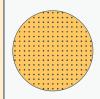


CHƯƠNG IV: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

BÀI 1: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°







NỘI DUNG

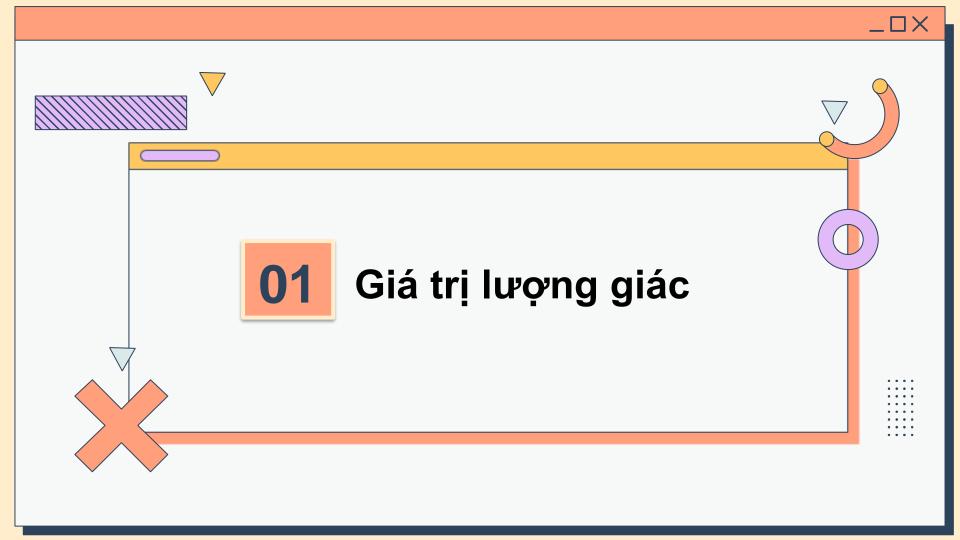
Giá trị lượng giác Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc





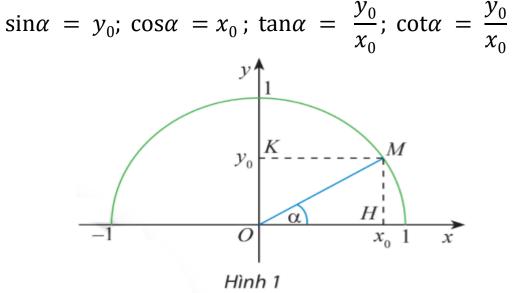


HĐKP 1:

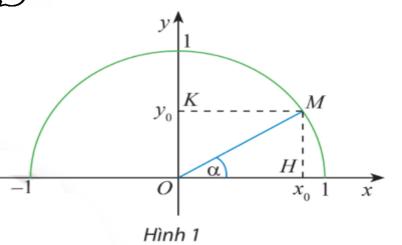
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O bán kính R=1 nằm phía trên trục hoành được gọi là nửa đường tròn đơn vị. Cho trước một góc nhọn α , lấy điểm

M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Giả sử điểm M có tọa độ $(x_0; y_0)$.

Áp dụng cách tính tỉ số lượng giác của một góc nhọn đã học ở lớp 9, chứng tỏ rằng:



HĐKP 1:



Trả lời:

Ta có: Tam giác vuông OHM vuông tại H

$$v\grave{a}\ \alpha = \widehat{xOM}$$

Do đó: $\sin \alpha = \frac{MH}{OM}$; $\cos \alpha = \frac{OH}{OM}$

$$MH = y_0$$
; $OH = x_0$; $OM = 1$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{y_0}{1} = y_0; \cos \alpha = \frac{x_0}{1} = x_0$$

Mối quan hệ giữa OH và hoành $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y_0}{x_0}$; $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x_0}{y_0}$ độ x_0 của M, mối quan hệ giữa

MH và tung độ y_o của M.



ĐINH NGHĨA

Với mỗi góc α ($0^{\circ} \le \alpha \le 180^{\circ}$) ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{x0M} = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm M, ta có:

- Tung độ y_0 của M là sin của góc α , kí hiệu là sin $\alpha = y_0$.
- Hoành độ x_0 của M là côsin của góc α , kí hiệu là cos $\alpha = x_0$;
- Tỉ số $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$) là tang của góc α , kí hiệu là tan $\alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
- Tỉ số $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$) là cô tang của góc α , kí hiệu là $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$



- + Mối quan hệ giữa $\tan \alpha$ và $\sin \alpha$, $\cos \alpha$? Tương tự với $\cot \alpha$.
- + Mối quan hệ giữa $tan \alpha$ và $cot \alpha$.

