Prueba 2	Cálculo Diferencial MATC8021 2-2023	Puntaje	NOTA
Nombre: PAUTA			
RUT:			

Indicaciones:

1) Cuenta con 85 minutos para responder la evaluación.
2) No se puede sacar ningún apunte o formulario sólo se debe utilizar los que se entrega.
3) No se pueden utilizar hojas adicionales a las entregadas.
4) No se aceptan preguntas durante la evaluación.
5) Debe responder a las preguntas de forma ordenada y legible de lo contrario se puede considerar incorrecta su respuesta.
6) Su respuesta puede ser en lápiz mina o pasta, pero debe considerar que aquellos respondido con lápiz mina no tendrá derecho a réplica.
7) Puede utilizar calculadora científica simple (no programable), no se permite ningún otro tipo de tecnología.
8) Debe guardar el celular en silencio, reloj inteligente y/o audífonos en la mochila.
9) De ser sorprendido con el celular, reloj inteligente y/o audífonos en un lugar diferente al indicado o tratando de copiar, se le retirará su evaluación siendo calificado con nota 1,0.
10) **La revisión de la evaluación considera desarrollo y resultado**, por lo cual, si dicho desarrollo es incorrecto en algún punto, aun llegando el resultado, sólo se considerará puntaje hasta donde tiene correcto en el desarrollo (sin considerar puntaje por el resultado final).
11) No se permite cualquier tipo de salida durante la evaluación (baño, llamada, etc.), si un estudiante sale del aula la nota es hasta lo que se realizó hasta antes de salir.
12) La ausencia a esta o cualquier otra evaluación será recuperada mediante una única prueba recuperativa que contiene todos los contenidos del semestre, **no existen** pruebas o controles recuperativos específicas.
13) Esta evaluación corresponde a un 35% de la nota final.
14) La nota se calcula: $\frac{Puntaje}{30} + 1$

A continuación, la evaluación que consta de 3 preguntas con a y b cada una

1.- Determinar la primera derivada de las siguientes funciones

a) $$h(x) = \frac{x}{x-1}$$	(30 Puntos)
b) $$j(x) = \ln(\sqrt{2x} - 3x)$$	(30 Puntos)

(60 Puntos totales)

a) $$h'(x) = \frac{x'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2}$$ 5p

$$h'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2}$$ 10p

$$h'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$ 15p

b) $$j'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x} - 3x}(\sqrt{2x} - 3x)'$$ 5p

$$j'(x) = \frac{\frac{\cancel{2}^{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} - 3}{\sqrt{2x} - 3x}$$ 20p

$$j'(x) = \frac{1 - 3\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}(\sqrt{2x} - 3x)}$$

5p

o

$$j'(x) = \frac{1-3\sqrt{2x}}{2x - 3x\sqrt{2x}}$$

2.-

a) Determinar la recta tangente y normal a $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$ y que pasa por el punto $(-2, -2)$ (30 Puntos)

b) Comprobar que para $y = \text{sen}(2x)$ se cumple que

$$\frac{1}{4}y'' + y + y' + y''' = -6\cos(2x)$$

(30 Puntos)

(60 Puntos totales)

a) $f'(x) = 4x + 4$ 5p

$\Rightarrow m = f'(-2) = 4(-2) + 4 = -8 + 4 = -4$ 5p

RECTA TANGENTE

$y + 2 = -4(x+2)$ 4p

$y = -4x - 8 - 2$ 2p

$y = -4x - 10$ 2p

RECTA NORMAL

$-4 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = 1/4$ 4p

$y + 2 = \frac{1}{4}(x+2)$ 4p

$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - 2$ 2p

$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$ 2p

b) $y' = 2\cos(2x)$ 5p $\Rightarrow y'' = -4\,\text{sen}(2x)$ 5p

$y''' = -8\cos(2x)$ 5p

$\Rightarrow$

$\frac{1}{4}\cancel{(-4\,\text{sen}(2x))} + \cancel{\text{sen}(2x)} + 2\cos(2x) - 8\cos(2x)$ 10p

$= -6\cos(2x)$ 5p

$\therefore$ ES VERDADERO

3.-

a) Calcular el siguiente límite utilizando L'Hopital $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{e^x - e^{-x}}$$	(30 Puntos)
b) Determinar si es que existe por medio de derivada el crecimiento, decrecimiento, punto máximo, punto mínimo, concavidad, convexidad y punto de inflexión de la función $$r(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot e^x$$	(30 Puntos)

(60 Puntos totales)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{SEN}(x)}{e^x - e^{-x}} \underset{L.H}{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{e^0 + e^0}$ 10p 10p

