

3 关于费米面的积分

在费米液体的微扰计算中经常出现一些关于费米面的积分, 现在具体的几个积分的计算总结在这一节.

3.1 第一个积分

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V} \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} &= \int_{|\mathbf{k}| < k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{ikr \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \int_0^\pi \frac{1}{-ikr} de^{ikr \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{-ir} \int_0^{k_F} k dk (e^{-ikr} - e^{ikr}) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r} \int_0^{k_F} k \sin(kr) dk \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r^3} \int_0^{rk_F} x \sin x dx \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{r^3} \left(- \int_0^{rk_F} x d \cos x \right) \\
 &= \frac{k_F^3}{2\pi^2} \frac{\sin(k_F r) - k_F r \cos(k_F r)}{(k_F r)^3}. \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

3.2 第二个积分

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V} \sum_{|\mathbf{k}'| < k_F} \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} &= \int_{|\mathbf{k}'| < k_F} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} k'^2 dk' \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{k'^2 + k^2 - 2k'k \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{k_F} k'^2 dk' \int_{-1}^1 \frac{dx}{k'^2 + k^2 - 2k'kx} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k} \int_0^{k_F} k' \ln \left| \frac{k' + k}{k' - k} \right| dk' \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k} \left(\int_0^{k_F} k' \ln |k' + k| dk' - \int_0^{k_F} k' \ln |k' - k| dk' \right), \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

其中用到了变量代换 $d \cos \theta = -\sin \theta d\theta = dx$. 下面分别计算上面括号内的两个积分.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{k_F} k' \ln |k' + k| dk' \\
&= \int_0^{k_F} (k' + k) \ln |k' + k| dk' - k \int_0^{k_F} \ln |k' + k| dk' \\
&= \int_k^{k_F+k} t \ln |t| dt - k \int_k^{k_F+k} \ln |t| dt \\
&= \frac{1}{2} \int_k^{k_F+k} \ln |t| dt^2 - k \int_k^{k_F+k} \ln |t| dt \\
&= \frac{1}{2} \left(t^2 \ln |t| \Big|_k^{k_F+k} - \int_k^{k_F+k} t^2 d \ln |t| \right) - k \left(t \ln |t| \Big|_k^{k_F+k} - \int_k^{k_F+k} dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(t^2 \ln |t| \Big|_k^{k_F+k} - \int_k^{k_F+k} t dt \right) - k \left(t \ln |t| \Big|_k^{k_F+k} - \int_k^{k_F+k} dt \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[(k_F - k)^2 \ln |k_F - k| - k^2 \ln |-k| - \frac{1}{2} (k_F - k)^2 + \frac{1}{2} (-k)^2 \right] \\
&\quad + k [(k_F - k) \ln |k_F - k| - (-k) \ln |-k| - (k_F - k) + (-k)], \tag{3.3}
\end{aligned}$$

第二个积分类似故不再写出. 两个积分相减, 有

$$\int_0^{k_F} k' \ln |k' + k| dk' - \int_0^{k_F} k' \ln |k' - k| dk' = \frac{1}{2} (k_F^2 - k^2) \ln \left| \frac{k_F + k}{k_F - k} \right| + k_F k, \tag{3.4}$$

代回原积分

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \sum_{|\mathbf{k}'| < k_F} \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} &= \int_{|\mathbf{k}'| < k_F} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k} \left[\frac{1}{2} (k_F^2 - k^2) \ln \left| \frac{k_F + k}{k_F - k} \right| + k_F k \right] \\
&= \frac{k_F}{2\pi^2} \left(\frac{k_F^2 - k^2}{4k_F k} \ln \left| \frac{k_F + k}{k_F - k} \right| + \frac{1}{2} \right), \tag{3.5}
\end{aligned}$$

这实际上就是 Linhard 函数.

3.3 第三个积分

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} \frac{1}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2 - k^2} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} k^2 dk \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{q^2 + 2kq \cos \theta} \\
&= \frac{k_F}{8\pi^2} \left(\frac{4k_F^2 - q^2}{8k_F q} \ln \left| \frac{q + 2k_F}{q - 2k_F} \right| + \frac{1}{2} \right), \tag{3.6}
\end{aligned}$$

计算方法同第二个积分, 换了一些数字而已.

3.4 第四个积分

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{V^2} \sum_{|\mathbf{k}'| < k_F} \sum_{|\mathbf{k}| < k_F} \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} &= \int_{|\mathbf{k}| < k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}'| < k_F} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2} \\
 &= \int_{|\mathbf{k}| < k_F} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k} + \mathbf{q}| < k_F} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{|\mathbf{q}|^2}, \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

计算这个积分我们有如下的步骤：1. \mathbf{q} 的方向与积分无关，故 \mathbf{q} 的方向部分的积分为 4π ；2. 关于 q 的长度部分的积分，我们可想象两个费米球，只有当 $0 < |\mathbf{q}| < 2k_F$ 时，才可以满足积分区域的要求，同时我们可以知道两个费米球交叠部

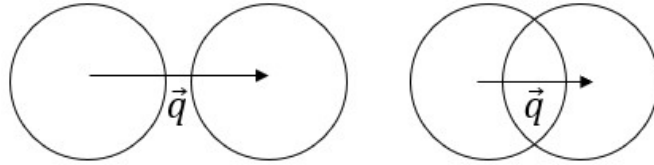


Figure 3.1: q 的取值范围

分的体积就是所求的积分值；3. θ 的变化范围是 $\frac{q}{2k_F} < \cos \theta < 1$, k 的变化范围是 $y(\theta) < k < k_F$. 故对于 k 的积分我们

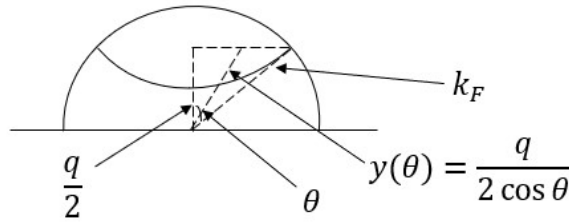


Figure 3.2: k 的取值范围

有

$$\begin{aligned}
 &\int_{\frac{q}{2\cos\theta}}^{k_F} k^2 dk \int_{\frac{q}{2k_F}}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= \frac{2\pi k_F^3}{3} - \frac{\pi q k_F^2}{2} + \frac{\pi q^3}{24}, \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

再带入到对 q 的积分我们有

$$\int_0^{2k_F} \left(\frac{2\pi k_F^3}{3} - \frac{\pi q k_F^2}{2} + \frac{\pi q^3}{24} \right) dq = \frac{\pi k_F^4}{2}, \tag{3.9}$$

这里要注意，这只是对交叠部分的一半进行了积分，还要乘以 2。最后 $\pi k_F^4 \times 4\pi / (2\pi)^6 = \left(\frac{k_F}{2\pi}\right)^4$ 即为所求的积分值。这个积分十分重要，这是在算电子凝胶模型的一阶微扰时所遇到的积分，最后的结果告诉我们交换关联能的修正是负的，也就是说考虑了交换关联能后，体系的能量会降低！