Кордияко Ян, 2 курс, 1 группа

Вариант 12

Задание 1. Провести процесс ортогонализации векторов x_1, x_2, x_3 в гильбертовом пространстве $H_p[-1,1]$, в котором скалярное произведение имеет вид:

$$(x,y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(y)p(t)dt.$$

$$\begin{cases} p(t) = e^t, \\ x_1(t) = t+1, \\ x_2(t) = 2t - t^2, \\ x_3(t) = e^t - 1 \end{cases}$$

Обозначим искомую ортогональную систему как (y_1, y_2, y_3). Чтобы найти данные вектора, применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 = t+1, \\ y_2 = x_2 - \frac{(x_2,y_1)}{(y_1,y_1)} \cdot y_1, \\ y_3 = x_3 - \frac{(x_3,y_1)}{(y_1,y_1)} \cdot y_1 - \frac{(x_3,y_2)}{(y_2,y_2)} \cdot y_2 \end{cases}$$

Для дальнейших вычислений введём вспомогательный СИЗОП $I(n,m)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ m \neq 0$.

$$I(n,m) = \int_{-1}^{1} t^n e^{mt} dt = \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} t^n d\left(e^{mt}\right) = \frac{1}{m} \cdot \left[t^n e^{mt}\right]_{-1}^{1} - \frac{n}{m} \int_{-1}^{1} t^{n-1} e^{mt} dt =$$

$$= \frac{e^m - (-1)^n e^{-m}}{m} - \frac{n}{m} \cdot I(n-1,m) = ... = \left[I(0,m) = \int_{-1}^{1} e^{mt} dt = \frac{e^m - e^{-m}}{m}\right] =$$

$$= \frac{e^m}{m} \cdot \left(1 - \frac{n}{m} + \frac{n \cdot (n-1)}{m^2} - ... + (-1)^n \frac{n!}{m^n}\right) + \frac{(-1)^{n+1} e^{-m}}{m} \cdot \left(1 + \frac{n}{m} + \frac{n \cdot (n-1)}{m^2} + ... + \frac{n!}{m^n}\right).$$

Посчитаем необходимые скалярные произведения и последовательно найдём искомые вектора:

$$(x_2, y_1) = \int_{-1}^{1} (2t - t^2) \cdot (t+1) \cdot e^t dt = \int_{-1}^{1} (-t^3 + t^2 + 2t) \cdot e^t dt = -I(3,1) + I(2,1) + 2 \cdot I(1,1) =$$

$$= -\left(\frac{16}{e} - 2e\right) + \left(e - \frac{5}{e}\right) + 2 \cdot \frac{2}{e} = 3e - \frac{17}{e},$$

$$(y_1, y_1) = \int_{-1}^{1} (t+1)^2 \cdot e^t dt = \int_{-1}^{1} (t^2 + 2t + 1) \cdot e^t dt = I(2,1) + 2 \cdot I(1,1) + I(0,1) =$$

$$= \left(e - \frac{5}{e}\right) + 2 \cdot \frac{2}{e} + \left(e - \frac{1}{e}\right) = 2e - \frac{2}{e},$$

$$y_2 = 2t - t^2 - \frac{3e - \frac{17}{e}}{2e - \frac{2}{e}} \cdot (t+1) = 2t - t^2 - \frac{3e^2 - 17}{2e^2 - 2} \cdot (t+1),$$

$$(x_3, y_1) = \int_{-1}^{1} (e^t - 1) \cdot (t+1) \cdot e^t dt = \int_{-1}^{1} (te^t - t + e^t - 1) \cdot e^t dt = \int_{-1}^{1} (te^{2t} - te^t + e^{2t} - e^t) dt =$$

$$= I(1,2) - I(1,1) + I(0,2) - I(0,1) = \left(\frac{3}{4e^2} + \frac{e^2}{4}\right) - \frac{2}{e} + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2}\right) - \left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{1 - 4e - 4e^3 + 3e^4}{4e^2},$$

$$(y_2,y_2)=\int_{-1}^{1}\left(2t-t^2-\frac{3e-\frac{17}{e}}{2e-\frac{2}{e}}\cdot(t+1)\right)^2\cdot e^t dt=\frac{-9+238e^2-33e^4}{2e-2e^3},$$