$\square X$

— CHÚ Ý

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^{\circ});$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^{o} \text{và } \alpha \neq 180^{o});$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} (\alpha \notin \{0^o; 90^o; 180^o\})$$







Ví du 1 (SGK - tr62)

Tìm các giá trị lượng giác của góc 120°

Trả lời:

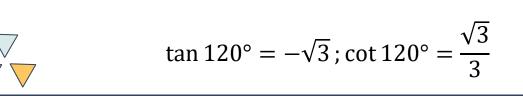
Lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 120^{\circ}$.

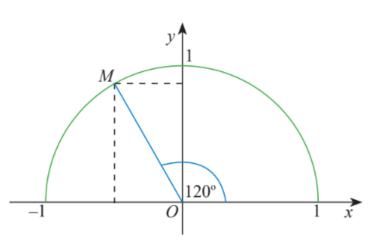
Ta có $\widehat{MOy} = 120^{\circ} - 90^{\circ} = 30^{\circ}$.

Ta tính được tọa độ điểm
$$M\left(\frac{-1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
.

Vậy theo định nghĩa ta có:

vậy theo dịnh nghĩa tá có.
$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 120^\circ = \frac{-1}{2};$$









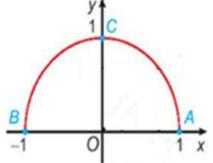
Cho $\widehat{xOM} = \alpha$ trên nửa đường tròn đơn vị. Nêu nhận xét về vị trí của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị và xét dấu của giá trị sinx, cosx trong mỗi trường hợp sau:

a)
$$\widehat{xOM} = \alpha = 90^{\circ}$$

c)
$$\widehat{xOM} = \alpha > 90^{\circ}$$

b)
$$\widehat{xOM} = \alpha < 90^{\circ}$$

d)
$$\widehat{xOM} = \alpha = 90^{\circ}$$



Chú ý:

a) Nếu α là góc nhọn thì các giá trị lượng giác của α đều dương.

Nếu α là góc tù thì $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$.

b) $\tan \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^{\circ}$, $\tan \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^{\circ}$ và $\alpha \neq 180^{\circ}$.



THỰC HÀNH 1: Tìm các giá trị lượng giác của góc 135°.



Trả lời:



Lấy điếm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho \widehat{xOM} = 135°, H là hình chiếu vuông góc của M trên Oy.

Ta có:
$$\widehat{MOy} = 135^{\circ} - 90^{\circ} = 45^{\circ}$$
.



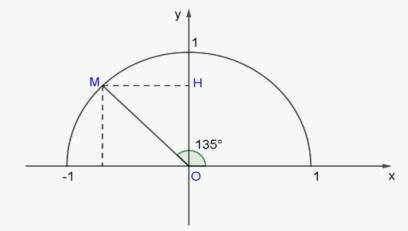
Tam giác OMH vuông cân tại H nên



OH = MH =
$$\frac{OM}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
.

$$\Rightarrow$$
 Tọa độ điểm M là $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Vậy theo định nghĩa ta có:



$$\sqrt{}$$
 sin135° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$; cos135° = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; tan135° = -1; cot135° = -1





Quan hệ giữa các

giá trị lượng giác

của hai góc bù nhau



HĐKP 2:

Trên nửa đường tròn đơn vị, cho dây cung NM song song với trục Ox (Hình 4).

Tính tổng số đo của hai góc \widehat{xOM} và \widehat{xON} .

Trả lời:

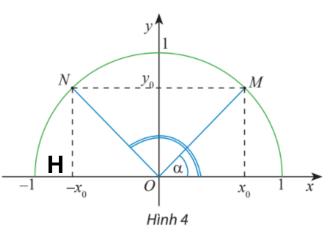
Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ N xuống Ox.

Ta có:
$$\widehat{NOH} = \widehat{ONM} = \widehat{OMN} = \widehat{MOx} = \alpha \text{ (do NM // Ox)}$$

mà $\widehat{xON} + \widehat{NOH} = 180^{\circ}$

$$\Rightarrow \widehat{xON} + \widehat{xOM} = \alpha \text{ this tage of } \widehat{xON} + \widehat{xOM} = \alpha \text{ this tage of } \widehat{xON} = \alpha \text{ this tage$$

quan hệ gì?





