Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

Función Carácteristica y Función Generadora de Momentos

Integrantes:

Cariño Díaz David
Márquez Sánchez Moisés
Martínez Romualdo Valeria
Mondragón Miranda Néstor Yair
Reyes Cruz Alejandro
Torres Bustamante Dulce Jhoana

26 de junio de 2024

Variable Aleatoria	Función $M_X(t)$	Función $\phi_X(t)$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{E}[X^2]$
Uniforme Discreta	$\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{itx_k}$	$\frac{x_n+x_1}{2}$	$\frac{(x_n-x_1+1)^2-1}{12}$
Bernoulli	$1+p(e^t-1)$	$1-p+pe^{it}$	p	p
Binomial	$(1-p+pe^t)^n$	$(1-p+pe^{iu})^n$	np	$(np)^2+np(1-p)$
Binomial Negativa	$p^r\left(e^{-t}-(1-p)\right)^{-r}$	$p^r(e^{-it}-(1-p))^{-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Hipergeométrica	$\sum_{x=0}^{n} e^{tx}\cdot\frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}$	$\sum_{x=0}^{n} e^{itx}\cdot\frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}$	$\frac{nK}{M}$	$n\frac{K}{M}\left(1-\frac{K}{M}\right)\frac{M-n}{M-1}+\left(n\frac{K}{M}\right)^2$
Geométrica	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)$	$\left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}$
Poisson	$e^{\lambda(e^t-1)}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	λ	$\lambda+\lambda^2$
Uniforme Continua	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$	$\frac{e^{bit}-e^{ait}}{ti(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a^2+b^2+ab}{3}$
Exponencial	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}$
Normal	$\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$	$\exp\left(i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$	μ	$\sigma^2+\mu^2$

Uniforme Discreta

Sea X una variable aleatoria discreta que puede tomar n valores diferentes $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Si la misma probabilidad de cada valor es igual, entonces X se dice que sigue una distribución uniforme discreta. Esto se puede expresar matemáticamente como:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Función carácteristica

Notemos que si X es uniformemente distribuida en $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, donde X_i son los valores posibles y todos son igualmente probables, entonces la función característica está dada por:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k)e^{itx_k}$$

Dado que $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$ para todos k, esto se puede simplificar a:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{itx_k}$$

Función generadora de momentos

La función generadora de momentos $M_X(t)$ de una variable aleatoria X está dada por:

Por lo tanto:

$$M_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}$$

Primer Momento

Sabiendo la función generadora de momentos podemos comprobar que sirva para calcular los mismos. Entonces, para encontrar el primer momento la derivaremos y luego la evaluaremos en 0:

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}e^{tx_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i e^{tx_i}$$

Evaluando en $t = 0$:

$$M_X^{(1)}(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i e^{(0)(x_i)} = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i \cdot \frac{1}{n}\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) = E[X]$$

Esto muestra que la derivada de la FGM en $t = 0$ nos da directamente el primer momento de X ($E[X]$)

Segundo Momento
El segundo momento e obtiene derivando dos veces la función generadora de momentos respecto a t y luego evaluando en $t = 0$.

$$M_X^{(2)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{tx_i}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} x_i e^{tx_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 e^{tx_i}$$

Evaluando en $t = 0$:

$$M_X^{(2)}(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 e^{(0)(x_i)} = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2 \cdot \frac{1}{n}\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot P(X = x_i) = E[X^2]$$

Esto muestra que la FGM también nos da directamente el segundo momento de X ($E[X^2]$) y como $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$, con ella también podemos sacar la Varianza.

Bernoulli

Una variable aleatoria discreta X sigue una distribución Bernoulli con parámetro p (donde $0 \leq p \leq 1$) si toma el valor 1 con probabilidad p y el valor 0 con probabilidad $1 - p$. Matemáticamente:

$$P(X = 1) = p$$
$$P(X = 0) = 1 - p$$

Función característica

La función característica de una variable aleatoria X es definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Para una variable aleatoria Bernoulli,la función caracteristica se calcula sumando las contribuciones de cada valor posible de X ponderadas por sus probabilidades:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{it\cdot 0}(1 - p) + e^{it\cdot 1}p$$
$$\varphi_X(t) = 1 \cdot (1 - p) + e^{it} \cdot p$$

