In questa nota sono raccolti alcuni dei risultati proposti durante le lezioni di questo anno accademico riguardo allo studio dei sistemi lineari omogenei su un campo K.

Sia $\Sigma_O : AX = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite su un campo K e sia $\mathcal{S}_O$ l'insieme delle sue soluzioni.

Proposizione. *L'insieme $\mathcal{S}_O$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale numerico K^n.*

Dim. Si osservi prima di tutto che l'insieme Σ_O non è vuoto perché contiene il vettore nullo $(0, \dots, 0)$. Siano $(z_1, \dots, z_n)$ e $(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{S}_O$ due soluzioni di Σ_O. Vediamo che la loro somma è una soluzione di Σ_O. Infatti, ricordando che il prodotto righe per colonne gode della proprietà distributiva rispetto all'addizione, si ha

$$A\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Sia $\alpha \in K$ uno scalare. Posto $A = (a^i_j)$, vediamo che $\alpha((z_1, \dots, z_n)$ è una soluzione di Σ_O, usando le proprietà della moltiplicazione esterna di uno scalare per una matrice:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}\left(\alpha\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \vdots \\ \alpha z_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a^1_1(\alpha z_1) + a^1_2(\alpha z_2) + \dots + a^1_n(\alpha z_n) \\ a^2_1(\alpha z_1) + a^2_2(\alpha z_2) + \dots + a^2_n(\alpha z_n) \\ \vdots \\ a^m_1(\alpha z_1) + a^m_2(\alpha z_2) + \dots + a^m_n(\alpha z_n) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a^1_1 z_1 + a^1_2 z_2 + \dots + a^1_n z_n \\ a^2_1 z_1 + a^2_2 z_2 + \dots + a^2_n z_n \\ \vdots \\ a^m_1 z_1 + a^m_2 z_2 + \dots + a^m_n z_n \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Proposizione. *Sia $W \subseteq K^n$ un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale numerico di dimensione n sul campo K. Esiste un sistema Σ_O di equazioni lineari omogenee in n incognite su K tale che il suo insieme delle soluzioni $\mathcal{S}_o$ coincide con W.*

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_h\}$ una base di W, con $w_1 = (a^1_1, a^2_1, \dots, a^n_1)$, $\dots$, $w_h = (a^1_h, a^2_h, \dots, a^n_h)$, per cui W è la chiusura lineare $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_h)$ dei vettori di $\mathcal{B}$. Allora, un vettore $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ di K^n appartiene a W se e solo u se si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della base B, ossia

$$u \in W \Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_h & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_h & x_n \end{pmatrix} = \dim(W) = h.$$

Riducendo a gradini si ottiene una matrice del seguente tipo

$$\begin{pmatrix} p^1_1 & \dots & p^1_h & b^1_1 x_1 + \dots + b^1_n x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & p^h_h & b^1_1 x_1 + \dots + b^1_n x_n \\ 0 & \dots & 0 & b^{h+1}_1 x_1 + \dots + b^{h+1}_n x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b^n_1 x_1 + \dots + b^n_n x_n \end{pmatrix},$$

dove gli elementi p_i^i sono non nulli, per ogni $i \in \{1, \dots, h\}$, in quanto il sottospazio vettoriale W ha dimensione h. Inoltre la matrice deve avere rango h e questo accade se e solo se

$$\begin{cases} b_1^{h+1}x_1 & + \dots & + b_n^{h+1}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1^n x_1 & + \dots & + b_n^n x_n & = & 0 \end{cases}$$

Esempio. Si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}((2, -1, 1, 0, 1), (4, 1, 2, 2, 1))$ di $\mathbb{R}^5$. Riduciamo a gradini la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & x_1 \\ -1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 0 & 2 & x_4 \\ 1 & 1 & x_5 \end{pmatrix}$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & x_1 \\ 0 & 3 & x_2 + \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 2 & x_4 \\ 0 & -1 & x_5 - \frac{1}{2}x_1 \end{pmatrix}$$

e poi

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & x_1 \\ 0 & 3 & x_2 + \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - \frac{2}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) \\ 0 & 0 & x_5 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) \end{pmatrix}.$$

Quindi, W coincide con l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_3 - \frac{1}{2}x_1 = 0 \\ x_4 - \frac{2}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) = 0 \\ x_5 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) = 0 \end{cases}$$