数值计算方法

第三章

插值法

代数插值

- **定义3.1(代数多项式插值)：**
  - 设函数$y=f(x)$在$[a, b]$上
  - 已知 $n+1$个点$a \le x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n \le b$的函数值

$$y_0, y_1, \ldots\ldots, y_n$$

  - 求一个次数不高于n的代数多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

满足插值条件

$$P_n(x_i) = y_i \qquad\qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

  - 称$P_n(x)$为 $f(x)$ 的n次插值多项式

代数插值的唯一性

- **推论3.1：当$f(x)$是次数不超过n的多项式时，其n次插值多项式就是$f(x)$本身**
- **例3.1.1：已知函数$f(x)=56x^3+24x^2+5$ 在点$2^0, 2^1, 2^5, 2^7$ 的函数值，求其三次插值多项式**
  - 解：对于次数不大于n的多项式，其n次插值多项式就是其本身，所以其三次插值多项式为

$$P_3(x) = f(x) = 56x^3 + 24x^2 + 5$$

线性插值

- 线性插值的定义
  - 线性插值也叫两点插值
  - 已知函数$y = f(x)$在给定互异点x_0, x_1上的函数值为 $y_0=f(x_0)$，$y_1=f(x_1)$
  - 线性插值就是构造一个一次多项式

$$P_1(x) = ax + b$$

满足条件

$$P_1(x_0) = y_0 \qquad P_1(x_1) = y_1$$

线性插值

- 过两点*A*、*B*的直线方程
  - 点斜式

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

  - 对称式

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

5

线性插值

- 线性插值的一般表示方式
  - 令 $l_0(x)=\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}$　　$l_1(x)=\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$

$$P_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1$$

  - 其中，$l_0(x)$与$l_1(x)$分别是适合下列函数表的插值多项式，又称为基本插值多项式或基函数

x	x_0	x_1
y	1	0

x	x_0	x_1
y	0	1

  - 一次插值多项式$y=P_1(x)$可以由两个基本插值多项式 $l_0(x)$、$l_1(x)$ 与函数值y_0、y_1的线性组合来表示

6

线性插值

- 例3.2.1：已知$y = f(x)$的函数表

x	1	3
y	1	2

求线性插值多项式，并计算x=1.5的函数值

- 解：已知两点的线性插值多项式

$$P_1(x) = \frac{x-3}{1-3} \times 1 + \frac{x-1}{3-1} \times 2 = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$f(1.5) \approx P_1(1.5) = 1.25$$

7

线性插值

- **例3.2.2：用线性插值求$\sqrt{115}$（$x^* = 10.723805$）**
  - 解：设 $y=\sqrt{x}$ ，取$x_0 = 100$，$x_1 = 121$

    则 $y_0 = 10$ $y_1 = 11$

$$\sqrt{115} \approx P_1(115) = 10 + \frac{11-10}{121-100}(115-100) = 10.71428$$

- **总结**
  - 线性插值只用两个点，计算方便，应用广泛，但插值区间[a, b]要小，且变化要比较平稳，否则误差大

抛物线插值

- 抛物线插值定义
  - 设函数$y=f(x)$在给定互异的自变量值x_0, x_1, x_2上对应的函数值为y_0, y_1, y_2，二次插值就是构造一个二次多项式

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

使之满足

$$P_2(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, 2$$

抛物线插值

- ## 抛物线插值的一般形式

$$P_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$$

其中

$$\begin{cases} l_0(x_0) = 1 & l_0(x_1) = 0 & l_0(x_2) = 0 & \text{(I)} \\ l_1(x_0) = 0 & l_1(x_1) = 1 & l_1(x_2) = 0 & \text{(II)} \\ l_2(x_0) = 0 & l_2(x_1) = 0 & l_2(x_2) = 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

