ESERCIZI 9

1. Studiare le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ determinate dalle seguenti matrici di $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, dicendo se sono iniettive o suriettive e calcolandone l'immagine e il nucleo.

$$(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix};\quad (b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad (c)\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\qquad (e)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\qquad (f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Osservare che per ciascuna matrice le colonne sono le immagini dei vettori della base canonica del dominio mediante l'applicazione lineare corrispondente.

2. Data un'applicazione lineare T tra spazi vettoriali finitamente generati, dire cosa è la matrice associata a T in riferimenti fissati e dire di quali proprietà questa matrice gode.

3. Determinare le matrici associate alle seguenti applicazioni lineari nei riferimenti fissati:

$f_1 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}^2[x] \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 - a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2,2}$

$\mathcal{R} = (1, 1+x, x+x^2)$, $\qquad \mathcal{R}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$;

$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 \to \mathbb{R}^2[x] \to (a_1 + a_0)x + (a_2 - a_0)x^2 \in \mathbb{R}^2[x]$
$\mathcal{R} = (1, x, x^2)$, $\qquad \mathcal{R}' = \mathcal{R}$;

$f_3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to (2a, 0, c - b) \in \mathbb{R}^3$
$\mathcal{R} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, $\qquad \mathcal{R}' = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

4. Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tale che $f((1, 0, 1)) = -1 + 2x - x^2 + x^3$, $f((1, 1, 2)) = 4x + x^3$ e $f((0, 0, 1)) = 2x - x^2$, dire perché e come si può determinare $f((a_1, a_2, a_3))$, per ogni vettore (a_1, a_2, a_3) di $\mathbb{R}^3$. Inoltre:

(a) determinare l'immagine Imf e il nucleo Ker$f$ di f;
(b) dire se l'applicazione f è iniettiva o suriettiva e perché;
(c) scrivere la matrice associata a f nelle basi ordinate $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 1))$ e $\mathcal{B}' = (1, 1 + x, -x^2, x + x^3)$.

5. Date le basi ordinate $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0))$ di $\mathbb{R}^3$,

(a) determinare la matrice P di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e la matrice Q di passaggio da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. A cosa è uguale il prodotto PQ? E QP?
(b) Dato l'endomorfismo $f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \to (2x_1, x_2 - x_3, -x_3) \in \mathbb{R}^3$, determinare la matrice associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\mathcal{B}$ e quella associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\bar{\mathcal{B}}$. Che relazione sussiste tra queste due matrici?

6. Date le basi ordinate $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 0, 1))$ e $\bar{\mathcal{B}} = ((0, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 0))$ di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice P di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\bar{\mathcal{B}}$ e quella Q da $\bar{\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$. Dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y, z)) = (x + 2y, y + z, x + y + z)$, determinare la matrice A associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ e quella $\bar{A}$ associata a f fissando nel dominio e nel codominio la stessa base ordinata $\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}'$. Osservare che $Q = P^{-1}$ e ovviamente $P = Q^{-1}$. Inoltre si ha che $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ e $A = P^{-1}\bar{A}P$.

7. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:
$W = \mathcal{L}((1, 2, 1), (2, 1, -1), (-1, 1, 2))$, $Z = \mathcal{L}((2, 1, -1), (0, 1, 1))$, $T = \mathcal{L}((1, 3, 2))$.
Determinare dei sottospazi vettoriali W', Z', T' di $\mathbb{R}^3$ tali che le somme $W + W'$, $Z + Z'$, $T + T'$ siano dirette e siano uguali a $\mathbb{R}^3$.

8. Vedere se i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti usando gli isomorfismi coordinati rispetto alle basi canoniche:

$$S = \{x + 2x^3, 1 - x^2, 1 + 2x, 1 + 2x - x^2 + 4x^3\} \subset \mathbb{R}^3[x],$$

$$T = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}_{2,2}.$$