Bài giảng chương 1: Hệ phương trình tuyến tính

TS. Nguyễn Bích Vân
nbvan@math.ac.vn

Ngày 27 tháng 9 năm 2021

"Tạm dừng đến trường, không dừng học."

1.1. Giới thiệu về phương trình và hệ phương trình tuyến tính
1.1.1. Định nghĩa và các ví dụ

Định nghĩa 1.1

Một phương trình tuyến tính với n ẩn số $x_1, ..., x_n$ *là một phương trình có dạng:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \quad (1.1)$$

trong đó $a_1, a_2, ..., a_n, b$ *là các số thực,* $a_1, a_2, ..., a_n$ *được gọi là các* ***hệ số*** *của phương trình,* a_1 *được gọi là hệ số dẫn đầu ,* x_1 *được gọi là ẩn số dẫn đầu.*

Ví dụ 1.1

Trong các phương trình sau, các phương trình nào là các phương trình tuyến tính?

a) $3x + 2y - z = 7$

b) $sin(x_1) + ln(x_2) - x_3 = 0$

c) $xy + z + u = 3$

d) $(ln(2))x_1 - \frac{1}{2}x_2 + (tan\frac{\pi}{5})x_3 = 0$

e) $sin\frac{\pi}{5}x_1 + e^2x_2 + \sqrt{2}x_3 - \pi x_5 = \sqrt[3]{5}$

f) $x_1^2 - \frac{x_2}{x_3} + e^{x_4} - \sqrt{x_5} = 2$

Answer: a),d),e)

Chú ý 1.1

Nếu trong phương trình có xuất hiện một trong các hàm lượng giác, hàm mũ, hàm logarithm, hàm lũy thừa, tích hay thương của các ẩn số, thì phương trình không tuyến tính.

Định nghĩa 1.2

Nghiệm *của phương trình tuyến tính* (1.1) *là một bộ số thực* $(s_1, \ldots, s_n)$ *sao cho khi ta thay* $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$ *ta có đẳng thức* $a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n = b$. ***Tập nghiệm*** *của phương trình tuyến tính* (1.1) *là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đó. Việc giải một phương trình tuyến tính chính là việc đi tìm tập nghiệm của phương trình đó.*

Biểu diễn tập nghiệm của phương trình tuyến tính bằng cách tham số hóa

Xét phương trình tuyến tính (1.1). Ta có thể giả sử $a_1 \neq 0$, vì nếu $a_1 = 0$, thì ẩn x_1 không xuất hiện trong phương trình.
Đặt $x_2 = t_2, \ldots, x_n = t_n$ là các tham số (tức là các số thực có thể nhận các giá trị tùy ý). Khi đó $x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} t_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} t_n$.
Tập nghiệm của phương trình (1.1) là

$$\{(\frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} t_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} t_n, t_2, \ldots, t_n) | t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}\}$$

Ta sẽ áp dụng cách mô tả này cho tập nghiệm của phương trình cho trong mục a) của Ví dụ 1.1.

Ví dụ 1.2

Giải phương trình

$$3x + 2y - z = 7 \tag{1.2}$$

Giải: *Đặt* $y = t_2, z = t_3$. *Khi đó* $x = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}t_2 + \frac{1}{3}t_3$. *Tập nghiệm của phương trình* (1.2) *là*

$$\{(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}t_2 + \frac{1}{3}t_3, t_2, t_3) | t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$$

Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa 1.3

Hệ gồm m phương trình tuyến tính với n ẩn số là một hệ có dạng như sau:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Trong đó $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ là các số thực và được gọi là các hệ số của hệ phương trình.

Tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa 1.4

Nghiệm của hệ phương trình (1.3) *là một bộ n-số thực* $(s_1, s_2, ..., s_n)$ *sao cho khi ta thay* $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$ *ta được m đẳng thức đúng*

$$\begin{array}{lcl} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + ... + a_{1n}s_n & = & b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + ... + a_{2n}s_n & = & b_2 \\ ... & & \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + ... + a_{mn}s_n & = & b_m \end{array} \tag{1.4}$$

Tập nghiệm của hệ (1.3) *là tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó. Việc giải hệ* (1.3) *chính là việc đi tìm tập nghiệm của nó.*

Chú ý 1.2

Mỗi hệ số a_{ij} có 2 chỉ số: chỉ số i thể hiện số thứ tự của phương trình, chỉ số j thể hiện số thứ tự của ẩn số.