由（I）式知，x_1, x_2是$l_0(x)$的根，所以有

$$l_0(x) = \lambda(x - x_1)(x - x_2)$$

10

抛物线插值

再由

$$l_0(x_0) = \lambda(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = 1$$

得

$$\lambda = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_1 - x_2)}$$

所以

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

11

抛物线插值

同理可得

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

因此

$$P_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

12

抛物线插值

- 例3.2.3：已知$y = f(x)$的函数表

x	1	3	2
y	1	2	－1

求抛物线插值多项式，并计算$f(1.5)$的近似值

- 解：代入抛物线插值公式

$$P_2(x) = \frac{(x-3)(x-2)}{(1-3)(1-2)}1 + \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}2 + \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}(-1)$$

$$= \quad 2.5x^2 - 9.5x + 8$$

$f(1.5) \approx P_2(1.5) = -0.625$

13

抛物线插值

- 例3.2.4：用抛物插值求$\sqrt{115}$，（$x^* = 10.7238$）
  - 解：设 $y=\sqrt{x}$，函数列表为

x	100	121	144
y	10	11	12

$$\sqrt{115} \approx P_2(115) = \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} \times 10$$

$$+\frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} \times 11$$

$$+\frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)} \times 12$$

$$=10.7228$$

14

拉格朗日插值多项式

- 拉格朗日插值多项式的一般形式
  - 设连续函数$y = f(x)$在$[a, b]$上给定$n + 1$个不同节点：

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$$

分别取函数值

$$y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n$$

其中 $y_i = f(x_i)\quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$

  - 构造一个次数不超过n的插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

使之满足条件

$$P_n(x_i) = y_i \qquad i = 0,1,2,\ldots n$$

拉格朗日插值多项式

- 先求n次多项式$l_k(x)$ $k = 0, 1, \ldots, n$，使

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

- 令

$$l_k(x) = \lambda(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)$$
$$= \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)$$

- 由$l_k(x_k) = 1$，得

$$\lambda = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

16

拉格朗日插值多项式

- 因此有

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

- 即得 $P_n(x)$ 的表达式

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)y_k=\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)y_k$$

17

拉格朗日插值多项式

- **例3.2.5：求过三个点(0,1)、(1,2)、(2,3)的插值多项式**
  - **解：**

$$P_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}\times 1+\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}\times 2+\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}\times 3=x+1$$

18

拉格朗日插值多项式

- 例3.2.6：已知$f(x)$的观测数据

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	-5	-6	3

构造插值多项式

- 解：四个点可以构造三次插值多项式，将数据代入插值公式，有

$$P_3(x)=x^3-4x^2+3$$

19

插值余项和误差估计

- **定义3.2：把差$f(x)-P_n(x)$称为用插值多项式$P_n(x)$代替$f(x)$的余项，误差或插值余项，记为：**

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

- **定理3.2：设$f^{(n)}(x)$在区间$[a, b]$上连续，$f^{(n+1)}(x)$在$[a, b]$上存在，$x_0, x_1, \ldots, x_n$是$[a, b]$上互异的节点，记插值问题的余项为$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$，那么，当$x \in [a, b]$时，有如下估计**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x) \qquad \xi \in [a,b]$$

20

插值余项和误差估计

其中

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

21

插值余项和误差估计

- 例3.2.8：设$f(x)=x^4$，用余项定理写出节点−1，0，1，2的三次插值多项式
  - 解：根据余项定理

$$f(x)-P_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$x^4-P_3(x)=x(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$P_3(x)=2x^3+x^2-2x$$

22

插值余项和误差估计

- **推论3.2：设函数$f(x)$在$[x_0,x_1]$上二阶导数连续，并记$M_2=\max\limits_{x_0\le x\le x_1}|f''(x)|$，则$f(x)$过点$(x_0,f(x_0))$，$(x_1,f(x_1))$线性插值余项$R(x)$有上界估计式**

$$|R_1(x)|\le\frac{M_2}{8}(x_1-x_0)^2,\qquad x\in[x_0,x_1]$$

23

插值余项和误差估计

- 例3.2.9：取x_0=0, x_1=1，求$y=e^{-x}$的一次插值多项式并估计误差
  - 解：根据条件可知，y_0=1, y_1=1/e

$$e^{-x} \approx P_1(x) = \frac{x-1}{0-1} \times 1 + \frac{x-0}{1-0} \times \frac{1}{e} = 1 - 0.6321206x$$

$$R(x) = e^{-x} - P_1(x) = \frac{e^{-\xi}}{2} x(x-1), \qquad 0 < \xi < 1$$

$$|R(x)| \le \frac{(x_1 - x_0)^2}{8} \max_{0 \le x \le 1} |e^{-\xi}| \le \frac{1}{8} \max_{0 \le x \le 1} |e^{-\xi})| = 0.125$$

