

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona

Control Automàtic: Pràctiques

**TREBALLS PRÀCTICS  
DE  
CONTROL DIGITAL**

Departament d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i  
Informàtica Industrial



Les pràctiques de l'assignatura Control amb Computador consisteixen en l'estudi d'un servomecanisme de posicionament angular controlat per un PC. Les sessions de laboratori P1 i P2 es centren, respectivament, en l'anàlisi experimental de les respostes temporal i freqüencial del sistema. La sessió P3 es dedica al disseny de controladors PID. Aquest manual descriu el sistema, conté breus explicacions teòriques i proposa diferents exercicis amb l'objectiu d'assimilar els conceptes bàsics del control digital.



# Índex

<b>1</b>	<b>ANÀLISI DE LA RESPOSTA TEMPORAL (Sessió P1)</b>	<b>1</b>
1.1	Descripció de la planta L J Technical Systems . . . . .	1
1.2	El computador . . . . .	2
1.2.1	El convertidor A/D-D/A . . . . .	2
1.2.2	El software . . . . .	3
1.3	Resposta temporal del sistema . . . . .	6
1.4	Model de la planta . . . . .	6
1.5	El període de mostratge: Anàlisi de la precisió i l'estabilitat . . . . .	7
<b>2</b>	<b>ANÀLISI DE LA RESPOSTA FREQUÈNCIAL (Sessió P2)</b>	<b>11</b>
2.1	La resposta freqüencial d'un sistema de temps discret . . . . .	11
2.2	Metodologia per a l'obtenció de la resposta freqüencial . . . . .	11
2.3	El criteri de Nyquist . . . . .	12
2.4	Codi MATLAB <sup>®</sup> per a la resolució de l'exercici 8 . . . . .	14
<b>3</b>	<b>DISSENY DE CONTROLADORS PID (Sessió P3)</b>	<b>17</b>
3.1	Disseny per assignació de pols . . . . .	17
3.2	Codi MATLAB <sup>®</sup> per la resolució de l'exercici 11 . . . . .	20



# Capítol 1

## ANÀLISI DE LA RESPOSTA TEMPORAL (Sessió P1)

**Objectiu:** *Anàlisi de la resposta temporal d'un sistema de control digital per a diferents períodes de mostratge. Anàlisi de la precisió i de l'estabilitat.*

En aquesta sessió l'estudiant ha de:

- Familiaritzar-se amb el sistema: amb la planta de temps continu i amb l'ús del computador com a generador de senyals, oscil·loscopi i controlador digital.
- Avaluar les prestacions (precisió i estabilitat) del sistema en funció del període de mostratge.

### 1.1 Descripció de la planta L J Technical Systems

Aquesta planta és un motor de corrent continu que, mitjançant un sistema de corretges, produeix moviment a un eix de sortida, la posició del qual es pretén controlar (figura 1.1). A continuació es descriu breument com accionar el motor i mesurar la velocitat i la posició de l'eix.

- Per **accionar el motor** cal:
  - Donar tensió a la font d'alimentació (que ja està connectada a la planta)
  - Connectar l'entrada digital  $\overline{E}$  (enable) a 0 V per habilitar l'entrada a la planta (figura 1.2a).
  - Connectar el commutador MOTOR DRIVE a  $V_{IN}$  (figura 1.2d).
  - Entrar tensions entre  $\pm 5$  V a l'entrada  $V_{IN}$  del bloc MOTOR DRIVE INPUT (figura 1.2a). Les tensions les generarà el computador.
- Per **mesurar la velocitat** la planta està equipada amb una dinamo tacomètrica. La sortida  $V_{OUT}$  del bloc TACHO GENERATOR OUTPUT (figura 1.2b) dóna una tensió proporcional a la velocitat de l'eix del motor (l'eix de sortida gira 9 vegades més lent). La constant de proporcionalitat és  $K_T = 0,017$  V/(rad/s). Per fer les mesures cal verificar abans que el commutador TACHO GENERATOR estigui a  $V_{OUT}$  (figura 1.2e).
- Per **mesurar la posició** de l'eix de sortida la planta està equipada amb un potenciómetre que cal embragar a l'eix quan es vulguin fer les mesures (cal mantenir-lo desembragat quan no s'usi per a evitar el seu desgast). La sortida  $V_{OUT}$  del bloc POTENTIOMETER OUTPUT (figura 1.2c) dóna una tensió proporcional a la posició de l'eix de sortida, amb una constant

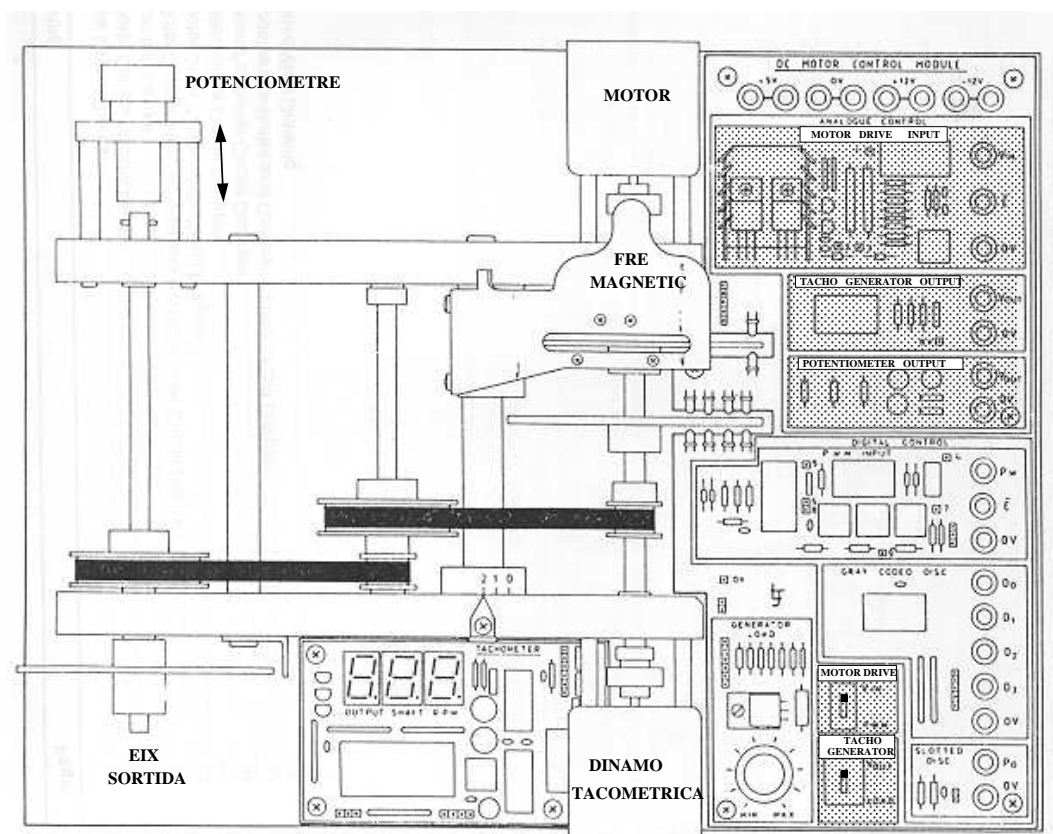


Figura 1.1: Esquema de la planta

de proporcionalitat  $K_{POT} = 1.62 \text{ V/rad}$ . Quan usem la mesura de posició per realimentar el sistema haurem de tenir en compte la reducció entre eixos.

## 1.2 El computador

Per a generar els senyals d'entrada a la planta així com per visualitzar els senyals de sortida (de velocitat o de posició), usarem un PC equipat amb un convertor A/D-D/A, tal com es mostra a la figura 1.3a, i un software de temps real per a controlar-lo. Aquesta configuració ens permet analitzar el sistema en llaç obert (o bé en llaç tancat si s'usa un controlador analògic, tal i com es fa a l'assignatura Dinàmica de Sistemes).

A les pràctiques de Control amb Computador el PC també realitzarà funcions de controlador digital. En aquest cas l'esquema del computador dins del sistema de control és el de la figura 1.3b. A continuació es descriu breument el convertor A/D-D/A i el software de control.

### 1.2.1 El convertor A/D-D/A

El convertor A/D-D/A usat és el PCI-1711 de Advantech Co. Ltd. que té les característiques detallades a la taula 1.1.

