Matematica I

Francesco Bonsante e Giuseppe Da Prato

31 Maggio 2007

Contents

Capitolo 1

Numeri reali

1.1 Insiemi di numeri razionali

Riteniamo noti i numeri interi naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, i numeri interi relativi $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \}$, i numeri razionali relativi $\mathbb{Q}$ con le loro proprietà fondamentali.

Vogliamo definire i numeri reali usando la costruzione di Dedekind. Per questo cominciamo con dare alcuni concetti sugli insiemi di numeri razionali. Sia Γ un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Q}$.

- Si dice che Γ è *limitato superiormente* (risp. *limitato inferiormente*) se esiste $\lambda \in \mathbb{Q}$ tale che $p \leq \lambda$ per ogni $p \in \Gamma$ (risp. $p \geq \lambda$ per ogni $p \in \Gamma$).

  Se Γ è limitato superiormente e inferiormente si dice che è *limitato*.

- Ogni $\lambda \in \mathbb{Q}$ tale che $p \leq \lambda$ (risp. $p \geq \lambda$) per ogni $p \in \Gamma$ è detto un *maggiorante* (risp. *minorante*) di Γ.

- Se esiste $M \in \Gamma$ (risp. $m \in \Gamma$) tale che $p \leq M$ (risp. $p \geq m$) per ogni $p \in \Gamma$, si dice che M (risp m) è il *massimo* (resp. il *minimo* di Γ).

Ad esempio se $\Gamma = \{p \in Q : \ p \leq 1\}$, 1 è il massimo di M mentre l'insieme $\Gamma = \{p \in Q : \ p < 1\}$ non ha massimo.

1.1.1 Estremo superiore e estremo inferiore

Un concetto più debole di quello di massimo è il concetto di *estremo superiore*. Sia Γ un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Q}$ e sia G l'insieme dei suoi maggioranti.

G è ovviamente limitato inferiormente e non vuoto. Se G ha minimo (risp. massimo) λ, si dice che λ è l' *estremo superiore* (resp. *estremo inferiore*) di Γ. L'estremo superiore (risp. inferiore) di Γ (se esiste) si indica con $\sup_\Gamma$ (risp. $\inf_\Gamma$).

In altri termini l'estremo superiore di Γ è il minimo (se esiste) dei suoi maggioranti e l' estremo inferiore di Γ è il massimo (se esiste) dei suoi minoranti.

Esercizio 1.1 Provare che l'insieme Γ

$$\Gamma = \{p \in \mathbb{Q} : \ p^2 < 2\}.$$

non ha estremo superiore.

Il fatto che gli insiemi limitati superiormente di $\mathbb{Q}$ non hanno in generale estremo superiore conduce alla definizione di *numero reale*.

1.2 Numeri reali (costruzione di Dedekind)

Definizione 1.2 *Un*numero reale α *è un sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{Q}$ *tale che:*

(i) α *è limitato superiormente.*

(ii) α *non ha massimo.*

(iii) $p, q \in \mathbb{Q}$, $p \in \alpha$, $q \le p \Rightarrow q \in \alpha$.

Si dice anche che α è una *sezione* di $\mathbb{Q}$. Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri *reali.*

1.2.1 Immersione naturale di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Ad ogni $p \in \mathbb{Q}$ facciamo corrispondere la sezione γ_p definita da

$$\gamma_p = \{q \in \mathbb{Q} : \ q < p\}.$$

È facile vedere che questa applicazione è iniettiva. Nel seguito, se non vi è possibilità di confusione, identificheremo γ_p con p. Ad esempio scriveremo:

$$0 = \{p \in \mathbb{Q} : \ p < 0\}.$$

1.2.2 Relazione d'ordine

Definiamo in $\mathbb{R}$ una *relazione d'ordine*. Per questo cominciamo con l'osservare che dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si verifica soltanto uno dei casi seguenti:

(i) $\alpha \subset \beta$.

(ii) $\alpha \supset \beta$.

Infatti, dato che:

$$\alpha \cup \beta = (\alpha \setminus \beta) \cup (\alpha \cap \beta) \cup (\beta \setminus \alpha), \tag{1.1}$$

se non valesse né (i) né (ii), i tre insiemi in (1.1) sarebbero disgiunti e non vuoti. Quindi esisterebbe $p \in \alpha \setminus \beta$ e $q \in \beta \setminus \alpha$. Se fosse $p < q$ si avrebbe $p \in \beta$ per la proprietà (ii) della Definizione 1.2 il che è assurdo. Analogamente se fosse $q < p$ si avrebbe $q \in \alpha$ il che è assurdo per lo stesso motivo.

Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ scriveremo $\alpha \leq \beta$ se $\alpha \subset \beta$, $\alpha < \beta$ se α è un sottoinsieme proprio di β, $\alpha \geq \beta$ se $\alpha \supset \beta$, $\alpha > \beta$ se β è un sottoinsieme proprio di α.

1.2.3 Somma e prodotto

Estendiamo la definizione di somma a coppie α, β di elementi di $\mathbb{R}$ ponendo:

$$\alpha + \beta = \{p + q : \ p \in \alpha, \ q \in \beta\}.$$

Inoltre poniamo $0 = \gamma_0 = \{p \in \mathbb{Q} : \ p < 0\}$,

$$-\alpha = \{p \in \mathbb{Q} : \ p \leq 0, \ -p \notin \alpha\}, \quad \forall \, \alpha > 0,$$

e

$$-\alpha = \{p \in Q : p \leq 0\} \cup \{p \in \mathbb{Q} : \ p \geq 0, \ -p \notin \alpha\}, \quad \forall \, \alpha < 0.$$

Definiamo ora il prodotto di due numeri reali positivi α, β ponendo

$$\alpha\beta = \{pq : \ p \in \alpha, \ q \in \beta\}.$$

Infine si definisce il prodotto di due numeri reali di segno qualunque con le regole usuali dei segni e la potenza $x^n, n \in \mathbb{N}$, di un numero reale x. Si può poi verificare facilmente che le note proprietà delle operazioni sui numeri razionali si estendono ai numeri reali. [1]

---

[1] Per dettagli vedi W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, Mac Graw, International Student Edition, 1976.

1.3 Estremo superiore e inferiore

Si estendono in modo ovvio le nozioni di insieme limitato (superiormente e inferiormente), di maggiorante, di minorante di estremo superiore e inferiore ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Il teorema seguente è di importanza *fondamentale*.

Teorema 1.3 *Sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente (risp. inferiormente). Allora esiste l'estremo superiore (risp. inferiore) di K.*

Dimostrazione. Sia λ il sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ ottenuto prendendo l'unione di tutte le sezioni corrispondenti agli elementi di K. Verifichiamo che λ è una sezione.

(i) λ è non vuoto e limitato superiormente. Infatti per ipotesi esiste un maggiorante μ di K ed è chiaro che $\lambda \subset \mu$.

(ii) Se $p \in \lambda$ e $q \leq p$ si ha $q \in \lambda$. Infatti se $p \in \lambda$ allora p appartiene a una sezione α di K e quindi $q \in \alpha \subset \lambda$.

(iii) λ non ha massimo. Infatti supponiamo per assurdo che $p_0 \in \mathbb{Q}$ sia il massimo di λ. Allora esiste $\alpha \in K$ tale che p_0 è un massimo di α il che è assurdo.

Possiamo ora concludere la dimostrazione provando che λ è il minimo maggiorante di K. È chiaro che λ è un maggiorante di K. Supponiamo per assurdo che non sia il minimo cioè che esista $\mu \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha \leq \mu$ per ogni $\alpha \in K$. Allora si ha $\lambda \leq \mu$ il che è assurdo. □

Osservazione 1.4 L'estremo superiore λ di un sottoinsinsieme K di $\mathbb{R}$ limitato superiormente è caratterizzato dalle due proprietà seguenti:

(i) Se $z > \lambda$ si ha $x < \lambda$ per ogni $x \in K$.

(ii) Se $z < \lambda$ esiste $x \in K$ tale che $x > \lambda$.

L'estremo inferiore λ di un sottoinsinsieme di $\mathbb{R}$ limitato inferiormente è caratterizzato dalle due proprietà seguenti:

(i) Se $z < \lambda$ si ha $x > \lambda$ per ogni $x \in K$.

(ii) Se $z > \lambda$ esiste $x \in K$ tale che $x < \lambda$.

Esercizio 1.5 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Provare che:

$$\alpha = \sup\{\gamma_p : \ p \in \alpha\}.$$

Provare inoltre che se α e β sono numeri reali con $\alpha < \beta$ esiste $p \in \mathbb{Q}$ tale che $\alpha < \gamma_p < \beta$.

Esercizio 1.6 (Proprietà archimedea di $\mathbb{R}$) Siano $x > 0, y > 0$. Provare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$. Dedurne che se $x > 1, y > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n > y$.

1.4 Radici e logaritmi

D'ora in poi identificheremo p e γ_p per ogni $p \in \mathbb{Q}$. In questa sezione vogliamo applicare il concetto di estremo superiore alla definizione della radice e del logaritmo di un numero reale positivo.

Proposizione 1.7 *Sia $y > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Esiste un'unica soluzione $x > 0$ dell'equazione:*

$$x^n = y. \tag{1.2}$$

x è detto la radice n-ma di y *ed è denotato con $y^{1/n}$.*

Dimostrazione. Poniamo:

$$D = \{x > 0 : \ x^n < y\}.$$

Osserviamo che D è non vuoto. Infatti $x = \frac{y}{1+y} \in D$ dato che $x^n < x < y$. Inoltre D è limitato superiormente; ad esempio $y + 1$ è un maggiorante di D dato che se $x > 1 + y$ si ha $x^n > x > y$.

Poniamo ora $\lambda = \sup_D$ e proviamo che non risulta né $\lambda^n < y$ né $\lambda^n > y$ cosicchè $\lambda^n = y$ e λ è soluzione di (1.2).

Se fosse $\lambda^n < y$ esisterebbe $\epsilon \in \mathbb{R}$ con $0 < \epsilon < 1$ tale che $(\lambda + \epsilon)^n < y$ il che contraddirebbe la definizione di estremo superiore. Per vedere che un tale ϵ esiste poniamo $a = y - \lambda^n$. Allora $a > 0$ e, dato che

$$(\lambda + \epsilon)^n \leq \lambda^n + \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \lambda^k = y - a + \epsilon((\lambda + 1)^n - \lambda^n),$$

basta scegliere ϵ tale che

$$\epsilon((\lambda+1)^n - \lambda^n) < a.$$

Se fosse $\lambda^n > y$ esisterebbe ϵ con $0 < \epsilon < 1$ tale che $(\lambda-\epsilon)^n > y$ il che contraddirebbe la definizione di estremo superiore. Per vedere che un tale ϵ esiste poniamo $a = \lambda^n - y$. Allora $a > 0$ e dato che

$$(\lambda-\epsilon)^n \geq \lambda^n - \epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \lambda^k = y + a - \epsilon((\lambda+1)^n - \lambda^n),$$

basta scegliere ϵ tale che

$$\epsilon((\lambda+1)^n - \lambda^n) < a.$$

Si è quindi provato che esiste una soluzione di (1.2). Infine l'unicità segue dal fatto che (la cui semplice verifica è lasciata al lettore):

$$x < x_1 \Rightarrow x^n < x_1^n.$$

□

Per ogni numero razionale positivo $q = \frac{m}{n}$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^+$ definiamo

$$y^q = (y^{1/n})^m.$$

Si verifica facilmente che

$$y^{p+q} = y^p y^q$$

per ogni $y > 0$, $p, q \in \mathbb{R}^+$.

Esercizio 1.8 Sia $x, y > 0$. Posto:

$$K = \{q > 0, q \in \mathbb{Q} : \ x^q < y\},$$

provare che K è non vuoto e limitato superiormente. Definire

$$x^y = \sup K.$$

Provare che se $z > 0$ risulta:

$$x^y x^z = x^{y+z}.$$

Passiamo ora alla definizione del *logaritmo*.

Proposizione 1.9 *Sia $y > 0$ e $a > 1$ (risp. $0 < a < 1$). Esiste un'unica soluzione $x > 0$ dell'equazione:*

$$a^x = y. \tag{1.3}$$

x è detto il logaritmo di y in base a *ed è denotato con* $\log_a y$.

Dimostrazione. Poniamo:

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \ a^x < y\}.$$

E è non vuoto dato che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^{-n} < y$; inoltre E è limitato superiormente dato che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n > y$ (vedi Esercizio 1.6).

Poniamo ora $\lambda = \sup_E$ e proviamo che non risulta né $a^\lambda < y$ né $a^\lambda > y$ cosicchè $a^\lambda = y$ e λ è soluzione di (1.3).

Se fosse $a^\lambda < y$ esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^{\lambda+1/n} < y$ il che contraddirebbe la definizione di estremo superiore. Per vedere che un tale n esiste poniamo $a^\lambda = \kappa y$. Allora $0 < \kappa < 1$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$a^{\lambda+1/n} = a^\lambda a^{1/n} = y\kappa a^{1/n}.$$

Basta quindi scegliere n in modo che $a^{1/n} < \frac{1}{\kappa}$.

Se fosse $a^\lambda > y$ esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^{\lambda+1/n} < y$ il che contraddirebbe la definizione di estremo superiore. Per vedere che un tale n esiste poniamo $a^\lambda = \kappa y$. Allora $0 < \kappa < 1$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$a^{\lambda+1/n} = a^\lambda a^{1/n} = y\kappa a^{1/n}.$$

Basta quindi scegliere n in modo che $a^{1/n} < \frac{1}{\kappa}$.

L'unicità segue dall'implicazione (la cui semplice verifica è lasciata al lettore):

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}.$$

□

Si verifica facimente che per ogni $y, z \in \mathbb{R}^+$ si ha:

$$\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z.$$

Capitolo 2

Successioni di numeri reali

2.1 Definizione di limite

Una successione (di numeri reali) è un'applicazione:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \mapsto a_n;$$

la indicheremo con il simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o più brevemente con (a_n).

Data una successione (a_n) siamo interessati al comportamento di a_n quando n diventa sempre più grande ($n \to \infty$). Un primo caso importante si ha quando a_n si "avvicina" sempre più a un numero l al crescere di n. Più precisamente diamo la seguente definizione.

Definizione 2.1 *Sia* (a_n) *una successione e sia* $l \in \mathbb{R}$*. Si dice che* (a_n) tende *(o* converge*) a* l *e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l, \quad \textit{oppure } a_n \to l,$$

se per ogni $\epsilon > 0$ *esiste* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \text{per ogni } n > n_\epsilon, \tag{2.1}$$

Si dice anche che l *è il limite di* (a_n)*.*

Evidentemente la (2.1) equivale a

$$l - \epsilon < a_n < l + \epsilon \quad \text{per ogni } n > n_\epsilon.$$

Data una successione (a_n) useremo la convenzione seguente: diremo che una propietà π vale *definitivamente* per (a_n) se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che π vale per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ maggiori di n_0.

Con questa convenzione $a_n \to l$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ risulta definitivamente $|a_n - l| < \epsilon$.

Esempio 2.2 Sia $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Si ha allora:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Infatti, dato $\epsilon > 0$, essendo

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n},$$

risulta $|a_n - 1| < \epsilon$ se $n > \frac{1}{\epsilon}$. Quindi basta scegliere per n_ϵ il più piccolo intero maggiore di $\frac{1}{\epsilon}$.

Proviamo ora l'unicità del limite.

Proposizione 2.3 *Una successione (a_n) ha al più un limite.*

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = l_1.$$

Vogliamo provare che $l = l_1$. Dato $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \text{per ogni } n > n_\epsilon$$

e $n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - l_1| < \epsilon \quad \text{per ogni } n > n'_\epsilon.$$

Poniamo

$$n''_\epsilon = \max\{n_\epsilon, n'_\epsilon\}.$$

Allora se $n > n''_\epsilon$ si ha per la disuguaglianza triangolare

$$|l - l_1| \le |a_n - l| + |a_n - l_1| < 2\epsilon.$$

Quindi $l = l_1$ per l'arbitrarietà di ϵ. $\square$

Esempio 2.4 Per ogni $\alpha > 0$ risulta:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} = 0.$$

Infatti, dato $\epsilon > 0$ la condizione $n^{-\alpha} < \epsilon$ equivale a $n < \frac{1}{\epsilon^\alpha}$ quindi basta scegliere $n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon^\alpha}$.

Esempio 2.5 Per ogni $x > 0$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1.$$

La cosa è ovvia se $x = 1$. Supponiamo $x > 1$ e poniamo

$$y_n = x^{1/n} - 1.$$

Si ha $y_n > 0$ e inoltre:

$$x = (1 + y_n)^n \geq 1 + ny_n.$$

Ne segue

$$y_n \leq \frac{x-1}{n},$$

cosicché:

$$|x^{1/n} - 1| < \epsilon, \quad \forall\, n > n > n_\epsilon,$$

pur di prendere $n_\epsilon > \frac{x-1}{\epsilon}$.

Il caso $x < 1$ si tratta analogamente.

Esempio 2.6 Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Poniamo infatti

$$x_n = n^{1/n} - 1$$

che implica

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\, x_n^2,$$

da cui

$$x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0.$$

Quindi si ha:

$$|n^{1/n} - 1| < \epsilon, \quad \forall\, n > n > n_\epsilon,$$

se $n > n_\epsilon > 1 + \frac{2}{\epsilon^2}$.

2.2 Successioni limitate e monotone

Si dice che (a_n) è *limitata inferiormente o superiormente* o che è *limitata* se tale è l'insieme

$$\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Proposizione 2.7 *Sia (a_n) una successione convergente. Allora (a_n) è limitata.*

Dimostrazione. Sia $a_n \to l$ e sia $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$l - 1 < a_n < l + 1 \quad \text{per ogni } n > n_1.$$

Si ha allora

$$a_n < \max\{a_1, a_2, ..., a_{n_1}, l + 1\}, \quad a_n > \min\{a_1, a_2, ..., a_{n_1}, l - 1\}.$$

Quindi (a_n) è limitata. □

Si dice che (a_n) è *crescente* (risp. *decrescente*) se $a_n \leq a_{n+1}$ (risp. $a_n \geq a_{n+1}$) per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se poi $a_n < a_{n+1}$ (risp. $a_n > a_{n+1}$) per ogni $n \in \mathbb{N}$ si dice che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è *strettamente crescente* (risp. *strettamente decrescente*). Una successione crescente o decrescente è detta *monotona*.

Proposizione 2.8 *Sia (a_n) una successione crescente (risp. decrescente) e limitata superiormente (risp. inferiormente). Allora risulta:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \ \textit{(risp. } \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n).$$

Dimostrazione. Supponiamo che (a_n) sia crescente e limitata superiormente e sia

$$l := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Per definizione di estremo superiore per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_\epsilon} > l - \epsilon$. Dato che la successione (a_n) è crescente ne segue che

$$a_n > l - \epsilon \quad \text{per ogni } n > n_\epsilon.$$

Ciò implica

$$|a_n - l| < \epsilon \quad \text{per ogni } n > n_\epsilon,$$

essendo ovviamente

$$a_n < l + \epsilon \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

□

2.3 Operazioni con i limiti

Proposizione 2.9 *Sia $a_n \to l$, $b_n \to m$. Allora*

(i) $a_n + b_n \to l + m$.

(ii) $a_n b_n \to lm$.

Dimostrazione. Per ogni $\epsilon > 0$ esistono $n_\epsilon, n'_\epsilon \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n - l| < \epsilon/2 \quad \text{per ogni } n > n_\epsilon, \quad |b_n - l| < \epsilon/2 \quad \text{per ogni } n > n'_\epsilon.$$

Sia $n''_\epsilon = \max\{n_\epsilon, n'_\epsilon\}$ allora per la disuguaglianza triangolare si ha:

$$|a_n + b_n - l - m| \leq |a_n - l| + |b_n - m| < \epsilon \quad \text{per ogni } n > n''_\epsilon.$$

Quindi $a_n + b_n \to l + m$ e (i) è provata. Proviamo (ii). Cominciamo con l'osservare che grazie alla Proposizione 2.7 esiste $M > 0$ tale che

$$|a_n| + |b_n| \leq M, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Se $n > n''_\epsilon$ si ha quindi:

$$|a_n b_n - lm| \leq |a_n b_n - l b_n| + |l b_n - lm| = |b_n||a_n - l| + |l||b_n - m| \leq (M + |l|)\epsilon,$$

da cui (ii). $\square$

Esercizio 2.10 Sia $a_n \to l$, $b_n \to m$, $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $m \neq 0$. Provare che $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{l}{m}$.

Esercizio 2.11 Sia $a_n \to l$ e sia $K \in \mathbb{R}$ tale che $a_n < K$. Provare che $l \leq K$.

2.4 Punti limite di una successione limitata. Limiti superiore e inferiore

Sia (a_n) una successione limitata. Per studiarne il comportarmento asintotico, per $n \to \infty$ (anche quando la successione non ha limite) è opportuno introdurre i concetti di *punto limite* e *sottosuccessione* di (a_n).

Diremo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un *punto limite* di (a_n) se per ogni $\epsilon > 0$ esistono infiniti indici $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n - \lambda| < \epsilon.$$

Sia λ un punto limite di (a_n). Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$ e

$$|a_{n_k} - \lambda| < \frac{1}{k}.$$

La successione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è detta una *sottosuccessione* di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [(1)]. Ne segue che

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lambda.$$

In generale λ è un punto limite di (a_n) se e solo se esiste una sottosuccessione di (a_n) convergente a λ. Ne segue in particolare che se $a_n \to l$ allora l è l'unico punto limite di (a_n).

Esempio 2.12 Sia [(2)]:

$$a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si ha allora:

$$a_{2k} = \sin(k\pi) = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$a_{4k+1} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$a_{4k-1} = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Quindi $0, 1, -1$ sono punti limite di (a_n).

Fissiamo ora una successione limitata (a_n). Indichiamo con Σ l'insieme dei suoi punti limite. Vogliamo provare che Σ è non vuoto e dotato di massimo e minimo.

Per questo è utile introdurre i concetti di *limite superiore* e *inferiore.* Cominciamo con la definizione del limite superiore. Poniamo:

$$b_1 = \sup_{n\geq 1} a_n,\ b_2 = \sup_{n\geq 2} a_n, ..., b_k = \sup_{n\geq k} a_n, ...$$

---

(1) In generale una *sottosuccessione* di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri naturali strettamente crescente.

(2) In effetti non abbiamo ancora definito il seno di un numero reale. Ciò sarà fatto in seguito nel capitolo sulle serie di funzioni.

È chiaro che (b_n) è una successione decrescente. Quindi dalla Proposizione 2.8 segue che esiste il limite

$$\lim_{k\to\infty} b_k =: l''.$$

l'' è detto il *limite superiore* di (a_n) ed è indicato con $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Si ha quindi:

$$l'' = \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} a_n.$$

Esercizio 2.13 Provare che se $a_n \to l$ risulta $l = l''$.

Studiamo ora alcune proprietà dell'estremo superiore.

Proposizione 2.14 *Sia (a_n) limitata e sia $l'' = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Allora valgono le propietà seguenti.*

(i) Se $\lambda > l''$ allora (a_n) è definitivamente minore di λ, cioè esiste $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < \lambda$ per ogni $n > n_\lambda$.

(ii) Se $\lambda < l''$ allora (a_n) non è definitivamente minore di λ, cioè per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $p_k \in \mathbb{N}$ tale che $a_{p_k} \geq \lambda$.

(iii) l'' è il massimo punto limite di (a_n).

Dimostrazione. (i) Sia $\lambda > l'' = \inf_{k\geq 1} b_k$. Per definizione di estremo inferiore esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $b_k < \lambda$. Ciò implica $\sup_{n\geq k} a_n < \lambda$, cioè $a_n < \lambda$ per ogni $n > k$.

(ii) Sia $\lambda < l'' = \inf_{k\geq 1} b_k$. Allora si ha $b_k > \lambda$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi $\sup_{n\geq k} a_n > \lambda$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ cosicché per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $p_k \in \mathbb{N}$ tale che $a_{p_k} > \lambda$.

(iii) Cominciamo con il provare che l'' è un punto limite di (a_n). Dato $\epsilon > 0$ sappiamo da (i) che esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $a_n < l'' + \epsilon$ per ogni $n > n_\epsilon$. D'altra parte in virtù di (ii) possiamo trovare un indice $p_n > n_\epsilon$ tale che $a_{p_n} > l'' - \epsilon$. Quindi:

$$|l'' - a_{p_n}| < \epsilon.$$

Resta da dimostrare che l'' è il massimo di Σ cioè che se μ è un punto limite di (a_n) risulta $\mu \leq l''$. Dato che μ è un punto limite esiste una sottosuccessione (a_{n_k}) tale che $a_{n_k} \to \mu$. Quindi per ogni $\epsilon > 0$ si ha che $a_{n_k} > \mu - \epsilon$ definitivamente. D'altra parte da (i) segue che $a_{n_k} < l'' + \epsilon$ definitivamente. Quindi risulta $\mu - \epsilon < l'' + \epsilon$ cioè $\mu < l'' + 2\epsilon$. Ciò implica $\mu \leq l''$ per l'arbitrarietà di ϵ. $\square$

Passiamo ora alla definizione del limite inferiore. Poniamo:

$$c_1 = \inf_{n\geq 1} a_n,\ c_2 = \inf_{n\geq 2} a_n, ..., c_k = \inf_{n\geq k} a_n, ...$$

È chiaro che (c_n) è una successione crescente. Quindi dalla Proposizione 2.8 segue che esiste il limite

$$\lim_{k\to\infty} c_k =: l'.$$

l'' è detto il *limite inferiore* di (a_n) ed è indicato con $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Si ha quindi:

$$l' = \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\geq 1}\ \inf_{n\geq k} a_n.$$

Esercizio 2.15 Provare che se $a_n \to l$ risulta $l = l'$.

Studiamo ora alcune proprietà dell'estremo inferiore.

Proposizione 2.16 *Sia (a_n) limitata e sia $l' = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Allora valgono le propietà seguenti.*

(i) Se $\lambda < l'$ allora (a_n) è definitivamente maggiore di λ, cioè esiste $n_\lambda \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > \lambda$ per ogni $n > n_\lambda$.

(ii) Se $\lambda > l''$ allora (a_n) non è definitivamente maggiore di λ, cioè per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $p_k \in \mathbb{N}$ tale che $a_{p_k} < \lambda$.

(iii) l' è il minimo punto limite di (a_n).

Dimostrazione.

(i) Sia $\lambda < l' = \sup_{k\geq 1} c_k$. Per definizione di estremo superiore esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $c_k > \lambda$. Ciò implica $\inf_{n\geq k} a_n > \lambda$, cioè $a_n > \lambda$ per ogni $n > k$.

(ii) Sia $\lambda > l' = \sup_{k\geq 1} c_k$. Allora si ha $c_k < \lambda$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi $\inf_{n\geq k} a_n < \lambda$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ cosicché per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $p_k \in \mathbb{N}$ tale che $a_{p_k} < \lambda$.

(iii) Cominciamo con il provare che l' è un punto limite di (a_n). Dato $\epsilon > 0$ sappiamo da (i) che esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > l' - \epsilon$ per ogni $n > n_\epsilon$. D'altra parte in virtù di (ii) possiamo trovare un indice $p_n > n_\epsilon$ tale che $a_{p_n} < l' + \epsilon$. Quindi:

$$|l' - a_{p_n}| < \epsilon.$$

Resta da dimostrare che l' è il minimo di Σ cioè che se μ è un punto limite di (a_n) risulta $\mu \geq l'$. Dato che μ è un punto limite esiste una sottosuccessione (a_{n_k}) tale che $a_{n_k} \to \mu$. Quindi per ogni $\epsilon > 0$ si ha che $a_{n_k} < \mu + \epsilon$ definitivamente. D'altra parte da (i) segue che $a_{n_k} > l' - \epsilon$ definitivamente. Quindi risulta $l' - \epsilon < \mu + \epsilon$ cioè $\mu > l' - 2\epsilon$. Ciò implica $\mu \geq l'$ per l'arbitrarietà di ϵ. $\square$

Corollario 2.17 *Sia (a_n) una successione limitata in $\mathbb{R}$. Allora $a_n \to l$ se e solo se:*

$$l = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Il corollario seguente è conseguenza immediata delle Proposizioni 2.14, 2.16. Giocherà un ruolo impostante nel seguito.

Corollario 2.18 *Ogni successione limitata ha almeno un punto limite e quindi possiede una sottosuccessione convergente.*

2.5 Criterio di Cauchy

Negli esempi visti in precedenza abbiamo dimostrato che certe successioni sono convergenti ad un limite che conoscevamo in anticipo. Vi sono tuttavia situazioni in cui non è possibile individuare il limite. In questo caso è utile il *critero di Cauchy* seguente.

Definizione 2.19 *Si dice che una successione (a_n) in $\mathbb{R}$ è di* Cauchy *se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:*

$$n, m \in \mathbb{N},\ n > n_\epsilon,\ m > n_\epsilon \Longrightarrow |a_n - a_m| < \epsilon. \tag{2.2}$$

È chiaro che se $a_n \to l$ allora (a_n) è di Cauchy. Infatti, dato $\epsilon > 0$ sia $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|a_n - l| < \epsilon, \quad \forall\, n > n_\epsilon.$$

Allora se $n, m > n_\epsilon$ si ha:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < 2\epsilon,$$

cosicché (a_n) è di Cauchy.

Esercizio 2.20 Sia (a_n) una successione. Provare che se (a_n) è di Cauchy allora è limitata.

Teorema 2.21 *Ogni successione di Cauchy è convergente.*

Dimostrazione. Sia (a_n) una successione di Cauchy. Dall'Esercizio 2.20 sappiamo che (a_n) è limitata. Siano l'' and l' i limiti superiore e inferiore di (a_n). Basta provare che $l' = l''$ (per il Corollario 2.17). Dato $\epsilon > 0$ sia $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che valga (2.2). Dalle Proposizioni 2.14 e 2.16 sappiamo che esistono n_1, n_2 maggiori di n_ϵ tali che

$$|a_{n_1} - l'| < \epsilon, \quad |a_{n_2} - l''| < \epsilon.$$

Ne segue

$$l'' - l' \leq |a_{n_1} - l'| + |a_{n_1} - a_{n_2}| + |a_{n_2} - l''| < 3\epsilon,$$

il che implica $l' = l''$ per l'arbitrarietà di ϵ. $\square$

2.5.1 Il numero e

Consideriamo la successione (s_n) definita da:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Verifichiamo che (s_n) è di Cauchy. Si ha infatti se $n > m$:

$$\begin{aligned} s_n - s_m &= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{n-m-1} \frac{1}{(m+1)^k} \\ &< \frac{1}{(m+1)!} \, \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{mm!}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

avendo usato il fatto che per ogni b tale che $0 < b < 1$ e ogni $h \in \mathbb{N}$ risulta:

$$1 + b + \cdots + b^{h-1} = \frac{1 - b^h}{1 - b} < \frac{1}{1 - b}.$$

Dalla (2.3) segue (s_n) è di Cauchy; basta prendere $n_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$. Il limite di (s_n) per $n \to \infty$ sarà indicato con e. e è detta la costante di *Neper*.

Proviamo che e è *irrazionale*. Ragionando come per la (2.3) si vede che

$$0 < e - s_m < \frac{1}{mm!}. \tag{2.4}$$

Supponiamo per assurdo che $e = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e poniamo in (2.4) $m = q$. Si ottiene allora:

$$0 < (q - 1)!\, p - q!\, s_q < \frac{1}{q}.$$

Ciò è assurdo dato $q! s_q$ è ovviamente intero, cosicché $(q-1)!\, p - q!\, s_q$ è intero e positivo.

Proposizione 2.22 *Risulta:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo:

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

e

$$t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Cominciamo con l'osservare che (t_n) è crescente. Per questo basta sviluppare t_n con la formula del binomio di Newton scrivendo:

$t_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^{n-k}} = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}$

$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!n^n}$

$1 + 1 + \frac{1}{2!}\ \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\ \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right].$

Infatti è chiaro che i primi n termini nell'analoga espressione di t_{n+1} sono maggiori dei corrispondenti termini di t_n. È inoltre ovvio che risulta $t_n < s_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cosicché $t := \lim_{n\to\infty} t_n \leq e$.

Resta da provare che $t \geq e$. Per questo fissiamo $m \in \mathbb{N}$, si ha allora, sempre dalla stessa espressione di t_n

$$t_n \geq 1 + 1 + \tfrac{1}{2!}\,\left(1 - \tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{1}{3!}\,\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n}\right) + \cdots + \tfrac{1}{m!}\,\left[\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \tfrac{m-1}{n}\right)\right].$$

Per $n \to \infty$ (con m fissato) si ottiene

$$t_n \geq 1 + 1 + \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \tfrac{1}{m!} = s_m.$$

Quindi $t \geq s_m$ per ogni m e per $m \to \infty$ si trova $t \geq e$ come richiesto. □

2.6 Successioni illimitate

Useremo la seguente convenzione. Se K è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non limitato superiormente (risp. inferiormente) diremo che l'estremo superiore (risp. inferiore) di K è $+\infty$ (risp. $-\infty$) e scriveremo

$$\sup K = +\infty, \quad (\text{risp. } \inf K = -\infty).$$

Definizione 2.23 *Si dice che una successione* (a_n) tende *a* $+\infty$ *e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \textit{oppure } a_n \to +\infty,$$

se per ogni $M > 0$ *esiste* $n_M \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$a_n > M \quad \text{per ogni } n > n_M. \tag{2.5}$$

In tal caso si dice anche che il limite di (a_n) *è* $+\infty$.

Si dice che una successione (a_n) tende *a* $-\infty$ *e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \textit{oppure } a_n \to -\infty,$$

se per ogni $M > 0$ *esiste* $n_M \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$a_n < -M \quad \text{per ogni } n > n_M, \tag{2.6}$$

In tal caso si dice che il limite di (a_n) *è* $-\infty$.

Esempio 2.24 Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n-1} = +\infty.$$

Infatti

$$\frac{n^2}{n-1} \geq n > M$$

se $n > M$.

2.6.1 Successioni monotone

D'ora in poi useremo la notazione seguente. Se (a_n) è una successione non limitata superiormente poniamo:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty.$$

Se (a_n) non è limitata inferiormente poniamo:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty.$$

Esercizio 2.25 *Provare che se (a_n) è crescente (risp. decrescente) e non limitata superiormente (resp. inferiormente) risulta:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

2.6.2 Operazioni con i limiti

Proposizione 2.26 *Sia $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$. Allora $a_n + b_n \to +\infty$.*
Sia $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$. Allora $a_n + b_n \to -\infty$.

Dimostrazione. Proviamo la prima affermazione. Per ipotesi per ogni $M > 0$ esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n > M, \quad b_n > M, \quad \forall\, n > n_M.$$

Quindi:

$$a_n + b_n > M, \quad \forall\, n > n_M,$$

da cui la tesi. $\square$

Osservazione 2.27 (Forma indeterminata $\infty - \infty$) Sia $a_n \to +\infty,\ b_n \to -\infty$. Allora non si possono dare informazioni in generale sul comportamento di $(a_n + b_n)$ per $n \to \infty$. Consideriamo infatti gli esempi seguenti.

1) Sia $a_n = n^3, b_n = -n^2$. Allora risulta $a_n \to +\infty,\ b_n \to -\infty$ e

$$a_n + b_n = n^2(n-1) \geq n^2.$$

Quindi $a_n + b_n \to +\infty$.

2) Sia $a_n = n,\ b_n = -\sqrt{n^2+1}$. Allora risulta $a_n \to +\infty,\ b_n \to -\infty$ e

$$a_n + b_n = n - \sqrt{n^2+1} = -\frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}}.$$

Quindi $a_n + b_n \to 0$.

Proposizione 2.28 *Sia $a_n \to \pm\infty,\ b_n \to \pm\infty$. Allora $a_n b_n \to +\infty$.*
Sia $a_n \to \pm\infty,\ b_n \to \mp\infty$. Allora $a_n b_n \to -\infty$.

Dimostrazione. Proviamo la prima affermazione. Per ipotesi per ogni $M > 0$ esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n > M, \quad b_n > M, \quad \forall\, n > n_M.$$

Quindi:

$$a_n b_n > M^2, \quad \forall\, n > n_M,$$

da cui la tesi. □

Proposizione 2.29 *Sia $l > 0$, $a_n \to l,\ b_n \to \pm\infty$. Allora $a_n b_n \to \pm\infty$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $b_n \to +\infty$. Per ipotesi per ogni $M > 0$ esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_M$ risulti:

$$a_n > l/2, \quad b_n > M, \quad \forall\, n > n_M.$$

Quindi:

$$a_n b_n > lM, \quad \forall\, n > n_M,$$

da cui la tesi. □

Osservazione 2.30 (Forma indeterminata $0 \times \infty$) Sia $a_n \to 0,\ b_n \to \pm\infty$. Allora non si possono dare informazioni sul comportamento di $(a_n b_n)$ per $n \to \infty$ in generale.

Considerazioni analoghe si posssono fare per il comportamento del limite del quoziente $\frac{a_n}{b_n}$ e per le forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$.

2.6.3 Punti limite di una successione qualunque. Limiti superiore e inferiore

Sia (a_n) una successione di numeri reali. Se (a_n) non è limitata superiormente (risp. inferiormente) si ha, secondo la convenzione fatta all'inizio della sezione 2.6

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{resp. } \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Procedendo come nel caso delle successioni limitate si dice che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un *punto limite* di (a_n) se per ogni $\epsilon > 0$ esistono infiniti indici $n \in \mathbb{N}$ tali che $|a_n - \lambda| < \epsilon$. λ è un punto limite di (a_n) se esiste una sottosuccessione di (a_n) convergente a λ.

Se (a_n) è limitata superiormente definiamo il *limite superiore* di (a_n) ponendo:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} a_n.$$

Se (a_n) è limitata inferiormente definiamo il *limite inferiore* di (a_n) ponendo:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} a_n.$$

Esempio 2.31 Sia:

$$a_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si ha allora:

$$a_{2k} = 2k\sin(k\pi) = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$a_{4k+1} = (4k+1)\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (4k+1), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$a_{4k-1} = (4k-1)\sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -(4k-1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Quindi 0 è un punto limite di (a_n) e risulta:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Capitolo 3

Serie

3.1 Definizioni

Data una successione (a_n) in $\mathbb{R}$ poniamo:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se la successione (s_n) converge a un numero reale s scriveremo:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

e diremo che la *serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

è convergente. Se (s_n) non è convergente diremo che la serie è *divergente.* La successione (s_n) è detta la successione delle *somme parziali* della serie.

Osserviamo che ogni successione (b_n) si può scrivere come una serie ponendo:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 - b_1, ..., a_n = b_n - b_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Quindi il concetto di serie è equivalente a quello di successione anche se certe successioni si presentano naturalmente sotto forma di serie.

Possiamo ora applicare tutti i risultati provati nel capitolo precedente alla successione (s_n). In particolare dal Teorema 2.21 segue il *criterio di Cauchy.*

Proposizione 3.1 *La serie $\sum_{k=1}^\infty a_k$ è convergente se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che*

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \quad \text{per ogni } n, m > n_\epsilon. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Infatti l'ipotesi equivale a dire che la successione (s_n) è di Cauchy. □

Corollario 3.2 *Se la serie $\sum_{k=1}^\infty a_k$ è convergente risulta $a_k \to 0$.*

Dimostrazione. Infatti, posto $n = m + 1$ in (3.1) si ha che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|a_m| < \epsilon$ per ogni $m > n_\epsilon$. □

Osserviamo che la condizione $a_k \to 0$ non è sufficiente per la convergenza della serie (vedi Proposizione 3.13).

Si dice che la serie $\sum_{k=1}^\infty a_k$ è *assolutamente convergente* se la serie dei valori assoluti $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ è convergente. È chiaro che una serie assolutamente convergente è convergente metre il viceversa non vale in generale.

Esercizio 3.3 Sia (a_n) una successione tale che:

$$|a_{n+1} - a_n| \le c_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

dove la serie $\sum_{k=1}^\infty c_n$ è convergente. Provare che la successione (a_n) è convergente.

Esempio 3.4 (Serie geometrica) Sia $x > 0$. Consideriamo la serie *geometrica*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}.$$

Se $x \ge 1$ la serie è ovviamente divergente. Supponiamo $0 < x < 1$. Si ha allora:

$$s_n = 1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Quindi la serie è convergente e si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

3.2 Criteri di convergenza di una serie

3.2.1 Criterio del rapporto

Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Proposizione 3.5 *Supponiamo che $|a_n| > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Se $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ *la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è assolutamente convergente.*

(ii) Se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \quad \text{per ogni } n \geq n_0$, *la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è divergente.*

Dimostrazione. (i) Supponiamo che $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \kappa < 1$. Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che
$$|a_{n+1}| < \kappa |a_n| \quad \text{per ogni } n \geq n_0.$$
Ne segue
$$|a_{n+n_0}| < |a_{n_0}| \kappa^n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$
Quindi se $n > m > n_0$ si ha:
$$|s_n - s_m| \leq \sum_{h=m+1}^{n} |a_h| \leq \frac{|a_{n_0}|}{\kappa^{n_0}} \sum_{h=m+1}^{n} \kappa^h,$$
da cui la tesi per la convergenza della serie geometrica.

(ii) Si ha $|a_{n_0+1}| \geq |a_{n_0}|$ e quindi $|a_n| \geq |a_{n_0}|$ per ogni $n \geq n_0$ cosicché non può essere $a_n \to 0$. □

Esempio 3.6 Sia $x \in \mathbb{R}$ e $a_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. Si ha allora se $x \neq 0$:
$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Quindi la serie $\displaystyle\sum_{k+1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ è convergente.

Osservazione 3.7 Se risulta $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ non si può trarre nessuna conseguenza generale sulla divergenza della serie.

Il criterio del rapporto non dà informazioni sulla convergenza o divergenza di una serie se $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ e $|a_{n+1}| < |a_n|$ definitivamente. Ciò accade in particolare per le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Infatti nel primo caso si ha:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \to 1, \quad \frac{n}{n+1} < 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e nel secondo

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1, \quad \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

mentre la prima seria è divergente e la seconda convergente come vedremo.

