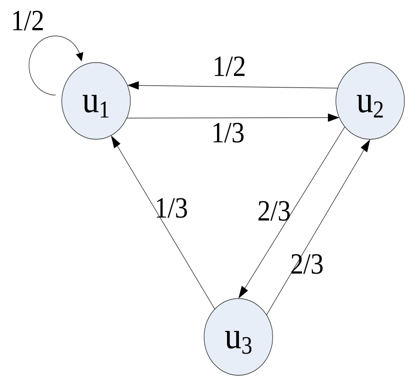
《信息论与编码（第二版）》曹雪虹答案

第二章

2.1 一个马尔可夫信源有 3 个符号 $\{u_1, u_2, u_3\}$**，转移概率为：** $p(u_1|u_1)=1/2$**，** $p(u_2|u_1)=1/2$**，** $p(u_3|u_1)=0$**，** $p(u_1|u_2)=1/3$**，** $p(u_2|u_2)=0$**，** $p(u_3|u_2)=2/3$**，** $p(u_1|u_3)=1/3$**，** $p(u_2|u_3)=2/3$**，** $p(u_3|u_3)=0$**，画出状态图并求出各符号稳态概率。**

解：状态图如下



状态转移矩阵为：

$$p=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

设状态 u_1, u_2, u_3 稳定后的概率分别为 W_1，W_2、W_3

由 $\begin{cases} WP=W \\ W_1+W_2+W_3=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \frac{1}{2}W_1+\frac{1}{3}W_2+\frac{1}{3}W_3=W_1 \\ \frac{1}{2}W_1+\frac{2}{3}W_3=W_2 \\ \frac{2}{3}W_2=W_3 \\ W_1+W_2+W_3=1 \end{cases}$ 计算可得 $\begin{cases} W_1=\frac{10}{25} \\ W_2=\frac{9}{25} \\ W_3=\frac{6}{25} \end{cases}$

2.2 由符号集{0，1}组成的二阶马尔可夫链，其转移概率为： $p(0|00)$ **=0.8，** $p(0|11)$ **=0.2，** $p(1|00)$ **=0.2，** $p(1|11)$ **=0.8，** $p(0|01)$ **=0.5，** $p(0|10)$ **=0.5，** $p(1|01)$ **=0.5，** $p(1|10)$ **=0.5。画出状态图，并计算各状态的稳态概率。**

解： $p(0|00)=p(00|00)=0.8$　　$p(0|01)=p(10|01)=0.5$

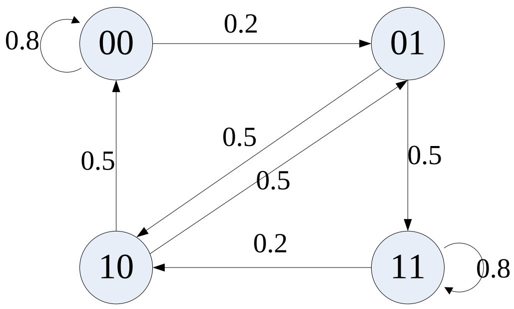
$p(0|11)=p(10|11)=0.2$　　$p(0|10)=p(00|10)=0.5$

$p(1|00)=p(01|00)=0.2$　　$p(1|01)=p(11|01)=0.5$

$p(1|11)=p(11|11)=0.8$　　$p(1|10)=p(01|10)=0.5$

于是可以列出转移概率矩阵：$p=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8\end{pmatrix}$

状态图为：



设各状态 **00**，**01**，**10**，**11** 的稳态分布概率为 **W_1,W_2,W_3,W_4** 有

$$\begin{cases}WP=W\\ \sum_{i=1}^{4}W_i=1\end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases}0.8W_1+0.5W_3=W_1\\ 0.2W_1+0.5W_3=W_2\\ 0.5W_2+0.2W_4=W_3\\ 0.5W_2+0.8W_4=W_4\\ W_1+W_2+W_3+W_4=1\end{cases} \quad 计算得到 \begin{cases}W_1=\dfrac{5}{14}\\ W_2=\dfrac{1}{7}\\ W_3=\dfrac{1}{7}\\ W_4=\dfrac{5}{14}\end{cases}$$

2.3 同时掷出两个正常的骰子，也就是各面呈现的概率都为 1/6，求：

(1) “3 和 5 同时出现”这事件的自信息；

(2) “两个 1 同时出现”这事件的自信息；

(3) 两个点数的各种组合（无序）对的熵和平均信息量；

(4) 两个点数之和（即 2，3，⋯，12 构成的子集）的熵；

(5) 两个点数中至少有一个是 1 的自信息量。

解：**(1)**
$$p(x_i)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$$
$$I(x_i)=-\log p(x_i)=-\log\frac{1}{18}=4.170\ \ bit$$

(2)
$$p(x_i)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$
$$I(x_i)=-\log p(x_i)=-\log\frac{1}{36}=5.170\ \ bit$$

(3)

两个点数的排列如下：

11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

共有 21 种组合：

其中 11，22，33，44，55，66 的概率是$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ **其他 15 个组合的概率是**$2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

$$H(X)=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)=-\left(6\times\frac{1}{36}\log\frac{1}{36}+15\times\frac{1}{18}\log\frac{1}{18}\right)=4.337\ bit/symbol$$

(4)参考上面的两个点数的排列，可以得出两个点数求和的概率分布如下：

$$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} H(X)&=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i) \\ &=-\left(2\times\frac{1}{36}\log\frac{1}{36}+2\times\frac{1}{18}\log\frac{1}{18}+2\times\frac{1}{12}\log\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{9}\log\frac{1}{9}+2\times\frac{5}{36}\log\frac{5}{36}+\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}\right) \\ &=3.274\ bit/symbol \end{aligned}$$

(5)

$$p(x_i)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 11=\frac{11}{36}$$

$$I(x_i)=-\log p(x_i)=-\log\frac{11}{36}=1.710\ bit$$

2-4

(1) $-\mathrm{Log}\left(\frac{1}{2}\right)=1$

(2) $-\mathrm{Log}\left(\frac{99}{100}\right)=0.014$

$-\mathrm{Log}\left(\frac{1}{100}\right)=6.644$

$\frac{99}{100}\mathrm{Log}\left(\frac{100}{99}\right)+\frac{1}{100}\mathrm{Log}(100)=0.081$

(3) $\mathrm{Log}(4)=2$

2.5 居住某地区的女孩子有 25%是大学生，在女大学生中有 75%是身高 160 厘米以上的，而女孩子中身高 160 厘米以上的占总数的一半。假如我们得知“身高 160 厘米以上的某女孩是大学生”的消息，问获得多少信息量？

解：

设随机变量 **X** 代表女孩子学历

X	x_1（是大学生）	x_2（不是大学生）
$P(X)$	**0.25**	**0.75**

设随机变量 **Y** 代表女孩子身高

Y	y_1（身高>160cm）	y_2（身高<160cm）
$P(Y)$	**0.5**	**0.5**

已知：在女大学生中有 **75%**是身高 **160** 厘米以上的

即： $p(y_1/x_1)=0.75\ bit$

求：身高 **160** 厘米以上的某女孩是大学生的信息量

即： $I(x_1/y_1)=-\log p(x_1/y_1)=-\log\frac{p(x_1)p(y_1/x_1)}{p(y_1)}=-\log\frac{0.25\times 0.75}{0.5}=1.415\ bit$

2.6 掷两颗骰子，当其向上的面的小圆点之和是 3 时，该消息包含的信息量是多少？当小圆点之和是 7 时，该消息所包含的信息量又是多少？

解：

1）因圆点之和为 3 的概率 $p(x)=p(1,2)+p(2,1)=\frac{1}{18}$

该消息自信息量 $I(x)=-\log p(x)=\log 18=4.170bit$

2）因圆点之和为 7 的概率

$p(x)=p(1,6)+p(6,1)+p(2,5)+p(5,2)+p(3,4)+p(4,3)=\frac{1}{6}$

该消息自信息量 $I(x)=-\log p(x)=\log 6=2.585bit$

2.7 设有一离散无记忆信源，其概率空间为 $\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1=0 & x_2=1 & x_3=2 & x_4=3 \\ 3/8 & 1/4 & 1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$

（1）求每个符号的自信息量

（2）信源发出一消息符号序列为{202 120 130 213 001 203 210 110 321 010 021 032 011 223 210}，求该序列的自信息量和平均每个符号携带的信息量

解： $I(x_1)=\log_2\frac{1}{p(x_1)}=\log_2\frac{8}{3}=1.415bit$

同理可以求得 $I(x_2)=2bit, I(x_3)=2bit, I(x_3)=3bit$

因为信源无记忆，所以此消息序列的信息量就等于该序列中各个符号的信息量之和

就有：$I=14I(x_1)+13I(x_2)+12I(x_3)+6I(x_4)=87.81bit$

平均每个符号携带的信息量为 $\frac{87.81}{45}=1.95$ **bit/**符号

2.8 试问四进制、八进制脉冲所含信息量是二进制脉冲的多少倍？

解：

四进制脉冲可以表示 **4** 个不同的消息，例如：**{0, 1, 2, 3}**　　八进制脉冲可以表示 **8** 个不同的消息，例如：**{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}**

二进制脉冲可以表示 **2** 个不同的消息，例如：**{0, 1}**

假设每个消息的发出都是等概率的，则：

四进制脉冲的平均信息量 $H(X_1)=\log n=\log 4=2\ bit/symbol$　八进制脉冲的平均信息量 $H(X_2)=\log n=\log 8=3\ bit/symbol$

二进制脉冲的平均信息量$H(X_0)=\log n=\log 2=1\ bit/symbol$

所以：四进制、八进制脉冲所含信息量分别是二进制脉冲信息量的 **2** 倍和 **3** 倍。

2-9 “—” 用三个脉冲 “●”用一个脉冲

(1) I(●)=$\mathrm{Log}(4)=2$ **I(—)=**$\mathrm{Log}\left(\frac{4}{3}\right)=0.415$ **(2) H=** $\frac{1}{4}\mathrm{Log}(4)+\frac{3}{4}\mathrm{Log}\left(\frac{4}{3}\right)=0.811$

2-10 (1) $\frac{1}{3}\mathrm{Log}(3)+\frac{2}{3}\mathrm{Log}\left(\frac{3}{2}\right)=0.918$ **(2) P(黑/黑)=** $\frac{4}{14}$ **P(白/黑)=** $\frac{10}{14}$

H(Y/黑)= $\frac{1}{14}\mathrm{Log}\left(\frac{14}{10}\right)+\frac{10}{14}\mathrm{Log}\left(\frac{14}{10}\right)=0.381$

(3) P(黑/白)= $\frac{5}{14}$ **P(白/白)=** $\frac{9}{14}$

H(Y/白)= $\frac{5}{14}\mathrm{Log}\left(\frac{14}{5}\right)+\frac{9}{14}\mathrm{Log}\left(\frac{14}{9}\right)=0.94$ **(4) P(黑)=** $\frac{5}{15}$ **P(白)=** $\frac{2}{3}$ **H(Y)=** $\frac{1}{3}\mathrm{Log}(3)+\frac{2}{3}\mathrm{Log}\left(\frac{3}{2}\right)=0.918$

