格林函数计算中的几个问题

Green Function:

$$G(\kappa, t-t') \equiv -i < T[\hat{C_\kappa}(t)\hat{C_\kappa^\dagger}(t')] > \quad \text{(1fermion)}$$

$$D(q, t-t') \equiv -i < T[\hat{A_q}(t)\hat{A_{-q}^\dagger}(t')] > \quad \text{(1boson)}$$

1)单个空带:

$$\hat{C}_\kappa|0>=0$$

$$\begin{aligned} G(\kappa, t-t') &= -i\theta(t-t') < \hat{C_\kappa}(t)\hat{C_\kappa^\dagger}(t') > \\ &= -i\theta(t-t')e^{-i\varepsilon_\kappa(t-t')} \end{aligned} \quad (2)$$

Fourier transform:

$$\begin{aligned} G(\kappa, E) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dte^{iEt}G(\kappa, t) \\ &= \frac{1}{E-\varepsilon_\kappa+i\delta} \end{aligned} \quad (3)$$

2) A degenerate electron gas:

$$< |\hat{C}_\kappa^\dagger\hat{C}_\kappa| > = \theta(\kappa_F-\kappa) \quad \text{(4a)}$$

$$< |\hat{C}_\kappa\hat{C}_\kappa^\dagger| > = \theta(\kappa-\kappa_F) \quad \text{(4b)}$$

$$\begin{aligned} G(\kappa, t-t') &= -i < T[\hat{C}_\kappa(t)\hat{C}_\kappa^\dagger(t')] > \\ &= -i\theta(t-t')\theta(\varepsilon_\kappa)e^{-i\varepsilon_\kappa(t-t')} + i\theta(t'-t)\theta(-\varepsilon_\kappa)e^{-i\varepsilon_\kappa(t-t')} \\ &= -i[\theta(t-t')\theta(\varepsilon_\kappa) - \theta(t'-t)\theta(-\varepsilon_\kappa)]e^{-i\varepsilon_\kappa(t-t')} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} G(\kappa, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dte^{i\omega t}G(\kappa, t) \\ &= \frac{\theta(\varepsilon_\kappa)}{\omega-\varepsilon_\kappa+i\delta} + \frac{\theta(-\varepsilon_\kappa)}{\omega-\varepsilon_\kappa-i\delta} \\ &= \frac{1}{\omega-\varepsilon_\kappa+i\delta_\kappa} \end{aligned} \quad (6)$$

其中：$\delta_\kappa = \delta Sign(\varepsilon_\kappa)$。3) Phonon: Zero-Temperature

$$< |\hat{a}_q^\dagger\hat{a}_q| > = 0 \quad \text{(7a)}$$

$$< |\hat{a}_q\hat{a}_q^\dagger| > = 1 \quad \text{(7b)}$$

$$
\begin{aligned}
D(q,t-t') &= -i < |T[\hat{A}_q(t)\hat{A}_{-q}(t')]| > \\
&= -i < |T[(\hat{a}_q e^{-i\omega_q t} + \hat{a}^\dagger_{-q} e^{i\omega_q t})(\hat{a}_{-q} e^{-i\omega_q t'} + \hat{a}^\dagger_q e^{i\omega_q t'})]| > \\
&= -i[\theta(t-t')e^{-i\omega_q(t-t')} + \theta(t'-t)e^{i\omega_q(t-t')}]
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
D(q,\omega) &= \frac{1}{\omega-\omega_q+i\delta} - \frac{1}{\omega+\omega_q-i\delta} \\
&= \frac{2\omega_q}{\omega^2-\omega_q^2+i\delta}
\end{aligned} \tag{9}
$$

所有的物理过程都要满足因果律，因此，所要计算的各种关联函数也要满足因果关系。为了计算的方便，特别是在相空间中的计算，都省略了反映因果律（或时序乘积）的收敛因子$\delta \to 0^+$，而在最后的计算中要恢复收敛因子，才能得到正确的结果。

正确的恢复收敛因子$\delta \to 0^+$，应从两方面考虑：

a 物理过程。

b 数学原理：约当引理

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) e^{imx}, (|x| \to \infty, F(x) \to 0)
$$

a) m>0, 延拓到上半复平面；

b) m<0, 延拓到下半复平面。

例如：

$$
G(\kappa,\omega) = \frac{1}{\omega-\varepsilon_\kappa}
$$

的Fourier的逆变换：

$$
\begin{aligned}
G(\kappa,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega G(\kappa,\omega) e^{-i\omega t} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\varepsilon_\kappa}
\end{aligned} \tag{10}
$$

极点在实轴上，要做解析延拓。$\omega = \varepsilon_\kappa \pm i\delta$。

a 物理过程:

$\varepsilon_\kappa > 0$对应于产生-湮灭粒子过程，因果关系，推迟部分；电子传播，从Fermi面下到上

$\varepsilon_\kappa < 0$对应于湮灭-产生粒子过程，反因果关系，超前部分。空穴传播 - - - .

