pair bubble: $$\chi_0(\vec{q},\tau) = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma} \mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}\sigma,\tau)\,\mathcal{G}_0(\vec{k}\sigma,-\tau)$$

$$\int_0^\beta \chi_0(\vec{q},\tau)\, e^{iq_n\tau}\, d\tau = \int_0^\beta \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma} \mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}\sigma,\tau)\,\mathcal{G}_0(\vec{k}\sigma,-\tau)\, e^{iq_n\tau}\, d\tau$$

$$= \chi_0(\vec{q}, iq_n)$$

$$= \int_0^\beta \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma} \frac{1}{\beta}\sum_{ik_n} \mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}, ik_n)\, e^{-ik_n\tau}\, \frac{1}{\beta}\sum_{i\nu_n} \mathcal{G}_0(\vec{k}, i\nu_n)\, e^{+i\nu_n\tau}\, e^{iq_n\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\beta V}\sum_{\vec{k}\sigma}\sum_{ik_n}\sum_{i\nu_n} \mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}, ik_n)\,\mathcal{G}_0(\vec{k}, i\nu_n)\,\delta_{ik_n = i\nu_n + iq_n}$$

$$= \frac{1}{\beta V}\sum_{\vec{k}\sigma}\sum_{i\nu_n} \mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}, i\nu_n + iq_n)\,\mathcal{G}_0(\vec{k}, i\nu_n)$$

$$= \frac{1}{\beta V}\sum_{\vec{k}\sigma}\sum_{ik_n} \mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}, ik_n + iq_n)\,\mathcal{G}_0(\vec{k}, ik_n)$$

$$\chi_0(\vec{q}, iq_n) = \frac{1}{\beta}\sum_{ik_n}\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma} \mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}, ik_n+iq_n)\, \mathcal{G}_0(\vec{k}\sigma, ik_n)$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma} \mathrm{Res}[\mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}, ik_n+iq_n)]\, n_F(-iq_n+\xi_{\vec{k}+\vec{q}})\, \mathcal{G}_0(\vec{k}\sigma, -iq_n+\xi_{\vec{k}+\vec{q}})$$

$$+ \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma} \mathrm{Res}[\mathcal{G}_0(\vec{k}, ik_n)]\, n_F(\xi_{\vec{k}})\, \mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}, iq_n+\xi_{\vec{k}})$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma} n_F(-iq_n+\xi_{\vec{k}+\vec{q}})\, \mathcal{G}_0(\vec{k}\sigma, -iq_n+\xi_{\vec{k}+\vec{q}})$$

$$+ \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma} n_F(\xi_{\vec{k}})\, \mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}, \xi_{\vec{k}}+iq_n)$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma} \frac{n_F(-iq_n+\xi_{\vec{k}+\vec{q}})}{-iq_n+\xi_{\vec{k}+\vec{q}}-\xi_{\vec{k}}} + \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma}\frac{n_F(\xi_{\vec{k}})}{iq_n+\xi_{\vec{k}}-\xi_{\vec{k}+\vec{q}}}$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}\sigma}\frac{n_F(\xi_{\vec{k}}) - n_F(\xi_{\vec{k}+\vec{q}})}{iq_n+\xi_{\vec{k}}-\xi_{\vec{k}+\vec{q}}}$$

where

$$\mathcal{G}_0(\vec{k}+\vec{q}, ik_n+iq_n) = \frac{1}{ik_n+iq_n-\xi_{\vec{k}+\vec{q}}}$$

pole is $-iq_n+\xi_{\vec{k}+\vec{q}}$

$$\mathcal{G}_0(\vec{k}, ik_n) = \frac{1}{ik_n-\xi_{\vec{k}}}$$

pole is $\xi_{\vec{k}}$

boson Matsubara

$iq_n = 2\pi n k_B T$