Cours de mathématiques pour ingénieurs

Première année cycle ingénieur

K. Oufaska

Ecole Supérieure d'Informatique et du Numérique
Université Internationale de Rabat

A.U., 2025/2026

Enseignants

Kenza Oufaska et OUDANI Mustapha
E-mail : kenza.oufaska@uir.ac.ma
Bureau : 308 Bâtiment 2
Office houres : Jeudi de 16h30 -17h30
Mustapha Oudani, Phd (TD, TP)

Descriptif

1. Chapitre 1 : Modélisation et programmation mathématique
2. Chapitre 2 : Programmation linéaire
3. Chapitre 3 : Programmation linéaire en nombres entiers
4. Chapitre 4 : Problèmes de transport et d'affectation
5. Chapitre 5 : Programmation non linéaire

Compétences Escomptées

1. CO1 : Model a problem as a linear program
2. CO2 : Solve graphically and analytically a linear program
3. CO3 : Solve linear programs using various CPLEX interfaces
4. CO4 : Implement Simplex and gradient algorithms using Python

Bibliographie I

Bazaraa, M. S., Jarvis, J. J., & Sherali, H. D. (2011).
Linear programming and network flows.
John Wiley & Sons.

Luenberger, D. G., & Ye, Y. (1984).
Linear and nonlinear programming (Vol. 2).
Reading, MA : Addison-wesley.

,

Evaluation

Moyenne de contrôle continu : 50%
Examen final : 50 %
Pénalité pour retard :
Tout travail remis en retard sans motif valable sera pénalisé de 10 % par jour de retard.

Un fleuriste dispose de 45 roses, 36 tulipes et 27 marguerites. Il veut offrir à ses clients deux types de bouquets de fleurs :

- Type 1 : bouquet à 80 Dhs, composé de 10 roses, 4 tulipes et 2 marguerites
- Type 2 : bouquet à 60 Dhs, composé de 6 roses, 6 tulipes et 6 marguerites.

Le souci du fleuriste est de déterminer le nombre de bouquets de chaque type afin de maximiser son revenu total.

Notons par : x_1 : le nombre de bouquet à préparer de type 1.
Notons par : x_2 : le nombre de bouquet à préparer de type 2.
Un bouquet de type 1 rapporte 80 Dhs, donc pour un nombre x_1 de bouquet de même type, le gain est $80x_1$. Un bouquet de type 2 est vendu à 60 Dhs, donc pour un nombre x_2 de même bouquet le gain sera de $60x_2$.
Ainsi, le revenu total de la vente de tous les bouquets est :

$$80x_1 + 60x_2$$

Il faut que le nombre de fleurs utilisées de chaque catégorie ne dépasse pas leur disponibilité :

- Rose : le fleuriste dispose de 45 roses, ainsi :

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

- Tulipes : le fleuriste dispose de 36 tulipes, ainsi :

$$4x_1 + 6x_2 \leq 36$$

- Marguerites : le fleuriste dispose de 27 marguerites, ainsi :

$$2x_1 + 6x_2 \leq 27$$

Il faut également que le nombre de bouquets préparés soint non nul, ainsi :

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Le modèle mathématique du problème de fleuriste est donné donc par :

$$\begin{cases} \text{Max } z = 80x_1 + 60x_2 \\ \text{sujet à} \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le modèle mathématique du problème de fleuriste est donné donc par :

$$\begin{cases} \text{Max } z = 80x_1 + 60x_2 \textbf{ fonction objectif} \\ \text{sujet à} \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \textbf{ contrainte 1} \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 36 \textbf{ contrainte 2} \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \textbf{ contrainte 3} \\ x_1, x_2 \geq 0 \textbf{ contrainte de signe} \end{cases}$$

Une usine fabrique 2 sortes de produits P_1 et P_2 à l'aide de deux machines M_1 et M_2. Le tableau ci-dessous représente les durées de fabrication de chaque produit sur chacune des deux machines :

	P_1	P_2
M_1	30 min	20 min
M_2	40 min	10 min

La machine M_1 est disponible 6000 min/mois
La machine M_2 est disponible 4000 min/mois
Un article P_1 fabriqué rapporte 400 dh et un article P_2 rapporte 200 dhs

Variables de décision :

x_1 : le nombre d'unités produit de P_1

x_2 : le nombre d'unités produit de P_2

Modèle mathématique :

$$\begin{cases} \text{Max } z = 400x_1 + 200x_2 \\ \text{Sous contraintes :} \\ 30x_1 + 20x_2 \leq 6000 \\ 40x_1 + 10x_2 \leq 4000 \end{cases}$$

Considérons le problème du chargement d'un sous-ensemble parmi n objets dans un sac à dos. Chaque objet i a une valeur v_i et un poids p_i. Le chargement devra être fait de manière à maximiser la valeur totale des objets sélectionnés sans dépasser le poids maximal W.

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si l'objet } i \text{ est choisi} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le problème de sac à dos peut être modélisé comme suit :

$$\begin{cases} \text{Max} \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \\ \text{Sujet à} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq W \\ x_i \in \{0,1\}, i \in \{1,...,n\} \end{cases}$$

Le problème du voyageur de commerce (Travelling Salesman Problem, TSP) consiste en la détermination de l'itinéraire, de coût minimal (temps, distance,...), d'un voyageur partant d'un point, visitant $(n-1)$ autres points (villes, entrepôts, usines, supermarchés, ...) et revenant au même point de départ.
Ce problème classique est une généralisation du problème, plus simple, qui consiste à trouver le plus court chemin entre deux points donnés. Il a beaucoup d'applications directes, notamment dans les transports, les réseaux et la logistique. Par exemple, trouver le chemin le plus court pour les véhicules de ramassage des ordures ou, dans l'industrie, pour trouver la plus courte distance que devra parcourir le bras mécanique d'une machine pour percer les trous d'un circuit donné.

Soit la variable de décision :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si le voyageur passe du point } i \text{ au point } j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le TSP se modélise comme suit :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \forall \quad S \subset \{2, 3, ..., n-2\}$$

Le responsable d'une unité de production désire affecter n personnes à n tâches. Chaque personne doit effectuer une et une seule tâche. Soit C_{ij} le coût de formation de la personne i à la tâche j. Le problème d'affectation consiste à trouver la meilleure affectation, c'est-à-dire affecter les personnes aux tâches de sorte que la somme des coûts de formation soit **minimum**. Le problème d'affectation est résumé par un tableau de la forme :

	T_1	T_2	...	T_j	...	T_n
P_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1n}
P_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2n}
...	...	...	...	...	...	
P_i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{in}
...	...	...	...	...	...	
P_n	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nj}	...	C_{nn}

Exercice

Proposer une modélisation du problème d'affectation

Le problème d'affectation peut être modélisé comme suit :

$$\begin{cases} \text{Min} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \\ \text{Sous contraintes} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j \in \{1, ..., n\} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i \in \{1, ..., n\} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Programmation mathématique

Un programme mathématique est une traduction d'un problème d'optimisation (maximisation ou minimisation) par des relations mathématiques dans le but de lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques pour résoudre le problème
La modélisation mathématique d'un problème consiste à identifier certaines composantes relatives au problème :

- L'ensemble des variables
- Les contraintes
- L'objectif

Programmation mathématique

Un **programme mathématique** est un problème d'optimisation de la forme :

$$(P)\begin{cases}\text{Min } f(x)\\ \text{Sujet à}\\ f_i(x)\leq 0, i\in\{1,...,m\}\\ x\in C\end{cases}$$

Ou

$$(P')\begin{cases}\text{Max } f(x)\\ \text{Sujet à}\\ f_i(x)\leq 0, i\in\{1,...,m\}\\ x\in C\end{cases}$$

Remarque

- *Nous pouvons considérer seulement les problèmes de type (P) ; en effet,*

$$Max\ f(x) = -\ Min(-f(x))$$

- *Dans le problème (P), il n'y a pas de contraintes d'égalités, car une contrainte de type* $h(x) = 0$ *peut être remplacée par deux contraintes* $h(x) <= 0$ *et* $-h(x) <= 0$

Définition

On dit que x^* est un minimum local de (P) s'il existe un voisinage V_x de x^* tel que x^* soit minimum du problème (P_1) suivant :

$$(P_1)\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{Sujet à} \\ f_i(x) \leq 0, i \in \{1, ..., m\} \\ x \in C \cap V_x \end{cases}$$

Selon la nature de la fonction objectif et de l'ensemble des contraintes , on distingue :

- **La programmation linéaire :** étudie les cas ou la fonction objectif est linéaire et les contraintes sont des égalités ou inégalités linéaires.
- **La programmation linéaire en nombre entiers :** étudie les programmes linéaires dans lesquels les variables sont contraintes à prendre des valeurs entières.
- **La programmation quadratique :**
  La fonction objectif peut contenir des termes quadratiques, tout en conservent une description du domaine réalisable par des égalités/inégalités linéaires.

- **La programmation non linéaire :** étudie le cas général ou la fonction objectif et /ou les contraintes contiennent des parties non linéaires :
  - Programmation non-linéaire sans contraintes.
  - Programmation non linéaire avec contraintes.
- **La programmation stochastique :** étudie le cas dans lequel certaines contraintes dépendent de variables aléatoire (prise de décision sous incertitude) Exemple : problèmes dépendants des demandes qui ne sont pas connues à l'avance de clients problèmes liés à la météo, cours de la bourse, du marché

- **La programmation convexe :** si la fonction objectif et les contraintes sont des fonctions convexes.
- **La programmation dynamique :** Utilise la propriété qu'une solution d'un problème dépend des solutions précédentes obtenues des sous-problèmes en permettent aux sous-problèmes de se superposer. Autrement dit , un sous –problèmes peut être utilise dans la solution de deux sous-problèmes différents.
  Exemples : problème de recherche du chemin optimal entre deux points.

