ESERCIZI 4

1. Fissato un riferimento $\mathcal{B}$ (ossia, una base ordinata) di uno spazio vettoriale V finitamente generato, dire cosa sono le componenti di un vettore $u \in V$ in $\mathcal{B}$.

2. Dato un riferimento (ossia una base ordinata) $\mathcal{R} = (u, v, w)$ dello spazio dei vettori liberi della geometria elementare, dire se ci sono vettori paralleli tra $a = 3u - v + 2w$, $b = 2u - 2v + 4w$ e $c = -u + v - 2w$ e perché. Quali sono le componenti di a in $\mathcal{R}$? E di b in $\mathcal{R}$? E di c in $\mathcal{R}$?

3. Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori nei riferimenti fissati:

(i) $(34, -56) \in \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$;

(ii) $(1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), 0, 1, 0))$.

(iii) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,3}$ in

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

4. Completare in una base dello spazio ambiente gli insiemi che tra i seguenti risultano essere linearmente indipendenti:

(i) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(ii) $\{(0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(iii) $\{x^2 + x, x + 1, 3 + x\} \subseteq \mathbb{R}^4[x]$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}_{2,2}$

(v) $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

5. Dati p sottospazi vettoriali $W_1, \dots, W_p$ di uno spazio vettoriale V su un campo K, dire cosa è il loro sottospazio intersezione e cosa è il loro sottospazio somma.

6. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$W_1 = \mathcal{L}((1, 2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (1, -1, 0, 1))$,

$W_2 = \mathcal{L}((0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1))$.

Determinare i sottospazi $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

7. Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale di dimensione 5 su un campo $\mathbb{K}$ e siano H e W due suoi sottospazi vettoriali tali che $dim(H) = 3$ e $dim(W) = 4$. Dire quali valori può assumere $dim(H \cap W)$.