3.2.2 Criterio della radice

Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Proposizione 3.8 *(i) Se* $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$ *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è assolutamente convergente.*

(ii) Se $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1$ *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *è divergente.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \kappa < 1$. Allora $|a_n|^{1/n}$ è definitivamente minore di κ, quindi esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n| \le k^n \quad \text{per ogni } n \ge n_0.$$

Proviamo ora che la successione (s_n) delle somme parziali è di Cauchy. Si ha infatti se $n > m > n_0$

$$|s_n - s_m| \le \sum_{h=m+1}^{n} |a_h| \le \sum_{h=m+1}^{n} \kappa^h$$

da cui la tesi per la convergenza della serie geometrica.

Sia ora $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 1$. Allora esistono infiniti interi n_i tali che $|a_{n_i}|$ è maggiore di 1, quindi non risulta $a_n \to 0$. $\square$

Osservazione 3.9 Anche il criterio della radice non dà informazioni sulla convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3.2.3 Serie a termini positivi

In questa sezione consideriamo la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

con $a_k > 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. In questo caso la successione delle somme parziali è strettamente crescente quindi la serie è convergente se e solo se è limitata. Vale inoltre il seguente *criterio del confronto*, la cui semplice dimostrazione è lasciata al lettore.

Proposizione 3.10 *Siano $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ serie a termini positivi e sia $a_k \leq b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ è convergente allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente. Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è divergente allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ è divergente.*

Consideriamo ora il caso in cui la successione (a_n) è *decrescente*. Vale allora il seguente criterio dovuto a Cauchy.

Proposizione 3.11 *La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente (risp. divergente) se e solo se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$ è convergente (risp. divergente).*

Dimostrazione. Poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{2^{k-1}}.$$

Supponiamo che $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$ sia convergente a $t \in \mathbb{R}$. Si ha allora per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots \leq t$$

cosicchè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è anch'essa convergente.

Viceversa supponiamo che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sia convergente a $s \in \mathbb{R}$. Si ha allora per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} t_n &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} \\ &\leq 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + 2(a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots \leq 2s \end{aligned}$$

cosicchè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^{k-1}}$ è convergente. $\square$

Esempio 3.12 Consideriamo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} 2^{1-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Quindi la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ è divergente.

Consideriamo ora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} 2^{2-2k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < +\infty.$$

Quindi la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ è convergente.

3.2.4 Serie a segni alterni

Sia (a_n) una successione a termini positivi. Poniamo:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-1} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposizione 3.13 *Se (a_n) è decrescente e risulta $a_n \to 0$ la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

è convergente.

Dimostrazione. Osserviamo che i termini di ordine dispari e le somme parziali della serie sono ≥ 0 mentre i termini di ordine pari sono ≤ 0.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq s_{2n-1}, \tag{3.2}$$

cosicché la successione (s_{2n+1}) è a termini positivi e decrescente. Quindi esiste $l \geq 0$ tale che $s_{2n+1} \to l$.

Si ha inoltre:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq s_{2n}, \tag{3.3}$$

cosicché la successione (s_{2n}) è a termini positivi e crescente. Si ha inoltre:

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \geq s_{2n}. \tag{3.4}$$

Quindi (s_{2n}) è limitata superiormente cosicché esiste $l_1 \geq 0$ tale che $s_{2n} \to l_1$. Infine, passando al limite per $n \to \infty$ in (3.4) e ricordando che $a_n \to 0$ segue che $l = l^1$, da cui la tesi. $\square$

Ad esempio la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

è convergente.

3.3 Convergenza di medie

Data una una successione (a_n) consideriamo la successione delle medie (p_n) definita da:

$$p_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vedremo nella successiva proposizione che se $a_n \to l$ allora $p_n \to l$. Il viceversa non è vero in generale come nel caso $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Quindi la convergenza delle medie è un concetto più debole di convergenza, detto convergenza secondo *Cesaro* [(1)]

[(1)] La convergenza secondo Cesaro gioca un ruolo importante nello studio delle serie di Fourier.

Proposizione 3.14 *Sia* (a_n) *una successione convergente a* l*. Allora risulta*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = l.$$

Dimostrazione. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > n_\epsilon \Longrightarrow |a_n| < \epsilon.$$

Inoltre dalla Proposizione 2.7 segue che esiste $K > 0$ tale che $|a_n| \leq K, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Si ha allora per ogni $n > n_\epsilon$

$$|p_n - l| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - l \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - l|$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_\epsilon} |a_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{n_\epsilon+1}^{n} |a_k - l|$$

$$\leq 2K \frac{n_\epsilon}{n} + \frac{n - n_\epsilon}{n} \epsilon.$$

Per $n \to \infty$ si ottiene

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n - l| \leq \epsilon.$$

Data l'arbitrarietà di ϵ ne segue

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n - l| = 0,$$

il che implica $p_n \to l$. $\square$

Esercizio 3.15 Data una successione (a_n) provare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n-1}),$$

nell'ipotesi che i limiti suddetti esistano.

Suggerimento. Considerare la successione (b_n) definita da

$$b_n = a_n - a_{n-1}.$$

$\square$

Capitolo 4

Funzioni reali di una variabile reale. Limiti e continuità

In questo capitolo studiamo applicazioni f definite in un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$:

$$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x).$$

Come insieme I scegliamo un *intervallo* cioè un insieme non vuoto, contenente almeno due numeri e tale che se contiene due numeri contiene tutti i numeri intermedi, ovvero tale che:

$$tx + (1-t)y \in I \quad \forall\, x, y \in I,\ 0 \le t \le 1.$$

Indichiamo con $f(I) = \{f(x) :\ x \in I\}$ l'*immagine* di f.

Sia I un intervallo limitato. Poniamo:

$$\inf I = a, \quad \sup I = b.$$

I ha una delle forme seguenti a seconda che a e b siano o no punti di minimo o massimo di I:

- $I = \{x \in \mathbb{R} :\ a \le x \le b\} =: [a, b]$ intervallo chiuso,
- $I = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\} =: (a, b)$, intervallo aperto,
- $I = \{x \in \mathbb{R} :\ a \le x < b\} =: [a, b)$, intervallo aperto a destra,
- $I = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \le b\}$, intervallo aperto a sinistra.

Sia ora I non limitato. Se $\inf I = a \in \mathbb{R}$ e $\sup I = +\infty$ si ha

- $I = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\} =: [a, +\infty)$, intervallo chiuso,

  oppure

- $I = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} =: (a, +\infty)$, intervallo aperto.

Se $\inf I = -\infty$, $\sup I = b \in \mathbb{R}$ si ha

- $I = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\} =: [-\infty, b)$, intervallo chiuso, oppure

- $I = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\} =: (-\infty, b)$, intervallo aperto.

Infine se $\inf I = -\infty$ e $\sup I = +\infty$ si ha $I = \mathbb{R}$.

In ogni caso i numeri a e b sono detti *estremi* dell'intervallo I.

4.1 Limiti

Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$. Sia inoltre x_0 un elemento di I o un suo estremo e $l \in \mathbb{R}$ [(1)].

Si dice che $f(x)$ *tende a* l *per* x *tendente a* x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - l| < \epsilon \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon) \cap I \textit{ diverso da } x_0.$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Osservazione 4.1 Il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ dipende soltanto dal comportamento di f "vicino" a x_0 ma non dal suo comportamento in x_0 (nel caso in cui $x_0 \in I$).

Più precisamente sia J un intervallo contenuto in I tale che x_0 appartiene a J o a un suo estremo e sia f_J la restrizione di f a J [(2)]. È chiaro allora che risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f_J(x).$$

La proposizione seguente riconduce il concetto di limite di una funzione a quello di limite per le successioni.

[(1)] Come vedremo negli esempi è utile considerare il caso in cui $x_0 \notin I$ ma coincide con uno degli estremi di I.

[(2)] $f_J : J \to \mathbb{R}$ è definita da $f_J(x) = f(x)$ per ogni $x \in J$.

Proposizione 4.2 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, x_0 appartenente a I o a un suo estremo e $l \in \mathbb{R}$. Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

(ii) Per ogni successione $(x_n) \subset I \setminus \{x_0\}$ tale che $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to l$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) è evidente. Proviamo che (ii) $\Rightarrow$ (i). Supponiamo per assurdo che valga (ii) ma non (i). Allora esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ diverso da x_0 e risulta $|f(x) - l| \geq \epsilon_0$.

Fissato $\epsilon_0 > 0$ scegliamo $\delta = \frac{1}{n}$ e sia $x_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap I \setminus \{x_0\}$ tale che:

$$|f(x_n) - l| \geq \epsilon_0. \tag{4.1}$$

Osserviamo che $|x_0 - x_n| \leq \frac{1}{n}$ cosicché $x_n \to x_0$. Per l'ipotesi (ii) ne segue allora che $f(x_n) \to l$ il che contraddice (4.1). $\Box$

Usando la Proposizione 4.2 e i risultati sulle successioni del Capitolo 2 si ha immediatamente l'unicità del limite e il risultato seguente.

Proposizione 4.3 *Siano f, g applicazioni di un intervallo I in $\mathbb{R}$ e sia x_0 appartenente a I o a un suo estremo. Supponiamo inoltre che esistano i limiti:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1$$

Valgono allora le affermazioni seguenti:

(i) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + l_1$

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ll_1$.

(iii) Se inoltre esiste $\lambda > 0$ tale che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (x_0 - \lambda, x_0 + \lambda)$, si ha $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = l/l_1$.

La proposizione seguente permette di confrontare il limite di $f(x)$ con quello di altre funzioni. La semplice dimostrazione è lasciata al lettore.

Proposizione 4.4 (di confronto) *Siano $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, x_0 appartenente a I o a un suo estremo. Supponiamo che:*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Allora se esistono i limiti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l,$$

si ha:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l.$$

Esempio 4.5 1) Sia $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^2.$$

2) Sia $I = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Proviamo che

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0.$$

In virtù dell'Osservazione 4.1 possiamo limitarci agli $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. In tal caso risulta:

$$0 \leq |\sin x| \leq |x|$$

e la tesi segue dalla Proposizione 4.4.

In modo analogo si prova che:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

3) Sia $I = (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Proviamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ragionando come nell'esempio precedente possiamo limitarci agli $x \in (0, \pi/2)$. Si ha:

$$\sin x \leq x \leq \tan x, \quad \forall\, x \in (0, \pi/2),$$

il che implica:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \quad \forall\, x \in (0, \pi/2).$$

La tesi segue dalla Proposizione 4.4.

4) Sia $I = \mathbb{R}$ e sia f definita da:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Da notare che $f(0) = 1$.

5) Sia $I = \mathbb{R}$ e sia H la funzione di *Heavside* definita da:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora è facile vedere che non esiste il limite

$$\lim_{x \to 0} H(x).$$

Consideriamo le restrizioni $H_{(0,+\infty)}$ e $H_{(-\infty,0]}$ di H a $(0, +\infty)$ e $(-\infty, 0]$ rispettivamente. Allora risulta:

$$\lim_{x \to 0} H_{(0,+\infty)} = 1, \quad \lim_{x \to 0} H_{(-\infty,0]} = 0.$$

Ciò ci induce a porre:

$$\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} H(x) = 0.$$

4.1.1 Limiti infiniti

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 un elemento di I o un suo estremo. Si dice che f tende a $+\infty$ (risp. $-\infty$) per $x \to x_0$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta_M > 0$ tale che

$$f(x) > M \quad (\text{risp. } f(x) < -M) \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \cap I \textit{ diverso da } x_0.$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{risp. } f(x) < -M) \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Si possono ora ripetere con ovvie modifiche le considerazioni precedenti. In particolare per provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

basterà provare che per ogni successione $(x_n) \in I \setminus \{x_0\}$ convergente a x_0 risulta $f(x_n) \to l$.

Esempio 4.6 1) Sia $I = (0, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ per ogni $x > 0$. Si ha allora:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

2) Sia $I = [0, +\infty)$ e f definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0, \\ 3 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si ha allora:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

3) Sia $I = \mathbb{R}$ e f definita da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Allora non esiste il limite

$$\lim_{x\to 0} f(x).$$

Consideriamo le restrizioni $f_{(1,+\infty)}$ e $f_{(-\infty,1)}$ di f a $(1, +\infty)$ e $(-\infty, 1)$ rispettivamente. Allora risulta:

$$\lim_{x\to 1} H_{(0,+\infty)} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1} H_{(-\infty,0]} = -\infty.$$

Per questo poniamo:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

4.1.2 Limiti per $x \to \pm\infty$

Sia I un intervallo non limitato a destra (risp. sinistra) e $f : x \in I \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$.

Si dice che f tende a l per $x \to +\infty$ (risp. $-\infty$) se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $M_\epsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - l| < \epsilon, \quad \text{per ogni } x \in (M_\epsilon, +\infty) \cap I \quad \text{risp. per ogni } x \in (-\infty, -M_\epsilon).$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \quad \text{risp.} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = l.$$

In modo analogo si definisce $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

4.2 Funzioni continue

Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è *continua* nel punto $x_0 \in I$ se risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se f non è continua in x_0 si dice che x_0 è un *punto di discontinuità* di f. Se f è continua in ogni punto di I si dice che f è *continua* nell'intervallo I.

Dalle Proposizioni 4.2 e 4.3 segue immediatamente che

Proposizione 4.7 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia x_0 appartenente a I. Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(i) f è continua in x_0.

(ii) Per ogni successione $(x_n) \subset I$ convergente a x_0 si ha $f(x_n) \to f(x_0)$.

Proposizione 4.8 *Siano f, g applicazioni di un intervallo I in $\mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Supponiamo inoltre che f e g siano continue in x_0 allora $f + g$ e fg sono continue in x_0.*

Il teorema seguente è importante anche se di facile dimostrazione.

Teorema 4.9 (Permanenza del segno) Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua nel punto $x_0 \in I$ e tale che $f(x_0) > 0$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che:

$$f(x) > 0, \quad \forall\, x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Dimostrazione. Dato che f è continua in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che:

$$-\frac{1}{2}\, f(x_0) < f(x) - f(x_0) < \frac{1}{2}\, f(x_0), \quad \forall\, x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Quindi $f(x) > \frac{1}{2}\, f(x_0) > 0$. $\square$

Esercizio 4.10 Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ continue nel punto $x_0 \in I$ e sia $g(x_0) > 0$. Provare che esiste un intervallo $J \subset I$ contenente x_0 tale che $\frac{f_J}{g_J}$ è continua in x_0, dove f_J e g_J sono le restrizioni di f e g a J.

Vogliamo ora provare che la composta di due funzioni continue è continua. Per questo consideriamo due funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ tali che $f(I) \subset J$. Consideriamo la funzione:

$$h(x) := f(g(x)), \quad \forall\, x \in H.$$

Vale allora il risultato seguente.

Teorema 4.11 *Se f è continua in un punto $x_0 \in I$ e se g è continua in $f(x_0)$ si ha che g è continua in x_0.*

Dimostrazione. Infatti se $x_n \to x_0$ in I si ha $g(x_n) \to g(x_0)$ per la continuità di g e quindi $f(g(x_n)) \to f(g(x_0))$ per la continuità di f. $\square$

Passiamo infine alla continuità della funzione inversa. Sia I un intervallo limitato e sia $f : I \to \mathbb{R}$ iniettiva e tale che $J := f(I)$ sia un intervallo. Allora risulta definita la *funzione inversa*

$$g : J \to \mathbb{R},\ y \mapsto g(y) = x,$$

dove x è l'unico elemento di I tale che $f(x) = y$.

Teorema 4.12 *Se f è continua in x_0 risulta g continua in $y_0 := f(x_0)$*

Dimostrazione. Si deve provare che se $(y_n) \subset J$ tende a y_0 si ha $g(y_n) \to x_0$. Dato che f è iniettiva, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in I$ tale che $f(x_n) = y_n$. Sia λ un punto limite di (x_n) e (x_{n_k}) una sottosuccessione convergente a λ. Si ha allora $f(x_{n_k}) \to f(z_0) = f(x_0)$ cosicchè $\lambda = x_0$. Si è così dimostrato che ogni punto limite di (x_n) è uguale a x_0. In altri termini x_0 è il solo punto limite di (x_n) equindi $x_n \to x_0$ come richiesto. $\square$

Esempio 4.13 1) La funzione $f(x) = \sin x$ definita su $\mathbb{R}$ è continua in ogni punto x_0 di $\mathbb{R}$. Si ha infatti per ogni $h \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x_0 + h) - \sin x_0 = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0.$$

Quindi

$$|\sin(x_0+h)-\sin x_0| \le |\sin x_0|\ |1-\cos h|+|\cos x_0||\sin h| \le (1-\cos h)+|\sin h|.$$

Se $|h| < \frac{\pi}{2}$ si ha $|\sin h| \leq |h|$ e $1 - \cos h < \frac{1}{2}\, h^2$ (vedi Esempio 4.5) quindi

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0,$$

cosicché la funzione $f(x) = \sin x$ è continua in $\mathbb{R}$.

Consideriamo ora la funzione:

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dato che f è strettamente crescente risulta definita e continua la sua inversa g in $(-1, 1)$ (Teorema 4.12),

$$g(y) := \arcsin y, \quad y \in (-1, 1).$$

In modo analogo si prova la continuità di $\cos x$ in $\mathbb{R}$.

2) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

f è continua (vedi Esercizio 4.10) e strettamente crescente. Quindi risulta definita e continua la sua inversa g in $\mathbb{R}$,

$$g(y) := \arctan y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

3) Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ per ogni x di $\mathbb{R}$. Ricordiamo che (Esempio 2.4) si ha

$$\lim_{n \to \infty} e^{1/n} = 1$$

Dato che f è strettamente crescente ne segue facilmente che:

$$\lim_{x \to 0} e^x = 1,$$

cioè che f è continua in 0.

Possiamo ora dimostrare facilmente la continuità di f in ogni $x_0 \in H$. Si ha infatti:

$$\lim_{x \to x_0} (e^x - e^{x_0}) = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} (e^{x - x_0} - 1) = 0.$$

Sia g la funzione inversa di f,

$$g(y) = \log y, \quad y \in (0, +\infty).$$

Dal Teorema 4.12 segue che g è continua.

Capitolo 5

Funzioni reali continue in un intervallo

In questo capitolo studiamo alcune proprietà globali delle funzioni reali e continue in un intervallo I di $\mathbb{R}$.

5.1 Continuità uniforme

Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I (cioè in ogni punto di I). Allora per ogni $x \in I$ e ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_{x,\epsilon} > 0$ tale che:

$$x, y \in I,\ |x - y| < \delta_{x,\epsilon} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Se è possibile trovare $\delta_{x,\epsilon}$ indipendente da x si dice che f è *uniformemente continua* in I. Si ha cioè la definizione seguente.

Definizione 5.1 *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è detta uniformemente continua se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:*

$$x, y \in I,\ |x - y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon. \tag{5.1}$$

L'uniforme continuità è una proprietà importante di una funzione continua come si vedrà nel seguito. Una prima conseguenza della uniforme continuità è la seguente.

Proposizione 5.2 *Sia $I = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e sia f uniformemente continua in I. Allora è possibile estendere univocamente f a una funzione continua su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Basta provare che esistono finiti i limiti:

$$\lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{x\to b} f(x),$$

dopo di che posto:

$$f(a) := \lim_{x\to a} f(x), \quad f(b) := \lim_{x\to b} f(x),$$

è chiaro che f è continua in $[a, b]$.

Proviamo ad esempio che esiste il $\lim_{x\to b} f(x)$. Per questo cominciamo con il considerare una successione $(x_n) \subset I$ convergente a b e proviamo che la successione $(f(x_n))$ è di Cauchy. Poi proveremo che il limite di $(f(x_n))$ non dipende dalla scelta di (x_n).

Dato che f è uniformemente continua in (a, b), per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che valga l'implicazione (5.1). Inoltre, dato che $x_n \to b$, esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$|x_n - b| < \frac{1}{2}\,\delta_\epsilon, \quad \forall\, n > n_\epsilon.$$

Se $n, m > n_\epsilon$ si ha allora

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - b| + |x_m - b| < \delta_\epsilon$$

e quindi

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon.$$

Ciò significa che la successione $(f(x_n))$ è di Cauchy cosicché esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_n) \to l$.

Sia ora $(y_n) \subset I$ un'altra successione convergente a b e sia $f(y_n) \to l'$. Dato $\epsilon > 0$ esiste $n'_\epsilon > n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n > n'_\epsilon \Rightarrow |x_n - b| < \frac{1}{2}\,\delta_\epsilon, \quad |y_n - b| < \frac{1}{2}\,\delta_\epsilon.$$

Quindi se $n > n'_\epsilon$ si ha

$$|x_n - y_n| \leq |b - x_n| + |b - y_n| < \delta_\epsilon.$$

Per $n \to \infty$ si ottiene $|l - l'| \leq \epsilon$ da cui $l = l'$ per l'arbitrarietà di ϵ. $\Box$

Vediamo ora alcuni esempi di funzioni uniformemente continue.

Esempio 5.3 Si dice che $f : I \to \mathbb{R}$ è *lipschitziana* se esiste $K > 0$ tale che:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall\, x, y \in I,$$

che è α-*hölderiana*, $\alpha \in (0,1)$, se esiste $K_\alpha > 0$ tale che:

$$|f(x) - f(y)| \leq K_\alpha |x - y|^\alpha, \quad \forall\, x, y \in I.$$

Si vede facilmente che una funzione lipschitziana o α-hölderiana è uniformemente continua.

Ad esempio se f è α-hölderiana basta prendere in (5.1)

$$\delta_\epsilon = \left(\frac{\epsilon}{K_\alpha}\right)^{1/\alpha},$$

poiché se $|x - y| < \delta_\epsilon$ si ha:

$$|f(x) - f(y)| \leq K_\alpha |x - y|^\alpha < K_\alpha \delta_\epsilon^\alpha = \epsilon.$$

Una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ non è necessariamente uniformemente continua come si vede con facili controesempi. Però ciò accade se I è chiuso e limitato. Si ha infatti il risultato seguente.

Teorema 5.4 (Heine-Cantor) *Sia I un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Allora esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $x, y \in I$ tali che

$$|x - y| < \delta, \quad |f(x) - f(y)| \geq \epsilon_0.$$

Dato $n \in \mathbb{N}$ e scelto $\delta = \frac{1}{n}$ ne segue che esistono $x_n, y_n \in I$ tali che

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0.$$

Dato che I è limitato le successioni (x_n) e (y_n) sono limitate; quindi esistono due sottosuccessioni (x_{n_k}) e (y_{n_k}) convergenti a due punti x_0 e y_0 rispettivamente. Dato che I è chiuso si ha $x_0, y_0 \in I$. Passando al limite per $n \to \infty$ nelle disuguaglianze:

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}, \quad |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon_0,$$

risulta $x_0 = y_0$ e $|f(x_0) - f(y_0)| \geq \epsilon_0$ il che è assurdo. $\square$

Esempio 5.5 1) Sia $I = \mathbb{R}$ e $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha allora:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Quindi f è lipschitziana.

2) Sia $I = \mathbb{R}$ e $f(x) = \sin x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Proviamo che esiste $M > 0$ tale che

$$|\sin x - \sin y| \leq M|x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Posto $y - x = h$ la (5.2) diventa

$$|\sin(x + h) - \sin x| \leq M|h|, \quad \forall\, x, h \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Dato che

$$\sin(x + h) - \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x,$$

si ha:

$$|\sin(x + h) - \sin x| \leq |1 - \cos h| + |\sin h|.$$

Se $|h| < \pi/2$ si ha:

$$|\sin h| \leq |h|, \quad |1 - \cos h| \leq \frac{1}{2}\, h^2 \leq \pi/4|h|$$

e quindi

$$|\sin(x + h) - \sin x| \leq (1 + \pi/4)|h|.$$

Se $|h| \geq \pi/2$ si ha:

$$|\sin(x + h) - \sin x| \leq 2 \leq \frac{4}{\pi}|h|.$$

Quindi (5.3) è dimostrata.

3) La funzione $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ non è uniformemente continua. Infatti posto:

$$x_n = n + \frac{1}{n}, \quad y_n = n,$$

si ha $|x_n - y_n| = \frac{1}{n}$ e

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \frac{1}{n^2} + 2 > 2.$$

.

4) Sia $I = (0,1)$ e $f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall\, x \in (0,1)$. Allora f non è uniformemente continua. Infatti, posto

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n+1},$$

si ha

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| = 1.$$

Esercizio 5.6 1) Provare che per ogni $\alpha \in (0,1)$ la funzione $f(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$ è α-*hölderiana*.

2) Provare che la funzione:

$$f(x) = \sin(1/x), \quad x \in (0,1)$$

non è uniformemente continua.

5.2 Massimi e minimi

Sia I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$. Si dice che $x_0 \in I$ è un punto di *massimo* (risp. *minimo*) di f se risulta:

$$f(x_0) = \sup_{x \in I} f(x), \quad (\text{resp } f(x_0) = \inf_{x \in I} f(x)).$$

In tal caso si dice anche che f ha massimo (risp. minimo) in x_0.

Teorema 5.7 (Weierstrass) *Sia I un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ha massimo e minimo in I.*

Dimostrazione. Ci limitiamo a provare l'esistenza del massimo, quella del minimo essendo analoga. Cominciamo con il provare che f è limitata superiormente. Supponiamo per assurdo ciò non sia vero. Allora esiste una successione $(x_n) \subset I$ tale che

$$f(x_n) \geq n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Dato che I è limitato la successione (x_n) è limitata. Quindi esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente a un elemento x_0 che appartiene a I dato che I è un intervallo chiuso. Allora per la continuità di f risulta:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0),$$

il che contraddice (5.4). Poniamo:

$$M = \sup_{x\in I} f(x)$$

e sia $(x_n) \subset I$ una successione tale che

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ragionando come sopra si vede che esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente a un elemento x_0 di I. Per la continuità di f si ha $f(x_0) = M$. Quindi x_0 è punto di minimo. □

Se l'intervallo I non è chiuso e limitato non è detto in generale che una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ assuma massimo e minimo. Ad esempio la funzione $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$ non ha né massimo né minimo mentre la funzione $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0,1]$ non ha massimo. Per garantire l'esistenza del massimo di $f : I \to \mathbb{R}$ quando I non è chiuso e limitato occorrono ulteriori ipotesi, come ad esempio nel risultato seguente.

Proposizione 5.8 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e tale che:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty.$$

Allora f ha massimo in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poniamo $\lambda = \max_{[-1,1]} f$. Dato che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ esiste $K > 0$ tale che:

$$f(x) \le \lambda - 1, \quad \forall\, x \in (-\infty, K] \cup [K, +\infty).$$

Quindi risulta:

$$\sup_{\mathbb{R}} f = \sup_{[-K,K]} f$$

e, applicando il Teorema di Weierstrass alla restrizione di f all'intervallo $[-K, K]$, si vede che esiste $x_0 \in [-K, K]$ tale che $f(x_0) = M$. □

5.3 Esistenza degli zeri

Teorema 5.9 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Siano $a, b \in I$ con $a < b$ tali che $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Sia

$$E = \{x \in [a, b] : \ f(x) > 0\}.$$

Osserviamo che E è non vuoto dato che contiene il punto a. Sia $\lambda = \sup_E$. Allora $\lambda \in (a, b)$ e risulta $f(\lambda) \geq 0$. Supponiamo per assurdo che $f(\lambda) > 0$. Allora dal teorema della permanenza del segno segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \cap [a, b].$$

Ciò contraddice la definizione di estremo superiore. □

Corollario 5.10 *Sia I un intervallo e f una funzione continua su I. Allora $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Occorre provare che se $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ allora ogni $z \in (f(x_1), f(x_2))$ appartiene a $f(I)$. Supponiamo ad esempio che $f(x_1) > f(x_2)$ (il caso in cui $f(x_1) < f(x_2)$) si tratta analogamente) e sia λ tale che $f(x_1) > \lambda > f(x_2)$. Poniamo $g(x) = f(x) - \lambda$. Allora g è continua e risulta:

$$g(x_1) > 0, \quad g(x_2) < 0.$$

Quindi per il Teorema 5.9 esiste $z \in (x_1, x_2)$ tale che $g(z) = 0$ ovvero tale che $f(z) = \lambda$ come richiesto. □

Osservazione 5.11 Il Teorema 5.9 può essere utilizzato in certi casi per la risoluzione dell' equazione $f(x) = 0$. Ad esempio sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Allora esistono $x_1 < x_2$ tali che

$$f(x_1) > 0, \quad f(x_2) < 0.$$

Quindi per il Teorema 5.9 esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale $f(x_0) = 0$.

5.4 Funzioni monotone

Sia I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Si dice che f è *crescente* (resp. *decrescente*) in I se:

$$x_1, x_2 \in I \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (risp. } f(x_1) \geq f(x_2)). \tag{5.5}$$

Se in (5.5) vale il segno minore (risp. maggiore) si dice che f è *strettamente crescente* (resp. *strettamente decrescente*) in I. Una funzione crescente o decrescente è detta *monotona*.

Vogliamo mostrare ora che una funzione monotona in un intervallo I è continua tranne al più in un sottoinsieme numerabile di I. Per questo conviene introdurre il concetto di limite destro e sinistro.

Definizione 5.12 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in I$. Si dice che f ammette limite l per $x \to x_0^-$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che*

$$x \in (a, x_0) \cap (x_0 - \delta_\epsilon, x_0) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

Si dice che f ammette limite l per $x \to x_0^+$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$x \in (x_0, b) \cap (x_0, x_0 + \delta_\epsilon) \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Si verifica facilmente che se risulta:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l,$$

allora f è continua in x_0.

Teorema 5.13 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ crescente sia $x_0 \in (a, b)$. Allora esistono i limiti:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x) \tag{5.6}$$

e

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{x \in (x_0, b)} f(x). \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Proviamo ad esempio (5.7) e poniamo:

$$l = \inf_{x \in (x_0, b)} f(x).$$

Per definizione di estremo inferiore, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $x_\epsilon \in (x_0, b)$ tale che:

$$f(x_\epsilon) < l + \epsilon.$$

Poniamo $\delta_\epsilon = x_\epsilon - x_0$, allora per la crescenza di f vale l'implicazione:

$$x \in (x_0, b),\ x - x_0 < \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq f(x_\epsilon) - f(x_0) < \epsilon.$$

□

Poniamo:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) := f(x_0^-), \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) := f(x_0^+)$$

e indichiamo con $r(x_0)$ il *salto* di f in x_0:

$$r(x_0) = f(x_0^+) - f(x_0^-).$$

Se f è crescente risulta evidentemente:

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

Esercizio 5.14 Nelle ipotesi del Teorema 5.13 provare che esistono (non necessariammente finiti) i limiti:

$$\lim_{x \to a} f(x), \quad \lim_{x \to b} f(x)$$

Analoghi risultati valgono se f è decrescente.

Proposizione 5.15 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora l'insieme dei punti di discontinuità Λ di f è al più numerabile.*

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio f crescente. Poniamo:

$$\Lambda_1 = \{x \in (a, b) :\ r(x) \geq 1\}, \quad \Lambda_n = \left\{x \in (a, b) :\ \frac{1}{n} \leq r(x) < \frac{1}{n-1}\right\},\ n = 2, ...$$

È chiaro che tutti i $\Lambda_n,\ n \in \mathbb{N}$, sono insiemi finiti perchè la somma dei salti non può superare $f(b) - f(a)$. Ne segue che la cardinalità dell'insieme:

$$\{x \in (a,b):\ r(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n,$$

è al più quella del discreto. $\Box$

La dimostrazione del semplice corallario seguente è lasciata al lettore.

Corollario 5.16 *Se f è crescente in $[a,b]$ e $f([a,b])$ è un intervallo, f è continua in $[a,b]$.*

5.5 Funzioni convesse

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è detta *convessa* se risulta

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y), \quad \forall\, x, y \in I,\ t \in [0,1]. \tag{5.8}$$

Per vedere il significato geometrico della (5.8) introduciamo il concetto di *epigrafico*. L'epigrafico di f è l'insieme dei punti che stanno al di sopra del suo grafico, cioè:

$$\text{Epi}\,(f) := \{(x,y)\ \in \mathbb{R}^2 :\ x \in I,\ y \ge f(x)\}.$$

Dalla definizione (5.8) segue immediatamente che f è convessa se e solo se il suo epigrafico è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^2$. Ciò significa che se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) appartengono a Epi (f) allora il segmento che li congiunge vi appartiene. In altri termini, vale l'implicazione:

$$(x_1, y_1) \in \text{Epi}\,(f), (x_2, y_2) \in \text{Epi}\,(f),\ t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in \text{Epi}\,(f).$$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è detta *concava* se $-f$ è convessa.

Teorema 5.17 *Ogni funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ convessa è continua.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in (a,b)$. Sia inoltre $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$ tale che $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Cominciamo con il provare che f è continua a destra in x_0 cioè che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0). \tag{5.9}$$

Per questo basterà dimostrare che se $(x_n) \subset (x_0, \beta)$ è una successione convergente a x_0 si ha $f(x_n) \to f(x_0)$. Essendo $x_0 < x_n < \beta$ esiste $t_n \in (0,1)$ tale che

$$x_n = (1 - t_n)x_0 + t_n\beta, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.10}$$

t_n è dato da:

$$t_n = \frac{x_n - x_0}{\beta - x_0}.$$

Per la convessità di f si ha allora,

$$f(x_n) \le (1 - t_n)f(x_0) + t_n f(\beta), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

Inoltre, dato che $t_n \to 0$, passando al limite per $n \to \infty$ in (5.11), si ottiene:

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \le f(x_0). \tag{5.12}$$

Osserviamo ora che, essendo $\alpha < x_0 < x_n$, esiste $s_n \in (0,1)$ tale che:

$$x_0 = (1 - s_n)\alpha + s_n x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.13}$$

s_n è dato da:

$$s_n = \frac{x_0 - \alpha}{x_n - \alpha}.$$

Per la convessità di f si ha,

$$f(x_0) \le (1 - s_n)f(\alpha) + s_n f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Dato che $s_n \to 1$, passando al limite per $n \to \infty$ in (5.14), si ottiene:

$$f(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n). \tag{5.15}$$

Da (5.12) e (5.15) segue (5.9). Così si è dimostrata la continuità a destra di f in x_0. La continuità a sinistra si prova in modo analogo.

Esercizio 5.18 Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convessa. Posto:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{if } x \in [a, b), \\ f(b) + 1, & \text{if } x = b, \end{cases}$$

provare che $\hat{f}$ è convessa; dedurne che una funzione convessa definita in un intervallo chiuso non è necessariamente continua.

Capitolo 6

Derivate

6.1 Definizione di derivata

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se f è continua in x_0 sappiamo che al tendere di h a 0 il valore $f(x_0+h)$ si avvicina indefinitamente a $f(x_0)$ ma non abbiamo alcuna informazione sulla "velocità" di avvicinamento. Cerchiamo allora di esprimere l'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ come un termine proporzionale a h più un resto $r(h)$ "piccolo", scrivendo:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + r(h), \quad h \in (a - x_0, b - x_0).$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è da scegliere.

Definizione 6.1 *Si dice che f è* derivabile *in x_0 se esiste un numero $f'(x_0)$ e una funzione $r : (a - x_0, b - x_0) \to \mathbb{R}$ tali che:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h), \quad \forall\, h \in (a - x_0, b - x_0) \tag{6.1}$$

e

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0. \tag{6.2}$$

Se ciò accade si dice che $f'(x_0)$è la derivata *di f nel punto x_0. Si scrive anche $Df(x_0) = f'(x_0)$.*

Con la (6.2) intendiamo che:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{r(h)}{h} = 0, \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Se f è derivabile in ogni punto di (a, b) si dice che è derivabile in (a, b)

Esercizio 6.2 Verificare che la derivata $f'(x_0)$ è definita univocamente cioè che se risulta:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=ah+r_1(h), \quad \forall\, h\in(a-x_0,b-x_0),$$

dove $a\in\mathbb{R}$ e $r_1:(a-x_0,b-x_0)\to\mathbb{R}$ è tale che $\lim_{h\to 0}\frac{r_1(h)}{h}=0$, allora $a=f'(x_0)$.

Osservazione 6.3 Supponiamo che f sia derivabile in x_0, allora da (6.2) segue che

$$\lim_{h\to 0^\pm}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0). \tag{6.3}$$

Nel seguito scriveremo $\lim_{h\to 0}$ per semplicità.

Viceversa se esiste $a\in\mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a,$$

posto:

$$r(h)=f(x_0+h)-f(x_0)-ah, \quad \forall\, h\in(a-x_0,b-x_0),$$

si ha $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0$ cosicché f è derivabile in x_0 e $f'(x_0)=a$.

Osservazione 6.4 Può accadere che f non sia derivabile in x_0 ma esista il limite

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=:l' \quad \left(\text{risp. }\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=:l''\right).$$

In tal caso l' (risp. l'') è detto la *derivata sinistra* (risp. *derivata destra*) di f in x_0 ed è denotato con $D^+f(x_0)$ (risp. $D^-f(x_0)$). Ovviamente se esistono e coincidono $D^+f(x_0)$ e $D^-f(x_0)$ si ha che f è derivabile in x_0.

6.1.1 Derivata di alcune funzioni elementari

1) Sia f *costante*, $f(x)=c$ per ogni $x\in I$. Allora $f'(x)=0$ per ogni $x\in I$.

2) Se $f(x)=x^n$, $x\in\mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}((x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Quindi $Dx^n = nx^{n-1}$.

3) Sia $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$. Si ha allora:

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x$$

$$= \sin x[\cos h - 1] + \cos x \sin h.$$

Dato che

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0,$$

si ha:

$$D\sin(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

In modo analogo si prova che $D\cos x = -\sin x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

6.2 Regole di derivazione

Proposizione 6.5 *Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ siano derivabili in $x \in (a,b)$. Allora valgono le affermazioni seguenti:*

(i) $f + g$ è derivabile in x e risulta

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

(ii) fg è derivabile in x e risulta

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(iii) Sia inoltre $g(x) \neq 0$ in (a,b). Allora f/g è derivabile in x e risulta

$$(f/g)'(x) = \frac{1}{g^2(x)}\,(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)).$$

Dimostrazione. (i) segue facilmente dalla Proposizione 4.3-(i). Proviamo (ii). Si ha:

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x)),$$

da cui
$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\, \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$
La conclusione segue ora passando al limite per $h \to 0$ tenendo conto della continuità della funzione g in x e della Proposizione 4.3-(ii).

Proviamo infine (iii). Si ha
$$\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$
$$= \frac{(f(x+h)-f(x))g(x)-g(x)(g(x+h)-g(x))}{g(x+h)g(x)}.$$
La tesi segue ora dividendo ambo i membri di questa uguaglianza per h e passando al limite per $h \to 0$. $\square$

Esercizio 6.6 Consideriamo la funzione:
$$h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$
Provare che
$$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

6.2.1 Derivazione della funzione inversa

Proposizione 6.7 *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e strettamente crescente (risp. decrescente) e sia $g = f^{-1} : J = f((a,b)) \to \mathbb{R}$ la sua inversa. Supponiamo che f sia derivabile in $x_0 \in (a,b)$ e che $f'(x_0) \neq 0$. Allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta;*
$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{6.4}$$

Dimostrazione. Sia $y_0 \in J$ e sia $k \in \mathbb{R}$ tale che $y_0 + k \in J$. Dato che f è strettamente crescente esiste unico $h(k) \in R$ tale che $x_0 + h \in (a,b)$ e $y_0 + k = f(x_0 + h(k))$. Si ha quindi $x_0 + h(k) = g(y_0 + k)$ e
$$h(k) = g(y_0 + k) - g(y_0).$$

Si ha allora:
$$\frac{g(y_0)+k)-g(y_0)}{k}=\frac{h(k)}{f(x_0+h(k))-f(x)}.$$
La tesi segue per $k\to 0$ dato che, essendo g è continua in y_0 risulta:
$$\lim_{k\to 0}h(k)=\lim_{k\to 0}(g(y_0+k)-g(y_0))=0.$$
□

Esempio 6.8 1) Consideriamo la funzione:
$$f(x)=\sin x,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
e la sua inversa
$$g(y)=\arcsin y,\quad y\in(-1,1).$$
Dalla Proposizione 6.7 si ha allora:
$$D\arcsin y=\frac{1}{\cos x}.$$
Ma, dato che $y=\sin x$ si ha:
$$\cos x=\sqrt{1-y^2},$$
cosicché
$$D\arcsin y=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad y\in(-1,1).$$

2) Consideriamo la funzione:
$$f(x)=\tan x,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
e la sua inversa
$$g(y)=\arctan y,\quad y\in(-\infty,\infty).$$
Si ha allora:
$$D\arctan y=\cos^2 x.$$
Ma, dato che $y=\tan x$ si ha:
$$\cos^2 x=\frac{1}{1+y^2}$$

cosicché
$$D \arctan y = \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in (-1, 1).$$

3) Sia
$$f(x) = \log x, \quad x \in (0, +\infty).$$
La sua inversa è:
$$g(y) = e^y \quad y \in \mathbb{R}.$$
Calcoliamo $f'(1)$. Si ha, ricordando la continuità del logaritmo (vedi Esempio 4.13),
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \, \log(1+h) = \lim_{h \to 0} \log \left[(1+h)^{1/h}\right] = \log e = 1.$$
Si è qui usato il fatto che
$$\lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h} = e.$$
Ciò segue facilmente dalla disuguaglianza:
$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$
$$< \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$
dove $x = \frac{1}{h}$ e $n = n(x)$ è la parte intera di x e dalla Proposizione 2.22.

Dal fatto che $f'(1) = 1$ si deduce dalla Proposizione 6.7 che:
$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Calcoliamo ora De^y con $y \in \mathbb{R}$. Si ha:
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{y+h} - e^y}{h} = \lim_{h \to 0} e^y \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) = e^y.$$
Ne segue, per ogni $x > 0$:
$$f'(x) = D \log(x) = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

6.2.2 Derivazione di funzioni composte

Proposizione 6.9 *Sia* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *derivabile in* $x\in(a,b)$ *e* $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ *derivabile in* $y=f(x)\in(c,d)$, *con* $f((a,b))\subset[c,d]$. *Allora la funzione composta* $g\circ f$ *è derivabile in* x *e risulta* $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$.

