ТЕМА 1. НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Цель работы:

1) изучить представление функции интегралом Фурье;
2) изучить непрерывное прямое и обратное преобразования Фурье;
3) получить навыки вычисления прямого и обратного преобразований Фурье простейших функций;
4) изучить команды системы Mathematica, осуществляющие прямое и обратное преобразования Фурье;

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задача 1.
Решение.

ЗАДАНИЯ

Задание 1. Найти прямое и обратное преобразования Фурье следующих функций. Предварительно

1. Сформулировать в системе Mathematica заданную функцию $f(t), t \in \mathbb{R}$. Построить ее график.

2. Рассчитать прямое преобразование Фурье.

3. Изучить частотные характеристики преобразования Фурье.

4. Рассчитать обратное преобразование Фурье и сравнить его с исходной функцией.

1.1. $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos \alpha t, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

1.2. $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin \alpha t, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

1.3. $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\alpha t}, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

1.4. $f(t) = te^{-\alpha|t|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0;$

1.5. $f(t) = \dfrac{d}{dt}\Big(te^{-|t|}\Big);$

1.6. $f(t) = \dfrac{d}{dt}\Big(t^2 e^{-|t|}\Big)$.

1.7. $f(t) = te^{-\alpha|t|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0;$

1.8. $f(t) = te^{-\alpha|t|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0;$

1.9. $f(t) = te^{-\alpha|t|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0;$

1.10. $f(t) = te^{-\alpha|t|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0;$

Задание 2. Найти косинус-преобразования Фурье следующих функций.

2.1. $f(t) = \begin{cases} \cos\frac{t}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ 0, & t > \pi; \end{cases}$

2.2. $f(t) = \begin{cases} 1 - |x-5|, & 0 \leqslant t \leqslant 6, \\ 0, & t > 6; \end{cases}$

2.3. $f(t) = \begin{cases} \cos\frac{t^2}{3} & 0 \leqslant t \leqslant 5, \\ 0, & t > 5; \end{cases}$

2.4. $f(t) = \begin{cases} 2 - 2t, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0, & t > 1; \end{cases}$

2.5. $f(t) = \begin{cases} 4 - 3t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 4, \\ 0, & t > 4; \end{cases}$

2.6. $f(t) = \begin{cases} 2 - t, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0, & t > 2; \end{cases}$

2.7. $f(t) = \begin{cases} 3 + t^2, & 0 \leqslant t < 1, \\ t, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0, & t > 2; \end{cases}$

2.8. $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant t < 1, \\ 4 - t, & 1 \leqslant t \leqslant 4, \\ 0, & t > 4; \end{cases}$

2.9. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1, \\ 5 - t, & 1 \leqslant t \leqslant 3, \\ 0, & t > 3; \end{cases}$

2.10. $f(t) = \begin{cases} 3t-5, & 0 \leqslant t < 1, \\ 5+t, & 1 \leqslant t \leqslant 3, \\ 0, & t > 3; \end{cases}$

2.11. $f(t) = \begin{cases} 3e^{-t}, & 0 \leqslant t < 10, \\ 3e^{-2t}, & t > 10; \end{cases}$

2.12. $f(t) = \begin{cases} 5e^{-4t}, & 0 \leqslant t < 10, \\ e^{-2t}, & t > 10; \end{cases}$

2.13. $f(t) = \begin{cases} 5e^{-4t}, & 0 \leqslant t < 10, \\ e^{-2t}, & t > 10; \end{cases}$

2.14. $f(t) = \begin{cases} 3e^{-7t}, & 0 \leqslant t < 10, \\ 0, & t > 10. \end{cases}$

Задание 3. Найти синус-преобразования Фурье следующих функций.

3.1. $f(t) = \begin{cases} \sin\frac{t}{2}, & 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ 0, & t > \pi; \end{cases}$

3.2. $f(t) = \begin{cases} te^{-t^2/2}, & 0 \leqslant t \leqslant 100, \\ 0, & t > 100; \end{cases}$

3.3. $f(t) = \begin{cases} \sin\frac{t^2}{3} & 0 \leqslant t \leqslant 10, \\ 0, & t > 10; \end{cases}$

3.4. $f(t) = \begin{cases} 2+5t, & 0 \leqslant t \leqslant 5, \\ 0, & t > 5; \end{cases}$

3.5. $f(t) = \begin{cases} 4-|t-1| & 0 \leqslant t \leqslant 4, \\ 0, & t > 4; \end{cases}$

3.6. $f(t) = \begin{cases} 2-4t, & 0 \leqslant t < 2, \\ 1, & 2 \leqslant t \leqslant 4, \\ 0, & t > 4; \end{cases}$

3.7. $f(t) = \begin{cases} 5+t^3, & 0 \leqslant t < 1, \\ t, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0, & t > 2; \end{cases}$

3.8. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < 1, \\ 2-t^2, & 1 \leqslant t \leqslant 4, \\ 0, & t > 4; \end{cases}$

3.9. $f(t)=\begin{cases} 2, & 0\leqslant t<1,\\ 5-t^2, & 1\leqslant t\leqslant 3,\\ 0, & t>3;\end{cases}$

3.10. $f(t)=\begin{cases} 3t-5, & 0\leqslant t<1,\\ 5+t, & 1\leqslant t\leqslant 3,\\ 0, & t>3;\end{cases}$

3.11. $f(t)=\begin{cases} 3e^{-7t}, & 0\leqslant t<10,\\ 0, & t>10.\end{cases}$

3.12. $f(t)=\begin{cases} te^{-t}, & 0\leqslant t<10,\\ 3e^{-2t}, & t>10;\end{cases}$

3.13. $f(t)=\begin{cases} 5e^{-4t}, & 0\leqslant t<10,\\ e^{-2t}, & t>10;\end{cases}$

3.14. $f(t)=\begin{cases} 5e^{-4t}, & 0\leqslant t<10,\\ te^{-2t}, & t>10;\end{cases}$

Задание 4. Вычислить свертку двух функций $f(t)$ и $g(t)$.