2.11 有一个可以旋转的圆盘，盘面上被均匀的分成 **38** 份，用 **1**，**…**，**38** 的数字标示，其中有两份涂绿色，**18** 份涂红色，**18** 份涂黑色，圆盘停转后，盘面上的指针指向某一数字和颜色。

（**1**）如果仅对颜色感兴趣，则计算平均不确定度

（**2**）如果仅对颜色和数字感兴趣，则计算平均不确定度

（**3**）如果颜色已知时，则计算条件熵

解：令 **X** 表示指针指向某一数字，则 **X={1,2,………,38}**

Y 表示指针指向某一种颜色，则 **Y={l** 绿色，红色，黑色**}**

Y 是 **X** 的函数，由题意可知 $p(x_iy_j)=p(x_i)$

（**1**）$H(Y)=\sum_{j=1}^{3}p(y_j)\log\frac{1}{p(y_j)}=\frac{2}{38}\log\frac{38}{2}+2\times\frac{18}{38}\log\frac{38}{18}=1.24$ **bit/**符号

（**2**）$H(X,Y)=H(X)=\log_2 38=5.25$ **bit/**符号

（**3**）$H(X|Y)=H(X,Y)-H(Y)=H(X)-H(Y)=5.25-1.24=4.01$ **bit/**符号

2.12 两个实验 **X** 和 **Y**，**X={**x_1 x_2 x_3**},Y={**y_1 y_2 y_3**},l** 联合概率$r(x_i,y_j)=r_{ij}$为

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/4 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}$$

（1）如果有人告诉你 X 和 Y 的实验结果，你得到的平均信息量是多少？

（2）如果有人告诉你 Y 的实验结果，你得到的平均信息量是多少？

（3）在已知 Y 实验结果的情况下，告诉你 X 的实验结果，你得到的平均信息量是多少？

解：联合概率 $p(x_i, y_j)$ **为**

Y X	y1	y_2	y_3
x_1	7/24	1/24	0
x_2	1/24	1/4	1/24
x_3	0	1/24	7/24

$$H(X,Y) = \sum_{ij} p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i, y_j)}$$

$$= 2 \times \frac{7}{24} \log_2 \frac{24}{7} + 4 \times \frac{1}{24} \log_2 24 + \frac{1}{4} \log_2 4$$

=2.3bit/符号

X 概率分布

X	x_1	x_2	x_3
P	8/24	8/24	8/24

Y 概率分布是

Y	y1	y2	y3
P	8/24	8/24	8/24

$H(Y) = 3 \times \frac{1}{3} \log_2 3 = 1.58$ **bit/符号**

$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 2.3 - 1.58$

=0.72bit/符号

2.13 有两个二元随机变量 *X* 和 *Y*，它们的联合概率为

Y \ X	x_1=0	x_2=1
y_1=0	1/8	3/8
y_2=1	3/8	1/8

并定义另一随机变量 $Z = XY$（一般乘积），试计算：

(1) $H(X)$，$H(Y)$，$H(Z)$，$H(XZ)$，$H(YZ)$和 $H(XYZ)$；

(2) $H(X/Y)$，$H(Y/X)$，$H(X/Z)$，$H(Z/X)$，$H(Y/Z)$，$H(Z/Y)$，$H(X/YZ)$，$H(Y/XZ)$和 $H(Z/XY)$；

(3) $I(X;Y)$，$I(X;Z)$，$I(Y;Z)$，$I(X;Y/Z)$，$I(Y;Z/X)$和 $I(X;Z/Y)$。

解：

(1)

$$p(x_1) = p(x_1 y_1) + p(x_1 y_2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$
$$p(x_2) = p(x_2 y_1) + p(x_2 y_2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$
$$H(X) = -\sum_i p(x_i)\log p(x_i) = 1 \ bit/symbol$$

$$p(y_1) = p(x_1 y_1) + p(x_2 y_1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$
$$p(y_2) = p(x_1 y_2) + p(x_2 y_2) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$
$$H(Y) = -\sum_j p(y_j)\log p(y_j) = 1 \ bit/symbol$$

$Z = XY$ 的概率分布如下：

$$\begin{bmatrix} Z \\ P(Z) \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1 = 0 & z_2 = 1 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$
$$H(Z) = -\sum_k^2 p(z_k) = -\left(\frac{7}{8}\log\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) = 0.544 \ \ bit/symbol$$

$$p(x_1) = p(x_1 z_1) + p(x_1 z_2)$$
$$p(x_1 z_2) = 0$$
$$p(x_1 z_1) = p(x_1) = 0.5$$
$$p(z_1) = p(x_1 z_1) + p(x_2 z_1)$$
$$p(x_2 z_1) = p(z_1) - p(x_1 z_1) = \frac{7}{8} - 0.5 = \frac{3}{8}$$
$$p(z_2) = p(x_1 z_2) + p(x_2 z_2)$$
$$p(x_2 z_2) = p(z_2) = \frac{1}{8}$$
$$H(XZ) = -\sum_i\sum_k p(x_i z_k)\log p(x_i z_k) = -\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) = 1.406 \ \ bit/symbol$$

$$p(y_1) = p(y_1 z_1) + p(y_1 z_2)$$
$$p(y_1 z_2) = 0$$
$$p(y_1 z_1) = p(y_1) = 0.5$$
$$p(z_1) = p(y_1 z_1) + p(y_2 z_1)$$
$$p(y_2 z_1) = p(z_1) - p(y_1 z_1) = \frac{7}{8} - 0.5 = \frac{3}{8}$$
$$p(z_2) = p(y_1 z_2) + p(y_2 z_2)$$
$$p(y_2 z_2) = p(z_2) = \frac{1}{8}$$
$$H(YZ) = -\sum_j \sum_k p(y_j z_k) \log p(y_j z_k) = -\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) = 1.406\ \ bit/symbol$$
$$p(x_1 y_1 z_2) = 0$$
$$p(x_1 y_2 z_2) = 0$$
$$p(x_2 y_1 z_2) = 0$$
$$p(x_1 y_1 z_1) + p(x_1 y_1 z_2) = p(x_1 y_1)$$
$$p(x_1 y_1 z_1) = p(x_1 y_1) = 1/8$$
$$p(x_1 y_2 z_1) + p(x_1 y_1 z_1) = p(x_1 z_1)$$
$$p(x_1 y_2 z_1) = p(x_1 z_1) - p(x_1 y_1 z_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$
$$p(x_2 y_1 z_1) + p(x_2 y_1 z_2) = p(x_2 y_1)$$
$$p(x_2 y_1 z_1) = p(x_2 y_1) = \frac{3}{8}$$
$$p(x_2 y_2 z_1) = 0$$
$$p(x_2 y_2 z_1) + p(x_2 y_2 z_2) = p(x_2 y_2)$$
$$p(x_2 y_2 z_2) = p(x_2 y_2) = \frac{1}{8}$$
$$H(XYZ) = -\sum_i \sum_j \sum_k p(x_i y_j z_k) \log_2 p(x_i y_j z_k)$$
$$= -\left(\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) = 1.811\ \ bit/symbol$$

(2)

$$H(XY) = -\sum_i \sum_j p(x_i y_j) \log_2 p(x_i y_j) == -\left(\frac{1}{8}\log\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\log\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\log\frac{1}{8}\right) = 1.811\ \ bit/symbol$$
$$H(X/Y) = H(XY) - H(Y) = 1.811 - 1 = 0.811\ \ bit/symbol$$
$$H(Y/X) = H(XY) - H(X) = 1.811 - 1 = 0.811\ \ bit/symbol$$
$$H(X/Z) = H(XZ) - H(Z) = 1.406 - 0.544 = 0.862\ \ bit/symbol$$
$$H(Z/X) = H(XZ) - H(X) = 1.406 - 1 = 0.406\ \ bit/symbol$$
$$H(Y/Z) = H(YZ) - H(Z) = 1.406 - 0.544 = 0.862\ \ bit/symbol$$
$$H(Z/Y) = H(YZ) - H(Y) = 1.406 - 1 = 0.406\ \ bit/symbol$$
$$H(X/YZ) = H(XYZ) - H(YZ) = 1.811 - 1.406 = 0.405\ \ bit/symbol$$
$$H(Y/XZ) = H(XYZ) - H(XZ) = 1.811 - 1.406 = 0.405\ \ bit/symbol$$
$$H(Z/XY) = H(XYZ) - H(XY) = 1.811 - 1.811 = 0\ \ bit/symbol$$

(3)

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)=1-0.811=0.189\ \ bit/symbol$$
$$I(X;Z)=H(X)-H(X/Z)=1-0.862=0.138\ \ bit/symbol$$
$$I(Y;Z)=H(Y)-H(Y/Z)=1-0.862=0.138\ \ bit/symbol$$
$$I(X;Y/Z)=H(X/Z)-H(X/YZ)=0.862-0.405=0.457\ \ bit/symbol$$
$$I(Y;Z/X)=H(Y/X)-H(Y/XZ)=0.862-0.405=0.457\ \ bit/symbol$$
$$I(X;Z/Y)=H(X/Y)-H(X/YZ)=0.811-0.405=0.406\ \ bit/symbol$$

2-14

(1)

$$\mathrm{P(j/i)}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8}\end{pmatrix}\quad \mathbf{P(ij)}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16}\end{pmatrix}\quad \mathbf{P(i/j)}=\begin{pmatrix}\frac{6}{7} & \frac{2}{9}\\ \frac{1}{7} & \frac{7}{9}\end{pmatrix}$$

$$p(y0)=\frac{3}{8}+\frac{1}{16}\rightarrow\frac{7}{16}\quad p(y1)=\frac{1}{8}+\frac{7}{16}\rightarrow\frac{9}{16}$$

(2) 方法 1: $I(X;Y)=p(y0)I(X;y0)+p(y1)I(X;y1)=\frac{7}{16}0.408+\frac{9}{16}0.236=0.311$

方法 2: $\frac{3}{8}\mathrm{Log}\left(\frac{\frac{6}{7}}{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{8}\mathrm{Log}\left(\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{16}\mathrm{Log}\left(\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}}\right)+\frac{7}{16}\mathrm{Log}\left(\frac{\frac{7}{9}}{\frac{1}{2}}\right)=0.311$

