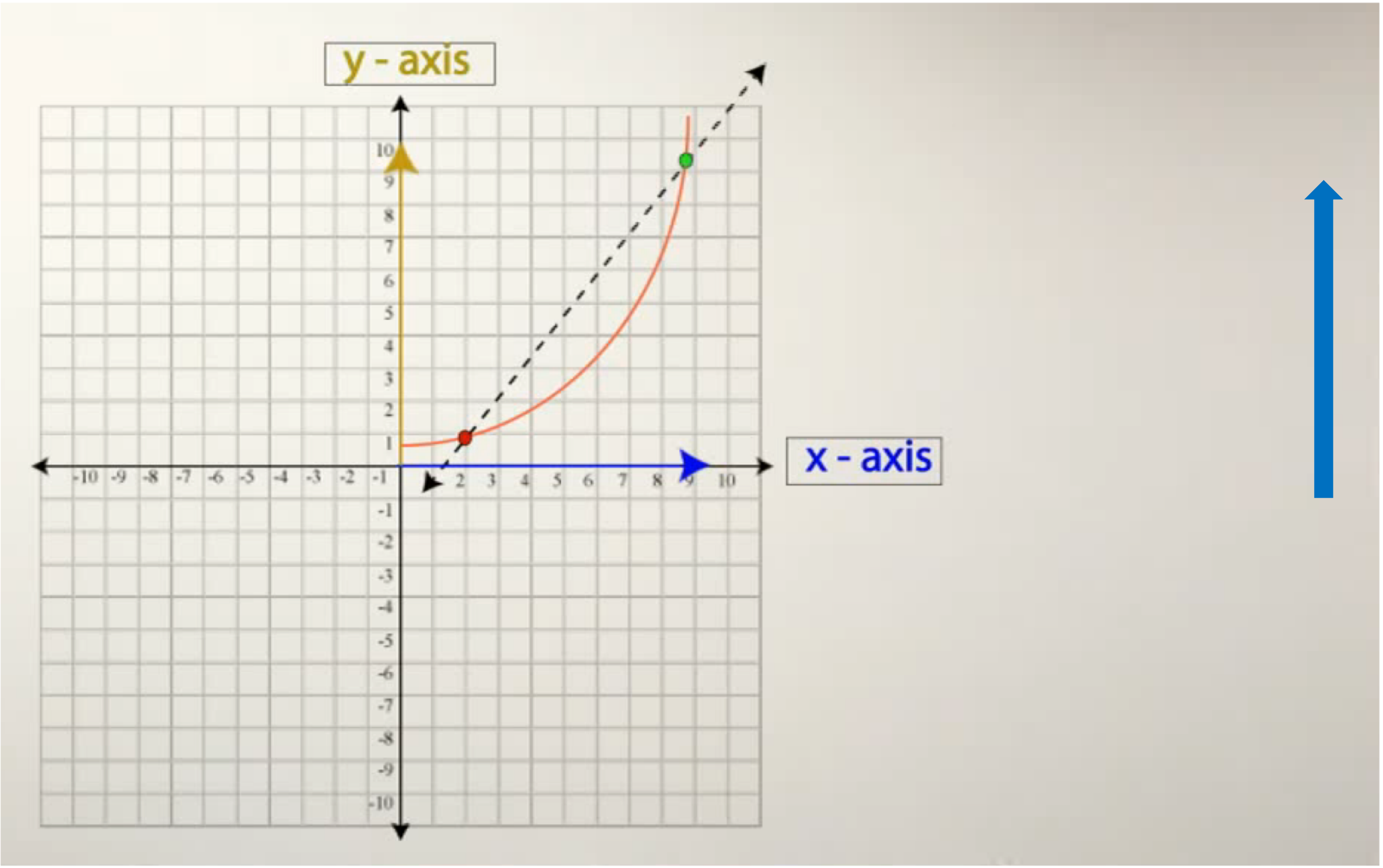


Giới hạn

Liên tục

Đạo hàm

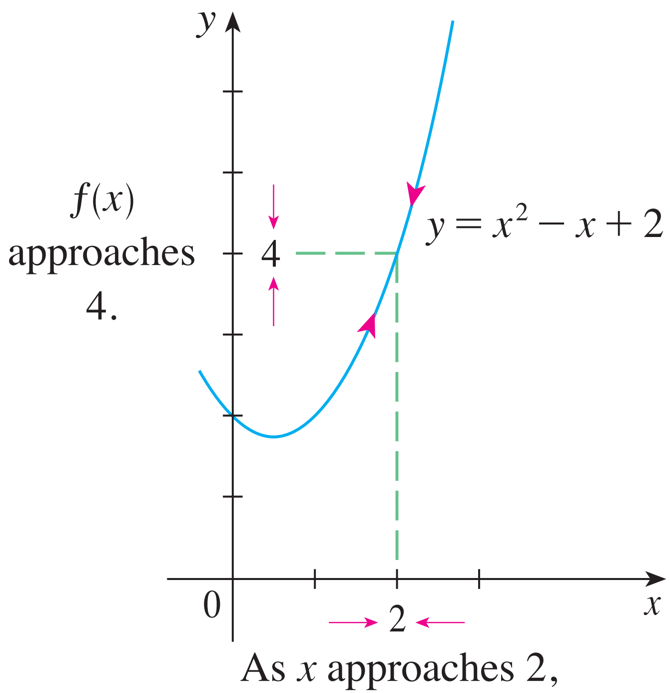
Tích phân

Ứng dụng Đạo hàm, Tích phân

Định nghĩa Đạo hàm: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Mở đầu

Chúng ta xét tính chất của hàm $f(x) = x^2 - x + 2$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Bảng trên cho thấy giá trị của hàm số $f(x)$ khi x dần tới 2 nhưng không bằng 2.

