



CHƯƠNG IV: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

BÀI 2: ĐỊNH LÝ COSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN





NỘI DUNG



**Định lí côsin
trong tam giác**



**Các công thức tính
diện tích tam giác**



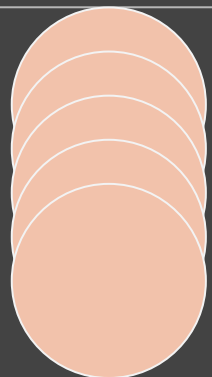
**Định lí sin
trong tam giác**



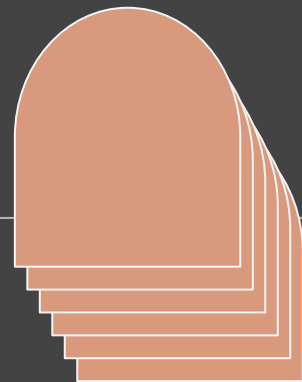
Luyện tập



01



Định lí côsin trong tam giác



❓ HĐKP 1: ✨

a) Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông với góc A nhọn và $\hat{C} \geq \hat{B}$.

Vẽ đường cao CD và đặt tên các độ dài như trong Hình 1.

Hãy thay bằng chữ cái thích hợp để chứng minh công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ theo gợi ý sau:

Xét tam giác vuông BCD , ta có:

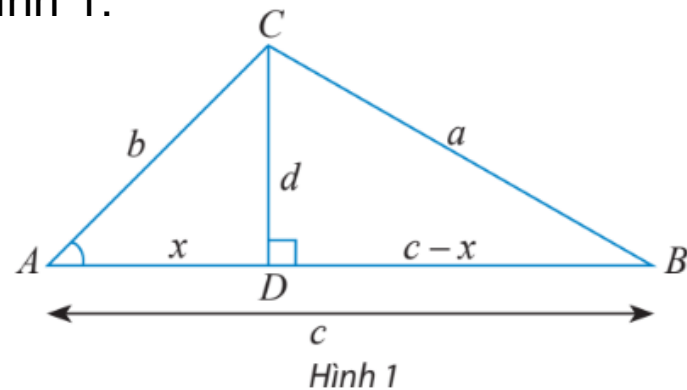
$$a^2 = d^2 + (c - x)^2 = d^2 + x^2 + c^2 - 2xc \quad (1)$$

Xét tam giác vuông ACD , ta có:

$$b^2 = d^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = b^2 - x^2 \quad (2)$$

$$cosA = \frac{\text{input}}{b} \Rightarrow \text{input} = bcosA \quad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1), ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$.



Lưu ý: Nếu $\hat{B} > \hat{C}$ thì ta vẽ đường cao BD và chứng minh tương tự.

HĐKP 1:



b) Cho tam giác ABC với góc A tù. Làm tương tự như trên, chứng minh rằng ta cũng có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA.$$

Trả lời:

Xét tam giác CDB vuông tại D , ta có:

$$a^2 = d^2 + (c + x)^2 \quad (4)$$

Xét tam giác CDA vuông tại D , ta có:

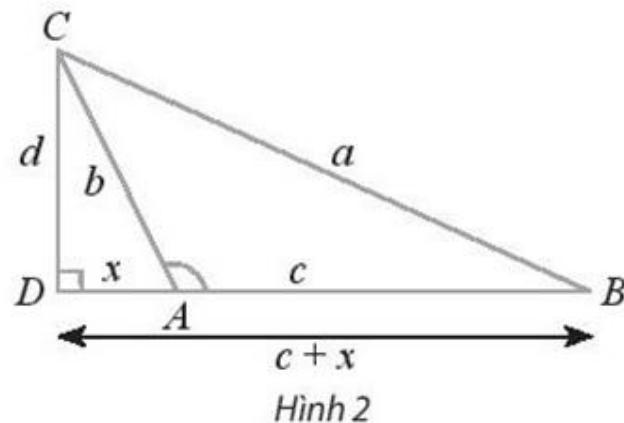
$$b^2 = d^2 + x^2 \Rightarrow d^2 = b^2 - x^2 \quad (5)$$

Lại có: $\cos \widehat{BAC} = \frac{x}{b}$

$\Rightarrow x = b \cos A$

Nếu góc A tù thì $\cos A$ mang giá trị âm hay dương?