2-15

$$\mathbf{P(j/i)}=\begin{pmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{pmatrix}\quad p(b1)=p(b2)=\frac{1}{2}$$

$$p(a1/b1)=\frac{p(a1)\cdot p(b1\cdot a1)}{p(b1)}=\frac{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)}{\frac{1}{2}}=1-\varepsilon$$

$$I(a1;b1)=\mathrm{Log}\left(\frac{p(a1\cdot b1)}{p(a1)}\right)=\mathrm{Log}\left(\frac{1-\varepsilon}{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{Log}[2(1-\varepsilon)]$$

$$p(a1/b2)=\frac{p(a1)\cdot p(b2\cdot a1)}{p(b2)}=\varepsilon$$

$$I(a1;b2)=\mathrm{Log}\left(\frac{p(a1\cdot b2)}{p(a1)}\right)=\log\left(\frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{Log}(2\varepsilon)$$

2.16 黑白传真机的消息元只有黑色和白色两种，即 X={黑，白}，一般气象图上，黑色的出现概率 p(黑)＝0.3，白色出现的概率 p(白)＝0.7。

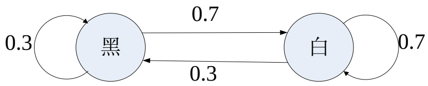
（1）假设黑白消息视为前后无关，求信源熵 H(X)，并画出该信源的香农线图

（2）实际上各个元素之间是有关联的，其转移概率为：P(白|白)＝0.9143，P(黑|白)＝0.0857，P(白|黑)＝0.2，P(黑|黑)＝0.8，求这个一阶马尔可夫信源的信源熵，并画出该信源的香农线图。

（3）比较两种信源熵的大小，并说明原因。

解：（1） $H(X)=0.3\log_2\frac{10}{3}+0.7\log_2\frac{10}{7}=0.8813$**bit/符号**

P(黑|白)=P(黑)



P(白|白)＝P(白)

P(黑|黑)＝P(黑)

P(白|黑)＝P(白)

（2）根据题意，此一阶马尔可夫链是平稳的（P(白)＝0.7 不随时间变化，P(黑)＝0.3 不随时

间变化）

$$H_\infty(X)=H(X_2|X_1)=\sum_{ij}p(x_i,y_j)\log_2\frac{1}{p(x_i,y_j)}$$

$$=0.9143\times0.7\log_2\frac{1}{0.9143}+0.0857\times0.7\log_2\frac{1}{0.0857}+0.2\times0.3\log_2\frac{1}{0.2}$$

$$+0.8\times0.3\log_2\frac{1}{0.8}$$

＝0.512bit/符号

2.17 每帧电视图像可以认为是由 3×10^5 个像素组成的，所有像素均是独立变化，且每像素又取 128 个不同的亮度电平，并设亮度电平是等概出现，问每帧图像含有多少信息量？若有一个广播员，在约 10000 个汉字中选出 1000 个汉字来口述此电视图像，试问广播员描述此图像所广播的信息量是多少（假设汉字字汇是等概率分布，并彼此无依赖）？若要恰当的描述此图像，广播员在口述中至少需要多少汉字？

解：1）

$H(X)=\log_2 n=\log_2 128=7 \quad bit/symbol$
$H(X^N)=NH(X)=3\times10^5\times7=2.1\times10^6 \quad bit/symbol$

2) $H(X)=\log_2 n=\log_2 10000=13.288 \quad bit/symbol$
$H(X^N)=NH(X)=1000\times13.288=13288 \quad bit/symbol$

3) $N=\dfrac{H(X^N)}{H(X)}=\dfrac{2.1\times10^6}{13.288}=158037$

2.20 给定语音信号样值 X 的概率密度为 $p(x)=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$,$-\infty<x<+\infty$,求 $H_c(X)$，并证明它小于同样方差的正态变量的连续熵。

解

$H_c(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty}p_x(x)\log p_x(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}p_x(x)\log\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}dx$

$=-\int_{-\infty}^{+\infty}p_x(x)\log\frac{1}{2}\lambda dx-\int_{-\infty}^{+\infty}p_x(x)(-\lambda|x|)\log e dx$

$=-\log\frac{1}{2}+\log e\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}(\lambda|x|)dx$

$=-\log\frac{1}{2}\lambda+\log e\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}\cdot\lambda(-x)dx+\log\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)dx$

$=-\log\frac{1}{2}\lambda+2\log e\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{2}\lambda^2 xe^{-\lambda x}dx$

$=-\log\frac{1}{2}\lambda-\log e\left[(1+\lambda x)e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$

$=-\log\frac{1}{2}\lambda+\log e=\log\frac{2e}{\lambda}$

$E(X)=0,D(X)=\frac{2}{\lambda^2}$

$H(X')=\frac{1}{2}\log 2\pi e\frac{2}{\lambda^2}=\frac{1}{2}\log\frac{4\pi e}{\lambda^2}=\log\frac{2\sqrt{\pi e}}{\lambda}>\log\frac{2\sqrt{e\cdot e}}{\lambda}=H(X)$

2.24 连续随机变量 *X* 和 *Y* 的联合概率密度为：$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi r^2} & x^2+y^2\le r^2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求 *H(X)*，*H(Y)*，*H(XYZ)* 和 *I(X;Y)*。

（提示：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log_2\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\log_2 2$）

解：

$$p(x)=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} p(xy)dy=\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{1}{\pi r^2}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2} \quad (-r\le x\le r)$$

$$\begin{aligned}
H_c(X)&=-\int_{-r}^{r} p(x)\log p(x)dx\\
&=-\int_{-r}^{r} p(x)\log\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}dx\\
&=-\int_{-r}^{r} p(x)\log\frac{2}{\pi r^2}dx-\int_{-r}^{r} p(x)\log\sqrt{r^2-x^2}dx\\
&=\log\frac{\pi r^2}{2}-\int_{-r}^{r} p(x)\log\sqrt{r^2-x^2}dx\\
&=\log\frac{\pi r^2}{2}-\log r+1-\frac{1}{2}\log_2 e\\
&=\log_2 \pi r-\frac{1}{2}\log_2 e \quad bit/symbol
\end{aligned}$$

其中：

$$\int_{-r}^{r} p(x)\log\sqrt{r^2-x^2}dx$$

$$=\int_{-r}^{r}\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\log\sqrt{r^2-x^2}dx$$

$$=\frac{4}{\pi r^2}\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\log\sqrt{r^2-x^2}dx$$

$$\underline{\underline{令x=r\cos\theta}}\frac{4}{\pi r^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r\sin\theta\log r\sin\theta d(r\cos\theta)$$

$$=-\frac{4}{\pi r^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} r^2\sin^2\theta\log r\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\log r\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\log r d\theta+\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi}\log r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta+\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}\log\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\log r\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\frac{2}{\pi}\log r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\theta d\theta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\log r-\frac{1}{\pi}\log r\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\sin 2\theta+\frac{2}{\pi}(-\frac{\pi}{2}\log_2 2)-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\log r-1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\log r-1+\frac{1}{2}\log_2 e$$

其中：

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\log\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\theta d\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\sin 2\theta\log\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\log\sin\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta\cos\theta\frac{\cos\theta\log_2 e}{\sin\theta}d\theta$$

$$=-\frac{2}{\pi}\log_2 e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=-\frac{2}{\pi}\log_2 e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=-\frac{1}{\pi}\log_2 e\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta-\frac{1}{\pi}\log_2 e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\log_2 e-\frac{1}{2\pi}\log_2 e\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\log_2 e$$

$$p(y)=\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}p(xy)dx=\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}\frac{1}{\pi r^2}dx=\frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}\quad(-r\le y\le r)$$

$$p(y)=p(x)$$

$$H_C(Y)=H_C(X)=\log_2\pi r-\frac{1}{2}\log_2 e\quad bit/symbol$$

$$H_c(XY)=-\iint_R p(xy)\log p(xy)dxdy$$

$$=-\iint_R p(xy)\log\frac{1}{\pi r^2}dxdy$$

$$=\log\pi r^2\iint_R p(xy)dxdy$$

$$=\log_2\pi r^2\quad bit/symbol$$

$$I_c(X;Y)=H_c(X)+H_c(Y)-H_c(XY)$$

$$=2\log_2\pi r-\log_2 e-\log\pi r^2$$

$$=\log_2\pi-\log_2 e\quad bit/symbol$$

2.25 某一无记忆信源的符号集为{0, 1}，已知 *P(0)* = 1/4，*P(1)* = 3/4。

(1) 求符号的平均熵；

(2) 有 100 个符号构成的序列，求某一特定序列（例如有 *m* 个“0”和（100－*m*）个“1”）的自信息量的表达式；

(3) 计算(2)中序列的熵。

解：

(1) $H(X)=-\sum_i p(x_i)\log p(x_i)=-\left(\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\log\frac{3}{4}\right)=0.811\ bit/symbol$

(2)
$$p(x_i)=\left(\frac{1}{4}\right)^m\times\left(\frac{3}{4}\right)^{100-m}=\frac{3^{100-m}}{4^{100}}$$
$$I(x_i)=-\log p(x_i)=-\log\frac{3^{100-m}}{4^{100}}=41.5+1.585m\ bit$$

(3) $H(X^{100})=100H(X)=100\times 0.811=81.1\ bit/symbol$

2-26

$$P(j/i)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{3}{10}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{10}\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\quad \mathbf{P(i)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\end{pmatrix}\quad \mathbf{P(ij)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\ \frac{1}{10}&\frac{1}{15}&\frac{1}{15}&\frac{1}{10}\\ \frac{1}{36}&\frac{1}{12}&\frac{1}{36}&\frac{1}{36}\end{pmatrix}$$

H(IJ)= $4\cdot\frac{1}{8}\cdot\mathrm{Log}(8)+2\cdot\frac{1}{10}\cdot\mathrm{Log}(10)+2\cdot\frac{1}{15}\cdot\mathrm{Log}(15)+3\cdot\frac{1}{36}\cdot\mathrm{Log}(36)+\frac{1}{12}\cdot\mathrm{Log}(12)=3.415$

2.29 有一个一阶平稳马尔可夫链 $X_1, X_2, \cdots, X_r, \cdots$,各 $\mathbf{X_r}$ 取值于集合 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$,已知起始概率 $\mathbf{P(X_r)}$为 $p_1=1/2, p_2=p_3=1/4$，转移概率如下图所示

i \ j	1	2	3
1	**1/2**	**1/4**	**1/4**
2	**2/3**	**0**	**1/3**

3	**2/3**	**1/3**	**0**

(1)求(X_1, X_2, X_3)**的联合熵和平均符号熵**

(2)求这个链的极限平均符号熵

(3)求H_0, H_1, H_2**和它们说对应的冗余度**

解：（1）

$$H(X_1, X_2, X_3) = H(X_1) + H(X_2 | X_1) + H(X_3 | X_2, X_1)$$
$$= H(X_1) + H(X_2 | X_1) + H(X_3 | X_2)$$

$$H(X_1) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} = 1.5bit/\text{符号}$$

