Teorema

Sia $W \subseteq K^n$ un sottospazio vettoriale numerico di K^n. Esiste un sistema lineare omogeneo Σ_0 tale che W coincide con l'insieme delle sue soluzioni.

Dim

Sia $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_h)$ una base di W $(\dim W = h)$

$$w_1 = (a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, w_h = (a_h^1, \dots, a_h^n)$$

Sia $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$. Caratterizziamo i vettori che appartengono a K^n nel seguente modo:

$$u \in W \iff \operatorname{rango} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_h^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_h^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_h^n \end{matrix}}_{\text{ha rango } h = \dim W} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{matrix} \end{pmatrix} = h$$

Riducendo a gradini questa matrice ne trovo una del seguente tipo:

$$\begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_h^1 & b_1^1 x_1 + \cdots + b_m^1 x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & p_h^h & b_1^h x_1 + \cdots + b_m^h x_m \\ 0 & \cdots & 0 & b_1^{h+1} x_1 + \cdots + b_m^{h+1} x_m \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_1^m x_1 + \cdots + b_m^m x_m \end{pmatrix} \qquad \Sigma_0 : \begin{cases} b_1^{h+1} x_1 + \cdots + b_m^{h+1} x_m = 0 \\ \vdots \\ b_1^m x_1 + \cdots + b_m^m x_m = 0 \end{cases}$$

Esempio

$$W = \mathcal{L}\big((1,0,1,2),\ (1,1,0,1),\ (0,-1,1,1)\big)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R^2 = R^2 - R^1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R^3 = R^3 + R^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_W = \big((1,0,1,2),\ (1,1,0,1)\big)$$

$$u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

$$u \in W \iff \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 2 & 1 & x_4 \end{pmatrix} = \dim W = 2$$

$$\begin{matrix} R^3 = R^3 - R^1 \\ R^4 = R^4 - 2R^1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & -1 & x_4 - 2x_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R^3 = R^3 + R^2 \\ R^4 = R^4 + R^2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & x_4 - 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 - x_1 + x_2 = 0 \\ x_4 - 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$ rappresentazione Cartesiana di W

Vediamo con il Teorema degli orlati:

Dobbiamo imporre

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 2 & 1 & x_4 \end{pmatrix} = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |M| = 1 \neq 0$$

Considero tutti gli orlati di M:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \right| = 0 \iff (-1)^4 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 + x_3 = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 2 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \right| = 0 \iff 1 \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 2 & x_4 \end{vmatrix} + (-1)^5 x_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x_4 - 2x_1 + x_2 = 0$$

$$W: \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Una rappresentazione di un sottospazio vettoriale numerico $W \subseteq K^n$ è un insieme costituito da un numero finito di condizioni numeriche che sono soddisfatte da tutti e soli i vettori di W.

$W \subseteq K^n \qquad \dim W = h$

$B = (w_1, \dots, w_h)$ come nella dim

$u = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$

$u \in W \iff \exists\, t_1, \dots, t_h \in K$ tali che

$(x_1, \dots, x_n) = t_1(a_1^1, \dots, a_1^n) + \dots + t_h(a_h^1, \dots, a_h^n) \iff$

$\exists\, t_1, \dots, t_h \in K :$

$$W : \begin{cases} x_1 = a_1^1 t_1 + \dots + a_h^1 t_h \\ \vdots \\ x_n = a_1^n t_1 + \dots + a_h^n t_h \end{cases} \qquad t_1, \dots, t_h \in K$$

Rappresentazione parametrica di W

Esempio: $W \subseteq \mathbb{R}^4$, $\mathcal{B} = ((1,0,1,2), (1,1,0,1))$

$$W: \begin{cases} x_1 = 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 \\ x_2 = 0 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 \\ x_3 = 1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 \\ x_4 = 2 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = 2t_1 + t_2 \end{cases}$$

$$W = \{ (t_1 + t_2, t_2, t_1, 2t_1 + t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$