Postup k řešení

Nejdřív si napíšu oběcný vstup, aby bylo jasný co znamená která proměnná:

n f
w_1, w_2 ... w_f, w_{f+1}
$x_{1,1}$, $x_{2,1}$ ... $x_{f,1}$, $x_{f+1,1}$
$x_{1,2}$, $x_{2,2}$ ... $x_{f,2}$, t_2
...
$x_{1,n}$, $x_{2,n}$ ... $x_{f,n}$, t_n

Víme, že $p_1 = x_{1,1} \cdot w_1 + x_{1,2} \cdot w_2 + \cdots + x_{1,f} \cdot w_f + 1 \cdot w_{f+1}$, tedy:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,f} & 1 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,f} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{f+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

A podle úprav v zadání víme, že toto ověřuje w_1:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{n,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{n,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

Všechny featury dohromady:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{n,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,f} & x_{2,f} & \cdots & x_{n,f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{n,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,f} & x_{2,f} & \cdots & x_{n,f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

A teď přichází úvaha, o kterém si nejsem 100% jistý, a to je, že rovnice výše, by měl ještě ověřovat poslední váhu, bias, w_{f+1}. Toto docílíme jednoduše - přidáme další řádek pod maticí featur:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{n,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,f} & x_{2,f} & \cdots & x_{n,f} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{n,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,f} & x_{2,f} & \cdots & x_{n,f} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

Můžeme teď nahlédnout, že $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$. Sice toto přímo neznamená, že $p_1 = t_1$ a $p_2 = t_2$, ale logicky dává smysl, že dokonalá predikce bude rovna opravdové hodnotě.

Toto znamená, že stačí ověřit:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,f} & 1 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,f} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{f+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

Teď, abychom se dozvěděli optimální váhy w_1 až w_{f+1}, stačí vynásobit obě strany rovnice zleva inverzní maticí featur a jako finální rovnici získáme:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{f+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,f} & 1 \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,f} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,f} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$