Programmation linéaire

- Fonction objectif et contraintes linéaires
- Variables continues
- Existence de plusieurs algorithmes de résolution exacte (Simplexe, point intérieur, etc)
- Problèmes non linéaires qui se ramènent aux problèmes linéaires

Définition

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux matrices carrées, alors :

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$
- $AB = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

Définition

- La matrice A est dite symétrique si $a_{ij} = a_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq n$
- La matrice A est dite antisymétrique si $a_{ij} = -a_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq n$
- La matrice A est dite diagonale si $a_{ii} = \lambda_i, \forall \quad 1 \leq i \leq n$ et $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

Définition

- La matrice A est dite triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0, \forall \quad i > j$
- La matrice A est dite triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0, \forall \quad i < j$
- Si le déterminant d'une matrice est différent de 0, on dit que la matrice est **régulière** ou **inversible**
- Le **rang** d'une matrice est l'ordre de la plus grande matrice extraite de A dont le déterminant est non nul
- Soit A une matrice de rang m. On appelle **base** de A toute sous matrice carrée régulière d'ordre m extraite de A.

Définition

Solution réalisable : Solution qui satisfait toutes les contraintes du problème.

Définition

Domaine réalisable : Ensembles de tous les jeux de valeurs des variables de décision satisfaisant toutes les contraintes et restriction de signe du programme linéaire (PL).

Définition

Solution optimale : Solution réalisable qui optimise (maximise ou minimise) la fonction économique.

Définition

Un problème de programmation linéaire peut être écrit sous la forme suivante (forme matricielle) :

$$(PL)\begin{cases}\text{Min } c^t x \\ \text{Sujet à} \\ Ax = b \\ x \geq 0\end{cases}$$

Définition

Il peut s'écrire également sous la forme suivante, dite **forme standard** :

$$(PL)\begin{cases} \text{Min } c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{Sujet à} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, ..., n\} \end{cases}$$

Définition

Un problème avec des contraintes d'inégalités de la forme suivante :

$$(PL)\begin{cases} \text{Min } c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{Sujet à} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, ..., n\} \end{cases}$$

Peut être converti en forme standard en ajoutant des variables positifs (appelés **variables d'écarts** ou slacks en anglais)

Définition

Avec les variables d'écarts :

$$(PL)\begin{cases} \text{Min } c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{Sujet à} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + y_n = b_m \\ x_i, y_i \geq 0, \forall i \in \{1, ..., n\} \end{cases}$$

Définition

Un problème avec des contraintes d'inégalités de la forme suivante :

$$(PL)\begin{cases} \text{Min } c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{Sujet à} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_i \geq 0, \forall i \in \{1, ..., n\} \end{cases}$$

Peut être converti en forme standard en retranchant des variables positifs (appelés **variables de surplus**)

Définition

Avec les variables de surplus :

$$(PL)\begin{cases} \text{Min } c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{Sujet à} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - y_2 = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n - y_n = b_m \\ x_i, y_i \geq 0, \forall i \in \{1, ..., n\} \end{cases}$$

Remarque

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x_1, x_2, ..., x_n$ *sont positifs. En effet, s'il existe* j *tel que* $x_j < 0$, *on pose* $x_j = x_j^+ - x_j^-$, *avec* $x_j^+ = \max(x_j, 0)$ *et* $x_j^- = \max(-x_j, 0)$

Exercice

Ecrire sous forme standard le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Min\ z = 5x_1 - 3x_2 \\ Sujet\ à \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 6x_2 = 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice

Ecrire sous forme standard le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Min\ z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ Sujet\ à \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La méthode de résolution graphique concerne les programmes à deux variables :

1. On reporte sur un graphique chacune des contraintes du problème et on détermine la région commune à l'ensemble de ces contraintes. La région commune, si elle existe, constitue la région des solutions réalisables.
2. On détermine les coordonnées des points extrêmes ou sommets de la région des solutions réalisables en les localisant directement sur le graphique ou plus exactement en résolvant simultanément les équations des droites qui se coupent à chacun des points extrêmes.
3. On substitue les coordonnées de chaque point extrême dans l'expression de la fonction économique. Le point extrême qui optimise la fonction économique correspond à la solution optimale.

Il existe quatre cas de figure :

1. Problème borné inférieurement
2. Problème avec infinité de solutions optimales
3. Problème non borné inférieurement
4. Problème avec domaine réalisable non borné et solution optimale finie

Exemple

Soit à résoudre graphiquement le programme :

$$(P)\begin{cases} Min \ -10x_1 - 20x_2 \\ s.c : \\ x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 39 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résolution graphique

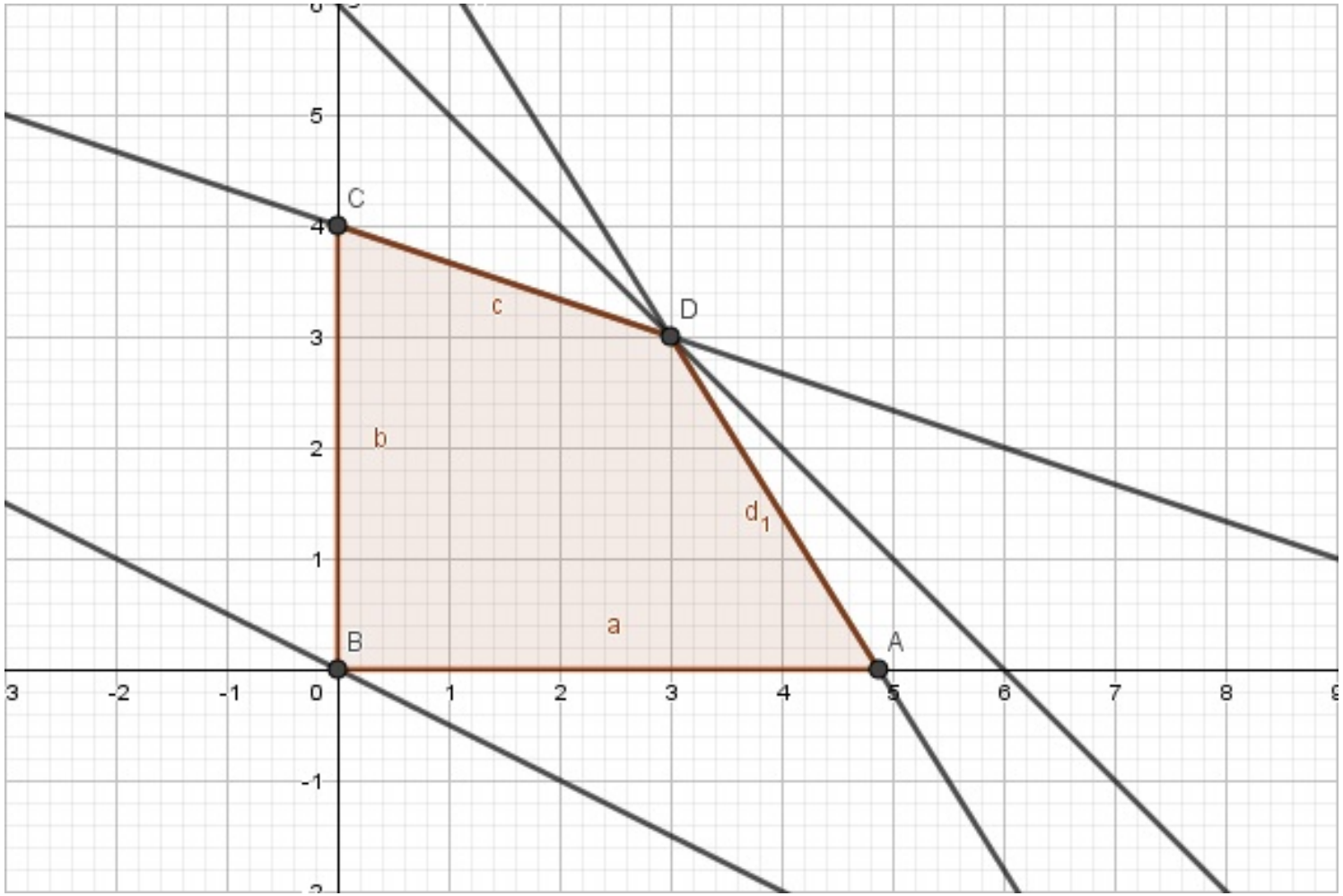


Figure – Résolution graphique

Résolution graphique

Exercice

Résoudre graphiquement le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} Min\ x_1 + x_2 \\ s.c : \\ 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Résolution graphique

Exercice

Résoudre graphiquement le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} Min\ 2x_1 + x_2 \\ s.c : \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice

Appliquer le pivot de Gauss sur la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice

Appliquer le pivot de Gauss sur la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 16 \\ 8 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Soit à résoudre le programme suivant :

$$(P)\begin{cases} \text{Min } z = -80x - 60y \\ \text{S.c :} \\ 10x + 6y \leq 45 \\ 4x + 6y \leq 36 \\ 2x + 6y \leq 27 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est :

$$(PS)\begin{cases} \text{Min } z = -80x - 60y \\ \text{S.c :} \\ 10x + 6y + u = 45 \\ 4x + 6y + v = 36 \\ 2x + 6y + h = 27 \\ x, y, u, v, h \geq 0 \end{cases}$$

La solution de base correspondante est $(x, y, u, v, h) = (0, 0, 45, 36, 27)$. C'est une solution de base réalisable puisque toutes les valeurs de variables sont positives. La valeur de la fonction objectif est $z = 0$

La solution de base $(x, y, u, v, h) = (0, 0, 45, 36, 27)$ n'est pas optimale puisque les coefficients dans la fonction objectif des variables hors-base x et y sont négatifs.Puisque nous cherchons à minimiser $z = -80x - 60y$ alors c'est la variable x qui influence plus la diminution de z.
L'augmentation de x est limitée par la contrainte de positivité. En effet,

$$\begin{cases} u = 45 - 10x \geq 0 \iff x \leq \frac{45}{10} \\ v = 36 - 4x \geq 0 \iff x \leq \frac{36}{4} \\ h = 27 - 2x \geq 0 \iff x \leq \frac{27}{2} \end{cases}$$

Donc pour que la solution demeure réalisable, il faut que :

$$x \leq \min\{\frac{45}{10}, \frac{36}{4}, \frac{27}{2}\}$$

Considérons le tableau initial du Simplexe, obtenu à partir de la forme standard, suivant

Variables de base	x	y	u	v	h	-z	Termes de droite
u	**10**	6	1	0	0	0	45
v	4	6	0	1	0	0	36
h	2	6	0	0	1	0	27
-z	-80	-60	0	0	0	1	0

Les coefficients des variables de la dernière ligne du tableau du simplexe sont appelés coûts relatifs, coûts réduits ou coûts marginaux.

