Úkol 1 – Mnohoúhelník [4b]

Přímku v rovině jsme schopni zapsat jako lineární rovnici $y = ax + b$. Začneme bodem $A = (a,\ b)^T$ a směrovým vektorem přímky $\boldsymbol{u} = (u_x,\ u_y)$. Víme, že můžeme vyjádřit přímky jako:

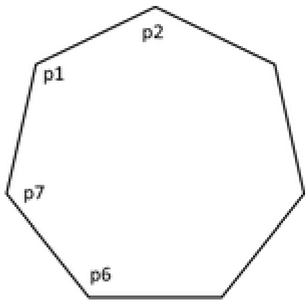
$$x = a + u_x \cdot t$$
$$y = b + u_y \cdot t$$

Kde t je reálný parametr. Z první rovnice můžeme vyjádřit t: $t = \frac{x-a}{u_x}$ a to můžeme dosadit do druhé rovnice:

$$y = b + \frac{x-a}{u_x} \cdot u_y$$
$$y = \frac{u_y}{u_x} \cdot x + b - \frac{u_y}{u_x} \cdot a$$

Můžeme si všimnout, že $\frac{u_y}{u_x}$ je vlastně tangens úhlu mezi $\boldsymbol{u}$ a osou x, ale pro náš případ je vhodnější rovnou používat hodnoty vektoru $\boldsymbol{u}$. Můžeme tedy velmi jednoduše z jednoho vektoru a bodu vytvořit rovnici přímky, u které lze jednoduše (až na jednu výjimku) určit polohu bodu vůči přímce.

Potom stačí pro každý bod $\boldsymbol{p}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{p}_n$ vytvořit přímku, která vede k následujícímu bodu a určit jestli je daný bod $\boldsymbol{x}$ "nad" nebo "pod" přimkou. Nejdřív musíme určit, který z těchto variant vůbec chceme.



Ukážeme si příklad sedmiúhelníku. Protože víme, že mnohoúhelník bude vždy konvexní, můžeme jednoduše zpozorovat vlastnost, že pokud x-ová souřadnice prvního bodu je menší než x-ová souřadnice dalšího bodu (např. body $\boldsymbol{p}_1$ a $\boldsymbol{p}_2$), budeme chtít, aby bod $\boldsymbol{x}$ ležel pod přímkou. Naopak, když x-ová souřadnice prvního bodu bude větší (např. body $\boldsymbol{p}_6$ a $\boldsymbol{p}_7$), budeme chtít, aby bod $\boldsymbol{x}$ ležel nad přímkou. Určení polohy $\boldsymbol{x}$ vůči přímce lze jednoduše nerovnicí $y \leq \frac{u_y}{u_x} \cdot x + b - \frac{u_y}{u_x} \cdot a$, kde můžeme zaměnit $\leq$ za $\geq$, dle potřeby.

Musíme ale ještě vyřešit jednu zvláštní výjimku, kde $u_x = 0$ a nerovnice nebude definovaná (např. pro pravidelný šestiúhleník). Pro tento případ stačí jen porovnat x-ovou souřadnici bodu $\boldsymbol{x}$ s x-ovou souřadnicí libovolného bodu té přímky a získame odpověď. Samozřejmě, je potřeba ještě rozlišit levou a pravou stranu mnohoúhelníku, ale to můžeme jednoduše nahlédnutím na předchozí, popřípadě dalšímu bodu a opět porovnat x-ové souřadnice.

Sice to bylo dlouhé vysvětlení, ale pro každý bod provedeme konstantní množství operací (počítání vektoru, dosazení do rovnice a rozhodovací logika) a algoritmus nám vyjde jako lineární.

Napadlo mě také aproximace kružnicí, ale to také vychází lineárně, kvůli počítání středu mnohoúhelník. Proto si nemyslím, že to jde lépe než lineárně.

Úkol 2 – Vzdálenost od roviny [6b]

Před tím než začneme řešit úlohu s čísly, nejdřív vyjádříme potřebný vzorec obecně. Z dočtených informací víme, že v rovině můžeme pracovat s bodem $\boldsymbol{x}$ vůči přímce jako v bázi definovaná vektorem té přímky a vektor na ní kolmou. Tedy $\boldsymbol{x} = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle}{||u||}\boldsymbol{u} + \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \rangle}{||\boldsymbol{n}||}\boldsymbol{n}$. Také jsme se dočetli o tom, že projekci bodu $\boldsymbol{x}$ na přímce lze zapsat jako $\boldsymbol{x}_u = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle}{||u||}\boldsymbol{u}$ A vzdálenost bodu $\boldsymbol{x}$ od přímky je rovna vzdálenosti bodu od její projekci.

Toto vše nám stačí, abychom spočítali vzdálenost bodu od roviny v prostoru.