Ta nói "giới hạn của hàm số $f(x) = x^2 - x + 2$ khi x tiến tới 2, bằng 4" và viết

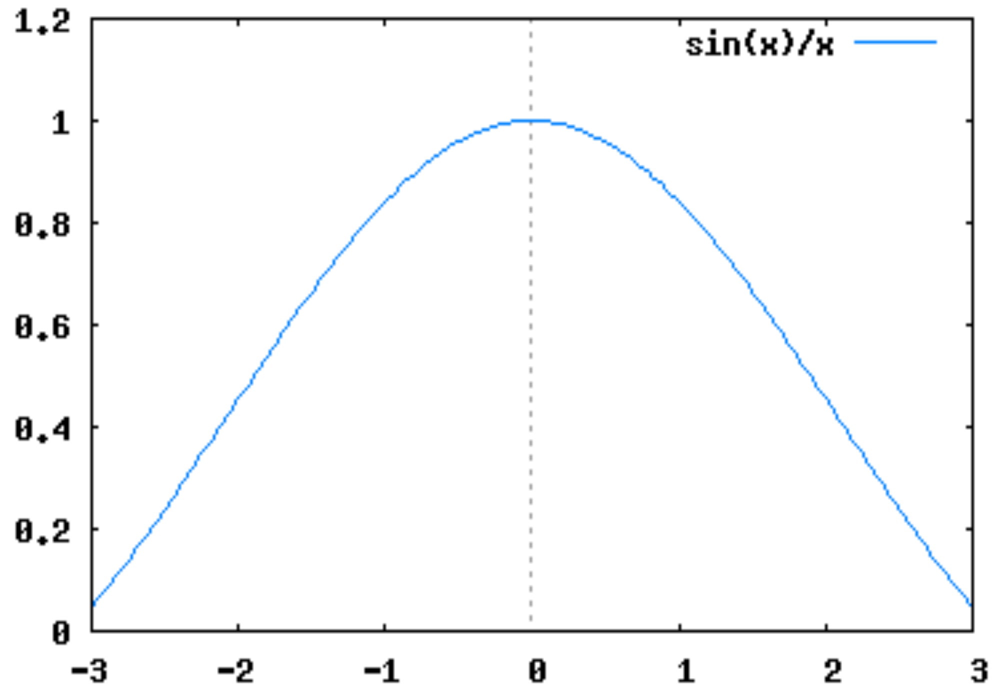
$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Mở đầu

Xét hàm số:

$$f(x) = \sin(x)/x$$

Tìm giá trị của $f(x)$ khi x tiến tới 0?



x	-0.2	-0.1	-0.05	0.05	0.1	0.2
$f(x)$	0.993	0.998	0.9995	0.9995	0.998	0.993

Từ bảng giá trị, khi x tiến tới 0, $f(x)$ tiến tới 1.