插值余项和误差估计

- **例3.2.10：已知sin0.32=0.314567, sin0.34=0.333487, sin0.36=0.352274, 用线性插值及抛物线插值求sin0.3367的值及估计误差**
  - **解：线性插值取靠近插值点0.3367的前两组数据进行计算，有**

$$
\begin{aligned}
\sin 0.3367 &\approx P_1(0.3367) \\
&= \frac{0.3367-0.32}{0.34-0.32}\times 0.333487 + \frac{0.3367-0.34}{0.32-0.34}\times 0.314567 = 0.330365
\end{aligned}
$$

25

插值余项和误差估计

余项 $|R(x)| = \frac{M_2}{8}(x_1 - x_0)^2$

其中 $M_2 = \max\limits_{x_0 \le x \le x1} |\sin x| = \sin 0.34 = 0.333487$

所以

$$|R(x)| \le \frac{1}{8} \times 0.333487 \times 0.02^2 = 1.6674 \times 10^{-5}$$

- 抛物线插值有

$$\sin 0.3367 \approx P_2(0.3367)$$

$$= \frac{(0.3367-0.34)(0.3367-0.36)}{(0.32-0.34)(0.32-0.36)} \times 0.314567$$

$$+ \frac{(0.3367-0.32)(0.3367-0.36)}{(0.34-0.32)(0.34-0.36)} \times 0.333487$$

$$+ \frac{(0.3367-0.32)(0.3367-0.34)}{(0.36-0.32)(0.36-0.34)} \times 0.352274 = 0.330374$$

26

插值余项和误差估计

其余项为

$$|R(0.3367)| \le \frac{1}{3!} |f'''(\xi)(0.3367-0.32)(0.3367-0.34)(0.3367-0.36)|$$

其中

$$|f'''(\xi)| \le \max_{x_0 \le x \le x_1} |f'''(x)| = \max|-\cos x| = \cos 0.32 = 0.949235$$

$$|R(0.3367)| \le \frac{1}{6} \times 0.949235 \times 0.0167 \times 0.0033 \times 0.0233 = 0.2 \times 10^{-6}$$

27

插值余项和误差估计

- 例3.2.11：给定函数$y=\ln x$在两点10、11的值如下表，试用线性插值求ln10.5的近似值，并估计截断误差

x	10	11
y	2.303	2.398

28

插值余项和误差估计

- 解:

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$f(x)=ln\ x$， $x_0=10$, $x_1=11$, $x=10.5$

$$\ln 10.5 \approx P_1(10.5) = \frac{10.5-11}{10-11} \times 2.303 + \frac{10.5-10}{11-10} \times 2.398 = 2.3505$$

$$f\ '(x) = \frac{1}{x},\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \max_{10\le\xi\le11} \left| f''(\xi) \right| \le 1/10^2 = 0.01$$

$$\left| R_1(10.5) \right| \le \frac{0.01}{2!} \left| (10.5-10)(10.5-11) \right| = 0.00125$$

29

差商的定义

- **定义3.2：设有函数$f(x)$以及自变量的一系列互不相等的$x_0, x_1, \ldots, x_n$（即在$i \neq j$时，$x_i \neq x_j$）的函数值$f(x_i)$，称**

$$\frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \qquad (i \neq j)$$

为$f(x)$在点x_i, x_j处的一阶差商，并记作$f[x_i, x_j]$

又称

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i} \qquad i \neq k$$

差商的定义

为$f(x)$在点x_i, x_j, x_k处的二阶差商

一般，称

$$f[x_0, x_1, \cdots x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

为$f(x)$在点$x_0, x_1, \ldots, x_n$处的n阶差商

- 例如：

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

差商的定义

- 高阶差商由比它低一阶的两个差商组合而成
- 一个节点时的函数值$f(x_0)$、$f(x_1)$、…为零阶差商$f[x_0]$、$f[x_1]$

差商的计算顺序

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_0,\ldots, x_4]$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

