Площадь фигуры

Артём Орехов

20.12.2017

Площадь плоской фигуры — аддитивная числовая характеристика фигуры, целиком принадлежащей одной плоскости. В простейшем случае, когда фигуру можно разбить на конечное множество единичных квадратов, площадь равна числу квадратов.

Содержание

1 Об определении

Формальное введение понятия площадь и объём можно найти в статье мера Жордана, здесь мы приводим лишь намётки определения с комментариями. **Площадь** — это вещественнозначная функция, определённая на *определённом классе фигур* евклидовой плоскости и удовлетворяющая четырём условиям:

1. Положительность — площадь неотрицательна;
2. Нормировка — квадрат со стороной единица имеет площадь 1;
3. Конгруэнтность — конгруэнтные фигуры имеют равную площадь;
4. Аддитивность — площадь объединения двух фигур без общих внутренних точек равна сумме площадей.

При этом **определённый класс** должен быть замкнут относительно пересечения и объединения, а также относительно движений плоскости и включать в себя все многоугольники. Из этих аксиом следует монотонность площади, то есть

- Если одна фигура принадлежит другой фигуре, то площадь первой не превосходит площади второй:

Чаще всего за «определённый класс» берут множество *квадрируемых фигур*. Фигура **F** называется **квадрируемой**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует пара многоугольников **P** и **Q**, такие что **P** $\subset$ **F** $\subset$ **Q** и **S(Q)** - **S(P)** $< \varepsilon$, где **S(P)** обозначает площадь **P**. **Примеры квадрируемых фигур**

- многоугольники;
- любая фигура, ограниченная спрямляемой кривой, в частности круг;
- фигура ограниченная снежинкой Коха, хотя её граница не спрямляема.

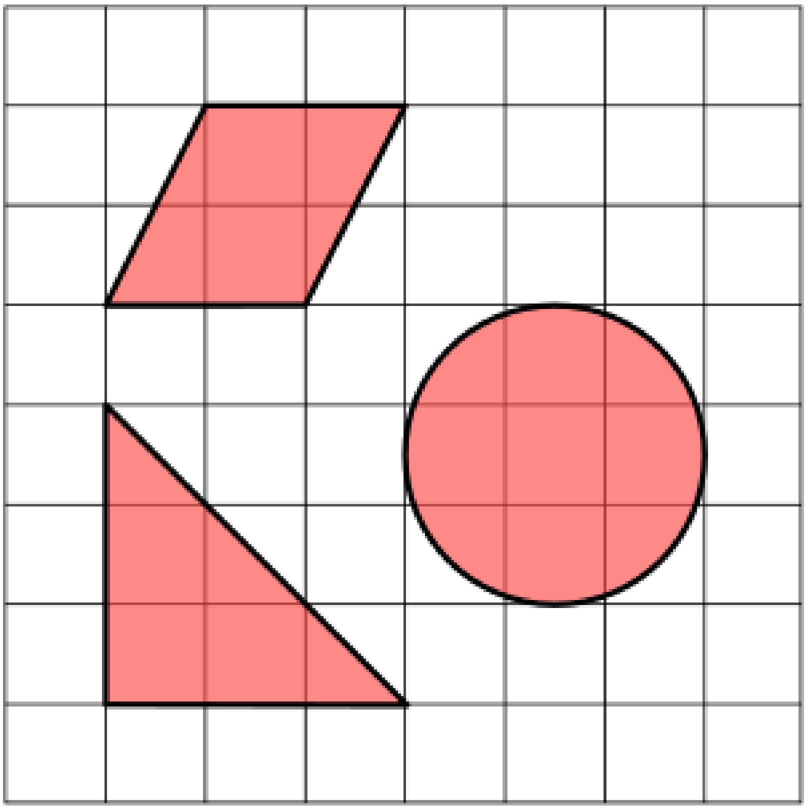
2 Связанные определения

- Две фигуры называются равновеликими, если они имеют равную площадь.