La variable de sortie u va quitter la base pour être remplacée par la variable x qui va alors jouer le rôle de la variable de base dans la prochaine base.

Variables de base	x	y	u	v	h	-z	Termes de droite
x	**1**	**3/5**	**1/10**	**0**	**0**	**0**	**9/2**
v	4	6	0	1	0	0	36
h	2	6	0	0	1	0	27
-z	-80	-60	0	0	0	1	0

Variables de base	x	y	u	v	h	-z	Termes de droite
x	1	3/5	1/10	0	0	0	9/2
v	**0**	**18/5**	**-2/5**	**1**	**0**	**0**	**18**
h	2	6	0	0	1	0	27
-z	-80	-60	0	0	0	1	0

Variables de base	x	**y**	u	v	h	-z	Termes de droite
x	1	3/5	1/10	0	0	0	9/2
v	0	18/5	-2/5	1	0	0	18
h	**0**	**24/5**	**-1/5**	**0**	**1**	**0**	**18**
-z	0	-12	8	0	0	1	360

Variables de base	x	**y**	u	v	h	-z	Termes de droite
x	1	3/5	1/10	0	0	0	9/2
v	0	18/5	-2/5	1	0	0	18
y	**0**	**1**	**-1/24**	**0**	**5/24**	**0**	**15/4**
-z	0	0	15/2	0	5/2	1	405

L'algorithme de Simplexe peut être résumé comme suit :

1. Ecrire le problème sous forme standard
2. Identifier une solution de base initiale et donner le tableau initial du Simplexe
3. Si tous les coefficients de la dernière ligne sont positifs ou nuls, alors la solution actuelle est optimale. Sinon sélectionner la variable hors-base ayant le plus petit coefficient négatif pour entrer en base : c'est la variable d'entrée
4. Appliquer la règle du plus petit rapport pour identifier la variable qui quitte la base : c'est la variable de sortie.
5. Exécuter le pivot sur l'élément à l'intersection de la colonne de la variable d'entrée et de la ligne de la variable de sortie. Retourner à l'étape 3.

Exercice

Appliquer la méthode de Simplexe tabulaire pour résoudre le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Min\ z = -x_1 - 2x_2 \\ S.c : \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice

Appliquer la méthode de Simplexe tabulaire pour résoudre le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Min\ z = -x_1 - 2x_2 \\ S.c : \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution est : $x_1 = 2, x_2 = 3$ *et son coût est -8.*

Remarque

Pour résoudre un problème de maximisation il faut le transformer en problème de minimisation ou bien adapter le critère d'optimalité. Ainsi, dans ce cas, il faut que les coûts marginaux de toutes les variables hors-base soient négatifs ou nuls

Exercice

Résoudre le programme suivant par la méthode tabulaire de Simplexe

$$\begin{cases} Max\ z = x_1 + 2x_2 \\ sujet\ à \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice

Résoudre le programme suivant par la méthode tabulaire de Simplexe

$$\begin{cases} Max\ z = x_1 + 2x_2 \\ sujet\ à \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

La solution est $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 2$ et son coût est 8.

Théorème

Considérons le polytope $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ *où* A *est de rang* m. *Alors,* $x \in X$ *est un point extrême de* X *si et seulement si* x *est une solution de base de* X.

Remarque

L'augmentation de la valeur d'une variable hors-base et l'ajustement des valeurs des variables de base pour effectuer un changement de base correspond géométriquement à se déplacer sur une arête du polytope X. *Aurement dit, cela consiste à se déplacer d'un point extrême à un autre point extrême adjacent.*

Dans l'étape 3 de l'algorithme de Simplexe lorsque les coûts marginaux de toutes les variables sont positifs ou nuls, alors la solution actuelle est optimale. Mais s'ils sont tous non nuls, alors la solution optimale est unique. Si par contre, l'un de ces coûts des variables hors-base est nul, alors on peut avoir deux ou plusieurs solutions optimales. On dit qu'on a **dégénérescence de première espèce** .

Pour illuster cette dégénérescence, on considère l'exemple suivant :

$$(P)\begin{cases} \text{Min } z = -50x_1 - 30x_2 \\ \text{sujet à} \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 27 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Variables de base	x	y	u	v	h	-z	Termes de droite
u	**10**	6	1	0	0	0	45
v	4	6	0	1	0	0	36
h	2	6	0	0	1	0	27
-z	-50	-30	0	0	0	1	0

La variable x entre dans la base pour remplacer la variable u qui la quitte.

Variables de base	x	y	u	v	h	-z	Termes de droite
x	1	3/5	1/10	0	0	0	9/2
v	0	18/5	-2/5	1	0	0	18
h	0	24/5	-1/5	0	1	0	18
-z	0	0	5	0	0	1	225

Nous obtenons une solution optimale dont les variables de bases sont x, v, h. Mais le coût marginal de y est nul. Faisons entrer cette variable y

Variables de base	x	y	u	v	h	-z	Termes de droite
x	1	0	1/8	0	-1/8	0	9/4
v	0	0	-1/4	1	-3/4	0	9/2
y	0	1	-1/24	0	5/24	0	15/4
-z	0	0	5	0	0	1	225

Nous obtenons donc une autre solution de base optimale dont les variables de base sont x, v, y

En appliquant la règle du plus petit rapport pour désigner la variable de sortie, il est possible que le plus petit rapport soit atteint pour deux contraintes. En effectuant le changement de base, nous obtenons alors une solution de base avec l'une des composantes nulle. Nous disons qu'on a une dégénérescence de deuxième espèce. Nous pouvons même retrouver une base déjà rencontrée à une itération précédente. On dit alors qu'on a un phénomène de cyclage.

Afin d'illuster ce type de dégénérescence, considérons l'exemple suivant :

$$(P)\begin{cases} \text{Min } z = -4x_1 - 3x_3 \\ \text{sujet à} \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Introduisons les variables d'écarts et écrivons le premier tableau de Simplexe

V. B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	b
x_4	1	-1	0	1	0	0	0	2
x_5	2	0	1	0	1	0	0	4
x_6	1	1	1	0	0	1	0	3
-z	-4	0	-3	0	0	0	1	0

La variable x_1 entre en base. Mais en appliquant la règle du plus petit rapport, nous constatons que le minimum est atteint pour les deux premières contraintes. Choisissons x_4 comme variable de sortie, nous obtenons le tableau suivant :

V. B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	b
x_1	1	-1	0	1	0	0	0	2
x_5	0	2	1	-2	1	0	0	0
x_6	0	2	1	-1	0	1	0	1
-z	0	-4	-1	0	2	0	1	4

Cette nouvelle solution n'est pas optimale. Cette solution est dite dégénérée puisque l'une des variables de base est nulle ($x_5 = 0$). En appliquant la méthode de plus rapport, nous constatons que la variable x_5 quitte la base et nous obtenons le tableau suivant :

V. B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	b
x_1	1	0	1/2	0	1/2	0	0	2
x_2	0	1	1/2	-1	1/2	0	0	0
x_6	0	0	0	1	-1	1	0	1
-z	0	0	-3	4	0	0	1	4

La solution obtenue n'est pas optimale et elle dénénérée ($x_2 = 0$). La valeur de la fonction objectif n'a pas changé. A l'itération suivante, x_2 quitte la base et sera remplacée par x_3

V. B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	b
x_1	1	-1	0	1	0	0	0	2
x_3	0	2	1	-2	1	0	0	0
x_6	0	0	0	1	-1	1	0	1
-z	0	6	0	-2	3	0	1	4

Encore une fois, le changement de base n'a pas modifiée la valeur de la fonction objectif. En plus la nouvelle solution n'est pas optimale. Ce phénomène de dégénérescence s'arrête à l'itération suivante où nous obtenons une solution de base non dégénérée.

V. B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	b
x_1	1	-1	0	0	1	-1	0	1
x_3	0	2	1	0	-1	2	0	2
x_4	0	0	0	1	-1	1	0	1
-z	0	6	0	0	1	2	1	6

Nous obtenons une solution de base optimale non dégénérée.

Remarque

Dans certains cas de problèmes dégénérés, nous pouvons avoir un phénomène de cyclage où nous retrouvons une même solution de base après un certain nombre d'itérations sans aucune amélioration de la valeur de la fonction objectif.

Remarque

Dans le cas où on a plusieurs variables candidates à enter en base nous pouvons utiliser la règle de Bland qui consiste à choisir systématiquement comme variable entrante, parmi les variables candidates, celle ayant le plus petit indice et comme variable sortante celle ayant le plus petit indice.

Dans tous les exemples que nous avons étudié, une solution de base réalisable initiale est facile à identifier puisque la forme standard est aussi une forme canonique. Ceci n'est pas toujours le cas. Soit l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } z = -80x - 60y \\ \text{sujet à} \\ 10x + 6y = 45 \\ 4x + 6y \leq 36 \\ 2x + 6y \leq 27 \\ x \geq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Soit le PL :

$$(P)\begin{cases} \text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{sujet à} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$$

Le programe (P) est dit sous forme canonique si :

- La fonction objectif est exprimée en fonction en variables hors-base
- La colonne de la matrice des contraintes correspondant à chaque variable de base forme un vecteur unité
- Toutes les b_i sont non négatifs

La phase 1 de la méthode des deux phases consiste à écrire le problème à résoudre sous forme canonique en identifiant une solution de base initiale. Ceci peut se faire en appliquant, soit la méthode des variables artificielles ou la méthode du grand M. Par contre la phase 2 consiste à appliquer l'algorithme du Simplexe au problème sous forme canonique obtenue à la phase 1.

Considérons le problème linéaire sous forme la forme standard :

$$(P)\begin{cases} \text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{sujet à} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$$

Nous allons ajouter à chaque contrainte d'égalité une variable dite **variable artificielle**, qui jouera le rôle de variable de base

$$(P+)\begin{cases} \text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{sujet à} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = t_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + t_2 = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + t_m = b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_m \geq 0 \end{cases}$$

$t_1, t_2, ...t_m$ étant les variables artificielles.Les problèmes (P) et $(P+)$ ne sont équivalents que si les variables artificielles sont toutes nulles.