差商的定义

- 由差商定义可知：高阶差商是两个低一阶差商的差商
- 任一个i阶差商的值是一个分式，其分子为所求差商左侧的数减去左上侧的数，分母为所求差商同行最左侧的节点减去由它往上数第i个节点值

牛顿插值公式

- 牛顿插值公式的建立
  - 由差商定义可知二次多项式的表示形式为

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

  - ***n*阶牛顿插值公式**

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x, x_0] \\ f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) f[x, x_0, x_1] \\ f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2) f[x, x_0, x_1, x_2] \\ \qquad \qquad \cdots\cdots \\ f[x, x_0, \cdots x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \cdots x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, x_1, \cdots x_n] \end{cases}$$

牛顿插值公式

- 将第二个式子两端乘以（$x-x_0$），第三个式子两端乘以$(x-x_0)(x-x_1)$，…余者类推，最后一个式子两端乘以$(x-x_0)(x-x_1)$，…$(x-x_{n-1})$，并将全部式子加起来有

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) &+ (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\
&+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots x_n] \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_n(x) = f(x_0) &+ (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] \\
&+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots x_n]
\end{aligned}
$$

牛顿插值公式

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) f[x, x_0, \cdots, x_n]$$

- 则

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x)$$

- 其中$N_n(x)$称为n次牛顿插值多项式，$R_n(x)$是截断误差

牛顿插值公式

- 牛顿插值的特点
  - 牛顿插值多项式$N_n(x)$的次数不超过n次，项数不超过$n+1$项，各项系数是差商表上对角线的各阶差商值
  - $N_n(x)$满足插值条件，在节点上$f(x_i)=N_n(x_i)$
  - 增加一个节点时，$N_n(x)$只需增加一项，$N_n(x)$原有各项均不变

$$N_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$N_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$N_{k+1}(x)=N_k(x)+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)f[x_0,\cdots,x_k,x_{k+1}]$$

牛顿插值公式

- 例3.4.1：已知函数表

x	1	3	2
$f(x)$	1	2	-1

求牛顿插值多项式，并计算x=1.5时的函数值

- 解：列出差商表

x	y	一阶差商	二阶差商	因子
1	1			1
3	2	0.5		x-1
2	−1	3	2.5	(x-1)(x-3)

牛顿插值公式

$$N(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$= 1 + 0.5(x-1) + 2.5(x-1)(x-3)$$
$$= 2.5x^2 - 9.5x + 8$$

- $f(1.5) \approx N_2(1.5) = -0.625$

牛顿插值公式

- 例3.4.2：已知函数$f(x)$在节点x=0, 1, 2, 4处的函数值$f(x)$分别是3，6，11，51，求二次和三次牛顿插值多项式，并计算$f(0.5)$的近似值
  - 解：根据给定的函数值构造差商表

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	3			
1	6	3		
2	11	5	1	
4	51	20	5	1

牛顿插值公式

- 二次牛顿插值多项式选最接近0.5的三个节点组成，即

$$N_2(x) = 3 + 3x + x(x-1) = x^2 + 2x + 3$$

由此，有

$$f(0.5) \approx N_2(0.5) = 4.25$$

- 三次牛顿插值多项式

$$N_3(x) = N_2(x) + (x-0)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3$$

$$f(0.5) \approx N_3(0.5) = 4.625$$

牛顿插值公式

- **例3.4.3：已知$x = 0, 2, 3, 5$，对应的函数值为$y = 1, 3, 2, 5$，作三次牛顿插值多项式**

牛顿插值公式

- 解：作差商表

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	**1**			
2	**3**	**1**		
3	**2**	**-1**	**-2/3**	
5	**5**	**3/2**	**5/6**	**3/10**

$$N_3(x)=1+x\cdot 1+x(x-2)\left(-\frac{2}{3}\right)+x(x-2)(x-3)\cdot\frac{3}{10}$$