3 Комментарии

- Существует математически строгий, но неоднозначный способ определить площадь для всех ограниченных подмножеств плоскости. То есть на множестве всех ограниченных подмножеств плоскости существуют различные функции площади, удовлетворяющие вышеприведённым аксиомам, а множество квадрируемых фигур является максимальным множеством фигур, на которых площадь определяется однозначно.
  - То же самое можно сделать для длины на прямой, но нельзя для объёма в евклидовом пространстве и также нельзя для площади на единичной сфере в евклидовом пространстве, (смотри соответственно парадокс удвоения шара и парадокс Хаусдорфа).

4 Формулы



5 См. также

6 Ссылки

• В.Болтянский, О понятиях площади и объёма. Квант, № 5, 1977 • Б. П. Гейдман, Площади многоугольников, Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 16, (2002). • *Мерзон Г.А., Ященко И.В.* Длина, площадь, объем. — МЦНМО, 2011. — ISBN 9785940577409. • В. А. Рохлин, Площадь и объём, Энциклопедия элементарной математики, Книга 5, Геометрия, под редакцией П. С. Александрова, А. И. Маркушевича и А. Я. Хинчина.

Фигура	Формула	Комментарий
Правильный треугольник	$\frac{\sqrt{3}}{4} * a^2$	**a** - длина стороны треугольника
Треугольник	$\sqrt{p*(p-a)*(p-b)*(p-c)}$	Формула Герона. **p** — полупериметр, **a**, **b** и **c** — длины сторон треугольника.
Треугольник	$\frac{1}{2}$ * a * b * sin γ	**a** и **b** — две стороны треугольника, а γ — угол между ними.
Треугольник	$\frac{1}{2}$ * b * h	**b** и **h** — сторона треугольника и высота, проведённая к этой стороне.
Квадрат	**a**^{2}	**a** — длина стороны квадрата.
Прямоугольник	**a * b**	**a** и **b**— длины сторон прямоугольника.
Ромб	**a**^{2} * sin α, $\frac{1}{2}$ **bc**	**a** — сторона ромба, α — внутренний угол, **b**,**c** — диагонали.
Параллелограмм	**b * h**	**b** — длина одной из сторон параллелограмма, а **h** — высота, проведённая к этой стороне.
Трапеция	$\frac{1}{2}$ * **(a + b) * h**	**a** и **b** — длины параллельных сторон, а **h** — расстояние между ними (высота).
Четырёхугольник	$\frac{1}{2}$ * **m * n * sin** ϕ	**n** и **m** — длины диагоналей, и ϕ — угол между ними.
Правильный шестиугольник	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ * **a**^{2}	**a** — длина стороны шестиугольника.
Правильный восьмиугольник	2 * (1 + $\sqrt{2}$) * **a**^{2}	**a** — длина стороны восьмиугольника.
Правильный многоугольник(1)	$\frac{\mathbf{n}*a^2}{4*tan(\pi/n)}$	**a** — длина стороны многоугольника, а **n** — количество сторон многоугольника.
Правильный многоугольник(2)	$\frac{1}{2}$ * **a * p**	**a** — апофема (или радиус вписанной в многоугольник окружности), а **p** — периметр многоугольника.
Произвольный многоугольник	$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}$ det $\lvert(^{x}i \quad ^{x}i+1\ y_i \quad y_i+1)\rvert$	Формула площади Гаусса. (x_i, y_i) — координаты вершин n-угольника, (x_n, y_n)=$(x_0$,$y_0)$
Круг	π * r^2 или $\frac{\pi*d^2}{4}$	**r** — радиус окружности, а **d** — её диаметр.
Сектор круга	$\frac{1}{2}$ * r^2 * θ	**r** и θ — соответственно радиус и угол сектора (в радианах).
Эллипс	π * a * b	**a** и **b** — большая и малая полуоси эллипса.