数值计算方法

第二章

非线性方程的数值解法

方程的根

- 定理2.1：设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，如果$f(a) \cdot f(b) < 0$，则方程$f(x) = 0$在$[a, b]$内至少有一实根x^*
- 定理2.2：设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上是单调连续函数，并且$f(a) \cdot f(b) < 0$，则方程$f(x) = 0$在$[a, b]$上有且仅有一实根x^*

逐步扫描法

- 实现步骤
  - 设单值连续函数$f(x)$在有根区间$[a, b]$，从左端点$x = a$出发，按某个预先选定的步长h一步一步地向右跨
  - 每跨一步都检验每步起点x_0和终点$x_0 + h$的函数值
  - 如果

$$f(x_0) \cdot f(x_0 + h) \le 0$$

那么所求的根x^*必在x_0与x_0+h之间

逐步扫描法

- **例2.1.2：考察方程**

$$f(x)=x^3-x-1=0$$

利用逐步扫描法确定一个有根区间

- **解：注意到$f(0)<0$, $f(+\infty)>0$，知$f(x)$至少有一个正的实根**

设从$x=0$出发，取$h=0.5$为步长向右进行根的扫描

x	0	0.5	1.0	1.5
$f(x)$ 的符号	—	—	—	＋

因此在区间（1, 1.5）内必有实根

2.2 二分法

- 二分法的基本思想
  - 首先，假定方程$f(x)=0$在区间$[a, b]$内有唯一的实根x^*
  - 就是将方程根所在的区间平分为两个小区间，判断根属于哪个小区间；把有根的小区间再平分为二，再判断根所在的更小的区间，对分；重复这一过程，最后求出所要的近似值
- 二分法的步骤
  - 1．计算$f(x)$在有解区间$[a, b]$端点处的函数值$f(a)$，$f(b)$
  - 2．计算$f(x)$在区间中点处的值$f(x_0)$

2.2 二分法

- 3．判断若$f(x_0)=0$，则$x_0=\frac{a+b}{2}$即是根，否则检验：
  - （1）若$f(x_0)$与$f(a)$异号，则知根位于区间$[a, x_0]$，以x_0代替b;
  - （2）若$f(x_0)$与$f(a)$同号，则知根位于区间$[x_0, b]$，x_0代替a
- 反复执行步骤2、3，便可得到一系列有根区间：

$[a, b], [a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k], \ldots$，其中每个区间都是前一个区间的一半，因此区间长度为

$$b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b-a)$$

2. 2 二分法

- 二分法的误差估计
  - 由于 $$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k) = b_{k+1} - a_{k+1}$$

    只要有根区间[a_{k+1}, b_{k+1}]的长度小于预先给定的误差ε，那么就可以取

$$x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$$

作为所求根x^*的第$k+1$次近似值。其误差估计为

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$$

2. 2 二分法

- 例2.2.1：证明$1-x-\sin x=0$ 在[0, 1]内有一个根，使用二分法求误差不大于$\frac{1}{2}\times10^{-4}$的根要二分多少次？
  - 证：令 $f(x)=1-x-\sin x$，$f(x)$ 是连续函数

    $f'(x)=-1-\cos x, \quad x\in[0,1]$

    $f(x)$在[0, 1]单调减少

    又 $f(0)=1>0$， $f(1)=-\sin 1<0$，可知 $f(x)$ 在[0, 1]有且仅有一个根

2. 2 二分法

- 使用二分法时，误差限为：

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{1}{2^{k+1}}(b-a)$$

$$\frac{1-0}{2^{k+1}} \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$k \ge \frac{\lg(1-0)+4}{\lg 2} = 13.28$$

- 所以总共需要二分14次

2. 2 二分法

- 例2.2.2： 求方程

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

在区间[1, 1.5]内的实根，要求准确到小数点后第2位。

解：预先估计一下二分的次数：按误差估计式

$$\left| x^* - x_k \right| \le b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}}(b-a) < \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$k = 6$$

2. 2 二分法

k	a_k	b_k	x_k	b_k-a_k
0	1.0000	1.5000	1.2500	0.5000
1	1.2500	1.5000	1.3750	0.2500
2	1.2500	1.3750	1.3125	0.1250
3	1.3125	1.3750	1.3438	0.0625
4	1.3125	1.3438	1.3282	0.0313
5	1.3125	1.3282	1.3204	0.0157
6	1.3204	1.3282	1.3243	0.0078

- 因此$x^*=1.32$

2.2 二分法

- 也可以事先不估计二分次数，随着二分过程的进行，随时利用公式

$$|x^* - x_k| \le \frac{1}{2}(b_k - a_k) < \varepsilon$$

来作为二分过程结束的判断条件

- 当二分到第六次时，区间长度为0.0078，区间长度的一半小于误差 $\frac{1}{2}\times 10^{-2}$，所以可以在这一步停止二分，而以$x_6$=1.32作为方程根的近似值

