LEZIONE DUE:

riepilogo: relazioni o corrispondenze

relazioni di equivalenza

applicazioni o funzioni

OPERAZIONI

$$\perp : A \times A \longrightarrow A \qquad A \neq \emptyset$$

Se $\perp$ ha elemento neutro e

$x, y \in A \ : \ \exists \, x', y' \in A \ / \ \begin{array}{l} x \perp x' = x' \perp x = e \\ y \perp y' = y' \perp y = e \end{array}$

$\perp$ è associativa

allora $x \perp y$ è invertibile

e $(x \perp y)' = y' \perp x'$

DIM: Th: $(x \perp y) \perp (y' \perp x') = e$

$$= ((x \perp y) \perp y') \perp x' = (x \perp \overbrace{(y \perp y')}^{= e}) \perp x' =$$

$$= (x \perp e) \perp x' = x \perp x' = e$$

$\square$

$\mathbb{Q}$ $\qquad \ast : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$(x, y) \longmapsto x \ast y \overset{def.}{=} x + y + |xy|$$

0 è elem. neutro:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad x \ast 0 = x + 0 + 0 = x$$

$$0 \ast x = 0 + x + 0 = x$$

$x = -2$ è invertibile

$x' = -2$ opp. $x' = \frac{2}{3}$

Infatti:

$$(-2) \ast (-2) = -2 + (-2) + 4 = 0$$

$$(-2) \ast \frac{2}{3} = -2 + \frac{2}{3} + \left| \underline{-2 \cdot \frac{2}{3}} \right| = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{2}{3} \ast (-2)$$

QUINDI POSSIAMO OSSERVARE CHE

L'OPERAZIONE $\ast$ NON È ASSOCIATIVA.

POTENZA O CARDINALITÀ DI UN INSIEME:

X, Y

Diciamo che X e Y hanno la stessa potenza (sono equipotenti) o cardinalità e scriviamo $|X| = |Y|$ se esiste un'appl biettiva $f: X \to Y$

Se $X = \mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$, allora diciamo che Y ha cardinalità n.

Se $X = \mathbb{N}$, allora diciamo che Y è NUMERABILE

Se $X = \emptyset$, allora $|X| = 0$

Un insieme infinito può essere equipotente a un suo sottoinsieme proprio: Esempio:

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| < |\mathbb{R}|$ $\qquad |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$

STRUTTURA ALGEBRICA è una n-upla costituita da INSIEMI e OPERAZIONI definite su questi insiemi.

$(\mathbb{Z}, +)$ ✓ $\qquad$ $(\mathbb{N}, +)$ NO

GRUPPO (ABELIANO)

$X \neq \emptyset$ $\qquad$ $\{f : X \to X \mid f \text{ applicazione}\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \mathrm{Hom}(X, X)$

$(\mathrm{Hom}(X, X), \circ)$ $\qquad$ $\circ$ è associativa

$\exists$ elemento neutro id_X

$B = \{f : X \to X \mid f \text{ è appl. è biettiva}\}$

$$\circ : \mathrm{Hom}(X, X) \times \mathrm{Hom}(X, X) \to \mathrm{Hom}(X, X)$$

Restringo a B:

$$\circ|_{B \times B} : B \times B \longrightarrow B$$

$(B, \circ)$ è un gruppo (non abeliano)

CAMPO : $K \neq \emptyset$

$$+ : K \times K \longrightarrow K$$

$$\cdot : K \times K \longrightarrow K$$

$(K, +, \cdot)$ si dice campo se:

(1) $(K, +)$ è un gruppo abeliano, sia 0 l'el. neutro

(2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

(3) l'operazione $\cdot$ è distributiva rispetto a $+$, ossia:

$\forall x, y, z \in K$, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

e $(y+z) \cdot x = yx + zx$

ESEMPI: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$K = \{0, 1\}$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$(K = \{0, 1\}, \oplus, \odot)$ è un campo

$(K, +, \cdot)$

Oss: $\forall x \in K$, $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

$$\underline{x \cdot 0} = x \cdot (0+0) = \underline{x \cdot 0 + x \cdot 0}$$

$$0 = x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-x \cdot 0) = x \cdot 0$$

$\square$

$\mathcal{J}$ spazio della geometria elementare
(euclidea elementare)

$O \in \mathcal{J}$, $\quad \mathcal{J}(O) = \{(O,P) \mid P \in \mathcal{J}\}$

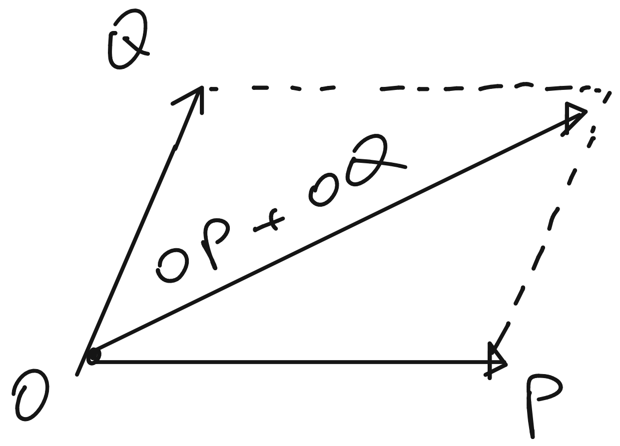
$\mathcal{V} = \{ (P,Q) \mid P, Q \in \mathcal{J}\}$ VETTORI APPLICATI