X_1，X_2的联合概率分布为

$p(x_{1_i} x_{2_j})$	**1**	**2**	**3**
1	**1/4**	**1/8**	**1/8**
2	**1/6**	**0**	**1/12**
3	**1/6**	**1/12**	**0**

$$p(x_{2j}) = \sum_i p(x_{1i} x_{2j})$$

X_2 的概率分布为

1	**2**	**3**
14/24	**5/24**	**5/24**

那么

$$H(X_2 | X_1) = \frac{1}{4}\log 4 + \frac{1}{8}\log 4 + \frac{1}{8}\log 4 + \frac{1}{6}\log\frac{3}{2} + \frac{1}{12}\log 3 + \frac{1}{6}\log\frac{3}{2} + \frac{1}{12}\log 3$$

=1.209bit/符号

X_2X_3的联合概率分布为

$p(x_{2i} x_{3j})$	**1**	**2**	**3**
1	**7/24**	**7/48**	**7/48**
2	**5/36**	**0**	**5/12**
3	**5/36**	**5/12**	**0**

那么

$$H(X_3 | X_2) = \frac{7}{24}\log 2 + \frac{7}{48}\log 4 + \frac{1}{8}\log 4 + \frac{5}{36}\log\frac{3}{2} + \frac{5}{72}\log 3 + \frac{5}{36}\log\frac{3}{2} + \frac{5}{72}\log 3$$

=1.26bit/符号

$H(X_1,X_2,X_3)=1.5+1.209+1.26=3.969bit$ /符号

所以平均符号熵 $H_3(X_1,X_2,X_3)=\frac{3.969}{3}=1.323bit$ / 符号

（2）设 **a_1,a_2,a_3** 稳定后的概率分布分别为 **W1,W2,W3,** 转移概率距阵为 $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$

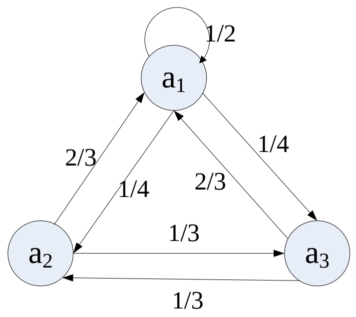
由 $\begin{cases}WP=W\\\sum W_i=1\end{cases}$ 得到 $\begin{cases}\frac{1}{2}W_1+\frac{2}{3}W_2+\frac{2}{3}W_3=1\\\frac{1}{4}W_1+\frac{1}{3}W_3=W_2\\W_1+W_2+W_3=1\end{cases}$ 计算得到 $\begin{cases}W_1=\frac{4}{7}\\W_2=\frac{3}{14}\\W_3=\frac{3}{14}\end{cases}$

又满足不可约性和非周期性

$H_\infty(\overline{X})=\sum_{i=1}^{3}W_iH(X\mid W_i)=\frac{4}{7}H(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})+2\times\frac{3}{14}H(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)=1.25bit$ /符号

(3) $H_0=\log 3=1.58bit$ /符号 $H_1=1.5bit$ /符号 $H_2=\frac{1.5+1.209}{2}=1.355bit$ /符号

$\gamma_0=1-\eta_0=1-\frac{1.25}{1.58}=0.21$ $\gamma_1=1-\eta_1=1-\frac{1.25}{1.5}=0.617$ $\gamma_2=1-\eta_2=1-\frac{1.25}{1.355}=0.078$



2-30 **(1)** 求平稳概率 **P(j/i)=**$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\1&0\end{pmatrix}$ 解方程组 $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&1\\\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}$ 得

$W_1+W_2=1$

到 $\begin{pmatrix}W_1\\W_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

(2) $H(S/s1)= \frac{2}{3}\mathrm{Log}\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3}\mathrm{Log}(3)=0.918$

$H(S/s2)= 0$

信源熵为: $H(S)=W_1H(S/s1)+W_2H(S/s2)= \frac{3}{4}0.918+\frac{1}{4}\cdot 0=0.688$

2-31

P(j/i)=$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ 解方程组 $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} W1 \\ W2 \\ W3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} W1 \\ W2 \\ W3 \end{pmatrix}$ 得到 **W1=** $\frac{3}{8}$**, W2=** $\frac{3}{8}$**, W3=** $\frac{1}{4}$

$W1+W2+W3=1$

$H(X2/a)= \mathrm{Log}(3)=1.585$

$H(X2/b)= \mathrm{Log}(3)=1.585$

$H(X3/c)= \mathrm{Log}(2)=1$

$H\infty(X)=W_1H(X2/a)+W_2H(X2/b)+W_3H(X3/c)= \frac{3}{8}\cdot\mathrm{Log}(3)+\frac{3}{8}\mathrm{Log}(3)+\frac{1}{4}\mathrm{Log}(2)=1.439$

2.32 一阶马尔可夫信源的状态图如图 **2－13** 所示，信源 **X** 的符号集为（**0**，**1**，**2**）。

（**1**）求信源平稳后的概率分布 **P(0),P(1),P(2)**

（**2**）求此信源的熵

（**3**）近似认为此信源为无记忆时，符号的概率分布为平稳分布。求近似信源的熵 **H(X)** 并与 H_∞ 进行比较

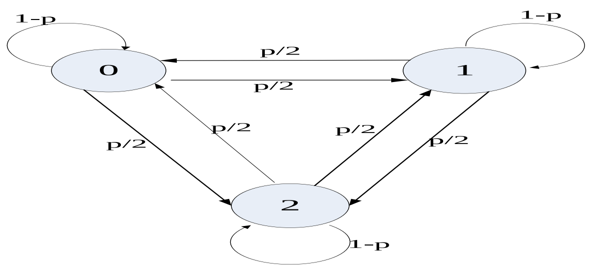


图2-13

解:根据香农线图,列出转移概率距阵 $P=\begin{bmatrix} 1-p & p/2 & p/2 \\ p/2 & 1-p & p/2 \\ p/2 & p/2 & 1-p \end{bmatrix}$

令状态 **0,1,2** 平稳后的概率分布分别为 **W1,W2,W3**

$$\begin{cases} WP = W \\ \sum_{i=1}^{3} W_i = 1 \end{cases}$$ 得到 $$\begin{cases} (1-p)W_1 + \frac{p}{2}W_2 + \frac{p}{2}W_3 = W_1 \\ \frac{p}{2}W_1 + (1-p)W_2 + \frac{p}{2}W_3 = W_2 \\ W_1 + W_2 + W_3 = 1 \end{cases}$$ 计算得到 $$\begin{cases} W = \frac{1}{3} \\ W = \frac{1}{3} \\ W = \frac{1}{3} \end{cases}$$

由齐次遍历可得

$$H_\infty(\overline{X}) = \sum_i W_i H(\overline{X} \mid W_i) = 3 \times \frac{1}{3} H(1-p, \frac{p}{2}, \frac{p}{2}) = (1-p)\log\frac{1}{1-p} + p\log\frac{2}{p}$$

$H(X^{\cdot}) = \log 3 = 1.58 bit/$符号　由最大熵定理可知 $H_\infty(\overline{X})$ 存在极大值

或者也可以通过下面的方法得出存在极大值:

$$\frac{\partial H_\infty(\overline{X})}{\partial p} = -\left[-\log(1-p) + \frac{1-p}{1-p}(-1) + \log\frac{p}{2} + p \cdot \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{2} \right] = -\log\frac{p}{2(1-p)}$$

$\frac{p}{2(1-p)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-p)}$　又 $0 \le p \le 1$ 所以 $\frac{p}{2(1-p)} \in [0, +\infty]$ 当 **p=2/3** 时 $\frac{p}{2(1-p)} = 1$

0<p<2/3 时 $\frac{\partial H_\infty(\overline{X})}{\partial p} = -\log\frac{p}{2(1-p)} > 0$

2/3<p<1 时 $\frac{\partial H_\infty(\overline{X})}{\partial p} = -\log\frac{p}{2(1-p)} < 0$

所以当 **p=2/3** 时 $H_\infty(\overline{X})$ 存在极大值**,**且 $H_\infty(\overline{X})_{\max} = 1.58 bit/$符号

所以 $H_\infty(\overline{X}) \le H(X^{\cdot})$

2-33　**(1)**　P(j/i)= $\begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$　解方程组: $\begin{cases} (1-p)\cdot W1 + p\cdot W2 = W1 \\ (1-p)\cdot W2 + p\cdot W3 = W2 \\ p\cdot W1 + (1-p)\cdot W3 = W3 \\ W1 + W2 + W3 = 1 \end{cases}$　得

p(0)=p(1)=p(2)= $\frac{1}{3}$

(2)　H(X/0)=H(X/1)=H(X/2)= $-(1-p)\cdot \mathrm{Log}(1-p) - p\cdot \mathrm{Log}(p)$

H∞(X)= $\frac{1}{3}$*H(X/0)+ $\frac{1}{3}$*H(X/1)+ $\frac{1}{3}$*H(X/2)= $-(1-p)\cdot \mathrm{Log}(1-p) - p\cdot \mathrm{Log}(p)$

(3)　当 **p=0** 或 **p=1** 时 信源熵为 **0**

练习题：有一离散无记忆信源，其输出为 $X\in\{0,1,2\}$，相应的概率为 $p_0=1/4, p_1=1/4, p_2=1/2$，设计两个独立的实验去观察它，其结果分别为 $Y_1\in\{0,1\}, Y_2\in\{0,1\}$，已知条件概率：

$P(y_1\|x)$	0	1
0	1	1
1	0	1
2	1/2	1/2

$P(y_2\|x)$	0	1
0	1	0
1	1	0
2	0	1

(1) 求 $I(X;Y_1)$ 和 $I(X;Y_2)$，并判断哪一个实验好些

(2) 求 $I(X;Y_1Y_2)$，并计算做 **Y_1** 和 **Y_2** 两个实验比做 **Y_1** 和 **Y_2** 中的一个实验可多得多少关于 **X** 的信息

(3) 求 $I(X;Y_1|Y_2)$ 和 $I(X;Y_2|Y_1)$，并解释它们的含义

解:(1) 由题意可知

X \ Y_1	0	1
0	1/4	0
1	0	1/4
2	1/4	1/4

X \ Y_2	0	1
0	1/4	0
1	1/4	0
2	0	1/2

$P(y_1=0)=p(y_1=1)=1/2$　　$p(y_2=1)=p(y_2=1)=1/2$

$$\therefore I(X;Y_1)=H(Y_1)-H(Y_1|X)=\log 2-\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\log\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{4}\log 2$$

=0.5bit/符号

$$I(X;Y_2)=H(Y_2)-H(Y_2|X)=\log 2-\frac{1}{4}\log 1-\frac{1}{4}\log 1-\frac{1}{2}\log 1=1bit/\text{符号}>I(X;Y_1)$$

所以第二个实验比第一个实验好

（2）因为 Y_1 和 Y_2 相互独立，所以 $p(y_1y_2|x)=p(y_1|x)p(y_2|x)$

$P(y_1y_2x)$	**00**	**01**	**10**	**11**
0	**1/4**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1/4**	**0**
2	**0**	**1/4**	**0**	**1/4**