Thay (5) và (6) vào (4), ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$



Lưu ý: Vì A tù nên $\cos A = \frac{-x}{b}$

HĐKP 1:



c) Cho tam giác ABC vuông tại A . Hãy chứng tỏ công thức $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ có thể viết là $a^2 = b^2 + c^2$.

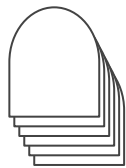
Trả lời:

c) Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$.

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cosA$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos90^\circ$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$



KẾT LUẬN

Định lí côsin

Trong tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Từ định lí vừa có, ta có thể viết côsin góc A theo độ dài 3 cạnh a, b, c như thế nào?

Ví dụ 1 (SGK - tr66) ✨

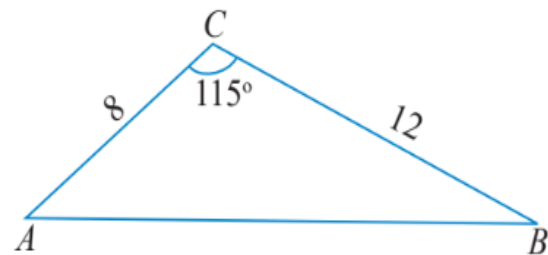


Cho tam giác ABC có $\hat{C} = 115^\circ$, $AC = 8$, $BC = 12$. Tính độ dài cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

Trả lời:

Theo định lí côsin, ta có:
$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C \\ &= 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 115^\circ \\ &\approx 289,14. \end{aligned}$$

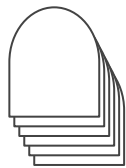
Vậy $AB \approx \sqrt{289,14} \approx 17$.



Theo hệ quả của định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \approx \frac{17^2 + 8^2 - 12^2}{2 \cdot 17 \cdot 18} \approx 0,7684.$$

Suy ra $\hat{A} \approx 39^\circ 47'$, $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \approx 25^\circ 13'$.



THỰC HÀNH 1

Tính các cạnh và các góc chưa biết của tam giác ABC trong Hình 4.

Trả lời:

Theo định lí côsin, ta có: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos A$
 $= 14^2 + 18^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \cos 62^\circ$
 $\approx 283,3863$

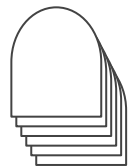
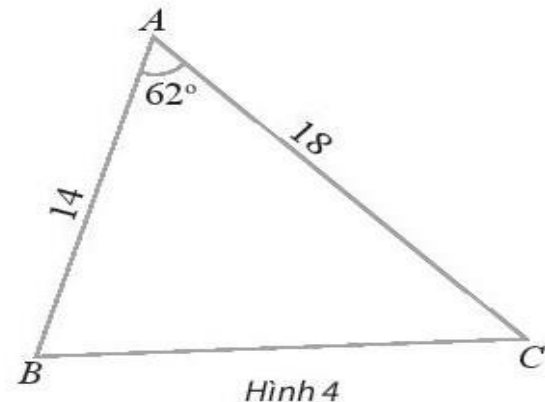
$$\Rightarrow BC = \sqrt{283,3863} \approx 16,834$$

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{14^2 + 16,834^2 - 18^2}{2 \cdot 14 \cdot 16,834} \approx 0,3297 \Rightarrow \hat{B} \approx 70^\circ 45'$$

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{18^2 + 16,834^2 - 14^2}{2 \cdot 18 \cdot 16,834} \approx 0,6788 \Rightarrow \hat{C} \approx 47^\circ 15'$$

Vậy $BC \approx 16,834$; $\hat{B} \approx 70^\circ 45'$; $\hat{C} \approx 47^\circ 15'$



VẬN DỤNG 1

Tính khoảng cách giữa hai điểm ở hai đầu của một hồ nước. Biết từ một điểm cách hai đầu hồ lần lượt là 800 m và 900 m người quan sát nhìn hai điểm này dưới một góc 70° (Hình 5).