Il faudra donc ajouter à $(P+)$ la contrainte supplémentaire :

$$t_1 + t_2 + ... + t_m = 0$$

Ce qui nous obligera à ajouter une autre variable artificielle. L'idée consiste à ne pas introduire une nouvelle contrainte dans le modèle $(P+)$, mais de considérer un nouveau modèle ayant les mêmes contraintes que $(P+)$ et qui pénalise le fait que $t_1, t_2, ..., t_m$ prennent des valeurs strictement positives. Donc au lieu de résoudre $(P+)$ on peut résoudre le programme suivant :

$$(P_a)\begin{cases} \text{Min } w = t_1 + t_2 + ... + t_m \\ \text{sujet à} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = t_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + t_2 = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + t_m = b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_m \geq 0 \end{cases}$$

Si le problème (P_a) a une solution optimale égale à 0, alors nous obtenons une solution initiale réalisable pour (P), sinon le problème (P) est non réalisable.

Exemple

Soit le programme linéaire

$$(P_1)\begin{cases} Min\ z = -80x - 60y \\ sujet\ à \\ 10x + 6y = 45 \\ 4x + 6y \leq 36 \\ 2x + 6y \leq 27 \\ x \geq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Après transformation du programme en forme standard puis introduction des variables artificielles, le nouveau modèle prend la forme :

$$(P_1+)\begin{cases} \text{Min } z = -80x - 60y \\ \text{sujet à} \\ 10x + 6y + t_1 = 45 \\ 4x + 6y + e_1 = 36 \\ 2x + 6y + e_2 = 27 \\ x - e_3 + t_2 = 2 \\ x, y, e_1, e_2, e_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Modifions la fonction objectif :

$$(P_a)\begin{cases} \text{Min } z_a = t_1 + t_2 \\ \text{sujet à} \\ 10x + 6y + t_1 = 45 \\ 4x + 6y + e_1 = 36 \\ 2x + 6y + e_2 = 27 \\ x - e_3 + t_2 = 2 \\ x, y, e_1, e_2, e_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	T.D
t_1	10	6	0	0	0	1	0	45
e_1	4	6	1	0	0	0	0	36
e_2	2	6	0	1	0	0	0	27
t_2	1	0	0	0	-1	0	1	2
$-z_a$	0	0	0	0	0	1	1	0

Pour que t_1 et t_2 jouent le rôle de variables de base, il faut transformer ce tableau en soustrayant la première et la quatrième ligne de la dernière ligne. Nous obtenons le tableau suivant :

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	T.D
t_1	10	6	0	0	0	1	0	45
e_1	4	6	1	0	0	0	0	36
e_2	2	6	0	1	0	0	0	27
t_2	1	0	0	0	-1	0	1	2
$-z_a - z_a^0$	-11	-6	0	0	1	0	0	-47

Cette solution n'est pas optimale. La variable x entre en base et t_2 sort de la base. Nous obteneons le tablea suivant :

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	T.D
t_1	0	6	0	0	10	1	-10	25
e_1	0	6	1	0	4	0	-4	28
e_2	0	6	0	1	2	0	-2	23
x	1	0	0	0	-1	0	1	2
$-z_a - z_a^0$	0	-6	0	0	-10	0	11	-25

Cette solution n'est pas optimale. La variable t_1 sera remplacée par la variable d'entrée e_3. Nous obteneons le tableau suivant :

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	T.D
e_3	0	$3/5$	0	0	1	$1/10$	-1	$5/2$
e_1	0	$18/5$	1	0	0	$-2/5$	0	18
e_2	0	$24/5$	0	1	0	$-1/5$	0	18
x	1	$3/5$	0	0	0	$1/10$	0	$9/2$
$-z_a - z_a^0$	0	0	0	0	0	1	1	0

La solution $(9/2, 0, 18, 18, 5/2, 0, 0)$ est une solution de base optimale de (P_a) avec une valeur optimale égale à 0. Donc $(9/2, 0, 18, 18, 5/2)$ constitue une solution de base initiale du problème (P_1). Ceci termine la phase 1 et va nous permettre de construire un tableau initial du Simplexe de (P_1) pour démarrer la phase 2.

Phase 2 :

Pour commencer la phase 2, il suffit de supprimer les colonnes associées aux variables artificielles et remplacer les coefficients de la fonction objectif z_a par ceux de la fonction objectif z.

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	T.D
e_3	0	$3/5$	0	0	1	$5/2$
e_1	0	$18/5$	1	0	0	18
e_2	0	$24/5$	0	1	0	18
x	1	$3/5$	0	0	0	$9/2$
$-z$	-80	-60	0	0	0	0

x étant une variable de base, nous devons donc remplacer -80 par 0. Nous multiplions la quatirème par -80 et nous l'ajoutons à la dernière ligne.

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	T.D
e_3	0	$3/5$	0	0	1	$5/2$
e_1	0	$18/5$	1	0	0	18
e_2	0	$24/5$	0	1	0	18
x	1	$3/5$	0	0	0	$9/2$
$-z$	0	-12	0	0	0	360

Cette solution n'est pas optimale. La variable y entre en base et la variable e_2 sort de la base.

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	T.D
e_3	0	0	0	-3/5	1	1/4
e_1	0	0	1	-18/5	0	9/2
y	0	1	0	5/24	0	15/4
x	1	0	0	-1/8	0	9/4
$-z$	0	0	0	5/4	0	405

Cette solution est optimale. La solution optimale de (P_1+) est $(9/4, 15/4, 9/2, 0, 1/4)$ et donc la solution optimale de (P_1) est $(9/4, 15/4)$ avec comme valeur optimale $z = -405$

Méthode de grand M

Contrairement à la méthode des variables artificielles, la méthode du grand M utilise à la fois les variables initiales du problème et les variables artificielles. On pénalise les variables artificielles en leur affectant un coefficient de valeur très élevée dans la fonction objectif ($+M$ pour un problème de minimisation, $-M$ pour un problème de maximisation). Les pénalités ont pour objet de forcer, au fil des itérations, les variables artificielles à quitter la base. A l'optimum (s'il existe) les variables artificielles sont hors base. Si à l'optimum, certaines variables artificielles sont dans la base, avec une valeur non nulle, alors le programme n'a pas de solution réalisable.

Appliquons l'algorithme de Simplexe au problème

$$\begin{cases} \text{Min } z_m = -80x - 60y + Mt_1 + Mt_2 \\ \text{sujet à} \\ 10x + 6y + t_1 = 45 \\ 4x + 6y + e_1 = 36 \\ 2x + 6y + e_2 = 27 \\ x - e_3 + t_2 = 2 \\ x, y, e_1, e_2, e_3, t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le tableau initial du Simplexe est donné par :

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	T. droite
t_1	10	6	0	0	0	1	0	45
e_1	4	6	1	0	0	0	0	36
e_2	2	6	0	1	0	0	0	27
t_2	1	0	0	0	-1	0	1	2
$-z_m$	-80	-60	0	0	0	M	M	0

Pour que t_1 et t_2 jouent le rôle de variables de base, il faut transformer ce tableau en soustrayant M fois la première et M fois la quatrième ligne de la dernière ligne

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	T. droite
t_1	10	6	0	0	0	1	0	45
e_1	4	6	1	0	0	0	0	36
e_2	2	6	0	1	0	0	0	27
t_2	1	0	0	0	-1	0	1	2
$-z_m - z_m^0$	-80-11M	-60-6M	0	0	M	0	0	-47M

Cette solution de base n'étant pas optimale, nous appliquons alors le critère d'entrée et le critère de sortie pour remplacer la variable de sortie t_2 par la variable d'entrée x. Nous obteneons le tableau suivant :

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	T. droite
t_1	0	6	0	0	10	1	-10	25
e_1	0	6	1	0	4	0	-4	28
e_2	0	6	0	1	2	0	-2	23
x	1	0	0	0	-1	0	1	2
$-z_m - z_m^0$	0	-60-6M	0	0	-80-10M	0	80+11M	160-25M

Cette solution de base n'est pas optimale. La variable de sortie t_1 sera remplacée par la variable d'entrée e_3.

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	T. droite
e_3	0	3/5	0	0	1	1/10	-1	5/2
e_1	0	18/5	1	0	0	-2/5	0	18
e_2	0	24/5	0	1	0	-1/5	0	18
x	1	3/5	0	0	0	1/10	0	9/2
$-z_m - z_m^0$	0	-12	0	0	0	8+M	M	360

Toutes les variables artificelles sont hors base avec un fort coefficient positif et ne pourront plus y entrer. La phase 1 s'achève en éliminant les variables artificielles du tableau précédent et la phase 2 du simplexe démarre.

V.B	x	y	e_1	e_2	e_3	T. droite
e_3	0	$3/5$	0	0	1	$5/2$
e_1	0	$18/5$	1	0	0	18
e_2	0	$24/5$	0	1	0	18
x	1	$3/5$	0	0	0	$9/2$
$-z$	0	-12	0	0	0	360

Reprenons l'exemple du fleuriste :

$$(P)\begin{cases} \text{Max } z = 80x + 60y \\ \text{sujet à} \\ 10x + 6y \leq 45 \\ 4x + 6y \leq 36 \\ 2x + 6y \leq 27 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Supposons qu'un client fait une proposition au fleuriste pour acheter toutes ses fleurs (ressources) : son problème est de déterminer les prix unitaires u_1 (pour 1 rose), u_2 (pour 1 tulipe) et u_3 (pour 1 marguerite) dans le but de minimiser le coût total d'achat. Mais, pour que le fleuriste accepte son offre , le prix payé pour les fleurs requises pour préparer un bouquet de type 1 doit être d'au moins 80 Dhs et pour un bouquet de type 2 doit être d'au moins 60 Dhs.

Le client doit alors résoudre le problème suivant :

$$(D)\begin{cases} \text{Min } w = 45u_1 + 36u_2 + 27u_3 \\ \text{sujet à} \\ 10u_1 + 4u_2 + 2u_3 \geq 80 \\ 6u_1 + 6u_2 + 6u_3 \geq 60 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le programme (P) est appelé le problème **primal** et (D) le problème **dual**.