迭代法原理

- 简单迭代法的基本思想
  - 将方程$f(x) = 0$化为一个等价的方程

$$x = \varphi(x)$$

从而构成序列

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

如果$\varphi(x)$连续，迭代序列$\{x_k\}$收敛于x^*，则x^*就是方程的解 。其中$\varphi(x)$称为迭代函数，$x_{k+1} = \varphi(x_k)$称为迭代格式。

迭代法原理

- **例2.3.1：求方程x^3-x-1=0 在x=1.5附近的一个根**
  - **解：将所给方程改写成**

$$x=\sqrt[3]{x+1}$$

的形式，假设初值x_0=1.5是其根，代入后得到

$$x_1=\sqrt[3]{x_0+1}=\sqrt[3]{1.5+1}=1.35721$$

求得的x_1不等于x_0，再将x_1代入，求得x_2

$$x_2=\sqrt[3]{x_1+1}=\sqrt[3]{1.35721+1}=1.33086$$

x_2与x_1不等，再用x_2代入，求得x_3

$$x_3=\sqrt[3]{x_2+1}=\sqrt[3]{1.33086+1}=1.32588$$

迭代法原理

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	**1.5**	——
1	**1.35721**	
2	**1.33086**	
3	**1.32588**	
4	**1.32494**	
5	**1.32476**	
6	**1.32473**	
7	**1.32472**	
8	**1.32472**	

- **因此x^*= 1.32472**

迭代过程的收敛性

- 例2.3.2：求方程$f(x)=x-10^x+2=0$的一个根
  - 解：因为$f(0) = 1>0$ $f(1) = -7 <0$，由定理2.1知方程在[0, 1]中必有一实根，现将原方程改为同解方程

    $$10^x = x+2 \qquad\qquad x=\lg(x+2)$$

    由此得迭代格式

    $$x_{k+1}=\lg(x_k+2)$$

  - 取初始值$x_0 = 1$，可逐次算得

    $$x_1 = 0.4771$$

    $$x_2 = 0.3939$$

    …

迭代过程的收敛性

$$x_6 = 0.3758$$

$$x_7 = 0.3758$$

- 因为x_6和x_7已趋于一致，所以取$x_7 = 0.3758$为原方程在[0, 1]内的一个根的近似值
- 一个方程的迭代格式不唯一，且迭代也不总是收敛的，如上述方程也可改写成

$$x = 10^x - 2$$

得迭代格式

$$x_{k+1} = 10^{x_k} - 2$$

经过验证，该迭代公式不收敛

全局收敛性

- 迭代法的终点判断
  - 只要相邻两次迭代值的偏差充分小，就能保证迭代值足够准确，因而用$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$控制迭代过程的结束

全局收敛性

- **例2.3.4：对方程 $xe^x-1=0$构造收敛的迭代格式并求其根，要求精度$\varepsilon=10^{-5}$**
  - 解：设$f(x)=xe^x-1$，则

    $f(0)=-1<0,\ f(1)=e-1>0$

    因此$f(x)=0$在（0，1）内有根

    又 $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)>0$

    因此方程$f(x)=0$在$(0,\infty)$内仅有一根

    令$\varphi(x)=e^{-x}$ 在[0,1]上，$\varphi(x)\in[\frac{1}{e},1]\subset[0,1]$ $|\varphi'(x)|=|e^{-x}|<1$

    因此 $x=e^{-x}$ 收敛

    取$x_0=0.5$进行迭代，计算结果如下表所示

全局收敛性

k	x_k	k	x_k
0	0.500000	10	0.566907
1	0.606531	11	0.567277
2	0.545239	12	9.567067
3	0.579703	13	0.567186
4	0.560065	14	0.567119
5	0.571172	15	0.567157
6	0.564863	16	0.567135
7	0.568438	17	0.567148
8	0.566409	18	0.567141
9	0.567560		

全局收敛性

$$|x_{18}-x_{17}|=|0.567141-0.567148|=0.000007<10^{-5}$$

- 取$x^*\approx 0.56714$

- **例2.3.5：用迭代法求方程 x^3-2x-5=0 的最小正根**
  - 解:

x	0	1	2	3
$f(x)$	−5	−6	−1	16

取正根区间[2,3]，迭代格式 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k^3-5)$

$$\varphi'(x)=\frac{3}{2}x^2, \max_{2\le x\le 3}|\varphi'(x)|=13.5>1$$

不满足收敛定理

全局收敛性

- 将原方程改写成

$$x=\sqrt[3]{(2x+5)}$$

$$\varphi(x)=\sqrt[3]{2x+5},\varphi'(x)=\frac{2}{3}(2x+5)^{-\frac{2}{3}},$$

$$\varphi(x)\in[2,3]$$

$$\max_{2<x<3}|\varphi'(x)|=0.1541<1$$

迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{2x_k+5}$ 收敛

- 取初值x_0=2.5 进行迭代，结果如下所示

全局收敛性

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	2.5	——
1	2.1544	
2	2.1036	
3	2.0959	
4	2.0948	
5	2.0946	
6	2.0946	

