Кордияко Ян, 2 курс, 1 группа
Вариант 12
Задание 1. Найти сопряжённый оператор A^* к оператору $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, действующему по следующей формуле:

$$Ax(t) = \int_{t^3}^{1} t^2 x\left(s^{\frac{1}{3}}\right) ds + \int_0^{t^2} tsx(s)ds$$

По определению сопряжённого оператора имеем

$$f(Ax) = (Ax, y)_{L_2[0,1]} = \int_0^1 Ax(t)y(t)dt = \int_0^1 \left(\int_{t^3}^1 t^2 x\left(s^{\frac{1}{3}}\right) ds + \int_0^{t^2} tsx(s)ds\right) y(t)dt = \int_0^1 \int_{t^3}^1 t^2 x\left(s^{\frac{1}{3}}\right) y(t)dsdt +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^{t^2} tsx(s)y(t)dsdt = \int_0^1 x\left(s^{\frac{1}{3}}\right)\left(\int_0^{s^{\frac{1}{3}}} t^2 y(t)dt\right) ds + \int_0^1 x(s)\left(\int_{s^{\frac{1}{2}}}^1 tsy(t)dt\right) ds = [\text{замена в первом интеграле}] =$$

$$= \int_0^1 x(s)\left(\int_0^s 3s^2t^2y(t)dt\right) ds + \int_0^1 x(s)\left(\int_{s^{\frac{1}{2}}}^1 tsy(t)dt\right) ds = \int_0^1 x(s)\left(\int_0^s 3s^2t^2y(t)dt + \int_{s^{\frac{1}{2}}}^1 tsy(t)dt\right) ds = (x, A^*y).$$

Откуда:

$$A^*y(t) = \int_0^t 3t^2s^2y(s)ds + \int_{t^{\frac{1}{2}}}^1 sty(s)ds.$$

Задание 2. Найти сопряжённый оператор A^* к оператору $A : l_2 \to l_2$, действующему по следующей формуле:

$$Ax = (x_2 + x_1, x_1 - x_2, x_4, x_3, x_5, x_6, ...), \quad x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$$

По определению сопряжённого оператора имеем

$$f(Ax) = (Ax, y)_{l_2} = \sum_{i=1}^{\infty} Ax_i \cdot y_i = (x_2 + x_1) \cdot y_1 + (x_1 - x_2) \cdot y_2 + x_4 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_4 + \sum_{i=5}^{\infty} x_i \cdot y_i =$$

$$= x_1 \cdot (y_1 + y_2) + x_2 \cdot (y_1 - y_2) + x_3 \cdot y_4 + x_4 \cdot y_3 + \sum_{i=5}^{\infty} x_i \cdot y_i = (x, A^*y)_{l_2}$$

Откуда:

$$A^*y = (y_1 + y_2, y_1 - y_2, y_4, y_3, y_5, y_6, ...)$$

Таким образом оператор A является самосопряжённым.