数值计算方法

第五章

常微分方程的数值解法

欧拉公式的导出

- 由于$y(x_0) = y_0$已给定，因而可以算出

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

- 设$x_1 - x_0 = h$充分小，则近似地有

$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} \approx y'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

记

$$y_i = y(x_i) \quad i = 0,1,\cdots,n$$

- 从而我们可以取

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

欧拉公式的导出

作为$y(x_1)$的近似值

- 利用y_1及$f(x_1, y_1)$又可以算出$y(x_2)$的近似值

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

- 一般地，在任意点$x_{n+1} = (n+1)h + x_0$处$y(x)$的近似值由下式给出

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

- 这就是欧拉法的计算公式，h称为步长

例题

- **例5.2.1：用欧拉法求解初值问题**

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, \qquad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- **解：求解该方程的欧拉公式为**

$$y_{n+1} = y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n})$$

取步长*h*=0.1，*n*=0, 1, …, 9时，有

例题

$$n=0 \qquad y_1 = y_0 + h(y_0 - \frac{2x_0}{y_0})$$

$$= 1 + 0.1(1 - \frac{2\times 0}{1}) = 1.1$$

$$n=1 \qquad y_2 = y_1 + h(y_1 - \frac{2x_1}{y_1})$$

$$= 1.1 + 0.1(1.1 - \frac{2\times 0.1}{1.1}) \approx 1.191818$$

例题

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.100000	1.095445	0.6	1.508966	1.483240
0.2	1.191818	1.183216	0.7	1.580338	1.549193
0.3	1.277438	1.264911	0.8	1.649783	1.612452
0.4	1.358213	1.341641	0.9	1.717779	1.673320
0.5	1.435133	1.414214	1.0	1.784771	1.732051

例题

- **例5.2.2: 用欧拉法求初值问题**

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{0.9}{1+2x}y \\ y(x_0) = 1 \qquad x_0 = 0 \end{cases}$$

当h = 0.02时在区间[0, 0.10]上的数值解

- 解：把 $f(x,y) = -\dfrac{0.9}{1+2x}y$ 代入欧拉法计算公式，就得

$$y_{n+1} = y_n - h\frac{0.9}{1+2x_n}y_n$$

$$= \left(1 - \frac{0.018}{1+2x_n}\right)y_n \qquad n = 0, 1, \cdots, 5$$

- 具体计算结果如下表

例题

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$\varepsilon_n = y(x_n) - y_n$
0	0	1.0000	1.0000	0
1	0.02	0.9820	0.9825	0.0005
2	0.04	0.9650	0.9660	0.0005
3	0.06	0.9489	0.9503	0.0014
4	0.08	0.9336	0.9354	0.0018
5	0.10	0.9192	0.923	0.0021

例题

- 例5.2.3：取步长 h=0.2，用欧拉法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y - xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 0.6]$$

例题

- 解：用欧拉法求解公式，得

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(-y_n - x_n y_n^2)$$

取步长h=0.2时，$x \in [0,0.6]$，有

$$n=0 \qquad y_1 = y_0 + h(-y_0 - x_0 y_0{}^2) = 1 + 0.2(-1 - 0 \times 1^2) = 0.8$$

$$n=1 \qquad y_2 = y_1 + h(-y_1 - x_1 y_1{}^2) =$$

$$0.8 + 0.2(-0.8 - 0.2 \times 0.8^2) = 0.6144$$

$$n=2 \qquad y_3 = y_2 + h(-y_2 - x_2 y_2{}^2) = 0.6144 +$$

$$0.2(-0.6144 - 0.4 \times 0.6144^2) = 0.461321$$

改进欧拉法

- 欧拉公式是一种显式算法，计算量小，但精度低
- 梯形公式虽然提高了精度，但它是一种隐式算法，需要迭代求解，计算量大，因此采取另外一种方法，即预报－校正系统
- 预报－校正系统
  - 在实际上，当h取值较小时，让梯形法的迭代公式只迭代一次就结束
  - 先用欧拉公式求得一个初步近似值 $\bar{y}_{n+1}$ ，称之为预报值