$P(y_1y_2\|x)$	**00**	**01**	**10**	**11**
0	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
2	**0**	**1/2**	**0**	**1/2**

y_1y_2	**00**	**01**	**10**	**11**
p	**1/4**	**1/4**	**1/4**	**1/4**

$$\therefore I(X;Y_1Y_2)=H(Y_1,Y_2)-H(Y_1Y_2|X)=\log 4-\frac{1}{4}\log 1-\frac{1}{4}\log 1-\frac{1}{4}\times 2\log 2$$

bit/符号

=1.5bit/符号

由此可见，做两个实验比单独做 Y_1 可多得 1bit 的关于 X 的信息量，比单独做 Y_2 多得 0.5bit 的关于 X 的信息量。

（3）

$$\begin{aligned}
I(X;Y_1|Y_2)&=H(X|Y_1)-H(X|Y_1,Y_2)\\
&=H(X,Y_2)-H(X)-[H(X)-I(X;Y_1,Y_2)]\\
&=[H(X)-I(X;Y_2)]-[H(X)-I(X;Y_1,Y_2)]\\
&=I(X;Y_1,Y_2)-I(X;Y_2)
\end{aligned}$$

=1.5-1=0.5bit/符号

表示在已做 Y2 的情况下，再做 Y1 而多得到的关于 X 的信息量

同理可得

$I(X;Y_2|Y_1)=I(X;Y_1,Y_2)-I(X;Y_1)$ **=1.5-0.5=1bit/符号**

表示在已做 Y1 的情况下，再做 Y2 而多得到的关于 X 的信息量

欢迎下载！

第三章

3.1 设二元对称信道的传递矩阵为 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

(1) 若 *P(0)* = 3/4，*P(1)* = 1/4，求 *H(X)*，*H(X/Y)*，*H(Y/X)*和 *I(X;Y)*；

(2) 求该信道的信道容量及其达到信道容量时的输入概率分布；

解：

1)

$$H(X) = -\sum_i p(x_i) = -(\frac{3}{4}\times\log_2\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\log_2\frac{1}{4}) = 0.811 \quad bit/symbol$$

$$H(Y/X) = -\sum_i\sum_j p(x_i)p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

$$= -(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3})\times\log_2 10$$

$$= 0.918 \quad bit/symbol$$

$$p(y_1) = p(x_1y_1)+p(x_2y_1) = p(x_1)p(y_1/x_1)+p(x_2)p(y_1/x_2) = \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} = 0.5833$$

$$p(y_2) = p(x_1y_2)+p(x_2y_2) = p(x_1)p(y_2/x_1)+p(x_2)p(y_2/x_2) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3} = 0.4167$$

$$H(Y) = -\sum_j p(y_j) = -(0.5833\times\log_2 0.5833+0.4167\times\log_2 0.4167) = 0.980 \quad bit/symbol$$

$$I(X;Y) = H(X)-H(X/Y) = H(Y)-H(Y/X)$$

$$H(X/Y) = H(X)-H(Y)+H(Y/X) = 0.811-0.980+0.918 = 0.749 \quad bit/symbol$$

$$I(X;Y) = H(X)-H(X/Y) == 0.811-0.749 = 0.062 \quad bit/symbol$$

2)

$C = \max I(X;Y) = \log_2 m - H_{mi} = \log_2 2+(\frac{1}{3}\lg\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\lg\frac{2}{3})\times\log_2 10 = 0.082 \quad bit/symbol$ **其最佳输入分布为** $p(x_i) = \frac{1}{2}$

3-2 某信源发送端有 **2** 个符号，x_i，***i*＝1，2**；$p(x_i) = a$，每秒发出一个符号。接受端有 **3** 种符号 y_i，***j*＝1，2，3**，转移概率矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$。

（**1**）计算接受端的平均不确定度；

（**2**）计算由于噪声产生的不确定度 $H(Y|X)$；

（**3**）计算信道容量。

解：$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

联合概率 $p(x_i, y_j)$

X \ Y	y_1	y_2	y_3

x_1	$a/2$	$a/2$	**0**
x_2	$(1-a)/2$	$(1-a)/4$	$(1-a)/4$

则 Y 的概率分布为

Y	y_1	y_2	y_3
	$1/2$	$(1+a)/4$	$(1-a)/4$

（1） $H(Y)=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1+a}{4}\log\frac{4}{1+a}+\frac{1-a}{4}\log\frac{4}{1-a}$

$=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{4}\log\frac{16}{1-a^2}+\frac{a}{4}\log\frac{1-a}{1+a}$

$=\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{4}\log 16+\frac{1}{4}\log\frac{1}{1-a^2}+\frac{a}{4}\log\frac{1-a}{1+a}$

$=\frac{3}{2}\log 2+\frac{1}{4}\log\frac{1}{1-a^2}+\frac{a}{4}\log\frac{1-a}{1+a}$

取 2 为底

$H(Y)=(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{1-a^2}+\frac{a}{4}\log_2\frac{1-a}{1+a})bit$

（2） $H(Y|X)=-\left[\frac{a}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1-a}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1-a}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1-a}{4}\log\frac{1}{4}\right]$

$=-a\log 2+\frac{3(1-a)}{2}\log 2$

$=\frac{3-a}{2}\log 2$

取 2 为底

$H(Y|X)=\frac{3-a}{2}bit$

$\therefore c=\max_{p(x_i)} I(X;Y)=\max_{p(x_i)}\left[H(Y)-H(Y|X)\right]=\max_{p(x_i)}\left(\frac{a}{2}\log 2+\frac{1}{4}\log\frac{1}{1-a^2}+\frac{a}{4}\log\frac{1-a}{1+a}\right)$ **取 e 为底**

$\frac{\partial(\frac{a}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{1-a^2}+\frac{a}{4}\ln\frac{1-a}{1+a})}{\partial a}$

$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\frac{2a}{1-a^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{1-a}{1+a}+\frac{a}{4}(-\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a})$

$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{a}{2(1-a^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{1-a}{1+a}-\frac{a}{4}\frac{2}{1-a^2}$

$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\ln\frac{1-a}{1+a}$

= 0

$\frac{1-a}{1+a}=\frac{1}{4}$

$\therefore a=\frac{3}{5}$

$\therefore c=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\log 2+\frac{1}{4}\log\frac{1}{1-\frac{9}{25}}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\log\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{10}\log 2+\frac{1}{4}\log\frac{25}{16}+\frac{3}{20}\log\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{10}\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{5}{4}-\frac{3}{10}\log 2$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{5}{4}$$

3.3 在有扰离散信道上传输符号 0 和 1，在传输过程中每 100 个符号发生一个错误，已知 P(0)=P(1)=1/2，信源每秒内发出 1000 个符号，求此信道的信道容量。

解：

由题意可知该二元信道的转移概率矩阵为：

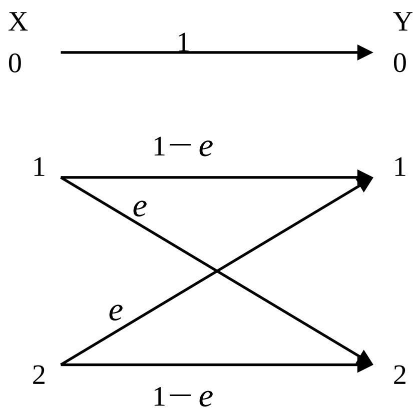
$$P=\begin{bmatrix}0.99 & 0.01\\ 0.01 & 0.99\end{bmatrix}$$ 为一个 BSC 信道

所以由 BSC 信道的信道容量计算公式得到：

$$C=\log s-H(P)=\log 2-\sum_{i=1}^{2}p_i\log\frac{1}{p_i}=0.92bit/sign$$

$$C_t=\frac{1}{t}C=1000C=920bit/\sec$$

3.4 求图中信道的信道容量及其最佳的输入概率分布.并求当 e=0 和 1/2 时的信道容量 C 的大小。



解：信道矩阵 **P=** $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1-e & e\\ 0 & e & 1-e\end{bmatrix}$**,此信道为非奇异矩阵,又 r=s,可利用方程组求解**

$$\sum_{j=1}^{3}P(b_j\,|\,a_i)b_j=\sum_{j=1}^{3}P(b_j\,|\,a_i)\log P(b_j\,|\,a_i)\qquad \textbf{(i=1,2,3)}$$

$$b_1=0$$

$$(1-e)b_2+eb_3=(1-e)\log(1-e)+e\log e$$

$$eb_2+(1-e)b_3=e\log e+(1-e)\log(1-e)$$

解得 $b_1=0$

$b_2 = b_3 = (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \varepsilon\log\varepsilon$

所以

C=log $\sum_j 2^{b_j}$ **=log[** $2^0+2\times 2^{(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon}$ **]**

=log[$1+2^{1-H(\varepsilon)}$ **]=log[** $1+2(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}\varepsilon^{\varepsilon}$ **]**

$$P(b_1) = 2b^{1-C} = 2^{-C} = \frac{1}{1+2(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}\varepsilon^{\varepsilon}} = \frac{1}{1+2^{1-H(\varepsilon)}}$$

$$P(b_2) = 2^{b_2-C} = \frac{(1-\varepsilon)^{\varepsilon}\varepsilon^{\varepsilon}}{1+2(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}\varepsilon^{\varepsilon}}$$

$$P(b_3) = 2^{b_3-C} = P(b_2)$$

而 $P(b_j) = \sum_{i=1}^{3} P(a_i)P(b_j|a_i)$ **(j=1,2,3)**

$$P(b_1) = P(a_1)$$

得 $P(b_2) = P(a_2)(1-\varepsilon) + P(a_3)\varepsilon$

$P(b_3) = P(a_2)\varepsilon + P(a_3)(1-\varepsilon)$

所以 **P(a₁)=P(b₁)=** $\frac{1}{1+2(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}\varepsilon^{\varepsilon}}$

$$P(a_2) = P(a_3) = P(b_2) = P(b_3) = \frac{(1-\varepsilon)^{\varepsilon}\varepsilon^{\varepsilon}}{1+2(1-\varepsilon)^{(1-\varepsilon)}\varepsilon^{\varepsilon}}$$

当 ε **=0** 时,此信道为一一对应信道,得

C=log3, $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = \frac{1}{3}$

当 ε **=1/2** 时,得 **C=log2,** $P(a_1) = \frac{1}{2}$**,** $P(a_2) = P(a_3) = \frac{1}{4}$

3.5 求下列二个信道的信道容量，并加以比较

（1） $\begin{pmatrix} \bar{p}-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon \\ p-\varepsilon & \bar{p}-\varepsilon & 2\varepsilon \end{pmatrix}$ **（2）** $\begin{pmatrix} \bar{p}-\varepsilon & p-\varepsilon & 2\varepsilon & 0 \\ p-\varepsilon & \bar{p}-\varepsilon & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$