Dimostrazione. Esistono due funzioni $r:(a-x,b-x)$ e $r_1:(c-y,d-y)$ tali che

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+r_1(h),\quad h\in(a-x,b-x)$$

e

$$g(y+k)-g(y)=g'(y)k+r_2(k),\quad k\in(c-y,d-y),$$

con

$$\lim_{h\to 0}\frac{|r_1(h)|}{|h|}=0,\quad \lim_{k\to 0}\frac{|r_2(k)|}{|k|}=0.$$

Ne segue

$$g(f(x+h))-g(f(x))=g(f(x)+f'(x)h+r_1(h))-g(f(x))$$

$$=g'(f(x))(f'(x)h+r_1(h))+r_2(f'(x)h+r_1(h))$$

$$=g'(f(x))f'(x)h+\lambda(h),$$

dove

$$\lambda(h)=r_2(f'(x)h+r_1(h)).$$

Dato che, come è facile vedere

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\lambda(h)|}{|h|}=0,$$

segue la tesi. □

Esempio 6.10 Siano $a,b\in\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile, $a<x_1<x_2<b$. Poniamo:

$$\phi:[0,1]\to\mathbb{R},\ \phi(t)=(1-t)x_1+tx_2$$

e

$$h(t)=f(\phi(t))=f((1-t)x_1+tx_2),\quad t\in[0,1].$$

Si ha allora:

$$h'(t)=f'((1-t)x_1+tx_2)(x_2-x_1).$$

6.3 Proprietà locali di una funzione (prima parte)

In questa sezione f rappresenta una funzione di (a, b) in $\mathbb{R}$ e x_0 un punto di (a, b).

Definizione 6.11 *(i) Si dice che f ha un massimo (risp. minimo) locale in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e risulta:*

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0), \quad (\textit{risp. } f(x_0 + h) \geq f(x_0)), \quad \forall\, h \in (-\delta, \delta). \tag{6.5}$$

(ii) Si dice che f è crescente *(risp.* decrescente*) in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e per ogni $h \in (0, \delta)$ risulta:*

$$f(x_0 - h) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + h), \quad \textit{resp. } f(x_0 - h) \geq f(x_0) \geq f(x_0 + h). \tag{6.6}$$

Se nelle disuguaglianze in (6.6) *vale il segno minore (risp. maggiore) si dice che f è* strettamente crescente *(risp.* strettamente decrescente*) in x_0.*

Proposizione 6.12 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0.*

(i) Se f ha massimo o minimo locale in x_0 si ha $f'(x_0) = 0$.

(i) Se f è crescente (risp. decrescente) in x_0 risulta $f'(x_0) \geq 0$ (risp. $f'(x_0) \leq 0$).

Dimostrazione. (i) Supponiamo che f abbia un massimo locale in x_0 e sia $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e vale (6.5). Si ha allora:

$$\frac{1}{h}\,(f(x_0 + h) - f(x_0)) \leq 0 \text{ se } h < 0, \quad \frac{1}{h}\,(f(x_0 + h) - f(x_0)) \geq 0 \text{ se } h > 0.$$

Quidi risulta $D^+ f(x_0) \leq 0$ e $D^- f(x_0) \geq 0$. Dato che f è derivabile in x_0 si ha $D^+ f(x_0) = D^- f(x_0)$ da cui la tesi.

(ii) Sia f crescente in x_0 e sia $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e vale (6.6). Si ha allora

$$\frac{1}{h}\,(f(x_0 + h) - f(x_0)) \geq 0, \quad \text{se } h \in (-\delta, \delta).$$

da cui la tesi per $h \to 0$. $\square$

Se risulta $f'(x_0) = 0$ la f non ha necessariamente un massimo o un minimo locale in x_0; basta considerare $f(x) = x^3$ e $x_0 = 0$.

Proposizione 6.13 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e che risulti $f'(x_0) > 0$ (risp. $f'(x_0) < 0$). Allora f è strettamente crescente (risp. decrescente) in x_0.*

Dimostrazione. Sia r tale che valga (6.1). Allora esiste $\delta > 0$ tale che:

$$|r(h)| \le \frac{1}{2}\, f'(x_0)|h|, \quad \forall\, h \in (-\delta, \delta).$$

Da (6.1) segue che se $h > 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \ge f'(x_0)h - |r(h)| \ge \frac{1}{2}\, f'(x_0)h > 0,$$

e se $h < 0$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \le f'(x_0)h + |r(h)| \le \frac{1}{2}\, f'(x_0)h < 0.$$

Quindi f è strettamente crescente (risp. decrescente) in x_0. $\square$

6.3.1 Forme indeterminate

Il risultato seguente è il prototipo di una serie di risultati concernenti limiti di forme indeterminate.

Proposizione 6.14 (L'Hospital) *Siano f, g derivabili in (a, b) e $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che:*

(i) $f(x_0) = 0, \quad g(x_0) = 0.$

(ii) $g(x) \ne 0$ *per ogni* $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$.

(iii) $g'(x_0) \ne 0.$

Allora risulta:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Dato che f e g sono derivabili in x_0 esistono $r:(a-x_0, b-x_0) \to \mathbb{R}$ e $s:(a-x_0, b-x_0) \to \mathbb{R}$ tali che:

$$f(x_0+h) = f'(x_0)h + r(h), \quad g(x_0+h) = g'(x_0)h + s(h), \quad h \in (a-x_0, b-x_0),$$

e:

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0, \quad \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h} = 0.$$

Si ha allora:

$$\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f'(x_0)h + r(h)}{g'(x_0)h + s(h)} = \frac{f'(x_0) + \frac{r(h)}{h}}{g'(x_0) + \frac{s(h)}{h}},$$

da cui la tesi per $h \to 0$. $\square$

6.4 Proprietà globali (Prima parte)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Sappiamo dal teorema di Weierstrass che f ha massimo M e minimo m in $[a,b]$. Grazie alla Proposizione 6.12-(i) per trovare M e m si può procedere al modo seguente. Si considera l'insieme:

$$\Sigma = \{x \in (a,b) : \; f'(x) = 0\}$$

e si osserva che il massimo e il minimo di f si trovano nell'insieme:

$$\Sigma \cup \{a\} \cup \{b\}.$$

Per avere altre informazioni globali di f in $[a,b]$ sono utili i teoremi di *Rolle* e del *valor medio di Lagrange*.

Teorema 6.15 (Rolle) *Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo in $[a,b]$. Se sono uguali f è costante e quindi f' è nulla in (a,b). Se sono diversi non possono appartenere entrambi agli estremi a e b dell'intervallo $[a,b]$. Supponiamo ad esempio che il massimo sia assunto in un punto $\xi \in (a,b)$. Allora si ha $f'(\xi) = 0$ per la Proposizione 6.12-(i). $\square$

Proviamo ora il *teorema del valor medio*.

Teorema 6.16 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{6.7}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $a = 0,\ b = 1$. Poniamo:

$$F(x) = f(x) - (f(1) - f(0))x.$$

Dato che $F(0) = F(1) = f(0)$, dal Teorema di Rolle segue che esiste $\eta \in (0,1)$ tale che $F'(\eta) = f'(\eta) - (f(1) - f(0)) = 0$, cioè:

$$f(1) - f(0) = f'(\eta), \tag{6.8}$$

che coincide con (6.7) (con $a = 0$, $b = 1$, $\xi = \eta$).

Siano ora a, b generali. Poniamo:

$$G(x) = f(a + (b-a)x), \quad x \in [0,1].$$

Si ha allora $G(0) = f(a)$, $G(1) = f(b)$. Quindi da (6.8) segue che esiste $\eta \in (0,1)$ tale che:

$$G(1) - G(0) = f(b) - f(a) = G'(\eta).$$

Usando la regola di derivazione delle funzioni composte si ha:

$$G(1) - G(0) = f(b) - f(a) = G'(\eta) = (b-a)f'(a + (b-a)\eta).$$

Posto $\xi = a + (b-a)\eta$ si ha la tesi. $\square$

Vediamo ora alcune conseguenze del teorema del valor medio.

Proposizione 6.17 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a,b). Se risulta $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$ allora f è costante in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Sia $x_1 \in (a,b)$. Per il teorema del valor medio esiste $\xi \in (x_1, b)$ tale che

$$f(b) - f(x_1) = f'(\xi)(b - x_1) = 0.$$

Quindi $f(x_1) = f(b)$ per ogni $x_1 \in (a,b)$. $\square$

Proposizione 6.18 *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Se risulta $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) > 0$) per ogni $x \in (a,b)$ allora f è crescente (risp. strettamente crescente) in (a,b).*

Se risulta $f'(x) \leq 0$ (risp. $f'(x) < 0$) per ogni $x \in (a,b)$ allora f è decrescente (risp. strettamente decrescente) in (a,b).

Dimostrazione. Sia ad esempio $f'(x) \geq 0$ (risp. > 0) per ogni $x \in (a,b)$ e siano $x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$. Per il teorema del valor medio esiste $x \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1) \geq 0 \quad (\text{risp. } > 0),$$

da cui la tesi.□

Sia f derivabile in (a,b). La proposizione seguente mostra che per la derivata f' vale il teorema di esistenza degli zeri.

Proposizione 6.19 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b). Sia $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ tale che $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$. Allora esiste $\xi \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(\xi) = 0$.*

Dimostrazione. In virtù della Proposizione 6.13 f è strettamente crescente in x_2 e strettamente decrescente in x_1. Quindi esiste $h \in (0, x_2 - x_1)$ tale che

$$f(x_1 + h) < f(x_1), \quad f(x_2 - h) < f(x_2).$$

Quindi il minimo di f in $[x_1, x_2]$, che esiste per il Teorema di Weierstrass, cade in punto $\xi \in (x_1, x_2)$ cosicché risulta $f'(\xi) = 0$. □

Corollario 6.20 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $[a,b]$. Allora $f'([a,b])$ è un intervallo.*

6.4.1 Funzioni convesse derivabili

Ricordiamo che una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se:

$$x, y \in (a,b),\ t \in [0,1] \Rightarrow f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y). \tag{6.9}$$

Diamo un'altra caratterizzazione della convessità. Per questo useremo la notazione seguente. Data $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x \in (a,b)$ poniamo:

$$R_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \in (a - x, b - x) \setminus \{0\}.$$

Proposizione 6.21 *Le affermazioni seguenti sono equivalenti.*

(i) f *è convessa.*

(ii) $R_x(h)$ *è crescente in* h *per ogni* $x \in (a,b)$.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sia $x \in (a,b)$ e $h_1 < h_2$. Occorre distinguere tre casi secondo che: $0 < h_1 < h_2$, $h_1 < h_2 < 0$ e $h_1 < 0 < h_2$. Ci limitiamo a considerare il primo caso. Si deve provare che:

$$\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1} \le \frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}. \tag{6.10}$$

La (6.10) equivale a:

$$f(x+h_1) \le \frac{h_1}{h_2}\, f(x+h_2) + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) f(x).$$

Dato che:

$$\frac{h_1}{h_2}\,(x+h_2) + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) x = x + h_1,$$

la tesi segue dalla convessità di f.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sia $x, y \in (a,b)$ e $t \in (0,1)$. Poniamo $z = (1-t)x + ty$, di modo che $z \in (x,y)$. Si ha allora per ipotesi:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

Ma $z - x = t(y-x)$ e quindi si ha:

$$tf(y) - tf(x) \le f((1-t)x + tz) - f(x),$$

da cui la tesi. $\square$

Corollario 6.22 *Sia* $x < y < z$ *con* $x, y, z \in (a,b)$. *Si ha allora:*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{6.11}$$

Dimostrazione. Basta osservare che la prima disuguaglianza equivale a:

$$R_x(y-x) \leq R_x(z-x)$$

e la seconda a:

$$R_z(x-z) \leq R_z(y-z).$$

□

Proposizione 6.23 *Sia f derivabile in (a,b). Le affermazioni seguenti sono equivalenti.*

(i) f è convessa.

(ii) f' è crescente in (a,b).

Dimostrazione. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Sia $x < z$, poniamo $y = \frac{x+z}{2}$, $h = y - x$. Applicando (6.11) si ha:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(z)-f(z-h)}{h} = \frac{f(z-h)-f(z)}{-h}.$$

Ne segue per la Proposizione 6.21 che per ogni $\epsilon \in (0,h)$ si ha:

$$\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(z-h)-f(z)}{-h} \leq \frac{f(z+\epsilon)-f(z)}{\epsilon}.$$

Per $\epsilon \to 0$ si ottiene $f'(x) \leq f'(z)$.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Sia $x < y < z$ con $x, y, z \in (a,b)$. Per il teorema del valor medio esiste $\xi_1 \in (x,y)$ e $\xi_2 \in (y,z)$ tali che:

$$f(y)-f(x) = f'(\xi_1)(y-x), \quad f(z)-f(y) = f'(\xi_2)(z-y).$$

Ne segue:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

da cui la tesi per la Proposizione 6.21. □

Proposizione 6.24 *Sia f derivabile in (a,b). Le condizioni seguenti sono equivalenti.*

(i) f è convessa.

(ii) Per ogni $x, y \in (a, b)$ si ha:

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \tag{6.12}$$

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sia $x < y$; dato che f è convessa dalla Proposizione 6.21 segue che:

$$\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

per ogni $\epsilon \in (0, y - x)$. Per $\epsilon \to 0$ ne segue:

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

che equivale a (6.12).

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sia $x < y < z$ con $x, y, z \in (a, b)$. Si ha allora per ipotesi:

$$f(z) \geq f(y) + f'(y)(z - y),$$

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y),$$

da cui:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y) \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

da cui la tesi per la Proposizione 6.21. □

6.5 Derivata seconda

Definizione 6.25 *Si dice che f è* derivabile due volte *in x_0 se è derivabile in x_0 e se esiste un numero $f''(x_0)$ e una funzione $\rho : (a - x_0, b - x_0) \to \mathbb{R}$ tali che:*

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + \rho(h), \quad \forall\, h \in (a - x_0, b - x_0) \tag{6.13}$$

e

$$\lim_{h \to 0} \frac{\rho(h)}{h^2} = 0. \tag{6.14}$$

Se ciò accade si dice che $f''(x_0)$*è la* derivata seconda *di* f *nel punto* x_0*. Si scrive anche* $D^2 f(x_0) = f''(x_0)$*.*

Se f *è derivabile due volte in ogni punto di* (a, b) *si dice che è* derivabile due volte in (a, b).

Esercizio 6.26 Verificare che la derivata $f''(x_0)$ è definita univocamente da (6.13)-(6.14).

Osservazione 6.27 Supponiamo che f sia derivabile due volte in x_0, allora da (6.2) segue che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} = \frac{1}{2}\, f''(x_0). \tag{6.15}$$

Viceversa se f è derivabile in x_0 e esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)h - f'(x_0)h}{h^2} = a,$$

posto:

$$\rho(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f(x_0)h - \frac{1}{2}\, ah^2, \quad \forall\, h \in (a - x_0, b - x_0),$$

si ha $\lim_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{h^2} = 0$ cosicché f è derivabile due volte in x_0 e $a = \frac{1}{2}\, f''(x_0)$.

Osservazione 6.28 Supponiamo che f sia derivabile in (a, b) e che la sua derivata f' sia derivabile in x_0. Allora f è derivabile due volte in x_0 e risulta:

$$(f')'(x_0) = f''(x_0).$$

Si ha infatti per il Teorema dell'Hospital:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{2h} = \frac{1}{2}\, (f')'(x_0).$$

6.6 Proprietà locali di una funzione (seconda parte)

In questa sezione f rappresenta una funzione di (a, b) in $\mathbb{R}$ e x_0 un punto di (a, b).

Definizione 6.29 *(i) Si dice che f ha un massimo (risp. minimo) locale* forte *in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e risulta:*

$$f(x_0 + h) < f(x_0), \quad (\textit{risp. } f(x_0 + h) > f(x_0)), \quad \forall\, h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}. \tag{6.16}$$

(ii) Si dice che f è convessa *(risp.* concava*) in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e per ogni $h \in (0, \delta)$ risulta:*

$$f(x_0+h) \geq f(x_0)+f'(x_0)h, \quad \text{risp. } f(x_0+h) \leq f(x_0)+f'(x_0)h. \tag{6.17}$$

Proposizione 6.30 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in $x_0 \in (a, b)$. Allora valgono le affermazioni seguenti.*

(i) Se f ha massimo (resp. minimo) locale in x_0 si ha $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$ (resp. $f''(x_0) \geq 0$).

(ii) Se f è convessa (risp. concava) in x_0 si ha $f''(x_0) \geq 0$.

Dimostrazione. (i) Supponiamo che f abbia un massimo locale in x_0 e sia $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e risulta $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ per ogni $h \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. Allora da (6.15) segue che:

$$\frac{1}{2}\, f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^2} \leq 0.$$

(ii) Se f è convessa in x_0 allora esiste $\delta > 0$ tale che $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a, b)$ e per ogni $h \in (0, \delta)$ risulta

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h \geq 0.$$

Quindi, ancora per la (6.15) si ha:

$$\frac{1}{2}\, f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h^2} \geq 0.$$

□

Proposizione 6.31 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in x_0 e sia $f''(x_0) > 0$ (risp. $f''(x_0) < 0$). Allora valgono le affermazioni seguenti.*

(i) Se $f'(x_0) = 0$, f ha minimo (resp. massimo) locale forte in x_0.

(ii) f è convessa (risp. concava) in x_0.

Dimostrazione. (i) Supponiamo che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$. Da (6.13) si ha:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}\, f''(x_0)h^2 + \rho(h).$$

Sia $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e risulta $|\rho(h)| \leq \frac{1}{2}\, f''(x_0)|h|^2$ per ogni $h \in (-\delta, \delta)$. Allora se $|h| \leq \delta$ si ha:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{1}{2}\, f''(x_0)h^2 - |\rho(h)| \geq \frac{1}{2}\, f''(x_0)h^2 > 0,$$

Quindi x_0 è punto di minimo forte.

(ii) Sia ancora $\delta > 0$ tale che $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e risulta $|\rho(h)| \leq \frac{1}{2}\, f''(x_0)|h|^2$ per ogni $h \in (-\delta, \delta)$. Allora da (6.13) si ha:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h \geq \frac{1}{2}\, f''(x_0)h^2 - |\rho(h)| \geq \frac{1}{2}\, f''(x_0)h^2 > 0,$$

cosicché f è convessa in x_0. □

Osservazione 6.32 Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte e sia $x_0 \in (a, b)$. Se risulta $f''(x_0) \geq 0$ non è detto che f sia convessa in x_0. Basta considerare l'esempio $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, e prendere $x_0 = 0$. In tal caso si ha $f''(x) = 6x$ cosicché f è concava in $(-\infty, 0)$ e convessa in $(0, \infty)$ e 0 è un punto di *flesso crescente*.

In generale si dice che x_0 è un punto di *flesso crescente* (risp. *decrescente*) per f se esiste $h > 0$ tale che:
(i) f è concava in $(a, b) \cap (x - h, x)$,
(ii) f è convessa in $(a, b) \cap (x - h, x)$.

6.7 Proprietà globali (Seconda parte)

Proposizione 6.33 *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è derivabile due volte in (a, b) e risulta $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora f è convessa.*

Dimostrazione. Dato che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ si ha che f' è crescente per la Proposizione 6.12, cosicché è convessa per la Proposizione 6.23. □

Il risultato seguente generalizza il teorema del valor medio.

Proposizione 6.34 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con f' e sia $a < b$. Esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}\, f''(\xi)(b-a)^2. \tag{6.18}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$M = \frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}.$$

Si deve provare che $M \in f''((a, b))$. Poniamo

$$g(t) = f(t) - f(a) - f'(a)(t-a) - M(t-a)^2.$$

Si ha allora $g(a) = g(b) = 0$ cosicchè per il Teorema di Rolle esiste $\xi_1 \in (a, b)$ tale che $g'(\xi_1) = 0$. D'altra parte $g'(a) = 0$ e quindi ancora peril Teorema di Rolle esiste $\xi_2 \in (a, \xi_1)$ tale che $g''(\xi_2) = 0$. Dato che $g''(\xi_2) = f''(\xi_2) - M$ la tesi è provata. □

La (6.18) è detta *formula di Taylor* al secondo ordine.

6.8 Derivate di ordine n

Definizione 6.35 *Sia $f : (a, b)\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si dice che f è* derivabile n volte *in x_0 se è derivabile $n-1$ volte in x_0 e se esiste un numero $f^{(n)}(x_0)$ e una funzione $\rho_n : (a - x_0, b - x_0) \to \mathbb{R}$ tali che:*

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!}\, f^{(k)}(x_0)h^k + \rho_n(h), \quad \forall\, h \in (a-x_0, b-x_0) \tag{6.19}$$

e

$$\lim_{h \to 0} \frac{\rho(h)}{h^n} = 0. \tag{6.20}$$

Se ciò accade si dice che $f^{(n)}(x_0)$è la derivata di ordine n di f *nel punto x_0. Si scrive anche $D^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.*

Se f è derivabile n volte in ogni punto di (a, b) si dice che è derivabile n volte in (a, b)

Il risultato seguente, *formula di Taylor*, è una semplice generalizzazione della Proposizione 6.34.

Teorema 6.36 *Sia $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile assieme alle derivate di ordine minore di n e sia $a < b$. Esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (b-a)^n. \tag{6.21}$$

Capitolo 7

Integrazione

7.1 Definizione dell'integrale

Sia $[a, b]$ un intervallo in $\mathbb{R}$. Una *partizione* σ di $[a, b]$ è un insieme finito $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ di punti tali che

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Scriveremo

$$\sigma = \{x_1, \cdots, x_n\}.$$

Ad esempio $\sigma = \{a, b\}$ è una partizione.

Indicheremo con $\Sigma(a, b) = \Sigma$ la famiglia delle partizioni di $[a, b]$.

Sia ora $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Poniamo:

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Per ogni $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \Sigma$ definiamo le *somme integrali di f per eccesso e per difetto*:

$$I_\pi^+(f) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x)\ (x_i - x_{i-1}), \quad I_\pi^-(f) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_i, x_{i-1}]} f(x)\ (x_i - x_{i-1}).$$

Definizione 7.1 *L'*integrale superiore *di f è definito da:*

$$I^+(f) = \inf\{I_\pi^+(f) : \pi \in \Sigma(a, b)\}$$

*e l'*integrale inferiore *da:*

$$I^-(f) = \sup\{I^-_\pi(f) : \ \pi \in \Sigma(a,b)\}.$$

Se risulta $I^+(f) = I^-(f)$ *diciamo che* f *è* integrabile secondo Riemann *in* $[a,b]$ *e poniamo:*

$$I^+(f) = I^-(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

É chiaro che risulta:

$$(b-a)m \leq I^-(f) \leq I^+(f) \leq (b-a)M. \tag{7.1}$$

Vogliamo ora provare che ogni funzione continua in $[a,b]$ è integrabile. Per questo premettiamo due lemmi.

Lemma 7.2 *Sia* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ *con* $\sigma_1 \subset \sigma_2$. *Si ha allora:*

$$I^+_{\sigma_1}(f) \geq I^+_{\sigma_1}(f), \quad I^-_{\sigma_1}(f) \leq I^-_{\sigma_1}(f).$$

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio che

$$\sigma_1 = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$$

e

$$\sigma_2 = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, y, x_n\}.$$

Allora risulta:

$$I^+_{\sigma_1}(f) - I^+_{\sigma_2}(f) = \sup_{x\in[x_{n-1},b]} f(x)\ (b - x_{n-1})$$

$$- \sup_{x\in[x_{n-1},y]} f(x)\ (x_{n-1} - y) - \sup_{x\in[y,b]} f(x)\ (b-y) \geq 0.$$

Allo stesso modo:

$$I^-_{\sigma_1}(f) - I^-_{\pi_2}(f) = \inf_{x\in[x_{n-1},b]} f(x)\ (b - x_{n-1})$$

$$- \inf_{x\in[x_{n-1},y]} f(x)\ (x_{n-1} - y) - \inf_{x\in[y,b]} f(x)\ (b-y) \leq 0.$$

Iterando questo argomento si ha la tesi. □

Lemma 7.3 *Sia* $\sigma, \lambda \in \Sigma$. *Si ha allora:*

$$I_\sigma^-(f) \leq I_\lambda^+(f).$$

Dimostrazione. Si ha infatti dal Lemma 7.2 [(1)]

$$I_\sigma^-(f) \leq I_{\sigma\cup\lambda}^-(f) \leq I_{\sigma\cup\lambda}^+(f) \leq I_\lambda^+(f).$$

□

Dal Lemma 7.3 segue che i due insiemi numerici:

$$\{I_\sigma^-(f):\ \sigma \in \Sigma\}, \quad \{I_\sigma^+(f):\ \sigma \in \Sigma\},$$

sono *separati*, cioè ogni elemento del primo insieme è minore o uguale ad ogni elemento del secondo. Ne segue che f è integrabile se e solo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\sigma_\epsilon \in \Sigma$ tale che:

$$I_{\sigma_\epsilon}^+(f) - I_{\sigma_\epsilon}^-(f) < \epsilon. \tag{7.2}$$

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema.

Teorema 7.4 *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua. Allora* f *è integrabile in* $[a,b]$ *e risulta:*

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M. \tag{7.3}$$

In particolare se $f(x) = c$ *per ogni* $x \in [a,b]$ *si ha:*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)c. \tag{7.4}$$

Dimostrazione. Basta provare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\sigma \in \Sigma$ tale che valga (7.2). Dato che f è uniformemente continua (per il Teorema di Heine-Cantor), per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Scegliamo ora $\sigma_\epsilon = \{x_1, ..., x_n\} \in \Sigma$ tale che

$$|x_i - x_{i-1}| < \delta_\epsilon, \quad \forall\ i = 1, ..., n.$$

[(1)] Sia $\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},\ \lambda = \{y_0, x_1, \cdots, y_n\} \in \Sigma$. Con $\sigma\cup\lambda$ intendiamo la partizione che ha per elementi tutti e soli gli elementi di σ e di λ.

Si ha allora
$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) < \epsilon,$$
cosicché:
$$I^+(\sigma_\epsilon) - I^-(\pi_\epsilon) < \epsilon.$$
□

7.2 Proprietà dell'integrale

7.2.1 Linearità

Proposizione 7.5 *Siano* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Allora risulta:*
$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b (g(x)dx. \tag{7.5}$$

Dimostrazione. Basta provare che
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}, \tag{7.6}$$
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx, \quad \forall\, k \in \mathbb{R}, \tag{7.7}$$
La (7.6) è ovvia se $k \geq 0$. Supponiamo allora $k = -h < 0$. Se $\sigma = \{x_1, ..., x_n\} \in \Sigma$ si ha:
$$I^+_\sigma(-hf) = \sum_{i=1}^n \sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} (-hf(x))\,(x_i - x_{i-1}).$$
Dato che:
$$\sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} (-hf(x)) = -\inf_{x\in[x_i,x_{i-1}]} (hf(x)),$$
ne segue:
$$I^+_\sigma(-hf) = -hI^-_\sigma(f).$$
Allo stesso modo si ha:
$$I^-_\sigma(-hf) = -hI^+_\sigma(f),$$

cosicché (7.6) segue facilmente.

Dimostriamo ora (7.7). Sia $\sigma = \{x_1, ..., x_n\} \in \Sigma$. Dato che:

$$\sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} f(x) + \sup_{x\in[x_i,x_{i-1}]} g(x),$$

si ha:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx \leq I_\sigma^+(f+g) \leq I_\sigma^+(f) + I_\sigma^+(g). \tag{7.8}$$

D'altra parte per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\sigma_\epsilon \in \Sigma$ tale che:

$$I_{\sigma_\epsilon}^+(f) - \int_a^b f(x)dx < \epsilon,$$

$$I_{\sigma_\epsilon}^+(g) - \int_a^b g(x)dx < \epsilon.$$

Allora da (7.8) segue che:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx + 2\epsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ϵ si ha:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Scambiando f con $-f$ e g con $-g$ si trova:

$$\int_a^b (-f(x)-g(x))dx \leq \int_a^b (-f(x))dx + \int_a^b (-g(x))dx.$$

Ricordando (7.6) si ottiene:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx \geq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

da cui la tesi. $\square$

7.2.2 Additività

Proposizione 7.6 *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua,* $c \in [a,b]$*. Allora risulta:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{7.9}$$

Dimostrazione. Dato $\epsilon > 0$ esistono $\sigma_\epsilon \in \Sigma(a,c)$ e $\rho_\epsilon \in \Sigma(c,b)$ tali che:

$$I^-_{\sigma_\epsilon}(f) \leq \int_a^c f(x)dx \leq I^+_{\sigma_\epsilon}(f),$$

$$I^-_{\rho_\epsilon}(f) \leq \int_c^b f(x)dx \leq I^+_{\rho_\epsilon}(f)$$

e

$$I^-_{\sigma_\epsilon}(f) - I^+_{\sigma_\epsilon}(f) < \epsilon,$$

$$I^+_{\rho_\epsilon}(f) - I^-_{\rho_\epsilon}(f) < \epsilon.$$

Sia λ la decomposizione di $[a,b]$ ottenuta prendendo $\sigma_\epsilon \cup \rho_\epsilon$. Si ha allora

$$I^-_{\lambda_\epsilon}(f) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq I^+_{\lambda_\epsilon}(f)$$

e

$$I^-_{\lambda_\epsilon}(f) - I^+_{\lambda_\epsilon}(f) < 2\epsilon.$$

La conclusione segue allora dall'arbitrarietá di ϵ. $\square$

Nel seguito poniamo:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

e

$$\int_a^a f(x)dx) = 0$$

Il risultato seguente è lasciato in esercizio al lettore.

Corollario 7.7 *Sia* $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua e sia* $a, b, c \in \mathbb{R}$*. Allora vale* (7.9).

7.2.3 Positività

Proposizione 7.8 *Sia* $f[a,b] \to \mathbb{R}$ *continua e tale che* $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$. *Allora risulta:*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \tag{7.10}$$

Inoltre se

$$\int_a^b f(x)dx = 0,$$

si ha $f(x) = 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$.

Infine se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *è continua e tale che:*

$$\int_c^d f(x)dx \geq 0, \quad \forall\, [c,d] \subset [a,b], \tag{7.11}$$

si ha $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a,b]$.

Dimostrazione. Dato che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ si ha

$$I_\sigma^+(f) \geq 0, \quad I_\sigma^-(f) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b],$$

cosicché vale (7.10). Supponiamo che $\int_a^b f(x)dx = 0$ e, per assurdo, che esista $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) > 0$. Allora per il teorema della permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset (a,b)$ e risulta $f(x) > 0$ per ogni $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$. Si ha allora, ricordando (7.9)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx$$

$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq 2\delta \min_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} f(x) > 0,$$

il che contraddice l'ipotesi $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Supponiamo infine che valga (7.11) e, per assurdo, che esista $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) < 0$. Ragionando come sopra si vede che esiste $\delta > 0$ tale che $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset (a,b)$ e risulta $f(x) < 0$ per ogni $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$. Si ha allora:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \leq 2\delta \min_{x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]} f(x) < 0,$$

il che contraddice (7.11). $\square$

Corollario 7.9 *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Allora se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ risulta:*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{7.12}$$

Inoltre

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{7.13}$$

Dimostrazione. Per provare (7.12) basta applicare la Proposizione 7.8 alla funzione $f - g$ e usare la linearità dell integrale. Per la (7.13), dato che

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall\, x \in [a, b],$$

la tesi segue dalla (7.12). □

7.2.4 Teorema del valor medio

Proposizione 7.10 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che*

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi). \tag{7.14}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx = \lambda.$$

Detti m e M il minimo e il massimo di f, si ha allora:

$$m \leq \lambda \leq M.$$

Quindi, in virtù del teorema di esistenza degli zeri, esiste ξ tale che $\lambda = f(\xi)$.
□

7.3 Integrale come funzione di un estremo di integrazione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Teorema 7.11 *(i) F è continua in $[a, b]$.*
(ii) F è derivabile in (a, b) e risulta:

$$F'(t) = f(t), \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Dimostrazione. (i) Se $x_0 \in [a, b]$ si ha:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(y)dy.$$

Ne segue:

$$|F(x) - F(x_0)| \le |x - x_0| \max_{x \in [a,b]} f(x),$$

da cui la tesi.
(ii) Sia $x_0 \in (a, b)$ e $h \in \mathbb{R}$ tale che $x + h \in (a, b)$. Si ha allora:

$$\frac{1}{h}\,(F(x_0) + h) - F(x_0)) - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))dx.$$

Dato che f è continua in x_0, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:

$$x \in [a, b],\ |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Scelto allora h tale che $|h| < \delta_\epsilon$ si ha:

$$\left|\frac{1}{h}\,(F(x_0) + h) - F(x_0)) - f(x_0)\right| < \epsilon.$$

□

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua; allora ogni funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $F' = f$ è detta una *primitiva* di f. Due primitive differiscono per una costante (per la Proposizione 6.17).

Proposizione 7.12 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Sia $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continua con la sua derivata. Se $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ si ha :*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a). \tag{7.15}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$F(x) = \int_a^x f'(y)dy, \quad x \in [a, b].$$

Allora dal Teorema 7.11 segue che

$$F'(x) = f'(x), \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Quindi per la Proposizione 6.17 esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$$F(x) = f(x) - c, \quad \forall\, x \in [a, b].$$

In particolare

$$0 = F(a) = f(a) - c,$$

cosicché $c = f(a)$. Ne segue:

$$F(b) = \int_a^b f'(y)dy = f(b) - f(a).$$

□

Esempio 7.13 1) Sia $f(x) = x^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ dove $n \in \mathbb{N}$ è fissato. Allora una primitiva di f è data da:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Sia $f(x) = x^{-n}$ per ogni $x > 0$ dove $n \in \mathbb{N}$ è fissato. Allora se $n = 1$ una primitiva di f è data da:

$$F(x) = \log x,$$

e se $n > 1$ da

$$F(x) = \frac{x^{1-n}}{1-n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) Sia $f(x) = \sin x$ (risp. $\cos x$) per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora una primitiva di f è data da:

$$F(x) = -\cos x \text{ (risp. } F(x) = \sin x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4) Sia $f(x) = \tan x$ per ogni $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Allora una primitiva di f è data da:

$$F(x) = -\log(\cos x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Si ha infatti:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}\,(-\sin x) = \tan x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

5) Sia $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora una primitiva di f è data da:

$$F(x) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6) Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ per ogni $x \in (-1, 1)$. Allora una primitiva di f è data da:

$$F(x) = \arcsin x, \quad x \in (-1, 1).$$

7) Sia $f(x) = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora una primitiva di f è data da:

$$F(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8) Sia $f(x) = \log x$ per ogni $x > 0$. Allora una primitiva di f è data da:

$$F(x) = x \log x - x, \quad x > 0,$$

come si vede facilmente.

9) Sia $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua con la derivata g' e positiva. Allora una primitiva di f è data da:

$$F(x) = \log(g(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osservazione 7.14 L'integrale può essere pensato come l'operazione inversa della derivata nel senso seguente. Indichiamo con $C([a,b])$ l'insieme delle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e con $C^1([a,b])$ il sottoinsieme di $C([a,b])$ delle funzioni derivabili in $[a,b]$ con derivata continua in $[a,b]$ [(2)].

Consideriamo l'applicazione:

$$D : C^1([a,b]) \to C([a,b]),\ f \mapsto Df = f'.$$

D non è iniettiva. Infatti $Df = Dg$ implica $D(f-g) = 0$ e quindi $f-g$ è costante. D è surgettiva. Infatti data $f \in C([a,b])$ e posto:

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

si ha $DF = f$.

7.4 Formula di integrazione per parti

Proposizione 7.15 *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili con derivata continua e sia $[a,b]$ un intervallo. Risulta allora:*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x)dx &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &=: f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Dimostrazione. Posto:

$$F(x) = f(x)g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

si ha:

$$F'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

da cui la tesi integrando in $[a,b]$ e usando la Proposizione 7.12. □

[(2)] Per derivabilità in a (risp. b) si intende l'esistenza della derivata destra (risp. sinistra) in a (risp in b)

Esempio 7.16 Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^1 \arctan x dx.$$

Per questo applichiamo la (7.16) con

$$f(x) = \arctan x, \quad g(x) = x, \quad x \in [0,1].$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x dx &= x \arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx.\end{aligned}$$

D'altra parte una primitiva di $\frac{x}{1+x^2}$ è data da $\frac{1}{2}\ \log(1+x^2)$ (vedi Esempio 7.13-(9)). Quindi si ottiene:

$$\int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ \log 2.$$

7.5 Cambiamento di variabili in un integrale

Proposizione 7.17 *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua e sia* $\phi : [c,d] \to [a,b]$ *continua, surgettiva, strettamente crescente e derivabile. Si ha allora:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(s))\phi'(s)ds. \tag{7.17}$$

Dimostrazione. Sia F una primitiva di f. Allora risulta:

$$\frac{d}{ds}\ F(\phi(s)) = f(\phi(s))\phi'(s), \quad s \in [\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)].$$

Integrando rispetto a s in $[\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)]$ si ha la tesi. $\square$

Esempio 7.18 Calcoliamo l'integrale:

$$\int_1^2 xe^{x^2} dx.$$

Posto:

$$x = \phi(s) = s^{1/2}, \quad s \in [1, 4],$$

si ha $\phi'(s) = \frac{1}{2}\, s^{-1/2}$ e

$$f(\phi(s))\phi'(s) = \frac{1}{2}\, e^s, \quad s \in [1, 4].$$

Quindi

$$\int_1^2 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 e^s ds = \frac{1}{2}\, (e^4 - e).$$

Capitolo 8

Successioni e serie di funzioni

8.1 Convergenza di una successione di funzioni

Definizione 8.1 *Una successione* (f_n) *di funzioni reali su* $[a, b]$ *è detta* puntualmente convergente *a una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *se risulta:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall\, x \in [a, b].$$

È chiaro che (f_n) è puntualmente convergente a f se e solo se per ogni $x \in [a, b]$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_{x,\epsilon} \in \mathbb{N}$ tale che:

$$x \in [a, b],\ n \geq n_{x,\epsilon} \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon. \tag{8.1}$$

Osserviamo che se una successione (f_n) di funzioni continue converge puntualmente a f non è detto che f sia continua come mostra l'esempio seguente.

Esempio 8.2 Consideriamo la successione (f_n) definita da:

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1].$$

È chiaro che f_n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che (f_n) converge puntualmente alla funzione f data da:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Tuttavia f non è continua in $x = 1$.

Data una una successione (f_n) di funzioni continue convergente puntualmente a f, una condizione sufficiente per la continuità di f è che (f_n) converga *uniformemente.*

Definizione 8.3 *Una successione* (f_n) *di funzioni* $[a, b] \to \mathbb{R}$ *è detta* uniformemente convergente *a* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tale che:*

$$n \geq n_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{8.2}$$

Teorema 8.4 *Sia* (f_n) *una successione di funzioni continue* $[a, b] \to \mathbb{R}$ *uniformemente convergente a* f*. Allora* f *è continua.*

Dimostrazione. Proviamo che f è continua in ogni $x_0 \in I$. Dato che (f_n) è uniformemente convergente a f, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$n \geq n_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_\epsilon}(x)| + |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)| + |f(x_0) - f_{n_\epsilon}(x_0)| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)|. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Dato che f_{n_ϵ} è continua in x_0 per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:

$$|x - x_0| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow |f_{n_\epsilon}(x) - f_{n_\epsilon}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Da (8.3) segue allora che se $|x - x_0| \leq \delta_\epsilon$ si ha:

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

□

Osservazione 8.5 Sia (f_n) una successione di funzioni continue su un intervallo $[a, b]$ uniformemente convergente a f; è chiaro allora che

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| = 0.$$

Proviamo ora che la convergenza puntuale monotona di una successione di funzioni continue *a una funzione continua* è uniforme.

Teorema 8.6 (Dini) *Sia* (f_n) *una successione di funzioni continue su un intervallo* $[a,b]$ *crescente (risp. decrescente) a una funzione continua* f*. Allora* (f_n) *è uniformemente convergente a* f*.*

Dimostrazione. Supponiamo che (f_n) sia crescente a f e poniamo $g_n = f - f_n$ di modo che (g_n) è una successione decrescente puntualmente a 0. Basterà provare che (g_n) converge uniformemente a 0. Poniamo:

$$M_n = \max_{x\in[a,b]} g_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che $\{M_n\}$ è decrescente, quindi convergente a λ definito da:

$$\lambda := \inf_{n\in\mathbb{N}} M_n \geq 0.$$

Si deve quindi provare che $\lambda = 0$.

Per il Teorema di Weierstrass esiste $x_n \in [a,b]$ tale che:

$$M_n = g_n(x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sia (x_{n_k}) una sottosuccessione di (x_n) e $\xi \in [a,b]$ tali che:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

Dato che

$$g_{n_k}(x_{n_k}) = M_k \geq \lambda,$$

e (g_n) è decrescente si ha:

$$g_1(x_{n_k}) \geq g_{n_k}(x_{n_k}) = M_k \geq \lambda.$$

Per $k \to \infty$ ne segue, essendo g_1 continua:

$$g_1(x_0) \geq \lambda.$$

Procedendo analogamente si trova:

$$g_n(x_0) \geq \lambda, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Per $n \to \infty$ ne segue $\lambda = 0$ come richiesto. $\square$

8.1.1 Successioni di Cauchy

Definizione 8.7 *Una successione* (f_n) *di funzioni* $[a, b] \to \mathbb{R}$ *è detta* di Cauchy uniforme *se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tale che:*

$$n, m \geq n_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_M(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{8.4}$$

Il risultato seguente è di facile verifica.

Proposizione 8.8 *Sia* (f_n) *una successione di Cauchy uniforme. Allora* (f_n) *converge uniformemente a una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*.*

8.2 Approssimazione di funzioni continue con polinomi

Vogliamo provare che ogni funzione continua in un intervallo $[a, b]$ è limite uniforme di polinomi. Per semplicità supponiamo $[a, b] = [0, 1]$ osservando che ci si può sempre ricondurre a questo caso con una semplice trasformazione.

