ESERCIZI 5

1. Dati due spazi vettoriali V e V' su uno stesso campo K, dire cosa è un'applicazione lineare f di V in V'. Quali proprietà delle applicazioni lineari hai studiato?

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che $f(1,1) = (0,0,2)$ e $f(2,2) = (1,0,1)$. Spiegare perché f non è un'applicazione lineare.

3. Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:
$f : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \to (a+2b, a-b+1) \in \mathbb{R}^2$
$g : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \to (a_0 - 2a_1, 2a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$
$h : (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \to (a_1 + a_3, a_2 + a_3) \in \mathbb{R}^2$
$k : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \to (2a_2, a_1^2 + a_2) \in \mathbb{R}^2$.

4. Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ tale che $f(1,0,1) = (1,2,0)$, $f(1,1,2) = (0,1,1)$ e $f(0,0,1) = (0,1,1)$, si può determinare $f(0,1,2)$? Si può determinare $f((x_1,x_2,x_3))$, per ogni vettore (x_1,x_2,x_3) di $\mathbb{R}^3$? Esiste qualche vettore u di $\mathbb{R}^3$ diverso dal vettore nullo tale che $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$?
(Suggerimento: ricorda che le applicazioni lineari conservano le combinazioni lineari)

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$.
(a) Determinare l'immagine $Im\ f$ di f.
(b) Il vettore $(1,0,1)$ appartiene a Imf? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore (x_1,x_2,x_3) tale che $f((x_1,x_2,x_3)) = (1,0,1)$.

6. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che

$$f((1,0,1)) = (0,1,1,1), f((0,1,-1)) = (2,-1,0,0), f((1,1,-1)) = (0,0,0,0).$$

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3,-4,1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore (x,y,z).
(iii) Determinare una base di Imf.
(iv) Dire se f è iniettiva e suriettiva.
(Suggerimento: ricorda che le applicazioni lineari conservano le combinazioni lineari)

7. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x,y,z,t)) = (x+y-z-t, -x+z, 2y-2t)$. Determinare $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e dire se il vettore $(1,2,-2)$ appartiene a $\mathrm{Ker}(f)$.

8. Siano $u_1 = (-1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ e $u_3 = (0,1,2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1,1,1)) = (1,0,0)$, $f((1,0,1)) = (0,1,1)$ e $f((0,1,2)) = (0,0,1)$.

9. Determinare una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $u = (2,-5)$ appartenga al nucleo di T e $v = (-2,3)$ appartenga all'immagine di T.