Rovinu ρ máme definovanou jako $\boldsymbol{c} + a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2$. Už rovnou můžememe vyjádřit projekci bodu $\boldsymbol{x}$ v rovině ρ: $\boldsymbol{x}_\rho = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{||\boldsymbol{u}_1||}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{||\boldsymbol{u}_2||}\boldsymbol{u}_2$ K vyjádření samotného bodu $\boldsymbol{x}$ budeme ale potřebovat ještě jeden vektor, který je kolmý na $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$. Vzhledem k tomu, že v seriálu se přidává kolmý vektor bez vysvětlení, budu předpokládat, že totéž také můžu udělat. Máme tedy bázi $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ a $\boldsymbol{n}$. I když vektory $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$ nejsou na sebe kolmé, za chvíli ukážu proč to není potřeba. Bod $\boldsymbol{x}$ teď můžeme vyjádřit jako $\boldsymbol{x}_\rho = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{||\boldsymbol{u}_1||}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{||\boldsymbol{u}_2||}\boldsymbol{u}_2 + \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \rangle}{||\boldsymbol{n}||}\boldsymbol{n}$. Vzdálenost bodu $\boldsymbol{x}$ od roviny ρ je tedy rovna $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\rho||$, což po odečtení vypadá takto: $||\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \rangle}{||\boldsymbol{n}||}\boldsymbol{n}||$.

Teď, když víme že nám stačí jen znát vektor kolmý na rovinu od které měříme, můžeme velmi jednoduše vypočítat zadaný příklad.

Mějme tedy $\boldsymbol{x} = (6,\ 3,\ 3)^T$, $\boldsymbol{u}_1 = (2,\ -3,\ 6)^T$ a $\boldsymbol{u}_2 = (4,\ 4,\ 2)^T$. Kolmý vektor $\boldsymbol{n}$ vypočítáme vektorovým násobením: $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 = (-30,\ 20,\ 20)^T$. Protože tento výpočet dělám manuálně, místo toho abych celý vektor normalizoval, jen rychle zmenším jeho velikost na: $\boldsymbol{n} = (-3,\ 2,\ 2)^T$.

Teď můžeme dosadit do naší předchozí rovnice:

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{x}\rho|| &= ||\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \rangle}{||\boldsymbol{n}||}\boldsymbol{n}|| \\
&= ||\frac{-6}{\sqrt{17}}(-3,\ 2,\ 2)^T|| \\
&= ||\frac{(18,\ -12,\ -12)^T}{\sqrt{17}}|| \\
&= \sqrt{\frac{(324,\ 144,\ 144)^T}{17}} \\
&= \sqrt{\frac{324 + 144 + 144}{17}} \\
&= \sqrt{36} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Úkol 3 – Fyzikální měření [5b]

Máme tedy nějaké naměřené hodnoty (body), kterým můžeme přiřadit x-ové a y-ové souřadnice a hledáme nějakou přimku, abychom minimalizovali vzdálenost těchto bodů od přímky.

Když vyjádříme přimku jako $y = ax + b$, poznáme, že každý z těch bodů můžeme dosadit do této rovnice za x a y a potom získame soustavu rovnic o dvou neznámých a a b, které pro nás budou na konci značit koeficienty naší hledané přímky.

Abychom mohli už pracovat přímo s něčím z tohot textu a ne jen z hodnot, které tu nejsou napsané, nejdřív vypíšu naší nalezenou soustavu rovnic s dosazenými body:

$$\begin{aligned}
67 &= 0a + b \\
66 &= 3a + b \\
63 &= 10a + b \\
62 &= 14a + b \\
60 &= 20a + b
\end{aligned}$$

Samozřejmě už víme, že tato soustava nemá řešení, ale hledáme takový a a b, které vyjádří naší hledanou přímku. Naštěstí, rovnice na řešení tohoto problému nám už byla představena: $\mathbb{A}^T\mathbb{A}\curvearrowleft = \mathbb{A}^T\curvearrowleft$, kde $\mathbb{A}$ pro nás značí koeficienty v tét soustavě rovnic, $\curvearrowleft$ značí hledané neznámé a a b a značí levou stranu soustavy (y-ové hodnoty).

Dosadíme tedy do rovnici a získáme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 14 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ 10 & 1 \\ 14 & 1 \\ 20 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 14 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 67 \\ 66 \\ 63 \\ 62 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 47 & 5 \\ 703 & 47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 318 \\ 2896 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{-1}{1306} \begin{pmatrix} 47 & -5 \\ -703 & 47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 318 \\ 2896 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{-1}{1306} \begin{pmatrix} 466 \\ -87422 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-233}{656} \\ 66\frac{626}{653} \end{pmatrix}$$

Rychlost vypařování tekutého dusíku tedy můžeme aproximovat jako přímku $y = \frac{-233}{656}x + 66\frac{626}{653}$.