改进欧拉法

- 预报值的精度不高，用它替代梯形法右端的y_{n+1}，再直接计算得出y_{n+1}，并称之为校正值，这时得到预报一校正公式

$$
\begin{cases}
\bar{y}_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n) \\
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[\, f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]
\end{cases}
$$

- 将预报一校正公式称为改进欧拉公式 ，这个公式还可写为

改进欧拉法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c) \\ y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p) \end{cases}$$

- 改进欧拉法的程序流程图

改进欧拉法

- 改进欧拉公式的截断误差
  - 由于

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = hf(x_n, y(x_n))$$
$$= hy'(x_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$
$$= hf[x_n + h, y(x_n) + k_1]$$
$$= h\left\{ f[x_n, y(x_n)] + h\frac{\partial}{\partial x} f[x_n, y(x_n)] + k_1 \frac{\partial}{\partial y} f[x_n, y(x_n)] + \cdots \right\}$$
$$= hf[x_n, y(x_n)] + h^2\left\{ \frac{\partial}{\partial x} f[x_n, y(x_n)] + y'(x_n)\frac{\partial}{\partial y} f[x_n, y(x_n)] \right\} + \cdots$$
$$= hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + \cdots$$

改进欧拉法

- 代入，可得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} y'(x_n) + \frac{h}{2} y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \cdots$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \cdots$$

- $y(x_{n+1})$的二阶泰勒展开式为

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

- 因此有

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$$

改进欧拉法

- **例5.2.4：用欧拉法和改进欧拉法求**

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

区间为[0, 1.5]，取$h = 0.1$

- 解：用欧拉法计算公式如下

$$y_{n+1} = y_n + h\left(y_n - \frac{2x_n}{y_n}\right) \qquad y_0 = 1, \quad h = 0.1$$

改进欧拉法

- 用迭代一次的改进欧拉法计算公式如下

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + h\left(y_n - \frac{2x_n}{y_n}\right)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})\right] \\ &= y_n + \frac{h}{2}\left[\left(y_n - \frac{2x_n}{y_n}\right) + \left(y_{n+1}^{(0)} - \frac{2x_{n+1}}{y_{n+1}^{(0)}}\right)\right] \end{aligned}$$

$$y_0 = 1, \qquad h = 0.1$$

x_n	欧拉法y_n	改进欧拉法y_n	准确解 $y(x_n)=\sqrt{1+2x_n}$
0	1	1	1
0.1	1.1	1.095909	1.095445
0.2	1.191818	1.184096	1.183216
0.3	1.277438	1.260201	1.264911
0.4	1.358213	1.343360	1.341641
0.5	1.435133	1.416102	1.414214
0.6	1.508966	1.482956	1.483240
0.7	1.580338	1.552515	1.549193
0.8	1.649783	1.616476	1.612452
0.9	1.717779	1.678168	1.673320
1.0	1.784770	1.737869	1.732051
1.1	1.85118	1.795822	1.788854
1.2	1.917464	1.852242	1.843909
1.3	1.984046	1.907323	1.897367
1.4	2.051404	1.961253	1.949359
1.5	2.120052	2.014207	2.000000

改进欧拉法

- 例5.2.5：用欧拉预报-校正公式求解初值问题

$$\begin{cases} y' + y + y^2 \sin x = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

要求步长h =0.2，计算$y(1.2)$，$y(1.4)$的近似值

改进欧拉法

- 解：由题意知 $f(x,y) = -y - y^2 \sin x$ ，改进欧拉法的具体形式为

$$
\begin{cases}
y_p = y_n + h\left(-y_n - y_n^2 \sin x_n\right) \\
y_c = y_n + h\left(-y_p - y_p^2 \sin x_{n+1}\right) \\
y_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(y_p + y_c\right)
\end{cases}
$$

- 由$y(1)= y_0$=1知x_0=1，取步长h =0.2，计算如下

改进欧拉法

- ***n*=0时**

$$\begin{cases} y_p = y_0 + h\left(-y_0 - y_0^2 \sin x_0\right) = 1 + 0.2\left(-1 - 1^2 \sin 1\right) \approx 0.631706 \\ y_c = y_0 + h\left(-y_p - y_p^2 \sin x_1\right) = 1 + 0.2\left(-0.631706 - 0.631706^2 \sin 1.2\right) \\ \approx 0.799272 \\ y_1 = \dfrac{1}{2}\left(y_p + y_c\right) = \dfrac{1}{2}\left(0.631706 + 0.799272\right) \approx 0.715489 \end{cases}$$

