Prodotto righe per colonne

def Siano $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{p \times q}$

La coppia (A, B) si dice conformabile se $n = p$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & \pi \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$$

Quindi (A, B) é conformabile

Tuttavia (B, A) non é conformabile

def Sia K^n spaz. vett. numerico numerico

L'applicazione $K^n \times K^n \longrightarrow K$

$$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \rightsquigarrow a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

si dice prodotto scalare numerico

Proprietà

- è commutativo (simmetrico)

- $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n) \in K^n$

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot \big((b_1, \dots, b_n) + (c_1, \dots, c_n)\big) =$$
$$= \big[(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n)\big] + \big[(a_1, \dots, a_n) \cdot (c_1, \dots, c_n)\big]$$

(linearità sul secondo argomento rispetto a +)

- $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in K^n, \ \forall \gamma \in K$

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot \big(\gamma \cdot (b_1, \dots, b_n)\big) = \gamma \cdot \big[(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n)\big]$$

(linearità rispetto al prodotto esterno di K^n)

- Se $K = \mathbb{R}$, $(a_1, \dots, a_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) \geq 0$

$$= 0 \iff (a_1, \dots, a_n) = 0$$

Siano $A \in M_{m \times n}$ $B \in M_{n \times q}$ quindi (A, B) conformabile

Definisco il prodotto righe per colonne $A \cdot B$ nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & \\ a^r_1 & \cdots & a^r_n \\ \vdots & & \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_1 & \cdots & b^1_j & \cdots & b^1_q \\ b^2_1 & \cdots & b^2_j & \cdots & b^2_q \\ \vdots & & \vdots & & \\ b^n_1 & \cdots & b^n_j & \cdots & b^n_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 b_1 & \cdots & a^1 b_j & \cdots & a^1 b_q \\ a^2 b_1 & \cdots & a^2 b_j & \cdots & a^2 b_q \\ \vdots & & \vdots & & \\ a^r b_1 & \cdots & a^r b_j & \cdots & a^r b_q \\ \vdots & & \vdots & & \\ a^m b_1 & \cdots & a^m b_j & \cdots & a^m b_q \end{pmatrix}$$

$$\underset{A}{\parallel} \qquad \underset{B}{\parallel} \qquad \in M_{m\times q}$$

Quindi ho definito l'applicazione:

$$M_{m\times n} \times M_{n\times q} \longrightarrow M_{m\times q}$$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & \pi \end{pmatrix}$$

$a^1 b_1 = (1,3)\cdot(2,6) = 20$

$a^1 b_2 = (1,3)\cdot(4,\pi) = 4+3\pi$

$a^2 b_1 = (7,-5)\cdot(2,6) = -16$

$a^2 b_2 = (7,-5)\cdot(4,\pi) = 28-5\pi$

$a^3 b_1 = (0,1)\cdot(2,6) = 6$

$a^3 b_2 = (0,1)\cdot(4,\pi) = \pi$

$$\begin{pmatrix} 20 & 4+3\pi \\ -16 & 28-5\pi \\ 6 & \pi \end{pmatrix}$$

Proprietà

- $\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}\,,\ B \in \mathcal{M}_{n\times q}\,,\ C \in \mathcal{M}_{q\times p}$

$$\underbrace{\underbrace{(AB)}_{\in \mathcal{M}_{m\times q}}C}_{\in \mathcal{M}_{m\times p}} = \underbrace{A\,\underbrace{(BC)}_{\in \mathcal{M}_{n\times p}}}_{\in \mathcal{M}_{m\times p}} \qquad \text{(proprietà associativa)}$$

- $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}\,,\ C \in \mathcal{M}_{n\times q}$

$$\underbrace{(A+B)C}_{\in \mathcal{M}_{m\times q}} = \underbrace{AC + BC}_{\in \mathcal{M}_{m\times q}} \qquad \text{(distributività)}$$

$\forall\, A \in \mathcal{M}_{m\times n}\,,\ B, C \in \mathcal{M}_{n\times q}$

$$A(B+C) = AB + AC$$

- $\forall\, \lambda \in K\,,\ (A,B)$ coppia conformabile di matrici

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$