Simplificando:

$$\varphi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$$

Función generadora de momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria X se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Para una variable aleatoria Bernoulli:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{t\cdot 0}(1 - p) + e^{t\cdot 1}p$$
$$M_X(t) = 1 \cdot (1 - p) + e^t \cdot p$$

por lo tanto:

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t$$

Primer momento (Esperanza)

Para calcular el primer momento de una variable aleatoria Bernoulli. usamos la FGM derivandola con respecto a t y posteriormente evaluando t = 0

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - p + pe^t\right) = pe^t$$

Evaluamos la derivada en $t = 0$:

$$M'_X(0) = p \cdot e^0 = p \cdot 1 = p$$

Por lo tanto, el primer momento (esperanza) de la variable aleatoria Bernoulli X es:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = p$$

Segundo Momento

Para calcular el segundo momento de la variable aleatoria Bernoulli, obtenemos la segunda dervidada de la FGM

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}\left(pe^t\right) = pe^t$$

Evaluamos la segunda derivada en $t = 0$:

$$M''_X(0) = p \cdot e^0 = p \cdot 1 = p$$

Por lo tanto, el segundo momento de la variable aleatoria Bernoulli X es:

$$\mathbb{E}[X^2] = M''_X(0) = p$$

Varianza

La varianza de una variable aleatoria X se define como $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
Para una variable aleatoria bernoulli:

$$\mathrm{Var}(X) = p - p^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$$

Analogamente, se cumple para la función caracteristica. Por lo tanto, a través de las funciones anteriores se pueda obtener la Esperanza, y Varianza de esta v.a.

Binomial

Dada una variable aleatoria X que sigue una distribución binomial con parámetros n (número de ensayos) y p (probabilidad de éxito en cada ensayo), denotada como $X \sim \mathrm{Binomial}(n,p)$, sabemos que la esperanza es como sigue:

$$\mathbb{E}[X] = np.$$

Además, tenemos que su función característica es:

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ahora, queremos demostrar que la esperanza la podemos obtener de la MGF, Entonces:

Función Generadora de Momentos (MGF)

La MGF de X es:

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n.$$

Primer Momento

El primer momento es la derivada de la MGF evaluada en $t = 0$. Derivamos $M_X(t)$ con respecto a t:

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}\left((1 - p + pe^t)^n\right).$$

Usamos la regla de la cadena para derivar:

$$M'_X(t) = n(1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t.$$

Evaluamos la derivada en $t = 0$:

$$M'_X(0) = n(1 - p + pe^0)^{n-1} \cdot pe^0 = n(1 - p + p)^{n-1} \cdot p = n \cdot p.$$

Por lo tanto, el primer momento (la derivada de la MGF en $t = 0$) es igual a la esperanza (media) de la distribución binomial:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = np.$$

Segundo Momento

Dada una variable aleatoria $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, sabemos que:

- La esperanza $\mathbb{E}[X] = np$.
- La varianza $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.
- La MGF de X está dada por $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$.

Relación Entre la Varianza, la Esperanza y el Segundo Momento
La varianza de X puede ser expresada en términos de la esperanza y el segundo momento:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Si despejamos al segundo momento $\mathbb{E}[X^2]$, tenemos:

$$\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2.$$

Sustituyendo la varianza y la esperanza:

$$\mathbb{E}[X^2] = np(1 - p) + (np)^2 = np(1 - p) + n^2p^2.$$

Segunda Derivada de la MGF

Del primer punto obtuvimos que

$$M'_X(t) = n(1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t.$$

Entonces, para la egunda derivada de la MGF:

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}\left(n(1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t\right).$$

Aplicamos la regla del producto:

$$M''_X(t) = n\left[\frac{d}{dt}(1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t + (1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot \frac{d}{dt}(pe^t)\right].$$

Derivando cada término:

$$\frac{d}{dt}(1-p+pe^t)^{n-1} = (n-1)(1-p+pe^t)^{n-2} \cdot pe^t,$$

$$\frac{d}{dt}(pe^t) = pe^t.$$

Sustituyendo:

$$M_X''(t) = n\left[(n-1)(1-p+pe^t)^{n-2} \cdot pe^t \cdot pe^t + (1-p+pe^t)^{n-1} \cdot pe^t\right].$$