Mở đầu

Định nghĩa

Tính giới hạn

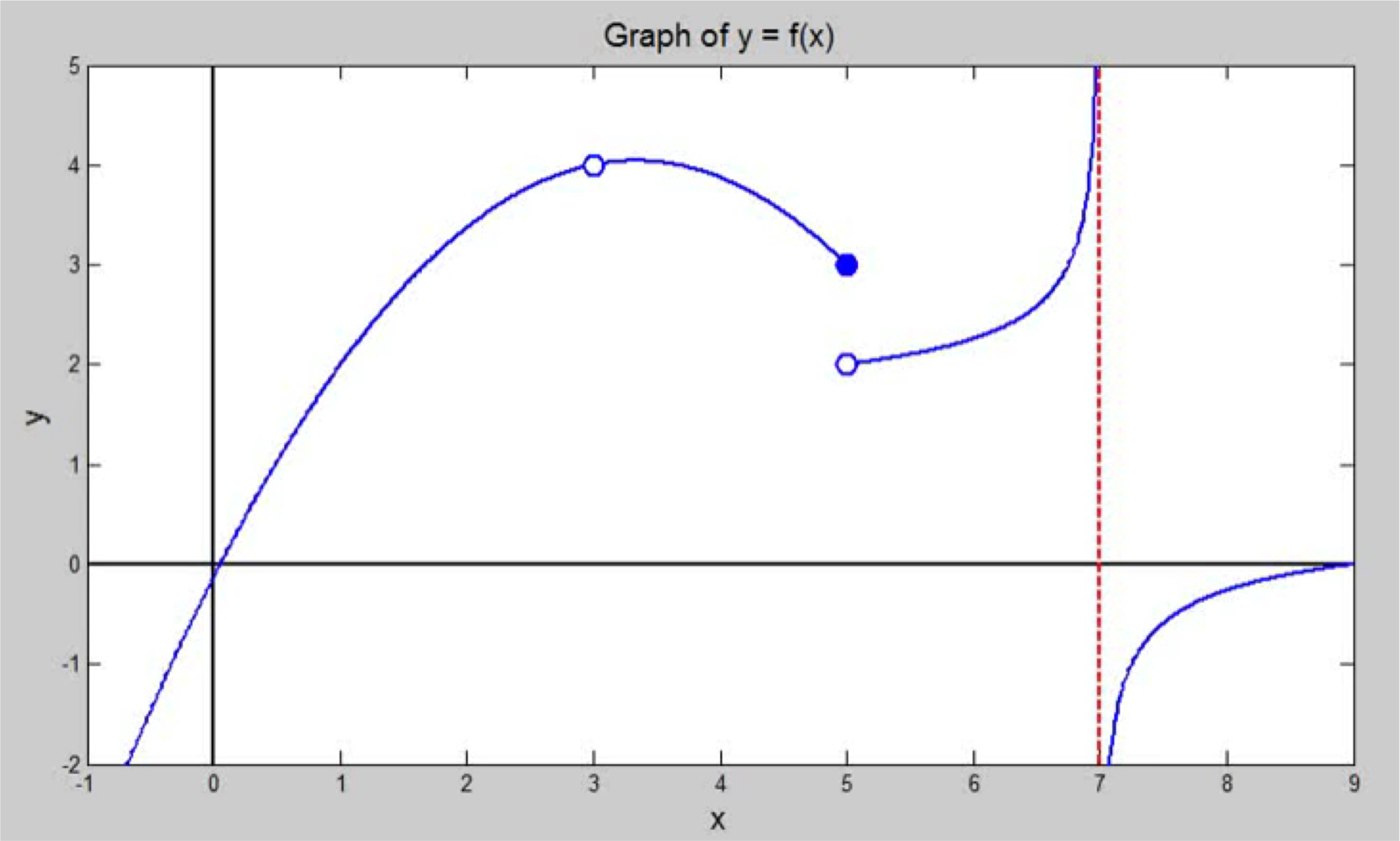
Định nghĩa

Định nghĩa chung

Cho $f(x)$ là một hàm trong khoảng mở có chứa x_0, có thể trừ chính điểm x_0.

