Задание 1. Решить графически следующую задачу ЛП как на максимум, так и на минимум:

Целевая функция: **11.** $\phi = 4x_1 + 3x_2$

Ограничения: **12.** $\begin{cases} x_2 \leq 4 \\ -4x_1 + 7x_2 \geq -28 \\ 3x_1 + \ x_2 \geq 3 \end{cases}$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$

Ответ: $min = (1;0), \ max = (14;4)$

Построим **двойственную задачу**, используя мнемоническое правило:

1. Вводим новые переменные, соответствующие основным ограничениям задачи:

$$y = (y_1, y_2, y_3)^T$$

2. (a) $min \to max$
   (b) $max \to min$

3.

$$A_{\text{двойственная}} = A^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_{\text{двойственная}} = c = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{\text{двойственная}} = b = \begin{bmatrix} 4 \\ -28 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. (a) В случае $min \to max$ основные ограничения двойственной задачи будут иметь следующие знаки:
      i. $\leq$
      ii. $\leq$,

   а прямые ограничения:
      i. $\leq$
      ii. $\geq$
      iii. $\geq$

   (b) В случае $max \to min$ основные ограничения двойственной задачи будут иметь следующие знаки:

i. $\geq$

ii. $\geq$,

а прямые ограничения:

i. $\geq$

ii. $\leq$

iii. $\leq$

Таким образом, **задача, двойственная к задаче** min имеет вид:

$$\phi_{\text{двойственная}} = 4y_1 - 28y_2 + 3y_3 \to max$$

$$\begin{cases} \quad - 4y_2 + 3y_3 \leq 4 \\ y_1 + 7y_2 + \ \ y_3 \leq 3 \end{cases}$$
$$y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

А **задача, двойственная к задаче** max имеет вид:

$$\phi_{\text{двойственная}} = 4y_1 - 28y_2 + 3y_3 \to min$$

$$\begin{cases} \quad - 4y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ y_1 + 7y_2 + \ \ y_3 \geq 3 \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \leq 0$$

Для того, чтобы получить ответ двойственной задачи, приведём исходную задачу к каноническому виду:

$$\psi = -\phi(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \max\ (\equiv \phi(x) \to \min\,)$$

(для задачи на максимум $\phi = 4x_1 + 3x_2 \to \max\,$)

$$\begin{cases} \qquad\qquad x_2 + x_3 \qquad\qquad = 4 \\ -4x_1 + 7x_2 \qquad - x_4 \qquad = -28 \\ \ \ 3x_1 + \ \ x_2 \qquad\qquad - x_5 = 3 \end{cases}$$
$$M \geq x_1 \geq 0,\ M \geq x_2 \geq 0,$$
$$M \geq x_3 \geq 0,\ M \geq x_4 \geq 0,\ M \geq x_5 \geq 0$$

Для получения ответа двойственной задачи к задаче на минимум построим вектор потенциалов u оптимального базисного плана. Для построения оптимального найдём x_3, x_4, x_5: подставим в основные ограничения полученный графическим методом оптимальный план исходной задачи ($min = (1, 0)$) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Таким образом, получаем план $x^* = (1, 0, 4, 24, 0)^T$. Данный план будет базисным с базисом $J_Б = \{1, 3, 4\}$, так как соответствующая матрица невырождена, а x_3, x_5 лежат на нижней границе. Начинаем вторую фазу симплекс-метода:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies u_{min} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = -4 + \frac{4}{3} = -\frac{8}{3} < 0, \quad \Delta_5 = 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} < 0$$

Следовательно базисный план оптимальный. В таком случае $y_{min} = -u_{min}$ – решение задачи, двойственной к задаче на минимум (меняем знак в силу того, что исходная задача была на минимум). Проверим:

$$\phi(x^*) = -\psi(x^*) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 4 = 4 \cdot 0 - 28 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{4}{3} = \phi_{\text{двойственная}}(y_{min})$$

Проведём аналогичные операции с задачей на максимум (оптимальный план исходной задачи $max = (14, 4)$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -43 \end{array}\right)$$

Таким образом, получаем план $x^{**} = (14, 4, 0, 0, 43)^T$. Данный план будет базисным с базисом $J_Б = \{1, 2, 5\}$, так как соответствующая матрица невырождена, а x_3, x_4 лежат на нижней границе. Начинаем вторую фазу симплекс-метода:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \implies u_{max} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = 0 - 10 = -10 < 0, \quad \Delta_4 = 0 - 1 = -1 < 0$$

Следовательно базисный план оптимальный. В таком случае $y_{max} = u_{max}$ – решение задачи, двойственной к задаче на максимум. Проверим:

$$\phi(x^{**}) = 4 \cdot 14 + 3 \cdot 4 = 68 = 4 \cdot 10 - 28 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = \phi_{\text{двойственная}}(y_{max})$$

Ответ: $\lambda^o_{min\to max} = (0, 0, \frac{4}{3})^T,\ \lambda^o_{max\to min} = (10, -1, 0)^T$
Задание 3. Решить симплекс-методом следующую задачу ЛП:
Целевая функция: $\phi = 6x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 2x_4 \to max$

Ограничения: $\begin{cases} -x_1 \quad + 3x_3 = 13 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 49 \\ 5x_1 + 2x_4 = 42 \end{cases}$

$1 \le x_1 \le 8,\ 2 \le x_2 \le 10, 1 \le x_3 \le 8,$
$0 \le x_4 \le 6, 0 \le x_5 \le 7$

Ответ: $(8; 10; 7; 1; 1)$
Построим **двойственную задачу к канонической задаче**:
Целевая функция:

$$\psi(\lambda) = 13y_1 + 49y_2 + 42y_3 + 8w_1 + 10w_2 + 8w_3 + 6w_4 + 7w_5 - v_1 - 2v_2 - v_3 \to min$$

Ограничения: $\begin{cases} -y_1 + 5y_3 + w_1 - v_1 = 6 \\ 2y_2 + w_2 - v_2 = 2 \\ 3y_1 + 4y_2 + w_3 - v_3 = 9 \\ 2y_3 + w_4 - v_4 = 2 \\ y_2 + w_5 - v_5 = 0 \end{cases}$

$w_1 \ge 0, w_2 \ge 0, w_3 \ge 0, w_4 \ge 0, w_5 \ge 0,$
$v_1 \ge 0, v_2 \ge 0, v_3 \ge 0, v_4 \ge 0, v_5 \ge 0$

Чтобы получить оптимальный базисный план $\lambda^o = (u^o, w^o, v^o)^T$ двойственной задачи, вспомним вектор потенциалов и оценки из последней итерации симплекс-метода:

$$u^o = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta^o_1 = 4, \Delta^o_2 = 2$$

Из этого получаем, что:

$$w^o = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ответ: $\lambda^o = (u^o, w^o, v^o)^T = (3, 0, 1, 4, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$