Proposizione $T: V \to W$ appl. lineare

a) Se $V = \mathcal{L}(S)$, con $S \subseteq V$, allora $\mathrm{Im}\,T = \mathcal{L}(T(S))$

b) Sia $(v_1, \ldots, v_k)$ una k-upla di vettori di V.

Se $(T(v_1), \ldots, T(v_k))$ è lin. indip., allora

$(v_1, \ldots, v_k)$ è lin. indip.

c) Se T è iniettivo vale l'enunciato inverso di b ossia:

$(v_1, \ldots, v_k)$ è lin. indip $\Rightarrow$ $(T(v_1) \ldots T(v_k))$ è lin. indip.

Dim: a) $S = \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq V \Rightarrow T(S) \subseteq T(V)$

$$T(V) = \mathrm{Im}\,T \text{ è sott. vett.}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(T(S)) \subseteq \mathrm{Im}\,T$

Vediamo che $\mathrm{Im}\,T \subseteq \mathcal{L}(T(S))$

$w \in \mathrm{Im}\,T \Rightarrow \exists\, u \in V : T(u) = w$

$\Downarrow$

$\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K : u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r$

$\Downarrow$ T é lineare

$$T(u) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_t T(u_t) \in \mathcal{L}(T(S))$$

$$T(u_1), \dots, T(u_t) \in T(S)$$

b) $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k) = \underline{0}_W \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ per ipotesi

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k = \underline{0}_V \implies T(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k) = T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$$

$\beta_1, \dots, \beta_k \in K$

$\parallel$ T é lineare

$$\beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_k T(v_k)$$

$\Downarrow$ Per ipotesi

$$\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$$

c) Per ipotesi, T é iniettivo. Quindi, $Ker(T) = \{\underline{0}_V\}$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$, $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k) = \underline{0}_W$

$\parallel$ T é lineare

$$\underline{T(\alpha_1 v_1 + \qquad + \alpha_k v_k)}$$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in Ker(T) = \{\underline{0}_V\}$

$$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots\ldots + \alpha_k v_k = \underline{0}_V \Rightarrow \alpha_1 = \ldots\ldots = \alpha_k = 0$$

$(v_1, \ldots, v_k)$ linearmente indip per ipotesi $\blacksquare$