- ***Giới hạn trái*** của $f(x)$ khi x tiến tới x_0 là L, ký hiệu là $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$, nếu giá trị của $f(x)$ gần với L khi x tiến tới nhưng luôn nhỏ hơn x_0 ($x < x_0$).
- ***Giới hạn phải*** của $f(x)$ khi x tiến tới x_0 là L, ký hiệu là $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, nếu giá trị của $f(x)$ tiến đến L khi x tiến đến nhưng luôn lớn hơn x_0 ($x > x_0$).
- Nếu $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ thì L là *giới hạn* của $f(x)$ khi x tiến tới x_0, ký hiệu là $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Định nghĩa

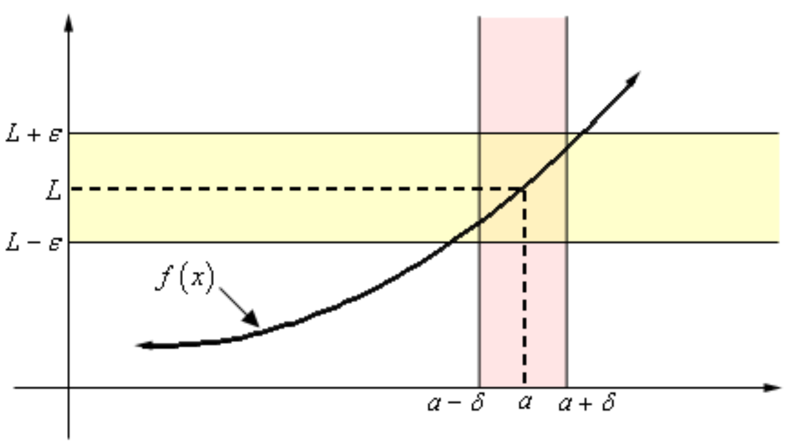


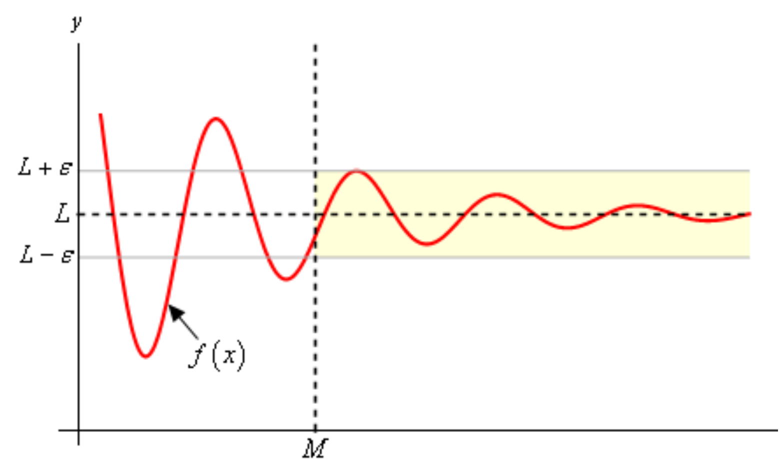
Định nghĩa

Định nghĩa chính xác

Cho f là một hàm xác định trong một khoảng mở có chứa điểm a, nhưng có thể trừ điểm a.
Ta nói rằng, giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới a là L, ký hiệu là $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ nếu, với mọi $\varepsilon > 0$, tìm được một số $\delta > 0$ sao cho:

Khi $0 < |x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$





Định nghĩa

Ví dụ

a) Cho *f(x)* = *C*, *C* là hằng số. CMR: $\lim_{x \to x_0} f(x) = C$

CM: Cho trước $\varepsilon > 0$, vì *f(x)* = *C* với mọi *x* nên với mọi $\delta > 0$ sao cho luôn có

$$|x - x_0| < \delta$$

$$|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$$

b) Cho *f(x)* = *x*. CMR: $\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0$

CM: Cho trước $\varepsilon > 0$ chỉ cần chọn $\delta = \varepsilon$ thì luôn có

$$|x - x_0| < \delta \text{ thì } |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$$