Teorema 8.9 (Bernstein) *Sia* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *continua e sia per ogni* $n \in \mathbb{N}$ f_n *definita da:*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f(k/n), \quad x \in [0, 1]. \tag{8.5}$$

Allora (f_n) *converge uniformemente a* f*.*

Dimostrazione. Dato che:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1,$$

possiamo scrivere:

$$f(x) - f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} [f(x) - f(k/n)], \quad x \in [0, 1],$$

da cui:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} |f(x) - f(k/n)|, \quad x \in [0, 1]. \tag{8.6}$$

Dato che f è uniformemente continua (per il Teorema di Heine-Cantor), per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:

$$x, y \in [0,1],\ |x-y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Quindi da (8.6), detto M is massimo di $f(x)$, segue che:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon + 2M \sum_{|x-k/n| \geq \delta_\epsilon} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1]. \tag{8.7}$$

Osserviamo ora che se $|x - k/n| < \delta_\epsilon$ si ha:

$$1 \leq \frac{(k-nx)^2}{n^2 \delta_\epsilon^2},$$

cosicché:

$$\sum_{|x-k/n|<\delta_\epsilon} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n^2\delta_\epsilon^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}.$$

Quindi da (8.7) segue che:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon + \frac{2M}{n^2\delta_\epsilon^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1]. \tag{8.8}$$

D'altra parte risulta, come proveremo in seguito,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leq n, \tag{8.9}$$

e quindi:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon + \frac{2M}{n\delta_\epsilon^2}.$$

Scegliendo infine $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n > n_\epsilon \Rightarrow \frac{2M}{n\delta_\epsilon^2} < \epsilon,$$

si ottiene che:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq 2\epsilon, \quad \forall\, x \in [0,1],$$

il che prova l'uniforme convergenza di (f_n) a f.

Resta da provare (8.9). Per questo fissiamo $x \in [0,1]$ e poniamo:

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \xi^k (1-x)^{n-k} = (\xi + 1 - x)^n.$$

Si ha allora:

$$F'(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\xi^{k-1} (1-x)^{n-k} = n(\xi + 1 - x)^{n-1} \tag{8.10}$$

e

$$F''(\xi) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (k^2 - k)\xi^{k-2} (1-x)^{n-k} = (n^2 - n)(\xi + 1 - x)^{n-2}. \tag{8.11}$$

Posto $\xi = x$ in (8.10) e (8.11) si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\xi^{k-1} (1-x)^{n-k} = n, \tag{8.12}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (k^2 - k)\xi^{k-2} (1-x)^{n-k} = n^2 - n. \tag{8.13}$$

Ora (8.9) segue facilmente. La dimostrazione è completa. □

8.3 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Teorema 8.10 *Sia (f_n) una successione di funzioni continue su un intervallo $[a,b]$ convergente uniformemente a f. Allora risulta:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx$$

$$\le \max_{x\in[a,b]} |f - f_n| \; (b-a).$$

da cui la tesi. □

8.4 Teorema di derivazione

Teorema 8.11 *Sia (f_n) una successione di funzioni continue con le loro derivate su un intervallo $[a, b]$, convergente uniformemente a f. Supponiamo inoltre che la successione (f_n') delle derivate converga uniformemente a g. Allora f è derivabile e risulta $f'(x) = g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 7.12 si ha:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(y)dy.$$

Dal Teorema 8.10 segue che per $n \to \infty$ si ha:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(y)dy.$$

La tesi segue ora dal Teorema 7.11. $\square$

8.5 Serie di funzioni

Sia (f_n) una successione di funzioni $[a, b] \to \mathbb{R}$. Poniamo:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x \in [a, b].$$

Se la successione (S_n) converge puntualmente a una funzione S scriveremo:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad x \in [a, b]$$

e diremo che S è la *somma* della *serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Se la convergenza di (S_n) a S è uniforme diremo che la serie *converge uniformemente*.

Dalla Proposizione 8.12 segue subito il risultato.

Proposizione 8.12 *Supponiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esista $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:*

$$n \geq n_\epsilon,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{8.14}$$

Allora la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ è uniformemente convergente.

Definizione 8.13 *Si dice che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ è* totalmente convergente *se è convergente la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k,$$

dove

$$M_k = \sup_{x \in [a,b]} |f_k(x)|.$$

Proposizione 8.14 *Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ è* totalmente convergente *allora è uniformemente convergente.*

Dimostrazione. Dato che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ è convergente, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n \geq n_\epsilon,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon.$$

Se $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}\mathbb{R}$ ne segue:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon \quad \forall\, x \in [a,b],$$

da cui la tesi. □

8.5.1 Integrazione e derivazione per serie

I risultati seguenti sono conseguenze immediate dei teoremi 8.10 e 8.11.

Teorema 8.15 *Sia $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ una serie funzioni continue su un intervallo $[a,b]$ convergente uniformemente. Allora la serie numerica:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

è convergente e risulta:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Teorema 8.16 *Sia* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *una serie funzioni continue su un intervallo* $[a, b]$ *convergente uniformemente Supponiamo inoltre che la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ *delle derivate sia anche uniformente convergente. Allora la funzione* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *è derivabile e risulta:*

$$D_x \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x), \quad x \in [a, b].$$

$f'(x) = g(x)$ *per ogni* $x \in [a, b]$.

8.5.2 Serie di Taylor

Teorema 8.17 *Sia* $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *derivabile infinite volte e sia* $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. *Supponiamo che esista* $M > 0$ *tale che* [(1)]

$$|f^{(k)}(x)| \le M, \quad \forall\, x \in [a, b],\ k = 0, 1, ...$$

Allora risulta:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k, \quad \forall\, x \in [a, b], \tag{8.15}$$

la serie essendo totalmente convergente in $[a, b]$.

Dimostrazione. Ricordiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la formula di Taylor:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}, \quad x \in [a, b],$$

dove ξ_n è un punto opportuno di $[a, b]$. Ne segue:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \right| \le M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

da cui la tesi, dato che la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b-a)^k}{k!}$ è convergente. □

[(1)] Poniamo $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f'$, ecc.

Esempio 8.18 1) Sia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ e sia $x_0 = 0$. Dato che:

$$f^{(k)}(0) = 1, \quad k = 0, 1, ...,$$

risulta:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) Sia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ e sia $x_0 = 0$. Dato che:

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad f^{(2k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, ...,$$

risulta:

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3) Sia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ e sia $x_0 = 0$. Dato che:

$$f^{(2k+1)}(0) = 0, \quad f^{(2k)}(0) = (-1)^k, \quad k = 0, 1, ...,$$

risulta:

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Capitolo 9

Spazi metrici

9.1 Prime definizioni

Sia X un insieme non vuoto. Una *metrica* d su X è un'applicazione

$$d : X \times X \to [0, +\infty), \ (x, y) \mapsto d(x, y),$$

tale che:

(i) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$.

(iii) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$, $\forall\, x, y, z \in X$.

La (iii) è detta *disuguaglianza triangolare*. Se d è una metrica su X si dice che la coppia (X, d) è uno *spazio metrico*.

Nel seguito del capitolo (X, d) rappresenta uno *spazio metrico* fissato, gli elementi di X saranno detti *punti*. Alle volte scriveremo X anziché (X, d) per brevità.

Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subset X$. Allora (Y, d) è uno spazio metrico.

Esercizio 9.1 Provare la disuguaglianza:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \le d(z, y), \quad \forall\, x, y, x \in X.$$

Dato un sottoinsieme Y di X si definisce il *diametro* di Y ponendo

$$\mathrm{diam}\,(Y) = \sup\{d(x, y) : \ x, y \in Y\}.$$

Se diam $(Y) < +\infty$ si dice che Y è *limitato.*

Per ogni $x_0 \in X$ e $r > 0$ definiamo la *palla aperta* $B(x_0, r)$, la palla chiusa $\bar{B}(x_0, r)$ e la *sfera* $S(x_0, r)$ di centro x_0 e raggio r ponendo:

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in X : \ d(x_0, x) < r\}, \\ \bar{B}(x_0, r) &= \{x \in X : \ d(x_0, x) \leq r\}, \\ S(x_0, r) &= \{x \in X : \ d(x_0, x) = r\}. \end{aligned}$$

Si vede facilmente che $Y \subset X$ è limitato se e solo se Y è contenuto in una palla aperta.

Esempio 9.2 (i). Sia $X = \mathbb{R}$, poniamo:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Allora $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico. Nel seguito intenderemo sempre che $\mathbb{R}$ sia munito della metrica d.

(ii). Sia $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{R}^n$ l'insieme delle n-ple ordinate $x = (x_1, ..., x_n)$ di numeri reali. Poniamo:

$$d(x, y) = |x - y| = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Allora $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico. d è detta la dmetrica *euclidea.*

(iii). Sia $[a, b]$ un intervallo in $\mathbb{R}$. Indichiamo con $C([a, b])$ l'insieme delle funzioni reali continue su $[a, b]$. Definiamo su $C([a, b])$ una metrica ponendo:

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \quad \forall\, f, g \in C([a, b]).$$

(iv). Sia X un insieme non vuoto. Definiamo una metrica su X ponendo:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

d è detta la *metrica banale*

(v). Sia Y un sottoinsieme non vuoto di X. Allora (Y, d) è uno spazio metrico.

9.2 Insiemi aperti e chiusi

Sia (X, d) uno spazio metrico, A un sottoinsieme non vuoto di X. Si dice che un punto $x_0 \in A$ è *interno* ad A se esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset A$; che $x_0 \in X$ è un *punto limite* o di *accumulazione* di A se $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ per ogni $r > 0$. Se $x_0 \in A$ non è di accumulazione, si dice che è un punto *isolato* di A.

Si dice che A è *aperto* se tutti i suoi punti sono interni. Per definizione $\varnothing$ è aperto.

Si verifica facilmente che l'unione di un' arbitraria famiglia di aperti e l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto.

Si dice che un A è *chiuso* se il suo complementare K^c è aperto. In particolare X e $\varnothing$ sono insiemi aperti e chiusi.

Ricordando la formula di De Moivre [1] si vede che l'intersezione di una famiglia arbitraria di chiusi e l'unione di un numero finito di chiusi è un chiuso. $\varnothing$ e X sono chiusi e aperti.

La *chiusura* $\bar{A}$ di A è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti A.

L' *interno* $\mathring{A}$ di A è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A ovvero l'insieme di tutti i punti interni di A.

La *frontiera* ∂A di A è l'insieme $A \setminus \mathring{A}$.

A è *magro* se $\bar{A}$ non ha punti interni cioè se $\mathring{\bar{A}} = \varnothing$.

A è *denso* in X se $\bar{A} = X$.

Si dice che X è *separabile* se esiste un sottoinsieme numerabile denso in X.

Esercizio 9.3 Sia $x \in X$ e $r > 0$. (i) Provare che $B(x, r)$ è aperto e $\bar{B}(x, r)$ è chiuso.

(ii) Provare che in generale la chiusura $\overline{B(x, r)}$ di $B(x, r)$ non coincide con $\bar{B}(x, r)$. (Vedi esempio 9.2-(iv)).

Esempio 9.4 Sia A un aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ munito della metrica euclidea. Allora A è l'unione di una successione (finita o infinita) di intervalli aperti. Sia infatti (x_k) una successione costituita dai razionali contenuti in A. Per ogni k, dato che x_k è interno ad A esiste un intervallo aperto I_k di centro x_k

[1] Se $\{A_i\}_J$ è una famiglia di sottoinsiemi di X risulta $(\bigcup_{i \in J} A_i)^c = \bigcap_{i \in j} (A_i)^c$.

contenuto in A. È chiaro che:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Esercizio 9.5 Provare che:

$$\overline{B(x,r)} = \bar{B}(x,r), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$$

se $X = \mathbb{R}^n$ o $C([a,b])$.

9.3 Limiti di successioni, spazi metrici completi

Sia (X, d) uno spazio metrico. Una *successione* (x_n) in X è un'applicazione $\mathbb{N} \to X, n \mapsto x_n$.

Definizione 9.6 *Sia* (x_n) *una successione in* X *e sia* $x \in X$. *Si dice che* (x_n) converge *a* x *(o che ha per limite* x*) se risulta*

$$\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0.$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad$ oppure $x_n \to x$.

È chiaro che una successione (x_n) ha al più un limite. Supponiamo infatti che:

$$x_n \to x, \quad x_n \to y.$$

Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n > n_\epsilon \Rightarrow d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2},\ \ d(y, x_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ne segue per $n_\epsilon \in \mathbb{N}$:

$$d(x, y) \le d(x, x_n) + d(y, x_n) < \epsilon,$$

cosicché $x = y$.

Proposizione 9.7 *Sia K un sottoinsieme chiuso e non vuoto di X. Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(i) *K è chiuso.*

(ii) *Vale l'implicazione:*

$$(x_n) \subset K,\ x_n \to x \Rightarrow x \in K.$$

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sia K chiuso e sia $(x_n) \subset K$ convergente a x. Se per assurdo $x \in K^c$ esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset K^c$ e quindi non può essere $x_n \to x$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supponiamo per assurdo che valga (ii) e che K non sia chiuso. Allora K^c non è aperto e esiste un elemento $x \in K^c$ che non è interno a K^c. Quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ la palla $B(x, \frac{1}{n})$ contiene un punto $x_n \in K$. È chiaro che $x_n \to x \notin K$ mentre per ipotesi dovrebbe essere $x \in K$. $\Box$

Esercizio 9.8 Sia K un sottoinsieme di X. Provare che $\bar{K}$ coincide con l'insieme dei punti limite di K.

Si dice che una successione (x_n) è di Cauchy se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$m, n > n_\epsilon \Rightarrow d(x_n.x_m) < \epsilon.$$

Si dice che lo spazio X è *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente a un elemento di X.

Esercizio 9.9 (i). Provare che ogni successione convergente è di Cauchy.

(ii) Sia (x_n) una successione in X. Supponiamo che esista una successione in $\mathbb{R}$, (ϵ_k) tale che:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \epsilon_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < \infty.$$

Provare che (x_n) è di Cauchy.

Esempio 9.10 (i). $\mathbb{R}$ è completo.

(ii). Q non è completo.

(iii) Per ogni $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^N$, munito della metrica euclidea, è completo. Infatti sia (x_n) una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^N$ e

$$x_n = (x_n^1, ..., x_n^N), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per definizione di successione di Cauchy per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$n, m > n_\epsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} |x_n^k - x_m^k|^2 < \epsilon^2.$$

Ne segue che per ogni $k = 1, ..., N$, la successione in $\mathbb{R}$, $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. Quindi per ogni $k = 1, ..., N$ esiste $x^k \in \mathbb{R}$ tale che $x_n^k \to x^k$ per $n \to \infty$. Posto allora: $x = (x^1, ..., x^k)$ si verifica facilmente che $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^n$.

(iv). $C([a, b])$ è completo. Osserviamo innanzi tutto che se $(f_n), f \subset C([a, b])$ si ha $f_n \to f$ se e solo se (f_n) converge uniformemente a f. Quindi la completezza di $C([a, b])$ segue dal teorema sulla convergenza uniforme di funzioni continue.

9.4 Applicazioni fra spazi metrici

Consideriamo qui due spazi metrici (X, d) e (Y, ρ).

Sia f un'applicazione $K \subset X \to Y$ e x_0 un punto d'accumulazione di K. Si dice che f ammette limite y_0 per $x \to x_0$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$x \in B(x_0, \delta_\epsilon) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B(y_0, \epsilon).$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

Il risultato seguente si prova in modo analogo alla Proposizione 4.2.

Proposizione 9.11 *Sia $f : K \subset X \to Y$ e sia x_0 un punto d'accumulazione di K. Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

(ii) Vale l'implicazione:

$$(x_n) \subset Y \setminus \{x_0\},\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to y_0.$$

Sia $f : K \subset X \to Y$ e sia $x_0 \in K$. Si dice che f è *continua in* x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:

$$f(B(x_0, \delta_\epsilon) \subset B(f(x_0), \epsilon).$$

Evidentemente se x_0 è un punto d'accumulazione di K, f è *continua in* x_0 se e solo se risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

continua in X se è continua in ogni punto di X.

Infine f è *uniformemente continua in* X se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$x, y \in X,\ d(x, y) < \delta_\epsilon \Longrightarrow \rho(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Proposizione 9.12 *Sia f un'applicazione di X in $\mathbb{R}$. Le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(i) f è continua in X.

(ii) $B \subset Y$ aperto $\Rightarrow f^{-1}(B)$ aperto in X.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. Supponiamo che f sia continua in X e che V sia un aperto in Y. Poniamo $A = f^{-1}(V)$. Dobbiamo mostrare che ogni punto x_0 di A è interno.

Dato che V è aperto, $y_0 = f(x_0)$ è interno a V cosicché esiste $\epsilon > 0$ tale che $B(y_0, \epsilon) \subset V$. Dato che f è continua esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:

$$f(B(x_0, \delta_\epsilon)) \subset B(y_0, \epsilon).$$

Quindi $B(x_0, \delta_\epsilon) \subset f^{-1}(V)$ e x_0 è interno ad A. Ne segue che $f^{-1}(B(y_0, \epsilon)) \subset A$. Dato che $f^{-1}(B(y_0, \epsilon))$ è aperto ció implica che x_0 è interno ad A.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supposto che valga (ii) proviamo che f è continua in ogni punto $x_0 \in X$. Sia $y_0 = f(x_0)$ e $\epsilon > 0$. Per ipotesi $f^{-1}(B(y_0, \epsilon))$ è un aperto contenente x_0, quindi esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che $f^{-1}(B(y_0, \epsilon))$ contiene una palla $B(x_0, \delta_\epsilon)$. Ne segue [2]

$$f(B(x_0, \delta_\epsilon)) \subset B(y_0, \epsilon),$$

cosicché f è continua in x_0. $\square$

[2] Si vede facilmente che $f(f^{-1}(B)) \subset B$ per ogni sottoinsieme B di Y.

9.5 Compattezza

Sia (X, d) uno spazio metrico completo e K un sottoinsieme non vuoto di X.
Diamo alcune definizioni.

- Un *ricoprimento* di K è una famiglia $(A_k)_{k\in I}$ di sottoinsiemi di X tale che
$$\bigcup_{k\in I} A_k \supset K.$$
Se l'insieme I è finito si dice che il ricoprimento è *finito*. Se gli A_k sono aperti si dice che il ricoprimento è *aperto*.
Se $J \subset I$ e se
$$\bigcup_{k\in J} A_k \supset K,$$
si dice che $(A_k)_{k\in J}$ è un *sottoricoprimento* di K.
Ad esempio se K è limitato esiste una palla $B(x, r)$ tale che $B(x, r) \supset K$. Quindi $B(x, r)$ è un ricoprimento di K.
- Si dice che K è *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ possiede un ricoprimento finito di palle di raggio r. Ovviamente se K è totalmente limitato è limitato.
- Si dice che K è *compatto* se da ogni ricoprimento aperto di K si può estrarre un ricoprimento finito.
- Si dice che K è *sequenzialmente compatto* se da ogni successione di elementi di K si può estrarre una sottosuccessione convergente a un elemento di K.
- Se X è compatto si dice che lo spazio metrico (X, d) è compatto.

Esercizio 9.13 Provare che ogni insieme sequenzialmente compatto è chiuso e limitato.

Il teorema seguente riguarda alcune importanti relazioni fra i concetti introdotti.

Teorema 9.14 *Sia K un sottoinsieme di X. Le affermazioni seguenti sono equivalenti.*

(i) K è sequenzialmente compatto.

(ii) K è chiuso e totalmente limitato.

(iii) K è compatto.

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. Procediamo per assurdo supponendo che K sia sequenzialmente compatto ma non totalmente limitato. Allora esiste $r_0 > 0$ tale che nessuna famiglia finita di palle di raggio r_0 ricopre K. Prendiamo un elemento $x_1 \in K$. Allora la palla $B(x_1, r_0)$ non ricopre K cosicché esiste $x_2 \in K$ tale che $d(x_1, x_2) > r_0$ e le palle $B(x_1, r_0), B(x_2, r_0)$ non ricoprono K. Procedendo analogamente si costruisce una successione $(x_k) \subset K$ tale che:

$$d(x_i, x_j) > r_0, \quad \text{se } i \neq j.$$

È chiaro che da (x_k) non si può estrare una sottosuccessione convergente.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Procediamo ancora per assurdo supponendo che K sia chiuso e totalmente limitato ma non compatto, di modo che esiste un ricoprimento aperto (A_k) di K da cui non si può estrarre un ricoprimento finito. Consideriamo un ricoprimento finito di K con palle di raggio 1: allora è chiaro che esiste una palla $B(x_1, 1)$ che ha intersezione non vuota con K e tale che non esiste un sottoricoprimento finito di (A_k) che la ricopre. $B(x_1, 1)$ è un insieme totalmente limitato, quindi esiste un ricoprimento finito di $B(x_1, 1)$ con palle di raggio $1/2$. Per lo stesso motivo esiste una palla:

$$B(x_2, 1/2) \subset B(x_1, 1),$$

tale che non esiste un sottoricoprimento finito di (A_k) che la ricopre.

Procedendo analogamente si costruisce una successione $(x_n) \subset K$ tale che:

(i) $B(x_{n+1}, 2^{-n}) \subset B(x_n, 2^{-n+1})$,

(ii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, non esiste un sottoricoprimento finito di (A_k) che ricopre $B(x_n, 2^{-n+1})$.

Grazie a (i) la successione (x_k) è di Cauchy ed è quindi convergente a un elemento $\bar{x}$ di K (ricordare che K è chiuso). Sia infine $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$\bar{x} \in A_{k_0}$. Dato che A_{k_0} è aperto esiste $s_0 > 0$ tale che $B(\bar{x}, s_0) \subset A_{k_0}$. Se $s_0 > 22^{n-1}$ si ha:

$$B(x_n, 2^{-n+1}) \subset B(\bar{x}, s_0) \subset A_{k_0}.$$

In questo caso l'unico insieme A_{k_0} ricopre $B(x_n, 2^{-n+1})$ il che contraddice (ii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Sia X compatto e supponiamo per assurdo che esista una successione (x_k) in K da cui non si può estrarre una sottosuccessione convergente. Evidentemente (x_k) è costituita da un numero infinito di elementi. Per ogni $x \in K$ esiste $r_x > 0$ tale che la palla $B(x, r_x)$ contiene soltanto un numero finito di punti di (x_k). Quindi la famiglia $(B(x, r_x))_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto di K da cui non si può estrarre un sottoricoprimento finito. $\square$

Esempio 9.15 Sia $X = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea. Dal Teorema 9.14 segue che un sottoinsieme K di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Esercizio 9.16 Sia $n \in \mathbb{N}$,$X = \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea. Provare che un sottoinsieme K di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Proposizione 9.17 *Siano (X, d) e (Y, ρ) spazi metrici completi e $f : X \to Y$ continua. Sia K un sottoinsieme compatto di X. Allora $f(K)$ è compatto.*

Dimostrazione. Infatti sia $(B_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $f(K)$ e $A_i = f^{-1}(B_i)$. Allora, dato che f è continua si ha che $(A_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di K. Dato che K è compatto esistono $i_1, ..., i_n \in I$ tali che:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k} \supset K.$$

Quindi

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_{i_k} \supset f(K),$$

e $f(K)$ è compatto. $\square$

Esempio 9.18 Sia $X = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea. Un sottoinsieme K di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. In tal caso ha ovviamente massimo e minimo.

Esercizio 9.19 Sia $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea. Provare che n sottoinsieme K di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Vediamo alcune applicazioni del concetto di compattezza che generalizzano i Teoremi 5.7 e 5.4 rispettivamente.

Teorema 9.20 (Weierstrass) *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Sia K un sottoinsieme compatto di X. Allora f ha massimo e minimo in K.*

Dimostrazione. Basta osservare che $f(K)$ è chiuso e limitato in $\mathbb{R}$. $\square$

Teorema 9.21 (Heine-Cantor) *Siano (X, d) e (Y, ρ) spazi metrici completi e $f : X \to Y$ continua. Sia K un sottoinsieme compatto di X. Allora f è uniformemente continua su K.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Allora esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $x, y \in K$ tali che

$$d(x, y) < \delta, \quad \rho(f(x), f(y)) \geq \epsilon_0.$$

Dato $n \in \mathbb{N}$ e scelto $\delta = \frac{1}{n}$ ne segue che esistono $x_n, y_n \in K$ tali che

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad \rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon_0.$$

Dato che K è compatto esistono due sottosuccessioni (x_{n_k}) e (y_{n_k}) convergenti a due punti x_0 e y_0 rispettivamente e si ha $x_0, y_0 \in I$. Passando al limite per $n \to \infty$ nelle disuguaglianze:

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k}, \quad \rho(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \epsilon_0,$$

risulta $x_0 = y_0$ e $d(f(x_0) - f(y_0)) \geq \epsilon_0$ il che è assurdo. $\square$

Proposizione 9.22 *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Allora X è completo e separabile.*

Dimostrazione. La completezza è chiara, proviamo la separabilità. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un ricoprimento finito di X:

$$B(x_1^n, 1/n), ..., B(x_{a_n}^n, 1/n)$$

È chiaro che l'unione di tutti i centri:

$$x_1^n, ..., x_{a_n}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$ è un insieme denso in X.

Esempio 9.23 Sia $X = C([0,1])$. Allora K è separabile; un sottoinsieme denso di K è dato dai polinomi a coefficienti razionali. Ciò segue dal Teorema di Bernstein.

Sia $K = \{f_n : \; n \in \mathbb{N}\}$, dove

$$f_n(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

È chiaro che $d(0, f_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi K è limitato. Si ha inoltre

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1), \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Ne segue che nessuna sottosuccessione di K è convergente. Quindi K non è né compatto né totalmente limitato.

9.5.1 Intersezione di famiglie di compatti

Sia (X, d) uno spazio metrico completo.

Proposizione 9.24 *Sia (K_n) una successione decrescente di sottoinsiemi compatti non vuoti di X. Allora*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing.$$

Allora, posto $A_n = K_n^c$, si ha che (A_n) è una successione crescente di aperti:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X.$$

Quindi (A_n) è un ricoprimento di K_1 e, essendo K_1 compatto, esiste un sottoricoprimento finito di (A_n) e quindi, dato che (A_n) è crescente, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$K_1 \subset A_{n_0} = K_{n_0}^c.$$

Ciò implica $K_1 \cap K_{n_0} = \varnothing$, il che è assurdo. $\square$

Vediamo ora una generalizzazione della Proposizione 9.24. Per questo premettiamo una definizione.

Sia $(K_i)_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi compatti non vuoti di X. Si dice che $(K_i)_{i\in I}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita* se una qualunque sottofamiglia finita di $(K_i)_{i\in I}$ ha intersezione non vuota.

Proposizione 9.25 *Sia $(K_i)_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi compatti non vuoti di X avente la proprietà dell'intersezione finita. Allora*

$$\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che:

$$\bigcap_{i\in I} K_i = \varnothing.$$

Allora, posto $A_i = K_i^c$, si ha che $(A_i)_{i\in I}$ è una famiglia di aperti tale che:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = X.$$

Quindi $(A_i)_{i\in I}$ è un ricoprimento di K_1 e, essendo K_1 compatto, esiste un sottoricoprimento finito di$(A_i)_{i\in I}$. Quindi esistono $i_1, ..., i_n \in \mathbb{N}$ tali che

$$K_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_k} = \bigcup_{k=1}^{n} K_{i_k}^c.$$

Ciò implica $K_1 \cap K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_n} = \varnothing$, il che è assurdo. $\square$

Vediamo ora un'applicazione della Proposizione 9.24.

Proposizione 9.26 *Sia K un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ privo di punti isolati. Allora K non è numerabile. In particolare $\mathbb{R}$ non è numerabile.*

Dimostrazione. Osserviamo che, dato che K non ha punti isolati, ogni suo punto è un punto limite. Supponiamo per assurdo che K sia numerabile, $K = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dato che x_1 è un punto limite di K esiste una palla aperta B_1 tale che:

$$x_1 \notin \overline{B_1}, \quad \overline{B_1} \cap K \neq \varnothing.$$

Analogamente, dato che x_2 è un punto limite di K esiste una palla aperta B_2 tale che:

$$x_2 \notin \overline{B_2}, \quad \overline{B_2} \subset B_1, \quad \overline{B_2} \cap K \neq \varnothing.$$

Iterando questo procedimento si costruisce una successione (B_n) di palle aperte tale che:

$$x_n \notin \overline{B_n}, \quad \overline{B_n} \subset B_{n-1}, \quad \overline{B_n} \cap K \neq \varnothing.$$

Poniamo:

$$H_n := K \cap \overline{B_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Allora (H_n) è una successione decrescente di compatti contenuta in K e per la Proposizione 9.24 esiste $\bar{x}$ tale che:

$$\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} H_n.$$

Quindi $\bar{x} \in K$, ma ciò è assurdo dato che, essendo $x_n \notin H_n$, $\bar{x}$ non può coincidere con alcuno dei punti di (x_n). $\square$

Esempio 9.27 Sia $X = [0,1]$ con la metrica euclidea. $[0,1]$ è compatto. Poniamo:

$$K_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1],$$
$$K_2 = [0,1/9] \cup [2/9,3/9] \cup [6/9,7/9] \cup [8/9,9/9],$$

e così via. Cioè da ogni intervallo ottenuto togliamo la terza parte di mezzo. In questo modo si ottiene una successione decrescente di compatti (K_n). Poniamo:

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Per la Proposizione 9.24 C è compatto non vuoto. Inoltre si verifica facilmente che C non contiene non ha punti isolati; quindi C non è numerabile per la Proposizione 9.26. C è detto l'insieme di *Cantor*.

9.6 Caratterizzazione dei compatti di $C[0,1])$

I risultati di questa sezione si generalizzano facilmente al caso in cui lo spazio $C[0,1])$ è sostituito da $C(K)$, lo spazio di tutte le funzioni reali continue su uno spazio metrico compatto K, munito della metrica:

$$d(f,g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|.$$

Definizione 9.28 *Un sottoinsieme* Λ *di* $C([0,1])$ *è detto* equicontinuo *se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* $\delta_\epsilon > 0$ *tale che*

$$f, g \in [0,1],\ d(x,y) < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \quad \forall\, f \in \Lambda.$$

Un insieme equicontinuo Λ di $C([0,1])$ non è necessariamente limitato, basta considerare il sottoinsieme delle costanti:

$$\Lambda = \{f \in C([0,1]) :\ f(x) = c,\ \forall\, x \in [0,1], \quad c \in \mathbb{R}\}.$$

Esempio 9.29 Sia

$$\Lambda = \{f \in C([0,1]) :\ |f(x) - f(y)| \le |x - y|,\ \ \forall\, x, y \in [0,1]\}.$$

È chiaro che Λ è equicontinuo.

Teorema 9.30 (Ascoli-Arzelà) *Sia* $\Lambda \subset C([0,1])$. *Allora le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(i) Λ *è equicontinuo chiuso e limitato.*

(ii) Λ *è compatto.*

Dimostrazione. $(i) \Rightarrow (ii)$. Basta mostrare per il Teorema 9.14 che ogni successione (f_n) in Λ possiede una sottosuccessione convergente in $C([0,1])$, cioè uniformemente convergente. Procederemo in due passi; nel primo proveremo che esiste una sottosuccessione (g_k) di (f_n) convergente in tutti i punti di $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (che è denso in $[0,1]$), nel secondo che (g_k) è uniformemente convergente in $[0,1]$.

Primo passo.

Usiamo qui il *procedimento diagonale* di Cantor. Dato che $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è numerabile esiste una successione (x_k) tale che $\mathbb{Q} \cap [0,1] = (x_k)$. Inoltre, dato che Λ è limitato esiste $M > 0$ tale che:

$$d(f,0) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq M, \quad \forall\, f \in \Lambda.$$

In particolare $|f_n(x_1)| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ cosicché esiste una sottosuccessione di (f_n) che indichiamo con $(f_{1,k})$ tale che $(f_{1,k}(x_1))$ è convergente. Per lo stesso motivo esiste una sottosuccessione $(f_{2,k})$ di $(f_{1,k})$ tale che $(f_{2,k}(x_2))$ è convergente. Procedendo analogamente si costruisce una matrice infinita di funzioni:

$$\begin{array}{l} f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, \ldots, f_{1,m}, \ldots \\ f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, \ldots, f_{2,m}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{k,1}, f_{k,2}, f_{k,3}, \ldots, f_{k,m}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

tali che ogni riga è una sottosuccessione della precedente e esistono i limiti

$$\lim_{m \to \infty} f_{k,m}(x_k), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Consideriamo ora la successione diagonale $(g_k) = (f_{k,k})$:

$$f_{1,1}, f_{2,2}, \ldots, f_{m,m}, \ldots.$$

È chiaro che $(f_{k,k}(x_1))$ è una sottosuccessione di $(f_{1,k}(x_1))$ ed è quindi convergente; inoltre $(f_{k,k}(x_2))$ è una sottosuccessione di $(f_{2,k}(x_2))$ (a parte il primo termine) ed è quindi convergente. Analogamente per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $(f_{k,k}(x_n))$ è una sottosuccessione di $(f_{n,k}(x_n))$ (a parte i primi $n-1$ termini) ed è quindi convergente.

In conclusione $(g_k(x))$ è convergente per ogni $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Secondo passo. (g_k) è uniformemente convergente in $[0,1]$.

Sappiamo che $(g_k(x))$ è convergente per ogni $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Dato che $(g_k) \subset \Lambda$ che è equicontinuo, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:

$$x, y \in [0,1],\ |x-y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |g_k(x) - g_k(y)| < \epsilon/3, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{9.1}$$

Dato che $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è denso in $[0,1]$ possiamo ricoprire l'intervallo $[0,1]$ con un numero finito di palle (intervalli) di centri $v_1, ..., v_{m_\epsilon} \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e raggio δ_ϵ:

$$B(v_1, \delta_\epsilon), ..., B(v_{m_\epsilon}, \delta_\epsilon).$$

Dato che $(g_k(x))$ è convergente per ogni $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ esiste $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$k, h > k_\epsilon \Rightarrow |g_h(v_i) - g_k(v_i)| < \epsilon/3 \quad \forall\, i = 1, ..., m_\epsilon. \tag{9.2}$$

Possiamo ora provare che (g_k) è di Cauchy in $C([0,1])$. Fissiamo $\epsilon > 0$, sia $x \in [0,1]$ e $k, h > k_\epsilon$. Allora x appartiene a una delle palle $B(v_i, \delta_\epsilon)$ e si ha:

$$|g_h(x) - g_k(x)| \leq |g_h(x) - g_h(v_i)| + |g_h(v_i) - g_k(v_i)| + |g_k(x) - g_k v_{i)})|.$$

Da (9.1) e (9.2) segue allora che:

$$|g_h(x) - g_k(x)| < \epsilon, \quad k, h > k_\epsilon$$

e quindi (g_k) è di Cauchy in $C([0,1])$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Dato che Λ è compatto è chiuso e limitato; resta quindi da provare che è equicontinuo. Sia $\epsilon > 0$. Dato che Λ è totalmente limitato (Teorema 9.14) lo si può ricoprire con un numero finito di palle di raggio $\epsilon/3$:

$$B(h_1, \epsilon/3), ..., B(h_{n_\epsilon}, \epsilon/3).$$

Per il Teorema di Heine-Cantor le funzioni $h_1 ..., h_{n_\epsilon}$ sono uniformemente continue. Quindi esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:

$$x, y \in [0,1],\ |x - y| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow |h_i(x) - h_i(y)| < \epsilon/3, \quad \forall\, i = 1, 2, ...n_\epsilon.$$

Possiamo ora verificare che Λ è equicontinuo. Sia $x, y \in [0,1],\ |x - y| \leq \delta_\epsilon$ e $f \in \Lambda$. Si ha allora:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - h_i(x)| + |h_i(x) - h_i(y)| + |h_i(y) - f(y)|,$$

dove i (dipendente da f) è scelto in modo tale che $f \in B(h_i, \epsilon/3)$ cosicché $d(f, h_i) < \epsilon/3$. Si ha allora:

$$|f(x) - f(y)| \leq \epsilon, \quad \forall\, f \in \Lambda.$$

Quindi λ è equicontinuo. $\square$

9.7 Argomento di categoria di Baire

Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Si dice che un sottoinsieme B di X è *magro* se la sua chiusura $\overline{B}$ non ha punti interni. Se X è unione finita o numerabile di insiemi magri si dice che X è di *prima categoria*, altrimenti si dice che X è di *seconda categoria*.

Teorema 9.31 (Baire) *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e (C_n) una successione di insiemi chiusi tali che:*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,$$

Allora almeno uno dei C_n ha un punto interno e quindi X è di seconda categoria.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ogni C_n non abbia punti interni cioè che sia magro. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $A_n = C_n^c$. Gli insiemi A_n sono aperti e densi in X.

Sia $x_1 \in A_1$ e $\epsilon_1 > 0$ tali che $\overline{B(x_1, \epsilon_1)} \subset A_1$. Si ha quindi:

$$\overline{B(x_1, \epsilon_1)} \cap C_1 = \varnothing.$$

Dato che A_2 è denso si ha che $A_2 \cap B(x_1, \epsilon_1)$ è aperto non vuoto. Quindi esiste $B(x_2, \epsilon_2)$ tale che $\overline{B(x_2, \epsilon_2)} \subset A_2$, cosicché

$$\overline{B(x_2, \epsilon_2)} \cap C_2 = \varnothing.$$

Procedendo analogamente si costruisce una successione decrescente di palle chiuse $(\overline{B(x_n, \epsilon_n)})$ tale che:

$$\overline{B(x_n, \epsilon_n)} \cap C_n = \varnothing.$$

Possiamo scegliere la successione (ϵ_n) in modo che:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i < \infty.$$

Quindi la successione (x_n) è di Cauchy e converge a un elemento $\bar{x}$ che appartiene a tutte le palle e quindi a nessun C_n il che è assurdo. $\square$

Il corollario seguente è immediato.

Corollario 9.32 (Baire) *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia (A_n) una successione di aperti densi in X. Allora:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing.$$

Esempio 9.33 (i) Sia $X = \mathbb{R}$ con la metrica euclidea. Allora i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$ sono magri mentre $\mathbb{Q}$ non è magro dato che $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(ii) Sia $X = \mathbb{Q}$ con la metrica $d(x, y) = |x - y|$. Allora X è di prima categoria.

(iii) Sia $X = \mathbb{N}$ con la metrica $d(m, n) = |m - n|$. Allora X è di seconda categoria.

Esercizio 9.34 Provare che $\mathbb{R}^2$ non è unione numerabile di rette.

9.8 Principio delle contrazioni

Teorema 9.35 *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e f un'applicazione di X in X. Supponiamo che esista $\kappa \in (0, 1)$ tale che:*

$$d(f(x) - f(y)) \leq \kappa d(x, y), \quad \forall\, x, y \in X. \tag{9.3}$$

Allore esiste unico $\bar{x} \in K$ tale che $f(\bar{x}) = x$. $\bar{x}$ è detto un punto fisso *di f.*

Dimostrazione. Sia x_0 un punto di X. Definiamo per ricorrenza una successione (x_n) ponendo:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proviamo che (x_n) è di Cauchy. Procedendo per ricorrenza si ha che:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \kappa^n d(x_1, x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dato che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n$ è convergente, ne segue che (x_n) è di Cauchy ed è quindi convergente a un elemento $\bar{x}$. Dall'altra parte da (9.3) segue che f è continua. Passando al limite per $n \to \infty$ nell'euguaglianza $x_{n+1} = f(x_n)$ si trova che $f(\bar{x}) = x$.

Resta da provare l'unicità del punto fisso. Sia $\bar{y} \in X$ tale che $f(\bar{y}) = \bar{y}$. Si ha allora:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(f(\bar{x}) - f(\bar{y})) \leq \kappa d(\bar{x}, \bar{y}),$$

il che implica $\bar{x} = \bar{y}$. $\square$

9.9 Connessione

9.9.1 Distanza indotta su un sottoinsieme

Sia (X, d) uno spazio metrico e A un sottoinsieme di X non vuoto. La restrizione di d a coppie di punti di A è in modo evidente una distanza $d|_A$ su A (distanza indotta).

Per semplicità di notazione, nel seguito scriveremo spesso d al posto di $d|_A$ laddove ciò non possa essere causa di ambiguità.

Vogliamo caretterizzare le palle di A rispetto alla distanza $d|_A$.

Lemma 9.36 *Sia $x \in A$ e $\epsilon > 0$. Allora la palla di $(A, d|_A)$ di centro x e raggio ϵ è l'intersezione con A della palla di (X, d) di centro x e raggio ϵ. In simboli:*

$$B_A(x, \epsilon) = B_X(x, \epsilon) \cap A\,.$$

Dimostrazione. Il lemma segue facilmente dalle due seguenti identità:

$$\begin{aligned} B_X(x, \epsilon) &= \{y \in Y : \ d(x, y) < \epsilon\} \\ B_A(x, \epsilon) &= \{y \in A : \ d(x, y) < \epsilon\}\,. \end{aligned}$$

□

Proposizione 9.37 *Un sottoinsieme K di A è aperto se e solo se esiste un sottoinsieme aperto H di X, tale che $K = A \cap H$.*

Dimostrazione. Sia H aperto di X e mostriamo che $A \cap H$ è aperto di A. Per definizione di aperto dobbiamo mostrare che per ogni $x \in A \cap H$ esiste $\epsilon > 0$ tale che $B_A(x, \epsilon) \subset A \cap H$. Poiché H è un aperto di X esiste $\epsilon > 0$ tale che $B_X(x, \epsilon) \subset H$. In tal modo si ha

$$B_A(x, \epsilon) = B_X(x, \epsilon) \cap A \subset H \cap A\,.$$

Viceversa sia K un sottoinsieme aperto di A. Per ogni $x \in K$ sia $\epsilon(x) > 0$ tale che $B_A(x, \epsilon(x)) \subset A$. Si noti che

$$K = \bigcup_{x \in K} B_A(x, \epsilon(x))\,.$$

Poniamo $H = \bigcup_{x \in K} B_X(x, \epsilon(x))$. H è un aperto di X in quanto unione di palle aperte. Inoltre si ha

$$A \cap H = \bigcup_{x \in K} A \cap B_X(x, \epsilon(x)) = \bigcup_{x \in K} B_A(x, \epsilon(x)) = K$$

Esercizio 9.38 1. Si provi che $[0, 1/2)$ è un sottoinsieme aperto di $[0, 1]$.

2. Si provi che $K \subset A$ è chiuso se e solo se esiste $H \subset X$ chiuso tale che $K = H \cap A$.

3. Si provi che la mappa di inclusione $i : (A, d|_A) \to (X, d)$ è continua.

4. Sia $f : (Y, d') \to (X, d)$ applicazione continua e sia $A = f(Y)$. Si mostri che la mappa $f : (Y, d') \to (A, d|_A)$ è continua.

