Кордияко Ян, 2 курс, 1 группа
Вариант 12
Задание 1. Доказать, что оператор $A: C[1,5] \to C[1,5]$, является линейным ограниченным и найти его норму:

$$Ax(t) = (t^3 - 3t)x(t).$$

Очевидно, что оператор A линеен:

$$A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = (t^3 - 3t)(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha(t^3 - 3t)x(t) + \beta(t^3 - 3t)y(t) = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t)$$

Покажем, что оператор A ограничен:

$$||Ax(t)||_{C[1,5]} = \max_{1\le t\le 5}|Ax(t)| = \max_{1\le t\le 5}|(t^3-3t)x(t)| \le \max_{1\le t\le 5}|(t^3-3t)|\max_{1\le t\le 5}|x(t)| = 110||x(t)||_{C[1,5]}$$

Так как взяв функцию $x_0(t) = 1$, мы получим выше равенство, норма оператора $||A|| = 110$, более того, она достижима.
Задание 2. Доказать, что оператор $A: L_5[-1,1] \to L_5[-1,1]$, является линейным ограниченным и найти его норму:

$$Ax(t) = (t^2 - t)x(t^5).$$

Очевидно, что оператор A линеен:

$$A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = (t^2 - t)(\alpha x(t^5) + \beta y(t^5)) = \alpha(t^2 - t)x(t^5) + \beta(t^2 - t)y(t^5) = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t)$$

Покажем, что оператор A ограничен:

$$||Ax(t)||_{L_5[-1,1]} = \left(\int_{-1}^{1}|Ax(t)|^5dt\right)^{1/5} = \left(\int_{-1}^{1}|t-1|^5|t|^5|x(t^5)|^5dt\right)^{1/5} =$$

$$= 5^{-1/5}\left(\int_{-1}^{1}|s^{1/5}-1|^5|s|^{1/5}|x(s)|^5ds\right)^{1/5} \le 5^{-1/5}\left(\int_{-1}^{1}\max_{-1\le r\le 1}(|r^{1/5}-1|^5|r|^{1/5})|x(s)|^5ds\right)^{1/5} =$$

$$= \frac{5^{4/5}}{6^{6/5}}\cdot\left(\int_{-1}^{1}|x(s)|^5ds\right)^{1/5} = \frac{5^{4/5}}{6^{6/5}}\cdot||x(t)||_{L_5[-1,1]}$$

Следовательно, $||A|| \le \frac{5^{4/5}}{6^{6/5}}$. С другой стороны, $||A|| \ge \frac{||Ax||}{||x||}$ для всех $x(t) \in L_5[-1,1]$. Выберем подпоследовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, t \in [-1, \frac{1}{7776} - \frac{1}{n}), \\ 1, t \in [\frac{1}{7776} - \frac{1}{n}, \frac{1}{7776}), \\ 0, t \in [\frac{1}{7776}, 1] \end{cases}$$

норма которой:

$$||x_n(t)||_{L_5[-1,1]} = \left(\int_{\frac{1}{7776}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{7776}} dt\right)^{1/5} = n^{-1/5}$$

Имеем:

$$||Ax_n(t)||_{L_5[-1,1]} = \left(\int_{\frac{1}{7776}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{7776}}|t-1|^5|t|^5dt\right)^{1/5} = \left(\int_{\frac{1}{7776}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{7776}}(1-t)^5t^5dt\right)^{1/5}$$

Задание 3. Доказать, что оператор $A : C[-1,2] \to C[0,3]$, является линейным ограниченным и найти его норму:

$$Ax(t) = \int_{-1}^{1} s^3(t^3 - t)x(s)ds.$$

Очевидно, что оператор A линеен:

$$A(\alpha x(t)+\beta y(t)) = \int_{-1}^{1} s^3(t^3-t)(\alpha x(s)+\beta y(s))ds = \alpha\int_{-1}^{1} s^3(t^3-t)x(s)ds+\beta\int_{-1}^{1} s^3(t^3-t)y(s)ds = \alpha Ax(t)+\beta Ay(t)$$