Ví dụ 1.3 (Mô tả hình học của hệ 2 phương trình tuyến tính với 2 ẩn số)

Giải 3 hệ phương trình sau

a)

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

b)

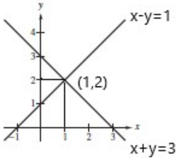
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

c)

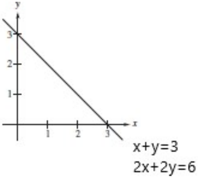
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

Giải: Với hệ a): ta thấy trong mặt phẳng tọa độ 0xy 2 đường thẳng $x + y = 3$ và $x - y = -1$ cắt nhau tại 1 điểm duy nhất có tọa độ $(1, 2)$. Vậy hệ a) có nghiệm duy nhất: $x = 1, y = 2$.
Với hệ b): 2 đường đ $x + y = 3$ và $2x + 2y = 6$ trùng nhau. Vậy hệ b) có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó chính là toàn bộ đường thẳng $x + y = 3$. Đặt $y = t \implies x = 3 - t$. Do đó tậinh ngugfap nghiệm của hệ b) là $\{(3 - t, t)|t \in \mathbb{R}\}$.
Với hệ c): 2 đường thẳng $x + y = 3$ và $x + y = 1$ song song với nhau (không có điểm chung). Vậy hệ c) vô nghiệm.

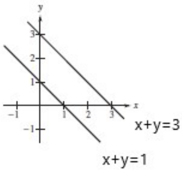
Ta có các hình minh họa sau đây



Hình: a) Hai đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm duy nhất có tọa độ $(1, 2)$



Hình: b) Hai đường thẳng trùng nhau



Hình: c) Hai đường thẳng song song

Định lý về số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định lý 1.1

Các trường hợp có thể xảy ra đối với 1 hệ phương trình tuyến tính

1. *Hệ phương trình vô nghiệm.*
2. *Hệ phương trình có nghiệm duy nhất.*
3. *Hệ phương trình có vô số nghiệm.*

Định lý này sẽ được chứng minh ở Chương 2.

1.1.2. Hệ dạng bậc thang và cách giải

Định nghĩa 1.5

Hệ phương trình tuyến tính dạng bậc thang theo dòng là một hệ có dạng như sau:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots a_{1r_2}x_{r_2} + \ldots + a_{1r_m}x_{r_m} + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{2r_2}x_{r_2} + \ldots + a_{2r_m}x_{r_m} + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \qquad \ldots & \\
a_{mr_m}x_{r_m} + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

trong đó $1 < r_2 < \ldots < r_m \leq \cancel{m}$.

Phép thế ngược lại

Hệ dạng bậc thang được giải bằng *phép thế ngược lại* như sau:
-Giải phương trình thứ m để tìm $x_{r_m}, \ldots, x_n$.
-Thế các giá trị $x_{r_m}, \ldots, x_n$ đã tìm được vào phương trình thứ $m-1$ để tìm $x_{r_{m-1}}, \ldots, x_{r_m}, \ldots, x_n$... Cứ như vậy thế vào phương trình đầu tiên, ta tìm được tất cả các ẩn số $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ví dụ 1.4

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} x - 2y + \ 3z &= 9 \\ y \ \ + 3z \ &= 5 \\ 2z \ &= 4 \end{aligned}$$

Giải: *Hệ trên có dạng bậc thang nên ta giải bằng phép thế ngược lại:từ phương trình thứ ba ta tìm được* $z = 4/2 = 2$. *Thế* $z = 2$ *vào phương trình thứ hai, ta có* $y + 3 \times 2 = 5 \Leftrightarrow y = 5 - 6 = -1$.
Thế $y = -1, z = 2$ *vào phương trình đầu tiên, ta có*
$x - 2 \times (-1) + 3 \times 2 = 9 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(1, -1, 2)$.

1.1.3. Đưa 1 hệ phương trình bất kỳ về hệ dạng bậc thang tương đương với nó

Định nghĩa 1.6

Hai hệ phương trình tuyến tính được gọi là tương đương với nhau, nếu chúng có tập nghiệm giống nhau.

Như vậy, để giải một hệ phương trình tuyến tính chưa có dạng bậc thang, ta cần đưa nó về một hệ dạng bậc thang tương đương với nó rồi giải hệ mới này bằng phép thế ngược lại.

Phép khử Gauss

Dễ thấy, các phép biến đổi sau đây đưa một hệ về 1 hệ tương đương với nó:

1. Đổi chỗ 2 phương trình của hệ.
2. Nhân cả 2 vế của 1 phương trình của hệ với 1 số thực khác 0.
3. Thêm vào 1 phương trình 1 số lần của 1 phương trình khác.

Qúa trình dùng các phép biến đổi này để đưa 1 hệ phương trình tuyến tính về 1 hệ tương đương với nó được gọi là *phép khử Gauss*, được đặt theo tên của nhà toán học người Đức Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Các kí hiệu

Ta sử dụng các kí hiệu sau cho các phép biến đổi được liệt kê ở trên:
-Nếu đổi chỗ phương trình thứ i và phương trình thứ j của hệ, thì ta viết $eqi \leftrightarrow eqj$.
-Nếu nhân cả 2 vế của phương trình thứ i của hệ với $\alpha \neq 0$, thì ta viết $\alpha eqi \rightarrow eqi$.
-Nếu thêm vào phương trình thứ i β lần phương trình thứ j, thì ta viết $eqi + \beta eqj \rightarrow eqi$

Ví dụ 1.5

Giải hệ phương trình sau bằng phép khử Gauss:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17. \end{aligned}$$

Giải:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17. \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{eq2+eq1\to eq1;eq3-2eq1\to eq3}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ y - \quad z &= -1. \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{eq3+eq2\to eq3}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Ta nhận được hệ dạng bậc thang đã xét trong Ví dụ 1.4. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(1, -1, 2)$.

Ví dụ 1.6

Giải hệ phương trình sau bằng phép khử Gauss

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Giải:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{eq2-2eq1\rightarrow eq2;\, eq3-eq1\rightarrow eq3}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_2 - 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{eq3 - eq2 \to eq3}$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 0 &= -2 \end{aligned}$$

Ta thấy phương trình thứ ba của hệ trên là một đẳng thức sai. Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 1.7

Giải hệ phương trình sau bằng phép khử Gauss

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

Giải:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{eq1 \leftrightarrow eq2}$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{eq3+eq1\to eq3}$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - 3x_3 &= -1 \\ x_2 - \ \ x_3 &= 0 \\ 3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{eq3-3eq2\to eq3}$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - 3x_3 &= -1 \\ x_2 - \ \ x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - 3x_3 &= -1 \\ x_2 - \ \ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $x_3 = t$. Thế $x_3 = t$ vào phương trình thứ hai ta suy ra $x_2 = t$.
Thế $x_2 = t, x_3 = t$ vào phương trình thứ nhất, ta được
$x_1 - 3t = -1 \Leftrightarrow x_1 = 3t - 1$.
Vậy tập nghiệm của hệ đã cho là $\{(3t-1, t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.

1.2. Phép khử Gauss và phép khử Gauss-Jordan
1.2.1. Giới thiệu về ma trận

Định nghĩa 1.7

Cho m, n là hai số tự nhiên. Một ma trận kích cỡ $m \times n$ là một mảng (hay bảng) hình chữ nhật gồm m dòng và n cột như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

trong đó a_{ij} là các số thực và được gọi là các ***phần tử*** *của ma trận. Phần tử a_{ij} nằm ở dòng thứ i và cột thứ j, các chỉ số i, j lần lượt được gọi là* ***chỉ số dòng, chỉ số cột*** *của a_{ij}*

Định nghĩa 1.8

Một ma trận có số dòng bằng số cột (tức là $m = n$) được gọi là một ***ma trận vuông cấp*** *n. Trong một ma trận vuông, các phần tử $a_{ii}, i = 1, 2, ..., n$, được gọi là các* ***phần tử trên đường chéo chính*** *của nó.*

Ví dụ 1.8

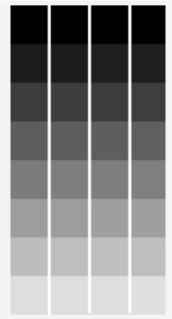
a) $\begin{bmatrix} -2 & \pi \\ \sqrt{3} & e^2 \end{bmatrix}$ *là một ma trận vuông cấp* 2. *Các phần tử trên đường chéo chính của nó là* $-2, e^2$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ \frac{3}{2} & ln2 & sin(\pi/5) \end{bmatrix}$ *là một ma trận kích cỡ* 2×3.

Dùng ma trận biểu diễn ảnh đen trắng

Các bức ảnh kĩ thuật số trong máy tính được biểu diễn bằng các ma trận điểm ảnh của chúng. Nói riêng, mỗi bức ảnh kĩ thuật số đen trắng (tên tiếng Anh: a digital gray scale image) có độ phân giải $m \times n$ điểm ảnh được biểu diễn bằng một ma trận kích cỡ $m \times n$ với các phần tử là một trong các số nguyên từ 0 đến 255. Giá trị của mỗi phần tử thể hiện mức độ đen trắng của điểm ảnh tại vị trí đó, chẳng hạn phần tử bằng 0 thể hiện điểm màu đen hoàn toàn, phần tử bằng 255 thể hiện điểm ảnh màu trắng hoàn toàn.

Ta cùng xem bức ảnh đen trắng có độ phân giải 8×4 đơn giản sau:



Ma trận tương ứng là

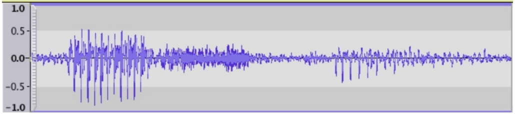
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 32 & 32 & 32 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \\ 96 & 96 & 96 & 96 \\ 128 & 128 & 128 & 128 \\ 160 & 160 & 160 & 160 \\ 192 & 192 & 192 & 192 \\ 224 & 224 & 224 & 224 \end{bmatrix}$$

Câu hỏi: Ma trận trên có kích cỡ là bao nhiêu?

Đáp án: 8×4

Ma trận biểu diễn của một đoạn âm thanh

Về mặt toán học, một đoạn âm thanh là một bước sóng với hàm liên tục theo thời gian.



Giá trị của hàm là biên độ. Biên độ dao động giữa dương và âm. Mức độ dương, âm phụ thuộc vào âm lượng của âm thanh.
Trên máy tính kỹ thuật số, đoạn âm thanh được biểu diễn bằng một dãy số, các giá trị của hàm liên tục được lấy mẫu trong các khoảng thời gian đều đặn (ví dụ: 44.100 lần một giây). Hay nói cách khác, có thể biểu diễn thành một ma trận dòng (hoặc vector dòng).

5	-6	9	-9	-5	-9	-5	5	-8	-5	-9	9	8	-5	-9	6	-2	-4	-9	-1	-1	-9	-3

Câu hỏi: Kích cỡ của ma trận trên là bao nhiêu?

Đáp án: 1×23

Dùng ma trận để minh họa các bảng thống kê số liệu

Cho bảng điểm trung bình như sau

STT	*Họ và tên*	*Toán*	*Văn*	*Anh*
1	*Nguyễn Văn A*	*8.5*	*7.3*	*9.0*
2	*Trần Thị B*	*9.6*	*8.0*	*7.6*
3	*Đỗ Thị C*	*6.7*	*8.5*	*9.3*
4	*Lê Văn D*	*10.0*	*9.1*	*8.2*
5	*Mai Văn P*	*8.8*	*8.3*	*9.5*

Nếu ta đánh số các học sinh từ 1 đến 5 và đánh số các môn học từ 1 đến 3, thì ta có thể minh họa bảng số liệu trên bằng ma trận kích cỡ 5×3 sau đây

$$A = \begin{bmatrix} 8.5 & 7.3 & 9.0 \\ 9.6 & 8.0 & 7.6 \\ 6.7 & 8.5 & 9.3 \\ 10.0 & 9.1 & 8.2 \\ 8.8 & 8.3 & 9.5 \end{bmatrix},$$

trong đó phần tử a_{ij} thể hiện điểm trung bình môn thứ j của học sinh thứ i trong danh sách.

1.2.2. Ma trận dạng bậc thang theo dòng và dạng bậc thang theo dòng rút gọn

Định nghĩa 1.9

Một ma trận dạng bậc thang theo dòng có các tính chất sau:

1. *Các dòng chứa toàn* 0 *nằm ở phía dưới cùng của ma trận.*
2. *Với mỗi dòng không chứa toàn* 0*, phần tử khác* 0 *đầu tiên của dòng đó tính từ bên trái sang bằng* 1 *và được gọi là phần tử* 1 *dẫn đầu của dòng đó.*
3. *Đối với* 2 *dòng không chứa toàn* 0*, phần tử* 1 *dẫn đầu của dòng trên nằm lệch về bên trái nhiều hơn so với phần tử* 1 *dẫn đầu của dòng dưới.*

Định nghĩa 1.10

Nếu một ma trận dạng bậc thang theo dòng có thêm tính chất sau:
-Đối với phần tử 1 *dẫn đầu của mỗi dòng: tất cả các phần tử nằm thẳng cột phía trên và phía dưới nó đều bằng* 0.
thì ma trận được gọi là ma trận dạng bậc thang theo dòng rút gọn.

Ví dụ 1.9

Các ma trận sau có dạng bậc thang theo dòng:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Câu hỏi: *Trong các ma trận trên, các ma trận nào có dạng bậc thang theo dòng rút gọn?*

Đáp án: Các ma trận ở mục b), d) là có dạng bậc thang theo dòng rút gọn, còn các ma trận ở mục a),c) không có dạng bậc thang theo dòng rút gọn.

Ví dụ 1.10

Các ma trận sau không có dạng bậc thang theo dòng

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Câu hỏi: Vì sao các ma trận trên không phải là ma trận dạng bậc thang theo dòng?

Đáp án: Ma trận ở mục e) không có dạng bậc thang theo dòng vì phần tử khác 0 đầu tiên tính từ trái sang của dòng thứ hai của ma trận không bằng 1.
Ma trận ở mục f) không có dạng bậc thang theo dòng vì dòng chứa toàn 0 không nằm ở phía dưới cùng của ma trận.

1.2.3. Ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa 1.11

Xét hệ phương trình tuyến tính (1.3). Ma trận $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ được gọi là *ma trận hệ số* của hệ phương trình (1.3).

Ma trận $[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ được gọi là *ma trận tăng hay ma trận mở rộng* của hệ phương trình (1.3).

Các phép biến đổi sơ cấp theo dòng đối với ma trận

Trong phần trước, chúng ta đã học các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi tập nghiệm của hệ phương trình, đó là:

1. Đổi chỗ 2 phương trình của hệ
2. Nhân cả 2 vế của 1 phương trình của hệ với 1 số thực khác 0.
3. Thêm vào 1 phương trình 1 số lần của 1 phương trình khác.

Khi chúng ta thực hiện các phép biến đổi này, thì tức là đối với ma trận mở rộng của hệ, ta thực hiện các phép biến đổi sau đây

1. Đổi chỗ 2 dòng của ma trận.
2. Nhân 1 dòng của ma trận với 1 số thực khác 0.
3. Thêm vào 1 dòng 1 số bội của 1 dòng khác.