$$(x_3,y_2)=\int_{-1}^{1}(e^t-1)\cdot\left(2t-t^2-\frac{3e-\frac{17}{e}}{2e-\frac{2}{e}}\cdot(t+1)\right)\cdot e^t dt=\frac{-5+e(4+e(19+e(-136+e(49+(20-7e)e))))}{8e^2(-1+e^2)},$$

$$y_3=e^t-1-\frac{\frac{1-4e-4e^3+3e^4}{4e^2}}{2e-\frac{2}{e}}\cdot(t+1)-\frac{\frac{-5+e(4+e(19+e(-136+e(49+(20-7e)e))))}{8e^2(-1+e^2)}}{\frac{-9+238e^2-33e^4}{2e-2e^3}}\cdot\left(2t-t^2-\frac{3e^2-17}{2e^2-2}\cdot(t+1)\right)=$$

$$=e^t-1+\frac{1-4e-4e^3+3e^4}{8e-8e^3}\cdot(t+1)+\frac{5-4e-19e^2+136e^3-49e^4-20e^5+7e^6}{4(9-238e^2+33e^4)e}\cdot\left(2t-t^2-\frac{3e^2-17}{2e^2-2}\cdot(t+1)\right).$$

Задание 2. В гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим подпространство L многочленов степени $n\le 4$. Для заданной непрерывно дифференцируемой функции $x(t)$ найти элемент наилучшей аппроксимации её многочленами $y(t)$ подпространства L по норме пространства $L_2[0,1]$:

$$x(t)=(1-2t^2)^3.$$

Рассмотрим многочлены $1,t,t^2,t^3,t^4$. Они образуют линейно независимую систему и порождают рассматриваемое подпространство L. Применим к ним в пространстве $L_2[0,1]$ процесс ортогонализации Грама-Шмидта и построим ортонормированную систему $(\phi_0(t),\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t),\phi_4(t))$:

$$\begin{cases}\psi_0=1,\\ \psi_1=t-\frac{(t,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\cdot\psi_0,\\ \psi_2=t^2-\frac{(t^2,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\cdot\psi_0-\frac{(t^2,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}\cdot\psi_1\\ \psi_3=t^3-\frac{(t^3,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\cdot\psi_0-\frac{(t^3,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}\cdot\psi_1-\frac{(t^3,\psi_2)}{(\psi_2,\psi_2)}\cdot\psi_2\\ \psi_4=t^4-\frac{(t^4,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\cdot\psi_0-\frac{(t^4,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}\cdot\psi_1-\frac{(t^4,\psi_2)}{(\psi_2,\psi_2)}\cdot\psi_2-\frac{(t^4,\psi_3)}{(\psi_3,\psi_3)}\cdot\psi_3\\ \phi_i=\frac{\psi_i}{||\psi_i||},\ i=0,1,2,3,4\end{cases}$$

$$(\psi_0,\psi_0)=\int_0^1 dt=1$$

$$(t,\psi_0)=\int_0^1 tdt=\frac{1}{2}$$

$$\psi_1=t-\frac{1}{2}$$

$$(t^2,\psi_0)=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$$

$$(\psi_1,\psi_1)=\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2dt=\frac{1}{12}$$

$$(t^2,\psi_1)=\int_0^1 t^2\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{12}$$

$$\psi_2=t^2-\frac{1}{3}-\left(t-\frac{1}{2}\right)=t^2-t+\frac{1}{6}$$

$$(t^3,\psi_0)=\int_0^1 t^3dt=\frac{1}{4}$$

$$(t^3,\psi_1)=\int_0^1 t^3\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{3}{40}$$

$$(\psi_2,\psi_2)=\int_0^1\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)^2dt=\frac{1}{180}$$

$$(t^3,\psi_2)=\int_0^1 t^3\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)dt=\frac{1}{120}$$

$$\psi_3=t^3-\frac{1}{4}-\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{12}}\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{180}}\cdot\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{5}t-\frac{1}{20}$$

$$(t^4,\psi_0)=\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}$$

$$(t^4,\psi_1)=\int_0^1 t^4\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{15}$$

$$(t^4,\psi_2)=\int_0^1 t^4\cdot\left(t^2-t+\frac{1}{6}t\right)dt=\frac{1}{105}$$

$$(\psi_3,\psi_3)=\int_0^1\left(t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{5}t-\frac{1}{20}\right)^2dt=\frac{1}{2800}$$

$$(t^4,\psi_3)=\int_0^1\left(t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{5}t-\frac{1}{20}\right)^2dt=\frac{1}{1400}$$

