Найти неопределенный интеграл

$\int \sqrt{(x^2+1)}$

Под корнем находится квадратный двучлен, и при попытке проинтегрировать данный пример чайник может мучаться часами. Такой интеграл берётся по частям и сводится к самому себе. В принципе не сложно. Если знаешь как.

Обозначим рассматриваемый интеграл латинской буквой и начнем решение:

$I = \int \sqrt{(x^2+1dx)} = (*)$

Интегрируем по частям:

$u = \sqrt{x^2+1} -> du = xdx/\sqrt{x^2+1}$

$dv = dx -> v = x$

$\int udv = uv - \int vdu$

$(*) = x\sqrt{x^2+1} - \int (x^2dx)/\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{x^2+1} - \int (x^2+1-1)/\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{x^2+1}0$- $\int(\sqrt{x^2+1} - 1/\sqrt{x^2+1})dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1dx} + \int dx/\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1dx} + ln|x+\sqrt{x^2+1}|$

(1) Готовим подынтегральную функцию для почленного деления.

(2) Почленно делим подынтегральную функцию. Возможно, не всем понятно, распишу подробнее:

$(x^2+1-1)/\sqrt{x^2+1} = (\sqrt{x^2+1} * \sqrt{x^2+1-1}))/\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1} - 1/\sqrt{x^2+1}$

(3) Используем свойство линейности неопределенного интеграла.

(4) Берём последний интеграл («длинный» логарифм).

Что произошло? В результате наших манипуляций интеграл свёлся к самому себе!

Приравниваем начало и конец:

$I = x\sqrt{x^2+1} - I + ln|x+\sqrt{x^2+1}|$

Переносим в левую часть со сменой знака:

$2I = x\sqrt{x^2+1} + ln|x+\sqrt{x^2+1}|$

А двойку сносим в правую часть. В результате:

$I = 1/2x\sqrt{x^2+1} + 1/2ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C$

Или: $\int \sqrt{x^2+1}dx = 1/2x\sqrt{x^2+1} + 1/2ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C$, где C = const

Константу , строго говоря, надо было добавить ранее, но приписал её в конце. Настоятельно рекомендую прочитать, в чём тут строгость:

Примечание: Более строго заключительный этап решения выглядит так:

$\ldots = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + ln|x + sqrtx^2+1| + C$, где C=const

Таким образом:

$I = xsqrtx^2+1 - I + ln|x+sqrtx^2+1| + C$

$2I = xsqrtx^2+1 + ln|x+sqrtx^2+1| + C$

$I = 1/2xsqrtx^2+1 + 1/2ln|x+sqrtx^2+1| + C/2$

Константу$C/2$ можно переобозначить через . Почему можно переобозначить? Потому что всё равно принимает любые значения, и в этом смысле между константами $C/2$ и нет никакой разницы.

В результате:

$\int \sqrt{x^2+1} dx = 1/2 x sqrt x^2 + 1 + 1/2 ln|x + sqrt x^2 + 1| + C$, где C=const

Подобный трюк с переобозначением константы широко используется в дифференциальных уравнениях. И там я буду строг. А здесь такая вольность допускается мной только для того, чтобы не путать вас лишними вещами и акцентировать внимание именно на самом методе интегрирования.