5. Sia $A \subset X$ un sottoinsieme aperto (risp. chiuso), si mostri che $F \subset A$ è aperto in A (risp. chiuso in A) se e solo se è aperto (risp.chiuso) come sottoinsieme di X.

9.9.2 Spazi metrici connessi

Uno spazio metrico (X, d) è detto *sconnesso* se esistono A, B sottoinsiemi aperti, disgiunti e non vuoti di X tali che $X = A \cup B$.

Si dice che uno spazio metrico è *connesso* se non è sconnesso.

Osservazione 9.39 Una definizione equivalente di spazio connesso è la seguente. X è connesso se gli unici sottoinsiemi di X che sono aperti e chiusi sono $\varnothing$ e X.

Infatti sia (X, d) uno spazio metrico connesso e A un sottoinsieme aperto e chiuso di X. Allora $X \setminus A$ è aperto (perché A è chiuso) e si ha

$$X = A \cup (X \setminus A) \qquad A \cap (X \setminus A) = \varnothing\,.$$

Poiché X è connesso si ha che $A = \varnothing$ oppure $X \setminus A = \varnothing$; ovvero $A = \varnothing$ oppure $A = X$.

Viceversa supponiamo che (X, d) sia sconnesso. Allora esistono A, B aperti non vuoti e disgiunti tali che $X = A \cup B$. Dunque risulta $B = X \setminus A$. Poichè B è aperto A è chiuso. Dunque A è un sottoinsieme aperto e chiuso di X. Siccome A e B sono non vuoti, risulta che A è diverso da $\varnothing$ e X.

Proposizione 9.40 *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ continua. Se X è connesso allora $f(X)$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme aperto e chiuso di $f(X)$. Dato che f è continua si ha che $f^{-1}(A)$ è un sottoinsieme aperto e chiuso di X. Dato che X è connesso si ha che $f^{-1}(A)$ è o l'insieme vuoto o X. Poiché $A = f(f^{-1}(A))$, risulta che $A = f(X)$ oppure $A = \varnothing$. $\square$

9.9.3 Sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$

Il primo esempio fondamentale di spazio metrico connesso è l'intervallo chiuso $[a, b]$.

Proposizione 9.41 *L'intervallo chiuso* $[a, b]$ *è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $[a, b]$ sia sconnesso, e siano A, B sottoinsiemi aperti non vuoti e disgiunti tali che $[a, b] = A \cup B$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $a \in A$, in modo che si abbia $a \notin B$.

Sia dunque $t_0 = \min B$ (il minimo esiste perchè B è compatto, in quanto chiuso e limitato in $\mathbb{R}$). Si ha $t_0 > a$. Poichè B è aperto in $[a, b]$ esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$\{x \in [a, b] : |x - t_0| < \epsilon\} \subset B.$$

Allora $t_0 - \epsilon/2 \in B$ il che contraddice la scelta di t_0. $\square$

Si noti che la dimostrazione precedente si adatta male al caso di un intervallo aperto. Per mostrare allora la connessione di un intervallo aperto (anche infinito) utilizzeremo un criterio generale che sarà anche utile in seguito.

Proposizione 9.42 *Sia* (X, d) *spazio metrico e sia* $(X_i)_{i\in I}$ *una famiglia di sottoinsiemi connessi di* X *tali che*

$$X = \bigcup_{i\in I} X_i \qquad \bigcap_{i\in I} X_i \neq \varnothing\,.$$

Allora X *è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che X sia sconnesso e siano A, B aperti non vuoti disgiunti di X tali che $X = A \cup B$.

Si ponga $A_i = A \cap X_i$ e $B_i = B \cap X_i$. A_i e B_i sono sottoinsiemi aperti di X_i. Si noti che

$$X_i = A_i \cup B_i\,.$$

Poichè X_i è connesso si ha $A_i = \varnothing$ oppure $B_i = \varnothing$.

Fissiamo $i_0 \in I$ e supponiamo senza perdere di generalità $B_{i_0} = \varnothing$, in modo che $A_{i_0} = X_{i_0}$.

Per ipotesi esiste un punto $x \in X$ che appartiene a tutti gli X_i. In particolare $x \in X_{i_0} = A_{i_0} = A \cap X_{i_0}$. Dunque x appartiene ad A. Siccome x appartiene a tutti gli X_i, si ha che x appartiene a tutti gli A_i. Ciò mostra che tutti gli A_i sono non vuoti. Poiché abbiamo osservato che uno tra A_i e B_i deve essere vuoto, ne segue che tutti i B_i sono vuoti. Poiché $B = \bigcup B_i$, risulta che B stesso è vuoto. Ciò contraddice l'ipotesi che B sia non vuoto. $\square$

Proposizione 9.43 *Ogni intervallo I di $\mathbb{R}$ (aperto o chiuso a destra, aperto o chiuso a sinistra, limitato o illimitato) è connesso.*

Dimostrazione. Svolgiamo la dimostrazione nel caso $I = (a, b)$ lasciando gli altri casi per esercizio al lettore.

Siano (a_n) e (b_n) successioni monotone (risp. decrescente e crescente) in (a, b) convergenti rispettivamente ad a e a b e tali che $a_n < b_n$. Si consideri la famiglia degli intervalli $I_n = [a_n, b_n]$. Si ha

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (a, b) \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a_0, b_0],$$

(la seconda uguaglianza segue dal fatto che $I_{n+1} \supset I_n$). Grazie alla Proposizione 9.41, ogni I_n è connesso. A questo punto si può utilizzare il criterio dato dalla Proposizione 9.42 e dedurre che I è connesso. $\square$

Corollario 9.44 *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo (eventualmente ridotto ad un punto).*

Dimostrazione. Abbiamo già visto che gli intervalli sono connessi. Non rimane dunque che mostrare il viceversa.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ connesso. Poniamo $x_0 = \inf A$ e $y_0 = \sup A$ mostriamo che l'intervallo aperto (x_0, y_0) è contenuto in A. Per assurdo se esiste $t \in (x_0, y_0) \setminus A$, si possono considerare gli insiemi $A_- = \{x \in A | x < t\}$ e $A_+ = \{x \in A | x > t\}$. Risulta che A_- e A_+ sono sottoinsiemi di A non vuoti (se A_- è vuoto risulta $\inf A > t > x_0$ e analogamente per A_+). Inoltre $A = A_- \cup A_+$ e $A_- \cap A_+ = \varnothing$. Ma ciò contraddice l'ipotesi che A sia connesso.

Dunque $(\inf A, \sup A) \subset A$. Del resto è chiaro che $A \subset [\inf A, \sup A]$ e dunque A è un intervallo. $\square$

9.9.4 Componenti connesse di un insieme

Sia (X, d) uno spazio metrico e si fissi $x \in X$. Si definisce *componente connessa* di x, l'unione di tutti i sottoinsiemi connessi di X che contengono x. Denoteremo con $C(x)$ tale insieme.

Proposizione 9.45 *Per ogni $x \in X$, $C(x)$ è connesso (in altre parole è il più grande sottoinsieme connesso di X che contiene x).*

Inoltre dati $x, y \in X$ si hanno due casi: $C(x) = C(y)$ oppure $C(x) \cap C(y) = \varnothing$.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi connessi contenenti x. Allora si ha

$$C(x) = \bigcup_{Y \in \mathscr{F}} Y \qquad x \in \bigcap_{Y \in \mathscr{F}} Y$$

Dunque applicando il criterio dato nella Proposizione 9.42, segue che $C(x)$ è connesso.

Per la seconda parte delle Proposizione, si supponga $C(x) \cap C(y) = \varnothing$. Ancora applicando la Proposizione 9.42 si ha che $C(x) \cup C(y)$ è connesso. Poiché $C(x) \cup C(y)$ contiene x ed è connesso risulta che $C(x) \cup C(y) \subset C(x)$ ovvero $C(y) \subset C(x)$. Simmetricamente si dimostra che $C(x) \subset C(y)$. $\square$

Dalla Proposizione 9.45 segue che le componenti connesse formano una partizione dello spazio (X, d) in sottoinsiemi connessi.

Un'osservazione molto semplice ma a volte utile è che uno spazio è connesso se e solo se contiene un'unica componente connessa.

Proposizione 9.46 *Sia $A \subset X$ e si supponga che A sia connesso. Allora $\overline{A}$ è connesso. In particolare la componente connessa di x è un sottoinsieme chiuso di X.*

Dimostrazione. Siano H, K sottoinsiemi di $\overline{A}$ aperti non vuoti tali che $\overline{A} = H \cup K$. Poichè A è connesso si ha che uno tra $A \cap H$ e $A \cap K$ è vuoto. Senza perdere di generalità si può supporre $A \cap H = \varnothing$.

Sia $x \in H$. Poichè H è aperto in $\overline{A}$, esiste $\epsilon > 0$ tale che ogni $y \in \overline{A}$ con $d(x, y) < \epsilon$ appartiene a H. Poiché $x \in \overline{A}$ esiste una successione (x_n) contenuta in A e convergente a x. Dunque per n sufficientemente grande $d(x_n, x) < \epsilon$ e quindi $x_n \in H$. Questo contraddice il fatto che $A \cap H = \varnothing$. $\square$

Esempio 9.47

1. Le componenti connesse di $X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{5\}$ sono $[0, 1]$ e $[2, 3]$ e $\{5\}$. Infatti se A è un sottoinsieme connesso di X allora A è un intervallo (in quanto in particolare $A \subset \mathbb{R}$). Quindi risulta $A \subset [0, 1]$ o $A \subset [2, 3]$ o $A = \{5\}$.

2. Le componenti connesse di $X = [0, 1] \setminus \{1/2\}$ sono $[0, 1/2)$ e $(1/2, 1]$.

3. Sia $X = \mathbb{Q}$. Fissato $x \in \mathbb{Q}$ si ha $C(x) = \{x\}$. Infatti $C(x)$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{Q}$. Poichè $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si ha che $C(x)$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ contenuto in $\mathbb{Q}$. In particolare $C(x)$ è un intervallo di $\mathbb{R}$ tutto contenuto in $\mathbb{Q}$ e dunque è al più un punto.

L'ultimo esempio mostra che in generale $C(x)$ non è un sottoinsieme aperto di X.

9.9.5 Connessione per archi

Un *arco* in uno spazio metrico (X, d) è una funzione continua

$$f : [0, 1] \to X .$$

I punti $x = f(0)$ e $y = f(1)$ si dicono gli *estremi* di f e si dice che f *connette* x *a* y.

Uno spazio metrico (X, d) si dice *connesso per archi* se dati $x, y \in X$ esiste un arco che li connette.

Proposizione 9.48 *Uno spazio metrico connesso per archi è connesso.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che per ogni $x \in X$ si ha $C(x) = X$ ovvero che, dato $x \in X$, per ogni $y \in X$ esiste un sottoinsieme connesso che contiene sia x che y.

Ora dato un arco $f : [0, 1] \to X$ che connette x a y, l'immagine di f è un sottoinsieme connesso (in quanto immagine di un connesso) e contiene sia x che y. $\square$

Ci si potrebbe chiedere se vale anche il viceversa, ovvero se uno spazio metrico connesso è connesso per archi. Il seguente esempio mostra che in generale questa implicazione non è vera.

Esempio 9.49 L'insieme $X_0 = \{(t, \sin 1/t) : \ t > 0\}$ è connesso in quanto immagine di un connesso tramite l'applicazione continua:

$$(0, +\infty) \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (t, \sin 1/t).$$

L'insieme $X = \overline{X_0}$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^2$ per la Proposizione 9.46. Inoltre non è difficile mostrare che $X = X_0 \cup I$, essendo $I = \{(0, t) : \ t \in [-1, 1]\}$ (lo studente provi questa affermazione in dettaglio).

Mostreremo che X non è connesso per archi. Più precisamente mostreremo che un arco $f : [0, 1] \to X$ con un estremo in I è contenuto in I.

Sia $A = f^{-1}(I) \subset [0, 1]$. Si ha $A \neq \varnothing$ per ipotesi, inoltre A è chiuso poichè f è continua e I è chiuso. Per la connessione di $[0, 1]$ è allora sufficiente mostare che A è aperto.

Supponiamo $t_0 \in A$ ovvero $f(t_0) = (0, y_0)$. Sia Q il quadrato aperto di centro $(0, y_0)$ e lato 1

$$Q = \{(x, y) : \ x < 1/2, |y - y_0| < 1/2\}$$

Q è un intorno di $f(t_0)$, dunque esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(t) \in Q$ per ogni $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Nel seguito mostreremo che $f(t) \in I$ per ogni $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Ciò mostra che A è aperto (infatti abbiamo trovato un intorno di t_0 in $[0, 1]$ contenuto in A).

Supponiamo per assurdo che esista $t_1 \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ tale che $f(t_1) \in X_0$, ovvero $f(t_1) = (x_1, \sin 1/x_1)$. Senza perdere di generalità possiamo supporre $t_1 > t_0$. Allora $f([t_0, t_1])$ sarebbe un sottoinsieme connesso di $Q \cap X$ contenente $(0, y_0)$ e $(x_0, \sin 1/x_0)$.

Ora per definizione

$$\begin{aligned} Q \cap X = \{(0, y) : \ y_0 - 1/2 < y < y_0 + 1/2\} \cup \\ \cup \{(x, \sin 1/x) : \ x < 1/2, \ y_0 - 1/2 < \sin 1/x < y_0 + 1/2\} \end{aligned}$$

Poichè l'intervallo $[y_0 - 1/2, y_0 + 1/2]$ ha lunghezza 1 mentre l'intervallo $[-1, 1]$ ha lunghezza 2, esiste $m \in [-1, 1] \setminus [y_0 - 1/2, y_0 + 1/2]$. Possiamo fissare $M > 1/x_0$ tale che $\sin M = m$.

Sia allora r la retta verticale definita da $x = 1/M$. Notiamo che tale retta non interseca $Q \cap X$. Siano A_- e A_+ i semipiani aperti delimitati da r. Chiaramente si ha che $Q \cap X = Q \cap X \cap A_- \cup Q \cap X \cap A_+$. In particolare poichè $f([t_0, t_1])$ è contenuto in $Q \cap X$ si ha

$$f([t_0, t_1]) = f([t_0, t_] \cap A_- \cup f([t_0, t_1] \cap A_+$$

Ora $f([t_0, t_1]) \cap A_-$ e $f([t_0, t_1]) \cap A_+$ sono aperti disgiunti. Inoltre $f(t_0) = (0, y_0) \in A_-$ (infatti la sua ascissa è minore di $1/M$) mentre $f(t_1) = (x_0, \sin 1/x_0) \in A_+$ (poiché $M > 1/x_0$, si ha che $x_0 > 1/M$, ovvero $f(t_1)$ è alla destra di r). Ma ciò contraddice il fatto che $f([t_0, t_1])$ è connesso.

La connessione per archi dá un criterio semplice per verificare la connessione di uno spazio. Proveremo ad esempio che $\mathbb{R}^n$ è connesso.

Esempio 9.50 $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi. Infatti dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, un arco che li connette è dato da $f(t) = (1-t)x + ty$.

In modo analogo si dimostra che le palle di $\mathbb{R}^n$ sono connesse per archi. Utilizzando questo fatto è semplice vedere che gli aperti connessi di $\mathbb{R}^n$ sono connessi per archi.

Proposizione 9.51 *Sia Ω sottoinsieme* aperto *di $\mathbb{R}^n$. Allora Ω è connesso se e solo se è connesso per archi.*

Dimostrazione. L'implicazione $\Leftarrow$ è un caso generale della Proposizione 9.48. Mostriamo dunque l'altra implicazione. Supponiamo Ω connesso e mostriamo che è connesso per archi. Fissato $x \in \Omega$, vogliamo mostrare che tutti i punti sono connettibili a x tramite un arco.

Sia A l'insieme dei punti connettibili a x. A è non vuoto (x è contenuto in A!). Dunque è sufficiente mostrare che A è aperto e chiuso (in Ω).

A è aperto. Sia $y \in A$ e sia $\epsilon > 0$ tale che $B(y, \epsilon) \subset \Omega$ (tale ϵ esiste in quanto Ω è aperto). Dimostreremo che $B(y, \epsilon) \subset A$ (ovvero che ogni punto in $B(y, \epsilon)$ è connettibile a x tramite un arco contenuto in Ω).

Per ipotesi esiste un arco $f : [0, 1] \to \Omega$ che connette x a y. Inoltre poichè $B(y, \epsilon)$ è connesso per archi, fissato $z \in B(y, \epsilon)$ esiste un arco $g : [0, 1] \to B(y, \epsilon) \subset \Omega$ che connette y a z. L'unione degli archi f e g, sarà allora un arco che connette x a z.

Formalmente si definisce l'arco unione nel modo seguente

$$[0, 1] \ni t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{se} \quad t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & \text{se} \quad t \geq 1/2 \end{cases}$$

Lo studente controlli che è un arco continuo contenuto in Ω che connette x a z.

A è chiuso. Sia $y \in \Omega$ aderente ad A. Si fissi $\epsilon > 0$ tale che $B(y, \epsilon) \subset \Omega$. Poichè y è aderente ad A esiste $z \in B(y, \epsilon)$ contenuto in A. Ora esiste un arco che connette x a z. Poiché $B(y, \epsilon)$ è connesso per archi, esiste un arco contenuto in $B(y, \epsilon)$ (e dunque in Ω) che connette z a y. L'unione di tali archi è allora un arco che connette x a y. Dunque $y \in A$. $\square$

Esercizio 9.52 Si mostri che una componente connessa di un aperto di $\mathbb{R}^n$ è aperta.

9.9.6 Una semplice applicazione

In questa sezione dimostreremo il seguente fatto

Proposizione 9.53 *Non esiste alcuna mappa continua e iniettiva*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è basata sull'osservazione che dato $v \in \mathbb{R}^n$, l'insieme $\mathbb{R}^n \setminus \{v\}$ è connesso. Infatti dati $w, u \in \mathbb{R}^n \setminus v$ si possono considerare due archi che li congiungono in $\mathbb{R}^n$:

$$f(t) = (1-t)u + tw \qquad g(t) = ((1-t)u + tw) + (\sin^2 t\pi)z,$$

z essendo un vettore ortogonale alla retta passante per u e v (ovvero ortogonale al vettore $u - v$).

Ora è facile mostrare che $f([0,1]) \cap g([0,1]) = \{u, w\}$ e dunque il punto v può appartenere al più ad uno di questi archi. In particolare almeno uno di questi due archi connette u a w in $\mathbb{R}^n \setminus \{v\}$.

Torniamo alla dimostrazione della Proposizione. Supponiamo che esista $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva. Poiché $\mathbb{R}^n$ è connesso allora $f(\mathbb{R}^n)$ è un intervallo I (non può essere un punto poiché f è iniettiva!).

Fissiamo $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(v)$ appartiene alla parte interna di I. Osserviamo che $I \setminus \{f(v)\}$ è sconnesso.

Del resto, poichè f è iniettiva, si ha $f(\mathbb{R}^n \setminus \{f(v)\}) = I \setminus \{v\}$. Poichè $\mathbb{R}^n \setminus \{f(v)\}$ è connesso e $I \setminus \{v\}$ è sconnesso ciò porta ad un assurdo. $\square$

Capitolo 10

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$

10.1 Notazioni e richiami

10.1.1 Richiami di algebra lineare

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ delle n-ple di numeri reali $x = (x_1, ..., x_n)$. Indichiamo con $(e^1, ..., e^n)$ la *base canonica* di $\mathbb{R}^n$ definita da:

$$e^i_j = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Ogni punto $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere come:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k.$$

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione lineare, cioè:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Indichiamo con $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Vi è una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e le matrici di m righe e n colonne ottenuta al modo seguente.

Sia $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e indichiamo con $(\epsilon_1, ..., \epsilon_m)$ la base canonica in $\mathbb{R}^m$. Per ogni $j = 1, ..., n$, Te^j è un punto di $\mathbb{R}^m$, quindi esistono numeri $T_{1,j}, .., T_{m,j}$ tali che:

$$Te^j = \sum_{i=1}^{m} T_{i,j} \epsilon^i. \tag{10.1}$$

Quindi a T associamo la matrice $(T_{j,i})$.

10.1.2 La metrica euclidea

Muniamo $\mathbb{R}^n$ della *distanza*:

$$d(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right]^{1/2}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Come già osservato, $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico completo e separabile. Gli elementi di $(\mathbb{R}^n, d)$ sono detti *punti* o *vettori*.

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ definiamo il *modulo* di x ponendo:

$$|x| = d(x,0) = \left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right]^{1/2}.$$

Si ha quindi:

$$d(x,y) = |x-y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definiamo il *prodotto scalare* di due punti x e y di $\mathbb{R}^n$ ponendo:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Il prodotto scalare ha le proprietà seguenti:

(i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

(iii) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si verifica facilmente che:

$$|\langle x, y\rangle| \le |x|\,|y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

e

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Si ha quindi per ogni $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_k = \langle x, e^k\rangle$ e:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e^k\rangle e^k.$$

Inoltre da (10.1) segue che:

$$T_{i,j} = \langle Te^j, \epsilon^i \rangle, \quad i = 1, ..., m, \; j = 1, ..., n.$$

Per ogni $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ definiamo:

$$\|T\| = \sup\{x \in \mathbb{R}^n, \; |x| \leq 1\}.$$

Proposizione 10.1 *(i)* $\|T\| < +\infty$.

(ii) $|Tx| \leq \|T\| \; |x|, \quad \forall \, x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *è Lipschitziana.*

Dimostrazione. (i). Sia $x| \leq 1$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Si ha allora $|x_i| \leq 1$ per ogni $i = 1, ..., n$. Inoltre:

$$|Tx| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|; |Te_i| \leq \sum_{i=1}^n |Te_i| < +\infty,$$

e (i) è provato.

(ii). Da (i) segue che:

$$|Ty| \leq \|T\|, \quad \forall \, |y| \leq 1.$$

Sia $x \neq 0$. Posto $y = \frac{x}{|x|}$ si ha allora $|y| \leq 1$ e quindi, per la .inearità di T:

$$\left| \frac{|Tx|}{|x|} \right| \leq 1,$$

da cui la tesi.

(iii) Basta osservare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$|Tx - Ty| = |T(x - y)| \leq \|T\| \; |x - y|$$

Esercizio 10.2 Dimostrare che lo spazio $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, munito della metrica:

$$d(T, S) = \|T - S\|, \tag{10.2}$$

è uno spazio metrico completo.

Nel seguito intenderemo sempre che $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ sia munito della distanza (10.2)

10.1.3 Funzionali lineari

Se $F \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ si dice che F è un *funzionale lineare*. Ad esempio se $f \in \mathbb{R}^n$, posto:

$$F(x) = \langle x, f \rangle, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{10.3}$$

si ha che F è funzionale lineare. Viceversa vale il risultato:

Proposizione 10.3 *Se $F \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ esiste un unico $f \in \mathbb{R}^n$ tale che vale* (10.3)*.*

Dimostrazione. *Esistenza.* Sia $F \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ e sia $x = \sum_{i=1}^n x_i e^i$. Si ha allora:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n x_i F(e^i).$$

Quindi, posto $f = (F(e^1), ..., F(e^n))$, vale (10.3).

Unicità. Supponiamo che $f, f_1 \in \mathbb{R}^n$ siano tali che:

$$\langle x, f \rangle = \langle x, f_1 \rangle, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

e quindi:

$$\langle x, f - f_1 \rangle = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Posto allora $x = f - f_1$ si ottiene $|f - f_1|^2 = 0$ e quindi $f = f_1$. $\square$

10.1.4 Forme bilineari

10.2 Definizione di derivata

Siano $n, m \in \mathbb{N}$, A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x)$ e $x_0 \in A$. Si dice che f è *derivabile* in x_0 se esiste $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Th + r(h), \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in A \tag{10.4}$$

e risulta:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0. \tag{10.5}$$

Se ciò accade si dice che T è la *derivata* di f nel punto x_0 e si scrive $T = Df(x_0) = f'(x_0)$. Se f è derivabile in ogni punto di A si dice che f è *derivabile in A*.

Proposizione 10.4 *Sia f derivabile in x_0. Allora f è continua in x_0 e $f'(x_0)$ è univocamente definita.*

Dimostrazione. La prima affermazione segue immediatamente da (10.4) e (10.5). Proviamo la seconda. Supponiamo che valga (10.4)- (10.5) e che esista $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Sh + \rho(h), \quad \forall\, h \text{ tale che } x_0 + h \in A$$

con $\lim_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{|h|} = 0$. Ne segue allora:

$$(T - S)h = \rho(h) - r(h)$$

cosicché

$$\lim_{h\to 0} \frac{|(T - S)h|}{|h|} = 0. \tag{10.6}$$

Mostriamo ora che da (10.6) segue che $\|T - S\| = 0$ e quindi $T = S$. Sia $\xi \in \mathbb{R}^n$ tale che $|\xi| = 1$. Poniamo $h = t\xi$. Si ha allora:

$$\lim_{t\to 0} |(T - S)\xi| = 0,$$

cioè $(T - S)\xi = 0$. Quindi $T = S$ per l'arbitrarietà di ξ. $\square$

Esempio 10.5 Sia $f(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ dove $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Si ha allora $f'(x_0) = A$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$. In fatti in questo caso (10.4) vale con $T = A$ e $r(h) = 0$.

Esempio 10.6 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $f(x) = |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n$. Si ha allora:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = |x_0 + h|^2 - |x_0|^2 = 2\langle x_0, h\rangle + |h|^2$$

Ne segue $f'(x_0) = 2x_0$.

Esempio 10.7 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = x|x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Si ha allora:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)|x_0 + h|^2 - x_0|x_0|^2$$

$$= 2x_0\langle x_0, h\rangle + h|x_0|^2 + x_0|h|^2 + 2h\langle x_0, h\rangle + h|h|^2.$$

Quindi (10.4) vale con

$$Th = 2x_0\langle x_0, h\rangle + h|x_0|^2$$

e

$$r(h) = x_0|h|^2 + 2h\langle x_0, h\rangle + h|h|^2.$$

Ne segue:

$$f'(x_0) = 2x_0\langle x_0, h\rangle + h|x_0|^2.$$

10.2.1 Derivate parziali e derivate direzionali

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x)$. Indichiamo con $(e^1, ..., e^n)$ la base canonica in $\mathbb{R}^n$ e con $(\epsilon^1, ..., \epsilon^m)$ la base canonica in $\mathbb{R}^m$. Poniamo $f = (f_1, ..., f_m)$ dove :

$$f_i(x) = \langle f(x), \epsilon^i\rangle, \quad i = 1, ..., m.$$

Siano $i \in \{1, ..., m\}$ e $j \in \{1, ..., n\}$. Se esiste il limite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\ (f_i(x_0 + te^j) - f_i(x_0)) =: \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0),$$

si dice che f_i è *derivabile parzialmente rispetto a x_j in x_0* e il numero $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ è detto la *derivata parziale di f rispetto a x_j in x_0*.

Proposizione 10.8 *Sia f derivabile in $x_0 \in A$. Allora f_i è derivabile parzialmente rispetto a x_j in x_0 per ogni $i \in \{1, ..., m\}$ e $j \in \{1, ..., n\}$ e risulta:*

$$(f'(x_0))_{i,j} = \langle f'(x_0)e^j, \epsilon^i\rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0).$$

Dimostrazione. Sia $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_0 + h \in A$. Si ha per ipotesi:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h), \quad i = 1, .., m, \tag{10.7}$$

con

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri di (10.7) per ϵ^i si ottiene:

$$f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) = \langle f'(x_0)h, \epsilon^i\rangle + \langle r(h), \epsilon^i\rangle \quad i = 1, .., m.$$

Posto $h = te^j$ ne segue:

$$\frac{1}{t}\ (f_i(x_0+h) - f_i(x_0)) = \langle f'(x_0)e^j, \epsilon^i\rangle + \frac{1}{t}\ \langle r(te^j), \epsilon^i\rangle,$$

da cui la tesi per $t \to 0$. □

Nelle ipotesi della Proposizione 10.8 si può identificare $f'(x_0)$ con la matrice di m righe e n colonne:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

detta la *matrice Jacobiana* di f in x_0.

Osservazione 10.9 L'esistenza di tutte le derivate parziali di f non implica la sua derivabilità come mostra l'esempio seguente. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\ , & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ \\ 0, \quad \text{se } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Proviamo che esistono le derivate parziali di f in $(0,0)$. Si ha infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\ (f(t,0) - f(0,0)) = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\ (f(0,t) - f(0,0)) = 0.$$

D'altra parte f non è continua in $(0,0)$ e quindi non è differenziabile in $(0,0)$. Consideriamo infatti la successione $(y^{(n)})$ in $\mathbb{R}^2$ definita da:

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

È chiaro che

$$\lim_{n\to\infty} y^{(n)} = (0,0),$$

mentre si ha:

$$f(y^{(n)}) = \frac{2}{5}.$$

Teorema 10.10 *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A aperto. Supponiamo che f possieda tutte le derivate parziali in ogni punto di una palla $B(x_0, r) \subset A$ e che siano continue in x_0. Allora f è derivabile in x_0.*

Dimostrazione. Poniamo $f = (f_1, ..., f_m)$. È chiaro che basta dimostrare che ogni f_i, $i = 1, .., m$, è derivabile in x_0. Quindi possiamo supporre $m = 1$.

Dato che per ipotesi le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ esistono in $B(x_0, r)$ e sono continue in x_0, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon \in (0, r)$ tale che:

$$|h| < \delta_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right| < \epsilon/n, \quad i = 1, ..., n. \tag{10.8}$$

Scriviamo ora:

$$\begin{aligned}
&f(x_0 + h) - f(x_0) \\
&= f(x_0 + h_1 e^1) - f(x_0) \\
&+ f(x_0 + h_1 e^1 + h_2 e^2) - f(x_0 + h_1 e^1) + \cdots \\
&+ f(x_0 + h_1 e^1 + \cdots + h_n e^n) - f(x_0 + h_1 e^1 + \cdots + h_{n-1} e^{n-1}) \\
&=: I_1 + \cdots + I_n.
\end{aligned} \tag{10.9}$$

Consideriamo la funzione reale $\phi_1(h_1) = f(x_0 + h_1 e^1)$, $h_1 \in (-r, r)$, che per ipotesi è derivabile in $(-r, r)$ con $\phi_1'(h_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(h_1)$. Per il teorema del valor medio esiste $\theta_1 \in [0, 1]$ tale che

$$I_1 = f(x_0 + h_1 e^1) - f(x_0) = \phi_1(h_1) - \phi_1(0) = h_1 \phi_1'(\theta_1 h_1) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + h_1 \theta_1 e^1).$$

Quindi si può scrivere:

$$I_1 = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + r_1(h_1),$$

avendo posto:

$$r_1(h_1) = h_1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0 + h_1\theta_1 e^1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \right].$$

Da (10.8) segue che se $|h_1| < \delta_\epsilon$ si ha

$$|r_1(h_1)| \leq h_1\epsilon/n \leq |h|\epsilon/n.$$

Procedendo analogamente si trova che:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i + r(h),$$

dove:

$$r(h) = \sum_{i=1}^{n} r_i(h_i)$$

e $|r(h)| \leq |h|\epsilon$. Quindi f è derivabile in x_0 e si ha:

$$f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \right).$$

□

Esercizio 10.11 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supponiamo esista $i \in \{1, ..., n\}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si abbia:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Provare che f non dipende da x_i.

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x)$. Sia inoltre $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $|v| = 1$. Se esiste il limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(x_0 + tv) - f(x_0) \right) =: \frac{\partial f}{\partial v}(x_0),$$

si dice che f_i è *derivabile nella direzione* v *in* x_0 e il numero $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ è detto la *derivata direzionale di* f *rispetto a* v *in* x_0.

È chiaro che se $v = e^j$ si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Esercizio 10.12 Supponiamo che f sia derivabile in x_0 e sia $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$. Provare che esiste la derivata direzionale di f rispetto a v in x_0 e risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0). \tag{10.10}$$

Esercizio 10.13 Supponiamo che f abbia tutte le derivate parziali limitate. Provare che f è Lipschitziana.

Suggerimento. Usare (10.9).

10.3 Derivazione di funzioni composte

Teorema 10.14 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, B un aperto di $\mathbb{R}^m$. Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ tale che $f(A) \subset B$, $g : B \to \mathbb{R}^r$ dove $r \in \mathbb{N}$. Se f è derivabile in $x_0 \in A$ e f è derivabile in $f(x_0)$ si ha che $g \circ f$ è derivabile in x_0 e risulta:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{10.11}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h, \quad h + x_0 \in A,$$

$$\rho(k) = g(y_0 + k) - g(y_0) - g'(y_0)k, \quad k + y_0 \in B,$$

cosicché:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0, \quad \lim_{k \to 0} \frac{\rho(k)}{|k|} = 0.$$

Si ha:

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + f'(x_0)h + r(h)) - g(y_0)$$

$$= g'(y_0) + g'(y_0)(f'(x_0)h + r(h)) + \rho(f'(x_0)h + r(h))$$

$$= g'(y_0) + g'(y_0)f'(x_0)h + \alpha(h),$$

avendo posto

$$\alpha(h) = r(h) + \rho(f'(x_0)h + r(h)).$$

Sia $\delta > 0$ tale che:

$$|h| < \delta \Rightarrow |r(h)| < |h|.$$

Quindi:

$$|h| < \delta \Rightarrow |f'(x_0)h + r(h)| < (\|f'(x_0)\| + 1)\ |h|.$$

Dato $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:

$$|k| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\rho(k)| < \epsilon|k|.$$

Quindi se:

$$|h| < \min\left\{\delta, \frac{\delta_\epsilon}{\|f'(x_0)\| + 1}\right\},$$

si ha:

$$\begin{aligned}\frac{|\alpha(h)|}{|h|} &\leq \frac{|r(h)|}{|h|} + \epsilon\ \frac{|f'(x_0)|\ |h| + |r(h)|}{|h|} \\ &\leq \frac{|r(h)|}{|h|} + \epsilon\ \left(|f'(x_0)|\ + \frac{|r(h)|}{|h|}\right),\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Teorema 10.15 (valor medio) *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso* [(1)] *e $f : A \to \mathbb{R}^m$ derivabile in A con derivata $f' : A \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ continua* [(2)]. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'((1-t)x + ty)(y - x)dt. \tag{10.12}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$F(t) := f((1-t)x + ty), \quad t \in [0, 1].$$

$F : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ è la composta delle due applicazioni:

$$\phi := [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \quad t \to (1-t)x + ty$$

e dell'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dal Teorema 10.14 si ha quindi che F è derivabile e risulta:

$$F'(t) = f'(\phi(t))\phi'(t) = f'((1-t)x + ty)(y - x).$$

La tesi segue integrando questa uguaglianza in $[0, 1]$ rispetto a t. □

[(1)]cioè tale che $x, y \in A$, $t \in [0, 1] \Rightarrow (1-t)x + ty \in A$.
[(2)]Ricordiamo che lo spazio $L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ è munito della distanza (10.2).

Corollario 10.16 *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso e $f : A \to \mathbb{R}^m$ derivabile in A con derivata $f' : A \to L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ continua. Valgono allora le affermazioni seguenti:*

(i) Se f' è limitata e risulta $\|f'(x)\| \le M$ allora f è Lipschitziana e si ha:

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|, \quad \forall\, x, y \in A.$$

(ii) Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in A$ allora f è costante.

Dimostrazione. (i) Da (10.10) si ha:

$$|f(y) - f(x)| \le \int_0^1 \|f'((1-t)x + ty)\|\, |y - x| dt \le M|x - y|, \quad \forall\, x, y \in A.$$

(ii) Segue ancora da (10.10) . □

10.4 Derivazione della funzione inversa

Proposizione 10.17 *Siano A, B aperti di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to B$ bigettiva. Supponiamo che f sia derivabile in un punto x_0 di A, che f^{-1} sia continua in $y_0 = f(x_0)$ e che $\det f'(x_0) \neq 0$. Allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e risulta:*

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}. \tag{10.13}$$

Dimostrazione. Poniamo $g = f^{-1}$, $T = f'(x_0)$, $S = T^{-1}$. Dobbiamo provare che $g(y_0 + k) - g(y_0) - Sk$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $|k|$. Per ogni k tale che $y_0 + k \in B$ poniamo:

$$h = g(y_0 + k) - g(y_0),$$

di modo che:

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Per ipotesi sappiamo che:

$$k = f(x_0 + h) - f(x_0) = Th + r(h),$$

con $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{|h|} = 0$. Si ha quindi

$$g(y_0 + k) - g(y_0) - Sk = h - S(f(x_0 + h) - f(x_0)) = h - S(Th + r(h)) = -Sr(h).$$

Ne segue:

$$\frac{|g(y_0+k)-g(y_0)-Sk|}{|k|}=\frac{Sr(h)}{|Th+r(h)|}. \tag{10.14}$$

Osserviamo ora che:

$$|Sy|\leq \|S\|\,|y|, \quad \forall\, y\in\mathbb{R}^n.$$

Posto $Sy=x$ si ha:

$$|x|\leq \|S\|\,|Tx|, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n.$$

Quindi

$$|Th+r(h)|\geq |Th|-|r(h)|\geq \|S\|^{-1}|h|-|r(h)|$$

e possiamo concludere che esiste $\delta>0$ tale che se $|h|\leq\delta$ si ha.

$$|Th+r(h)|\geq \|S\|^{-1}|h|-|r(h)|>0$$

Da (10.14) segue allora che se $|h|\leq\delta$:

$$\frac{|g(y_0+k)-g(y_0)-Sk|}{|k|}\leq \|S\|\,\frac{|r(h)|}{\|S\|^{-1}|h|-|r(h)|}\leq \|S\|\,\frac{\frac{|r(h)|}{|h|}}{\|S\|^{-1}-\frac{|r(h)|}{|h|}}.$$

Dato che g è continua si ha $\lim_{|k|\to 0}|h|=0$ e quindi

$$\lim_{|k|\to 0}\frac{|g(y_0+k)-g(y_0)-Sk|}{|k|}=0.$$

Si è così provato che g è derivabile in y_0 e $g'(y_0)=S$. $\Box$

10.5 Esempi

10.5.1 Applicazioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$

Sia $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}^n$, $\quad t\to\varphi(t)=(\varphi_1(t),...,\varphi_n(t)$. L'immagine di φ è detta una *curva* in $\mathbb{R}^n$. Si può interpretare φ come la legge oraria del moto di un punto di $\mathbb{R}^n$. Se φ è derivabile in t, $\varphi'(t)$ si interpreta come la *velocità* del punto all'istante t che è tangente alla traiettoria del moto.

Esempio 10.18 Sia $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\quad t \to \varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$ derivabile e tale che $|\varphi(t)| = 1$. Posto:

$$\phi(t) = |\varphi(t)|^2 = \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle,$$

si ha allora:

$$0 = \phi'(t) = 2\langle \varphi(t), \varphi'(t) \rangle, \quad t \in (a, b).$$

Quindi $\varphi'(t)$ è ortogonale e a $\varphi(t)$ per ogni $t \in (a, b)$, cioè la velocità è ortogonale alla traiettoria.

10.5.2 Applicazioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A$. La derivata $f'(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ è un funzionale lineare su $\mathbb{R}^n$ della forma:

$$f'(x_0)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i.$$

Identifichiamo $f'(x_0)$ con il vettore

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) =: \nabla f(x_0),$$

scrivendo quindi:

$$f'(x_0)h = \langle \nabla f(x_0), h \rangle, \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

$\nabla f(x_0)$ èdetto il *gradiente* di f in x_0.

Si dice che f ha un *massimo (risp. minimo) locale* in x_0 se esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset A$ e

$$f(x_0+h) \le f(x_0),\ \forall\ h \in B(x_0, r), \quad (\text{risp. } f(x_0+h) \le f(x_0),\ \forall\ h \in B(x_0, r)).$$

Per vedere il significato geometrico del gradiente scriviamo (ponendo $h = x - x_0$):

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + r(x - x_0),$$

dove

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Il luogo dei punti di $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ y = f(x)\}$$

è una superficie in $\mathbb{R}^{n+1}$ e l'iperpiano di equazione:

$$y = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle$$

è *l'iperpiano tangente* a S nel punto x_0.

Il gradiente è anche importante per lo studio del comportamento locale di f come ora vedremo. Per questo diamo una definizione. Si dice che x_0 è un punto di *massimo locale* (risp. *minimo locale*) per f se esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset A$ e:

$$f(x_0+h) \leq f(x_0), \ \ \forall \, h \in B(x_0, r), \quad (risp. f(x_0+h) \leq f(x_0), \ \ \forall \, h \in B(x_0, r)).$$

Proposizione 10.19 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A$ e tale che possiede un massimo (risp. minimo) locale in x_0. Allora risulta $\nabla f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo locale. Dato che f è derivabile in x_0 si ha:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle + r(h),$$

dove:

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Ne segue:

$$\langle \nabla f(x_0), h \rangle + r(h) \leq 0, \quad \forall \, h \in B(x_0, r).$$

Sia ora $z \in \mathbb{R}^n$ e $h = tz, \ t > 0$. Si ha allora:

$$t\langle \nabla f(x_0), z \rangle + r(tz) \leq 0, \quad \forall \, h \in B(x_0, r),$$

da cui:

$$\langle \nabla f(x_0), z \rangle + \frac{1}{t} \, r(tz) \leq 0, \quad \forall \, t > 0.$$

Per $t \to 0$ si ottiene: da cui:

$$\langle \nabla f(x_0), z \rangle \leq 0, \quad \forall \, z \in \mathbb{R}^n.$$

Posto $z = \nabla f(x_0)$ si ottiene $\nabla f(x_0) = 0$. $\square$

Esercizio 10.20 Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}^n$ derivabili in $x_0 \in A$. Calcolare $\nabla(fg)$.

Esercizio 10.21 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ \\ 0, & \text{se } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Provare che:

(i) Esistono limitate in $\mathbb{R}^2$ le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Dedurne che f è continua.

(ii) Sia $v \in \mathbb{R}^2$ con $|v| = 1$. Mostrare che esiste la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ e che non vale la (10.10). Dedurne che f non è derivabile in $(0,0)$.