Per a les pràctiques usarem dos canals d'entrada (E1 i E2) i un de sortida (S1):



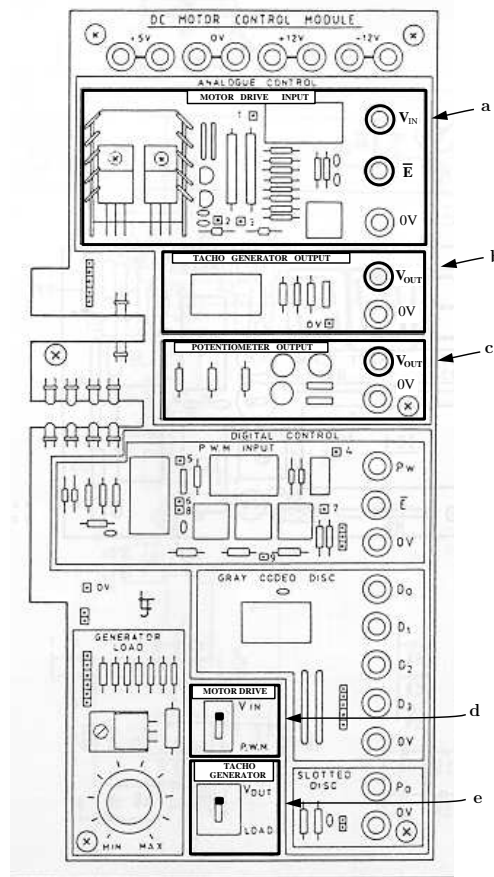


Figura 1.2: Mòdul de control: a) bloc MOTOR DRIVE INPUT b) bloc TACHO GENERATOR OUTPUT c) bloc POTENTIOMETER OUTPUT d) commutador MOTOR DRIVE e) commutador TACHO GENERATOR

- **S1:** La sortida S1 del PC es connecta a l'entrada de la planta, al punt  $V_{IN}$  del bloc MOTOR DRIVE INPUT (figura 1.2a). El cable corresponent a S1 té la banana de color **verd**.
- **E1:** L'entrada E1 del PC es connecta al punt  $V_{OUT}$  del bloc TACHO GENERATOR OUTPUT (figura 1.2b). A efectes de la visualització aquest senyal es mostreja a 1ms. A efectes de tancar el llaç de control de velocitat es mostreja a un multiple d'aquest valor. El cable corresponent a E1 té la banana de color **vermell**.
- **E2:** L'entrada E2 del PC es connecta al punt  $V_{OUT}$  del bloc POTENTIOMETER OUTPUT (figura 1.2c). A efectes de la visualització aquest senyal es mostreja a 1ms. A efectes de tancar el llaç de control de posició es mostreja a un multiple d'aquest valor. El cable corresponent a E1 té la banana de color **groc**.

### 1.2.2 El software

El software usat per al control és MATLAB<sup>®</sup>. Per a cada exercici s'ha generat un model en Simulink amb les connexions adequades a cada cas i les visualitzacions necessàries. L'estructura de fitxers amb tots aquests models és el que es mostra a la figura 1.4. És **imprescindible** executar cada un dels

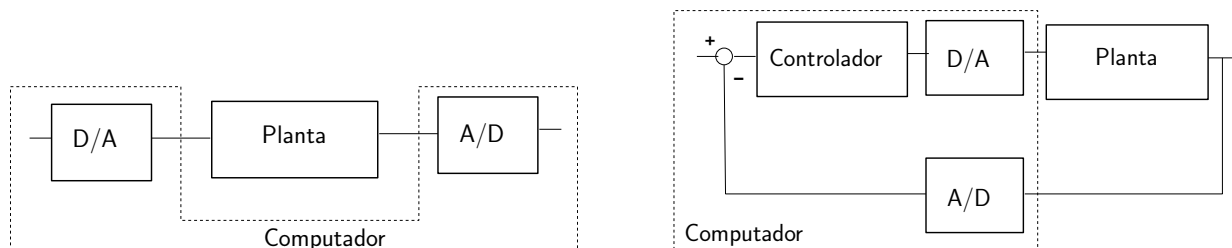


Figura 1.3: Ús del computador per a la generació i visualització de senyals en llaç obert (a) i també com a controlador digital (b).

Conversor A/D	Conversor D/A
Canals d'entrada: 16	Canals de sortida: 2
Resolució: 12 bits	Resolució: 12 bits
Rang d'entrada: $\pm 10V$ , $\pm 5V$ , $\pm 2,5V$ , $\pm 1,25V$ , $\pm 0,625V$	Rang de sortida: $[0 + 5V]$ o $[0 + 10V]$ (adaptat al rang bipolar $\pm 5V$ amb una placa de conversió desenvolupada al Departament)

Taula 1.1: Característiques del Conversor PCI-1711.

models des del seu propi directori, al qual s'hi excedeix mitjançant la finestra "Current directory" tal com mostra la figura 1.4.

Els models de simulació s'executen prement directament la icona de **Start Simulation**. Els models d'execució s'inicien seguint els següents passos (figura 1.5):

1. Prémer l'icona **Incremental build** que genera el codi C a partir del model en Simulink.
2. Un cop acabat el pas anterior, prémer l'icona **Connect To Target** per transferir el codi.
3. Un cop acabat el pas anterior s'activa l'icona **Start real-time code** i en prémer-la s'inicia l'execució del model.

**NOTA:** Tingueu en compte les indicacions d'ajut sobre el funcionament a les capçaleres de cada un dels models. Mantingueu obert només el model de l'exercici en curs.

Aquests tres passos cal seguir-los sempre la primera vegada que es vol executar el model i també sempre que s'hagi canviat el període de mostratge. Si es canvia algun altre paràmetre del model, com per exemple el guany d'un senyal d'entrada, només cal fer els passos 2 i 3.

A l'inici de la sessió de pràctiques és recomanat seguir els passos indicats a continuació en l'ordre especificat:

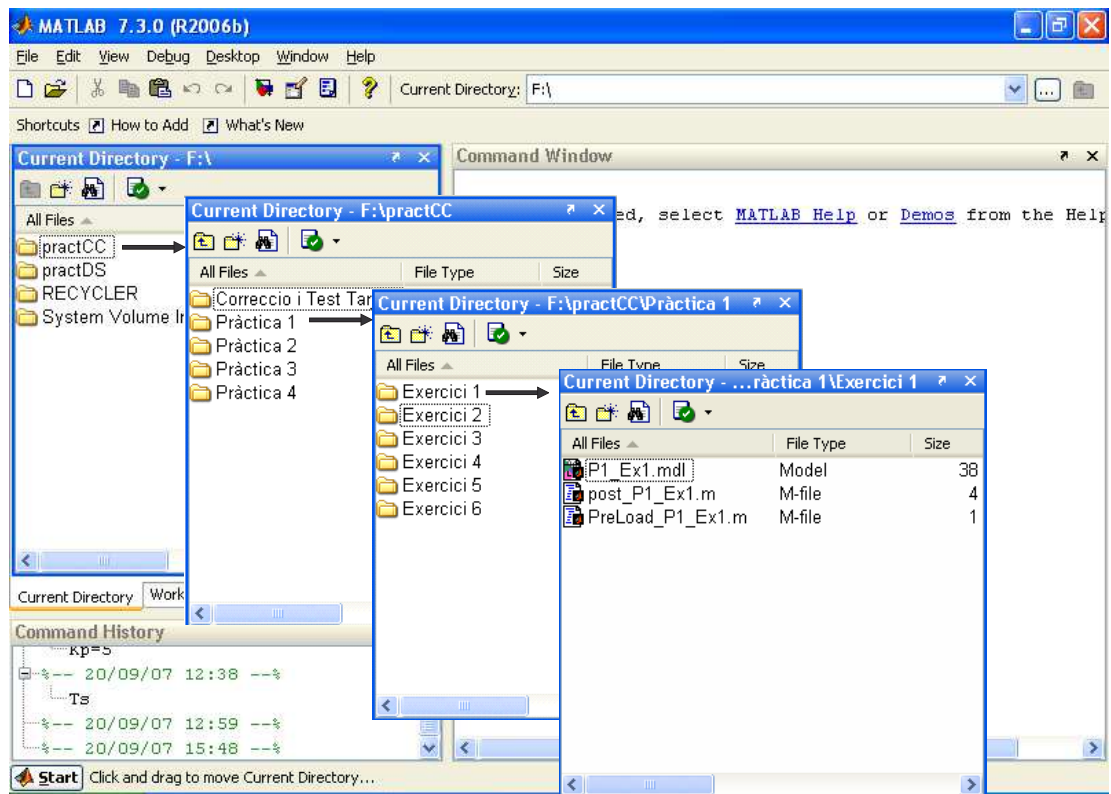


Figura 1.4: Estructura de fitxers amb els models dels exercicis.