Покажем, что оператор A ограничен:

$$||Ax||_{C[0,3]} = \max_{0\le t\le 3}|Ax(t)| = \max_{0\le t\le 3}\left|\int_{-1}^{1} s^3(t^3-t)x(s)ds\right| \le \max_{0\le t\le 3}|t^3-t|\cdot\int_{-1}^{1}|s^3||x(s)|ds \le 24\cdot\int_{-1}^{1}|s^3|\max_{-1\le u\le 1}|x(u)|ds =$$

$$= 24\cdot\max_{-1\le u\le 1}|x(u)|\cdot 2\cdot\int_{0}^{1} s^3ds \le 12\cdot\max_{-1\le u\le 2}|x(u)| = 12||x||_{C[-1,2]}$$

Следовательно, $||A|| \le 12$. Покажем, что $||A|| \ge 12$. Заметим, что при любом фиксированном $t \in [-1,2]$ ядро $K(t,s) = (t^3-t)*s^3$ интегрального оператора по переменнной $s \in [-1,1]$ меняет знак, поэтому построим последовательность $x_n(t)$ вида:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, t\in[-1,-\frac{1}{n}), \\ nt, t\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}], \\ 1, t\in(\frac{1}{n},2] \end{cases}$$

с нормой $||x_n||_{C[-1,2]} = 1$. Тогда:

$$||A|| \ge ||Ax_n||_{C[0,3]} = \max_{0\le t\le 3}|Ax_n(t)| = \max_{0\le t\le 3}|t^3-t|\left|\int_{-1}^{-\frac{1}{n}} -s^3ds + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} s^3nsds + \int_{\frac{1}{n}}^{1} s^3ds\right| =$$

$$= \max_{0\le t\le 3}\left|(t^3-t)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^4}+\frac{2}{5n^4}\right)\right| = 12 - O(\frac{1}{n^4}).$$

Следовательно, $||A|| = 12$.

Задание 4. Вычислить норму оператора $A : L_2[-1,1] \to L_1[0,3]$:

$$Ax(t) = \int_{-1}^{1} s^3(1-t)x(s)ds.$$

$$||Ax||_{L_1[0,3]} = \int_0^3\left|\int_{-1}^{1} s^3(1-t)x(s)ds\right|dt = \left|\int_{-1}^{1} s^3x(s)ds\right|\int_0^3|1-t|dt = \frac{5}{2}\cdot\left|\int_{-1}^{1} s^3x(s)ds\right| \le \frac{5}{2}\cdot\int_{-1}^{1}|s^3x(s)|ds \le$$

$$\le [\text{Неравенство Гёльдера, } p=q=2] \le \frac{5}{2}\cdot\left(\int_{-1}^{1} s^6ds\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{-1}^{1}|x(s)|^2ds\right)^{1/2} = \frac{5}{\sqrt{14}}\cdot||x||_{L_2[-1,1]}$$

То есть $||A|| \le \frac{5}{\sqrt{14}}$.Покажем, что $||A|| \ge \frac{5}{\sqrt{14}}$. Выберем в качестве функции $x(t)$ функцию $x_0(t) = t^3, t \in [-1,1]$, поскольку именно для такой функции неравенство Гёльдера, которое было использовано выше при проведении оценок, обратится в равенство. Тогда:

$$||Ax_0||_{L_1[0,3]} = \int_0^3\left|\int_{-1}^{1} s^3(1-t)s^3ds\right|dt = \frac{5}{2}\cdot\left|\int_{-1}^{1} s^6ds\right| = \frac{5}{7}$$

$$||x_0||_{L_2[-1,1]} = \left(\int_{-1}^{1} s^6 ds\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$||A|| \geq \frac{||Ax_0||_{L_1[0,3]}}{||x_0||_{L_2[-1,1]}} = \frac{\frac{5}{7}}{\sqrt{\frac{2}{7}}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

Следовательно, $||A|| = \frac{5}{\sqrt{14}}$.

