ESERCIZI 8

1. Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

2. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Cosa vuol dire che una matrice quadrata A su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile? Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici che risulta essere invertibile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Per ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale numerico su $\mathbb{R}$ determinare un sistema di equazioni lineari di cui il sottospazio è l'insieme delle soluzioni:

$W = \mathcal{L}((0,1,-1,2,3),(2,1,0,2,1),(2,0,1,0,-2),(0,0,1,1,-1)) \subseteq \mathbb{R}^5$,
$H = \mathcal{L}((2,1,2,3),(0,1,2,2))) \subseteq \mathbb{R}^4$
$U = \mathcal{L}((1,1,-1,1,0),(-1,-1,1,-1,0),(0,2,1,1,1)) \subseteq \mathbb{R}^5$
$X = \mathcal{L}((1,2,0,1),(2,1,-1,1),(-1,4,2,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$
$Y = \mathcal{L}((2,-3,1,0),(-1,2,1,0)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

5. Determinare il sottospazio intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$W_1 = \mathcal{L}((2,1,1,2),(0,1,0,1),(1,2,0,-1))$

$$W_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$