#### Passos per a la posta en marxa a l'inici de la sessió de pràctiques:

1. Obriu Matlab i el model de l'exercici que vulgueu executar.
2. Executeu els passos 1 i 2 descrits anteriorment (Incremental build i Connect to Target).
3. Verifiqueu que el commutador MOTOR DRIVE estigui a  $V_{IN}$  i el commutador TACHO GENERATOR estigui a  $V_{OUT}$ .
4. Verifiqueu que  $\overline{E}$  està connectat a 0 V.
5. Verifiqueu que S1 està connectat al punt  $V_{IN}$  del bloc MOTOR DRIVE INPUT.
6. Verifiqueu que E1 està connectat al punt  $V_{OUT}$  del bloc TACHO GENERATOR OUTPUT.
7. Verifiqueu que E2 està connectat al punt  $V_{OUT}$  del bloc POTENTIOMETER OUTPUT.
8. Engegueu la font d'alimentació.
9. Executeu el pas 3 (Start real-time code).

Per a la realització d'aquells exercicis en què faci falta escriure codi en Matlab, s'usarà **sempre** l'editor de Matlab per generar un fitxer de comandes (M-file). En cap cas s'escriurà el codi en la finestra de comandes "Command Window".

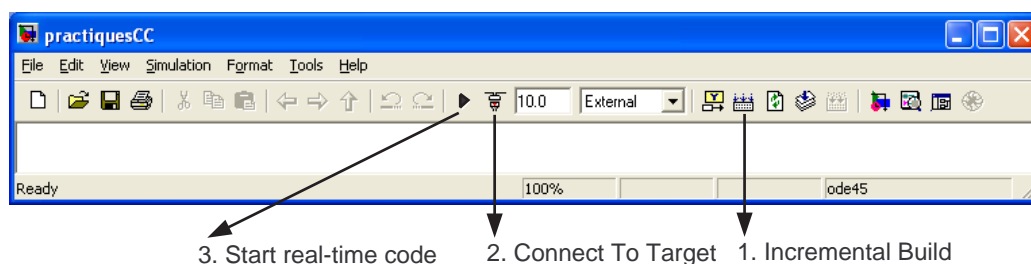


Figura 1.5: Passos en la posta en marxa d'un model.

### 1.3 Resposta temporal del sistema

#### EXERCICI 1: *Resposta del sistema en llaç obert.*

Obriu i executeu el model P1\_Ex1.mdl (figura 1.6), havent seleccionat la consigna 1. Comproveu que és la resposta típica d'un sistema de primer ordre. Noteu que el comportament de la planta no és estrictament lineal. Comproveu com varia el guany estàtic si apliquem al motor el fre magnètic.

#### EXERCICI 2: *Resposta del sistema en llaç tancat amb realimentació de velocitat.*

Obriu i executeu el model P1\_Ex2.mdl (figura 1.7). Comproveu com varia l'error en estat estacionari per a  $K_P = 1, 2, 5$  i  $10$ , canviant el valor en el bloc "Controlador Proporcional".

#### EXERCICI 3: *Resposta del sistema en llaç tancat amb realimentació de posició.*

Obriu i executeu el model P1\_Ex3.mdl (figura 1.8). Es pot comprovar com ara el sistema de control és capaç de posicionar l'eix de sortida en un cert valor. La posició segueix la resposta típica d'un sistema de segon ordre. Comproveu com varia la resposta per a diferents valors de  $K_P$ . Feu una taula que contingui  $S_p$ ,  $T_p$  i  $e_{ss}$  per a  $K_P = 1, 2, 3$ .

### 1.4 Model de la planta

El model del motor de contínua es pot aproximar (menystenint la inductància de l'induït del motor) com la funció de transferència d'un sistema de primer ordre:

$$\frac{\omega(s)}{V_{IN}(s)} = \frac{K_0}{\tau_0 s + 1}$$

#### EXERCICI 4: *Identificació del model.*

Obriu i executeu el model P1\_Ex4.mdl (figura 1.9). Identifiqueu la constant de temps  $\tau_0$  i el guany estàtic  $K_0$  per a una entrada graó de 1V. Recordeu que la constant de temps és el temps que triga el senyal en adquirir el 63% del seu valor final i que per a calcular el guany cal tenir en compte el factor de conversió entre velocitat angular i voltatge,  $K_T$ .

## 1.5 El període de mostratge: Anàlisi de la precisió i l'estabilitat

En aquesta segona part de la pràctica s'analitzarà com varia la resposta temporal del sistema en llaç tancat al variar el període de mostratge.

**EXERCICI 5:** *Avaluació experimental de les prestacions del sistema en llaç tancat amb realimentació de velocitat.*

Obriu i executeu el model P1\_Ex5.mdl (figura 1.10). Avalueu com varia la precisió i l'estabilitat per a diferents períodes de mostratge. Feu una taula que contingui el temps d'establiment i l'error en estat estacionari pels períodes de mostratge  $T_s = 0.001, 0.01, 0.05, 0.2$  i  $0.5$ s, canviant el seu valor des de la finestra de comandes ("Command Window").

Trobeu la funció de transferència en  $z$  del sistema en llaç tancat (usant un mantenidor d'ordre zero). Doneu l'expressió del pol de la funció de transferència en funció del període de mostratge. Per a quin valor del període de mostratge comencen a aparèixer oscil·lacions?

**EXERCICI 6:** *Avaluació experimental de les prestacions del sistema en llaç tancat amb realimentació de posició.*

Obriu i executeu el model P1\_Ex6.mdl (figura 1.11). Avalueu com varia la precisió i l'estabilitat per a diferents períodes de mostratge. Feu una taula que contingui el sobrepuig, el període de la resposta, el temps d'establiment i l'error en estat estacionari pels valors del període de mostratge  $T_s = 0.001, 0.01, 0.05$  i  $3$ s tals que el sistema presenti un comportament estable.

Fent ús de les comandes de MATLAB<sup>®</sup> `tf` i `c2d`, determineu els pols del sistema en llaç tancat pel més gran (respectivament pel menor) dels valors de  $T_s$  que el fan estable (respectivament inestable).

**Nota.** Tingueu en compte que el potenciòmetre té una zona de discontinuitat i si cau dins aquesta zona pot provocar oscil·lacions.

És recomanable revisar les comandes de MatLab corresponents a la toolbox de control, àmpliament comentades en el manual "Estudi de Sistemes de Control Digital Mitjançant Matlab". Altrament, es pot fer "help nom-comanda" a la pantalla de MATLAB<sup>®</sup>.



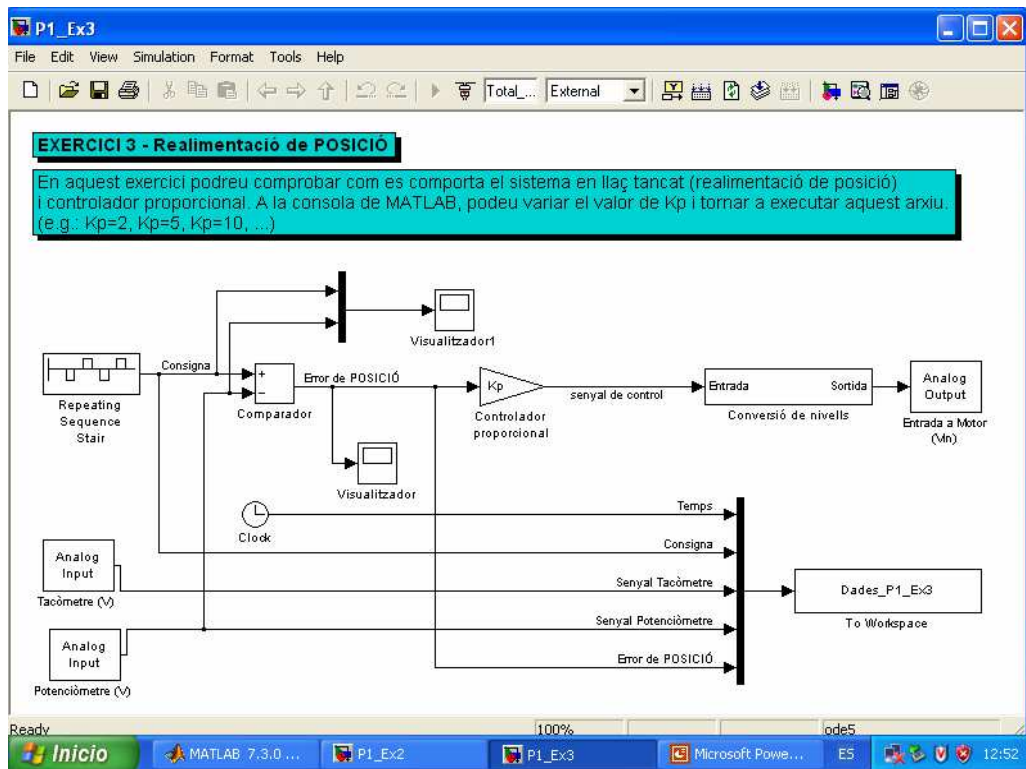


Figura 1.8: Model P1\_Ex3.mdl.

