- $X \subseteq \mathcal{L}(X)$ • $\mathcal{L}(X)$ è sottospazio vettoriale
- se $W \subseteq V$ è un sott. vett. tale che $X \subseteq W$, allora $\mathcal{L}(X) \subseteq W$

Prima facciamo la seguente osservazione:

$(V, +, \cdot)$ spaz. vett. su K

$S, T \subseteq V$

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T) \iff S \subseteq \mathcal{L}(T) \wedge T \subseteq \mathcal{L}(S)$$

"$\Rightarrow$" per il Teorema: $S \subseteq \mathcal{L}(S) \overset{Hyp}{=} \mathcal{L}(T)$

$T \subseteq \mathcal{L}(T) \overset{Hyp}{=} \mathcal{L}(S)$

"$\Leftarrow$"

per hyp: $S \subseteq \mathcal{L}(T)$ e $\underset{W}{\underset{\|}{\mathcal{L}(T)}}$ è un sott. vett. per il teorema

Allora, per il teorema, $\underline{\mathcal{L}(T)} = W \supseteq \underline{\mathcal{L}(S)}$

Scambiando il ruolo di T ed S abbiamo:

$T \underset{Hyp}{\subseteq} \mathcal{L}(S)$ e $\mathcal{L}(S)$ è un sott. vett. per il teorema.

Allora, per il teorema, $\mathcal{L}(S) \supseteq \mathcal{L}(T)$

Da cui $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$

<u>Dim</u> Se $X = \emptyset$, allora per convenzione $\mathcal{L}(X) = \{\underline{0}\}$

Supponiamo che $X \neq \emptyset$

(1) Th: $X \subseteq \mathcal{L}(X)$

$\forall v \in X$ $v = 1 \cdot v$, ovvero v è comb. lin. di vettori di X, quindi

$$v \in \mathcal{L}(X)$$

Allora è chiaro che $X \subseteq \mathcal{L}(X)$

(2) Th: $\mathcal{L}(X)$ è un sott. vett.

Vediamo che $\mathcal{L}(X)$ è linearmente chiuso

- $\forall v, w \in \mathcal{L}(X)$, $v + w \in \mathcal{L}(X)$

$$\Downarrow \underline{\text{def}}$$

$$\begin{array}{l} v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots\dots + \alpha_t v_t \\ w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots\dots + \beta_h w_h \\ \hline \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_h w_h \end{array} \quad + \quad \in \mathcal{L}(X)$$

in quanto comb. lin. di vettori di X

- $\forall v \in \mathcal{L}(X)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, vediamo che $\lambda v \in \mathcal{L}(X)$

$\lambda v = \lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t) =$ Usando la notazione prec.

$= \lambda(\alpha_1 v_1) + \dots + \lambda(\alpha_t v_t) =$

$= \underbrace{(\lambda\alpha_1)}_{\in K}\underbrace{v_1}_{\in X} + \dots + \underbrace{(\lambda\alpha_t)}_{\in K}\underbrace{v_t}_{\in X} \in \mathcal{L}(X)$

Essendo allora linearmente chiuso, $\mathcal{L}(X)$ è sottospazio vettoriale

(3) Th: $\forall\, W \subseteq V$ sott. vett. tale che $X \subseteq W$, si ha $\mathcal{L}(X) \subseteq W$.

$v \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \exists\, v_1, \dots, v_t \in X,\ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K:$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t$$

Ricordiamo che W è sott. vett. che contiene X, per cui:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \in K,\ v_1 \in K \subseteq W \Rightarrow \alpha_1 w_1 \in W \\ \vdots \\ \alpha_t \in K\ \ v_t \in K \subseteq W \Rightarrow \alpha_t w_t \in W \end{array} \Rightarrow v \in W$$

Di conseguenza $\mathcal{L}(X) \subseteq W$