Trả lời:

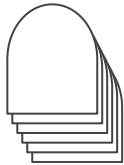
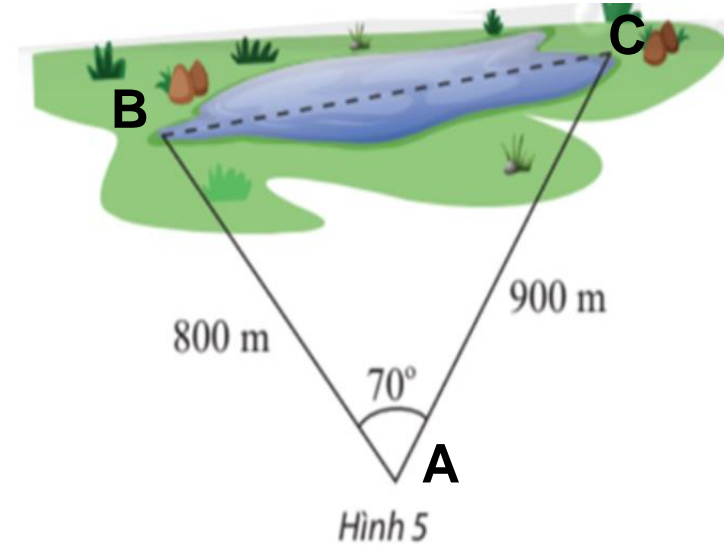
Gọi các đỉnh của tam giác như trong hình vẽ.

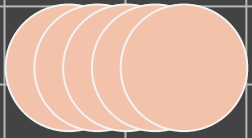
Theo định lí côsin, ta có:

$$\begin{aligned}BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos A \\&= 800^2 + 900^2 - 2 \cdot 800 \cdot 900 \cdot \cos 70^\circ \\&\approx 957490,9936\end{aligned}$$

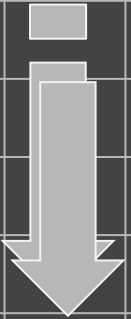
$$\Rightarrow BC \approx 978,5147$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm ở đầu bờ hồ là 978,5147m.

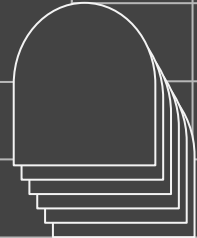




02



Định lí sin
trong tam giác

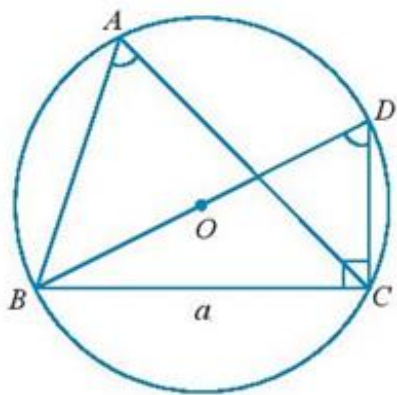


HĐKP 2: ✨

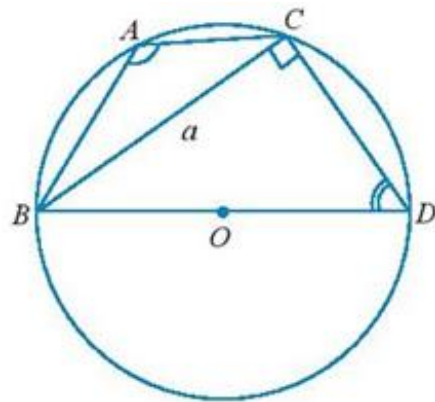
a) Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông có $BC = a, AC = b; AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Vẽ đường kính BD .

i) Tính $\sin \widehat{BDC}$ theo a và R .

ii) Tìm mối liên hệ giữa hai góc \widehat{BAC} và \widehat{BDC} . Từ đó chứng minh rằng $2R = \frac{a}{\sin A}$.