10.5.3 Campi di vettori

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ tale che f sia derivabile in x_0. Allora la derivata $f'(x_0)$ si può identificare con la matrice quadrata (Matrice Jacobiana):

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Il determinante $J(x_0)$=det $f'(x_0)$ è detto lo *Jacobiano* di f nel punto x_0; la traccia di $f'(x_0)$ è detta la *divergenza* di f nel punto x_0 e si indica con il simbolo div$f(x_0)$. Si ha quindi:

$$\text{div } f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_0).$$

La *rotazione* di f nel punto x_0 è così definita:

$$\mathrm{rot}\ f(x_0) = f'(x_0) - [f'(x_0)]^*,$$

dove $[f'(x_0)]^*$ è la trasposta di $f'(x_0)$. Quindi rot $f(x_0)$ è una matrice antisimmetrica. In particolare per $n = 3$ si ha:

$$\mathrm{rot}\ f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_0) - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_0) - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_0) - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_0) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_0) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_0) & 0 \end{pmatrix}$$

In questo caso per rot $f(x_0)$ si intende anche il vettore:

$$\mathrm{rot}\ f(x_0) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x_0) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x_0), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x_0) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) \right).$$

Esercizio 10.22 Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ derivabili in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Provare che la funzione:

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto f(x)b(x),$$

è derivabile in x_0 e risulta:

$$F'(x_0)h = \langle \nabla f(x_0), h \rangle b(x_0) + f(x_0)b'(x_0)f.$$

Provare inoltre che:

$$\mathrm{div}\ F(x_0) = f(x_0)\ \mathrm{div}\ b(x_0) + \langle b(x_0), \nabla f(x_0) \rangle.$$

10.6 Derivate seconde

Per semplicità ci limitiamo a considerare in questa sezione applicazioni $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dove A è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che f sia derivabile in A e che il suo gradiente ∇f sia derivabile in $x_0 \in A$. Ricordiamo che ciò significa che esiste un'applicazione lineare $T \in L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\nabla f(x_0 + h) = \nabla f(x_0) + Th + r(h), \quad x_0 + h \in A,$$

con

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Se ∇f è derivabile in x_0 si dice che f è derivabile due volte in x_0 e che T è la *derivata seconda* di f in x_0. Si scrive $T = f''(x_0)$. Dato che:

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right),$$

si ha:

$$f''(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x_n}(x_0) & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Questa matrice è detta l'*Hessiano* di f in x_0.

Teorema 10.23 *Supponiamo che f sia derivabile due volte in x_0 e sia f'' continua in x_0. Allora $f''(x_0)$ è simmetrica, cioè risulta:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

per ogni $i, j = 1, ..., n$.

Dimostrazione. Fissiamo $i \neq j$. Dati $s, t \in \mathbb{R}$ (sufficientemente piccoli) poniamo:

$$\Delta(i,j,s,t) = f(x_0 + se^i + te^j) - f(x_0 + se^i) - f(x_0 + te^j) + f(x_0). \quad (10.15)$$

Usando il teorema del valor medio si ha:

$$\begin{aligned} \Delta(i,j,s,t) &= \int_0^1 \langle \nabla f(x_0 + se^i + \xi te^j), te^j \rangle d\xi - \int_0^1 \langle \nabla f(x_0 + \xi te^j), te^j \rangle d\xi \\ &= t \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + se^i + \xi te^j) d\xi - t \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + \xi te^j) d\xi \end{aligned}$$

Usando ancora il teorema del valor medio si trova:

$$\frac{\Delta(i,j,s,t)}{ts} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \xi te^j + \eta se^i) d\eta d\xi.$$

Dato che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ è continua in x_0, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che:

$$x, x_0 \in A,\ |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right| < \epsilon$$

Quindi se $|t| + |s| < \delta_\epsilon$ si ha:

$$\left| \frac{\Delta(i, j, s, t)}{ts} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right| < \epsilon. \tag{10.16}$$

Scambiando in (10.16) i con j e s con t e osservando che:

$$\frac{\Delta(i, j, s, t)}{ts} = \frac{\Delta(j, i, t, s)}{st},$$

si ottiene:

$$\left| \frac{\Delta(i, j, s, t)}{ts} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \right| < \epsilon, \tag{10.17}$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di ϵ. $\square$

Esercizio 10.24 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{se } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ 0, \quad \text{se } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Provare che:

(i) Esistono in $\mathbb{R}^2$ continue le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

(ii) Risulta:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0) = 0.$$

10.7 Formula di Taylor

In questa sezione consideriamo una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dove A è un aperto di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 10.25 *Supponiamo che f sia derivabile in A e che ∇f sia derivabile in x_0. Allora esiste $\xi \in [0,1]$ tale che:*

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\langle \nabla f(x_0), h\rangle + \frac{1}{2}\,\langle f''(x_0+\xi h)h, h\rangle, \quad x_0+h \in A. \tag{10.18}$$

Dimostrazione. Sia h tale che $x_0 + th \in A$ per ogni $t \in [0,1]$. Poniamo:

$$F(t) = f(x_0 + th), \quad t \in [0,1].$$

Usando la regola delle funzioni composte si trova:

$$F'(t) = \langle \nabla f(x_0 + th), h\rangle,$$

$$F''(t) = \langle f''(x_0 + th)h, h\rangle.$$

Applicando la formula di Taylor a $F(t)$ si ha che esiste $\xi \in [0,1]$ tale che:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + F''(\xi),$$

da cui la tesi. Il seguente risultato è un corollario della Proposizione 10.25; la semplice dimostrazione è lasciata al lettore.

Proposizione 10.26 *Sia f continua con le sue derivate prime e seconde in A e sia $x_0 \in A$. Allora risulta:*

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\langle \nabla f(x_0), h\rangle+\frac{1}{2}\,\langle f''(x_0)h, h\rangle+\sigma(h), \quad x_0+h \in A, \tag{10.19}$$

dove:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sigma(h)}{|h|^2} = 0.$$

10.7.1 Massimi e minimi locali e globali

Useremo in questa sottosezione un risultato di algebra lineare. Sia T una matrice simmetrica $n \times n$ e siano:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$$

i suoi autovalori (contati con la loro molteplicità). Allora risulta:

$$\lambda_1 |h|^2 \leq \langle Th, h \rangle \leq \lambda_n |h|^2, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{10.20}$$

Se $\lambda_1 > 0$ si dice che T è *definita positiva* se $\lambda_n < 0$ che è *definita negativa.*

Sia ora f continua con le sue derivate prime e seconde in A. Per lo studio dei massimi e minimi locali è importante considerare gli autovalori:

$$\lambda_1(x_0) \leq \lambda_2(x_0) \leq \ldots \leq \lambda_n(x_0)$$

dell'Hessiano, cioè è importante sapere se $f''(x_0)$ è definita positiva o negativa.

Teorema 10.27 *Sia f continua con le sue derivate prime e seconde in A. e sia $x_0 \in A$.*

(i) Se f ha un massimo (risp. minimo) locale in x_0 si ha:

$$\nabla f(x_0) = 0, \quad \lambda_n(x_0) \leq 0 \text{ (risp. } \lambda_1(x_0) \geq 0), \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Se risulta:

$$\nabla f(x_0) = 0, \quad \lambda_n(x_0) < 0 \text{ (risp. } \lambda_1(x_0) > 0), \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n,$$

allora f ha un massimo (risp. minimo) locale in x_0.

Dimostrazione. (i) Supponiamo che f abbia un massimo locale in x_0. Allora dalla Proposizione 10.19 segue che $\nabla f(x_0) = 0$. Inoltre da (10.19) segue che:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle f''(x_0)h, h \rangle + \sigma(h), \tag{10.21}$$

dove:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sigma(h)}{|h|^2} = 0. \tag{10.22}$$

Si ha quindi:

$$\frac{1}{2}\,\langle f''(x_0)h, h\rangle + \sigma(h) \leq 0, \quad \forall\, x_0 + h \in A,$$

che implica:

$$\lambda_n(x_0)|h|^2 + \sigma(h) \leq 0, \quad \forall\, x_0 + h \in A.$$

La tesi segue dividendo per $|h|^2$ e facendo tendere $|h|$ a zero.

(ii) Supponiamo che:

$$\nabla f(x_0) = 0, \quad \lambda_n(x_0) < 0.$$

Allora da (10.21) si ha:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq \frac{1}{2}\,\lambda_n(x_0)|h|^2 + \sigma(h),$$

dove $\lambda_n(x_0) := -\kappa$ è negativo per ipotesi. Da (10.22) segue che esiste $\delta > 0$ tale che:

$$|h| < \delta \Rightarrow |\sigma(h)| < \frac{1}{2}\,\kappa|h|^2.$$

Ne segue:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq -\frac{1}{2}\,\kappa|h|^2 \leq 0,$$

cosicché x_0 è un punto di massimo locale. □

Esempio 10.28 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^3 - 3x_1^2 + 2x_2^3 + 3x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Cerchiamo i massimi e minimi locali. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1^2 - 6x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1^2 + 6x_2.$$

Quindi ∇f si annulla nei punti:

$$(0, 0),\ (0, -1),\ (1, 0),\ (1, -1).$$

Calcoliamo l'Hessiano di f. Si ha:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 12x_1 - 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 12x_2 + 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Quindi:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 12x_1 - 6 & 0 \\ 0 & 12x_2 + 6 \end{pmatrix}.$$

Calcolando l'Hessiano nei 4 punti suddetti si vede che $(0, -1)$ è un punto di massimo locale) mentre $(1, 0)$ è un punto di minimo locale.

Esercizio 10.29 Sia f come nell'Esempio 10.28. Trovare il massimo e il minimo di f nel quadrato:

$$Q := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ |x_1| \leq 4, \ |x_2| \leq 4\}.$$

Suggerimento. Osservare che il massimo si trova o in $(0, -1)$ (che è l'unico punto di massimo locale) o su uno dei quattro lati di Q. Cercare il massimo della restrizione di f in ciascuno di questi lati.

Capitolo 11

Teoremi di inversione locale

11.1 Principio delle contrazioni locale

11.1.1 Contrazioni in $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \tag{11.1}$$

dove $\alpha \in (0, 1]$. Consideriamo l'equazione:

$$x - f(x) = y \tag{11.2}$$

dove $y \in \mathbb{R}^n$ è fissato. Posto $\varphi(x) = f(x) + y$, risolvere la (11.2) equivale a trovare un punto fisso di φ. Sappiamo dal principio delle contrazioni che φ ha un unico punto fisso, quindi possiamo concludere che la (11.2) ha un'unica soluzione x per ogni $y \in \mathbb{R}^n$. Inoltre l'applicazione inversa $(I - f)^{-1}$ è Lipschitziana. Infatti se x_1 e x_2 sono le soluzioni di (11.2) corrispondenti a y_1 e y_2 rispettivamente, si ha:

$$x_1 - x_2 = f(x_1) - f(x_2) + y_1 - y_2,$$

da cui:

$$|x_1 - x_2| \leq \alpha |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

che implica

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{1 - \alpha}\, |y_1 - y_2|,$$

cioè:

$$|(I-f)^{-1}(y_1)-(I-f)^{-1}(y_2)| \leq \frac{1}{1-\alpha}\,|y_1-y_2|. \tag{11.3}$$

Sia ora $f(x) = Tx$ con $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Vale allora il risultato:

Proposizione 11.1 *Sia $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Supponiamo che $\|T\| < 1$. Allora $I - T$ è invertibile e risulta:*

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|} \tag{11.4}$$

Dimostrazione. Dal principio delle contrazioni segue che l'equazione:

$$x - Tx = y$$

ha un'unica soluzione per ogni $y \in \mathbb{R}^d$. Inoltre (11.4) segue da (11.3).$\square$

11.1.2 Contrazioni locali

Supponiamo ora che la f verifichi (11.1) soltanto per $x_1, x_2 \in \overline{B(0,r)}$ dove $r > 0$ è fissato e, per semplicità che $f(0) = 0$. Possiamo allora ripetere il ragionamento fatto nella sottosezione precedente e concludere che:

(i) $(I - f)$ è iniettiva.

(ii) $(I-f)^{-1} : (I-f)(\overline{B(0,r)}) \to \overline{B(0,r)}$ è lipschitziana.

Tuttavia non possiamo applicare il principio delle contrazioni per risolvere la (11.1) quando y è un elemento qualunque di $\mathbb{R}^n$ dato che non è detto che risulti:

$$(I-f)(\overline{B(0,r)}) \subset \overline{B(0,r)}.$$

Mostreremo che ciò accade quando y è "vicino" a 0.

Proposizione 11.2 *Sia $f : \overline{B(0,r)} \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in (0,1]$ tale che:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \overline{B(0,r)}. \tag{11.5}$$

Allora valgono le affermazioni seguenti:

(i) *Per ogni* $y \in \overline{B(0, r(1-\alpha))}$ *l'equazione* (11.2) *ha un'unica soluzione* $x \in \overline{B(0,r)}$.

(ii) $(I - f)$ *è iniettiva e per ogni* $y_1, y_2 \in (I-f)(B(0,r))$ *risulta:*

$$|(I-f)^{-1}(y_1) - (I-f)^{-1}(y_2)| \leq \frac{1}{1-\alpha}\, |y_1 - y_2|. \tag{11.6}$$

Dimostrazione. (i). Sia $y \in B(0, r(1-\alpha))$. Allora l'applicazione φ definita da:

$$\varphi(x) = f(x) + y, \quad \forall\, x \in B(0,r),$$

è una contrazione e applica $\overline{B(0,r)}$ in sè. Si ha infatti:

$$|\varphi(x)| = |f(x) + y| \leq |f(x) - f(0)| + |y| \leq \alpha|x| + r(1-\alpha) \leq r.$$

Quindi la tesi segue dal principio delle contrazioni. □

Esempio 11.3 Sia $n = 1$, $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (|x_1| + |x_2|)|x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Ne segue:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2}\, |x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in B(0, 1/4).$$

Dalla Proposizione 11.2 segue che se $y| \leq 1/8$ l'equazione:

$$x - x^2 = y \tag{11.7}$$

ha un'unica soluzione x tale che $|x| < 1/4$.

Osserviamo che se $|y| \leq 1/8$, risolvendo direttamente la (11.7) si trovano due soluzioni:

$$\frac{1}{2}\,(1 - \sqrt{1-4y}), \quad \frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{1-4y}),$$

delle quali soltanto la prima appartiene a $B(0, 1/4)$.

Generalizziamo ora la Proposizione 11.2.

Teorema 11.4 *Sia* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \overline{B(x_0, r)} \to \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in (0, 1]$ *tale che:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \alpha |x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \overline{B(x_0, r)}. \tag{11.8}$$

Allora valgono le affermazioni seguenti:

(i) Per ogni $y \in \overline{B(x_0 - f(x_0), r(1-\alpha))}$ *l'equazione* (11.2) *ha un'unica soluzione* $x \in \overline{B(x_0, r)}$.

(ii) $(I - f)$ *è iniettiva e per ogni* $y_1, y_2 \in (I - f)(B(x_0, r))$ *risulta:*

$$|(I - f)^{-1}(y_1) - (I - f)^{-1}(y_2)| \leq \frac{1}{1-\alpha}\, |y_1 - y_2|. \tag{11.9}$$

Dimostrazione. Sia $y \in B(x_0 - f(x_0), r(1 - \alpha))$, cioè $|y - x_0 + f(x_0)| < r(1 - \alpha)$. Poniamo $\varphi(x) = f(x) + y$ e verifichiamo che φ è una contrazione in $\overline{B(x_0, r)}$. Si ha infatti se $|x - x_0| \leq r$:

$$\varphi(x) - x_0 = f(x) - f(x_0) + f(x_0) + y - x$$

e quindi:

$$|\varphi(x) - x_0| \leq |f(x) - f(x_0)| + |y - (x_0 - f(x_0))|$$

$$\leq \alpha |x - x_0| + |y - (x_0 - f(x_0))| \leq \alpha r + r(1 - \alpha) = r.$$

Si è così provato che φ è una contrazione in $\overline{B(x_0, r)}$. $\square$

11.2 Inversione locale

Teorema 11.5 *Sia* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continua con la sua derivata e sia* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *e* $y_0 = g(x_0)$. *Supponiamo che det* $(f'(x_0)) \neq 0$. *Allora*

(i) Esistono $r > 0, \rho > 0$ *tali per ogni* $y \in B(y_0, \rho)$ *esiste un'unica soluzione* $x \in B(x_0, r)$ *dell'equazione:*

$$f(x) = y. \tag{11.10}$$

(ii) L'applicazione inversa $g^{-1} : B(y_0, \rho) \to B(x_0, r)$ *è continua con la sua derivata.*

Dimostrazione. Poniamo $T = f'(x_0))$, $S = T^{-1}$. Allora l'equazione (11.10) equivale a $Sf(x) = Sy$ e, posto $\varphi(x) = x - Sf(x)$ a

$$x - \varphi(x) = Sy. \tag{11.11}$$

Osserviamo che $\varphi'(x_0) = I - Sf'(x_0) = 0$ e quindi esiste $r > 0$ tale che

$$\|\varphi'(x)\| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall\, x \in B(x_0, r).$$

Per il teorema del valor medio si ha allora:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \frac{1}{2}\, |x_1 - x_2| \quad \forall\, x_1, x_2 \in B(x_0, r).$$

Quindi dal teorema di inversione locale segue che se:

$$|Sy - x_0 + \varphi(x_0)| = |Sy - Sf(x_0)| \leq 2r$$

esiste un'unica soluzione x di (11.11) tale che $|x| \leq r$. In conclusione se $|y - f(x_0)| \leq \rho := \frac{2r}{\|S\|}$ si ha $|Sy - Sf(x_0)| \leq 2r$ da cui la tesi in (i). La (ii) segue dal teorema sulla derivazione della funzione inversa. $\square$

Esempio 11.6 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $g(x) = y$ dove:

$$\begin{cases} y_1 = 3\sin(x_1 + x_2) + e^{x_1} - 1, \\ \\ y_2 = -x_1^2 + x_2 \cos x_1. \end{cases}$$

Se $x_1 = x_2 = 0$ si ha $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Per vedere se l'equazione $f(x) = y$ è risolubile per "vicino" a $(0, 0)$ calcoliamo $f'(0)$. Si ha:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 3\cos(x_1 + x_2) + e^{x_1} & 3\cos(x_1 + x_2) \\ -2x_1 - x_2 \sin x_1 & \cos x_1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\det\, f'(0) = 4$. Quindi l'equazione $f(x) = y$ è risolubile localmente.

11.3 Principio delle contrazioni dipendenti da un parametro

Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (\lambda, x) \to f(\lambda, x)$. Supponiamo che esista $\alpha \in [0, 1)$ tale che:

$$|f(\lambda, x_1) - f(\lambda, x_2)| \le \alpha |x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1 - x_2 \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{11.12}$$

Per il Principio delle contrazioni per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste $x(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$x(\lambda) = f(\lambda, x(\lambda)). \tag{11.13}$$

Vogliamo studiare la regolarità dell'applicazione:

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ \lambda \to x(\lambda).$$

Proposizione 11.7 *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e tale che valga* (11.12). *Allora x è continua.*

Se inoltre f è derivabile con derivata continua si ha che x è derivabile e per ogni $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ risulta [(1)]*:*

$$x'(\lambda) = (1 - f_x(\lambda_0, x(\lambda_0)))^{-1} f_\lambda(\lambda_0, x(\lambda_0)). \tag{11.14}$$

Dimostrazione. *Continuità.* Sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$x(\lambda_0 + h) - x(\lambda_0) = f(\lambda_0 + h, x(\lambda_0 + h)) - f(\lambda_0, x(\lambda_0))$$

$$= f(\lambda_0 + h, x(\lambda_0 + h)) - f(\lambda_0 + h, x(\lambda_0)) + f(\lambda_0 + h, x(\lambda_0)) - f(\lambda_0, x(\lambda_0))$$

Ne segue

$$|x(\lambda_0 + h) - x(\lambda_0)| \le \alpha |x(\lambda_0 + h) - x(\lambda_0)| + |f(\lambda_0 + h, x(\lambda_0)) - f(\lambda_0, x(\lambda_0))|,$$

da cui

$$|x(\lambda_0 + h) - x(\lambda_0)| \le \frac{1}{1 - \alpha}\, |f(\lambda_0 + h, x(\lambda_0)) - f(\lambda_0, x(\lambda_0))|.$$

Per $h \to 0$ si ha la tesi dato che f è continua.

---

(1) Lasciamo in esercizio al lettore la definizione (naturale) delle derivate parziali f_x e f_λ.

Derivabilità. Sia $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dato che f è derivabile in (λ_0, x_0) si ha per ogni $(\rho, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$f(\lambda_0 + h, x_0 + k) - f(\lambda_0, x_0) = f_\lambda(\lambda_0, x_0)h + f_x(\lambda_0, x_0)k + \rho(h, k),$$

dove:

$$\lim_{(\rho,k)\to 0} \frac{\rho(h,k)}{|h| + |k|} = 0. \tag{11.15}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$x(\lambda_0 + h) - x(\lambda_0) = f_\lambda(\lambda_0, x(\lambda_0))h$$

$$+f_x(\lambda_0, x(\lambda_0))(x(\lambda_0 + h) - x(\lambda_0)) + \rho(h, x(\lambda_0 + h) - x(\lambda_0)),$$

che equivale a:

$$(I - f_x(\lambda_0, x(\lambda_0)))(x(\lambda_0 + h) - x(\lambda_0)) = f_\lambda(\lambda_0, x(\lambda_0))h + \rho(h, x(\lambda_0 + h) - x(\lambda_0)).$$

Tenendo conto della (11.12) si verifica facilmente che:

$$\|f_x(\lambda_0, x(\lambda_0))\| \leq \alpha.$$

Dalla Proposizione 11.1 segue allora che esiste $(I - f_x(\lambda_0, x(\lambda_0)))^{-1}$, quindi si ha:

$$\frac{1}{h}\,(x(\lambda_0+h)-x(\lambda_0)) = (I-f_x(\lambda_0, x(\lambda_0)))^{-1}(f_\lambda(\lambda_0, x(\lambda_0))+\rho(h, x(\lambda_0+h)-x(\lambda_0))/h).$$

La tesi segue per $h \to 0$ tenendo conto di (11.15). $\square$

11.4 Teorema della funzione implicita

Il teorema della funzione implicita stabilisce sotto quali condizioni il luogo di zeri di una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ può essere parametrizzato *localmente* in maniera differenziabile da m-parametri liberi (si noti che tale teorema rappresenta quindi la formalizzazione matematica dell'asserzione che genericamente lo spazio delle soluzioni di un sistema di n-equazioni in $(m + n)$ incognite ha m gradi di libertá).

In questa sezione identificheremo $\mathbb{R}^{n+m}$ con $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e conseguentemente denoteremo i punti di $\mathbb{R}^{n+m}$ con (x, y) dove $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ è la

m-upla delle prime m componenti mentre $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ è la n-upla delle ultime componenti.

Data una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^k$ denoteremo con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ il minore di $f'(x_0, y_0)$ contenente solo le derivate di f rispetto alle prime m direzioni coordinate, mentre $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0, y_0)$ denota il minore di $f'(x_0, y_0)$ contenente solo le derivate rispetto alle ultime n-direzioni coordinate. Si noti che:

$$f'(x_0, y_0) = \left(\ \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ \middle| \ \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \ \right) .$$

Teorema 11.8 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{n+m}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^k con $k \geq 1$. Si supponga che $f(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sia una matrice invertibile (si noti che tale minore é quadrato!).*

Allora esiste un intorno U di x_0 in $\mathbb{R}^m$, un intorno V di y_0 in $\mathbb{R}^n$ e una funzione di classe $\mathbb{C}^k$

$$\phi : U \to V$$

tale che

$$(U \times V) \cap f^{-1}(0) \ = \ \{(x, \phi(x)) : \ x \in U\} .$$

Inoltre vale l'identitá

$$\phi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}^{-1}(x, \phi(x)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)), \quad \forall \, x \in U.$$

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione:

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}, \quad F(x, y) = (x, f(x, y)).$$

La derivata di F è allora la matrice a blocchi

$$F'(x_0, y_0) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{array} \right) .$$

In particolare $\det F'(x_0, y_0) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ che è diverso da 0 per ipotesi.

Per il teorema della funzione inversa esiste un intorno Ω' di (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^{n+m}$ tale che $F|_{\Omega'}$ ha come immagine un intorno di $(x_0, 0) = F(x_0, y_0)$ e l'applicazione $F|_{\Omega'} : \Omega' \to F(\Omega')$ è invertibile con inversa differenziabile. Sia $G : F(\Omega) \to \Omega$ l'inversa di F. Osserviamo che $G(x, y)$ è definito come l'unico $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega'$ tale che

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y). \tag{11.16}$$

Per definizione si ha $F(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, f(\bar{x}, \bar{y})$ e dunque risolvendo (12.21) (dove le incognite sono $\bar{x}$ e $\bar{y}$ si ha $\bar{x} = x$ ovvero $G(x, y) = (x, g(x, y))$ con g funzione differenziabile.

Fissiamo ora U intorno di x_0 e V intorno di y_0 tale che $U \times V \subset \Omega'$ e poniamo $\phi(x) = g(x, 0)$. Affermo che la mappa $\phi : U \to V$ verifica l'asserto del teorema. Infatti fissato $(x, y) \in U \times V$ si ha

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) = G(x, 0) \Leftrightarrow y = g(x, 0) = \phi(t)\,.$$

Osserviamo infine che $\phi'(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, 0)$. Inoltre osserviamo che

$$G'(x, 0) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \frac{\partial g}{\partial x}(x, 0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, 0) \end{array}\right)$$

e derivando l'identitá $f(G(x, 0)) = 0$ otteniamo che

$$0 = f'(G(x, 0))G'(x, 0) = f'(x, \phi(x))G'(x, 0)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x)) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \frac{\partial g}{\partial x}(x, 0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, 0) \end{array}\right)$$

Applicando la regola della moltiplicazione a blocchi risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))\ \phi'(x) = 0$$

da cui segue la formula che esprime $\phi'(x)$. $\square$

Osservazione 11.9 L'equazione vettoriale

$$f(x, y) = 0$$

puó essere considerata come un sistema di n equazioni in $n + m$ incognite. Sia S l'insieme delle soluzioni. Allora se $(x_0, y_0) \in S$ e la matrice quadrata $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ è invertibile allora le prime m coordinate parametrizzano S in un intorno Ω' di (x_0, y_0). Vale a dire che l'insieme $S \cap \Omega'$ coincide con l'insieme dei punti (x, y) tali che

$$\begin{array}{ll} x_1 = k_1 & \\ x_2 = k_2 & \\ \dots & \\ x_m = k_m & \\ y_1 = \phi_1(k_1, \dots, k_m) & (*) \\ y_2 = \phi_2(k_1, \dots k_m) & \\ \dots & \\ y_n = \phi_n(k_1, \dots k_m) & \end{array}$$

dove $k = (k_1, \dots, k_m)$ sono parametri che variano in un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $\phi_1, \dots, \phi_n$ funzioni di classe C^k definite su U.

Una rappresentazione locale di S nella forma (*) è detta parametrizzazione locale. Le variabili $x_1, \dots, x_m$ sono dette parametri liberi intorno alla soluzione (x_0, y_0).

Esercizio 11.10 Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Il luogo di zeri di tale funzione è la sfera unitaria S. Inoltre $f'(x, y, z) = 2(x, y, z)$, in particolare $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ eccetto che sull'equatore $z = 0$. Osserviamo che se (x_0, y_0, z_0) non appartiene all'equatore allora dal teorema della funzione implicita si deduce che esiste una funzione ϕ definita su un intorno di (x_0, y_0) tale che il suo grafico coicide con l'intersezione di S con un intorno di x_0, y_0, z_0.

In particolare se $z_0 > 0$ possiamo scegliere $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}, V = (0, 1)$ e $\phi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$.

Se invece $z_0 < 0$ scegliamo U come sopra $V = (-1, 0)$ e definiamo $\phi(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Nell'enunciato del teorema abbiamo supposto che l'ultimo minore $n \times n$ di $f'(x_0, y_0)$ (ovvero quello ottenuto scegliendo le ultime n colonne di $f'(x_0, y_0)$) fosse invertibile e abbiamo dedotto che tale ipotesi assicura che in un intorno di (x_0, y_0) il luogo di 0 di f appare come il grafico di una funzione definita sul m-piano coordinato *orizzontale* (ovvero il piano definito imponendo le ultime n coordinate uguali a 0) a valori sull'n-piano verticale (definito imponendo le prime m coordinate uguali a 0). Chiaramente in generale se esiste un minore $n \times n$ di $f'(x_0, y_0)$ invertibile allora è possibile ottenere lo stesso risultato con la sola differenza che la funzione f sará definita su un piano coordianto diverso da quello orizzontale (basta cambiare l'ordine delle coordinate su $\mathbb{R}^{n+m}$ e ci si rconduce al caso precedente).

Corollario 11.11 *Sia $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ e sia $f(x_0) = 0$ e rango $f'(x_0) = n$ (il che vuol dire che $f'(x_0)$ è un'applicazione lineare suriettiva). Allora esistono piani coordinati supplementari L e M tale che $\mathbb{R}^{n+m} = M \oplus L$ e $\dim M = m$, un intorno U di M e V di L e $\varphi : U \to V$ tale che*

$$f^{-1}(0) \cap (U + V) = \{x + \phi(x) :\ x \in U\}$$

dove per definizione $U + V = \{x + y :\ x \in U, y \in V\}$.

Esercizio 11.12 Sia S la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$. Si trovino quali parametri liberi si possono scegliere intorno al punto $(1, 0, 0) \in S$.

Esercizio 11.13 Si consideri il seguente sistema di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + z^2 + 1 \\ \cos(x)y - \sin(x)z = 0 \end{cases}$$

Sia S lo spazio delle soluzioni.

1) si mostri che x è un parametro libero intorno ad ogni punto di S.

2) Si descriva esplicitamente una parametrizzazione di S della forma $x \mapsto (x, y(x), z(x))$.

3) Si disegni S.

4) Si verifichi esplicitamente la seguente identitá data dal teorma della funzione implicita:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}(x) \\ \dot{z}(x) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y(x), z(y)) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y(x), z(x)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y(x), z(x)) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y(x), z(x)) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y(x), z(x)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y(x), z(x)) \end{pmatrix}$$

Esercizio 11.14 Si consideri il sistema di 3 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + t^2 = 1 \\ xz + yz + yt = 0 \\ e^x \sin u = 0 \end{cases}$$

Sia S lo spazio delle soluzioni. Si mostri che y, t sono parametri liberi intorno ad $(1, 0, 0, 0, 0)$. Si mostri che nessun insieme di parametri liberi puó contenere la variabile x.

Esercizio 11.15 Si consideri l'equazione vettoriale

$$f(x) = 0$$

formata da n equazioni C^k in $n + m$ incognite. Sia S il luogo delle soluzioni e $\bar{x}$ una soluzione particolare. Dato un insieme di m-variabili (tra quelle che compaiono nel sistema), $P = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$, si mostri che esse forniscono un insieme di parametri liberi intorno a $\bar{x}$ se il minore di $f'(\bar{x})$ ottenuto considerando solo le derivate parziali rispetto alle variabili non contenute in P è invertibile.

Esercizio 11.16 Si consideri una funzione f di classe C^k cone nell'enunciato del Teorema 12.17. Siano M, L sottospazi lineari di $\mathbb{R}^{n+m}$ tali che $\dim M = m$ e $\mathbb{R}^{n+m} = M \oplus L$. Dato un punto $p \in \mathbb{R}^{n+m}$ tale che $f(p) = 0$ dire sotto quali condizioni esistono U, V aperti rispettivamente di M e L e $\varphi : U \to V$ tali che

1. $U + V$ è un aperto di p.
2. $f^{-1}(0) \cap (U + V) = \{x + \phi(x) | x \in U\}$.

11.5 Alcune applicazioni

11.5.1 Sistemi dipendenti da parametri

Proposizione 11.17 *Si supponga di avere un sistema di n equazioni in n incognite dipendenti da m parametri*

$$f_\xi(x) = 0$$

dove $x = (x_1, \ldots, x_n)$ è l'insieme delle incognite, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ è l'insieme dei parametri e $f_\xi = (f_{\xi,1}, \ldots, f_{\xi,m})$ rappresenta il vettore delle equazioni dipendenti da ξ.

Si supponga poi che la funzione di $m + n$-variabili

$$F : (\xi, x) \mapsto f_\xi(x)$$

sia di classe C^k.

Sia $\bar{x}$ una soluzione di $f_{\bar{\xi}}$ per un valore particolare dei parametri $\bar{\xi}$ e supponiamo che $f'_{\bar{\xi}}(\bar{x})$ sia invertibile.

Allora esiste un intorno U di $\bar{\xi}$, un intorno V di $\bar{x}$ e un'applicazione C^k $x : U \to V$ tale che

1. $x(\xi)$ *è soluzione di* f_ξ.

2. $x(\bar{\xi}) = \bar{x}$.

3. per ogni $\xi \in U$ *si ha che* $x(\xi)$ *è l'unica soluzione di* f_ξ *contenuta in* V.

Dimostrazione. Si osservi che risulta:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{\xi}, \bar{x}) = f'_{\bar{\xi}}(\bar{x}).$$

Per il Teorema 12.17 esiste una funzione $x : U \to V$ definita su un intorno U di $\bar{\xi}$ a valori in un intorno V di $\bar{x}$ tale che $F^{-1}(0) \cap (U \times V)$ concide con il grafico di ϕ. Ovvero per $\xi \in U$ e $x \in V$ si ha

$$f_\xi(x) =: F(\xi, x) = 0 \Leftrightarrow x = x(\xi)$$

e dunque la funzione x verifica le proprietá richieste. $\square$

Studiamo ora la dipendenza continua delle radici di un polinomio dai coefficienti.

Esercizio 11.18 Sia $\bar{p}(t) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \bar{a}_2 t^2 + \ldots + \bar{a}_n t^n$ un polinomio di grado n e sia $\bar{t}$ una sua radice tale che $p'(\bar{t}) \neq 0$. Si mostri che esiste un intorno V di p nello spazio $\mathbb{R}_n[t]$ dei polinomi di grado al piú n (che si identifica in modo naturale con $\mathbb{R}^{n+1}$) e una mappa C^∞ $\phi : V \to \mathbb{R}$ tale che $\phi(\bar{p}) = \bar{t}$ e $\phi(p)$ è una radice di p per ogni $p \in V$.

Esercizio 11.19 Sia X il luogo di zeri di una funzione f di classe C^k in $\mathbb{R}^2$ tale che $0 \notin X$ e si supponga che la retta $y = x$ intersechi X in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$. Si determinino condizioni sufficienti affinché esista $\epsilon > 0$ per cui tutte le rette di equazione $y = mx$ con $m \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ intersechino X.

Si dia un esempio di un luogo X tale che la retta $y = x$ è tangente ad X nel punto $\bar{x}, \bar{y}$ e tutte le rette $y = mx$ intersechino X in un punto $p(m)$ che dipende in modo continuo da m.

11.5.2 Una dimostrazione del Teorema fondamentale dell'algebra

In questa sottosezione mostreremo come il Teorema della funzione inversa fornisca un argomento semplice per dimostrare che un polinomio complesso non costante ammette sempre una radice.

Identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ attraverso l'applicazione

$$x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dato un numero complesso α denotiamo con $T_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la moltiplicazione per α. T_α vista come mappa di $\mathbb{R}^2$ in sé è lineare e la matrice che la rappresenta è

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(\alpha) & -\mathfrak{Im}(\alpha) \\ \mathfrak{Im}(\alpha) & \mathfrak{Re}(\alpha) \end{pmatrix}$$

(lo studente verifichi tale asserzione).

Un polinomio complesso $p(z)$ può essere visto come mappa di $\mathbb{R}^2$ in sé. Dimostreremo che in effetti tale mappa è differenziabile e la sua derivata è esprimibile per mezzo della derivata formale di p. Per evitare confusione denoteremo con $Jp(z_0)$ la matrice jacobiana di p in z_0 (che è una matrice 2×2 con elementi di matrice reali) e con $p'(z_0)$ la derivata formale di p in z_0 (che è un numero complesso)

Lemma 11.20 *Un polinomio complesso p, considerato come mappa di $\mathbb{R}^2$ in sé, è differenziabile e si ha*

$$Jp(z_0) = T_{p'(z_0)}$$

Dimostrazione. È sufficiente mostrare l'asserto assumendo che $p(z) = az^n$. In particolare va dimostrato che

$$\lim_{u \to 0} \frac{|a(z_0 + u)^n - az_0^n - nz_0^{n-1}u|}{|u|} = 0 \qquad (*)$$

Ora per lo sviluppo del binomio di Newton il numeratore è uguale a $u^2 q(u)$ essendo q un polinomio di grado $n - 2$. Dunque il rapporto in (*) è uguale a

$$\frac{|u^2 q(u)|}{|u|} = |u||q(u)|.$$

Facendo tendere u a 0 si ha la tesi. $\square$

Osserviamo in particolare che $Jp(z_0)$ è invertibile se e solo se $p'(z_0) \neq 0$ Dunque esistono al più un numero finito di punti su cui Jp è singolare (stiamo assumendo p non costante!)

Proposizione 11.21 *Sia $p \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $n \geq 1$. Allora p come mappa di $\mathbb{C}$ in sé è surgettiva.*

Dimostrazione. L'insieme $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ p'(z) = 0\}$ è finito per cui anche la sua immagine $p(\Delta)$ è un insieme finito di punti. In particolare $X = \mathbb{C} \setminus p(\Delta)$ è un insieme connesso. Nel seguito mostreremo che sia $X \cap Im(p)$ e $X \setminus Im(p)$ sono sottoinsiemi aperti. Poiché X è connesso si danno due possibilità

1) $X \subset Im(p)$

2) $X \cap Im(p) = \varnothing$.

Nel primo caso p risulterebbe surgettivo. Nel secondo caso invece risulterebbe che $Im(p)$ è contenuta in $p(\Delta)$ ovvero in un'unione finita di punti. Ma poiché $\mathbb{C}$ è connesso risulterebbe che $Im(p)$ è un solo punto, ovvero p costante, il che contraddice l'ipotesi.

Rimane da dimostrare che $X \cap Imp$ e $X \setminus Imp$ sono entrambi sottoinsiemi aperti.

(a) $X \cap Im(p)$ è aperto: sia $w_0 \in X \cap Im(p)$. Si ha che $w_0 = p(z_0)$ con $p'(z_0) \neq 0$. Segue che $Jp(z_0)$ è invertibile e dunque per il teorema della funzione inversa esiste un intorno U di z_0 tale che $p : U \to p(U)$ è biunivoca e $p(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Segue che $p(U) \cap X$ è un intorno di w_0 contenuto in $Im(p) \cap X$.

(b) $X \setminus Im(p)$ è aperto. Sia $w_0 \notin Im(p)$ e supponiamo per assurdo che tutte le palle centrate in w_0 intersechino l'immagine di p. In tal caso potremmo costruire una successione $w_n \to w_0$ tale che ogni w_n appartiene all'immagine di p, ovvero esiste z_n tale che $w_n = p(z_n)$. Ora se la successione z_n rimane limitata, a meno di estrarre una sottosucessione possiamo supporre $z_n \to z_0$. Ma allora, poiché p è una funzione continua si ha che $w_n = p(z_n)$ converge a $p(z_0)$ da cui $w_0 = p(z_0)$ contraddicendo l'assunzione che w_0 non appartiene all'immagine di p.

Supponiamo infine che z_n non sia una successione limitata ovvero $|z_n| \to +\infty$. Posto $p(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \to a_0$, si ha

$$|w_n| = |p(z_n)| = |a_N z_n^N + a_{N-1} z_n^{N-1} + \to a_0| = |z_n|^N \left| a_N + \frac{a_{N-1}}{z_n} + \ldots + \frac{a_0}{z_n^N} \right|$$

e dunque si vede facilmente che $|w_n| \to +\infty$ contraddicendo l'assunzione che $w_n \to w_0$. $\square$

11.6 Sottoinsiemi lisci e spazio tangente

In questa sezione studieremo da un punto di vista più geometrico il luogo di zeri di una funzione f da un aperto Ω di $\mathbb{R}^{n+m}$ in $\mathbb{R}^n$ in un intorno di un punto $\bar{x}$ che soddisfa l'ipotesi del teorema della funzione implicita. Per semplicità di notazione considereremo solo funzioni di classe C^∞, e supporremo che la funzione f sia definita su tutto $\mathbb{R}^{n+m}$ anche se tutti gli enunciati sono validi per funzioni C^k definite su aperti di $\mathbb{R}^{n+m}$ (con opportune modifiche lasciate allo studente).

Innanzitutto diamo una formulazione apparentemente più debole di quel teorema ma in qualche maniera di piú semplice interpretazione.

Proposizione 11.22 *Data una funzione di classe C^∞ $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ siano X il suo luogo di zeri e $\bar{x} \in X$ tale che rango $f'(\bar{x}) = n$. Allora esiste un intorno Ω di $\bar{x}$ in $\mathbb{R}^{n+m}$, un aperto U di $\mathbb{R}^m$ e una mappa C^∞ $\sigma : V \to U$ tale che*

1. *σ è iniettiva e* $\ker \sigma'(x) = \{0\}$ *per ogni $x \in U$.*
2. *$\sigma(U) = X \cap \Omega$*

Dimostrazione La dimostrazione è una semplice applicazione del Teorema 12.17. Infatti a meno di riordinare le variabili possiamo supporre che il minore $n \times n$ di $f'(x_0)$ ottenuto considerando le ultime n colonne sia invertibile. Siano allora U e V e $\phi : U \to V$ come nell'enunciato di quel teorema e si ponga $\Omega = U \times V$ e $\sigma : U \to \Omega$ definita da $\sigma(x) = (x, \phi(x))$. Si noti che σ è iniettiva e $\sigma(U) = X \cap \Omega$ per il Teorema 12.17. Inoltre il minore $m \times m$ di $\sigma'(x)$ ottenuto prendendo le prime m righe è l'identità (si noti che $\sigma'(x)$ è una matrice con $n + m$ righe e m colonne) e dunque rango $\sigma'(x) = m$ ovvero Ker $\sigma'(x) = \{0\}$.