Định nghĩa

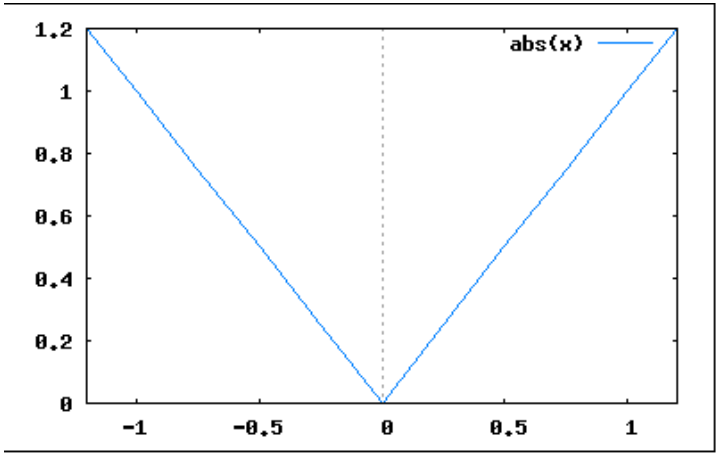
Ví dụ

$f(x) = |x|$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ 0

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ 0

$\lim_{x \to 0} f(x) =$ 0

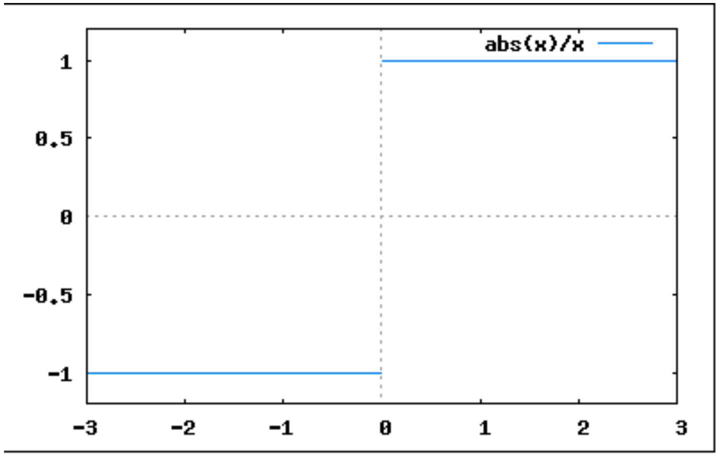


$f(x) = |x| / x$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ -1

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ 1

$\lim_{x \to 0} f(x) =$ Không tồn tại!



Định nghĩa

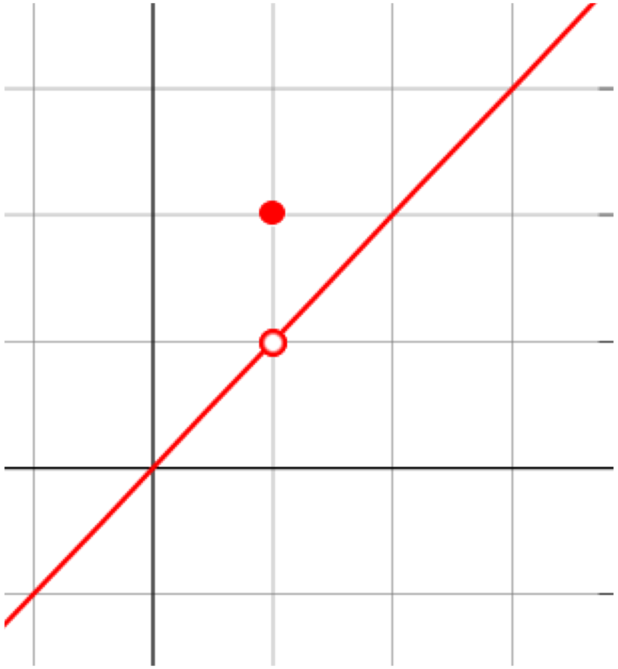
Ví dụ

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ khi } x \neq 1 \\ 2 \text{ khi } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$



Tính toán

Định lý

- $\lim_{x \to a} x = a$
- $\lim_{x \to a} c\, f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$
- $\lim_{x \to a} (f(x)/g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \,/\, \lim_{x \to a} g(x)$
  với điều kiện $\lim_{x \to a} (g(x)) \neq 0$
- $\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

Tính toán

Ví dụ

$$\lim_{h\to 0}\frac{(h-3)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(h^2-6h+9)-9}{h} = \lim_{h\to 0}(h-6) = -6$$

$\longrightarrow$ kỹ thuật: đơn giản hóa biểu thức!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \ ?\ \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+x}\right)^2-2^2}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}$$

$\longrightarrow$ kỹ thuật: nhân và chia với cùng một biểu thức!

Tính toán

Ví dụ

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=?$$

Khi $x=1$ thì $\dfrac{x^n-1}{x^m-1}=\dfrac{0}{0}$

$$\frac{x^n-1}{x^m-1}=\frac{(x-1)(1+x+x^2+..+x^{n-1})}{(x-1)(1+x+x^2+..+x^{m-1})}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\frac{n}{m}$$

Tính toán

Ví dụ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=?$$

Đặt $\sqrt[3]{1+x}=y$

$\Rightarrow x=y^3-1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y-1}{y^3-1}$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y^2+y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{(y^2+y+1)}$$

$$=1/3$$

Tính toán

Ví dụ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}}{x}=?$$

Gợi ý: đặt

$$\sqrt[3]{1+x}=y\Rightarrow x=y^3-1$$
$$\sqrt[5]{1+x}=z\Rightarrow x=z^5-1$$

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}}{x}=\frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)+(1-\sqrt[5]{1+x})}{x}$$

Tính toán

Định nghĩa

Hàm nguyên lớn nhất là hàm định nghĩa bởi: [[x]]= số nguyên lớn nhất mà luôn nhỏ hơn hoặc bằng x.

Ví dụ: [[3.4]] = 3; [[4.9]] = 4

Câu hỏi

$$\lim_{x \to 3} [[x]] = ?$$

$$\lim_{x \to 3^-} [[x]] = 2$$
$$\lim_{x \to 3^+} [[x]] = 3$$

Tính toán

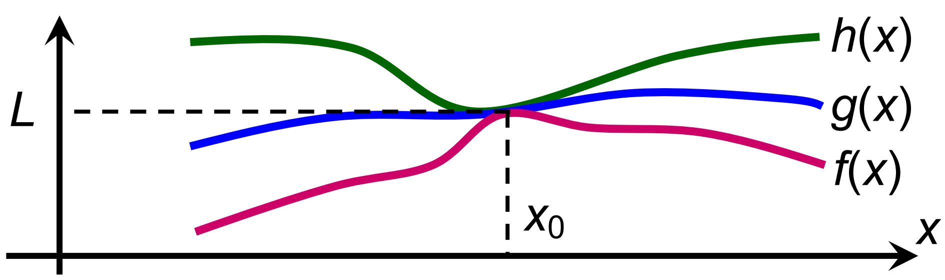
Định lý kẹp

Cho $f(x) \le g(x) \le h(x)$ với mọi x trong khoảng mở có chứa x_0, trừ x_0. Nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

thì

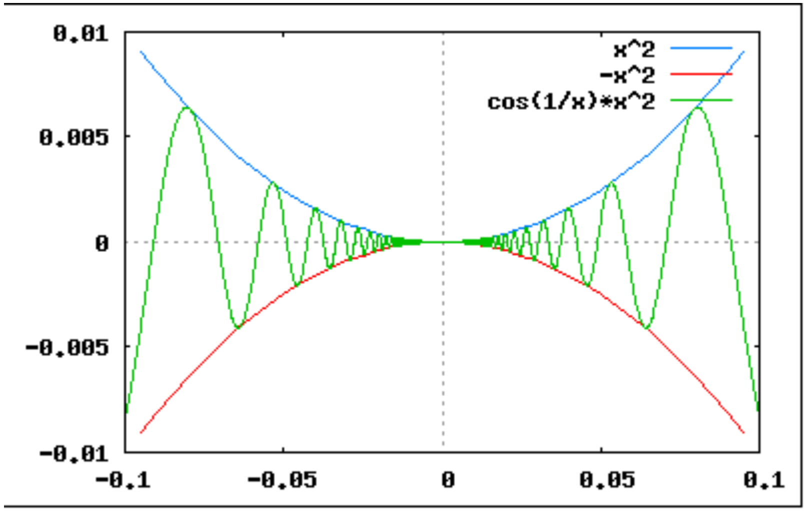
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$