Tìm mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau.





KÉT LUẬN



Với mọi góc α thỏa mãn $0^{\circ} \le \alpha \le 180^{\circ}$, ta luôn có:

 $sin(180^{\circ} - \alpha) = sin \alpha;$

 $cos(180^{\circ} - \alpha) = -cos \alpha;$

 $tan(180^{\circ} - \alpha) = -tan \alpha (\alpha \neq 90^{\circ})$

 $\cot(180^{\circ} - \alpha) = -\cot \alpha \ (0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ})$

Hai góc bù nhau có sin bằng nhau; có côsin, côtang, tang đối nhau.

_ 🗆 X

Cho biết $sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$; $cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$.

Tính sin150°; cos135°; tan120°.

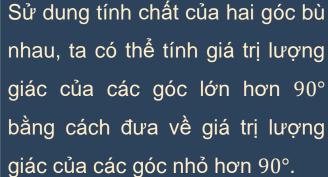
Trả lời:

Cho biết
$$sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$
; $cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$.

$$sin150^{\circ} = sin(180^{\circ} - 30^{\circ}) = sin30^{\circ} = \frac{1}{2};$$

$$cos135^{\circ} = -cos45^{\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$tan120^{\circ} = -tan60^{\circ} = -\sqrt{3}.$$





THỰC HÀNH 2:

_ 🗆 ×

Tính các giá trị lượng giác: sin120°; cos150°; cot135°.



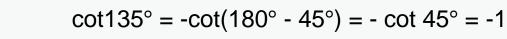
Trả lời:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



 $\cos 150^\circ = -\cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$









VẬN DỤNG 1:

Cho biết $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, tìm góc α (0° $\leq \alpha \leq 180$ °) bằng cách vẽ nửa đường tròn đơn vị.

Trả lời:

Gọi M là điểm thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho: $\widehat{xOM} = \alpha$.

Do sin $\alpha = \frac{1}{2}$ nên tung độ của M bằng $\frac{1}{2}$.

Vậy ta xác định được hai điểm N và M trên nửa

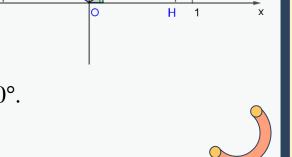
đường tròn đơn vị, thỏa mãn $\sin \widehat{xON} = \sin \widehat{xOM} = \frac{1}{2}$.

Đặt
$$\alpha = \widehat{xOM} \Rightarrow \widehat{xON} = 180^{\circ} - \alpha$$
.

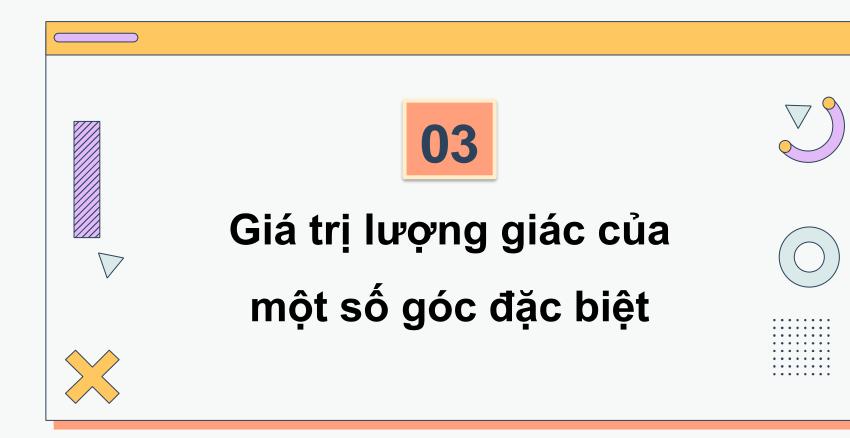
Xét tam giác OHM vuông tại H ta có:

$$\sin\alpha = \frac{MH}{OM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^o = \widehat{xOM} \implies \widehat{xON} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Vậy
$$\alpha = 30^{\circ}$$
 hoặc $\alpha = 150^{\circ}$









?

Vận dụng tính chất của hai góc bù nhau và kết quả các bài toán trên hãy điền giá trị lượng giác thích hợp vào ô trống.

