Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\dim(V)=n$

Sia $S=\{w_1,\dots,w_n\}\subseteq V$, $|S|=\dim V$

Si possono dimostrare i seguenti fatti:

- Se S è lin. indip., allora S è una base di V.
- Se S è un sistema di generatori di V, allora S è una base di V.

<u>Esempio</u>

$\mathbb{R}^2$ $\quad S=\{(1,7),(51,3)\}$ lin indip

$$|S|=2=\dim(\mathbb{R}^2)$$
$$\Downarrow$$
S è una base di $\mathbb{R}^2$

V spazio vettoriale su K

S sistema di generatori finito di V.

Abbiamo dimostrato che esiste una base B di V che è contenuta in S: $B\subseteq S$

(Metodo di estrazione di una base da un sistema di generatori)

Conseguenza

Sia $X \subseteq V$: X lin. indip.

Per il lemma di Steinitz: $|X| \leq \dim(V)$

Per la conseguenza enunciata nell'osservazione precedente:

$$\left.\begin{array}{c} |X| = \dim(V) \\ (X \text{ è lin. indip.}) \end{array}\right) \Longrightarrow X \text{ è una base}$$

Allora è vero che ogni insieme lin. indip. è contenuto in una base? $\boxed{\text{Sì}}$

Esempio

$\mathbb{R}^3$ $\quad X = \{ \overset{w_1}{(1,0,1)}, \overset{w_2}{(0,1,0)} \}$ è lin. indip.

Prendo $w = (0,0,1) \notin \mathcal{L}(X)$. Allora:

$$B = X \cup \{(0,0,1)\} = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

$$B \text{ è base} \Longleftarrow \left(\begin{array}{l} \text{è lin. indip.} \\ |B| = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

Proposizione

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $t \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} X = \{w_1, \dots, w_t\} \subseteq V,\ X \text{ lin. indip} \\ w \in V : \ w \notin \mathcal{L}(X) \end{array}\right) \Longrightarrow X \cup \{w\} \text{ è lin. indip.}$$

Dim Per assurdo, supponiamo che

$$X \cup \{w\} = \{w_1, \dots, w_t, w\} \text{ sia lin. dipendente}$$

ossia: $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_t, \alpha \in \mathbb{K}$ <u>non tutti nulli</u> tali che

$$(*) \qquad \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_t w_t + \alpha w = \underline{0}$$

Vediamo che non può accadere $\alpha = 0$.

Infatti in tal caso $(*)$ diventa:

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_t w_t + 0 w = \underline{0}$$

$$\|$$

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_t w_t \underset{\substack{\uparrow \\ X \text{ lin. indip}}}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \dots = \alpha_t = 0 \rightsquigarrow \text{assurdo}$$

Deve essere $\alpha \neq 0$: $\exists\, \alpha^{-1} \in K$

$$\alpha^{-1}\alpha_1 w_1 + \ldots\ldots + \alpha^{-1}\alpha_t w_t + \overbrace{(\alpha^{-1}\alpha)}^{=1} w = \alpha^{-1}\underline{0} = \underline{0}$$

$$\Longrightarrow\ w = -\alpha^{-1}\alpha_1 w_1 + \ldots\ldots - \alpha^{-1}\alpha_t w_t \in \mathcal{L}(X)$$

$\rightsquigarrow$ assurdo

L'assurdo nasce dall'aver supposto $X \cup \{w\}$ lin. dip.

Quindi: $X \cup \{w\}$ è lin. indip. $\blacksquare$