Matrice associata all'applicazione identica

$$T = id : V \longrightarrow V \qquad \dim V = n$$

Fissate due basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ di V, la matrice associata a id_V in $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ si dice matrice di passaggio (o di cambiamento di base) da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$.

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \qquad \overline{\mathcal{B}} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$$

$$A = M_{\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}}(id\, V)$$

Abbiamo visto che A e' l'unica matrice tale che:

$$\forall u \in V, \quad (x_1, \dots, x_n) = \phi_{\mathcal{B}}(u)$$

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \phi_{\overline{\mathcal{B}}}(id_V(u)) = \phi_{\overline{\mathcal{B}}}(u)$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

La matrice A trasforma le componenti in B di un vettore u di V nelle componenti in $\overline{\mathcal{B}}$ dello stesso vettore u.

Esempio

$$V = M_2(\mathbb{R}) \qquad id_V : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\overline{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Phi_{\overline{\mathcal{B}}} : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = a \\ \alpha_1 = b \\ \alpha_2 + \alpha_3 = c \longrightarrow \alpha_3 = c - a \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = d \longrightarrow \alpha_4 = d - b - c + a \end{cases}$$

$$\Phi_{\overline{\mathcal{B}}} : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow (b, a, c-a, d-b-c+a)$$

$$\Phi_{\overline{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, 1, -1, 1)$$

$$\Phi_{\overline{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1, 0, 0, -1)$$

$$\Phi_{\overline{\mathcal{B}}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (0, 0, 1, -1)$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (0, 0, 0, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang } A = 4$$