Siano W_1, W_2 sottospazi finitamente generati di V su K

Allora

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Osservazione

$W_1, \dots, W_p \subseteq V$, $p \in \mathbb{N}$ sottospazio vett.

$W_1 \cap \dots \cap W_p$ è un sottospazio vett. detto SOTTOSPAZIO INTERSEZIONE

$$W_1 + \dots + W_p \overset{def}{=} \{w_1 + \dots + w_p \mid w_1 \in W_1, \dots, w_p \in W_p\} =$$

$$= \mathcal{L}(W_1 \cup \dots \cup W_p) = \mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p) =$$

$$= W_1 = \mathcal{L}(S_1), \dots, W_p = \mathcal{L}(S_p)$$

Definizione

$W_1 + W_2 + \dots + W_p$ è <u>somma diretta</u> e si scrive (*)

$W_1 \oplus \dots \oplus W_p$ se $\forall\, i \in \{1, \dots, p\}$,

$$W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_p) = \{\underline{0}\}$$

Anche in questo caso si può dimostrare:

$W_1 + \dots + W_p$ è somma diretta $\iff$ $\forall u \in W_1 + \dots + W_p$
$\exists! (w_1, \dots, w_p) \in W_1 \times \dots \times W_p$
t.c. $u = w_1 + \dots + w_p$

(*) Si dice anche che $W_1, \dots, W_p$ sono INDIPENDENTI

Proposizione

Se $W_1 + \dots + W_p$ è somma diretta allora:

$$\dim(W_1 \oplus \dots \oplus W_p) = \dim(W_1) + \dots + \dim(W_p)$$

e di conseguenza:

B_1 base di W_1
$\vdots$
B_p base di W_p

$\implies$ allora $B_1 \cup \dots \cup B_p$ è base di $W_1 \oplus \dots \oplus W_p$

Esempio

1) $\mathbb{R}^3$ $\quad W_1 = \mathcal{L}((1,0,1),(0,0,1))$
$W_2 = \mathcal{L}((1,0,2),(0,1,0))$

$\{\underline{0}\} \neq W_1 \cap W_2 = \mathcal{L}((1,0,2))$

Quindi la somma di W_1 e W_2 <u>non</u> é somma diretta

$$B_1 = \{(1,0,1),(0,0,1)\} \text{ é base di } W_1$$

$$B_2 = \{(1,0,2),(0,1,0)\} \text{ é base di } W_2$$

$B_1 \cup B_2$ non é base di $W_1 + W_2$, é solo un sist. di generatori

$$|B_1 \cup B_2| = 4 > \dim \mathbb{R}^3 \Longrightarrow B_1 \cup B_2 \text{ é lin. dip.}$$

Se invece prendo: $W_1 = \mathcal{L}((1,0,1),(0,0,1))$

$$\overline{W_2} = \mathcal{L}((0,1,0))$$

$W_1 + \overline{W_2} = W_1 \oplus \overline{W_2}$ perché $W_1 \cap \overline{W_2} = \{\underline{0}\}$

$$\{(1,0,1),(0,0,1),(0,1,0)\} \text{ é base di } W_1 \oplus W_2$$

Dim Grassmann

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(\overset{t}{W_1}) + \dim(\overset{h}{W_2}) - \dim(\overset{r}{W_1 \cap W_2})$$

Sia B_r una base di $W_1 \cap W_2$.

Se $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$, allora $B_r = \emptyset$, altrimenti $B_r = \{e_1, \dots, e_r\}$

B_r é un insieme lin. dip. in W_1 e W_2.

Allora completiamo B_r:

- in una base $B_t = \{e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_t\}$ di W_1
- in una base $B_h = \{e_1, \dots, e_r, g_{r+1}, \dots, g_h\}$ di W_2

$$W_1 + W_2 = \mathcal{L}(B_t \cup B_h)$$

$$B_t \cup B_h = \{e_1, \dots, e_r, f_{r+1}, \dots, f_t, g_{r+1}, \dots, g_h\}$$

é un sist. di generatori di $W_1 + W_2$

th: $B_t \cup B_h$ é lin. indip

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \dots, \beta_t, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_h \in K$$

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \beta_{r+1} f_{r+1} + \dots + \beta_t f_t + \gamma_{r+1} g_{r+1} + \dots + \gamma_h g_h = \underline{0}$$

(*)(*)

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \beta_{r+1} f_{r+1} + \dots + \beta_t f_t}_{\in W_1} = \underbrace{-\gamma_{r+1} g_{r+1} + \dots - \gamma_h g_h}_{\in W_2} \in$$

$v \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow \exists\, \alpha'_1, \dots, \alpha'_r \in K:$

$$-\gamma_{r+1} g_{r+1} + \dots - \gamma_h g_h = \alpha'_1 e_1 + \dots + \alpha'_r e_r \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha'_1 e_1 + \dots + \alpha'_r e_r + \gamma_{r+1} g_{r+1} + \dots + \gamma_h g_h = \underline{0}$$

$$\Downarrow \ \mathcal{B}_h \text{ base di } W_2$$

$$\alpha'_1 = \dots = \alpha'_2 = \gamma_{r+1} = \dots = \gamma_h = 0$$

Da $(*)(*)$:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \beta_{r+1} f_{r+1} + \dots + \beta_t f_t = \underline{0}$$

$$\Downarrow \ \mathcal{B}_t \text{ base di } W_1$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_{r+1} = \dots = \beta_t = 0$$

Quindi $\mathcal{B}_t \cup \mathcal{B}_h$ è lin. indip.

$\mathcal{B}_t \cup \mathcal{B}_h$ é un sistema di gen. di $W_1 + W_2$

$$|\mathcal{B}_t \cup \mathcal{B}_h| = t + h - r.$$

$\blacksquare$