Семестровый проект по курсу
"Введение в численные методы"

студента 215 группы факультета Вычислительной
математики и кибернетики МГУ им. Ломоносова
Яфизова Руслана

г. Москва
2024г.

1 Постановка задачи

С помощью метода правых прямоугольников вычислить значение интеграла:

$$\int_{-1}^{1} Q(x) P_i(x)\, dx \tag{1}$$

для различных функций $P_i(x)$:

1. $P_1(x) = 1$,
2. $P_2(x) = U_6(x)$, где $U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), U_1(x) = 2x, U_0(x) = 1$.

Использовать $n = 11, 21, 41, 81, 161$ узел. Сравнить ошибки интегрирования для обоих случаев.

Возможные иные численные методы решения этой задачи:

- Метод трапеций
- Метод Симпсона (или метод парабол)
- Квадратурная формула Гаусса (метод Гаусса - Лежандра)

Эти методы описаны в книгах Каханера Д., Моулера К., Нэша С. «Численные методы и программное обеспечение»; Костомарова Д.П., Фаворского А.П. «Вводные лекции по численным методам».

Численное интегрирование имеет широкий класс практических применений:

- В IT интегралы используются в обработке сигналов (цифровая фильтрация, преобразование Фурье) и машинном обучении (например, численное интегрирование для оценки сложных вероятностных распределений)
- В финансах их используют при расчёте стоимости производных финансовых инструментов с использованием стохастических процессов.
- В физике интегралы применяются для расчёта работы переменных сил, тепловых процессов, для вычисления энергии в переменных электрических и магнитных полях.

2 Описание численных методов

В работе в качестве основного метода используется метод правых прямоугольников. В качестве усовершенствованного используется метод Гаусса. Рассмотрим функцию $f(x)$, определённую на $[a, b]$. Необходимо приблизительно вычислить значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

2.1 Метод правых прямоугольников

Этот метод основан на разбиении отрезка интегрирования $[a, b]$ на n равных частей и замене площади под графиком функции $f(x)$ площадью прямоугольников. Мы разбиваем $[a, b]$ на n равных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$: $x_i = a+h*i$, $i = 1, 2, ..., n$; $h = (b-a)/n$ - диаметр разбиения.
Тогда $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\,dx = h * \sum_{i=1}^n f(x_i)$.

Оценим погрешность данного метода. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Погрешность на отрезке $[x_{i1}, x_i]$:

$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - f(x_i) * h = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(x_i)\ dx.$

По теореме Лагранжа: $R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \dfrac{df(\sigma_i)}{dx}\ \delta x = \dfrac{df(\sigma_i)}{dx} \dfrac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2}$.
Так как $\dfrac{df(x)}{dx}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена: $|\dfrac{df(x)}{dx}| \leq C \Rightarrow |R_i| \leq \dfrac{Ch^2}{2}$. Значит, переходя ко всему отрезку, получим: $|R| = |\sum_{i=1}^n R_i| \leq \dfrac{Ch^2 n}{2} = O(\dfrac{1}{n})$. Так, погрешность метода правых прямоугольников составляет $O(\dfrac{1}{n})$

2.2 Метод Гаусса - Лежандра

Данный метод применяется для интегралов с пределами интегрирования $-1, 1$. К таким пределам можно прийти через линейные преобразования. Метод Гаусса заключается в намеренном подборе n узлов x_i и n весов c_i так, чтобы $\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n c_i * f(x_i)$ (1) с точностью порядка $2n-1$ (что будет доказано ниже). Значения x_i при выборе n точек есть корни полинома Лежандра $P_n(x)$ степени n. Значения весов вычисляются следующим образом:
$c_i = \int_{-1}^1 \dfrac{(x - x_1)..(x - x_{m-1})(x - x_{m+1})..(x - x_n)}{(x_m - x_1)..(x_m - x_{m-1})(x_m - x_{m+1})..(x_m - x_n)}\ dx.$

Докажем оценку порядка точности метода. Сначала докажем, что формула (1) является точной для любого полинома $Q_{n-1}(x)$ степени $(n-1)$. Такой полином можно представить в виде суммы специальных полиномов $Q_{n-1,m}(x)$: $Q_{n-1}(x) = \sum_{m=1}^n Q_{n-1}(x_m) Q_{n-1,m}(x)$, где

$$Q_{n-1,m} = \frac{(x-x_1)..(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})..(x-x_n)}{(x_m-x_1)..(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})..(x_m-x_n)}.$$

Справедливость такого разложения следует из того, что левая и правая части совпадают в n точках $x_i, 1 \leq i \leq n$. Но если два полинома $(n-1)$-й степени совпадают в n точках, то они тождественно равны. Интегрируя $Q_{n-1}(x)$ по отрезку $[-1,1]$, получим:
$\int_{-1}^{1} Q_{n-1}(x)\ dx = \sum_{m=1}^{n} Q_{n-1}(x_m) \int_{-1}^{1} Q_{n-1,m}(x)\ dx = \sum_{m=1}^{n} c_m Q_{n-1}(x_m)$.
Получили, что формула точна для полиномов степени $(n-1)$ степени.

