

Bài 1. Hàm số (Function)

Khái niệm

Hãy xem xét các ví dụ sau:

- Tính cước phí Taxi / Grab / Uber
- Giá thuê nhà ở của sinh viên
- Kết quả học tập của sinh viên

Hàm số phát sinh khi một đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác

Khái niệm

Một hàm số có thể biểu diễn bởi 4 cách:

- Bằng phương trình
- Bằng bảng số
- Bằng đồ thị
- Bằng mô tả bằng từ ngữ

Ví dụ A

Diện tích A của một hình tròn phụ thuộc vào bán kính của nó.

Quy tắc để liên hệ r và A được cho bởi phương trình

$$A = \pi r^2$$

Với mỗi một giá trị dương r , có một giá trị của A , và ta nói rằng A là một hàm của r .

Ví dụ B

Dân số thế giới P phụ thuộc vào thời gian t .

– Bảng bên cho biết dân số ước tính trên thế giới $P(t)$ tại thời điểm t .

– Ví dụ,

$$P(1950) \approx 2,560,000,000$$

– Tuy nhiên, đối với mỗi giá trị của t , ta có một giá trị P tương ứng, và ta nói P là hàm của t .

Year	Population (millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

© 2007 Thomson Higher Education

Ví dụ C

Giá C của việc gửi thư hạng nhất phụ thuộc vào trọng lượng w của thư.

- Mặc dù không có công thức đơn giản để liên hệ w và C , bưu điện có quy tắc để tính C khi w đã biết.

Ví dụ D

Gia tốc thẳng đứng a của nền khi đo bằng gia tốc kế trong một trận động đất là một hàm phụ thuộc thời gian t .

Hình dưới đây mô tả đồ thị thu được trong trận động đất Northridge ở Los Angeles năm 1994.



- Với thời điểm t , đồ thị sẽ cho một giá trị tương ứng a .

Định nghĩa

Một hàm số f là một quy luật gán cho mỗi phần tử x trong một tập D duy nhất một phần tử, gọi là $f(x)$, trong một tập E .

Miền xác định

Ở đây ta hãy xét các hàm số mà ở đó các tập D và E là các tập số thực.

Tập D được gọi là miền xác định của hàm số.

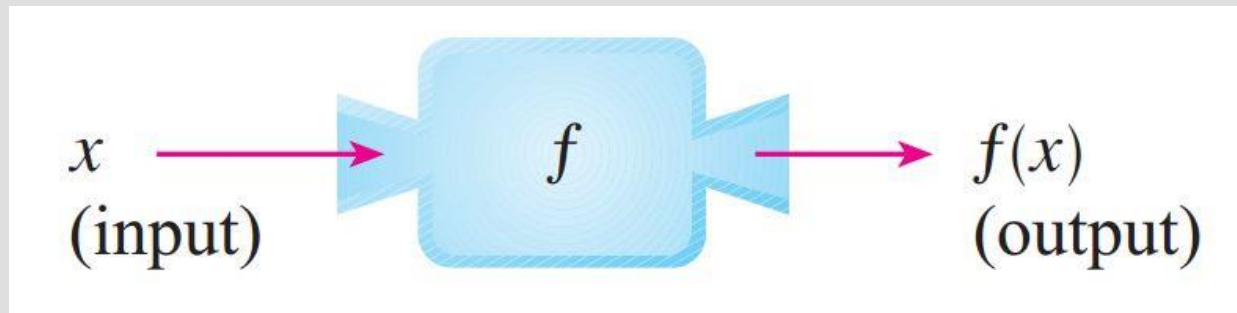
Giá trị và khoảng giá trị

Giá trị $f(x)$ là một giá trị của f tại x và được gọi là ' f của x .'

Khoảng giá trị của f là tập tất cả các giá trị có thể của $f(x)$ khi x thay đổi trong miền xác định.

Sơ đồ mũi tên

Có thể coi hàm số như một cái máy sản xuất (machine).



Nếu x thuộc miền xác định của hàm số f thì x sẽ là đầu vào và máy sẽ tạo ra đầu ra $f(x)$

Sơ đồ mũi tên

Có một cách khác để vẽ một hàm số đó là dùng sơ đồ mũi tên.

- Mỗi mũi tên sẽ nối một phần tử của D với một phần tử của E .
- Mũi tên chỉ ra rằng $f(x)$ liên hệ với x , $f(a)$ liên hệ a , v.v.

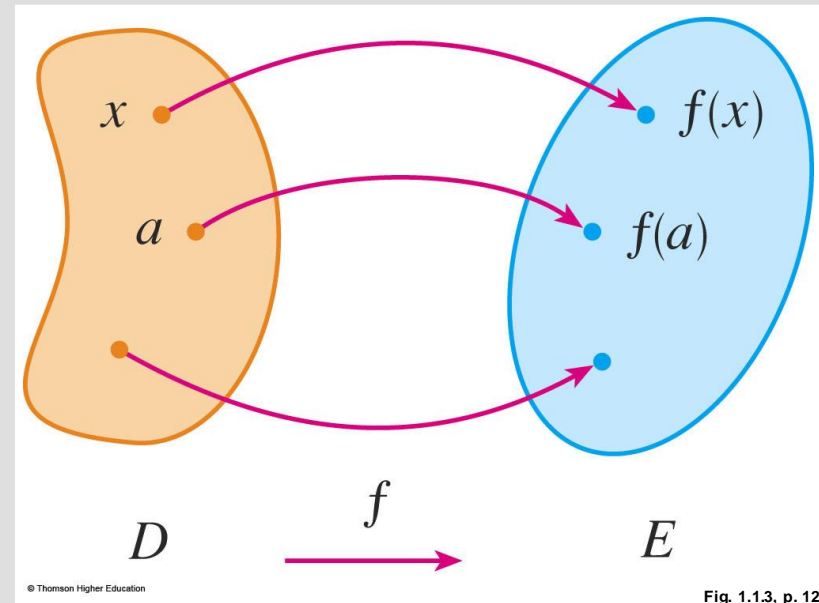


Fig. 1.1.3, p. 12

Đồ thị

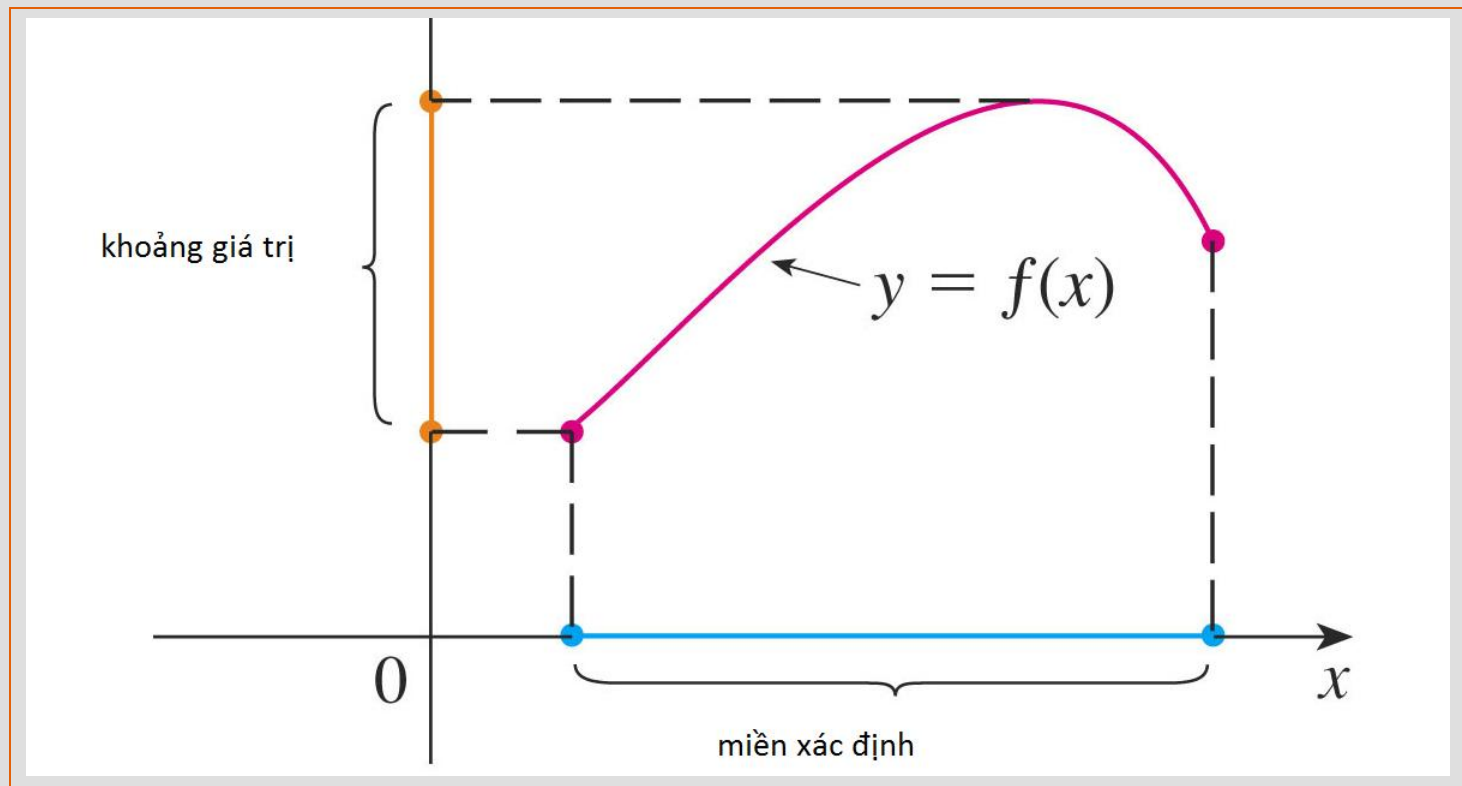
Phương pháp thông thường nhất để quan sát trực quan một hàm số đó là phương pháp đồ thị.