Hình 6a. Tam giác ABC có góc A nhọn



Hình 6b. Tam giác ABC có góc A tù

Trả lời:



i) Xét tam giác BDC vuông tại C, ta có: $\sin \widehat{BDC} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$

ii) Với tam giác ABC có góc A nhọn, ta có:

$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC).

$$\Rightarrow \sin \widehat{BAC} = \sin \widehat{BDC} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A}.$$

Với tam giác ABC có góc A tù, ta có tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn tâm O.

$$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{BAC} = \sin(180^\circ - \widehat{BDC}) = \sin \widehat{BDC} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A}$$

$$\text{Vậy } 2R = \frac{a}{\sin A}$$



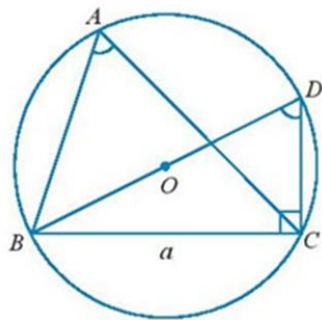
HĐKP 2:



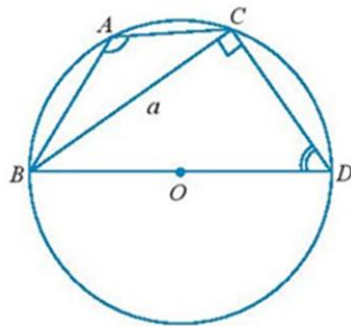
a) Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông có $BC = a, AC = b; AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Vẽ đường kính BD .

i) Tính $\sin \widehat{BDC}$ theo a và R .

ii) Tìm mối liên hệ giữa hai góc \widehat{BAC} và \widehat{BDC} . Từ đó chứng minh rằng $2R = \frac{a}{\sin A}$.



Hình 6a. Tam giác ABC có góc A nhọn



Hình 6b. Tam giác ABC có góc A tù

b) Cho tam giác ABC với góc A vuông. Tính $\sin A$ và so sánh a với $2R$ để chứng tỏ ta vẫn có công thức $2R = \frac{a}{\sin A}$.





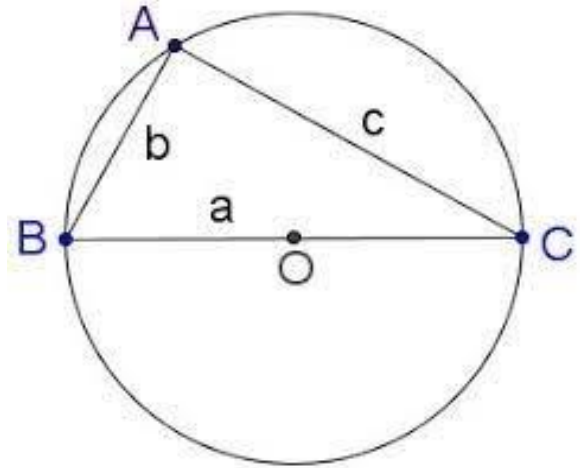
b) Tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $\frac{BC}{2}$

$$\Rightarrow 2R = a \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \sin A = \sin 90^\circ = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 2R = \frac{a}{1} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\text{Vậy } 2R = \frac{a}{\sin A}$$



KẾT LUẬN

Định lí sin

Trong tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Hệ quả:

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C;$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \quad \sin B = \frac{b}{2R}; \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$



Hãy viết a theo R và $\sin A$, viết $\sin A$ theo a và R .

Ví dụ 2 (SGK - tr68) ✨



Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 72^\circ, \hat{B} = 83^\circ, BC = 18$. Tính độ dài các cạnh AC, AB và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Trả lời:

Đặt $a = BC, b = AC, c = AB$.

