Úkol 1 – Matice přechodu [7b]

Známe tedy bázi $B : 1, x, x^2$ a $C : c_1, c_2, c_3$, které jsou součástí prostoru Q, což je množinou všech kvadratických funkcí. Zároveň také známe jak vypadají $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ a $\boldsymbol{c}_3$ v kanonické bázi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_1(x) &= \frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\ \boldsymbol{c}_2(x) &= -(x+1)(x-1) = -x^2 + 1 \\ \boldsymbol{c}_3(x) &= \frac{1}{2}x(x+1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \end{aligned} \tag{1}$$

Tudíž nejprve začneme jednoduchým převodem těchto vektorů do bázi B.

Vektory v bázi B vypadají takto:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \tag{2}$$

Takže bez žádného zbytečného myšlení převedeme vektory $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ a $\boldsymbol{c}_3$ do bázi B:

$$[\boldsymbol{c}_1]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad [\boldsymbol{c}_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad [\boldsymbol{c}_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Tudíž transformační matice z báze C do B ${}_B[id]_C$ stačí jen vypsat:

$${}_B[id]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Tedy k výpočtu matice ${}_B[g]_B$ potřebujeme už jenom matici ${}_C[id]_B$. Nejdřív stanovíme $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ a $\boldsymbol{b}_3$:

$$[\boldsymbol{b}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [\boldsymbol{b}_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [\boldsymbol{b}_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

které jednoduše převodíme do kanonické bázi:

$$\boldsymbol{b}_1 = 1 \qquad \boldsymbol{b}_2 = x \qquad \boldsymbol{b}_3 = x^2 \tag{6}$$

Tentokrát na převod těchto vektorů do bázi C musíme sledovat jejich hodnoty v bodech $x = -1, x = 0$ a $x = 1$, což opět jednoduše vypočítáme jako:

$$[\boldsymbol{b}_1]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [\boldsymbol{b}_2]_C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [\boldsymbol{b}_3]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Tedy transformační matice z báze B do C ${}_C[id]_B$ je:

$$
{}_C[id]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}
$$

Pro výpočet matice ${}_B[g]_B$ stačí už jen dosadit:

$$
\begin{aligned}
{}_B[g]_B &= \ {}_B[id]_C \ \cdot \ {}_C[g]_C \ \cdot \ {}_C[id]_B \\
{}_B[g]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
{}_B[g]_B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
{}_B[g]_B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}
$$

Teď si řekneme jak jsme tuto matici mohli vymyslet bez těchto výpočtů. g je zadefinované jako zobrazení, které zrcadlově převrátí funkci podle osy y. Toto se napíše jako $g(x) = f(-x)$, což se u kvadratické funkce projeví tak, že z $ax^2 + bx + c$ stane $ax^2 - bx + c$. Tedy členy a a c zůstanou stejné a b se vynásobí -1, což naše matice ${}_B[g]_B$, kterou jsme vypočítali dělá.

Úkol 2 – Soustavy pomocí maticových prostorů [5b]

Nejprve máme rozhodnout, kolik řešení má soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Tato soustava se dá přepsat jako:

$$
x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b} \tag{10}
$$

Což se dá napsat jako rozšířenu matici:

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n & \big| & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \tag{11}
$$

Kde pravá strana se ve finále bude rovnat $\boldsymbol{x}$.

Z tohohle vychází, že aby rovnice $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ měla řešení, $\boldsymbol{b}$ musí být lineární kombinací sloupcových vektorů matice $\boldsymbol{A}$

Tudíž v případě že ta rozšířená bude mít řešení, bude mít řešení právě jedno. To ale neznamená, že i rovnice $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ bude mít také jenom jedno řešení. Známe totiž bázi $\ker(\boldsymbol{A})$ ze kterého můžeme sestavit celou množinu $\ker(\boldsymbol{A})$. Protože násobením jakéhokoliv členu množiny $\ker(\boldsymbol{A})$ s maticí $\boldsymbol{A}$ získáme nulový vektor, můžeme tedy přidat jakýkoliv vektor z této množiny k vektoru $\boldsymbol{x}$ aniž bychom změnili výsledný vektor.

To tedy vyjde tak, že počet řešení této rovnice je rovný velikostí $\ker(\boldsymbol{A})$, kde nulový vektor $\mathbf{0}$ můžeme přiřadit k půvdonímu vektoru $\boldsymbol{x}$ a ostatní řešení samozřejmě k příslušným lineárním kombinacím, které se nachází v $\ker(\boldsymbol{A})$.

Ve finále, rovnice $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ buď nemá řešení, má právě jedno (když $\ker(\boldsymbol{A})$ obsahuje pouze $\mathbf{0}$) nebo nekonečně mnoho (počet všech lineárních kombinací bázi $\ker(\boldsymbol{A})$). Pokud známe jedno řešení $\boldsymbol{x}_0$, můžeme množinu řešení zapsat takto:

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{v} \in ker(\boldsymbol{A})\} \tag{12}$$

Úkol 3 – Rekurence [3b]

Řešení tohoto problému je velmi podobný řešením Fibonacciho pousloupnosti v minulém sérii. Můžeme nahlédnout, že $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ je dost podobné našé nové pousloupnosti $s_{n+2} = 2s_{n+1} + 3s_n$. Je tedy už zřejmé, že můžeme velmi jednoduše postavit matici, stejně jako pro Fibonacciho řady:

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ s_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_n \\ s_{n+1} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Vyzkoušíme tento vzorec pro s_0 a s_1 a máme rovnou důkaz indukcí:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Tedy:

$$\begin{pmatrix} s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Což, jestli chápu ten pojem správně, je explicitním vzorcem této geometrické řady. Do této vzorce stačí definovat s_0 a s_1 a následně můžeme vypočítat jakýkoliv člen posloupnosti, která je daná rekurentním vztahem $s_{n+2} = 2s_{n+1} + 3s_n$.