

TD1: Modélisation en programmation linéaire

Exercice 1

Une entreprise fabrique deux produits P_1 et P_2 à partir de trois matières M_1 , M_2 , M_3 . Elle dispose de 300 tonnes de M_1 , 400 tonnes de M_2 et de 250 tonnes de M_3 .

- Pour fabriquer une tonne de P_1 , il faut une tonne de M_1 et 2 tonnes de M_2
 - Pour une tonne de P_2 , il faut une tonne de M_1 , une tonne de M_2 et une tonne de M_3
 - La vente d'une tonne de P_1 rapporte un profit de 50 Dhs, et celle de P_2 rapporte 100 Dhs
1. Modéliser par un programme linéaire le modèle qui donne les quantités à produire des produits P_1 et de P_2 pour maximiser le profit de l'entreprise.
 2. Donner une modélisation généralisée du problème.

Exercice 2

Un atelier fabrique des tables et des bureaux.

- Chaque table nécessite 2h30 min pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 1h pour la mise en caisse.
- Chaque bureau exige 1h pour l'assemblage, 3h pour le polissage et 2 h pour la mise en caisse.

L'entreprise ne peut disposer, chaque semaine, de plus de 10h pour l'assemblage, de 15h pour le polissage et de 8h pour la mise en caisse. Sa marge de profit est de 30 (DH) par table et de 40 (DH) par bureau. On veut déterminer le nombre de tables et de bureaux doit-on produire afin d'obtenir un profit hebdomadaire maximal.

Modéliser le problème par un programme linéaire

Exercice 3

Un agriculteur souhaite mélanger des engrains de façon à obtenir au minimum 15 unités de potasse, 20 unités de nitrates et 24 unités de phosphates. Il achète deux types d'engrais.

- Le type 1 procure 3 unités de potasse, 1 unité de nitrates et 3 unités de phosphates. Il coûte 120 (DH).
- Le type 2 procure 1 unité de potasse, 5 unités de nitrates et 2 unités de phosphates. Il coûte 60 (DH).

Exprimer à l'aide d'un programme linéaire la combinaison d'engrais qui remplira les conditions exigées au moindre coût.

Exercice 4

Une entreprise pharmaceutique fabrique trois types de médicaments : des euphorisants, des analgésiques et des somnifères, dont les bénéfices de production escomptés sont respectivement de 25, 60 et 30 milliers d'euros par kilo. Pour fabriquer chacun de ces médicaments, trois matières premières sont utilisées : morphine, caféine et aspirine. Les quantités nécessaires de ces produits pour fabriquer un kilo de médicaments sont résumées dans le tableau suivant :

	Euphorisant	Avgésique	Somnifère
Morphine	2	4	4
Caféine	1	2	0
Aspirine	2	5	4

Par ailleurs les quantités de morphine, caféine et aspirine sont limitées par leur production à respectivement 20, 6 et 14 unités par jour. Le but de l'exercice est de planifier les quantités de médicaments à produire afin de maximiser le bénéfice quotidien.

1. Modéliser le problème sous forme de programme linéaire
2. Donner une modélisation linéaire généralisée du problème en considérant n types de médicaments composés de m matières, q_j étant la quantité de la matière j ($j \in \{1, \dots, m\}$) et la vente d'un kilogramme du médicament i génère un bénéfice b_i ($i \in \{1, \dots, n\}$)

Exercice 5

Dans son prochain programme d'investissement, la société Cellulose du Maroc désire construire 1 ou 2 usines et peut être un entrepôt, sachant que ce dernier ne peut se trouver que là où il y a une usine. L'entreprise dispose d'un budget d'investissement de 15 millions de MAD et a le choix 3 villes pour installer ses nouvelles unités. L'entreprise dispose aussi des estimations du prix de construction et de la valeur nette actualisée (VNA) de chaque usine et de chaque entrepôt comme c'est indiqué au tableau ci-dessous. Pour des raisons économiques, l'entreprise ne peut pas installer plus d'une usine dans la même ville.

Décision	Prix de construction (en MMAD)	VNA (en MMAD)
Usine à Fès	6	9
Usine à Rabat	3	5
Usine à Tanger	5	6
Entrepôt à Fès	1	3
Entrepôt à Rabat	2	4
Entrepôt à Tanger	3	5

Le problème du responsable est de satisfaire les exigences de l'entreprise tout en maximisant la valeur nette actualisée.