- Nếu f là một hàm số có miền xác định D , thì đồ thị của nó là một tập các cặp $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$
- Chú ý rằng chúng là các cặp đầu vào-đầu ra.
- Nói cách khác, đồ thị f bao gồm tất cả các điểm (x, y) trong mặt phẳng tọa độ sao cho $y = f(x)$ và x nằm trong miền xác định của f .

Đồ thị

Đồ thị của f cho chúng ta biết:

- Miền xác định của f trên trục x
- Khoảng giá trị của nó trên trục y

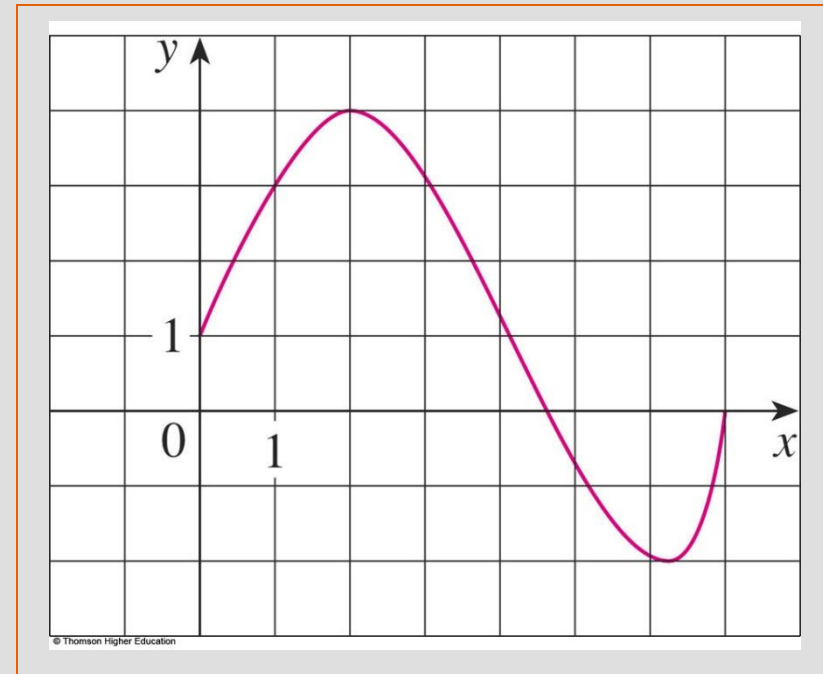


Đồ thị

Ví dụ 1

Cho đồ thị của f .

- Tìm giá trị của $f(1)$ và $f(5)$.
- Khoảng giá trị của f ?



Đồ thị

Ví dụ 2

Vẽ và tìm miền xác định của hàm số.

a. $f(x) = 2x - 1$

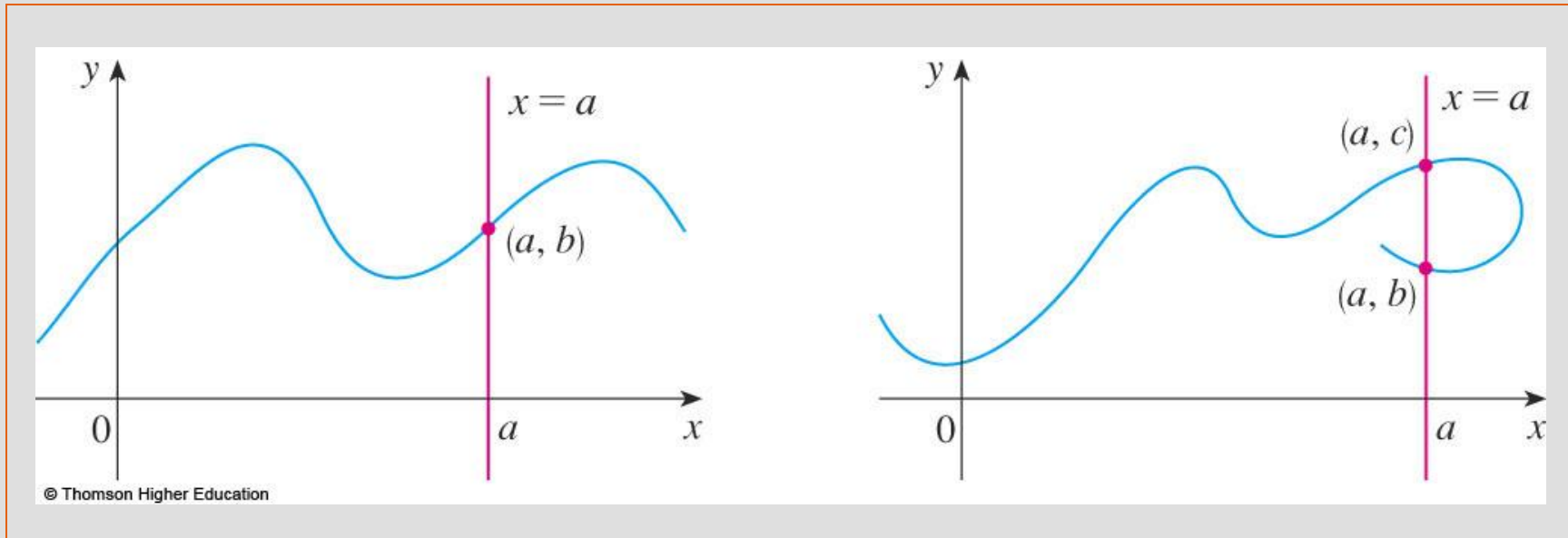
b. $g(x) = x^2$

Kiểm tra hàm số bằng đường thẳng đứng

Một đường cong trong mặt phẳng xy là một đồ thị của hàm số của x khi và chỉ khi không có đường thẳng đứng nào cắt đường cong này tại nhiều hơn một lần.

Kiểm tra hàm số bằng đường thẳng đứng

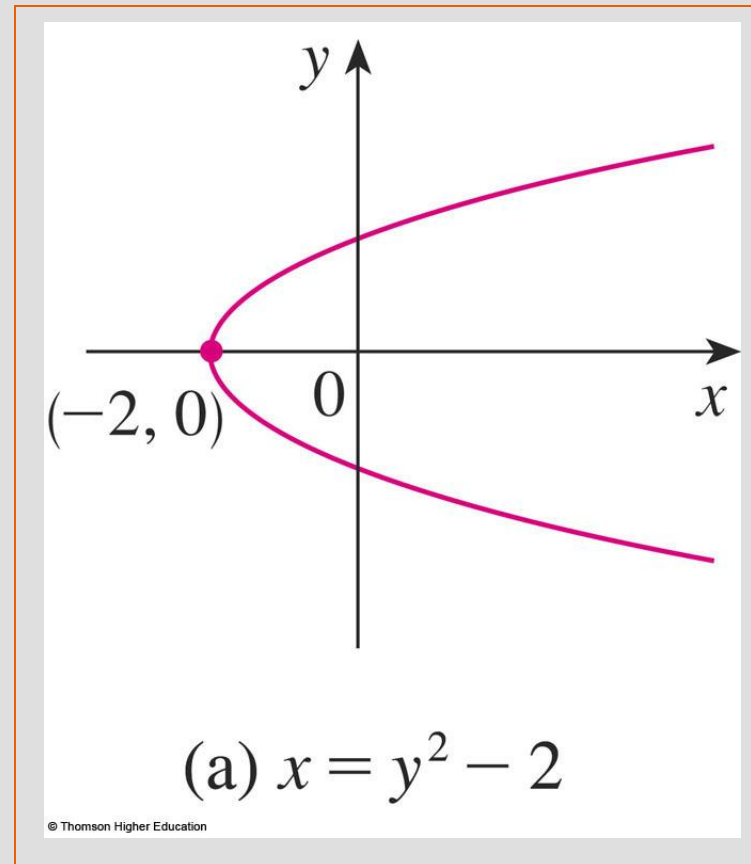
Ví dụ 1.



