V sp. vett finitamente generato su K, $\dim(V) = n$

Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ordinata

Abbiamo definito

$$\phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$$
$$u \rightsquigarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

vettore delle comp. di u in $\mathcal{B}$

tale che $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

Abbiamo dimostrato che $\phi_{\mathcal{B}}$ é iniettiva e suriettiva.

Vediamo che $\phi_{\mathcal{B}}$ é un' appl. lineare

Quindi: $\phi_{\mathcal{B}}$ é un isomorfismo detto:

ISOMORFISMO (coordinato) associato a $\mathcal{B}$.

- $\forall\, u, w \in V$, $\phi_{\mathcal{B}}(u + w) = \phi_{\mathcal{B}}(u) + \phi_{\mathcal{B}}(w)$

$\phi_{\mathcal{B}}(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\qquad u \equiv_{\mathcal{B}} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$\phi_{\mathcal{B}}(w) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ $\qquad w \equiv_{\mathcal{B}} (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$$u + w = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) e_n$$

Quindi: $\Phi_B(u+w) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) =$

$$= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = \Phi_B(u) + \Phi_B(w)$$

- $\forall u \in V,\ \forall \gamma \in K,\quad \Phi_B(\gamma u) = \gamma \Phi_B(u)$

$$\gamma u = \gamma(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \gamma(\alpha_1 e_1) + \dots + \gamma(\alpha_n e_n) =$$

$$= (\gamma \alpha_1) e_1 + \dots + (\gamma \alpha_n) e_n$$

Per l'unicità del vettore delle componenti abbiamo:

$$\Phi_B(\gamma u) = (\gamma \alpha_1, \dots, \gamma \alpha_n) = \gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \gamma \Phi_B(u) \quad \boxtimes$$