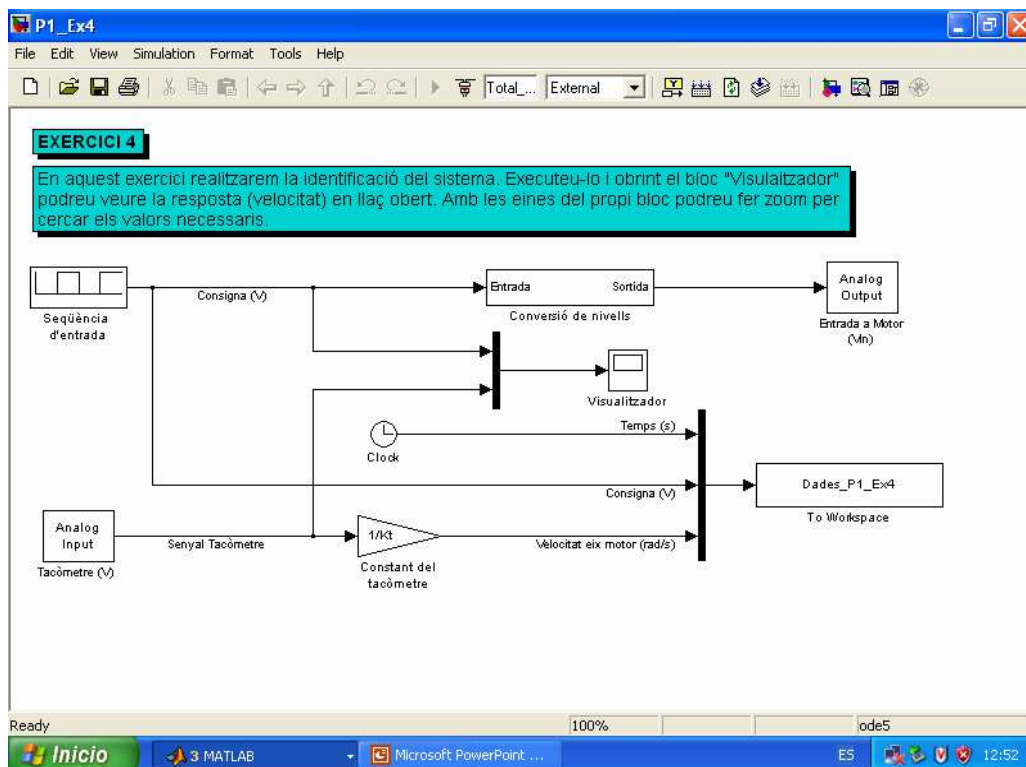


Figura 1.9: Model P1\_Ex4.mdl.



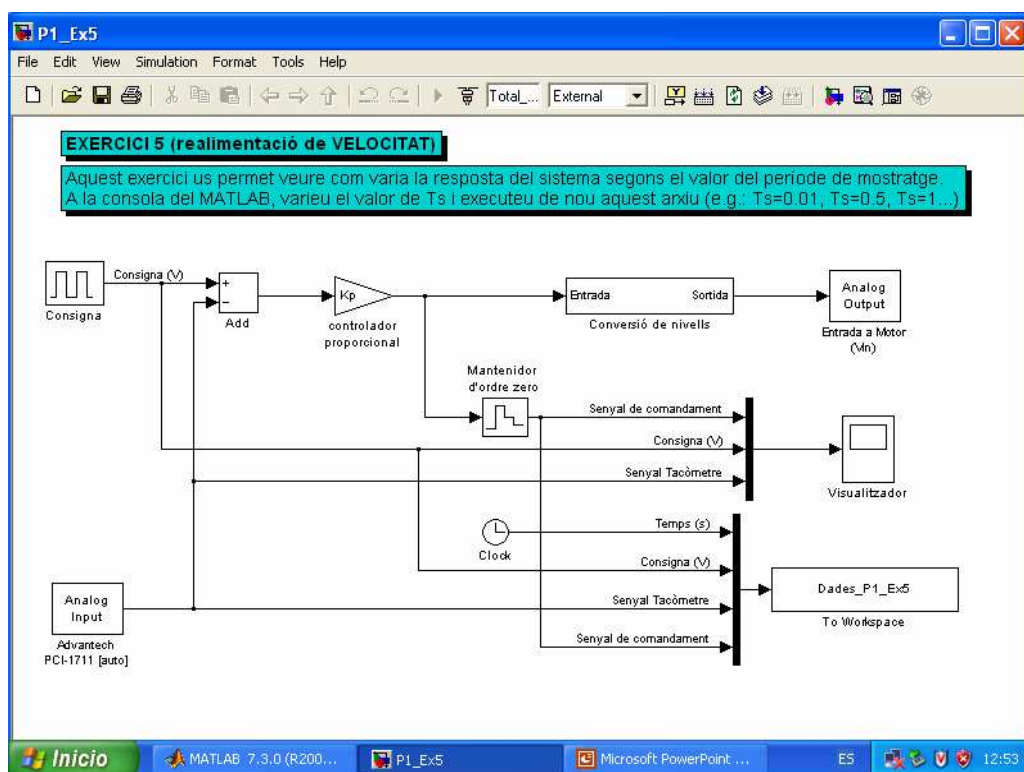


Figura 1.10: Model P1\_Ex5.mdl.

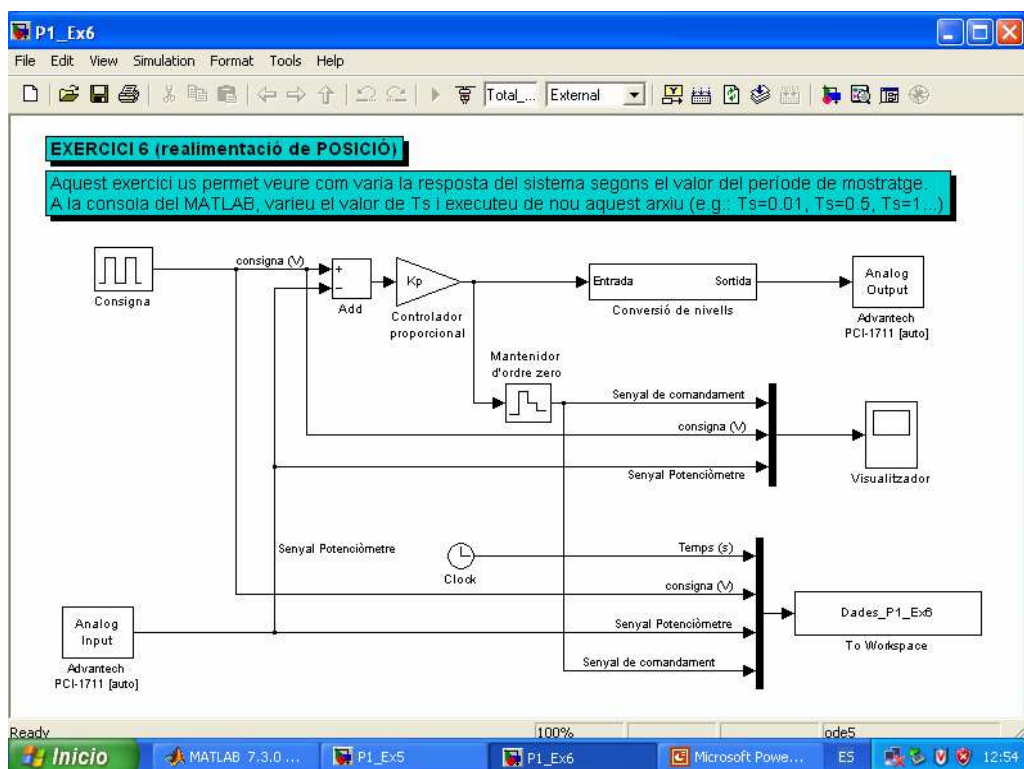


Figura 1.11: Model P1\_Ex6.mdl.



## Capítol 2

# ANÀLISI DE LA RESPOSTA FREQUÈNCIAL (Sessió P2)

**Objectiu:** *Anàlisi de la resposta freqüencial del sistema de control digital de velocitat. Anàlisi de l'estabilitat mitjançant el criteri de Nyquist.*

En aquesta sessió l'estudiant ha de:

- Trobar experimentalment la resposta freqüencial del sistema en llaç obert.
- Aplicar el criteri de Nyquist per determinar el rang de valors d'un controlador proporcional pels que el sistema en llaç tancat és estable, i verificar-ho experimentalment.
- Comparar els resultats obtinguts amb els resultats teòrics.