Evaluando en $t=0$:

$$M_X''(0) = n\left[(n-1)(1-p+p)^{n-2} \cdot p^2 + (1-p+p)^{n-1} \cdot p\right] = n(n-1)p^2 + np.$$

Por lo tanto, la segunda derivada de la MGF evaluada en $t=0$ es igual al segundo momento de la variable aleatoria $X \sim \text{Binomial}(n,p)$:

$$M_X''(0) = \mathbb{E}[X^2].$$

Binomial Negativa

$$X \sim BN(p,r) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{x-r} p^x (1-p)^{x-r} & \text{si} \\ x \in \{r, r+1, ...\} & \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Sabemos lo siguiente de esta disribución

$$\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p}$$

Y

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{r(1-p)}{p^2} + \frac{r^2}{p^2} = \frac{r}{p^2}[1-p+r]$$

Función generadora de momentos

Primer momento

$$\text{Si } X \sim BN(p,r) \Rightarrow M_X(t) = p^r\left(e^{-t} - (1-p)\right)^{-r}$$

$$\Rightarrow$$

$$M_X^{(1)} = -r \cdot p^r \left(e^{-t} - (1-p)\right)^{-r-1} \times (-e^{-t})$$

$$= r \cdot p^r \left(e^{-t} - (1-p)\right)^{-(r+1)} (e^{-t})$$

$$\Rightarrow$$

$$M_X^{(1)}(0) = r \cdot p^r (1+p-1)^{-(r+1)} = \frac{r \cdot p^r}{p^{r+1}} = \frac{r}{p} = \mathbb{E}[X]$$

$$\therefore M_X^{(1)}(0) = \mathbb{E}[X]$$

Segundo momento

Ahora probaremos que la seungda derivada de la función generadora de momentos evaluada en 0, es igual al segundo momento de la variable aleatoria.

$$M_X^{(1)}(t) = r \cdot p^r (e^{-t} + p - 1) \cdot e^{-t}$$
$$\Rightarrow$$
$$M_X^{(2)} = r \cdot p^r [(-r-1)(e^{-1} + p - 1)(-1)e^{-t}e^{-t} + (e^{-t} + p - 1)^{-r-1}(-1)e^{-t}]$$
$$= r \cdot p^r e^{-t} \left[\frac{(r+1)e^{-t}}{(e^{-t} + p - 1)^{r+2}} - \frac{1}{(e^{-t} + p - 1)^{r+1}} \right]$$
$$\Rightarrow$$
$$M_X^{(2)}(0) = r \cdot p^r \left[\frac{r+1}{p^{r+2}} - \frac{1}{p^{r+1}} \right] = \frac{r}{p^2}(r + 1 - p) = \mathbb{E}[X^2]$$
$$\therefore M_X^{(2)}(0) = \mathbb{E}[x^2]$$

Ahora usaremos una propiedad parecida, pero de la función característica. Es este caso, como $X \sim BN(r, p)$, entonces sabemos que su función característica tiene la siguiente forma:

$$\phi_X(t) = p^r (e^{-it} - (1 - p))^{-r}$$

Ahora buscamos mostrar que $\phi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}[X^n]$, en partícular para los dos primeros momentos, es decír, buscamos mostrar lo siguiente:

$$\phi_X^{(1)}(0) = i^2 \mathbb{E}[X] = \frac{i \cdot r}{p}$$
$$\text{Y}$$
$$\phi_X^{(2)}(0) = i\mathbb{E}[X^2] = \frac{i^2 \cdot r}{p^2}[r + 1 - p]$$

Comenzamos derivando la función caracterísitca de esta distribución

$$\phi_X^{(1)}(t) = p^r (-r)(e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \cdot (-i)e^{-it}$$
$$= p^r \cdot i \cdot r \cdot e^{-it}(e^{-it} + p - 1)^{-r-1}$$
$$\Rightarrow$$
$$\phi_x^{(1)}(0) = p^r \cdot i \cdot r(1 + p - 1)^{-r-1} = \frac{i \cdot p^r \cdot r}{p^{r+1}} = \frac{i \cdot r}{p} = i \cdot \mathbb{E}[X]$$
$$\therefore \phi_X^{(0)}(0) = i \cdot \mathbb{E}[X]$$