$$
\begin{cases}
\varepsilon_\kappa > 0, \omega = \varepsilon_\kappa - i\delta \\
\varepsilon_\kappa < 0, \omega = \varepsilon_\kappa + i\delta
\end{cases} \tag{11}
$$

$$
G(\kappa,t) = \frac{\theta(\varepsilon_\kappa)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\varepsilon_\kappa+i\delta} + \frac{\theta(-\varepsilon_\kappa)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega-\varepsilon_\kappa-i\delta} \tag{12}
$$

b 应用约当引理:

$t > 0, \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(x) e^{i\omega t}$ 取上半复平面的回路

$t < 0, \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(x) e^{i\omega t}$ 取下半复平面的回路

$$\begin{aligned} G(\kappa, t) &= \frac{\theta(\varepsilon_\kappa)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \varepsilon_\kappa + i\delta} [\theta(t) + \theta(-t)] + \frac{\theta(-\varepsilon_\kappa)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - \varepsilon_\kappa - i\delta} [\theta(t) + \theta(-t)] \\ &= -i\theta(t)\theta(\varepsilon_\kappa) e^{-i\varepsilon_\kappa t} + i\theta(-t)\theta(-\varepsilon_\kappa) e^{-i\varepsilon_\kappa t} \\ &= -i[\theta(t)\theta(\varepsilon_\kappa) - \theta(-t)\theta(-\varepsilon_\kappa)] e^{-i\varepsilon_\kappa t} \end{aligned} \tag{13}$$

例如：

$$G(q, \omega) = \frac{2\omega_q}{\omega^2 - \omega_q^2} = \frac{1}{\omega - \omega_q} - \frac{1}{\omega + \omega_q}, (\omega_q > 0)$$

作Fourier逆变换

$$\begin{aligned} G(q, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G(q, \omega) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\frac{1}{\omega - \omega_q} - \frac{1}{\omega + \omega_q}] e^{-i\omega t} \theta(\omega_q) \\ &= \frac{\theta(\omega_q)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\frac{1}{\omega - \omega_q + i\delta} - \frac{1}{\omega + \omega_q - i\delta}] e^{-i\omega t} (\theta(t) + \theta(-t)) \\ &= -i\theta(\omega_q) [\theta(t) e^{-i\omega_q t} + \theta(-t) e^{i\omega_q t}] \end{aligned} \tag{14}$$

例如对一个费米系统

$$G(\kappa, q, \omega) = \frac{1}{\omega + \varepsilon_\kappa - \varepsilon_{\kappa+q}}$$

的Fourier逆变换

$\omega = \varepsilon_{\kappa+q} - \varepsilon_\kappa > 0$,对应于产生粒子空穴对过程，因果关系，推迟部分； $\left.\begin{matrix} k+q > k_F \\ k < k_F \end{matrix}\right\}$

$\omega = \varepsilon_{\kappa+q} - \varepsilon_\kappa < 0$, 对应于湮灭粒子空穴对过程，反因果关系，超前部分。 $\left.\begin{matrix} k+q < k_F \\ k > k_F \end{matrix}\right\}$

$$\begin{aligned} G(\kappa, q, \omega) = &\ \frac{1}{2\pi} \int d\omega G(\kappa, q, \omega) \\ = &\ \frac{\theta(\varepsilon_{\kappa+q} - \varepsilon_\kappa)}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + \varepsilon_\kappa - \varepsilon_{\kappa+q} + i\delta} (\theta(t) + \theta(-t)) \qquad (15) \\ &+ \frac{\theta(\varepsilon_\kappa - \varepsilon_{\kappa+q})}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + \varepsilon_\kappa - \varepsilon_{\kappa+q} - i\delta} (\theta(t) + \theta(-t)) \\ = &\ -i\theta(\varepsilon_{\kappa+q} - \varepsilon_\kappa)\theta(t) e^{-i(\varepsilon_{\kappa+q} - \varepsilon_\kappa)t} + i\theta(\varepsilon_\kappa - \varepsilon_{\kappa+q})\theta(-t) e^{-i(\varepsilon_{\kappa+q} - \varepsilon_\kappa)t} \\ = &\ -i[\theta(t)\theta(\varepsilon_{\kappa+q} - \varepsilon_\kappa) - \theta(-t)\theta(\varepsilon_\kappa - \varepsilon_{\kappa+q})] e^{-i(\theta(\varepsilon_{\kappa+q} - \varepsilon_\kappa)t} \qquad (16) \end{aligned}$$

体系本是基态 而 $G = \frac{1}{\omega - \varepsilon_{k,q}}$. $\varepsilon_{k,q}$ 是电子体

的能量 如 $\varepsilon_{k,q} > 0$ 则意味在 Fermi 面以上，激发态。

基态在 $T<0$，激发态是 $T>0$ 的推迟。$\varepsilon_{k,q} < 0$ 只能体现

在进入基态前的状态，超前。