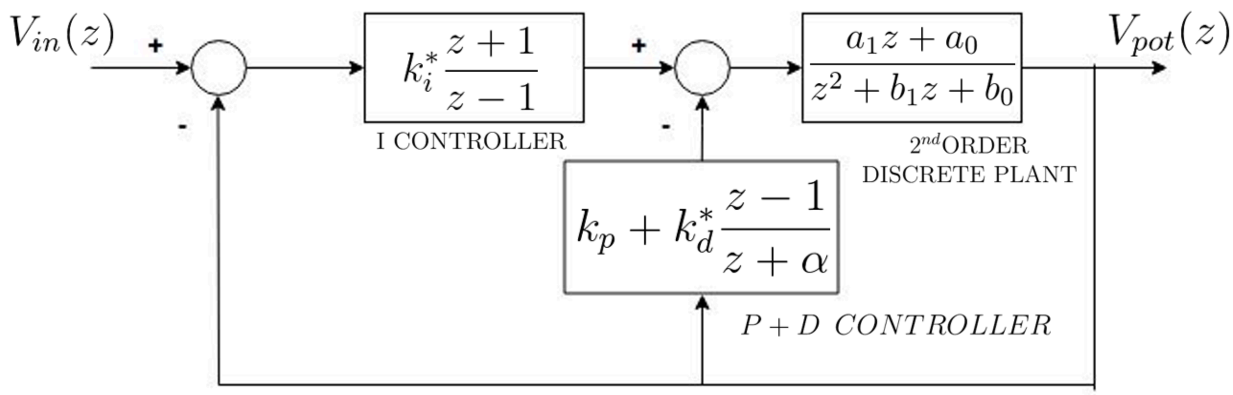
Ejercicio 16: Diseño de un I-PD por asignación de polos.

Como se puede observar en la práctica 3, al diseñar un controlador PID con una planta de segundo orden tienen como respuesta un sistema con cuatro polos y dos cero. Para poder diseñar un controlador PID donde se cumplan las especificaciones, hay que hacer dos modificaciones principales, la primera, añadir un nuevo parámetro al controlador para poder fijar los cuatro polos del sistema, y el segundo, modificar la estructura para eliminar el efecto de los ceros.

Con lo cual, el nuevo controlador, tendrá la siguiente estructura:

$$\text{controlador PID}: \mathrm{PID}(z) = k_p + k_i^* \frac{z+1}{z-1} + k_d^* \frac{z-1}{z+\alpha} \quad \text{donde} \quad k_i^* = k_i \frac{T_s}{2} \;\; y \; k_d^* = \frac{k_d}{T_s}$$

Para eliminar el efecto de los ceros, se propone la siguente alternativa de introducir las acciones proporcional, integral y derivativa.



Esta estructura toma el nombre de controlador I-PD, y como se puede observar, la accion integral se realimenta desde el error, mientras que las acciones proporcional y derivativa se realimentan desde la salida.

En este ejercicio se desea diseñar un I-PD de control de posición que haga que la respuesta temporal a una entrada escalón presente un sobreimpulso del 80% y una frecuencia de las oscilaciones de 0,5 Hz.

Para conseguirlo calcule el valor de los dos polos dominantes que cumplen con estas especificaciones y considere un tercer polo en 0,01 y un cuarto polo en 0. Toma el periodo de muestreo Ts igual a 0,01s. Determinar el valor de k_p, k_i y k_d y α.

La función de transferencia canónica del PID tiene la siguiente forma (se usa la forma canónica para obtener así un sistema lineal):

$$\text{controlador PID}: \mathrm{PID}(z) = \frac{c_2 z^2 + c_1 z + c_0}{(z-1)(z+\alpha)}$$

$$\text{planta segundo orden}: G(z) = \frac{a_1 z + a_0}{z^2 + b_1 z + b_0}$$

Con lo cual el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado con el controlador I-PD toma la forma:

$$\mathrm{Den}(z) = z^4 + [\alpha - 1 + b_1 + c_2 a_1]z^3 + [(b_1 - 1)\alpha - b_1 + b_0 + a_1 c_1 + a_0 c_2]z^2 + [(b_0 - b_1)\alpha - b_0 + a_0 c_1 + c_0 a_1]z + c_0 a_0 - \alpha b_0$$