1. Donner une modélisation du problème.
2. Donner une modélisation généralisée du problème pour n villes

Exercice 6

Un industriel désire transporter, à moindre coût, un certain bien depuis 3 entrepôts vers 5 magasins. Les disponibilités des entrepôts, les demandes des magasins et le coût de transport unitaire d'un entrepôt à un magasin sont donnés dans le tableau suivant :

	Magasin 1	Magasin 2	Magasin 3	Magasin 4	Magasin 5	Disponibilité
Entrepôt 1	4	3	5	4	8	12
Entrepôt 2	6	7	9	6	7	15
Entrepôt 3	8	2	3	5	3	13
Demande	3	7	10	5	5	

Le problème de l'industriel est de déterminer la quantité à envoyer de chaque entrepôt vers chacun des magasins en minimisant le coût total de transport.

1. Donner une modélisation de ce problème
2. Donner une généralisation de ce problème pour n magasins et m entrepôts

Exercice 7 (Problème d'affectation d'infirmières)

Le docteur Zaid est chargé d'organiser le planning des infirmières du service de cardiologie de CHU de Rabat. Une **journée de travail** dans ce service est divisée en **douze tranches de 2 heures** chacune. Les besoins de personnel varient d'une tranche horaire à l'autre : par exemple, peu d'infirmières sont nécessaires pendant la nuit, par contre l'**effectif** doit être **renforcé le matin** afin d'assurer les différents soins à apporter aux patients. Le tableau suivant donne les besoins de personnel pour chacune des tranches horaires.

Tranches horaires	Nombre minimal d'infirmières
06h – 08h	35
08h – 10h	40
10h – 12h	40
12h – 14h	35
14h – 16h	30
16h – 18h	30
18h – 20h	35
20h – 22h	30
22h – 00h	20
00h – 02h	15
02h – 04h	15
04h – 06h	15

Donner le modèle mathématique qui donne le nombre minimal d'infirmières nécessaires pour couvrir tous les besoins, sachant qu'**une infirmière travaille huit heures par jour et qu'elle a droit à une pause de deux heures au bout de quatre heures de travail**. Les variables du problème sont résumées dans le tableau suivant :

Variable	Description
x_1	nombre d'infirmières qui commencent à 06h
x_2	nombre d'infirmières qui commencent à 08h
x_3	nombre d'infirmières qui commencent à 10h
x_4	nombre d'infirmières qui commencent à 12h
x_5	nombre d'infirmières qui commencent à 14h
x_6	nombre d'infirmières qui commencent à 16h
x_7	nombre d'infirmières qui commencent à 18h
x_8	nombre d'infirmières qui commencent à 20h
x_9	nombre d'infirmières qui commencent à 22h
x_{10}	nombre d'infirmières qui commencent à 00h
x_{11}	nombre d'infirmières qui commencent à 02h
x_{12}	nombre d'infirmières qui commencent à 04h

Exercice 8 (Problème diététique)

Il s'agit d'un régime alimentaire garantissant un apport suffisant en éléments nutritifs. On considère :

- **n aliments** au **prix unitaire de c_j** ($j = 1, \dots, n$),
- **m éléments nutritifs**,
- q_{ij} la **quantité du ième élément nutritif** contenue dans **une unité du jème aliment**,
- d_i **quantité minimale** requise de l'**élément nutritif i** ($i = 1, \dots, m$),

Le problème du responsable est de **déterminer la quantité requise pour le régime de chaque aliment j** ($j = 1, \dots, n$).

Donner le programme mathématique convenable.



Exercice 9

Considérons le problème d'**implantation d'un nombre de dépôts** dans un ensemble de sites potentiels afin de servir certains clients. Le problème d'implantation de dépôts existe en **deux variantes** suivant que les dépôts ont des capacités limitées ou non. Dans le premier cas, le dépôt ne peut satisfaire qu'un nombre limité de clients. Dans les deux cas nous utilisons les notations suivantes :

- J : ensemble de sites potentiels d'ouverture de dépôts
- I : ensemble de clients
- g_{ij} : le gain correspondant à l'approvisionnement du client i par le dépôt j (s'il est ouvert)
- f_j : coût fixe d'ouverture du dépôt j
- q_j : capacité du dépôt j
- d_i : la demande du client i à satisfaire.

On considère les deux variables de décision :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le client } i \text{ est approvisionné par le dépôt } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si le dépôt } j \text{ est ouvert} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner la modélisation du problème de localisation des dépôts sans capacité
2. Donner la modélisation du problème de localisation des dépôts avec capacité