分段插值和分段线性插值

- 分段插值法
  - 将被插值函数逐段多项式化
  - 将插值区间[*a*, *b*]分段

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

  - 再在每个子段[x_i, x_{i+1}]上构造插值多项式
  - 然后将每个子段上的多项式连接，作为区间[*a*,*b*]上的插值函数，这样构造出来的插值函数是分段多项式
- 分段插值法的特点

分段插值和分段线性插值

- 局部性质：如果修改某个数据，那么插值曲线仅仅在某个局部范围内受到影响
- 代数插值却会影响到整个插值区间

分段线性插值

- 设函数$y= f(x)$在区间$[a, b]$上取节点

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

及其函数值$y_i=f(x_i)$， $i=0, 1, \ldots, n$

- 连接相邻两点(x_i, y_i)和(x_{i+1}, y_{i+1})作一折线函数$S(x)$，则$S(x)$满足

分段插值和分段线性插值

(1)$S(x)$在$[a, b]$上连续

(2)$S(x_i)=y_i$, $i=0,1,\ldots, n$

(3)$S(x)$在每个子段$[x_i ,x_{i+1}]$是线性函数

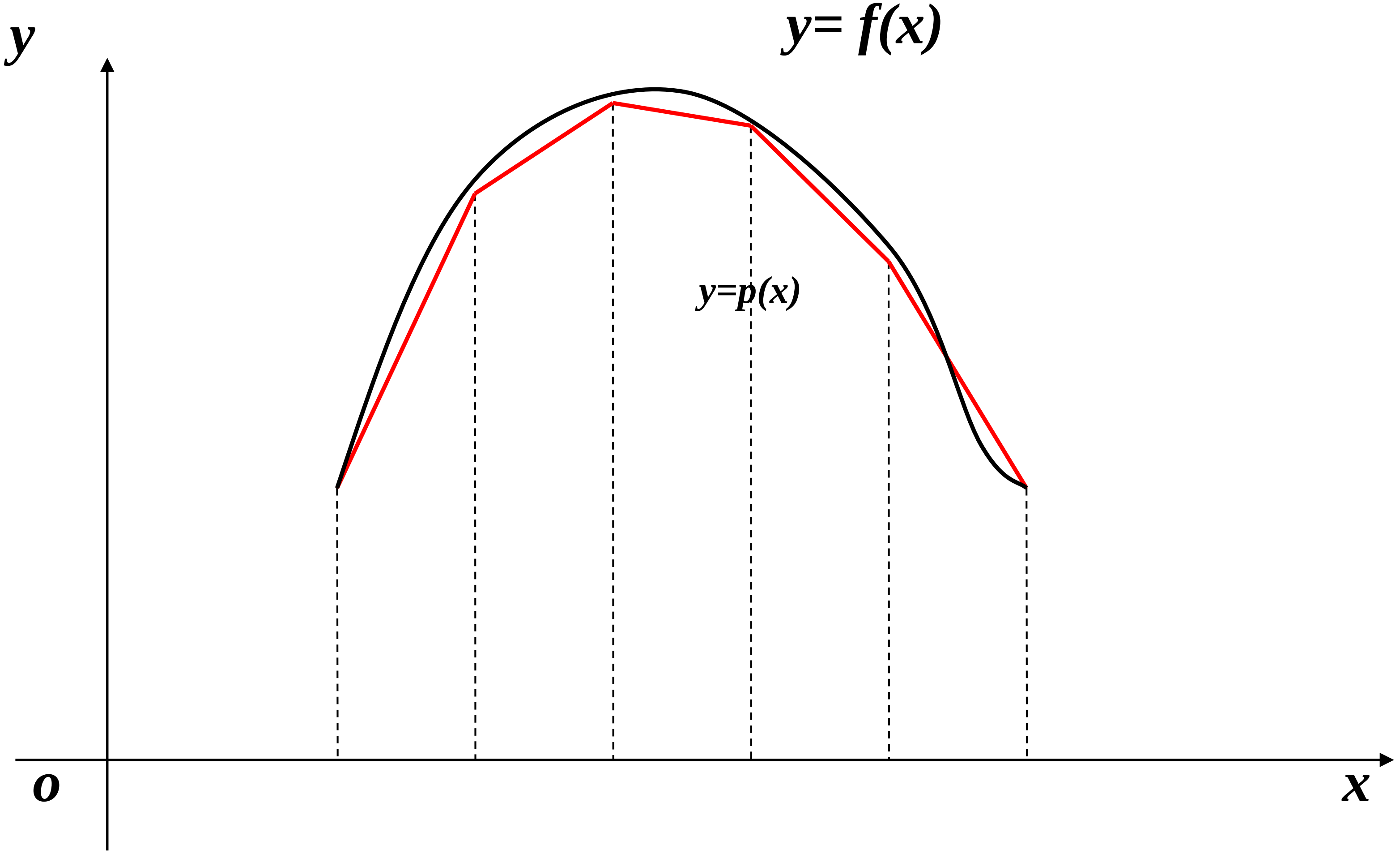
- 称折线函数$S(x)$为分段线性插值函数， $S(x)$在子段$[x_i,x_{i+1}]$上有