Giá trị lượng giác	0 °	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	√3	II	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0
cot α	II	√3	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-1	-√3	II



Chú ý: Trong bảng kí hiệu | để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

Dưới đây là bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt.

a	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
	00	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	√3	II	-√3	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$	11	√3	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	-√3	II

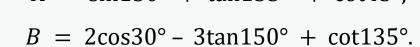
Giá trị lượng giác của các góc bất kì có thể tính bằng máy tính cầm tay.



Chú ý: Trong bảng kí hiệu | để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

THỰC HÀNH 3: Tính

$$A = \sin 150^{\circ} + \tan 135^{\circ} + \cot 45^{\circ};$$



Trả lời:

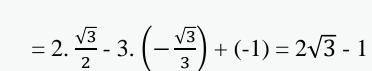
$$A = \sin 150^\circ + \tan 135^\circ + \cot 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}+(-1)+1=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+(-1)+1=\frac{1}{2}$$

$$B = 2\cos 30^{\circ} - 3\tan 150^{\circ} + \cot 135^{\circ}$$







 $-\Box X$

Tìm góc α (0° $\leq \alpha \leq 180$ °) trong mỗi trường hợp sau:

a)
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
;

$$\alpha - 60$$

a)
$$\alpha = 60^{\circ}$$
 hoặc $\alpha = 120^{\circ}$

(b)
$$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$
;

