Proposizione:

(1) Ogni varietà lineare (P, U) è un sottospazio affine (no dim.)

$$H = (P, U) \quad \text{con} \quad \vec{H} = U$$

(2) Ogni sottospazio affine è una varietà lineare:

$$(\vec{H}, H, \pi_{|H \times H}) \quad \forall P_0 \in H, \quad H = (P_0, \vec{H}) = \{Q \mid \overrightarrow{P_0 Q} \in \vec{H}\}$$

"$\subseteq$" $\quad \vec{H} = \{\overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in H\}$

$$P \in H, \; P_0 \in H \Rightarrow \overrightarrow{P_0 P} \in \vec{H} \Rightarrow P \in (P_0, \vec{H})$$

"$\supseteq$"

$$Q \in (P_0, \vec{H}) \Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{P_0 Q}}_{= a} \in \vec{H}$$

$$P_0 \in H, \; a \in \vec{H} \underset{(1)}{\Rightarrow} \exists!\, X \in H : \overrightarrow{P_0 X} = a$$

$$\Rightarrow Q = X \in H$$

Esempio:

$$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \pi)$$

$P_0 = (-3,4)$ $\qquad U = \mathcal{L}((1,5)) = \overrightarrow{H} = \{\alpha(1,5) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$H = (P_0, U) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{P_0 Q} \in U\}$$

$Q = (a,b)$ $\qquad \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b) - (-3,4) \in U\} =$

$$= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a,b) = (-3,4) + \alpha(1,5),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(-3,4) + \alpha(1,5) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

retta in $\mathbb{R}^2$