- A chaque problème primal est associé un problème dual
- A chaque variable du primal est associée une contrainte du dual
- A chaque contrainte du primal est associée une variable de dual
- Si l'objectif du primal est à maximiser, alors l'objectif du dual est à minimiser et inversement
- Le dual du dual est le primal

Les propriétés de correspondance primal-dual peuvent être résumées dans le tabelau suivant :

Primal (Min)	Dual (Max)
$x_j \geq 0$	$\sum_{1\leq j\leq m} a_{ij}u_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$\sum_{1\leq j\leq m} a_{ij}u_j \geq c_j$
$x_j \in \mathbb{R}$	$\sum_{1\leq j\leq m} a_{ij}u_j = c_j$
$\sum_{1\leq j\leq m} a_{ij}x_j \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$\sum_{1\leq j\leq m} a_{ij}u_j \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$\sum_{1\leq j\leq m} a_{ij}x_j = b_i$	$u_i \in \mathbb{R}$

Nous avons les correspondances primales duales suivantes :

$$(P)\begin{cases}\text{Min } c^t x\\ \text{sujet à}\\ Ax \geq b\\ x \geq 0\end{cases}$$

$\leftrightarrow$

$$(D)\begin{cases}\text{Max } b^t u\\ \text{sujet à}\\ A^t u \leq c\\ u \geq 0\end{cases}$$

Nous avons les correspondances primales duales suivantes :

$$(P)\begin{cases}\text{Min } c^t x\\ \text{sujet à}\\ Ax = b\\ x \geq 0\end{cases}$$

$\leftrightarrow$

$$(D)\begin{cases}\text{Max } b^t u\\ \text{sujet à}\\ A^t u \leq c\\ u \in \mathbb{R}\end{cases}$$

Exercice

Donner le dual du programe suivant :

$$(P)\begin{cases} Min\ z = 2x_1 + 3x_2 \\ sujet\ à \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice

Donner le dual du programme suivant :

$$(P)\begin{cases} Min\ z = x_1 - 3x_2 \\ sujet\ à \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Théorème

Pour toute solution x réalisable du problème primal et toute solution u réalisable du dual, on a :

$$b^t u \leq c^t x$$

Preuve

On a

$$c^t x = x^t c \geq x^t (A^t u) = (Ax)^t u \geq b^t u$$

Théorème

Si le problème primal admet une solution réalisable $\overline{x}$ et si son dual admet une solution réalisable $\overline{u}$ telles que $b^t\overline{u} = c^t\overline{x}$ alors $\overline{x}$ et $\overline{u}$ sont des solutions optimales respectivement du primal et du dual.

Preuve

$c^t x \geq b^t\overline{u} = c^t\overline{x}$

Théorème

Considérons le programme linéaire (P) et son dual (D)

- *Si l'un des problèmes duaux admet une solution optimale finie, alors il en est de même pour l'autre et les valeurs des fonctions objectifs à l'optimum sont égales*
- *Si l'un des problèmes duaux n'est pas borné, alors l'autre n'est pas réalisable*

Théorème

Étant donné un programme linéaire (P) et le programme dual (D) associé. Si (P) et (D) ont des solutions, alors chacun d'eux a une solution optimale et $Min(P) = Max(D)$. Ce théorème est dit "Théorème fondamental de la dualité".

Théorème

Soient x et u des solutions réalisables respectivement pour les problèmes primal et dual. Alors x et u sont des solutions optimales pour ces problèmes si et seulement si :

$$(u^t a_{.j} - c_j)x_j = 0, \ \ pour\ j = 1, 2, ..., n$$

Ce théorème est dit "théorème des écarts complémentaires"

Algorithme dual de Simplexe

Considérons le problème primal :

$$(P)\begin{cases} \text{Max } z = x_1 - 3x_2 \\ \text{sujet à} \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -2x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Au lieu de résoudre le problème (P) directement par l'algorithme du Simplexe, nous allons passer par la résolution de son dual

$$(D)\begin{cases} \text{Min } z = 2u_1 + 3u_2 \\ \text{sujet à} \\ u_1 - 2u_2 \geq 1 \\ -2u_1 - u_2 \geq -3 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard de (D) est :

$$(DS)\begin{cases} \text{Min } z = 2u_1 + 3u_2 \\ \text{sujet à} \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 = -1 \\ 2u_1 + u_2 + u_4 = 3 \\ u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \end{cases}$$

La forme tabulaire associée à (DS) est :

Variables de base	u_1	u_2	u_3	u_4	Termes de droite
u_3	-1	2	1	0	-1
u_4	2	1	0	1	3
$-z$	2	3	0	0	0

Nous constatons que la solution est optimale, mais elle n'est pas réalisable puisque l'un des termes de droite est négatif. Donc u_3 sort de la base (variable associé à la ligne du terme négatif. Et la variable u_1 entre en base car c'est la variable correspondante au plus petit rapport positif. En effectuant la règle de pivotage, nous obteneons le tableau :

Variables de base	u_1	u_2	u_3	u_4	Termes de droite
u_1	1	-2	-1	0	1
u_4	0	5	2	1	1
$-z$	0	7	2	0	-2

Tous les coûts relatifs associés aux variables hors-base sont positiifs et tous les termes de droite sont positifs. Donc la solution de base actuelle est optimale.

Remarque

Dans l'algorithme primal de Simplexe, nous commençons par des solutions réalisables et on cherche au courant des itérations une solution optimale alors que pour l'algorithme dual de Simplexe, on part d'une solution optimale (peut être non réalisable) et on cherche une solution réalisable.

Programmation linéaire en nombres entiers

- La plupart des problèmes issus du monde économique se présentent ou peuvent être ramenés à des problèmes linéaires dont les variables prennent des valeurs entières.
- Plusieurs problèmes de gestion (affectation, sac à dos, TSP, VRP, etc) sont des Problèmes Linéaires en Nombres Entiers PLNE

Définition

Un problème de PLNE est donné sous la forme générale :

$$(PLNE)\begin{cases} \text{Min } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{S.c :} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, 2, ..., m \\ x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2, ..., n \end{cases}$$

Considérons le problème de PLNE suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } z = -x_1 - x_2 \\ \text{sujet à} \\ -2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ 16x_1 - 14x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ce problème admet une solution optimale continue $x = (7, 7.5)$ avec $z = -14.5$

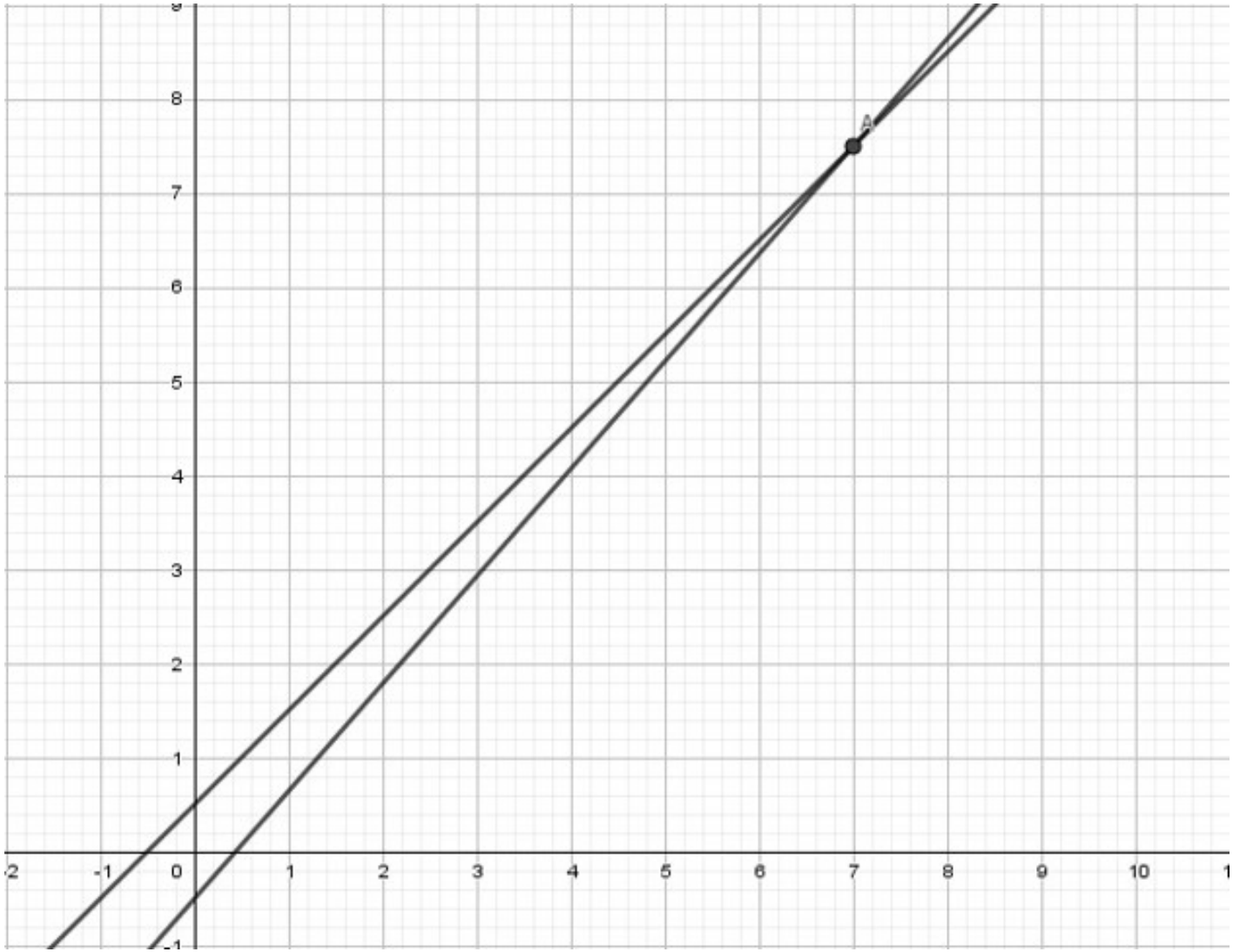


Figure – Exemple PLNE

Remarque

- *La relaxation continue consiste à supprimer (ou relâcher) les contraintes d'intégrité du problème*
- *Un cas particulier est lorsque la solution optimale de la relaxation continue du problème est une solution entière*
- *Dans le cas général, la relaxation continue nous donne une borne inférieure du problème PLNE (problème de minimisation)*