### 2.1 La resposta freqüencial d'un sistema de temps discret

La resposta en règim permanent d'un sistema lineal davant una entrada senoidal és una senoide de la mateixa freqüència que l'entrada, però amb diferent amplitud i un cert desfasament.

La resposta freqüencial d'un sistema de temps discret amb període de mostreig  $T_s$  ve donada pel mòdul i l'argument de l'expressió:

$$G^*(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(j\omega + nj\omega_s)$$

Aquesta resposta és periòdica amb període  $j\omega_s = j\frac{2\pi}{T_s}$ , és simètrica respecte l'eix real i és real per  $\omega = \frac{\pi}{T_s} = \frac{\omega_s}{2}$ . Degut a aquestes propietats només cal conèixer la resposta en l'interval  $[0, \frac{\omega_s}{2}]$ .

Per tant, per trobar la resposta freqüencial cal fer un escombrat de senyals senoidals a l'entrada amb pulsacions en el rang  $[0, \frac{\omega_s}{2}]$  i mesurar a la sortida el guany i el desfasament. A mesura que augmentem la pulsació, però, el nombre de mostres per període va disminuint (essent de només dues per  $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ ), el que complica la realització de les mesures.

### 2.2 Metodologia per a l'obtenció de la resposta freqüencial

En sistemes de temps discret, els mostrejadors actuen com a generadors d'harmònics. És a dir que la seqüència de mostres obtinguda de mostrejar un senyal senoidal de pulsació  $\omega$  amb un període de

mostratge  $T_s$ , correspon també a qualsevol senyal senoidal amb pulsació  $\omega \pm n\omega_s$ , amb  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ .

Quan recuperem un senyal mostrejat mitjançant un mantenidor, apliquem un filtre passa baixes que intenta eliminar els harmònics. Com més petit és  $\omega$  davant  $\frac{\omega_s}{2}$  (és a dir com més gran és el període del senyal en front del període de mostrejat), més efectiu és el filtratge i més semblant és el senyal recuperat al senyal continu. No obstant, a mesura que  $\omega$  s'aproxima a  $\frac{\omega_s}{2}$  el senyal que es recupera està bastant distorsionat i no permet fer correctament les mesures necessàries per a l'obtenció de la resposta freqüencial.

Per aquest motiu, de cara únicament a la visualització i a la mesura, els senyals d'entrada i sortida es mostregen a 0,001 s. Aquest període de mostrejat és totalment independent del període de mostrejat  $T_s$  al que treballa el sistema de control enllaç tancat i no afecta el seu comportament.

Si, per exemple, el període de mostrejat del sistema és  $T_s = 0,01$  s, per obtenir la resposta freqüencial haurem de fer un escombrat de pulsacions entre 0 i  $\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{0,01} = 314$  rad/s. Aquests valors de  $\omega$  són suficientment petits enfront  $\frac{\omega'_s}{2} = \frac{\pi}{0,001} = 3141$  rad/s, i podrem visualitzar correctament els senyals mostrats i fer-ne les mesures.

## 2.3 El criteri de Nyquist

El diagrama de Nyquist és la representació en el pla complex de la funció de transferència enllaç obert ( $G(s)H(s)$  o  $\overline{GH}(z)$ ) quan la variable complexa ( $s$  o  $z$ ) recorre una corba tancada que anomenem recorregut de Nyquist. Per sistemes de temps discret el recorregut de Nyquist és bàsicament el cercle unitat recorregut en sentit antihorari. No obstant, degut a la simetria respecte l'eix real, només caldrà recórrer el semicercle positiu ( $z = e^{j\omega T_s}$  per  $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ ), i el diagrama de Nyquist ens representarà la resposta freqüencial del sistema enllaç obert.

El criteri d'estabilitat de Nyquist ens permet determinar l'estabilitat del sistema enllaç tancat a partir de la resposta freqüencial del sistema enllaç obert. Essent  $F(z)$  l'equació característica del sistema enllaç tancat,  $F(z) = 1 + \overline{GH}(z)$ , el criteri de Nyquist es pot enunciar com:

$$Z = N + P \quad (2.1)$$

on:

- $Z$  és el número d'arrels de  $F(z)$  amb mòdul  $> 1$ .
- $N$  és el número de semivolttes entorn del punt  $-1+j0$  de la corba  $\overline{GH}(e^{j\omega T_s})$  quan  $\omega$  varia entre 0 i  $\frac{\omega_s}{2}$ , agafant com a positiu el sentit horari.
- $P$  és el número de pols de  $\overline{GH}(z)$  amb mòdul  $> 1$ .

Per tal que el sistema enllaç tancat sigui estable cal  $Z = 0$ , és a dir la funció de transferència enllaç tancat no ha de tenir pols amb mòdul més gran que la unitat.

**EXERCICI 7:** *Obtenció del diagrama de Nyquist teòric.*

Usant els valors del model de l'exercici 4 representeu en un mateix diagrama la resposta freqüencial de:

- El sistema en laç obert de velocitat de temps continu.
- El sistema en laç obert de temps discret amb el període de mostreig  $T_s = 0,01$ .
- Identifiqueu sobre les gràfiques les zones corresponents a altes i baixes freqüències.
- Justifiqueu les diferències que s'observen entre les gràfiques en cadascuna de les bandes de freqüències.

Per representar el diagrama de Nyquist useu les comanda de MATLAB<sup>®</sup> `nyquist`.

**EXERCICI 8:** *Obtenció experimental del diagrama de Nyquist del sistema discret.*

Obriu i executeu el model P2\_Ex8.mdl (figura 2.1) usant un període de mostreig  $T_s = 0,01$ s. Genereu un senyal senoidal d'entrada d'amplitud 2V i freqüència 0,25Hz. Mesureu el guany i el desfassament del senyal de sortida. Repetiu el procés per les següents freqüències del rang  $[0, \frac{1}{2T_s}]$ Hz: 0.5, 0.8, 1, 2, 4, 5, 10, 20 i 50Hz. Representeu-ho gràficament usant el MATLAB<sup>®</sup> mitjançant la comanda `plot`, i sobreposeu-hi el diagrama teòric, tal com s'indica a la secció 2.4.

**EXERCICI 9:** *Aplicació del criteri de Nyquist.*

Usant el diagrama teòric apliqueu el criteri de Nyquist per a:

- Analitzeu l'estabilitat del sistema de temps discret.
- Trobeu el rang de valors del controlador proporcional  $K_p$  que fan que el sistema de temps discret en laç tancat amb realimentació de velocitat sigui estable.

Compareu-ho amb el cas de temps continu comprovant com varien els diagrames teòrics a l'augmentar  $K_p$ . Verifiqueu el resultat analitzant la resposta al graó per  $K_p = 5$  i per un valor de  $K_p$  fora del rang trobat, tant en simulació (model P2\_Ex9a.mdl - figura 2.2) com experimentalment (model P2\_Ex9b.mdl - figura 2.3).

**EXERCICI 10:** *Obtenció del diagrama de Bode teòric.*

Usant el model del sistema i la transformació bilineal `d2c(..., 'Tustin')`, representeu el diagrama de Bode i determineu a partir d'aquest diagrama el marge de guany i el marge de fase. Relacioneu el marge de guany amb el  $K_p$  crític de l'apartat anterior. Podeu trobar exemples en l'apartat 3.6.4. del manual "Estudi de Sistemes de Control Digital Mitjançant Matlab".

## 2.4 Codi MATLAB® per a la resolució de l'exercici 8

```

1  %Exercici 8: Dibuix de la Resposta Freqüencial Experimental
2  close all
3  clear all
4  %
5  %
6  % Vector de guanys experimentals
7  % Cal que introduïu els valors obtinguts experimentalment
8  G=[G_1;G_2;G_3;G_4;G_5;G_6;G_7;G_8];
9  % Vector de desfasaments experimentals (EN RADIANS)
10 % Cal que introduïu els valors obtinguts experimentalment
11 F=[F_1;F_2;F_3;F_4;F_5;F_6;F_7;F_8];
12 %
13 % Calcul del complex en forma cartesiana
14 %
15 X=real(G.*exp(F*j));
16 Y=imag(G.*exp(F*j));
17
18 % Introducció dels paràmetres de la planta
19 % obtinguts en l'exercici 4
20 %
21 K0=__;
22 tau0=__;
23 Ktacho=0.017;
24 planta=tf([Ktacho*K0],[tau0,1])
25 %
26 % Models de Temps discret
27 %
28 Ts=0.01;
29 planta_d=c2d(planta,Ts,'zoh');
30
31
32 %
33 %
34 %
35 figure,
36 nyquist(planta_d,'g')
37 hold on
38 plot(X,Y,'r*')
```

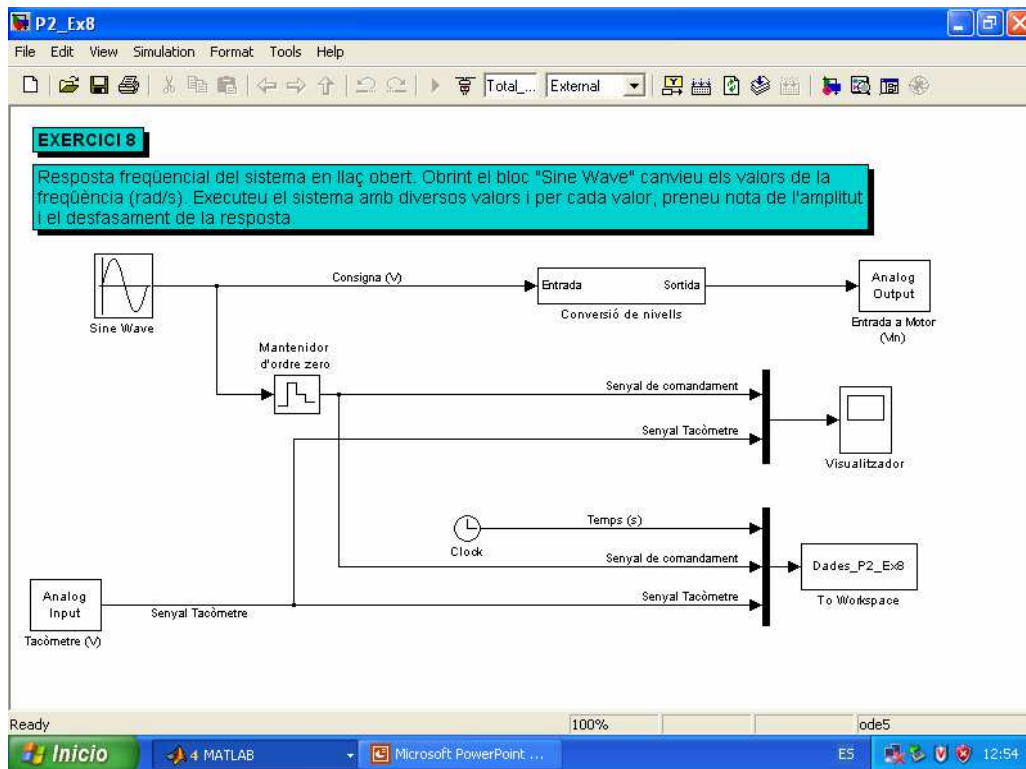


Figura 2.1: Model P2.Ex8.mdl.

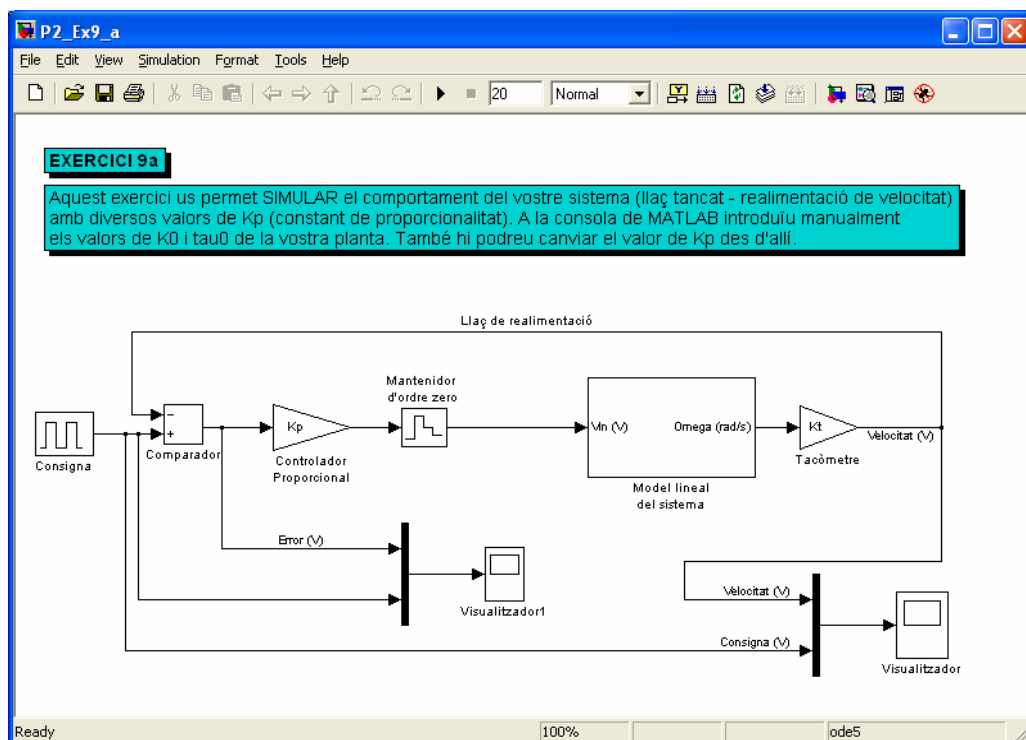


Figura 2.2: Model P2-Ex9a.mdl.

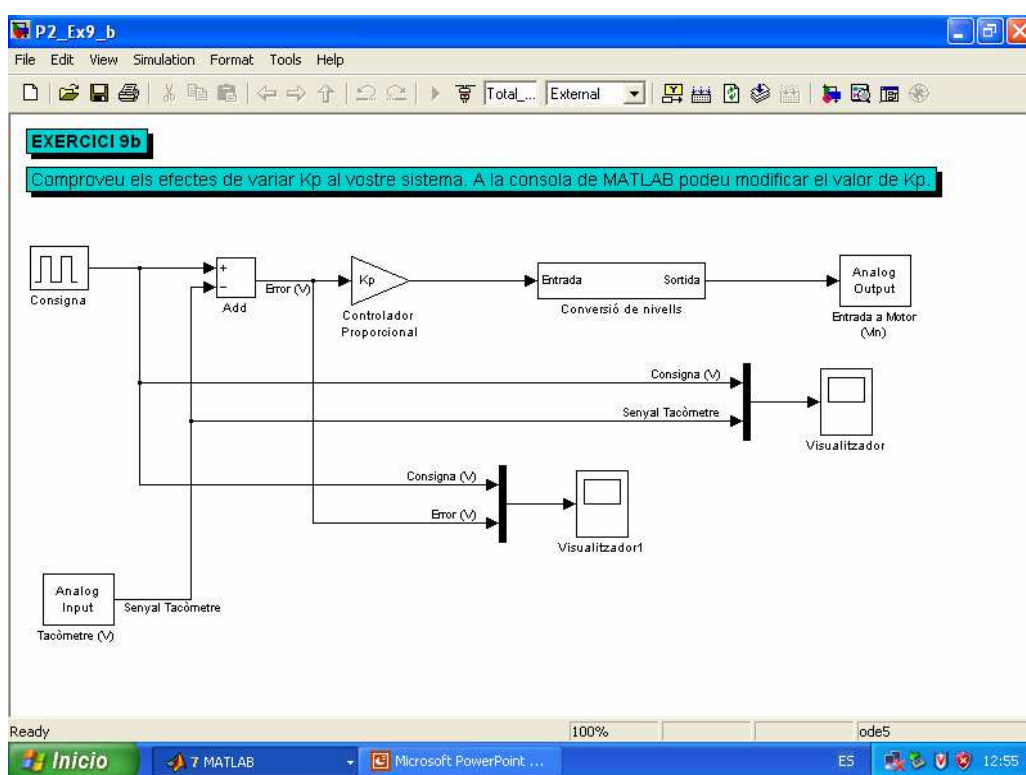


Figura 2.3: Model P2\_Ex9b.mdl.

## Capítol 3

# DISSENY DE CONTROLADORS PID (Sessió P3)

**Objectiu:** *Dissenyar un controlador PID de la posició de l'eix de sortida per la planta estudiada en les sessions anteriors per tal que el sistema en llaç tancat compleixi unes certes especificacions.*

En aquesta sessió l'estudiant ha de

- Dissenyar un PID per assignació de pols.
- Verificar experimental el sistema de control dissenyat.

### 3.1 Disseny per assignació de pols

MATLAB<sup>®</sup> no ofereix cap manera directa per a realitzar el disseny per assignació de pols. Per a facilitar la feina es proposa seguir el següent procediment.

La funció de transferència del controlador PID digital és:

$$PID(z) = k_p + k_i \frac{T_s(z+1)}{2(z-1)} + k_d \frac{z-1}{T_s \cdot z} \quad (3.1)$$

on  $T_s$  és el període de mostratge, i  $k_p$ ,  $k_i$  i  $k_d$  són els paràmetres del controlador. Per a simplificar el procés de sintonització es planteja el següent canvi de variable:

$$k_i^* \triangleq \frac{k_i \cdot T_s}{2}, \quad k_d^* \triangleq \frac{k_d}{T_s} \quad (3.2)$$

amb el que l'equació del PID pren la forma:

$$PID(z) = k_p + k_i^* \frac{z+1}{z-1} + k_d^* \frac{z-1}{z} \quad (3.3)$$

Suposant que la planta és de segon ordre, assumirem que la seva transmitància és:

$$G(z) = \frac{a_1 z + a_0}{z^2 + b_1 z + b_0} \quad (3.4)$$

Tancant el llaç amb un PID com el presentat anteriorment, la transmitància de llaç tancat pren la forma:

$$cl(z) = \frac{PID(z) G(z)}{1 + PID(z) G(z)} = \frac{Num(z)}{Den(z)} \quad (3.5)$$

Es pot comprovar fàcilment que el denominador és:

$$\begin{aligned} Den(z) = & z^4 + (-1 + k_i^* a_1 + b_1 + k_d^* a_1 + k_p a_1) z^3 \\ & + (-b_1 - k_p a_1 + k_p a_0 + b_0 - 2 k_d^* a_1 + k_i^* a_0 + k_i^* a_1 + k_d^* a_0) z^2 \\ & + (k_i^* a_0 - b_0 - 2 k_d^* a_0 - k_p a_0 + k_d^* a_1) z \\ & + k_d^* a_0 \end{aligned}$$

que és un polinomi de quart ordre, per tant tindrà quatre arrels. Atès que el que es vol és fixar els pols del sistema de llaç tancat, haurem de veure quina relació hi ha entre els pols del sistema i els coeficients:

$$\begin{aligned} Den(z) = & (z - p_1)(z - p_2)(z - p_3)(z - p_4) \\ = & z^4 + (-p_1 - p_2 - p_3 - p_4)z^3 \\ & + (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2)p_3 - (-p_1 - p_2 - p_3)p_4)z^2 \\ & + (-p_1 p_2 p_3 - (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2)p_3)p_4)z \\ & + p_1 p_2 p_3 p_4 \end{aligned}$$

Igualant coeficients s'obté:

$$\begin{aligned} -1 + k_i^* a_1 + b_1 + k_d^* a_1 + k_p a_1 &= (-p_1 - p_2 - p_3 - p_4) \\ -b_1 - k_p a_1 + k_p a_0 + b_0 - & \\ -2 k_d^* a_1 + k_i^* a_0 + k_i^* a_1 + k_d^* a_0 &= (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2)p_3 - (-p_1 - p_2 - p_3)p_4) \\ k_i^* a_0 - b_0 - 2 k_d^* a_0 - k_p a_0 + k_d^* a_1 &= (-p_1 p_2 p_3 - (p_1 p_2 - (-p_1 - p_2)p_3)p_4) \\ k_d^* a_0 &= p_1 p_2 p_3 p_4 \end{aligned}$$

que és un sistema de quatre equacions lineals amb tres incògnites  $k_p$ ,  $k_d^*$  i  $k_i^*$ . Per tant sembla clar que no es podran fixar tots els pols del sistema, és a dir un d'ells quedarà lliure ( $p_4$ ). Aquest és un fet habitual quan s'intenta fixar els pols d'un sistema amb controlador de baix ordre. Per tal que la metodologia sigui acceptable i adequada el pol lliure  $p_4$  ha de resultar estable i no dominant. En cas d'ésser inestable el controlador obtingut fa inestable el sistema en anell tancat i, per tant, no és un controlador admissible. En cas que el pol lliure sigui dominant però estable, el comportament de llaç tancat no serà el desitjat, encara que el controlador estabilitzarà el sistema de llaç tancat.

El sistema d'equacions anterior és planteja en forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 & -a_1 & -a_1 & -a_1 \\ p_2 + p_3 + p_1 & a_1 - a_0 & -a_1 - a_0 & -a_0 + 2 a_1 \\ -p_1 p_2 - p_3 p_1 - p_3 p_2 & a_0 & -a_0 & 2 a_0 - a_1 \\ p_1 p_2 p_3 & 0 & 0 & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4 \\ k_p \\ k_i^* \\ k_d^* \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} p_1 + p_2 + p_3 - 1 + b_1 \\ -p_1 p_2 - p_3 p_1 - p_3 p_2 + b_0 - b_1 \\ p_1 p_2 p_3 - b_0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Aquest sistema lineal és fàcilment resoluble utilitzant l'operador del MATLAB<sup>®</sup> de la divisió per l'esquerra: Si  $A$  és una matriu  $n \times n$  i  $b$  és un vector columna amb  $n$  elements, llavors,  $x = inv(A) * b$  és la solució a l'equació  $Ax = b$



Un cop obtinguts els valors de  $k_p, k_d^*$  i  $k_i^*$  ja és poden obtenir els paràmetres del controlador  $k_p, k_d$  i  $k_i$ , amb el que el procés de disseny ha finalitzat.

**EXERCICI 11:** *Disseny d'un PID per assignació de pols.*

Dissenyau un PID de control de posició que faci que la resposta temporal a un graó d'entrada presenti un sobrepuig del 60% i una freqüència de les oscil·lacions de 0,7 Hz.

Per a aconseguir-ho calculeu el valor dels dos pols dominants que compleixen amb aquestes especificacions i considereu un tercer pol en 0,01. Preneu el període de mostreig  $T_s$  igual a 0,01s. Determineu el valor de  $k_p, k_i$  i  $k_d$  i del 4<sup>rt</sup> pol. Verifiqueu si es compleix la hipòtesi d'arrels dominants.

Obriu i executeu el model P3\_Ex11.mdl (figura 3.1) configurant una entrada graó de 2V i un període de 10s. Comproveu si el sistema compleix les especificacions mitjançant la simulació temporal del sistema davant un graó. Repetiu la comprovació eixamplant els valors de la saturació en el bloc del controlador. Mesureu els valors de  $S_p, t_p, \omega$  i  $e_{ss}$ . Repetiu la mesura del valor de l'error  $e_{ss}$  quan l'entrada és una rampa.

Repetiu l'exercici però ara especificant un sobrepuig del 80% i una freqüència d'oscil·lació de 1,0 Hz.

**EXERCICI 12:** *Verificació experimental del sistema de control dissenyat.*

Obriu i executeu el model P3\_Ex12.mdl (Figura 3.3). Visualitzeu el comportament del sistema de control experimental del laboratori davant una entrada graó de 2V i comproveu si es compleixen les especificacions demanades mitjançant la determinació de  $S_p, t_p, \omega$  i  $e_{ss}$ . Davant una entrada en rampa de 10s de període feu la comprovació amb la mesura del valor de l'error  $e_{ss}$ .

## 3.2 Codi MATLAB® per la resolució de l'exercici 11

```

1  % Programa Matlab per a realitzar automàticament els càlculs
2  % de determinació dels paràmetres del controlador per assignació de pols
3  %
4
5  % Definició dels paràmetres de la planta (veure Exercici 4)
6  % (cal que poseu els valors de la vostra planta):
7  K0=--;
8  tau0=--;
9  N=9;
10 Kpot=1.62;
11
12 % Definició dels períodes de mostreig
13 Ts=0.01;
14
15 % Especificacions per al sistema de control desitjat
16 % (cal posar els valors del cas que es vulgui calcular)
17 Sp=50;
18 Fd=0.5;
19
20 % Determinació dels pols d'un sistema de 2n ordre
21 % de temps continu que compliria les especificacions
22 wd=2*pi*Fd;
23 xi= sqrt( (log(Sp/100))^2 / (pi^2+log(Sp/100)^2) );
24 wn=wd/sqrt(1-xi^2);
25 s1=-xi*wn+j*wd;
26 s2=-xi*wn-j*wd;
27
28 % Determinació dels pols d'un sistema de 2n ordre
29 % de temps discret que compliria les especificacions
30 p1=exp(Ts*s1);
31 p2=exp(Ts*s2);
32 % Fixem el Tercer pol
33 p3=0.01;
34
35 % Càlcul de la funció de transferència en z de la planta
36 Ptas=tf([K0*(1/N)*Kpot],[tau0,1,0]);
37 Ptaz=c2d(Ptas,Ts,'zoh');
38 % Coeficients del numerador i del denominador de la planta en z
39 [Nz,Dz]=tfdata(Ptaz,'v');
40 a1=Nz(2);
41 a0=Nz(3);
42 b1=Dz(2);
43 b0=Dz(3);
44
45 % Definició les matrius A i b tal i com està explicat en el guió
46 A=[-1 -a1 -a1 -a1; p2+p3+p1 a1-a0 -a1-a0 -a0+2*a1;...
47 -p1*p2-p3*p1-p2*p3 a0 -a0 2*a0-a1; p1*p2*p3 0 0 -a0];
48 b=[p1+p2+p3-1+b1; -p1*p2-p3*p1-p3*p2+b0-b1; p1*p2*p3-b0;0];