Tính toán

Ví dụ

Tính $\lim_{x\to 0} x^2\cos(1/x)$?



$$-1 \le \cos(1/x) \le 1$$

$$-x^2 \le x^2\cos(1/x) \le x^2$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} (-x^2) = 0$$

Theo định lý kẹp $\rightarrow$ $\lim_{x\to 0} x^2\cos(1/x) = 0$

Tính toán

Định lý

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Tính toán

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = ?$$

Gợi ý:

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}.\frac{1}{\cos x}$$

Tính toán

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=?$$

Gợi ý: sử dụng công thức hạ bậc

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Tính toán

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx} = ?$$

Gợi ý: nhân chia thêm *nx* và *mx*

Tính toán

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=?$$

Gợi ý: sử dụng công thức hạ bậc

Tính toán

Câu hỏi

Tính

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x}{1-\cos x}=?$$

Gợi ý: sử dụng công thức 1 – ab = (1 - a)b + (1 - b)

$$\frac{1-\cos x\cos 2x}{1-\cos x}=\frac{(1-\cos x)\cos 2x+1-\cos 2x}{1-\cos x}$$

= 5

Vô cực

Định nghĩa

Cho $f(x)$ là một hàm trên khoảng mở có chứa x_0, trừ bản thân điểm x_0.

• ***Giới hạn của*** $f(x)$ là vô cùng, khi x tiến đến x_0, ký hiệu $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, nếu $f(x)$ có thể lớn tùy ý khi x tiến tới x_0 (từ cả hai phía) nhưng không bằng x_0.

•Tương tự, chúng ta có định nghĩa đối với $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ và giới hạn vô cùng đối với giới hạn trái và phải của x_0.

Vô cực

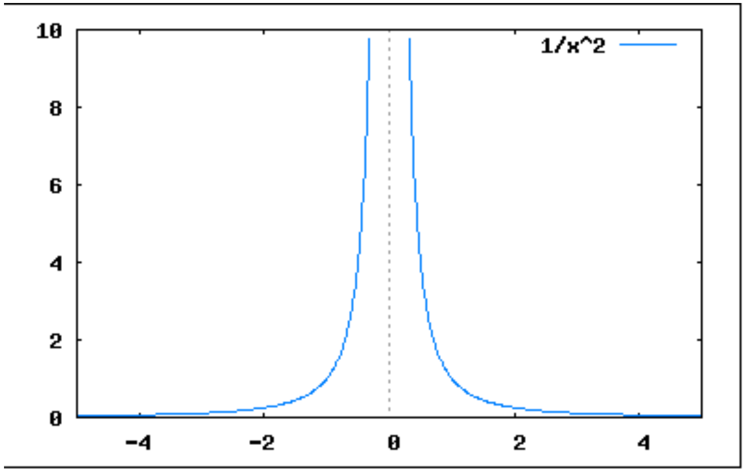
Ví dụ

$f(x) = 1/(x^2)$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

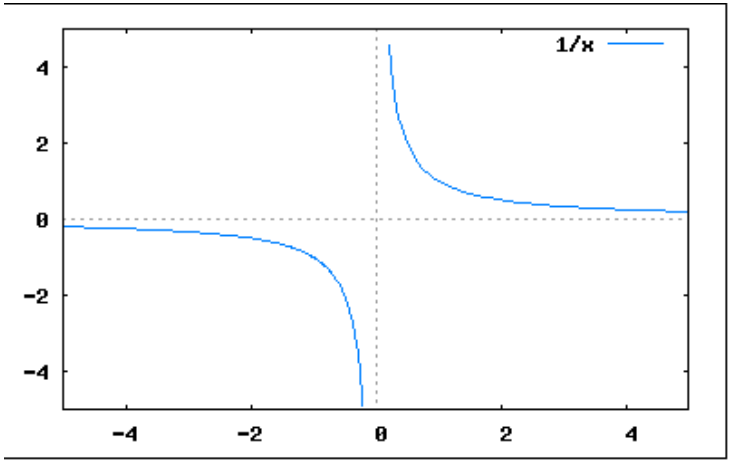


$f(x) = 1/x$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0} f(x) =$ Không tồn tại!