Định nghĩa: Một hàm số f là một quy luật gán cho mỗi phần tử x trong một tập D duy nhất một phần tử, gọi là $f(x)$, trong một tập E

Kiểm tra hàm số bằng đường thẳng đứng

Ví dụ 2, cho đường parabol $x = y^2 - 2$. Chứng minh rằng đường dưới đây không là đồ thị của hàm số của x .



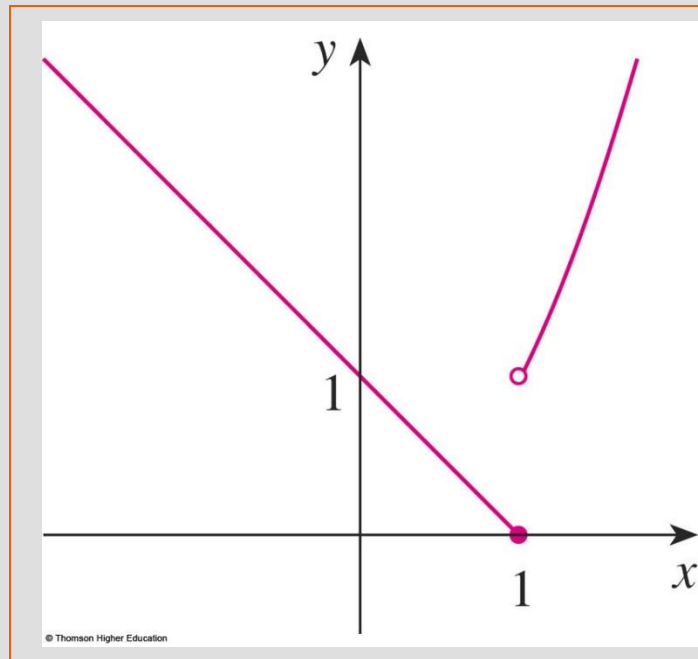
Hàm định nghĩa bằng các hàm con

Một hàm f được định nghĩa bởi:

$$f(x) \begin{cases} 1 - x & \text{if } x \leq 1 \\ x^2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

Tính $f(0)$, $f(1)$, và $f(2)$ và vẽ đồ thị.

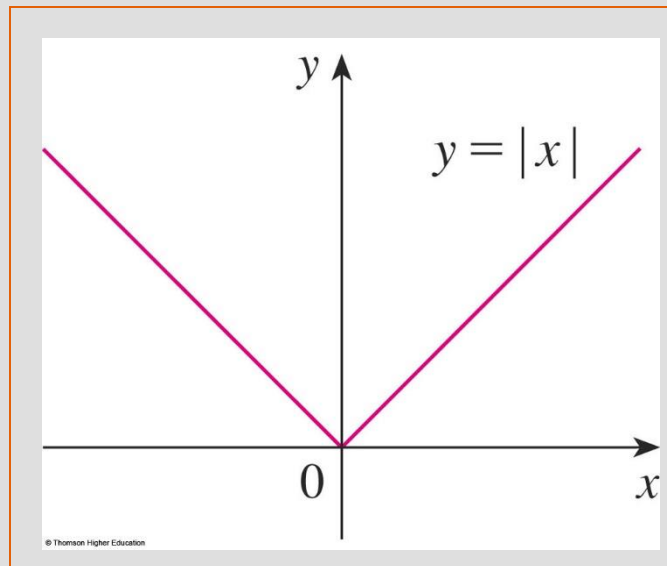
Hàm định nghĩa bằng các hàm con



Hàm định nghĩa bằng các hàm con

Vẽ đồ thị của hàm số $f(x) = |x|$.

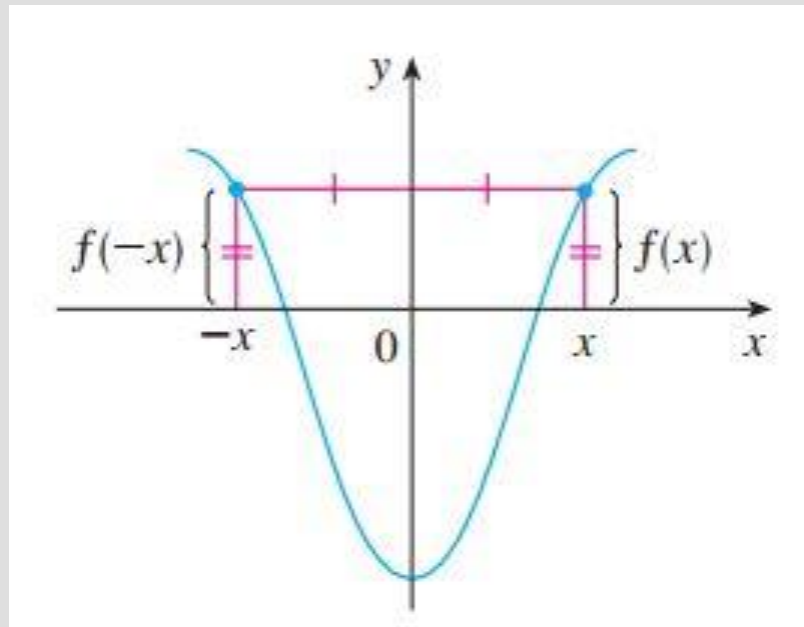
– Ta có: $|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$



Hàm đối xứng: hàm chẵn (even function)

Một hàm số thỏa mãn $f(-x) = f(x)$ với mọi x trong miền xác định, thì f gọi là hàm chẵn.

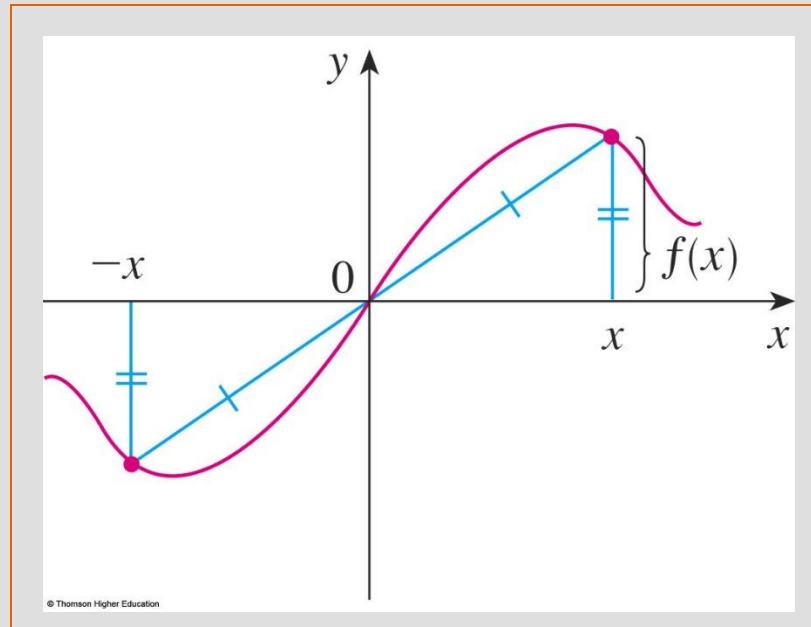
- Ví dụ, hàm $f(x) = x^2$ là hàm chẵn do $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$



Hàm đối xứng: hàm lẻ (odd function)

Nếu f thỏa mãn $f(-x) = -f(x)$ với mọi x trong miền xác định, thì f được gọi là hàm lẻ.