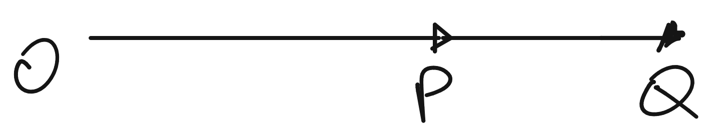
$\mathcal{R}$ relazione di EQUIPOLLENZA su $\mathcal{V}$

$V = \dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{R}} = \{ [(P,Q)]_{\mathcal{R}} \mid P, Q \in \mathcal{J}\}$ VETTORI LIBERI o GEOMETRICI

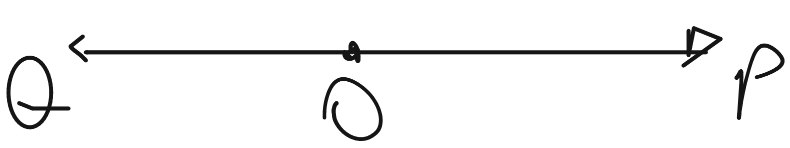
$+ : \mathcal{J}(O) \times \mathcal{J}(O) \longrightarrow \mathcal{J}(O)$

$((O,P),(O,Q)) \longmapsto OP + OQ$





OP+OQ è il vettore che ha direzione uguale a (OP) verso uguale a (OP) e lunghezza uguale alla somma delle lunghezze di OP e di OQ:
$|OP| + |OQ| = |OP + OQ|$

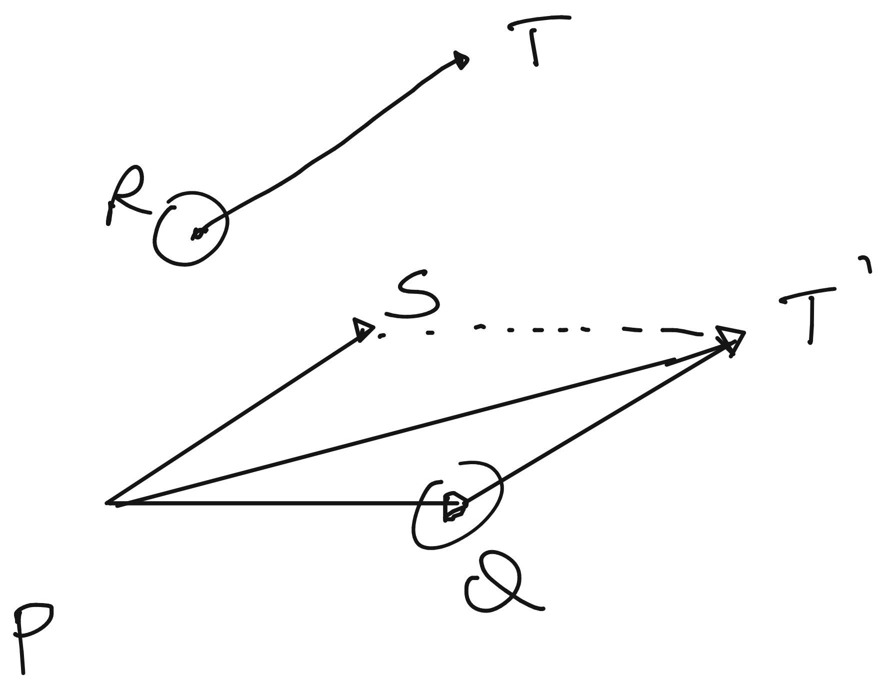


OP+OQ è il vettore applicato con lunghezza $||OP| - |OQ||$
stessa direzione di (O,P)
verso uguale a quello del vettore più lungo tra (O,P) e (O,Q)

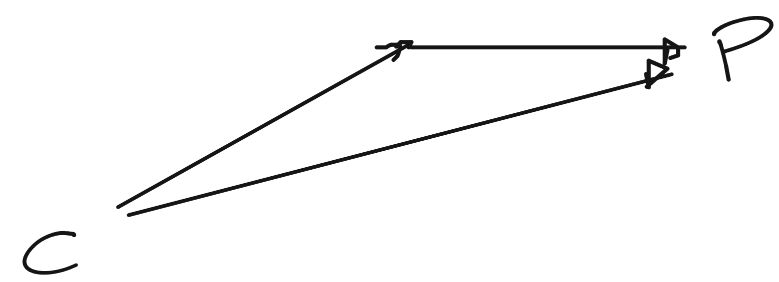
Per i vettori liberi:

$$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

$$(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RT}) \longrightarrow \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RT}$$



$$\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{QT'} = \overrightarrow{PS}$$



$(\mathcal{F}(O), +)$ è un gruppo abeliano (senza DIM.)