Vô cực

Định nghĩa

Cho $f(x)$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Ta có:

- ***Giới hạn của f(x) khi x tiến ra vô cùng là*** L, ký hiệu $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, nếu $f(x)$ tiến gần đến L khi x đủ lớn.

  $(+\infty = \infty)$

- ***Giới hạn của f(x) khi x tiến ra âm vô cùng là*** L, ký hiệu $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, nếu $f(x)$ tiến gần đến L khi x đủ bé (âm).

Vô cực

Ví dụ

Tính
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-x^2+8x}{-5x^4+7}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)}{x^4\left(-5+\frac{7}{x^4}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x^3}}{-5+\frac{7}{x^4}}=\frac{2+0+0}{-5+0}$$

→ **kỹ thuật:** chia cả tử và mẫu cho số hạng lớn nhất!

Vô cực

Câu hỏi

Tính $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}} = ?$

Gợi ý: chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{x}$

Vô cực

Câu hỏi

Tính $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = ?$

Gợi ý: nhân liên hợp

Vô cực

Ví dụ

Tính $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=?$

Gợi ý: đặt x = y^6

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=\lim_{y\to 1}\frac{1+2y}{(1+y)(1+y+y^2)}=\frac{1}{2}$$

Vô cực

Định lý

Khi *x* đủ lớn, chúng ta có (for *k* > 0) :

$$c << \ln(x) << x^k << e^x$$

Tức là:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^k} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x} = 0 \text{ khi } k > 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} a_m/b_n \text{ khi} & m = n \\ 0 \quad \text{khi} & m < n \end{cases}$$

Câu hỏi: điều gì sẽ xảy ra nếu *m* > *n*?

Vô cực

Định lý

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{-\frac{x^2+1}{2}}\right\}^{\frac{-2x^2}{x^2+1}}$$

$$= e^{-2}$$

Vô cực

Ví dụ

Tính $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$

Gợi ý: kiểm tra xem giới hạn trên có dạng vô định không?

$$\lim_{x\to 0}\left\{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right\}^{\frac{\sin x}{x}}$$

= e

Vô cực

Ví dụ

Tính

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = ?$$

Gợi ý: kiểm tra xem giới hạn trên có dạng vô định không?

Đáp án: $e^{3/2}$

$$\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left\{\left(1+\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x-\cos 2x}}\right\}^{\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}}$$

$$\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x} = \frac{\cos x-1}{x^2\cos 2x}+\frac{1-\cos 2x}{x^2\cos 2x}$$

$$= \frac{-2\sin^2(x/2)}{x^2\cos 2x}+\frac{2\sin^2 x}{x^2\cos 2x} = \frac{3}{2}$$

Vô cực

Ví dụ

Tính $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}} = ?$

Gợi ý: kiểm tra xem giới hạn trên có dạng vô định không?

Đáp án: 1/2

Vô cực

Ví dụ

Tính $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}} = ?$

Gợi ý: kiểm tra xem giới hạn trên có dạng vô định không?

Đáp án: 0

Bài tập

1. Tính a) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$ b) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0}\frac{(\sin^2\mathrm{x})\ln(1+\mathrm{x})}{\tan\mathrm{x}-\mathrm{x}}$

2. Cho $\frac{x^2+x-6}{|x-2|}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$. Tồn tại hay không $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$? Vẽ đồ thị hàm số $g(x)$?

3. Tìm *a* để giới hạn sau tồn tại $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$. Tính giới hạn của biểu thức trên với *a* tìm được.

4. Tính: a) $\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0} x^2\sin\frac{1}{x}$ b)$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x^3+x^2}\sin\frac{\pi}{x}$ c)$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}e^{\sin\frac{\pi}{x}}$

5. Tìm $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left(\frac{1^2}{\mathrm{n}^3}+\frac{3^2}{\mathrm{n}^3}+\frac{5^2}{\mathrm{n}^3}+\cdots+\frac{(2\mathrm{n}-1)^2}{\mathrm{n}^3}\right)$

1.6 Exercises: 5, 21, 27, 29, 33 **1.7 Exercises:** 37, 43