Вычислительные методы

Лекция 2:
Прямые методы решения СЛАУ

Сивцева Вера Исаевна

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим систему из *n* линейных алгебраических уравнений с *N* неизвестными

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\
\vdots & \vdots & \vdots & . & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n.
\end{array} \quad (3.1)
$$

В матричном виде система имеет вид

$$\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}},$$

где ***A*** - квадратная матрица размером ***n×n, X*** *и* ***B***- векторы порядка *n* :

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.
$$

Определение 1

Решением системы линейных уравнений называется такая упорядоченная совокупность чисел $\boldsymbol{x_1 = c_1}$, $\boldsymbol{x_2 = c_2}$, $\boldsymbol{x_n = c_n}$, которая обращает все уравнения системы в верные равенства.

Краткий математический аппарат

Нормой вектора $\vec{x}$ назовём поставленное в соответствие этому вектору неотрицательное число $\|\vec{x}\|$ такое, что

1. $\|\vec{x}\| > 0$ при $\vec{x} \neq 0$, $\|\vec{0}\| = 0$,

2. $\|\alpha\vec{x}\| = \alpha\|\vec{x}\|$, α**=const,**

3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Примеры норм:

1. $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, **- сферическая норма,**

2. $\|\vec{x}\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Нормой квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ назовём поставленное в соответствие этому вектору неотрицательное число $\|\boldsymbol{A}\|$ такое, что

1. $\|A\| > 0$ при $A \neq 0$, $\|0\| = 0$;
2. $\|\alpha A\| = \alpha\|A\|$, α=const;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Прямые методы (точные)

Метод решения задачи относят к классу точных, если в предположении отсутствия округлений он дает точное решение задачи после конечного числа арифметических и логических операций.

- метод Гаусса
- LU-разложение
- метод Холецкого
- QR-разложение
- Метод наименьших квадратов

Итерационные методы

Итерационные методы позволяют найти приближенное решение системы путем построения последовательности приближений (итераций), начиная с некоторого начального приближения.

- метод простых итераций
- метод Якоби
- метод Зейделя
- метод сопряженных градиентов

Метод Гаусса

- Исключение неизвестных:

$$+\left\{\begin{array}{l}\times -\frac{a_{21}}{a_{22}} \\ \\ \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & \dots \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots \end{array}\right]$$

- Один шаг исключения – умножение слева на нижнетреугольную матрицу L

$$A_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 & \dots \\ & & \ddots & \end{bmatrix}}_{L} \times A$$

LU- разложение

- Основная идея: с помощью операций со строками привести матрицу к верхнетреугольному виду:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_1} \underset{L_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_2}$$

$$\underset{L_2 L_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \\ & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}} \xrightarrow{L_3} \underset{L_3 L_2 L_1 A}{\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \\ & & \mathbf{0} & \boldsymbol{\times} \end{bmatrix}}$$

- $\underbrace{L_{n-1} \ldots L_2 L_1}_{L^{-1}} A = U$, $L = L_1^{-1} L_2^{-1} \ldots L_{n-1}^{-1}$, $A = LU$
- Могли столкнуться с делением на 0!

Матрицы L_k

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{kk} \\ x_{k+1,k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}, L_k x_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

нужно вычесть из j-й строки k-ю строку, умноженную на

$$l_{jk} = \frac{x_{jk}}{x_{kk}} \quad k < j \leq n$$

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Матрицы L_k

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad l_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{k+1,k} \\ \vdots \\ l_{n,k} \end{bmatrix}$$

- $L_k = I - l_k e_k^T$
- $(I - l_k e_k^T)(I + l_k e_k^T) = I - l_k(\cancel{e_k^T l_k})e_k^T = I$
- $L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$
- $L_k^{-1} L_{k+1}^{-1} = (I + l_k e_k^T)(I + l_{k+1} e_{k+1}^T) =$
  $I + l_k e_k^T + l_{k+1} e_{k+1}^T + l_k \cancel{e_k^T l_{k+1}} e_{k+1}^T = I + l_k e_k^T + l_{k+1} e_{k+1}^T$

$$L = L_1^{-1} \dots L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Существование LU-разложения

1. Алгоритм построен в предположении, что $u_{kk} \neq 0$
2. $\begin{bmatrix} 0. & 1. \\ 1. & 1. \end{bmatrix}$

Строго регулярная матрица

Матрица называется *строго регулярной*, если все её ведущие подматрицы невырожденные.

LU-разложение

A имеет LU-разложение $\iff$ A строго регулярная.

Решение системы с помощью LU разложения

Процесс решения системы $Ax = b$ можно разделить на 3 этапа

1. Вычисление LU разложения $PA = LU$ (далее $A = LU$)
2. Решение системы $Ly = b$ (прямая подстановка)
3. Решение системы $Ux = y$ (обратная подстановка)

> Для разных b достаточно вычислить LU-разложение только 1 раз!

Свойства LU-разложения

- Если $A = A^*$, то

$$A = LU = L\begin{bmatrix} u_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & u_{nn} \end{bmatrix}\tilde{U} = LD\tilde{U} = \tilde{U}^*(D^*L^*)$$

  из единственности LU: $\tilde{U}^* = L$, $A = LDL^*$, $u_{ii} \in \mathbb{R}$

- Если $A = A^* > 0$, то существует *разложение Холецкого*:

$$A = LDL^* = (LD^{1/2})(D^{1/2}L^*) = CC^*$$

  C - нижнетреугольная, $C_{ii} > 0$.

Разложение Холецкого

- $A = A^T > 0$: $A = CC^T$, C – нижнетреугольная с положительной диагональю.
- Для $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ 0 & c_{22} & c_{21} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

- Последовательно будет вычислять элементы C:

$$c_{11} = \sqrt{a_{11}} \qquad c_{21} = \frac{a_{21}}{c_{11}} \qquad c_{31} = \frac{a_{31}}{c_{11}}$$

$$c_{22} = \sqrt{a_{22} - c_{21}^2} \qquad c_{32} = \frac{a_{32} - c_{31}c_{21}}{c_{22}}$$

$$c_{33} = \sqrt{a_{33} - c_{31}^2 - c_{32}^2}$$

- Решение линейной системы: $Ax = b$:
$A = CC^T$, $CC^Tx = b \to Cy = b \to C^Tx = y$.