Teorema

$A \in M_{m \times n}(K)$

$\text{rango}(A) = \text{rango}({}^tA)$

Quindi: $\dim \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m) = \dim \mathcal{L}(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n)$

Per il lemma di Steinitz, possiamo dire:

$\rho(A) =$ numero massimo di colonne lin indip di A
righe

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$$

Osserviamo: $\underline{a}^1 \notin \mathcal{L}(\underline{a}^2, \underline{a}^3)$ (*)

$\underline{a}^2 \notin \mathcal{L}(\underline{a}^3)$ $\underline{a}^3 \neq \underline{0}$ $\{\underline{a}^3\}$ è lin indip

$$\left.\begin{matrix} \{\underline{a}^3\} \text{ è lin. indip} \\ \underline{a}^2 \notin \mathcal{L}(\underline{a}^3) \end{matrix}\right) \Longrightarrow \{\underline{a}^3, \underline{a}^2\} \text{ è lin. indip}$$

(*) Infatti: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot \underline{a}^2 + \beta \cdot \underline{a}^3 =$

$$= \alpha(0,0,2,7,1) + \beta(0,0,0,0,3) = (0,0,2\alpha,7\alpha,\alpha+3\beta) \neq (0,1,-2,3,5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \{\underline{a}^2, \underline{a}^3\} \text{ è lin. indip} \\ \underline{a}^1 \notin \mathcal{L}(\underline{a}^2, \underline{a}^3) \end{array}\right\} \Rightarrow \{\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3\} \text{ lin. indip.}$$

rango$(A) = 3$ = numero delle righe NON NULLE