Phép khử Gauss

Những phép biến đổi này đối với ma trận được gọi là các *các phép biến đổi sơ cấp theo dòng* đối với ma trận. Và như vậy, phép khử Gauss dưới dạng ma trận để giải một hệ phương trình tuyến tính gồm các bước sau

Bước 1: Viết ma trận mở rộng của hệ phương trình.

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng đối với ma trận mở rộng để đưa nó về một ma trận dạng bậc thang theo dòng.

Bước 3: Viết hệ phương trình mới có ma trận mở rộng là ma trận dạng bậc thang theo dòng đã nhận được ở bước 2 và giải nó bằng phép thế ngược lại. Tập nghiệm của hệ phương trình mới này cũng chính là tập nghiệm của hệ đã cho.

Để thuận tiện, ta sử dụng các kí hiệu sau cho các phép biến đổi sơ cấp theo dòng đối với ma trận:

- Dùng kí hiệu $R_i \leftrightarrow R_j$ khi ta đổi chỗ dòng thứ i và dòng thứ j, ở đây R là viết tắt của từ tiếng Anh "row" (dòng).
- Dùng kí hiệu $\alpha R_i \to R_i$ khi ta nhân dòng thứ i với số thực $\alpha \neq 0$.
- Dùng kí hiệu $R_i + \beta R_j \to R_i$ khi ta thêm vào dòng thứ i β lần dòng thứ j.

Ví dụ 1.11

Giải hệ phương trình sau bằng phép khử Gauss

$$
\begin{aligned}
x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= -2 \\
x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 &= -19
\end{aligned}
$$

Giải: Ma trận mở rộng của hệ là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_1 \to R_3; R_4 - R_1 \to R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + 6R_2 \to R_4; \frac{1}{3} R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{13} R_4 \to R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình mới tương ứng với ma trận dạng bậc thang theo dòng ta nhận được ở trên là

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 2 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_3 - x_4 &= -2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ tư ta nhận được $x_4 = 3$. Thế $x_4 = 3$ vào phương trình thứ ba, ta được $x_3 - 3 = -2 \Leftrightarrow x_3 = 1$. Thế $x_3 = 1, x_4 = 3$ vào phương trình thứ hai, ta được $x_2 + 1 - 2 \times 3 = -3 \Leftrightarrow x_2 = 2$. Thế $x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 3$ vào phương trình đầu tiên , ta được $x_1 + 2 \times 2 - 1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = -1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(-1, 2, 1, 3)$.

Ví dụ 1.12

Giải hệ phương trình sau bằng phép khử Gauss

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Ma trận mở rộng của hệ là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2;R_3-2R_1\to R_3;R_4-3R_1\to R_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

Ta thấy, ở dòng thứ ba của ma trận trên: tất cả các phần tử bằng 0 ngoại trừ phần tử cuối cùng. Do đó trong hệ phương trình mới sẽ có phương trình: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$, vì vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Ma trận mở rộng của hệ là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2;R_3-2R_1\to R_3;R_4-3R_1\to R_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix}$$

Ta thấy, ở dòng thứ ba của ma trận trên: tất cả các phần tử bằng 0 ngoại trừ phần tử cuối cùng. Do đó trong hệ phương trình mới sẽ có phương trình: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$, vì vậy hệ đã cho vô nghiệm.

Từ ví dụ trên ta có chú ý sau:

Chú ý 1.3

Nếu trong quá trình thực hiện phép khử Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính, ta thấy xuất hiện một dòng của ma trận có dạng $0 \quad 0 \ldots \quad a$, *trong đó* $a \neq 0$, *thì ta kết luận luôn hệ đã cho vô nghiệm mà không cần thực hiện các phép biến đổi tiếp theo.*

Phép khử Gauss-Jordan để giải một hệ phương trình tuyến tính gồm các bước sau:

Bước 1: Viết ma trận mở rộng của hệ.

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng để đưa ma trận mở rộng về *dạng bậc thang theo dòng rút gọn*.

Bước 3: Viết hệ phương trình có ma trận mở rộng là ma trận dạng bậc thang theo dòng rút gọn nhận được ở bước 2 và giải nó. Tập nghiệm của hệ phương trình mới cũng chính là tập nghiệm của hệ đã cho.

Quay lại hệ phương trình đã cho trong ví dụ 1.11

Ví dụ 1.13

Giải hệ phương trình sau bằng phép khử Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= -2 \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 &= -19 \end{aligned}$$

Giải: Ở trong lời giải của ví dụ 1.11 bằng phép khử Gauss ta đã nhận được dạng bậc thang theo dòng của ma trận, ta sẽ tiếp tục dùng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng để đưa về dạng bậc thang theo dòng rút gọn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_4 \to R_3; R_2+2R_4 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2-R_3 \to R_2; R_1+R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Hệ phương trình mới có ma trận mở rộng dạng bậc thang theo dòng rút gọn ta nhận được ở trên là:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= -1 \\ x_2 \qquad\quad &= 2 \\ x_3 \quad\; &= 1 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(-1, 2, 1, 3)$.

Ví dụ 1.14

Giải hệ phương trình sau bằng phép khử Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Giải: Ma trận mở rộng của hệ đã cho là

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Ví dụ 1.14

Giải hệ phương trình sau bằng phép khử Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 \qquad\quad &= 1 \end{aligned}$$

Giải: Ma trận mở rộng của hệ đã cho là

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Hệ phương trình mới là:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 5x_3 &= 2 \\ x_2 - 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Đặt $x_3 = t$. Từ phương trình thứ hai ta được $x_2 = -1 + 3t$. Từ phương trình thứ nhất ta được $x_1 = 2 - 5t$. Vậy tập nghiệm của hệ đã cho là $\{(2 - 5t, -1 + 3t, t | t \in \mathbb{R}\}$.

Ta kết thúc mục này với một ví dụ về dạng bài tập thường gặp trong các kỳ thi kết thúc môn học:

Ví dụ 1.15

Cho hệ phương trình với tham số m:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + mz + (2-m)u &= 6 \\ x - 4y + 3z + 2u &= 5 \\ -3x - 3y + 2z - 2u &= -7 \end{aligned}$$

a) *Giải hệ phương trình trên với $m = 1$.*

b) *Biện luận số nghiệm của hệ phương trình trên theo tham số m.*

Giải: a) Khi $m = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x - 4y + 3z + 2u &= 5 \\ y \quad\quad\quad - u &= -2 \\ z \; - u &= -2 \end{aligned}$$

(Các phép biến đổi:

- $R_1 \leftrightarrow R2$; $R_2 - 4R_1 \to R_2$;
- $R_3 + 3R_1 \to R_3$; $R_2 + R_3 \to R_2$;
- $R_3 + 5R_2 \to R_3$; $\frac{1}{3}R_2 \to R_2$; $\frac{1}{11}R_3 \to R_3$.)

Từ đó ta suy ra hệ có vô số nghiệm:
$x = -t + 3\,, y = t - 2\,, z = t - 2\, u = t\; t \in \mathbb{R}\,.$

b) Dùng các phép biến đổi tương tự câu trên, đưa về hệ:

$$\begin{aligned} x - 4y + 3z + \quad\quad 2u &= \quad 5 \\ 3y + (m-1)z - (m+2)u &= -6 \\ (5m+6)z - (5m+6)u &= -22 \end{aligned}$$

Với $m = -6/5$ hệ vô nghiệm. Với $m \neq -6/5$ hệ có vô số nghiệm.
(Đề bài chỉ yêu cầu biện luận số nghiệm nên không bắt buộc phải viết công thức nghiệm cụ thể.)

2.3.Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 1.12

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là hệ phương trình có dạng

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
\ldots\ldots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

Dễ thấy $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ luôn là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường* (trivial solution) của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Ví dụ 1.16

Giải hệ phương trình sau

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

Giải: Ma trận mở rộng của hệ đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Ví dụ 1.16

Giải hệ phương trình sau

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Giải: Ma trận mở rộng của hệ đã cho là

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

Hệ phương trình mới tương ứng với ma trận vừa nhận được là

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $x_3 = t$. Từ phương trình thứ hai, ta được $x_2 = -t$. Từ phương trình thứ nhất, ta được $x_1 = -2t$. Vậy tập nghiệm của hệ đã cho là $\{(-2t, t, t) | t \in \mathbb{R}\}$.
Khi cho $t = 0$ ta được nghiệm tầm thường của hệ phương trình đã cho.

Định lý về số nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 1.2

Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đều có nghiệm. Hơn nữa, nếu số phương trình ít hơn số ẩn thì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có vô số nghiệm.

Chứng minh.

Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn có ít nhất một nghiệm, đó là nghiệm tầm thường. Giả sử hệ thuần nhất (1.7) có số phương trình ít hơn số ẩn, tức là $m < n$. Khi đó, hệ dạng bậc thang tương đương với hệ ban đầu có dạng như sau:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots a_{1r_2}x_{r_2} + \dots + a_{1r_m}x_{r_m} &+ \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{2r_2}x_{r_2} + \dots + a_{2r_m}x_{r_m} &+ \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots\dots \quad \dots\dots \qquad \dots & & \\ a_{mr_m}x_{r_m} &+ \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

trong đó $1 < r_2 < \dots < r_m \leq m < n$

Do đó phương trình cuối cùng của hệ dạng bậc thang này có vô số nghiệm, thế vào các phương trình ở trên ta suy ra hệ ban đầu có vô số nghiệm. $\square$

1.4. Một số ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính

1.4.1. Tìm đường cong đa thức phù hợp đi qua các điểm cho trước

Cho n điểm trên mặt phẳng Oxy

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)\ , ...,\ (x_n, y_n).$$

Giả sử các hoành độ x_i là khác nhau. Tìm đường cong đa thức bậc $n-1$ đi qua n điểm trên.

Giải: Xét đa thức bậc $n-1$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Thay n cặp giá trị x_i, y_i, ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} &= y_2 \\
&\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} &= y_n
\end{aligned}$$

Giải hệ phương trình trên, ta tìm được các hệ số a_i tương ứng.

1.4. Một số ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính

1.4.1. Tìm đường cong đa thức phù hợp đi qua các điểm cho trước

Cho n điểm trên mặt phẳng Oxy

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)\ , ...,\ (x_n, y_n).$$

Giả sử các hoành độ x_i là khác nhau. Tìm đường cong đa thức bậc $n-1$ đi qua n điểm trên.

Giải: Xét đa thức bậc $n-1$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Thay n cặp giá trị x_i, y_i, ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} &= y_2 \\
&\vdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} &= y_n
\end{aligned}$$

Giải hệ phương trình trên, ta tìm được các hệ số a_i tương ứng.

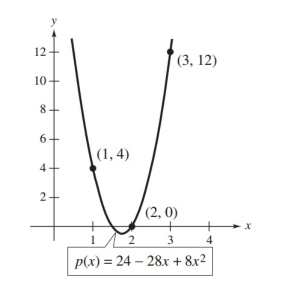
Ví dụ 1.17

Xác định đường cong đa thức bậc 2 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ có đồ thị đi qua các điểm $(1,4)$, $(2,0)$ và $(3,12)$.

Giải: Xét hệ

$$\begin{aligned}
p(1) &= a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = a_0 + a_1 + a_2 = 4\\
p(2) &= a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0\\
p(3) &= a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 12
\end{aligned}$$

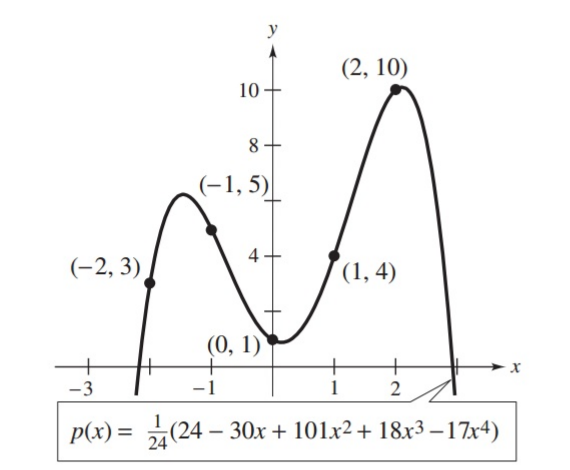
Ta có $a_0 = 24$, $a_1 = -28$, $a_2 = 8$.



Câu hỏi 1.1

Tìm đường cong đa thức bậc 4 đi qua các điểm $(-2, 3)$, $(-1, 5)$, $(0, 1)$, $(1, 4)$ *và* $(2, 10)$.

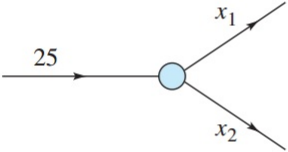
Đáp án:



1.4.2. Phân tích mạng

Mạng bao gồm các nhánh và đường giao nhau được sử dụng làm mô hình trong nhiều lĩnh vực như kinh tế, phân tích giao thông và kỹ thuật điện. Một mạng có thể được mô tả thông qua hệ phương trình tuyến tính.

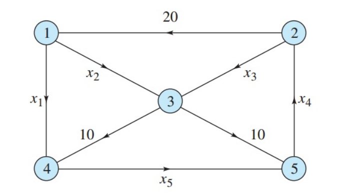
Ta xét một mạng đơn giản sau



Mạng này được mô tả thông qua phương trình $x_1 + x_2 = 25$.

Ví dụ 1.18

Xét mạng sau:



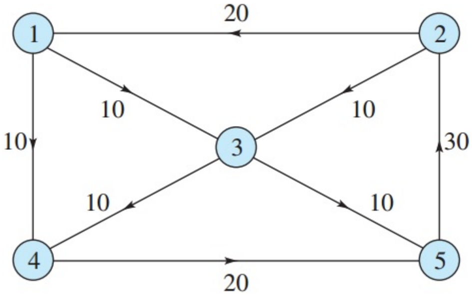
Hệ phương trình tuyến tính tương ứng là

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 20 \quad &(1)\\
x_3 - x_4 &= -20 \quad &(2)\\
x_2 + x_3 &= 20 \quad &(3)\\
x_1 - x_5 &= -10 \quad &(4)\\
-x_4 + x_5 &= -10 \quad &(5)
\end{aligned}
$$

Giải hệ ta được

$$x_1 = t - 10, \quad x_2 = -t + 30, \quad x_3 = t - 10, \quad x_4 = t + 10, \quad x_5 = t$$

Trong ví dụ trên, giả sử ta có thể điều khiển giá trị ở x_5, thông qua công thức nghiệm, ta có thể điều khiển giá trị ở các biến còn lại. Ví dụ nếu $t = 20$, ta thu được mạng sau:

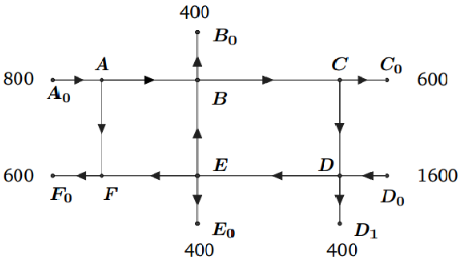


Ta thấy loại phân tích mạng được trình bày trong ví dụ trên có thể được sử dụng trong các bài toán xử lý lưu lượng giao thông qua các con đường hoặc lưu lượng nước qua hệ thống thủy lợi.

Bài toán giao thông

Ví dụ 1.19

Trong một thành phố nọ có một hệ thống đường một chiều như trong hình dưới đây, trong đó A, B, C, D, E, F là các giao lộ, $A_0, B_0, C_0, D_0, D_1, E_0, F_0$ là các lối vào hoặc ra khỏi hệ thống đó, mũi tên chỉ chiều của đường. Người ta đếm số lượng xe vào và ra khỏi hệ thống này trong một ngày và thấy: Có 800 xe vào lối A_0, 400 xe ra khỏi hệ thống qua lối B_0, 600 xe ra lối C_0, 1600 xe vào lối D_0 và 400 xe ra lối D_1, 400 xe ra lối E_0 và 600 xe ra lối F_0. Người ta cũng quan sát thấy số lượt xe đi trên đoạn đường AB nhiều gấp đôi số lượt xe đi trên đoạn EF; số lượt xe đi trên đoạn đường DE nhiều gấp rưỡi số lượt xe đi trên đoạn đường BC. Giả sử các xe vào hệ thống đều ra khỏi hệ thống trong thời gian đó.



Câu hỏi 1.2

a, *Lập hệ phương trình tuyến tính mô tả mối quan hệ giữa số xe ở các đoạn đường.*

b, *Tính số lượt xe đi qua các đoạn đường?*

Đáp án:

a,

$$\begin{aligned}
AB + AF &= 800\\
AB - BC + BE &= 400\\
BC - CD &= 600\\
-CD + DE &= 1200\\
DE - BE - EF &= 400\\
EF + AF &= 600\\
AB - 2EF &= 0\\
DE - 1.5BC &= 0
\end{aligned}$$

b,

$$\begin{aligned}
AB &= 400\\
BC &= 1200\\
BE &= 1200\\
CD &= 600\\
DE &= 1800\\
EF &= 200\\
AF &= 400
\end{aligned}$$

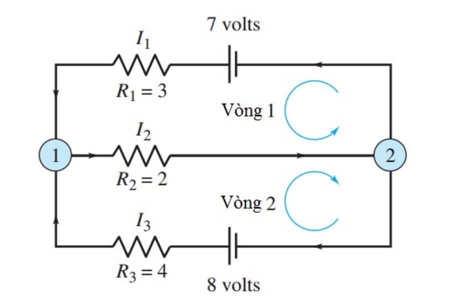
Mạng điện với các Định luật Kirchhoff

1, **Định luật Kirchhoff về cường độ dòng điện:** tại bất kỳ nút (ngã rẽ) nào trong một mạch điện, thì tổng cường độ dòng điện chạy đến nút phải bằng tổng cường độ dòng điện từ nút chạy đi.

2. **Định luật Kirchhoff về điện thế:** tổng giá trị điện thế dọc theo một vòng bằng 0.

Ví dụ 1.20

Xác định cường độ dòng điện I_1, I_2, I_3 trong mạng điện sau:



Theo Định luật Kirchhoff về cường độ dòng điện, ta có

$$I_1 + I_3 = I_2.$$

Theo Định luật Kirchhoff về điện thế, ta có

$$\begin{aligned} R_1I_1 + R_2I_2 &= 3I_1 + 2I_2 = 7 && \textbf{Vòng 1} \\ R_2I_2 + R_3I_3 &= 2I_2 + 4I_3 = 8. && \textbf{Vòng 2} \end{aligned}$$

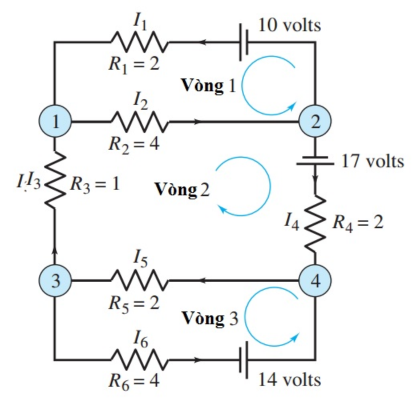
Vậy ta có hệ

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 3I_1 + 2I_2 &= 7 \\ 2I_2 + 4I_3 &= 8 \end{aligned}$$

Giải hệ, ta được $I_1 = 1$ amp, $I_2 = 2$ amps, $I_3 = 1$ amp.

Câu hỏi 1.3

Xác định cường độ dòng điện $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ trong mạng điện sau:



Đáp án: $I_1 = 1$ amp, $I_2 = 2$ amps, $I_3 = 1$ amp, $I_4 = 1$ amp, $I_5 = 3$ amps, $I_6 = 2$ amps.