Кордияко Ян, 2 курс, 1 группа

Задание 8.10. Оценить минимальное число разбиений отрезка N для вычисления интеграла $\int_0^1 e^{x^2}dx$ по составной квадратурной формуле прямоугольников, обеспечивающее точность $\varepsilon = 10^{-4}$.

Для определения N воспользуемся формулой, расположенной в презентации *МЧА_интегралы.pptx* на слайде 17:

$$R_1^N \leq ||f''(x)|| \cdot \frac{(b-a)^3}{24 \cdot N^2}$$

Для нашего задания имеем:

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \\ ||f''(x)|| = \left|\left|\left(e^{x^2}\right)''\right|\right| = \left|\left|\left(2x \cdot e^{x^2}\right)'\right|\right| = \left|\left|\left((2+4x^2) \cdot e^{x^2}\right)\right|\right| = [\text{Функция} \uparrow\uparrow \text{ на } [0,1]] = \left|(2+4\cdot 1^2)\cdot e^{1^2}\right| = 6 \cdot e \end{cases}$$

Для того, чтобы обеспечить точность $\varepsilon = 10^{-4}$, число разбиений должно удовлетворять неравенству:

$$10^{-4} \geq 6 \cdot e \cdot \frac{1}{24 \cdot N^2} \implies N \geq \sqrt{6 \cdot e \cdot \frac{10^4}{24}} \implies N \geq 50\sqrt{e} \implies N \geq 83.$$

Ответ: $N \geq 83$

Задание Придумать контрпример, показывающий, что при любом выборе параметров A_k, x_k в формуле 10.1 найдется многочлен степени $2n$, на котором формула не является точной.

Найдём квадратуру Гаусса для количества узлов $n = 1$ на промежутке $[a, b]$. В качестве веса возьмём $p(x) = 1$. Отыщем такие A_1, x_1, что они удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \int_a^b p(x) \cdot x^0 dx = A_1, \\ \int_a^b p(x) \cdot x^1 dx = A_1 \cdot x_1, \end{cases} \tag{1}$$

Имеем:

$$A_1 = \int_a^b dx = b - a,$$

$$x_1 = \frac{1}{A_1} \cdot \int_a^b x^1 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}.$$

Теперь вычислим $\int_a^b p(x) \cdot x^2 dx$:

$$\int_a^b p(x) \cdot x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} = (b-a) \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

С другой стороны, посчитаем $A_1 \cdot x_1^2$:

$$A_1 \cdot x_1^2 = (b-a) \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

Тогда их разность будет равной:

$$\int_a^b p(x) \cdot x^2 dx - A_1 \cdot x_1^2 = (b-a) \cdot \left(\frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{12}b^2\right) = (b-a) \cdot \frac{1}{12} \cdot (a-b)^2 = \frac{(b-a)^3}{12}$$

Очевидно, что на любом невырожденном промежутке эта разность не будет равна 0. Значит, в случае квадратуры Гаусса контрпримером может служить многочлен $Q_0(x) = x^2$. Если же мы подберём A_1 и x_1 таким образом, что разность всё же будет равна нулю, то это значит, что хотя бы одно из условий системы (1) не будет выполнено (в противном случае мы приходим к противоречию). Допустим, не выполнено условие $\int_a^b p(x) \cdot x^0 dx = A_1$. Но тогда наша квадратурная формула не будет точна для многочлена $Q_1(x) = x^2 + 1$, ведь:

$$\int_a^b p(x) \cdot Q_1(x) dx = \int_a^b p(x) \cdot x^2 dx + \int_a^b p(x) \cdot x^0 dx = A_1 \cdot x_1^2 + \int_a^b p(x) \cdot x^0 dx \neq A_1 \cdot (x_1^2 + 1)$$

Аналогично при нарушении условия $\int_a^b p(x) \cdot x^1 dx = A_1 \cdot x_1$ квадратурная формула не будет точна для $Q_2(x) = x^2 + x$.