- 取方程的根 $x^* = 2.0946$

全局收敛性

- **例2.3.6：求方程 x^3-3x+1=0 在[0, 0.5]内的根，精确到10^{-5}**

局部收敛性

- 定义2.2： 如果存在x^* 的某个邻域△: $|x-x^*| \le \delta$，使迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$对于任意初值 $x_0 \in$ △均收敛，则称迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$在根x^* 附近具有局部收敛性。
- 定理2.5： 设$\varphi(x)$在$x=\varphi(x)$的根x^* 邻域有连续的一阶导数，且有 $|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$在根x^*附近具有局部收敛性。

局部收敛性

- 已知根的初值x_0在根 x^*邻域，又根据$\varphi'(x)$的连续性，则可采用 $|\varphi'(x_0)| < 1$ 来代替$|\varphi'(x^*)| < 1$，判断迭代的收敛性

局部收敛性

- 例2.3.7：迭代过程$x_{k+1}=x_k+c(x_k^2-5)$，当局部收敛到$\sqrt{5}$时，确定C的值
  - 解：迭代函数

$$\varphi(x)=x+c(x^2-5)$$

$$\varphi'(x)=1+2cx$$

当局部收敛到$\sqrt{5}$时，

$$\left|\varphi'(\sqrt{5})\right|=\left|1+2c\sqrt{5}\right|<1$$

$$-1<1+2c\sqrt{5}<1$$

有

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}<c<0$$

局部收敛性

- **例2.3.8：对方程x^3-x^2-1=0在初值x_0=1.5附近建立收敛的迭代格式，并求解，要求精确到小数点后4位**
  - 解：构造迭代公式，写出方程的等价形式

$$x=\sqrt[3]{x^2+1}$$

迭代格式为

$$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k{}^2+1}$$

$$\varphi'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

$$\left|\varphi'(x_0)\right|_{x_0=1.5}=0.4558<1$$

局部收敛性

迭代收敛，计算过程如下，取$x^*\approx x_9=1.4656$，此时

$$\left|x_9 - x_8\right| < \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

k	x_k	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
0	1.5	
1	1.48124	0.018763
2	1.47271	0.00853
3	1.46882	0.00389
4	1.46705	0.00177
5	1.46624	0.00081
6	1.46588	0.00036
7	1.46570	0.00018
8	1.46563	0.00007
9	1.46560	0.00003

局部收敛性

- 迭代的计算步骤
  - 确定 $f(x)=0$的等价形式 $x=\varphi(x)$，选初值x_0，判断收敛性$|\varphi'(x_0)|<1$
  - 由公式 $x_1=\varphi(x_0)$ 计算x_1
  - 如果$|x_1-x_0|\le\varepsilon$ 则停止计算，取$x^*=x_1$；否则令$x_0=x_1$，重复步骤2和3，直到计算停止
- 例2.3.9：给定函数$f(x)$，设迭代程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$ 选取λ值，使在 $f(x)=0$ 的单根附近收敛

牛顿迭代公式的建立

- 已知方程$f(x)=0$的一个近似根x_0，把$f(x)$在x_0处作泰勒展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

- 取前两项来近似代替$f(x)$，则得近似的线性方程

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

- 设$f'(x_0)\neq 0$，解之得

$$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

牛顿迭代公式的建立

- 取x作为原方程$f(x)=0$的近似根x_1，即

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- 再重复用上述方法得

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \cdots$$

- 一般地，有迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$$

例题

- 例2.4.1：用牛顿迭代法求 $x=e^{-x}$ 在0.5附近的根
  - 解：由$x=e^{-x}$，有$xe^{x}-1=0$

$$f(x)=xe^{x}-1=0$$

$$f'(x)=e^{x}+xe^{x}$$

由牛顿迭代公式 可知

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k e^{x_k}-1}{e^{x_k}+x_k e^{x_k}}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k}$$

取x_0=0.5，计算结果如下所示：

例题

k	x_k	k	x_k
0	0.5	3	0.567143291
1	0.571020440	4	0.567143290
2	0.567155560		

例题

- **例2.4.2：造平方根表，用牛顿迭代法计算** $\sqrt{a}$
  - **解：令** $x=\sqrt{a}$ **，则x^2-a=0,**

    求$\sqrt{a}$ **等价于求$f(x)$= x^2-a=0 的正实根，因为$f'(x)$= $2x$，由牛顿迭代公式得**

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-a}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{a}{x_k}),\ k=0,1,2,\cdots$$

当a=115时，取初值 x_0=10，迭代4次可得10，10.7500，10.723837，10.723805， 10.723805

$$\sqrt{115}\approx 10.723805$$

例题

- 例：用牛顿迭代法求$\sqrt[3]{a}$