Ahora derivamos nuevamente para mostrar que la segunda derivada de la función característica evaluada en $t = 0$ es igual al segundo momento multiplicado por en cuadrado de el número imaginario $i = \sqrt{-1}$

$$\phi_X^{(2)}(t) = \frac{d}{dt} \left(p^r \cdot i \cdot r \cdot e^{-it}(e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \right)$$
$$= p^r \cdot i \cdot r \cdot \frac{d}{dt} \left(e^{-it}(e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \right)$$
$$= p^r \cdot i \cdot r \cdot \left[(-r-1)(e^{-it} + p - 1)^{-r-2}(-i)e^{-it}e^{-it} + (e^{-it} + p - 1)^{-r-1}(-i)e^{-it} \right]$$
$$= p^r \cdot i^2 \cdot r \cdot e^{-it} \left[(r+1)(e^{-it} + p - 1)^{-r-2}e^{-it} - (e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \right]$$
$$= p^r i^2 r \cdot e^{-it} \left[\frac{r+1}{(e^{-it} + p - 1)^{r+2}} - \frac{1}{(e^{-it} + p - 1)^{r+1}} \right]$$
$$\Rightarrow$$
$$\phi_X^{(2)}(0) = i^2 p^r r \left[\frac{r+1}{p^{r+2}} - \frac{1}{p^{r+1}} \right] = i^2 r \left[\frac{r+1}{p^2} - \frac{p}{p^2} \right] = \frac{i^2 \cdot r}{p^2} [r + 1 - p] = i^2 \cdot \mathbb{E}[X^2]$$
$$\therefore \phi_X^{(2)}(0) = i^2 \mathbb{E}[X^2]$$

Hipiergeométrica

Una variable aleatoria discreta X tiene una distribución hipergeométrica denotada como $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$, donde donde M es el tamaño de población, n es el tamaño de la muestra extraída, K es el número de elementos en la población original que pertenecen a la categoría deseada y x es el número de elementos en la muestra que pertenecen a dicha categoría.Su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f_X(x; M, K, n) = \begin{cases} \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & \text{for } x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función Característica

La función característica de la distribución hipergeométrica $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$ no tiene una forma cerrada simple como algunas otras distribuciones, pero se puede expresar usando sumas y combinaciones:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{itx} \cdot \mathbb{P}(X = x),$$

donde $\mathbb{P}(X = x)$ la sabemos de la PDF expuesta, entonces:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{itx} \cdot \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}.$$

Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de la distribución hipergeométrica $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$ se obtiene expresando la FGM como una suma ponderada de e^{tx} por las probabilidades correspondientes:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \cdot \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}.$$

Primer Momento y Segundo Momento

Para encontrar el primer momento (la esperanza $\mathbb{E}[X]$) de una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, utilizamos la fórmula general de la esperanza para una distribución discreta:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k)$$

Sin embargo, hay una fórmula más sencilla derivada de las propiedades de la distribución hipergeométrica:

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{K}{M}$$

Desarrollamos esta fórmula paso a paso.
Consideramos la esperanza $\mathbb{E}[X]$ de la distribución hipergeométrica:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k)$$

Sustituimos la función de probabilidad de la distribución hipergeométrica:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}}$$

La clave para derivar $\mathbb{E}[X]$ de manera más sencilla es observar la estructura combinatoria del problema. Al seleccionar n elementos de una población de M elementos, con K elementos del primer tipo, la esperanza del número de elementos del primer tipo en la muestra es proporcional al tamaño de la muestra y la proporción de elementos del primer tipo en la población.

Por lo tanto, podemos escribir:

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{K}{M}$$

Esta fórmula tiene una interpretación intuitiva: si seleccionamos una muestra de tamaño n de una población donde la proporción de elementos del primer tipo es $\frac{K}{M}$, entonces la esperanza del número de elementos del primer tipo en la muestra es simplemente el tamaño de la muestra multiplicado por la proporción de elementos del primer tipo en la población.

Por lo tanto, la esperanza de una variable aleatoria con distribución hipergeométrica es:

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{K}{M}$$

Para encontrar el segundo momento $\mathbb{E}[X^2]$ de una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, utilizamos la fórmula de la esperanza del cuadrado y las propiedades de esta distribución.