Pour le problème précédent, les solutions arrondies sont $x_1 = (7, 7)$ avec $z = -14$ et $x_2 = (7, 8)$ avec $z = -15$
Ces deux solutions arrondies ne sont pas réalisables et, en plus sont très éloignées de la solution optimale entière $x^* = (3, 3)$ du problème avec $z = -6$

La méthode d'énumération consiste à tester toute les solutions entières du domaine réalisable

Considérons un problème de PLNE et distinguons les deux cas suivants :

- Cas 1 : 10 variables de l'ensemble $\{1, 2, ..., 9\}$ ce qui donne 9^{10} soit plus de 3.10^9 cas à tester
- Cas 2 : 50 variables binaires, soit 2^{50} cas à tester

Programmation linéaire en nombres entiers

Il existe des méthodes efficaces de résolution de PLNE comme :

- Méthode de séparation et d'évaluation (Branch and Bound) et ses variantes
- Méthode de coupes
- Méthodes des groupes
- Méthode de Benders

Définition

On dit que le problème (P) de domaine réalisable $F(P)$ est partitionné en sous-problèmes $(P_1), (P_2), ..., (P_q)$ si $F(P_1), F(P_2), ..., F(P_q)$ constitue une partition de $F(P)$. Autrement dit, si :

1. Toute solution réalisable de (P) est réalisable pour exactement un sous-problème (P_j)
2. Toute solution réalisable pour l'un des sous-problèmes (P_j) est réalisable pour (P)

Exemple

1. *Le problème* (P) *dont le domaine réalisable* $F(P) = \{x_j = 0 \text{ ou } x_j = 1\}$ *peut être partitionné en deux problèmes* (P_1) *et* (P_2) *de même fonction objectif et ayant respectivement comme domaine réalisable :* $F(P_1) = \{x_j = 0\}$ *et* $F(P_2) = \{x_j = 1\}$
2. *Le problème* (P) *dont le domaine réalisable* $F(P) = \{0 \leq x_j \leq 2 \text{ et } x_j \in \mathbb{N}\}$ *peut être partitionné en trois problèmes* $(P_1), (P_2), (P_3)$ *de même fonction objectif et ayant comme DR respectivement :* $F(P_1) = \{x_j = 0\}, F(P_2) = \{x_j = 1\}$ *et* $F(P_3) = \{x_j = 2\}$

Exemple

Le problème (P) *dont le domaine réalisable* $F(P) = \{0 \leq x_j \leq 4 \text{ et } x_j \in \mathbb{N}\}$ *peut être partitionné en deux problèmes* (P_1) *et* (P_2) *de même fonction objectif et ayant respectivement comme domaine réalisable :* $F(P_1) = \{0 \leq x_j \leq 2 \text{ et } x_j \in \mathbb{N}\}$ *et* $F(P_2) = \{3 \leq x_j \leq 4 \text{ et } x_j \in \mathbb{N}\}$

1. Etape 1 : Essayer de solutionner (P), si la solution obtenue par relaxation continue n'est pas entière alors partitionner (P) en deux ou plusieurs sous-problèmes et placer les dans la liste
2. Etape 2 : Sélectionner un problème dans la liste. C'est le problème candidat noté (PC)
3. Etape 3 : Essayer de solutionner (PC), si la résolution est réussie alors choisir un autre problème candidat sinon, partitionner le problème (PC) en deux ou plusieurs sous-problèmes que l'on place dans la liste.Le processus est répété tant que la liste est non vide

Remarque

Chaque fois que la solution de (PC) est faite avec succès, on identifie une solution réalisable de (P) et on retient la meilleure solution de (P) retenue jusqu'ici.
Si aucun candidat n'a pas été identifié, alors le problème n'aura pas de solution optimale. Sinon, le dernier point candidat est considéré comme solution optimale.

Définition

Le problème (P) est dit relaxé si certaines contraintes sont relâchées, c'est-à-dire ne sont pas prises en considération. Le problème relaxé sera noté (PR)

Proposition

1. $F(P) \subset F(PR)$
2. $F(PR) = \emptyset \implies F(P) = \emptyset$
3. $V(PR) \leq V(P)$ *(pour un problème de minimisation)*
4. *Si une solution optimale de* (PR) *est dans* $F(P)$*, alors c'est aussi une solution optimale de* (P)

La méthode Branch and Bound ($B\&B$) est appelée également méthode de séparation et évaluation, elle est largement utilisée pour résoudre les problèmes de PLNE. Nous présentons dans ce qui suit cette méthode appliquée à un exemple en s'inspirant de la méthode générale de résolution.

Soit le PLNE suivant :

$$\begin{cases} \text{Min } 4x - 6y \\ \text{sujet à} \\ -x + y \leq 1 \\ x + 3y \leq 9 \\ 3x + y \leq 15 \\ x, y \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Etape 1 (initialisation) : La solution optimale continue est $(x_r^*, y_r^*) = (1.5, 2.5)$ et la valeur optimale de l'objectif est $z^* = -9$

Etape 2 (séparation) : La deuxième étape dite de séparation (branching) consiste à séparer le domaine réalisable de (P_0) en deux sous ensembles dont aucun ne devra conteneir la solution optimale de (PR_0). Cette séparation va se faire par rapport à l'une des deux variables, dite variable de séparation, qui ne respecte pas la contrainte d'intégrité qui lui est associée dans le problème (P_0)

Nous pouvons choisir une des deux variables pour la séparation, il existe plusieurs critères de séparation

- Choix arbitraire
- Critère de la variable du plus petit indice
- Critère de la variable la plus distante : choisir une variable ayant une valeur non entière qui s'écarte le plus de l'entier le plus près
- Critère du meilleur C_j

Lorsque plusieurs variables sont jugées intéressantes pour un critère on peut adopter un autre critère, ainsi de suite. Dans notre exemple les deux variables seront choisies selon le critère de la variable la plus distante, on fait donc un choix arbitraire en préférant x

Nous obtenons deux sous-ensembles :
$\{(x, y) \in F(PR_0)/x \leq 1\}$ ou $\{(x, y) \in F(PR_0)/x \geq 2\}$ Ces deux ensembles candidats nous définissent les deux problèmes candidats :

$$(P_1) \begin{cases} \text{Min } 4x - 6y \\ \text{sujet à} \\ -x + y \leq 1 \\ x + 3y \leq 9 \\ 3x + y \leq 15 \\ x \leq 1 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (P_2) \begin{cases} \text{Min } 4x - 6y \\ \text{sujet à} \\ -x + y \leq 1 \\ x + 3y \leq 9 \\ 3x + y \leq 15 \\ x \geq 2 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Évaluation : en relaxons les contraintes du problème (P_1)

$$(P_1)\begin{cases} \text{Min } 4x - 6y \\ \text{sujet à} \\ -x + y \leq 1 \\ x + 3y \leq 9 \\ 3x + y \leq 15 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Nous obtenons la solution optimale entière $(x, y) = (1, 2)$ avec $z = -8$, cette solution constitue une solution réalisable pour le problème (P_0) et la valeur -8 constitue une borne supérieure de la valeur optimale de (P_0)

Stérilisation : la solution optimale de (P_2)

$$\begin{cases} \text{Min } 4x - 6y \\ \text{sujet à} \\ -x + y \leq 1 \\ x + 3y \leq 9 \\ 3x + y \leq 15 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

est $(x, y) = (2, \frac{7}{3})$ et $z = -6$, elle est donc non entière, donc non réalisable pour le problème (P). Inutile de séparer suivant la variable y du fait que les solutions qui seront obtenus seront supérieure ou égale à -6 (> -8) déjà obtenue

1. **Initialisation :** Résoudre le (PLC) associé : le Problème Linéaire Continu.Si cette solution est réalisable pour le (PLE) alors la solution courante est optimale. Sinon, identifier une borne inférieure de (PLE)
2. **Séparation :** Choisir l'une des composantes non-entières x_j^* de (PC). Partitionner le sous-ensemble en ajoutant les contraintes :

$$x_j \leq E(x_j^*)$$

$$x_i \geq E(x_j^*) + 1$$

3. Si une solution réalisable de (P) a été trouvée, c'est donc une solution candidate à être optimale. Une borne supérieure est donc trouvée. Sinon, faire une séparation.

1. **Evaluation :** Déterminer une borne inférieure de la fonction objectif (la valeur optimale du problème relaxé)
2. **Stérilisation :**
   1. Si le problème relaxé n'est pas réalisable alors retourner en 2
   2. Sinon, si la valeur de l'objectif est supérieure à la borne supérieure retourner à l'étape 2
   3. Sinon, si la valeur de l'objectif est inférieure strictement à la borne supérieure. Retourner à l'étape 2.
3. **Test :** retourner en 1

Exercice

Résoudre le PLNE suivant avec la méthode de Branch and Bound :

$$\begin{cases} Min\ 4x - 7y - 12z \\ s.c : \\ -3x + 6y + 8z \leq 12 \\ 6x - 3y + 7z \leq 8 \\ -6x + 3y + 3z \leq 5 \\ x, y, z \geq 0 \\ x, y, z \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Définition

- Normes et distances (EVN, EM)
- Normes classiques
- Fonctions de plusieurs variables (Dérivées partielles, laplacien, jacobienne, hessien)
- Définitions de limites
- Théorème de Weierstrass sur $\mathbb{R}$
- Optimum sur $\mathbb{R}$

Exercice

Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :

1. $$f(x,y) = e^x \cos(y)$$
2. $$f(x,y) = (x^2 + y^2)\cos(xy)$$

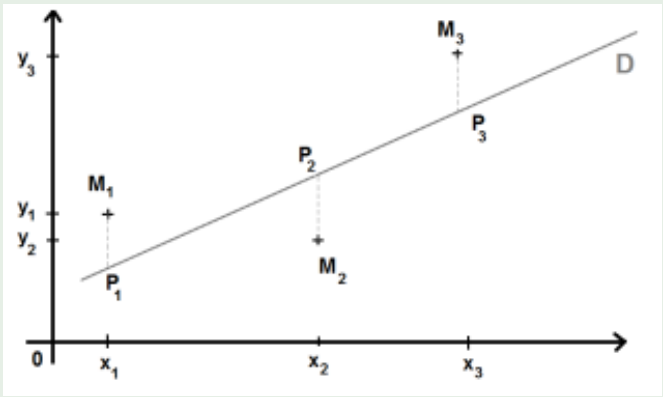
Exercice

Calculer le gradient des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$
2. $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2(x-y)^2$
3. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

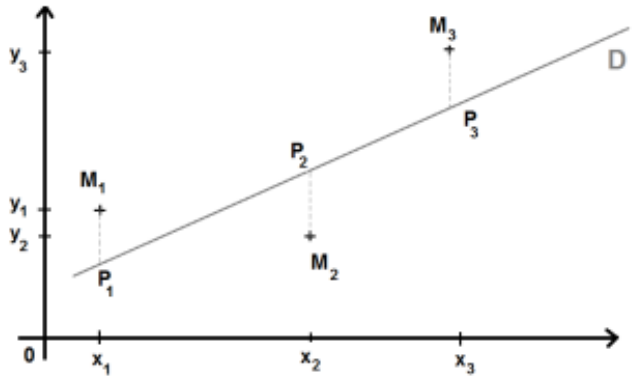
Problème d'ajustement de moindres carrées

- Soient $X = (x_i)i$ et $Y = (y_i)i$ deux séries. On note M_i les points du plan de coordonnées (x_i, y_i).
- Soit D une droite quelconque, d'équation $y = ax + b$.
- Soient P_i la projection de M_i sur D parallèlement à (Oy). Donc les coordonnées de P_i sont de la forme $(x_i, y_i^{'})$.