4.1. $f(t)=\begin{cases} e^{-at}, & t>0,\\ 0, & t<0;\end{cases}\qquad g(t)=\begin{cases} 1, & |t|<a,\\ 0, & |t|\geqslant a,\ a>0;\end{cases}$

4.2. $f(t)=\begin{cases} 2, & |t|<1,\\ 0, & |t|\geqslant 1;\end{cases}\qquad g(t)=\begin{cases} 1, & |t|<2,\\ 0, & |t|\geqslant 2;\end{cases}$

4.3. $f(t)=\begin{cases} 1-|t|, & |t|<1,\\ 0, & |t|\geqslant 1;\end{cases}\qquad g(t)=\begin{cases} 1, & |t|<2,\\ 0, & |t|\geqslant 2;\end{cases}$

4.3. $f(t)=\begin{cases} 1-|t|, & |t|<2,\\ 0, & |t|\geqslant 2;\end{cases}\qquad g(t)=\begin{cases} 1-|t|, & |t|<1,\\ 0, & |t|\geqslant 1;\end{cases}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.

ТЕМА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Цель работы:

1) изучить прямое и обратное преобразования Фурье;
2) изучить команды системы Mathematica, осуществляющие прямого и обратного преобразования Фурье;
3) получить навыки применения преобразования Фурье к решению прикладных задач математической физики;
4) получить навыки применения преобразования Фурье к решению интегральных уравнений типа свертки.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Применение преобразования Фурье к решению задачи Коши для уравнения колебания струны.

Применение преобразования Фурье к решению задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Применение преобразования Фурье к решению интегральных уравнений. Пусть задано интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром, зависящим от разности аргументов

$$x(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathscr{K}(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s = y(t),$$

где $y(t) \in L_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{K}(t) \in L_2(\mathbb{R})$.

Применим преобразование Фурье и воспользуемся теоремой о свертке функций, получим

$$F(\lambda) - \sqrt{2\pi}F(\lambda)G(\lambda) = \Phi(\lambda),$$

где соответственно $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ преобразование Фурье функций $x(t)$, $\mathscr{K}(t)$ и $y(t)$. Из последнего уравнения при условии, что $1-\sqrt{2\pi}G(\lambda) \neq 0$, находим $F(\lambda)$

$$F(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{1-\sqrt{2\pi}G(\lambda)}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим решение интегрального уравнения

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda)}{1 - \sqrt{2\pi} G(\lambda)} \, e^{i\lambda t} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Аналогично решаются уравнения первого рода.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задача 1.
Решение.

ЗАДАНИЯ

Задание 1. Найти в области $\Omega = \{-\infty < x < \infty, \ t > 0$ решение $u(x,t)$ волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x).$$

1.1. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

1.2. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

1.3. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

1.4. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

1.5. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

1.6. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

1.7. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

1.8. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

1.9. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

1.10. $\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad \psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$

Задание 2. Найти в области $\Omega = \{-\infty < x < \infty,\ t > 0$ решение $u(x,t)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x).$$

2.1. $\varphi(x) = e^{-|x|};$

2.2. $\varphi(x) = e^{-x^2};$

2.3. $\varphi(x) = xe^{-x^2};$

2.4. $\varphi(x) = \sin xe^{-x^2};$

2.5. $\varphi(x) = \cos xe^{-x^2};$

2.6. $\varphi(x) = x^3e^{-x^2};$

2.7. $\varphi(x) = x^3e^{-x^2};$

2.8. $\varphi(x) = x^3e^{-x^2};$

2.9. $\varphi(x) = x^3e^{-x^2};$

2.10. $\varphi(x) = x^3e^{-x^2}.$

Задание 3. Найти решение интегральных уравнений Фредгольма

3.1. $x(t) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|s-t|}x(s)\mathrm{d}s = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

3.2 $x(t) - \frac{3}{8} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|s-t|}x(s)\mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ e^{t}, & t < 0; \end{cases}$

3.3. $x(t) + \sqrt{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|s-t|^2}x(s)\mathrm{d}s = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0; \end{cases}$

3.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin stx(s)\mathrm{d}s = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ 0, & t > \pi; \end{cases}$

3.5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos stx(s)\mathrm{d}s = \begin{cases} \cos t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ 0, & t > \pi; \end{cases}$

3.6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos st x(s) \mathrm{d}s = \begin{cases} \cos t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ 0, & t > \pi; \end{cases}$

3.7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos st x(s) \mathrm{d}s = e^t \cos t.$

3.8. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos st x(s) \mathrm{d}s = \dfrac{1}{1+t^2}.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.