El polinomio es de orden cuatro, con lo cual tendrá cuatro polos y la ecuación característica será:

$$\begin{aligned}\mathrm{Den}(z) = (z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4) &= z^4 + (-p_1 - p_2 - p_3 - p_4)z^3 \\ &+ (p_1p_2 - (-p_1-p_2)p_3 - (-p_1-p_2-p_3)p_4)z^2 \\ &+ (-p_1p_2p_3 - (p_1p_2 - (-p_1-p_2)p_3)p_4)z + p_1p_2p_3p_4\end{aligned}$$

Como es un sistema de cuarto orden y cuatro incógnitas, igualando los coeficientes y representándolo en forma matricial, el sistema en lazo cerrado seria:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ b_1 - 1 & a_0 & a_1 & 0 \\ b_0 - b_1 & 0 & a_0 & a_1 \\ -b_0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - b_1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \\ b_1 - b_0 + p_1p_2 - (-p_1-p_2)p_3 - (-p_1-p_2-p_3)p_4 \\ b_0 - p_1p_2p_3 - (p_1p_2 - (-p_1-p_2)p_3)p_4 \\ p_1p_2p_3p_4 \end{bmatrix}$$

Este sistema lineal es fácilmente soluble utilizando MATLAB. La ecuación es $A\,x = b$, donde A es una matriz $n\ x\ n$ y b es un vector columna con n elementos, entonces, $x = \mathrm{inv}(A)\cdot b$.

Por último, para obtener los parametros $k_p,\ k_i\ y\ k_d$ obtendremos la relación entre nuestro controlador y el modelo canonico.

Nuestro controlador, se puede representar tambien de la siguiente manera:

$$\mathrm{PID}(z) = \frac{\left(k_p + k_i^* + k_d^*\right)z^2 + \left(k_p(\alpha - 1) + k_i^*(\alpha + 1) - 2k_d^*\right)z - k_p\alpha + k_i^*\alpha + k_d^*}{(z-1)(z+\alpha)}$$

Con lo cual, igualando los coeficientes y representándolo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha - 1 & \alpha + 1 & -2 \\ -\alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ k_i^* \\ k_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Como se ha hecho anteriormente, este sistema es facilmente soluble mediante MATLAB, siendo la solucion $x = \mathrm{inv}(A)\cdot b$.

```
% Parámetros de la planta
K0=0.82/0.017;
tau0=0.26;
N=9;
Kpot=1.62;

% Periodo de muestreo
Ts=0.01;

% Especificaciones de control deseadas
Sp=80; % sobreimpulso
Fd=0.5; % frecuencia

% Polos de segundo orden continuo que cumplirán las especificaciones
wd=2*pi*Fd ;
xi=sqrt((log(Sp/100))^2/(pi^2+log(Sp/100)^2))
wn=wd/ sqrt(1-xi^2)
s1=-xi*wn+j*wd
s2=-xi*wn-j*wd

% Polos de segundo orden discreto que cumpliran las especificaciones
```

```
p1=exp(Ts* s1 )
p2=exp(Ts* s2 )

% Insertar el tercer y cuarto polo (no dominantes)
p3=0.01
p4=0

% Función de transferencia discreta de la planta
Ptas=tf([K0*(1/N)*Kpot],[tau0,1,0]);
Ptaz=c2d(Ptas,Ts,'zoh');

% Coeficientes del denominador y enumerador
[Nz ,Dz]= tfdata(Ptaz,'v')
a1=Nz(2);
a0=Nz(3);
b1=Dz(2);
b0=Dz(3);

% Definiciones de las matrices A y B
A=[1 a1 0 0; ...
   b1-1 a0 a1 0;
   b0-b1 0 a0 a1;
  -b0 0 0 a0] ;
b=[-b1+1-p1-p2-p3-p4;
   -b0+b1+p1*p2-(-p1-p2)*p3-(-p1-p2-p3)*p4;
   b0-p1*p2*p3-(-p1*p2-(-p1-p2)*p3)*p4;
   p1*p2*p3*p4] ;

% Controlador
x=inv(A)*b ;

alpha=x(1)
c2=x(2)
c1=x(3)
c0=x(4)

A2=[1 1 1; alpha-1 alpha+1 -2; -alpha alpha 1];
B2=[c2;c1;c0];

x2=inv(A2)*B2;

kp = x2(1)
ki = (2/Ts)*x2(2)
kd = Ts*x2(3)
```