- Ví dụ, hàm $f(x) = x^3$ là hàm lẻ do $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$



Hàm đối xứng

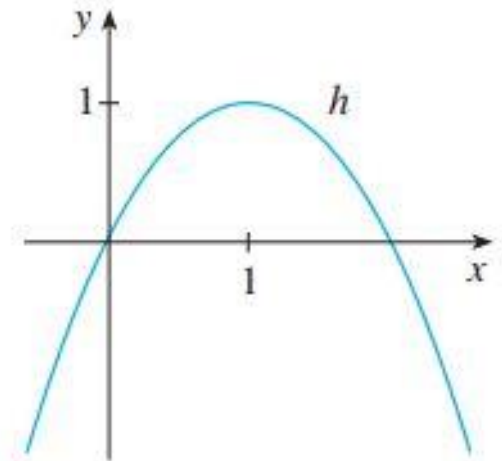
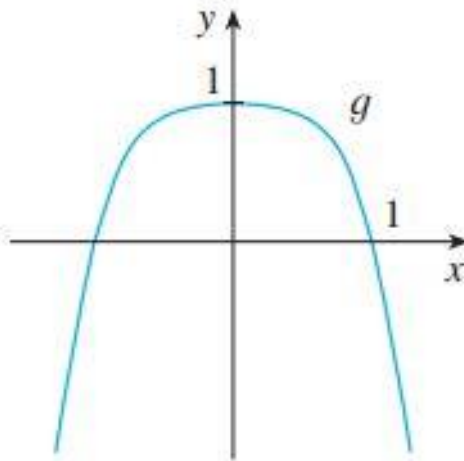
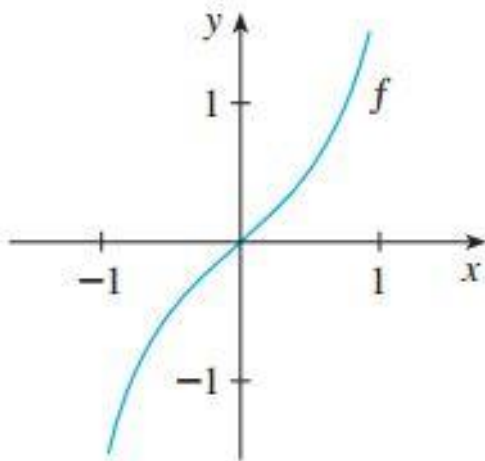
Ví dụ

Xác định sự chẵn lẻ của các hàm sau.

a. $f(x) = x^5 + x$

b. $g(x) = 1 - x^4$

c. $h(x) = 2x - x^2$



Hàm tuyến tính (Linear function)

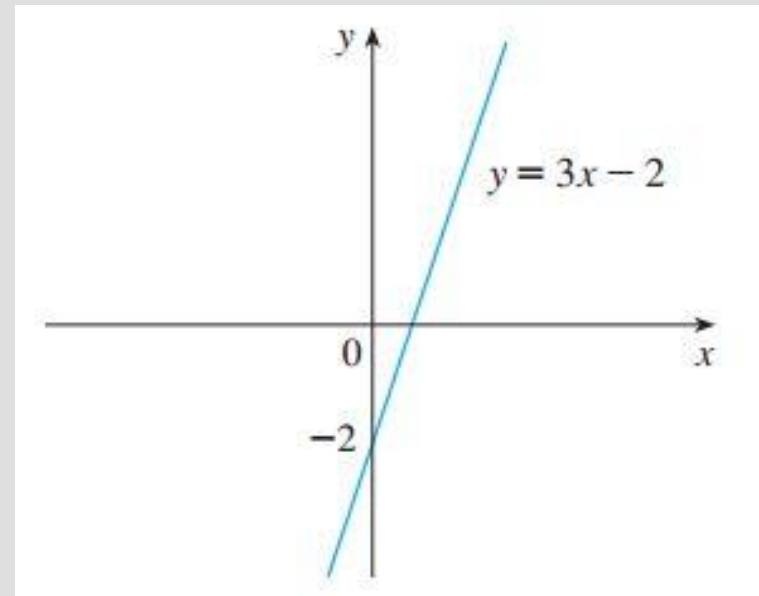
Hàm tuyến tính được biểu diễn ở dạng

$$y = f(x) = mx + b$$

với m gọi là độ dốc (slope), b gọi là chặn

Ví dụ: $y = 3x - 2$

Ví dụ: Lượng khí thải CO₂ toàn cầu
từ năm 1980 tới 2010



Đa thức (Polynomial)

Một hàm P được gọi là đa thức nếu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ở đây n là số nguyên không âm và các số $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ là hằng số gọi là các hệ số của đa thức. n là bậc của đa thức

Ví dụ:

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

Là đa thức bậc 6

Hàm lũy thừa (Power function)

Cho hàm số có dạng $f(x) = x^a$, ở đây a là hằng số, gọi là hàm lũy thừa.

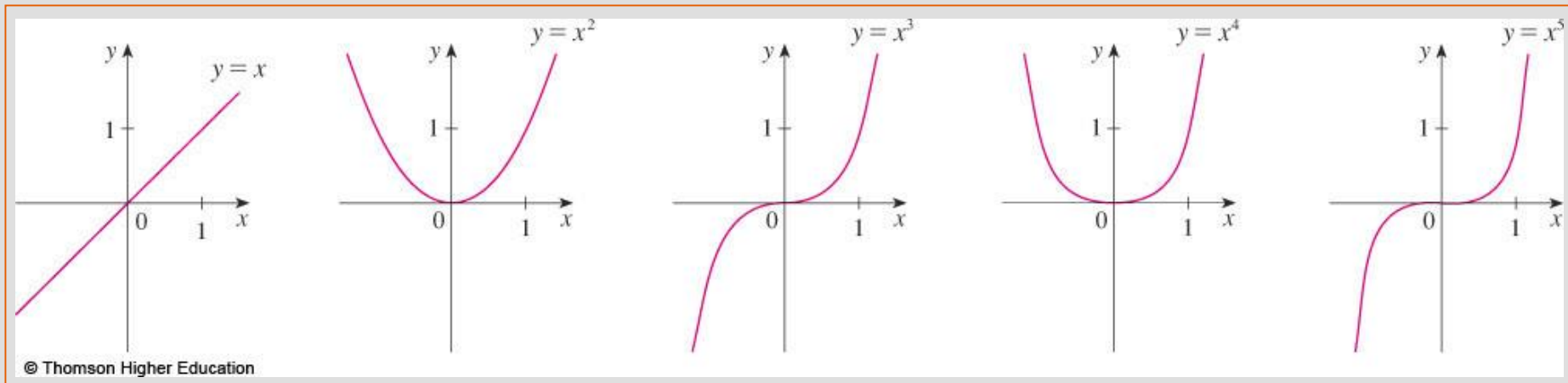
Ví dụ:

$$f(x) = x^{2/3}, \quad f(x) = x^3$$

Ví dụ 1

$a = n$, ở đây n là số nguyên dương

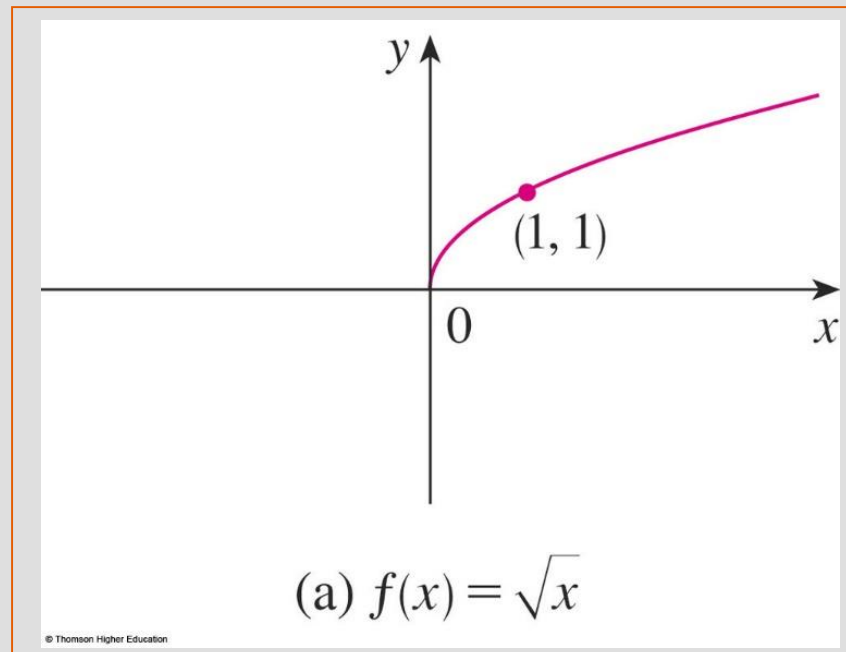
- Đồ thị của $f(x) = x^n$ với $n = 1, 2, 3, 4$, và 5 như dưới đây.
- Đây là các đa thức có 1 số hạng.