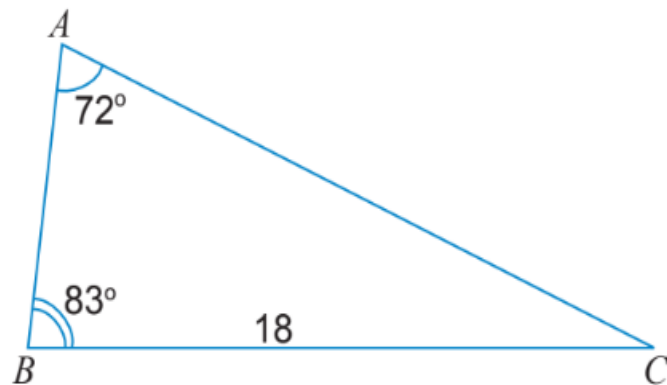
Ta có $a = 18, \hat{C} = 180^\circ - (72^\circ + 83^\circ) = 25^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Suy ra:

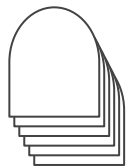
$$AC = b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{18 \cdot \sin 83^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 18,8;$$

$$AB = c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{18 \cdot \sin 25^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 8;$$



Hình 7

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin A} = \frac{18}{2 \cdot \sin 72^\circ} \approx 9,5.$$



THỰC HÀNH 2

Tính các cạnh và các góc chưa biết của tam giác MNP trong Hình 8.

Trả lời:

$$\text{Ta có: } \hat{P} = 180^\circ - \hat{M} - \hat{N}$$

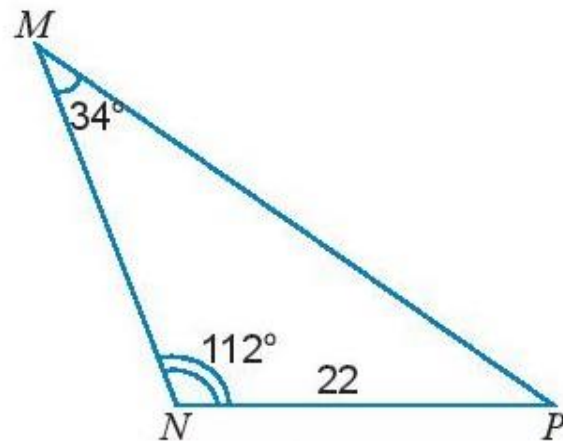
$$= 180^\circ - 34^\circ - 112^\circ = 34^\circ$$

$$\Rightarrow \text{Tam giác } MNP \text{ cân tại } N \Rightarrow MN = NP = 22$$

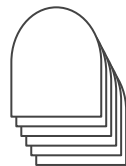
Áp dụng định lí sin trong tam giác, ta có:

$$\frac{NP}{\sin M} = \frac{MP}{\sin N} = \frac{MN}{\sin P} = 2R$$

$$\text{Suy ra: } MP = \frac{NP \cdot \sin N}{\sin M} = \frac{22 \cdot \sin 112^\circ}{\sin 34^\circ} \approx 36,5.$$



