ESERCIZI 3

0. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Cosa significa che un insieme $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di vettori di V è linearmente dipendente? E che è linearmente indipendente?

1. Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale finitamente generato sul campo K. Cosa è una base di V? Cosa è la dimensione di V?

2. Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$L((7, -5, 1, 2, 5), (4, -3, 5, 25, 3), (4, -7, -3, -21, 7), (-3, 2, -4, -1, -2))$;

$L((1, 2, 0, -1, 1), (1, 1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$;

$L((0, 1, 0, 0, 0,), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0))$.

3. Determinare una base e la dimensione di quelli tra i seguenti sottoinsiemi che risultano essere sottospazi (si conviene che il vuoto sia una base dello spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$):

$T = \{(1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, 2, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$U = L(\{(1, 1, 0, -1), (0, 2, -3, 1), (-2, 0, -3, 3), (0, 0, 0, 0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$

$Z = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

4. Solo applicando il Lemma di Steinitz e ricordando come sono fatte le basi canoniche, spiegare perché i seguenti sottoinsiemi sono linearmente dipendenti:

$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_{2\,2}(\mathbb{R})$;

$S_2 = \{1 + t, 1 - t, t + 2t^2, 1 + t - 2t^2\} \subseteq \mathbb{R}^2[t]$

$S_3 = \{(50, -23), (1, -4), (0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$S_4 = \{(1, 2, -4), (2, -1, 0), (3, 4, 6), (10, -3, 7)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

5. Nello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, si determini:

(i) un insieme di tre vettori che sia linearmente *indipendente*;

(ii) un insieme di tre vettori che sia linearmente *dipendente.*;

(iii) un sottospazio vettoriale di V che abbia dimensione 2;

(iv) una base di V che contenga i vettori $u = e_1 + 2e_3$ e $v = e_2 - e_3$.

Verificare se l'insieme $S = \{2e_1 - e_3, e_2 + 2e_4, e_2, e_2 + e_1\} \subseteq V$ è una base di V.