamo dimostrare che, preso comunque un insieme $X = \{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq W$ di vettori di $W$, se $m > n$ allora $X$ è linearmente dipendente.

Possiamo supporre che $X$ non contenga il vettore nullo. Infatti, se $X$ contiene il vettore nullo, allora la tesi segue immediatamente.

Siccome $v_1$ appartiene a $W = \mathcal{L}(S)$, allora $v_1$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di $S$ mediante scalari che non sono tutti nulli, in quanto stiamo supponendo che $v_1$ sia diverso dal vettore nullo:

$$\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K :\ v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

con, per esempio, $\lambda_1 \neq 0$. Quindi, esiste $\lambda_1^{-1} \in K$ e moltiplico ambo i membri della precedente uguaglianza per $\lambda_1^{-1}$, ottenendo:

$$\lambda_1^{-1} v_1 = \lambda_1^{-1}\lambda_1 u_1 + \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n$$

e di conseguenza:

$$u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 + \cdots - \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Adesso possiamo osservare che l'insieme $S$ è contenuto nella chiusura lineare $\mathcal{L}(v_1, u_2, \ldots, u_n)$, per cui

$$W = \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(v_1, u_2, \ldots, u_n) \subseteq W$$

e quindi si ha $W = \mathcal{L}(v_1, u_2, \ldots, u_n)$, ossia l'insieme $S' = \{v_1, u_2, \ldots, u_n\}$ è un sistema di generatori di $W$ ottenuto sostituendo in $S$ il vettore $u_1$ con il vettore $v_1$ di $X$.

Siccome $v_2$ è un vettore di $W = \mathcal{L}(S')$, allora $v_2$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori di $S'$ mediante scalari che non sono tutti nulli, in quanto stiamo supponendo che $v_2$ sia diverso dal vettore nullo

$$\exists\ \beta_1, \ldots, \beta_n \in K :\ v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n.$$

Se $\beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$, allora $\beta_1 \neq 0$ e $v_2 = \beta_1 v_1$, così che l'insieme $X$ risulta essere linearmente dipendente $(\star)$.

Altrimenti, possiamo per esempio supporre che sia $\beta_2 \neq 0$, per cui esiste $\beta_2^{-1} \in K$ e moltiplico ambo i membri della precedente uguaglianza per $\beta_2^{-1}$, ottenendo:

$$\beta_2^{-1} v_2 = \beta_2^{-1}\beta_1 v_1 + \beta_2^{-1}\beta_2 u_2 + \cdots + \beta_2^{-1}\beta_n u_n$$

e di conseguenza

$$u_2 = -\beta_2^{-1}\beta_1 v_1 + \beta_2^{-1} v_2 + \cdots - \beta_2^{-1}\beta_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n).$$

Analogamente a prima, possiamo osservare che $S'$ è contenuto in $\mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n)$, per cui

$$W = \mathcal{L}(S') \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n) \subseteq W$$

e quindi si ha $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n)$, ossia l'insieme $S'' = \{v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n\}$ è un sistema di generatori di $W$ ottenuto sostituendo in $S'$ il vettore $u_2$ con il vettore $v_2$ di $X$.

Se $m > n$ possiamo ripetere questo procedimanto fino a trovare che $X$ è linearmente dipendente come nel punto indicato con $(\star)$ oppure trovando che l'insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è un sistema di generatori di $W$. Quindi, il vettore $v_{n+1} \in X \subset W$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, la qual cosa implica che l'insieme $X$ è linearmente dipendente.