Hình 8



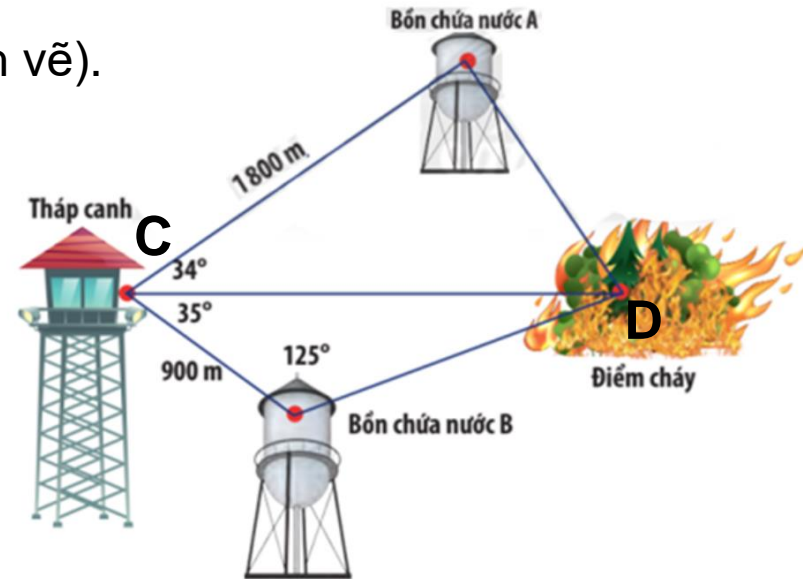
VẬN DỤNG 2

Trong một khu bảo tồn, người ta xây dựng một tháp canh và hai bồn chứa nước A, B để phòng hỏa hoạn. Từ tháp canh, người ta phát hiện đám cháy và số liệu đưa về như Hình 9. Nên dẫn nước từ bồn chứa A hay B để dập tắt đám cháy nhanh hơn ?

Trả lời:

Gọi điểm tháp canh là C, điểm cháy là D (như hình vẽ).

Ta có: $\widehat{BDC} = 180^\circ - 35^\circ - 125^\circ = 20^\circ$



Hình 9

Thảo luận nhóm đôi

Áp dụng định lí sin cho tam giác CBD , ta có: $\frac{BD}{\sin \widehat{BCD}} = \frac{CB}{\sin \widehat{BDC}} = \frac{CD}{\sin \widehat{CBD}} = 2R$.

$$\text{Suy ra: } BD = \frac{CB \cdot \sin \widehat{BCD}}{\sin \widehat{BDC}} = \frac{900 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 1509,3 \text{ (m)}.$$

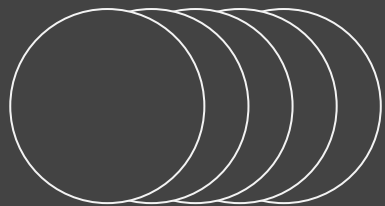
$$CD = \frac{CB \cdot \sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{BDC}} = \frac{900 \cdot \sin 125^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 2155,5 \text{ (m)}.$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ACD , ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= CA^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos \widehat{ACD} \\ &= 1800^2 + 2155,5^2 - 2 \cdot 1800 \cdot 2155,5 \cdot \cos 34^\circ \approx 1453014,5. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AD \approx 1205,4 \text{ (m)}.$$

Nhận thấy $AD < BD$ nên dẫn nước từ bồn chứa A sẽ dập tắt đám cháy nhanh hơn.



03

Các công thức
tính diện tích
tam giác



PHIẾU HỌC TẬP

HĐKP 3: Cho tam giác ABC như hình 10.

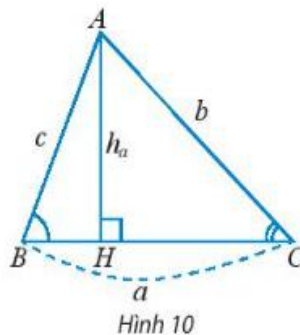
a) Viết công thức tính diện tích S của tam giác ABC.

b) Tính h_a theo a và $\sin C$.

c) Dùng hai kết quả trên chứng minh công thức:

$$S = \frac{1}{2}absinC$$

d) Dùng định lí sin và kết quả ở câu c) để chứng minh công thức: $S = \frac{abc}{4R}$.



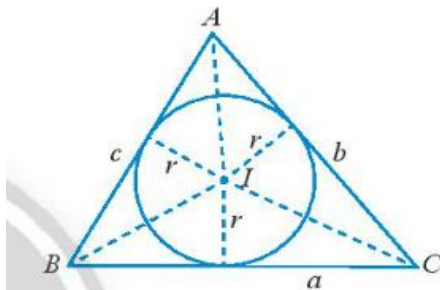
15p

Thảo luận
nhóm đôi

HĐ KP 4: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và $(I; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Tính diện tích các tam giác IBC, IAC, IAB theo r và a, b, c .

b) Dùng kết quả trên để chứng minh công thức tính diện tích tam giác ABC: $S = \frac{r(a+b+c)}{2}$.



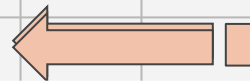
15p

.....
.....
.....
*) **Kết luận:** Nêu một số công thức tính diện tích tam giác ABC?

