ТЕМА 2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Цель работы:

1) изучить полную ортогональную систему в пространстве квадратично суммируемых функций – систему тригонометрических многочленов;
2) изучить разложение в тригонометрический ряд Фурье;
3) изучить сходимость ряда Фурье в точке;
4) получить навыки расчетов по аппроксимации функций тригонометрическим рядом Фурье с помощью системы Mathematica.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Ряд Фурье на $[-\pi,\pi]$**.** Пусть $f(t) \in L_2[-\pi,\pi]$. Рассмотрим тригонометрическую систему функций

$$1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos kt, \sin kt, \ldots. \tag{1}$$

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(t)$ называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt, \tag{2}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \;\; a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\,\mathrm{d}t,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\,\mathrm{d}t.$$

Отрезком ряда Фурье называется частная сумма ряда Фурье

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{N} a_k \cos kt + \sum_{k=0}^{N} b_k \sin kt. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $f(t) \in L_2[-\pi,\pi]$. Тогда ее ряд Фурье сходится к $f(t)$ в среднеквадратичном, т. е.*

$$\|f - S_N\|^2 = \|f\|^2 - \pi\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)\Big) \to 0, N \to \infty. \tag{4}$$

Ряд Фурье для четных функций. Пусть $f(t) \in L_2[-\pi,\pi]$ и $f(t) = f(-t)$, тогда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt.$$

Ряд Фурье для нечетных функций. Пусть $f(t) \in L_2[-\pi,\pi]$ и $f(t) = -f(-t)$, тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt.$$

Ряд Фурье для функций, заданных на отрезке $[0,\pi]$. Пусть $f(t) \in L_2[0,\pi]$. Доопределим ее на полуинтервале $[-\pi, 0)$, продолжая $f(t)$ четным образом. Получим функцию $\tilde{f}(t) \in L_2[-\pi,\pi]$, которую можно разложить в ряд Фурье. Поскольку $\tilde{f}(t) = \tilde{f}(-t)$, то

$$\tilde{f}(t) = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt.$$

Продолжая $f(t)$ нечетным образом, получим в конечном итоге разложение

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kt.$$

Это означает, что функцию $f(t)$ на $[0,\pi]$ можно аппроксимировать рядом Фурье по системе синусов, либо по системе косинусов.

Ряд Фурье для функций, заданных на отрезке $[-l,l]$. Пусть $f(t) \in L_2[-l,l]$, тогда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l}\, t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l}\, t, \tag{5}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\mathrm{d}t,\ \ a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l}\, t\,\mathrm{d}t,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \frac{k\pi}{l}\, t\,\mathrm{d}t.$$

Комплексная форма ряда Фурье. Тригонометрический ряд Фурье можно записать более компактно, если воспользоваться формулами Эйлера

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}.$$

Тогда

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikt},\ C_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Если $f(t) \in L_2[-l,l]$, то

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\frac{ik\pi}{l}t},\ C_k = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t) e^{-\frac{ik\pi}{l}t}\,\mathrm{d}t,$$

если $f(t) \in L_2[0,l]$, то

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\frac{2ik\pi}{l}t},\ C_k = \frac{1}{2l}\int\limits_{0}^{l} f(t) e^{-\frac{2ik\pi}{l}t}\,\mathrm{d}t.$$

Достаточные условия сходимости ряда Фурье. Функция $f(t) \in L_1[a,b]$ удовлетворяет условию Дини в точке $t \in [a,b]$, если при некотором $\delta > 0$

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{f(t+z) - f(t)}{z}\,\mathrm{d}z < \infty.$$

Лемма 1 (Римана–Лебега). *Пусть* $f(t) \in L_1[a,b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(t)\cos pt\,\mathrm{d}t \to 0, \int\limits_a^b f(t)\sin pt\,\mathrm{d}t \to 0, \int\limits_a^b f(t)e^{ipt}\,\mathrm{d}t \to 0, p \to \infty.$$

Теорема 2. *Пусть* $f(t) \in L_1[-\pi,\pi]$ *и в каждой точке* $t \in [-\pi,\pi]$ *удовлетворяет условию Дини. Тогда ее ряд Фурье сходится в точке* t *и для* $\forall t \in \mathbb{R}$ *верно равенство*

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin kt. \tag{7}$$

Эффект Гиббса. *Эффектом Гиббса* называется особенность поведения частной суммы ряда Фурье в окрестности точки разрыва функции $f(t)$. Вблизи точки разрыва с ростом числа гармоник $S_N(t)$ имеет выбросы. Добавление новых гармоник сдвигает эти выбросы к точкам разрыва, уменьшая их длительность, но размах остается постоянным и составляет порядка 18%.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Задача 1. Рассмотрим разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(t) \in L_2[-\pi, \pi]$, $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$.

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha t}\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{2(-1)^k\alpha\sinh(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+k^2)},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha t}\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{2(-1)^{k+1}\alpha\sinh(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2+k^2)},$$

$k = 1, \ldots$.

Тогда

$$f(t) = \frac{\sinh(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\sinh(\alpha\pi)}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha^2+k^2}\Big(\alpha\cos kt - k\sin kt\Big).$$

Таким образом, на интервале $(-\pi, \pi)$ ряд Фурье сходится к функции $f(t) = e^{\alpha t}$, а вне $[-\pi, \pi]$ к ее периодическому продолжению $F(t)$ с периодом 2π. $F(t)$ имеет разрывы в точках $-\pi, \pi$.

Задача 2. Рассмотрим разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(t) \in L_2[-\pi, \pi]$

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant t < 0, \\ 1, & 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Функция $f(t)$ является нечетной, поэтому при ее разложении в ряд Фурье коэффициенты $a_0 = 0$, $a_k = 0$, $k = 1{,}2,\ldots$. Вычислим коэффициент b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin kt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi k}\Big(1-(-1)^k\Big) =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \frac{4}{\pi k}, & k = 2n+1, n = 0{,}1{,}2,\ldots. \end{cases}$$

Тогда

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin{(2k-1)t}}{2k-1},\ t\in[-\pi,\pi].$$

Поскольку функция $f(t)$ терпит разрыв первого рода в точке $t = 0$, то при аппроксимации функции отрезком ряда Фурье в окрестности нуля будет наблюдаться эффект Гиббса.

Задача 3. Разложим в ряд Фурье функцию $f(t) = |t|$, $t\in[-\pi,\pi]$.

Р е ш е н и е. Данная функция является четной, поэтому в ее разложении коэффициент $b_k = 0$. Вычислим коэффициенты a_k:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t\,\mathrm{d}t = \pi,\ a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t\cos kt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi k^2}\Big((-1)^k - 1\Big) =$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k = 2n+1, n = 0, 1, 2,\ldots. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos{(2k+1)t}}{(2k+1)^2},\ t\in[-\pi,\pi].$$

Задача 4. Разложим в ряд Фурье функцию $f(t) = t$, $t\in[-\pi,\pi]$.

Р е ш е н и е. Данная функция является нечетной, поэтому в ее разложении коэффициенты $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2,\ldots$. Вычислим коэффициенты b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t\sin kt\,\mathrm{d}t = (-1)^{k+1}\frac{2}{k},\ k = 1, 2,\ldots.$$

Таким образом,

$$t = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\sin kt,\ \ t \in [-\pi,\pi].$$

Задача 5. Разложим функцию $f(t) = t$, $t \in [0,\pi]$ в ряд Фурье по а) синусам, б) косинусам.

Решение. Продолжим функцию $f(t)$ четным образом. Получим новую функцию $\tilde{f}(t) = |t|$, $t \in [-\pi,\pi]$. Разложим функцию $\tilde{f}(t)$ в ряд Фурье. Такая функция рассмотрена в примере 3. Поэтому

$$\tilde{f}(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\,\cos{(2k-1)t},\ \ t \in [-\pi,\pi].$$

Тогда

$$t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t - \frac{4}{9\pi}\cos 3t - \frac{4}{25\pi}\cos 5t - \ldots.$$

Рассмотрим продолжение функции $f(t)$ нечетным образом. Получим функцию $\tilde{f}(t) = t$, $t \in [-\pi,\pi]$, которая рассмотрена в примере 3. Тогда

$$\tilde{f}(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\sin kt,\ \ t \in [-\pi,\pi].$$

Следовательно

$$t = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \ldots.$$

ЗАДАНИЯ

Задание 1.

1. Сформулировать в системе Mathematica заданную функцию $f(t), t \in [0,T]$. Построить ее график.

2. Рассчитать значения коэффициентов Фурье $C_k, k = 1,2,\ldots,N$, разложения $f(t)$ по тригонометрическому базису.

3. Составить программу аппроксимации $f(t)$. Найти значение суммы ряда Фурье для любого $t \in \mathbb{R}$.

4. Построить спектральную диаграмму и сделать выводы.

5. Построить график ошибки $\varepsilon_N(t) = f(t) - S_N(t)$. Рассмотреть случай $N = 8, 16$.

6. Рассчитать значения среднеквадратической ошибки для случая $N = 8, 16$.

1.1. $f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$

1.2. $f(t) = \dfrac{\pi - 2t}{4}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi;$

1.3. $f(t) = \dfrac{t}{2}, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi;$

1.4. $f(t) = t^2 - \dfrac{\pi^2}{3}, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi;$

1.5. $f(t) = t - \dfrac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi;$

1.6. $f(t) = \dfrac{3t^2 - 6\pi t + 2\pi^2}{12}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi;$

1.7. $f(t) = t \sin t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi;$

1.8. $f(t) = \sin \alpha t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \quad \alpha-$ не целое;

1.9. $f(t) = |\sin 2t|, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \quad \alpha-$ не целое;

1.10. $f(t) = \pi^2 - t^2, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$

Задание 2.

1. Построить аппроксимацию $f(t)$.

2. Найти значение суммы ряда Фурье в точке $t = 0$ при различных значениях N. Объяснить полученный результат.

3. Нарисовать графики $f(t)$, $S_N(t)$, $N = 8, 16$.

2.1. $f(t) = \begin{cases} t + 1, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ -1, & 0 < t \leqslant \pi, \end{cases}$

2.2. $f(t) = \begin{cases} t + 3, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ 7, & 0 < t \leqslant \pi, \end{cases}$

2.3. $f(t) = \begin{cases} 4 - t, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ 7, & 0 < t \leqslant \pi, \end{cases}$

2.4. $f(t) = \begin{cases} 2 - t, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ -1, & 0 < t \leqslant \pi, \end{cases}$

2.5. $f(t) = \begin{cases} 1+2t, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ -1, & 0 < t \leqslant \pi, \end{cases}$

2.6. $f(t) = \begin{cases} 5t-1, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ 1, & 0 < t \leqslant \pi, \end{cases}$

2.7. $f(t) = \begin{cases} 2t+5, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ -1, & 0 < t \leqslant \pi. \end{cases}$

2.8. $f(t) = \begin{cases} 6-2t, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ 1+t, & 0 < t \leqslant \pi; \end{cases}$

2.9. $f(t) = \begin{cases} t-t^2, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ t+2, & 0 < t \leqslant \pi; \end{cases}$

2.10. $f(t) = \begin{cases} 1+5t, & -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ t^2-1, & 0 < t \leqslant \pi; \end{cases}$.

Задание 3. Разложить в ряд Фурье на $[0,\pi]$ по а) синусам, б) косинусам, продолжив соответствующим образом следующие функции:

3.1. $f(t) = 2t + 3t^2$;
3.2. $f(t) = 6 - 2t$;
3.3. $f(t) = 4t - 3$;

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1.