```

```

49
50 % Determinació del vector x de paràmetres del controlador:
51 x=inv(A)*b;
52
53 p4=x(1)
54 Kp=x(2)
55 Ki=(2/Ts)*x(3)
56 Kd=Ts*x(4)
57
58 % Càlcul de la dominància de les arrels
59 dominancia=log(abs(p4))/log(abs(p1))

```

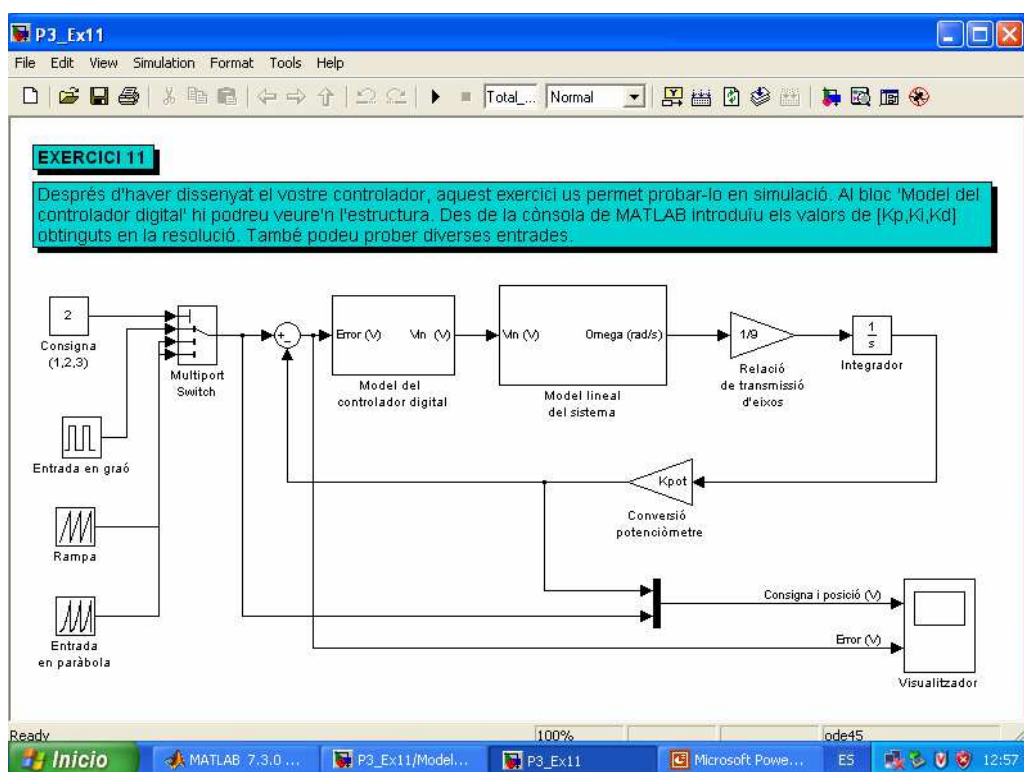


Figura 3.1: Model P3\_Ex11.mdl.

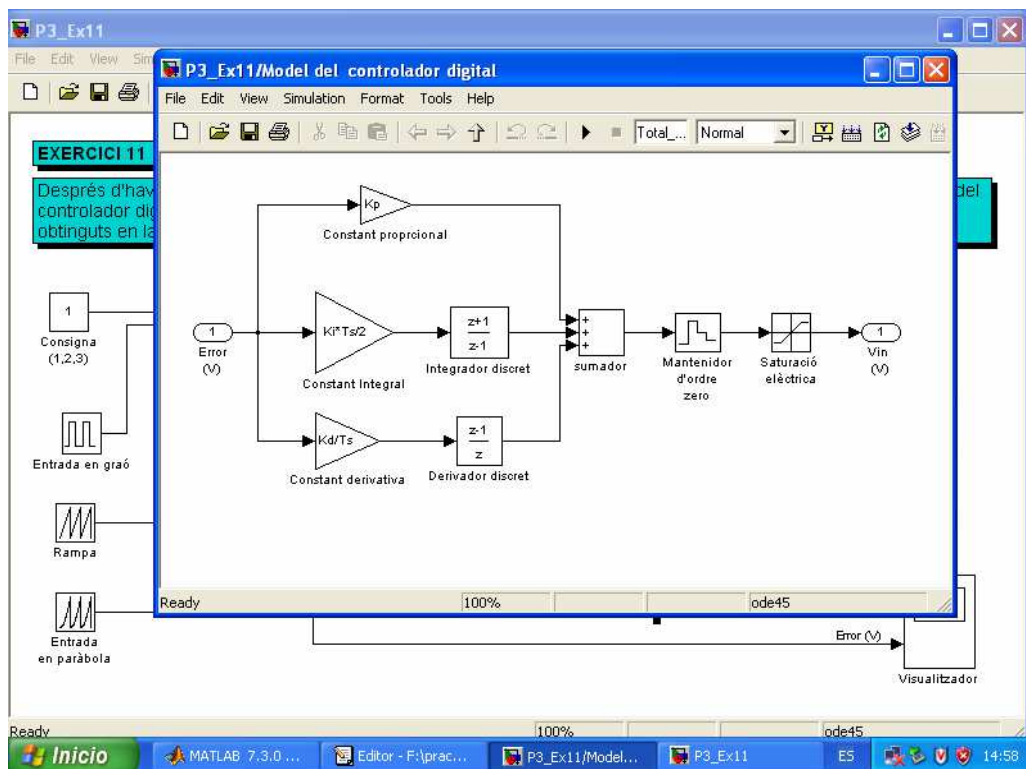


Figura 3.2: Controlador PID del model P3\_Ex11.mdl.

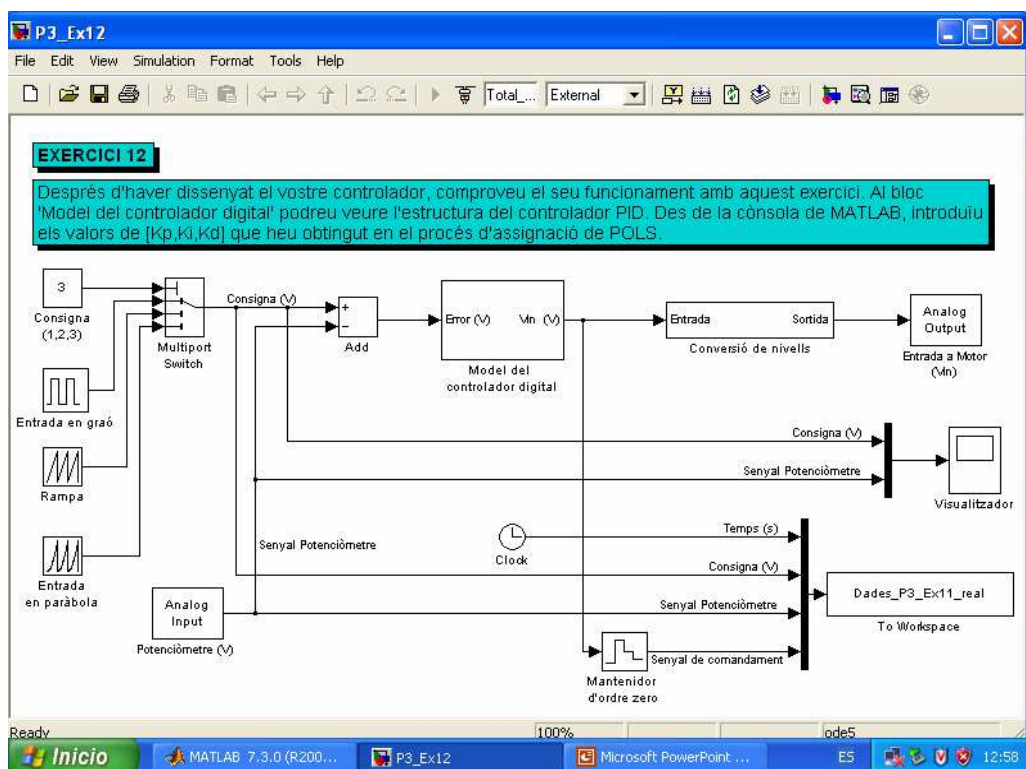


Figura 3.3: Model P3\_Ex12.mdl.