Ví dụ 2, trường hợp 1

$a = 1/n$, ở đây n chẵn

- Khi $n = 2$, nó là hàm căn $f(x) = \sqrt{x}$ miền xác định là $[0, \infty)$ và đồ thị là nửa parabol $x = y^2$.
- Đối với các giá trị chẵn của n đồ thị tương tự $y = \sqrt[n]{x}$

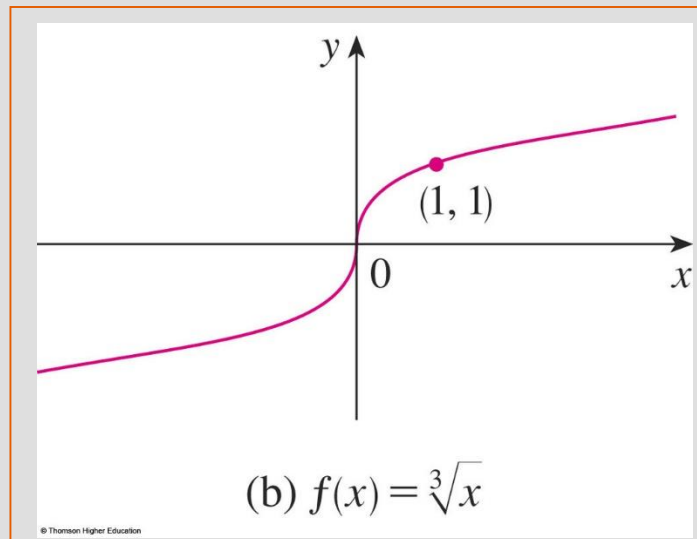


Ví dụ 2, trường hợp 2

Khi $n = 3$, ta có hàm căn bậc 3 $f(x) = \sqrt[3]{x}$

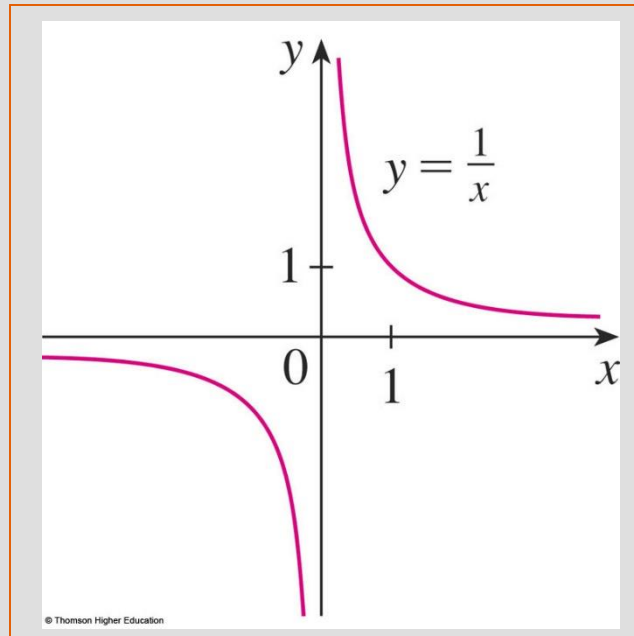
Miền xác định là \mathbf{R} .

- Đồ thị của $y = \sqrt[n]{x}$ với n lẻ ($n > 3$) tương tự như đồ thị của $y = \sqrt[3]{x}$.



Ví dụ 2, trường hợp 3

$$a = -1$$



Hàm hữu tỷ (Rational function)

Một hàm hữu tỷ f là một tỷ số của 2 hàm đa thức

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

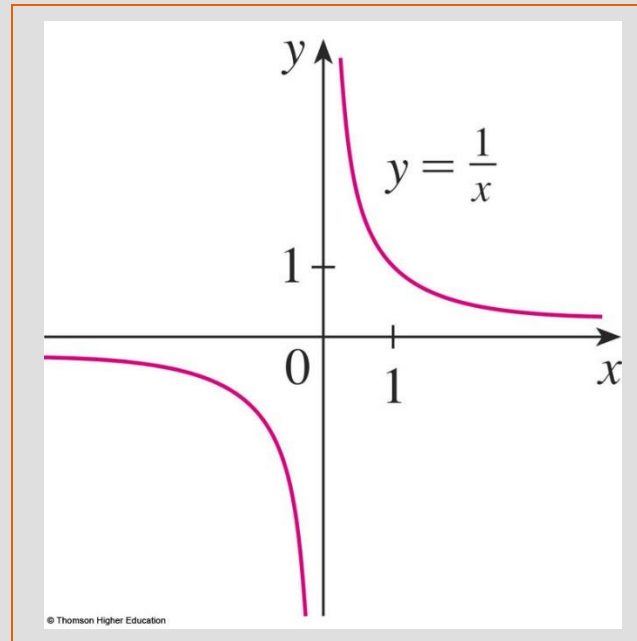
P và Q là các đa thức.

– Miền xác định là mọi x thỏa mãn.

$$Q(x) \neq 0$$

Ví dụ

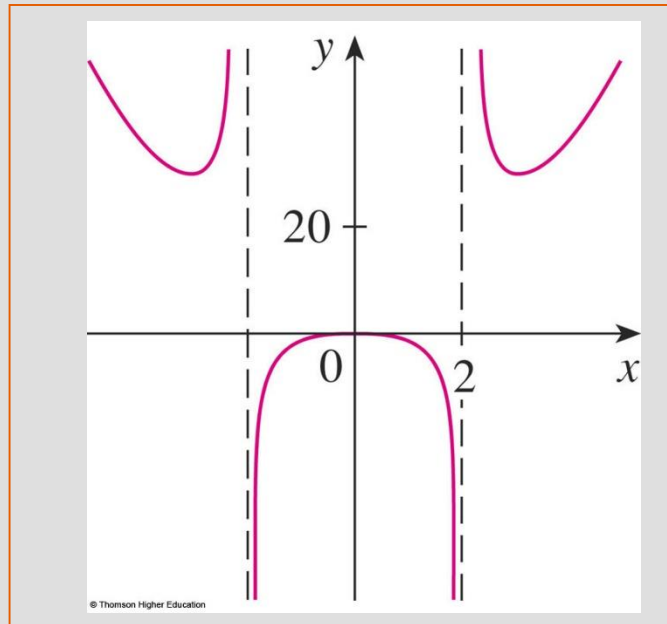
$f(x) = 1/x$, miền xác định $\{x \mid x \neq 0\}$



Ví dụ

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

Miền xác định $\{x \mid x \neq \pm 2\}$

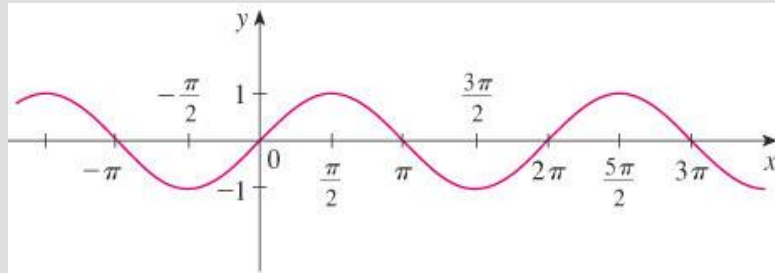


Hàm lượng giác (Trigonometric function)

– Ví dụ

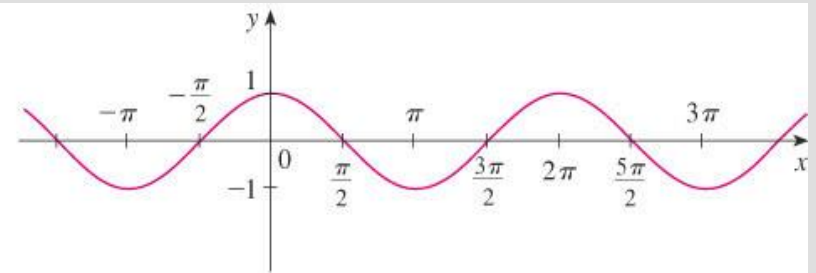
$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$|\sin x| \leq 1 \quad |\cos x| \leq 1$$



(a) $f(x) = \sin x$

© Thomson Higher Education



(b) $g(x) = \cos x$

Hàm lượng giác (Trigonometric function)