Possiamo riassumere l'enunciato della Proposizione affermando che il luogo di zeri di f intorno ad un punto $\bar{x}$ che soddisfa l'ipotesi rango $f'(\bar{x}) = n$ puó essere parametrizzato da un aperto di $\mathbb{R}^m$ in maniera liscia. La seguente proposizione assicura che vale anche il viceversa, ovvero che se X puó essere parametrizzato in modo liscio da un aperto di $\mathbb{R}^m$ intorno ad un punto $\bar{x}$, allora esiste una funzione definita su un intorno Ω di $\bar{x}$ a valori in $\mathbb{R}^n$ tale che $X \cap \Omega$ è il luogo di zeri di f (e rango $f'(\bar{x}) = n$).

Proposizione 11.23 *Sia $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m}$ una funzione di classe C^∞. Sia $\bar{x} \in U$ tale che $\sigma'(\bar{x})$ è iniettivo (ovvero $\ker \phi'(x) = \{0\}$). Allora esistono*

- *U intorno di $\bar{x}$ in $\mathbb{R}^m$,*
- *Ω intorno di $\sigma(\bar{x})$ in $\mathbb{R}^{n+m}$ tale che $\sigma(U) \subset \Omega$*
- *$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^∞ tale che rango $f'(x) = n$ per ogni $x \in \Omega$ e*

$$\sigma(U) \cap \Omega = f^{-1}(0)$$

Dimostrazione La dimostrazione è del tutto analoga a quella del Teorema 12.17. Siccome Ker $\sigma'(\bar{x}) = \{0\}$ a meno di riordinare le coordinate su $\mathbb{R}^{n+m}$ possiamo supporre che il minore $m \times m$ di $\sigma'(\bar{x})$

$$\frac{\partial(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)}{\partial x}(\bar{x})$$

sia invertibile.

Allora considerariamo la funzione $S : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ definita da

$$S(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \sigma(x_1, \ldots, x_m) + (0, 0, \ldots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_{m+n})$$

Osserviamo che $S'(x_1, \ldots, x_{n+m})$ è la matrice a blocchi

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}(x_1, \ldots, x_n) & 0 \\ \hline \frac{\partial(\sigma_{m+1},\ldots,\sigma_{n+m})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(x_1, \ldots, x_n) & I \end{array}\right)$$

In particolare $S'(\bar{x}, 0)$ è invertibile e dunque S è un diffeomorfismo di un intorno di $(\bar{x}, 0)$ su un intorno di $\sigma(\bar{x}) = S(\bar{x}, 0)$. A meno di restringere tali intorni possiamo supporre l'intorno di $(\bar{x}, 0)$ della forma $U \times V$ e sia $\Omega = \sigma(U \times V)$ il corrispondnete intorno di $\sigma(\bar{x})$. Sia $F : \Omega \to U \times V$ l'inversa di S su Ω e siano $(f_1, \ldots, f_{n+m})$ le componenti di F. Allora si ha

$(x_1, \ldots, x_{n+m}) \in \Omega \cap \sigma(U) \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_{n+m}) = \sigma(y_1, \ldots, y_m)$
per qualche $y \in U \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_{n+m}) = S(y_1, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots, 0)$
$\Leftrightarrow F(x_1, \ldots, x_{n+m}) = (y_1, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots, 0)$
$\Leftrightarrow f_{m+1}(x_1, \ldots, x_{n+m}) = f_{m+2}(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \ldots = f_{m+n}(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0$

Dunque data $f = (f_{m+1}, \dots, f_{m+n})$ si ha $\sigma(U) \cap \Omega = f^{-1}(0)$. Per verificare che $rkf'(x) = n$ si osservi che $f'(x)$ è un minore di $F'(x)$ e imponendo $F'(x)G'(x) = I$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})} = I$$

Definizione 11.24 *Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+m}$ chiuso e $\bar{x} \in X$. Diciamo che $\bar{x}$ è un punto liscio intorno a X di dimensione m (e scriveremo $dim_x X = m$) se vale una delle due seguenti ed equivalenti condizioni:*

1. *Esiste un intorno U di $\bar{x}$ in $\mathbb{R}^{n+m}$ e una funzione $f : U \to \mathbb{R}^n$ tale che $X = f^{-1}(0)$ e rango $f'(x) = m$ per $x \in U$.*

2. *Esiste un intorno U di $\bar{x}$ in $\mathbb{R}^{n+m}$ e una funzione iniettiva C^∞ $\phi : V \to U$ definita su un aperto V di $\mathbb{R}^m$ tale che $\phi(V) = U \cap X$ e $\phi'(x)$ è iniettivo per $x \in V$.*

La funzione f è detta equazione locale di X intorno a $\bar{x}$ e la funzione ϕ è detta parametrizzazione locale di X intorno a $\bar{x}$.

Esercizio 11.25 Lo studente dimostri che l'insieme dei punti lisci di dimensione m è un sottoinsieme aperto di X.

Esercizio 11.26 Si determinino i punti lisci e le relative dimensioni dei seguenti insiemi:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 0\}$$
$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z(x^2 + y^2) = 0\}$$
$$X = \{(x, y, z) | y^2 = x^2(x + 1)\} X = \{(x, y, z) | y^2 = x^6\}$$

Esercizio 11.27 Si mostri che se $\sigma : U \to X$ è una parametrizzazione intorno ad un punto liscio $\bar{x}$, allora per ogni aperto $V \subset U$ si ha che $\sigma(V)$ è un aperto di X.

11.6.1 Spazio tangente

Sia $X \subset \mathbb{R}^{n+m}$ chiuso. Diciamo che un vettore $v \in \mathbb{R}^{n+m}$ è tangente ad X in $\bar{x}$ se esiste una curva differenziabile

$$c : (-\epsilon, \epsilon) \to X \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

tale che

- $c(0) = \bar{x}$,
- $\dot{c}(0) = v$.

Lo spazio tangente ad X in $\bar{x}$ è l'insieme dei vettori tangenti ad X in $\bar{x}$ e lo denoteremo con $T_{\bar{x}}X$.

Proposizione 11.28 *Sia $\bar{x} \in X$ un punto liscio di dimensione m, sia f una equazione locale per X intorno a $\bar{x}$ e σ una parametrizzazione locale di X intorno a $\bar{x}$ e supponiamo senza perdere di generalitá che $\sigma(0) = \bar{x}$. Allora si ha*

$$T_{\bar{x}}X = \ker f'(\bar{x}) = Im(\sigma'(0))$$

Dimostrazione. Poiché $f \circ \sigma = 0$ segue che $f'(\sigma(x)) \circ \sigma'(x) = 0$ per ogni x. In particolare ricaviamo che $\ker f'(\sigma(x)) \supset Im\sigma'(x)$, ma poiché $\dim \ker f'(\sigma(x)) = \dim Im(\sigma'(x)) = m$ si ha

$$\ker f'(\bar{x})) = Im(\sigma'(0))$$

Per concludere mostreremo le seguenti inclusioni

$$Im(\sigma'(0)) \subset T_{\bar{x}}X \subset \ker f'(\bar{x})$$

Dato $w \in \mathbb{R}^m$ si consideri il cammino $c(t) = \sigma(tv)$ definito su qualche intervallo $(-\epsilon, \epsilon)$. Si ha che c è un cammino differenziabile contenuto in X tale che $c(0) = \bar{x}$. Di conseguenza $\sigma'(0)w = \dot{c}(0)$ appartiene a $T_{\bar{x}}X$. E questa considerazione mostra che $Im(\sigma'(0)) \subset T_{\bar{x}}X$.

Sia ora $v \in T_{\bar{x}}X$. Per definizione esiste un cammino $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^{n+m}$ tale che $c(0) = \bar{x}$ e $\dot{c}(0) = v$. Poiché $c(t) \in X$ si ha che $f(c(t)) = 0$ per ogni $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e derivando da ambo i membri in 0 otteniamo $f'(c(0))\dot{c}(0) = 0$, ovvero $\dot{c}(0) \in \ker f'(c(0))$. Poiché $c(0) = \bar{x}$ e $\dot{c}(0) = v$ ció mostra che $v \in \ker f'(\bar{x})$.

Corollario 11.29 *Se $\bar{x}$ è un punto liscio di X di dimensione m allora $T_{\bar{x}}X$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n+m}$ di dimensione m.*

Esercizio 11.30 Si calcoli lo spazio tangente all'ellissoide definito dall'equazione $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ in un suo punto generico (x_0, y_0, z_0).

Esercizio 11.31 Si calcoli lo spazio tangente all'insieme degli zeri del polinomio in due variabili $x^2 - y^2$ in 0. Si deduca che per un punto non liscio lo spazio tangente puó non essere uno spazio vettoriale.

Esercizio 11.32 Si calcoli lo spazio tangente del luogo degli zeri X del polinomio $x^2 - y^3$. Si mostri che X non è liscio in 0.

Proposizione 11.33 *Sia $X \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e $\bar{x} \in X$ un punto liscio di dimensione m. Siano $f_1, \ldots, f_n$ le componenti di un'equazione locale per X intorno a $\bar{x}$. Allora $\nabla f_1(\bar{x}), \nabla f_2(\bar{x}), \ldots, \bar{f}_n(\bar{x})$ formano una base dello spazio ortogonale a $T_{\bar{x}}X$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\nabla f_1(\bar{x}), \nabla f_2(\bar{x}), \ldots, \bar{f}_n(\bar{x})$ sono le righe di $f'(\bar{x})$ che per ipotesi ha rango n. Ne segue che tali vettori sono linearmente indipendenti e generano uno spazio W di dimensione n.

Ora fissato un cammino differenziabile c su X con $c(0) = \bar{x}$, si ha che $f_i(c(t)) = 0$ per cui differenziando

$$\langle \nabla f_i(\bar{x}), \dot{c}(0) \rangle = 0$$

Per l'arbitrarietá di c segue che $\nabla f_i(\bar{x}) \in T_{\bar{x}}X^{\perp}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Dunque $W \subset T_{\bar{x}}X^{\perp}$ e poiché $\dim W = n = \dim T_{\bar{x}}X^{\perp}$ si conclude.

Proposizione 11.34 *Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ e sia f una funzione di classe C^∞ a valori in $\mathbb{R}$ definita su un intorno di X Se un punto liscio $\bar{x}$ è di massimo (minimo) locale su X allora $\nabla f(\bar{x})$ è ortogonale a $T_{x_0}X$. In particolare se $g = (g_1, \ldots, g_k)$ è un' equazioni per X intorno a $\bar{x}$ allora*

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}) + \ldots + \lambda_n \nabla g_k(\bar{x})$$

per qualche $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia c un cammino differenziabile su X con $c(0) = \bar{x}$. La funzione $t \mapsto f(c(t))$ ha un massimo (minimo) locale in 0, per cui derivando si ha

$$\langle \nabla f(\bar{x}), \dot{c}(0) \rangle = 0$$

Per l'arbitrarietà di c segue la tesi. $\square$

Definizione 11.35 *Sia f una funzione C^∞ definita in un intorno di un sottoinsieme chiuso X di $\mathbb{R}^n$. Un punto $\bar{x}$ si dice* critico *se è un punto liscio di X e $\nabla f(x_0)$ è ortogonale a $T_{\bar{x}}X$.*

Osserviamo che in generale essere critico è una condizione necessaria ma non sufficiente per essere un punto di minimo o massimo locale su X come mostra il seguente esempio.

Esercizio 11.36 Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = xy\}$

1. Si mostri che X è liscio in ogni suo punto di dimensione 2.
2. Si faccia un disegno qualitativo di X.
3. Sia $f(x, y, z) = z$. Si mostri che 0 è un punto critico per f su X ma non è né di minimo né di massimo locale.

Esercizio 11.37 Si mostri che l'iniseme dei punti critici è chiuso in X.

11.6.2 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^n | g_1(x) = g_2(x) = \ldots = g_k(x) = 0\}$ essendo $g = (g_1, \ldots' g_k)$ un'equazione globale per X (ovvero rango $g'(x) = k$ per ogni $x \in X$). Sia f una funzione di classe C^∞ definita in qualche intorno di X. Ci proponiamo di trovare massimi e minimi locali di X. In effetti cerchiamo in un primo momento i punti critici di f. A tale scopo si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \\ \ldots \\ g_k(x) = 0 \\ \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \ldots + \lambda_k \nabla g_k(x) \end{cases} \qquad (*)$$

dove le incognite sono $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Si noti che si hanno $n+k$ equazioni reali in $n + k$ incognite. Dunque risolvendo il sistema (laddove si può) si trovano tutti i punti critici di f tra cui anche eventuali minimi e massimi locali. Essendo ilnumero di incognite uguale al numero di equazioni, si avrà che genericamente l'insieme delle soluzioni del sistema (*) risulterá discreto (e in effetti se X è limitato risulterà finito).

Esercizio 11.38 Si calcolino il minimo e il massimo della funzione $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ sulla sfera di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 11.39 Si determini il parallelepipedo di volume massimo tra quelli di superficie uguale ad A.

Esercizio 11.40 Si determinino il massimo e il minimo della funzione $f(x) = x_1 \ldots x_n$ su $X = \{x_1 + \ldots + x_n = 1, x_i > 0\}$. Se ne deduca la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica.

Esercizio 11.41 Si trovi il rettangolo di area massima inscritto nell'ellisse $ax^2 + by^2 = 1$

Hessiano di f su X

Data una funzione f su X abbiamo giá osservato che esistono punti critici di f su X che non sono né massimi né minimi. Il proposito di questa sezione è di introdurre la nozione di Hessiano di f su un punto *critico* $\bar{x}$ di f per X come un'applicazione bilineare simmetrica definita sullo spazio tangente $T_x X$, e tale che valga l'analogo criterio che vale per i punti di massimo e minimo su su $\mathbb{R}^n$.

Lemma 11.42 *Sia f una funzione C^2 definita in un intorno di X in $\mathbb{R}^n$. Si supponga che $\bar{x} \in X$ è un punto critico. Data una parametrizzazione locale $\sigma : U \to V$ tale che $\sigma(0) = \bar{x}$, e un'equazione locale $g = (g_1, \ldots, g_{n-k})$ vale la seguente uguaglianza*

$$\begin{aligned} &\langle (f \circ \sigma)''(0)v,\ w\rangle \\ &= \langle \big[f''(\bar{x}) - (\lambda_1 g''(\bar{x}) + \lambda_2 g_2''(\bar{x}) + \ldots + \lambda_{n-k} g_{n-k}''(\bar{x}))\big] \circ \sigma'(0)v,\ w\rangle \end{aligned} \tag{11.17}$$

essendo $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$ le costanti tali che $\nabla f(\bar{x}) = \sum \lambda_i \nabla g_i(\bar{x})$.

Dimostrazione. Possiamo dimostrare l'uguaglianza (11.17) assumendo $v = e_i$ e $w = e_j$ gli elementi della base canonica di $\mathbb{R}^k$ In particolare si ha

$$\frac{\partial f \circ \sigma}{\partial u_i} = \langle \nabla f(\sigma(u)),\ \frac{\partial \sigma}{\partial u_i}(u)\rangle$$

da cui derivando rispetto a e_j si ottiene

$$\begin{aligned} &\langle (f \circ \sigma)''(u)(e_i), e_j\rangle = \frac{\partial^2 f \circ \sigma}{\partial u_j u_i}(u) \\ &= \langle f''(\sigma(u)\frac{\partial \sigma}{\partial u_j}(u),\ \frac{\partial \sigma}{\partial u_i}\rangle\ +\ \langle \nabla f(\sigma(u)),\ \frac{\partial \sigma}{\partial u_i u_j}(u)\rangle \end{aligned} \tag{11.18}$$

Ora per $u = 0$ si ha che $\nabla f(\sigma(0)) = \sum \lambda_i \nabla g_i(\sigma(0))$ e dunque sostituendo otteniamo che l'ultimo addendo a destra in (11.18) è uguale a

$$\sum \lambda_i \langle \nabla g(\bar{x}),\ \frac{\partial \sigma}{\partial u_i u_j}(0)\rangle \tag{11.19}$$

Applicando la formula 11.18 a ciascuna equazione risulta

$$0 = \frac{\partial^2 g_i \circ \sigma}{\partial u_j u_i} = \langle g_i''(\sigma(u)\frac{\partial \sigma}{\partial u_j}(u),\ \frac{\partial \sigma}{\partial u_i}(u)\rangle\ +\ \langle \nabla g_i(\sigma(u)),\ \frac{\partial \sigma}{\partial u_i u_j}(u)\rangle$$

(la prima uguaglianza vale perché $g \circ \sigma = 0$) da cui ricaviamo l'identità

$$\langle \nabla g_i(\sigma(u)),\ \frac{\partial \sigma}{\partial u_i u_j}(u)\rangle = -\langle g_i''(\sigma(u)\frac{\partial \sigma}{\partial u_j},\ \frac{\partial \sigma}{\partial u_i}\rangle$$

Sostituendo questa identità per $u = 0$ in 11.19 e poi in 11.18 si ottiene la tesi. □

Esercizio 11.43 Si mostri che a livello matriciale vale la seguente relazione

$$(f \circ \sigma)''(0) = \sigma'(0)^T\ \left(f''(\bar{x}) - \sum \lambda_i g''(\bar{x})\right)\ \sigma'(0).$$

Data una funzione f di classe C^2 definita in un intorno di X e un punto critico $\bar{x}$ per f su X definiamo l'Hessiano di f su X l'applicazione bilineare definita su $T_{\bar{x}}X$ definita da

$$H_X f(\bar{x})(v, w) = \langle (f''(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i g_i''(\bar{x}))v,\ w\rangle \qquad (*)$$

essendo $g = (g_1, \ldots, g_{n-k})$ un'equazione per X intorno a $\bar{x}$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$ le costanti tali che $\nabla f(\bar{x}) = \sum \lambda_i \nabla g_i(\bar{x})$.

Per il lemma precedente, data una parametrizzazione locale σ intorno a $\bar{x}$ (tale che $\sigma(0) = \bar{x}$) si ha che

$$\langle (f \circ \sigma)''(0)v,\ w\rangle = H_X f(\bar{x})(\sigma'(0)v, \sigma'(0)w)$$

per ogni $v, w \in \mathbb{R}^k$. Questa uguaglianza mostra che $H_X f(\bar{x})$ è ben definito, ovvero non dipende dalla scelta dell'equazione locale intorno a $\bar{x}$ (infatti il membro a sinistra è definito indipendentemente da g). Inoltre se f e f' sono funzioni definite in un intorno di X che coincidono su X allora la stessa disuguaglianza mostra che $H_X f(\bar{x}) = H_X f'(\bar{x})$, ovvero $H_X f(\bar{x})$ dipende solo dai valori che assume f in un intorno di $\bar{x}$ su X.

Infine osserviamo che 0 è un punto di massimo o minimo locale per $f \circ \sigma$ se e solo se $\bar{x}$ è un punto di massimo o minimo locale per f su X. Da cui deduciamo il seguente criterio.

Proposizione 11.44 *Sia $\bar{x}$ un punto critico per f su X. Allora se $\bar{x}$ è un punto di massimo (minimo) locale allora $H_X f(\bar{x})$ è semi-definito negativo (positivo). Inoltre se $H_X f(\bar{x})$ è definito negativo (positivo) allora $\bar{x}$ è un punto di massimo (minimo) locale.*

Osservazione 11.45 Ci si può chiedere perché l'Hessiano di f su X non sia definito come restrizione dell'Hessiano di f (ovvero considerando la restrizione della forma bilineare $f''(\bar{x})$ su $T_{\bar{x}}X$). La ragione è che in tal modo l'uguaglianza (*) non vale. Infatti il seguente esempio mostra le seguenti patologie

1) esistono due funzione f e h definite su un intorno di X tali che coincidono su X ma le restrizoni su $T_{\bar{x}}X$ di $f''(\bar{x})$ e $h''(\bar{x})$ sono *diverse.*

2) esiste una funzione k tale che $k''(\bar{x})$ è definito positivo ma $\bar{x}$ è un punto di massimo forte.

Esempio 11.46 Si consideri $X = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $h(x, y, z) = 1$, $k(x, y, z) = x + x^2 + y^2 + z^2$ e $\bar{x} = (1, 0, 0)$. Osserviamo che $f''(\bar{x}) = 2I$, $h''(\bar{x}) = 0$ e $k''(\bar{x}) = 2I$ eppure $f|X = h|X$ e k assume un massimo forte in $\bar{x}$.

Osservazione 11.47 Osserviamo che l'hessiano di f su X è definito solo su punti critici. Per il Lemma se x è un punto critico vale la seguente formula

$$H_X f(x)(v, w) = \langle (f \circ \sigma)''(0)(\sigma'(0))^{-1}v, (\sigma'(0))^{-1}w\rangle \qquad (**)$$

dove σ è una parametrizzazione locale di X intorno a x tale che $\sigma(0) = x$ (si noti che $\sigma'(0)$ realizza un isomorfismo tra $\mathbb{R}^k$ e $T_x X$ per cui la formula ha senso). Osserviamo che il membro a destra è definito indipendentemente dal fatto che x sia un punto critico e dunque ci si potrebbe aspettare che si possa definire l'Hessiano in un punto generico x attraverso la formula (**). Del resto il seguente esempio mostra che la definizione data in tal modo dipende dalla parametrizzazione scelta (ovvero due diverse parametrizzazioni producono diversi hessiani) per cui non risulta ben posta.

Esempio 11.48 Sia $X = \{(x, y, z)|x^2+y^2+z^2 = 1\}$, $f(x, y, z) = x$ e consideriamo il punto $\bar{x} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. Consideriamo le due parametrizzazioni intorno a $\bar{x}$, σ_1, σ_2 date da

$$\sigma_1 : (u, v) \mapsto \left(u + 1/\sqrt{2}, v, \sqrt{1 - (u + 1/\sqrt{2})^2 - v^2}\right)$$

$$\sigma_2 : (u, v) \mapsto \left(\sqrt{1 - u^2 - (v + 1/\sqrt{2})^2}, u, v + 1/\sqrt{2}\right)$$

(gli addendi $1/\sqrt{2}$ fanno in modo che $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = \bar{x}$). Si verifica che $f \circ \sigma_1(u, v) = u$ mentre $f \circ \sigma_2(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ per cui $(f \circ \sigma_1)(0) = 0$ mentre $(f \circ \sigma_2)(0) \neq 0$

Riassumendo **l'Hessiano di f su X è definito solo su punti critici di f.**

Come abbiamo osservato nella precedente sezione il metodo dei moltplicatori di Lagrange consiste nel risolvere un sistema di $n + k$ equazioni in $n + k$ incognite e dunque ci si aspetta che genericamente le soluzioni formino un sottoinsieme discreto di X. Tale enunciato può essere formalizzato utilizzando la nozione di Hessiano.

Diciamo che un punto critico $\bar{x}$ per f su X è *non degenere* se $H_X f(\bar{x})$ è non degenere ovvero per ogni $v \in T_{\bar{x}}X \setminus \{0\}$ esiste $w \in T_{\bar{x}}$ tale che $H_X f(\bar{x})(v, w) \neq 0$

Proposizione 11.49 *Sia f una funzione tale che tutti i suoi punti critici su X sono non degeneri. Allora l'insieme dei punti critici su X è discreto.*

Dimostrazione Sia $\bar{x}$ un punto critico. Dobbiamo mostrare che esiste un intorno Ω di $\bar{x}$ in$\mathbb{R}^{n+m}$ tale che $\bar{x}$ è l'unico punto critico di f su X contenuto in Ω.

Sia σ una parametrizzazione locale di X definita su un aperto U di $\mathbb{R}^m$ tale che $\sigma(U) = X \cap \Omega'$ per qualche aperto Ω' di $\mathbb{R}^{n+m}$. Consideriamo la funzione

$$\psi : \mathbb{U} \ni x \to \mathbb{R}^m$$

definita da

$$\psi(x) = \left(\langle \nabla f(\sigma(x)), \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(x) \rangle, \ \langle \nabla f(\sigma(x)), \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(x) \rangle, \dots, \ \langle \nabla f(\sigma(x)), \frac{\partial \sigma}{\partial x_m}(x) \rangle \right)$$

Si vede facilmente che

$$\psi'(x) = f \circ \sigma''(x)$$

Per il Lemma 11.42 si ha che

$$\langle f \circ \sigma(\bar{x})v, w\rangle = H_X f(\bar{x})(\sigma'(\bar{x})v,\ \sigma'(\bar{x})w)$$

e poiché $H_X f(\bar{x})$ è non degenere segue che $\ker \psi'(\bar{x}) = \{0\}$. In particolare a meno di restringere U possiamo supporre che ψ sia biunivoca su U e dunque $\sigma^{-1}(\bar{x})$ è l'unico punto su cui ψ vale zero. Segue che $\bar{x}$ è l'unico punto critico per f su X in $\sigma(U)$. $\square$

Capitolo 12

Equazioni differenziali

12.1 Introduzione

Sia $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto f(t,x)$. Cerchiamo una funzione $u \in C^1([0,T])$ [1] tale che:

$$u'(t) = f(t,u(t)), \quad t \in [0,T]. \tag{12.1}$$

La (12.1) è detta un'*equazione differenziale*; l'incognita di (12.1) è una funzione reale in $[0,T]$.

Prima di sviluppare la teoria generale vediamo alcuni esempi.

Esempio 12.1 Consideriamo l'equazione:

$$u'(t) = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{12.2}$$

dove f è una funzione data in $C([0,T])$. È chiaro che la (12.2) ha infinite soluzioni date dalla formula:

$$u(t) = c + \int_0^t f(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Quindi un'equazione differenziale ha in generale infinite soluzioni. Per determinarne una si deve imporre una condizione ulteriore su u come ad esempio

[1] $C^1([0,T])$ è il sottoinsieme dello spazio metrico $C([0,T])$ di tutte le funzioni reali derivabili in $[0,T]$ continue con la loro derivata.

$u(0) = u_0$ (*condizione iniziale*). In questo caso si considera il problema di *Cauchy*:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t), \quad t \in [0, T], \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

la cui unica soluzione è data da:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Nel seguito considereremo equazioni differenziali del tipo (12.1) con una condizione iniziale, cioè il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, T], \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{12.3}$$

dove u_0 è dato.

12.1.1 Equazioni a variabili separabili

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t) g(u(t)), \quad t \geq 0, \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{12.4}$$

dove $u_0 \in \mathbb{R}$ e f, g soddisfano le condizioni seguenti:

- $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è continua.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e positiva su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$ contenente u_0.

Poniamo:

$$F(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{g(s)} \quad , \quad \forall\, u \in I.$$

È chiaro che F è positiva e strettamente crescente; sia $J = F(I)$. Inoltre la (12.4) è equivalente a:

$$\frac{d}{dt} F(u(t) = f(t), \quad t \geq 0.$$

Da cui, integrando fra 0 e t si ottiene:

$$F(u(t)) = \int_0^t f(s)ds, \quad t \geq 0.$$

Per ricavare $u(t)$ occorre che $\int_0^t f(s)ds \in J$. Ciò non è detto in generale come vedremo in vari esempi. Tuttavia, dato che $F(u_0) = 0$ si ha che $0 \in J$ e quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$\int_0^t f(s)ds \in J, \quad \forall\, t \in [0, \delta].$$

Allora $\int_0^t f(s)ds \in J$ per ogni $t \in [0, \delta]$ e posto:

$$u(t) = F^{-1}\left(\int_0^t f(s)ds\right), \quad t \in [0, \delta],$$

si ha che u è soluzione di (12.4) in $[0, \delta]$.

Esempio 12.2 Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = u^2(t), \quad t \geq 0, \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{12.5}$$

Se $u_0 = 0$ una soluzione di (12.5) è data da $u(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$. Supponiamo ora $u_0 > 0$. Questo problema è della forma (12.4) con

$$f(t) = 1, \quad g(u) = u^2$$

e $I = [0, +\infty)$. Inoltre:

$$F(u) = \int_{u_0}^u \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u}, \quad u > 0$$

e

$$J = F(I) = \left(-\infty, \frac{1}{u_0}\right).$$

Quindi per ricavare $u(t)$ dall'equazione

$$F(u(t)) = \int_0^t f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

occorre che:

$$\int_0^t f(s)ds = t < \frac{1}{u_0}.$$

Si ottiene quindi la soluzione:

$$u(t) = \frac{u_0}{1 - tu_0}, \quad t \in \left[0, \frac{1}{u_0}\right). \tag{12.6}$$

Si dice che la soluzione è *locale* e che *scoppia* per $t = \frac{1}{u_0}$.

Esempio 12.3 Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = -u^2(t), \quad t \in I, \\ \\ u(0) = u_0 = 0 \end{cases} \tag{12.7}$$

con $u_0 > 0$. Questo problema è della forma (12.4) con

$$f(t) = -1, \quad g(u) = u^2$$

e si ha, come nell'esempio precedente, $I = [0, +\infty)$,

$$F(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u}$$

e

$$J = \left(-\infty, \frac{1}{u_0}\right).$$

Essendo

$$\int_0^t f(s)ds = -t \in J$$

per ogni $t > 0$ si ha che la (12.7) ha soluzione:

$$u(t) = \frac{u_0}{1 + tu_0}, \quad t \geq 0 \tag{12.8}$$

Si dice che la soluzione è *globale*.

Esempio 12.4 Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t)) = \sqrt{u(t)}, \quad t \in I, \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{12.9}$$

Se $u_0 = 0$ si ha che $u(t) = 0$ è soluzione di (12.9). Sia allora $u_0 > 0$. Questo problema è della forma (12.4) con

$$f(t) = 1, \quad g(u) = \sqrt{u}$$

e si ha $I = (0, +\infty)$,

$$F(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2(\sqrt{u} - \sqrt{u_0})$$

e $J = (-2\sqrt{u_0}, +\infty)$. Quindi si trova:

$$u(t) = \frac{1}{4}\,(t + 2\sqrt{u_0})^2, \quad t \geq 0. \tag{12.10}$$

Da notare che se pone $u_0 = 0$ in (12.10) si ottiene:

$$u(t) = \frac{1}{4}\,t^2$$

cheè un'altra soluzione di (12.10) come si vede per verifica diretta. In questo caso non vi è unicità del problema di Cauchy.

12.1.2 Equazioni di ordine superiore

Consideriamo l'equazione:

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)), \quad t \in [0, T], \tag{12.11}$$

dove f è un'applicazione: $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, continua. L'incognita è quindi una funzione reale u in $[0, T]$ di classe C^n. Si dice che la (12.11) è un'*equazione differenziale di ordine n.*

Poniamo:

$$\begin{aligned}
&v_1(t) = u(t), \quad t \in [0, T], \\
&v_2(t) = u'(t), \quad t \in [0, T], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&v_n(t) = u^{(n-1)}(t), \quad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Allora la (12.11) è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} v_1'(t) = v_2(t), \quad t \in [0,T], \\ v_2'(t) = v_3(t), \quad t \in [0,T], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n'(t) = f(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-1}(t)), \quad t \in [0,T]. \end{cases} \tag{12.12}$$

Se per ogni $t \in [0,T]$ indichiamo con $v(t)$ il vettore in $\mathbb{R}^n$:

$$v(t) = (v_1(t), ..., v_n(t)),$$

possiamo scrivere la (12.12) come un'equazione differenziale in $\mathbb{R}^n$,

$$v'(t) = F(t, v(t)), \quad t \in [0,T], \tag{12.13}$$

dove $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è definita da:

$$F(t, x_1, ..., x_n) = (x_2, ..., x_{n-1}, f(t, x_1, ..., x_{n-1})).$$

In questo caso il problema di Cauchy diventa:

$$\begin{cases} v'(t)' = F(t, v(t)), \quad t \in [0,T], \\ v(0) = v_0, \end{cases} \tag{12.14}$$

dove la condizione iniziale v_0 è un vettore di $\mathbb{R}^n$.

12.2 Problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n$

12.2.1 Introduzione

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, I un intervallo di $\mathbb{R}$ e f:

$$f \colon I \times \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad (t,x) \mapsto f(t,x),$$

continua.

Consideriamo il *problema di* Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in J, \\ \\ u(s) = x, \end{cases} \tag{12.15}$$

dove $s \in I$, $J \subset I$ è un intervallo di origine s contenuto in J e $x \in \Omega$.

Osservazione 12.5 Si potrebbero anche studiare soluzioni di (12.15) in un intervallo del tipo $[s-k, s]$ con $k > 0$ (soluzioni nel passato) ma ci limiteremo a studiare soluzioni in intervalli del tipo $[s, s+k]$ (soluzioni nel futuro).

Definizione 12.6 *Si dice che una funzione $u \in C^1(I;\Omega)$ è* soluzione *del problema* (12.15) *in I se risulta:*

$$u'(t) = f(t, u(t), \quad \forall\, t \in I, \quad u(s) = x. \tag{12.16}$$

Proviamo ora che il problema (12.15) è equivalente a un'equazione integrale.

Proposizione 12.7 *(i). Se $u \in C^1(I;\Omega)$ verifica* (12.16) *risulta:*

$$u(t) = x + \int_s^t f(r, u(r))dt, \quad \forall\, t \in I. \tag{12.17}$$

(ii). Se $u \in C(I;\Omega)$ è soluzione di (12.17) *allora verifica* (12.16) .

Dimostrazione. (i) Da (12.16) segue (12.17) integrando rispetto a t. (ii) Sia $u \in C(I;\Omega)$ soluzione di (12.17). Allora è chiaro che $u \in C^1(I;\Omega)$ e derivando (12.17) riispetto a t segue (12.16). □

Se f non dipende da t si dice che il problema (12.15) è *autonomo.*

Per risolvere il problema di Cauchy useremo il principio delle contrazioni nello spazio metrico completo $C(I;\mathbb{R}^n)$ dove I è un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Ricordiamo che $C(I;\mathbb{R}^n)$ è definito come l'insieme delle funzioni continue $f : I \to \mathbb{R}^n$ con la metrica:

$$d(f, g) = \max_{t \in I} |f(t) - g(t)|, \quad f, g \in C(I;\mathbb{R}^n),$$

dove $|f(t)-g(t)| = (\sum_{k=1}^n |f_k(t)-g_k(t)|^2)^{1/2}$ rappresenta il modulo del vettore $f(t) - g(t)$.

Osserviamo che $C(I;\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale con le usuali nozioni di somma di due funzioni e di prodotto di una funzione per un numero.

Conviene anche introdurre la *norma* di f ponendo:

$$\|f\| = \max_{t\in I} |f(t)| = d(f, 0).$$

La norma ha evidentemente le proprietà seguenti:

(i) Si ha $\|f\| \geq 0$ per ogni $\in C(I; \mathbb{R}^n)$ e risulta $\|f\| = 0$ se e solo se $f = 0$ [(2)].

(i) $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ f \in C(I; \mathbb{R}^n)$.

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ per ogni $f, g \in C(I; \mathbb{R}^n)$.

Si dice che $C(I; \mathbb{R}^n)$ è uno *spazio di Banach.* [(3)]

12.3 Caso in cui f è Lipschitziana

In questa sezione supponiamo che $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia Lipschtziana, cioè che esista $L > 0$ tale che:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \quad t \geq 0 \\ \\ u(0) = x \end{cases} \tag{12.18}$$

dove x è dato in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 12.8 *Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste un'unica soluzione di* (12.18) *in* $[0, +\infty)$.

[(2)] cioè $f(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

[(3)] Uno spazio *normato* X è uno spazio vettoriale munito di una norma, cioè di un'applicazione $X \to [0, +\infty)$ che verifica (i)–(iii). Uno spazio normato è uno spazio metrico con la distanza $d(x, y) = \|x - y\|$. Se (X, d) è completo si dice che X è uno *spazio di Banach.*

Dimostrazione. Fissiamo $T > 0$ e consideriamo il problema (12.18) in $[0, T]$. Sia Z lo spazio di Banach $Z = C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ la cui norma indichiamo con $\| \cdot \|$ e sia γ l'applicazione:

$$\gamma \colon Z \to Z, \quad u \mapsto \gamma(u),$$

dove

$$\gamma(u)(t) = x + \int_0^t f(u(s)ds, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Allora u è soluzione del problema (12.18) se e solo se risulta:

$$u = \gamma(u). \tag{12.19}$$

Proviamo ora che se T è scelto opportunamente γ è una contrazione cosiicché l'equazione (12.22) ha un'unica soluzione.

Se $u, v \in Z$ si ha infatti:

$$\gamma(u)(t) - \gamma(v)(t) = \int_0^t [f(u(s)) - f(v(s))]ds, \quad \forall\, t \in [0, T],$$

da cui, per la lipchitzianità di f,

$$|\gamma(u)(t) - \gamma(v)(t)| \leq Lt \int_0^t |u(s) - v(s)|ds \leq Lt\|u - v\|, \quad \forall\, t \in [0, T],$$

da cui:

$$\|\gamma(u) - \gamma(v)\| \leq LT \int_0^t |u(s)) - v(s)|ds \leq LT\|u - v\|.$$

Posto $T = T_1 := \frac{1}{2L}$ si ha che γ è una contrazione cosicché esiste un'unica soluzione u del problema (12.15) in $[0, T_1]$.

Consideriamo ora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v'(t) = f(v(t)), \\ \\ v(T_1) = u(T_1). \end{cases} \tag{12.20}$$

Ragionando come sopra di vede che il problema (12.20) ha un'unica soluzione in $[T_1, 2T_1]$. Definiamo una funzione $u : [0, 2T_1] \to \mathbb{R}^n$ ponendo:

$$u(t) = \begin{cases} u(t), & \text{se } t \in [0, T_1], \\ v(t), & \text{se } t \in [T_1, 2T_1]. \end{cases}$$

Allora è chiaro che u è soluzione del problema (12.15) in $[0, 2T_1]$. Procedendo analogamente si costruisce una soluzione u del problema in $[0, +\infty)$. É chiaro che tale soluzione è unica. Infatti se v è un'altra soluzione in $[0, +\infty)$ deve essere $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in [0, T_1]$ per l'unicità del punto fisso data dal principio delle contrazioni. Per lo stesso motivo deve essere $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in [T_1, T_2]$ e così via. $\Box$

Osservazione 12.9 Dal principio delle contrazioni segue anche che la soluzione di (12.15) può essere costruita per approssimazioni successive.

Definiamo infatti per ricorrenza:

$$u_0(t) = x, \quad u_{n+1}(t) = x + \int_0^t f(u_n(s))ds, \quad n \in \mathbb{N},\ t \geq 0.$$

Detta u la soluzione di (12.15), si ha allora:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t), \quad \text{uniformemente in } [0, T].$$

12.3.1 La legge di semigruppo

D'ora in poi indichiamo con $u(\cdot, x)$ la soluzione di di (12.15).

Proposizione 12.10 *Sia $x \in \mathbb{R}^n$, $t, s \geq 0$. Si ha allora:*

$$u(t + s, x) = u(t, u(s, x)). \tag{12.21}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$v(t) = u(t, u(s, x)), \quad z(t) = u(t + s, x), \quad t \geq 0.$$

Allora v e z sono soluzione dei problemi:

$$\begin{cases} v' = f(v), \\ \\ v(0) = u(s, x) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} z' = f(z), \\ \\ z(0) = u(s, x) \end{cases}$$

rispettivamente. Quindi $z(t) = v(t)$ per ogni $t \geq 0$ per l'unicità. $\Box$

12.3.2 Caso non autonomo

Sia $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ continua e tale che esiste $L\ge 0$ tale che:

$$|f(t,x)-f(t,y)|\le L|x-y|,\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}^n.$$

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,u(t)), & t\in[s,T]\\ \\ u(s)=x\end{cases}\tag{12.22}$$

dove $s\in[0,T)$ e $x\in\mathbb{R}^n$ sono dati. La dimostrazione di questo risultato è analoga a quella del Teorema 12.8 ed è lasciata la lettore.

Teorema 12.11 *Esiste un'unica soluzione di* (12.22) *in* $[s,T]$.

Indichiamo con $u(\cdot,s,x)$ la soluzione di (12.22). Procedendo come per la Proposizione 12.10 si ha inoltre:

Proposizione 12.12 *Sia* $x\in\mathbb{R}^n$, $0\le r\le s\le t\le T$. *Si ha allora:*

$$u(t,s,u(s,r,x))=u(t,r,x).\tag{12.23}$$

12.4 f localmente Lipschitziana

In questa sezione supponiamo che $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ sia localmente Lipschtziana, cioè che per ogni $x_0\in\mathbb{R}^n$ esistono $r_{x_0}>0$ e $L_{x_0}\ge 0$ tali che:

$$|f(x)-f(y)|\le L_{x_0}|x-y|,\quad \forall\, x,y\in B(x_0,r_{x_0}).\tag{12.24}$$

Esempio 12.13 Sia $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ continua con la sua derivata. Allora f è continua su ogni palla $B(x,r)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ e quindi è localmente Lipschtziana. Infatti, per il teorema del valor medio si ha:

$$|f(x)-f(y)|\le \max_{x\in B(x,r)}\|f'(x)\|\,|x-y|,\quad \forall\, x,y\in B(x,r).$$

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'=f(u), & t\ge 0,\\ \\ u(0)=x_0.\end{cases}\tag{12.25}$$

Vogliamo provare che esiste un'unica soluzione u di (12.25) in un opportuno intervallo $[0,\tau)$. Per questo costruiremo una funzione Lipschitziana F su $\mathbb{R}^n$ che coincide con f su $B(x_0, r_{x_0})$ e considereremo la soluzione v del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v' = f(v), \quad t \ge 0, \\ \\ v(0) = x_0, \end{cases} \tag{12.26}$$

che è definita in $[0,+\infty)$ in virtù del Teorema 12.8. Mostreremo poi che esiste $T > 0$ tale che $v(t)$ resta in $B(x_0, r_{x_0})$ per ogni $t \in [0,T]$; v sarà la soluzione locale cercata.

Per questo occorre un lemma.

Lemma 12.14 *Posto:*

$$\phi(x) = \begin{cases} x \quad \text{se } |x| \le 1, \\ \\ \dfrac{x}{|x|} \quad \text{se } |x| \ge 1, \end{cases} \tag{12.27}$$

risulta:

$$|\phi(x)| \le 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \tag{12.28}$$

e

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{12.29}$$

Dimostrazione. Distinguiamo vari casi. (a) Se $|x| \le 1$ e $|y| \le 1$ la (12.29) è ovvia.

