fillbetween patterns   height=14cm,compat=1.9

Задание 2. Решить графически следующую задачу ЛП как на максимум, так и на минимум:

Целевая функция: **13.** $\phi = 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4$

Ограничения: **14(6в).** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 10 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 9x_4 \le 6 \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \ge 30 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$

Решение: Используя ограничения задачи, выразим x_3, x_4 через x_1, x_2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 10 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 9 & 10 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 & -6 \\ 5 & 1 & 0 & 7 & 22 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 & -6 \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 1 & \frac{22}{7} \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{19}{7} & -\frac{8}{7} & 1 & 0 & -\frac{64}{7} \\ \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 1 & \frac{22}{7} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{19}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2 - \frac{64}{7} \ge 0, \\ x_4 = -\frac{5}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{22}{7} \ge 0 \end{cases}.$$

Подставим в оставшиеся ограничения полученные выражения:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 9x_4 \le 6 \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \ge 30 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2\left(\frac{19}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2 - \frac{64}{7}\right) - 9\left(-\frac{5}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{22}{7}\right) \le 6 \\ 18x_1 + 3x_2 + \left(\frac{19}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2 - \frac{64}{7}\right) - \left(-\frac{5}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{22}{7}\right) \ge 30 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 \le 4 \\ 75x_1 + 15x_2 \ge 148 \end{cases}$$

Также подставим выражения для x_3, x_4 в целевую функцию:

$$\phi = 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = \frac{1}{7}(-31x_1 - 23x_2 + 212)$$

Таким образом наша задача ЛП сводится к задаче ЛП меньшей размерности:

Целевая функция: $\phi_0 = -31x_1 - 23x_2$

Ограничения: $\begin{cases} 75x_1 + 15x_2 \geq 148 \\ 19x_1 + 8x_2 \geq 64 \\ 5x_1 + x_2 \leq 22 \end{cases}$

$0 \leq x_1 \leq 4, \ 0 \leq x_2$

Изобразив на графике множество планов и вектор нормали целевой функций, мы видим, что решением задачи ЛП на минимум будет точка пересечения оси Ox_2 и прямой $5x_1 + x_2 = 22$, а решением задачи ЛП на максимум – точка пересечения оси Ox_1 и прямой $19x_1 + 8x_2 = 64$.

[xmin=-1, xmax=25, ymin=-1, ymax=25, axis lines = center, axis equal, xlabel = x_1, ylabel = x_2,] [red, samples=200, domain=-1:25, name path=A] (148 - 75*x)/15; [green, samples=200, domain=-1:25, name path=B] (64 - 19*x)/8; [blue, samples=200, domain=-1:25, name path=C] 22 - 5*x; [black, samples=200, domain=-1:25, name path=xAxis] 0; +[brown, samples=200, mark=none] coordinates (4, -1) (4, 25); [gray, pattern=north west lines] fill between[of=C and xAxis, soft clip=domain=3.368421052:4]; [gray, pattern=north west lines] fill between[of=C and B, soft clip=domain=0.71111111:3.368421052]; [gray, pattern=north west lines] fill between[of=A and C, soft clip=domain=0:0.71111111]; [violet, samples=100, domain=-1:25, name path=E] 23/31*x; [violet,<-] coordinates (3,23/31*3) (4,23/31*4); [violet,<-] coordinates (7,23/31*7) (8,23/31*8); [violet,<-] coordinates (11,23/31*11) (12,23/31*12); [violet,<-] coordinates (15,23/31*15) (16,23/31*16); [violet,<-] coordinates (19,23/31*19) (20,23/31*20); [violet,<-] coordinates (23,23/31*23) (24,23/31*24); [violet, dashed, samples=100, domain=-1:25, name path=F] -31/23*x + 22; [violet, dashed, samples=100, domain=-1:25, name path=G] -31/23*x + 4.54004576659; [label=0:min, circle,fill,inner sep=1.5pt, violet] at (axis cs:0, 22) ; [label=135:max, circle,fill,inner sep=1.5pt, violet] at (axis cs:64/19, 0) ;

Найдём точку минимума:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x_1 + x_2 = 22 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 22 \end{cases}$$

и максимума:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 19x_1 + 8x_2 = 64 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{64}{19}, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Теперь вычислим x_3, x_4 в точке минимума, используя ранее полученные выражения:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{19}{7} \cdot 0 + \frac{8}{7} \cdot 22 - \frac{64}{7} = 16, \\ x_4 = -\frac{5}{7} \cdot 0 - \frac{1}{7} \cdot 22 + \frac{22}{7} = 0 \end{cases}.$$

Аналогично для максимума:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{19}{7} \cdot \frac{64}{19} + \frac{8}{7} \cdot 0 - \frac{64}{7} = 0, \\ x_4 = -\frac{5}{7} \cdot \frac{64}{19} - \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{22}{7} = \frac{14}{19} \end{cases}.$$

Ответ: $min = (0; 22; 16; 0)$, $max = (\frac{64}{19}; 0; 0; \frac{14}{19})$