其中 p+ $\bar{p}$ **=1**

解：

（1）此信道是准对称信道，信道矩阵中 **Y** 可划分成三个互不相交的子集 由于集列所组成的矩阵 $\begin{pmatrix} \bar{p}-\varepsilon & p-\varepsilon \\ p-\varepsilon & \bar{p}-\varepsilon \end{pmatrix}$**,** $\begin{pmatrix} 2\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix}$ 而这两个子矩阵满足对称性，因此可直接利用准对称信道的信道容量公式进行计算。

C1=logr-H(p1’ p2’ p3’)$-\sum_{k=1}^{2} Nk\log Mk$

其中 r=2, $N1=M1=1-2\varepsilon$ **N2=** 2ε **M2=4** ε **所以**

C1=log2-H($\bar{p}-\varepsilon$,p-ε,2ε)-(1-2ε)log(1-2ε)-2εlog4ε

=log2+($\bar{p}-\varepsilon$)log($\bar{p}-\varepsilon$)+(p-ε)log(p-ε)+2εlog2ε-(1-2ε)log(1-2ε)-2εlog4ε

=log2-2εlog2-(1-2ε)log(1-2ε)+($\bar{p}-\varepsilon$)log($\bar{p}-\varepsilon$)+(p-ε)log(p-ε)

=(1-2ε)log2/(1-2ε)+($\bar{p}-\varepsilon$)log($\bar{p}-\varepsilon$)+(p-ε)log(p-ε)

输入等概率分布时达到信道容量。

（**2**）此信道也是准对称信道，也可采用上述两种方法之一来进行计算。先采用准对称信道的信道容量公式进行计算，此信道矩阵中 **Y** 可划分成两个互不相交的子集，由子集列所组成的矩阵为$\begin{pmatrix} \bar{p}-\varepsilon & p-\varepsilon \\ p-\varepsilon & \bar{p}-\varepsilon \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$这两矩阵为对称矩阵 其中

r=2,N1=M1=1-2ε N2=M2=2ε，所以

C=logr-H($\bar{p}$-ε,p-ε,2ε,0)-$\sum_{k=1}^{2} Nk \log Mk$

=log2+($\bar{p}$-ε)log($\bar{p}$-ε)+(p-ε)log(p-ε)+2εlog2ε-(1-2ε)log(1-2ε)-2εlog2ε

=log2-(1-2ε)log(1-2ε)+($\bar{p}$-ε)log($\bar{p}$-ε)+(p-ε)log(p-ε)

=(1-2ε)log2/(1-2ε)+2εlog2+($\bar{p}$-ε)log($\bar{p}$-ε)+(p-ε)log(p-ε)

=C1+2εlog2

输入等概率分布（**P**（**a1**）**=P**（**a2**）**=1/2**）时达到此信道容量。比较此两信道容量，可得 **C2=C1+2εlog2**

3-6 设有扰离散信道的传输情况分别如图 **3－17** 所示。求出该信道的信道容量。

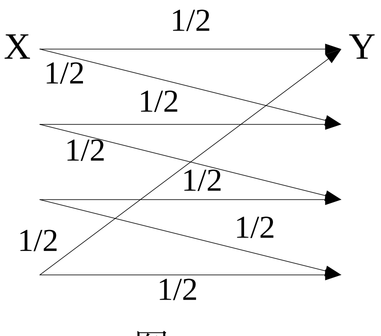


图3-17

解：$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

对称信道

$C = \log m - H(Y \mid a_i)$

$= \log 4 - \frac{1}{2} \times 2 \log 2$

取 2 为底 $C=1$**bit/符号**

3-7 (1) 条件概率 $P := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}$，联合概率 $Pij := \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{30} & \frac{3}{10} & 0 \end{pmatrix}$，后验概率

$P(i/j)= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$

$p(y0) := \frac{1}{3}$，$p(y1) := \frac{1}{2}$，$p(y2) := \frac{1}{6}$

$H(Y)= \frac{1}{3}\mathrm{Log}(3) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(2) + \frac{1}{6}\mathrm{Log}(6) = 1.459$

（2）

H(Y/X)= $\frac{1}{6}\mathrm{Log}(2) + \frac{1}{10}\mathrm{Log}\left(\frac{10}{3}\right) + \frac{1}{15}\mathrm{Log}(5) + \frac{2}{15}\mathrm{Log}\left(\frac{5}{2}\right)$

$+ \frac{1}{10}\mathrm{Log}\left(\frac{10}{3}\right) + \frac{1}{10}\mathrm{Log}\left(\frac{10}{3}\right) + \frac{1}{30}\mathrm{Log}(10) + \frac{3}{10}\mathrm{Log}\left(\frac{10}{9}\right) = 1.175$

（3）

当接收为 **y2**，发为 **x1** 时正确，如果发的是 **x1** 和 **x3** 为错误，各自的概率为：

P(x1/y2)=$\frac{1}{5}$，**P(x2/y2)=**$\frac{1}{5}$，**P(x3/y2)=**$\frac{3}{5}$

其中错误概率为：

Pe=P(x1/y2)+P(x3/y2)=$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = 0.8$

（4）平均错误概率为

$\frac{2}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = 0.733$

（5）仍为 **0.733**

（6）此信道不好

原因是信源等概率分布，从转移信道来看

正确发送的概率 **x1-y1** 的概率 **0.5** 有一半失真

x2-y2 的概率 **0.3** 有失真严重

x3-y3 的概率 0　完全失真

（7）

H(X)= $\mathrm{Log}(3) = 1.585$

H(X/Y)=

$$\frac{1}{6}\mathrm{Log}(2)+\frac{1}{10}\mathrm{Log}(5)+\frac{1}{15}\mathrm{Log}\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{2}{15}\mathrm{Log}\left(\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{10}\mathrm{Log}(5)+\frac{1}{10}\mathrm{Log}\left(\frac{5}{3}\right)+\frac{1}{30}\mathrm{Log}(10)+\frac{3}{10}\mathrm{Log}\left(\frac{5}{3}\right)=1.301$$

3. 8 设加性高斯白噪声信道中，信道带宽 3kHz，又设{(信号功率+噪声功率)/噪声功率}=10dB。试计算该信道的最大信息传输速率 C_t。

解：

3. 9 在图片传输中，每帧约有 2.25×10⁶个像素，为了能很好地重现图像，能分 16 个亮度电平，并假设亮度电平等概分布。试计算每分钟传送一帧图片所需信道的带宽（信噪功率比为 30dB）。

解：

$$H=\log_2 n=\log_2 16=4 \quad bit/symbol$$

$$I=NH=2.25\times10^6\times4=9\times10^6 \quad bit$$

$$=10$$

$$C_t=\frac{I}{t}=\frac{9\times10^6}{60}=1.5\times10^5 \quad bit/s$$

$$C_t=W\log\left(1+\frac{P_X}{P_N}\right)$$

$$W=\frac{C_t}{\log\left(1+\frac{P_X}{P_N}\right)}=\frac{1.5\times10^5}{\log_2(1+1000)}=15049 \quad Hz$$

3-10 一个平均功率受限制的连续信道，其通频带为 **1MHZ**，信道上存在白色高斯噪声。

（1）已知信道上的信号与噪声的平均功率比值为 **10**，求该信道的信道容量；

（2）信道上的信号与噪声的平均功率比值降至 **5**，要达到相同的信道容量，信道通频带应为多大？

（3）若信道通频带减小为 **0.5MHZ** 时，要保持相同的信道容量，信道上的信号与噪声的平均功率比值应等于多大？

解：（1） $C=W\log_2(1+SNR)$

$$=1\times10^6\log_2(1+10)$$

$$=3.159Mbps$$

（2） $C_2=W_2\log_2(1+5)=3.459Mbps$

$$\therefore W_2=\frac{3.159M}{\log_2 6}=1.338MHZ$$

（3） $C_3=W_3\log_2(1+SNR^{'})=3.459Mbps$

$$\log_2(1+SNR^{'})=\frac{3.459}{0.5}$$

$$\therefore SNR=120$$

欢迎下载！

第四章

4. 1

解：

依题意可知：失真矩阵： $d=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，**转移概率** $p(b_j \mid a_i)=\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}$

平均失真：

$$\overline{D}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}p(a_i)p(b_j \mid a_i)d(a_i,b_j)$$

$$=1/2\times(1-\varepsilon)\times 0+1/2\times\varepsilon\times 1+1/2\times\varepsilon\times 1+1/2\times(1-\varepsilon)\times 0=\varepsilon$$

4. 2

解：

依题意可知：失真矩阵： $d=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，

$$D_{\min}=\sum_i p(x_i)\min_j d(x_i,y_j)=1/2\times 0+1/2\times 0=0$$

$$D_{\max}=\min D_j=\min_j\sum_i p(x_i)d(x_i,y_j)=1/2\times 0+1/2\times 1=1/2(1/2\times 2+1/2\times 0=1\text{舍去})$$

当 $D_{\min}=0$， $R(D_{\min})=R(0)=H(X)=\log 2=1bit$

因为没有失真，此时的转移概率为 $P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

当 $D_{\max}=1/2$， $R(D_{\max})=0$

因为取的是第二列的 $D_{\max}$ 值，所以输出符号概率: $p(b_1)=0, p(b_2)=1,\ a_1\to b_2, a_2\to b_2$, 因此编码器的转移概率为 $P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

4.3

解：

$$D_{\max}=\min D_j=\min_j\sum_i p(x_i)d(x_i,y_j)=\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times 0=\frac{3}{4}$$

$$D_{\min}=\sum_i p(x_i)\min_j d(x_i,y_j)=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times 0=0$$

当 $D_{\min}=0$， $R(D_{\min})=R(0)=H(X)=\log 4=2bit$

因为没有失真，此时的转移概率为 $P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

当 $D_{\max}=3/4$， $R(D_{\max})=0$

因为任何一列的 $D_{\max}$ 值均为 3/4，所以取输出符号概

率: $p(b_1)=1,p(b_2)=0,p(b_3)=0,p(b_4)=0$，即 $a_1\to b_1,a_2\to b_1,a_3\to b_1,a_4\to b_1$ 因此编

码器的转移概率为 $P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$

4.4

解：

依题意可知：失真矩阵： $d=\begin{bmatrix}0&1&1/4\\1&0&1/4\end{bmatrix}$,

$$D_{\min}=\sum_i p(x_i)\min_j d(x_i,y_j)=1/2\times 0+1/2\times 0=0$$

$$D_{\max}=\min D_j=\min_j\sum_i p(x_i)d(x_i,y_j)=\min(1/2\times 1/4+1/2\times 1/4)=1/4(\text{其它2个均为}1/2)$$

当 $D_{\min}=0$， $R(D_{\min})=R(0)=H(X)=\log 2=1bit$

因为没有失真，此时的转移概率为 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$

当 $D_{\max}=1/4$， $R(D_{\max})=0$

因为取的是第三列的 $D_{\max}$ 值为 1/4，所以取输出符号概率: $p(b_1)=0, p(b_2)=0, p(b_3)=3$，

即 $a_1\to b_3, a_2\to b_3$ 因此编码器的转移概率为 $P=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