(b) Se $|x| \ge 1$ e $|y| \ge 1$ si ha, tenuto conto del fatto che $\langle x, y\rangle \le |x|\ |y|$:

$$\left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right|^2 = 2 - 2\,\frac{\langle x, y\rangle}{|x|\ |y|} = \frac{2}{|x|\ |y|}(|x|\ |y| - \langle x, y\rangle)$$

$$\le 2|x|\ |y| - 2\langle x, y\rangle \le |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle = |x - y|^2.$$

(c) Se $|x| < 1$ e $|y| \geq 1$ si ha:

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{y}{|y|}\right|^2 &= |x|^2 + 1 - 2\,\frac{\langle x, y\rangle}{|y|} \\ &= |x|^2 + 1 - 2|x| + \tfrac{2}{|y|}\,(|x|\;|y| - \langle x, y\rangle) \\ &\leq |x|^2 + 1 - 2|x| + 2|x|\;|y| - 2\langle x, y\rangle \\ &= (1 - |x|)^2 - (|y| - |x|)^2 + |x - y|^2 \leq |x|^2 \leq |x - y|^2,\end{aligned}$$

dato che, essendo $|x| < 1 \leq |y|$, risulta:

$$(1 - |x|)^2 - (|y| - |x|)^2 \leq 0.$$

□

Esercizio 12.15 Provare che ϕ non è derivabile per $|x| = 1$.

Corollario 12.16 *Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Posto:*

$$F_{x_0}(x) = f\left(x_0 + r_{x_0}\phi\left(\frac{x - x_0}{r_{x_0}}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{12.30}$$

F_{x_0} coincide con f su $B(x_0, r_{x_0})$ e si ha:

$$|F_{x_0}(x) - F_{x_0}(y)| \leq L_{x_0}|x - y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{12.31}$$

Dimostrazione. Basta osservare che:

$$x_0 + r_{x_0}\phi\left(\frac{x - x_0}{r_{x_0}}\right) \in B(x_0, r_{x_0}), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

e usare (12.29). □

Teorema 12.17 (Esistenza locale) *Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschtziana tale che valga* (12.24) *e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Esiste $\theta > 0$ e una soluzione $u\colon [0, \theta] \to \mathbb{R}^n$ di* (12.25). *u è l'unica soluzione di* (12.25) *in $[0, \theta]$ tale che $u(t) \in B(x_0, r_{x_0})$ per ogni $t \in [0, \theta]$.*

Dimostrazione. Sia F_{x_0} definita da (12.30). Dato che F_{x_0} è lipschitziana, dal Teorema 12.8 segue che esiste un'unica soluzione $v : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ del problema:

$$\begin{cases} v'(t) = F_{x_0}(v(t)), \quad t \geq 0, \\ \\ v(0) = x_0, \end{cases} \tag{12.32}$$

Sia θ il primo tempo in cui $v(t)$ raggiunge la frontiera di $B(x_0, r_{x_0})$,

$$\theta = \begin{cases} +\infty \quad \text{se } \ v(t) \in B(x_0, r_{x_0}), \ \forall\, t \geq 0, \\ \\ \min\{t > 0 : \ |v(t) - x_0| = r_{x_0}\}, \quad \text{altrimenti.} \end{cases}$$

È chiaro che o $\theta = +\infty$ oppure θ è finito e maggiore di 0. Quindi, posto:

$$u(t) = v(t), \quad \forall\, t \in [0, \theta],$$

u è soluzione di (12.25) in $[0, \theta]$. □

Teorema 12.18 (Unicità globale) *Sia* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *localmente Lipschtziana tale che valga* (12.24). *Sia* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *e* $T > 0$. *Se* $u : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *e* $v : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ *sono soluzioni di* (12.25) *in* $[0, T]$ *si ha* $u(t) = v(t)$ *per ogni* $t \in [0, T]$.

Dimostrazione. Sia:

$$T_1 = \sup\{t \geq 0 : \ u(t) = v(t)\}.$$

Si ha $T_1 > 0$ in virtù del Teorema 12.17. Consideriamo il problema:

$$\begin{cases} z' = f(z), \\ \\ z(T_1) = u(T_1) = v(T_1). \end{cases} \tag{12.33}$$

Deve essere $T_1 = T$, altrimenti, applicando di nuovo il Teorema 12.17 esisterebbe $\epsilon > 0$ tale che $u = v$ su $[0, T_1 + \epsilon]$ il che contraddirebbe la definizione di T_1. □

Diamo ora il concetto di *soluzione massimale* di (12.25). Indichiamo con $\mathscr{F}$ la famiglia degli intervalli chiusi I tali che:

(i) L'origine di I è 0.

(ii) Il problema (12.25) ha soluzione u_I in I.

Poniamo:

$$J = \bigcup_{I \in \mathscr{F}} I$$

e

$$u(t) = u_I(t), \quad \forall\, t \in I.$$

Tale definizione ha senso in virtù del Teorema 12.18. Si dice che u è la *soluzione massimale* di (12.25). Se risulta:

$$J = [0, +\infty),$$

si dice che la soluzione è *globale*.

Osservazione 12.19 L'intervallo J è aperto a destra, cioè non può essere $J = [0, \tau]$ per qualche $\tau > 0$. Infatti una soluzione in $[0, \tau]$ può essere prolungata in un intervallo più grande in virtù del Teorema 12.18.

Un problema importante è di dimostrare l'esistenza di una soluzione globale. Sia $u : [0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ la soluzione massimale di (12.25) (con $\tau > 0$ finito o infinito).

Teorema 12.20 *Supponiamo che esista $M > 0$ tale che:*

$$|u(t)| \le M, \quad \forall\, t \in [0, \tau). \tag{12.34}$$

Allora $\tau = +\infty$.

La (12.34) è detta una *maggiorazione a priori.*
Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la soluzione massimale u non sia globale cioè che risulti $\tau < +\infty$. Sia N il massimo di f in $B(0, M)$. Se $0 < s < t < \tau$ si ha:

$$|u(t) - u(s)| \le \int_s^t |f(u(r))| dr \le N|t - s|.$$

Ma ciò implica che esiste il limite:

$$\lim_{t \to \tau} u(t).$$

Quindi, passando al limite per $t \to \tau$ nell'eguaglianza:

$$u(t) = x + \int_0^t f(u(r))dr,$$

si ottiene:

$$u(\tau) = x + \int_0^\tau f(u(r))dr.$$

Ne segue che u è soluzione di (12.25) in $[0, \tau]$, ma ciò è assurdo per l'Osservazione 12.19. $\square$

Esempio 12.21 Sia $n = 1$. Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = -(1 + \sin u(t))u(t), \quad t \geq 0, \\ \\ u(0) = x. \end{cases}$$

Dato che la funzione:

$$f(u) = -(1 + \sin u)u, \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

è di classe C^1 è localmente lipschitziana (vedi Esempio 12.13). Quindi esiste un'unica soluzione locale $u(t)$ in un intervallo $[0, \tau)$.

Per trovare una maggiorazione a priori moltiplichiamo per $u(t)$ ambo i membri dell'uguaglianza:

$$u'(t) = -(1 + \sin u(t))u(t), \quad t \in [0, \tau).$$

Si ottiene:

$$\frac{1}{2}\, u^2(t) = -(1 + \sin u(t))u^2(t) \leq 0, \quad t \in [0, \tau).$$

Ne segue:

$$|u(t)| \leq |x|, \quad t \in [0, \tau).$$

Quindi $\tau = +\infty$ e la soluzione è globale.

Esercizio 12.22 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana e tale che:

$$\langle f(x), x \rangle \leq 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Provare che il problema di Cauchy (12.25) ha soluzione globale.

Un utile strumento per trovare maggiorazioni a priori è il lemma di Gronwall seguente.

Lemma 12.23 *Sia $a > 0, b > 0$ e $\phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ e tale che:*

$$\phi(t) \le a + b \int_0^t \phi(s)ds, \quad \forall\, t \ge 0. \tag{12.35}$$

Allora risulta:

$$\phi(t) \le ae^{tb}, \quad \forall\, t \ge 0. \tag{12.36}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\psi(t) = \int_0^t \phi(s)ds, \quad t \ge 0.$$

Allora $\psi(0) = 0$, ψ è derivabile e si ha:

$$\psi'(t) \le a + b\psi(t), \quad t \ge 0.$$

È chiaro che $a + b\psi(t) \ge a > 0$ cosicché possiamo scrivere:

$$\frac{\psi'(t)}{a + b\psi(t)} \le 1,$$

da cui:

$$\frac{d}{dt}\, \log(a + b\psi(t)) \le b.$$

Integrando fra 0 e t si ha:

$$\log\left(\frac{a + b\psi(t)}{a}\right) \le bt.$$

da cui la tesi con facili calcoli. $\square$

Esempio 12.24 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana e supponiamo che esista $c > 0$ tale che:

$$\langle f(x), x\rangle \le c(1 + |x|^2), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Sia $u : [0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ la soluzione massimale del problema di Cauchy (12.25). Vogliamo provare che u è soluzione globale. Moltiplicando scalarmente l'equazione $u'(t) = Au(t)$ per $u(t)$ e tendendo conto del fatto che:

$$\frac{d}{dt}\, |u(t)|^2 = 2\langle u'(t), u(t)\rangle,$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = \langle f(u(t)), u(t)\rangle \le c(1+|u(t)|^2), \quad \forall\, t \in [0,\tau).$$

Integrando in t si ha:

$$|u(t)|^2 \le |x|^2 + 2c\int_0^t (1+|u(s)|^2)ds, \quad \forall\, t \in [0,\tau).$$

Se $\tau = +\infty$ abbiamo concluso. Supponiamo per assurdo $\tau < \infty$ e scegliamo $T > \tau$. Si ha allora:

$$|u(t)|^2 \le (|x|^2 + 2cT) + 2c\int_0^t |u(s)|^2 ds, \quad \forall\, t \in [0,\tau).$$

Dal lemma di Gronwall (con $\phi(t) = |u(t)|^2$) segue che:

$$|u(t)|^2 \le (|x|^2 + 2cT)e^{2cT}, \quad \forall\, t \in [0,\tau).$$

Quindi $\tau = +\infty$ per il Teorema 12.20 contro l'ipotesi fatta. In conclusione u è soluzione globale.

Esercizio 12.25 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana e limitata. Provare che il problema di Cauchy (12.25) ha soluzione globale.

12.5 Equazioni differenziali lineari

12.5.1 Problema di Cauchy

Sia $A \in L(\mathbb{R}^n)$ fissata. Dato che A è un'applicazione Lipschitziana di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \quad t \ge 0 \\ \\ u(0) = x \end{cases} \tag{12.37}$$

ha un'unica soluzione $u(t,x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Dall'Osservazione 12.9 segue che:

$$u(t,x) = \lim_{n\to\infty} u_n(t,x), \quad \text{uniformemente sui limitati di } [0,+\infty),$$

dove:

$$u_0(t,x) = x, \quad u_n(t,x) = x + \int_0^t Au_{n-1}(s,x)ds, \ n \in \mathbb{N}.$$

Si vede facilmente che risulta:

$$u_n(t,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!}\, x, \quad t \geq 0.$$

Si ha quindi:

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\, x, \quad t \geq 0. \tag{12.38}$$

Consideriamo la serie nello spazio di Banach $L(H)$ (munito della norma $\|T\| = \sup\{|Tx| : \ |x| \leq 1\}$):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Questa serie è normalmente convergente per ogni $t \in \mathbb{R}$ [(4)] dato che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = e^{t\|A\|} < +\infty.$$

Indicheremo con e^{tA} la somma della serie e scriveremo (12.37) al modo seguente:

$$u(t,x) = e^{tA}\, x, \quad t \geq 0. \tag{12.39}$$

Se $t = 0$ scriveremo $e^{0A} = I$.

Esercizio 12.26 (i) Provare che per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ risulta:

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}. \tag{12.40}$$

(ii) Provare che $\det e^{tA} > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

[(4)] Sia E uno spazio di Banach (con norma $\|\cdot\|$) e sia $(x_n) \subset E$. Si dice che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_n$ è convergente se esiste il limite delle somme parziali: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_n$, che è normalmente convergente se $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$. Si vede facilmente che una serie normalmente convergente è convergente.

12.5.2 Sottospazio vettoriale delle soluzioni di $u'(t) = Au(t)$

Vogliamo qui studiare l'insieme delle soluzioni dell'equazione:

$$u'(t) = Au(t), \quad , \ t \geq 0. \tag{12.41}$$

Osserviamo intanto che se u è soluzione di (12.41) risulta (per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy (12.37)):

$$u(t) = e^{tA}u(0), \quad t \geq 0. \tag{12.42}$$

Indichiamo con Σ l'insieme delle soluzioni di (12.41), cioè:

$$\Sigma = \{u \in C([0, +\infty); \mathbb{R}^n) : \ u'(t) = Au(t), \quad , \ t \geq 0\}.$$

Proposizione 12.27 *Σ è uno spazio vettoriale di dimensione n rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero.*

Dimostrazione. È chiaro che se $u, v \in \Sigma$ e $a, b \in \mathbb{R}$ si ha $au + bv \in \Sigma$ e quindi Σ è uno spazio vettoriale.

Sia $(e^1, ..., e^n)$ la base canonica in $\mathbb{R}^n$ e sia:

$$u^i(t) = e^{tA}e^i, \quad i = 1, ..., n.$$

Allora $u^1, ..., u^n$ sono linearmente indipendenti come si vede facilmente. Quindi dim $\Sigma \geq n$. Supponiamo viceversa che $u^1, ..., u^N$ siano linearmente indipendenti con $N \geq n$. Allora i vettori $u^1(0), ..., u^N(0)$ sono linearmente indipendenti e quindi $N = n$ (infatti se risulta $\sum_{i=1}^N c_i u^i(0)$ si ha anche $\sum_{i=1}^N c_i u^i(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$). □

Dalla Proposizione 12.27 segue che date n soluzioni $u^1, ..., u^n$ linearmente indipendenti di (12.42), ogni altra soluzione è della forma:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n c_i u^i(t) \tag{12.43}$$

al variare di $c_1, ..., c_n$ in $\mathbb{R}$.

La (12.43) è detta l'*integrale generale* di (12.37).

Esempio 12.28 Consideriamo qui l'equazione lineare del secondo ordine:

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0, \tag{12.44}$$

dove a e b sono numeri reali dati.

Questa equazione si può ridurre alla (12.37) ponendo:

$$u_1 = z, \quad u_2 = z'.$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ \\ u_2'(t) = -au_2(t) - bu_1(t). \end{cases} \tag{12.45}$$

Posto $u = (u_1, u_2)$ questo sistema si riduce alla (12.37) con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

Per trovare l'integrale generale della (12.46) procediamo al modo seguente. Consideriamo l'equazione:

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \tag{12.46}$$

le cui radici indichiamo con α_1 e α_2 e distinguiamo vari casi.

Caso 1. α_1, α_2 reali distinte.

Allora le funzioni:

$$z^1(t) = e^{t\alpha_1}, \quad z^2(t) = e^{t\alpha_2}, \quad t \geq 0,$$

verificano (12.44), cosicché si hanno due soluzioni della (12.46) date da:

$$u^1(t) = \begin{pmatrix} e^{t\alpha_1} \\ \alpha_1 e^{t\alpha_1} \end{pmatrix}, \qquad u^2(t) = \begin{pmatrix} e^{t\alpha_2} \\ \alpha_2 e^{t\alpha_2} \end{pmatrix}.$$

È chiaro che $u^1(t)$ e $u^2(t)$ sono indipendenti, dato che i due vettori $u^1(0)$ e $u^2(0)$ sono indipendenti, essendo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0.$$

In questo caso tutte e sole le soluzioni della (12.44) sono della forma

$$z(t) = c_1 e^{t\alpha_1} + c_2 e^{t\alpha_2}, \quad t \geq 0,$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.

Caso 2. α è radice doppia di (12.46).

Allora le funzioni:

$$z^1(t) = e^{t\alpha}, \quad z^2(t) = te^{t\alpha}, \quad t \geq 0,$$

verificano (12.44), cosicché si hanno due soluzioni della (12.46) date da:

$$u^1(t) = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} \\ \alpha e^{t\alpha} \end{pmatrix}, \qquad u^2(t) = \begin{pmatrix} te^{t\alpha} \\ (1+\alpha t)e^{t\alpha} \end{pmatrix}.$$

$u^1(t)$ e $u^2(t)$ sono indipendenti, dato che i due vettori $u^1(0)$ e $u^2(0)$ sono indipendenti, essendo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

In questo caso tutte e sole le soluzioni della (12.44) sono della forma

$$z(t) = c_1 e^{t\alpha} + c_2 te^{t\alpha}, \quad t \geq 0,$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.

Caso 3. L'equazione (12.46) ha radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$.

Allora le funzioni:

$$z^1(t) = e^{t\alpha} \cos(\beta t), \quad z^2(t) = e^{t\alpha} \sin(\beta t), \quad t \geq 0,$$

verificano (12.44). Procedendo come prima si trova che in questo caso tutte e sole le soluzioni della (12.44) sono della forma

$$z(t) = c_1 e^{t\alpha} \cos(\beta t) + c_2 e^{t\alpha} \sin(\beta t), \quad t \geq 0,$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.

12.5.3 Problema di Cauchy con forza esterna

Sia $A \in L(\mathbb{R}^n)$, $T > 0$ e $f : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ continua. Dato che A è Lipschitziana, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ \\ u(0) = x \end{cases} \tag{12.47}$$

ha un'unica soluzione $u(t) = u(t, x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Vogliamo trovare una formula esplicita per la soluzione $u(t, x)$ usando il metodo di *variazione delle costanti*. Per questo cerchiamo una soluzione di (12.47) della forma:

$$u(t) = e^{tA}c(t), \quad t \geq 0.$$

Procedendo in modo euristico si ha:

$$u'(t) = Ae^{tA}c(t) + e^{tA}c'(t),$$

da cui, sostituendo in (12.47),

$$e^{tA}c'(t) = f(t).$$

Quindi:

$$c(t) = x + \int_0^t e^{-sA}f(s)ds.$$

In conclusione si trova la seguente formula risolutiva di (12.47):

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds. \tag{12.48}$$

12.6 Equazioni lineari non autonome

Sia $T > 0$ e $A : [0, T] \to L(\mathbb{R}^n)$ continua. Vogliamo studiare il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t), \quad t \in [s, T] \\ \\ u(s) = x, \end{cases} \tag{12.49}$$

dove $s \in [0,T)$ è dato. In virtù del Teorema 12.11 il problema (12.49) ha un'unica soluzione $u(\cdot, s, x)$. Si verifica facilmente che $u(t,s,x)$ dipende linearmente da x. Quindi esiste $G(t,s) \in L^(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$u(t,s,x) = G(t,s)x, \quad 0 \le s \le t \le T,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{12.50}$$

Da (12.23) segue allora che:

$$G(t,s) = G(t,r)G(r,s), \quad 0 \le s \le r \le t \le T. \tag{12.51}$$

(Osserviamo che, dato che il problema di Cauchy si può risolvere anche all'indietro nel tempo, $G(t,s)$ è definita per ogni $(s,t) \in [0,T]$ e che la (12.51) vale per ogni $s, r, t \in [0,T]$).

$G(t,s)$ è detta la *funzione di Green* del problema (12.49).

L'identità:

$$u(t) = x + \int_s^t A(s)u(s)ds$$

equivale a:

$$G(t,s)x = x + \int_s^t A(s)G(t,s)xds,$$

quindi, per l'arbitrarietà di x si ha l'identità fra matrici:

$$G(t,s) = I + \int_s^t A(s)G(t,s)ds.$$

Si ha allora:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\, G(t,s) = A(t)G(t,s), \quad 0 \le s \le r \le t \le T \\ \\ G(s,s) = x. \end{cases} \tag{12.52}$$

Esercizio 12.29 Provare che risulta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\, G(t,s) = -G(t,s)A(s), \quad 0 \le s \le r \le t \le T \\ \\ G(s,s) = x. \end{cases} \tag{12.53}$$

Suggerimento. Osservare che $G(t,s) = G(s,t)^{-1}$ e che, date due matrici invertibili T e S si ha $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}$.

12.6.1 Sottospazio vettoriale delle soluzioni di $u'(t) = A(t)u(t)$

Vogliamo qui studiare l'insieme delle soluzioni dell'equazione:

$$u'(t) = A(t)u(t), \quad , \ t \in [0,T], \tag{12.54}$$

che indichiamo con Σ:

$$\Sigma = \{u \in C^1([0,T]) : \ u'(t) = A(t)u(t), \ \forall \, t \in [0,T]\}.$$

La proposizione seguente si dimostra come la Proposizione 12.27.

Proposizione 12.30 *Σ è uno spazio vettoriale di dimensione n rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per un numero.*

Dalla Proposizione 12.30 segue che date n soluzioni $u^1, ..., u^n$ linearmente indipendenti di (12.54), ogni altra soluzione è della forma:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i u^i(t) \tag{12.55}$$

al variare di $c_1, ..., c_n$ in $\mathbb{R}$.

La (12.55) è detto l'*integrale generale* di (12.54).

Date n soluzioni $u^1, ..., u^n$ di (12.54) consideriamo la matrice:

$$W(u^1, ..., u^n)(t) = \begin{pmatrix} u_1^1(t) & u_1^2(t) & ... & u_1^n(t) \\ u_2^1(t) & u_2^2(t) & ... & u_2^n(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ u_n^1(t) & u_n^2(t) & ... & u_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

$W(u^1, ..., u^n)$ è la matrice che ha per colonne le componenti dei vettori $u^1, ..., u^n$. È detta la matrice *Wronskiana* di $u^1, ..., u^n$ e il suo determinante il *Wronskiano* di $u^1, ..., u^n$.

È chiaro che $W(u^1, ..., u^n)(t) \neq 0$ se e solo se i vettori $u^1(t), ..., u^n(t)$ sono linearmente indipendenti.

Lemma 12.31 *Siano $u^1, ..., u^n$ soluzioni di* (12.54) *e sia $W(t) := W(u^1, ..., u^n)(t)$. Risulta allora:*

$$W'(t) = A(t)W(t), \quad t \in [0,T]. \tag{12.56}$$

Dimostrazione. Si ha $\frac{d}{dt}\ u^i(t) = A(t)u^i(t)$ per ipotesi. Tale identità è equivalente al sistema:

$$\frac{d}{dt}\ u^i_j(t) = \sum_{k=1}^n a_{j,k}(t)u^i_k(t), \quad i = 1, ..., n,$$

avendo indicato con $a_{j,k}(t),\ \ j,k = 1,...,n$ gli elementi di matrice di $A(t)$. D'altra parte si ha:

$$W(t)_{i,j} = u^j_i(t), \quad i,j = 1,...,n,$$

e quindi, per ogni $i,j = 1,...,n$,

$$\frac{d}{dt}\ W(t)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}(t)u^j_k(t) = \sum_{k=1}^n a_{i,k}(t)W(t)_{k,j}(t) = (A(t)W(t))_{i,j}.$$

□

Proposizione 12.32 *Siano* $u^1, ..., u^n$ *soluzioni di* (12.54) *e sia* $D(t) := \det W(u^1,...,u^n)(t)$ *il corrispondente Wronskiano. Risulta allora:*

$$D'(t) = \mathrm{Tr}\ A(t)D(t), \quad t \in [0,T]. \tag{12.57}$$

Dimostrazione. Ricordando la formula per la derivata di un determinante si ha:

$$\begin{aligned} D'(t) \quad &= \quad \det \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\ u^1_1(t) & \frac{d}{dt}\ u^2_1(t) & ... & \frac{d}{dt}\ u^n_1(t) \\ u^1_2(t) & u^2_2(t) & ... & u^n_2(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ u^1_n(t) & u^2_n(t) & ... & u^n_n(t) \end{pmatrix} \\ & \quad + \cdots + \det \begin{pmatrix} u^1_1(t) & u^2_1(t) & ... & u^n_1(t) \\ u^1_2(t) & u^2_2(t) & ... & u^n_2(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{d}{dt}\ u^1_n(t) & \frac{d}{dt}\ u^2_n(t) & ... & \frac{d}{dt}\ u^n_n(t) \end{pmatrix} \\ & \quad =: J_1 + \cdots + J_n. \end{aligned}$$

Consideriamo il primo termine di questa somma. Si ha :

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \det \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\, u_1^1(t) & \frac{d}{dt}\, u_1^2(t) & ... & \frac{d}{dt}\, u_1^n(t) \\ u_2^1(t) & u_2^2(t) & ... & u_2^n(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ u_n^1(t) & u_n^2(t) & ... & u_n^n(t) \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j}(t) u_j^1(t) & \sum_{j=1}^n a_{1,j}(t) u_j^2(t) & ... & \sum_{j=1}^n a_{1,j}(t) u_j^n(t) \\ u_2^1(t) & u_2^2(t) & ... & u_2^n(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ u_n^1(t) & u_n^2(t) & ... & u_n^n(t) \end{pmatrix} \\
&= a_{1,1}(t) D(t),
\end{aligned}
$$

avendo tenuto conto del fatto che il determinante di una matrice con due righe uguali è nullo. Procedendo analogamente di trova che:

$$J_k = a_{k,k}(t) D(t), \quad k = 1, ..., n,$$

da cui la tesi. $\square$

Corollario 12.33 *Nelle ipotesi della Proposizione* 12.32 *risulta*

$$D(t) = \exp\left\{ \int_0^t \mathrm{Tr}\ A(s) ds \right\}\ D(0), \quad t \in [0, T]. \tag{12.58}$$

Dimostrazione. La (12.58) è un'equazione differenziale in $\mathbb{R}$. Quindi se $D(0) = 0$ risulta $D(t) = 0$, per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} D'(t) = \mathrm{Tr}\ A(t)\ D(t), & t \in [0, T] \\ \\ D(0) = 0. \end{cases} \tag{12.59}$$

Sia allora $D(0) \neq 0$. Per la continuità di D risulterà $D(t) \neq 0$ per $t \in [0, \delta]$ con $\delta > 0$. Allora:

$$\frac{D'(t)}{D(t)} = \mathrm{Tr}\ A(t), \quad t \in [0, \delta],$$

da cui

$$D(t) = \exp\left\{ \int_0^t \mathrm{Tr}\ A(s) ds \right\}\ D(0), \quad t \in [0, \delta].$$

Sia:

$$T_1 = \sup\{\delta \in (0, T] : \ D(t) \neq 0, \ \forall\, t \in [0, \delta]\}.$$

Dato che $D(t) \neq 0$ è chiaro che si ha $T_1 = T$. $\square$

Osservazione 12.34 Dal Corollario 12.33 segue che vale solo una delle possibilità:

(i) $D(t) \neq 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

(ii) $D(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

Nel primo caso gli n vettori di $\mathbb{R}^n$,

$$u^1(t), ..., u^n(t),$$

sono indipendenti per ogni $t \in [0, T]$.

Esercizio 12.35 Siano $u^1, ..., u^n$ definite da:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t), \quad t \in [0, T] \\ \\ u(0) = e^i, \quad i = 1, ..., n, \end{cases} \tag{12.60}$$

dove $e^1, ..., e^n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e sia $G(t, 0)$ definita da (12.50). Provare che:

$$G(t, 0) = W(u^1, ..., u^n).$$

Dato $s \in [0, T]$ a cosa è uguale $G(t, s)$?

Esempio 12.36 Consideriamo il problema (12.54) con $n = 2$ e

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo $G(t, 0)$. Per questo dobbiamo trovare le soluzioni u^1 e u^2 di (12.54) con $u^1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u^2(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$u^1(t) = \begin{pmatrix} u_1^1(t) \\ u_2^1(t) \end{pmatrix}$ è la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_1^1(t) = u_1^1(t) + t u_2^1(t) \\ \\ \frac{d}{dt} u_2^1(t) = 0 \\ \\ u_1^1(0) = 1, \quad u_2^1(0) = 0. \end{cases}$$

Si ha allora $u_2^1(t) = 0$ e quindi $u_1^1(t) = e^t$, cosicché:

$$u^1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente $u^2(t) = \begin{pmatrix} u_1^2(t) \\ u_2^2(t) \end{pmatrix}$ è la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_1^2(t) = u_1^2(t) + t u_2^2(t) \\ \\ \frac{d}{dt} u_2^2(t) = 0 \\ \\ u_1^2(0) = 0, \quad u_2^2(0) = 1. \end{cases}$$

Si ha $u_2^1(t) = 1$ e quindi:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_1^2(t) = u_1^2(t) + t \\ \\ u_1^2(0) = 0. \end{cases}$$

Dalla formula di variazione delle costanti segue che:

$$u_1^2(t) = \int_0^t e^{t-s} s ds = -t - 1 + e^t,$$

cosicché:

$$u^2(t) = \begin{pmatrix} -t - 1 + e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In conclusione si ha:

$$G(t, 0) = \begin{pmatrix} e^t & -t - 1 + e^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allo stesso modo si vede che:

$$G(t, s) = \begin{pmatrix} e^{t-s} & s - t - 1 + e^{t-s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.6.2 Caso in cui le matrici $A(t)$ commutano

Supponiamo qui che risulti:

$$[A(t), A(s)] := A(t)A(s) - A(s)A(t) = 0, \quad t, s \in [0, T].$$

Si dice allora che le $A(t),\ t \in [0, T]$ *commutano* tra di loro. In questo caso vi è una semplice formula per $G(t, s)$.

Proposizione 12.37 *Supponiamo che le matrici $A(s),\ s \in [0, T]$ commutino tra di loro. Allora risulta:*

$$G(t, s) = \exp\left\{\int_s^t A(r)dr\right\}. \tag{12.61}$$

Per dimostrare questo risultato useremo un semplice lemma la cui prova è lasciata in esercizio al lettore.

Lemma 12.38 *Siano $f, g \in C([0, T])$. Risulta allora:*

$$\int_0^t f(s)\left[\int_0^s g(r)dr\right]ds = \int_0^t g(r)\left[\int_r^t f(s)ds\right]dr. \tag{12.62}$$

Dimostrazione della Proposizione 12.37. Supponiamo $s = 0$ per semplicità. Si ha:

$$G(t, 0) = I + \int_0^t A(s)G(s, 0)ds, \quad t \in [0, T].$$

Poniamo:

$$G_0(t, 0) = I, \quad G_n(t, 0) = I + \int_0^t A(s)G_{n-1}(s, 0)ds,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Si ha allora:

$$G_1(t, 0) = I + \int_0^t A(s)ds,$$

$$G_2(t, 0) = I + \int_0^t A(s)(I + \int_0^s A(r)dr)ds$$

$$= I + \int_0^t A(s)ds + \int_0^t ds\int_0^s A(s)A(r)dr.$$

Ma, usando il Lemma 12.38, si ha:

$$\int_0^t ds \int_0^s A(s)A(r)dr = \int_0^t dr \int_r^t A(s)A(r)ds$$

da cui, scambiando r con s,

$$\int_0^t dr \int_r^t A(s)A(r)ds = \int_0^t ds \int_s^t A(r)A(s)dr = \int_0^t ds \int_s^t A(s)A(r)dr,$$

per l'ipotesi di commutazione. Ne segue:

$$\int_0^t ds \int_0^s A(s)A(r)dr = \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^t A(s)A(r)dr = \frac{1}{2} \left(\int_0^t A(s)ds \right)^2,$$

cosicché

$$G_2(t,0) = I + \int_0^t A(s)ds + \frac{1}{2} \left(\int_0^t A(s)ds \right)^2.$$

Procedendo per ricorrenza si ottiene (ricordando l'osservazione 12.9):

$$G_n(t,0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\int_0^t A(s)ds \right)^k,$$

da cui la tesi per $n \to \infty$. $\square$

12.6.3 Problema di Cauchy con forza esterna

Sia $T > 0$, $A : [0,T] \to L(\mathbb{R}^n)$ continua $f : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ continua. Dato che A è Lipschitziana, il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ \\ u(0) = x \end{cases} \tag{12.63}$$

ha un'unica soluzione $u(t) = u(t,x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Usando il metodo di *variazione delle costanti* come nella sottosezione 12.5.3 si trova la formula:

$$u(t) = G(t,0)x + \int_0^t G(t,s)f(s)ds. \tag{12.64}$$

12.7 Equazioni differenziali con dati continui

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), \quad t \geq 0 \\ \\ u(0) = x_0, \end{cases} \tag{12.65}$$

dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è continua e limitata e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è dato.

Fissiamo $R > 0$ e poniamo:

$$M = \sup_{y \in B(x_0,R)} |f(y)|, \quad T = \frac{R}{M}.$$

Vogliamo provare che esiste una soluzione di (12.65) definita in $[0, T]$. Per questo costruiremo per ogni $\epsilon > 0$ una funzione $u_\epsilon : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ continua, derivabile a tratti e tale che:

$$|D_- u_\epsilon(t) - f(u_\epsilon(t))| < \epsilon, \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{12.66}$$

u_ϵ è detta una ϵ-soluzione.

Mostreremo poi che $(u_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ è un insieme equicontinuo e proveremo l'esistenza (non l'unicità) di una soluzione di (12.65).

Lemma 12.39 *Per ogni $\epsilon > 0$ esiste $u_\epsilon : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ continua tale che valga* (12.66)*.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione strettamente crescente di numeri reali (t_n) e sia $\tau = \sup_n t_n$. Definiamo una funzione $v : [0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ al modo seguente. Poniamo:

$$\begin{cases} v(t) = x_0 + t f(x_0), \quad \forall\, t \in [0, t_1], \\ x_1 = v(t_1) = x_0 + t_1 f(x_0) \end{cases}$$

e, per ricorrenza,

$$\begin{cases} v(t) = x_{n-1} + (t - t_{n-1}) f(x_{n-1}), \quad \forall\, t \in [t_{n-1}, t_n], \\ x_n = v(t_n) = x_{n-1} + (t_n - t_{n-1}) f(x_{n-1}). \end{cases}$$

Si ha:

$$D_- v(t) = f(x_{n-1}), \quad \forall\, t \in [t_{n-1}, t_n].$$

Dato che f è uniformemente continua in $B(x_0, R)$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che

$$y_1,\ y_2 \in B(x_0, R),\ |y_1 - y_2| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(y_1) - f(y_2)| < \epsilon.$$

Scegliamo ora i t_n in modo che:

$$|x_n - x_{n-1}| = (t_n - t_{n-1})|f(x_{n-1})| = \delta_\epsilon. \tag{12.67}$$

È chiaro allora che risulta:

$$|D_- v(t) - f(v(t))| < \epsilon, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{12.68}$$

Osserviamo che, con questa scelta di (t_n) si ha $\tau = +\infty$. Infatti se fosse, per assurdo, $\tau < +\infty$ dalla (12.67) seguirebbe che (x_n) converge a un vettore $\bar{x}$ il che implicherebbe $\delta_\epsilon = 0$.

Quindi se $v(t) \in B(x_0, R)$ per ogni $t \in [0, T]$ allora v è l'ϵ-soluzione cercata. Sia $\bar{t}$ il primo istante in cui $v(t)$ raggiunge la frontiera di $B(x_0, R)$. Allora dalla (12.67) segue che:

$$u(\bar{t}) = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (t_i - t_{i-1}) f(x_{i-1}) + (\bar{t} - t_{i-1}) f(x_{n-1}),$$

da cui:

$$R = |u(\bar{t}) - x_0| \leq M\bar{t},$$

il che implica $\bar{t} \geq \frac{R}{M} = T$. $\square$

Teorema 12.40 *Esiste una soluzione di* (12.65) *in* $[0, T]$.

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia $\{v_\epsilon\}_{\epsilon \in (0,1]}$ delle ϵ-soluzioni costruita nel Lemma 12.39. Posto:

$$g_\epsilon(t) = v_\epsilon(t) - x_0 - \int_0^t f(v_\epsilon(s))ds, \quad t \in [0, T]. \tag{12.69}$$

Si ha allora $D_- g_\epsilon(t) = D_- v_\epsilon(t) - f(v_\epsilon(t))$ e dalla (12.68) segue che:

$$|D_- g_\epsilon(t)| \leq \epsilon, \quad \forall\, \epsilon \in (0, 1],$$

da cui:

$$|D_- v_\epsilon(t) - f(v_\epsilon(t))| \leq \epsilon, \quad \forall\, \epsilon \in (0,1]$$

che implica:

$$|D_- v_\epsilon(t)| \leq M + 1.$$

Essendo anche:

$$\|v_\epsilon(t)\| \leq |x_0| + MT + 1$$

segue che il sottoinsieme $\{v_\epsilon\}_{\epsilon\in(0,1]}$ di $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ è equicontinuo, cosicché per il Teorema di Ascoli-Arzelà esiste $\epsilon_n \uparrow \infty$ tale che la successione $\{v_{\epsilon_n}\}$ è uniformemente convergente a una funzione $u \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$. Passando al limite nell'uguaglianza:

$$g_\epsilon(t) = v_\epsilon(t) - x_0 - \int_0^t F(v_\epsilon(s))ds, \quad t \in [0,T],$$

si ottiene:

$$u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s))ds, \quad t \in [0,T],$$

e quindi u è soluzione di (12.65) in $[0,T]$. $\square$

12.7.1 Connessione e compattezza dell'insieme delle soluzioni

Sia K il sottoinsieme di $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ delle soluzioni di (12.65).

Proposizione 12.41 *K è compatto e connesso.*

Dimostrazione. Proviamo che K è *compatto.* Per ogni $u \in K$ si ha:

$$\|u\| \leq |x_0| + TM$$

e

$$|u(t) - u(s)| \leq M|t-s|, \quad \forall\, t,s \in [0,T].$$

Quindi K è compatto.

Proviamo infine che K è *connesso.* Per questo è utile introdurre un problema approssimato di (12.65) che ammette esistenza e unicità.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo l'applicazione $F_n : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to C([0,T];\mathbb{R}^n)$ definita da:

$$F_n(u)(t) = \begin{cases} u(t) - x_0 \quad \text{se } t \in [0,1/n], \\ \\ u(t) - x_0 - \displaystyle\int_0^{t-1/n} f(u(s))ds \quad \text{se } t \in [1/n,T]. \end{cases} \tag{12.70}$$

Si verifica facilmente che per ogni $u \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$, $F_n(u) \to F(u)$ in $C([0,T];\mathbb{R}^n)$, dove

$$F(u)(t) = u(t) - x_0 - \int_0^t f(u(s))ds.$$

Da notare che il problema (12.65) equivale all'equazione $F(u) = 0$. Osserviamo anche che per ogni $g \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$ l'equazione:

$$F_n(u) = g,$$

ha un'unica soluzione u_n definita da:

$$u_n(t) = \begin{cases} x_0 + g(t) \quad \text{se } t \in [0,1/n], \\ \\ u_n(t) = x_0 + \displaystyle\int_0^{t-1/n} f(u(s))ds + g(t) \quad \text{se } t \in [1/n,T]. \end{cases} \tag{12.71}$$

Supponiamo ora per assurdo che K non sia connesso e risulti:

$$K = K_1 \cup K_2, \quad K_1 \cap K_2 = \varnothing.$$

Sia $\delta > 0$ la distanza fra K_1 e K_2 [(5)]:

$$\delta = \inf\{\|u_1 - u_2\| : \ u_1 \in K_1, \ u_2 \in K_2\}.$$

Fissiamo $u_1 \in K_1$, $u_2 \in K_2$ e poniamo:

$$v_n^{(1)} = F_n(u_1), \quad v_n^{(2)} = F_n(u_2), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dato che $F_n(u) \to F(u)$ in $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ per ogni $u \in C([0,T];\mathbb{R}^n)$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\|v_n^{(1)}\| \le \epsilon, \ \|v_n^{(2)}\| \le \epsilon, \quad \forall\, n > n_\epsilon.$$

[(5)] $\|\cdot\|$ rappresenta la norma in $C([0,T];\mathbb{R}^n)$

Consideriamo il segmento:

$$v_n^\lambda = (1-\lambda)v_n^{(1)} + \lambda v_n^{(2)}, \quad \lambda \in [0,1]$$

e sia u_n^λ tale che $F_n(u_n^\lambda) = v_n^\lambda$ (ricordare che F_n è inittiva). Sia inoltre Γ_n la curva (si tratta dell'immagine inversa tramite F_n del precedente segmento):

$$\Gamma_n = \{u_n^\lambda : \ \lambda \in [0,1]\}$$

e Γ l'insieme dei punti limite di Γ_n. Cioè $\bar{u}$ appartiene a Γ se e solo se esiste $n_k \uparrow \infty, \ \lambda_k \in [0,1]$ tale che:

$$\bar{u} = \lim_{k\to\infty} u_{n_k}^{\lambda_k}.$$

È facile vedere che risulta $\Gamma \subset K$ e si ha $u_1, u_2 \in \Gamma$; poniamo

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma \cap K_1, \quad \Gamma^{(2)} = \Gamma \cap K_2.$$

Proviamo ora che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\text{dist }(u_n^\lambda, \Gamma) \leq \frac{1}{3}\,\delta, \quad \forall\, \lambda \in [0,1]. \tag{12.72}$$

Se ciò non fosse vero per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbe $\lambda_n \in [0,1]$ tale che:

$$\text{dist }(u_n^{\lambda_n}, \Gamma) \geq \frac{1}{3}\,\delta.$$

Ciò è assurdo poiché la successione $(u_n^{\lambda_n})$ ha un punto limite appartenente a Γ. Quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che valga (12.72). Mostriamo che ciò è impossibile perché implica che Γ_n non è connesso (mentre lo è dato che è l'immagine di un segmento tramite l'applicazione F_n^{-1} che è continua). Per questo poniamo:

$$\Gamma_n^{(1)} = \{u_n^\lambda : \text{dist }(u_n^\lambda, \Gamma^{(1)}) \leq \tfrac{1}{3}\,\delta\},$$

$$\Gamma_n^{(2)} = \{u_n^\lambda : \text{dist }(u_n^\lambda, \Gamma^{(2)}) \leq \tfrac{1}{3}\,\delta\}.$$

e proviamo che $\Gamma_n^{(1)}$ e $\Gamma_n^{(1)}$ sono disgiunti. Sia infatti per assurdo $\lambda \in [0,1]$ tale che:

$$u_n^\lambda \in \Gamma_n^{(1)} \cap \Gamma_n^{(2)}.$$

Allora esistono $z_1 \in \Gamma_n^{(1)}$ e $z_2 \in \Gamma_n^{(2)}$ tali che:

$$\|u_n^\lambda - z_1\| = \|u_n^\lambda - z_2\| \leq \frac{1}{3}\,\delta.$$

Ne segue:

$$\|z_1 - z_2\| \leq \|z_1 - u_n^\lambda\| + \|u_n^\lambda - z_2\| \leq \frac{2}{3}\,\delta,$$

il che è assurdo poiché $\|z_1 - z_2\| \geq \delta$. $\square$