Кордияко Ян, 2 курс, 1 группа

Вариант 12

Задание 1. Выяснить, задаёт ли следующая формула линейный ограниченный функционал. При положительном ответе вычислить норму f для $x(t) \in L_1[-1,1]$.

$$f(x) = \int_{-1}^{0} t^2 x(t^{1/3})dt - \int_{0}^{1} tx(t^{1/2})dt$$

Очевидно, из свойств интеграла Римана, функционал является линейным. Покажем, что он ограничен.

$$|f(x)| = \left|\int_{-1}^{0} t^2 x(t^{1/3})dt - \int_{0}^{1} tx(t^{1/2})dt\right| = [u = t^{1/3}|_{-1}^{0},\ t = u^3,\ dt = 3u^2du; \quad v = t^{1/2}|_{0}^{1},\ t = v^2,\ dt = 2vdv] =$$

$$= \left|3\int_{-1}^{0} u^8 x(u)du - 2\int_{0}^{1} v^3 x(v)dv\right| = \left|\int_{-1}^{1} (3t^8\chi_{[-1,0]} - 2t^3\chi_{[0,1]})x(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1} \left|3t^8\chi_{[-1,0]} - 2t^3\chi_{[0,1]}\right| |x(t)|\, dt \leq 3\int_{-1}^{1} |x(t)|dt = 3||x||_{L_1[-1,1]}$$

Следовательно, функционал ограничен и $||f|| \leq 3$. С другой стороны, существует последовательность функций $x_n(t) \in L_1[-1,1]$, которая задаётся формулой:

$$x_n(t) = \begin{cases} 3^n t^{8n}, t \in [-1,0], \\ -2^n t^{3n}, t \in [0,1] \end{cases} , \quad x_n(t) \in L_1[-1,1]$$

норма которой

$$||x_n|| = \int_{-1}^{0} 3^n t^{8n} dt + \int_{0}^{1} 2^n t^{3n} dt = \frac{3^n}{8n+1} + \frac{2^n}{3n+1}$$

Вычислим норму $||f(x_n)||$:

$$||f(x_n)|| = \int_{-1}^{0} 3^{n+1} t^{8n+8} dt + \int_{0}^{1} 2^{n+1} t^{3n+3} dt = \frac{3^{n+1}}{8n+9} + \frac{2^{n+1}}{3n+4}$$

Таким образом получаем:

$$\frac{||f(x_n)||}{||x_n||} = \frac{\frac{3^{n+1}}{8n+9} + \frac{2^{n+1}}{3n+4}}{\frac{3^n}{8n+1} + \frac{2^n}{3n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3.$$

То есть норма функционала:

$$||f|| = 3$$

Задание 3. Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, вычислить норму функционала в $L_2[-1,1]$.

$$f(x) = \int_{0}^{1} t^2 x(t)dt - 3\int_{-1}^{0} tx(t^{1/3})dt$$

Приведём функционал к виду $f(x) = (x,y)_{L_2[-1,1]}$:

$$f(x) = \int_{0}^{1} t^2 x(t)dt - 3\int_{-1}^{0} tx(t^{1/3})dt = [u = t^{1/3}|_{-1}^{0},\ t = u^3,\ dt = 3u^2du] =$$

$$= \int_{0}^{1} t^2 x(t)dt - 9\int_{-1}^{0} x(u)u^5 du = \int_{-1}^{1} x(t)(t^2\chi_{[0,1]} - 9t^5\chi_{[-1,0]})dt$$

Таким образом, получаем что

$$y(t) = \begin{cases} -9t^5, t \in [-1, 0], \\ t^2, t \in [0, 1] \end{cases}, \quad y(t) \in L_2[-1, 1]$$

Тогда норма функционала есть норма функции $y(t)$:

$$||f|| = ||y||_{L_2[-1,1]} = \left(\int_0^1 t^4 dt + 81 \int_{-1}^0 t^{10} dt \right)^{1/2} = 4\sqrt{\frac{26}{55}}$$

Ответ:

$$||f|| = 4\sqrt{\frac{26}{55}}$$

Задание 4. Используя теорему об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, вычислить норму функционала в l_2.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{5} \frac{x_k}{2^k} - \sum_{k=3}^{10} \frac{x_k}{k} + x_{10}$$

Для использования теоремы Рисса приведём функционал к виду $f(x) = (x, y)_{l_2}$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2} x_k \frac{1}{2^k} + \sum_{k=3}^{5} x_k \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=6}^{9} x_k \left(-\frac{1}{k} \right) + x_{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{10} \right)$$

Таким образом, получаем:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2^k},\ k = 1, 2 \\ \frac{1}{2^k} - \frac{1}{k},\ k = 3, 4, 5 \\ -\frac{1}{k},\ k = 6, 7, 8, 9 \\ 1 - \frac{1}{10},\ k = 10 \\ 0,\ k = 11, 12, ... \end{cases}, \quad y \in l_2$$

Тогда норма функционала есть норма y:

$$||f|| = ||y||_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^{10} y_k^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{81}{100} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{129094585}}{10080}.$$

Ответ:

$$||f|| = \frac{\sqrt{129094585}}{10080}$$