
TD 1 : RAPPEL MATHÉMATIQUE

EXERCICE 1 : Relation d'équivalence sur \mathbb{R}

On définit sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} la relation T par :

$x T y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que T est une relation d'équivalence sur \mathbb{R} .
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0. En déduire la classe d'équivalence d'un élément quelconque $x \in \mathbb{R}$.
3. Combien y-a-t-il de classes d'équivalence ?

EXERCICE 2 : Relation d'ordre sur \mathbb{R}^2

Sur \mathbb{R}^2 , on définit la relation \preceq par :

$(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow (a < c)$ ou $(a = c \text{ et } b \leq d)$.

1. Montrer que \preceq est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 .
2. Cet ordre est-il total ? Justifier votre réponse.
3. Comparer les couples $(2, 3)$ et $(2, 5)$, puis $(1, 7)$ et $(3, 2)$.

EXERCICE 3 : Structure de monoïde sur \mathbb{Z}

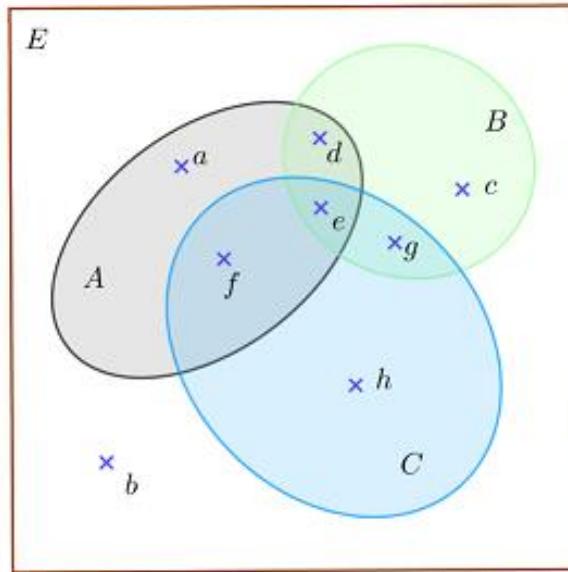
On définit sur l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} la loi de composition interne \oplus par :

$a \oplus b = a + b + 2ab$.

1. Montrer que la loi \oplus est associative.
2. Montrer que (\mathbb{Z}, \oplus) possède un élément neutre.
3. En déduire que (\mathbb{Z}, \oplus) est un monoïde. Ce monoïde est-il commutatif ?

EXERCICE 4 : Opérations sur les ensembles - Diagramme de Venn

On considère le diagramme de Venn suivant, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E, et a, b, c, d, e, f, g, h des éléments de E.



Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse :

1. $g \in A \cap \overline{B}$
2. $g \in \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $g \in \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $f \in C \setminus A$
5. $e \in \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
6. $\{h, b\} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
7. $\{a, f\} \subset A \cup C$