$$\psi_4=t^4-\frac{1}{5}-\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{12}}\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{\frac{1}{105}}{\frac{1}{180}}\cdot\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)-\frac{\frac{1}{1400}}{\frac{1}{2800}}\cdot\left(t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{5}t-\frac{1}{20}\right)=$$

$$=t^4-2t^3+\frac{9}{7}t^2-\frac{2}{7}t+\frac{1}{70}$$

$$\phi_0=1$$

$$\phi_1=2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

$$\phi_2=6\sqrt{5}\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)$$

$$\phi_3=20\sqrt{7}\left(t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{5}t-\frac{1}{20}\right)$$

$$\phi_4=210\left(t^4-2t^3+\frac{9}{7}t^2-\frac{2}{7}t+\frac{1}{70}\right)$$

Так как отрезок ряда Фурье обладает экстремальным свойством, то для решения задачи нам остаётся найти (C_0,C_1,C_2,C_3,C_4) – коэффициенты Фурье элемента $x(t)$ по ортонормированной системе $(\phi_0(t),\phi_1(t),\phi_2(t),\phi_3(t),\phi_4(t))$:

$$C_0=(x,\phi_0)=\int_0^1(1-2t^2)^3dt=\frac{9}{35}$$

$$C_1=(x,\phi_1)=\int_0^1(1-2t^2)^3\cdot 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{9\sqrt{3}}{35}$$

$$C_2=(x,\phi_2)=\int_0^1(1-2t^2)^3\cdot 6\sqrt{5}\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)dt=\frac{1}{21\sqrt{5}}$$

$$C_3=(x,\phi_3)=\int_0^1(1-2t^2)^3\cdot 20\sqrt{7}\left(t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{5}t-\frac{1}{20}\right)dt=-\frac{2}{15\sqrt{7}}$$

$$C_4 = (x, \phi_4) = \int_0^1 (1-2t^2)^3 \cdot 210 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{9}{7}t^2 - \frac{2}{7}t + \frac{1}{70} \right) dt = -\frac{38}{385}$$

Таким образом, искомый $y(t)$ есть многочлен Фурье $\sum_{i=0}^4 C_i \cdot \phi_i$:

$$y(t) = \frac{9}{35} - \frac{9\sqrt{3}}{35} \cdot 2\sqrt{3} \left(t - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{21\sqrt{5}} \cdot 6\sqrt{5} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right) -$$

$$-\frac{2}{15\sqrt{7}} \cdot 20\sqrt{7} \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20} \right) - \frac{38}{385} \cdot 210 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{9}{7}t^2 - \frac{2}{7}t + \frac{1}{70} \right)$$

Задание 3. В гильбертовом пространстве l_2 найти проекцию элемента $x_0 \in l_2$ на подпространство $L \subset l_2$:

$$\begin{cases} x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2^k}, ...\right) \\ L = \left\{ \alpha x + \beta y \ : \ x = \left(1, \frac{1}{7}, ..., \frac{1}{7^k}, ...\right), \ y = \left(1, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{8^k}, ...\right), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \end{cases}$$

Обозначим через z проекцию вектора x_0 на подпространство L, тогда $z = \alpha x + \beta y$ и $x_0 - z \perp L$, т.е. $(x_0 - z, x) = 0$ и $(x_0 - z, y) = 0$. Из условия ортогональности для определения коэффициентов α и β получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha(x,x) + \beta(y,x) = (x_0, x) \\ \alpha(x,y) + \beta(y,y) = (x_0, y). \end{cases}$$

Рассчитаем коэффициенты системы

$$(x,x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{49^k} = \frac{49}{48}$$

$$(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot y_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{7^k} \cdot \frac{1}{8^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{56^k} = \frac{56}{55}$$

$$(y,y) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \cdot y_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{64^k} = \frac{64}{63}$$

$$(x_0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{0k} \cdot x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{7^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{14^k} = \frac{14}{13}$$

$$(x_0,y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{0k} \cdot y_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{8^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} = \frac{16}{15}$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} \frac{49}{48}\alpha + \frac{56}{55}\beta = \frac{14}{13} \\ \frac{56}{55}\alpha + \frac{64}{63}\beta = \frac{16}{15}. \end{cases}$$

Решив систему, получаем

$$P_L x_0 = \frac{2112}{91}x - \frac{1155}{52}y$$

.