改进欧拉法

- ***n*=1时**

$$
\begin{cases}
y_p = y_1 + h\left(-y_1 - y_1^2 \sin x_1\right) \\
= 0.715489 + 0.2\left(-0.715489 - 0.715489^2 \sin 1.2\right) \approx 0.476964 \\
y_c = y_1 + h\left(-y_p - y_p^2 \sin x_2\right) \\
= 0.715489 + 0.2\left(-0.476964 - 0.476964^2 \sin 1.4\right) \approx 0.575259 \\
y_2 = \dfrac{1}{2}\left(y_p + y_c\right) = \dfrac{1}{2}\left(0.476964 + 0.575259\right) \approx 0.526112
\end{cases}
$$

$$y(1.2) \approx y_1 \approx 0.715489 \qquad y(1.4) \approx y_2 \approx 0.526112$$

二阶龙格—库塔法

- 显然，当$r = 1$时，就是欧拉公式
- 下面导出$r = 2$时的公式
  - 根据预报—校正的思想，首先在区间$[x_n, x_{n+1}]$内寻找两个点，即：

$$\begin{cases} x_n \\ x_{n+p} \qquad\qquad x_{n+p} = x_n + ph \qquad (0 \le p \le 1) \end{cases}$$

  - 如果两点的斜率分别为k_1与k_2，则通过线性组合，可得到如下的预报—校正系统

二阶龙格—库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+p}, y_{n+p}) \end{cases}$$

$$(x_{n+p} = x_n + ph; \qquad y_{n+p} = y_n + phk_1)$$

- 从公式中可以看出，先计算k_1，再计算y_{n+p}，也就是先算预报斜率，再算校正斜率，因此，可得下述计算公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ph, y_n + phk_1) \end{cases}$$

二阶龙格—库塔法

- 选择合适的λ_1，λ_2，p等系数，使得下述公式

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

的局部截断误差为$O(h^3)$

- 将k_1, k_2在同一点（x_n, y_n）泰勒展开，则有

$$k_1 = f(x_n, y_n) = y'(x_n)$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f(x_n + ph,\ y_n + phk_1) \\
&= f(x_n, y_n) + ph\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_n, y_n)} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_n, y_n)} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) + O(h^2) \\
&= f(x_n, y_n) + ph[f_x(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n)] + O(h^2) \\
&= y'(x_n) + phy''(x_n) + O(h^2)
\end{aligned}$$

二阶龙格—库塔法

- 将k_1，k_2的表达式代入

$$y_{n+1} = y_n + (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2)h = y(x_n) + h[\lambda_1 y'(x_n)$$
$$+ \lambda_2 y'(x_n) + \lambda_2 phy''(x_n) + \lambda_2 O(h^2)]$$
$$= y(x_n) + h(\lambda_1 + \lambda_2)y'(x_n) + \lambda_2 ph^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

- 再对$y(x_{n+1})$在x_n点进行泰勒展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

- 令$y_{n+1}=y(x_{n+1})$，逐项比较，令h、h^2项的系数相等，便得到系数之间的关系

二阶龙格—库塔法

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_2 p = \frac{1}{2}$$

- **当取p =2/3，λ_1 =1/4， λ_2 = 3/4， 则有**

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{4}h(k_1 + 3k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+\frac{2}{3}}, y_n + \dfrac{2}{3}hk_1) \end{cases}$$

这种方法称为休恩公式

二阶龙格—库塔法

- 当取 $p=1$，$\lambda_1=1/2$， $\lambda_2=1/2$， 此即为改进欧拉公式

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2}k_1 + \dfrac{1}{2}k_2 \\
k_1 = hf(x_n, y_n) \\
k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)
\end{cases}
$$

- 当取 $p=1/2$，$\lambda_1=0$， $\lambda_2=1$， 这时二阶龙格—库塔公式称为变形欧拉公式

二阶龙格—库塔法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hk_2 \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

- 二阶龙格—库塔公式的截断误差为***O*(*h*³)**