4.5

解：

(1)依题意可知：失真矩阵：$d=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，转移概率为：$P=\begin{bmatrix}1&0\\q&1-q\end{bmatrix}$

$$\overline{D}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i)p(y_j\mid x_i)d(x_i,y_j)=p\times1\times0+p\times0\times1+(1-p)\times q\times1+(1-p)\times(1-q)\times0$$

$$=q\times(1-p)$$

(2) $D_{\min}=\sum_i p(x_i)\min_j d(x_i,y_j)=p\times0+(1-p)\times0=0$

因为 $R(D)$ 是 D 的递减函数，所以

$$\max(R(D))=R(D_{\min})=H(p)-H(D_{\min})=-p\log p-(1-p)\log(1-p)$$

当 $q=0$ 时可达到 $\max(R(D))$，此时 $\overline{D}=0$

(3) $D_{\max}=\min D_j=\min_j\sum_i p(x_i)d(x_i,y_j)=p\times0+p\times1=p$(另一个$1-p$更大，舍去)

因为 $R(D)$ 是 D 的递减函数，所以

$$\min(R(D))=R(D_{\max})=H(p)-H(D_{\max})=0$$

当 $q=1$ 时可达到 $\min(R(D))$，此时 $\overline{D}=1-p$

(图略，见课堂展示)

4.6

解：

依题意可知：失真矩阵：$d=\begin{bmatrix}0&\infty&1\\\infty&0&1\end{bmatrix}$，信源 $\begin{bmatrix}u\\p(u)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1/2&1/2\end{bmatrix}$

$D_{\min}=\sum_i p(x_i)\min_j d(x_i,y_j)=1/2\times0+1/2\times0=0$，

$D_{\max}=\min D_j=\min_j\sum_i p(x_i)d(x_i,y_j)=\min(1/2\times0+1/2\times\infty,1/2\times\infty+1/2\times0,1/2\times1+1/2\times1)$

$=\min[\infty,\infty,1]=1$(另二个∞，舍去)

$0 \le D \le 1$

因为二元等概信源率失真函数：

$$R(D) = \ln n - H\left(\frac{D}{a}\right)$$

其中$n = 2, a = 1$，所以率失真函数为：

$$R(D) = 1 - D$$

4.7

解：失真矩阵为

$d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，按照 P81 页方法求解（例 4-5 是二元输入和输入，本题是三元输入和输入，超麻烦！明天再算好发送过来噢）

4.8

信息率失真函数 R(D)物理意义：

①R(D)是信源给定的情况下，在可容忍的失真度内再现信源消息所必须获得的最小平均信息量；

②R(D)是反映给定信源可压缩的程度；

③R(D)求出后，就与选择的试验信道无关，而只是信源特性的参量，不同的信源，其 R(D)是不同的。

R(D)函数的性质：

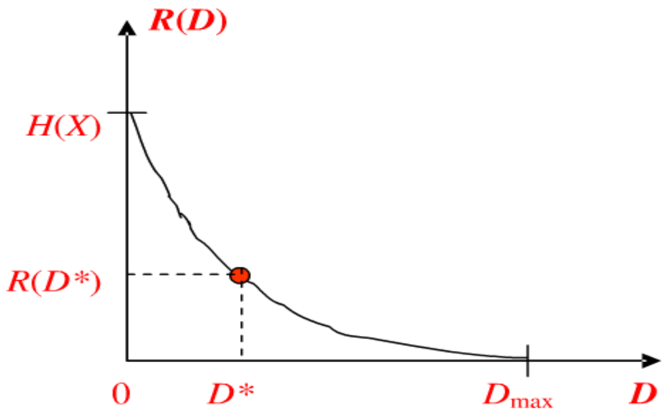
性质 1 : R(D)在定义域内是下凸的

性质 2 : R(D)在定义域内是连续的

性质 3 : R(D)在定义域内是单调递减的

因此：

1. R(D)是非负函数，定义域 0～D_{max}，值域 0～H(X)；
2. R(D)是单调不增、下凸的连续函数。



第五章

5-1 将下表所列的某六进制信源进行二进制编码，试问：

消息	概率	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
u_1	**1/2**	**000**	**0**	**0**	**0**	**1**	**01**
u_2	**1/4**	**001**	**01**	**10**	**10**	**000**	**001**
u_3	**1/16**	**010**	**011**	**110**	**1101**	**001**	**100**
u_4	**1/16**	**011**	**0111**	**1110**	**1100**	**010**	**101**
u_5	**1/16**	**100**	**01111**	**11110**	**1001**	**110**	**110**
u_6	**1/16**	**101**	**011111**	**111110**	**1111**	**110**	**111**

(1)这些码中哪些是唯一可译码？

(2)哪些码是非延长码？

(3)对所有唯一可译码求出其平均码长和编译效率。

解：首先，根据克劳夫特不等式，找出非唯一可译码

$C_1: 6\times 2^{-3}<1$

$C_2: 2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-5}+2^{-6}=\frac{63}{64}<1$

$C_3: \frac{63}{64}<1$

$C_4: 2^{-1}+2^{-2}+4\times 2^{-4}=1$

$C_5: 2^{-1}+5\times 2^{-3}>1$

$C_6: 2^{-2}+5\times 2^{-3}<1$

$\therefore C_5$不是唯一可译码，而C_4：

又根据码树构造码字的方法

C_1，C_3，C_6的码字均处于终端节点

$\therefore$他们是即时码

(1) C1,C2,C3,C6

(2) C1,C3,C6

(3) $H(X)=\frac{1}{2}\mathrm{Log}(2)+\frac{1}{4}\mathrm{Log}(4)+4\cdot\frac{1}{16}\mathrm{Log}(16)=2$

K1=3 $R1=\frac{H(X)}{K}=\frac{2}{3}$

$K2=\frac{1}{2}1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{16}\cdot 3+\frac{1}{16}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 5+\frac{1}{16}\cdot 6=2.125$ $R2=\frac{H(X)}{K2}=\frac{2}{2.125}=0.941$

$K3=\frac{1}{2}1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{16}\cdot 3+\frac{1}{16}\cdot 4+\frac{1}{16}\cdot 5+\frac{1}{16}\cdot 6=2.125$ $R3=\frac{H(X)}{K3}=\frac{2}{2.125}=0.941$

$K6=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{1}{16}\cdot 3+\frac{1}{16}\cdot 3+\frac{1}{16}\cdot 3+\frac{1}{16}\cdot 3=2.5$ $R6=\frac{H(X)}{K6}=\frac{2}{2.5}=0.8$

5-2

(1) 因为 A,B,C,D 四个字母,每个字母用两个码,每个码为 0.5ms, 所以每个字母用 10ms

当信源等概率分布时,信源熵为 H(X)=log(4)=2

平均信息传递速率为$\frac{H(X)}{10}=0.2$**bit/ms=200bit/s**

(2) 信源熵为

H(X)=$\frac{1}{5}\mathrm{Log}(5)+\frac{1}{4}\mathrm{Log}(4)+\frac{1}{4}\mathrm{Log}(4)+\frac{3}{10}\mathrm{Log}\left(\frac{10}{3}\right)=1.985$

$\frac{H(X)}{10}$**=0.198bit/ms=198bit/s**

5-3

(1)因为不能出现 a1 和 a2 连用的情况，所以许用码集为

{a3,a4,a5,a1a3,a1a4,a1a5,a2a3,a2a4,a2a5}，此时

$$C=\max_{p(x_i)} I(X,Y)=\max_{p(x_i)}[H(X)-H(X|Y)]=\max_{p(x_i)} H(X)=\log 9=3.170bit/message$$

(2)根据最佳编码原则，可得

表格 1

符号	x1	x2	X3	X4	X5	X6	X7
代码	a3	a4	a1 a3	a5	a1 a4	a2a3	a1 a4
ti	3	4	4	5	5	5	6
pi	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/64

$$H(X)=\sum_i pi\log pi=1.969bit/message$$

$$\bar{t}=\sum_i piti=3.641\text{码元时间/消息}$$

$$R_t=\frac{H(X)}{\bar{t}}=0.541bit/\text{码元时间}$$

5-5

(1) $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{64}\ \frac{1}{128}\ \frac{1}{128}$

H(U)= $\frac{1}{2}\mathrm{Log}(2)+\frac{1}{4}\mathrm{Log}(4)+\frac{1}{8}\mathrm{Log}(8)+\frac{1}{16}\mathrm{Log}(16)+\frac{1}{32}\mathrm{Log}(32)+\frac{1}{64}\mathrm{Log}(64)+\frac{1}{128}\mathrm{Log}(128)+\frac{1}{128}\mathrm{Log}(128)=1.984$

(2) 每个信源使用 3 个二进制符号,出现 0 的次数为

$$3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+2\cdot\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}=2.398$$

出现 1 的次数为

$$1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{1}{32}+1\cdot\frac{1}{64}+2\cdot\frac{1}{128}+3\cdot\frac{1}{128}=0.586$$

P(0)= $\frac{2.398}{2.398+0.586}=0.804$

P(1)= $\frac{0.586}{2.398+0.586}=0.196$

(3)

$\overline{K}=3$ $R=\frac{H(U)}{\overline{K}}=\frac{1.984}{3}=0.661$

(4) 相应的香农编码

信源符号 xi	符号概率 pi	累加概率 Pi	-Logp(xi)	码长 Ki	码字
x1	1/2	0	1	1	0
x2	1/4	0.5	2	2	10
x3	1/8	0.75	3	3	110
x4	1/16	0.875	4	4	1110
x5	1/32	0.938	5	5	11110
x6	1/64	0.969	6	6	111110
x7	1/128	0.984	7	7	1111110
x8	1/128	0.992	7	7	11111110

相应的费诺码

5.6

<table>
<tr><th>信源符号 xi</th><th>符号概率 pi</th><th>第一次分组</th><th>第二次分组</th><th>第三次分组</th><th>第四次分组</th><th>第五次分组</th><th>第六次分组</th><th>第七次分组</th><th>二元码</th></tr>
<tr><td>x1</td><td>1/2</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>x2</td><td>1/4</td><td rowspan="7">1</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>x3</td><td>1/8</td><td rowspan="6">1</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>110</td></tr>
<tr><td>x4</td><td>1/16</td><td rowspan="5">1</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td>1110</td></tr>
<tr><td>x5</td><td>1/32</td><td rowspan="4">1</td><td>0</td><td></td><td></td><td>11110</td></tr>
<tr><td>x6</td><td>1/64</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td></td><td>111110</td></tr>
<tr><td>x7</td><td>1/128</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1111110</td></tr>
<tr><td>x8</td><td>1/128</td><td>1</td><td>11111110</td></tr>
</table>

（5）香农码和费诺码相同

平均码长为 $\overline{K}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3+\frac{1}{16}\cdot 4+\frac{1}{32}\cdot 5+\frac{1}{64}\cdot 6+\frac{1}{128}\cdot 7+\frac{1}{128}\cdot 7=1.984$

