Esercizi 1

1. Considerati i due insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dire quali tra le seguenti relazioni $h_i \subseteq A \times B$ sono applicazioni:
$h_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$
$h_2 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$
$h_3 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$
$h_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 2)\}$
$h_5 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$

2. Dire quali tra le seguenti relazioni binarie sono riflessive, simmetriche, transitive:
$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad x h_1 y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{Q}, \quad x h_2 y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$
$\forall\, x, y \in \mathbb{N}, \quad x h_3 y \Leftrightarrow y$ è un multiplo di x (ossia, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $y = nx$).

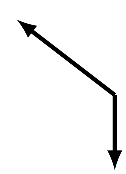
3. Dire quali tra le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive, biettive:
$f : x \in \mathbb{Z} \to 2x + x^2 \in \mathbb{Z}$
$g : x \in \mathbb{Z} \to (x - 1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$h : x \in \mathbb{N} \to 2x - 1 \in \mathbb{N}$
$p : x \in \mathbb{N} \to x - 1 \in \mathbb{N}_0$

4. Si consideri l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con l'operazione $\star : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si abbia: $x \star y = x + y + |xy|$, dove il simbolo $+$ indica l'addizione usuale tra numeri razionali. Dopo avere osservato che l'elemento nullo 0 è elemento neutro, far vedere che -2 è simmetrico sia di se stesso sia dell'elemento $\frac{2}{3}$. Infatti, questa operazione non è associativa.

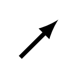
5. Siano A un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle sue parti. Osservare che l'unione e l'intersezione sono delle operazioni interne su $\mathcal{P}(A)$. Quali proprietà sono soddisfatte da queste operazioni?

6. Cosa è un gruppo abeliano? Quali esempi di gruppo abeliano e di gruppo non abeliano conosci? Cosa è un campo? Quali esempi di campo conosci?

7. Cosa è uno spazio vettoriale su un campo? Quali esempi di spazio vettoriale conosci?



8. Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:

Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per -2 quello già disegnato: 

9. Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali,

(i) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y')$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h \circ (x, y) = (hx + 2 - 2h, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oslash, *)$ *non* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oslash (x', y') = (x + y', x' + y)$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h * (x, y) = (hx, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si osservi che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale *diverso* dallo spazio vettoriale numerico con lo stesso sostegno $\mathbb{R}^2$.