b)
$$\alpha = 135^{\circ}$$

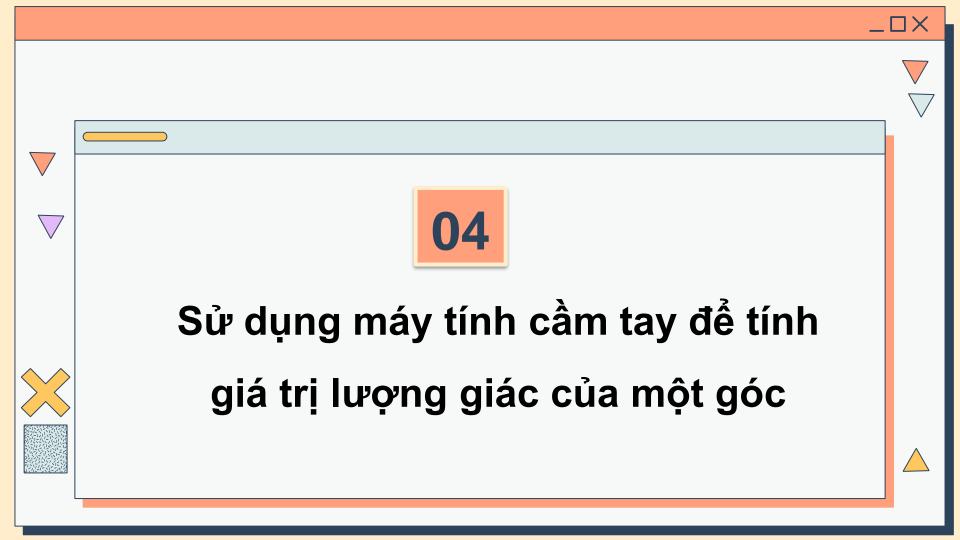
c)
$$\tan \alpha = -1$$

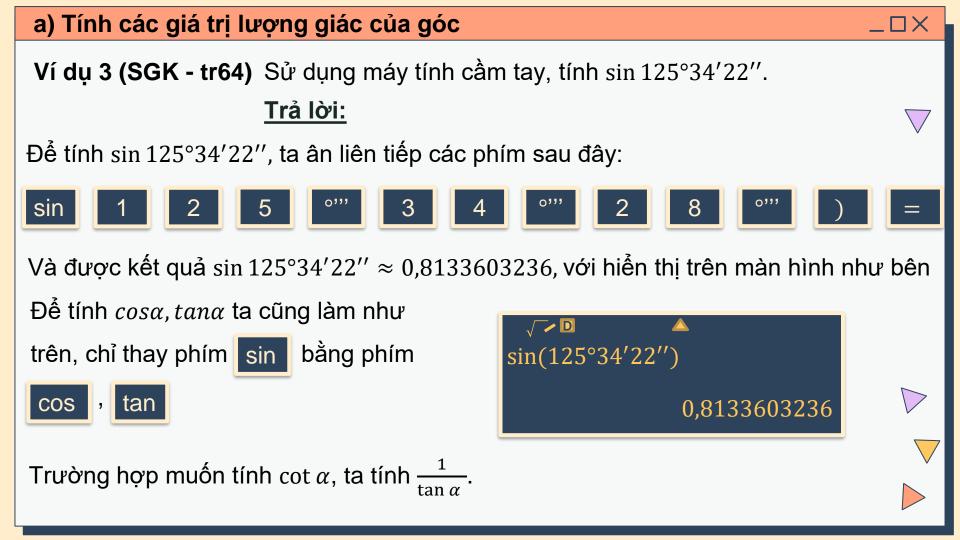
c)
$$\alpha$$

c)
$$\alpha = 135^{\circ}$$

$$d) \cot \alpha = -\sqrt{3}$$

d)
$$\alpha = 150^{\circ}$$





b) Xác định số đo của góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.

Ví dụ 4 (SGK - tr64) Sử dụng máy tính cầm tay, tìm α (0° $\leq \alpha \leq 180$ °) biết $\cos \alpha = -0.2341.$

Trả lời:

Để tìm α khi biết $\cos \alpha = -0.2341$ ta ân liên tiếp các phím sau đây:

Và được kết quả $\alpha \approx 103^{\circ}32'19''$ với hiển thị trên màn hình như hình bên

Để tìm α khi biết $sin\alpha$, $tan\alpha$ ta cũng làm

như trên, chỉ thay phím cos bằng phím
$$\cos^{-1}(-0.2341)$$
 sin tan $\cos^{-1}(-0.2341)$

Để tìm α khi biết cot α , ta tính tan $\alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$ trước rồi tính α sau.











THỰC HÀNH 4:

 $\square \square \times$

- a) Tính cos 80°43′51″; tan 47°12′25″; cot 99°9′19″.
- b) Tìm α (0° $\leq \alpha \leq 180$ °), biết $\cos \alpha = -0.723$.

Trả lời:

- $a)\cos 80^{\circ}43'51'' \approx 0,161$
- $tan \ 47^{\circ}12'25'' \approx 1,08$
 - $cot 99^{\circ}9'19'' \approx -0.16$
- b) $\alpha \approx 136^{\circ}18'10''$

- + Khi tìm α biết $sin\alpha$ thì máy tính chỉ đưa ra giá trị $\alpha \leq 90^o$.
- + Khi muốn bấm máy tính để tính giá trị $\cot \alpha$
- ta chuyển sang tính $\frac{1}{\tan \alpha}$ hoặc dùng công thức $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{d}$.





Bài 1 (SGK – tr65)

Cho biết $\sin 30^\circ = \frac{1}{3}$; $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\tan 45^\circ = 1$. Sử dụng mối liên hệ giữa các giá trị

lượng giác của hai góc bù nhau, phụ nhau để tính giá trị của

$$E = 2\cos 30^{\circ} + \sin 150^{\circ} + \tan 135^{\circ}.$$



Ta có $E = 2\cos 30^{\circ} + \sin 150^{\circ} + \tan 135^{\circ}$.

$$= 2\sin(90^{\circ} - 30^{\circ}) + \sin(180^{\circ} - 30^{\circ}) + \tan(180^{\circ} - 45^{\circ})$$



$$= 2\sin 60^{\circ} + \sin 30^{\circ} - \tan 45^{\circ}$$



$$=2.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-1=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$



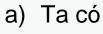
$-\Box X$

Bài 2 (SGK – tr65)

Chứng minh rằng:

- $a) \sin 20^{\circ} = \sin 160^{\circ}$;
- b) $\cos 50^{\circ} = -\cos 130^{\circ}$.





b) Ta có:

(hai góc bù nhau).

(hai góc bù nhau).

Vây $cos 50^\circ = - cos 130^\circ$.

 $V_{ay}^{\circ} \sin 20^{\circ} = \sin 160^{\circ}$.



 $\sin 20^{\circ} = \sin(180^{\circ} - 20^{\circ}) = \sin 160^{\circ}$

 $\cos 50^{\circ} = -\cos(180^{\circ} - 50^{\circ}) = -\cos 130^{\circ}$





Bài 3 (SGK – tr65)

Tìm α (0° $\leq \alpha \leq 180$ °) trong mỗi

$$a)\cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} ;$$

$$b) \sin \alpha = 0;$$

c)
$$\tan \alpha = 1$$
;

$$d) \cot \alpha$$
 không xác định.



a)
$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135^{\circ};$$

b)
$$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0^{\circ} \text{ hoặc } \alpha = 180^{\circ};$$

c)
$$\tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$$

d)
$$\cot \alpha$$
 không xác định khi $\alpha = 0^{\circ}$ hoặc $\alpha = 180^{\circ}$.



