Dim

Per ipotesi, esiste un sistema di generatori di W composto da n vettori.

Sia $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ un tale sistema di generatori.

Dobbiamo dimostrare che preso comunque un insieme:

$$X = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq W$$

se $m > n$ allora X è linearmente dipendente.

Supponiamo $\underline{0} \notin X$. Infatti se X contiene il vettore nullo, allora la tesi segue immediatamente.

Siccome $v_1 \in W = \mathcal{L}(S)$, allora v_1 si può esprimere come combinazione lineare di vettori di S mediante scalari non tutti nulli (siccome $\underline{0} \notin X$):

$$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

con, ad esempio $\lambda_1 \neq 0$. Quindi esiste $\lambda_1^{-1} \in K$ e moltiplico ambo i membri per λ_1^{-1}, ottenendo:

$$\lambda_1^{-1} v_1 = \lambda_1^{-1}\lambda_1 u_1 - \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 + \dots - \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n$$

e di conseguenza:

$$u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 + \dots - \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n)$$

Adesso possiamo osservare che l'insieme S è contenuto nella chiusura lineare $\mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n)$, per cui

$$W = \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) = S'$$

è un sistema di generatori di W ottenuto sostituendo in S il vettore u_1 con il vettore v_1 di X.

Siccome v_2 è un vettore di $W = \mathcal{L}(S')$, allora v_2 si può esprimere mediante combinazione lineare di vettori di S' e di scalari non tutti nulli, in quanto $v_2 \neq \underline{0}$

$$\exists\, \beta_1, \dots, \beta_n \in K : v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$$

Se $\beta_2 = \dots = \beta_n = 0$, allora $\beta_1 \neq 0$ e $v_2 = \beta_1 v_1$, così che X risulta essere linearmente dipendente.

Altrimenti possiamo supporre $\beta_2 \neq 0$, per cui esiste $\beta_2^{-1} \in K$, e moltiplico ambo i membri e reitero il precedente procedimento.
Se $m > n$ possiamo ripetere questo procedimento fino a trovare che X è linearmente dipendente o che $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è

un sistema di generatori di W. Quindi $v_{n+1} \in X \subset W$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$, la qual cosa implica che l'insieme X è linearmente dipendente.