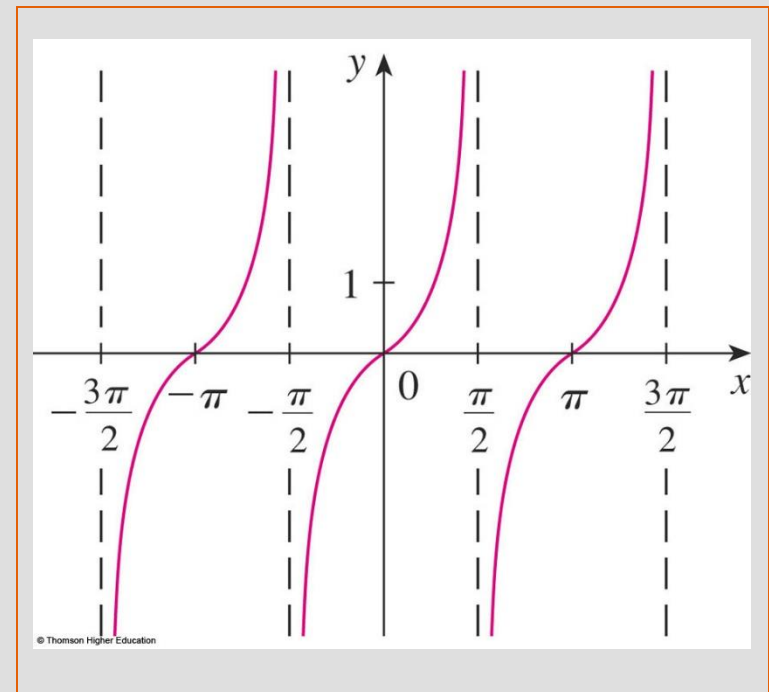
Ví dụ

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Các hàm tan không xác định tại $\cos x = 0$, tức là,

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Khoảng giá trị **\mathbf{R}**

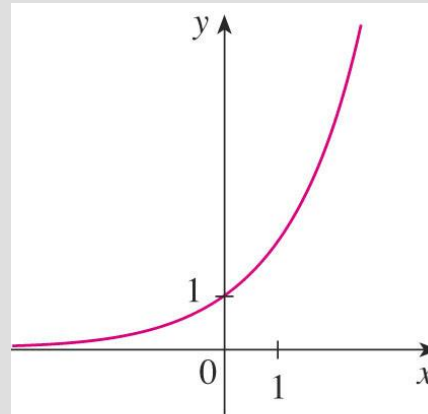


Hàm mũ (Exponential function)

Hàm mũ có dạng $f(x) = a^x$

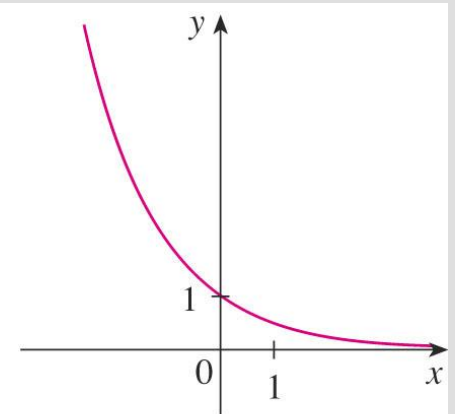
ở đây cơ sở là a là một số dương.

- Đồ thị của $y = 2^x$ và $y = (0.5)^x$ cho dưới đây.
- Cả hai trường hợp, miền xác định là $(-\infty, \infty)$ và khoảng giá trị là $(0, \infty)$



(a) $y = 2^x$

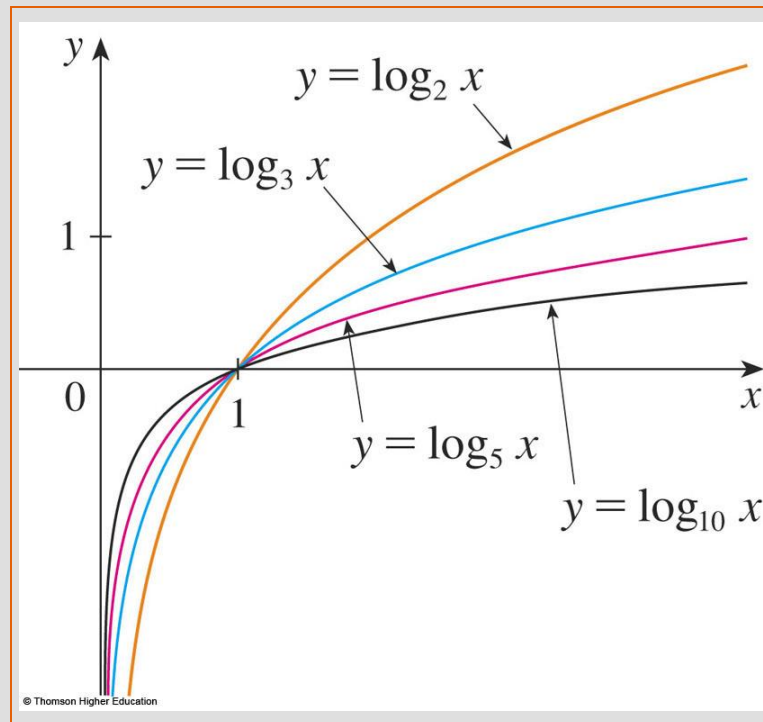
© Thomson Higher Education



(b) $y = (0.5)^x$

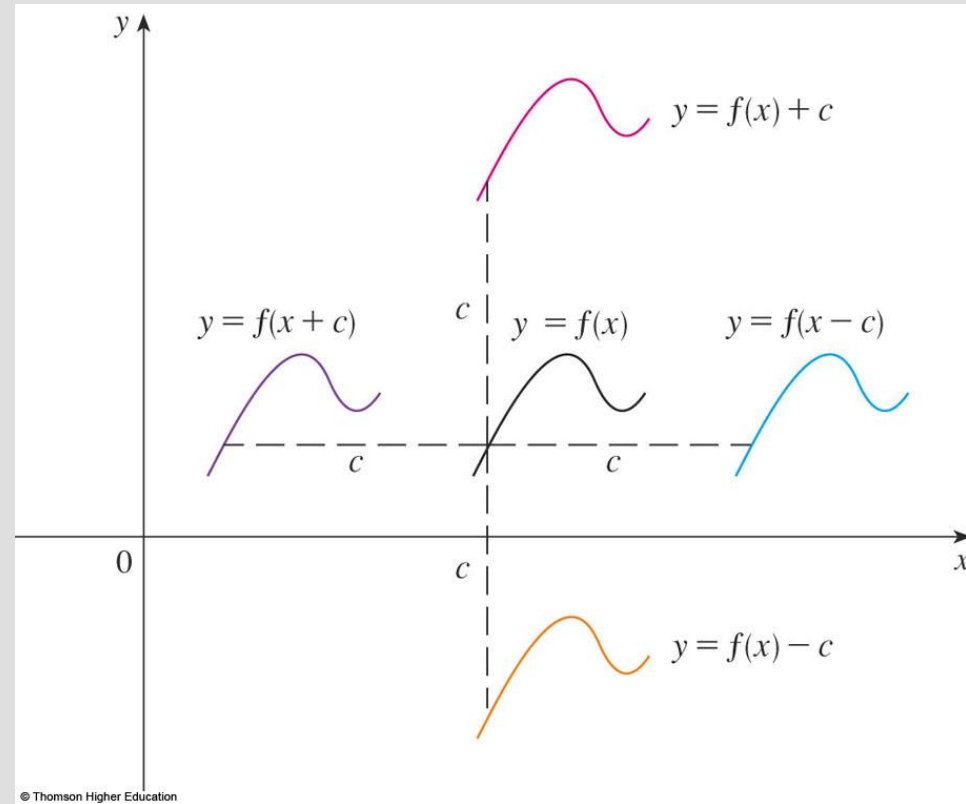
Hàm logarit (Logarithmic function)

Hàm logarit có dạng $f(x) = \log_a x$,
 a là số dương.



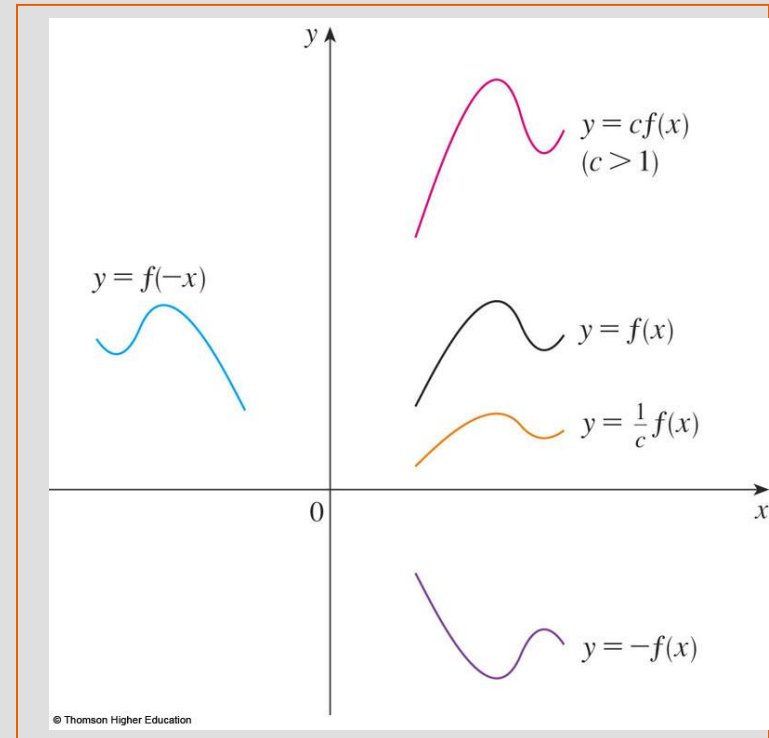
Vẽ đồ thị của hàm số từ một hàm đã biết

- Nếu c là số dương, thì đồ thị của $y = f(x) + c$ là đồ thị của $y = f(x)$ di chuyển lên trên một khoảng là c .
- Nếu $g(x) = f(x-c)$, với $c > 0$, thì giá trị của g tại x bằng với giá trị của f tại $x-c$ (1 khoảng c trước x). Vậy đồ thị của $y = f(x-c)$ là đồ thị của $y = f(x)$ chuyển sang phải một khoảng là c .



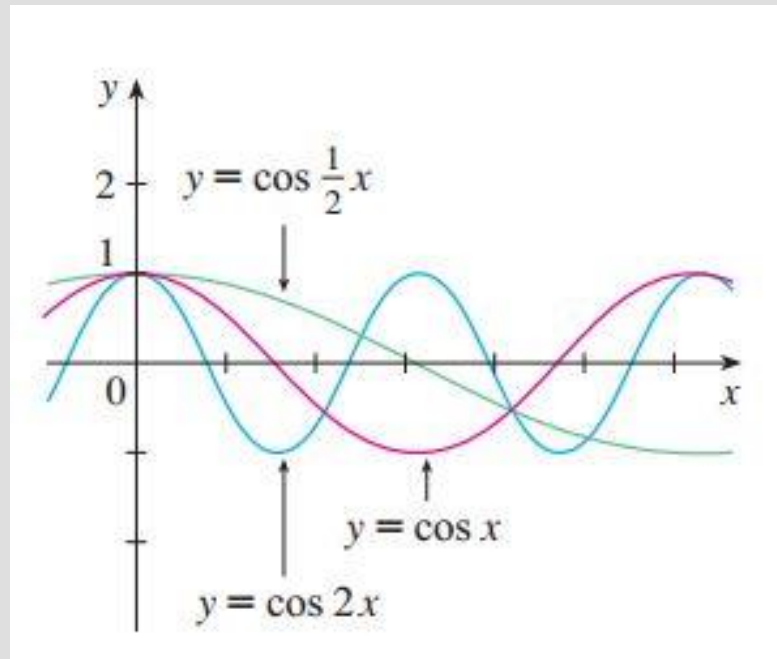
Kéo dãn và đối xứng gương

- Nếu $c > 1$, thì đồ thị $y = cf(x)$ là đồ thị của $y = f(x)$ được kéo dãn một đại lượng c theo phương thẳng đứng.
- Đồ thị của $y = -f(x)$ là đồ thị của $y = f(x)$ đối xứng qua trục x
- Đồ thị của $y = f(-x)$, là đồ thị của $y = f(x)$ đối xứng qua y .

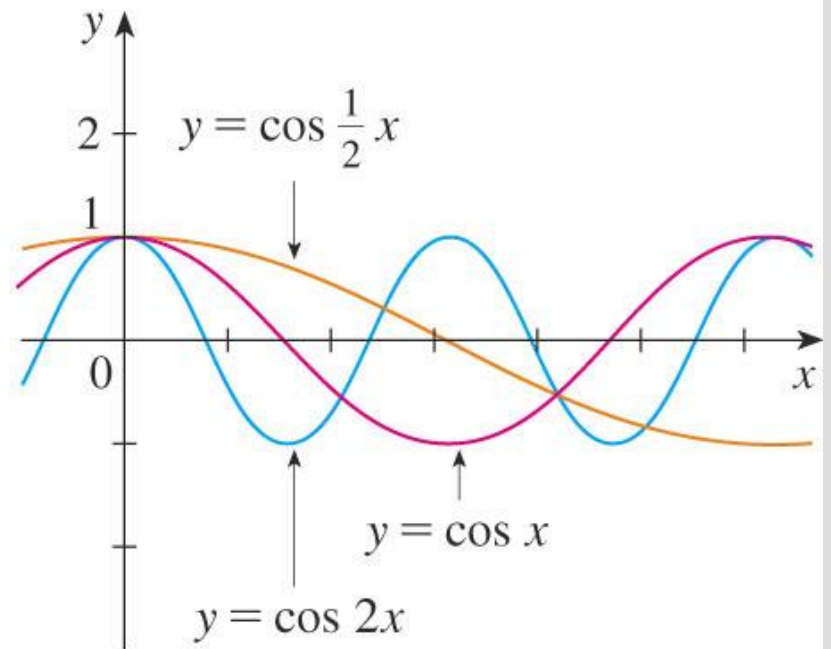
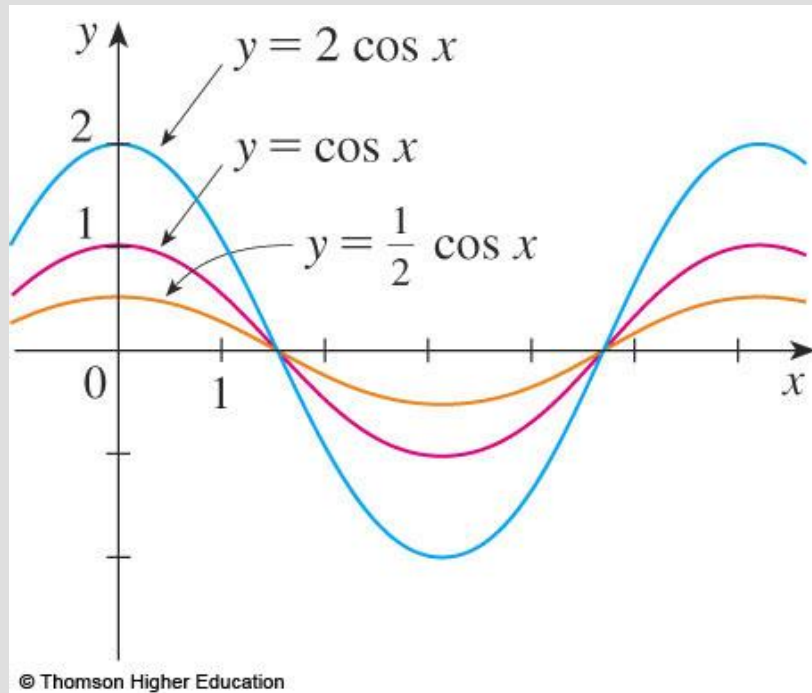


Kéo và nén đồ thị theo phương ngang

- Đồ thị $y = f(cx)$, là đồ thị của $y = f(x)$ bị nén theo phương ngang một đại lượng là c .
- Đồ thị $y = f(x/c)$, là đồ thị của $y = f(x)$ được kéo dãn theo phương ngang một đại lượng c .