- Notez que $P_i \in D$, donc $y_i^{'} = ax_i + b$.

- Ajuster par la méthode des moindres carrés consiste à rechercher parmi toutes les droites D, celle qui rend minimale la somme des carrés des longueurs P_iM_i.
- On notera $e_i = P_iM_i$.



Formulation de (PO)

- Minimiser $\sum_{i=1}(e_i)^2 = \sum_{i=1}(y_i - y_i^{'})^2 = \sum_{i=1}(y_i - ax_i - b)^2$
- $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ Problème d'Optimisation non-linéaire continue sans contraintes

Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ qui à $x \mapsto f(x)$ où $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Considérons le problème :

$$(P)\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{s.c :} \\ x \in U \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

En général la fonction f est appelée fonctionnelle

- Résoudre (P) revient à chercher $x^* \in U$, tel que $\forall x \in U, f(x^*) \leq f(x)$
- Le point x^* est appelé un minimum global de f sur U

Définition

- Lorsque $U \neq \mathbb{R}^n$, on dit que (P) est un problème avec contraintes
- Lorsque $U = \mathbb{R}^n$, on dit que (P) est un problème sans contraintes
- Lorsque $U = \{x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m\}$, on dit qu'on a des contraintes d'inégalités
- Si les fonctions g_i et f sont convexes, on dit que le problème (P) est convexe.
- Si la fonction f et les fonctions g_i peuvent s'écrire comme différence de fonctions convexes, on dit que (P) est un problème d'optimisation DC
- Si f est une fonction quadratique et U est un polyèdre convexe, on dit que (P) est un problème d'optimisation quadratique.

Théorème

Soient U une partie fermée bornée (compacte) de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, alors le problème :

$$(P)\begin{cases} Min\ f(x) \\ s.c : \\ x \in U \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Admet au moins une solution

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est coercive si

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Théorème

Soient U une partie non vide fermée de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue coercive. Si l'ensemble U est non borné, alors il existe au moins un élement $x^* \in U$, tel que $f(x^*) = \inf\{f(x), x \in U\}$

Preuve

Soit $x^0 \in U$, comme f est coercive, alors : $\exists r > 0$ tel que $\|x\| > r \implies f(x^0) < f(x)$ (prendre $A = f(x^0)$ dans la définition de la limite). Donc l'ensemble des solutions du problème (P) coincide avec l'ensemble des solutions du problème (P_0) suivant :

Preuve

$$(P_0)\begin{cases} Min\ f(x) \\ s.c : \\ x \in U_0 = U \cap \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\} \end{cases}$$

Or U_0 est fermé et borné et donc d'après le théorème précédent, (P_0) admet au moins une solution.

Considérons le problème :

$$(P)\begin{cases}\text{Min } f(x)\\ \text{s.c :}\\ x \in \mathbb{R}^n\end{cases}$$

Dans la suite, nous supposons f continue et admet des dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, ..., n$ et des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, ..., n$ continues $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

- On dit que la matrice A est semi-définie positive sur $\mathbb{R}^n$ si $\forall x \in \mathbb{R}^n, < Ax, x > \geq 0$ ou $x^t Ax \geq 0$
- On dit que la matrice A est définie positive sur $\mathbb{R}^n$ si elle est semi-définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et si $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, < Ax, x > \geq 0$

Théorème

Pour que x^* soit un minimum de f, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1. *Le gradient* $\nabla f(x^*) = 0$
2. *La matrice hessienne* $\nabla^2 f(x^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *soit une matrice semi-définie positive*

Exercice

Déterminer les points critiques et calculer le Hessien des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = -x^4 - y^4$
2. $f(x,y) = x^2 - y^3$
3. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

Remarque

Le contre exemple suivant montre que la réciproque du théorème précédent n'est pas toujours vraie : Considérons la fonction à une variable réelle $f(x) = x^3$ *Le point* $x = 0$ *vérifie les conditions 1) et 2) du théorème mais il n'est pas un optimum*

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.Pour que x^* soit un minimum de f, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1. *Le gradient $\nabla f(x^*) = 0$*
2. *La matrice hessienne $\nabla^2 f(x^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ soit une matrice définie positive*

Définition

On dit que f est strictement convexe sur U si :

$$\forall x, y \in U, \forall \alpha \in]0,1[, f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Interprétation géométrique : la condition 2) du théorème précédent est équivalente à f est strictement convexe dans un voisinage de x^*

Définition

On dit que x^* est un point critique ou un point stationnaire de f si $\nabla f(x^*) = 0$

Remarque

Toutes les méthodes numériques d'optimisation sans contraintes dans $\mathbb{R}^n$ consistent à chercher un point critique x^*, ce qui est équivalent à résoudre le système d'équations :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, \forall i = 1, ..., n$$

Exercice

Chercher les points critiques des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3y - y^3x$
2. $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2(x-y)^2$
3. $f(x,y) = 4xy - y^4 - x^4$

La méthode du gradient à pas fixe est une méthode itérative qui consiste à construire une suite $x^0, x^1, x^2, ..., x^n$ telle que
$f(x^0) \geq f(x^1) \geq ... \geq f(x^{n-1} \geq f(x^n)$. L'étape de l'algorithme sont :

1. On se donne un point x^0
2. On calcule le gradient $\nabla f(x^0)$
3. Pour $k = 1, ..., n$, on calcule $x^{k+1} = x^k - h\nabla f(x^k)$ avec $h > 0$

La méthode du gradient à pas prédéterminé est une méthode itérative qui consiste à construire une suite $x^0, x^1, x^2, ..., x^n$ telle que $f(x^0) \geq f(x^1) \geq ... \geq f(x^{n-1} \geq f(x^n)$. L'étape de l'algorithme sont :

1. On se donne un point x^0
2. On calcule le gradient $\nabla f(x^0)$
3. Pour $k = 1, ..., n$, on calcule $x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)$ avec $\alpha_k > 0$

La méthode du gradient à pas prédéterminé est une méthode itérative qui consiste à construire une suite $x^0, x^1, x^2, ..., x^n$ telle que $f(x^0) \geq f(x^1) \geq ... \geq f(x^{n-1} \geq f(x^n)$. L'étape de l'algorithme sont :

1. On se donne un point x^0
2. On calcule le gradient $\nabla f(x^0)$
3. Pour $k = 1, ..., n$, on calcule $x^{k+1} = x^k - \alpha_k \frac{\nabla f(x^k)}{\|\nabla f(x^k)\|}$ avec $\alpha_k > 0$

Remarque

La méthode est dite à pas prédéterminée car α_k est choisi à priori

Théorème

La méthode de gradient à pas prédéterminé est convergente

Remarque

- *En pratique on prend en général $\alpha_k = \frac{1}{k}$*
- *L'inconvénient de cette procédure est que la convergence peut être lente*
- *L'avantage est qu'elle peut être généralisée au cas des fonctions non partout différentiables*

Cette méthode consiste à choisir α_k de façon à minimiser la fonction en α : $g(\alpha) = f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)), \forall k = 1, ..., n$
Algorithme de la plus forte pente :

1. Choisir un point de départ x^0
2. A l'itération k poser $d^k = -\nabla f(x^k)$ et chercher α_k tel que

$$f(x^k - \alpha_k \nabla f(x^k)) = \text{ Min } \{f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))\}$$

3. Poser $x^{k+1} = x^k - \alpha_k d^k$
4. Si le test d'arrêt est vérifié, stop, sinon faire $k = k + 1$ et retourner à l'étape 2

Remarque

Comme on ne sait pas d'avance l'optimum et comme on n'est pas sûr que la convergence a lieu en nombre limité d'itérations, nous devons faire un test d'arrêt

Les tests d'arrêts les plus utilisés sont :

- $\max(|\frac{\partial f}{\partial x_i}|) < \epsilon$
- $\|\nabla f\|^2 < \epsilon$
- $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \epsilon$

Dans tous les cas, il est préférable de limiter le nombre d'itérations

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et coercive alors pour tout point de départ x^0, la méthode de la plus forte pente converge vers un point stationnaire.

Remarque

- *La convergence de la méthode ne signifie pas que l'on trouve un optimum de f*
- *La convergence de la méthode de la plus forte pente peut être plus lente*

Définition

On dit que la fonction f est quadratique si :

$$f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > + c$$

Avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$

Exemple

Exemple de fonction quadratique :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

Définition

Soient $d^0, d^1, ..., d^{n-1}$, n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\left\|d^i\right\| = 1, \forall i = 0, ..., n-1$. $(d^0, d^1, ..., d^{n-1})$ sont appelés des directions de $\mathbb{R}^n$

Définition

On dit que les directions $d^0, d^1, ..., d^{n-1}$ sont mutuellement conjuguées par rapport à la forme quadratique $q(x)$ si $(d^i)^t A d^i = 0, \forall i \neq j$

Les étapes de l'algorithme des directions conjuguées :

Définition

1. Initialisation : x^0, $g_0 = \nabla f(x_0), d_0 = -g_0$
2. Itération k :

$$\alpha_k = \frac{g_k^t g_k}{d_k^t A d_k}, \quad x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$$

$$g_{k+1} = \nabla f(x^{k+1}), \quad \beta_k = \frac{g_{k+1}^t g_{k+1}}{g_k^t g_k}, \quad d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$$

3. Si $\beta_k = 0$ stop, sinon $k \leftarrow k + 1$

Programmation non linéaire avec contraintes

Dans ce qui suit nous nous intéressons au programme mathématique suivant :

$$(P_1)\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujet à :} \\ g_i(x) \leq 0, \forall i \in I \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Où $I = \{1, ..., m\}$ et $X = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i \in I\}$ On suppose que lesz fonctions f et g_i sont différentiables.

