Кордияко Ян, 2 курс, 1 группа

Задание 3. Построить квадратуру Гаусса с тремя узлами для вычисления интеграла $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Квадратура Гаусса по трём узлам имеет вид:

$$S_3(f) = D_1 \cdot f(x_1) + D_2 \cdot f(x_2) + D_3 \cdot f(x_3)$$

По определению, квадратура точна для всех многочленов степени $2n-1$. Иначе говоря, для определения $D_1, D_2, D_3, x_1, x_2, x_3$ необходимо решить систему

$$\begin{cases} D_1 + D_2 + D_3 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2 \\ D_1 \cdot x_1 + D_2 \cdot x_2 + D_3 \cdot x_3 = \int_{-1}^{1} xdx = 0 \\ D_1 \cdot x_1^2 + D_2 \cdot x_2^2 + D_3 \cdot x_3^2 = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} \\ D_1 \cdot x_1^3 + D_2 \cdot x_2^3 + D_3 \cdot x_3^3 = \int_{-1}^{1} x^3dx = 0 \\ D_1 \cdot x_1^4 + D_2 \cdot x_2^4 + D_3 \cdot x_3^4 = \int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5} \\ D_1 \cdot x_1^5 + D_2 \cdot x_2^5 + D_3 \cdot x_3^5 = \int_{-1}^{1} x^5dx = 0 \end{cases}$$

В силу того, что функцией веса является $p(x) \equiv 1$, искомые D_1, D_2, D_3, а также числа d_1, d_2, d_3, вычисляемые по формуле $d_j = \frac{2x_j - (a+b)}{b-a}$ не зависят от отрезка интегрирования $[a, b]$. Более того, для отрезка $[-1, 1]$ получаем, что $d_j = x_j$. Поэтому мы можем воспользоваться предвычисленными значениями из **Таблицы 1** (*Бахвалов, Жидков, Кобельков. Численные методы*, стр. 110):

$$\begin{cases} D_1 = D_3 \approx 0.5555555556 \\ D_2 \approx 0.8888888888 \\ x_1 \approx -0.7745966692 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \approx 0.7745966692 \end{cases}$$

Таким образом, искомая квадратура Гаусса примет вид:

$$S_3(f) = 0.5555555556 \cdot f(-0.7745966692) + 0.8888888888 \cdot f(0) + 0.5555555556 \cdot f(0.7745966692).$$