$$S(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}y_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1}=l_i(x)y_i+l_{i+1}(x)y_{i+1}$$

$$x_i\le x\le x_{i+1}$$

46

分段插值和分段线性插值



47

分段插值和分段线性插值

- 插值节点的选择
  - 如果插值点x位于某两个插值节点x_{k+1}和x_k之间，那么自然就取这两个节点进行内插，令公式中的下标$i=k$
  - 如果x在x_0的左侧，取最靠近它的x_0和x_1作为插值节点，这时$i=0$
  - 当x位于x_n的右侧时，取最靠近它的x_{n-1}和x_n作为插值节点，则令$i=n-1$

48

分段插值和分段线性插值

- 因此节点的选择方法可归纳如下

$$i=\begin{cases}0, & x\le x_0\\ k, & x_k<x\le x_{k+1}(0\le k\le n-1)\\ n-1, & x>x_n\end{cases}$$

49

分段插值和分段线性插值

- 分段线性插值的表示
  - 在区间[*a*,*b*]上可表示为

$$S(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)y_i, \qquad a \le x \le b$$

其中

$$l_i(x)=\begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1}\le x\le x_i \\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x_i\le x\le x_{i+1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

50

分段插值和分段线性插值

- 对于$y_i=f(x_i)$, $i=0, 1, \ldots, n$的被插值函数$f(x)$，在子段$[x_i,x_{i+1}]$上有误差估计式

$$|f(x)-S(x)| \le \frac{h_i^{\,2}}{8} \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f''(x)|$$

分段插值和分段线性插值

- 例3.6.1：求$f(x)=x^2$在$[a, b]$上的分段线性插值函数$S(x)$
  - 解：取 $h=\dfrac{b-a}{n}$ ，分点$x_i=a+ih$，$i=0, 1, \ldots, n$，在每个子段$[x_i, x_{i+1}]$上构造插值基函数

$$l_i(x)=\begin{cases} \dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x_{i-1}\le x\le x_i \\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x_i\le x\le x_{i+1} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

分段插值和分段线性插值

$$S(x)=\sum_{i=0}^{n} x_i{}^2 l_i(x)$$

$$|R(x)| \le \left|\frac{h^2}{8} f''(\xi)\right| = 2\times\frac{h^2}{8}=\frac{h^2}{4}$$

53

- **例3.6.2：已知函数 的一组数据**

x_i	0	1	2
y_i	1	0.5	0.2

求分段线性插值函数，并计算*f*(1.5)的近似值

- **解:**

$x \in [0,1] \qquad P(x) = \dfrac{x-1}{0-1}\times 1 + \dfrac{x-0}{1-0}\times 0.5 = 1 - 0.5x$

$x \in [1,2] \qquad P(x) = \dfrac{x-2}{1-2}\times 0.5 + \dfrac{x-1}{2-1}\times 0.2 = 0.8 - 0.3x$

- 有分段线性插值函数

$$P(x)=\begin{cases}1-0.5x & x\in[0,1]\\ 0.8-0.3x & x\in[1,2]\end{cases}$$

$$f(1.5)\approx P(1.5)=0.8-0.3\times 1.5=0.35$$