Définition

On dit que $x^* \in X$ est un optimum local de (P_1) s'il existe un voisiange V_{x^*} de x^* tel que : $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in V_{x^*}$ et $g_i(x^*) \leq 0, \forall i \in I$

Théorème

On suppose que la fonction f et les fonctions $g_i, (i \in I)$ sont de classe C^1, alors une condition nécessaire pour que x^0 soit un optimum local du problème (P_1) est qu'il existe des nombres $\lambda_i (i \in I)$ tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^0) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^0) = 0, \quad \forall i \in I \end{cases}$$

Problèmes avec contraintes d'égalités et d'inégalités

Considérons le programme :

$$(P_2)\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujet à :} \\ g_i(x) \leq 0, \forall i \in I = \{1, ..., m\} \\ h_j(x) = 0, j \in J = \{1, ..., p\} \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

On suppose que f et $g_i, i \in I$ et $h_j, j \in J$ sont de classe C^1

Problèmes avec contraintes d'égalités et d'inégalités

Théorème

Supposons que les fonctions f et $g_i, i \in I$ et $h_j, j \in J$ sont de classe C^1. Alors une condition nécessaire pour que x^0 soit un optimum local de (P_2) est qu'il existe des nombres $\lambda_i, (i \in I)$ et $\mu_j, (j \in J)$ (μ_j non contrainte en signe), tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(x^0) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla h_j(x^0) = 0 \\ \lambda_i g_i(x^0) = 0, \quad \forall i \in I \end{cases}$$

Problèmes avec contraintes d'égalités

Dans le cas d'un problème avec des contraintes d'égalités seulement :

$$(P_3)\begin{cases}\text{Min } f(x)\\ \text{sujet à :}\\ h_j(x)=0, j\in J=\{1,...,p\}\\ x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

Une condition nécessaire pour que x^0 soit un optimum local est qu'il existe des $\mu_j (j\in J)$ non contraintes en signe tels que :

$$\nabla f(x^0)+\sum_{j\in J}\mu_j\nabla h_j(x^0)=0$$

Conditions suffisantes d'optimalité

Considérons le programme :

$$(P)\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujet à} \\ g_i(x) \leq 0, i \in I \\ x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Si $S = \mathbb{R}^n$, on retrouve les programmes précédents.

Définition

On appelle fonction de Lagrange associée au programme (P), la fonction :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x)$$

Conditions suffisantes d'optimalité

Définition

Soit $x^* \in S$ et $\lambda \geq 0$. On dit que (x^*, λ^*) est un point col de L si :

1. $L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*), \quad \forall x \in S$
2. $L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*), \quad \forall \lambda \geq 0$

Autrement dit $L(x^*, \lambda^*)$ est une borne inférieure de $L(., \lambda^*)$ et une borne supérieure de $L(x^*, .)$

Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème

Soit $x^* \in S$ et $\lambda^* \geq 0$, (x^*, λ^*) est un point col pou $L(x, \lambda)$ si et seulement si :

1. $L(x^*, \lambda^*) = \min(L(x, \lambda^*), x \in S)$
2. $g_i(x^*) \leq 0, \quad \forall i \in I$
3. $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \forall i \in I$

Théorème

Si (x^*, λ^*) est un point col de $L(x, \lambda)$ alors x^* est un optimum global de (P)

Définition

Soit C un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, on définit la fonction Ψ_C associée à C par :

$$\Psi_C(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in C \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

On considère les problèmes :

$$(P_1) \begin{cases} \text{Min } f(x) \\ x \in C \end{cases}$$

et

$$(P_2) \begin{cases} \text{Min } f(x) + \Psi_C(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Proposition

Les problèmes (P_1) et (P_2) sont équivalents

Remarque

Comme la fonction Ψ_c n'est pas continue et donc n'est pas dérivable, les méthodes que nous avons vues ne sont pas appliquables. Pour remédier à ce problème, des auteurs ont proposé d'autres méthodes de pénalités. Considérons le problème :

$$(P)\begin{cases} Min\ f(x) \\ sujet\ à \\ g_i(x) \leq 0, i \in I \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Méthode de pénalités extérieures

Fiacco et Mc Cormic ont proposé la méthode de pénalisation suivante :
On considère la fonction :

$$\begin{cases} h(y) = 0 \text{ pour } y \leq 0 \\ h(y) = y^2 \text{ pour } y > 0 \end{cases}$$

On pose

$$H(x) = \sum_{i=1}^{m} h(g_i(x)) = \sum_{i=1}^{m} (g_i(x))^2$$

Puis on considère le problème :

$$(P') \begin{cases} \text{Min } \phi(x, r) = f(x) + rH(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Où $r > 0$ est appelé coefficient de pénalité.

Définition

La fonction H est appelée une fonction de pénalisation extérieure (où) fonction de pénalité extérieure)

Remarque

- *Le nombre réel r doit être choisi suffisament grand pour que le point x^* obtenu soit proche de l'ensemble des solutions de X.*
- *Si r est choisi trop grand, la fonction ϕ peut être mal conditionnée ce qui conduit à des difficultés numériques. Il faut donc un compromis pour le choix de r.*

Théorème

Soit $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction de pénalisation extérieure vérifiant :*

1. $H(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
2. $H(x) = 0, \forall x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i \in I\}$
3. H *continue*

Supposons aussi que f *continue, que* X *est fermé et que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- f *est coercive :* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$
- X *est borné et* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} H(x) = +\infty$

Alors, lorsque le coefficient de pénalité $r \to +\infty$*, la suite* $x^*(r)$ *admet au moins un point d'accumulation et tout point d'accumumlation de la suite* $(x^*(r_k))_k$ *est une solution optimale du problème* (P)

Méthode de pénalités intérieures

Ces méthodes consistent à approcher l'optimum par l'intérieur. On suppose que X est d'intérieur non vide et que tout de la frontière de X est limite d'une suite de points appartenant à l'intérieur de X. Soit B la fonction définie par $B(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$, on a :

- $Dom(B) = int(X)$
- $B(x) \geq 0, \forall x \in int(X)$
- $B(x) \to +\infty$ lorsque $x \to x^*$ (x^* dans la frontière de X)
- B est continue si $g_i, i \in I$ sont continues

Définition

La fonction B est appelée une fonction de pénalisation ou fonction barrière.

Considérons la fonction $\Psi(x,t) = f(x) + tB(x)$, t est appelé le coefficient de pénalité.
Si f est continue sur X et l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- f est coercive
- X est bornée

Choisissons $t_1 > 0$, on cherche un minimum de $\Psi(x,t_1)$, on obtient $x^1 = x^*(t_1) \in int(X)$. Si la quantité $t_1 B(x^1)$ est suffisament faible alors x^1 est une bonne approximation , stop. Sinon, on prend $t_2 < t_1$ et on cherche $x^2 = x^*(t_2)$ comme minimum de $\Psi(x,t_2)$ et ainsi de suite on construit une suite $\Psi(x,t_k)_k$

Théorème

Soit $X = \{x \in \mathbb{R}^n / g_i(x) \leq 0, i \in I\}$ *l'ensemble des solutions de* (P). *On suppose que* X *est fermé, que* $int(X) \neq \emptyset$ *et que :*

$$\forall x \in X \text{ il existe } (x_n)_n \subset int(X) \text{ tel que } x_n \to x$$

Soit $B : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction de pénalisation intérieure telle que :*

- $B(x) \geq 0, \forall x \in int(x)$
- $B(x) \mapsto +\infty$ *lorsque* $x \mapsto x^*$
- B *est continue et les fonctions* $g_i, i \in I$ *sont continues*

Théorème

On suppose que f est continue et qu'elle vérifie l'une des conditions suivantes :

- *f est coercive*
- *X est bornée*

Alors lorsque le coefficient de pénalité $t_k \to 0$, la suite $(x^*(t_k))_k$ admet au moins un point d'accumulation et tout point d'accumulation de la suite $(x^*(t_k))_k$ est un optimum de (P)

Considérons le programme :

$$(P)\begin{cases} \text{Min } f(x) \\ \text{sujet à} \\ g_i(x) \leq 0, i \in I \\ x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

On a la fonction de Lagrange : $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x)$

Pour $\lambda \geq 0$ posons $W(\lambda) = \inf\{L(x,\lambda), x \in S\}$. Supposons qu'on a les conditions sur f et g_i et S pour que :

$$W(\lambda) = \min\{L(x,\lambda), x \in S\}$$

On a (x^*, λ^*) est point col de L si et seulement si (x^*, λ^*) est solution du problème :

$$(D) \begin{cases} \max\limits_{\lambda} \min\limits_{x \in S} L(x, \lambda) \\ \lambda \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(D) est appelé le problème dual de (P)
(P) est appelé le problème primal de (D)
W est appelée la fonction duale.

Théorème

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ *on a :*

$$W(\lambda) \leq W(\lambda^*) \leq f(x^*)$$

Où $W(\lambda^*)$ *est la valeur optimale du problème* (D) *et* $f(x^*)$ *est la valeur optimale du problème* (P)

Proposition

La fonction duale W *est une fonction convexe de* λ

Théorème

Si le problème (P) admet un point col (x^*, λ^*) alors :

$$\max(D) = W(\lambda^*) = f(x^*) = \min(P)$$

Réciproquement, s'il existe x^* solution de (P) et $\lambda^* \geq 0$ tels que :

$$W(\lambda^*) = f(x^*)$$

Alors (x^*, λ^*) est un point col.