Una variable aleatoria X que sigue una distribución hipergeométrica con parámetros M, K y n tiene los siguientes momentos:

La esperanza (primer momento) es:

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{K}{M}$$

La varianza es:

$$\mathrm{Var}(X) = n \cdot \frac{K}{M} \cdot \left(1 - \frac{K}{M}\right) \cdot \frac{M-n}{M-1}$$

Para encontrar el segundo momento $\mathbb{E}[X^2]$, utilizamos la relación entre la varianza, la esperanza y el segundo momento:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Despejando $\mathbb{E}[X^2]$, obtenemos:

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituimos la esperanza y la varianza de la distribución hipergeométrica:

$$\mathbb{E}[X^2] = n \cdot \frac{K}{M} \cdot \left(1 - \frac{K}{M}\right) \cdot \frac{M-n}{M-1} + \left(n \cdot \frac{K}{M}\right)^2$$

Desarrollamos cada término:

Primer término (varianza):

$$n \cdot \frac{K}{M} \cdot \left(1 - \frac{K}{M}\right) \cdot \frac{M-n}{M-1}$$

Segundo término (cuadrado de la esperanza):

$$\left(n \cdot \frac{K}{M}\right)^2 = n^2 \cdot \left(\frac{K}{M}\right)^2$$

Sumamos los dos términos:

$$\mathbb{E}[X^2] = n \cdot \frac{K}{M} \cdot \left(1 - \frac{K}{M}\right) \cdot \frac{M-n}{M-1} + n^2 \cdot \left(\frac{K}{M}\right)^2$$

Por lo tanto, el segundo momento de una variable aleatoria con distribución hipergeométrica es:

$$\mathbb{E}[X^2] = n \cdot \frac{K}{M} \cdot \left(1 - \frac{K}{M}\right) \cdot \frac{M-n}{M-1} + n^2 \cdot \left(\frac{K}{M}\right)^2$$

Varianza

Para una variable aleatoria X que sigue una distribución hipergeométrica $X \sim \mathrm{HGeom}(M, K, n)$, la varianza se calcula utilizando el primer y segundo momento de la siguiente manera:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituyendo con los valores anteriores:

$$\text{Var}(X) = \left[n\frac{K}{M}\left(1 - \frac{K}{M}\right)\frac{M-n}{M-1} + \left(n\frac{K}{M}\right)^2 \right] - \left(n\frac{K}{M}\right)^2$$

Simplificando la expresión, obtenemos:

$$\text{Var}(X) = n\frac{K}{M}\left(1 - \frac{K}{M}\right)\frac{M-n}{M-1}$$

Geométrica

Sea la v.a. $X \sim Geo(p)$ con la siguiente función de masa de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{si } k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función generadora de momentos de la v.a X correspondiente se define como:

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)$$

Y su función carácteristica es:

$$\phi_X(t) = \phi_X^{(1)}(t) =$$

Ahora, conociendo la v.a. sabemos que su esperanza y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \qquad y, \qquad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

De aqui podemos obtener el valor e $\mathbb{E}[X^2]$, puesto que $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. Entonces:

$$\mathbb{E}[X^2] = Var(X) + \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1-p}{p^2} + (\frac{1}{p})^2$$

$$= \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1-p+1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[X^2] == \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Ahora lo comprobaremos con la función generadora para ellos debe cumplirse que $M_X^{(1)}(0) = \mathbb{E}[X]$. Entonces

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right) = p\left(\frac{\frac{d}{dt}e^t(1-(1-p)e^t) - e^t\frac{d}{dt}[1-(1-p)e^t]}{(1-(1-p)e^t)^2} \right)$$

$$p\left(\frac{e^t(1-(1-p)e^t) + e^{2t}(1-p)}{(1-(1-p)e^t)^2} \right) = p\left(\frac{e^t - (1-p)e^{2t} + e^{2t}(1-p)}{(1-(1-p)e^t)^2} \right)$$

$$\Rightarrow$$

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2}$$

De aquí que:

$$M_X^{(1)}(0) = \frac{pe^0}{(1-(1-p)e^0)^2} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Por lo tanto

$$M_X^{(1)}(0) = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

De la misma manera, procedemos para el segundo momento, entonces:

$$M_X^{(2)}(t) = p\frac{d}{dt}\frac{e^t}{(1-(1-p)e^t)^2} = p\left(\frac{\frac{d}{dt}e^t(1-(1-p)e^t)^2 - e^t\frac{d}{dt}[1-(1-p)e^t]^2}{(1-(1-p)e^t)^4}\right)$$

$$= p\left(\frac{e^t\cdot(1-(1-p)e^t)^2 - 2(1-(1-p)e^t)\cdot\frac{d}{dt}[1-(1-p)e^t]\cdot e^t}{(1-(1-p)e^t)^4}\right)$$

$$= p\left(\frac{e^t\cdot(1-(1-p)e^t)^2 + 2(1-p)(1-(1-p)e^t)\cdot e^{2t}}{(1-(1-p)e^t)^4}\right)$$

$$= p\left(\frac{e^t\cdot(1-(1-p)e^t) + 2(1-p)\cdot e^{2t}}{(1-(1-p)e^t)^3}\right) = p\left(\frac{e^t - (1-p)e^{2t} + 2e^{2t}(1-p)}{(1-(1-p)e^t)^3}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$M_X^{(2)}(t) = p\left(\frac{e^t + e^t(1-p)}{(1-(1-p)e^t)^3}\right) = \frac{p(e^t(2-p))}{(1-(1-p)e^t)^3}$$

De aquí que:

$$M_X^{(2)}(0) = \frac{p(e^0(2-p))}{(1-(1-p)e^0)^3} = \frac{2p-p^2}{p^3} = \frac{2-p}{p^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p}$$

Por lo tanto

$$M_X^{(2)}(0) = \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{p} - \frac{1}{p}$$

Analogamente, se cumple para la función caracteristica. De aquí que a través de la función carácteristica y generadora de momentos se pueda obtener la Esperanza, y por consecuencia de $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, también la varianza de esta v.a. $X \sim Geo(p)$

Poisson

La función de densidad de probabilidad (PDF) de una distribución de Poisson describe la probabilidad de que un número determinado de eventos ocurra en un intervalo de tiempo fijo. La función de densidad de probabilidad (PDF) de una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ es:

$$f_X(x) = f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{for } x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Función Característica

La función característica $\varphi_X(t)$ de una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson con parámetro λ es:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de una distribución Poisson con parámetro λ está dada por:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{(\lambda(e^t-1))}$$

Primer Momento y Segundo Momento

Para obtener el **primer momento** (la esperanza $E[X]$) de la distribución de Poisson a partir de la función generadora de momentos (MGF), seguimos los siguientes pasos:

La MGF de la distribución de Poisson con parámetro λ es:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Derivamos la MGF con respecto a t:

$$\frac{d}{dt}M_X(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda(e^t-1)}\right)$$

Utilizamos la regla de la cadena para derivar $M_X(t)$ con respecto a t:

$$\frac{d}{dt}M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \frac{d}{dt}\left(\lambda(e^t-1)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\lambda(e^t-1)\right) = \lambda e^t$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t$$

Evaluamos en $t = 0$:

$$M_X^{(1)}(0) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t\Big|_{t=0}$$

Evaluamos cada término:

$$e^{\lambda(e^0-1)} = e^{\lambda(1-1)} = e^0 = 1$$

$$\lambda e^0 = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

Entonces:

$$M_X^{(1)}(0) = 1 \cdot \lambda = \lambda$$

Por lo tanto, se llega al primer momento (la esperanza $E[X]$) de la distribución de Poisson

Para encontrar el **segundo momento** $E[X^2]$ obtendremos la segunda derivada, entonces:

$$\frac{d}{dt}M_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\lambda e^{\lambda(e^t-1)+t}\right) == \left(\lambda e^{\lambda(e^t-1)+t}\right) \cdot \frac{d}{dt}(\lambda(e^t-1)+t)$$

$$= \lambda e^{\lambda(e^t-1)+t} \cdot [\lambda(e^t+0)+1] = \lambda(\lambda e^t+1)e^{\lambda(e^t-1)+t}$$