Bài 4 (SGK – tr65)

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$a) \sin A = \sin(B + C);$$

$$b) \cos A = -\cos(B + C).$$





Ta có: $A = 180^{\circ} - (B + C)$ nên

a)
$$\sin A = \sin[180^{\circ} - (B + C)] = \sin(B + C)$$

b)
$$\cos A = \cos[180^{\circ} - (B + C)] = -\cos(B + C)$$



Sử dụng các tính chất:



 $\begin{cases} \sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha \\ \cos(180^{\circ} - \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$



LUYỆN TẬP



Bài 5 (SGK – tr65) Chứng minh rằng với mọi góc α (0° $\leq \alpha \leq 180$ °), ta đều có:

$$a) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

b)
$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}, \alpha \neq 90^{\circ}).$$

c)
$$1 + \tan^2 \alpha = 1\cos 2\alpha 1\cos 2\alpha (\alpha \neq 90^\circ);$$

$$d) 1 + \cot^2 \alpha = 1\sin 2\alpha 1\sin 2\alpha (0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}).$$

a) Sử dụng nửa đường tròn đơn vị, ta có: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = OH^2 + OK^2 = OM^2 = R^2 = 1;$

Bài 5 (SGK – tr65) Chứng minh rằng với mọi góc α ($0^{\circ} \le \alpha \le 180^{\circ}$), ta đều có:

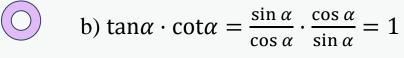
$$a) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

b)
$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}, \alpha \neq 90^{\circ}).$$

c)
$$1 + \tan^2 \alpha = 1\cos 2\alpha 1\cos 2\alpha (\alpha \neq 90^\circ);$$

$$d$$
) 1 + cot² α = 1sin2α1sin2α (0° < α < 180°).







c)
$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$



Bài 5 (SGK – tr65) Chứng minh rằng với mọi góc α ($0^{\circ} \le \alpha \le 180^{\circ}$), ta đều có:

$$a) \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

b)
$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}, \alpha \neq 90^{\circ}).$$

c)
$$1 + \tan^2 \alpha = 1\cos 2\alpha 1\cos 2\alpha (\alpha \neq 90^\circ);$$

d) 1 +
$$\cot^2 \alpha$$
 = $1\sin 2\alpha 1\sin 2\alpha (0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ})$.





d)
$$1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$





VẬN DỤNG

Bài 6 (SGK – tr65) Cho góc α với $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2\sin^2 \alpha + 5\cos^2 \alpha$.









Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Vậy
$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$







VÂN DUNG

Bài 7 (SGK – tr65) Dùng máy tính cầm

tay,hãy thực hiện các yêu cầu dưới đây:

- a) Tính sin168°45′33; cos17°22′35; tan156°26′39"; cot 56°36′42".
- b) Tìm α (0° $\leq \alpha \leq 180$ °)

trong các trường hợp sau:

- $i) \sin \alpha = 0.862;$
 - $ii)\cos\alpha = -0.567;$

iii) $tan\alpha = 0,334$.



a)
$$\sin 168^{\circ}45'33'' \approx 0,195;$$

 $\cos 17^{\circ}22'35'' \approx 0.954;$

 $\tan 156^{\circ}266'39'' \approx -0,436;$

 $\cot 56^{\circ}36'42'' \approx 0,659.$







Bài 7 (SGK - tr65) Dùng máy tính cầm

tay, hãy thực hiện các yêu cầu dưới đây:

- a) Tính sin168°45′33; cos17°22′35; tan156°26′39"; cot 56°36′42".
- b) Tim α (0° $\leq \alpha \leq 180$ °)

trong các trường hợp sau:

- *i*) $\sin \alpha = 0.862$;
 - *ii*) $\cos \alpha = -0.567$;
 - iii) tan $\alpha = 0.334$.



b)







 $\sin \alpha \approx 0.862 \Rightarrow \alpha \approx 59^{\circ}32'31''$