Задание 5. Вычислить норму оператора $A : C[-1,1] \to L_{3/2}[0,1]$:

$$Ax(t) = \int_{-1}^{1} s^3(1-t)x(s)ds + tx(0).$$

$$||Ax||_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |Ax(t)|^{3/2}dt\right)^{2/3} = \left(\int_0^1 \left|(1-t)\int_{-1}^{1} s^3x(s)ds + tx(0)\right|^{3/2} dt\right)^{2/3}$$

Оценим выражение, стоящее под знаком модуля:

$$\left|(1-t)\int_{-1}^{1} s^3x(s)ds + tx(0)\right| \leq |1-t|\int_{-1}^{1} |s^3||x(s)|ds + |t||x(0)| \leq |1-t|\int_{-1}^{1} |s^3| \max_{-1\leq u\leq 1} |x(u)|ds + |t| \max_{-1\leq u\leq 1} |x(u)| \leq$$

$$\leq \max_{-1\leq u\leq 1} |x(u)| \left(\frac{|1-t|}{2} + |t|\right) = [\quad t\in[0,1] \quad] = \frac{1+t}{2}\cdot ||x||_{C[-1,1]}, \quad \text{для} \quad t\in[0,1]$$

Полученную оценку подставим в выражение для нормы $||Ax||_{L_2[0,1]}$:

$$||Ax||_{L_2[0,1]} \leq \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^{3/2} dt\right)^{2/3} \cdot ||x||_{C[-1,1]}$$

Откуда следует, что $||A|| \leq \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^{3/2} dt\right)^{2/3}$. Для доказательства неравеснства в обратную сторону потроим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, t\in[-1,-\frac{1}{n}], \\ -2nt+1, t\in(-\frac{1}{n},0), \\ 1, t\in[0,1] \end{cases}$$

с нормой $||x_n||_{C[-1,1]} = 1$. Тогда:

$$||A|| \geq ||Ax_n(t)|| = \left(\int_0^1 \left|(1-t)\left(\int_{-1}^{-1/n} -s^3ds + \int_{-1/n}^{0} s^3(-2ns+1)ds + \int_0^1 s^3ds\right) + t\right|^{3/2} dt\right)^{2/3} =$$

$$= \left(\int_0^1 \left|(1-t)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4n^4} - \frac{13}{20n^4} + \frac{1}{4}\right) + t\right|^{3/2} dt\right)^{2/3} = \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^{3/2} dt\right)^{2/3} - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Это означает, что $||A|| = \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^{3/2} dt\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{10}\cdot(8-\sqrt{2})\right)^{2/3}$

Задание 6. Вычислить норму оператора $A : l_2 \to l_2$:

$$Ax = \left(\frac{x_1\sin 1}{3}, \frac{x_2\sin 2}{3^2}, ..., \frac{x_k\sin k}{3^k}, ...\right).$$

Так как последовательность $\frac{\sin k}{3^k}$ ограничена, то $\exists \sup_k \left|\frac{\sin k}{3^k}\right| = \frac{sin1}{3}$. Тогда:

$$||Ax||_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x_k \sin k}{3^k}\right)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin k}{3^k}\right)^2 x_k^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sup_n\left|\frac{\sin n}{3^n}\right|\right)^2 x_k^2\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{sin1}{3}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2} = \frac{sin1}{3}\cdot ||x||_{l_2}.$$

Возьмём последовательность $x_0 = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$. Очевидно, что для неё $||x_0||_{l_2} = 1$. Посчитаем $||Ax_0||_{l_2}$:

$$||Ax_0||_{l_2} = \frac{\sin 1}{3}$$

Тогда $||A|| = \frac{\sin 1}{3}$. Более того, норма достижима.