Thảo luận
nhóm đôi



Một số kí hiệu trong tam giác



Cho tam giác ABC có:

- + h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB .
- + R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.
- + r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- + p là nửa chu vi tam giác.
- + S là diện tích tam giác.

Công thức Heron được viết như sau:

Gọi S là diện tích và độ dài 3 cạnh tam giác lần lượt là a, b và c

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{Với } p = \frac{a+b+c}{2}$$



Phát biểu các công thức
tính diện tích tam giác
trong khung kiến thức.

❓ HĐKP 3: ✨



a) Xét tam giác ABC, đường cao AH: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a$ (1)

b) Xét tam giác AHC vuông tại H, ta có: $\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b \cdot \sin C$ (2)

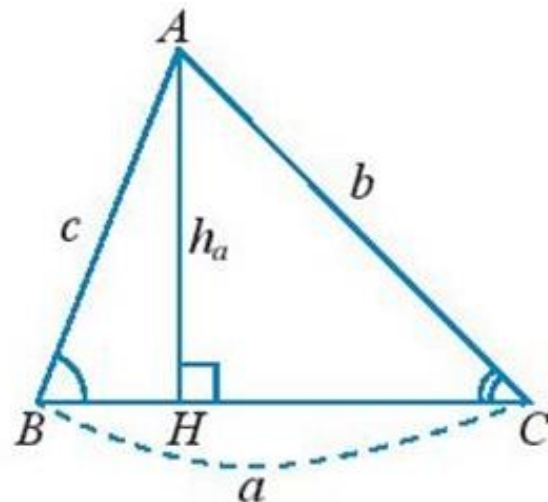
c) Thay (2) vào (1), ta được: $S = \frac{1}{2} ab \sin C$.

d) Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Vậy $S = \frac{abc}{4R}$



Hình 10

HĐKP 4: ✨

$$\text{a) } S_{IBC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot r \cdot a$$

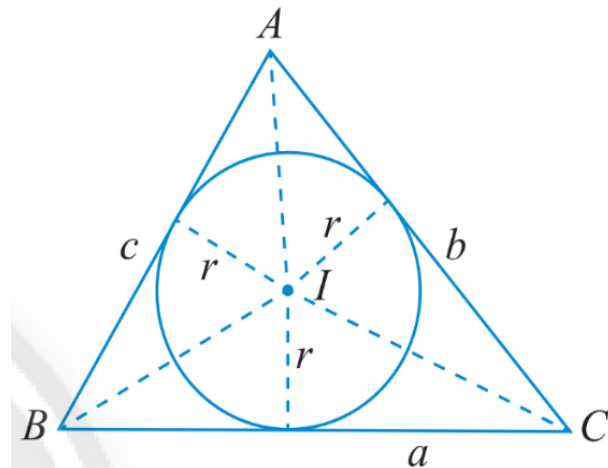
$$S_{IAC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b$$

$$S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot r \cdot c$$

$$\text{b) Ta có: } S_{ABC} = S_{IBC} + S_{IAC} + S_{IAB}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot r \cdot a + \frac{1}{2} \cdot r \cdot b + \frac{1}{2} \cdot r \cdot c = \frac{r(a+b+c)}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{r(a+b+c)}{2}$$



Hình 11

Kết luận: Ta có các **công thức tính diện tích tam giác** sau:



$$1) S = \frac{1}{2}a h_a = \frac{1}{2}b h_b = \frac{1}{2}c h_c;$$

$$2) S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B;$$

$$3) S = \frac{abc}{4R};$$

$$4) S = pr;$$

$$5) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (công thức Heron)}$$





Ví dụ 3 (SGK – tr71) Cho tam giác ABC có $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, $\hat{C} = 30^\circ$

- a) Tính diện tích tam giác ABC .
- b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trả lời:

- a) Áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, ta có:

$$S = \frac{1}{2}2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3} \approx 1,7$$

- b) Áp dụng định lí côsin, ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$$

Suy ra $c = 2$

Áp dụng định lí sin, ta có: $R = \frac{c}{2\sin C} = \frac{2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2.$