$(\mathbb{V}, +)$ è un gruppo abeliano (senza DIM)

$\longrightarrow$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $\quad \mathcal{F}(O)$

$$\cdot \quad \mathbb{R} \times \mathcal{F}(O) \longrightarrow \mathcal{F}(O)$$

$$(\alpha, (O,P)) \longmapsto \alpha \cdot (O,P)$$ vettore NULLO

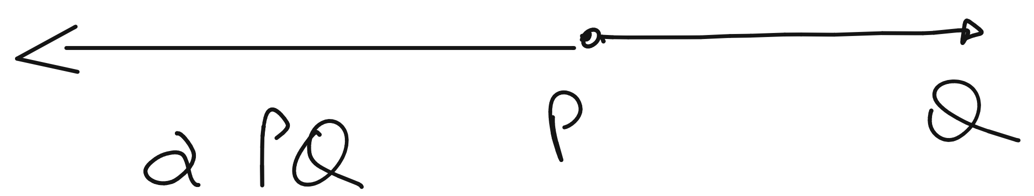
$$\alpha \cdot (O,P) = \begin{cases} (O,O) = \underline{0} & \boxed{\text{se } \alpha = 0} \\ \text{vettore } (O,Q) \text{ con uguale direzione e verso di } (O,P) \text{ e } |(O,Q)| = \alpha\,|(O,P)| & \boxed{\text{se } \alpha > 0} \\ \text{vettore } (O,Q) \text{ con uguale direzione, verso opposto a } (O,P) \text{ e } |(O,Q)| = -\alpha\,|(O,P)| & \boxed{\text{se } \alpha < 0} \end{cases}$$

V vettori liberi

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$(\alpha, \overrightarrow{PQ}) \longmapsto \alpha \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$\left[\alpha \cdot (P,Q)\right]_{R}$$



$\alpha < 0$

$\overrightarrow{RS} = \alpha \cdot \overrightarrow{PQ}$

SPAZI VETTORIALI:

$V \neq \emptyset$ $\quad \boxplus : V \times V \longrightarrow V$

$(K, +, \cdot)$
campo
$0 \quad \underline{1}$ $\quad \boxdot : K \times V \longrightarrow V \quad \Leftarrow$

$(V, K, \boxplus, \boxdot)$ opp. $(V, \boxplus, \boxdot)$ si dice

SPAZIO VETTORIALE su K se:

$(V, \boxplus)$ è gruppo abeliano

$\underline{0}$ vettore nullo = elem. neutro

$u \in V$ l'opposto è $-u$

- $\forall \alpha \in K, \forall u, v \in V: \alpha \boxdot (u \boxplus v) = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\alpha \boxdot v)$
- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V:$

$$(\alpha + \beta) \boxdot u = \underbrace{(\alpha \boxdot u)}_{\in V} \boxplus \underbrace{(\beta \boxdot u)}_{\in V}$$

- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in V: \alpha \boxdot \underbrace{(\beta \boxdot u)}_{\in V} = (\alpha \cdot \beta) \boxdot u$
- $\forall u \in V, \quad 1 \boxdot u = u$

Gli elementi di K si dicono SCALARI
Gli elementi di V si dicono vettori

ESEMPI

(1) $(\mathcal{F}(O), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

(2) $(V, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

(3) Sia $(K, +, \cdot)$ un campo. Considero

$$V = K \times K = K^2$$

$$\boxed{+} : K^2 \times K^2 \longrightarrow K^2$$

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \longrightarrow (a_1, a_2) \boxed{+} (b_1, b_2) \overset{\text{def.}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

addizione di K

$$\boxed{\cdot} : K \times K^2 \longrightarrow K^2$$

$$(\alpha, (a_1, a_2)) \longrightarrow \alpha \boxed{\cdot} (a_1, a_2) \overset{\text{def.}}{=} (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2)$$

moltiplicazione di K

$(K^2, \boxed{+}, \boxed{\cdot})$ è uno spazio vettoriale sul campo K

(Vedremo la dim. durante la prossima lezione)

(4) $(K, +, \cdot)$ campo $\quad n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}} = K^n \ni (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in K$$

$$\boxed{+} : K^n \times K^n \longrightarrow K^n$$

$$((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n)) \longmapsto$$

$$\longmapsto (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$\boxed{\cdot} : K \times K^n \longrightarrow K^n$$

$$(\alpha, (a_1, a_2, \dots, a_n)) \longmapsto (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$$

$(K^n, \boxed{+}, \boxed{\cdot})$ è uno spazio vettoriale su K

si dice spazio vettoriale NUMERICO opp. STANDARD (di "dimensione" n)

$K = \mathbb{R}$ $n = 2$

$V = \mathbb{R}^2$

$(3, 2) \boxed{+} (-5, 7) = (-2, 9)$

$-4 \boxed{\cdot} (3, -2) = (-12, 8)$