Por lo tanto:

$$M_X^{(2)}(t) = e^{\lambda(e^t-1)+t} \cdot \lambda(\lambda e^t+1)$$

Evaluamos cada término en 0:

$$e^{\lambda(e^0-1)+0} \cdot \lambda(\lambda e^0+1) = \lambda(\lambda+1) = \lambda^2+\lambda$$

Por lo tanto, el segundo momento de una variable aleatoria con distribución de Poisson es:

$$M_X^{(2)}(0) = \lambda^2+\lambda$$

Varianza

Para una distribución Poisson con parámetro λ la varianza se calcula utilizando el primer y segundo momento de la siguiente manera. Sustituyendo los valores anteriores tenemos

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = (\lambda+\lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$$

Por lo tanto, comprobamos que de las funciones anteriores se pueda obtener la Esperanza, y Varianza de una v.a.

Uniforme Contínua

Sean a,b dos número reales tales que $a < b$, y X una variable aleatoria coon distribución uniforme en el interbalo $[a, b]$. Entonces la función de densidad de esta variable aleatoria tiene la siguiente forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Función generadora de momentos

Entonces podemos calcular su función generadora de momentos de la siguiente forma:

$$M_x(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot e^{tx}\, dx$$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot e^{tx}\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{e^{tx}}{t} \Big|_a^b \right)$$

$$= \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

Como puede verse, la función generadora de momentos $M_X(t)$ tiene a t en el cociente, por lo que no está definida sobre $t = 0$, y dado que el soporte de la derivada de una función es subconjunto del soporte de la función original, sabemos que $M_X^{(n)}(t)$ tampoco está definida sobre $t = 0$ para cualquier n entero positivo.

Función característica

Análogamente la función caracterísitca de esta distribución es la siguiente:

$$\phi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

La cual, igual que la generadora de momentos, no está definida sobre $t = 0$, ni ninguna de sus derivadas.

Aunque es facil encontrar una función para calcular el n-ésimo momento de esta variable aleatoria.

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot x^n\, dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}$$

Aunque la función generadora de momentos no está definida en $t = 0$, nos fijamos en como se comporta cuando $t \to 0$

Primero nos fijamos en las primeras dos derivadas de $M_X(t)$, es decir, calculamos $M_X^{(1)}(t)$ y $M_X^{(2)}(t)$

$$M_X^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}\right] = \frac{e^{tb}(tb-1) + e^{ta}(1-ta)}{t^2(b-a)}$$

Y

$$M_X^{(2)}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}\right] = \frac{e^{at}(a^2t^2+2) - e^{tb}(b^2t^2 - 2bt + 2)}{t^3(b-a)}$$

Ambas funciones no están definidas en el $t = 0$, y al tratar de evaluarlas en este, se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, por lo que podemos usar la regla de L'Hôpital (dos y tres veces respectivamente) para calcular el límite de la función cuando t tiende a 0, es decir:

Primer momento

Veremos a la función generadora de momentos como un cociente de funciones, y dado que ambas valen 0 al evaluarlas en $t = 0$, podemos calcular el límite de la función como el cociente de las derivadas de las funciones. Es decir:

$$M_X^{(1)}(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0}{0}$$
$$\Rightarrow$$
$$\lim_{t\to 0} M_X^{(1)}(t) = \frac{\frac{d^2}{dt^2}[f(t)]\Big|_0}{\frac{d^2}{dt^2}[g(t)]\Big|_0} = \frac{e^{at}[-ta^3 - a^2] + e^{bt}[tb^3 + b^2]}{2(b-a)}\Big|_0 = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} = \mathbb{E}[X]$$
$$\therefore \lim_{t\to 0} M_X^{(1)}(t) = \mathbb{E}[X]$$

Segundo momento

Y analogamente aplicamos esto para calcular el segundo momento de una variable aleatoria con esta distribución de la siguiente forma:

$$\lim_{t\to 0} M_X^{(2)}(t) = \frac{\frac{d^3}{dt^3}[f(t)]\Big|_0}{\frac{d^3}{dt^3}[g(t)]\Big|_0} = \frac{a^3e^{at}(a^2t^2 + 4at + 2) - b^3e^{bt}(b^2t^2 + 4bt + 2)}{3 \cdot 2(b-a)}\Big|_0 = \frac{a^3 - b^3}{3(b-a)} = \frac{(a^2 + b^2 + ab)(b-a)}{3(b-a)}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} = \mathbb{E}[X^2]$$
$$\therefore \lim_{t\to 0} M_X^{(2)}(t) = \mathbb{E}[X^2]$$

