ESERCIZI 12

1. Cosa sono gli autovalori e gli autovettori di un endomorfismo T? Che relazione c'è con gli autovalori e gli autovettori di una matrice associata a T in un riferimento fissato? Come si calcolano?

2. Data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ con matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nel riferimento $\mathcal{R} = (1, 1+x, x+x^2)$, calcolarne autovalori e autospazi.

3. Determinare la matrice associata all'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f((x,y,z)) = (2y+z, x-y+z)$, nei riferimenti $\mathcal{R} = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ e $\mathcal{R}' = ((1,2),(-1,0))$.

4. Se $\mathcal{B} = (u,v,w)$ è una base di V di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e $f : V \to V$ è l'endomorfismo di V tale che $f(u) = u+w$, $f(v) = -u+v+w$ e $f(w) = v+2w$,

(i) spiegare perché il vettore $u+v-w$ è autovettore di f;
(ii) spiegare perché f non è iniettiva;
(iii) scrivere la matrice A associata a f nella base ordinata $\mathcal{B}$.

5. Cosa vuol dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Cosa vuol dire che una matrice quadrata è diagonalizzabile?

6. Le seguenti matrici sono diagonalizzabili?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Determinare autovalori e autospazi della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e dire se A è diagonalizzabile.

8. Determinare la matrice A associata all'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x,y,z)) = (4x + 3y - 3z, 6x + y - 3z, 12x + 6y - 8z)$ nel riferimento $\mathcal{R} = ((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1))$.

Calcolare autovalori e autospazi della matrice A e dell'endomorfismo f.

9. Sia F_A l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Dire se F_A è iniettiva e suriettiva.
(ii) Determinare gli autovalori e gli autovettori di F_A.
(iii) La matrice A è diagonalizzabile?