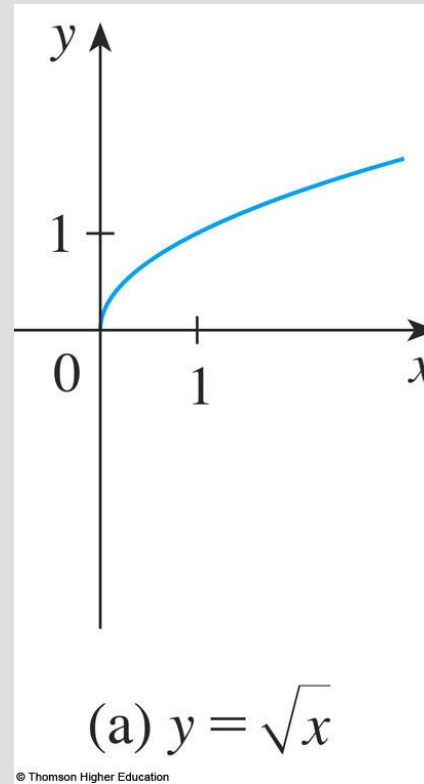
Ví dụ



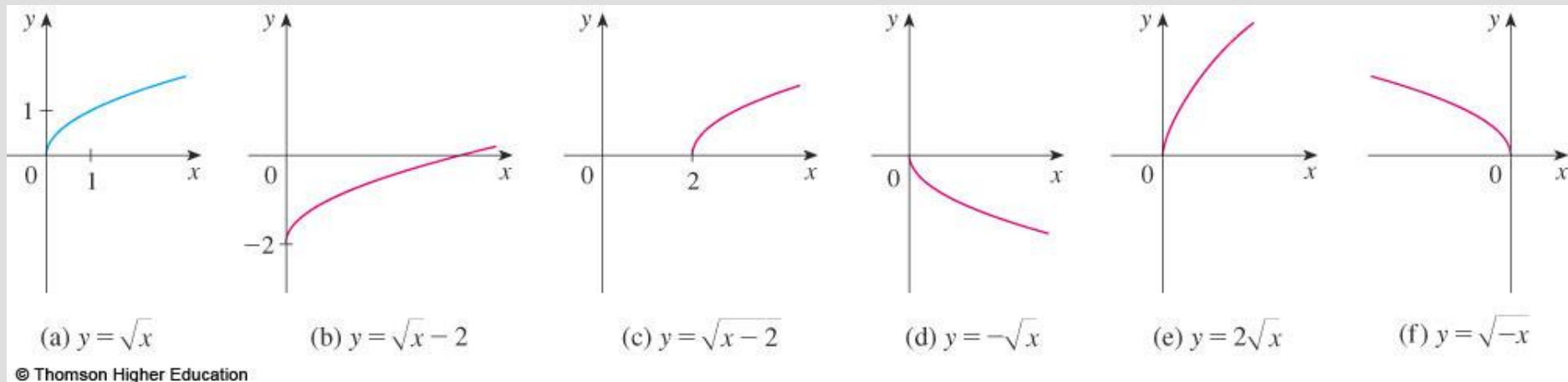
Ví dụ

- Cho đồ thị của $y = \sqrt{x}$ như hình vẽ. Hãy vẽ các đồ thị sau :

- a. $y = \sqrt{x} - 2$
- b. $y = \sqrt{x - 2}$
- c. $y = -\sqrt{x}$
- d. $y = 2\sqrt{x}$
- e. $y = \sqrt{-x}$



Ví dụ

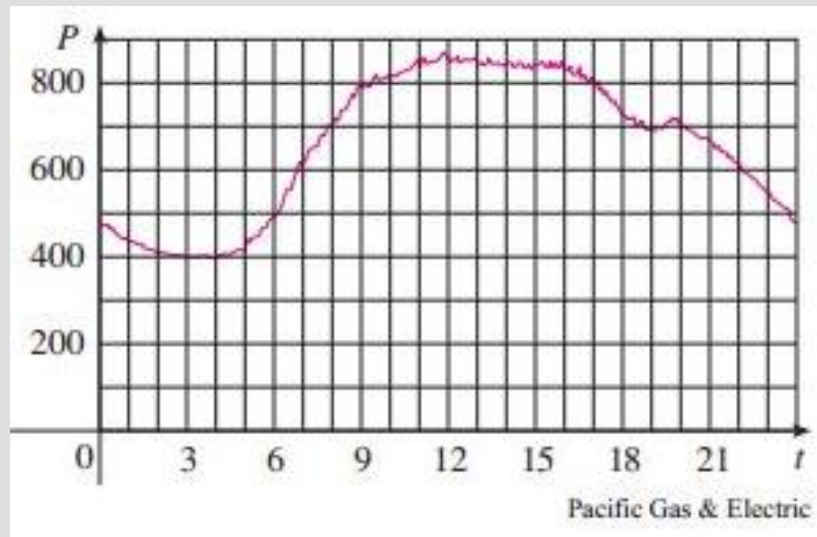


Bài tập

1. Mức tiêu thụ năng lượng trong một ngày tháng 9 của thành phố San Francisco (đơn vị P là megawatts, t là giờ) được cho ở hình vẽ.

a) Tìm mức năng lượng tiêu thụ vào thời điểm 6 AM và 6 PM?

b) Thời điểm nào có mức năng lượng tiêu thụ cao nhất và thấp nhất? Kiểm tra tính hợp lý?



2. Kiểm tra tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

$$f(x) = x|x|$$

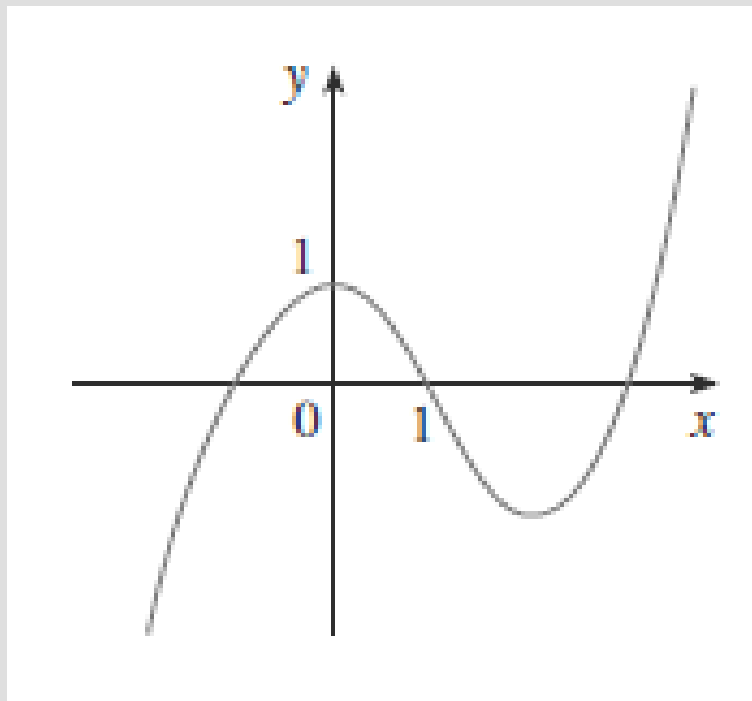
$$f(x) = 1 + 3x^2 - x^5$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^6 + 1}$$

Bài tập

3. Vẽ đồ thị của $y = |x^2 - 1|$ từ đồ thị $y = x^2$.

4*. Vẽ đồ thị của $y = 1/f(x)$ từ đồ thị $y = f(x)$ dưới đây.



Áp dụng: vẽ đồ thị của $y = 1/(x^2 + 1)$ từ đồ thị $y = x^2$.

Nội dung chính đã học

- 4 cách biểu diễn hàm số
- Khái niệm, định nghĩa hàm số
- Miền xác định, khoảng giá trị
- Hàm chẵn, hàm lẻ: tính đối xứng
- Những hàm số cơ bản và **ứng dụng trong thực tế**
- Vẽ đồ thị của hàm số từ một hàm đã biết

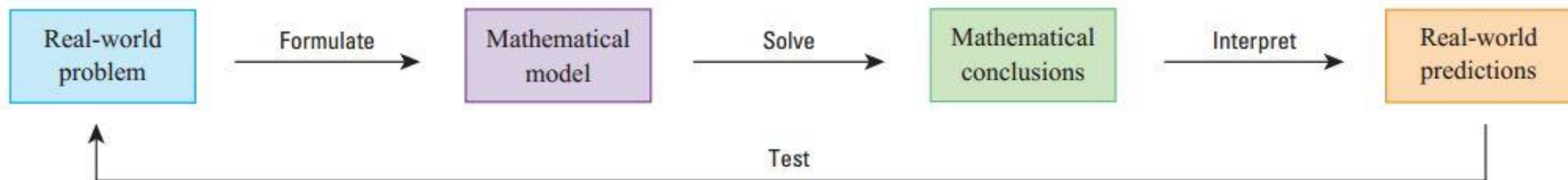


FIGURE 1 The modeling process