Exponencial

Una variable aleatoria continua X se dice que sigue una distribución exponencial con parámetro λ (donde $\lambda > 0$), denotada como $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, si su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

También sabemos el valor de la Esperanza y Varianza de dicha variable aleatoria

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad y, \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Función Característica

La función característica de una variable aleatoria X es definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Para una variable aleatoria exponencial $X \sim \text{Exp}(\lambda)$:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$
$$\varphi_X(t) = \lambda \int_0^\infty e^{(it-\lambda)x}\,dx$$
$$\varphi_X(t) = \lambda \left[\frac{e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}\right]_0^\infty$$
$$\varphi_X(t) = \lambda\left(0 - \frac{1}{it-\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria X se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Para una variable aleatoria exponencial $X \sim \text{Exp}(\lambda)$:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

Combinamos los exponentes en la integral:

$$M_X(t) = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} \, dx$$

Evaluamos la integral:

$$M_X(t) = \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^\infty$$

Para que la integral converja, requerimos que $\lambda - t > 0$. Evaluando en los límites:

$$M_X(t) = \lambda \left(0 - \frac{1}{t-\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

Primer Momento (Esperanza)

Para calcular el primer momento de una variable aleatoria Exponencial, usamos la FGM derivandola con respecto a t y posteriormente evaluando $t = 0$.

Derivamos la MGF con respecto a t:

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

Evaluamos la derivada en $t = 0$:

$$M_X'(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

Por lo tanto, el primer momento (esperanza) de la variable aleatoria exponencial X es:

$$\mathbb{E}[X] = M_X'(0) = \frac{1}{\lambda}$$

Segundo Momento

Para el segundo momento calculamos la segunda derivada de la FGM con respecto a t y posteriormente evaluando $t = 0$.

$$M_X''(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \right) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

Evaluamos la segunda derivada en $t = 0$:

$$M_X''(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Por lo tanto, el segundo momento de la variable aleatoria exponencial X es:

$$\mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

La varianza de una variable aleatoria X se define como:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Caso análogo pasa para el calculo con la función carácteristica. Por lo tanto, comprobamos que de las funciones anteriores se pueda obtener la Esperanza, y Varianza de esta v.a.

Normal

Una variable aleatoria continua X se distribuye Normal con media μ y varianza σ^2, denotada como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Función Característica

La función característica de una variable aleatoria X es definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Para una variable aleatoria normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria X se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Para una variable aleatoria normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, :

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

(Primer Momento (Esperanza))

Para calcular el primer momento de una variable aleatoria Normal, usamos la FGM derivandola con respecto a t y posteriormente evaluando $t = 0$.

Derivamos la MGF con respecto a t:

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right)$$

Usando la regla de la cadena:

$$M'_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\left(\mu + \sigma^2 t\right)$$

Evaluamos la derivada en $t = 0$:

$$M'_X(0) = \exp\left(\mu \cdot 0 + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 0^2\right)\left(\mu + \sigma^2 \cdot 0\right) = \exp(0) \cdot \mu = 1 \cdot \mu = \mu$$

Por lo tanto, el primer momento (esperanza) de la variable aleatoria normal X es:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = \mu$$

Segundo Momento

Para el segundo momento calculamos la segunda derivada de la FGM con respecto a t y posteriormente evaluando $t = 0$.

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)(\mu + \sigma^2 t)\right)$$

Aplicamos la regla del producto:

$$M''_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\left(\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2\right)$$

Evaluamos la segunda derivada en $t = 0$:

$$M''_X(0) = \exp\left(\mu \cdot 0 + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot 0^2\right)\left(\sigma^2 + \mu^2\right) = 1 \cdot (\sigma^2 + \mu^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Por lo tanto, el segundo momento de la variable aleatoria normal X es:

$$\mathbb{E}[X^2] = M''_X(0) = \sigma^2 + \mu^2$$

Varianza

La varianza de una variable aleatoria X se define como:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituyendo los valores:

$$\mathrm{Var}(X) = (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2$$