$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ 10p

b) $r'(x) = (2x-4)\,e^x + (x^2-4x+5)\,e^x$

$= (x^2-2x+1)\,e^x$ 5p

VALOR CRITICO 1RA DERIVADA

$(x-1)^2 e^x = 0 \Rightarrow e^x = 0 \lor (x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ 5p

CRECIMIENTO Y/O DECRECIMIENTO

$-\infty \quad 1 \quad +\infty$

| + ↗ | + ↗ |

$r'(0) = e^x > 0$

$r'(2) = e^x > 0$

CRECE : $\mathbb{R}$

5p

$f''(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+1)\, e^x$

$f''(x) = (x^2-1)e^x$

$f''(x) = (x+1)(x-1)\, e^x$ 5p

PUNTO CRÍTICO 2^{DA} DERIVADA

$(x+1)(x-1)\, e^x = 0 \Rightarrow x+1=0 \lor x-1=0 \lor e^x = 0$

$\Rightarrow x=-1 \lor x=1$ 5p

CONCAVIDAD O CONVEXIDAD

$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$+$ $\cup$	$-$ $\cap$	$+$ $\cup$	

$f''(-2) = 3e^{-2} > 0$

$f''(0) = -1 < 0$

$f(2) = 3e^2 > 0$

CONCAVA : $]-1, 1[$ 1p
CONVEXA : $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ 2p

PUNTO INFLEXIÓN

$f(-1) = [(-1)^2 - 4(-1) + 5]e^{-1}$

$= \frac{10}{e} = \left(-1, \frac{10}{e}\right)$ 1p

$f(1) = [1^2 - 4(1) + 5]e^1$

$= 2e \Rightarrow (1, 2e)$ 1p

PUNTAJE:

Formulario:

Función general	Derivada general
$y = k$	$\frac{dy}{du} = 0$
$y = u^n$	$\frac{dy}{du} = nu^{n-1}u'$
$y = \sqrt[m]{u}$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$
$y = \ln(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{u}$
$y = \log_a(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{u}\log_a(e)$
$y = e^u$	$\frac{dy}{du} = e^u u'$
$y = a^u$	$\frac{dy}{du} = a^u \ln(a)\, u'$

Función general	Derivada general
$y = \text{sen}(u)$	$\frac{dy}{du} = u' \cos(u)$
$y = \cos(u)$	$\frac{dy}{du} = -u' \text{sen}(u)$
$y = \tan(u)$	$\frac{dy}{du} = u' \sec^2(u)$
$y = \cot(u)$	$\frac{dy}{du} = -u' \csc^2(u)$
$y = \sec(u)$	$\frac{dy}{du} = u' \sec(u)\tan(u)$
$y = \csc(u)$	$\frac{dy}{du} = -u' \csc(u)\cot(u)$
$y = \text{arcsen}(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \text{arccos}(u)$	$\frac{dy}{du} = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arctan(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = \text{arccot}(u)$	$\frac{dy}{du} = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \text{arcsec}(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y = \text{arccsc}(u)$	$\frac{dy}{du} = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Espacio adicional:

Formulario:

Función general	Derivada general
$y = k$	$\frac{dy}{du} = 0$
$y = u^n$	$\frac{dy}{du} = nu^{n-1}u'$
$y = \sqrt[m]{u}$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$
$y = \ln(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{u}$
$y = \log_a(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{u}\log_a(e)$
$y = e^u$	$\frac{dy}{du} = e^u u'$
$y = a^u$	$\frac{dy}{du} = a^u \ln(a)\, u'$

Función general	Derivada general
$y = \operatorname{sen}(u)$	$\frac{dy}{du} = u' \cos(u)$
$y = \cos(u)$	$\frac{dy}{du} = -u' \operatorname{sen}(u)$
$y = \tan(u)$	$\frac{dy}{du} = u' \sec^2(u)$
$y = \cot(u)$	$\frac{dy}{du} = -u' \csc^2(u)$
$y = \sec(u)$	$\frac{dy}{du} = u' \sec(u)\tan(u)$
$y = \csc(u)$	$\frac{dy}{du} = -u' \csc(u)\cot(u)$
$y = \operatorname{arcsen}(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arccos(u)$	$\frac{dy}{du} = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \arctan(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = \operatorname{arccot}(u)$	$\frac{dy}{du} = -\frac{u'}{1+u^2}$
$y = \operatorname{arcsec}(u)$	$\frac{dy}{du} = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y = \operatorname{arccsc}(u)$	$\frac{dy}{du} = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Espacio adicional: