

Úkol 1 – Matice přechodu [7b]

Známe tedy bázi $B : 1, x, x^2$ a $C : c_1, c_2, c_3$, které jsou součástí prostoru Q , což je množinou všech kvadratických funkcí. Zároveň také známe jak vypadají c_1, c_2 a c_3 v kanonické bázi:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\ c_2(x) &= -(x+1)(x-1) = -x^2 + 1 \\ c_3(x) &= \frac{1}{2}x(x+1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \end{aligned} \quad (1)$$

Tudíž nejprve začneme jednoduchým převodem těchto vektorů do bázi B .

Vektory v bázi B vypadají takto:

$$v = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \quad (2)$$

Takže bez žádného zbytečného myšlení převedeme vektory c_1, c_2 a c_3 do bázi B :

$$[c_1]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad [c_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [c_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Tudíž transformační matice z báze C do B ${}_B[id]_C$ stačí jen vypsát:

$${}_B[id]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Tedy k výpočtu matice ${}_B[g]_B$ potřebujeme už jenom matici ${}_C[id]_B$. Nejdřív stanovíme b_1, b_2 a b_3 :

$$[b_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [b_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [b_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

které jednoduše převodíme do kanonické bázi:

$$b_1 = 1 \quad b_2 = x \quad b_3 = x^2 \quad (6)$$

Tentokrát na převod těchto vektorů do bázi C musíme sledovat jejich hodnoty v bodech $x = -1, x = 0$ a $x = 1$, což opět jednoduše vypočítáme jako:

$$[b_1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [b_2]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [b_3]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Tedy transformační matice z báze B do C ${}_C[id]_B$ je:

$${}_C[id]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Pro výpočet matice ${}_B[g]_B$ stačí už jen dosadit:

$$\begin{aligned} {}_B[g]_B &= {}_B[id]_C \cdot {}_C[g]_C \cdot {}_C[id]_B \\ {}_B[g]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ {}_B[g]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ {}_B[g]_B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Ted' si řekneme jak jsme tuto matici mohli vymyslet bez těchto výpočtů. g je zdefinované jako zobrazení, které zrcadlově převrátí funkci podle osy y . Toto se napíše jako $g(x) = f(-x)$, což se u kvadratické funkce projeví tak, že z $ax^2 + bx + c$ stane $ax^2 - bx + c$. Tedy členy a a c zůstanou stejné a b se vynásobí -1 , což naše matice ${}_B[g]_B$, kterou jsme vypočítali dělá.

Úkol 2 – Soustavy pomocí maticových prostorů [5b]

Nejprve máme rozhodnout, kolik řešení má soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tato soustava se dá přepsat jako:

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b} \quad (10)$$

Což se dá napsat jako rozšířenu matici:

$$\left(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n \quad | \quad \mathbf{b} \right) \quad (11)$$

Kde pravá strana se ve finále bude rovnat \mathbf{x} .

Z tohoto vychází, že aby rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ měla řešení, \mathbf{b} musí být lineární kombinací sloupcových vektorů matice \mathbf{A}

Tudíž v případě že ta rozšířená bude mít řešení, bude mít řešení právě jedno. To ale neznamená, že i rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ bude mít také jenom jedno řešení. Známe totiž bázi $\ker(\mathbf{A})$ ze kterého můžeme sestavit celou množinu $\ker(\mathbf{A})$. Protože násobením jakéhokoliv členu množiny $\ker(\mathbf{A})$ s maticí \mathbf{A} získáme nulový vektor, můžeme tedy přidat jakýkoliv vektor z této množiny k vektoru \mathbf{x} aniž bychom změnili výsledný vektor.

To tedy vyjde tak, že počet řešení této rovnice je rovný velikostí $\ker(\mathbf{A})$, kde nulový vektor $\mathbf{0}$ můžeme přiřadit k původnímu vektoru \mathbf{x} a ostatní řešení samozřejmě k příslušným lineárním kombinacím, které se nachází v $\ker(\mathbf{A})$.

Ve finále, rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ buď nemá řešení, má právě jedno (když $\ker(\mathbf{A})$ obsahuje pouze $\mathbf{0}$) nebo nekonečně mnoho (počet všech lineárních kombinací bázi $\ker(\mathbf{A})$). Pokud známe jedno řešení \mathbf{x}_0 , můžeme množinu řešení zapsat takto:

$$\{\mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{v} \in \ker(\mathbf{A})\} \quad (12)$$

Úkol 3 – Rekurence [3b]

Řešení tohoto problému je velmi podobný řešením Fibonacciho posloupnosti v minulém sérii. Můžeme nahlédnout, že $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ je dost podobné naší nové posloupnosti $s_{n+2} = 2s_{n+1} + 3s_n$. Je tedy už zřejmé, že můžeme velmi jednoduše postavit matici, stejně jako pro Fibonacciho řady:

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ s_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_n \\ s_{n+1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Vyzkoušíme tento vzorec pro s_0 a s_1 a máme rovnou důkaz indukci:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Tedy:

$$\begin{pmatrix} s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Což, jestli chápu ten pojem správně, je explicitním vzorcem této geometrické řady. Do této vzorce stačí definovat s_0 a s_1 a následně můžeme vypočítat jakýkoliv člen posloupnosti, která je daná rekurentním vztahem $s_{n+2} = 2s_{n+1} + 3s_n$.