Teorema di Rouché - Capelli

$\Sigma : Ax = b$ é compatibile $\Longleftrightarrow$ rango (A) = rango (C)

<u>Dim</u>

Scriviamo Σ in forma vettoriale

$$x_1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \dots\dots + x_n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Possiamo così subito dedurne che:

Σ é compatibile $\Longleftrightarrow b \in \mathcal{L}(a_1, a_2, \dots\dots, a_n)$

Allora dimostriamo:

dove:

$b \in \mathcal{L}(a_1, a_2, \dots\dots, a_n) \Longleftrightarrow$ rango A = rango C, $C = (A \;\; b)$

" $\Longrightarrow$ "

Per ipotesi $b \in \mathcal{L}(a_1, \dots\dots, a_n)$

Quindi

$\mathcal{L}(a_1, \dots\dots, a_n) = \mathcal{L}(a_1, \dots\dots, a_n, b)$

da cui

$$\dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) = \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b)$$

$$\underset{\text{rango } A}{\uparrow} \qquad = \qquad \underset{\text{rango } C}{\uparrow}$$

"$\Longleftarrow$"

Sappiamo $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \subseteq \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b)$

Quindi che

$$\dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) = \dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b)$$

Deduciamo allora

$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, b)$

di conseguenza

$$b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) \iff \Sigma \text{ è compatibile}$$