编码效率为：$R:=\frac{H(U)}{\overline{K}}=\frac{1.984}{1.984}=1$

5.6

(1)含有 3 个或小于 3 个“0”的序列共有

$C_{100}^0 + C_{100}^1 + C_{100}^2 + C_{100}^3 = 166751$，若用定长编码，则其码长为$\lceil \log_2 166751 \rceil = 18bit$

(2) $P_{编码序列出现} = C_{100}^0 p_0^0 p_1^{100} + C_{100}^1 p_0^1 p_1^{99} + C_{100}^2 p_0^2 p_1^{98} + C_{100}^3 p_0^3 p_1^{97} = 0.9983$

$\therefore P_e = 0.0017$

5.7 （1） $p_i = \frac{1}{2^i}$ 累加概率为 $P_i = \sum_{i=0}^{i-1} p_i$

累加概率分别为

符号	x1	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	…
概率	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	…
累 加概率	0	0.5	0.75	0.875	0.938	0.969	0.984	0.992	…
码长	1	2	3	4	5	6	7	8	
二元码	0	10	110	1110	11110	111110	1111110	11111110	…

（2）信源的信息量为

$$H(X) = \frac{1}{2}Log(2) + \frac{1}{4}Log(4) + \frac{1}{8}Log(8) + \frac{1}{16}Log(16) + \dots\dots + \frac{1}{2^i}Log(2^i) + \dots\dots$$

平均码长为：

$$\overline{K} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{16}\cdot 4 + \dots\dots + \frac{1}{2^i}\cdot i + \dots\dots$$

码字的平均信息传输率为

$$R = \frac{H(X)}{\overline{K}} = 1 \quad \text{bit/码}$$

（3）编码效率

$$R = \frac{H(X)}{\overline{K}} = 100\%$$

5.10 （1）H(X)=

$$-0.37Log(0.37) - 0.25Log(0.25) + 0.18Log(0.18) - 0.1Log(0.1) - 0.07Log(0.07) - 0.03Log(0.03) = 1.338$$

(2)

信源符号 xi	符号概率 pi	编码过程	编码	码长
x1	0.37	→ 0.37 → 0.37 0.38 0.62 0 1	00	2
x2	0.25	→ 0.25 → 0.25 0.37 0 0.38 1	01	2
x3	0.18	→ 0.18 0.20 0 0.25 1	11	2
x4	0.10	→ 0.10 0 0.18 1	100	3
x5	0.07	0 → 0.10 1	1010	4
x6	0.03	1	1011	4

$$\overline{K} = 0.37\cdot 2 + 0.25\cdot 2 + 0.18\cdot 2 + 0.10\cdot 3 + 0.07\cdot 4 + 0.03\cdot 4 = 2.3$$

$$\eta = \frac{H(X)}{\overline{K}} = \frac{1.338}{2.3} = 0.582$$

5-11

（1）信源熵

$$H(X) = -0.32\,\mathrm{Log}(0.32) - 0.22\,\mathrm{Log}(0.22) - 0.18\,\mathrm{Log}(0.18) - 0.16\,\mathrm{Log}(0.16) - 0.08\,\mathrm{Log}(0.08) - 0.04\,\mathrm{Log}(0.04) = 2.352$$

（2）香农编码：

信源符号 xi	符号概率 pi	累加概率 Pi	-Logp(xi)	码长 Ki	码字
x1	0.32	0	1.644	2	00
x2	0.22	0.32	2.184	3	010
x3	0.18	0.54	2.474	3	100
x4	0.16	0.72	2.644	3	101
x5	0.08	0.88	3.644	4	1110
x6	0.04	0.96	4.644	5	11110

平均码长：

$$\bar{K} = 0.32 \cdot 2 + 0.22 \cdot 3 + 0.18 \cdot 3 + 0.16 \cdot 3 + 0.08 \cdot 4 + 0.04 \cdot 5 = 2.84$$ **编码效率为** $$R = \frac{H(X)}{\bar{K}} \quad \frac{2.352}{2.84} = 0.828$$

（3）费诺编码为

<table>
<tr><th>信源符号 xi</th><th>符号概率 pi</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>编码</th><th>码长</th></tr>
<tr><td>x1</td><td>0.32</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td></td><td></td><td>00</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x2</td><td>0.22</td><td>1</td><td></td><td></td><td>01</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x3</td><td>0.18</td><td rowspan="4">1</td><td>0</td><td></td><td></td><td>10</td><td>2</td></tr>
<tr><td>x4</td><td>0.16</td><td rowspan="3">1</td><td>0</td><td></td><td>110</td><td>3</td></tr>
<tr><td>x5</td><td>0.08</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1110</td><td>4</td></tr>
<tr><td>x6</td><td>0.04</td><td>1</td><td>1111</td><td>4</td></tr>
</table>

平均码长为：$\bar{K} = 0.32 \cdot 2 + 0.22 \cdot 2 + 0.18 \cdot 2 + 0.16 \cdot 3 + 0.08 \cdot 4 + 0.04 \cdot 4 = 2.4$ 编码效率：$R = \frac{H(X)}{\bar{K}} \ \frac{2.4}{2.84} = 0.845$

（4）哈夫曼编码

信源符号 xi	符号概率 pi	编码过程					编码	码长
x1	0.32	0.32	0.38	0.40	0.60	1	01	2
x2	0.22	0.22	0.32	0.38	0.40		10	2
x3	0.18	0.18	0.22	0.32			11	2
x4	0.16	0.16	0.18				000	3
x5	0.08	0.12					0010	4
x6	0.04						0011	4

平均码长为：$\bar{K} = 0.32 \cdot 2 + 0.22 \cdot 2 + 0.18 \cdot 2 + 0.16 \cdot 3 + 0.08 \cdot 4 + 0.04 \cdot 4 = 2.4$ 编码效率：$R = \frac{H(X)}{\bar{K}} \ \frac{2.4}{2.84} = 0.845$

5.12

（1）信源熵

$H(X) = -0.1\,Log(0.1) - 0.18\,Log(0.18) - 0.4\,Log(0.4) - 0.05\,Log(0.05) - 0.06\,Log(0.06) - 0.1\,Log(0.1) - 0.07\,Log(0.07) - 0.04\,Log(0.04) = 2.552$

信息传输速率 2.552bit/s

(2)

信源符号	符号概率 pi	编码过程	编码	码长

xi									
x1	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6	1	1
x2	0.18	0.18	0.18	0.19	0.23	0.27	0.4	001	3
x3	0.1	0.1	0.13	0.18	0.19	0.23		011	3
x4	0.1	0.1	0.1	0.13	0.18			0000	4
x5	0.07	0.09	0.1	0.1				0100	4
x6	0.06	0.07	0.09					0101	4
x7	0.05	0.06						00010	5
x8	0.04							00011	5

$$\overline{K} = 0.4\cdot 1 + 0.18\cdot 3 + 0.1\cdot 3 + 0.1\cdot 4 + 0.07\cdot 4 + 0.06\cdot 4 + 0.05\cdot 5 + 0.04\cdot 5 = 2.61$$

$$R = \frac{H(X)}{\overline{K}} = \frac{2.552}{2.61} = 0.978$$

(3) 香农编码

信源符号 xi	符号概率 pi	累加概率 Pi	-Logp(xi)	码长 Ki	码字
x1	0.4	0	1.322	2	00
x2	0.18	0.4	2.474	3	011
x3	0.1	0.58	3.322	4	1001
x4	0.1	0.68	3.322	4	1010
x5	0.07	0.78	3.837	4	1100
x6	0.06	0.85	4.059	5	11011
x7	0.05	0.91	4.322	5	11101
x8	0.04	0.96	4.644	5	11110

平均码长:

$$\overline{K} = 0.4\cdot 2 + 0.18\cdot 3 + 0.1\cdot 4 + 0.1\cdot 4 + 0.07\cdot 4 + 0.06\cdot 5 + 0.05\cdot 5 + 0.04\cdot 5 = 3.17$$

$$R = \frac{H(X)}{\overline{K}} = \frac{2.552}{3.17} = 0.805$$

(4) 费诺编码:

信源符号 xi	符号概率 pi					码	码长
x1	0.4	0	0			00	2
x2	0.18		1			01	2
x3	0.1	1	0	0		100	3
x4	0.1			1		101	3
x5	0.07		1	0	0	1100	4
x6	0.06				1	1101	4
x7	0.05			1	0	1110	4
x8	0.04				1	1111	4

$$\overline{K} = 0.4\cdot 2 + 0.18\cdot 2 + 0.1\cdot 3 + 0.1\cdot 3 + 0.07\cdot 4 + 0.06\cdot 4 + 0.05\cdot 4 + 0.04\cdot 4 = 2.64$$

$$R = \frac{H(X)}{\overline{K}} = \frac{2.552}{2.64} = 0.967$$

5.14

信源符号 xi	符号概率 pi	编码过程	编码	码长
x1	1/3	1/3 1/3 1/3 1/3 2/3 0	00	2
x2	1/3	1/3 1/3 1/3 1/3 0 1/3 1	01	2
x3	1/9	1/9 1/9 2/9 0 1/3 1	100	3
x4	1/9	1/9 1/9 0 1/9 1	101	3
x5	1/27	2/27 0 1/9 1	111	3
x6	1/27	0 1/27 1	1100	4
x7	1/27	1	1101	4

$$H(X)= 2\frac{1}{3}\text{Log}(3)+2\cdot\frac{1}{9}\text{Log}(9)+3\frac{1}{27}\text{Log}(27)=2.289$$

$$\overline{K}= \frac{1}{3}2+\frac{1}{3}2+\frac{1}{9}3+\frac{1}{9}3+\frac{1}{27}4+\frac{1}{27}4+\frac{1}{27}4=2.444$$

$$R=\frac{H(X)}{\overline{K}}=\frac{2.289}{2.444}=0.937$$

5.16 已知二元信源{0，1}，其 p0=1/4,p1=3/4,试用式（4.129）对序列 11111100 编算术码，并计算此序列的平均码长。

解：根据算术编码的编码规则，可得：P(s=11111100) = P2(0)P6(1) = $(3/4)^6$ $(1/4)^2$

$$l=\left\lceil \log\frac{1}{P(S)}\right\rceil=7$$

根据（4.129）可得：

F(S) = P(0) + P(10) + P(110) + P(1110) + P(11110) + P(111110)

= 1– $\sum_{y\geq s} P(y)$ = 1 – P(11111111) – P(11111110) – P(11111101) – P(11111100)

= 1– P(111111) = 1– $(3/4)^6$ = 0.82202 = 0.110100100111

又 P(S) = A(S)= 0.0000001011011001，所以 F(S) + P(S) = 0.1101010

即得 C = 0.1101010　得 S 的码字为 1101010

平均码长 $\overline{L}$ 为 0.875。