Теперь рассмотрим произвольный полином $Q_{2n-1}(x)$ степени $(2n-1)$. Разделим его с остатком на полином Лежандра $P_n(x)$ и представим в виде $Q_{2n-1}(x) = P_n(x)q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x)$, где $q_{n-1}(x)$ и $r_{n-1}(x)$ – полиномы степени $(n-1)$. Проинтегрировав $Q_{2n-1}(x)$ по отрезку $[-1,1]$, будем иметь $\int_{-1}^{1} Q_{2n-1}(x)\ dx = \int_{-1}^{1}(P_n(x)q_{n-1}(x) + r_{n-1}(x))\ dx = 0 + \int_{-1}^{1} r_{n-1}\ dx$, поскольку полином Лежандра $P_n(x)$ ортогонален любому полиному $(n-1)$-й степени. Соответственно

$\int_{-1}^{1} Q_{2n-1}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} r_{n-1}(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i r_{n-1}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i(P_n(x_i)q_{n-1}(x_i) + r_{n-1}(x_i))$.

Так можно сделать, поскольку $P_n(x_i) = 0$ в силу выбора узлов x_i как корней полинома Лежандра n-й степени. Таким образом, получим
$\int_{-1}^{1} Q_{2n-1}(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(P_n(x_i)q_{n-1}(x_i) + r_{n-1}(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} c_i Q_{2n-1}(x_i)$.
Значит, метод Гаусса имеет порядок точности $(2n-1)$. Что и требовалось доказать.

В проекте будет применён метод Гаусса для $n = 3$. Необходимости в линейных преобразованиях пределов интегрирования нет, так как они изначально равны -1 и 1. Точность для 3 узлов имеет порядок 5. Узлы и веса имеют следующие значения: $x_{1,3} = \pm\sqrt{0.6}, x_2 = 0$. $c_{1,3} = \dfrac{5}{9}, c_2 = \dfrac{8}{9}$.

3 Результаты

Для начала узнаем вид $Q(x)$ и $P_2(x)$: По формуле Лейбница для 9-й производной: $Q(x) = 9! \sum_{k=0}^{9} (C_9^k)^2 (x+1)^k (x-1)^{9-k}$. Также $P_2(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$.

Теперь найдём значения I_1, I_2 :

1. $Q(x) * P_1(x) = Q(x)$ - нечётная функция (у $Q(-x)$ выносим минус за скобку и получим $-Q(x)$)

2. $Q(x) * P_2(x)$ - тоже нечётная функция (у $P_2(x)$ все x в нечётной степени)

Т.к. пределы интегрирования $-1, 1$ — симметричны относительно 0, то $I_1 = I_2 = 0$. Следовательно, для ошибки измерения интеграла справедливо следующее: $\phi_i(h) = I_i - I_i(h) = -I_i(h)$, $i = 1, 2$.

Число узлов	Метод правых прямоугольников	$\phi_1(h)$	Метод Гаусса
11	37158911.99999954	1.000000000000037	-1.043081283569336e-07
21	18579455.999999292	0.9999999999998114	-1.043081283569336e-07
41	9289728.00000086	0.9999999999999728	-1.043081283569336e-07
81	4644864.000000518	1.0000000000012614	-1.043081283569336e-07
161	2322431.999998228	1.0000000000008291	-1.043081283569336e-07

Таблица 1: Результаты вычислений I_1

Число узлов	Метод правых прямоугольников	$\phi_2(h)$	Метод Гаусса
11	260112383.99999288	1.0000000000000109	1.564621925354004e-07
21	130056191.99999547	0.9999999999997952	1.564621925354004e-07
41	65028096.00000697	0.9999999999999656	1.564621925354004e-07
81	32514048.000004258	1.0000000000013476	1.564621925354004e-07
161	16257023.999986941	1.0000000000008136	1.564621925354004e-07

Таблица 2: Результаты вычислений I_2

4 Анализ применимости методов

4.1 Метод правых прямоугольников

Метод правых прямоугольников даёт огромную ошибку для обоих интегралов I_1 и I_2. Каждый раз число отрезков $(n-1)$, на которых применяется метод правых прямоугольников, удваивается. В силу $I_1 = I_2 = 0$ получим, что $I_i(h) = 2 * I_i(\frac{h}{2})$, из-за чего $\phi_i(h) = 1$ $(i = 1, 2)$ (**теоретически**). Для результатов в обеих Таблицах это справедливо (с точностью до ошибки в хранении вещественных чисел в ЭВМ). Из результатов следует, что метод правых прямоугольников крайне неточен и для многочлена большого порядка даёт сильную погрешность.

4.2 Метод Гаусса-Лежандра

В сравнении с методом правых прямоугольников, метод Гаусса - Лежандра, в силу симметричности относительно нуля корней полинома Лежандра и нечётности полиномов, сразу же выдаёт результат очень близкий к 0. Он не равен в точности нулю, но это всё равно замечательно, учитывая, что для 3 узлов порядок точности равен 5, когда же вычисления производятся для полиномов 9 и 15 степеней. Для метода Гаусса - Лежандра не вычисляется порядок сходимости, так как используется только одно значение на количестве узлов $n = 3$. Метод дал очень хороший и быстрый результат по сравнению с методом правых прямоугольников.

5 Заключение и выводы

Сравнивая результаты исследований и вычислений, можно прийти к выводу, что метод правых прямоугольников - довольно простой в реализации, нетребовательный к высоким порядкам гладкости функции, но малоэффективный и неточный вариант численного интегрирования. Метод Гаусса-Лежандра, в свою очередь, - мощный и высокоточный инструмент, но он требует подготовки в виде вычисления корней полинома Лежандра и весов, линейных преобразований пределов интегрирования в $-1, 1$. Тем не менее, он оказывается намного лучше метода правых прямоугольников даже при малом количестве просчитанных весов и узлов.